

# TEORIA INGENUA DEGLI INSIEMI

## **INTRODUZIONE** (aggiunta alla edizione originale il 20.02.2019)

La Teoria ingenua degli insiemi venne creata alla fine del XIX SECOLO dal matematico tedesco Georg CANTOR (1845-1918), considerato padre della moderna teoria degli insiemi, specialmente per aiutare le nuove leve di matematici ai lavorare in modo più corretto nei riguardi degli insiemi infiniti.

Chi scrive è un convinto assertore che, in natura non esistono insiemi infiniti, essi sono oggetti del nostro pensiero. A riguardo giova ricordare che l'astrofisico inglese Arthur Stanley Eddington (1882-1944) calcolò, con fantastica precisione e a mano, il numero totale di protoni presenti nell'universo visibile (oppure, ipotizzando l'universo elettricamente neutro, di elettroni), durante una traversata transatlantica nel 1921.

Fu invece nel nel 1938 che Eddington nel suo intervento dal titolo "*The Philosophy of Physical Science*", durante gli incontri chiamati Tarner Lectures at Trinity College di Cambridge, scrisse:

*“Io credo che ci siano 15 747 724 136 275 002 577 605 653 961 181 555 468 044 717 914 527 116 709 366 231 425 076 185 631 031 296 296 protoni nell'universo ed un ugual numero di elettroni”* Si tratta di 15 (28 -liardi), 747 (27-liardi), così via. Tale numero è stimato  $10^{83}$ , entro un errore di due ordini di grandezza. Da notare che anche il numero delle particelle **elementari** nell'universo visibile è stimato tra  $10^{72}$  e  $10^{87}$ .

Per comprendere sia pur vagamente questi enormi numeri, iIn matematica è stato introdotto il **googol (pronuncia gogle) che vale  $10^{100}$ , e non** ha un significato particolare, solo quello di essere utile per un confronto con altri numeri incredibilmente grandi. Uno di questi è il numero delle**possibili** partite a scacchi che è circa  $10^{123}$ .

Si narra che quando stavano dando un nome al gigantesco motore di ricerca [www.google.it](http://www.google.it), fu proposto per telefono di chiamarlo **Gugle** ma si pensava a **googol**, invece l'ascoltatore tradusse in **google!**

Dunque questo primo capitolo è dedicato alla teoria ingenua degli insiemi.

Attenzione questa teoria scaturisce dall'osservazione del mondo ed è una traduzione simbolico-formale del mondo che ci circonda.

Siamo abituati a **riunire** le cose che ci circondano in elenchi, se sono poche (ad esempio l'indice analitico di un libro oppure lo schedario di una biblioteca), , oppure a classificarle con delle proprietà (i commercialisti della Provincia di Roma, i residenti in Svezia, i nati a Teramo nel 1941). I numeri sono in corrispondenza “biunivoca” con le cose numerabili siano essi uomini, nimali,i batteri, elettroni,

protoni! Ad esempio si possono effettuare valutazioni ed asserire che nella città di “Paperopoli” sono residenti esattamente 204.323 abitanti, approssimativamente migliaia di gatti e all’incirca 10 elevato alla 25 o 26 o 27... batteri!

Ma siamo abituati anche a riunire insieme (i maschi della V b, e le femmine della V b, sono gli studenti della V b, dell’Istituto “AFSU”), ad intersecare insieme (l’insieme dei laureati di Roma e l’insieme degli uomini di Roma si intersecano nell’insieme dei romani maschi laureati). Ma vi è da tradurre anche il gioco delle relazioni, le relazione d’ordine sono nella vita giornaliera (dal numero che predi per un posto in una fila alla targa della tua auto), ma anche le “relazioni di equivalenza” sono importanti. Le studieremo a fondo, come studieremo quella operazione denominata “passaggio al quoziente”.

Un esempio significativo può essere il seguente. Consideriamo l’insieme di tutti i laureati in Italia. Diciamo equivalenti due persone se hanno lo stesso diploma (ad esempio magistrale) di laurea.(Se un individuo ha due lauree lo consideriamo due persone). Nascono allora le classi di equivalenza che sono i laureati in medicina, i laureati in matematica, i laureati in lettere e così via. Dalle persone concrete passiamo così ad individuare le classi astratte dei medici, dei matematici, dei letterari e così via. Si tratta di un passaggio dal concreto delle persone all’atratto del titolo posseduto.

