UN' OPERA RECENTE
SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE ELEMENTARI

DI

GINO LORIA

In due modi differenti si possono intendere le ricerche sulla scienza delle età che furono. Si può infatti proporsi di seguire accuratamente, colle opere esistenti alla mano, l'apparire e lo svolgersi delle singole idee direttrici, tenendo conto delle vicende che attraversarono i più eminenti pensatori nell'intento di scoprire dove essi possono aver trovato lo stimolo o l'ispirazione alle loro investigazioni od eventualmente incontrati i germi delle scoperte che ad essi si attribuiscono; è questo il cômpito preciso dello storico nello stretto senso della parola, il quale nell' adempierlo arriva a distinguere nettamente le questioni storiche esaurite da quelle che dall'avvenire attendono una soluzione definitiva. Ma si può anche prescindere in gran parte dagli uomini e fare la storia delle idee, seguendone sin che si può lo svolgimento in base ai materiali esistenti, spingendosi poi a colmare le lacune che nel loro insieme si avvertono col ricostruire il processo logico che presumibilmente avrà diretto i pensieri degli indagatori passati. Il primo di tali modi di procedere si accosta a quello seguito dai bibliografi, esige di regola una copiosa e svariata erudizione e mena di consueto a conclusioni da nessuno combattute, per converso da molti sfruttate. Il secondo invece si può ritenere modellato su quello proprio dello scienziato procedente alla ricerca di nuovi veri. Se del primo indirizzo è oggi maestro insuperato M. Cantor, del secondo il più eminente e schietto rappresentante è il celebre geometra H. G. Zeuthen; ben lo sanno i nostri lettori che conoscono ed apprezzano a dovere la geniale sua opera intorno alla teoria delle sezioni coniche dell'antichità (*).

(*) Per essere la lingua danese poco conosciuta, ne cito la versione tedesca fatta da R. v. Fischer Benzon ed intitolata: *Die Lehre von der Kegelschnitten in Altertum* (Kopenhagen 1886).

Ed in tale situazione egli si riafferma con le *Lezioni sulla storia delle matematiche nell'antichità e nell'evo di mezzo*, uscite in danese nel 1893 (*) ed ora in tedesco (**) e sulle quali intendiamo con queste linee attrarre l'attenzione degli studiosi e degli insegnanti. In esse l'autore si è proposto di esporre quel tanto di storia che a suo avviso importa di sapere tanto agli studenti quanto ai professori di matetiche elementari, cioè non tanto di far conoscere i più minuti particolari biografici e storici, non già chi per primo abbia scoperto una proposizione od usato un procedimento, ma sibbene di porre in luce le forme primitive sotto cui apparvero le varie verità ed i varî procedimenti nonchè le applicazioni che ne furono fatte in origine. È un libro frutto di lavoro originale, di indole piuttosto matematica che storica, giacchè in ultima analisi è uno studio approfondito dei grandi scrittori, inteso, meno forse a determinare quello che sapeva un certo scienziato, una certa generazione, un certo popolo, che a porre allo scoperto le intime ragioni per cui i teoremi e le dimostrazioni dovevano per ineluttabile necessità presentarsi nella forma in cui li incontriamo. La genialità di tali indagini è evidente ed il valore dei risultati a cui esse condussero verrà riconosciuto da tutti, anche da coloro che saranno recalcitranti ad inserirli nel catalogo delle conquiste fatte dalla storia delle matematiche.

Se una cosa ci è impossibile non lamentare è che tali risultati siano esposti sotto una forma dogmatica che ne cela ai profani l'elemento ipotetico (***), il quale era per converso esplicitamente rilevato nell' opera storica anteriore del medesimo autore (tale mutazione è forse l' espressione dell'essersi nell' autore raffermata la fede nella verità delle tesi originali da lui già sostenute?). Di più — ed è questo l'altro appunto che ci permettiamo di muovere all'opera di cui ci occupiamo — la preponderanza dell' elemento sostanziale sull'elemento storico-cronologico fa porre in non cale alcune questioni di cui soltanto la risoluzione a venire darà a certe illazioni

(*) *Forlaesning over Mathematikens Historie* af H. G. Zeuthen. Oldtid og Middelalder (Kjöbenhavn 1893).

(**) *Geschichte der Mathematik in Altertum Mittelalter. Vorlesungen von* H. G. Zeuthen *Professor an der Universität Kopenhagen* (Kopenhagen 1896).

(***) Cito ad esempio l'affermazione che « i Porismi (di Euclide) contenevano parecchie delle proposizioni sulle trasversali e le punteggiate che vengono oggi esposte nella geometria projettiva » (p. 87).

tutta la desiderabile saldezza; basti qui ricordare a sostegno di tale osservazione la questione eroniana, che, nel suo stato attuale, non permette di delineare la figura di Erone con la stessa precisione di quanto sia possibile ad es. per Archimede, e le incertezze intorno all'età in cui fiorì Diofanto, le quali rendono mal sicure le relazioni fra l'algebra dei Greci e quella degli Indiani. Tale preponderanza riesce evidente al solo percorrere l'indice delle lezioni dello ZEUTHEN, ove la divisione in sezioni è fatta in base a considerazioni etnografiche e cronologiche, mentre la divisione in capitoli è determinata dalle varie questioni matematiche trattate.

Il lettore che ricorrerà all'opera originale — a cui auguriamo una traduzione italiana che ne agevoli la diffusione nelle nostre scuole medie, alle quali essa sembra per la maggior parte indirizzata — vedrà qual singolare abilità lo ZEUTHEN possiede nella scoprire il legame che unisce le ricerche che a prima vista possono apparire disgiunte, ed apprenderà delle osservazioni ingegnose e brillanti le quali costituiscono un vero commento storico critico all'antica geometria ed in ispecie agli *Elementi* di Euclide. Mi limito, per non uscire dai limiti impostimi, a segnalare specialmente i capitoli sull'aritmetica geometrica e sull'algebra geometrica, ove sono luminosamente esposti gli artificî mediante i quali gli antichi poterono affrontare anche le ricerche sulle proprietà dei numeri, in virtù dei quali artificî la geometria de' Greci abbraccia in ultima analisi pressochè tutte le diramazioni delle matematica moderna.

Un altro punto di grande importanza a cui lo ZEUTHEN rivolse il suo fine ed acuto senso critico è quello delle ipotesi sulle quali Euclide ha eretto il proprio edificio geometrico; e poichè le questioni ivi trattate sono di quelle che destano maggiore interesse nel pubblico a cui si rivolge il *Periodico di matematica*, credo opportuno spogliarmi della veste del recensore per prendere quella più modesta del traduttore riferendo qui completamente le originali quanto ingegnose osservazioni dell'eminente geometra danese:

Le ipotesi sulle quali Euclide fonda la geometria debbono venir rintracciate nelle definizioni, nei postulati o negli assiomi posti in principio dei varî suoi libri. Offrono un interesse speciale quelli relativi al I libro giacchè essi, nonchè i risultati che sopra essi riposano, servono di base anche ai libri successivi. Perciò noi ci arresteremo di preferenza su di essi, completandoli colle nuove ipotesi introdotte in altri libri. Tuttavia quelle che si riferiscono a teorie speciali, quale sarebbe la teoria delle proporzioni, verranno da noi esaminati più innanzi occupandoci di tali teorie.

Una prima lettura delle definizioni, dei postulati e degli assiomi di Euclide mostra indiscutibilmente che essi non sono per fermo all'altezza delle esigenze formali e logiche che gli antichi, come dicemmo, hanno sollevate. Si vedrà a mo' d'esempio che parecchie definizioni non insegnano niente intorno a quanto doveva essere definito e quindi non danno alcuna garanzia che in corrispondenza ad esse esista realmente qualche cosa. Così la definizione della retta non dice niente di più che se dicesse: c'è una certa categoria di linee che si chiamano rette. Di qual specie di linee si tratti, cioè quali siano le proprietà della retta, che oggidì si introdurrebbero nella definizione, viene fatto conoscere soltanto ne' postulati i quali dicono: noi partiremo da ciò che la retta possiede queste e queste proprietà. Anche i postulati e gli assiomi sono enunciati con una tale brevità che può sembrare enigmatica e che è in aperto contrasto colla prudente prolissità con cui è trattato tutto ciò che si trova nelle proposizioni propriamente matematiche nelle loro dimostrazioni.

La ragione di ciò è che nelle definizioni, nei postulati e negli assiomi viene indicato tutto quello che il matematico è autorizzato a presupporre nel corpo di dottrina, ma non viene dato alcuno chiarimento o alcuna illustrazione del « come », nè alcuna dimostrazione del « perchè ». Lo scopo è principalmente di dare un *catalogo* completo di quanto si supporrà il quale sia così intelligibile che *quando si dovrà servirsene* dia dei ragguagli tanto chiari che riesca evidente in ogni caso di non avere adoperato nè più nè meno di quanto avevasi il diritto; per converso non si dà importanza alle astrazioni che guidarono a stabilire i concetti e ad attribuir loro mediante postulati ed assiomi precisamente quelle certe determinate proprietà, e nemmeno alle prove di avere effettivamente soddisfatto la condizione di non attribuire loro nè soverchie nè insufficienti proprietà. Come matematico Euclide si ritiene responsabile soltanto di questo che colui il quale gli accorda tutte queste cose, *poi*, astretto dalla forza delle sue deduzioni, sia obbligato a concedergli tutto quello che egli ne deduce. Deve perciò sperimentalmente dimostrare che ha stabilito un numero *sufficiente* di ipotesi. Che egli *non ne abbia fatte troppe*, non si può dimostrare con altrettanta facilità; ma ove egli avesse commesso tale errore, sarebbe stato esposto ad apprenderlo da altri scienziati. I quali avrebbero potuto convincernelo sia dimostrando che alcune delle sue supposizioni sono *fra loro contraddittorie*, sia *deducendo alcune di esse dalle rimanenti*.

Volendo valutare a dovere le ipotesi geometriche esplicitamente fatte dagli antichi e specialmente da Euclide si deve badare a quello che sono tali ipotesi piuttosto che alla mancanza di notizie sulla loro provenienza o alla forma sotto cui ci si presentano. Si vedrà allora che sono le medesime di quelle su cui noi oggidì erigiamo la geometria e che vengono esposte in modo così sicuro e completo, che meritano di servire sempre di modello anche a coloro che potessero giudicare opportuno di introdurvi aggiunte o modificazioni. Ciò non ostante per intenderle pienamente dovremo qua e là tener presente la forma imperfetta, almeno secondo le idee moderne, in cui esse sono espresse.

Cominceremo dal porre in disparte quelle Definizioni le quali possono offrire il fianco alla critica. Il *punto* è definito mediante la sua indivisibilità (Libro I, Def. 1). Partendo da esso si procede alla *linea* considerata come lunghezza senza larghezza (I, 2), alle *superficie* con lunghezza e larghezza (I, 5) e, nell'XI libro, al *solido* con lunghezza, larghezza e profondità (XI, 1). Queste definizioni non spiegano in alcun modo per qual via si arrivi ai concetti di punto, linea, superficie e corpo, pongono dunque come ipotesi su cui lavorare che si sia già in possesso di tali concetti e si sia in grado di comprendere il significato delle frasi: il punto ha zero dimensioni, la retta ne ha una, ecc.; in esse è poi inclusa la possibilità di concepire una retta come luogo geometrico di punti, una superficie di linee e un solido di superficie. In pratica per giungere in possesso di tali concetti di regola bisognerà percorrere, non questa via sintetica che va dal punto alla linea, alla superficie ed al solido, ma la via analitica opposta, partendo dal corpo come qualche cosa di dato a *priori*, e considerando le superficie come limiti di corpi, ecc. Che agli antichi non fosse ignota tal via per giungere a questi concetti, emerge da un'altra serie di definizioni — cioè XI, 2, I, 6, e I, 3 — le quali però in Euclide non fanno la parte di nuove definizioni di superficie, linea e punto, ma sono soltanto informazioni intorno al modo in cui sono limitati i corpi, le superficie e le linee.

Ho già rilevato come, non nelle definizioni, ma sibbene nei postulati combinati con uno degli assiomi, si dovesse cercare la spiegazione di ciò che fosse una *retta*. Anche l'esistenza della circonferenza è accertata soltanto dai postulati, giacchè diversamente da quanto accadde per la retta, la definizione di essa (I, 5) dice piuttosto troppo che troppo poco. Essa infatti non soltanto afferma essere tutti i punti della circonferenza equidistanti dal centro, ma eziandio essere il cerchio una figura, cioè una porzione di piano limitato dalla circonferenza, ed essere il centro interno a quella linea. Se non si aggiunge che la circonferenza comprende *tutti* i punti dotati di quella proprietà, il primo dei dati surriferiti rende per nulla superfluo un carattere atto a distinguere la periferia da un arco di circolo. Tale nuovo dato può quindi accampare dei diritti ad un posto fra le definizioni. Del resto vedremo che esso, anche se non avesse potuto trovare luogo qui, avrebbe dovuto venire accolto tra i postulati, vuoi sotto questa, vuoi sotto altra forma.

Al contrario la definizione di *diametro* di un cerchio ha un'appendice senza dubbio superflua, non soltanto nella definizione, ma anche fra le ipotesi. Giacchè ivi è detto, non soltanto che il diametro passa pel centro, ma anche che biseca il cerchio. Quest'ultima proposizione è un teorema che si può dimostrare tenendo conto della congruenza delle due parti in cui il cerchio è diviso da un diametro. Forse qualche editore lo ha più tardi inglobato nella definizione, non trovandolo fra i teoremi di Euclide.

La definizione di *angolo* data da Euclide è vu ta circa quanto la definizione di retta. A tale difetto viene posto riparo con gli *assiomi* nei quali sono stabiliti dei contrassegni generali per distinguere se una quantità geometrica sia maggiore, eguale o minore di un'altra della medesima specie. Infatti questi contrassegni si possono applicare anche agli angoli e siccome è in pari tempi insegnato come gli angoli possano venire addizionati, così si arriva in tal modo a una classe di grandezze ben definite. Si osservi del resto che la primitiva definizione di angolo è applicabile anche ad angoli fra linee curve. Ed infatti questo concetto è usato nella proposizione III, 16, in cui è dimostrato che la retta perpendicolare al diametro passante per un punto della circonferenza forma con questa un angolo minore di quello fatto da qualunque altra retta, in altri termini si accosta alla circonferenza più di ogni altra retta.

*
* *

I POSTULATI stabiliti da Euclide nel I libro sono, se ci atteniamo alla revisi ne del testo più recente e più degna di fede (*), i seguenti:

1. Condurre una retta da un punto ad un altro.
2. Prolungare indefinitamente una retta limitata.
3. Descrivere un cerchio con dato centro e dato raggio.
4. Tutti gli angoli retti sono fra loro eguali.
5. Se una retta, segante altre due, forma con queste da una parte due angoli interni minori in somma di due retti, quelle due rette prolungate all'infinito si taglieranno dalla parte ove la somma è inferiore a due retti.

Tutte le costruzioni che nascono applicando questi postulati sono quelle che in pratica si effettuano con riga e compasso. Ma sarebbe erroneo il considerarli esclusivamente da questo punto di vista. Lo si vede fra l'altro da ciò che facendolo i due ultimi postulati dove si trovano non sarebbero più al loro luogo; appunto da questo i più antichi editori si sono lasciati indurre in errore e li allogarono fra gli assiomi.

