Dalle antiche dispense del prof. Franco Eugeni
Corso di Laurea in Matematica
Insegnamento di Matematiche Complementari I
Università dell'Aquila – AA. 1969-1973

CAPITOLO II

L'ANELLO ORDINATO DEGLI INTERI RELATIVI

1 I NUMERI INTERI

Sia N_0 l'insieme dei numeri naturali, zero compreso. Nel prodotto cartesiano $N_0 \times N_0$, ovvero nell'insieme delle coppie ordinate ***(a,b)*** $\in N_0 \times N_0$, introduciamo la relazione **~** definita ponendo: :

$$\textbf{(1)} \qquad (a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c \qquad \forall\ a, b, c \in N_0$$

Teorema 1
La relazione " ~ " è una relazione di equivalenza in $N_0 \times N_0$.

Dimostrazione
Le ***proprietà riflessiva*** e ***simmetrica*** sono ovvie.
Per dimostrare la ***proprietà transitiva*** si osservi che
se $(a, b) \sim (c, d)$ e se $(c, d) \sim (h, k)$ poiché risulta

$$a + d = b + c \quad ; \quad c + k = d + h$$

in N_0 si ha successivamente :

$$(a + d) + (c + k) = (b + c) + (d + h)$$
$$a + k = b + h$$
$$(a, b) \sim (h, k)$$

Pertanto la relazione di equivalenza " **~** " determina in $N_0 \times N_0$ una ***partizione*** in ***classi di equivalenza***.
Indichiamo con $\overline{(a,b)}$ la ***classe di equivalenza*** relativa ad ***(a, b)***, cioè

$$\textbf{(2)} \qquad \overline{(a,b)} = \{(c, d) \cdot (c, d) \in N_0^{x^2} \ , (c, d) \sim (a, b)\}.$$

A) ***Definizione*** ;

L' ***insieme*** $\pm N_0 = N_0 \times N_0 / \sim$

si dice l'***insieme dei numeri interi relativi*** ed ognuno di tali numeri si denota con i simboli

$$\overline{(a,b)}\ ,\ \overline{(c,d)}\quad \text{ecc.}$$

per indicare che sono classi di equivalenza.

B) Definizione di somma e prodotto.

Addizione e moltiplicazione in $\underline{\pm}N_0$.

Cominciamo con il dimostrare il :

Teorema 2

Quali che siano gli elementi $\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)} \in Z$, ***poniamo:***

$$(3)\qquad \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \left(\overline{(a+c),(b+d)}\right)$$

$$(4)\qquad \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \left(\overline{(ac+bd),(ad+bc)}\right).$$

Dimostrazione

Si ha che, se al primo membro delle **(3)** e delle **(4)** cambiamo i rappresentanti delle classi fissate; al secondo membro di entrambe si ha sempre la stessa classe.

A questo scopo sia

$$(a', b') \in \overline{(a,b)}\quad ,\quad (c', d') \in \overline{(c,d)}$$

poiché

$$\overline{(a',b')} = \overline{(a,b)}\quad ,\quad \overline{(c',d')} = \overline{(c,d)}$$

occorrerà che sia:

$$(5)\qquad \overline{((a+c),(b+d))} = \overline{((a'+c'),(b'+d'))}$$

e

$$(6)\qquad \overline{((ac+bd),(ad+bc))} = \overline{((a'c'+b'd'),(a'd'+b'c'))}$$

Essendo

$$(a', b') \sim (a, b)\quad ,\quad (c', d') \sim (c, d)$$

si ha per la **(1)**

$$a' + b = b' + a\quad ,\qquad c' + d = c + d'$$

e quindi

$$(a' + b) + (c' + d) = (a + b') + (c + d');$$

per le ***proprietà commutativa*** e ***associativa*** segue

$$(a'+b) + (c'+d) = ((a' + b) + c') + d) = ((b + a') + c') + d) = (b+ (a' + c')) +d) =$$
$$= ((a' + c') + b) + d = (a' + c') + (b + d)$$

e analogamente

$$(a + b') + (c + d') = (b' + d') + (a + c)$$

e perciò

$$(a' + c') + (b + d) = (b'+ d') + (a + c)$$

che ***assicura*** la **(5).**

Per la ***proprietà distributiva*** si ha

$$(a' + b)c' = (a + b')c' \Rightarrow a'c' + bc' = ac' + b'c'$$
$$(a + b')d' = (a' + b)d' \Rightarrow ad' + b'd' = a'd' + bd'$$
$$a(c' + d) = a(c + d') \Rightarrow ac' + ad = ac + ad'$$
$$b(c + d') = b(c' + d) \Rightarrow bc + bd' = bc' + bd$$

