DI ALCUNE PROPRIETÀ DEL TRIANGOLO

In questa Nota sono esposte alcune proprietà del triangolo, le quali si riferiscono ai punti dei tre lati che dividono questi in tre coppie di segmenti di eguale rapporto.

1. Indicando con a, b, c, S i numeri che misurano i tre lati e l'area d'un triangolo, la quantità

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - (a^4 + b^4 + c^4)$$

è positiva ed eguale, com'è notissimo, a $16\,S^2$.

Reciprocamente, se i numeri positivi a, b, c soddisfanno alla diseguaglianza

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - (a^4 + b^4 + c^4) > 0$$

esiste un triangolo coi lati misurati da a, b, c.

Infatti questa diseguaglianza equivale alla

$$(a + b + c)\ (b + c - a)\ (a + c - b)\ (a + b - c) > 0$$

per soddisfare alla quale dev'essere positivo il prodotto

$$(b + c - a)\ (a + c - b)\ (a + b - c)$$

e in conseguenza ciascuno dei tre fattori, perchè, se due di essi fossero negativi, dovrebb'essere negativo uno dei numeri a, b, c.

2. Sui tre lati BC, CA, AB del triangolo ABC sieno i tre punti A', B', C' così situati che abbiano luogo le eguaglianze di rapporti

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{C'B} = m$$

nelle quali m significa un numero qualunque positivo o negativo.

Indicando con a_1, b_1, c_1 i tre segmenti AA', BB', CC', si troverà

$$a_1^2 = \frac{1}{1+m}\left(mb^2 + c^2 - \frac{m}{1+m}\,a^2\right)$$

$$b_1^2 = \frac{1}{1+m}\left(mc^2 + a^2 - \frac{m}{1+m}\,b^2\right)$$

$$c_1^2 = \frac{1}{1+m}\left(ma^2 + b^2 - \frac{m}{1+m}\,c^2\right)$$

mediante le quali si ottiene

$$a_1^4 + b_1^4 + c_1^4 = \frac{(m^2+m+1)^2}{(m+1)^4}\,(a^4 + b^4 + c^4)$$

$$a_1^2\,b_1^2 + b_1^2\,c_1^2 + c_1^2\,a_1^2 = \frac{(m^2+m+1)^2}{(m+1)^4}\,(a^2\,b^2 + b^2\,c^2 + c^2\,a^2),$$

e in conseguenza

$$2(a_1^2\,b_1^2 + b_1^2\,c_1^2 + c_1^2\,a_1^2) - (a_1^4 + b_1^4 + c_1^4)$$
$$= \frac{(m^2+m+1)^2}{(m+1)^4}\left\{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)\right\}$$

Da quest'eguaglianza è manifesto (1) che esiste un triangolo coi lati eguali ai tre segmenti AA', BB', CC', e che, indicando con S l'area di questo triangolo, si ha la proporzione

$$\frac{S'}{S} = \frac{m^2+m+1}{(m+1)^2}$$

la quale, nel caso di $m = 1$, esprime una nota proprietà delle mediane. È questo il caso nel quale il rapporto $\frac{S'}{S}$ ha il minimo valore, come si rileva facilmente risolvendo la precedente eguaglianza rispetto ad m.

3. Indicando con a_2, b_2, c_2 i tre segmenti B'C', C'A', A'B', si ha

$$a_2^2 = \frac{1}{(1+m)^2}\left\{(1-m)\,b^2 + (m^2-m)\,c^2 + ma^2\right\}$$

$$b_2^2 = \frac{1}{(1+m)^2}\left\{(1-m)\,c^2 + (m^2-m)\,a^2 + mb^2\right\}$$

$$c_2^2 = \frac{1}{(1+m)^2}\left\{(1-m)\,a^2 + (m^2-m)\,b^2 + mc^2\right\}$$

mediante le quali formole si trova che il rapporto dell'area del triangolo $A'B'C'$ all'area del triangolo ABC è

$$\frac{m^2 - m + 1}{(m + 1)^2}$$

Anche questo rapporto è minimo nel caso di $m = 1$.

4. S'indichino ordinatamente con A_1, B_1, C_1 i punti d'incontro delle tre coppie di rette (BB', CC'), (CC', AA'), (AA', BB'). Applicando il teorema di Menelao al triangolo ABA' tagliato dalla trasversale CC', ed al triangolo ACA' tagliato dalla trasversale BB', si hanno le relazioni

$$\frac{AB_1}{B_1A'} \cdot \frac{A'C}{CB} \cdot \frac{BC'}{C'A} = -1$$

$$\frac{AC_1}{C_1A'} \cdot \frac{A'B}{BC} \cdot \frac{CC'}{B'A} = -1$$

dalle quali si ricava

$$\frac{AB_1}{B_1A'} = m\,(m + 1)\,, \quad \frac{AC_1}{C_1A'} = \frac{m + 1}{m^2}$$

e in conseguenza

$$\frac{B_1C_1}{AA'} = \frac{m^2 - 1}{m^2 + m + 1}\,.$$

In modo analogo si dimostreranno le eguaglianze

$$\frac{C_1A_1}{BB'} = \frac{A_1B_1}{CC'} = \frac{m^2 - 1}{m^2 + m + 1}.$$

Perciò il triangolo che ha per vertici i punti $A_1B_1C_1$ è simile a quello che ha i lati eguali ai tre segmenti AA', BB', CC'. È chiaro inoltre (2) che il rapporto dell'area del triangolo $A_1B_1C_1$ all'area del triangolo ABC è dato dalla formola

$$\frac{(m - 1)^2}{m^2 + m + 1}\,.$$

5. Se con a, b, c, a', b', c' s'indicano le proiezioni dei punti A, B, C, A', B', C' sopra una retta qualunque u del piano del triangolo ABC, si ha la proporzione

$$\frac{A'a' - Bb}{Cc - A'a'} = \frac{BA'}{A'C}$$

dalla quale si ricava:

$$A'a' = \frac{1}{m+1} Bb + \frac{m}{m+1} Cc$$

In modo analogo si troverà:

$$B'b' = \frac{1}{m+1} Cc + \frac{m}{m+1} Aa,$$

$$C'c' = \frac{1}{m+1} Aa + \frac{m}{m+1} Bb,$$

e in conseguenza sarà

$$A'a' + B'b' + C'c' = Aa + Bb + Cc$$

cioè la somma delle distanze dei punti A′ B′ C′ da una retta qualunque del piano del triangolo ABC è eguale alla somma delle distanze dei vertici di questo triangolo dalla retta stessa. Di qui risulta che i triangoli ABC, A′B′C′ hanno lo stesso centro di gravità.

6. Reciprocamente, se i punti A′, B′, C′ dei lati BC, CA, AB sono così situati che il centro di gravità del triangolo A′B′C′ coincida col centro di gravità del triangolo ABC, dev'essere

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{C'B}$$

Infatti, indicando con m, n, p questi tre rapporti, si hanno le eguaglianze

$$A'a' = \frac{1}{m+1} Bb + \frac{m}{m+1} Cc$$

$$B'b' = \frac{1}{n+1} Cc + \frac{n}{n+1} Aa$$

$$C'c' = \frac{1}{p+1} Aa + \frac{p}{p+1} Bb$$

dalle quali risulta

$$A'a' + B'b'\ C'c' = \left(\frac{1}{p+1} + \frac{n}{n+1}\right) Aa +$$

$$+ \left(\frac{1}{m+1} + \frac{p}{p+1}\right) Bb + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{m}{m+1}\right) Cc$$

Perciò supponendo

$$A'a' + B'b' + C'c' = Aa + Bb + Cc$$

si avrà l'eguaglianza

$$\frac{n-p}{(n+1)\ (p+1)} Aa + \frac{p-m}{(p+1)\,(m+1)} Bb + \frac{m-n}{(m+1)\ (n+1} Cc = 0$$

la quale dev'essere verificata per ogni posizione della retta u sulla quale si proiettano i punti A, B, C, A', B', C', quindi anche quando essa coincide con uno qualunque dei tre lati; e in conseguenza sarà

$$m = n = p.$$

7. Indicando con a_1, b_1, c_1 le projezioni dei punti A_1, B_1, C_1 sulla retta u si ha

$$\frac{B_1b_1 - Aa}{A'a' - B_1b_1} = \frac{AB_1}{B_1A'}$$

ossia (4)

$$B_1b_1 = \frac{1}{m^2+m+1}\ Aa + \frac{m(m+1)}{m^2+m+1}\ A'a'$$

Si troverà analogamente

$$C_1c_1 = \frac{1}{m^2+m+1}\ Bb + \frac{m(m+1)}{m^2+m+1}\ B'b'$$

$$A_1a_1 = \frac{1}{m^2+m+1}\ Cc + \frac{m(m+1)}{m^2+m+1}\ C'c'$$

e queste tre eguaglianze addizionate daranno (5)

$$A_1a_1 + B_1b_1 + C_1c_1 = Aa + Bb + Cc$$

Dunque anche i triangoli $A_1B_1C_1$, ABC hanno lo stesso centro di gravità.

8. Quando m è positivo, nel quale caso il triangolo $A_1B_1C_1$ è interno al triangolo ABC, effettuando in quello la costruzione che è stata fatta in questo, cioè determinando sui suoi lati i punti A'_1, B'_1, C_1' così che sia

$$\frac{B_1A'_1}{A'_1C_1} = \frac{C_1B'_1}{B'_1A_1} = \frac{A_1C'_1}{C'_1B_1} = m$$

e indicando con A_2, B_2, C_2 i punti d'incontro delle tre coppie di rette (BB_1', C_1C_1'), (C_1C_1', A_1A_1'), (A_1A_1', B_1B_1'), poi operando analogamente sul triangolo $A_2B_2C_2$, e così continuando, i vertici dell' n^{mo} triangolo così costruito tendono a coincidere col centro di gravità del triangolo ABC.

Questa proprietà è un' ovvia conseguenza di quella dimostrata al numero precedente.

D. Besso.

ALCUNI TEOREMI SULLA EQUIVALENZA
STABILITI COL METODO INTUITIVO

1. Il principio fondamentale su cui riposano le seguenti considerazioni, è il seguente:

Data una superficie limitata, per es. un foglio di carta di forma qualunque disteso o no su di un piano; se sopra di esso poniamo delle figure che, senza sovrapporsi, ricuoprano una parte del foglio, l'area del foglio che rimane scoperta, è sempre la stessa comunque sieno poste le figure su di esso.

Se adunque le parti restanti per le diverse posizioni delle figure hanno una facile espressione geometrica, otterremo ogni volta un teorema, relativo all'equivalenza. E poichè tutti i teoremi sull'equivalenza, si riducono a dimostrare un'eguaglianza di aree, sarà dimostrato uno di questi teoremi, quando il foglio e le figure sieno tali, che, poste queste convenientemente e successivamente sul foglio una prima ed una seconda volta, rimangano scoperte rispettivamente le aree scritte nel 1° e 2° membro dell'eguaglianza.

2. È da osservare peraltro, che questo metodo mal si presterebbe per quelle dimostrazioni in cui tutti e due o uno solo dei membri dell'eguaglianza, contenessero dei termini negativi; in tal caso gioverà, per mezzo della trasposizione dei termini, renderli positivi, e poi dimostrare questa nuova eguaglianza.

Teorema 1.

I rettangoli dei cateti non omologhi di due triangoli rettangoli simili, sono equivalenti fra loro ed equivalenti anche al rettangolo costruito sull'ipotenusa dell'uno e sull'altezza dell'altro triangolo (Tav. 1ª, Fig. 1ª).

Siano ABC e CDE i due triangoli rettangoli simili; si vuol dimostrare che il rettangolo dei due cateti non omologhi BC e CD è equivalente al rettangolo degli altri due cateti AB e DE, e che ognuno di essi è equivalente al rettangolo che ha per lati l'ipotenusa dell'uno, per es. AC e l'altezza DF dell'altro.

Si prenda per *quadro* un triangolo rettangolo AGE, di cui i cateti sieno rispettivamente le somme dei cateti omologhi dei due triangoli dati.

Il triangolo CDE è scomposto in due DEF e DFC, per mezzo dell'altezza DF.

Ecco come si dimostra ora il teorema. Quando i triangoli dati hanno sul quadro la posizione ABC e CDE, rimane scoperta la figura BCDG che è il rettangolo dei due cateti non omologhi BC e DC; ma se si porta il triangolo ABC in HGD, facendolo scorrere col lato AB lungo il lato AG del quadro finchè B giunga in G; e il triangolo DFC si porta in HMA, facendolo scorrere col lato FC lungo il lato EA del quadro finchè C giunga in A, rimane scoperta

perta nel quadro la figura HDFM che è il rettangolo dell'ipotenusa AC del triangolo ABC, e dell'altezza DF dell'altro triangolo EDC.

Si porti poi il triangolo DFE in HML, facendolo scorrere col lato EF lungo la EA e il triangolo HGD in LIE facendolo scorrere col lato GD lungo la GE; dopo questi due ultimi cambiamenti rimane scoperta la figura GHLI che è il rettangolo costruito sopra gli altri due cateti non omologhi: il teorema resta in tal modo completamente dimostrato.

Corollari. Se DC fosse eguale CB, i due triangoli ABC e CDE, potrebbero riguardarsi come i due triangoli rettantangoli secondo i quali viene scomposto per mezzo dell' all'altezza il triangolo rettangolo che ha per cateti AC e CE, per altezza $CB = CD$; e per ipotenusa $AB + DE$, come si può riconoscere immediatamente facendo ruotare il triangolo CDE intorno a C, finchè la CD coincida con CB.

In questa ipotesi, cogli stessi movimenti, si viene a dimostrare il teorema:

« Il quadrato costruito sull'altezza di un triangolo ret-
» tangolo, è equivalente al rettangolo dei due segmenti in
» cui l'ipotenusa vien divisa dal piede dell'altezza, ed equi-
» valente ancora al rettangolo di uno dei cateti e della pro-
» iezione dell'altezza su questo cateto ».

Teorema II.

Dati due triangoli rettangoli simili, la somma dei parallelogrammi che hanno due lati adiacenti uguali a due cateti omologhi, e l'angolo compreso uguale ad uno degli angoli acuti dei triangoli dati, è equivalente al parallelogrammo che ha un angolo uguale allo stesso angolo acuto ed i lati che lo comprendono uguali alle ipotenuse dei due triangoli dati (Fig. 2).

Sieno ACB e DCE i due triangoli simili e rettangoli dati; stabiliamo che l'angolo acuto dei parallelogrammi sia l'angolo ABC = CED. Si pongano i due triangoli col vertice dell'angolo retto in comune, e in modo che CE risulti parallelo all'ipotenusa AB; si compiano i parallelogrammi ECBF ed ACDG: si vuol dimostrare che la somma di questi due parallelogrammi è equivalente al parallelogrammo delle due ipotenuse AB e DE, coll'angolo acuto eguale ad ABC.

Infatti, se il triangolo DCE si fa scorrere col lato DE lungo la DF finchè abbia preso la posizione LBF; se si trasporta ACB in GDL, e finalmente se si fa scorrere il triangolo LFB col lato BF lungo la FH, finchè abbia presa la posizione GMA, rimarrà scoperto nel quadro il parallelogrammo GLFM che è appunto quello che ha per lati le due ipotenuse, coll'angolo acuto eguale ad ABC = AFL.

Corollario. – Se il triangolo DCE (Fig. 3) avesse l'altezza CP eguale al cateto CB dell'altro triangolo si vede subito che DP è uguale ad AC e CD eguale ad AB, vale a dire che ognuno dei tre parallelogrammi di cui si fa menzione nell'enunciato del teorema ha la base eguale all'altezza, sicchè trasformando questi parallelogrammi in rettangoli si ottiene la dimostrazione del teorema di Pitagora.

Lascio alla cura del lettore d'interpretrare la fig. 3 che contiene appunto la dimostrazione del suddetto teorema. Questa dimostrazione non differisce in sostanza da quella di *Zaliwski* (Comptes Rendus, 1863).

Teorema III.

Il quadrato costruito sopra un lato di un triangolo, opposto ad un angolo ottuso, è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, aumentata di due volte il rettangolo costruito sopra uno di questi ultimi lati e sulla proiezione dell' altro su di esso. (Fig. 4).

Sia ABC il triangolo dato e BD la proiezione di AB su BC; vogliamo dimostrare che il quadrato di AC è uguale al quadrato di BC, più il quadrato di AB, più due volte il rettangolo che ha per lati BC e BD.

Si costruisca sopra AC il quadrato ACMI e si prenda per *quadro* il quadrato che ha per lato DC + AD.

I triangoli rettangoli ADC, AEI, IFM, MGC, son tutti eguali fra loro.

La dimostrazione si fa nel modo seguente: Si trasporti ABC in ILM; il triangolo MCG si faccia scorrere col lato CG lungo la GD finchè venga in LNB; il triangolo IHA si trasporti in LPB e infine il triangolo ADB, scorrendo col lato AD sulla DE, si trasporti in HQP. L'area che rimane scoperta si compone del quadrato ILPH, che è il quadrato costruito sulla AB; del rettangolo QPBD, che è quello costruito sopra rette eguali a BC e BD; del rettangolo LMGN, che ha il lato ML eguale a CB e il lato MG = CD, e quindi si compone del quadrato della CB e del rettangolo delle due rette CB e BD: il teorema è adunque dimostrato.

Teorema IV.

Il quadrato costruito sopra un lato di un triangolo, opposto ad un angolo acuto, è uguale alla somma dei quadrati costruiti sopra gli altri due lati, diminuita di due volte il rettangolo che ha per lati uno di questi ultimi lati e la proiezione dell'altro su di esso. (Fig. 5),

Sia ABC il triangolo dato e AQ la proiezione di AC sopra AB; si tratta di dimostrare che il quadrato costruito sulla CB è uguale alla somma dei quadrati di AB e di AC, diminuita di 2 volte il rettangolo di AB ed AQ. Per l'osservazione fatta al n. 2 dimostreremo invece che il 1º quadrato aumentato dei due rettangoli, è uguale alla somma degli altri due quadrati.

Le figure che formano la 1ª parte dell'eguaglianza si dispongano nel modo seguente: si costruisca su CB il quadrato CBDR; su AB il rettangolo ABFG, col lato BF = AQ, infine si faccia in LEDP un altro rettangolo eguale al precedente essendo $LP = AB$, $LE = AQ$. Si riconosce facilmente che la figura RDPN è uguale a DBFE, il triangolo $BFE = AQC$ è il triangolo $DBE = BCA$.

Per dimostrare il teorema si cambiano le figure nel modo seguente:

Si porta il triangolo FEB in GHA; ABC in HEI; EDB in IRC; e il quadrilatero PDRN in LEIM. L'Area che rimane scoperta si compone dei due quadrati AHIC e IMNR, che sono appunto costruiti respettivamente sui lati AC e $RI = AB$ del triangolo dato.

Teorema V.

La somma dei quadrati costruiti sopra due lati di un triangolo, è uguale al doppio quadrato costruito sulla metà del terzo lato, aumentato del doppio quadrato costruito sulla mediana relativa a questo lato (Fig. 6).

Sia ABC il triangolo dato, e BP la sua mediana; vogliamo dimostrare che

$$AB^2 + BC^2 = 2AP^2 + 2PB^2$$

Si prenda il triangolo DBE, eguale al triangolo ABT, ossia eguale alla metà del parallelogrammo ABCT, e si ponga in modo che i suoi lati DB e BE risultino rispettivamente perpendicolari ad AB, e BC; si compiano i quadrati ABDL ed EBCM; si prenda il triangolo $LDI = APB$ e il triangolo $EHM = CPB$ e infine si compia il parallelogrammo FGHE. È facile dimostrare che FB è perpendicolare ad AC; MH e LI a DE; ID e EH ad FB.

Assumiamo come quadro la figura irregolare ACMHGFDILA della quale l'area scoperta sia rappresentata dai due quadrati ABDL e BCME; dimostreremo che la somma di questi due quadrati è equivalente al doppio quadrato di BP aumentato del doppio quadrato di AP. Si porti DBF in LAQ; BEF in CSM; LID in AUB; EFGH in RIDF; EMH in FSG e finalmente tutta la figura AUBC in QRFS.

L'area che rimane scoperta è composta dei due quadrati QRIL e SGHM il cui lato è uguale alla mediana, e del rettangolo QSCA i cui lati sono AC e la metà di AC, e che quindi equivale al doppio quadrato di AC. Il teorema resta in tal modo dimostrato.

Teorema VI.

In un triangolo qualunque il quadrato della mediana che parte dal vertice di un angolo acuto è equivalente al quadrato della metà del lato su cui cade la mediana, più il rettangolo costruito sopra uno dei rimanenti lati e sulla proiezione dell'altro su di esso (Fig. 7).

Sia ABC il triangolo dato; AD la sua mediana e NB (parallela ad AC) eguale alla proiezione di AB sopra AC. Voglio dimostrare che $AD^2 = BD^2 + AC.\ NB$.

Si prendano quattro figure, eguali al trapezio ACBN, e si dispongano in ACBN; OBEP; HEFI, LFCM, in modo che BCFE resulti un quadrato (equivalente a 4 volte il quadrato fatto sulla BD). Si prolunghino i lati AN, OP, HI, LM dei quattro trapezi: è facile dimostrare che la figura che si ottiene TQRS è un quadrato, e che NBOT, PEHQ, IFLR, MCAS sono 4 rettangoli eguali, costruiti sopra lati eguali ad AC e BN. Abbiamo dunque che l'area del quadrato TQRS diminuita dei 4 trapezi, è equivalente a 4 volte l'area scritta nel 2.° membro dell'eguaglianza che vogliamo dimostrare; il teorema sarà quindi dimostrato quando avremo fatto vedere che quest'area è equivalente al quadruplo quadrato di AD o anche equivalente al quadrato costruito su di una retta doppia di AD.

Si porti la figura ACBN in SMWJ; la MLFC in UXHZ; la EHJF in WXVM e finalmente la BEPO in ZHQY: l'area che rimane scoperta è composta dei due quadrati VRUX e JXYT, la cui somma, pel teorema di Pitagora, è uguale al quadrato di SX, e per conseguenza a 4 volte il quadrato di SK che è appunto un segmento di lunghezza doppia della mediana perchè diagonale del parallelogrammo SWXM.

Se la mediana si conduce pel vertice di un angolo ottuso il teorema si enuncia nel modo seguente:

In un triangolo qualunque il quadrato della mediana che parte dal vertice di un angolo ottuso è uguale al quadrato della metà del lato su cui cade la mediana, diminuito del rettangolo costruito sopra uno dei rimanenti lati e sulla proiezione dell'altro su di esso.

DUE TEOREMI SULL'ESTRAZIONE DI RADICE

I.

Nell'estrazione della radice n.ª *da un numero approssimato, il numero delle cifre della cui parte intera non sia un multiplo dell'indice* n, *si può contare su tante cifre esatte nella radice quante ne ha il radicando. Se poi il numero delle cifre del radicando è multiplo di* n, *si può contare parimenti sopra tante cifre esatte quante ne ha il radicando se l'ultimo gruppo di* n *cifre a sinistra costituisce un numero maggiore di* $\left(\frac{10}{\sqrt[n-1]{n}}\right)^n$

Sia N il numero approssimato dato ed α l'errore assoluto del numero. Consideriamo dapprima il caso in cui α è in difetto e diciamo ε l'errore corrispondente nella radice n^{esima} di N. Possiamo stabilire, per ipotesi, l'eguaglianza seguente:

$$N + \alpha = (\sqrt[n]{N} + \varepsilon)^n,$$

da cui

$$\alpha > n\sqrt[n]{N^{n-1}}\,\varepsilon,$$

ossia

$$\varepsilon < \frac{\alpha}{n\sqrt[n]{N^{n-1}}}.$$

Si faccia

$$N \geq G.\,10^{mn},$$

dove G è il primo gruppo di cifre a sinistra ed m è il numero dei gruppi successivi di n cifre ciascuno e contati nella parte intera.

Abbiamo

$$\sqrt[n]{N} \leq \sqrt[n]{G}.\,10^{m}$$

e quindi

$$(1) \qquad \varepsilon < \frac{\alpha}{n\sqrt[n]{G^{n-1}}.\,10^{mn-m}}$$

Se il gruppo G ha un numero di cifre eguale ad $n-k$, potremo scrivere

$$G \geq 10^{n-k-1}$$

e, sostituendo nella (1), avremo

$$(2) \qquad \varepsilon < \frac{\alpha}{n\sqrt[n]{10^{(n-k-1)(n-1)}}\;10^{mn-m}}.$$

Ma ora si trova che

$$n\sqrt[n]{10^{(n-k-1)(n-1)}} > 10^{n-k-1}; \; [\text{per } k \geq 1]$$

infatti questa disuguaglianza è conseguenza della

$$n^n > 10^{n-k-1}$$

la quale è sempre vera per $k \geq 1$. *) Pertanto, sostituendo nella (2), possiamo scrivere, a fortiori,

---

*) È evidente che basta provare la diseguaglianza

$$n^n > 10^{n-2} \qquad \text{(a)}$$

la quale si verifica subito per $n = 2, = 3, = 4$.
Ora dalla:

$$(n+1)^{n+1} = (n^n + n\,.\,n^{n-1} + \ldots\ldots)\,(n+1)$$

si ricava

$$(n+1)^{n+1} > (2n+2)n^n,$$

e in conseguenza, per $n \geqq 4$,

$$(n+1)^{n+1} > 10\,n^n$$

Perciò, ammessa la (a) per un valore di $n \geqq 4$ sarà a fortiori

$$(n+1)^{n+1} > 10^{n-1}$$

cioè la (a) dovrà essere verificata da quel valore di n aumentato di 1.

$$(3) \qquad \varepsilon < \frac{\alpha}{10^{(m+1)(n-1)-k}}$$

e, supponendo $\frac{1}{10} \leq \alpha < 1$, vale dire supponendo che l'errore di N affetti soltanto la cifra dei decimi, si ottiene

$$\varepsilon < \frac{1}{10^{(m+1)(n-1)-k}},$$

la quale ci mostra che si potrà contare nella radice fino ad $(m+1)(n-1)-k$ cifre decimali esatte, oltre ad $m+1$ cifre, che si trovano nella sua parte intera, cosicchè avremo in totale $(m+1)n-k$ cifre sicure, precisamente tante quante ne ha il numero proposto.

Quando α diventa minore di $\frac{1}{10}$, di $\frac{1}{100}$, in generale di $\frac{1}{10^p}$, ossia, in altri termini, quando l'errore di N si porta sui centesimi, sui millesimi, in generale sulla cifra decimale di $(p+1)^{\text{esimo}}$ ordine verso destra, evidentemente, per la formola (3), anche il valore di ε diminuisce con α e si trasporta verso destra di uno, di due, in generale di p posti. Così si dica nel caso in cui α aumenta.

