Dalle antiche dispense del prof. Franco Eugeni
Corso di Laurea in Matematica
Insegnamento di Matematiche Complementari I
Università dell'Aquila – AA. 1969-1973

CAPITOLO IV

IL CAMPO ORDINATO DEI NUMERI RAZIONALI

1. I NUMERI RAZIONALI

Sia ***Z*** l'anello ordinato dei numeri interi relativi.
Posto $|z_0| = |z| - \{0\} = \pm N_1$, consideriamo il prodotto cartesiano

$$F= |z| \times |z_0|.$$

Denoteremo con ***a/b*** un elemento di F, (invece che (a, b)) e chiameremo un tale elemento ***frazione***.
Il primo elemento della coppia sarà detto ***numeratore***, il secondo elemento della coppia ***denominatore.***
Il simbolo ***a/b*** va letto come "a" seguito dalla parola ***fratto*** "b".
Qualora a e b siano positivi con $b \in N_3$, quindi identificati con i naturali, si leggerà "*il nome di a seguito dall'aggettivo ordinale di b*", al singolare maschile se a = 1, al plurale maschile se $a \in N_2$. Infine se b = 1 se ne omette la lettura o si usa la parola fratto, se b = 2 si legge ***"mezzo"***, se a = 1; mezzi se $a \in N_2$ invece di secondo o secondi.

Nell' insieme F delle ***frazioni*** introduciamo la relazione **"~"** definita col porre :

$$\textbf{(1)} \qquad a/b \sim c/d\} \Leftrightarrow \{a\, b = b\, c \qquad \text{in } Z$$

La relazione definita è come è ovvio una ***relazione di equivalenza***: infatti, essendo ovvia la proprietà ***riflessiva*** e quella ***simmetrica***, la ***transitiva*** segue dall'osservare che se

$$a/b,\ c/d,\ h/k \in F$$

e se

$$a/b \sim c/d; \qquad c/d \sim h/k \qquad \text{in } Z$$

risulta

$$ab = bc, \qquad ck = dh,$$

onde moltiplicando la prima per $k \in | z |$ risulta

$$adk = bck, \qquad cbk = dbh$$

da cui

$$adk = dbk$$

e quindi

$$ak = bh \qquad \text{essendo } d \in |Z_0| \text{ e cioè}$$

$$a/b \sim h/k.$$

Definizione.

L'insieme quoziente F/~ verrà denotato con **|Q|** e sarà chiamato ***insieme dei numeri razionali***.

Gli ***elementi*** di |Q| e cioè i ***numeri razionali*** verranno denotati con il simbolo

$$\left(\overline{a/b}\right)$$

Risulta quindi che ***un numero razionale*** è una ***classe di equivalenza di frazioni***, e pertanto si avrà :

$$\textbf{(2)} \quad \left(\overline{a/b}\right) = \{ c/d \cdot c/d \in F, c/d \sim a/b \}.$$

2. OPERAZIONI SULL'INSIEME DEI NUMERI RAZIONALI

Premettiamo il seguente

Teorema

Quali che siano $\left(\overline{a/b}\right), \left(\overline{c/d}\right)$ ***∈ |Q|, si ponga***

$$\textbf{(3)} \quad (a/b) + (c/d) = (a \cdot d + b \cdot c / b \cdot d)$$

$$\textbf{(4)} \quad (a/b) \cdot (c/d) = (a \cdot c / b \cdot d) .$$

Si ha che al primo membro delle (3) e (4) cambiando i rappresentanti delle classi fissate, al secondo membro di entrambe, si ha sempre la stessa classe.

Dimostrazione

Infatti se $a'/b' \sim a'/b'$, $c'/d' \sim c'/d'$, dall'essere: $a' \cdot b = b \cdot a$, $c' \cdot d = c \cdot d'$ in |Z| segue moltiplicando entrambi i membri della prima per $d \cdot d'$ e della seconda per $b \cdot b'$ e sommando :

$$a' \cdot b \cdot d \cdot d' + c' \cdot d \cdot b \cdot b' = a \cdot b' \cdot d \cdot d' + c \cdot d' b \cdot b' ,$$

e cioè :

$$a' \cdot d' + c' b' / b' \cdot d' \sim a \cdot d + c \cdot b / b \cdot d .$$

Moltiplicando membro a membro le relazioni iniziali segue ancora :

$$(a' \cdot b) \cdot (c' \cdot d) = (b' \cdot a) \cdot (c \cdot d')$$

e cioè

$$a' \cdot c' / b' d' \sim a \cdot c / b \cdot d .$$

Il teorema è così provato.