ne segue

$$((a'c' + bc') + (ad' + b'd')) + ((ac' + ad) + (bc + bd')) =$$
$$= ((ac' + b'c') + (a'd' + bd')) + ((ac+ad') + (bc' + bd))$$

e per le ***proprietà commutativa*** e ***associativa***

$$((a'c' + b'd')) + ((bc' + ad') + (ac' + bd')) =$$
$$= ((a'd' + b'c') + (ac + bd)) + ((ac' + bd') + (ad' + bc'))$$

e per la ***cancellabilità***

$$(a'c' + b'd') + (ad + bc) = (a'd' + b'c') + (ac + bd)$$

che ***dimostra*** la **(6)**.

Definizione

Chiameremo ***somma degli elementi*** $\overline{(a,b)}$, $\overline{(c,d)}$ ***di*** $\pm$ ***N₀*** ***l'elemento***:

$$\overline{(a,b)} \quad e \quad \overline{(c,d)} \quad \text{di } \pm N_0,$$

definito dalla (3).

Definizione

Chiameremo ***prodotto degli stessi elementi***, l'***elemento di*** $\pm$ N_0 ***ben determinato dalla*** **(4)** ***e cioè***

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} .$$

Per la definizione di somma e di prodotto useremo i ***simboli*** **+ , ·** già usati in N_0 .

Chiameremo ***addizione*** ***l'applicazione:***

$$S': \ (\pm N_0)^{x^2} \longrightarrow \pm N_0$$

definita ponendo $\forall \ \overline{(a,b)} , \overline{(c,d)} \in \pm N_0$

$$S' (\overline{(a,b)} , \overline{(c,d)}) = \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} .$$

Chiameremo ***moltiplicazione*** ***l'applicazione:***

$$P' : \ (\pm N_0)^{x^2} \longrightarrow \pm N_0$$

definita ponendo $\forall \ \overline{(a,b)} , \overline{(c,d)} \in \pm N_0 :$

$$P' (\overline{(a,b)} , \overline{(c,d)}) = \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} .$$

Denoteremo infine con:

$$Z = (\pm N_0 ;\ S' ,\ P')$$

la **struttura algebrica** ***definita su*** $\pm N_0 = |Z|$.

L'***elemento neutro*** ***rispetto all'addizione*** è la ***classe*** $(a,\ a) = 0$, mentre l'***elemento neutro moltiplicativo*** è $\overline{(1,0)} = \overline{(h+1,h)} = +1$

Infatti:

$\overline{(a,b)} + \overline{(c,c)} = \overline{(a+c,b+c)} = \overline{(a,b)}$

$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(h+1,h)} = \overline{(ah+a+bh,bh+b+ah)} = \overline{(a,b)}$

Si ha inoltre:

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0 \quad \forall\ x \in Z$$

Infatti:

$\overline{(a,b)} \ .\ \overline{(c,c)} = \overline{(ac+bc,bc+ac)} = \overline{(c,c)} = 0$

D) ***Definizione di opposto e di sottrazione***.

Definizione

Qualunque sia $x \in Z$, posto $x = \overline{(a,b)}$ con $a,\ b \in N_0$

l'elemento

$$(-x) \in Z,$$

definito come

$$-x = (b+h\ ,\ a+h) \quad h \in N_0$$

si dice ***opposto di x***.

Si ha come è ovvio:

$$x + (-x) = (-x) + (x) = 0$$

Infatti:

$$\overline{(a,b)} + \overline{(b+h,a+h)} = \overline{(a+b+h,b+a+h)} = 0$$

Tale ***opposto*** è ovviamente ***unico***, come risulterà tra poco dal provare le regole di semplificazione.

L'***applicazione***

$$M:\ |Z|^{x^2} \to |Z|$$

definita ponendo $\forall\ x, y \in |Z|$,

$$M(x\ ,\ y) = x + (-y)$$

prende il nome di ***sottrazione***.

Ne segue che $\forall\ u, v \in |Z|$ le equazioni:

$$u + x = v$$

$$v + y = u$$

hanno ***sempre soluzioni*** in $|Z|$.

Tali equazioni hanno poi ***soluzione unica*** come conseguenza della regola di semplificazione che proveremo

***Leggi associative dell'addizione e della moltiplicazione*.**

Quali che siano $x, y, z \in |Z|$ ***si ha***:

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

(9)

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

Dimostrazione.