Nel caso in cui k è eguale a zero, supponendo

$$G \geq \left(\frac{10}{\sqrt[n-1]{n}}\right)^n$$

risulta dalla (1)

$$\varepsilon < \frac{\alpha}{10^{(m+1)(n+1)}}$$

che dimostra la seconda parte del teorema quando il radicando sia approssimato per difetto.

Supponiamo ora che il numero N sia approssimato per eccesso e indichiamo con m il numero delle sue cifre esatte. Allora sostituendo con altrettanti zeri le cifre che seguono queste cominciando dalla $(m+1)^{\text{esima}}$, otterremo evidentemente un numero N' approssimato per difetto e che ha, come il primo, *m* cifre esatte. Pertanto estraendo la radice n^{esima} di N' siamo condotti al caso precedente ed il teorema resta dimostrato in via generale.

Corollario 1.° — *La radice quadrata di un numero approssimato ha tante cifre esatte quante ne ha il radicando quando il numero delle cifre della parte intera del radicando è dispari, ed anche quando, essendo questo numero pari, le prime due cifre a sinistra costituiscano un numero superiore a* 25.

Corollario 2.° — *Nell'estrazione di radice cubica da un numero approssimato si può contare nella radice su tante cifre esatte quante ne ha il radicando quando il numero delle cifre della parte intera non è un multiplo di* 3, *ed anche quando, essendo questo numero un multiplo di* 3, *le prime tre cifre a sinistra costituiscono un numero superiore a* 193.

II.

Se nell' estrazione di radice n^{esima}, a meno di uno, di un numero dato si divide il resto, a cui si è pervenuti calcolando tante cifre della radice quanto ne ha l'indice oltre alla metà, più una, delle rimanenti, per n *volte la potenza* (n — 1)^{esima} *del numero formato scrivendo accanto alle cifre già trovate tanti zeri, quante sono quelle che mancano, si ottiene un quoziente, le cui cifre sono quelle della radice, che si cercano.*

Sia N il radicando dato, q il numero delle cifre dell'indice n, e supponiamo in primo luogo che la radice a meno di una unità abbia $2p+q+1$ cifre. Sia r il numero che si otterrebbe sostituendo tanti zeri alle ultime p cifre della radice, ed x la parte razionale od irrazionale, che bisogna aggiungere ad r per avere esattamente la radice n^{esima} di N. Si ha per ipotesi

$$N = (r + x)^n$$

e, pel teorema del binomio,

$$N = r^n + nr^{n-1}\,x + \frac{n.\,(n-1)}{1\,.\,2}\,r^{n-2}\,x^2 + \ldots\ldots$$

Ma $N - r^n$ esprime il resto dell' operazione quando si sono ottenute le prime $p + q + 1$ cifre della radice, perciò chiamandolo R si ha dalla precedente eguaglianza

$$\frac{R}{nr^{n-1}} = x + Q,$$

dove si è posto:

$$Q = \frac{n-1}{2}\,\frac{x^2}{r} + \frac{(n-1)\,(n-2)}{2\,.\,3}\,\frac{x^3}{r^2} + \ldots\ldots$$

Ora, se si vuole che $r + x$ sia, a meno di una unità, la radice n^{esima} di N, è necessario e sufficiente che x sia, a meno di una unità, il quoziente intero della divisione $\frac{R}{nr^{n-1}}$ e che quindi si dimostri essere $Q < 1$.

Pertanto abbiamo, per ipotesi, che

$$r \geq 10^{2p+q},\quad x^2 < 10^{2p}$$

di guisa che

$$\frac{(n-1)\,x^2}{r} < \frac{(10^q - 1)10^{2p}}{10^{2p+q}} < 1\,,$$

d'onde si ricava

$$\frac{(n-1)x^2}{2r} < \frac{1}{2}.$$

Inoltre abbiamo, a fortiori,

$$\frac{(n-2)x}{3r} < \frac{1}{3}$$

e quindi, moltiplicando membro a membro le due ultime ineguaglianze,

$$\frac{(n-1)\ (n-2)}{2\ .\ 3}\frac{x^3}{r^2} < \frac{1}{2\ .\ 3}.$$

Nello stesso modo si trova

$$\frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2\ .\ 3\ .\ 4}\ \frac{x^4}{r^3} < \frac{1}{3\ .\ 4}$$

ed in generale

$$\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-i)}{2\ .\ 3\ \ldots\ .\ (i+1)}\ \frac{x^{i+1}}{r^i} < \frac{1}{i(i+1)},$$

di maniera che si ottiene

$$Q < \frac{1}{1\ .\ 2} + \frac{1}{2\ .\ 3} + \frac{1}{3\ .\ 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}$$

Ma la somma che sta al secondo membro è uguale a $1 - \frac{1}{n}$; quindi dev'essere $Q < 1$; e ciò dimostra il teorema.

Nel caso in cui la radice in questione abbia $2p + q$ cifre e se ne calcolino coi metodi ordinari le prime $p + q + 1$, il teorema evidentemente resta verificato a più forte ragione.

Osservazione. — Sovente non basta, nel risultato di una operazione, che si sia determinato il valore con un errore minore dell'unità dell'ultima cifra, ma è necessario inoltre che questo errore sia per difetto. A tal uopo, nel caso nostro, converrà calcolare nella radice una cifra in più, quindi sopprimerla senza alterare la precedente.

A. Bassani.

QUISTIONE PROPOSTA

Fra tutti i tetraedri nei quali i segmenti che uniscono i punti di mezzo delle coppie di lati opposti sono eguali fra loro e ad un segmento dato, trovare quello di massimo volume.

D. Besso.

ESERCIZI PER LA SCUOLA

ARITMETICA

Metodi abbreviati di calcolo numerico (*).

1. Si ottiene il prodotto di un numero per 11, scrivendo al disotto della cifra delle unitá la cifra stessa, al disotto della cifra delle decine le unità semplici risultanti dalla somma di questa cifra e di quella delle unità, al disotto della cifra delle centinaia le unità semplici ottenute addizionando questa cifra con quella delle decine e col riporto (se c'è) della somma precedente e così via. L'ultima cifra del prodotto, a sinistra, è costituita poi dall'ultima del moltiplicando aumentata, se pure è il caso, del riporto proveniente dalla somma precedente.
2. Il prodotto di un numero per 12, 13, 14 .... 18, 19 s'ottiene immediatamente moltiplicando ciascuna cifra del moltiplicando per quella delle unità del moltiplicatore e aggiungendo a questo prodotto la cifra che trovasi alla sua destra e il riporto.
3. Il prodotto di un numero per 21, 31, 41, ... 81, 91 s'ottiene senz'altro moltiplicando per uno la cifra delle unità, del prodotto, quindi successivamente ciascuna cifra del moltiplicando per quella delle decine del moltiplicatore e aggiungendo ogni volta al prodotto la cifra di sinistra e il riporto.
4. Il prodotto di un numero per 111 ha per unitá la cifra delle unità del moltiplicando, per decine la somma della cifra delle decine e delle unità, per centinaia, la somma delle cifre delle centinaia, decine ed unità e il riporto della somma precedente, per migliaia la somma delle migliaia, centinaia e decine del moltiplicando più il riporto e così di seguito (**).

(*) Le semplificazioni di calcolo qui esposte hanno un'importanza teorica affatto secondaria, ma invece un certo interesse pratico essendochè, tutto ciò che vale ad abbreviare il conteggio, ne diminuisce la noia, accresce l'attenzione dell'operatore e in pari tempo la probabilità dell'esattezza. Sotto questo punto di vista le consideri adunque il lettore.

(**) Una regola analoga permette di comporre immediatamente il pro-

5. Il prodotto di un numero per 22, 33, …, 99 oppure 222, 333, … in generale per un numero composto di cifre uguali, può ottenersi a norma degli esercizi 1 e 4, raddoppiando, triplicando ecc. ciascuna somma che conduce a trovare le cifre del prodotto prima d'aver aggiunto il riporto.

Ecco ad esempio i calcoli necessari per ottenere il prodotto di 56892 per 333:

$$2.3 = 6;\quad 9+2=11,\quad 11.3=33;\quad 8+9+2=19$$
$$19.3=57,\quad 57+3=60;\quad 6+8+9=23,\quad 23.3=69,$$
$$69+6=75;\quad 5+6+8=19,\quad 19.3=57,\quad 57+7=64;$$
$$5+6=11,\quad 11.3=33,\quad 33+6=39;\quad 5.3=15,\quad 15+3=18.$$

Per cui

$$56892.333 = 18945036 \ (*).$$

6. Il prodotto di un numero per un altro formato da tutte cifre 9 può ottenersi scrivendo alla destra del moltiplicando tanti zeri quante sono le cifre 9 del moltiplicatore e sottraendo dal numero così ottenuto il moltiplicando stesso.

7. Per moltiplicare un numero per un altro formato da una cifra significativa, diversa da 9, seguita da tutti 9, basta moltiplicarlo per la cifra significativa aumentata di una unità, scrivere alla destra del prodotto ottenuto tanti zeri quanti sono i 9 del moltiplicatore, quindi sottrarre dal numero così ottenuto il moltiplicando stesso.

8. Per moltiplicare per un numero formato da tutte cifre 9, eccezion fatta da quella delle unità, basta scrivere alla destra del moltiplicando tanti zeri quante sono le cifre del moltiplicatore e togliere dal numero ottenuto il pro-

---

dotto anche quando il moltiplicatore sia 1111, 11111,.. in generale un numero costituito da tutte cifre 1.

(*) Va da sè che tutte queste operazioni semplici possono venir fatte a mente.

dotto del moltiplicando per l'eccesso di 10 sulla cifra delle unità.

9. Chiamando a uno qualunque dei numeri contemplati nelle regole 1, 2, 3, 4 e 5, il prodotto d'un numero qualunque per un altro che sia la differenza fra un numero formato da una cifra significativa seguita da zeri ed a, può ottenersi moltiplicando il moltiplicando per la cifra significativa e alla destra del prodotto scrivendo tanti zeri quanti ne ha il minuendo della differenza considerata, finalmente togliendo dal numero così ottenuto il prodotto del moltiplicando per a.

Ed es: essendo $59967 = 60000 - 33$, per moltiplicare per 59967 basterà moltiplicare il moltiplicando per 6, alla destra del prodotto scrivere quattro zeri, quindi applicando la regola n° 5 togliere dal risultato il prodotto del moltiplicando per 33.

10. Il prodotto per un numero di due o più cifre, decomponibile in fattori d'una cifra sola o in fattori della natura di quelli considerati nelle regole 1, 2, 3, 4, 5, può ottenersi moltiplicando il moltiplicando per il primo di questi fattori, il prodotto ottenuto per il secondo e così via fino all'ultimo.

Ad es. dovendo moltiplicare per 72 si moltiplichi prima per 8, quindi il prodotto per 9; dovendo moltiplicare per $781 = 71 . 11$, si moltiplichi prima per 71, poi il prodotto per 11.

11. Quando il moltiplicatore è decomponibile in gruppi dei quali uno è un numero d'una sola cifra o uno dei numeri degli es. 1, 2, 3, 4, 5 e i gruppi rimanenti sono multipli di esso secondo un numero d'una sola cifra od uno dei numeri degli stessi esercizi 1, 2, 3, 4, 5, per ottenere il prodotto, si può moltiplicare il moltiplicando per il primo gruppo e il prodotto ottenuto per quei numeri secondo i quali i rimanenti gruppi son multipli di questo, scrivendo ogni volta i prodotti parziali in

modo che la prima cifra di ciascuno cada sotto la prima cifra di quel gruppo moltiplicatore che ha servito a produrlo, finalmente eseguendo l'addizione come nell'ordinaria moltiplicazione (*)

Ad es. sia da moltiplicare 3127459864 per 3572849154. Si osservi che il moltiplicatore può essere decomposto nei quattro gruppi (35), (7), (28), (49), (154) pei quali si ha: $35 = 7.5$, $28 = 7.4$, $49 = 7.7$, $154 = 7.22$. Dopo ciò l'operazione può essere eseguita come appresso:

```
                    3 1 2 7 4 5 9 8 6 4
                   (3 5)7(2 8)(4 9)(1 5 4)
    2 1 8 9 2 2 1 9 0 4 8
4 0 9 4 6 1 0 9 5 2 4 0
        8 7 5 6 8 8 7 6 1 9 2
          1 5 3 2 4 5 5 3 3 3 3 6
                4 8 1 6 2 8 8 1 9 0 5 6
---------------------------------------
1 1 1 7 3 9 4 2 3 2 9 2 6 1 3 5 5 0 5 6
```

11. Per moltiplicare un numero per 25 o 125 si scrivano 2 o 3 zeri alla sua destra poi si divida il numero risultante per 4 od 8.

12. Il prodotto di due numeri di due sole cifre ciascuno ha per unità il prodotto della cifre delle unità dei fattori, per decine la somma dei prodotti delle decine di ciascun fattore per la cifra delle unità dell'altro più il riporto e per centinaia il prodotto delle cifre delle decine dei due fattori più il riporto. (**)

13. Il prodotto di due numeri che differiscono l'uno in più,

(*) La regola si estende anche al caso in cui alcuni dei gruppi siano multipli di uno dei rimanenti e alcuni altri multipli di un altro dei restanti. Non è necessario che tutte le cifre del moltiplicatore concorrano a formare tali gruppi.

(**) Nel *Trattato d'aritmetica del Bertrand* a p. 35 è esposto un metodo generale di moltiplicazione abbreviata di cui questo è un caso particolare.

l'altro in meno dallo stesso numero formato da una cifra significativa seguita da zeri, può ottenersi facendo il quadrato del numero da cui differiscono e togliendo da questo il quadrato dell'eccesso di detto numero sul minore dei fattori dati.

Ad es: $573 \,.\, 627 = 600^2 - 27^2 = 360000 - 729 = 359271$ (*).

14. Il quadrato di un numero qualuque si può ottenere, addizionando il doppio del prodotto di ciascuna cifra per il numero formato dalle seguenti con la somma dei quadrati di tutte le cifre, prestando attenzione nell'operare sulle singole cifre di considerarle seguite da tanti zeri quante sono le cifre che le seguono nel dato numero.

I calcoli mentali da effettuare e la disposizione da dare all'operazioue per comporre il quadrato di 836279, seguono quì appresso:

doppi prodotti delle unità dei diversi ordini prese due a due $\left\{ \begin{array}{l} 7.9 = 63 \,,\; 63.2 = 126 \,; \\ 2.9=18 ,\; 2.18=36 ,\; 2.7=14 ,\; 14.2=28 ,\; 28+3=31 \,; \\ \quad 6.9=54 \,;\; 2.54=108 \,;\; 6.7=42 ,\; 42.2=84 ,\; 84+10 \\ \quad =94 ,\; 6.2=12 ,\; 12.2=24 ,\; 24+9=33 \,;\; \text{ecc.} \end{array} \right.$

somma dei quadrati delle singole unità: $\left\{ (64)\ (09)\ (36)\ (04)\ (49)\ (81) \right.$

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & & & & & 8 & 3 & 6 & 2 & 7 & 9^2 & = \\
\hline
 & & & & & & & & & 1 & 2 & 6 & 0 & \\
 & & & & & & & & 3 & 1 & 6 & & & \\
 & & & & & & 3 & 3 & 4 & 8 & & & & \\
 & & & & 3 & 7 & 6 & 7 & 4 & & & & & \\
 & & 5 & 8 & 0 & 4 & 6 & 4 & & & & & & \\
 & 6 & 4 & 0 & 9 & 3 & 6 & 0 & 4 & 4 & 9 & 8 & 1 & \\
\hline
= & 6 & 9 & 9 & 3 & 6 & 2 & 5 & 6 & 5 & 8 & 4 & 1 &
\end{array}$$

15. Il quoziente della divisione d'un numero per 125 può ottenersi moltiplicando il dividendo per 8 e sopprimendo le tre ultime cifre del prodotto. Il resto poi risulta

---

(*) Il quadrato di 27 può ottenersi senza operazioni ausiliarie applicando la regola dell'es.° 12.

dalla divisione (sempre esatta) per 8 del numero trascurato (*).

16. Quando il divisore è un numero decomponibile nei fattori 2,3, . . . 9, 10, 11, 12 per trovare il quoziente si dividerà il dividendo pel primo fattore del divisore (scelgasi il minore), il primo quoziente ottenuto pel secondo fattore (è bene scegliere il minore dei rimanenti), il nuovo quoziente pel terzo fattore e così di seguito. Per avere poi il resto si formerà la somma dei prodotti di ciascun resto per tutti i divisori precedenti. (**)

A. Lugli.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA (3) PROPOSTO A PAG. 99

(3) *Se le coppie di punti* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 *sono situate rispettivamente sulle tre rette* BC, CA, AB, *così che le rette* AA_1, BB_1, CC_1 *concorrano in uno stesso punto, e che anche le rette* AA_2, BB_2, CC_2 *concorrano in uno stesso punto, e s'indichino rispettivamente con* α, β, γ *i punti di incontro di* AA_1 *con* B_2C_2, *di* BB_1 *con* C_2A_2 *e di* CC_1 *con* A_2B_2, *le tre rette* $A_2\alpha$, $B_2\beta$, $C_2\gamma$ *concorreranno pure in uno stesso punto.* (D. Besso).

Dimostrazione del prof. *G. Riboni*. (***)

Se si indicano con α_1, β_1, γ_1 i punti di incontro rispettivi di AA_2 con B_2C_2, di BB_2 con C_2A_2 e di CC_2 con A_2B_2,

(*) Sarà utile inoltre che gli alunni siano istruiti a trovare immediatamente (a mente) il quoziente della divisione d'un numero qualsiasi per 11, 12 e 25, il che si conseguirà facilmente quando l'insegnante abbia cura di far loro imparare a memoria i multipli semplici di questi numeri.

(**) L'applicazione di questa regola è specialmente utile nel calcolo dei numeri complessi.

(***) Una dimostrazione simile a questa venne inviata dal Sig. Capitano *I. Beyens*.

sono evidenti le seguenti eguaglianze di rapporti anarmonici

$$\frac{A_2\beta}{C_2\beta} : \frac{A_2\beta_1}{C_2\beta_1} = \frac{CB_1}{AB_1} : \frac{CB_2}{AB_2}$$

$$\frac{C_2\alpha}{B_2\alpha} : \frac{C_2\alpha_1}{B_2\alpha_1} = \frac{BA_1}{CA_1} : \frac{BA_2}{CA_2}$$

$$\frac{B_2\gamma}{A_2\gamma} : \frac{B_2\gamma_1}{A_2\gamma_1} = \frac{AC_1}{BC_1} : \frac{AC_2}{BC_2}$$

dalle quali si ricava

$$\frac{\dfrac{A_2\beta}{C_2\beta} \cdot \dfrac{C_2\alpha}{B_2\alpha} \cdot \dfrac{B_2\gamma}{A_2\gamma}}{\dfrac{A_2\beta_1}{C_2\beta_1} \cdot \dfrac{C_2\alpha_1}{B_2\alpha_1} \cdot \dfrac{B_2\gamma_1}{A_2\gamma_1}} = \frac{\dfrac{CB_1}{AB_1} \cdot \dfrac{BA_1}{CA_1} \cdot \dfrac{AC_1}{BC_1}}{\dfrac{CB_2}{AB_2} \cdot \dfrac{BA_2}{CA_2} \cdot \dfrac{AC_2}{BC_2}}$$

Ma, pel teorema di Ceva, i prodotti che stanno al secondo membro sono entrambi eguali a -1, ed è pure eguale a -1 il prodotto

$$\frac{A_2\beta_1}{C_2\beta_1} \cdot \frac{C_2\alpha_1}{B_2\alpha_1} \cdot \frac{B_2\gamma_1}{A_2\gamma_1};$$

perciò si avrà l'eguaglianza

$$\frac{A_2\beta}{C_2\beta} \cdot \frac{C_2\alpha}{B_2\alpha} \cdot \frac{B_2\gamma}{A_2\gamma} = -1,$$

la quale prova il teorema proposto.

Analogamente si dimostrerebbe che, indicando con a, b, c rispettivamente i punti d'incontro di AA_2 con B_1C_1, di BB_2 con C_1A_1 e di CC_2 con A_1B_1, le rette A_1a, B_1b, C_1c concorrono in uno stesso punto.

DIMOSTRAZIONE ELEMENTARE
D'UN TEOREMA SUL CENTRO DI GRAVITÁ D'UN ARCO DI CIRCOLO

1. La somma

$$\cos\beta + \cos 2\beta + \cos 3\beta + \ldots + \cos(n-1)\beta$$

è eguale a

$$\frac{\mathrm{sen}(n+\frac{1}{2})\beta}{2\,\mathrm{sen}\frac{1}{2}\beta} - \frac{1}{2}.$$

Infatti, chiamandola S, si ha

$$2S\,\mathrm{sen}\tfrac{1}{2}\beta = 2\cos\beta\,\mathrm{sen}\tfrac{1}{2}\beta + 2\cos 2\beta\,\mathrm{sen}\tfrac{1}{2}\beta + \ldots + 2\cos(n-1)\beta\,\mathrm{sen}\tfrac{1}{2}\beta$$

$$= (\mathrm{sen}\tfrac{3}{2}\beta - \mathrm{sen}\tfrac{1}{2}\beta) + (\mathrm{sen}\tfrac{5}{2}\beta - \mathrm{sen}\tfrac{3}{2}\beta) + \ldots + (\mathrm{sen}(n+\tfrac{1}{2})\beta - \mathrm{sen}\tfrac{1}{2}\beta)$$

ossia

$$S = \frac{\mathrm{sen}(n+\frac{1}{2})\beta}{2\,\mathrm{sen}\frac{1}{2}\beta} - \frac{1}{2}.$$

2. Sia BAC un arco di circolo di raggio R e centro O e sia A il suo punto di mezzo. Si supponga inscritta in quest'arco una spezzata di $2n$ lati fra loro eguali: sieno $C, C_1, C_2 \ldots\ldots C_{n-1}$, A i vertici di essa situati sull'arco CA, e $D, D_1, D_2, \ldots\ldots D_{n-1}$, A le loro proiezioni sul raggio OA. Il centro di gravità della spezzata sarà un punto G del raggio OA, e, indicando con $2p$ il perimetro della spezzata, si avrà

$$2p.\mathrm{OG} = 2\frac{p}{n}\cdot\left\{\frac{\mathrm{OD}+\mathrm{OD}_1}{2} + \frac{\mathrm{OD}_1+\mathrm{OD}_2}{2} + \ldots\ldots + \frac{\mathrm{OD}_{n-1}+\mathrm{OA}}{2}\right\}$$

ossia, indicando con a il rapporto dell'arco AC al raggio

$$\mathrm{OG} = \frac{\mathrm{R}}{2n}(1+\cos a) + \frac{\mathrm{R}}{n}\left[\cos\frac{a}{n} + \cos 2\frac{a}{n} + \ldots\ldots + \cos(n-1)\frac{a}{n}\right].$$

In forza del lemma rammentato a principio questa formola diviene

$$\mathrm{OG} = \frac{\mathrm{R}}{2n}(1+\cos a) + \frac{\mathrm{R}}{n}\left\{\frac{\mathrm{sen}(n+\frac{1}{2})\frac{a}{n}}{2\,\mathrm{sen}\frac{a}{n}} - \frac{1}{2}\right\}$$

ossia

$$OG = \frac{R}{2n} \cos a + \frac{R}{a} \cdot \frac{\frac{a}{2n}}{\operatorname{sen}\frac{a}{2n}} \cdot \operatorname{sen}\left(a + \frac{a}{2n}\right),$$

e rammentando che il rapporto $\frac{\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ tende ad 1 quando α tende a zero, si avrà

$$\lim OG = \frac{R}{a} \operatorname{sen} a = \frac{\text{corda } CB \times \text{raggio}}{\text{arco} CAB}.$$

D. Besso.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Genetische Stereometrie von D. Karl Heinze, *weiland Prof. in Cöthen, bearbeitet von Franz Lucke, Gymnasiallehrer in Zerbst* (p. X e 194, con 12 tav. litogr.) Leipzig, Teubner, 1886.

Nei trattati elementari di Geometria solida si sogliono esporre i metodi per determinare i volumi dei prismi e delle piramidi, dei coni e dei cilindri, dei tronchi di coni e cilindri a basi parallele e di alcune porzioni di sfera. Hannovi però molti altri solidi di cui è interessante conoscere la cubatura, sia perchè hanno un' importanza individuale teorica, sia perchè s' incontrano in alcune applicazioni pratiche della geometria (architettura, taglio delle pietre, cristallografia, ecc.) Di una estesa classe di tali solidi, si occupa il trattato (di stereometria in senso stretto) il cui titolo sta scritto in testa di questo articolo. Di esso vogliamo render conto in questo *Periodico*, affinchè più facilmente venga conosciuto dagli insegnanti delle nostre scuole secondarie in genere e da quelli dei nostri Istituti tecnici in ispecie: a raccomandarlo alla loro benevola attenzione basterà il fatto che al concetto suo fondamentale applaudirono gli scienziati tedeschi, anche prima di vederlo attuato. (1)

(1) Senza pretendere di indicare completamente i lavori che prepararono

I solidi studiati dal Sig. Heinze sono generati nel seguente modo. Date in due piani paralleli π_1 π_2 due linee chiuse (curve o poligonali) l_1 l_2, si stabilisca fra i loro punti una corrispondenza univoca e si congiungano due punti corrispondenti qualunque con una curva l di specie assegnata; se tutte queste curve (generatrici) si succedono con continuità, esse limitano, assieme alle porzioni di piano (basi) limitate dalle curve l_1 l_2, uno dei solidi da studiare. I volumi V dei più notevoli fra questi corpi si possono esprimere con una formola unica; chiamando, cioè, s_1 e s_2 le aree delle basi e s l'area della sezione fatta nel solido dal piano bisettore dello strato π_1 π_2 e h lo spessore di questo strato, si ha

$$V = \frac{1}{6} h \,(s_1 + 4s + s_2),$$

supposto: 1° che le generatrici siano rettilinee; 2° che le curve l_1 l_2 siano ellissi simili con gli assi paralleli e con i centri su una perpendicolare a π_1 e le generatrici siano coniche con un vertice comune. Il fatto che questa formola insegna a eseguire metodicamente la cubatura di molti solidi, è una delle ragioni del nome « stereometria genetica » dato dall'A. alla sua opera. Essa formola dimostra che, date le curve l_1 l_2 l, il calcolo di V è ridotto a quello di s.