Chiameremo ***somma*** di due elementi x , y ∈ |Q| la classe x + y definita dalla (3).
Chiameremo ***prodotto*** di due elementi x , y ′∈ |Q| la classe x · y definitiva dalla (4).

Chiameremo ***addizione*** l'applicazione:

$$S : |Q\times 2| \to |Q|$$

definita $\forall$x, y$\in$ |Q| col porre:

$$S\,(x,y) = x + y.$$

Chiameremo ***moltiplicazione*** l'applicazione:

$$P: |Q\times 2| \to |Q|$$

definita tra $\forall$x, y$\in$ |Q| col porre:

$$P(x,\, y) = x\cdot y.$$

Le proprietà delle operazioni S e P possono essere riassunte nel seguente:

Teorema.

Quali che siano x, y, z $\in$ |Q| valgono le proprietà:

$$\left.\begin{array}{l} (5)\ (x + y) + z = x + (y + z) \\ \\ (6)\ (x + y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \end{array}\right\}\ \underline{\textit{associative}}$$

$$\left.\begin{array}{l} (7)\ x + y = y + x \\ \\ (8)\ x \cdot y = y \cdot x \end{array}\right\}\ \underline{\textit{commutative}}$$

$$(9)\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \qquad \underline{\textit{distributiva}}$$

Dimostrazione

Infatti posto x = $(\overline{a/b})$, y = $(\overline{c/d})$, z = $(\overline{h/k})$ segue :

$$(x + y) + z = (\overline{ad + bc/bd}) + (\overline{h/k}) = \overline{(ad + bc)k + hbd/bdk}$$

$$x + (y+z) = (\overline{a/b}) + (\overline{ck + dh/dk}) = \overline{adk + b(ck \cdot dh)/bdk}$$

onde la ovvia eugualianza; analogamente si provano la (6) la (7) e la (8) per la (9)

Calcoliamo:

$$x\,(y + z) = (\overline{a/b}) + (\overline{ck + dh/dk}) = (\overline{ack + adh/bdk})$$

$$xy + xz = (\overline{ac/bd}) + (\overline{ah/bk}) = (\overline{acbk + bdah/bdbk})$$

l' ugualianza delle classi finali è subito provata.

3. <u>Definizione di elementi neutri e loro proprietà</u>

Chiameremo ***zero in*** |Q| <u>la classe</u> 0/1 e lo indicheremo con 0, chiameremo ***uno*** in |Q| la classe 1/1 e lo indicheremo con 1.

OSSERVAZIONE

E'ovvio che alla classe 0 appartengono ***tutti e sole*** le coppie del tipo 0/a, ed alla classe 1 tutte e sole le coppie $(\overline{a/a})$, $\forall a \in |z_o|$.

I simboli 0 e 1 introdotti sono effettivamente elementi neutri rispettivamente rispetto ad S e P poiché come è ovvio si ha:

$$\forall x = \left(\overline{a/b}\right) \in |Q|\ ,\ \forall\ c \in |Z_0|$$
$$x + 0 = \left(\overline{a/b}\right) + \left(\overline{0/c}\right) = \left(\overline{a\cdot c/b\cdot c}\right) = \left(\overline{a/b}\right) = x$$
$$x \cdot 1 = \left(\overline{a/b}\right) \cdot \left(\overline{c/c}\right) = \left(\overline{a\cdot c/b\cdot c}\right) = \left(\overline{a/b}\right) = x.$$

Le proprietà degli elementi neutri possono essere riassunte nel seguente:

Teorema

Quali che siano $x, y \in Z$ si ha:

(10) $\quad x + 0 = 0 + x = x$

(11) $\quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

(12) $\quad x \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$

(13) $\quad x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0) \vee (x = y = 0)$

Dimostrazione

La (10) e la (11) sono già state provate nell'osservazione, mentre la (12) è ovvia.
Per la (13) osserviamo che posto $x = \left(\overline{a/b}\right)$, $y = \left(\overline{c/d}\right)$ si ha:

$$x \cdot y = \left(\overline{a\cdot c/b\cdot d}\right) = 0 = \left(\overline{0/h}\right) \Leftrightarrow (a \cdot c = 0 \quad \text{in } Z) \Leftrightarrow$$
$$(a = 0) \vee (c = 0) \vee (a = c = 0)$$

che prova l'asserto.