Come si vede riga e compasso non sono nemmeno menzionati. Il loro uso condurrebbe ad un'idea imperfetta della retta matematica e del cerchio matematico. I tre primi postulati non spiegano in alcun modo — cosa che del resto osservammo in generale riguardo alle ipotesi di Euclide — donde provenga o con quali mezzi si effettui, quello di cui si tratta. Essendo in ultima analisi i problemi degli antichi proposizioni sull'esistenza e le loro soluzioni dimostrazioni della esistenza di ciò che si tratta o di ciò che si cerca, i postulati sono *asserzioni di esistenza*, delle quali si chiede l'accettazione per vere senza dimostrazione o verificazione. Le asserzioni incluse nei tre primi postulati dicono soltanto che vi è una retta passante per due punti, che

(*) *Euclidis Elementa;* edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg. Lipsiae, 1883-88. 8.º questa si può prolungare senza limite e che esiste un cerchio avente un centro dato ad arbitrio ed un raggio dato ad arbitrio uscente da questo, in altre parole, un cerchio avente un dato centro e passante per un dato punto. Che il terzo postulato debba intendersi appunto in questo senso, che esso non esiga venga ammessa senza dimostrazione l'esistenza di un cerchio con dato centro e raggio dato in una posizione qualunque del piano, si desume dal fatto che Euclide nella seconda proposizione degli *Elementi* mostra come la determinazione di un tale cerchio si possa, servendosi della costruzione di un triangolo equilatero insegnato nella prima proposizione, comporre con le costruzioni prestabilite. Siccome ciò è effettivamente possibile, così Euclide, introducendo la limitazione richiesta dal terzo postulato, ha adempiuto al già ricordato dovere di *non supporre troppo*. Se invece egli avesse avuto in vista l'esecuzione pratica col compasso, la posizione del dato raggio sarebbe stata indifferente; si può anzi osservare che la via tracciata nella seconda proposizione non fu certamente suggerita tenendo conto dell'effettuazione dei disegni.

Concepito in tal modo il significato dei postulati, è chiaro non essere sufficiente di postulare l'esistenza di rette e circoli determinati nel modo più semplice. Le costruzioni geometriche debbono venire eseguite in modo che i varî punti siano determinati come intersezioni di linee e servano poi a determinare delle nuove linee. Epperò l'esistenza di punti di intersezione, come quella delle linee, deve venire postulata, essendo impossibile che quella sia una conseguenza di questa. Epperò nel quinto postulato viene posta, come nuova *ipotesi*, che due rette si tagliano, pur facendo la restrizione necessaria affinchè quell'asserzione sia vera, restrizione che fa qui la stessa parte del diorisma in un problema. Ove non fosse stata richiesta col postulato 5° l'esistenza del punto d'intersezione, le soluzioni dei problemi in cui intervengono i punti d'intersezione di rette non avrebbero avuto in generale il carattere di dimostrazioni dell'esistenza delle figure costruite nel quale appunto risiedeva il risultato essenziale delle costruzioni.

Se tale modo di vedere è giusto, si avvertirà la mancanza in Euclide di analoghi postulati che accertino l'esistenza di intersezioni di una retta con una circonferenza o di due circonferenze. Ma la determinazione completa de' casi in cui l'intersezione ha luogo effettivamente esige la conoscenza di parecchie proposizioni ed è forse il fatto di non potere fare subito questa determinazione con piena generalità che ha trattenuto Euclide dallo stabilire i relativi postulati. Tuttavia in generale per adoperare il cerchio nelle costruzioni sono inevitabili almeno *alcune* ipotesi intorno alle intersezioni di esso colla retta e con altri circoli; ed è nelle applicazioni esposte che fa mestieri cercare quali siano quelle adoperate da Euclide. Così si vede che nel teorema I, 12 per essere sicuro che un cerchio di dato centro tagli una certa retta, egli fa passare questo cerchio per un punto posto rispetto alla retta dalla parte opposta del centro del cerchio, nel teorema 1 ritiene evidente che due cerchi ognuno dei quali ha il centro sulla periferia dell'altro si taglino, e nel teorema 22 che un cerchio il quale passi per un punto interno e per un punto esterno alla periferia di un altro, taglierà quest'altro. Che egli si fondi su queste supposizioni emerge dai passi citati; altrove egli non ammette nulla sull' intersezione di cerchi fra di loro o di rette con circoli che non sia stato prima dimostrato.

Ora, le ipotesi stabilite esplicitamente da Euclide, non contengono esse assolutamente nulla intorno alle ipotesi di fatto di cui egli nei citati luoghi, e specialmente nella proposizione 12, si mostra pienamente consapevole? I postulati certamente no; ma, come vedemmo, la linea di demarcazione tra postulati e definizioni non è così netta da autorizzare si cerchi soltanto fra i primi. Di più è chiaro che Euclide può rinvenire l'autorizzazione ad usare queste ipotesi nell'aver egli detto essere un cerchio una figura contenente il proprio centro, giacchè da ciò emerge che esso taglierà in due punti una retta sufficientemente prolungata se essa ha il proprio centro da una parte di questa retta e passa per un punto posto dall'altra parte e altrettanto farà per un'altra circonferenza se questa unisce un punto interno ad uno esterno. Del resto si osservi che in certi casi si può dimostrare analogamente l'intersecarsi di rette senza invocare il postulato 5°, tenendo conto del fatto che i contorni di poligoni limitano pure delle aree non estendentisi all'infinito. Di tale circostanza fa uso Euclide in I, 21.

Ci manca ancora una spiegazione dell'esistenza tra i postulati dell'asserzione dell'eguaglianza di tutti gli angoli retti. Dagli assiomi scaturisce che tutti gli angoli sono eguali quando sono congruenti, e soltanto allora, onde quell'asserzione equivale perfettamente all'altra: tutti gli angoli retti sono congruenti. Siccome un angolo retto (nella Def. 10) è caratterizzato dalla proprietà di essere eguale al proprio adiacente, così quel postulato dice in sostanza che l'angolo oggi da noi chiamato *piatto* ha una grandezza determinata, ossia che il prolungamento di una retta al di là di un estremo è determinato *univocamente*. Una piena conferma che appunto questo devesi intendere si ha osservando che quel postulato è in fatto applicato in questo senso nella dimostrazione del teorema I, 14.

Per conseguenza il postulato 4° è un complemento al 2° dal momento che dice essere univoca la determinazione del prolungamento di una retta; ad esso dunque competeva un posto fra i postulati e non fra gli assiomi. Il lettore moderno non avrebbe avvertito la mancanza di quel postulato, perchè egli, essendo abituato a vedere tenuto conto del numero delle soluzioni, avrebbe ritenuto che l'univocità fosse già inclusa nel postulato 2°. Ma, messo ora in quest'ordine di idee, egli avvertirà tosto l'assenza di un altro postulato, di quello cioè che afferma anche l'univocità della determinazione della retta insegnato dal 1° postulato. Di tale univocità Euclide fa uso esplicitamente nella proposizione I, 4 ove egli, nel corso della dimostrazione, adopera come argomento che « due rette non possono includere alcuno spazio »; ma quest' asserzione, che equivale a dire essere univoca la retta determinata dal 1° postulato, non si trova tra le fatte ipotesi. In ciò vi è indubbiamente un'incoerenza. Essa venne notata fin dall'antichità e suggerì agli editori di includere l'ipotesi esplicitamente applicata in I, 4 o — probabilmente dapprima — fra i postulati o fra gli assiomi. Tale nuovo postulato dice poi anche essere univoca la determinazione di un punto data dal 5º postulato come intersezione di due rette.

Al contrario non fa mestieri supporre l'univocità della determinazione di un cerchio mediante centro e raggio insegnati dal 3ª postulato. Giacchè qui si può far uso ancora dell'essere il cerchio nelle definizioni di Euclide determinato più completamente della retta. Perciò Euclide è in grado di dimostrare, nei teoremi III, 5 e 6, che due cerchi concentrici non possono tagliarsi o secarsi, che quindi il completo luogo geometrico dei punti aventi da un dato punto la stessa distanza che ha un altro punto, consta soltanto di *una* curva chiusa, che in altri termini al 3º postulato non corrisponde che *un* cerchio.

I postulati 1º, 2º, 4º e 5º di Euclide, completati dall'ipotesi, applicata nella proposizione I, 4, che il primo postulato dia una determinazione univoca, e da un'altra ipotesi che vedremo contenuta nel 7º assioma, esprimono tutte le proprietà della retta usate nei fondamenti della geometria. Come vedremo Euclide ha così quasi senza avvedersene stabilite nello stesso tempo le proprietà fondamentali del piano. La definizione di piano data esplicitamente (I, 7) è altrettanto insignificante di quella di retta. Il piano è ancora menzionato nelle definizioni I, 8 e 15, ove è detto che i lati di un angolo stanno nello stesso piano e che il cerchio è una figura piana. Maggiore importanza ha il fatto che nei postulati proposti è tacitamente supposto che tutto accada in un medesimo piano, altrimenti il 5º postulato sarebbe proprio privo di senso. Ora la proprietà attribuita al piano, specialmente dai postulati 1º e 2º, consiste in ciò che esso contiene qualunque retta passante per due suoi punti nonchè il prolungamento di essa. Ove Euclide l'avesse stabilita espressamente avrebbe ottenuto un solido fondamento per le tre proposizioni dell'XI libro che dicono che una retta parzialmeute posta in un piano non può mai uscire da esso, che due rette segantisi stanno in un piano (e lo determinano) e che la linea d'intersezione di due piani è una retta; egli invece congegna alcune altre dimostrazioni, di cui quella per la proposizione XI, 1 suppone l'esattezza della proposizione XI, 2, la quale a sua volta è basata sopra la XI, 1. Dal punto di vista logico, come anche per la forma e pei principî fondamentali, la trattazione della stereometria in Euclide è assai inferiore alla trattazione della planimetria, del che noi troveremo un esempio ancora più significante parlando degli assiomi; tuttavia vedremo che, malgrado questa deficienza, i matematici greci conoscevano i teoremi e le operazioni stereometriche in un ambito molto considerevole.

***

Mentre noi, trattando delle definizioni e dei postulati, per avere un ragguaglio esatto delle ipotesi che le une e gli altri esprimevano, dovemmo in parte ricorrere alle applicazioni che Euclide ne fa nelle sue proposizioni, all'opposto quegli Assiomi del I libro, la cui autenticità non può essere revocata in dubbio e di cui pertanto noi esclusivamente ci occuperemo, cioè gli assiomi 1-3 e 7-8 (*), danno notizia in modo breve quanto chiaro dei fondamenti necessarî all'applicazione dei concetti di eguaglianza e diseguaglianza alle grandezze in generale ed alle grandezze geometriche in particolare. Il primo contributo al concetto di eguaglianza è dato nell'assioma 1, il quale dice: Le quantità che sono eguali ad una medesima quantità sono fra loro eguali. La presenza della parola « eguale » nella definizione del concetto di eguaglianza non annienta il valore di tale definizione, come emerge fra l'altro da ciò che nella definizione inclusa nell'assioma non è lecito surrogare la parola « disuguale » con « uguale ». Essa però non è sufficiente a porgere un concetto di grandezze suscettibile di applicazione. A tale scopo fa mestieri aggiungere che una quantità non si altera dividendola in parti e poi riunendo tutte le parti ottenute. Ciò è espresso dagli assiomi 2 e 3, i quali dicono che aggiungendo o togliendo da cose eguali delle cose eguali si ottengono cose eguali. Inoltre, quando si vuol considerare anche la diseguaglianza, bisogna aggiungere che si ottiene qualche cosa di più piccolo di una quantità se non si prendono tutte le parti in cui questa si è divisa; è quanto dice l'assioma 8: il tutto è maggiore di una parte. È così data anche una definizione dell'addizione e della sottrazione di grandezze generali ed è detto che l'ordine degli addendi non ha influenza sulla somma. Osserviamo che il concetto di grandezza in un'aritmetica moderna (**) è definito così: « Per quelle proprietà delle cose che non mutano riunendo le loro parti in ordine differente dal primitivo, ma si perdono se alcune delle parti sono tolte, si dice che le cose hanno grandezza », e che questa definizione esprime esattamente quanto gli assiomi citati, i quali anzi hanno la prerogativa di definire un po' più direttamente che cosa è l'eguale, il maggiore o il minore.

Il concetto di grandezza deve venire completato affinchè ne sia possibile l'applicazione a speciali categorie di grandezze, quali sarebbero le grandezze geometriche, i pesi ecc. ed anche alle pure grandezze numeriche astratte. Euclide, pel quale la grandezza geometrica coincide con la grandezza astratta — giacchè essa, nell'algebra geometrica, serve a rappresentare grandezze di qualunque specie, anche numeri — è costretto a dare anzitutto dei contrassegni per *l'eguaglianza delle grandezze geometriche;* gli è quello che egli fa nel 7° assioma del I libro, del quale noi parleremo fra un momento. Intanto notiamo che nel V libro è esposta una diretta rappresentazione delle grandezze astratte mediante rapporti ed insegnati anche i caratteri dell'eguaglianza e della diseguaglianza. I rapporti all'*unità* sono numeri nel significato moderno e generale di questa parola. Ma l'unità non è introdotta che nel VII libro ed applicata poi come misura delle grandezze ad essa commensurabili. Le ipotesi relative verranno da noi esaminate assieme al resto di quanto contengono questi libri.

Nell'assioma 7° del I libro — a cui noi ritorniamo dopo questo sguardo

(*) *Euclidis Elementa;* ed. Heiberg. Lipsiae, 1883-88.

(**) Julius Petersen, *Arithmetik og Algebra til Skolebrug.* — Kjöbenhavn, 1879, p. 3.

ad una determinazione delle grandezze differenti dalla geometrica — è detto essere eguali le grandezze che sono coincidenti (congruenti) o possono ridursi a coincidere. Questo carattere distintivo dell'eguaglianza geometrica precede naturalmente quello della diseguaglianza contenuto nell'assioma 8° e che non esige alcun speciale complemento per essere applicato a grandezze geometriche. Nell'assioma 7° Euclide addita con grande sicurezza ciò che sarà sempre punto di partenza di ogni ricerca sulle *grandezze* geometriche. Si noti che la congruenza s'incontra già nella misurazione pratica la quale in fondo consiste nell'enumerare in ciò che dev'essere misurato una serie di parti eguali all'unità di misura. Inoltre essa trovasi tanto nell'edificio geometrico di Euclide come in tutti i posteriori che trattano di grandezze geometriche; infatti sempre si prendono le mosse dal fatto che certe grandezze sono eguali per essere coincidenti e diseguali perchè una di esse è una parte dell'altra, ovvero eguale ad una parte dell'altra. Appunto tale procedimento viene applicato da Euclide nel I libro per dimostrare quali relazioni intercedano fra l'eguaglianza o diseguaglianza di lati e angoli dello stesso triangolo o di triangoli differenti. I risultati ottenuti vengono combinati colle ipotesi generali sulle grandezze; egli anzi si industria ad applicare il meno possibile il principio geometrico specifico della eguaglianza; così nella proposizione I, 26 non adopera direttamente la sovrapposizione per dimostrare che se due triangoli hanno eguali una base e i due angoli adiacenti avranno eguali anche gli altri lati, ma deduce questa proposizione per assurdo dai casi di eguaglianza di triangoli già trattati.

Riguardo a rette ed angoli l'eguaglianza coincide con la congruenza (sovrapponibilità). Invece per linee spezzate, aree e volumi, soltanto dopo avere dimostrata l'eguaglianza per congruenza, si è in grado di dimostrare l'eguaglianza senza congruenza coll'aiuto di un'argomentazione fondata sopra le ipotesi generali intorno alle grandezze: ciò ad esempio è fatto in I, 35 ove è dimostrata l'eguaglianza di parallelogrammi aventi la stessa base e la stessa altezza. Alle grandezze delle linee curve e delle superficie da esse limitate, nonchè alla grandezza della maggior parte dei volumi non si può giungere che con passaggi al limite che venivano dagli antichi eseguiti mediante il metodo di esaustione ed esigono delle nuove ipotesi. Lo vedremo trattando del XII libro di Euclide e dei lavori di Archimede.