Sia

$$x = \overline{(a,b)}\ ,\ y = \overline{(c,d)}\ ,\ z = \overline{(e,f)},$$

utilizzando la ***proprietà commutativa*** e ***associativa*** in N_o si ha:

$$x + (y + z) = \overline{(a,b)} + \left(\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}\right) = \overline{(a,b)} + \overline{(c+e, d+f)} =$$
$$= \overline{(a+(c+e), b+(d+f))} = \overline{((a+c)+e, (b+d)+f))} =$$
$$= \overline{((a+c),(b+d))} + \overline{(e,f)} = \left(\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}\right) + \overline{(e,f)} =$$
$$= (x + y) + z.$$

da cui la ***prima*** delle **(9)**.

Inoltre si ha:

$$x\,(y\,z) = \overline{(a,b)}\ \left(\overline{(c,d)}\ \overline{(e,f)}\right) = \overline{(a,b)}\ \overline{(ce+df, cf+de)} =$$
$$= \overline{(a(ce+df)+b(cf+de), a(cf+de)+b(ce+df))} =$$
$$= \overline{((ac+db)e+(ad+bc)f, (ac+bd)f+de)+(ad+bc)e)} =$$

$$= \overline{(ac+bd, ad+bc)}\ \overline{(e,f)} \neq \left(\overline{(a,b)}\ \overline{(c,d)}\right)\overline{(e,f)} \neq (x\,y)\,z$$

da cui la ***seconda*** delle **(9)**.

Leggi commutative dell'addizione e della moltiplicazione

Quali che siano $x, y, z \in |Z|$ ***si ha***

$$\textbf{(10)} \qquad x + y = y + x$$

$$\textbf{(11)} \qquad x\ y = y\ x$$

Dimostrazione

$$x + y = \overline{(a,b)} + (\overline{(c,d)} = \overline{(a+c, b+d)} = \overline{(c+a, d+b)} = \overline{(c,d)} + \overline{(a,b)} = y + x$$

da cui la **(10).**

Inoltre poichè risulta

$$x\,y = \overline{(a,b)}\ \overline{(c,d)} = \overline{(ac+bd, ad+bc)} = \overline{(ca+db, da+cb)} = \overline{(c,d)}\ \overline{(a,b)} = y\,x$$

resta dimostrata la **(11)**

Legge distributiva

Quali che siano x, y, z $\in |Z|$ si ha

$$\textbf{(12)} \qquad (x+y)\,z = x\,z + y\,z$$

Dimostrazione

$$(x+y)\,z = \overline{(a+c,b+d)}\;\overline{(e,f)} = \overline{((a+c)e+(b+d)f,(a+c)f+(b+d)e)} =$$
$$= \overline{((ae+bf)+(ce+df),(af+be)+(cf+de))} =$$
$$= \overline{(a,b)}\;\overline{(e,f)} + \overline{(c,d)}\;\overline{(e,f)} = x\,z + y\,z.$$

Teorema 3

Quali che siano x, y, z $\in |Z|$ si ha

(13) $(-x = -y) \Leftrightarrow (x \neq y)$

(14) $-(-x) = x$

(15) $-(x+y) = (-x) + (-y)$

(16) $(-x)\cdot(-y) = x\,y$

(17) $(-x)\,y = -x\,y$

Dimostrazione

La **(13)** e la **(14)** sono ovvie.

Quindi per la **(15)**

$$-(x+y) = \overline{(b+d,a+c)} = \overline{(b,a)} + \overline{(d,c)} = (-\overline{(a,b)}) + (-\overline{(c,d)}) = (-x) + (-y).$$

Si ha :

$$(-x)\,(-y) = \overline{(b,a)} \cdot \overline{(d,c)} = \overline{(bd+ac,bc+ad)} = \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = x \cdot y$$

da cui ***resta provata*** la **(16)**

Infine

$$(-x)\,y = \overline{(b,a)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(bc+ad,bd+ac)} = -\overline{(ac+bd,bc+ad)} = -(x \cdot y)$$

resta dimostrata la **(17)**.