4. <u>Opposto ed inverso di un elemento. Sottrazione e divisione di razionali. Proprietà.</u>

***Definizioni*.**

Si dice ***opposto*** dell'elemento $\left(\overline{a/b}\right) \in |Q|$ l'elemento $\left(\overline{-a/b}\right) \in |Q|$.

Si dice ***inverso*** dell'elemento $\left(\overline{a/b}\right) \in |Q| - \{0\} = |Q|_0$ l'elemento $\left(\overline{b/a}\right) \in |Q|$.

Si verifica quindi:

$$\left(\overline{a/b}\right) + \left(\overline{-a/b}\right) = \left(\overline{0/b^2}\right) = 0$$

$$\left(\overline{a/b}\right) \cdot \left(\overline{b/a}\right) = \left(\overline{ab/ba}\right) = 1$$

Denoteremo d'ora in poi con $-x$ l'opposto di $x \in |Q|$ e con x^{-1} l'inverso di $x \in |Q|_0$.
Si ha quindi:

(14) $\quad x + (-x) = (-x) + (x) = 0$

(15) $\quad x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$

OSSERVAZIONE

E' da notare che in N_0 si ha $\forall\ m, n \in N_0$:

$$m + n = 0 \Rightarrow m = n = 0; \qquad m \cdot n = 1 \Rightarrow m = n = 1$$

in Z invece se $a, b \in Z$ allora $a + b = 0$ ***non implica*** $a = b = 0$ e

$$\begin{cases} a = +1 \text{ oppure } a = -1 \\ \end{cases}$$

$a \cdot b = 1 \Rightarrow$

$$b = +1 \text{ oppure } b = -1$$

In |Q| viene a mancare anche questa ultima proprietà in quanto se $x, y \in |Q|$

$x \cdot y = 1$ ***non implica*** $x = y = 1$.

Chiameremo ***sottrazione*** l'applicazione:

$$M : |Q|^{x2} \to |Q|$$

definita ponendo $x, y \in |Q|$, $M(x,y) = x + (-y)$, e scriveremo anche :

$$M(x,y) = x - y$$

Chiameremo ***divisione*** l'applicazione:

$$D : |Q| \times |Q_o| \to |Q|$$

definita $x \in |Q|$, $y \in |Q_o|$ col porre $D(x, y) = x \cdot y^{-1}$ e scriveremo anche:

$$D(x, y) = x/y = \frac{x}{y}$$

Si ha il seguente

Teorema

Quali che siano $x, y, z \in |Q|$ si ha:

(16) $-(-x) = x$

(17) $-(x + y) = -x - y$

(18) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

(19) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$

e se inoltre $u, v \in |Q_o|$ si ha:

(20) $(u^{-1})^{-1} = u$

(21) $(u \cdot v)^{-1} = u^{-1} \cdot v^{-1}$

(22) $(x/u) + (y/v) = x \cdot v + y \cdot u / u \cdot v$

(23) $(x/u) \cdot (y / v) = x \cdot y / u \cdot v$

Dimostrazione

Le dimostrazioni delle proprietà elencate sono tutte ovvie; prendiamone qualcuna a titolo di esercizio.

Posto $x = \left(\overline{a/b}\right)$, $y = \left(\overline{c/d}\right)$ proviamo la (18).

Si ha $(-x) \cdot (-y) = \overline{(-a)/b} \cdot \overline{(-c)/d} = \overline{(-a)\cdot(-c)/b \cdot d} = \overline{a \cdot c / b \cdot d} = x \cdot y$.

Posto $u = \left(\overline{h/k}\right)$, $v = \left(\overline{r/s}\right)$, con $h, r \in |Z_o|$ proviamo la (21).

$(u \cdot v)^{-1} = \left(\overline{h \cdot r / k \cdot s}\right)^{-1} = \left(\overline{k \cdot s / h \cdot r}\right) = \overline{k/h} \cdot \overline{s/r} = u^{-1} \cdot v^{-1}$.

