Equazioni algebriche ed equazioni differenziali:

aspetti grafici su analogie e differenze

Ferdinando Casolaro[(1)]

Renata Santarossa[(2)]

(1) (2) Dipartimento di Architettura Università Federico II di Napoli

Via Toledo, 402 – Napoli

Abstract - Si presenta un percorso didattico relativo all'utilizzo degli aspetti grafici nell'insegnamento dell'Analisi Matematica e della Fisica, con particolare riferimento allo studio delle equazioni differenziali, sia nella Scuola Secondaria che nei corsi universitari, fissando l'attenzione sulle proprietà delle curve integrali e sul significato delle soluzioni in ambito applicativo, come previsto dalle Indicazioni Nazionali e dai programmi del Concorso a Cattedre 2016 per docenti della Scuola Secondaria di secondo grado.

1. Introduzione

Questo lavoro è centrato principalmente su alcune riflessioni estratte dalle lezioni "***Sull'insegnamento dell'Analisi Matematica nella Scuola Superiore"*** (oggi Secondaria di secondo grado) tenute ai Corsi di Perfezionamento in Didattica della Matematica nel Dipartimento di Scienze Matematiche dell'Università "*Federico II*" di Napoli nel periodo che va dall'Anno Accademico 1995/96 all'anno 2004/2005 e nel Dipartimento di Matematica ed Informatica dell'Università di Salerno negli anni Accademici 1999/2000 e 2000/2001.

Nella sua completezza, l'esposizione ha come obiettivo l'introduzione di ***un percorso per l'isegnamento dell'Analisi Matematica, il cui studio è fatto con il rigore che la disciplina richiede, ma con osservazioni di carattere grafico ed esempi riferiti alle applicazioni***.

Gli elementi caratterizzanti sono:

1. il significato delle costanti arbitrarie nelle applicazioni,
2. il piano cartesiano e la rappresentazione su di esso:
   - delle soluzioni reali delle equazioni algebriche come punti di intersezione del grafico della rappresentazione analitica con l'asse delle ascisse; nel caso di radici immaginarie, si osserva la parte di curva situata al di sopra o al di sotto dell'asse delle ascisse.

   - delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari come infinite curve che rigano l'intero piano ma, ai fini applicativi, un'equazione assume significato solo se accompagnta dalle condizioni iniziali poste dal problema di Cauchy. A tal proposito, si dà un esempio al paragrafo 5 con il riferimento all'equazione della dinamica di Newton ed alla modellizzazione di fenomeni fisici.

Nel paragrafo 4 abbiamo trattato, anche se sintetiamente, il problema degli integrali singolari, cioè di quelle curve integrali che non si ottengono per alcun vlore delle costanti arbitrarie.

2. Il piano cartesiano tra Fisica e Matematica

L'evoluzione della matematica è legata all'analisi dei fenomeni fisici e, viceversa, i fenomeni fisici sono rappresentati da leggi matematiche.

La Geometria analitica e l'Analisi matematica permettono la lettura dei fenomeni attraverso rappresentazioni analitiche e grafiche.

Dal punto di vista didattico la prima osservazione - che caratterizza la distinzione degli aspetti globali da quelli locali - è che per rappresentare il moto uniforme e il moto uniformemente vario è sufficiente la conoscenza della:

- aritmetica (*proporzionalità diretta e proporzionalità quadratica*)
- algebra (*equazioni di primo e secondo grado*)
- piano cartesiano (*retta e parabola*).

Per studiare, invece, il moto irregolare ossia, non uniforme né uniformemente vario, c'è bisogno di altre conoscenze dell'analisi matematica: infatti le equazioni non sono algebriche ma differenziali.

Relativamente al moto irregolare si richiede la conoscenza del concetto di derivata, che nei vecchi programmi si studiava al quarto anno degli Istituti tecnici e al quinto anno dei licei scientifici. Con le Nuove Indicazioni nazionali è stato introdotto lo studio della fisica nei bienni dei licei per cui si pone il problema di far comprendere agli studenti le questioni relative a monotonia e concavità di funzioni continue.