Per converso dobbiamo subito osservare che il modo adoperato da Euclide per applicare alla geometria dello spazio il postulato 7° ha una menda gravissima. Essa dipende dal fatto che nella stereometria euclidea si cerca invano *la distinzione fra eguaglianza e simmetria;* tuttavia è facile riconoscere che Euclide non ritiene per eguali (sovrapponibili) due figure simmetriche. Giacchè in tal caso egli avrebbe ritenuto di possedere nel 7° assioma un fondamento sufficiente alla determinazione dei volumi. Invece, al posto di esso, egli stabilisce una nuova ipotesi che può servire tanto per figure eguali quanto per simmetriche. Infatti nella 10ª definizione del libro XI vengono definite per *eguali e simili* due figure solide limitate dallo stesso numero di figure piane eguali e simili. Tale definizione racchiude, oltre una denominazione, una ipotesi geometrica, un assioma dunque, quello cioè che dice aver tali figure il medesimo volume (*). Esso è applicato nella proposizione XI, 29 ove è dimostrato essere eguali i parallelepipedi di egual base ed eguale altezza ed inoltre nella XI, 28 ed è dedotto da ciò essere eguali i due prismi triangolari di cui consta un parallelepipedo. Ora si sa che i prismi che nella prima dimostrazione vengono trasportati sono eguali e che i prismi triangolari dell'ultima proposizione possono essere trasformati in prismi eguali distribuendone opportunamente le parti. Gli è quanto Euclide non può avere osservato; giacchè allora l'introduzione di un nuovo principio per l'eguaglianza dei solidi sarebbe stata superflua, cosa contraria all'ordinario suo modo di procedere.

L'assioma 7º, considerato nelle applicazioni surriferite, non ha somministrato che un carattere dell'eguaglianza geometrica o, se meglio piace, una definizione di questa; comunque, è ivi inclusa una vera ipotesi geometrica, ossia un assioma di grande importanza. Esso afferma potersi parlare in genere di figure eguali (sovrapponibili), cioè di *trasporto di figure* in altre posizioni dello spazio. In forza dell'assioma di Euclide le *grandezze* geometriche determinano tutto quello che resta invariato durante un tale trasporto. In che cosa consista tale movimento non viene però in alcun modo dichiarato, anzi di ciò non viene nemmeno fatto cenno nell'assioma; però dalle applicazioni emerge che si deve intendere il trasporto materiale noto pei corpi fisici detti invariabili.

Se noi prima abbiamo detto che l'assioma I, 7 è necessario a caratterizzare pienamente una retta, pensavamo appunto a questo che Euclide, ad esempio nella dimostrazione dei teoremi sull'eguaglianza, adopera esplicitamente la presupposizione che la retta non si alteri per un movimento.

Come potevasi prevedere i capitoli veramente originali dell'opera dello Zeuthen sono quelli che concernono la matematica de' Greci, la quale fu sino a poco fa il campo di studi da lui preferito; e val la pena di notare come egli, dopo averla esaminata nel suo stato di floridezza per determinare a quali doti essa dovette la facoltà di riuscir vincitrice in tante e così memorabili battaglie, cerca anche i germi della malattia che la condusse a perire, arriva anzi a farne una diagnosi soddisfacente: e così adempie ad uno dei precipui cômpiti dello storico della scienza, quello cioè di determinare le ragioni della transitorietà di certi metodi.

E qui facciamo punto; non senza però avere nuovamente raccomandata l'opera dello Zeuthen, tanto ai cultori della storia delle

(*) Cauchy dimostrò che in fatto tali figure sono sempre eguali o simmetriche.

matematiche, quanto ai professori inclini ad introdurre un po' di elemento storico e critico nella trattazione della geometria, indotti a ciò dalla persuasione di ridurlo meno arido e più vivace, epperò di rendere più facile il raggiungimento del fine supremo di qualsiasi insegnamento, che è, non soltanto di far apprendere, ma anche di far amare la scienza.

Genova, 25 ottobre 1895.

SULLE FRAZIONI CONTINUE NUMERICHE

Nella presente Nota richiameremo rapidamento alcune proposizioni, che d'ordinario non sono date con chiarezza e rigore sufficienti, e ne dedurremo alcune formule utili (V. 11, ...). Daremo una nuova proposizione molto semplice colla quale si può riconoscere se una data frazione continua ad elementi positivi sia convergente; e ne daremo un'altra, anch'essa nuova ed importante, con la quale si può decidere in molti casi se una frazione continua convergente abbia valor razionale od irrazionale (V. 15, 17, 20, ...).

Definizioni e Trasformazioni.

1. Diremo *catena* di più frazioni date in ordine assegnato la espressione indicante che devesi aggiungere l' ultima frazione al denominatore della penultima, il risultato ottenuto al denominatore della terz' ultima e così via fino ad aver collegate tutte le frazioni date; e diremo valore della catena il risultato, che s' ottiene eseguendo le operazioni con essa indicate.

Dicesi n^{ma} *componente d'una catena* la n^{ma} delle frazioni colle quali la medesima è formata.

2. Dicesi *frazione continua* ogni espressione indicante che, essendo date infinite frazioni ordinarie in ordine assegnato, si vogliono considerare i valori della prima frazione data, della catena delle prime due, di quella delle prime tre, di quella delle prime quattro e così via.

Diremo componente n^{ma} d'una frazione continua la n^{ma} delle frazioni colle quali la medesima è formata; e diremo n^{ma} *catena d'una frazione continua* la catena delle sue prime n componenti. Diremo *elementi* i numeratori ed i denominatori delle componenti.

Diremo *valori d'una frazione continua* i limiti (*), se ve ne siano, dei valori delle sue catene. Diremo che una frazione continua è *insignificante*, od è *monovalente*, *bivalente*, *trivalente*, ecc., oppure è *indeterminata* secondo che non abbia valori, o ne abbia uno, due, tre, ecc., oppure abbia infiniti valori. Una frazione continua si dice *convergente*, quando è monovalente.

3. La frazione continua, che ha per componenti

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ \frac{a_4}{b_4},\ \ldots\ldots,$$

si indica in uno qualunque dei seguenti modi:

$$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\ldots}}} \qquad \frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\ldots.$$

$$\left(\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\ \frac{a_4}{b_4},\ \ldots\ldots\right)$$

$$\frac{a_1}{b_1+}\,\frac{a_2}{b_2+}\,\frac{a_3}{b_3+}\ldots\ldots,\quad \frac{a_1}{b_1}\dot{+}\frac{a_2}{b_2}\dot{+}\frac{a_3}{b_3}\dot{+}\ldots\ldots$$

4. Dalle equivalenze letterali

$$\frac{a}{b+\frac{c}{d}}=\frac{ha}{hb+\frac{hc}{d}},\quad b+\frac{c}{d}=b-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{-c}{c+d}}$$

segue immediatamente che:

Non s'altera il valore d'una catena di frazioni, se si moltiplicano per uno stesso numero i due termini d'una componente ed il numeratore della successiva.

Non s'altera il valore d'una catena di frazioni, se in una componente si toglie 1 al denominatore, nella successiva si aumenta il denominatore del numeratore e mutasi segno al numeratore, e fra le due s'interpone la nuova componente $\frac{1}{1}$.

(*) F. F. Giudice: *Sulle successioni*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo; Tomo V, 1891, pag. 280.

Per le catene di frazioni sussistono dunque le notevoli *formule di trasformazioni:*

$$\text{I)} \qquad \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right) = \left(\frac{c_1 a_1}{c_1 b_1}, \frac{c_1 c_2 a_2}{c_2 b_2}, \ldots, \frac{c_{n-1} c_n a_n}{c_n b_n}\right)$$

$$\text{II)} \qquad \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_m}{b_m}, \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}, \frac{a_n}{b_n}\right) =$$
$$\left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_{m-1}}{b_{m-1}}, \frac{a_m}{b_m - 1}, \frac{1}{1}, \frac{-a_{m+1}}{b_{m+1} + a_{m+1}}, \frac{a_{m+2}}{b_{m+2}}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right).$$

Frazioni continue generali.

5. Per la I) si ha che: Se in una catena di frazioni si sopprime il denominatore dell'ultima componente e si moltiplicano per tal denominatore i due termini della penultima componente, s'ottiene una nuova catena, che ha una componente di meno ed è equivalente alla data.

Se si sopprime il denominatore dell' ultima componente della catena n^{ma} d'una frazione continua e si moltiplicano per tal denominatore i due termini della penultima componente, indi si fa analoga operazione sulla nuova catena, poi ancora sulla nuova e così via, si perviene finalmente ad una frazione ordinaria, che tal quale risulta dicesi *ridotta* n^{ma} della frazione continua ed è equivalente alla n^{ma} catena.

6. Teorema. *Ciascuno dei due termini della n^{ma} ridotta s'ottiene addizionando i termini omonimi delle ridotte antiprecedente e precedente dopo d' averli rispettivamente moltiplicati per numeratore e denominatore della componente n^{ma}.*

Dimostrazione. Se sono dati i numeri

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\,; \qquad b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,$$

le equazioni

$$\text{III)} \qquad \begin{cases} a_1 u_0 \;\;\; - b_1 u_1 = u_2 \\ a_2 u_1 \;\;\; - b_2 u_2 = v_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n u_{n-1} - b_n u_n = u_{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

determinano $u_2, u_3, \ldots$ in funzione delle u_0, u_1, che si possono lasciar arbitrarie. Trasformando ciascuna di queste equazioni per mezzo della precedente, si trova infatti:

$$-u_3 = a_1 b_2 u_0 - (a_2 + b_1 b_2) u_1$$

$$u_4 = (a_1 a_3 + a_1 b_2 b_3) u_0 - (a_3 b_1 + a_2 b_3 + b_1 b_2 b_3) u_1$$

. . . .

cioè si trova in generale:

IV) $$(-1)^{n+1} u_{n+1} = \lambda_n u_0 - \mu_n u_1$$

dove λ_n e μ_n sono formati solamente coi numeri

$$a_1, a_2, \ldots, a_n; \quad b_1, b_2, \ldots, b_n.$$

Dividendo per $a_n u_n$ la n^{ma} delle III) e trasformando convenientemente il risultato, si trova:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{a_n}{b_n + \frac{u_{n+1}}{u_n}}$$

onde si ha:

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{a_1}{b_1 + \frac{u_2}{u_1}}, \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{a_2}{b_2 + \frac{u_3}{u_2}}, \ldots$$

Trasformando ciascuna delle prime n di queste relazioni per mezzo della successiva, si ottiene:

V) $$\frac{u_1}{u_0} = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots \cfrac{a_n}{b_n + \cfrac{u_{n+1}}{u_n}}}}.$$

Questo risultato prova che, se le arbitrarie u_0 ed u_1 si fissano in modo che sia nulla u_{n+1}, il rapporto $u_1 : u_0$ dà il valore della catena delle n frazioni

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}.$$

Indicheremo ciò scrivendo:

$$\left(\frac{u_1}{u_0}\right)_{n_{n+1}=0} = \left(\frac{a_1}{a_1}, \frac{a_2}{a_2}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}, \frac{a_n}{b_n}\right)$$

ma la IV) dà:

$$\left(\frac{u_1}{u_0}\right)_{n_{n+1}=0} = \frac{\lambda_n}{\mu_n}$$

onde ne segue essere:

$$\text{VI)}\qquad \frac{\lambda_n}{\mu_n} = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n}}}}.$$

Osserviamo ora che la n^{ma} delle equazioni III) e la IV) danno:

$$a_n(\lambda_{n-2}u_0 - \mu_{n-2}u_1) + b_n(\lambda_{n-1}u_0 - \mu_{n-1}u_1) = \lambda_n u_0 - \mu_n u_1.$$

Questa è dunque un'equivalenza per valori arbitrarii delle u_0, u_1; debbono quindi essere eguali i coefficienti di u_0, come pure quelli di u_1, nei due membri cioè dev'essere:

$$\text{VII)}\qquad \begin{cases} \lambda_n = a_n\lambda_{n-2} + b_n\lambda_{n-1} \\ \mu_n = a_n\mu_{n-2} + b_n\mu_{n-1}. \end{cases}$$

Ma dalla VI) e da quanto precede segue che λ_n e μ_n non sono altro che numeratore e denominatore della ridotta n^{ma} della frazione continua

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots}}$$

per cui le VII) provano la verità del teorema.

7. Si riconosce immediatamente che la *legge di formazione delle ridotte*, che è espressa dal teorema dimostrato, vale già per la prima, se ad essa s'antepongano le *ridotte virtuali* $\frac{1}{0}$ e $\frac{0}{1}$. Per introdurre le ridotte virtuali anche nella scrittura della frazione continua, basta osservare che è identicamente:

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots}}} = \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots}}}}$$

Per le ridotte virtuali sarebbe così:

$$\lambda_{-1} = 1,\ \mu_{-1} = 0;\quad \lambda_0 = 0,\ \mu_0 = 1.$$

8. Teorema. *Il determinante dei termini delle ridotte* (n — 1)^{ma} *ed* n^{ma} *è uguale al prodotto dei numeratori delle prime* n *componenti mutati di segno: quello dei termini delle ridotte* (n — 2)^{ma} *ed* n^{ma} *è uguale al prodotto dei numeratori delle prime* n — 1 *componenti mutati di segno per il denominatore della componente* n^{ma}.