La teoria assiomatica degli insiemi di solito risulta astrusa e ha poca influenza sulla matematica ordinaria. Quindi è utile studiare gli insiemi nell’originale senso ingenuo allo scopo di sviluppare abilità nel lavorare con essi. Inoltre, una buona padronanza della teoria ingenua degli insiemi e del suo formalismo è necessaria per”mettere in ordine “ in modo provvisoriamente accettabile la matematica con la quale si opera, rimandando a momenti di approfondimento elevato la comprensione delle motivazione per la teoria assiomatica.

Cantor ha allargato la teoria degli insiemi fino a comprendere al suo interno i concetti di numeri cardinali ed ordinali trasfiniti. Come si scoprì più tardi,dopo la rivoluzione Boubakista, l’idea che sia possibile eseguire qualsiasi operazione sugli insiemi, porta a paradossi ed antinomie, come l’ormai classico paradosso di Russel.

*L’insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi come element, oappartiene a se stesso se e solo se non appartiene a se stesso.* Bertrand Russell (1872-1970).

Si tratta più propriamente di un’antinomia che non di un paradosso. Un paradosso è una conclusione logica e non contraddittoria, che si scontra con il nostro modo abituale di vedere le cose, mentre un’antinomia è una proposizione che risulta auto-contraddittoria sia nel caso che sia vera, sia nel caso che sia falsa.

Il paradosso del bibliotecario è un’altra versione del paradosso di Russell dovuta al filosofo e matematico svizzero Ferdinand Gonseth (1890–1975). *Essa può essere così raccontata.* Al responsabile di una grande biblioteca viene affidato il compito di produrre gli opportuni cataloghi. Egli compie una prima catalogazione per titoli, poi per autori, poi per argomenti, poi per numero di pagine e così via. Poiché i cataloghi si moltiplicano, il nostro bibliotecario provvede a stendere il catalogo di tutti i cataloghi. A questo punto nasce una constatazione. La maggior parte dei cataloghi non riportano sé stessi, ma ve ne sono alcuni (quali il catalogo di tutti i volumi con meno di 5000 pagine, il catalogo di tutti i cataloghi, ecc.) che riportano sé stessi. Per eccesso di zelo, lo scrupoloso bibliotecario decide, a questo punto, di costruire il *catalogo di tutti i cataloghi che non includono sé stessi*. Il

giorno seguente, dopo una notte insonne passata nel dubbio se tale nuovo catalogo dovesse o non dovesse includere sé stesso, il nostro bibliotecario chiede di essere dispensato dall'incarico.

Ma è pure da citare il più semplice paradosso dell'enciclopedia. Nell'ultima pagina di una imponente Enciclopedia appaiono:

Una definizione Indichiamo con N il più grande numero che appare in questa Enciclopedia”

Una domanda: In questa Enciclopedia appare N+1?

**Noi dall'esterno rispondiamo: NO, perché per definizione N è il più grande!**

**SI, perché appare nella domanda!**

Un'altra versione del paradosso è quello della biblioteca infinita, nella quale sono presenti anche i volumi mai scritti su cose mai pensate, o mai esistite, e che include, ancor più paradossalmente, anche il *catalogo di tutti cataloghi che non includono sé stessi*.

Incidentalmente, si ricorda che sul paradosso del bibliotecario scrissero sia il grande scrittore argentino Jorge Luis Borges (1899- 1986) sia il semiologo Umberto Eco (1932-2016). Il primo nel racconto La biblioteca di Babele, contenuto nel volume Finzioni, e con varie allusioni nei testi su Uqbar, il secondo citando il primo ne De Bibliotheca.

La conclusione è che andando nei meandri della teoria appaiono questioni contraddittorie che si possono ritenere molto vicine alla Matematica. Fu questa la ragione che condusse ad una Teoria assiomatica.