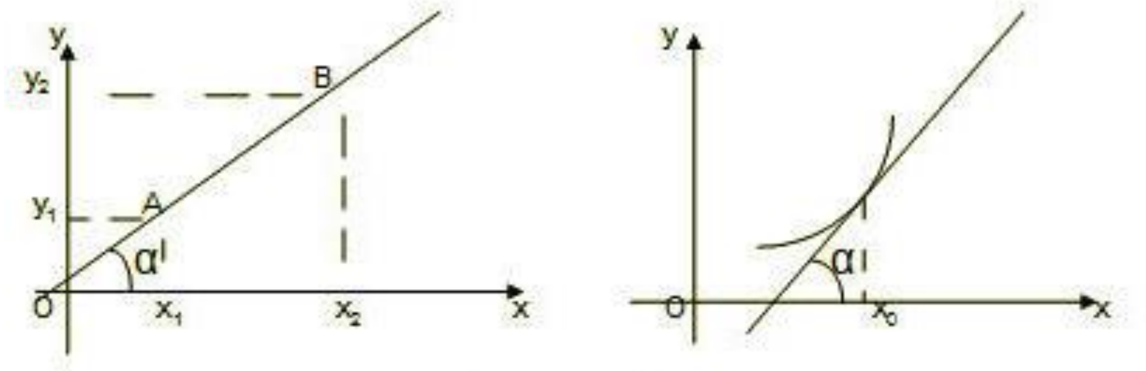
La definizione di derivata è stata sempre legata al concetto di limite, ma riteniamo che - ai fini esclusivamente didattici - il legame *limite-derivata* non sia essenziale se si utilizza la geometria analitica e si analizzano gli aspetti grafici. A questo riguardo si fa riferimento al volume *Matematica un approccio*, dove è presentato una via sperimentale, sia pure con le sue restrizioni, per introdurre le derivate senza l'uso dei limiti.

Procedendo per altra via , noi introduciamonozione di derivata, come coefficiente angolare della retta tangente, sfruttando in tal modo quell'*effetto visivo*, così didatticamente efficace presso gli studenti. Per tale via, noi siamo convinti che, non si perde"del tutto" il rigore, e si riesce anche a meglio far comprendere - con dimostrazioni grafiche - i teoremi di monotonia delle funzioni derivabili.

2.1 - ***Se una retta forma un angolo acuto con il semiasse positivo delle ascisse, il suo coefficiente angolare è positivo.***

Per il significato geometrico di derivata si ha di conseguenza:

Se f (x) è una funzione derivabile e strettamente crescente in un intorno di un punto x_0, per il significato geometrico di derivata, risulta f' (x_0) > 0:



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{+}{+} > 0$$

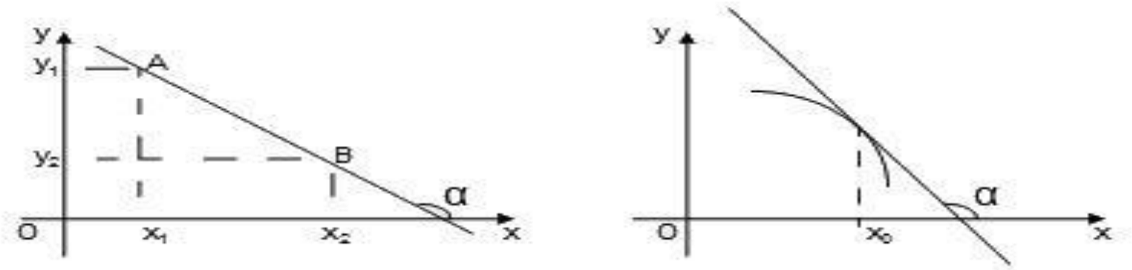
$$0 < \alpha < 90° \Rightarrow m > 0 \Rightarrow f'(x_0) > 0$$

fig. 2.1

2.2- Se una retta forma un angolo ottuso con il semiasse positivo delle ascisse, il suo coefficiente angolare è negativo.