Legge di cancellazione per l'addizione

Quali che siano x, y, z $\in |Z|$ si ha

$$\textbf{(18)} \qquad (x+z = y+z) \Leftrightarrow (x = y)$$

Dimostrazione

$\Rightarrow$

$(x + z \;=\; y + z) \;=\; \overline{(a,b)} \;+\; \overline{(e,f)} \;=\; \overline{(c,d)} \;+\; \overline{(e,f)} \;\Rightarrow\; \overline{(a+e,b+f)} \;=\; \overline{(c+e,d+f)}$

Da ciò si ha

$$\overline{(a+e)} + \overline{(d+f)} = \overline{(c+e)} + \overline{(b+f)}$$

per cui

$$\overline{(a+d)} + \overline{(e+f)} = \overline{(c+b)} + \overline{(e+f)}$$

e per la ***legge di cancellazione in N_0***

$$a + d = c + d \quad \text{ossia} \quad (a, b) \sim (c, d)$$

e quindi la **(18).**

$\Leftarrow$

Analogamente si dimostra l'implicazione inversa.

2 RELAZIONE D'ORDINE IN Z

Nel paragrafo precedente si è pervenuti ad una ***struttura algebrica*** che denoteremo con

$$Z = (\pm N_0; S', P')$$

Tale struttura è un ***anello*** dotato di ***regola di semplificazione additiva***, ***commutativo*** e ***dotato di elemento unitario***.

Mostriamo che tale ***anello*** è ***dotato di una relazione di ordine naturale***.

E) *Definizione di minore (<) e di maggiore (>) in Z.*

Definizione

Per ogni $x, y, z \in Z$ e $a, b, c, d \in N_0$ tali che $x = \overline{(a,b)}$ e $y = \overline{(c,d)}$ porremo

(18) $(x < y) \Leftrightarrow (a + d < b + c)$

(19) $(x > y) \Leftrightarrow (y < x)$

Le ***relazioni*** ***minore di*** e ***maggiore di*** vengono denotate in Z con gli stessi simboli introdotti in N_0.

Proviamo che la ***definizione data*** dipende ***solo*** dalle ***classi*** e non dagli ***elementi di questa***. Si tratta di provare che

(21) $\overline{(a',b')} < \overline{(c',d')}$

Da

$$a' + b = a + b' \quad c' + d = c + d' \quad a + d < b + c$$

segue

$$(a + d') + c = a + (c + d') = a + (c' + d) = (a + d) + c' < (b + c) + c' = (b + c') + c$$

da cui

$$a + d' < b + c'$$

quindi si ha

$$(a' + d') + a = (a + d') + a' < (b + c') + a' = (b + a') + c' = (b' + c') + a$$

onde

$$a' + d' < b' + c'$$

ossia la **(21)**.

Legge di tricotomia

Quali che siano $x, y, z \in |Z|$ è vera una e una sola delle seguenti affermazioni

$$x = y$$
$$x < y$$
$$x > y$$

Dimostrazione

Sia $x = \overline{(a,b)}$ e $y = \overline{(c,d)}$, per la ***legge di tricotomia*** in N_0, è ***vera una ed una sola*** delle seguenti affermazioni:

$$a + d = b + c$$
$$a + d < b + c$$
$$a + d > b + c$$

e ciò prova la ***legge di tricotomia*** in Z.

Teorema 4

Se $x, y, z \in Z$, allora la relazione $<$ gode delle seguenti proprietà:

$$\textbf{(i)} \quad x \not< x \quad \forall\, x \in Z$$
$$\textbf{(ii)} \quad (x < y) \Rightarrow (y \not< x)$$
$$\textbf{(iii)} \quad (x < y,\ y < z) \Rightarrow (x < z)$$

Dimostrazione

Posto $x = \overline{(a,b)}$ $y = \overline{(c,d)}$ $z = \overline{(e,f)}$ tenendo presente che in N_0 è

$$a + b \not< a + b$$

segue la **(i)**; inoltre poiché in N_0 risulta

$$a + d < b + c$$

ciò implica

$$b + c \not< a + d$$

quindi ***segue*** la **(ii)**. Da

$$a + d < b + c$$
$$c + f < d + e$$

si ha in N_0

$$(a + d) + (c + f) < (b + c) + (d + e)$$

e quindi

$$(a + f) + (c + d) < (b + e) + (c + d)$$

da cui

$$a + f < b + e$$

e quindi la **(iii)**.

Teorema 5.
La $<$ è una relazione di ordine e $(|Z|;<)$ è un insieme ordinato.

Dimostrazione
Segue immediatamente dalla ***legge di tricotomia*** e dal **teorema 4**.