Proviamo la (22). Il secondo membro della (21) si scrive:

$$x \cdot v + y \cdot u / u \cdot v = (x \cdot v + y \cdot u) \cdot (u \cdot v)^{-1} = (x \cdot v + y \cdot u)\, u^{-1} \cdot v^{-1} =$$
$$x \cdot u^{-1} \cdot v \cdot v^{-1} + y \cdot u \cdot u^{-1} \cdot v^{-1} = x/u + y/v.$$

Si ha infine il seguente

Teorema

Quali che siano $x, y, z \in |Q|$ volgono le seguenti regole di semplificazione:

(24) $x + z = y + z \Leftrightarrow x = y$,

(25) $x \cdot z = y \cdot z$ *con* $z \neq 0 \Leftrightarrow x = y$

Dimostrazione

Dalla (16) segue l'unicità dell'opposto e quindi la (24). Così anche dalla (20) segue la (25).

OSSERVAZIONE

Le regole dei segni per la moltiplicazione che valevano in Z continuano a valere per la (18) e la (19).

5. Considerazioni algebriche.

La struttura algebrica:

$$Q = (|Q|, S, P)$$

ora introdotta è una struttura di campo ovvero di corpo commutativo. Gli assiomi di campo sono stati già provati, basta dimostrare le relazioni: [(5), (6), (7), (8), (9), (10), (11), (14), (15)].

L'ente subordinato ($|Q_0|$, P) è il ***gruppo delle unità*** o degli ***elementi regolari*** di Q.

6. Relazione d'ordine naturale in Q e compatibilità con le operazioni.

Premettiamo il seguente:

Teorema

Se $x \in |Q_0|$ e se le frazioni a/b, c/d sono rappresentanti di x allora:

$$a \cdot b > 0 \quad \text{in } Z \quad \Leftrightarrow \quad c \cdot d > 0 \quad \text{in } Z$$

Dimostrazione

Infatti se è $a \cdot b > 0$ ed $a \cdot d = b \cdot c$, allora segue:

$$(a \cdot d)^2 = (a \cdot d) \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot (c \cdot d) > 0$$

onde essendo $c \cdot d \neq 0$ risulta $c \cdot d > 0$.

Definizione.

Un numero razionale $x = \overline{a/b}$ è positivo e scriveremo $x < 0 \Leftrightarrow a \cdot b > 0$ in Z.

Definizione.

Un numero razionale $x = \overline{a/b}$ è negativo e scriveremo $x < 0 \Leftrightarrow a \cdot b < 0$ in Z.

Indicheremo con Q^+ e Q^- rispettivamente l'insieme dei razionali positivi e dei razionali negativi.

Gli insiemi Q^+, Q^- e $\{0\}$ formano ovviamente una ***partizione*** di Q.

Definizione**. **Quali che siano $x, y \in |Q|$ porremo:

(26) $x > y \Leftrightarrow x - y \in Q^+$

(27) $x < y \Leftrightarrow y > x$

(28) $\quad x \geq y \;\Leftrightarrow\; x - y \in Q^+ \cup \{O\}$

(29) $\quad x \leq y \;\Leftrightarrow\; y \geq x$

Teorema

L'insieme Q^+ è chiuso rispetto alle operazioni S, P, D.

Dimostrazione

Siano $x = \overline{a/b}$, $y = \overline{c/d} \in Q^+$. Per ipotesi è quindi $a \cdot b \in Z^+$, $c \cdot d \in Z^+$.

Si ha ora:

$$x \cdot y = \overline{a \cdot c / b \cdot d} \in Q^+$$

poiché $(a \cdot c) \cdot (b \cdot d) = (a \cdot b) \cdot (c \cdot d) \in Z^+$ risulta

$$x \cdot y^{-1} = \overline{a \cdot d / b \cdot c} \in Q^+;$$

poiché $(a \cdot d) \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot (c \cdot d) \in Z^+$ risulta

$$x + y = \overline{a \cdot d + c \cdot b / b \cdot d} \in Q^+$$

poichè $(b \cdot d) \cdot (a \cdot d + c \cdot b) = d^2 (a \cdot b) + b^2 (c \cdot d) \in Z^+$.

Dal teorema precedente discende la seguente

OSSERVAZIONE

L'insieme $Q^* = Q^+ \cup O$ definisce pertanto un sottoinsieme che viene detto il ***semianello*** dei razionali non negativi. L'ente subordinato (Q^+, P) è un ***gruppo abeliano***.

Teorema

La relazione " $\geq$ " definita in Q è una relazione d'ordine totale; risulta cioè $\forall x, y, z \in |Q|$

- ***(a)*** $x \geq x$,
- ***(b)*** $x \geq y,\; y \geq x \;\Rightarrow x = y$,
- ***(c)*** $x \geq x,\; x \geq z \Rightarrow x \geq z$
- ***(d)*** $x \geq y$ ***oppure*** $y \geq x$

Dimostrazione

La (a) è ovvia.