Dimostrazione. Se si pone

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \lambda_{n-1} & \lambda_n \\ \mu_{n-1} & \mu_n \end{vmatrix}$$

e si tien conto della VII), si riconosce subito essere:

$$\Delta_n = -a_n \Delta_{n-1}, \qquad \begin{vmatrix} \lambda_{n-2} & \lambda_n \\ \mu_{n-2} & \mu_n \end{vmatrix} = b_n \Delta_{n-1}$$

per cui, essendo $\Delta_1 = \lambda_0 \mu_1 - \lambda_1 \mu_0 = -a_1$, è

$$\Delta_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \cdot \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} \cdots \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \cdot \Delta_1 = (-a_n)(-a_{n-1}) \ldots (-a_2)(-a_1)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_{n-2} & \lambda_n \\ \mu_{n-2} & \mu_n \end{vmatrix} = b_n(-a_{n-1})(-a_{n-2}) \ldots (-a_2)(-a_1).$$

Il teorema è così dimostrato, cioè si ha:

$$\text{VIII)} \quad \begin{cases} \lambda_{n-1}\mu_n - \lambda_n \mu_{n-1} = (-1)^n \; a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n. \\ \lambda_{n-2}\mu_n - \lambda_n \mu_{n-2} = (-1)^{n-1} \; a_1 a_2 \ldots a_{n-1} b_n. \end{cases}$$

9. Dalle ultime formule deducesi immediatamente:

$$\text{IX)} \quad \begin{cases} \dfrac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}} - \dfrac{\lambda_n}{\mu_n} = \dfrac{(-1)^n}{\mu_{n-1}\mu_n} \, a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n \\ \dfrac{\lambda_{n-2}}{\mu_{n-2}} - \dfrac{\lambda_n}{\mu_n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\mu_{n-2}\mu_n} \, a_1 a_2 \ldots a_{n-1} b_n \end{cases}$$

e da queste e dalla identità

$$k_n = k_1 + (k_2 - k_1) + \ldots + (k_{n-1} - k_{n-2}) + (k_n - k_{n-1}$$

segue subito:

$$\text{X)} \begin{cases} \dfrac{\lambda_n}{\mu_n} = \dfrac{a_1}{b_1} - \dfrac{a_1 a_2}{\mu_1 \mu_2} + \dfrac{a_1 a_2 a_3}{\mu_2 \mu_3} - \dfrac{a_1 a_2 a_3 a_4}{\mu_3 \mu_4} + \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{a_1 a_2 \ldots a_n}{\mu_{n-1}\mu_n} \\ \dfrac{\lambda_{2n+1}}{\mu_{2n+1}} = \dfrac{\lambda_1}{\mu_1} - \dfrac{a_1 a_2 b_3}{\mu_1 \mu_3} - \dfrac{a_1 a_2 a_3 a_4 b_5}{\mu_3 \mu_5} - \ldots - \dfrac{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{2n} b_{2n+1}}{\mu_{2n-1}\mu_{2n+1}} \\ \dfrac{\lambda_{2n}}{\mu_{2n}} = \dfrac{\lambda_2}{\mu_2} + \dfrac{a_1 a_2 a_3 b_4}{\mu_2 \mu_4} + \dfrac{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 b_6}{\mu_4 \mu_6} + \ldots + \dfrac{a_1 a_2 \ldots a_{2n-1} b_{2n}}{\mu_{2n-2}\mu_{2n}}. \end{cases}$$

10. Da quanto fu detto nel precedente numero si rileva subito la opportunità di porre la seguente definizione: Diremo *serie equipollente*, *serie dispari* e *serie pari* della frazione continua $\dfrac{a_1}{b_1 +} \dfrac{a_2}{b_2 +} \dfrac{a_3}{b_3 +} \ldots$ le

$$\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1 a_2}{\mu_1 \mu_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{\mu_2 \mu_3} - \frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{\mu_3 \mu_4} + \dots\dots$$
$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} - \frac{a_1 a_2 b_3}{\mu_1 \mu_3} - \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 b_5}{\mu_3 \mu_5} - \dots\dots$$
$$\frac{\lambda_2}{\mu_2} + \frac{a_1 a_2 a_3 b_4}{\mu_2 \mu_4} + \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 b_6}{\mu_4 \mu_6} + \dots\dots$$

11. Dalle formule VII) deducesi:

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} = b_n + a_n : \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n-2}}; \quad \frac{\mu_n}{\mu_{n-1}} = b_n + a_n : \frac{\mu_{n-1}}{\mu_{n-2}};$$
$$\frac{\lambda_n + \mu_n}{\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}} = b_n + a_n : \frac{\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}}{\lambda_{n-2} + \mu_{n-2}}$$

e da queste, essendo $\lambda_0 = 0$, $\mu_0 = 1$, $\lambda_1 = a_1$, $\mu_1 = b_1$, segue immediatamente:

$$\text{XI)} \begin{cases} \lambda_n = \left(b_n + \frac{a_n}{b_{n-1}+} \cdots \frac{a_4}{b_3+} \frac{a_3}{b_2}\right) \cdots \left(b_3 + \frac{a_3}{b_2}\right) b_2 a_1 \\ \mu_n = \left(b_n + \frac{a_n}{b_{n-1}+} \cdots \frac{a_3}{b_2+} \frac{a_2}{b_1}\right) \cdots \left(b_3 + \frac{a_3}{b_2+} \frac{a_2}{b_1}\right)\left(b_2 + \frac{a_2}{b_1}\right) b_1 \\ \lambda_n + \mu_n = \left(b_n + \frac{a_n}{b_{n-1}+} \cdots \frac{a_3}{b_2+} \frac{a_2}{b_1+a_1}\right) \cdots \left(b_3 + \frac{a_3}{b_2+} \frac{a_2}{b_1+a_1}\right)\left(b_2 + \frac{a_2}{b_1+a_1}\right)(b_1 + a_1). \end{cases}$$

12. Dalla prima formula IX) deducesi.

$$\frac{\lambda_n}{\mu_n} - \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}} = - \frac{a_n \mu_{n-2}}{\mu_n} \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}} - \frac{\lambda_{n-2}}{\mu_{n-2}}\right)$$

ossia, per la seconda delle VII) e la seconda delle XI):

$$\left(\frac{\lambda_n}{\mu_n} - \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}}\right) : \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}} - \frac{\lambda_{n-2}}{\mu_{n-2}}\right) =$$
$$(-1) : \left[1 + \frac{b_n}{a_n}\left(b_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{b_{n-2}+} \dots \frac{a_3}{b_2+} \frac{a_2}{b_1}\right)\right]$$

e da queste segue immediatamente:

$$\text{XII)} \quad \frac{(-1)^{n-1}}{\frac{\lambda_n}{\mu_n} - \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}}} = \left[1 + \frac{b_n}{a_n}\left(b_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{b_{n-2}+} \cdots \frac{a_3}{b_2+} \frac{a_2}{b_1}\right)\right] \dots$$
$$\dots \left[1 + \frac{b_3}{a_3}\left(b_2 + \frac{a_2}{b_1}\right)\right]\left(1 + \frac{b_2}{a_2} b_1\right) \frac{b_1}{a_1}.$$

13. Teorema. *Se le quantità* u_0, u_1 *sono date e le* u_2, u_3, u_4, ... *sono determinate dalle equazioni* III), *perchè la frazione continua*:

$$\frac{a_1}{b_1+} \frac{a_2}{b_2+} \frac{a_3}{b_3+} \dots\dots$$

abbia per unico valore $u_1 : u_0$, *è necessario e sufficente che sia*

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}} - \frac{\lambda_n}{\mu_n}\right) : \left(1 + \frac{\mu_n u_n}{\mu_{n-1} u_{n+1}}\right) = 0$$

dove λ_n *e* μ_n *sono numeratore e denominatore della* n^{ma} *ridotta della frazione continua.*

Dimostrazione. Da quanto fu detto al num. 6, e specialmente dalla V), segue essere:

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\lambda_{n-1} u_{n+1} + \lambda_n u_n}{\mu_{n-1} u_{n+1} + \mu_n u_n}$$

per cui è:

$$\frac{u_1}{u_0} - \frac{\lambda_n}{\mu_n} = \frac{u_{n+1}(\lambda_{n-1}\mu_n - \lambda_n \mu_{n-1})}{\mu_n(\mu_{n-1} u_{n+1} + \mu_n u_n)} \frac{\dfrac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}} - \dfrac{\lambda_n}{\mu_n}}{1 + \dfrac{\mu_n u_n}{\mu_{n-1} u_{n+1}}}$$

da cui si vede appunto che $\frac{\lambda_n}{\mu_n}$ tende all'unico limite $u_1 : u_0$, che è quindi unico valore della frazione continua, allora e solo allora che la condizione enunciata nel teorema è soddisfatta.

(Continua).

F. Giudice.

TEMI DI MATEMATICA DATI PER L'ESAME DI MATURITÀ
IN GINNASI E SCUOLE REALI SUPERIORI DELL'AUSTRIA-UNGHERIA
alla fine degli anni scolastici 1891-92 e 1892-93.

(Continuazione: V. pag. 27, 55, 97, 148, 184dell'anno IX e 25, 58 dell'anno X).

Budweis: *i. r. Ginnasio sup. ted.* — 1. In un vaso conico col vertice in giù e coll'asse verticale l'acqua contenutavi ha un altezza $h = 37$ *cm.* e una superficie col diametro $d = 44$ *cm.*; dopo immersavi una palla di sasso l'acqua s'eleva di $a = 4$ *cm.*; qual' è il diametro della palla?

2. Trovare x dall'equazione $2 + 3 \cot 2x = 4 \operatorname{tg} x$.

3. Si costruisca il cerchio $x^2 + y^2 = 25$ e la parabola $3y^2 = 16x$ e si calcoli la superficie delle parte comune.

Kremsier: *i. r. Ginnasio sup. ted.* — 1. $6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6 = 0$.

2. Qualcuno paga ad una banca 300 fr. al principio di ogni anno durante 10 anni per procurarsi il diritto ad una rendita che duri per 20 anni cominciando colla fine dell' 11° anno. Quanto importa questa rendita? (4 %).

3. Una sfera viene tagliata da un piano. Qual' è la superficie di ciaschedano dei due segmenti sferici, sapendo che il primo è alto 3 *dm.* ed ha un angolo al centro di $38^{\circ}\,35'\,18''$?

4. Dal punto $x_1 = 3$, $y_1 = 0$ si devono guidare delle tangenti all'iperbole $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$, determinare le equazioni di queste tangenti e le coordinate di contatto per quel punto di contatto che ha le coordinate positive.

Klagenfurt: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. $3^{y+2} = \sqrt[x+1]{9^{8-x}}$, $2^{y+2} = \sqrt[x-1]{8^{5-x}}$.

2. Da una via retta si diramano alla distanza di 1,5 *km.* due vie rette, la prima a sinistra sotto un angolo di 30°, e l'altra sotto un angolo di 60° a destra; sulla prima si arriva dopo 4 *km.* ad un luogo *A*, sulla seconda dopo 2,5 *km.* ad un luogo *B*. I due luoghi sono congiunti da una via retta; quanto è lunga questa?

3. Per il fuoco situato sulla parte positiva dell'asse delle x è condotta una corda nell'ellisse $16\,x^2 + 25\,y^2 = 400$, la quale taglia l'asse minore dalla parte negativa per metà. Si trovi l'equazione della corda e della tangente e normale parallela alla stessa.

Pilsen; *i. r. Ginnasio sup. ted.* — 1. Un prestito di 120000 fr. deve venire ammortizzato entro 24 anni. Qual' è la quota annua da pagarsi, se l'interesse viene calcolato al $4\frac{1}{2}\,\%$?

2. Dato lo spigolo alla base a d'una piramide n-gonale regolare e l'angolo γ che fa una faccia laterale colla base, trovarne il volume.

$$(n = 24,\ a = 18{,}7\ m.,\ \gamma = 32^{\circ}\,15'\,10'').$$

3. Si domanda il perimetro e l'area del triangolo i cui lati hanno le equazioni $y = 3\,x - 2$, $y = x + 14$, $y = \frac{1}{3}\,x + \frac{10}{3}$.

Bressanone: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Si domanda quella progressione geometrica nella quale la somma del primo e del settimo termine è 195 ed il quarto termine è 24.

2. Una piramide ottagonale regolare nella quale uno spigolo laterale $a = 64$ *cm.* fa colla base un angolo $\alpha = 74^{\circ}\,42'\,34''$ deve venir fusa in una sfera. Qual' è la superficie della sfera se nella fusione va perduto l'8 %?

3. È data l'equazione di una ellisse $16\,x^2 + 25\,y^2 = 400$. Si devono cercare le equazioni delle tangenti guidate alle estremità del parametro e calcolare gli angoli formati da queste col parametro ed inoltre l'area compresa fra il parametro e l'arco minore dell'ellisse.

Hall: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. $16\,x^2 + 80\,x = 69$; determinare x mediante funzioni goniometriche.

2. Si determini $\sqrt{41}$ per mezzo delle frazioni continue, per mezzo del teorema binominale ed abbreviatamente, ogni volta con 5 decimali esatti.

3. Si determini il volume di una piramide formata da quattro triangoli isosceli congruenti (sfenoide tetragonale), se la base de' triangoli è $= 3$ *dm.* ed il lato $= 5$ *dm.*

4. La differenza di due lati di un triangolo è di 15 *m.*, l'angolo da essi compreso 140^0, il lato opposto 84 *m.*; risolvere il triangolo.

MARBURG: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Gli angoli (in numeri intieri) di un triangolo sono tali che la quinta parte del primo, l'ottava parte del secondo e la tredicesima parte del terzo fanno insieme 21^0. Quali sono i lati del triangolo se $c > b$ e l'area del triangolo è $s = 1\,a$.

2. Costruire e trovare l'equazione di quel cerchio che ha il raggio $r = 5$ e passa per il punto $P\,(5,9)$ e tocca la retta $4\,x + 3\,y + 3 = 0$.

3. In una progressione aritmetica il prodotto dei quattro primi termini è $= -15$, il quoziente del secondo e del terzo termine 3. Quanti termini si devono sommare perchè la somma sia $= 0$?.

UNGARISCH-HRADISCH: *i. r. Ginnasio sup.* —. 1. Qualcuno pone in una banca per 12 anni al principio d'ogni anno 380 f. e leva negli otto anni seguenti alla fine d'ogni anno una somma tale che il suo avere viene consumato. Qual'è questa somma venendo calcolato l'interesse al $4\,\frac{1}{4}\,{}^0/_0$?

2. In un triangolo si ha $a : b = 63 : 52$, l'angolo compreso da questi due lati è $\gamma = 22°\,37'\,10''$ ed il perimetro $p = 70\,m$. Viene domandato il terzo lato, gli altri due angoli, l'area ed i raggi dei circoli inscritto e circostritto.

3. Un triangolo coi lati di 41, 29 e 21 *cm.* ruota attorno ad un'asse parallelo al lato maggiore e distante da questo di 10 *cm.*. Qual'è la superficie ed il volume del corpo di rotazione?

4. Pel vertice della parabola $y^2 = 10\,x$ sono condotte due rette perpendicolari fra loro. La prima ha una costante di direzione $= \frac{15}{8}$. Uniti i due punti d'intersezione della parabola si domanda il punto d'intersezione della congiungente coll'asse della parabola.

TESCHEN: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Da quale altezza sopra il polo Nord della Terra si può ancora vedere quel parallelo del quale ogni grado è lungo 10 *Km.*?

2. Un tale incassa di un capitale di 6827 f. impiegato al $5\,\frac{1}{2}\,{}^0/_0$ alla fine del 9^0 anno ed in ognuno dei successivi 1390 f. Quando il capitale sarà consumato?

3. Quali angoli positivi minori di 360^0 soddisfanno l'equazione

$$2{,}16^{\operatorname{sen}^2\left(45^0 + \frac{x}{2}\right)} + 18 = 15{,}2^{1 + \operatorname{sen} x} ?$$

4. Che distanza ha la tangente ad una estremità del parametro della curva $9\,x^2 - 16\,y^2 = 144$ dall'altro estremo?

MÄHR.-TRÜBAU: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Quali radici comuni hanno le equazioni $x^4 + 4 = 0$ e $x^4 + 5\,x^3 + 10\,x^2 + 10\,x + 4 = 0$ e quali non comuni?

2. Una rendita temporaria di 5000 f., che scade per 20 anni (ogni volta alla fine dell'anno) si deve trasformare in una rendita perpetua, ponendo a base il $4\,{}^0/_0$, che scade alla fine dell'anno.

3. Un punto luminoso è distante di 25 *dm.* dal centro d'una sfera che ha il raggio di 15 *dm.*; qual parte della sua superficie viene da esso illuminata?

4. Qual punto della curva $4\,x^2 + 9\,y^2 = 36$ ha la minima distanza dalla retta $2\,y = x + 7$, e quale la massima?

BRAUNAU: *Ginnasio superiore dei Benedettini.* — 1. Per sostenere le spese di costruzione di un palazzo municipale una città deve assumere un prestito che verrà estinto in 22 anni con 9000 f. annui al $4\,{}^0/_0$. Quanto importa il prestito?