La teoria assiomatica degli insiemi fu sviluppata per determinare appunto quali operazioni sono ammesse e sotto quali ipotesi. Oggi, quando i matematici parlano di "teoria degli insiemi" come campo di studio, in genere intendono la *teoria assiomatica* degli insiemi, quando parlano della ricerca di settore, ma quando parlano di teoria degli insiemi come strumento da applicare in altri campi della matematica, intendono la teoria ingenua degli insiemi.

## GENERALITA' (dalle dispense del 1969-70)

Un **insieme**  $A$  si intende **dato** quando esiste un criterio di natura qualsiasi che permetta, dato un qualsiasi **oggetto**  $a$ , reale o del pensiero, di decidere se esso fa parte o no dell'insieme stesso.

Il concetto di **insieme** e di **oggetto** si assumono come intuitivi.

Se un oggetto  $a$  fa parte di un insieme  $A$  si dice che esso è un suo **elemento** o che **appartiene** ad  $A$ ; in simboli

$$a \in A$$

Un insieme privo di elementi si dice **insieme vuoto** e si denota con  $\square$ .

### ESEMPIO

Un esempio di insieme vuoto è l'insieme dei numeri reali di quadrato  $-4$ .

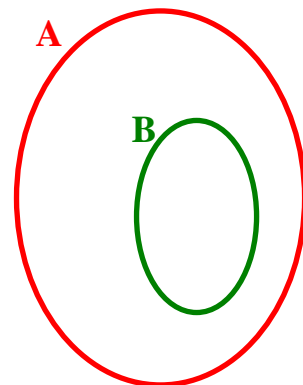
Un insieme  $A$  si dice **finito** se ha un numero finito di elementi; si dice **ordine** dell'insieme il numero dei suoi elementi.

Un insieme che non è **finito** si dice **infinito**.

Siano  $A, B$  due insiemi.

Se ogni elemento di  $B$  appartiene anche ad  $A$  si dice che  $B$  è **incluso** in  $A$  o che  $B$  è **sottoinsieme** di  $A$  e si indica

$$B \subseteq A$$



Se ogni elemento di  $A$  appartiene a  $B$  e ogni elemento di  $B$  appartiene ad  $A$  allora  $A$  è **uguale** a  $B$ ; in simboli

$$A = B$$

Se  $B \subseteq A$  e  $A \not\subseteq B$ , allora vuol dire che *esiste almeno un elemento di  $A$  che non appartiene ad  $B$* , pertanto si dice che  $B$  è **incluso propriamente** in  $A$  e si indica

$$B \subset A$$

L'insieme dei sottoinsiemi di un insieme A si dice *insieme delle parti* di A; fanno parte di esso A e l'insieme vuoto  $\square$ .

### ESEMPIO

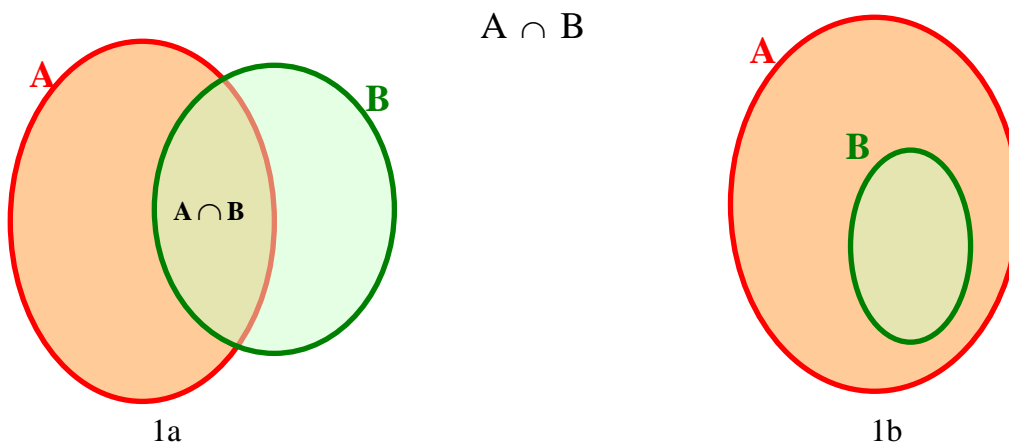
Sia  $A = \{0, 1, 2, 3\}$ . I sottoinsiemi di A sono:  $A; \square; \{0\}; \{1\}; \{0, 1\}; \{0, 2\}; \{0, 3\}; \{1, 2\}; \{1, 3\}; \{2, 3\}; \{0, 1, 2\}; \{0, 1, 3\}; \{0, 2, 3\}; \{1, 2, 3\}; \{0, 1, 2, 3\}$ .