Per il significato geometrico di derivata si ha di conseguenza:

Se f (x) è una funzione derivabile e strettamente decrescente in un intorno di un punto x_0, per il significato geometrico di derivata, risulta $f'(x_0) < 0$:



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-}{+} < 0$$

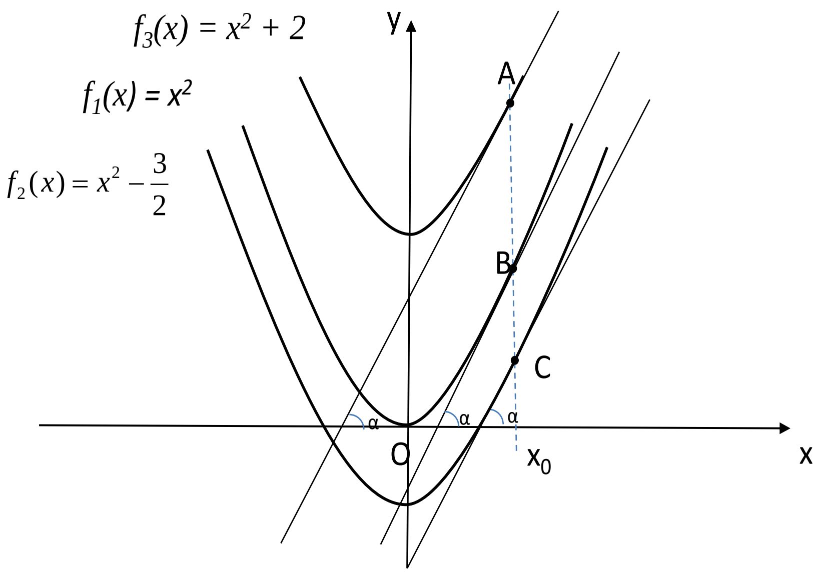
$$90° < \alpha < 180° \Rightarrow m < 0 \Rightarrow f'(x_0) < 0$$

fig. 2.2

Osservando gli aspetti grafici (fig.2.2): la retta tangente alla curva nel punto di ascissa x_0 forma un angolo ottuso con il semiasse positivo delle ascisse, ossia il suo coefficiente angolare è negativo.

Sempre utilizzando le rappresentazioni grafiche, si evidenzia il teorema relativo alla caratterizzazione delle primitive di una funzione: “*Due primitive di una stessa funzione differiscono per una costante*”.

Dal grafico che segue si visualizza il significato della costante, ossia di ogni possibile traslazione della curva che rappresenta la primitiva di una stessa funzione.



$f'_1(x) = f'_2(x) = f'_3(x) = 2x$

$$\int (2x)dx = \left.\begin{matrix} x^2+2 \\ x^2 \\ x^2-\frac{3}{2} \end{matrix}\right\} = x^2 + c$$

3. Equazioni differenziali

Al primo anno della scuola secondaria superiore si introducono le espressioni nella variabile *x*:

$$a\,x = b, \qquad a + x = c \qquad (\text{ con } a, b, c \text{ elementi di } \mathbf{Q},\ a \neq 0) \qquad (3.1)$$

che diciamo essere "*le più semplici equazioni algebriche*", in quanto le operazioni che si utilizzano per ottenere le soluzioni $x = \frac{b}{a}$, $x = c - a$, sono le quattro operazioni aritmetiche elementari.

Con lo studio dei numero reali, si passa ad equazioni intere di grado superiore al primo del tipo:

$$\sqrt{a}\,x = b, \qquad \sqrt{a} + x = c$$

Nelle applicazioni non sempre si richiedono le soluzioni di un'equazione, ma si richiede anche di determinare un'equazione le cui soluzioni risolvono un determinato problema.

Allora si propone un metodo per introdurre, in un percorso didattico, il calcolo delle primitive di una funzione come soluzione delle più semplici equazioni differenziali del primo ordine. Per analogia sarà possibile passare, poi, ad equazioni più generali e ad equazioni di ordine superiore al primo e quindi alle applicazioni.

E' noto a tutti che, per ottenere un modello matematico si deve costruire un'equazione le cui soluzioni risolvono quel determinato problema. Partendo dall'equazione $y' = f(x)$ si vogliono sottolineare gli aspetti qualitativi che rappresentano il focus della questione.

Il *teorema fondamentale del calcolo integrale* caratterizza il legame tra una funzione continua *f(x)* definita in un intervallo $X \subseteq R$ ed una sua primitiva *F(x)* definita in $A \supseteq X$, tale che

$$F'(x) = f(x).$$

Invertendo il problema si ha:

Data una funzione continua f(x) definita in un intervallo $X \subseteq R$ *, determinare la classe di funzioni y = F(x) + c, tali che:*

$$y' = f(x) \qquad (3.2)$$

In analogia alle espressioni (3.1), la (3.2) rappresenta "*la più semplice equazione differenziale*", avendo dedotto, dal teorema fondamentale, il calcolo delle primitive di una funzione come operazione inversa dell'operazione di derivata.