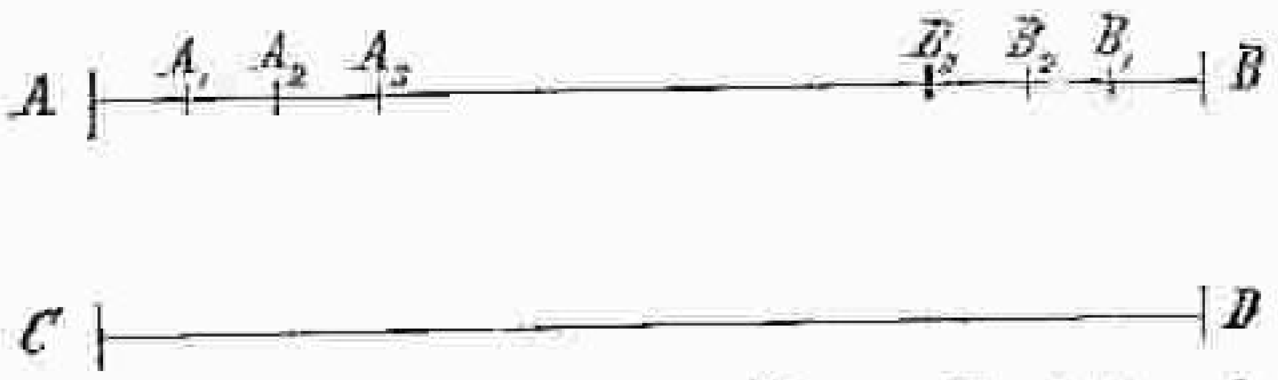
2. L'altura Elisabetta presso Braunau è alta $704\,m$; da quale distanza può essere veduta ancora la sua sommità, considerando la terra come sfera di raggio $= 6377\ Km$?

3. Dati i vertici $(5, -7)$, $(1, 11)$, $(-4, 13)$ di un triangolo calcolare le lunghezze delle mediane e gli angoli formati fra esse.

(Continua).

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Sur l'équivalence de deux portions de droites. — On dit que deux portions de droites AB et CD sont égales quand on peut les appliquer l'une sur l'autre de façon que C coïncide avec A et D avec B. Il n'en résulte pas que CD soit égal à BA; mais on peut le démontrer en s'appuyant sur le postulat suivant qui est d'ailleurs indispensable à tous les points de vue.



Postulat. *Si* A_1 *est un point d'une portion de droite* AB *et si on prend sur le prolongement de* AA_1 *une série de points* A_2, A_3, ... *tels que*

$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots$$

on finira par trouver un point A_n *qui ne soit plus sur la portion de droite* AB.

Ceci dit, supposons que CD soit égal à AB et que, en portant CD sur BA, de façon que le point C coïncide avec le point B, il arrive que le point D tombe en A_1 entre A et B. Alors, comme la portion de droite BA_1 est égal à la portion de droite AA_1B, il y aura entre B et A_1 un point B_1 tel que

$$A_1B_1 = BA_1 = AB.$$

Puis, A_1B_1 étant égal à AB, il y a entre A_1 et B_1 un point A_2 tel que $AA_1 = A_1A_2$, et ainsi de suite indéfiniment: ce qui est en contradiction avec le postulat ci-dessus. Donc, quand on porte CD sur BA de façon que C coïncide avec B, le point D ne peut pas tomber entre B et A; on voit de même qu'il ne peut tomber sur le prolongement de BA. Donc il tombe en A.

Le même raisonnement prouve qu'une portion de droite ne peut être égal à l'une de ses parties. La démonstration subsiste même si on n'admet pas la possibilité de la superposition de deux figures. L. Gérard.

Sul metodo dell'antica scuola giapponese per determinare l'area del cerchio. — Sia dato un circolo di diametro $AB = d$. Si divida AD in $2m$ parti uguali e pei punti di divisione, escluso il centro, si conducano delle corde perpendicolari ad AD. Chiamando queste corde C_1C_1', C_2C_2', C_3C_3', ... e D_1D_1', D_2D_2', D_3D_3', ... a cominciare da quelle più prossime al centro, secondo che si trovano dall'una o dall'altra parte di esso, e tirando D_1C_1, D_2C_2, D_3C_3, ... (parallele ad AB), se $2m = n$ e $\frac{d}{n} = a$, si ha subito

$$b_1^2 = \overline{C_1C_1'}^2 = \overline{D_1C_1'}^2 - \overline{C_1D_1}^2 = d^2 - a^2 = d^2 - \frac{1^2 \cdot d^2}{n^2}$$

$$b_2^2 = \overline{C_2C_2'}^2 = \overline{D_2C_2'}^2 - \overline{C_2D_2}^2 = d^2 - 2^2a^2 = d^2 - \frac{2^2 \cdot d^2}{n^2}$$

. . . .

quindi

$$b_1 = \left(d^2 - \frac{1^2 \cdot d^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = d - \frac{1^2 \cdot d}{2n^2} - \frac{1^4 \cdot d}{8n^4} - \frac{1^6 \cdot d}{16n^6} - \frac{1^8 \cdot 5 \cdot d}{128n^8} \cdots\cdots$$

$$b^2 = d - \frac{2^2 \cdot d}{2n^2} - \frac{2^4 \cdot d}{8n^4} - \frac{2^6 \cdot d}{16n^6} - \frac{2^8 \cdot 5 \cdot d}{128n^8} \cdots\cdots$$

. . . .

Posto $a \cdot b_1 = A_1$, $a \cdot b_2 = A_2$, ... è chiaro che la somma di A_1, A_2, A_3, ..., al crescere indefinitamente di n ha per limite l'area del circolo. Ma

$$\frac{A_1}{d^2} = \frac{b_1}{nd} = \frac{1}{n} - \frac{1^2}{2n^3} - \frac{1^4}{8n^5} - \frac{1^6}{16n^7} - \frac{1^8 \cdot 5}{128n^9} \cdots\cdots$$

$$\frac{A_2}{d^2} = \frac{b_2}{nd} = \frac{1}{n} - \frac{2^2}{2n^3} - \frac{2^4}{8n^5} - \frac{2^6}{16n^7} - \frac{2^8 \cdot 5}{128n^9} \cdots\cdots$$

. . . .

$$\frac{A_1 + A_2 + A_3 + \cdots}{d^2} = \frac{n}{n} - \frac{\Sigma i^2}{2n^3} - \frac{\Sigma i^4}{8n^5} - \frac{\Sigma i^6}{16n^7} - \frac{5\Sigma i^8}{128n^9} \cdots\cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{4n} - \frac{1}{12n^2}$$

$$- \frac{1}{5 \cdot 8} - \frac{1}{16n} - \frac{1}{24n^2} + \frac{1}{240n^4}$$

$$- \frac{1}{7 \cdot 16} - \frac{1}{32n} - \frac{1}{32n^2} - \frac{1}{96n^4} - \frac{1}{672n^6}$$

$$- \frac{5}{9 \cdot 128} - \frac{5}{256n} - \frac{5}{192n^2} + \frac{7}{384n^4} - \frac{7}{576n^6} + \frac{1}{768n^8} \cdots$$

. . . .

quindi

$$\frac{\text{Area circolo}}{d^2} = 1 - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{5 \cdot 8} - \frac{1}{7 \cdot 16} - \frac{5}{9 \cdot 128} \cdots\cdots$$

Ora il primo termine del secondo membro è il numero originale, il 2° la prima differenza, il 3° la seconda differenza e così via.

La prima differenza si ottiene dal numero originale moltiplicando per $\frac{1}{2 \cdot 3}$, la seconda differenza proviene dalla prima moltiplicando per $\frac{3}{4\,.\,5}$ o $\frac{1\,.\,3}{4\,.\,5}$, la 3ª dalla 2ª moltiplicando per $\frac{5}{2\,.\,7}$ o $\frac{3\,.\,5}{6\,.\,7}$, la 4ª dalla 3ª moltiplicando per $\frac{5\,.\,7}{8\,.\,9}$ e così di seguito. Questi fattori sono dunque

$$\frac{1}{2\,.\,3},\ \frac{1\,.\,3}{4\,.\,5},\ \frac{3\,.\,5}{6\,.\,7},\ \frac{5\,.\,7}{8\,.\,9},\ \ldots .$$

e la legge secondo la quale si succedono è evidente.

Facendo i calcoli si trova

$$\frac{\text{area circolo}}{d^2}\left(=\frac{\pi}{4}\right)=0{,}785398163397448309615660 8458\ (^*).$$

Prof. D. Kikuchi.

2ª Nota sul problema del Malfatti. (*Continuazione*, v. pag. 156 del vol. X). — Si risolve ancora il sistema (4) esprimendo i seni e i coseni degli archi x, y, z in funzioni delle loro tangenti; ponendo $\frac{a_0}{d_0}=A_0$, $\frac{a_1}{d_1}=A_1$, $\frac{b_0}{d_0}=B_0$, $\frac{b_1}{d_1}=B_1$, $\frac{c_0}{d_0}=C_0$, $\frac{c_1}{d_1}=C_1$, il detto sistema diviene

$$\begin{aligned} &A_0+A_1\operatorname{tang}x\operatorname{tang}y=\sqrt{(1+\operatorname{tang}^2x)(1+\operatorname{tang}^2y)}\\ (13)\qquad &B_0+B_1\operatorname{tang}y\operatorname{tang}z=\sqrt{(1+\operatorname{tang}^2y)(1+\operatorname{tang}^2z)}\\ &C_0+C_1\operatorname{tang}z\operatorname{tang}x=\sqrt{(1+\operatorname{tang}^2z)(1+\operatorname{tang}^2x)}\end{aligned}$$

Dalle due ultime si ricava linearmente tang z e $\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 z}$; onde eliminando tang z scaturisce la risultante sotto la forma

$$(D_0C_0-D_1B_0)^2=(B_0E_1-C_0E_0)^2+(E_0D_1-E_1D_0)^2;$$

dove i simboli significano $D_0=B_1\operatorname{tang}y$, $D_1=C_1\operatorname{tang}x$, $E_0=\sqrt{1+\operatorname{tang}^2y}$, $E_1=\sqrt{1+\operatorname{tang}^2x}$. Siccome la precedente eguaglianza si scrive pure $(B_0C_0+D_0D_1-E_0E_1)^2=(B_0^2+D_0^2-E_0^2)(C_0^2+D_1^2-E_1^2)$, e la prima delle (13) è identica ad $E_0E_1=A_0+A_1\operatorname{tang}x\operatorname{tang}y$; con la sostituzione dei surriferiti valori conchiuderemo l'eliminata razionale

$$(14)\qquad \begin{aligned}&[B_0C_0-A_0+(B_1C_1-A_1)\operatorname{tang}x\operatorname{tang}y]^2=\\ &[B_0^2-1+(B_1^2-1)\operatorname{tang}^2y]\,.\,[C_0^2-1+(C_1^2-1)\operatorname{tang}^2x],\end{aligned}$$

che unita alla prima delle (13) offre il modo di calcolare le tangenti degli archi x, y.

A causa delle formule $A_0=\dfrac{\cos\left(\frac{p}{2}-a\right)}{\cos\frac{p}{2}}=\cos a+\operatorname{sen}a\operatorname{tang}\frac{p}{2}$, $A_1=$

(*) Abbiamo creduto utile riportare questa semplice valutazione dell'area del circolo, traducendola liberamente dal periodico giapponese: *Tōkyō Sūgaku Butsurigaku Kwai Kiji* (VII, 1895) e ci ripromettiamo di dare in seguito il sunto di un altro lavoro del Professor D. Kikuchi sopra argomento affine. [N. d. R.].

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{p}{2}-a\right)}{\operatorname{sen}\frac{p}{2}} = \cos a - \operatorname{sen} a \cot\frac{p}{2}$$ e delle altre simili B_0, B_1, C_0, C_1, che si deducono da A_0, A_1 per lo scambio di a nelle rispettive lettere b, c troveremo le relazioni

$$\frac{A_1^2-1}{A_0^2-1}=\frac{B_1^2-1}{B_0^2-1}=\frac{C_1^2-1}{C_0^2-1}=-\cot^2\frac{p}{2},\; A_0^2-1=\frac{\operatorname{sen} a}{\cos^2\frac{p}{2}}\operatorname{sen}(p-a),$$

$$(15)\qquad B_0C_0-A_0=\frac{\operatorname{sen}(p-b)}{\cos^2\frac{p}{2}}\operatorname{sen}(p-c),$$

$$B_1C_1-A_1=(B_0C_0-A_0)\cot^2\frac{p}{2},\quad 1+A_0A_1=2\frac{\cos a}{\operatorname{sen} p}\operatorname{sen}(p-a).$$

In virtù di queste l'equazione (14) e la prima della (13) acquistano le forme simmetriche

$$(B_0C_0-A_0)^2\left(1+\cot^2\frac{p}{2}\operatorname{tang} x\operatorname{tang} y\right)^2=$$
$$(B_0^2-1)(C_0^2-1)\left(1-\cot^2\frac{p}{2}\operatorname{tang}^2 x\right)\left(1-\cot^2\frac{p}{2}\operatorname{tang}^2 y\right):$$
$$(\operatorname{tang} x+\operatorname{tang} y)^2=(A_0^2-1)\left(1-\operatorname{tang}^2 x\operatorname{tang}^2 y\cot^2\frac{p}{2}\right)+$$
$$2(A_0A_1+1)\operatorname{tang} x\operatorname{tang} y.$$

Assumendo le incognite ausiliarie $s=\operatorname{tang} x+\operatorname{tang} y$, $w=\operatorname{tang} x\operatorname{tang} y$ e sostituendo le surriferite espressioni dei coefficienti avremo il sistema

$$(16)\qquad \begin{aligned}&\left(1+w\cot^2\frac{p}{2}\right)^2\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}=\left(1+w\cot^2\frac{p}{2}\right)^2-s^2\cot^2\frac{p}{2},\\ &s^2\cos^2\frac{p}{2}=\operatorname{sen} a\operatorname{sen}(p-a)\left[1+2w\cot a\cot\frac{p}{2}-w^2\cot^2\frac{p}{2}\right],\end{aligned}$$

dalla prima equazione viene

$$(17)\qquad s=\left(\operatorname{tang}\frac{p}{2}+w\cot\frac{p}{2}\right)\cos\frac{A}{2},$$

e posto nella seconda questo valore di s ne discenderà la quadrica

$$w^2\left(\operatorname{sen} p\cos^2\frac{p}{2}+\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c\right)-$$
$$w\operatorname{tang}\frac{p}{2}(2\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c\cos a-\operatorname{sen}^2 p)+\operatorname{tang}^2\frac{p}{2}\left(\operatorname{sen} p\operatorname{sen}^2\frac{p}{2}-\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c\right)=0;$$

da cui si traggono le radici

$$(18)\qquad w=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{p}{2}\cdot\frac{2\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c\left(\cos a\pm\operatorname{sen}\frac{A}{2}\right)-\operatorname{sen}^2 p}{\operatorname{sen} p\cos^2\frac{p}{2}+\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c}$$

Mediante i valori delle ausiliarie s e w si possono determinare le tangenti degli archi x, y, ω_1, ω_2, ρ_1, ρ_2 in funzione dei lati a, b, c; sibbene ci proporremo di calcolare il prodotto $\operatorname{tang}\rho_1 \operatorname{tang}\rho_2 = \operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\omega_2 \dfrac{\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} p}$. Infatti a motivo dell' eguaglianze $\omega_1 = \dfrac{p}{2} - x$, $\omega_2 = \dfrac{p}{2} - y$ troveremo successivamente

$$\operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\omega_2 = \left(\frac{\operatorname{sen}\frac{p}{2} - \cos\frac{p}{2}\operatorname{tang} x}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 x}}\right)\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{p}{2} - \cos\frac{p}{2}\operatorname{tang} y}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 y}}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} p\left(\frac{\operatorname{tang}\frac{p}{2} + w\cot\frac{p}{2} - s}{A_0 + A_1 w}\right) = \operatorname{sen} p\left(\frac{\operatorname{tang}\frac{p}{2} + w\cot\frac{p}{2}}{A_0 + A_1 w}\right)\operatorname{sen}^2\frac{A}{4}$$

e per conseguenza

$$\operatorname{tang}\rho_1 \operatorname{tang}\rho_2 = \operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}^2\frac{A}{4}\left(\frac{\operatorname{tang}\frac{p}{2} + w\cot\frac{p}{2}}{A_0 + A_1 w}\right);$$

sostituendo i valori dei coefficienti A_0, A_1 e dalle radici w si ottiene

$$\operatorname{tang}\rho_1 \operatorname{tang}\rho_2 = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}^2\frac{A}{4}\left[\operatorname{tang}\frac{p}{2}\operatorname{sen} a + \cos a \pm \operatorname{sen}\frac{A}{2}\right]}{\operatorname{sen} p\cos(p-a) + \operatorname{sen} b\operatorname{sen} c\left[\operatorname{tang}\frac{p}{2}\left(1 \pm \cos a \operatorname{sen}\frac{A}{2}\right) \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen}\frac{A}{2}\right]} \tag{19}$$

Permutando fra loro le lettere a, b ed A con B ne conseguirà il prodotto $\operatorname{tang}\rho_2 \operatorname{tang}\rho_3$; similmente scambiando nella (19) le lettere a, c ed A con C si avrà $\operatorname{tang}\rho_3 \operatorname{tang}\rho_1$; da questi tre prodotti è facile ricavare le tangenti sferiche dei raggi ρ_1, ρ_2, ρ_3 in funzione dei lati a, b, c. Nel caso del triangolo equilatero le relazioni (1) e (2) si riducono alle $\operatorname{tang}\rho_1 = \operatorname{sen}\left(\dfrac{a}{2} - \omega_1\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\omega_1}{\sqrt{4\cos^2\frac{a}{2} - 1}}$, e ne discendono le formule

$$\begin{aligned} \cot\omega_1 &= \cot\frac{a}{2} + \frac{1+\cot^2\frac{a}{2}}{\sqrt{3\cot^2\frac{a}{2} - 1}} \\ \cot\rho_1 &= \sqrt{4\cot^2\frac{a}{2} + 2\cot\frac{a}{2}\sqrt{3\cot^2\frac{a}{2} - 1}}. \end{aligned} \tag{20}$$

(Continua).