Variando le linee l_1 e l_2, la legge di corrispondenza univoca fra i loro punti e le curve generatrici si otterranno infiniti solidi; lo studio di essi è facilitato da una opportuna classificazione proposta dall'A.: crediamo necessario indicarla qui sommariamente per porre in grado il lettore di giudicare del numero e della varietà di corpi studiati nel libro che analizziamo. (1)

---

l'opera di cui ci occupiamo o aiutarono gli autori nella compilazione di essa, citerò qui alcuni scritti che hanno con certe parti di questa un'attinenza strettissima e la cui lettura interesserà chi voglia approfondirsi in questo genere di studii:

Steiner. — Giornale di Crelle, Vol. XXIII (1842).
Koppe. — Ein neuer Lehrsatz der Stereometrie (Essen 1843).
Ligowsky. — Inhaltsberechnung der Körper nach einer einzigen Formel. 1847.
Bellavitis. — Lezioni di geometria descrittiva (Padova 1851) p. 143.
E. F. August. — Giornale di Crelle, Vol. XXXXV (1853); cf.
» Giornale di Borchardt, Vol. LX (1862).
Wittstein. — Das Prismatoid (Hannover 1860).
» Archivio di Grunert. Parte XXXIX.

(1) Le numerose e belle figure litografate che accompagnano il testo, permettono al lettore di immaginare, senza troppo gravi difficoltà, anche i solidi di definizione più complicata; sicchè non condividiamo l'opinione del

A) Solidi a generatrici rettilinee.

I. Solidi a basi poligonali.

1. Le due basi sono eguali e hanno i lati omologhi paralleli (Prisma).

2. Le due basi sono simili e hanno i lati omologhi paralleli (Tronco di piramide).

3. Le due basi sono equiangole e hanno i lati omologhi paralleli (Obelisco).

4. Le due basi sono qualunque.

5. Una delle due basi riducesi a un segmento rettilineo (Cuneo).

6. Una delle due basi riducesi a un punto (Piramide).

7. Entrambe le basi sono segmenti rettilinei.

8. Entrambe le basi si riducono a punti.

Riguardo ai solidi di tale specie è da notare che le loro facce possono essere o triangoli o parallelogrammi o trapezii oppure essere limitate dai lati di un quadrilatero gobbo. In quest'ultimo caso, la faccia stessa è il luogo delle posizioni di un segmento rettilineo i cui estremi scorrono su due lati di questo e che è parallelo al piano π_1 (a cui sono paralleli gli altri due lati del quadrilalero); quindi essa è una porzione di paraboloide iperbolico limitata da quattro generatrici, due dell'un sistema e due dell'altro.

II. Solidi a base curvilinee.

Se in ognuna delle sottospecie testè enumerate, si suppone che il numero dei lati delle basi cresca indefinitamente mentre i lati stessi indefinitamente diminuiscano, si otterrà una sottospecie dei solidi a basi curvilinee.

Fra i corpi di cui così si riesce a determinare il volume, noteremo il cilindro e il tronco di cilindro, il cono e il tronco di cono, la tinozza (1), la campana (2), il tronco di iperboloide a una falda di rotazione a basi parallele, ecc.

B. Solidi a generatrici curvilinee.

I. Solidi a basi curvilinee.

1. Le due basi sono ridotte a punti (Es. Sfera, ellissoide).

Sig. Lucke, il quale afferma essere i modelli *conditio sine qua non* per insegnare la Stereometria di Heinze.

(1) Questa corrisponde all'ipotesi che l_1 e l_2 siano due ellissi ad assi paralleli con i centri su una perpendicolare ai loro piani e che l siano rette poste in piani che passano per questa e la incontrano in punti esterni allo strato π_1 π_2.

(2) In questo caso l_1 è un circolo o un'elisse e l_2 una retta ogni punto della quale corrisponde a una coppia di punti di l_1.

2. Una base è ridotta a un punto (Zona a una base di una sfera, di ellissoide rotondo o di un iperboloide rotondo).

3. Le due basi sono simili (Disco).

4. Le due basi sono eguali.

II. Solidi a basi poligonali.

1. Le due basi sono ridotte a punti (Unghie sferiche e ellissoidiche).

2. Una base è ridotta a un punto.

3. Le basi sono simili.

4. Le basi sono eguali.

I risultati ottenuti studiando questi solidi, insegnano a trovare i volumi di molti corpi, che non possono venir compresi nella definizione generale prima riportata, ma che possono decomporsi in parti soddisfacenti questa condizione. Citeremo come esempi i cinque corpi regolari (1) (di Platone), i tredici corpi semiregolari (2) (di Archimede), il toro, alcune volte, ecc. Aggiungeremo che l'A. determina anche la superficie laterale o totale di molti fra i solidi che studia, che spesso nelle formole che ottiene entra un angolo atto a individuare la forma del solido, e che egli in tali casi non manca di studiare che cosa accade al variare di quest'angolo.

Queste indicazioni crediamo sufficienti a porgere un'idea abbastanza esatta del libro di cui trattiamo e non v'ha chi non vegga che largo campo possa trovarvi un abile insegnante nello scegliere quali quistioni possa svolgere egli stesso, quali possa proporre come esercizio ai discienti: onde non si può che tributare larga lode a chi ideò quest'opera e a chi la condusse felicemente a termine. Ma chi credesse di trovarvi quel rigore di metodo e di esposizione che oggidì a ragione si pretende in un libro didattico, dovrebbe ben presto riconoscere di essersi ingannato. A persuadere il lettore della deficienza che da questo lato presenta il trattato dell'Heinze, basti citare due esempii.

Il primo, che è anche il più grave, è offerto dalla proposizione che sta a base della Stereometria genetica. Essa è enunciata dall'A. come segue (p. 2):

« Due solidi sono equivalenti (*inhaltsgleich*) se le sezioni

(1) Di questi l'A. determina, non solo il volume, ma anche le superficie, i raggi delle sfere inscritte e circoscritte e gli angoli diedri.

(2) Queste possono ottenersi con opportune sfaldature dai corpi regolari e hanno la proprietà comune di essere inscrittibili in una sfera di cui l'A. determina in ogni caso il raggio; anche di essi l'A. trova la superficie.

fatte in essi da due piani qualunque paralleli o equidistanti da un piano fisso sono equivalenti (*gleich*) ».

Questa proposizione è chiamata Postulato o Assioma (*Grundsatz*) di Cavalieri e però non viene dimostrata. Si sarebbe tentati di considerarla come una definizione di ciò che s'intende per solidi equivalenti; ma l'autore aggiunge la seguente « spiegazione »:

« Per rendersi ragione di questa proposizione s'imaginino condotti tanti piani aventi la stessa giacitura del dato e vicinissimi fra loro; allora i due solidi saranno divisi in istrati così sottili da poter venir considerati come limiti di corpi; allora non si ha che da aggiungere cose eguali a cose eguali », la quale dimostra che l'A. la considera come una vera proposizione. Ora, si può effettivamente considerarla come un assioma o un postulato? e in caso negativo le ultime parole riportate possono riguardarsi come una dimostrazione di essa?

L'altro esempio che vogliamo citare ci è fornito dalla nota a pag. 64–5, in cui l'A. si propone di dimostrare la eguaglianza (priva di senso) $\infty.0^2 = 0$. Egli dice, perciò, essere $\infty.0^2 = \infty.0.0$, rammenta che $\infty.0$ è eguale a una quantità finita k e conclude $\infty.0^2 = k.0 = 0$. Non aggiungiamo alcun commento, ritenendolo superfluo.

Certamente un lettore provetto nelle dottrine del calcolo infinitesimale, saprà, senza gran fatica, sostituire questi e altri ragionamenti e modi di esprimersi dell'A. con altri esenti da qualsiasi obbiezione: ma altrettanto può forse ripetersi per uno dei lettori ai quali sembra di preferenza destinato il libro dell'Heinze?

Concludiamo pertanto dicendo che l'opera di cui trattiamo potrà essere di utilità grandissima per un maestro che ne sappia usare con molta cautela (1) e augurandoci che il Manuale di Stereometria genetica promessoci dal Sig. Lucke sia esente dai non lievi difetti che si notano nel libro che egli ha ora publicato: solo in tal caso sarà vivamente desiderabile la sua diffusione fra gli allievi delle nostre scuole.

Mantova, 26 Settembre 1886.

GINO LORIA.

---

(1) Consigliamo lo studio della bellissima memoria di Steiner: Ueber einige stereometrische Sätze (Gesammelte Werke, II Bd., p. 311—320) che, per la sostanza ha qualche punto di contatto con la Stereometria genetica, ma che per la forma ne differisce completamente.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Giornale di Matematiche pubblicato per cura del professore *G. Battaglini*. Volume XXIV. Settembre e Ottobre, Novembre e Dicembre 1886. Napoli, Benedetto Pellerano, editore.

Iornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo *D.r F. Gomes Teixeira*. Professor na Escola Polytechnica do Porto. Vol. VII, n. 3. Coimbra, 1886.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *J. Bourget*, Recteur de l'Academie de Clermont, *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy* Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe. 2e série. Dixième année. N. 11 et 12. Paris, 1886.

Journal de Mathématiques élementaires publié par *H. Vuibert*. 11e Année, N. 4, 5, 6. Paris, M. Nony, 17. Rue des Écoles, 1886.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome sixième, Novembre et Decembre 1886.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XVIII. N. 21, 22, 23, 24. Firenze, 1886.

Bertini (E.) — Sui fasci di quadriche in uno spazio ad *n* dimensioni. — Sulla geometria degli spazi lineari in uno spazio ad *n* dimensioni (1886).

Bianchi (L.) — Sulle soluzioni comuni a due equazioni a derivate parziali del 2° ordine con due variabili (1886).

Giudice (F.) — Algebra ad uso delle scuole liceali. Palermo. Remo Sandron editore, 1886. — Sulla determinezione delle radici reali delle equazioni a coefficienti numerici reali.

Gerbaldi (F.) — Primi elementi di Aritmetica. Torino, Bocca, 1887.

Jung (G.) — Sulle trasformazioni piane multiple. — Di due trasformazioni multiple associate a ogni trasformazione birazionale. — Di una terza trasformazione di genere p e di grado $p+1$ associata a ogni trasformazione piana birazionale.

Porena (F.) — Sul deperimento fisico della regione italica. — La « Geografia italica » del *Nissen*. — Roma, 1886.

Pittarelli (G.) — Studio algebrico-geometrico intorno alla corrispondenza (1, 2). — Le cubiche con un punto doppio e la corrispondenza (1, 2). Roma, 1886.

Rivelli (A.) — I giuochi matematici illustrati. Napoli, tip. De Angelis, 1886

Rodrigues (I. M.) — Introducçao à theoria da Balistica. Lisboa, 1886.

Sufni (A.) — Teoria generale delle rappresentazioni prospettiche e dei metodi di descrizione grafica dello spazio a tre dimensioni. Milano, tip. degli ingegneri, 1886.

Vigarié (E.) — Propriétés générales des cercles de Tücker. Paris, 1886.

SOLUZIONI IN NUMERI INTERI
DI EQUAZIONI INDETERMINATE DI 1° GRADO

I.

1. Si sa che ogni equazione a coefficienti razionali di 1° grado a due incognite, che ammetta soluzioni in numeri interi, può ridursi alla forma

$$(1) \qquad a_1 x_0 + a_0 x_1 = k$$

ove a_0, a_1, k sono numeri interi noti, e a_0, a_1 sono inoltre primi tra loro. Di più possiamo supporre che i numeri a_0, a_1 siano positivi, chè, se non fossero, si ridurrebbero tali, cangiando, secondo occorrerà, x_0 in $-x_0$ x_1 in $-x_1$.

Applichiamo ai numeri a_0, a_1 il processo della ricerca del massimo comun divisore; se q_1, q_2, , . . q_n sono i quozienti e a_2, a_3, , . . a_{n+1} i resti che si ottengono successivamente, avremo

$$(2) \quad a_0 = q_1 a_1 + a_2, \; a_1 = q_2 a_2 + a_3, \; \ldots, \; a_{n-1} = q_n a_n + a_{n+1},$$

ove, per essere a_0, a_1 primi tra loro, è

$$(3) \qquad a_{n+1} = 1.$$

Moltiplicando la (1) per a_2 e la prima delle (2) per k e sottraendo, risulta

$$a_0 (a_2 x_1 - k) + a_1 (a_2 x_0 + q_1 k) = 0,$$

da cui si deduce che, essendo a_0 primo con a_1, la quantità $a_2 x_0 + q_1 k$ è divisibile per a_0. Ponendo allora

$$a_2 x_0 + q_1 k = a_0 x_2,$$

con x_2 numero intero, la precedente eguaglianza diviene

$$a_2 x_1 + a_1 x_2 = k.$$

Analogamente operando si perviene al seguente sistema d'equazioni

$$(4)\quad \begin{cases} a_1x_0 + a_0x_1 = k \\ a_2x_1 + a_1x_2 = k \\ a_3x_2 + a_2x_3 = k \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n+1}x_n + a_nx_{n+1} = k, \end{cases}$$

l'ultima delle quali, quando si badi alla (3), è soddisfatta da

$$(5)\qquad x_{n+1} = 0,\quad x_n = k.$$

Moltiplichiamo le (4) rispettivamente pei numeri indeterminati $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e sommiamo; otterremo

$$(6)\ \lambda_0 a_1 x_0 + (\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_2)x_1 + \ldots + (\lambda_{n-1}a_{n-1} + \lambda_n a_{n+1})x_n + \lambda_n a_n x_{n+1} =$$
$$= (\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n)\, k$$

Se determiniamo le λ in modo che sia

$$\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_2 = 0,\ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_3 = 0, \ldots, \lambda_{n-1}a_{n-1} + \lambda_n a_{n+1} = 0,$$

risulterà in generale

$$\lambda_m = \frac{(-1)^m\, a_0 a_1 \lambda_0}{a_m a_{m+1}}.$$

Per questa, per la (3) e per la prima delle (8) si ricava dalla (6)

$$(7)\quad x_0 = a_0 k \left\{ \frac{1}{a_0 a_1} - \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} - \ldots + \frac{(-1)^n}{a_n \cdot 1} \right\}.$$

Se dalla (4) si esclude la prima e sulle rimanenti si opera in modo analogo al precedente, si trova

$$(8)\qquad x_1 = a_1 k \left\{ \frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{a_n \cdot 1} \right\},$$

il qual risultato poteva anche ottenersi direttamente col sostituire nella (1) il valore di x_0 più sopra trovato.

3. Le (7), (8) ci danno una soluzione della (1); la soluzione generale, per quello che si sa dall'analisi indeterminata di 1° grado, sarà data dalle formule seguenti:

$$(9)\begin{cases} x_0 = a_0 \left\{ k \left(\frac{1}{a_0 a_1} - \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} - \ldots + \frac{(-1)^n}{a_{n\cdot 1}}\right) + \theta \right\} \\ x_1 = a_1 \left\{ k \left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{a_{n\cdot 1}}\right) - \theta \right\}, \end{cases}$$

ove θ rappresenta un numero intero qualunque positivo o negativo.

3. Se consideriamo ora la serie dei numeri interi

$$a,\ b,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots\ r_n,$$

ove $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sono i resti che si ottengono col dividere successivamente a per b, b per r_1, r_1 per $r_2, \ldots r_{n-2}$ per r_{n-1}, e poniamo

$$(10)\qquad \sum \frac{1}{ab} = \frac{1}{ab} - \frac{1}{br_1} + \frac{1}{r_1 r_2} - \ldots + \frac{(-1)^n}{r_{n-1} r_n},$$

risulteranno le seguenti relazioni

$$(11)\begin{cases} \sum \frac{1}{ab} + \sum \frac{1}{ba} = \frac{1}{ab} \\ \sum \frac{1}{ba} = \sum \frac{1}{br_1}. \end{cases}$$

Infatti se $a < b$, allora $r_1 = a$ e la seconda delle (11) è evidente; inoltre si ha

$$\sum \frac{1}{ba} = \sum \frac{1}{br_1} = \frac{1}{br_1} - \frac{1}{r_1 r_2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{r_{n-1} r_n},$$

che combinata colla (10) ci dà la prima delle (11). Se poi $a > b$, allora il resto della divisione di b per a è la stessa b, epperò

$$\sum \frac{1}{ba} = \frac{1}{ba} - \frac{1}{ab} + \frac{1}{br_1} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{r_{n-1} r_n};$$

e anche in questo caso abbiamo le (11).

4. Per ciò che precede avremo adunque

$$(13)\quad \begin{cases} \sum \dfrac{1}{a_0 a_1} + \sum \dfrac{1}{a_1 a_0} = \dfrac{1}{a_0 a_1} \\ \sum \dfrac{1}{a_1 a_0} = \sum \dfrac{1}{a_1 a_2}\,; \end{cases}$$

e le (9), badando alla seconda delle precedenti, potranno scriversi

$$(14)\quad \begin{cases} x_0 = a_0\,(k\sum \dfrac{1}{a_0 a_1} + \theta) \\ x_1 = a_1\,(k\sum \dfrac{1}{a_1 a_0} - \theta). \end{cases}$$

La prima delle (13) ci fa vedere che le (14) soddisfano effettivamente la (1); infatti sostituendo in questa ad x_0, x_1 i valori dati dalle (14), risulta per l'appunto la prima delle (13).

II.

5. Sia ora un'equazione di primo grado con un numero qualunque d'incognite

$$(15)\qquad a_n x_0 + a_{n-1} x_1 + a_{n-2} x_2 + \ldots + a_0 x_n = k,$$

nella quale i numeri k, a_0, a_1, ... a_n sono interi. Inoltre attribuendo i segni dei termini del primo membro alle incognite rispettive, potremo supporre che le a sieno tutte positive; di più, poichè possiamo dividere l'equazione pei fattori di k che sieno comuni a tutte le a, potremo anche supporre che nessun fattore di k sia comune a tutte le a. È poi necessario, affinchè l'equazione (15) ammetta soluzioni in numeri interi, che nessun fattore diverso dall'unità sia comune a tutte le a, chè altrimenti il primo membro dell'equazione sarebbe divisibile per tali fattori e il secondo no.

Applichiamo ora ai numeri a_0, a_1, a_2, ... , a_n il processo della ricerca del massimo comun divisore, che già sappiamo, per l'ipotesi fatta, essere l'unità. A tale scopo sia

δ_1 il massimo comun divisore di a_0, a_1
δ_2 » » » » δ_1, a_2
δ_3 » » » » δ_2, a_3
. . . .
δ_{n-1} » » » » δ_{n-2}, a_{n-1},

sarà poi

ι il massimo comun divisore di δ_{n-1}, a_n.

Ponendo allora

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{a_0}{\delta_1} = a'_0\,, & \dfrac{a_1}{\delta_1} = a'_1 \\[2ex] \dfrac{\delta_1}{\delta_2} = \delta'_1\,, & \dfrac{a_2}{\delta_2} = a'_2 \\[2ex] \ldots\ldots, & \ldots\ldots \\[2ex] \dfrac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}} = \delta'_{n-2}, & \dfrac{a_{n-1}}{\delta_{n-1}} = a'_{n-1} \end{cases}$$

il numero a'_0 sarà primo con a'_1, δ'_1 con a'_2, δ'_2 con a'_3, $\ldots\,\delta'_{n-2}$ con a'_{n-1}. Se per tanto poniamo in oltre

$$(17)\quad \begin{cases} a'_1\, x_{n-1} + a'_0\, x_n = y_{n-1} \\ a'_2\, x_{n-2} + \delta'_1 y_{n-1} = y_{n-2} \\ a'_3\, x_{n-3} + \delta'_2 y_{n-2} = y_{n-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{n-1}\, x_1 + \delta'_{n-2} y_2 = y_1\,, \end{cases}$$

ognuna di queste equazioni ammetterà soluzioni in numeri interi.

Moltiplicando le (17) rispettivamente per δ_1, δ_2, δ_3, ... δ_{n-1} e sommandole, otteniamo per le (16)

$$a_{n-1}\, x_1 + a_{n-2}\, x_2 + \ldots + a_0\, x_n = \delta_{n-1}\, y_1\,,$$

che, combinata colla (15), ci dà

$$a_n x_0 + \delta_{n-1} y_1 = k.$$

Anche questa equazione, per essere δ_{n-1}, a_n primi tra loro, ammette soluzioni in numeri interi. Applichiamo allora a questa e alle (17) le formule (14); avremo

$$
(18)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
x_0 = \delta_{n-1}\left(k\sum\dfrac{1}{\delta_{n-1}\,a_n} + \theta_1\right), & y_1 = a_n\left(k\sum\dfrac{1}{a_n\,\delta_{n-1}} - \theta_1\right) \\[2ex]
x_1 = \delta'_{n-2}\left(y_1\sum\dfrac{1}{\delta'_{n-1}a'_{n-1}} + \theta_2\right), & y_2 = a'_{n-1}\left(y_1\sum\dfrac{1}{a'_{n-1}\delta'_{n-1}} - \theta_2\right) \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\[2ex]
x_{n-1} = a'_0\left(y_{n-1}\sum\dfrac{1}{a'_0 a'_1} + \theta_n\right), & x_n = a'_0\left(y_{n-1}\sum\dfrac{1}{a'_1 a'_0} - \theta_n\right),
\end{array}
\right.
$$

ove le θ sono numeri interi qualunque positivi o negativi.

Queste formule servono al nostro scopo, perchè dandoci esse direttamente i valori di y_1 e x_0, si potranno poi per successive sostituzioni calcolare le rimanenti y e quindi anche le rimanenti x.

6. Abbiamo veduto essere condizione *necessaria* affinchè l'equazione (15) ammetta soluzioni in numeri interi, che, tolti i fattori comuni ai due membri, il massimo comun divisore dei coefficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sia l'unità; ora vediamo che questa condizione è anche *sufficiente*, perchè, quando essa si verifica, le (18) ci danno tutte le soluzioni in numeri interi della proposta equazione.

7. Riprendiamo la serie dei numeri

$$a,\ b,\ r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n;$$

l'ultimo resto r_n sarà il massimo comun divisore di tutti i numeri della serie. Dividendo questi numeri pel loro massimo comun divisore, è chiaro che otterremo una serie di quozienti

$$a',\ b',\ r'_1,\ r'_2,\ \ldots,\ r'_{n-1},\ 1$$

tale che i numeri $r'_1, r'_2, \ldots, r'_{n-1}$, 1 saranno rispettivamente i resti delle divisioni di a' per b', di b' per r'_1, di r'_1 per r'_2, ... di r'_{n-2} per r'_{n-1}. Risulterà per tanto

$$\frac{1}{a'b'}-\frac{1}{b'r'_1}+\frac{1}{r'_1r'_2}-\ldots+\frac{(-1)^n}{r'_{n-1}.1}=r_n^2\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{br_1}+\frac{1}{r_1r_2}-\ldots+\frac{(-1)^n}{r_{n-1}r_n}\right)$$

ossia

$$\Sigma\frac{1}{a'b'}=r_n^2\,\Sigma\frac{1}{ab}\,.$$

Per questa eguaglianza, badando alle (16), le (18) divengono

$$(19)\quad\begin{cases} x_0=\delta_{n-1}\left(k\sum\frac{1}{\delta_{n-1}a_n}+\theta_1\right),\ \ y_1=a_n\left(k\sum\frac{1}{a_n\delta_{n-1}}-\theta_1\right),\\ x_1=\frac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}}\left(y_1\delta^2_{n-1}\sum\frac{1}{\delta_{n-2}a_{n-1}}+\theta_2\right),\ \ y_2=\frac{a_{n-1}}{\delta_{n-1}}\left(y_1\delta^2_{n-1}\sum\frac{1}{a_{n-1}\delta_{n-2}}-\theta_2\right),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x_{n-1}=\frac{a_0}{\delta_1}\left(y_{n-1}\delta_1^2\sum\frac{1}{a_0a_1}+\theta_n\right),\ \ x_n=\frac{a_1}{\delta_1}\left(y_{n-1}\delta_1^2\sum\frac{1}{a_1a_0}-\theta_n\right). \end{cases}$$

8. Se due coefficienti della (15) sono primi tra loro, indicandoli con a_0, a_1, potremo scrivere

$$a_1x_{n-1}+a_0x_n=k-a_nx_0-a_{n-1}\,x_1-\ldots-a_2x_{n-2}\,,$$

a cui applicando le formule (14) per rispetto alle due incognite x_{n-1}, x_n troveremo

$$(20)\quad\begin{cases} x_{n-1}=a_0\left\{(k-a_nx_0-a_{n-1}x_1-\ldots-a_2x_{n-2})\sum\frac{1}{a_0a_1}+\theta\right\}\\ x_n=a_1\left\{(k-a_nx_0-a_{n-1}x_1-\ldots-a_2x_{n-2})\sum\frac{1}{a_1a_0}-\theta\right\}. \end{cases}$$

Per tanto, assegnando alle x_0, x_1, ... x_{n-2}, θ dei valori interi arbitrari positivi o negativi, risulteranno determinati valori interi per x_{n-1}, x_n.

A questo medesimo risultato si poteva giungere applicando le (19), ove nel caso presente le δ sono tutte eguali all'unità. Essendo infatti

$$\sum \frac{1}{\delta a} = \sum \frac{1}{1.a} = 0$$

$$\sum \frac{1}{a\delta} = \sum \frac{1}{a.1} = \frac{1}{a} ,$$

si trova

$$x_0 = \theta_1 , \quad x_1 = \theta_2 , \ldots . x_{n-2} = \theta_{n-1} ,$$

$$x_{n-1} = a_0 \left(\gamma_{n-1} \sum \frac{1}{a_0 a_1} + \theta_n\right), \quad x_n = a_1 \left(\gamma_{n-1} \sum \frac{1}{a_1 a_0} - \theta_n\right),$$

$$\gamma_1 = k - a_n \theta_1 , \; \gamma_2 = \gamma_1 - a_{n-1} \theta_2 , \ldots . \gamma_{n-1} = \gamma_{n-2} - a_2 \theta_{n-1} ,$$

dalle quali si ricava

$$\gamma_{n-1} = k - a_n \theta_1 - a_{n-1} \theta_2 - \ldots - a_2 \theta_{n-1} = k - a_n x_0 - a_{n-1} x_1 - \ldots - a_2 x_{n-2}$$

e quindi anche le (20) quando si ponga $\theta_n = \theta$.

9. Analoghi risultati si otterrebbero se fra i coefficienti della (15), non essendone due primi tra loro, ve ne sia un certo numero m, che hanno l'unità per loro massimo comun divisore; poichè indicando con a_0, a_1, a_2, . . . a_m detti coefficienti sarebbe

$$\delta_m = \delta_{m+1} = \ldots = \delta_{n-1} = 1.$$

Urbino, 18 Novembre 1886.