Le (3.1) e le (3.2) rappresentano, rispettivamente, equazioni algebriche di primo grado ed equazioni differenziali del primo ordine. Così come si procede nello studio dell'algebra, generalizzando il problema ad equazioni di grado superiore al primo, si può operare nel calcolo differenziale ampliando il problema alle equazioni differenziali di ordine superiore al primo.

Operiamo per analogia:

DEFINIZIONE 3.1 - Un'equazione ***algebrica intera di grado n (nella variabile x)*** è una espressionedel tipo:

$$a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}\, x + a_n = 0 \qquad (3.3)$$

con $a_0, a_2, \ldots\ldots, a_n \in R$.

DEFINIZIONE 3.2 - Un'equazione ***differenziale lineare di ordine n*** è una relazione che lega una ***funzione incognita y(x) alle sue prime n derivate, mediante una espressionedel tipo:***

$$y^{(n)}(x) + a_1(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}(x) y'(x) + a_n(x) y(x) = f(x) \qquad (3.4)$$

con $a_1(x), a_2(x), \ldots\ldots\ldots, a_n(x),\ f(x)$, funzioni continue in un opportuno intervallo $X \subseteq R$.

Dunque la (3.2) ovvero la *y'= f(x)*, è la più semplice equazione differenziale, e la si risolve applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Infatti dalla (3.2), fissato un punto $x_0 \in X \equiv]a,b[$, integriamo ambo i membri tra x_0 e un opportuno punto $x \in I(x_0) \subseteq]a,b[$; indicando con t la restrizione della variabile x all'intervallo $[x_0, x]$, si ha, per il teorema fondamentale:

$$\int_{x_0}^{x} y' dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \; ;$$

$$[y(t)]_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \, ,$$

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

Allora, la funzione incognita

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \qquad (3.5)$$

dipende dalla scelta del punto iniziale x_0 , estremo inferiore di integrazione, per cui, cambiando il punto iniziale, cambia la curva soluzione della (3.2). Precisamente, posto $c = y(x_0)$, la (3.5) diventa:

$$y(x) = c + \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \qquad (3.6)$$

La costante *c*, detta *arbitraria*, dipende, nelle applicazioni, dalle condizioni iniziali richieste, quindi è strettamente legata al problema di Cauchy.

Dunque, è evidente che già nell'introdurre il calcolo delle primitive, sia opportuno sottolineare come la risoluzione del problema dipenda dalla scelta di una condizione iniziale.

Per le equazioni differenziali del primo ordine:

Trovare la funzione integrale y(x), soluzione del problema

$$y' = f(x,y), \quad \text{con} \quad y(x_0) = y_0 \qquad (3.7)$$

ovvero: *"determinare la curva integrale dell'equazione differenziale (3.7) che passi per il punto $P_0(x_0,y_0)$".*

La (3.6) individua una famiglia di curve del piano (*curve integrali*)

$$\Phi(x,y,c) = y(x) - c - \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = 0$$

che rappresentano funzioni continue in un intervallo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq]a,b[$, che si ottengono una dall'altra con la traslazione di equazioni :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y + c \end{cases} \qquad (3.8)$$

per cui, *imporre il passaggio per un punto* significa *individuare la soluzione del problema* (3.7), che sarà unica nel caso in cui la *f(x, y)* verifichi le ipotesi di esistenza ed unicità.

Viceversa, partendo da una famiglia di curve piane della forma

$$\Phi(x,y,c) = 0 \qquad (3.9)$$

(con $c \in R$ e *y* funzione di *x*), esplicitando rispetto a *y* e derivando rispetto a *x*, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} y = f(x,c) \\ y' = \dfrac{df}{dx} \end{cases}$$

da cui, eliminando *c*, si ha l'equazione differenziale

$$F(x, y, y') = 0$$

le cui soluzioni sono tutte (le sole in opportune ipotesi) le curve integrali della famiglia (3.9).

Ad esempio, sia :

$$\Phi(x,y,c) = x - y + ce^{-x} - 1 = 0 \qquad (3.10)$$

una famiglia di ∞^1 curve del piano dipendenti dal parametro *c*.