L'insieme delle *parti di A* è l'insieme che ha per elementi i sottoinsiemi di A si indica con  $\mathcal{P}(A)$ .

## OPERAZIONI CON GLI INSIEMI

Siano A, B due insiemi.

Dicesi *intersezione* di A e B l'insieme costituito dagli elementi che appartengono sia ad A che a B (fig.1a, 1b); in simboli



Se  $B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B$  (fig. 1b).

Se A e B **non** hanno elementi comuni allora  $A \cap B = \square$ ; essi si dicono *disgiunti* e la loro intersezione è l'insieme vuoto.

Siano A e B due insiemi.

Dicesi **unione** di A e B l'insieme costituito dagli elementi che appartengono o ad A o a B; in simboli

$$A \cup B$$

Se  $B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A$

### ESEMPI

Siano P l'insieme dei numeri naturali pari e D l'insieme dei numeri naturali dispari. Risulta

$$P \cap D = \emptyset \quad \text{e} \quad P \cup D = \mathbb{N}$$

Sia A l'insieme dei giorni della settimana e  $B = \{\text{lunedì, martedì, mercoledì}\}$ . Risulta

$$A \cap B = B \quad \text{e} \quad A \cup B = A$$

perché  $B \subseteq A$ .

Siano A e B due insiemi.

Si dice **differenza** tra gli insiemi A e B l'insieme costituito dagli elementi di A che non appartengono a B; in simboli

$$A - B$$

Se  $B \subseteq A$ ,  $A - B$  si dice **complementare** di B rispetto ad A.

### ESEMPI

Sia  $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ . Risulta

$$A \cap B = \{1, 3\} \quad A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$$

$$A - B = \{0, 2, 4\} \quad B - A = \{5, 7, 9\}$$

Siano A, B e C tre insiemi.

Per le operazioni appena definite valgono le seguenti **proprietà**:

	<b>Intersezione</b>		<b>Unione</b>
<b>Idempotenza</b>	$A \cap A = A$	<b>Idempotenza</b>	$A \cup A = A$
<b>Commutativa</b>	$A \cap B = B \cap A$	<b>Commutativa</b>	$A \cup B = B \cup A$
<b>Associativa</b>	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	<b>Associativa</b>	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
<b>Distributiva</b>	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$	<b>Distributiva</b>	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
$A - B \subseteq A$			
$(A - B) \cap (A \cap B) = \square$			
$(A - B) \cap (B - A) = \square$			

Valgono inoltre le **leggi di De Morgan**:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Dati due insiemi **A** e **B** non vuoti si definisce **prodotto cartesiano** di **A** e **B**, in simboli  $A \times B$ , l'insieme delle coppie ordinate (a,b) in cui  $a \in A, b \in B$

$$A \times B = \left\{ (a, b) : a \in A; b \in B \right\}$$

All'insieme  $A \times B$  appartengono quindi **tutte** le possibili coppie in cui il primo elemento è *sempre* nel primo insieme e il secondo nel secondo insieme.

E' importante ricordare che le coppie del prodotto cartesiano sono coppie **ordinate**, cioè la coppia (a, b) risulta diversa dalla coppia (b, a), cioè  $A \times B \neq B \times A$ .

Quindi il prodotto cartesiano di  $A \times B$  non gode della *proprietà commutativa*.

Se risulta  $B = A$ , allora si ha il prodotto cartesiano di un insieme per se stesso, in simboli  $A \times A$ , a volte indicato anche con  $A^2$ .

Inoltre se uno dei due insiemi è l'insieme vuoto, cioè  $\mathbf{B} = \square$ , allora risulta

$$\mathbf{A} \times \square = \square \times \mathbf{A} = \square$$

e, in particolare

$$\square \times \square = \square \times \square = \square.$$

### ESEMPI

Sia  $\mathbf{A} = \{0, 1\}$  e  $\mathbf{B} = \{a, b, c\}$ . Il *prodotto cartesiano*  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  è l'insieme  
 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{(0, a); (0, b); (0, c); (1, a); (1, b); (1, c)\}$ .