Per provare la (b) osserviamo che poiché $x - y \in Q^+ \cup \{0\}$ ed $x - y \in Q^- \cup \{0\}$ ed essendo $Q^+ \cap Q^- = \varnothing$ segue $x - y = 0$.

La transitiva segue dall'osservare che se $x - y \in Q^*$ ed $y - z \in Q^*$ allora

$$(x - y) + (y - z) = (x - z) \in Q^*.$$

Infine la (d) segue dall'osservare che poiché la famiglia $\{Q^+, O, Q^-\}$ di parti di $|Q|$ è una partizione di $|Q|$ l'elemento $x - y \in |Q|$ può appartenere ad uno di essi soltanto.

Teorema.

Le relazioni $>, \geq, <, \leq$ sono compatibili con S e P, cioè se $x, y, \in |Q|$ si ha:

(30) $\quad x + z > y + z \;\Leftrightarrow\; x > y \qquad \forall z \in |Q|$

(31) $\quad x \cdot z > y \cdot z \;\Leftrightarrow\; x > y \quad \forall z \in Q^+$

(32) $x \cdot z > y \cdot z \iff x < y \qquad \forall z \in Q^-$

Le stesse relazioni si scrivono con $\geq, <, \leq$.

Dimostrazione

Ovvia conseguenza del fatto che Q^+ è chiuso rispetto alle operazioni.

7. Esistenza della sottostruttura di Q isomorfa a Z.

Consideriamo il sottoinsieme Z' di Q formato dai numeri razionali del tipo $\overline{a/b}$ tali che b | a in Z. Se $\overline{a/b} \in$ Z' e se a = h · b si ha $\overline{a/b} = \overline{h \cdot b/b} = \overline{h/1}$

Teorema

L'insieme |Z'| è chiuso rispetto a S e P.

Infatti, come è ovvio $\forall$x, y $\in$ Z' se

x = $\overline{a/1}$, y= $\overline{b/1}$ si ha:

$$x + y = \overline{a+b/1} \quad e \quad x \cdot y = \overline{a \cdot b/1}$$

Teorema

La struttura algebrica Z' è isomorfa all'anello Z dei relativi.

Dimostrazione

Definiamo l'applicazione

$$f: Z' \to Z$$

tale che $\forall\ \overline{a/b} \in$ Z' $f(\overline{a/b}) = \frac{a}{b}$ = h. Si ha

(a) La definizione dell'applicazione f è ***ben posta***. Basta osservare che se $\overline{c/d} = \overline{a/b}$ e se a = b · h, dalla relazione $\overline{c/d} = \overline{h/1}$ segue c = h · d in Z', onde $f(\overline{c/d})$ = h.

(b) L'applicazione f è ***biettiva***. Fissato un qualsiasi a $\in$ | Z | , basta considerare la classe $\overline{a/1}$.

(c) L'applicazione f è un ***omomorfismo***. Basta osservare che

$$f(\overline{a \cdot h/h} + \overline{b \cdot k/k}) = f((a + b) \cdot hk / hk) = a + b = f(a\,h / h) + f(b\,k / k)$$

$$f(\overline{a \cdot h/h} + \overline{b \cdot k/k}) = f(a\,b \ \cdot h\,k / hk) = a \cdot b = f(a\,h / h) \cdot f(b\,k / k).$$

Quindi possiamo, come usuale, identificare gli elementi di Z' con quelli di Z.

Porremo pertanto l'eguaglianza formale:

$$(33) \quad \overline{a/1} = a$$

Da ciò segue che ***ogni numero razionale può essere identificato con la sua frazione generatrice***.

Infatti si ha

$$\overline{a/b} = \overline{a/1} \cdot \overline{1/b} = \overline{a/1} \ / \ \overline{b/1} = a / b$$

Quindi d'ora in avanti per le considerazioni che si faranno si userà tale simbolismo.
Si suole inoltre aggiungere la seguente ***convenzione di scrittura***; si porrà

$$(34) \qquad a / b \begin{cases} = +|a| / |b| & \text{se } a, b > 0 \\ = -|a| / |b| & \text{se } a, b < 0 \end{cases}$$

in tal modo si scrive un solo segno.
Esempio

$$+3 / -2 = -3/2; \quad -7 / -3 = +7/3.$$

Pertanto ***ogni razionale non nullo viene ad essere rappresentato da una frazione preceduta da un segno***.
Se

$$\varepsilon\, a / b = \varepsilon \frac{a}{b} \in |Q_0|, \quad \varepsilon \in S$$

Il naturale a sarà detto ***numeratore***, il naturale b ***denominatore***, ε ***segno*** della frazione.
Naturalmente tale rappresentazione non è unica essendo ogni razionale rappresentabile in infiniti modi.