C. Moriconi.

SULL'INSEGNAMENTO DELLA TRIGONOMETRIA
NELLE SCUOLE SECONDARIE

Gli elementi della trigonometria che da molti anni formavano parte dei programmi dei nostri Licei, vi sono stati tolti pochi anni fa, e poi sono stati rimessi, nei programmi del 1885, ora in vigore. Si capisce da un lato l'opportunità di semplificare, epperò ridurre, la materia che deve essere insegnata, anzi a me piacerebbe che tali riduzioni si facessero in più larga misura, e non soltanto nella matematica; d'altra parte la nozione dei rapporti trigonometrici giova ad intendere alcune leggi fisiche; e gli elementi della trigonometria propriamente detta sono parte essenziale di quel corredo di cognizioni matematiche che è necessario agli ingegneri, di guisa che, se questo insegnamento venisse tolto dai Licei, sarebbe indispensabile che esso venisse impartito nelle Università, ma non facil cosa sarebbe, per la natura sua elementare, e per altre ragioni, che effettivamente si desse in ogni Università; aggiungo che i primi elementi di trigonometria bastano perchè i discenti sieno in grado di rendersi conto, almeno all'ingrosso, di alcuni degli ammirabili risultati ottenuti dagli Astronomi, e p. e. come, mediante certe misure di angoli e di lunghezze, e certi calcoli fondati su quelle, si possa determinare la distanza dalla terra alla luna: e in così fatte nozioni sta principalmente il valore di tale insegnamento nella coltura generale.

2. Per queste considerazioni penso che la superiore Autorità scolastica ha bene operato rimettendo nei Licei l'insegnamento degli elementi di trigonometria piana; ma credo che ancor meglio avrebbe fatto se tale insegnamento avesse limitato alla sua parte essenziale. E per meglio spiegare il mio concetto trascrivo testualmente il programma:

Funzioni circolari e loro variazioni al variare dell'arco — Riduzione degli archi al primo quadrante — Relazioni fra le funzioni circolari di uno stesso arco.

Seno, coseno, tangente e cotangente della somma e della differenza di due archi, del doppio e della metà d'un arco — Relazioni fondamentali fra i lati e gli angoli d'un triangolo rettilineo.

Applicazioni — Uso delle tavole logaritmiche delle funzioni circolari.

Ora pare a me che fra gli elementi d'Algebra e Geometria, quali si insegnano nelle prime due classi del Liceo, e quelli elementi della teoria generale delle funzioni goniometriche, richiesti dal programma della terza classe, sia una lacuna, a coprire la quale gioverebbe uno studio preliminare di queste funzioni limitate all'angolo acuto o, se si vuole, estese anche all'angolo ottuso. Anche in questa, come in altre parti dell'insegnamento, non si deve trascurare del tutto il processo storico, che è quello della generazione delle idee. D'altra parte uno studio elementare del seno e del coseno è sufficiente allo scopo della trigonometria propriamente detta, cioè la risoluzione dei triangoli. E mentre trovo opportuno, per le ragioni sopra avvertite, che la risoluzione dei triangoli, almeno nella sua parte più elementare, sia insegnata nei Licei, mi sembra che senza alcun inconveniente si potrebbe ommettere in quelle scuole la trattazione delle funzioni goniometriche considerate in generale, la quale trova il suo vero posto nel corso d'Analisi algebrica che viene impartito nelle Università.

3. E perchè questo studio riesca veramente efficace, credo che la costruzione e l'uso delle Tavole dovrebbero avervi più larga parte di quella che nella maggior parte dei libri moderni le viene accordata.

Infatti, posto il problema della trigonometria, si vede subito ch'esso si riduce ai due seguenti:

Assegnare, per qualunque valore d'un angolo acuto d'un triangolo rettangolo, il rapporto del cateto ad esso opposto all'ipotenusa.

Dato il valore del rapporto d'un cateto d'un triangolo rettangolo all'ipotenusa, assegnare qualunque sia quello, la misura dell'angolo opposto a quel cateto.

La risoluzione di questi due problemi, che è la cosa più essenziale, suol essere appena accennata, e in quella vece si suol dare il posto d'onore a formole, utili senza dubbio, ma che fanno perdere di vista l'obbiettivo principale.

4. Osservo poi che, per coloro che non sanno ancora abbastanza bene cosa sieno queste funzioni che si chiamano seno, coseno, ecc., nè cosa sia quell'altra funzione che si chiama logaritmo, l'uso delle tavole dei logaritmi dei seni, coseni, ecc. non può assolutamente essere bene inteso. Con sufficiente esercizio esso potrebbe diventare una pratica, punto educativa, ma non inutile per coloro che devono proseguire gli studi matematici, ma quel poco esercizio che a tale uso può essere accordato nell'insegnamento liceale si riduce ad una perdita di tempo.

E quì mi piace riferire un brano d'uno scritto del compianto prof. *Hoüel.* *

« L'enseignement de la trigonometrie est compliqué d'une manière facheuse par l'habitude où l'on est d'introduire dès le début l'usage de Tables contenant les *logarithmes* des fonctions circulaires au lieu des valeurs naturelles de ces fonctions. Il serait infiniment préferable de commencer par exposer, avec très peu de details et en se fondant uniquement sur les bissections successives des angles, la construction des Tables de valeurs naturelles, et ce serait un excellent exercice pour les éléves que de construire eux mêmes, en suivant les prescriptions indiquées, une petite table, a deux

* Remarques sur l'enseignement de la trigonometrie par J. Hoüel. Giornale di Battaglini, Vol. XIII.

ou trois decimales et des intervalles assez rapprochés pour que l'interpolation de cette table fut commode. Cette table, corrigée avec soin, devrait être seule mise entre leurs mains; avec son aide, en y joignant le secours de la regle à calcul, ils seraient à même de résoudre toutes les questions de trigonometrie avec une approximation bien superieure à l'exactitudine de leurs constructions graphiques, et beaucoup plus promptement que par l'emploi des logarithmes, surtout quand on complique les formules d'angles auxiliaires, pour les rendre ce qu'on appelle *calculables par logarithmes*.

L'usage prématuré des logarithmes trigonometriques dans un enseignement s'adressant à des jeunes gens encore peu experts dans la pratique du calcul, ne peut que retarder leurs progrès dans cet art et leur en fermer l'intelligence. Le mal est grave surtout lorsqu'on met dans leurs mains novices les grandes Tables qui conviennent seulement aux praticiens exercés, et dont le maniement n'apprend rien de plus, au point de vue de la théorie, que celui des Tables à trois ou quatre figures.

5. In quanto alla costruzione ed all'uso delle tavole si possono seguire diverse vie più o meno elementari. Ma, perchè l'interpolazione non sia troppo incomoda, non basta fondarsi sulle bisezioni successive degli angoli come accenna l'Hoüel. Perciò non mi sembra inutile l'esporre qui un metodo molto elementare col quale si possono calcolare i seni dei multipli di 15', con cinque decimali, a meno di $\frac{6}{10^6}$.

Non occorre rammentare i metodi pel calcolo dei seni e coseni dei multipli di 3°. Mediante questi seni e coseni, dopo avere calcolato il coseno di 1° $\frac{1}{2}$, si ricavano agevolmente i seni e coseni dei multipli dispari di 1° $\frac{1}{2}$, applicando le formole

$$\mathrm{sen}\,mb = \frac{\frac{\mathrm{sen}(mb+b) + \mathrm{sen}(mb-b)}{2}}{\cos b}, \quad \cos mb = \frac{\frac{\cos(mb+b)+\cos(mb-b)}{2}}{\cos b};$$

e per mezzo di queste stesse formole, dopo avere calcolato il coseno di $45'$, si possono calcolare i seni e coseni dei multipli dispari di $45'$. Collo stesso metodo si potrebbero calcolare successivamente i seni e coseni dei multipli di $22'\frac{1}{2}$, di $11'\frac{1}{4}$, ecc; ma, perchè la differenza fra due angoli consecutivi della tavola sia un numero intero di minuti, si dovrebbero poscia applicare quelle formole, pel calcolo di seni e coseni di angoli molto piccoli, che risultano dalle limitazioni del seno e del coseno in funzione del rapporto dell'arco al raggio. Molto più facilmente si raggiunge lo scopo col calcolo di sen $1°$, calcolo che si può effettuare colla massima semplicità.

Una figura molto semplice mette in evidenza che il seno della media aritmetica di due angoli acuti è maggiore della media aritmetica dei loro seni. Da questa proposizione si ricavano le disuguaglianze

$$\text{sen}3a - \text{sen}2a > \text{sen}4a - \text{sen}3a$$

$$\text{sen}2a - \text{sen}a > \text{sen}4a - \text{sen}3a$$

$$\text{sen}a > \text{sen}4a - \text{sen}3a$$

dalle quali risulta

$$\text{sen}4a < \tfrac{4}{3}\text{sen}3a.$$

Inoltre dalle disuguaglianze

$$\text{sen}4a - \text{sen}3a > \text{sen}5a - \text{sen}4a$$

$$\text{sen}4a - \text{sen}3a > \text{sen}6a - \text{sen}5a$$

si deduce

$$\text{sen}4a > \text{sen}3a + \tfrac{1}{3}(\text{sen}6a - \text{sen}3a).$$

Così p. e. posto $a = 15'$, colle limitazioni

$$0{,}0130895 < \text{sen}45' < 0{,}0130896$$

$$0{,}0261769 < \text{sen}1°30' < 0{,}0261770$$

si trova

$$0{,}01745194 < \text{sen}1° < 0{,}01745280$$

e in coseguenza

$$\operatorname{sen}1^\circ = 0{,}0174524 \quad \text{a meno di } \frac{5}{10^7} \ \text{*)}$$

[illegible] poi

$$\left.\begin{aligned} \cos 1^\circ &= 0{,}9998477 \\ \cos 30' &= 0{,}9999619 \\ \cos 15' &= 0{,}9999905 \end{aligned}\right\} \text{a meno di } \frac{3}{10^9}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}30' &= 0{,}0087265 \\ \operatorname{sen}15' &= 0{,}0043633 \end{aligned}\right\} \text{a meno di } \frac{3}{10^7}$$

Ora è molto facile il calcolo dei seni dei multipli di $15'$ compresi fra due multipli consecutivi di $45'$. Si ha p. e.

$$\operatorname{sen}17^\circ = \operatorname{sen}17^\circ\, 15' \cos 15' - \cos 17^\circ\, 15' \operatorname{sen}15',$$

ma dalla tavola dei seni dei multipli di $45'$ si ha:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}17^\circ\, 15' &= 0{,}296542 \\ \cos 17^\circ\, 15' &= 0{,}955020 \end{aligned}\right\} \text{a meno di } \frac{5}{10^7}$$

coi quali valori si trova

$$\operatorname{sen}17^\circ = 0{,}29237 \qquad \text{a meno di } \frac{4}{10^6}.$$

Così si possono calcolare i seni e coseni di tutti i multipli di $15'$, con cinque decimali, a meno di $\frac{6}{10^6}$, come facilmente si può dimostrare. Con una tavola così fatta l' errore nel calcolo del seno, coll'ordinaria interpolazione, è sempre minore di $\frac{9}{10^6}$; e l'errore nel calcolo dell' angolo è sempre mi-

*) Questo semplicissimo metodo pel calcolo di sen1° si trova esposto nell'opera: Les oeuvres mathématiques de *Simon Stevin* de Bruges ou sont inserées les mémoires mathématiques esquelles s'est exercé le très-haut et très illustre Prince *Maurice de Nassau*. Le tout revu, corrigé et augmenté par *Albert Girard*. Leyde, 1634.

nore di $\frac{1}{3}$ di minuto primo quando l'angolo non supera 85° (esso è minore di 2''.5 per gli angoli non maggiori di 45°).

Ma qui non credo di dovere entrare in altre particolarità che troverebbero miglior posto in un libro; e mi limito ad esprimere il desiderio che *alcuni* dei calcoli richiesti per la costruzione della tavola, sieno eseguiti dagli allievi, e corredati da un apprezzamento sull'approssimazione conseguita.

6. La confusione che nasce dal comprendere sotto uno stesso nome delle scuole d'indole tanto diversa, quali sono le così dette *sezioni* degli istituti tecnici, non ha poco contribuito al fatto ch'esse per forza procedono insieme, con danno di tutte. Ma qui non è il luogo di discorrere che di un inconveniente che ne deriva nell'insegnamento della trigonometria; e tale inconveniente pare a me che potrebb'essere facilmente eliminato. Non credo che si creda, dagli Autori dei programmi, essere veramente indicato, pei futuri agrimensori e misuratori di fabbriche, lo studio della teoria generale delle funzioni goniometriche, e che il tempo ad esso dedicato non sarebbe più utilmente impiegato in esercitazioni numeriche relative specialmente a problemi quali si possono presentare nella carriera che quei giovani vogliono intraprendere. Ma gli allievi di quella sezione, nella maggior parte degli istituti, si devono trovare, per tale studio, insieme a quelli della sezione fisico-matematica, epperciò il programma di *trigonometria piana* (più esattamente dovrebb'essere detto di goniometria e trigonometria piana) è lo stesso per le due sezioni; e in questo caso i bisogni delle scuole speciali sono sagrificati a benefizio della scuola di coltura generale, mentre in altri casi accade l'opposto. Ora questo inconveniente può essere facilmente tolto, perchè il programma della terza e quarta classe della sezione fisico-matematica può essere diversamente distribuito nelle due classi; e, in particolare, gli elementi della teoria generale delle funzioni goniometriche possono essere insegnati nella

quarta classe, pur continuandosi nella terza classe di quella e nelle terze classi delle sezioni di agrimensura e di costruzioni, l'insegnamento della trigonometria piana propriamente detta.

7. Anche in queste scuole come nei Licei ritengo che, all'uso delle tavole di logaritmi delle funzioni goniometriche, debba essere preferito quello delle tavole delle funzioni *naturali*, il quale può esservi dichiarato in modo che gli allievi riescano ad apprezzare l'approssimazione dei risultati, in forza di teoremi le dimostrazioni dei quali essi possono intendere.

Veramente le formole della trigonometria sferica possono sembrare di assai lunga calcolazione quando non si faccia uso delle tavole di logaritmi delle funzioni goniometriche. Ma esse sono suscettibili di trasformazioni che ne semplificano notevolmente il calcolo. Così p. e. la formola pel calcolo di un angolo quando sono dati i tre lati

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

si trasforma nella

$$\cos A = \frac{2\cos a - \cos(b+c) - \cos(b-c)}{\cos(b-c) - \cos(b+c)}$$

che, pel calcolo numerico, è molto più semplice.

8. Chiuderò con un'osservazione la quale non si riferisce soltanto a questa parte dell'insegnamento della matematica.

Una delle ottime abitudini intellettuali promosse dallo studio della matematica è quella di formare le reciproche delle proposizioni già stabilite, e di porre in questione la loro validità. Ma forse a questa parte del *metodo* non si suol dare tutta l'importanza che merita. Per la qual cosa non stimo inutile di presentare qui due esempi di proposizioni reciproche che si riferiscono alla trigonometria sferica.

La reciproca della proposizione fondamentale è vera, ossia sussiste il teorema:

Se a, b, c, A, B, C sono le misure di angoli comprese fra 0 e 180°, e se hanno luogo le relazioni

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} a \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C$$

esiste un triangolo sferico coi lati misurati da a, b, c e gli angoli ad essi rispettivamente opposti da A, B, C.

Nel triangolo rettilineo ha luogo la doppia proposizione: Se due lati sono fra loro eguali, devono essere fra loro eguali le mediane corrispondenti; e reciprocamente. Ma non è così nel triangolo sferico. È bensì vero che, se due lati d'un triangolo sferico sono fra loro eguali, devono essere fra loro eguali gli archi mediani corrispondenti; ma la reciproca non è vera. Così p. e. nel triangolo sferico che ha i lati $a = 126°$, $b = 120°$, e il lato c dato dalla $\cos c = -\frac{1}{2} - \operatorname{sen} 27° + \operatorname{sen} 36°$ ($c = 111° 28' 54'', 43$ a meno di $0'', 15$) sono eguali gli archi mediani dei lati a e b. *)

D. Besso.

*) Questa quistione è risolta nella nota: *Di una proprietà del triangolo sferico* (Annuario del R. Istituto tecnico di Roma, 1883).

ESERCIZÎ PER LA SCUOLA

GEOMETRIA

Parallele. – Somma degli angoli del triangolo – Angoli del triangolo isoscele.

1. Da due punti A e B d'una retta sono guidate, da una stessa banda di esse, due rette parallele AA′ e BB′, sulla prima delle quali si porta un segmento arbitrario AH, e sulla seconda un segmento arbitrario BL, quindi si tira la retta HL, e si trova ch'essa forma colla AH un angolo eguale a $\frac{23}{37}$ d'angolo retto; trovare, in parti d'angolo retto, l'angolo che la retta HL forma colla BL.
2. Sieno le rette AR, BS perpendicolari alla AB, ma situate da bande opposte di questa retta, sia R un punto qualunque dell'una ed S un punto qualunque dell'altra; quale relazione ha luogo fra i due angoli ARS, BSR?
3. In un triangolo, un lato del quale è lungo un centimetro, i rapporti di due angoli all'angolo retto sono $\frac{9}{16}$ e $\frac{7}{24}$; un altro triangolo ha un lato lungo un chilometro, e due angoli di esso sono rispettivamente $\frac{9}{16}$ e $\frac{7}{24}$ d'angolo retto; se l'angolo retto è diviso in 336 parti eguali, quante di queste saranno contenute nel terzo angolo del primo triangolo, e quante nel terzo angolo del secondo triangolo?
4. L'angolo BAM d'un triangolo BAM è $\frac{8}{5}$ d'angolo retto; se l'angolo ABM viene aumentato o diminuito di $\frac{1}{10}$ d'angolo retto, col far girare il lato BM intorno al punto B, cosa avviene del terzo angolo BMA?
5. Due triangoli hanno in comune un angolo, e la somma degli altri quattro angoli eguaglia $\frac{25}{9}$ d'angolo retto; se l'angolo retto è diviso in 54 parti eguali, quante di queste saranno contenute nell'angolo comune ai due triangoli?
6. Dal vertice B d'un triangolo ABC si guida, fuori di esso, una retta BH che forma colla BC un angolo eguale alla

somma dei due angoli ACB, CAB, e su questa retta si prende un segmento BD = 3 metri; se il lato AB è lungo 2 metri, si domanda la lunghezza del segmento AD.

7. Da due punti A,B d'una retta AB sono condotte, da una stessa banda di essa, le rette AA', BB' in modo che l'angolo BAA' è $\frac{2}{3}$ dell'angolo ABB', e che la differenza dei due angoli è $\frac{5}{11}$ dell'angolo retto; provare che le due rette, convenientemente prolungate, si incontrano, e sono fra loro perpendicolari.

8. L'angolo al vertice d'un triangolo isoscele è $\frac{5}{17}$ d'angolo retto: trovare il rapporto d'uno degli angoli alla base all'angolo retto.

9. In un triangolo isoscele uno degli angoli alla base è doppio dell'angolo al vertice; se l'angolo retto è diviso in cinque parti eguali, quante di queste saranno contenute nell'angolo al vertice?

10. È dato un angolo BAC: se da un punto B del suo lato AB si guida, dentro l'angolo, la BH perpendicolare ad AB, è necessario ch'essa incontri il lato AC?

11. Sia BAC un triangolo isoscele col vertice in A: provare che la perpendicolare alla base BC, condotta da un suo punto qualunque, internamente all'angolo ABC, deve incontrare l'altro lato BA di quest'angolo.

12. Nel triangolo BAC, ciascun angolo del quale è minore della somma degli altri due, è condotta, da un punto del lato AB e internamente all'angolo BAC, la perpendicolare a quel lato; provare ch'essa deve incontrare l'altro lato dell'angolo BAC.

13. Nel triangolo ABC l'angolo A è maggiore della somma degli altri due: si può costruire un triangolo rettangolo nel quale la somma dei due angoli acuti sia eguale all'angolo A?

14. Nel triangolo ABC l'angolo A è eguale alla somma degli altri due angoli: se l'angolo A è diviso in due parti

si può costruire un triangolo rettangolo cogli angoli acuti eguali a quelle due parti?

15. È dato un segmento AB, e, nel suo interno, un punto C: come dev' essere un triangolo gli angoli del quale stanno negli stessi rapporti dei segmenti AC, CB, AB?

ARITMETICA

Sulla moltiplicazione delle frazioni.

1. Un segmento AB è lungo 4 metri: trovare le lunghezze dei segmenti che sono rispettivamente il doppio, il triplo, il quintuplo, il settuplo di AB.
2. Trovare le lunghezze dei segmenti che sono rispettivamente un terzo, un settimo, un quindicesimo del segmento AB.
3. Trovare le lunghezze dei segmenti che sono rispettivamente $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{15}$ del segmento AB.
4. Che significa moltiplicare 4 per $\frac{5}{7}$?
5. Un segmento CD è $\frac{3}{5}$ di metro: trovare le lunghezze dei segmenti che sono rispettivamente un quarto, un settimo, un tredicesimo di CD.
6. Trovare le lunghezze dei segmenti che sono rispettivamente $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{8}{13}$ di CD.
7. Che significa moltiplicare $\frac{3}{5}$ per $\frac{4}{7}$?
8. Che significa moltiplicare $\frac{4}{7}$ per $\frac{3}{5}$?
9. Provare che il prodotto di $\frac{3}{5}$ per $\frac{4}{7}$ è eguale al prodotto di $\frac{4}{7}$ per $\frac{3}{5}$.
10. Provare che, moltiplicando per $\frac{2}{9}$ il prodotto di $\frac{3}{5}$ per $\frac{4}{7}$, si ottiene lo stesso prodotto che risulta moltiplicando prima $\frac{4}{7}$ per $\frac{2}{9}$, e poi $\frac{3}{5}$ pel prodotto ottenuto.
11. Eseguire in diversi modi il prodotto delle quattro frazioni $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{6}{13}$.
12. Provare che la somma dei due prodotti $\frac{5}{13} \times \frac{8}{27}$, $\frac{6}{19} \times \frac{8}{27}$ è eguale al prodotto della somma $\frac{5}{13} + \frac{6}{19}$ per $\frac{8}{27}$.
13. Quando accade che il prodotto di un numero per un altro è minore del primo numero?

14. Il prodotto di $\frac{17}{10}$ per un numero è $\frac{18}{11}$: quel numero è maggiore o minore di 1?

15. Il prodotto di $\frac{10}{17}$ per un numero è $\frac{11}{18}$: quel numero è maggiore o minore di 1?

16. Il prodotto di un numero per sè stesso è maggiore o minore di quel numero?

17. Confrontare i prodotti che si ottengono moltiplicando una, due, tre, quattro, cinque volte per sè stessa la frazione $\frac{7}{8}$.

18. Confrontare i prodotti che si ottengono moltiplicando una, due, tre, quattro, cinque volte per sè stessa la frazione $\frac{8}{7}$.

19. Trovare un prodotto di più fattori, tutti eguali a $\frac{9}{10}$, il quale sia minore di $\frac{1}{8}$.

20. Trovare un prodotto di più fattori, tutti eguali a $\frac{10}{9}$ il quale sia maggiore di 5.

DI UNA SERIE

DI PUNTI NOTEVOLI NEL TRIANGOLO

Il centro di gravità, il centro del circolo inscritto e il punto di *Grebe* o di *Lemoine* *) appartengono ad una serie di punti, uno qualunque dei quali è l'incontro d'una terna di rette che congiungono i vertici A, B, C coi punti A', B', C', dei lati rispettivamente opposti, determinati dalle

$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{c^{\mu}}{b^{\mu}},\ \frac{CB'}{B'A}=\frac{a^{\mu}}{c^{\mu}},\ \frac{AC'}{C'B}=\frac{b^{\mu}}{a^{\mu}}$$

Si dimostra facilmente che le distanze d'uno di questi punti dai tre lati sono proporzionali ai numeri

*) Su questo punto notevole veggasi la Memoria del Sig. *Lemoine* inserita nel *Mathesis* (Maggio 1886).

$$a^{\mu-1},\ b^{\mu-1},\ c^{\mu-1}\ *)$$

Di qui risulta la notevole proprietà che esso è il punto, interno al triangolo, pel quale è minima la somma delle potenze m.^{e} delle distanze dai lati, essendo

$$m = \frac{\mu}{\mu-1}$$

Infatti le distanze d' un punto interno al triangolo dai lati verificano la relazione

$$ax + by + cz = \text{costante},$$

in cui x, y, z sono positive, epperciò la somma

$$x^{\frac{\mu}{\mu-1}} + y^{\frac{\mu}{\mu-1}} + z^{\frac{\mu}{\mu-1}}$$

è minima quando

$$\frac{x}{a^{\mu-1}} = \frac{y}{b^{\mu-1}} = \frac{z}{c^{\mu-1}}\ **)$$

Questa proprietà era già stata avvertita nel caso di $\mu = 2$, cioè pel punto di *Lemoine*.

D. Besso.

---

*) Questo punto è stato chiamato dal Sig. *De Longchamps*, nel caso di $\mu-1$ intero e positivo « potenziale d'ordine $\mu-1$ ». (Veggasi la sua recente memoria *Généralités sur la Géométrie du triangle*: *Les points réciproques et les potentiels d'ordre p.*)

**) Una dimostrazione elementare di questo teorema trovasi nella memoria :

Teoremi elementari sui massimi e minimi (Annuario del R. Istituto tecnico di Roma, 1879).

SOLUZIONE DELLA QUISTIONE PROPOSTA A PAG. 18.

Fra tutti i tetraedri nei quali i segmenti che uniscono i punti di mezzo delle coppie di lati opposti sono eguali fra loro e ad un segmento dato, trovare quello di massimo volume. (D. Besso).

Soluzione del prof. *M. Misani* *).