Esplicitando rispetto ad *y*, derivando rispetto ad *x* ed eliminando *c* nel sistema:

$$\begin{cases} y = x + ce^{-x} - 1 \\ y' = 1 - ce^{-x} \end{cases}$$

si ha:

$$y' = x - y \qquad (3.11)$$

che è un'equazione differenziale lineare del primo ordine, del tipo *y' = f(x, y)*, soddisfatta da tutte e sole le funzioni (3.10).

Nel caso di equazioni del secondo ordine, le soluzioni dipendono, in generale, da due condizioni iniziali. Anche in questo caso, in un percorso didattico, conviene procedere con la risoluzione della semplice equazione :

$$y'' = f(x) \qquad (3.12)$$

per passare poi a questioni più complesse.

Se *y(x)* è una primitiva di ordine due di *f(x)* (ovviamente di classe C^2), si ha :

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} y'(t)dt \qquad (3.13)$$

quindi, operando per parti, con $dt = -d(x-t)$ (posizione lecita in quanto *t* è la restrizione della *x* all'intervallo [x_0, x]), risulta :

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t) f(t)\, dt$$

da cui

$$y(x) = c_1 + c_2(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t) f(t)\, dt \qquad (3.14)$$

La (3.13) è *l'integrale generale dell'equazione differenziale di secondo ordine* (3.12) e definisce una famiglia di curve integrali dipendenti dai due parametri c_1, c_2 . In tal caso, le due costanti c_1, c_2 rappresentano i valori assunti, rispettivamente, dalla funzione integrale *y(x)* e dalla sua derivata *y'(x)* nel punto iniziale x_0 .
Passando poi, più in generale, ad equazioni differenziali del secondo ordine, l'analogo del *problema* (3.12) è il seguente:

"T*rovare la funzione integrale y(x), soluzione del problema*

$$y'' = f\left[x, y(x), y'(x)\right], \quad \text{con} \quad y'(x_0) = y_1 \qquad (3.15)$$

ovvero: *"Determinare la curva integrale dell'equazione differenziale* $y'' = f\left[x, y(x), y'(x)\right]$ *che passi per il punto* $P_0(x_0, y_0)$ *e che in tale punto abbia retta tangente con coefficiente angolare* y_1 *".*

Non si ritiene superfluo che, in un percorso didattico, si evidenzi come, senza risolvere l'equazione, ma semplicemente utilizzando opportune considerazioni grafiche, individuare l'andamento locale della curva integrale nel punto $P_0(x_0, y_0)$ conoscendo l'ordinata y_0 e la monotonia locale dal segno di y_1 .

Nel caso di equazioni del terzo ordine in cui, alle condizioni iniziali della (3.12), si aggiunge la terza condizione $y''(x_0) = y_2$, dal segno di y_2 si evidenzia la concavità locale del grafico.
Generalizzando, le curve integrali (o soluzioni) di un'equazione differenziale di ordine *n* dipendono, in generale e sempre sotto opportune ipotesi, da n costanti c_1 , c_2 ,……, c_n , i cui valori caratterizzano le condizioni iniziali richieste.

4. Questioni analitiche su equazioni particolari: gli integrali singolari.

Per completezza di conoscenza si ritiene opportuno introdurre gli *integrali singolari*, curve integrali che non si ottengono per alcun valore delle costanti. Saranno omessi particolari di carattere teorico al fine di favorire una indagine qualitativa dell'argomento. Avendo come riferimento le equazioni differenziali del primo ordine, si ritiene opportuno sottolineare il legame delle curve che rappresentano gli *integrali singolari* con *la frontiera dell'insieme di definizione della funzione* $f(x,y)$ al secondo membro dell'equazione differenziale assegnata.

Riferendoci all'equazione differenziale (3.10), dell'esempio del paragrafo precedente, abbiamo affermato che la totalità delle curve integrali è rappresentata dalla famiglia (3.9). In realtà diciamo che la (3.10) non possiede *integrali singolari*, cioè soluzioni la cui rappresentazione grafica è completamente tracciata sulla frontiera del dominio della $f(x,y)$. Del resto, il dominio della $f(x,y)=x-y$ [secondo membro della (3.11)] è l'intero piano.

