LA DIDATTICA DEGLI INTERI RELATIVI

Nota di Franco Eugeni del 1970-71

Aggiunte ale dispense del 1969 nell'A.A. 1970-71

Nella scuola media inferiore, il concetto di ***numero intero relativo*** viene introdotto dal punto di vista ***intuitivo*** mediante l'attribuzione di due segni ad ogni naturale (eccetto lo zero).
Si elencano poi le ***regole pratiche*** di informazione per la ***somma*** ed il ***prodotto*** di due o più relativi e si inizia quindi il calcolo delle espressioni.
Nella Scuola Media Superiore è opportuno raffinare tale introduzione, pur senza tuttavia ricorrere a concetti generali, purtroppo così formale, dell'***ampliamento*** mediante ***classi di equivalenza***.
Un metodo molto producente e già da molti sperimentato è quello basato sulle seguenti considerazioni.

Sia $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ l'***insieme dei numeri naturali***.
Ad ogni ***coppia ordinata di naturali*** (n, m), mediante l'***operazione di sottrazione*** può ***associarsi*** $m - n$ se $m > n$, $n - m$ se $m < n$ oppure 0 se $m = n$.
La coppia (n, m) può pensarsi come un ***nuovo ente*** che chiamiamo ancora ***numero*** al quale possono associarsi i ***simboli*** definiti dalla tabella:

$$(m, n) \to \begin{cases} +\,(m - n) & \text{se } m > n \\ 0 & \text{se } m = n \\ -\,(n - m) & \text{se } m < n \end{cases}$$

I ***simboli*** $+$ e $-$ ***apposti davanti*** ai naturali $m - n$ e rispettivamente $n - m$ si precisa che hanno solo ***carattere distintivo*** e sono soltanto un ulteriore modo di distinzione se ***in una coppia il primo elemento è maggiore od inferiore al secondo***.

Definiamo ora nell'***insieme delle coppie*** una nuova ***nozione*** di ***eguaglianza*** dicendo che :

due coppie si dicono uguali quando e solo quando producono lo stesso simbolo.

Così, per **esempio**, essendo:

$$\begin{matrix} (3,7) \to -4 \\ (5,9) \to -4 \end{matrix} \qquad \text{scriviamo: } (3,7) = (5,9)$$

Se inoltre:

$$(m,n) \to \quad +h$$

conveniamo con un abuso di notazione di scrivere:

$$(n,m) = h$$

Così ad **esempio**:

$$(3,7) = (5,9) = -4$$

$$(2,1) = (7,6) = +1$$

A questo punto chiamiamo con questa nozione di ***eguaglianza***[1] l'***insieme di tali coppie***, ***insieme Z di numeri relativi***.

Tale ***insieme*** viene poi ***ordinato*** nel modo seguente.
Saranno chiamati ***positivi***, ed il loro ***insieme*** sarà indicato con Z^+, ***i numeri*** del tipo $+n$, e tali numeri saranno identificati con i naturali.

Saranno chiamati ***negativi***, e il loro ***insieme*** sarà indicato con Z^-, i numeri del tipo $-n$.
Pertanto porremo

$$+n < +m \qquad \text{se e solo se} \qquad n < m$$

$$-n < -m \qquad \text{se e solo se} \qquad n > m$$

Inoltre,
per definizione, ogni elemento di Z^- ***è minore di 0 e 0 è minore di ogni elemento di*** Z^+.

A questo punto ***definiamo*** le ***operazioni*** col porre:

$$(+m) + (+n) = +(m+n)$$

$$(-m) + (-n) = -(m+n)$$

cioè

$$(+m) + (-n) = \begin{cases} +(m-n) & \text{se } m > n \\ 0 & \text{se } m = n \\ -(m-n) & \text{se } m < n \end{cases}$$

[1] Si osservi come si è arrivato, anche se in modo meno formalistico, ai relativi con una nascosta relazione di equivalenza nelle coppie.

Definite in tal modo le proprietà associativa e commutativa sono di difficile verifica pertanto evitiamo di dimostrarle, ma le enunceremo soltanto.

Se invece ***definiamo*** la ***somma*** ponendo

$$(m, n) + (a, b) = (m + a, n + b)$$

si può da questa definizione, come esercizio, sia dimostrare le proprietà sopraddette, sia dimostrare la tabella precedente.