Può accadere inoltre che in N_1 risulti $b | a$ cioè che $a = k\, b$. Allora si porrà

$$(35) \qquad (\overline{a/b}) = (\overline{k/1}) = k = \varepsilon |k|$$

con

$$\varepsilon = + \quad \text{se } a, b > 0 \qquad \varepsilon = - \quad \text{se } a, b < 0.$$

8. FORMA CANONICA DI UN NUMERO RAZIONALE

Sia $S = \{+, -\}$ l'insieme dei segni e sia $\varepsilon \in S$.
Ogni razionale non nullo sarà scritto nella forma

$$\varepsilon\, a / b \qquad \text{con } a, b \in N_0$$

Teorema
Se $\varepsilon\ a / b \in |Q_\varepsilon|$ allora esiste una coppia di interi positivi p e q con p, q primi tra loro tali che risulti

$$(36) \qquad \varepsilon\ a / b = \varepsilon\ p / q$$

e tale coppia è unica.
Dimostrazione
Posto

$$p = \frac{a}{(a,b)} \qquad q = \frac{b}{(a,b)}$$

l'intero $a\,q - b\,p$ risulta uguale a

$$a\,q - b\,p = \frac{ab}{(a,b)} - \frac{ab}{(a,b)} = 0$$

da cui

$$\varepsilon \;\; a/b \;=\; \varepsilon \; p/q.$$

Inoltre come è noto

$$(p,\, q) = \left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}\right) = 1.$$

L'esistenza di una coppia almeno è quindi provata.
Siano ora p', q' $\in N_1$ tali che (p', q') = 1 ed inoltre p q' = p' q.
Risulta dunque, essendo *(p, q) = 1*, che **ogni divisore d** dell'intero p deve dividere p', ed inversamente, essendo *(p', q') = 1*, **ogni divisore d'** dell'intero p' deve dividere p, ne segue

$$p = p'$$

e, per la regola di semplificazione

$$q = q'.$$

Definizione
Comunque dato un numero razionale non nullo, si dirà sua ***forma canonica*** o ***frazione rappresentatrice ridotta ai minimi termini la frazione con numeratore e denominatore primi tra loro la cui esistenza ed unicità è provata dal teorema precedente.***

Definizione
Chiameremo ***forma canonica del numero razionale nullo il simbolo 0 che può essere identificato naturalmente sia con lo 0 di Z sia da quello di N_0.***

Se la forma canonica di un razionale è del tipo ε a/1 penseremo tale razionale identificato con i relativi ε a e, qualora ε = +, ometteremo anche il segno pensando l'elemento identificato con il naturale corrispondente.

OSSERVAZIONE
Concludiamo con un'osservazione sulla ***somma di due razionali non nulli*** in forma canonica.
Siano

$$\varepsilon_1\,\frac{p}{q}, \qquad \varepsilon_2\,\frac{r}{s} \;\in |\,\mathbf{Q}_0\,|, \qquad\qquad \varepsilon_1,\;\varepsilon_2 \;\in S$$

Nel calcolo della somma si può applicare l'evidente relazione

$$(37) \qquad (\varepsilon_1\,\frac{p}{q} + \varepsilon_2\,\frac{r}{s}) = \frac{\varepsilon_1(q,s)\cdot p\varepsilon_2(q,s)\cdot r}{(q,s)}$$

Il risultato in generale non fornisce la forma canonica della somma che deve essere determinata, ma è utile osservare che procedendo in tal modo, invece, si ottiene un denominatore più piccolo di quello che si avrebbe se si applicasse la definizione e pertanto il procedimento di ricerca della forma canonica è in ogni caso semplificato.

Facendo uso per i naturali della rappresentazione decimale seguono i seguenti significativi **esempi**.