Si consideri un tetraedro SABC e sieno L, L_1; M, M_1; N, N_1 rispettivamente, i punti di mezzo degli spigoli a due a due opposti SA, BC; SB, AC; SC, AB, e $2l$ le lunghezze, per ipotesi fra loro eguali, dei segmenti LL_1, MM_1, NN_1. Questi tre segmenti, com'è noto, si dividono per metà in O baricentro del tetraedro dato. Ora il tetraedro $OM_1N_1L_1$ ha per base il triangolo $M_1N_1L_1$ la cui area è un quarto della base ABC del tetraedro SABC, e per altezza un quarto dell'altezza di questo; e ciò perchè, come si sa, il baricentro, d'un tetraedro divide i segmenti che vanno dai vertici ai baricentri delle facce opposte in due parti che stanno fra loro come 3 ad 1. Risulta da ciò che il volume del tetraedro SABC è sedici volte quello del tetraedro $OM_1N_1L_1$, e quindi il massimo volume del primo corrisponderà al massimo del secondo. Ora il parallelepipedo (romboedro) che ha per uno degli angoli triedri l'angolo in O del tetraedro $OM_1N_1L_1$ e per spigoli i tre spigoli eguali di questo OM_1, ON_1, OL_1 ha il volume sestuplo di quello del tetraedro, e tale volume sarà massimo quando il romboedro diverrà il cubo di lato l, poichè il romboedro di massimo volume costruibile con uno spigolo di data lunghezza è appunto il cubo. Il massimo volume del tetraedro $OM_1N_1L_1$ sarà dunque $\frac{1}{6}l^3$, e quello del dato SABC $\frac{8}{3}l^3$. Siccome poi in questo caso

*) Una soluzione simile a questa ci venne inviata dal Sig. Capitano *J. Beyens*.

del massimo gli angoli M_1ON_1, M_1OL_1, N_1OL_1 sono retti, risultano eguali fra loro i lati M_1L_1, L_1N_1, M_1N_1 e quindi gli spigoli AB, BC, CA; e se si osserva che le figure LNL_1N_1, LML_1M_1, MNM_1N_1 sono quadrati eguali, si ricaverà altresì l'eguaglianza dei tre spigoli SA, SB, SC, fra loro ed ai precedenti, e quindi il tetraedro richiesto di massimo volume è regolare. Il suo lato sarà $2l\sqrt{2}$.

Soluzione del prof. *G. Riboni.*

Anzitutto osservo che, se le congiungenti i punti medii degli spigoli opposti d'un tetraedro sono eguali, il tetraedro ha gli spigoli opposti ortogonali fra loro, perchè queste congiungenti sono le diagonali delle sezioni medie fatte nel tetraedro. Ne segue che il parallelepipedo circoscritto al tetraedro in quistione (ottenuto col condurre per ciascuno spigolo il piano parallelo allo spigolo opposto) ha le facce equilatere, poichè le diagonali di ciascuna sono: uno spigolo del tetraedro, e una retta parallela allo spigolo opposto. Questo parallelepipedo, come si sa, ha un volume triplo del tetraedro inscritto *), quindi la quistione è ridotta a trovare il massimo fra i parallelepipedi a facce equilatere di dato spigolo. Ed essendo noto che fra questi il massimo è il cubo, a cui corrisponde il tetraedro regolare, si conclude che questo tetraedro è il massimo cercato.

Soluzione del prof. *R. Badia.*

Indicherò con A, B, C, D i vertici di un tetraedro, nel quale i segmenti che uniscono i punti di mezzo dei lati opposti hanno tutti la stessa lunghezza k, e con E, F, G, H, K, L i punti che dividono rispettivamente in due parti eguali i lati AB, AC, AD, CD, DB, BC.

Se si tolgono i tetraedri AEFG, BEKL, CFHL, DGHK,

---

*) *Baltzer*, Stereometria. Traduzione di L. Cremona, pag. 142 della seconda edizione (Genova, 1877).

ciascuno dei quali è l'ottava parte di ABCD, rimarrà l'ottaèdro EFGHKL che è la metà del tetraedro dato ed ha per assi i segmenti EH, FK, GL i quali, come è noto, passano per uno stesso punto nel quale si dividono scambievolmente in due parti eguali.

Indicando con α l'angolo sotto il quale due di questi assi si tagliano, con β l'angolo che il terzo asse fa col piano degli altri due, l'espressione del volume doll'ottaedro sarà

$$\tfrac{1}{6} k^3 \text{ sen } \alpha \text{ sen } \beta$$

la quale diviene un *massimo* quando si verificano simultaneamente le eguaglianze

$$\text{sen } \alpha = 1 \qquad \text{sen } \beta = 1$$

cioè quando l'ottaedro, avendo gli assi eguali e rettangolari che si tagliano in un punto equidistante dai loro estremi, è regolare ed ha quindi i lati eguali fra loro.

Dopo ciò, osservando che ciascuno dei lati dell'ottaedro è la metà di uno dei lati del tetraedro preso a considerare, si conclude che anche il volume di questo diviene massimo quando i suoi lati sono eguali fra loro, ossia quando esso è regolare.

Soluzione del prof. *C. Moriconi*.

Sia SABC un tetraedro: si sa che indicando con V il suo volume e con a, b, c, a_1, b_1, c_1 rispettivamente gli spigoli SA, SB, SC, BC, CA, AB, è

$$(1)\quad 144V^2 = a^2a_1^2(b^2+b_1^2+c^2+c_1^2-a^2-a_1^2)+b^2b_1^2(c^2+c_1^2+a^2+a_1^2-b^2-b_1^2)$$
$$+c^2c_1^2(a^2+a_1^2+b^2+b_1^2-c^2-c_1^2)-(b^2c^2a_1^2+c^2a^2b_1^2+a^2b^2c_1^2+a_1^2b_1^2c_1^2).$$

Ma, se L, L' sono i punti di mezzo dei lati opposti SA, BC e si pone $LL' = l$, poichè

$$b^2 + c^2 = 2\overline{SL'}^2 + 2\overline{BL'}^2,$$
$$b_1^2 + c_1^2 = 2\overline{AL'}^2 + 2\overline{BL'}^2,$$
$$\overline{SL'}^2 + \overline{AL'}^2 = 2l^2 + 2\overline{SL}^2,$$

si ha

$$b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 = 4l^2 + a^2 + a_1^2$$

e analogamente

$$c^2 + c_1^2 + a^2 + a_1^2 = 4l^2 + b^2 + b_1^2$$
$$a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 = 4l^2 + c^2 + c_1^2 ,$$

che insieme alla precedente conducono alle altre

$$(2)\quad a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2 = 4l^2 ;$$

perciò la (1) diviene

$$36\mathrm{V}^2 = a^2b^2c^2 - l^2 (a^2 - b^2 + c^2)^2 + 8l^4 (a^2 + b^2 + c^2) - 16l^6.$$

Trasformando questa nella seguente

$$(3)\, 36\mathrm{V}^2 = 4l^6 - \{(2l^2-a^2)^2 + (2l^2-b^2)^2 + (2l^2-c^2)^2\} l^2 - (2l^2-a^2)(2l^2-b^2)(2l^2-c^2),$$

sarà facile dedurne che, se qualcuna delle tre quantità a^2, b^2, c^2 è uguale a $2l^2$, senza che lo siano tutte, oppure se una o tutte e tre ne sono minori, si ha

$$36\mathrm{V}^2 < 4l^6.$$

E siccome, aggiungendo e togliendo nella (3), la quantità

$$2l^2 (2l^2 - b^2) (2l^2 - c^2),$$

si può pervenire alla

$$36\mathrm{V}^2 = 4l^6 - \{(2l^2-a^2)^2 + (b^2-c^2)^2\} l^2 - (2l^2-b^2)(2l^2-c^2)(4l^2-a^2),$$

così si conclude che la stessa cosa avviene anche quando una sola delle quantità a^2, b^2, c^2, p. es, la a^2, o tutte e tre sieno maggiori di $2l^2$, perchè, come apparisce dalle (2), la a^2 deve essere minore di $4l^2$. Dunque, eccettuato il caso in cui tutte e tre le quantità a^2, b^2, c^2 sono eguali a $2l^2$, in ogni altro è sempre

$$\mathrm{V} < \frac{l^3}{3}.$$

Il volume V raggiunge questo valore massimo $\left(\frac{l^3}{3}\right)$ soltanto per

$$a^2 = b^2 = c^2 = 2l^2,$$

nel qual caso, come risulta dalle (2), è anche

$$a_1^2 = b_1^2 = c_1^2 = 2l^2.$$

Segue da ciò che il tetraedro richiesto è *regolare*.

QUISTIONI PROPOSTE

Se si dividono i lati d' un poligono rettilineo piano o gobbo, nello stesso senso, in due segmenti aventi il medesimo rapporto, la differenza fra le somme dei quadrati delle distanze di un punto qualunque dello spazio dai vertici del poligono e dai punti di divisione è costante.

A. Lugli.

Fra quali limiti devono essere compresi gli angoli d'un triangolo affinchè si possa costruire un triangolo colle distanze del centro del circolo circoscritto dai tre lati?

Se le rette AA_1, BB_1, CC_1 che uniscono i vertici A, B, C d'un triangolo coi punti A_1, B_1, C_1 dei lati rispettivamente opposti passano per uno stesso punto, e se inoltre gli angoli AA_1C, BB_1A, CC_1B sono fra loro eguali, quelle rette sono le altezze del triangolo.

Se si costruiscono sui tre lati d' un triangolo ABC, o esternamente o dalla banda in cui è il triangolo, tre poligoni regolari di egual numero di lati, le rette AA_1, BB_1, CC_1, congiungenti i vertici A, B, C coi vertici A_1, B_1, C_1 dei poligoni opposti rispettivamente ai lati BC, CA, AB, o coi punti medii dei lati opposti a BC, CA, AB, passano per uno stesso punto.

D. Besso.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Il senso comune nelle scienze esatte — **Esposizione per tutti dei principii delle scienze matematiche — di** Guglielmo Kingdon Clifford — **Milano F.lli Dumolard 1886.**

Bacone terminava la sua opera immortale avvertendo che essa era soltanto una semplice logica e non un trattato di filosofia positiva; i lettori del libro, che ora vogliamo indicare agli studiosi italiani e che ha per epigrafe l'aforisma XLIV del II libro del *Novum organum*, riconosceranno facilmente che il Clifford, senza fare un trattato di matematica elementare, ha voluto in quest'opera logicamente esporre le basi sulle quali si fondano le varie teorie della matematica, deducendole dalla esperienza quotidiana. Talchè questo libro sarà, a parer nostro, un'ottima guida per coloro che sono chiamati a dare ai giovani un insegnamento fondamentale di matematica. Richiamando la loro attenzione e la loro riflessione sui primi principî, esso servirà a dare una maggiore esattezza e lucidità alle idee che essi già hanno, e non è chi non veda quanta maggiore chiarezza ed attrattiva acquisterà con ciò il loro insegnamento.

Dobbiamo però dichiarare che non tutte le parti del libro ci son sembrate ugualmente meritevoli di lode. E mentre possiamo senza restrizioni lodare il primo capitolo che concerne il numero, dove va specialmente segnalata la elegante e semplice dimostrazione dello sviluppo delle potenze intiere dei binomi, dobbiamo nel capitolo II notare una certa oscurità nel concetto di forma, sul quale pure tanto si insiste, senza che mai venga esattamente definito. Come si può infatti ammettere che le superficie in ogni punto liscio presentino la stessa forma? Basta confrontare un punto ellittico ed uno iperbolico di due superficie per vedere che, pur essendo ambedue punti lisci, le superficie presentano in essi una notevole differenza di forma. Così pure come può dirsi che la forma è un affar d'angoli? Che gli angoli debbano entrare nella definizione di forma nessun dubbio, ma si potrà forse dire che due poligoni non simili, che abbiano gli angoli uguali, hanno la stessa forma? Nella pagina successiva a quella che contiene questa osservazione, troviamo che angoli uguali sono quelli che corrispondono alla stessa apertura di compasso, e qui vi è errore di metodo, non avendo a quel punto ancora dimostrato nessuna delle proprietà del circolo. La definizione della retta e nel Capitolo IV le considerazioni sulla curvatura, ci son pure sembrate oscure e non sempre logicamente rigorose. Ma queste lievi mende sono ben largamente compensate da quel tesoro di osservazioni ingegnose e spesso originali, che si trovano nei capitoli III e IV, ove il metodo dei « passi », svolto con tanta eleganza, conduce così semplicemente alla dimostrazione delle principali proprietà dei numeri complessi. E sono veramente da segnalare all'attenzione del lettore le dimostrazioni ivi date del teorema di Moivre e delle formule di Euler, che legano le funzioni esponenziali alle funzioni circolari.

Condotti alle soglie di tanti rami di scienza, come ad esempio della geometria proiettiva, della teoria delle curve del terzo ordine, del calcolo grafico e dei quaternioni, è da ritenersi, che i giovani lettori, invogliati, vi si addentreranno.

La brevità colla quale nel capitolo V sono esposte le basi della meccanica, fa vivamente desiderare che presto avvenga la pubblicazione degli *Elementi di Meccanica* del Cliffort dei quali si parla nella prefazione. Poichè, convinti per lunga esperienza, che l'insegnamento della meccanica, come dice lo Stallo nel suo libro: *La matière et la physique moderne*, acquisterebbe in chiarezza se vi si potesse diminuire per quanto è possibile l'uso del termine *forza*, saremmo desiderosi di vedere, come il Cliffort, sempre originale e che ammette ancor lui questo vantaggio, abbia potuto fare a meno sistematicamente di questo concetto.

Ma non possiamo terminare questo breve cenno del libro di Cliffort senza rivolgere una parola di encomio all'egregio traduttore, che con tanto amore e tanta scienza, ha curato l'edizione italiana. E ci sia permesso esprimere un nostro desiderio: affidino i coraggiosi editori della Biblioteca scientifica internazionale allo stesso valente scienziato anche la traduzione dell'opera del Mach *Die Mechanik in ihrer Entwickelung*, che fa parte della stessa collezione, e saranno sempre più benemeriti degli studiosi italiani.

E. Padova.

Faifofer (A). — ***Trattato di Aritmetica teorico pratica e principii d'algebra con tavole logaritmiche*** ad uso delle Scuole tecniche. — p. 220 e XXIII — 6ª *ed.* — Venezia, 1886 — L. 2.

Il Signor Prof. Faifofer, autore di libri scolastici di matematica assai pregevoli, con questa nuova edizione del suo trattato d'aritmetica, tanto diversa dalle precedenti da potersi considerare come un nuovo libro, ha avuto per scopo di compilare un'operetta che si adattasse ai nuovi programmi per le scuole tecniche. Ed invero il libro di cui trattasi è appropriato agli alunni delle due sezioni del 3° corso, quella che avvia i giovinetti all'istituto tecnico, e l'altra che li conduce alla licenza, e maggiormente per quella che per questa, per una ragione che forse è da ricercarsi più nell'indole dei nuovi ordinamenti che in altro.

Le diverse parti della materia sono trattate con certa sobrietà, com'era utile di fare, e il libro è ricco di esercizi. In fine del medesimo trovasi una tavola di logaritmi volgari a 5 decimali per i numeri da 1 a 1000, con numerazione a parte da potersi staccare dal rimanente. Con ciò l'A. ha ottemperato alla disposizione del programma che prescrive di impartire agli alunni, che mirano alla licenza, qualche nozione sul calcolo con logaritmi per servirsene specialmente nella risoluzione del problema d'interesse composto, disposizione la cui opportunità sembrami assai discutibile, posto che esistono tante e pregevoli tavole che permettono la risoluzione del problema stesso con molta maggiore facilità e speditezza, posto che, in pratica e pei bisogni del commercio, l'uso di tali tavole sarà sempre da preferirsi all'impiego dei logaritmi, posto finalmente che quest'impiego richiede una certa destrezza nel calcolo che non è facile ottenere dalla generalità degli scolari.

Ma per dire più particolarmente del libro è da notare che dopo l'esposizione chiara, semplice e precisa delle quattro operazioni fondamentali, seguono la *divisibilità* e i *numeri primi* coi principali teoremi che vi si riferiscono. E qui l'A. ha seguito il metodo stesso adoperato nei suoi *elementi d'aritmetica* per i ginnasi, scostandosi dagli ordinari testi in ciò che ha voluto premettere la teoria dei numeri primi al massimo comun divisore, conferendo così unità maggiore alla materia.

Ciò è cosa ben fatta, ma qui ingenera la lieve difficoltà, pur da notarsi, che un teorema importante (quello del n.º 98) viene a subirne discapito nella semplicità della dimostrazione, semplicità che deve essere uno dei criteri direttivi dell'insegnamento nelle scuole tecniche.

A titolo di lode per l'A, mi piace poi riconoscere che il libro dimostra all'evidenza la sua cura grandissima di esser semplice, per quanto è possibile, senza pregiudizio dell'esattezza. Così per citare un esempio, per ottenere la generatrice d'una frazione periodica semplice l'A. si fonda sul facile teorema che « *se due frazioni semplici* (della forma $\frac{1}{n}$) *hanno per denominatori due numeri consecutivi, la maggiore è uguale alla minore aumentata del prodotto delle due frazioni* », giungendo agevolmente alla generatrice cercata. Anzi può dirsi in generale che i diversi §§ del libro contengono quanto basta e nulla più. Alcuni cenni sulle progressioni aprono la via ai logaritmi e questi sono trattati assai bene, in vista dello scopo al quale sono destinati a servire.

Terminerò col dire che l'edizione è assai nitida sotto il punto di vista tipografico e veramente economica, ciò che costituisce un pregio rimarchevole ove si ponga mente che le scuole tecniche sono frequentate in genere dai giovanetti appartenenti alle classi che non sono delle più favorite dalla fortuna.

A. Lugli.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Bibliotheca mathematica rédigée par *Gustav Eneström*. Stockholm, 1886; N. 4.

Giornale di Matematiche pubblicato per cura del professore *G. Battaglini*. Volume XXV. Gennaio e Febbraio 1887. Napoli, Benedetto Pellerano, editore.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *J. Bourget*, Recteur de l'Academie de Clermont, *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy*. Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe. 2e série. Onzième année. N. 1 et 2. Paris, 1887.

Journal de Mathématiques élementaires publié par *H. Vuibert*. 11e Année. N. 7, 8, 9, 10, 11. Paris, M. Nony, 17. Rue des Écoles, 1887.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome septième, Janvier et Février 1887.

La lingua tedesca. Periodico mensile ad uso degli insegnanti e degli studenti diretto da *Vittorio Grünwald*, Prof. nel R. Istituto tecnico di Brescia, N. 1. Verona, 1887.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XIX. N. 1, 2, 3. Firenze, 1887.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884, 1885, 1886).

Amodeo (F.) — Sulle coniche bitangenti a due coniche (1886).

Andriani Angelo, Professore nel R. Liceo di Reggio-Calabria. — Elementi di Geometria euclidea esposti con nuovo metodo. Napoli, Pellerano, 1887.

Bellacchi Giacomo, Professore nell'Istituto tecnico Galileo. — Lezioni di Algebra elementare. Parte prima: Aritmetica generale. Vol. I. Firenze, 1869. Vol. II. Firenze, 1884.

Chistoni (C.) — Misurazioni magnetiche in Italia. Roma, 1886.

Eneström (G.) — Bevis för satsen, att den fullständiga integralen till en differens equation af n: te ordningen innehaller n arbiträra konstanter (1886).

Guccia (G. B.) — Sur les transformations Cremona dans le plan (1885). — Sur les transformations géometriques planes birationelles (1885). — Sur une question concernant les points singuliers des courbes algébriques planes. — Formole analitiche di alcune trasformazioni Cremoniane delle figure piane. — Teoremi sulle trasformazioni Cremoniane sul piano (1885). — Generalizzazione di un teorema di Noether (1886).

Guccia (J.) — Sur une classe de surfaces, représentables, point par point, sur un plan (1880).

Faifofer (A.) — Trattato di Aritmetica teorico-pratica e principii d'Algebra con tavole logaritmiche, ad uso delle scuole tecniche. 6ª edizione. — Venezia 1886.

Ferrari (C.) — Influenza dei monti sulla precipitazione. Roma, 1887.

De Longchamps (G.) — Note sur l'intégration d'une équation aux différences finies (1877) — Généralités sur la géométrie du triangle: les points réciproques et les potentiel d'ordre p.

Loria (G.) — Nota sulla moltiplicazione di due determinanti (1886).

Millosevich (E.) — Determinazione della latitudine del R. Osservatorio del Collegio Romano. — Appendice — Roma, 1886.

Mucchi (A.) — Elementi di Geometria con una scelta di 300 graduati esercizi ad uso delle scuole tecniche, normali e magistrali. — 3ª edizione. — Roma, 1887.

Rodrigues (J. M.) — Lei da resistencia do ar segundo as experiencias balisticas. — Lisboa 1887.

Sanchis Barrachina (D'Estéban), Catedratico del Instituto Provincial de Valencia. — Tratado de Trigonometria esferica. — Valencia 1881.

Sella Quintino. — Teoria e pratica del Regolo calcolatore. — Seconda edizione italiana. — Ditta G. B. Paravia editrice, 1886.

Serret (J. A.) — Trattato di Trigonometria. — Nuova versione italiana fatta sulla sesta edizione francese, ed autorizzata dall'Autore, con aggiunte di *Luigi Fenoglio*, prof. nel R. Istituto tecnico di Alessandria. — Parte prima: Trigonometria piana e sferica. — G. B. Paravia e C. 1886.

Stiattesi (A.) — Intorno alla vita ed alle opere di Sebastiano Purgotti. Roma, 1884.

TRASVERSALI NEL TRIANGOLO

§ 1. Consideriamo un triangolo qualunque $A_1A_2A_3$, fissiamo sopra ognuno dei lati A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 un punto B_1, B_2, B_3, conduciamo le rette A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, B_2B_3, B_3B_1, B_1B_2, e chiamiamo rispettivamente

N_1, N_2, N_3 i punti d'incontro di A_2B_2 con A_3B_3, di A_3B_3 con A_1B_1, di A_1B_1 con A_2B_2,

C_1, C_2, C_3 i punti d'incontro di A_1B_1 con B_2B_3, di A_2B_2 con B_3B_1, di A_3B_3 con B_1B_2,

B'_1, B'_2, B'_3 i punti d'incontro di A_2A_3 con B_2B_3, di A_3A_1 con B_3B_1, di A_1A_2 con B_1B_2.

Posto

$$(1) \qquad \frac{A_2B_1}{B_1A_3}=\frac{p_1}{q_1}\,, \quad \frac{A_3B_2}{B_2A_1}=\frac{p_2}{q_2}\,, \quad \frac{A_1B_3}{B_3A_2}=\frac{p_3}{q_3}\,,$$

siccome il triangolo $A_1A_2A_3$ è segato dalla retta $B_3B'_1B_2$, sarà pel teorema di Menelao

$$\frac{A_1B_3}{B_3A_2}\cdot\frac{A_2B'_1}{B'_1A_3}\cdot\frac{A_3B_2}{B_2A_1}=-1\,,$$

quindi per le (1) avremo la prima delle tre seguenti e in modo analogo le altre due (osservazione che in seguito ci risparmieremo di fare)

$$(2) \qquad \frac{A_2B'_1}{B'_1A_3}=-\frac{q_2q_3}{p_2p_3}\,, \quad \frac{A_3B'_2}{B'_2A_1}=-\frac{q_3q_1}{p_3p_1}\,, \quad \frac{A_1B'_3}{B'_3A_2}=-\frac{q_1q_2}{p_1p_2}\,.$$

Con queste (1) e (2) potremmo facilmente esprimere in funzione delle p e delle q qualunque altro rapporto fra due dei segmenti determinati dai punti A_1, B_3, A_2, B'_3 sulla retta A_1A_2; ci limiteremo ai seguenti perchè ci saranno utili in seguito. Dalle (1) ricaviamo

$$(3) \qquad \frac{A_2B_1}{A_2A_3}=\frac{p_1}{p_1+q_1}\,, \quad \frac{A_3B_2}{A_3A_1}=\frac{p_2}{p_2+q_2}\,, \quad \frac{A_1B_3}{A_1A_2}=\frac{p_3}{p_3+q_3}$$

e inoltre

$$(4)\quad \frac{B_1A_3}{A_2A_3}=\frac{q_1}{p_1+q_1}\,,\quad \frac{B_2A_1}{A_3A_1}=\frac{q_2}{p_2+q_2}\,,\quad \frac{B_3A_2}{A_1A_2}=\frac{q_3}{p_3+q_3}$$

Dalle (2) poi

$$(5)\quad \frac{B'_1A_3}{A_2A_3}=\frac{p_2p_3}{p_2p_3-q_2q_3}\,,\quad \frac{B'_2A_1}{A_3A_1}=\frac{p_3p_1}{p_3p_1-q_3q_1}\,,\quad \frac{B'_3A_2}{A_1A_2}=\frac{p_1p_2}{p_1p_2-q_1q_2}$$

e finalmente dalle (4) e dalle (5)

$$(6)\quad \frac{B_1B'_1}{A_2A_3}=-\frac{p_1p_2p_3+q_1q_2q_3}{(p_2p_3-q_2q_3)\,(p_1+q_1)}\,,\quad \dots\dots\dots$$

§. 2. Occupiamoci ora dei rapporti fra i segmenti determinati dai punti A_1, C_1, N_2, N_3, B_1 sulla retta A_1B_1.

Il triangolo $A_1A_2B_1$ è segato dalla retta $B_3A_3N_2$, onde sarà

$$\frac{A_1B_3}{B_3A_2}\cdot\frac{A_2A_3}{A_3B_1}\cdot\frac{B_1N_2}{N_2A_1}=-1$$

e quindi per le (1) e per le (4) avremo

$$(7)\quad \frac{B_1N_2}{N_2A_1}=\frac{q_3q_1}{p_3(p_1+q_1)}\,,\quad \frac{B_2N_3}{N_3A_2}=\frac{q_1q_2}{p_1(p_2+q_2)}\,,\quad \frac{B_3N_1}{N_1A_3}=\frac{q_2q_3}{p_2(p_3+q_3)}\,.$$

Il triangolo $A_1B_1A_3$ è segato dalla retta $N_3A_2B_2$, onde sarà

$$\frac{A_1N_3}{N_3B_1}\cdot\frac{B_1A_2}{A_2A_3}\cdot\frac{A_3B_2}{B_2A_1}=-1$$

e quindi per le (1) e per le (3) avremo

$$(8)\quad \frac{A_1N_3}{N_3B_1}=\frac{q_2(p_1+q_1)}{p_1p_2}\,,\quad \frac{A_2N_1}{N_1B_2}=\frac{q_3(p_2+q_2)}{p_2p_3}\,,\quad \frac{A_3N_2}{N_2B_3}=\frac{q_1(p_3+q_3)}{p_3p_1}$$

Il triangolo $A_1B_1A_3$ è pure segato dalla retta $C_1B'_1B_2$, onde sarà

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1}\cdot\frac{B_1B'_1}{B'_1A_3}\cdot\frac{A_3B_2}{B_2A_1}=-1$$

e quindi per le (1) e per le (5) e (6) avremo

$$(9)\quad \frac{A_1C_1}{C_1B_1}=\frac{q_2p_3(p_1+q_1)}{p_1p_2p_3+q_1q_2q_3}\,,\quad \frac{A_2C_2}{C_2B_2}=\frac{q_3p_1(p_2+q_2)}{p_1p_2p_3+q_1q_2q_3}\,,\quad \frac{A_3C_3}{C_3B_3}=\frac{q_1p_2(p_3+q_3)}{p_1p_2p_3+q_1q_2q_3}\,.$$

Premessa una considerazione analoga a quella fatta alla fine del § prec. osserviamo che dalle (7) e dalle (8) si ricavano

$$(10)\qquad \frac{A_1N_2}{A_1B_1}=\frac{p_3(p_1+q_1)}{p_3p_1+p_3q_1+q_3q_1}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

$$(11)\qquad \frac{A_1N_3}{A_1B_1}=\frac{q_2(p_1+q_1)}{p_1p_2+p_1q_2+q_1q_2}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

e da queste

$$(12)\qquad \frac{N_2N_3}{A_1B_1}=-\frac{(p_1p_2p_3-q_1q_2q_3)(p_1+q_1)}{(p_3p_1+p_3q_1+q_3q_1)(p_1p_2+p_1q_2+q_1q_2)}, \quad . \ . \ . \ .$$

le quali unitamente alle (11) ci danno

$$(13)\qquad \frac{N_2N_3}{A_1N_3}=-\frac{p_1p_2p_3-q_1q_2q_3}{q_2(p_3p_1+p_3q_1+q_3q_1)}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

§. 3. Finalmente veniamo a considerare i rapporti fra i segmenti determinati dai punti B_3, C_1, B_2, B'_2 sulla retta B_3B_2.