Volendo proporre esempi che possano permettere allo studente di comprendere il legame di un integrale singolare con la frontiera dell'insieme di definizione della *funzione f(x, y)* al secondo membro dell'equazione differenziale, basta riferirsi alla semplice equazione

$$y' = \sqrt{y} \qquad (4.1)$$

Il dominio della *f(x,y)* = $\sqrt{y}$ è costituito dai punti del semipiano $y \geq 0$, per cui la retta di equazione $y = 0$, individua la frontiera del dominio. La (4.1) ammette l'integrale generale

$$y = \frac{1}{4}(x+c)^2 \qquad (4.2)$$

essa rappresenta una famiglia di parabole situate nel semipiano positivo delle ordinate, tangenti all'asse delle *x*, che individua l'inviluppo della famiglia (4.2).
In particolare, anche l'asse delle *x*, di equazione $y = 0$, è una curva integrale della (4.1) ma non si ottiene da alcun valore della costante *c* della (4.2).
Un esempio meno banale, ma nello stesso tempo semplice, è fornito da equazioni del tipo (*equazione di Clairaut*):

$$y = xy' + [f(y')] \qquad (4.3)$$

con $f(y')$ funzione di classe C^1 in un intervallo $]a,b[$.

Data l'equazione $y' = c$, essa è soddisfatta dalla famiglia di rette (curve integrali) del piano

$$y = cx + [f(c)]^2 \qquad (4.4)$$

che rappresenta *l'integrale generale*.
Anche la curva piana, inviluppo della famiglia di rette (4.4) è integrale della (4.3), ma non si ottiene dalla (4.4) per alcun valore di *c*.
Si voglia, ad esempio, risolvere l'equazione:

$$y = xy' + (y')^2 \qquad (4.5)$$

Derivando ambo i membri rispetto a *x*, si ha:

$$y' = y' + x\,y'' + 2\,y'\,y'', \qquad \textit{cioè}: \; y''\cdot[x + 2\,y'] = 0$$

da cui, per la legge di annullamento del prodotto, si ottiene :

$$1. \quad y'' = 0 \qquad y' = c \qquad y = c\,x + k$$

che individua una famiglia di rette del piano che rappresenta l'integrale generale della (5.5);

$$2. \; x + 2y' = 0 \;\Rightarrow\; y' = -\frac{x}{2} \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{4}x^2 + h$$

che rappresenta una famiglia di parabole concave con il vertice nell'origine.

Per h = 0, si ottiene la curva integrale di equazione $y = -\frac{1}{4}x^2$ (inviluppo della famiglia di rette $y = c\,x + k$) che non rientra nell'integrale generale, ma è situata sulla frontiera del dominio della funzione ottenuta dalla (5.5) esplicitando rispetto a y'.

Infatti, da:

$$(y')^2 + x\,y' - y = 0,$$

si ha:

$$y' = \frac{-x \mp \sqrt{x^2 + 4y}}{2} \qquad (4.7)$$

il cui dominio è

$$X: \quad x^2 + 4y \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad y \geq -\frac{1}{4}x^2$$

cioè, le curve integrali (famiglia di rette) sono situate al di sopra del grafico della parabola di equazione $y \geq -\frac{1}{4}x^2$, frontiera del dominio della (4.7).

5. Il problema di Cauchy nelle questioni di Fisica classica.

Nello studio della Meccanica Classica, riferita a sistemi continui, si passa spesso da una grandezza ad un'altra, per ***derivazione*** e ***integrazione*** della funzione (in generale continua) che gestisce il fenomeno.

Un esempio è lo studio del moto di una particella che si rileva che, soggetta ad una forza *F*, subisce uno spostamento Δs in un intervallo di tempo Δt, la velocità si ottiene derivando la grandezza *spazio* rispetto alla variabile *tempo*; analogamente, l'accelerazione che la particella subisce per una qualsiasi variazione di velocità Δv, nel tempo Δt, si ottiene derivando la velocità rispetto al tempo.

Viceversa, il passaggio dall'accelerazione alla velocità (che, nei limiti in cui si può considerare costante la massa, è equivalente al passaggio dalla forza alla variazione della quantità di moto) e dalla velocità allo spostamento, si ottengono, rispettivamente, per integrazione dell'accelerazione (o della forza) rispetto al tempo e per integrazione della velocità rispetto al tempo.