Procedendo secondo la nuova regola si ha:

$$\frac{1}{180}+\frac{1}{270}=\frac{1}{2\cdot 90}+\frac{1}{3\cdot 90}=\frac{3+2}{2\cdot 3\cdot 90}=\frac{5}{540}$$

Procedendo secondo la definizione si ottiene:

$$\frac{1}{180}+\frac{1}{270}=\frac{270+180}{180\cdot 270}=\frac{450}{48600}$$

Ora per ottenere la forma canonica della somma è chiaro che sia più semplice fare il M.C.D. fra 5 e 540, che è ovviamente 5, invece di quello fra 450 e 48600.

L'esempio prova inoltre chiaramente come la regola indicata non fornisca direttamente la forma canonica della somma.

9. POTENZE AD ESPONENTE IN Z. ESTENSIONE AI NUMERI RAZIONALI DEL TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ARITMETICA

Definizione

Sia $a \in |Q_0|$ ed $n \in N_2$, definiamo ***potenza in base a ed esponente n e la denoteremo con a^n il razionale[1] che si ottiene dalla posizione***

$$a^n = \prod_{i=1}^{n} a_i \qquad a_i = a$$

Si ha il seguente

Teorema

Sia $k \in N_2$, e sia $n > k+1$, risulta

$$(38) \qquad \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k} \qquad \forall a \in |Q_0|$$

Dimostrazione

Ovvia.

Tale relazione con opportune convenzioni può essere estesa ad $n, k \in Z$.

[1] Il simbolo a^n si legge "a alla n" e nel caso di n = 2, n = 3, si legge "a al quadrato", "a al cubo". La dicitura a – due, a – tre, entrata ormai nell'uso, non è molto corretta confondendosi nella lettura delle lettere indicate.

Poniamo per ***definizione***

(39) $\boldsymbol{a^1 = a} \qquad \forall \boldsymbol{a} \in |\mathbf{Q}|$

(40) $\boldsymbol{a^0 = 1} \qquad \forall \boldsymbol{a} \in |\mathbf{Q}_0|$

(41) $\boldsymbol{a^{-n}} = \dfrac{1}{a^n} \qquad \forall \boldsymbol{a} \in |\mathbf{Q}_0| \quad \mathbf{e} \quad \forall \boldsymbol{n} \in \mathbf{N}_0$

Secondo tali posizioni si ha

$$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k} \quad \forall a \in |\mathrm{Q}_0| \quad \text{e} \quad \forall n \in |\mathrm{Z}|$$

che generalizza la (38).
La (42) si mostra osservando che se $n \geq k + 1$, poiché $n - k \in \mathrm{N}_2$, essa si riduce alla (38). Se poi $n - k \in \mathrm{N}_0 - \mathrm{N}_2$ si ha che $n - k = 1$ oppure $n - k = 0$, da cui la (42) discende dalla (39) e dalla (40). Se infine $n - k \in -\mathrm{N}_1$ si osservi che si ha

$$\frac{1}{a^k / a^n} = \frac{1}{a^{k-n}} \qquad \text{con } k - n \in \mathrm{N}_0$$

da cui per la (41) segue la (42).

Vediamo ora come si possa estendere il ***teorema fondamentale dell'aritmetica***.
Sia

$$\varepsilon \frac{a}{b} \in |\mathrm{Q}_0| \qquad \varepsilon \in \mathrm{S}$$

Siano a e b ***primi tra loro***, cioè sia il razionale in forma canonica; allora i numeri naturali a e b se sono composti ammetteranno una rappresentazione del tipo

$$a = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} \qquad b = \prod_{i=r+1}^{r+s} p_i^{\beta_i}$$

Si può scrivere quindi

$$\varepsilon \frac{a}{b} = \varepsilon \frac{\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_1}}{\prod_{i=r+1}^{r+s} p_i^{\beta_i}} = \varepsilon \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} \prod_{j=r+1}^{r+s} p_j^{-\beta_j}$$

e, posto $-\beta_j = \alpha_j$ per $j = r+1, \ldots, r+s$ segue

(43) $$\varepsilon \frac{a}{b} = \varepsilon \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i} \qquad \text{con } \alpha_i \in |\mathrm{Z}|.$$

Se poi a e b sono entrambi ***primi*** o se $a = 1$ si ha

(44) $$\varepsilon \frac{p}{q} = \varepsilon\, p \cdot q^{-1} \qquad \text{p, q} \in \square$$

(45) $$\varepsilon \frac{1}{q} = \varepsilon\, q^{-1} \qquad \text{p, q} \in \square$$

10. ULTERIORI OSSERVAZIONI E PROPRIETA'. CONCETTO DI ESTREMO SUPERIORE ED INFERIORE PROPRIETA' DI DENSITA' DEL CAMPO RAZIONALE.