Infatti

Proprietà associativa

$$(m, n) + [(a, b) + (\alpha, \beta)] = (m, n) + (a + \alpha, b + \beta) = (m + (a + \alpha), n + (b + \beta))$$

che per la ***associatività*** dei ***naturali*** è eguale a

$$((m + a) + \alpha, (n + b) + \beta) = (m + a, n + b) + (\alpha, \beta) = [(m, n) + (a, b)] + (\alpha, \beta).$$

Dimostrazione della tabella

$$(+n) + (+m) = (n, 0) + (m, 0) = (n + m, 0) = +(n + m)$$

$$(-n) + (-m) = (0, n) + (0, m) = (0, n + m) = -(n + m)$$

$$(+m) + (-n) = (m, 0) + (0, n) = (m, n) = \begin{cases} +(m - n) & \text{se } m > n \\ 0 & \text{se } m = n \\ -(m - n) & \text{se } m < n \end{cases}$$

Proprietà commutativa

$$(m, n) + (a, b) = (m + a, n + b)$$

che per la proprietà commutativa dei naturali è eguale a

$$(a + m, b + n) = (a, b) + (m, n)$$

Anche il prodotto può essere definito in due diversi modi.

Consideriamo i segni $\mathcal{S} = \{ +, - \}$

Definiamo un'***operazione*** di ***moltiplicazione in*** $\mathcal{S}$ mediante la tabella :

$\cdot$	+	-
+	+	-
-	-	+

Chiamiamo, dato un ***intero relativo***, ***valore assoluto di esso il naturale corrispondente*** .

Per ***definizione*** si chiama ***prodotto di due interi relativi l'intero relativo avente per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti e per segno il prodotto dei segni***
Si ha cosi :

$$(+n)\cdot(+m) = (m\cdot n) = (-n)\cdot(-m)$$

$$(+n)\cdot(-m) = (-n)\cdot(+m) = -(m\cdot n)$$

Le proprietà commutativa ed associativa si verificano con una certa difficoltà dovendosi trattare più casi, le stesse difficoltà s'incontrano per la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma .

Si può, qualora si desiderino dimostrare in maniera semplice tali proprietà, ricorrere ad una ***definizione formale*** e cioè porre per definizione :

$$(\beta) \qquad (m, n)\cdot(a, b) = (ma + nb,\ na + mb)$$

dalla quale essendo :

$$(m, n) = (+m) - (+n) = m - n$$

e

$$(a, b) = (+a) - (+b) = a - b$$

si deduce subito

$$(m - n)\cdot(a - b) = (ma + nb) - (na + mb)$$

e quindi anche :

$$(+m)\cdot(+a) = (m\cdot a) \quad , \quad (-n)\cdot(-b) = +n\cdot b$$

$$(+m)\cdot(-b) = (m\cdot b) \quad , \quad (-n)\cdot(+a) = -(n\cdot a)$$

Dalla **(β)** si deducono subito le ***proprietà commutativa*** ed ***associativa*** nonché la ***distributiva*** e la ***legge di annullamento.***

Esempio 1

Proprietà distributiva

$$(a, b)\cdot[(m, n) + (h, k)] = (a, b)\cdot(m + h, n + h) =$$

$$= (a\cdot(m + h) + b\cdot(n + k),\ b\cdot(n + k) + a\cdot(m + h))$$

Si ha

$$(a, b) \cdot (m, n) + (a, b) \cdot (h, k) = (a{\cdot}m + b{\cdot}n,\ a{\cdot}n + b{\cdot}m) + (a{\cdot}h + b{\cdot}k,\ a{\cdot}k + b{\cdot}h) =$$

$$= (a{\cdot}m + b{\cdot}m + a{\cdot}h + b{\cdot}k,\ a{\cdot}n + b{\cdot}m + a{\cdot}k + b{\cdot}h)$$

per la ***proprietà distributiva*** dei ***naturali*** ***dall'eguaglianza dei primi membri*** si deduce ***quella dei secondi membri***.

Esempio 2

Legge di annullamento

Osservato che $(m, n) = 0$ ***se e solo se*** $m = n$, se $(m, n) > 0$ $(a, b) > 0$ si ha

$$(m, n) \cdot (a, b) = (m - n, 0) \cdot (a - b, 0) = + [(m - n) \cdot (a - b)]$$

Ora in N_0 $(m - n) \cdot (a - b) = 0$ ***se è nullo uno dei fattori***, per cui la ***proprietà*** continua a ***valere*** anche ***in Z***.

FINE DEL PARAGRAFO