G. Bellacchi.

Osservazioni circa la nota " Sulla simmetria in alcune dimostrazioni della geometria elementare „ (*V.* Anno X. p 163). — Il signor prof. Ciamberlini nella nota citata osserva *che in geometria accade di frequente che una stessa proprietà sia relativa a più enti geometrici, i quali entrano nello stesso modo a far parte dell' enunciato della proprietà stessa,* e che perciò la dimostrazione dovrebbe essere tale *che in essa gli enti stessi fossero egualmente considerati, mentre non di rado avviene che la dimostrazione dia la preferenza a qualcuno di essi; e ciò,* dice, *è artificioso.*

Convengo in massima nell' osservazione dell' egregio professore e trovo lodevole la modificazione fatta alla dimostrazione della propos. VI del libro XI di Euclide, perchè questa (senza richiedere speciali premesse, nè complicare la costruzione) dà alla dimostrazione la desiderata simmetria. Ma altrettanto, non credo possa dirsi degli altri esempi citati. Così per la dimostrazione del Teorema: *La somma degli angoli d'un triangolo è uguale a due retti,* l'A., in omaggio alla simmetria, conduce da un punto qualunque le parallele ai lati del $\triangle$ e fa osservare che i *sei* angoli così formati intorno al punto sono uguali a tre a tre agli angoli del triangolo per una stessa ragione, donde conclude la verità dell' enunciato ed aggiunge: *Se l'ordinaria dimostrazione si pone in confronto con questa, si vedrà subito quanto nella prima vi sia d' artificioso.* Ora tutto l'artificio sta in questo, che scegliendo per la sopradescritta costruzione invece di un punto qualunque *uno dei vertici* del triangolo, due delle tre parallele si confondono con due lati del triangolo, e perciò non resta che tracciare la parallela al lato opposto al vertice scelto, e ciò con *notevole semplicità nella costruzione.*

Pel Teorema fondamentale: *In un triangolo un lato è minore della somma degli altri due,* la dimostrazione dell'A., sebbene assai spedita, richiede che si sappia costruire la bisettrice di un angolo, od almeno che ne sia provata la esistenza, premessa non necessaria e che da buona parte dei trattatisti è data in seguito.

Pel Teorema: *In un triangolo la bisettrice di un angolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due,* la dimostrazione dell'A. richiede una speciale costruzione. Eccone una che (rispettando questa volta anche la simmetria) non ne esige alcuna:

Nel triangolo ABC sia AD la bisettrice dell' angolo in A. I triangoli ABD, ACD hanno la stessa altezza rispetto al vertice A perciò:

$$ABD : ACD = BD : CD$$

Gli stessi triangoli hanno altezze eguali rispetto al vertice D, perciò:

$$ABD : ACD = AB : AC$$

dalle quali proporzioni si ha appunto:

$$AB : AC = BD : DC.$$

Dimostrazione che vale anche per la bisettrice dell'angolo esterno.

Così pel Teorema relativo alla distanza di due rette sghembe l'A. alla solita costruzione sostituisce altre, più eleganti se si vuole, ma meno semplici.

Riassumendo mi sembra che l'A. alla eleganza della simmetria nella dimostrazione sacrifichi talvolta un po' troppo altre doti non meno apprezzabili, secondo il mio avviso, dal lato didattico, quali cioè che la costruzione sia ridotta allo stretto necessario, sì che la figura riesca semplice il più possibile, e che la dimostrazione richiegga il minimo numero di premesse.

Così per dare un nuovo esempio, si definisce come angolo di due rette sghembe, quello formato da due parallele alle prime condotte da un punto qualunque. Ora il guastare la simmetria non mi sembra motivo sufficiente, perchè ci si astenga dal prender il punto sopra una delle rette date, il che risparmia la costruzione di una parallela.

E tanto più mi sembra eccessiva la cura per la simmetria, in quanto che la preferenza data a qualche elemento nella dimostrazione è apparente più che altro: poichè ciascuno degli elementi di cui si parla può trovarsi nelle stesse condizioni in cui è posto uno di essi: il che del resto converrà far notare ai discenti nell'esporre la dimostrazione stessa.

G. Riboni.

Sulla deduzione della relazione $a^2 = b^2 + c^2$ dalle due relazioni $b = a \operatorname{sen} \beta$, $c = a \operatorname{sen} \gamma$. — Nei trattati di Trigonometria che ho letto, non escluso quello eccellentissimo del Prof. G. Pesci, ultimamente pubblicato coi tipi del solerte editore R. Giusti, si suole cadere in una petizione di principio che credo possa riuscire utile rilevare. Si dice che le tre relazioni $\beta + \gamma = 90^0$ (1), $b = a \operatorname{sen} \beta$ (2), $c = a \cos \beta = a \operatorname{sen} \gamma$ (*) (3) sono sufficienti a risolvere qualunque triangolo rettangolo, e ogni relazione che intercede fra gli elementi del medesimo, è conseguenza di quelle tre. E si deduce per es.: che $a^2 = b^2 + c^2$ (4) quadrando e sommando le (2) e (3), e osservando poi che $\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$. Ora questa formola nei detti trattati si dimostra facendo uso del teorema di Pitagora, esteso alle misure dei lati d'un triangolo; vi è dunque petizione di principio a dedurre la (4) dalle (2) e (3).

Potrebbe dalle (2) e (3) dedursi la (4) nel seguente modo. Calando dal vertice dell'angolo retto la perpendicolare sull'ipotenusa, dalle (2) e (3) si deduce subito che $a = b \operatorname{sen} \gamma + c \operatorname{sen} \beta$. In seguito si ha: $b^2 + c^2 = b \,.\, b + c \,.\, c = b \,.\, a \operatorname{sen} \beta + c \,.\, a \operatorname{sen} \gamma = a\,(b \operatorname{sen} \beta + c \operatorname{sen} \gamma) = a^2$.

S. Catania.

(*) a, b, c sono ordinatamente le misure dell'ipotenusa e dei cateti d'un triangolo rettangolo; β e γ le misure, in gradi, degli angoli opposti ai lati b e c.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI
247*, 250, 251**, 255**, 256**, 261* e 262*

247*. *Un triangolo* ABC *è inscritto in un cerchio ed è tirato il diametro* AD.

1° *Le proiezioni di* AB, AC *su di un diametro perpendicolare ad* AD *sono rispettivamente eguali a due lati del triangolo* ortico *di* ABC.

2° *Se* BC *è parallela ad* AD, *la differenza dei quadrati dei due lati* AB, AC *del triangolo è maggiore di quella relativa ad ogni altro triangolo inscritto, col vertice in* A *e con base eguale a* BC.

3° *Se l'altezza su* BC *è uguale alla proiezione di* BC *sopra* AD, *i due lati* AB, AC *sono l'uno il segmento aureo dell'altro.* (G. Gallucci).

Dimostrazione del Sig. *G. Scorza*, studente a Pisa.

Indicheremo in seguito con A, B, C, a, b, c gli angoli e i lati del triangolo ABC, con H l'ortocentro, con H_a, H_b, H_c i piedi delle altezze, con R e con O il raggio e il centro del cerchio circoscritto.

1° Sia M il punto ove il diametro perpendicolare ad AD incontra AC. Dal triangolo isoscele AOC in cui $\angle AOC = 2B$ si ricava $\angle OAC = 90^0 - B$ e quindi dal triangolo rettangolo AOM segue che l'angolo OMA è uguale a B. Allora la proiezione di AC sul diametro perpendicolare ad AD sarà data da: $AC \cos CMO = b \cos B$. D'altronde dal triangolo $H_a H_c B$, simile al triangolo ABC, si ricava $\dfrac{H_a H_c}{H_a B} = \dfrac{b}{c}$ e dal triangolo rettangolo AH_aB si ha pure: $H_a B = c \cos B$, dunque $H_a H_c = b \cos B$, ossia eguale alla proiezione di AC sul diametro perpendicolare ad AD. Similmente si dimostrerebbe che $H_a H_b$ è uguale alla proiezione di AB sullo stesso diametro.

2° Sia S il punto ove AD incontra BC: si ponga per comodità $\angle ASC = \varphi$ e si indichi con r la distanza OT del punto O dalla retta BC.

Sarà $ST = r \cot\varphi$, $OS = \dfrac{r}{\operatorname{sen}\varphi}$ e quindi

$$BS = \frac{a}{2} - r\cot\varphi, \quad CS = \frac{a}{2} + r\cot\varphi, \quad AS = R + \frac{r}{\operatorname{sen}\varphi};$$

inoltre

$$c^2 = \overline{AS}^2 + \overline{BS}^2 + 2AS\,.\,SB\cos\varphi; \quad b^2 = \overline{AS}^2 + \overline{SC}^2 - 2AS\,.\,SC\cos\varphi$$

dunque

$$c^2 - b^2 = \overline{BS}^2 - \overline{CS}^2 + 2AS \times a\cos\varphi$$

ossia sostituendo a BS, CS ed AS i loro valori:

$$c^2 - b^2 = 2Ra\cos\varphi.$$

Da ciò segue che la differenza $c^2 - b^2$ è massima quando è massimo $\cos\varphi$, rimanendo costanti a ed R, ossia quando $\varphi = 0$ e la retta BC è parallela ad AD.

3° L'angolo φ che ci ha servito precedentemente può essere determinato mediante A, B, C osservando che nel triangolo ASC l'angolo $SAC = 90^0 - B$ e quindi $\varphi = 90^0 + B - C$. Allora la proiezione l di BC su AD sarà data da: $l = a \cos \varphi = a \operatorname{sen}(C - B)$.

L'altezza calata da A su BC è data da

$$AH_a = a \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = a \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen}(B + C)},$$

dunque dal porre $l = AH_a$ segue $\operatorname{sen}(C - B) \operatorname{sen}(B + C) = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$ ossia $\operatorname{sen}^2 C - \operatorname{sen}^2 B = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$, da cui dividendo per $\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$, sostituendo ai rapporti $\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B}$ e $\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}$ gli equivalenti $\frac{c}{b}$ e $\frac{b}{c}$ e riducendo si ottiene $c^2 - b^2 = bc$ la quale uguaglianza scritta nel modo seguente

$$b^2 = c(c - b)$$

ci indica appunto che AC è il segmento aureo di AB.

Possiamo osservare che in quest'ultima ipotesi si hanno anche i seguenti risultati:

4° *La distanza dei piedi delle bisettrici dell'angolo* A *è uguale a* 2a.

Difatti tale distanza è data da

$$\frac{ab}{c + b} + \frac{ab}{c - b} = \frac{2abc}{c^2 - b^2} = 2a$$

poichè nel caso nostro $c^2 - b^2 = bc$.

5° *Il segmento intercettato sul lato* a *dal cerchio dei nove punti è dato da* $\frac{bc}{2a}$ *e quindi se* AN *è la mediana che parte dal vertice* A *si ha* $\operatorname{tg} ANC = 2 \operatorname{sen} A$.

Difatti il segmento intercettato dal cerchio dei nove punti sul lato a è la proiezione su questo lato della mediana AN, e si ha quindi, come è facile verificare, $NH_a = \frac{c^2 - b^2}{2a} = \frac{bc}{2a}$.

Da qui segue:

$$\operatorname{tg} ANC = \frac{AH_a}{NH_a} = \frac{2ac \operatorname{sen} B}{bc} = 2 \operatorname{sen} A.$$

250. *Dato il triangolo* ABC $(= \triangle)$ *e il punto interno* M, *si tirino per i vertici le trasversali* AM, BM, CM *ad incontrare i lati opposti in* A′, B′, C′ *e si costruiscano i coniugati armonici* M_a, M_b, M_c (*) *di* M *rispetto ad* A *e* A′, B *e* B′, C *e* C′. *Posto* BA′ : A′C = m, CB′ : B′A = n, AC′ : C′B = p, *dimostrare che l'area del triangolo* $M_a M_b M_c$ *è data da*

$$4 \triangle : \left[\left(m + 1 - \frac{1}{p}\right)\left(n + 1 - \frac{1}{m}\right)\left(p + 1 - \frac{1}{n}\right)\right].$$

(A. Lugli).

(*) *Punti armonicamente associati ad* M *rispetto al triangolo* ABC, che supponiamo cadano esternamente ad esso entro gli angoli CAB, ABC, BCA.

Dimostrazione del Sig. *G. Sforza*, studente nella R. Università di Pisa.

Anzitutto noteremo che i punti M_a, M_b, M_c sono a due a due allineati con C, A, B rispettivamente, poichè dall'essere per es. armoniche le due forme $(BMB'M_b)$, $(CMC'M_c)$ si deduce che le due rette AM_b, AM_c, separano armonicamente AM da AB e AC: dunque AM_b, AM_c sono per diritto.

Poi indicheremo per brevità con a, b, c, A, B, C i lati e gli angoli del triangolo ABC e con φ e ψ gli angoli M_bAC ed ACM_b.

Allora dall'essere armonico il fascio di rette $A(B, M, C, M_b)$, si deduce $\frac{\text{sen } BAM}{\text{sen } MAC} = \frac{\text{sen } BAM_b}{\text{sen } CAM_b} = \frac{\text{sen }(A+\varphi)}{\text{sen } \varphi}$ ossia, poichè dai triangoli BAA' ed $A'AC$ aventi la medesima altezza e le basi nel rapporto di $m : 1$ risulta $\frac{\text{sen } BAM}{\text{sen } MAC} = \frac{mb}{c}$, si ha anche $\frac{\text{sen }(A+\varphi)}{\text{sen } \varphi} = \text{sen } A \cot \varphi + \cos A = \frac{mb}{c}$.