Teorema 6
La relazione $<$ è compatibile con S' e P', cioè $\forall$ x, y, z $\in |Z_0|$ si ha:

(i) $(x + z < y + z) \Leftrightarrow (x < y)$
(ii) $(x z < y z) \Leftrightarrow (x < y)$ ***se*** $z > 0$
(iii) $(x z < y z) \Leftrightarrow (x > y)$ ***se*** $z < 0$

Dimostrazione
Poniamo x = $\overline{(a,b)}$ y = $\overline{(c,d)}$ z = $\overline{(e,f)}$. Sia $x < y$ da cui si ha

$$a + d < b + c$$

e pertanto

$$(a + d) + (e + f) < (b + c) + (e + f)$$

ed ancora

$$(a + e) + (d + f) < (c + e) + (b + f)$$

cioè

$$\overline{(a+e, b+f)} < \overline{(c+e, d+f)}$$

e quindi

$$x + z < y + z.$$

Inversamente sia

$$x + z < y + z$$

da cui

$$(a + d) + (e + f) < (b + c) + (e + f)$$

e pertanto

$$a + d < b + c$$

cioè

$$\overline{(a,b)} < \overline{(c,d)}$$

e quindi

$$x < y$$

che prova la **(i)**.

Sia $z > 0$ cioè $\overline{(e, f)} > \overline{(n, n)}$ da cui

$$e + n > f + n$$

quindi

$$e > f;$$

esiste allora un $p \in N$ per il quale risulta $e = f + p$.
Ma allora

$$(a + d)\, p < (b + c)\, p$$

e successivamente

$$(a + d)\, p + (a + d)\, f + (b + c)\, f < (b + c)\, p + (a + d)\, f + (a + d)\, f + (b + c)\, f$$

da cui

$$(a + d)\, e + (b + c)\, f < (a + d) f + (b + c)\, e$$

ossia

$$(ae + bf) + (cf + de) < (ce + df) + (af + be)$$

e quindi

$$x\, z = \overline{(ae+bf, af+be)} < \overline{(ce+df, cf+de)} = y\, z$$

Reciprocamente se

$$x \cdot z < y \cdot z \quad \text{con } z > 0$$

si ottiene, procedendo a ritroso, $x < y$, che prova la **(ii)**.
In modo analogo si prova la **(iii)**.

Legge di cancellazione per la moltiplicazione.
Quali che siano $x, y, z \in Z$ e $z \neq 0$ si ha

$$(x \cdot z = y \cdot z) \Leftrightarrow (x\ 0\ y).$$

Dimostrazione
Essa è ***conseguenza*** immediata del **teorema precedente**.

Definizione
Si chiama ***anello ordinato degli interi relativi*** la ***struttura algebrica***:

$$Z = (|Z|\ \ S', P', \trianglelefteq)$$

Proprietà degli elementi neutri in Z
Le ***quattro proprietà degli elementi neutri*** in N_0 ***non*** sono più ***valide*** in ***Z***, perlomeno ***non*** sono più ***valide*** quelle ***additive*** in quanto $\forall\, x, y \in |Z|$ si ha:

$$\textbf{(21)} \quad x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$
$$\textbf{(22)} \quad x + y = +1 \Leftrightarrow x = (+1) - y$$

mentre si ha ***sempre***:

$$\textbf{(23)}\ x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \text{ oppure } \ y = 0$$
$$\textbf{(24)}\ x \cdot y = +1 \Leftrightarrow x = y + 1 \ \text{ oppure } \ x = y = -1.$$

Dimostrazione

La **(21)** e la **(22)** sono ***ovvie***.
Per dimostrare la **(23)** e la **(24)**, osserviamo che ***esistono*** sempre $a, b \in N_0$ tali che risulti come conseguenza della ***legge di tricotomia***:

$$x = \begin{cases} \overline{(a,0)} & se\ x \geq 0 \\ \\ \overline{(0,a)} & se\ x \leq 0 \end{cases} \qquad y = \begin{cases} \overline{(b,0)} & se\ y \geq 0 \\ \\ \overline{(0,b)} & se\ y \leq 0 \end{cases}$$

Risulta allora

$$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{(a \cdot b,0)} = 0 & se\ x \geq 0\ e\ y \geq 0 \text{ oppure } x \leq 0\ e\ y \leq 0 \\ \\ \overline{(0,a \cdot b)} = 0 & se\ x \leq 0\ e\ y \geq 0 \text{ oppure } x \geq 0\ e\ y \leq 0 \end{cases}$$

e cioè

in Z $\quad x \cdot y = 0 \Leftrightarrow a \cdot b = 0$ ***in*** $N_0 \Leftrightarrow x = 0$ oppure $y = 0$ ***in Z.***