Il triangolo $A_2B_1B_3$ è segato dalla retta $A_3B'_2A_1$ onde sarà

$$\frac{A_2A_3}{A_3B_1}\cdot\frac{B_1B'_2}{B'_2B_3}\cdot\frac{B_3A_1}{A_1A_2}=-1$$

e quindi per le (3) e per le (4) avremo

$$(14)\ \frac{B_1B'_2}{B'_2B_3}=-\frac{q_1(p_3+q_3)}{p_3(p_1+q_1)},\ \ \frac{B_2B'_3}{B'_3B_1}=-\frac{q_2(p_1+q_1)}{p_1(p_2+q_2)},\ \ \frac{B_3B'_1}{B'_1B_2}=-\frac{q_3(p_2+q_2)}{p_2(p_3+q_3)}$$

Il triangolo $A_3B_2B_3$ è segato dalla retta $A_1C_1N_2$, onde sarà

$$\frac{A_3A_1}{A_1B_2}\cdot\frac{B_2C_1}{C_1B_3}\cdot\frac{B_3N_2}{N_2A_3}=-1$$

e quindi per le (4) e per le (8) avremo

$$(15)\ \frac{B_2C_1}{C_1B_3}=\frac{q_1q_2(p_3+q_3)}{p_3p_1(p_2+q_2)},\ \ \frac{B_3C_2}{C_2B_1}=\frac{q_2q_3(p_1+q_1)}{p_1p_2(p_3+q_3)},\ \ \frac{B_1C_3}{C_3B_2}=\frac{q_3q_1(p_2+q_2)}{p_2p_3(p_1+q_1)}$$

Premessa la solita considerazione, osserviamo che dalle (14) si ha

$$(16)\quad \frac{B'_2B_3}{B_1B_3}=\frac{p_3(p_1+q_1)}{p_3p_1-q_3q_1},$$

§. 4. Dalle formule precedenti se ne potrebbero dedurre molte altre, alcune delle quali contengono come casi particolari formule note. Comincieremo ad applicarle alla ricerca dei rapporti, che le aree dei triangoli $N_1N_2N_3$, $B_1B_2B_3$ hanno coll' area del triangolo $A_1A_2A_3$. Indicheremo per brevità con $[A_1A_2A_3]$ l'area del triangolo $A_1A_2A_3$ e analogamente per gli altri; di più fisseremo di prendere le aree positive o negative, secondochè essi si troverebbero alla destra o alla sinistra di chi percorresse il contorno nel senso in cui sono nominati i vertici. Ciò posto si ha

$$[N_1N_2N_3]=\frac{N_1N_2}{A_3N_2}[A_3N_2N_3],$$

ma

$$[A_3N_2N_3]=\frac{N_2N_3}{A_1B_1}[A_3A_1B_1],$$

inoltre

$$[A_3A_1B_1]=\frac{B_1A_3}{A_2A_3}[A_1A_2A_3],$$

onde per le (13), le (12) e le (4) avremo

$$(17)\quad [N_1N_2N_3]=\frac{(p_1p_2p_3-q_1q_2q_3)^2}{(p_3p_1+p_3q_1+q_3q_1)(p_1p_2+p_1q_2+q_1q_2)(p_2p_3+p_2q_3+q_2q_3)}[A_1A_2A_3].$$

Si ha anche

$$[B_1B_2B_3]=\frac{B_1B_2}{B'_3B_1}[B'_3B_1B_3],$$

ma

$$[B'_3B_1B_3]=\frac{B_3B'_3}{A_1A_2}[A_2B_1A_1]$$

inoltre

$$[A_2B_1A_1]=\frac{A_2B_1}{A_2A_3}[A_1A_2A_3]$$

onde per le (16) per le (6) e per le (2)

$$(18)\quad [B_1B_2B_3]=\frac{p_1p_2p_3+q_1q_2q_3}{(p_1+q_1)(p_2+q_2)(p_3+q_3)}[A_1A_2A_3].$$

§. 5. Si potrebbe cercare direttamente anche il rapporto di $[B'_1B'_2B'_3]$ ad $[A_1A_2A_3]$; così pure, se si conducono le rette $B'_1B'_3$, $B'_2B'_1$, $B'_3B'_2$ e si chiamano C'_2, C'_3, C'_1 i punti in cui queste rette incontrano A_2B_2, A_3B_3, A_1B_1 rispettivamente, si potrebbero cercare i valori dei rapporti

$$\frac{B'_2C'_1}{C'_1B'_3},\ \frac{B'_3C'_2}{C'_2B'_1},\ \frac{B'_1C'_3}{C'_3B'_2},$$

ma è evidente, per le (2), che questi valori si possono ottenere dalla (18) e dalle (14) quando a

$$\frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2},\ \frac{p_3}{q_3}$$

si sostituiscano rispettivamente

$$-\frac{q_2q_3}{p_2p_3},\ -\frac{q_3q_1}{p_3p_1},\ -\frac{q_1q_2}{p_1p_2}.$$

Così facendo otteniamo

$$(19)\quad [B'_1B'_2B'_3]=\frac{p_1^2p_2^2p_3^2-q_1^2q_2^2q_3^2}{(p_2p_3-q_2q_3)(p_3p_1-q_3q_1)(p_1p_2-q_1q_2)}[A_1A_2A_3]$$

$$(20)\quad \frac{B'_2C'_1}{C'_1B'_3}=\frac{p_1p_2p_3}{q_1q_2q_3}\cdot\frac{p_3(p_1p_2-q_1q_2)}{q_2(p_3p_1-q_3q_1)},\quad \ldots\ldots$$

§. 6. Se poi si considera il triangolo $B_1B_2B_3$ i cui lati sono divisi dai punti C_3, C_1, C_2 nei rapporti dati dalle (14), si conducono le rette C_2C_3, C_3C_1, C_1C_2, si chiamano D_1, D_2, D_3 rispettivamente i punti d'incontro di C_2C_3 con C_1B_1 ecc. ecc. si possono trovare altrettante formule analoghe alle precedenti e così di seguito.

Altrettanto si dica del triangolo $B'_1B'_2B'_3$ i cui lati sono divisi dai punti C'_3, C'_1, C'_2 nei rapporti dati dalle (20).

§. 7. Fra le formule accennate in principio del §. 4 noteremo

(21) $\frac{B_3N_2}{N_2A_3} : \frac{B_3N_1}{N_1A_3} = \frac{p_1p_2p_3}{q_1q_2q_3}$, ...

che si deducono dalle (7) e dalle (8),

(22) $\frac{B_2B'_1}{B'_1B_3} : \frac{B_2C_1}{C_1B_3} = -\frac{p_1p_2p_3}{q_1q_2q_3}$, ...

che si deducono dalle (13) e dalle (14),

(23) $\frac{B_1N_2}{N_2A_1} + \frac{B_1N_3}{N_3A_1} = \frac{B_1C_1}{C_1A_1}$, ...

che si deducono dalle (7) dalle (8) e dalle (9),

(24) $$\frac{B_3C_1}{C_1B_2} \cdot \frac{B_1C_2}{C_2B_3} \cdot \frac{B_2C_3}{C_3B_1} = \left(\frac{p_1p_2p_3}{q_1q_2q_3}\right)^2$$

che si deduce dalle (14),

(25) $$\frac{B_2C'_1}{C'_1B'_3} \cdot \frac{B'_3C'_2}{C'_2B'_1} \cdot \frac{B'_1C'_3}{C'_3B'_2} = \left(\frac{p_1p_2p_3}{q_1q_2q_3}\right)^4,$$

che si deduce dalle (20).

§. 8. Supponiamo ora in particolare che le tre rette A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 passino per un punto N. Allora, dovendo essere $[N_1N_2N_3] = 0$, la (17) ci dice che sarà

$$\frac{p_1p_2p_3}{q_1q_2q_3} = 1$$

e reciprocamente (Teorema di Ceva).

La (19) ci dice che i tre punti B'_1, B'_2, B'_3 sono in linea retta e reciprocamente.

Le (23) ci dicono che

$$\frac{B_1C_1}{C_1A_1} = 2\,\frac{B_1N}{NA_1}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

§. 9. Supponiamo anche che sia

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3} = m$$

allora dalla (17) si ha

$$[N_1N_2N_3] = \frac{(m-1)^3}{m^2+m+1}[A_1A_2A_3],$$

e dalla (18)

$$[B_1B_2B_3] = \frac{m^2-m+1}{(m+1)^2}[A_1A_2A_3].$$

È questo il caso considerato dal Prof. Besso (*) il quale oltre a considerazioni sul triangolo formato coi segmenti A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 (considerazioni che estese al nostro caso danno risultati poco semplici), aggiunge alcune ricerche relative ai centri di gravità dei triangoli $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $N_1N_2N_3$; dimostra cioè che, ammessa la nostra ipotesi, i centri di gravità dei primi due coincidono e viceversa, e di più che coi precedenti coincide anche il centro di gravità del terzo.

Con processo analogo e ricordando le (13) si può dimostrare che ammessa la nostra ipotesi, anche il centro di gravità del triangolo $B'_1B'_2B'_3$ coincide con quello di $A_1A_2A_3$ e viceversa.

Così per mezzo delle (14) e delle (20) si dimostrerebbe analogamente che, ammessa sempre la nostra ipotesi, coi precedenti coincidono pure i centri di gravità di $C_1C_2C_3$, $C'_1C'_2C'_3$ e reciprocamente.

Finalmente tutti i triangoli analoghi ai precedenti che si otterrebbero successivamente colle costruzioni accennate nel §. 6 avrebbero tutti i loro centri di gravità coincidenti con quello di $A_1A_2A_3$.

Giuseppe Pesci.

TEOREMA PROPOSTO

Se i seni dei diedri d'un tetraedro sono proporzionali alle lunghezze dei rispettivi spigoli, quel tetraedro è a facce eguali; e reciprocamente.

G. Giuliani.

(*) V. Fascicolo I, Anno II di questo periodico.

SULLA RICERCA

DELLE RADICI COMMENSURABILI

D'UN EQUAZIONE ALGEBRICA

Suppongo ridotta l'equazione alla forma:

$$(1) \qquad f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0$$

essendo $p_1, p_2, \ldots, p_n$ coefficenti interi; il che si può fare, come è noto, sostituendo all'incognita (ove occorra) un multiplo conveniente di essa. In tale ipotesi la (1) non potrà ammettere alcuna radice frazionaria; e la ricerca delle sue radici *razionali* si ridurrà a quella delle *intere* solamente.

Se al posto della x si pone in $f(x)$ un intero qualunque a, la differenza $f(x) - f(a)$ sarà divisibile per $x-a$; laonde, indicando con Q un intero, scriveremo:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = Q$$

identità ogni qualvolta si sostituisca ad x una radice di $f(x) = 0$. Ma allora $f(x)$ è $= 0$, onde si ha

$$x = a - \frac{f(a)}{Q}.$$

Ora se x è intero, per questa eguaglianza dovrà $\frac{f(a)}{Q}$ essere pure un intero; laonde se si cercano tutti i divisori positivi Q di $f(a)$, nella serie

$$(2) \qquad a \pm \frac{f(a)}{Q}$$

saranno comprese tutte le radici intere della data equazione.

Se si assume analogamente un altro numero a', le radici dell'equazione dovranno anche essere comprese nella serie

$$a' \pm \frac{f(a')}{Q'}. \qquad (3)$$

E così si potrebbe proseguire; ma in generale ciò non è necessario. Le due serie (2) e (3) o non hanno alcun numero comune, ed allora l'equazione non ha radici intere; od hanno dei numeri comuni ed allora soltanto fra essi vanno scelte le radici; cosicchè si potranno addirittura sostituire nella data equazione, per verificare se vi soddisfacciano. Questi tentativi si possono ridurre a tanti quante sono le radici realmente esistenti, o poco più, bastando aumentare il numero delle serie (2), (3) ecc. ed escludendo addirittura dalla prova i numeri che non dividono p_n (essendo noto che p_n è eguale a $\pm$ il prodotto delle radici dell'equazione).

Questo metodo è semplice e comodo assai, poichè le serie (2), (3) si possono ottenere facilmente, per essere a, a',... numeri arbitrari, le cui potenze si possono calcolare una volta tanto, per servire a un numero qualunque di equazioni. I vantaggi di questo metodo, che si può applicare fruttuosamente anche senza l'aiuto di altri criteri sulle radici (sui limiti, ecc.) si vedranno da chiunque voglia porlo a confronto con quello di Newton, generalmente adoperato in simili ricerche.

Ne porgeremo qualche esempio.

Sia

$$f(x) = x^3 - 10\,x^2 + 31\,x - 30$$

Si ha $f(1) = -8$, $f(4) = -2$; onde i divisori di 8 essendo 8, 4, 2, 1, e quelli di 2 essendo 2 e 1, le soluzioni intere della equazione $f(x) = 0$ andranno cercate tra i numeri delle due serie

$$1 \pm 8,\ \ 1 \pm 4,\ \ 1 \pm 2,\ \ 1 \pm 1 \ \text{ e}$$

$$4 \pm 2,\ \ 4 \pm 2$$

le quali non hanno a comune che i numeri 2, 3, 5. Provati questi numeri, si vede che soddisfanno alla equazione.

Sia ancora:

$$f(x) = x^4 - 11x^2 + 14x - 24.$$

Si trova subito:

$$f(1) = -20\,,\quad f(-1) = -48\,,\quad f(2) = -24$$

onde si ricavano le tre serie, fra le quali sono da cercare le soluzioni intere di $f(x) = 0$:

$1 \pm 20,\quad 1 \pm 10,\quad 1 \pm 5,\quad 1 \pm 4,\quad 1 \pm 2,\quad 1 \pm 1;$

$-1 \pm 48,\quad -1 \pm 24,\quad -1 \pm 16,\quad -1 \pm 12,\quad -1 \pm 8,\quad -1 \pm 6,\quad -1 \pm 4,\quad -1 \pm 3,\quad -1 \pm 2,\quad -1 \pm 1;$

$2 \pm 24,\quad 2 \pm 12,\quad 2 \pm 8,\quad 2 \pm 6,\quad 2 \pm 4,\quad 2 \pm 3,\quad 2 \pm 2,\quad 2 \pm 1.$

Escluse da queste tre serie addirittura i numeri che non dividono il termine noto -24, restano le tre serie

$+6,\quad -4,\quad -3,\quad +3,\quad -1,\quad +2$

$3,\quad -4,\quad +2,\quad -3,\quad +1,\quad -2$

$-6,\quad +8,\quad -4,\quad +6,\quad -2,\quad -1,\quad +4,\quad 3,\quad 1$

le quali non hanno a comune che i numeri $+3$ e -4. Questi, sostituiti nella $f(x)$ la annullano; e sono quindi tutte le radici intere di quell'equazione (Cfr. Compl. di Alg. del Todhunter trad. dal Battaglini, pag. 74: il procedimento qui adoperato si vedrà assai più semplice e breve di quello ivi indicato).

Sia da ultimo l'equazione

$$x^7 - 13x^5 + 2x^3 - x - 72 = 0.$$

Si trova subito che sostituendo ad x il valore 1, il primo membro acquista il valor 61, numero primo; onde, sempre secondo la formola (2), le radici sono a cercarsi nella serie 1 ± 61, 1 ± 1, cioè $62, -60, 2, 0$. Esclusi i numeri che non dividono l'ultimo termine, resta il 2. Per questo numero così basso si può eseguire direttamente il calcolo (senza ricorrere ad una seconda serie), per verificare che non è radice; onde subito si è mostrato che l'equazione proposta non ha radici intere.

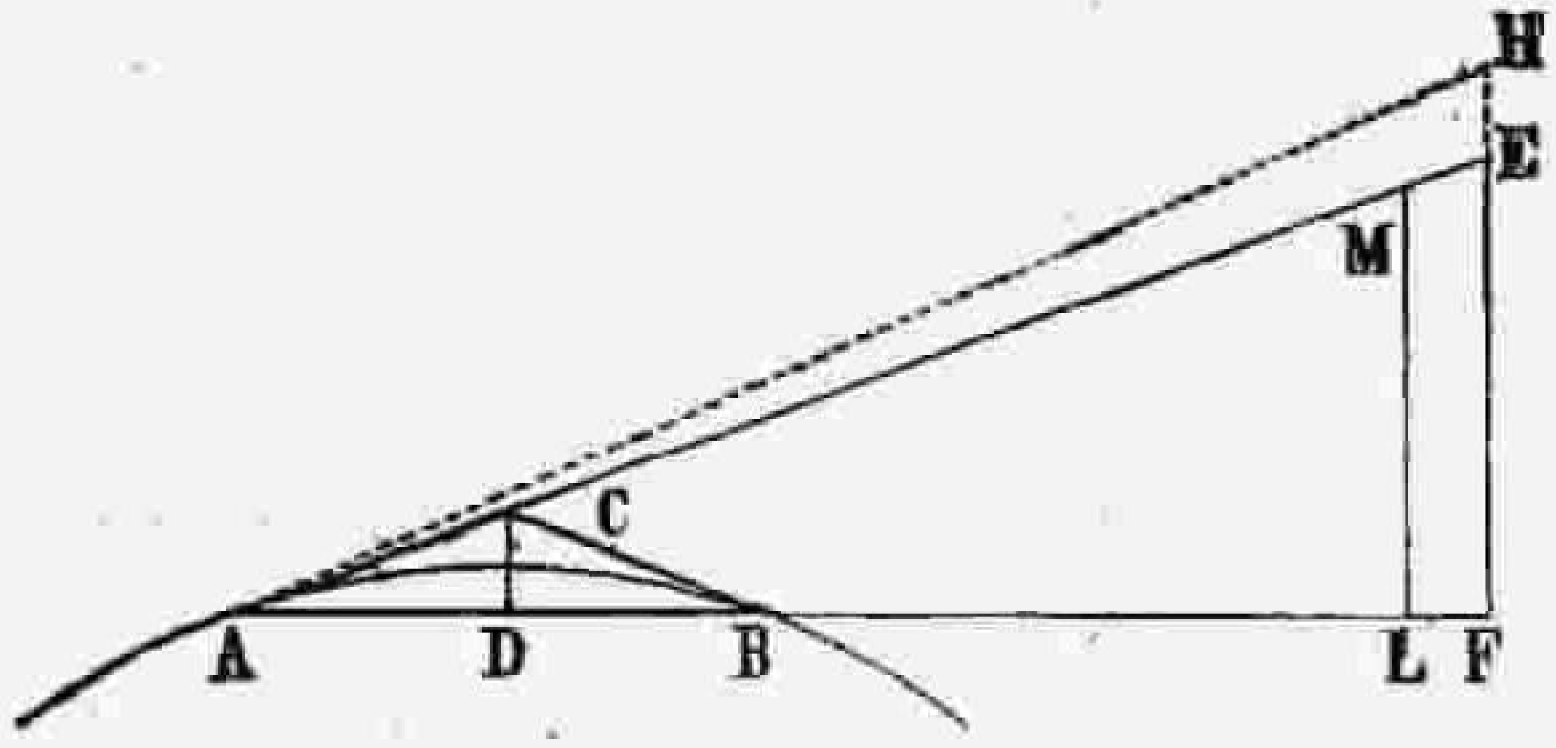
V. Murer.

LEMMI PER LA MISURA DELLA CIRCONFERENZA E DELL'AREA DEL CIRCOLO

Per dimostrare che la circonferenza ed il cerchio sono limiti del perimetro e dell'area del poligono regolare inscritto o circoscritto di n lati quando n tende all'infinito servono i seguenti teoremi che possono, forse con vantaggio, sostituire quelli che si trovano nelle ordinarie Geometrie Elementari per dimostrare che i perimetri e le aree dei poligoni regolari inscritti in una data circonferenza hanno gli stessi limiti dei perimetri e delle aree dei circoscritti quando cresce indefinitamente il numero dei lati di essi poligoni.

1. *La differenza dei perimetri dei poligoni regolari di* n *lati, l'uno circoscritto e l'altro inscritto alla stessa circonferenza è minore d'un cateto d'un triangolo rettangolo che ha l'altro cateto eguale ad otto raggi e l'angolo acuto adiacente a questo eguale alla* n^{ma} *parte di due retti o maggiore di questa.*

Sia AB un lato del poligono regolare inscritto di n lati il perimetro del quale indicheremo con P_n. Sia P'_n il perimetro del



poligono regolare circoscritto di n lati. Si faccia AF eguale ad otto raggi. Si conduca la tangente in A alla circonferenza e la perpendicolare in F alla AF; queste s'incontrino in E. L'angolo FAE è la n^{ma} parte di due retti. La tangente in B alla circonferenza incontri in C la AE; e sia CD perpendicolare ad AB. Avremo:

$$P'_n - P_n = n \times (AC + CB - AB) = 2n \times (AC - AD)$$

epperò

$$P'_n - P_n < 2n \times CD.$$

Abbiamo inoltre

$$P_n < AF.$$

Si faccia

$$AL = P_n = n \times AB = 2n . AD.$$

Si conduca LM parallela ad FE e si avrà

$$LM = 2n \times CD \qquad LM < FE$$

epperò

$$P'_n - P_n < FE.$$

Facendo

$$\widehat{FAH} > \widehat{FAE}$$

avremo

$$FE < FH$$

epperò anche

$$P'_n - P_n < FH.$$

2. *Ogni segmento dato piccolo quanto si vuole è maggiore della differenza che esiste fra i perimetri dei poligoni regolari di* n *lati l'uno circoscritto e l'altro inscritto alla medesima circonferenza, se* n *è grande abbastanza.*

Infatti: Si costruisca il triangolo rettangolo FAH coi cateti AF, eguale a quattro diametri della data circonferenza, ed FH eguale al segmento dato. Si formino i multipli dell'angolo FAH. Se si trova che $m \times$ FAH è maggiore di due retti, si avrà

$$P'_n - P_n < FH$$

se sarà

$$n \overline{>} m.$$

3. *La differenza delle superfici dei poligoni regolari di* n *lati, l'uno circoscritto e l'altro inscritto alla stessa circonferenza è minore della superficie d'un triangolo rettangolo che ha un catèto eguale a quattro diametri e l'an-*

golo acuto adiacente a questo eguale alla n^a^ *parte di due retti o maggiore di questa.*

Indicando con S'_n ed S_n le superfici dei poligoni regolari di n lati l'uno circoscritto e l'altro inscritto avremo:

$$S'_n - S_n = 2n \times \overset{\Delta}{ACD} \qquad \overset{\Delta}{ALM} = (2n)^2 \times \overset{\Delta}{ACD}$$

quindi:

$$S'_n - S_n < \overset{\Delta}{ALM} < \overset{\Delta}{AFE} < \overset{\Delta}{AFH}.$$

4. *Ogni superficie data piccola quanto si vuole è maggiore della differenza che esiste fra le superfici dei poligoni regolari di* n *lati, l'uno circoscritto e l'altro inscritto alla medesima circonferenza, se* n *è grande abbastanza.*

Infatti: Si costruisca un triangolo che non superi la suffice σ data e si trasformi in un triangolo equivalente che abbia un cateto eguale a quattro diametri della circonferenza; se risulta adiacente a questo cateto un angolo acuto maggiore della m^a parte di due retti, sarà

$$S'_n - S_n < \sigma \text{ se sarà } n \geqq m.$$

Prof.^r^ Francesco Giudice.

DIMOSTRAZIONI DI TEOREMI ENUNCIATI A PAG. 59.

Se si dividono i lati d'un poligono rettilineo piano o gobbo, nello stesso senso, in due segmenti aventi il medesimo rapporto, la differenza fra le somme dei quadrati delle distanze di un punto qualunque dello spazio dai vertici del poligono e dai punti di divisione è costante.

A. Lugli.

Dimostrazione di *Ignacio Beyens*, Capitano del Genio (Cadice). (*)

Sia il poligono $A_1A_2A_3 \ldots\ldots A_p$ e P_1, P_2, P_{p-1}, P_p i punti che soddisfanno alla condizione assegnata, si avrà:

---

*) Nello stesso modo ha dimostrato il teorema il Sig. Prof. *F. Panizza*. Un'altra dimostrazione è stata inviata dal Sig. Prof. *G. Riboni*.

$$A_1P_1 = \frac{m}{m+n} A_1A_2\,,\quad A_2P_1 = \frac{n}{m+n} A_1A_2\,;\ldots$$

$$A_pP_p = \frac{m}{m+n} A_1A_p\,,\quad A_1P_p = \frac{n}{m+n} A_1A_p\,,$$

e applicando il teorema di *Stewart* ai triangoli OA_1A_2, OA_2A_3, . . . OA_pA_1 aventi il vertice comune O in un punto qualunque dello spazio:

$$OA_1^2 \cdot \frac{n}{m+n} + OA_2^2 \cdot \frac{m}{m+n} = OP_1^2 + \frac{mn}{(m+n)^2} \cdot A_1A_2^2$$

$$OA_2^2 \cdot \frac{n}{m+n} + OA_3^2 \cdot \frac{m}{m+n} = OP_2^2 + \frac{mn}{(m+n)^2} \cdot A_2A_3^2$$

. . . .

$$OA_p^2 \cdot \frac{n}{m+n} + OA_1^2 \cdot \frac{m}{m+n} = OP_p^2 + \frac{mn}{(m+n)^2} \cdot A_pA_1^2$$

le quali addizionate membro a membro danno:

$$OA_1^2 + OA_2^2 + \ldots + OA_p^2 = OP_1^2 + OP_2^2 + \ldots OP_p^2 + \frac{mn}{(m+n)^2}(A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + \ldots + A_pA_1^2)$$

ossia

$$\sum OA_i^2 - \sum OP_i^2 = \frac{mn}{(m+n)^2} \cdot \sum A_iA^2_{i+1} = costante.$$

Se le rette AA_1 BB_1 CC_1 *che uniscono i vertici* A, B, C *di un triangolo coi punti* A_1 B_1 C_1 *dei lati rispettivamente opposti passano per uno stesso punto e se inoltre gli angoli* AA_1C, BB_1A, CC_1B, *sono tra loro eguali, quelle rette sono le altezze del triangolo.*

D. Besso.

Dimostrazione del prof. *F. Panizza* *).