Dall'ultima eguaglianza segue evidentemente $\text{tg } \varphi = \frac{c \text{ sen } A}{mb - c\cos A}$ e dalla considerazione del fascio armonico $C(M_bAMB)$ si ricaverebbe in un modo analogo

$$\text{tg } \psi = \frac{ap \text{ sen } C}{b - ap\cos C}.$$

Note le tangenti dei due angoli φ e ψ si trova l'area del triangolo AM_bC adoperando la formula

$$\text{area } AM_bC = \frac{b^2}{2} \frac{\text{tg } \varphi \text{ tg } \psi}{\text{tg } \varphi + \text{tg } \psi}$$

e sostituendovi i valori ormai conosciuti di $\text{tg } \varphi$ e $\text{tg } \psi$. Si trova così:

$$\text{area } AM_bC = \frac{p}{2} \frac{ab^2c \text{ sen } A \text{ sen } C}{bc \text{ sen } A - pac \text{ sen } B + mpab \text{ sen } C}$$

ossia per essere $bc \text{ sen } A = ac \text{ sen } B = ab \text{ sen } C = 2\triangle$ e quindi $4\triangle^2 = ab^2c \text{ sen } A \text{ sen } C$, si trova finalmente

$$\text{area } AM_bC = \frac{p\triangle}{1 - p + mp}.$$

Seguendo una via affatto analoga si troverebbe che le aree dei triangoli CM_aB e BM_cA sono date rispettivamente dalle espressioni:

$$\frac{n\triangle}{1 - n + np}; \quad \frac{m\triangle}{1 - m + mn}$$

quindi l'area richiesta del triangolo $M_aM_bM_c$ sarà data da

$$\triangle\left(1 + \frac{p}{1 - p + mp} + \frac{m}{1 - m + mn} + \frac{n}{1 - n + np}\right).$$

Facendo le convenienti riduzioni nell'espressione contenuta fra le parentesi e servendosi della relazione:

$$mnp = 1$$

che risulta dall'applicare il teorema di CEVA alle rette concorrenti AA', BB', CC' si trova

$$M_a M_b M_c = 4\triangle : \left[(1-p+mp)(1-m+mn)(1-n+np)\right]$$

o, dividendo l'espressione contenuta fra parentesi per il prodotto $mnp = 1$,

$$M_a M_b M_c = 4\triangle : \left[\left(m-1+\frac{1}{p}\right)\left(n-1+\frac{1}{m}\right)\left(p-1+\frac{1}{n}\right)\right].$$

Questa espressione è alquanto differente da quella dell'enunciato, ma si verifica senza pena che egli è appunto

$$\left(m-1+\frac{1}{p}\right)\left(n-1+\frac{1}{m}\right)\left(p-1+\frac{1}{n}\right) =$$
$$\left(m+1-\frac{1}{p}\right)\left(n+1-\frac{1}{m}\right)\left(p+1-\frac{1}{m}\right)$$

servendosi della relazione

$$mnp = 1.$$

Dimostrazione del Sig. Prof. *G. Mola* a Campobasso.

Determinerò primieramente l'area del triangolo i di cui lati sono dati in coordinate baricentriche; passando poi alla soluzione della quistione e di quella che ha il n. **249**.

1. Siano i punti X, X', X'', riferiti ai vertici del triangolo ABC, dati dalle equipollenze (*):

$$\begin{aligned} l\,AX + m\,BX + n\,CX &= 0\\ l'AX' + m'BX' + n'CX' &= 0\\ l''AX'' + m''BX'' + n''CX'' &= 0. \end{aligned}$$

Dalle due prime, ponendo $BA + AX$, $CA + AX$, $BA + AX'$, $CA + AX'$, rispettivamente in luogo di BX, CX, BX' e CX', si ha

$$\begin{aligned} (l+m+n)AX &= m\,AB + n\,AC,\\ (l'+m'+n')AX' &= m'AB + n'AC. \end{aligned}$$

Da quest'ultima, moltiplicata per $l+m+n=s$, sottraggo l'antecedente, moltiplicata per $l'+m'+n'=s'$; ed ho

$$XX' = \frac{(m's-ms')AB + (n's-ns')AC}{ss'}.$$

Identicamente operando, si ha pure

$$XX'' = \frac{(m''s-ms'')AB + (n''s-ns'')AC}{ss''}.$$

Moltiplico, membro a membro, la prima di queste due equipollenze per la coniugata (**) dell'altra, e la seconda per la coniugata della prima, e poi sot-

(*) BELLAVITIS: *Esposizione del metodo delle equipollenze.*
(**) Idem, n. 45.

traggo i prodotti; si ha:

$$XX' \,.\, cj\,XX'' - cj\,XX' \,.\, XX'' = \frac{[(m's - ms')(n''s - ns'') - (m''s - ms'')(n's - ns')](AB \,.\, cj\,AC - cj\,AB \,.\, AC)}{s^2 s' s''}.$$

Il fattore algebrico del secondo membro è uguale a

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{s s' s''}.$$

E poichè, essendo i l'unità immaginaria, (*)

$$\frac{i}{4}(AB \,.\, cj\,AC - cj\,AB \,.\, AC) = ABC \;(= \triangle)$$

$$\frac{i}{4}(XX' \,.\, cj\,XX'' - cj\,XX' \,.\, XX'') = XX'X'' \;(= \triangle'),$$

si ottiene

$$\triangle' = \begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{vmatrix} \cdot \frac{\triangle}{s s' s''} \;(^{**}).$$

2. Applichiamo questa formola al caso della quistione che domanda l'area del triangolo che ha per vertici i punti M_a, M_b, M_c, armonicamente associati, per rispetto al $\triangle\, ABC$, al punto M; il quale è comune alle trasversali menate dai vertici di ABC ai lati opposti, nei punti A', B', C' dati dalle relazioni

$$BA' + m\,CA' = 0, \qquad CB' + n\,AB' = 0, \qquad AC' + p\,BC' = 0.$$

Facciamo $p_1 : n_1 = m$, $m_1 : p_1 = n$, $n_1 : m_1 = p$; l'equipollenza del punto M sarà

$$m_1\,AM + n_1\,BM + p_1\,CM = 0,$$

e quelle dei punti M_a, M_b, M_c saranno rispettivamente

$$\begin{aligned} -m_1\,AM_a + n_1\,BM_a + p_1\,CM_a &= 0, \\ m_1\,AM_b + n_1\,BM_b + p_1\,CM_b &= 0, \\ m_1\,AM_c + n_1\,BM_c - p_1\,CM_c &= 0. \end{aligned} \qquad \ldots\ldots \quad [1]$$

Onde l'area del triangolo $M_a M_b M_c\;(= \triangle')$ sarà data da

$$\triangle' = \begin{vmatrix} -m_1 & n_1 & p_1 \\ m_1 & -n_1 & p_1 \\ m_1 & n_1 & -p_1 \end{vmatrix} \cdot \frac{\triangle}{(-m_1 + n_1 + p_1)(m_1 - n_1 + p_1)(m_1 + n_1 - p_1)}.$$

È evidente che il determinante è uguale a $4\,m_1 n_1 p_1$; e però,

$$\triangle' = 4\,\triangle : \left[\frac{-m_1 + n_1 + p_1}{n_1} \cdot \frac{m_1 - n_1 + p_1}{p_1} \cdot \frac{m_1 + n_1 - p_1}{m_1}\right]$$

(*) Bellavitis: *Esposizione del metodo delle equipollenze*, n. 57.

(**) Si possono derivare da questa formola quelle [7] e [8] che sono nel pregevole articolo del Prof. A. Lugli: *Alcuni teoremi di geometria*. V. Vol. X, pp. 6 e 7.

da cui il valore domandato, in funzione di m, n, p,

$$\triangle' = 4\triangle : \left[\left(m+1-\frac{1}{p}\right)\left(n+1-\frac{1}{m}\right)\left(p+1-\frac{1}{n}\right)\right].$$

3. Se invece delle [1] si avessero

$$\begin{aligned} -\operatorname{sen} A \,.\, AI' + \operatorname{sen} B \,.\, BI' + \operatorname{sen} C \,.\, CI' &= 0, \\ \operatorname{sen} A \,.\, AI'' - \operatorname{sen} B \,.\, BI'' + \operatorname{sen} C \,.\, CI'' &= 0, \\ \operatorname{sen} A \,.\, AI''' + \operatorname{sen} B \,.\, BI''' + \operatorname{sen} C \,.\, CI''' &= 0 \end{aligned}$$

che sono le equipollenze dei centri I', I'', I''' dei circoli ex-inscritti al $\triangle ABC$, l'area del $\triangle I'I''I'''$ avrebbe per valore

$$\frac{4 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \,.\, \triangle}{(-\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C)(\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C)(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B - \operatorname{sen} C)} =$$

$$\frac{\triangle}{2 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}} = \frac{pabc}{2\triangle} = 2pR,$$

(Serret: *Trigonometria*, nn. 121, 122).

Evidentemente questo è un caso particolare dell'altro.

251**. *Se* r *è un intero arbitrario non negativo, e* n *un intero pure arbitrario ma superiore a* r, *si avrà*

$$\binom{n}{0}\binom{n}{r} - \binom{n}{1}\binom{n-1}{r} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{r} - \ldots\ldots + (-1)^{n-r}\binom{n}{n-r}\binom{r}{r} = 0.$$

(G. Nonni).

Dimostrazione del Sig. Prof *E. Nannei* a Bari (*).

Dalla nota formola

$$\binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \ldots\ldots + (-1)^k \binom{k}{k} = 0$$

ponendo $k = n - r$ e sostituendo ai simboli i valori corrispondenti, risulta

$$1 - \frac{n-r}{|\underline{1}} + \frac{(n-r)(n-r-1)}{|\underline{2}} - \ldots. + (-1)^{n-r}\frac{(n-r)(n-r-1)\ldots.2.1}{|\underline{n-r}} = 0$$

e moltiplicando per $\dfrac{n(n-1)\ldots.(n-r+1)}{|\underline{r}}$:

$$\frac{n(n-1)\ldots.(n-r+1)}{|\underline{r}} - \frac{n(n-1)\ldots.(n-r+1)(n-r)}{|\underline{1}\,|\underline{r}} + \ldots$$
$$+ (-1)^{n-r}\frac{n(n-1)\ldots.3.2.1}{|\underline{n-r}\,|\underline{r}} = 0. \qquad [1]$$

(*) Un'altra dimostrazione pervenne dal Sig. F. Ceccherini studente della R. Università di Roma.

Ora poichè si ha

$$\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r-s+1)}{|\underline{s}\;|\underline{r}} = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-s+1)}{|\underline{s}} \cdot \frac{(n-s)\ldots\ldots(n-r-s+1)}{|\underline{r}} = \binom{n}{s}\binom{n-s}{r},$$

la [1] può scriversi

$$\binom{n}{0}\binom{n}{r} - \binom{n}{1}\binom{n-1}{r} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{r} - \ldots + (-1)^{n-r}\binom{r}{n-r}\binom{r}{r} = 0,$$

che è la relazione da dimostrare.

Si può osservare poi che

$$\binom{n}{s}\binom{n-s}{r} = \frac{n(n-1)\ldots\ldots 3\,.\,2\,.\,1}{|\underline{s}\;|\underline{r}\;|\underline{n-r-s}} = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(s+1)}{|\underline{r}\;|\underline{n-r-s}} =$$

$$\frac{n(n-1)\ldots\ldots(r+s+1)}{|\underline{n-r-s}} \cdot \frac{(r+s)\ldots\ldots(s+1)}{|\underline{r}} = \binom{n}{n-r-s}\binom{r+s}{r};$$

e perciò due termini dell' espressione data, equidistanti dagli estremi, sono eguali: sicchè nel caso che il numero dei termini sia pari, la dimostrazione è ovvia.

255.** *Dimostrare che per due triangoli sferici polari sussiste la seguente proprietà: I tre circoli massimi passanti per le coppie di vertici corrispondenti (cioè tali che uno sia polo del lato opposto dell' altro) s' incontrano negli estremi di uno stesso diametro, mentre le tre coppie di lati corrispondenti s' incontrano in punti di uno stesso circolo massimo, il cui piano risulta perpendicolare al suddetto diametro.* (*) (M. Chini).

Dimostrazione del Sig. *S. Resta*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari.

Siano ABC, $A'B'C'$ due triangoli sferici polari, e sia O il centro della sfera alla quale appartengono. Essendo OA' perpendicolare al piano BOC, l'arco di cerchio massimo passante per A ed A' sarà perpendicolare al lato BC. Similmente avendosi $OB' \perp COA$ e $OC' \perp AOB$, risulta che gli archi di cerchio massimo BB', CC' sono perpendicolari a CA, AB, quindi perchè in ogni triangolo sferico gli archi condotti dai vertici perpendicolarmente ai lati opposti, passano per lo stesso punto, gli archi considerati passeranno per lo stesso punto, e sia H. Ma AA', BB', CC' sono anche i circoli massimi delle coppie di vertici corrispondenti A, A'; B, B'; C, C' dei due triangoli polari, sicchè la prima proprietà enunciata è dimostrata.

Siano ora H', H'', H''' i punti d' incontro delle coppie di lati corrispondenti BC, $B'C'$; CA, $C'A'$; AB, $A'B'$. Poichè OA' è perpendicolare al piano BOC ed OA a $B'OC'$ (essendo i triangoli ABC, $A'B'C'$ reciproci), il piano AOA' sarà perpendicolare tanto a BOC che a $B'OC'$, quindi alla loro intersezione OH', donde si deduce $OH \perp OH'$. In modo analogo si dimostra che anche

(*) Questa proprietà si trova anche enunciata in Baltzer: *Stereometria:* § 4, 15. [N. d. R.]

OH'', OH''' sono perpendicolari ad OH. I tre punti H', H'', H''', come le rette OH', OH'', OH''' si trovano dunque in uno stesso piano il quale è perpendicolare ad OH, c. v. d..

Dimostrazione del Sig. Prof. *V. Retali* a Milano.

Se due triangoli (ABC) (abc), $(a'b'c')$ $(A'B'C')$ situati in un medesimo piano σ sono reciproci rispetto a una conica C^2, posta nel piano σ, essi sono omologici: le tre rette

$$|AA'|, \ |BB'|, \ |CC'|$$

concorrono in un punto P; i tre punti

$$(aa'), \ (bb') \ (cc')$$

giacciono sulla polare p' di P rispetto a C^2.

Se due triedri concentrici $S(\alpha\beta\gamma)$ (abc), $S(a'b'c')$ $(\alpha'\beta'\gamma')$ sono reciproci rispetto a un cono quadrico Γ^2 di vertice S, le tre rette

$$|\alpha\alpha'|, \ |\beta\beta'|, \ |\gamma\gamma'|$$

giacciono in un piano ω e i tre piani

$$(aa'), \ (bb'), \ (cc')$$

passano per la polare p' di ω rispetto a Γ^2.

Assumendo nel teorema a destra per Γ^2 il cono isotropo (*) uscente da S e segando con una sfera arbitraria di centro S otteniamo il teorema proposto.