Risulta poi

$$x \cdot y = +1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0\ con\ y > 0 \quad \text{oppure} \quad x < 0\ con\ y > 0 \\ \\ \text{ed inoltre} \\ \\ \overline{(a \cdot b,0)} = \overline{(1,0)} \quad \text{cioè } a \cdot b = 1\ (in\ N_0) \end{cases}$$

e poiché

$$a \cdot b = 1 \text{ (in } N_0) \Leftrightarrow a = b = 1$$

ne segue che

$$x \cdot y = +1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \overline{(1,0)} = +1 \\ \\ \text{oppure} \\ \\ x = y = \overline{(0,1)} = -1. \end{cases}$$

<u>Nozione di elemento regolare o unità</u>.
<u>Definizione</u>
Diremo ***unità di Z*** o ***elemento regolare di Z***, ***ogni*** $x \in |Z_0|$, ***tale che esiste un*** $y \in |Z_0|$ ***per cui si abbia*** $xy = +1$.

Discende dalle considerazioni precedenti che gli ***unici elementi regolari*** sono

+1 e -1

Il ***sottoinsieme*** ***X = {-1, +1}*** di ***Z definisce un sottogruppo di*** $(|Z_0|; P)$ che chiameremo ***gruppo delle unità***.

Rappresentazione canonica di un numero relativo

Dimostriamo il seguente:

Teorema

Comunque si consideri $\overline{(a,b)} \in |Z_0|$ $\forall \overline{(a',b')} \in \overline{(a,b)}$ ***si ha che risulta:***

$$a' - b' = a - b \quad (\text{in } N_0) \iff \overline{(a,b)} > 0 \quad (\text{in } Z)$$

$$b' - a' = b - a \quad (\text{in } N_0) \iff \overline{(a,b)} < 0 \quad (\text{in } Z)$$

Dimostrazione

Ricordando che dalla ***definizione*** di $\geq$ in ***Z*** si ha

$$(a,b) > 0 \iff a > b \text{ in } N_0$$

ne segue

che in N_0 esiste il ***naturale n = a – b*** .

Ora se è $(a', b') \sim (a,b)$ risulta che in N_0 vale la ***relazione***:

$$a' + b = a + b'$$

da cui si deduce la ***relazione*** :

$$n + b' = a'$$

che garantisce l'***esistenza*** del ***naturale a' - b'*** e che tale ***naturale*** è ***eguale ad n***. Analogamente si ragiona se $(a, b) < 0$.

Tale **teorema** permette di introdurre una nuova ***notazione***.

Poiché $\forall x \in |Z|$ dalla ***legge di tricotomia*** risulta che ***vale una ed una sola*** delle alternative:

$$x > 0 \quad \vee \quad x = 0 \quad \vee \quad x < 0 \,,$$

porremo:

$$x = \overline{(a,b)} = \begin{cases} +(a-b) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \end{cases}$$

$-(b-a)$ *se* $x < 0$.

La tabella ora introdotta permette di ***associare ad ogni numero relativo non nullo un simbolo costituito da un naturale preceduto da un segno***.
I ***segni*** in tale caso hanno ***carattere distintivo*** e ***non operativo***.

Denoteremo d'ora in poi con

$$+N_1 \text{ o } Z^+$$

l'***insieme dei numeri relativi positivi*** e con

$$+n$$

un generico ***elemento di*** $+N_1$.

Denoteremo invece con

$$-N_1 \text{ o } Z^-$$

l'***insieme dei numeri relativi negativi*** e con

$$-n$$

un generico ***elemento di*** Z^-.

Valore naturale di un intero relativo.

Consideriamo l'***applicazione***:

$$V: \pm N_0 \rightarrow N_0$$

definita $\forall\ +n \in N_0$ e $\forall -n \in -N_0$ ponendo:

$$V(+n) = +n, \quad V(0) = 0 \quad V(-n) = +n.$$

Se $x \in \pm N_0$, l'***elemento di*** N_0, $V(x)$ sarà denotato anche con

$$|x|$$

e sarà detto ***valore naturale*** o ***grado del numero relativo*** x.
Si ha come è ovvio:

$$|x| = \begin{cases} x & \underline{se} \quad x > 0 \\ 0 & \underline{se} \quad x = 0 \\ -x & \underline{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

$\forall \quad x \in \pm N_0$.

Ricerca della forma canonica della somma e del prodotto di due relativi.

