Ampliamento di uno pseudoanello non unitario in uno pseudoanello unitario

Nota di Franco Eugeni, presidente AFSU

Sia (A,+, ·) un struttura algebrica con (A,+) gruppo abeliano denotato additivamente ed (A, ·) una struttura algebrica moltiplicativa, dove l'operazione (·) non è necessariamente associativa e non è unitaria. Chiameremo una siffatta struttura[1] PSEUDO-ANELLO, ricordando che diviene un anello *non appena vale la proprietà associativa* della operazione (·) detta "moltiplicazione". Siano inoltre valide le proprietà distributive della moltiplicazione (·) rispetto all'addizione (+).

Seguendo la via classica per questo tipo di ampliamento, definiamo un nuovo insieme denotato con Z⊕A, i cui elementi che sono dati come somma formale di un intero relativo $z \in$Z, con un elemento di $a \in$A, ovvero un insieme di elementi del tipo:

$$z + a \qquad\qquad \forall\, z \in \mathrm{Z},\ \ \forall\, a \in A.$$

Sarebbe forse didatticamente corretto indicare tale somma formale come coppia (z,a) e proseguire con questo simbolismo, oppure denotare gli elementi di A in grassetto così da indicare la somma formale come z+**a**, o ancora indicare gli elementi di A con delle lettere greche. Lasciamo queste indicazioni a chi volesse far uso didattico di questa nota.

Porremo se $\forall\, n \in$Z, n $\geq$0, $\forall\, a \in A$:

$$(\pm n)\, a := (\pm a) + (\pm a) + \ldots + (\pm a),\ (\text{n addendi})$$

Definiamo in Z⊕A, ∀ n, m ∈Z, $\forall\, a, b \in A,$ due operazioni come segue:

(n + a) + (m+b) := (n+m) +(a+b)

(n + a) · (m+b): = nm + nb +ma + a·b.

---

[1] Si noti che tale nome pseudo-anello non appae nelle usuali classificazioni di strutture algebriche, anche se molte algebre reali o complesse a partire dagli ottetti di Cayley (vedi MATEMATICA/Ampliamenti numerici in questo sito), prive di proprietà associativa moltiplicativa sono pseudo-anelli aggregati ad uno spazio vettoriale.

Si noti che questo procedimento non si può estendere in generale ad altre strutture diverse da Z, poiché non risulterebbe definita l'operazione

$$z\,a\,,\ \ \forall\, z \in \mathrm{Z},\ \ \forall\, a \in A$$

naturalmente ciò è possibile se si particolarizza l'anello A in un'algebra su un campo K dove l'operazione k**u è definita** $\forall\, k \in K$, $\forall\, \boldsymbol{u} \in$A, in maniera del tutto analoga.

L' operazione (+) sopra definita è, associativa e commutativa, come è immediato verificare, inoltre l'elemento 0 := 0+0, (0 di Z , 0 di A) è l'elemento neutro di (Z⊕A, +) poiché

$$(n+a) + (0+0) = n+a\ ,\ \ (n+a)\cdot(1+0) = n + a$$

Così che (Z⊕A, +) è un gruppo abeliano.

Circa la struttura moltiplicativa si osservi che:

Proprietà 1. La struttura (Z⊕A, ·) è associativa se e solo se lo è (A, ·)

Dim. Calcolo ambo i membri delle pretesa proprietà associativa:

- Il primo membro è l'elemento $X = [(n+a)\cdot(m+b)]\cdot(k+c) =$ $=[nm+nb+ma+ab]\cdot(k+c) = nmk + k[nb+ma+ab] + (nm+nb+ma)c+$ $+(ab)c = [nmk + knb+kma +nmc] +[kab+nbc+mac] + (ab)c$;
- Il secondo membro è l'elemento $Y = (n+a)\cdot[(m+b)\cdot(k+c)] =$ $(n+a)\cdot[mk+mc+kb+bc] = [n\,(mk+mc+kb) +mka]+ nbc+a[mc+kb)]+$ $+a(bc) = [nmk+nmc+nkb+mka]+ [nbc+mac+kab)]+ a(bc)$.