Consideriamo l'applicazione

$$V : |Q| \rightarrow |Q| - Q^-$$

definita ponendo $\forall\, a \in |Q|$

$$V(a) = \begin{cases} a & \text{se } a \in |Q| - Q^- \\ -a & \text{se } a \in Q^- \end{cases}$$

L'elemento **V(a)** sarà anche denotato con il simbolo **$|a|$** e verrà detto ***valore assoluto del razionale a***.

Teorema

Quali che siano a, b $\in |Q|$ si ha

(46) $|-a| = |a|$

(47) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

(48) $|a + b| \leq |a| + |b|$

(49) $a \cdot a = |a| \cdot |a|$

Dimostrazione

Le (46), (47), (49) sono ovvie.

Per dimostrare la (48) basta osservare che sussiste il segno di eguaglianza quando a e b sono dello stesso segno; negli altri casi dalle ovvie relazioni

$$a + b \leq |a + b|, \quad a < |a|, \quad b \leq |b|$$

segue l'asserto.

Sussiste il seguente

Teorema

Quali che siano a, b $\in |Q_0|$ con $|a| > |b|$ esiste $n \in N_1$ tale che sia $n\,|a| > |b|$, ovvero (Q^+, P, >) è archimedeo.

Dimostrazione

Posto $|a| = \frac{p}{q}$, $|b| = \frac{r}{s}$ si ha

$$\frac{p}{q} > \frac{r}{s} \Rightarrow s \cdot p > r \cdot q \quad \text{in } N_0;$$

ora in N_0 esiste n tale che $n\, r \cdot q > s \cdot p$ da cui

$$n\,\frac{r}{s} > \frac{p}{q}$$

cioè l'asserto.

Teorema di densità

Quali che siano a, b $\in |Q|$ con $a < b$ esiste $c \in |Q|$ tale che

$$a < c < b$$

Tale fatto si esprime dicendo che ($|Q|$, <) è denso.

Dimostrazione

Si ha a < c, infatti da

$$a < b \Rightarrow a + a < a + b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2}$$

Analogamente si ragiona per mostrare che $c < b$.

Dato un insieme H di numeri razionali poniamo le seguenti

Definizioni

H si dice limitato superiormente se esiste un razionale a tale che

$$\forall x \in H \Rightarrow a < x$$

H si dice limitato inferiormente se esiste un razionale a tale che

$$\forall x \in H \Rightarrow a > x$$

Il razionale m si dice un minimo per H se

$$m \in H \quad e \quad \forall x \in H \Rightarrow m \geq x$$

Il razionale M si dice un massimo per H se

$$M \in H \quad e \quad \forall x \in H \Rightarrow M \leq x$$

Il razionale e' un estremo inferiore di H se

(a) $e' < x, \ \forall x \in H$

(b) $\forall \varepsilon \in Q^+ \ \exists y \in H$ ***tale che*** $y - e' < \varepsilon$

Il razionale e'' un estremo superiore di H se

(c) $e'' > x, \ \forall x \in H$

(d) $\forall \varepsilon \in Q^+ \ \exists y \in H$ ***tale che*** $e'' - y < \varepsilon$

Sussiste la seguente ***proposizione***

Un insieme di numeri razionali limitato superiormente non ha necessariamente massimo e non ha necessariamente estremo superiore.

Dimostrazione

L'insieme H = $\{x$ tali che $x \in Q^+, x < 1\}$ ha estremo superiore pari ad 1 e non ha massimo.

L'insieme H = $\{x$ tali che $x \in Q^+, x^2 \leq 2\}$ non ha estremo superiore. Infatti se e'' fosse estremo superiore, posto $e'' = \frac{p}{q}$ (in forma canonica) dovrebbe risultare

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2\,q^2$$

Essendo $(p, q) = 1$, l'eguaglianza non può sussistere perché se p non è divisibile per 2 si ha un assurdo, mentre se il 2 compare tra i fattori di p^2 un numero pari di volte a secondo membro compare una sola volta.

Analogamente si prova che

Un insieme di numeri razionali limitato inferiormente non ha necessariamente minimo e non ha necessariamente estremo inferiore.