In tal caso, nel calcolo delle primitive, *l'integrazione indefinita determina una classe di infinite funzioni che differiscono per una costante*. I grafici di tali funzioni si ottengono uno dall'altro per traslazione, cioè:

- se $y = F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, un'altra primitiva $Y = G(x)$ si ottiene da $y = F(x)$ mediante la seguente traslazione:

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y + c \end{cases} \qquad (5.1)$$

per cui si deduce che un problema di Fisica classica non è univocamente determinato da tali operazioni.

Ciò non crea problemi dal punto di vista fisico, in quanto è noto che ***le leggi della Meccanica Classica sono invarianti per traslazione***, per cui lo studio del particolare fenomeno che ci interessa è legato ad altri aspetti, primo fra tutti ***il problema delle condizioni iniziali di Cauchy***.

Ad esempio, si analizzi il seguente problema relativo al secondo principio della dinamica:

Studiare il moto di un punto materiale P di massa m che si muove su una retta (asse x) sotto l'azione di una forza f dipendente dal tempo t, dalla posizione di P [*ascissa x(t) di P*] *e dalla velocità di P* [*coefficiente angolare x'(t) della retta tangente alla traiettoria di P*].

Tale problema, nei limiti in cui si può considerare costante la massa *m*, si traduce nel seguente:

$$f = m\,a \qquad \Leftrightarrow \qquad f\,[t, x(t), x'(t)] = m\,x''(t)$$

ovvero:

$$x''(t) = \frac{1}{m}\,f\,[t, x(t), x'(t)] \qquad (5.2)$$

è un'equazione differenziale del secondo ordine che ha per soluzioni una famiglia di curve, le quali rigano l'intero piano, dipendenti da due parametri c_1 e c_2.

E' evidente che, nell'analisi di tale problema, non interessa la determinazione di tutti i possibili moti del punto P sotto l'azione della forza $f\,[t, x(t), x'(t)]$, ma è significativo lo studio di quel particolare moto nel quale *il punto P parte, nell'istante* t_0*, da un'assegnata posizione iniziale* x_0*, con una data velocità iniziale* v_0*;* ciò si traduce nella risoluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{aligned} & x''(t) = \frac{1}{m}\,f\,[t, x(t), x'(t)\,]\,; \\ & x(t_0) = x_0\,; \qquad (5.3) \\ & x'(t_0) = v_0 \end{aligned}$$

Geometricamente, le (5.3) richiedono di *determinare una curva integrale che passi per il punto* $P_0(x_0, y_0)$ *e che in tale punto abbia retta tangente con coefficiente angolare uguale a* v_0.

Tali condizioni ci permettono di determinare univocamente le costanti c_1 e c_2, dette *arbitrarie*, ma impropriamente, perché ***nelle applicazioni esse dipendono esclusivamente dalle condizioni iniziali richieste: sono quindi strettamente legate al problema di Cauchy***.

Pertanto, nell'introdurre il calcolo delle primitive, è opportuno sottolineare come la risoluzione del problema dipenda dalla scelta di una condizione iniziale.

Bibliografia

Casolaro F. (1992), *Il problema dell'integrazione indefinita*, Ratio Mathematica n. 4, 1992 – pag. 29-38.

Casolaro F. (2002, *L'insegnamento dell'analisi matematica nella scuola secondaria superiore*, Appunti del corso di Perfezionamento in Didattica della Matematica 2001/2002, Dipartimento di Matematica "*Renato Caccioppoli*" dell'Università "*Federico* II" di Napoli.

Casolaro F. (ed altri) (2011), *L'introduzione agli argomenti di Analisi Matematica nell'insegnamento,* Editore 2C Contact, pagine 92-112.

Di Marcello V. – Eugeni F.- Tondini D. (1999), Matematica un approccio,Edilgrafital ,Teramo (reperibile sul sito www.afsu.it/libri).

Eugeni F.- Gionfriddo M., Appunti del corso di Algebra e Geometria I, CUSL, Pescara (reperibile sul sito www.afsu.it/libri).

Fiorenza R. - Greco D. (1977), *Lezioni di Analisi Matematica 2,* Liguori, Napoli.

Fusco N. - Marcellini P. - Sbordone C. (2001), *Analisi Matematica 2* , Liguori, Napoli

Ghizzetti A. - Rosati F. (1998), *Complementi ed Esercizi di Analisi Matematica* , Zanichelli, Bologna.

Tricomi F.G. (1956), *Lezioni di Analisi Matematica* , Cedam, Padova.