Dalle ovvie ***relazioni***:

$$(\overline{n,0}) + (\overline{m,0}) = (\overline{n+m,0})$$

$$(\overline{0,n}) + (\overline{0,m}) = (\overline{0,n+m})$$

$$(\overline{n,0}) + (\overline{0,m}) = (\overline{n,m})$$

discendono le ***regole di formazione della forma canonica della somma*** di due ***interi relativi*** e cioè le ***relazioni***:

$$(+n) + (+m) = +(n+m)$$

$$(-n) + (-m) = -(n+m)$$

cioè

$$(+n) + (-m) = \begin{cases} +(n-m) & \text{se } n > m \quad (\text{in } N_0) \\ 0 & \text{se } n = m \quad (\text{in } N_0) \\ -(m-n) & \text{se } n < m \quad (\text{in } N_0) \end{cases}$$

Dalle ovvie ***relazioni***:

$$(\overline{n,0}) \cdot (\overline{m,0}) = (\overline{\bar{n} \cdot m,0})$$

$$(\overline{0,n}) \cdot (\overline{0,m}) = (\overline{\bar{n} \cdot m,0})$$

$$(\overline{0,n}) \cdot (\overline{m,0}) = (\overline{0,n \cdot \bar{m}})$$

discendono le ***regole di formazione della forma canonica del prodotto*** di due ***interi relativi*** e cioè le ***relazioni***:

$$(+n) \cdot (+m) = +(n \cdot m)$$

$$(-n) \cdot (-m) = +(n \cdot m)$$

$$(-n) \cdot (+m) = -(n \cdot m) \; .$$

Isomorfismo (~) tra il semianello degli interi non negativi e il semianello dei naturali.

Le ***regole di formazione*** dicono che la ***struttura*** $(+N_0;\, S',\, P')$ è un ***sotto-semianello*** dell'***anello*** $Z = (\pm N \;;\; S',\, P')$.

Teorema

Vogliamo mostrare che risulta il semianello $(+N_0;\, S',\, P') \simeq (N_0;\, S,\, P)$

Dimostrazione
Consideriamo la ***funzione***

$$f:\ +N_0 \longrightarrow N_0$$

definita ponendo:

$$f = g\big|_{+N_0}$$

cioè ***f è la restrizione a*** $+N_0$ delle ***applicazioni*** che forniscono il ***valore naturale***.
Mostriamo che questa ***applicazione è un isomorfismo di ordine*** cioè:

1) ***f è biettiva***;
2) ***conserva le operazioni***;
3) ***è tale che*** $+m > +n \iff f(+m) > f(+n)$.

Che la ***f*** sia ***biiettiva*** è ovvio.
Proviamo allora che essa ***conserva le operazioni*** cioè che:

$$f[(+n) + (+m)] = f[(+n)] + f[(+m)]$$

$$f[(+n)\cdot(+m)] = f[(+n)]\cdot f[(+m)]$$

Infatti si ha

$$f[(+n) + (+m)] = f[+(n + m)] = n + m = f[(+n)] + f[(+m)]$$

ed anche

$$f[(+n)\cdot(+m)] = f[+(m\cdot n)] = m\cdot n = f[(+n)]\cdot f[(+m)].$$

Proviamo infine che ***f è un isomorfismo di ordine*** cioè:

$$+m > +n \Rightarrow f(+m) > f(+n).$$

Infatti $+m > +n$ cioè $(\overline{m,o}) > (\overline{n,o}) \iff m + 0 > 0 + n$ cioè
$m > n$;
relazione questa che equivale alla $f(+m) > f(+n)$.
E' dimostrato quindi che ***f è un isomorfismo di ordine***.

Questo ***isomorfismo*** ci permette di ***identificare*** gli ***interi non negativi*** con ***i naturali*** e cioè porre:

$$+m = n \qquad \forall\ +m \in N_1$$

Quindi in definitiva ***$(N_o;\ S,\ P)$*** è ***isomorfo*** ad una ***sottostruttura di Z***, anzi ad identificazione effettuata, possiamo trattare N_o come un ***sottoinsieme di*** $|Z|$.

Considerazioni generali e didattiche sugli interi relativi.

Sia A una struttura algebrica. Se esiste una algebrica B e un monoformismo
f: $A \to B$, la coppia (B, f) si dice ampliamento di A.