Se  $\mathbf{A} = \{a, b, c\}$  allora risulta

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \{(a, a); (a, b); (a, c); (b, a); (b, b); (b, c); (c, a); (c, b); (c, c)\}.$$

Per il prodotto cartesiano  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  valgono le seguenti *proprietà*:

**distributiva rispetto all'unione**

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$$

**distributiva rispetto all'intersezione**

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$$

$$\text{Se } \mathbf{C} \subseteq \mathbf{A} \text{ e } \mathbf{D} \subseteq \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C} \times \mathbf{D} \subseteq \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

## RELAZIONI IN UN INSIEME

Il linguaggio comune, cioè la lingua parlata, è costituito da frasi; esse in genere vengono chiamate **proposizioni**.

1. "Madrid è la capitale della Spagna";
2. "Oggi piove?";
3. "3 è maggiore di 7";
4. "Non ti muovere".

Le precedenti sono tutte proposizioni; anche la matematica fa uso delle proposizioni, ma con un significato più restrittivo rispetto alla lingua parlata.

Infatti, in logica matematica si definisce **proposizione** (o anche **giudizio secondo Aristotile**) una frase di cui si può dire se è *ritenuta vera* o *falsa* senza ambiguità; anche i concetti di *vero* o *falso* sono assunti come primitivi.



Tra le frasi riportate sopra, come esempi, solo la 1 e la 3 sono proposizioni.  
In ogni proposizione si distinguono un *predicato* e gli *argomenti*.

### ESEMPI

Nella frase

“Carla è sorella di Giulio”

si distingue il **predicato** “essere sorella di” e gli **argomenti** “Carla” e “Giulio”.

Nella frase

“15 è maggiore di 7”

si distingue il **predicato** “essere maggiore di” e gli **argomenti** “15” e “7”.

Una proposizione riferita a due argomenti viene chiamata **relazione**.

**Precisiamo che si chiama relazione tra due insiemi ogni scelta di coppie nel loro prodotto cartesiano, mentre si chiama grafico della relazione l'insieme delle coppie scelte. I due concetti nella pratica sono identificati dato che assegnare l'uno determina l'altro.**

Le relazioni determinano **così** coppie ordinate di elementi  $(a, b)$ , di cui il primo appartiene ad un insieme assegnato **A** e il secondo ad un altro insieme, anch'esso assegnato, **B**; in tal caso si dirà che “ $a$  è in relazione  $\mathcal{R}$  con  $b$ ”, in simboli

$$a \mathcal{R} b \quad \text{oppure} \quad \mathcal{R}(a, b) \quad \text{con} \quad a \in A, b \in B$$

Le coppie ordinate che verificano la relazione assegnata  $\mathcal{R}$  appartengono ad un insieme che risulta essere sottoinsieme del prodotto cartesiano  $A \times B$ .

### ESEMPIO

Sia  $A = \{2, 4, 7\}$  e  $B = \{2, 5, 8\}$  e sia  $\mathcal{R} =$  “essere minore di”;

$$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a \leq b \quad \text{con} \quad a \in A, b \in B$$

Le coppie appartenenti a  $\mathcal{R}$  (si dice che “verificano ..”) costituiscono l'insieme

$$\{(2, 5); (2, 8); (4, 5); (4, 8); (7, 8)\} \subset A \times B.$$

Da quanto detto in precedenza

dati due insiemi **A** e **B** non vuoti, si definisce **relazione binaria** tra **A** e **B** ogni proprietà che permette di associare elementi di **A** con elementi di **B**.