Il quadrangolo A_1OB_1C (O punto di incontro di AA_1, BB_1, CC_1) è inscrivibile essendo $< OA_1C + OB_1C = OB_1C + OB_1A = 2R$. Così pure sono inscrivibili i quadrangoli OB_1AC_1, OC_1BA_1; quindi si avrà:

$$AC \times AB_1 = AA_1 \times AO\,,\qquad AB \times AC_1 = AA_1 \,.\, AO.$$

*) Altre dimostrazioni ci sono pervenute dai Signori *J. Beyens* e *G. Ribaud*.

Da queste eguaglianze si deduce

$$AC \times AB_1 = AB \times AC_1 ,$$

quindi anche il quadrangolo BC_1B_1C è inscrivibile e perciò $< BC_1C = BB_1C$, ma $< BC_1C = BB_1A$ per ipotesi, dunque $< BB_1A = BB_1C$ e però BB_1 è perpendicolare ad AC. Nello stesso modo si proverebbe che AA_1, BB_1 sono rispettivamente perpendicolari a BC ed AB. *)

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Prof. Rajola Pescarini. — *Elementi di Aritmetica generale ed algebra*. Napoli, Morano editore, 1884. — L. 4. — *Rapporti esatti ed approssimati e teoria delle proporzioni* ad uso delle Scuole Secondarie. — Napoli, Morano editore — 1886. — L. 1, 50.

Nella prefazione l'A. esprime l'opinione che, sebbene la maggior parte degli autori considerino il numero come il rappresentante del rapporto di due grandezze, anzichè *come elemento di conteggio*, pure è difficile trovarne qualcuno, il quale si mantenga invariabilmente fedele a tal concetto, e che, in ultima analisi, non faccia confusione tra la grandezza ed il numero che ne segna il rapporto. Ed a questo proposito critica alcuni punti dell'Aritmetica del Baltzer.

Afferma inoltre che l'Aritmetica deve fondarsi sulla base della quantità *concreta*, e che, dal non aver fatto questo, dipende il poco profitto delle scuole, dove gli alunni non sanno risolvere un problema elementarissimo, il quale sia immediata applicazione d'una teoria.

Critica anche la definizione della moltiplicazione data dai diversi autori, ed alludendo poi ai molti concetti nuovi introdotti nel suo libro, fa particolare menzione dei concetti di eguaglianza, di numero negativo, di divisione e di radice; e, rispetto a quest'ultimo concetto, afferma di essersi molto occupato delle radici approssimate, perchè sentiva l'obbligo d'una specie di compenso, avendo dato assai poco rilievo alla teoria dei numeri irrazionali.

*) I Signori *J. Beyens*, *F. Panizza*, *G. Riboni* hanno pure dimostrato il terzo dei teoremi enunciati a pag. 59. Una di tali dimostrazioni sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

1. Ciò premesso, facciamo alcune osservazioni di ordine generale. Quanto all'idea di porre a base dell'Aritmetica la quantità, siamo perfettamente d'accordo coll'A. e gliene tributiamo lode per avervi insistito, sebbene l'idea non sia nuova, dappoichè il Bertrand, nel definire le diverse operazioni aritmetiche, le frazioni ed i rapporti, parla sempre di quantità, e non considera il numero che quale rappresentante della quantità stessa; come pure il Bellavitis, nei suoi riassunti d'aritmetica ed algebra, afferma che la quantità costituisce l'oggetto sì dell'una come dell'altra di queste due scienze.

Però quello che non possiamo approvare si è che alla parola quantità l'A. aggiunga l'epiteto di *concreta*, scrivendo *quantità concreta o numero concreto*. A noi sembra che l'idea di quantità sia astratta, come è tale quella di superficie, di linea ed altre. Difatti, allorchè si dice quantità di tempo, di spazio, di forze, ecc. la cosa è per sè evidente, ma anche quando si considera una collezione di oggetti reali, p. e. dei minerali, e diciamo che tale collezione si compone di cento minerali, noi facciamo astrazione di tutte le loro differenze e li consideriamo proprio come identici l'uno all'altro, talmente che uno può sempre essere sostituito in luogo d'un altro; e questo in realtà non può evidentemente accadere, onde l'idea di quantità è astratta. Se poi si parla di numero concreto, la denominazione è anche più inesatta, ma su ciò avremo opportunità di aggiungere in seguito qualche altra considerazione.

A nostro avviso sarebbe invece preferibile il dire *quantità specificata*, quando si volesse aver riguardo alla specie della quantità che si considera, come p. e. quando si dicesse una quantità di monete.

Un'altra cosa poi che l'A. avrebbe dovuto fare, dal momento che si proponeva di pigliare a fondamento dell'aritmetica la quantità, sarebbe stata quella di definire il significato di questa parola o almeno di determinare per quali caratteri essa entra nel dominio dell'aritmetica. Invece egli, in tutto il corso dell'opera, non usa mai la parola quantità, ciò che fa sempre più supporre che essa sia ritenuta come sinonimo di numero concreto.

2. Diciamo ora del modo col quale è stato diviso il libro, premettendo a tale scopo la distinzione che l'A. fa delle eguaglianze.

Un' eguaglianza può essere evidente, come quando si afferma che una quantità è eguale a sè stessa, oppure può essere convenzionale, come quando si scrive $4.3 = 4 + 4 + 4$; ed in questo caso essa non è che l'espressione della definizione d'un determinato segno: tali eguaglianze si chiamano *identità*. Invece, un'eguaglianza può essere il risultato d'una dimostrazione, esprimendo simbolicamente l'enunciato d'un teorema, come quando si scrive $ab = ba$; a questa specie di eguaglianze è assegnato il nome di *equivalenze*. Infine, un' eguaglianza può essere l'espressione d'una condizione imposta ad una data quantità, p. e. $ax = a + x$. Questa terza specie di eguaglianze son dette *equazioni*, le quali sono da considerarsi come la traduzione simbolica delle condizioni espresse in un problema.

Fatta questa distinzione, l'A. dice che scopo dell' *Aritmetica generale* è appunto lo studio delle identità e delle equivalenze, che servono d'introduzione all' *Algebra*; la quale invece ha per oggetto lo studio dellle equazioni. E così il libro viene diviso in due parti: una intitolata Aritmetica generale e l'altra Algebra. Tutto questo è giusto ed esatto, ed ha il vantaggio di segnare una divisione precisa tra l'aritmetica e l'algebra.

Oltre alle due parti precedentemente menzionate, l'opera contiene anche un' appendice nella quale sono svolte, insieme con alcuni problemi fondamentali, le parti principali dell' aritmetica razionale ordinaria, affinchè il libro potesse servire al corso liceale (*).

3. Passiamo all' esame dell' Aritmetica generale, la quale consta di 14 capitoli preceduti da un' introduzione.

In questa, il nostro A., presi a considerare degli oggetti omonimi, capaci però di potere essere aggruppati gli uni cogli altri, uno qualunque di tali oggetti chiama *unità*, ed aggruppando successivamente queste unità ottiene dei gruppi di oggetti che simboleggia in diverse maniere, ma preferibilmente così:

1) $M.1$; $M.2$; $M.3$; . . . .

ove deve leggersi: M preso una volta, M preso due vol-

(*) Qui fa duopo avvertire che la presente pubblicazione fu fatta al tempo del Regolamento Baccelli, il quale prescriveva l' aritmetica razionale al primo corso del liceo.

te, ecc. . . . e dove **M** non significa altro che il nome dell' oggetto funzionante da unità. E quando questo nome fosse sottinteso, la serie 1) si cangerebbe in quest' altra:

2) 1, 2, 3, 4, ...

la qual cosa però è da evitarsi quando può nascere ambiguità fra due diverse unità.

I simboli delle serie 1) e 2) usati a rappresentare i vari gruppi di unità si chiamano *numeri*, e si dividono in *concreti* ed *astratti*: sono concreti, se l'unità è perfettamente determinata, sia o no espressa; astratti, quando l'unità è lasciata indeterminata.

Tale definizione di numero è analoga a quella che M. J. Hoüel dà nelle sue *Considérations élémentaires sur la généralisation successive de l'idée de quantité dans l'analyse mathématique* (Paris 1883), dove si legge: « un nombre est le simbole de l'addition de plusieurs quantités, considérées, par définition, comme identiques entre elles et que l'on nomme unités. »

Senza disconoscere l'esattezza di questa definizione, avremmo amato meglio che si mettesse in maggior evidenza che il numero, oltre a rappresentare la quantità, determina sempre una relazione fra due quantità, cioè esprime quante volte la quantità che viene scelta come unità deve prendersi (addizionarsi) onde avere l'altra quantità.

Anche l' Hoüel, non parendo contento della precedente definizione aggiunge: « le nombre est la loi de formation d'une collection d'unités au moyen des unités individuelles ».

Quanto poi alla distizione dei numeri in concreti ed astratti, mi pare da bandirsi, perocchè i numeri son sempre astratti, come è tale anche l'idea di quantità, per le ragioni già dette innanzi. Inoltre, se il numero è un simbolo, qual significato ha la distinzione fra un simbolo concreto ed uno astratto? Ma c'è di più: quando dovesse chiamarsi concreto quel numero che si riferisce ad una unità determinata, dovrebbe dirsi concreto anche il moltiplicatore d'un prodotto e l'esponente d'una potenza. Invero, quando dicesi p. e. 4 moltiplicato 3, s'intende una somma di 3 parti eguali a 4, ed allora l'unità del 3 è perfettamente determinata nella parte eguale a 4. Dunque l'A. a nostro avviso, avrebbe fatto meglio a parlare di numeri e di quantità piuttosto che di numeri astratti e concreti.

4. Vengono ora le definizioni delle diverse operazioni aritmetiche.

Dato il significato dell' addizione, l' A. avverte che un gruppo qualunque d'unità può essere considerato come una nuova unità, colla quale si possono formare dei gruppi analoghi a quelli avuti colla primitiva unità; cioè si può avere la serie:

3) M.5.1; M.5.2; M.5.3; M.5.4; . . . .

ed assegnando al gruppo M.5 il nome N, la stessa serie può rappresentarsi anche in quest' altro modo:

4) N.1; N.2; N.3; . . . .

E quindi allo scopo di distinguere come la N proceda dalla M, quella dicesi *unità secondaria* e questa *unità primaria*.

A ciascuna delle espressioni della serie 3), ove l'unità M può essere sottintesa, si dà il nome di *prodotto*, e *fattori* si chiamano i numeri che vi compariscono.

Rispetto ad un prodotto di due fattori, l'A. preferisce dire ch' esso esprime un gruppo di gruppi dell' unità primaria, piuttosto che affermare che per prodotto deve intendersi una somma di termini eguali; ciò che si poteva fare facilmente essendo già stata data la definizione di *somma* e di *termine*. Ma egli non ha voluto imitare gli altri scrittori, i quali, com' è notato nella prefazione, han dato due *distinte* definizioni della moltiplicazione, una pel caso del moltiplicatore intero e l'altra pel caso del moltiplicatore frazionario. Nel fatto però non sono distinte le due definizioni che si soglion dare della moltiplicazione dagli autori che hanno scritto con qualche competenza della materia; ma sono invece l'una conseguenza dell' altra. Quanto alla prima definizione: *il prodotto è una somma di termini eguali*, sembra a noi molto semplice ed esatta, ed ha il vantaggio di mostrarci come si origina la moltiplicazione; di più si presta assai bene per determinare il significato del moltiplicando e del moltiplicatore. Da essa poi si ricava assai facilmente, come proprietà del prodotto, la seconda definizione: *il prodotto è composto col moltiplicando come il moltiplicatore è formato coll' unità*. E qui è da notarsi che la parola formato non sembra esprimere, come afferma l'A. nella prefazione, un concetto vago ed indefinito, perocchè essa si riferisce alla genesi del numero; il quale, come sappiamo, esprime appunto l'insieme o l'aggregato o più propriamente l'addizione di più unità, oppure di parti dell' unità quando è frazionario.

Ammettendo adunque come definizione la prima proposizione, la seconda ne viene come conseguenza ed esprime una proprietà del prodotto. Invece, se si assumesse come definizione la seconda proposizione, ne verrebbe come conseguenza la prima, che esprimerebbe essa una proprietà del prodotto. Ora finchè si dovesse discorrere soltanto di numeri interi sarebbe proprio indifferente pigliare, come definizione di prodotto, l'una o l' altra delle proposizioni suaccennate, sebbene si dovesse dar sempre la preferenza alla prima per le ragioni sopra esposte. Ma quando si hanno da considerare i numeri frazionari e specialmente un moltiplicatore frazionario, allora, veduto che la seconda definizione può estendersi benissimo ad un moltiplicatore di tale natura, ragion vuole che si adotti la medesima a preferenza della prima, che non gode della stessa proprietà.

Concludendo, quello che a nostro avviso si deve rimproverare agli autori si è che essi non si curino molto di far vedere la dipendenza che esiste fra le due definizioni, e non mettano in chiaro quando è opportuno adottare l'una a preferenza dell' altra.

Il nostro A. si scosta da tutti gli altri, e dà questo nuovo enunciato della moltiplicazione:

Moltiplicare un numero per un altro significa trovarne un terzo che valga il secondo quando è riferito all'unità secondaria espressa dal primo, ove il primo ed il terzo numero debbono intendersi riferiti alla stessa unità primaria.

Siamo d'opinione che questa definizione sarebbe riuscita di più facile intelligenza enunciata dopo la prima definizione, di cui sopra abbiamo parlato; comunque sia però non si può negare ch' essa è ingegnosa ed esatta, e che, se nella sostanza non differisce dalla seconda, nella forma invece ne è senza dubbio superiore.

5. Sul concetto di frazione l'A. si esprime press'a poco così: se M ed N sono legate dalla relazione $M.5 = N$, M può considerarsi come ottenuta dalla scomposizione di N in più elementi eguali, e allora se si prende N come unità primaria, M si dovrà considerare come unità secondaria, e perciò a far vedere che M è generata da N si suole scrivere $M = N \frac{1}{5}$,

la quale espressione leggesi N *partito in cinque* oppure N *moltiplicato per un quinto*. E qui si vede subito che la parola moltiplicato ha un vero significato di divisione.

Ai simboli della forma $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ . . . . l'A. assegna il nome di *frazioni semplici* e agli altri della forma $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, . . . quello di *frazioni composte*. Quindi aggiunge: anche le espressioni della forma $\frac{1}{4} . 5$; $3 . \frac{1}{7}$ diconsi prodotti, cosicchè una frazione composta è il prodotto d'una frazione semplice per un intero. Quanto alla prima espressione, l'A ha perfettamente ragione, ma rispetto alla seconda non può dirsi lo stesso, perchè la medesima non ha peranco ricevuto un significato. Difatti, che cosa vuol dire $3 . \frac{1}{7}$? Servendosi delle stesse parole del libro vuol dire 3 *partito in* 7, ossia ciò che preso 7 volte dà 3. Ora questo *quid* non è certo fra i numeri interi, ma trovasi fra i numeri frazionari nella frazione $\frac{3}{7}$. Intanto però l'A. non ha ancora dimostrato come una frazione moltiplicata per il proprio denominatore dia per prodotto il numeratore; e poi se si dovesse ritenere l'espressione $3 . \frac{1}{7}$ come equivalente a $\frac{3}{7}$, sarebbe proprio inutile che a pag. 18, n. 33 si cercasse di dimostrare l'eguaglianza $3 . \frac{1}{7} = \frac{1}{7} . 3$, e a pag. 20 si dimostrasse che $3 : 7 = \frac{3}{7}$; dunque al punto in cui siamo, non può dirsi che l'espressione $3 . \frac{1}{7}$ abbia un significato. Forse l'A. ha creduto che la sua definizione di moltiplicazione bastasse per dare un significato a tutti i prodotti, ma ciò non può essere finchè non si è dimostrato che se un'unità primaria è divisibile in parti, qualsivoglia unità secondaria proveniente da quella è pure divisibile in parti nell'istesso modo, o, in altri termini, finchè non si è dimostrato che ogni frazione è il quoziente del suo numeratore per il corrispondente denominatore.

6. Sul significato di sottrazione non havvi nulla da osservare, laonde si passa subito alla divisione della quale si leggono le tre seguenti definizioni:

1.° *Dividere un numero per un altro significa trovarne un terzo che riferito all'unità secondaria rappresentata dal secondo, valga quanto il primo riferito all'unità primaria*

2.° *Dividere un numero per un altro significa trovarne un terzo, al quale come unità secondaria riferendo il secondo, questo valga quanto il primo riferito all'unità primaria.*

3.° *Dividere un numero per un altro significa trovarne* *un terzo che moltiplicato per il secondo dia un prodotto equivalente al primo.*

È evidente che la terza comprende le prime due, per la qual cosa sarebbe stato ben fatto che queste fossero dedotte da quella come proprietà del terzo numero, chiamato quoziente.

Applicando la prima definizione, l'A, dice che il terzo numero, il quale chiamasi *rapporto*, è astratto; e applicando invece la seconda, è astratto il secondo numero, che chiamasi *divisore*.

Si può qui ripetere la stessa osservazione fatta a proposito del moltiplicatore d'un prodotto e dell'esponente d'una potenza: l'unità a cui si riferisce il rapporto non è una qualunque, ma è il divisore che può per convenzione chiamarsi con un nome qualunque. Per esempio, quando si cerca il numero dei metri di panno che si possono comprare con 20 lire sapendo che un metro costa 4 lire, il rapporto 5 che esprime quante volte il 4 è contenuto nel 20 è riferito al metro come unità, ma non si può negare che il metro è per convenzione equivalente a 4 lire, cioè al divisore.

7. Il Cap. I comincia con questo teorema: *In un prodotto di più fattori, ad alcuni fattori consecutivi sostituendo il loro prodotto effettuato, si ottiene un nuovo prodotto equivalente al primo.*

La dimostrazione di tal teorema non regge, perchè l'A. durante il suo ragionamento ammette senza accorgersene la verità che vuol dimostrare. Difatti, egli dice: « nel prodotto M. 2. 3. 4. 5. 6. 7, ai fattori 3. 4. 5. si può sostituire 60 ed avere

$$M.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7. = M.\,2.\,60.\,6.\,7$$

In vero, denotando con N l'unità secondaria M. 2, si ha:

$$M.\,2.\,60 = N.\,60$$

come pure

$$M.\,2.\,3.\,4.\,5 = N.\,3.\,4.\,5$$

Ma 5) N. 60 = N. 3. 4. 5, dunque .... » Ognun vede che il teorema sta tutto nell'eguaglianza 5) e per conseguenza che affermando vera la medesima, si ammette il teorema senza dimostrazione. Poteva benissimo scriversi N. 60 = N (3. 4. 5), ma non come è stato fatto dall'A. E poi come si può ragionevolmente ritenere che la proprieta associativa del prodotto possa dimostrarsi senza aver ricorso ad altre proprietà precedenti o a dei concetti già stabiliti?

8. A pag. 17, n. 31, si dimostra l'eguaglianza: $N.\ 8.\ 5.\ \frac{3}{4}.\ 9 = N.\ 8.\ 5.\ \frac{1}{4}.\ 3.\ 9$; e susseguentemente, al n. 33, si dimostra l'altra: $N.\ 5.\ \frac{1}{4} = N.\ \frac{1}{4}.\ 5$; e per giungere a questa si tien conto della verità della prima. Ora, senza badare che le espressioni, le quali compariscono in queste eguaglianze, non hanno ancora un significato, giacchè per esse potrebbe ripetersi ciò che è stato detto (n. 5) a proposito dell'espressione $3.\ \frac{1}{7}$, si può vedere che la prima eguaglianza è evidente, perchè deriva immediatamente dal significato di frazione, e la seconda, per esser dimostrata vera, non ha bisogno affatto della prima. Difatti risparmiandosi d' impiegare tante sostituzioni di simboli a simboli, si poteva aver ricorso al teorema sull'inversione dei fattori, ragionando in questa maniera: poichè l'eguaglianza

$$M.\ 4.\ 5 = M.\ 5.\ 4$$

è vera qualunque sia M, se questa unità fosse la quarta parte di N, si avrebbe egualmente:

$$N.\ \frac{1}{4}.\ 4.\ 5 = N.\ \frac{1}{4}.\ 5.\ 4.$$

Ma $N.\ \frac{1}{4}.\ 4$ non è altro che N; $N.\ \frac{1}{4}.\ 5$ è per definizione la frazione $N.\ \frac{5}{4}$, dunque $N.\ 5 = N.\ \frac{5}{4}.\ 4$; cioè la frazione $N.\ \frac{5}{4}$, moltiplicata per 4, dà N. 5; di cui è per conseguenza la quarta parte; e si ha: $N.\ 5 : 4 = N.\ \frac{5}{4}$; o, che è lo stesso,

$$N.\ 5.\ \frac{1}{4} = N.\ \frac{1}{4}.\ 5.$$

Facendo in tal guisa, l'A. avrebbe subito raggiunto il suo scopo, che, in ultima analisi, si compendia nel teorema: *il quoziente di due numeri interi è equivalente alla frazione che ha per numeratore il dividendo e per denominatore il divisore*.

Non si capisce poi perchè il teorema sopra enunciato sia confinato in un'osservazione, mentre è di capitale importanza; ed inoltre, perchè si asserisce che lo stesso teorema costituisce una *quarta* definizione della divisione, della quale non è evidente l'accordo colle precedenti definizioni. A noi invece sembra che quest'accordo, specialmente colla 3ª definizione, sia evidentissimo, perchè la frazione $N.\ \frac{5}{4}$, moltiplicata per 4, dà N. 5.

9. Al Cap. II, ci occorre subito di fare un'osservazione importante. L'A. dice che, essendo P un'unità determinata, si ha l'identità:

$$6) \quad P.\,4 + P.\,5 = P.\,9$$

e, sottintendendo la P,

$$4 + 5 = 9;$$

onde, sostituendo, ne deriva

$$P.\,4 + P.\,5 = P.\,(4 + 5)$$

E su questa eguaglianza si basa la dimostrazione del teorema: *La somma di due o più prodotti che hanno un fattore comune è equivalente al prodotto del fattore comune per la somma dei fattori rimanenti*; giacchè P può stare a rappresentare un'unità secondaria qualsivoglia.

Questo modo di procedere in una dimostrazione non è certo il più corretto, perchè elimina ogni sorta di ragionamento. La identità 6), può servire a verificare o a intuire il teorema, ma non può tramutarsi rigorosamente in una equivalenza, solamente per uno scambio di simboli. È naturale poi che se al posto del secondo membro d'una identità si mette il primo, la identità si trasforma in una di quelle che sono evidenti di per sè, cioè in una identità di forma e di valore. A noi sembra che la dimostrazione d'un teorema debba sempre poggiare sopra altre verità precedentemente dimostrate, e l'A. avrebbe fatto meglio a servirsi anche in questo caso della proprietà associativa della somma, tanto più se dal teorema sopra enunciato doveva dedursi l'equivalenza

$$(b + c + d)\,a = ba + ca + da$$

Il resto del capitolo procede bene, anzi i diversi teoremi relativi alle somme e alle differenze di due o più numeri vi son trattati con molta chiarezza e precisione, non tralasciando mai di mettere accanto ad ogni proprietà diretta la corrispondente inversa.

10. Un'altra questione importante, quella dei numeri negativi è trattata nel Cap. III. Fin dalla prefazione, l'A. dichiara di voler considerare il numero negativo sotto due distinti punti di vista, cioè quale esso è nei teoremi e nei problemi sopra numeri astratti (o meglio riferibili a grandezze di qualunque genere) e quale esso è nei problemi sopra gran-

dezze determinate e specialmente quale valore dei loro quesiti. Sotto questo secondo aspetto, il numero negativo deve essere studiato in quella parte dell'Algebra che ha per scopo la risoluzione dei problemi; sotto l'altro punto di vista, l'idea di numero negativo deriva spontanea dal concetto di formole equivalenti, di cui, subito, al principio del Cap. III, si trova la seguente definizione, che l'A. chiama generalissima: « *Due formole sono equivalenti quando è possibile sostituire » l'una all'altra in una terza formola, senza alterare il » valore di questa* ».

Tale definizione è essa esatta? Non ci pare, perchè possono esistere formole non equivalenti, che sostituite in una terza non alterano il valore di essa. Difatti, se nell'espressione x^{2m} al posto di x si sostituisce $b-a$ oppure $a-b$, essa non cangia di valore, ed intanto $a-b$ e $b-a$ non son certo equivalenti. Si vede adunque da ciò, senza citare altri esempi, che la definizione di formole equivalenti è tutt'altro che vera ed esatta. Come si potrà dunque sopra di essa fondare ragionevolmente il concetto di numero negativo? Ciò nonostante l'A. osservando che in un'equivalenza le espressioni $+(b-c)$, $-(b-c)$, $-(b+c)$ possono essere sostituite alle altre $+b-c$; $-b+c$; $-b-c$; pur riconoscendo che tali espressioni non hanno in sè alcun significato, ritiene le prime respettivamente equivalenti alle seconde, e scrive: $+(b-c)=+b-c$; $-(b-c) =-b+c$; $-(b+c)=-b-c$ donde, annullando b, ne derivano le altre eguaglianze convenzionali:

$$+(-c)=-c\,;\quad -(-c)\ =+c;\quad -(+c)=-c$$

le quali racchiudono le proprietà relative all'addizione e sottrazione dei numeri negativi, di cui è data la seguente definizione: « Il numero negativo, cioè quel numero che è preceduto dal segno $-$, e che figura in un'equivalenza, è un diminutore espresso, che si riferisce ad un diminuendo non determinato e non per anco espresso ».

È vero che l'A. si propone di dare in seguito, a proposito dell'interpretazione dei resultati negativi nella soluzione dei problemi, un significato *definitivo* agli stessi numeri, ma ciò non toglie che, anche astrazion fatta dalla proposizione falsa da cui è partito, non si possa rivolgere a lui lo stesso appunto che il Prof. Betti fa, nella sua prima nota, all'algebra del Bertrand, quando scrive: « l'introduzione nell'algebra di numeri negativi, ai quali si attribuiscono proprietà di convenzione e che non hanno significato, può far nascere difficoltà in chi comincia lo studio di questa scienza e non sembrare abbastanza giustificata dallo scopo di rendere più semplici alcuni resultati ».