Ciò premesso si ha:

<u>Teorema.</u>

Siano N_0 il semianello dei naturali e Z l'anello degli interi; se f: $N_0 \to Z$ è il monomorfismo ottenuto ponendo

$$f(n) = +n, \quad \forall n \in N_1 \quad \text{ed} \quad f(0) = 0.$$

Allora se (A, g) è un ulteriore ampliamento di N_0 e g: $N_0 \to A$ un monomorfismo, esiste uno ed uno solo monomorfismo h: $Z \to A$, tale che sia commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} & N_0 \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A & & Z \arrow[ll, "h"] \end{tikzcd}$$

Dimostrazione

Dobbiamo mostrare l'***esistenza*** del ***monomorfismo***

$$h : |Z| \to A$$

$\forall x \in Z$ si ha che ***esistono a, b*** $\in N_0$ tali che

$$x = (\overline{a,b}) = (\overline{a,0}) + (\overline{0,b}) = +a + (-b)$$

Poniamo:

$$h(x) = h\,[(\overline{a,b})] = g(a) - g(b).$$

Essendo

$$a = <+a>, \; b = <-b>$$

la ***definizione*** di ***h*** è ben posta.

Vogliamo mostrare ora che ***h è iniettiva*** ed è un ***omomorfismo***.

Dimostrazione

Infatti se $x = (\overline{a,b})$ $y = (\overline{c,d})$ si ha :

$$h(x+y) = h[(\overline{a+c,b+d})] = g(a+c) - g(b+d) =$$
$$= (g(a) - g(b)) + (g(c) - g(d)) = h(x) + h(y)$$

$$h(x \cdot y) = h\,[(\overline{ac+bd,ad+bd})] = g(a \cdot c + b \cdot c) - g(a \cdot d + b \cdot c) =$$
$$= g(a) \cdot g(c) + g(b) \cdot g(d) - g(a) \cdot g(d) - g(b) \cdot g(c) =$$
$$= g(a) \cdot [g(c) - g(d)] + g(b) \cdot [g(d) - g(c)] =$$
$$= [g(a) - g(b)] \cdot [g(c) - g(d)] = h(x) \cdot h(y)$$

quindi ***h*** è un ***omomorfismo.***
Per mostrare che ***h*** è ***iniettiva*** basta osservare che considerati $x, y \in |Z|$
con $x \neq y$ allora, supposto per ***assurdo*** $h(x) = h(y)$ con $x = \overline{(a,b)}$ e $y = \overline{(c,d)}$
si ottiene

$$g(a) + g(d) - g(b) - g(c) = 0_A$$

cioè

$$g(a) + g(d) = g(c) + g(b)$$

da cui essendo ***g*** un ***omomorfismo iniettivo*** segue:

$$g(a + b) = g(c + b)$$

e

$$a + d = c + b$$

onde $\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)}$ e quindi $x = y$ ***contro l'ipotesi*** $x \neq y$.

Dimostriamo ora l'***unicità*** del ***monomorfismo*** $h : |Z| \rightarrow A$.
Sia dunque h' un altro ***monomorfismo*** tale che sia ***commutativo*** il diagramma:

$$\begin{tikzcd} & N_0 \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A & & Z \arrow[ll, "h'"] \end{tikzcd}$$

cioè tale che $h' \circ f = g$.

E' ovvio che ***h' coincide con h*** nell'***immagine in f di*** N_0 .
Dobbiamo mostrare quindi che ***h*** ed ***h'*** ***coincidono*** anche ***in*** $|Z| - f(N_0)$.
Sia $x = \overline{(a,b)} \in |Z| - f(N_0)$
si ha

$$h'(x) = h'[\overline{(a,b)}] = h'[\overline{(a,0)} + \overline{(0,b)}] = h'[\overline{(a,0)} - \overline{(b,0)}] =$$
$$= h'[\overline{(a,0)}] - h'[\overline{(b,0)}]$$

ma per quanto detto sopra si ha che :

$$h[\overline{(a,0)}] = h'[\overline{(a,0)}]$$

e

$$h[\overline{(b,0)}] = h'[\overline{(b,0)}]$$

e quindi

$$h'(x) = h'[\overline{(a,0)}] - h'[\overline{(b,0)}] = h[\overline{(a,0)}] - h[\overline{(b,0)}] = h[\overline{(a,b)}] = h(x)$$

Per illustrare il ***significato*** del **teorema** osserviamo che ***ogni altro anello che contenga un sottosemianello isomorfo ad*** N_0 ***contiene un sottoanello isomorfo a*** Z .

Ciò si può esprimere appunto dicendo che ***a meno di isomorfismi l'ampliamento (Z, f) è minimo rispetto all'inclusione*** o, anche, che ***Z è l'ampliamento meno vasto di N_0 che consente di invertire l'addizione***.

FINE DEL CAPITOLO