Dunque X = Y se e solo se (ab)c = a(bc). #

Proprietà 2. La struttura (Z⊕A, ·) è commutativa se e solo se lo è (A, ·)

Dim. E' una banale verifica.

Proprietà 3. La struttura (Z⊕A, ·) possiede un elemento unitario tale essendo l'elemento 1 = 1+0 (1 di Z , 0 di A).

Dim. Si verifica banalmente che è, (n+a)(1+0) = (1+0) (n+a) = (n+a).

Sussiste il seguente :

Teorema. La struttura algebrica (Z⊕A, +,·) è una struttura unitaria (che si realizza con l'unità di Z, e non con quella di A che manca), inoltre è un anello se e solo se A è un anello (precisamente se (A, ·) è associativa) ed ancora è commutativa (che sia o no anello) se (A, ·)è commutativa.

Dim. Segue dalle **Prop. 1,2,3.**,

Dunque (Z⊕A, +,·) contiene la sottostruttura ({0}⊕A,+,) banalmente isomorfa alla data struttura (A, +, ·) data in partenza.

Dunque (Z⊕A, +, ·) è un ampliamento unitario di (A, +, ·).

Esempio 1 (banale) Sia nZ (n>1) l'anello non unitario dei multipli interi di n. L'ampliamento Z⊕nZ = Z∪ nZ = Z è unitario.

Esempio 2. (un anello di matrici)

Consideriamo **l'anello** (M**, +,** x**) delle matrici quadrate del tipo:**

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

essendo a, b elemnti di un qualsiasi campo K (in particolare reale o complesso). Si verifica facilmente, che è un anello, ma non è un anello unitario, in quanto presenta solo elementi unitari destri del tipo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix}.$$

Il nuovo anello che andiamo a costruire nasce sull'insieme Z⊕M ed è formato dalle somme formali del tipo:

$$n + \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

che ci introducono in un nuovo universo numerico tutto da scoprire.

Poniamoci infine il seguente **problema 1**: ***l'anello*** (Z⊕A, +,·) ***possiede divisori dello zero?***

1° caso. Se la struttura assegnata (A, +, ·) sia pure non associativa, non unitaria , non commutativa, non è integra e quindi esistono due elementi a,b $\in A\setminus\{0\}$, tali che ab=0, la stessa proprietà è goduta dagli elementi

$0+a,\ 0+b \in Z\oplus A$ per i quali $(0+a)\,(0+b) = (0+ab) = (0+0) = 0$.

2° caso. Se la struttura assegnata $(A, +, \cdot)$ sia pure non associativa, non unitaria , non commutativa, ma integra, possiede un elemento $a \in A\setminus\{0\}$ niilpotente, cioè tale che $a^2 = a$, allora in $Z\oplus A$ i due elementi: $0+a$ ed $1-a$, verificano la condizione: $(0+a)\,(1-a) = 0 + (a - a^2) = (0,0)$!

La ricerca generale basata su:

$(n + a) \cdot (m+b): = nm + nb + ma + a\cdot b = 0$

Fornisce la condizione necessaria $nm = 0$ e $nb + ma + a\cdot b = 0$, che supposto $m=0$ si riduce ad $nb + a\cdot b = 0$, ovvero se ci sono divisori dello zero questi sono della forma: $0+b$ ed $n+a$.

Poniamoci infine il seguente **problema 2**: caratterizzare il gruppo delle unità dell***'anello*** $(Z\oplus A, +,\cdot)$.

Poniamo infine il seguente **problema che risulta aperto.**

Ci si chiede : *se esista un anello* $(B, +, \cdot)$ *unitario* (o una struttura poco più generale), *che è contenuto in* $(Z\oplus A, +,\cdot)$ *e che contiene* $(A, +, \cdot)$, *a meno di isomorfismi, cioè con* $A \subset B \subset Z\oplus A$:

$$\begin{tikzcd}
(A, +,\cdot) \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& (B, +, \cdot) \arrow[dl] \\
(Z\oplus A, +, \cdot), &
\end{tikzcd}$$

Si può tentare con esempi.