Conveniva quindi assai più all'A., giacchè aveva preso a fondamento dell'Aritmetica la quantità, far vedere come quest'idea si svolge e si generalizza, distinguendo le quantità in positive e negative, sebbene egli sia d'opinione che partendo da questo concetto l'idea di numero negativo non acquisti il significato più generale possibile. Ma che importa questo, quando se ne possono aver dei vantaggi dal lato didattico? Del resto poi, una volta introdotti nel calcolo questi nuovi enti, essi, come i numeri positivi, acquistano proprietà in sè; e si può, ove occorra, estendere il loro significato. Per esempio, ammesso che un esponente intero e positivo indichi un prodotto di fattori eguali, cioè indichi l'unità moltiplicata successivamente per tanti fattori eguali quante sono le unità dell'esponente, perchè non si può dire che l'esponente intero e negativo esprime invece l'unità *divisa* successivamente per tanti divisori eguali quante sono le unità del valore assoluto dell'esponente, dando così al numero negativo il significato opposto di quello che, nella stessa questione, ha il numero positivo? E rispetto ai numeri frazionari non facciamo forse la stessa cosa? Noi introduciamo questi numeri considerando l'unità come divisibile in parti, sicchè essi rappresentano una o più parti aliquote della stessa unità; poi, veduto che tutti i numeri frazionari godono della proprietà che moltiplicati per il denominatore danno un prodotto eguale al numeratore, li riteniamo a rappresentare non solo il quoziente di un numero diviso in tante parti quante sono le unità d'un altro numero, ma anche il rapporto di due numeri riferiti alla stessa unità, estendendone così il concetto primitivo.

11. I capitoli seguenti fino al Cap. IX inclusivo sono bene trattati. Vi si espongono assai estesamente e con molta chiarezza le proprietà dei quozienti e degli esponenti interi positivi e negativi, e quelle dei monomi e polinomi, di cui si stabiliscono le regole di calcolo. Fra le altre cose poi me-

rita particolare menzione il modo originale onde si viene a dimostrare la regola della divisione dei polinomi, il quale riassumeremo brevemente. Stabilita in precedenza la eguaglianza $\frac{a}{b} = l + \frac{a - bl}{b}$, l'A. se ne vale per trasformare una frazione a termini polinomi in un'altra espressione avente una parte intera ed una frazionaria, nella quale però il grado del numeratore è minore di quello del numeratore della frazione data, mentre il denominatore rimane il medesimo. Tale trasformazione riesce facilmente, quando la frazione data è di grado positivo o di grado zero rispetto ad una stessa lettera, ed il termine di maggior grado del numeratore è divisibile per quello di maggior grado del denominatore. Trasformando poi la seconda frazione, come è stato fatto per la prima, cioè in una parte intera ed in una frazionaria di grado minore, e così successivamente, si giunge a dare alla frazione proposta la forma d'un polinomio intero più una frazione che ha il numeratore di grado più basso del denominatore, e qualche volta la forma d'un polinomio intero soltanto. Questa trasformazione suggerisce subito la nota regola della divisione di due polinomi, la quale operazione l'autore definisce appunto « il passare da una frazione a termini polinomi ad una formola equivalente che sia o un polinomio intero, o un polinomio intero addizionato con una frazione di grado più basso. »

Lo stesso procedimento permette anche di trovare con abbastanza semplicità il quoziente ed il resto della divisione d'un polinomio ordinato rispetto ad x per $x - a$, e di stabilire il criterio di divisibilità in simili casi, evitando di ripetere la dimostrazione poco corretta che si trova, in tutti i trattati di Algebra; e che si fonda sull'eguaglianza:

$$D = Q\,(x - a) + R,$$

la quale, essendo stata ottenuta nell'ipotesi di x diverso da a, si fa poi valere senz'altro ragionamento anche per x eguale ad a, allo scopo di dedurne $R = D_a$, essendo D_a ciò che diventa D dopo la sostituzione di a ad x.

Torna ora opportuno fare un'osservazione cioè, che mentre l'A. si è occupato di trasformare una frazione proposta in una espressione intera addizionata con una frazione di grado più basso della data, ha mancato poi di risolvere il problema inverso, cioè di far vedere come una frazione può trasformarsi in una espressione composta di una parte intera e di una frazione di grado più elevato.

In questo dovrà forse trovarsi la causa per la quale, nel capitolo che riguarda la divisione dei polinomi, non si parla affatto delle divisioni di polinomi ordinati rispetto alle potenze crescenti d'una medesima lettera; cosa questa poco commendevole perchè potrebbe far nascere in chi studia l'idea che le divisioni dei polinomi non si potessero fare che ordinandoli sempre in un modo.

12. Al calcolo sui monomi e polinomi fa seguito la teoria delle proporzioni, quella delle disposizioni, permutazioni e combinazioni e infine la formula che dà la potenza d'un polinomio, dalla quale son dedotte molto opportunamente quelle del quadrato e del cubo; le quali cose son tutte esposte in modo assai semplice e chiaro.

13. Si passa quindi al Cap. XIII, dove l'A. si occupa delle *radici esatte ed approssimate*, e dà anche un cenno sui numeri irrazionali ed immaginari. Egli considera dapprima il simbolo $\sqrt[n]{a}$ come avente significato razionale, cioè nell'ipotesi che a sia potenza n^{ma} d'un numero intero o frazionario il quale chiama radice esatta di a e dimostra i soliti teoremi sul calcolo dei radicali. Poi estende lo stesso simbolo a significare le basi delle potenze n^{me} inferiori ad a essendo allora a un numero qualunque, oppure quelle delle potenze n^{me} superiori ed a, e propriamente indica con $(\sqrt[n]{a})_\varepsilon$ le prime, e con $(\sqrt[n]{a})_{-\varepsilon}$ le seconde, essendo ε un tal numero che aggiunto alla base d'una potenza inferiore ad a, dà un numero la cui potenza n^{ma} è superiore ad a, e sottratto invece dalla base d'una potenza superiore ad a, dà un numero la cui potenza n^{ma} è minore di a; perciò le prime basi chiama *radici approssimate per difetto* e le altre *radici approssimate per eccesso*. Con questo secondo significato, $\sqrt[n]{a}$ viene a considerarsi variabile per valori razionali; e l'A. dimostra che anche in questo caso sussistono gli stessi teoremi delle radici esatte; cosicchè le operazioni di calcolo sussistenti per queste può facilmente estenderle alle radici approssimate, determinandone ogni volta il grado d'approssimazione. Questo lavoro, il quale è molto utile

più praticamente che scientificamente, sarebbe stato meglio fatto in un capitolo, che trattasse delle approssimazioni in generale e in particolare delle approssimazioni decimali; e non compensa in niun modo, neppure in parte come spera l' A., la mancanza della teoria dei numeri irrazionali, che egli dice non aver voluto qui trattare per non accumulare in un sol volume troppe novità.

Il cenno che l'A. dà del numero irrazionale è proprio insufficiente, e non serve che a far intendere appena il significato del radicale d' indice qualunque, di cui si legge questa definizione: « Il simbolo $\sqrt[n]{a}$, riferito ad una data unità primaria, rappresenta l'unità secondaria maggiore di tutte quelle rappresentate dalle radici n^{esime} di a per difetto e minore di tutte quelle rappresentate dalle radici n^{esime} di a per eccesso ». E ciò può andare bene; ma l'A. avrebbe dovuto effettivamente mostrare almeno uno dei processi che esistono capaci di farci ottenere una unità secondaria maggiore di tutte quelle risultanti da $(\sqrt[n]{a})_\varepsilon$ e minore di tutte quelle risultanti da $(\sqrt[n]{a})_{-\varepsilon}$, invece di limitarsi ad affermarne semplicemente l'esistenza, dichiarando ancora una volta che non poteva in questo libro trattare rigorosamente la teoria degli irrazionali. (*)

(*) Però quello che non è stato fatto nel libro, si trova in una *nota* a parte, inserita in un'altra pubblicazione dello stesso autore, ed intitolata *Rapporti esatti ed approssimati.* Noi non piglieremo in esame quella nota per non andare troppo in lungo, ma ci limiteremo ad osservare che essa presenta fin dal principio una lacuna la quale consiste in ciò che l'A. si vale del concetto di *continuità* senza averlo precedentemente definito: sicchè la sua prima dimostrazione, sulla quale poi deve poggiare tutto il resto, non può dirsi completamente rigorosa. Ed a proposito del concetto di continuità ci viene alla mente un articolo pubblicato sul *Nuovo Educatore*, dove ad un certo punto si legge: « il concetto generale di *limite* include in sè quello di *continuità*, cioè quello di *grandezza continua*; dunque per tali autori (per quelli cioè che danno la definizione del numero mercè il concetto di limite) numero limite non può significare altro che la misura d'una certa grandezza. » Queste parole che il nostro A. scriveva per dimostrare in qual modo molti scrittori d'Aritmetica ed Algebra quando definiscono il numero come limite s'aggirano in un circolo vizioso fatto colle due parole numero e misura, sono tutt'altro che esatte perchè se si pensa al valore limite, o come vuol dirsi alla generatrice d'una frazione decimale periodica, tal limite può benissimo rappresentare una quantità discreta, a preferenza d' una quantità continua: dunque senza citare altri esempi, il concetto generale di limite non può includere quello di grandezza continua. È vero bensì che i numeri irrazionali non possono avere significato come rappresentazione di grandezza, se essa non è *continua*; ma non è questa una ragione perchè non si possano considerare in sè, definendoli con processo numerico e studiandone poi le proprietà indipendentemente dalla natura dell' unità a cui si riferiscono. E i numeri frazionari hanno forse sempre un significato? Evidentemente no, perchè quando l'unità non è divisibile in parti, non si può concepire frazione di

14. Intorno ai *numeri immaginari* non è detto altro che sono dei nuovi simboli introdotti nell'Aritmetica a rappresentare i radicali d'indice pari dei numeri negativi; rispetto ai quali si estendono le equivalenze dimostrate pei radicali *reali*. Successivamente si definiscono pure i *numeri complessi*, e si fa vedere come il prodotto di due numeri *complessi coniugati* è un numero reale.

15. Un altro concetto a cui non si è dato nessuna importanza, mentre la dovrebbe avere grandissima, è quello di *limite*. L'A. infatti ne dà il significato in una nota in basso alla pag. 150, tanto per avere agio di dimostrare che la potenza n^{esima} delle radici n^{esime} approssimate di a ha per limite a, allorchè il grado d'approssimazione impiccolisce indefinitamente; e di poterne parlare trattando delle equazioni e delle progressioni geometriche. Diremo infine che all'Arit-

---

questa unità; e nell'istesso modo può accadere che, in una determinata questione, non tutti i numeri interi possano rappresentare una quantità. Ciò non pertanto i numeri interi come i frazionari, una volta definiti, si studiano e si opera sopra di essi indipendentemente dalla specie dell'unità alla quale sono riferiti; anzi possiamo dire di più che gli stessi numeri, introdotti nel calcolo colle proprietà della quantità di cui sono l'espressione, ne acquistano delle proprie, ed è appunto perciò che non tutte le trasformazioni di calcolo hanno sempre ragione in un fatto, in una relazione fra quantità.

Ora, che cosa fanno coloro i quali definiscono l'irrazionale come limite d'una serie di numeri? Estendono a dei nuovi simboli quella stessa proprietà, la quale appartiene al tempo stesso ai numeri razionali e alle grandezze in generale; in modo che non solo vengono a comprendere in un concetto unico tutti gli enti aritmetici, ma hanno altresì la possibilità di rappresentare nel calcolo tutti gli stati d'una stessa grandezza. Se poi si considera la cosa da un altro aspetto, si vede che l'introduzione nel calcolo dei numeri irrazionali è abbastanza giustificata dal fatto che, con essi, tutte le estrazioni di radice sono rese sempre possibili.

Si è anche scritto, che l'irrazionale non può dirsi propriamente un *numero*, ma solo *l'espressione d'un fenomeno* che trova spiegazione in fatti geometrici. Sarebbe bene non far questione di parole, ma di concetti: se l'irrazionale non vuol chiamarsi numero, poco importa; si chiami pure semplicemente simbolo o segno; ma è innegabile che alla sua considerazione siamo indotti non solo da fatti geometrici, ma anche dai processi delle operazioni aritmetiche. Difatti, quando si estrae per es. la radice quadrata da un numero intero si viene a determinare una serie di numeri che soddisfanno alle stesse leggi dei valori d'una frazione decimale periodica, e nell'istesso modo che questi valgono sempre ad individuare un numero razionale, possono i primi ritenersi sufficienti a definire, in mancanza d'un numero razionale, un altro simbolo, che per contrapposto si chiama irrazionale. È così che si generalizzano i concetti della matematica elementare e si mettono le basi per le teoriche di ordine più elevato.

In conclusione, se, nel rispetto didattico, per dare la definizione d'irrazionale, si vuol partire dall'idea di quantità e distinguer prima le quantità commensurabili dalle incommensurabili, si faccia pure, e sarà ben fatto; ma non si dica che è inesatta o vacua la definizione data col concetto di limite e colle classi di numeri, prima d'averle sostituito qualche cosa di meglio e di più rigoroso.

ıetica generale dà termine un capitolo sugli esponenti fraionari, il quale è completamente e rigorosamente sviluppato.

16. Passando ora alla seconda parte del libro, dichiariamo ıbito che ci duole assai di doverne parlare brevemente, per ıon abusare troppo dello spazio che ci è concesso. In essa, 'A. espone la teoria delle equazioni, le progressioni e i logaritmi. I primi sei capitoli, destinati allo studio delle equaıoni e sistemi di equazioni di 1° e 2° grado, sono, in comılesso, trattati assai bene; e, se avviene che qualche cosa imanga a desiderare, è intorno all' equivalenza delle equaıoni. L'A. infatti, allorchè dimostra che si può aggiungere d ambedue i membri d'un'equazione una stessa quantità, rascura di considerare il caso che essa possa perdere il suo ignificato; e, nell'altra questione riguardante la moltiplicaıone dei membri d'un'equazione per una stessa quantità, on determina precisamente in quali casi la nuova equazione i conserva equivalente alla prima, e, nel caso contrario uando è che il numero delle radici di una equazione auıenta, oppure diminuisce. Però astrazion fatta da queste oche mende, l'A. ha esposto sullo stesso argomento molte ed tili considerazioni, fra le quali tornano assai opportune uelle relative ai simboli $\frac{0}{0}$ e $\frac{1}{0} = \infty$.

Anche la teoria delle progressioni è ben trattata.

Quanto ai logaritmi, essi sono esposti in modo analogo quello usato per le radici approssimate, evitando cioè il oncetto di numero irrazionale, e la loro definizione è così spressa: « la radice dell'equazione esponenziale $a^x = b$, con ı prestabilito grado d'approssimazione, si chiama *logaritmo* i b nella base a ». Se ora si osserva che l'A. ha sempre onsiderato razionale l'esponente d'una potenza di leggieri comprende l'inesattezza della precedente definizione. Sicıè, dal canto nostro, pur riconoscendo che la teoria dei ɔgaritmi com'è esposta dall'A. può avere importanza nel alcolo delle approssimazioni, nel rispetto scientifico non ossiamo approvarlo, perchè senza il concetto dei numeri irızionali, non si può aver chiara e rigorosa idea del logaritmo.

Per ultimo osserveremo che l'appendice all'aritmetica geerale contiene un'importante capitolo su problemi relativi i rapporti delle grandezze e alla proporzionalità diretta ed ıversa delle medesime; e che, tanto per la chiarezza e semlicità dell'esposizione come per il rigore dei ragionamenti, diverse teoriche dell'aritmetica razionale che vi sono stuiate, non lasciano nulla a desiderare.

M. Gremigni

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Annales du Baccalauréat ès sciences: Année 1886. Paris, librairie Nony e C.ie

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des Mathématiques publié par *Gustav Eneström*. Stockholm, 1887; N. 1.

Giornale di Matematiche pubblicato per cura del professore *G. Battaglini*. Volume XXV. Marzo e Aprile 1887. Napoli, Benedetto Pellerano, editore.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *J. Bourget*, Recteur de l'Academie de Clermont, *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy*, Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe. 2e série. Onzième année. N. 4. Paris, 1887.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par *H. Vuibert*. 11e Année. N. 12, 13, 14, 15. Paris, M. Nony, 17. Rue des Écoles, 1887.

Iornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo *D.r F. Gomes Teixeira*. Professor na Escola Polytechnica do Porto. Vol. VII, n. 4. Coimbra, 1886.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome septième, Mars et Avril 1887.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XIX. N. 4, 5, 6. Firenze, 1887.

Eneström (G.) — Aperçu sur les recherches récentes de l'histoire des mathématiques (1887).

Guccia (G. B.) — Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono unicursali (1886). — Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche e sopra un teorema generale delle curve algebriche di genere p (1887).

De Longchamps (G.) — Cours de mathématiques speciales (4 vol.) Première partie; *Algèbre* — Deuxième partie: *Géométrie analytique à deux dimensions* — Troisième partie: *Géométrie analytique à trois dimensions* — Quatrième volume: *Supplément au Cours de Mathématiques spéciales*. Paris, Librairie Ch. Delagrave, 1883—85.

—— Sur la rectification de la trisectrice de Maclaurin, au moyen des intégrales elliptiques (1887) — Rectification des cubiques circulaires, unicursales, droites, au moyen des intégrales elliptiques (1887).

Loria (G.) — Su una proprietà del determinante di una sostituzione ortogonale (1886).

Maggi (G. A.) — Distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra due conduttori piani indefiniti paralleli, assoggettati all'induzione di un punto situato nello spazio compreso fra essi (1880). — Induzione elettrica su conduttori limitati da piani indefiniti assoggettati all'azione dei coibenti caricati simmetricamente intorno ad un asse (1881) — Sul moto di un filo flessibile ed inestensibile che si sposta pochissimo dalla sua posizione d'equilibrio (1881). — Sul significato cinematico della superficie d'onda (1883). — Sulla trasmissione dei moti ondulatori, e particolarmente dei moti ondulatori luminosi, da un mezzo isotropo in un altro (1883). — Sull'integrazione delle equazioni differenziali del pendolo conico (1884). — Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili (1884) — Sull'integrazione delle equazioni differenziali del movimento oscillatorio di un filo flessibile e inestendibile, intorno ad una configurazione d'equilibrio (1886). — Deduzione della formola di Taylor (1886). — Riduzione di un integrale multiplo (1886).

Marabelli (E.) — Elementi di Aritmetica razionale ad uso delle scuole classiche — Reggio-Emilia, 1887.

Millosevich (E.) — Osservazioni astronomiche e riduzioni relative fatte nel 1885. Roma, 1887.

Tessari (D.) — La teoria delle ombre e del chiaroscuro ad uso delle Università, scuole d'applicazione per gli Ingegneri, Accademie militari, Istituti tecnici, ecc. Torino, Tip. Camilla e Bertolero editori, 1878—80.

—— Trattato teorico-pratico delle projezioni assonometriche ortogonali ed oblique ovvero Metodo semplice e facile per eseguire qualunque genere di prospettive parallele. Ditta G. B. Paravia e C. 1882.

SUL CONCETTO DI NUMERO

Il concetto fondamentale dell' Analisi è quello di numero. Esso, almeno nella sua forma più semplice di numero intero, è d'altra parte uno dei concetti più comuni e naturali: e sembra così spontaneo, che Hoüel lo giudica « una » proprietà primordiale ed indefinibile » (*) degli aggregati di oggetti. Ciò non vuol dire che non si debba cercare di renderlo chiaro più che si possa e che, *per lo meno* nelle sue forme più generali di numero preceduto da segno, o di numero irrazionale, ecc., non siano necessarie delle vere e proprie definizioni.

Invece nell' insegnamento, almeno a giudicare da molti trattati, s' insiste così poco su questo concetto, da doversi persuadere che i giovani studiano spesso i numeri frazionari, i numeri negativi ecc., non perchè ne abbiano una chiara idea, ma perchè da sè stessi tentano di riconoscere nell'oggetto del loro studio quelle stesse caratteristiche con cui si presenta alla loro mente l'altro concetto, che pure porta lo stesso nome di numero, il numero intero, che hanno più chiaro perchè è loro famigliare fino dall'infanzia.

A me sembra che questo modo di procedere non sia scientificamente da lodarsi: e, se può esser sufficiente per gli usi che nella pratica si fanno dei numeri, non è d'accordo colla parte educativa che l'insegnamento della matematica deve avere nella scuola. Di più i giovani, senza avere un'idea chiara del concetto generale di numero, comprenderanno solo in modo vago ed indeterminato le considerazioni che loro si potranno fare sui numeri complessi: e non arriveranno mai a sapere qual'è lo spirito che guida l' introduzione di nuovi numeri, e fino a che punto sia utile o conveniente spingersi in questa introduzione.

(*) *Hoüel.* — Considérations élémentaires sur la généralisation successive de l'idée de quantité dans l'analyse mathématique. — Paris 1883.

Se in certi trattati, come or si accennava, si trascura di dare il concetto di numero, in certi altri lo si dà, sì, ma in modo molto inesatto. Spesso si trovano espressioni tali da far supporre che il numero sia tutt'una cosa colla grandezza, cosicchè, p. es., 7 libri costituiscano il numero 7; talora si vede supposta già chiara l'idea del numero razionale (benchè avuta spesso soltanto da uno studio elementarissimo di aritmetica pratica) e s'insiste solo sull'irrazionale, dandone un concetto che, se anche è esatto, non si può afferrar bene, non essendo posto in modo altrettanto esatto quello del numero razionale. In altri trattati, pure essendo le varie specie di numero introdotte in modo rigoroso, lo sono partendo da punti di vista differenti, talchè non s'arriva a dare un concetto *unico* del numero, ma si danno altrettanti concetti separati del numero razionale, dell'irrazionale, del negativo, tantochè sembra arbitrario il comprenderli sotto quello solo di numero reale.

Io ritengo essere indispensabile l'introdurre chiaramente ed esattamente l'idea di numero, per far ben comprendere lo scopo e l'oggetto dello studio dell'algebra. Non nego che vi siano trattati e pubblicazioni speciali in cui è svolta rigorosamente la questione del numero: nonostante stimo le poche considerazioni che sto per esporre non inutili affatto per chi comprenda l'importanza dell'insegnamento elementare della Matematica.

I.

1. Due sono i punti di vista sotto cui si può introdurre e sviluppare l'idea di numero; ritenendo cioè questo o come rappresentante le grandezze nel loro rapporto con una della loro specie, o come ente puramente analitico, senza curarsi dell'applicazione che potrà ricevere nella misura delle grandezze. S'intende che, o in un modo o nell'altro, il numero non sarà mai che un ente ideale, un puro concetto; soltanto nei due modi ne è differente l'origine e lo scopo,

per quanto gli enti generati dall'uno e dall'altro punto di vista si possano identificare fra loro.

2. Col primo metodo il numero nasce dalla considerazione delle grandezze e dall'utilità di avere un ente che le rappresenti. Non insistiamo qui sul significato da darsi alla parola *grandezza* (*); ma rileviamo che certe categorie di oggetti che sogliono più comunemente studiarsi, cioè gli aggregati di oggetti uguali fra loro e separati l'uno dall'altro, gli aggregati di parti di questi, i segmenti, gli angoli, le superficie, i solidi, i tempi, i pesi, ecc., hanno tali proprietà comuni che si può raggrupparli sotto un concetto unico dicendo che quegli oggetti (ciascuno nella propria categoria) sono grandezze. Per indicare ora gli oggetti di una medesima categoria di grandezze di fronte ad una grandezza della categoria stessa (unità) si sogliono spogliare gli oggetti di tutte le proprietà loro che non influiscono su questo confronto: e ne risulta un ente ideale che serve a rappresentarli e che si dice numero. Il numero, sotto questo punto di vista, è quindi un ente tale che ci ricorda il modo in cui una grandezza può ottenersi dall'unità della sua categoria.

3. Incominciamo dalle grandezze più semplici, che sono quelle formate da aggregati di più oggetti i quali, godendo tutti di certe proprietà, si dicono uguali fra loro di fronte a quelle proprietà. Se in questi oggetti si ha riguardo a queste sole proprietà, essi producono tutti su di noi la medesima impressione. Ciascuno di essi si dice un'*unità*.

Se partiamo da differenti unità, si ottengono aggregati di diverse specie; ma se prescindiamo dalle proprietà che servono a distinguere l'una dall'altra unità coll'immaginare l'unità spogliata di queste proprietà stesse, ad essa viene nella nostra mente a sostituirsi un ente ideale, dotato della sola proprietà di poterne immaginare quanti se ne vuole uguali ad esso ed aggregabili fra loro: e agli aggregati di

(*) Cfr. *Grassmann*. Lehrbuch der Aritmetik. — *Stolz*. — Vorlesungen über allgemeine Aritmetik. — *Hankel*. — Vorlesungen über die complexe Zahlen, ecc.

unità vengono a sostituirsi gli aggregati di quegli enti i quali sono gli stessi qualunque siano gli oggetti. Quell'ente ed i suoi aggregati sono rispettivamente il numero 1 e gli altri numeri, i quali tutti con un nome unico si dicono *numeri interi* o *naturali*.

La necessità di considerare grandezze formate da quegli oggetti che si sono detti unità e dalle loro parti (supposti gli oggetti divisibili in parti da ritenersi uguali) conduce all'introduzione di nuovi enti, i numeri frazionari, di cui ciascuno rappresenta uno di questi aggregati di unità e di parti di unità. Se si prendono poi a studiare le grandezze geometriche o quelle che si sogliono rappresentare con grandezze geometriche (generalmente con segmenti), p. es. tempi, pesi, temperature, forze ecc., si vede che i concetti precedenti non bastano per ottenere tutte le grandezze possibili partendo da una data grandezza ed applicandole le leggi espresse dai numeri precedenti (razionali): di qui la necessità di nuovi enti atti a rappresentare le grandezze che, di fronte a quella data, non si possono rappresentare coi numeri razionali. E ancora, se si riflette che talune grandezze, considerate da certi punti di vista, presentano due modi di comportarsi opposti fra loro tali che, prese due convenienti di quelle grandezze, il loro insieme non ha più il carattere di quelle grandezze ma equivale alla loro assenza, si vede che nei numeri precedenti occorre determinare qualcosa di più, perchè servano completamente a definire le grandezze — donde l'introduzione dei numeri col segno. Considerando in seguito certe grandezze (i segmenti) come caratterizzati da qualche proprietà di più di quelle cui si è avuto ricorso per introdurre i numeri reali (cioè la direzione) si prova l'insufficienza di questi numeri reali stessi; e, volendo per ogni grandezza avere il numero corrispondente, siamo condotti ai numeri complessi a due o tre dimensioni, secondochè si studiano i soli segmenti del piano o tutti quelli dello spazio. E in questo modo potremmo anche spingerci più oltre.