Una relazione binaria  $\mathcal{R}$  può godere delle seguenti **proprietà**:

**riflessiva**  $\Leftrightarrow a \mathcal{R} a \quad \forall a \in A$  cioè se ogni elemento di  $A$  è in relazione  $\mathcal{R}$  con se stesso

**simmetrica**  $\Leftrightarrow a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a \quad \forall a, b \in A$

**antisimmetrica**  $\Leftrightarrow a \mathcal{R} b \text{ e } b \mathcal{R} a \Rightarrow a = b$   
cioè  $\forall a, b \in A$  con  $a \neq b \quad a \mathcal{R} b \Rightarrow b \text{ non } \mathcal{R} a$

**Transitiva**  $\Leftrightarrow a \mathcal{R} b \text{ e } b \mathcal{R} c \Rightarrow a \mathcal{R} c \quad \forall a, b, c \in A$

### ESEMPIO

Per ognuna delle seguenti **relazioni** analizzarne le proprietà:

1. essere figlio di
2. frequentare la stessa classe
3. essere parallele nell'insieme delle rette del piano
4. essere perpendicolari nell'insieme delle rette del piano

La 1 non è riflessiva, non è simmetrica, non è transitiva; è antisimmetrica.

La 2 è riflessiva, è simmetrica, è transitiva.

La 3 è riflessiva, è simmetrica, è transitiva.

La 4 non è riflessiva, è simmetrica, non è transitiva.

Sia  $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  e si consideri la relazione così definita in  $A$ :

$$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a + b = 4$$

Tale relazione

non è riflessiva; infatti non è sempre vero che  $a \mathcal{R} a$

(infatti  $1 \mathcal{R} 1$  non è vero perché  $1 + 1 \neq 4$ );

è simmetrica; infatti  $a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a$ ;

( $1 \mathcal{R} 3 \Rightarrow 3 \mathcal{R} 1$  perché se  $1+3=4$  allora  $3+1=4$ );

non è transitiva; infatti  $a \mathcal{R} b \text{ e } b \mathcal{R} c$  non implica  $a \mathcal{R} c$ .

Una relazione  $\mathfrak{R}$  definita in un insieme  $A$  si dice **relazione di equivalenza**  $\Leftrightarrow \mathfrak{R}$  è riflessiva, simmetrica e transitiva.

**ESEMPI**

L'identità in un qualsiasi insieme  $A$  è una **relazione d'equivalenza**.

La congruenza tra figure piane è una **relazione d'equivalenza**.

La relazione “essere parallele o coincidenti” tra le rette del piano è una **relazione d'equivalenza che individua le possibili direzioni nel piano**.

Data una relazione di equivalenza  $\mathfrak{R}$  definita in un insieme  $A$  si dice **classe di equivalenza** (modulo  $\mathfrak{R}$ ) il sottoinsieme di  $A$  così definito:

$$[a] = \{ x \in A / x \mathfrak{R} b \}$$

Tutti gli elementi di una classe di equivalenza sono **equivalenti** fra loro.

Sia  $A$  un insieme non vuoto e  $\mathfrak{R}$  una relazione d'equivalenza in  $A$ ; dette  $A_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) le classi di equivalenza risulta:

- $A_i \neq \square \quad \forall i = 1, \dots, n$
- $A_i \subset A \quad \forall i = 1, \dots, n$
- $A_i \cap A_j = \square \quad \forall i = 1, \dots, n \text{ e } \forall j = 1, \dots, n$
- $\bigcup_1^n A_i = A.$

In questo caso si dice che i sottoinsiemi  $A_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) costituiscono una **partizione** di  $A$  (fig. 2).

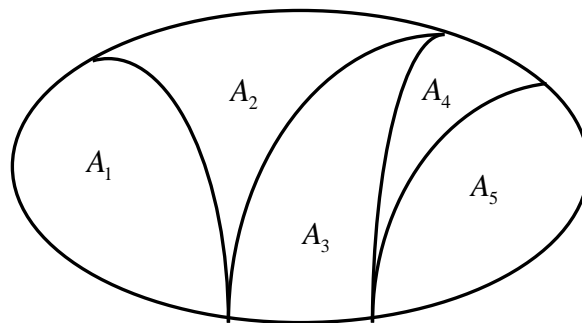


Fig. 2

L'insieme costituito dalle classi di equivalenza di  $\mathbf{A}$  rispetto ad  $\mathfrak{R}$  si dice **insieme quoziente** di  $\mathbf{A}$  rispetto ad  $\mathfrak{R}$  o modulo  $\mathfrak{R}$ , in simboli:

$$\mathbf{A} / \mathfrak{R} = \{ A_1, A_2, A_3, \dots \}.$$