256**. *Mostrare che risolvendo le equazioni*

$$\xi' = \xi - \frac{2u}{u^2 + v^2 + w^2} (u\xi + v\eta + w\zeta + 1)$$

$$\eta' = \eta - \frac{2v}{u^2 + v^2 + w^2} (u\xi + v\eta + w\zeta + 1)$$

$$\zeta' = \zeta - \frac{2w}{u^2 + v^2 + w^2} (u\xi + v\eta + w\zeta + 1),$$

rispetto alle u, v, w, *si ha*

$$u = -\frac{a}{a\xi + b\eta + c\zeta + 1} = \frac{2(\xi' - \xi)}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)}$$

$$v = -\frac{b}{a\xi + b\eta + c\zeta + 1} = \frac{2(\eta' - \eta)}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)}$$

$$w = -\frac{c}{a\xi + b\eta + c\zeta + 1} = \frac{2(\zeta' - \zeta)}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)},$$

ove si è messo, per brevità,

$$a = 2(\xi - \xi')\delta^{-2}, \quad b = 2(\eta - \eta')\delta^{-2}, \quad c = 2(\zeta - \zeta')\delta^{-2}$$
$$\delta^2 = (\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2.$$

(A. Del Re).

(*) Il cono che proietta da S il cerchio immaginario all' infinito.

Risoluzione del Sig. *G. Vitali*, studente nella R. Università di Bologna.

Le equazioni date possono essere surrogate dalle seguenti

$$\frac{2u}{u^2+v^2+w^2}(u\xi+v\eta+w\zeta+1)=\xi-\xi'$$

$$\frac{2v}{u^2+v^2+w^2}(u\xi+v\eta+w\zeta+1)=\eta-\eta'$$

$$\frac{2w}{u^2+v^2+w^2}(u\xi+v\eta+w\zeta+1)=\zeta-\zeta'.$$

Ora dividendo la seconda e la terza per la prima di queste equazioni si ha

$$\frac{v}{u}=\frac{\eta-\eta'}{\xi-\xi'},\quad \frac{w}{u}=\frac{\zeta-\zeta'}{\xi-\xi'}$$

e sostituendo i valori di v e di w che risultano da queste ultime due relazioni nella prima equazione si ricava

$$\frac{2u}{u^2+u^2\frac{(\eta-\eta')^2}{(\xi-\xi')^2}+u^2\frac{(\zeta-\zeta')^2}{(\xi-\xi')^2}}\left(u\xi+u\eta\frac{\eta-\eta'}{\xi-\xi'}+u\zeta\frac{\zeta-\zeta'}{\xi-\xi'}+1\right)=\xi-\xi'$$

$$\frac{2}{u[(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2]}[u\xi(\xi-\xi')+u\eta(\eta-\eta')+u\zeta(\zeta-\zeta')+(\xi-\xi')]=1,$$

$$\frac{2u\xi(\xi-\xi')+2u\eta(\eta-\eta')+2u\zeta(\zeta-\zeta')+2(\xi-\xi')}{u\delta^2}=1,$$

$$a\xi+b\eta+c\zeta+\frac{a}{u}=1$$

e finalmente

$$u=-\frac{a}{a\xi+b\eta+c\zeta-1}.$$

Di qui sostituendo convenientemente si può avere

$$u=\frac{2(\xi'-\xi)}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2-(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)}.$$

In modo analogo si possono determinare i valori di v e di w. (*)

261*. *Eliminare* a *e* δ *dalle tre equazioni*

$$s_1=\frac{a}{\tan(\delta+\varphi_1)},\quad s_2=\frac{a}{\tan(\delta+\varphi_2)},\quad s_3=\frac{a}{\tan(\delta+\varphi_3)}.$$

(G. Pesci).

Risoluzione del Sig. *E. Zella*, alunno del R. Istituto tecnico di Piacenza.

Osservando che $\varphi_1-\varphi_2=(\delta+\varphi_1)-(\delta+\varphi_2)$, segue

(*) Soluzioni della quistione pervennero anche dal Sig. *V. Columbo* già studente nella R. Università di Napoli e dai Sigg. Proff. *E. Nannei* e *V. Retali*.

$$\tan(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\tan(\delta + \varphi_1) - \tan(\delta + \varphi_2)}{1 + \tan(\delta + \varphi_1)\tan(\delta + \varphi_2)} = \frac{a(s_2 - s_1)}{s_1 s_2 + a^2},$$

a motivo di $\tan(\delta + \varphi_1) = \frac{a}{s_1}$, $\tan(\delta + \varphi_2) = \frac{a}{s_2}$, $\tan(\delta + \varphi_3) = \frac{a}{s_3}$.

Analogamente si trova

$$\tan(\varphi_2 - \varphi_3) = \frac{a(s_3 - s_2)}{s_2 s_3 + a^2}, \quad \tan(\varphi_3 - \varphi_1) = \frac{a(s_1 - s_3)}{s_3 s_1 + a^2}.$$

Ponendo per brevità $\tan(\varphi_1 - \varphi_2) = m$, $\tan(\varphi_2 - \varphi_3) = n$, $\tan(\varphi_3 - \varphi_1) = p$, le tre relazioni precedenti si possono scrivere

$$\begin{aligned} a(s_2 - s_1) &= m(s_1 s_2 + a^2) \\ a(s_3 - s_2) &= n(s_2 s_3 + a^2) \\ a(s_1 - s_3) &= p(s_3 s_1 + a^2). \end{aligned}$$

Eliminando primieramente a^2 dalla prima e seconda, poi dalla seconda e terza di queste eguaglianze, si ricava con facilità

$$\begin{aligned} a \left\{ n(s_2 - s_1) - m(s_3 - s_2) \right\} &= mn\, s_2(s_1 - s_3), \\ a \left\{ p(s_3 - s_2) - n(s_1 - s_3) \right\} &= np\, s_3(s_2 - s_1), \end{aligned}$$

ed ora dividendo membro a membro, si ha

$$\frac{n(s_2 - s_1) - m(s_3 - s_2)}{p(s_3 - s_2) - n(s_1 - s_3)} = \frac{m}{p} \cdot \frac{s_2(s_1 - s_3)}{s_3(s_2 - s_1)},$$

che è la relazione cercata.

Risoluzione del Sig. Prof. *V. Retali* a Milano.

Dalle

$$\begin{aligned} s_1 : s_2 &= \mathrm{tg}(\delta + \varphi_2) : \mathrm{tg}(\delta + \varphi_1) \\ s_2 + s_3 &= \mathrm{tg}(\delta + \varphi_3) : \mathrm{tg}(\delta + \varphi_2) \end{aligned}$$

abbiamo

$$\mathrm{sen}(2\delta + \varphi_1 + \varphi_2) = \frac{s_1 + s_2}{s_1 - s_2} \cdot \mathrm{sen}(\varphi_2 - \varphi_1) = h_{12}$$

$$\mathrm{sen}(2\delta + \varphi_2 + \varphi_3) = \frac{s_2 + s_3}{s_2 - s_3} \cdot \mathrm{sen}(\varphi_3 - \varphi_2) = h_{23},$$

$$\begin{aligned} \mathrm{sen}\, 2\delta \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos 2\delta \cdot \mathrm{sen}(\varphi_1 + \varphi_2) &= h_{12} \\ \mathrm{sen}\, 2\delta \cos(\varphi_2 + \varphi_3) + \cos 2\delta \cdot \mathrm{sen}(\varphi_2 + \varphi_3) &= h_{23}; \end{aligned}$$

le quali, risolute rispetto a sen 2δ e cos 2δ, dànno:

$$\mathrm{sen}\, 2\delta = \begin{vmatrix} h_{12} & \mathrm{sen}(\varphi_1 + \varphi_2) \\ h_{23} & \mathrm{sen}(\varphi_2 + \varphi_3) \end{vmatrix} : \mathrm{sen}(\varphi_3 - \varphi_1)$$

$$\cos 2\delta = \begin{vmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & h_{12} \\ \cos(\varphi_2 + \varphi_3) & h_{13} \end{vmatrix} : \mathrm{sen}(\varphi_3 - \varphi_1);$$

quadrando e sommando membro a membro si trova, dopo qualche riduzione,

$$
\begin{gathered}
(s_1 + s_2)^2 (s_2 - s_3)^2 \,\mathrm{sen}^2 (\varphi_1 - \varphi_2) + \\
(s_1 - s_2)^2 (s_2 + s_3)^2 \,\mathrm{sen}^2 (\varphi_2 - \varphi_3) - \\
(s_1 - s_2)^2 (s_2 - s_3)^2 \,\mathrm{sen}^2 (\varphi_3 - \varphi_1) = \\
2 (s_1^2 - s_2^2)(s_2^2 - s_3^2) \,\mathrm{sen}\, (\varphi_1 - \varphi_2) \,\mathrm{sen}\, (\varphi_2 - \varphi_3) \cos (\varphi_3 - \varphi_1). \text{ (*)}
\end{gathered}
$$

262*. *Trovare col solo compasso il raggio del cerchio inscritto in un triangolo rettangolo.* (G. Candido).

Risoluzione dei Sigg. *S. Resta*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari, *E. Biscaldi* e *F. Marzoni*, alunni del R. Liceo di Novara. (**)

Sia ABC un triangolo, rettangolo in A. Con centro in B e raggio BA si tagli l'ipotenusa BC in D, quindi con centro C e raggio CD, si tagli AC in E. Poichè la differenza di due lati d'un triangolo è minore del terzo E cadrà nell'interno del cateto AC.

Ora essendo AE, per costruzione, la differenza fra la somma dei cateti e l'ipotenusa, in seguito al fatto che la somma dei diametri del cerchio inscritto e circoscritto in un triangolo rettangolo è uguale alla somma dei cateti, sarà AE uguale al diametro del cerchio inscritto nel triangolo rettangolo ABC. La quistione, come vedesi, è ridotta a dividere per metà col solo compasso un segmento dato.

Una soluzione di quest'ultimo problema (V. Mascheroni: *Geometria del compasso*), è la seguente: Sia AB il segmento da dividersi per metà. Si trovi il punto simmetrico C di A rispetto a B e con centri A e C e raggi rispettivamente eguali ad AB e AC si descrivano due cerchi che si tagliano in L ed M. Poi con centri in questi ultimi punti e raggio AB si descrivano due altri cerchi segantisi in K, fra A e B, questo punto K è il centro del segmento AB.

QUISTIONI PROPOSTE (***)

295*. Di un triangolo isoscele sono dati il perimetro $2p$ e l'altezza h; determinare i lati e gli angoli del triangolo.

Condizione di possibilità del problema e caso in cui il triangolo diviene equilatero.

(*) Risposte alla quistione pervennero anche dai Sigg. *E. Biscaldi* (R. Liceo di Novara) e *G. Gallucci* (R. Università di Napoli).

(**) Buone soluzioni pervennero anche dai Sigg. *G. Santoro* (R. Liceo Maddaloni) e *F. Squassi* (R. Ist. tec. Piacenza).

(***) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

296*. Dato un rettangolo R di lati $2a$ e $2b$, si vuole costruirne un altro R', interno ad R, coi lati paralleli e ad eguale distanza da quelli di R, tale che la sua area sia in un rapporto dato q ($q < 1$) con quella del rettangolo dato. Determinare la comune distanza dei lati paralleli dei due rettangoli, esaminando i casi più notevoli, e discutere i risultati.

297*. Inscrivere un rettangolo in un dato cerchio di raggio R tale che facendo ruotare il cerchio attorno al diametro parallelo ad un lato del rettangolo, il cilindro che si genera abbia la superficie totale in un rapporto dato q colla superficie della sfera di raggio R.

Condizione di possibilità del problema, e caso speciale di $q = \frac{1}{2}$.

298*. Scomporre un numero N in tre parti x, y, z in progressione aritmetica, e tali che la somma dei loro cubi sia uguale al cubo di un numero dato P; e trovare le condizioni perchè i tre numeri x, y, z risultino reali e positivi (*).

299**. Determinare un triangolo isoscele dati il perimetro $2p$ e l'altezza h relativa a ciascuno dei lati eguali. Qual'è il minimo valore del rapporto $2p$ e quali sono gli angoli corrispondenti?

G. Bellacchi.

300**. Dati il perimetro $2p$ di un triangolo sferico isoscele e l'altezza h dei lati eguali, sono questi definiti da un'equazione biquadratica; riducibile al 2° grado quando sia $p = \frac{\pi}{2}$.

G. Bellacchi.

301*. Dati due cerchi O, O' eguali e che si tagliano ortogonalmente, se per uno M dei punti di loro intersezione si conduce una secante comune AMA' e per A ed A' due corde AB, $A'B'$ parallele fra loro, in una direzione qualsiasi, dimostrare che la somma $\overline{AB}^2 + \overline{A'B'}^2$ è costante.

F. Celestri.

302*. Calcolare gli angoli di un triangolo rettangolo sapendo che la metà dell'ipotenusa è media proporzionale fra la somma dei cateti e il raggio del cerchio inscritto.

G. Vitali.

(*) Le quistioni 295*, 296*, 297* e 298*, salvo una forma più succinta per le prime tre, non sono altro che i temi dati per la licenza dagli Istituti tecnici nella Sezione *Fisico-matematica*, le prime due nel luglio, le altre nell'ottobre 1895.

RIVISTE E NOTIZIE BIBLIOGRAFICHE

Didaktik und Methodik des Rechen -, Mathematik - und Physik - Unterrichts von Dott. Max Simon, *Professor am Lyzeum in Strassburg, und Dott.* J. Kiessling, *Professor an der Gelehrtenschule des Johannenms in Hamburg. Sonderausgabe aus Dott.* A. Baumeister's « *Handbuch der Erziehungs - und Unterrichtslehre für höhere Schulen.* — München, 1895, pp. 128 + 73.

Le ricerche didattiche non sono di gusto dei matematici italiani; è vano negarlo come riuscirebbe probabilmente infruttuoso qualunque sforzo inteso a far germogliare un sentimento al quale sembra refrattario chi nacque e crebbe sotto il bel cielo d' Italia; il genio di un popolo non si muta per volontà umana e d' altronde il popol nostro ha già un corredo di qualità sufficiente a compensarlo dell' assenza di entusiasmo per le investigazioni di ordine didascalico. Invece quello che importa è di colmare la conseguente lacuna della nostra letteratura matematica ricorrendo alle letterature straniere, affinchè noi non siamo tacciati di sprezzare quello che ignoriamo. Ed è appunto ad impedire che passi inosservata in Italia un' opera che, quantunque piccola di mole, per essere densa di pensiero e frutto di lunghe e coscienziose esperienze e di indagini acute e perseveranti è degna di considerazione e di studio da parte di coloro che all' insegnamento *della matematica* (*) consacrarono la loro vita. Tanto più che ne è autore uno che, dopo avere inaugurata sotto buoni auspici la propria carriera di scienziato, mise in disparte le tanto seducenti indagini nelle regioni inesplorate del pensiero, per consacrare tutta la propria attività a sbocconcellare il pane della scienza, a togliere gl' impedimenti di cui è cosparsa la via che conduce alle verità algebriche e geometriche. Seguendo le tradizioni de' suoi connazionali egli è sceso in campo corazzato di tutta la scienza del suo secolo; ma — ed è questo un appunto che già mi occorse di fare in altre opere uscite in Germania (**) — egli sembra propenso ad attribuire il nome di scienza esclusivamente a quanto produssero i pensatori suoi conterranei, epperò non ha tenuto il debito conto dei risultati conseguiti da una falange di pedagogisti inglesi lavoranti in associazione (***), da un'altra analoga costituitasi in America (****), e da alcuni scienziati italiani operanti, per impulso proprio, da rivoluzionari o da riformatori.

Seguire passo passo il sig. Simon nell' esposizione da lui fatta dei risultati delle proprie esperienze è impresa ineseguibile; d'altronde modo e tempo a noi farebbero difetto per verificarle e discuterne le conseguenze; basti accennarle per sommi capi. Dopo un capitolo introduttorio contenente una rapida ma interessantissima rassegna dello sviluppo storico dell' insegnamento della matematica in Germania (*****), il nostro autore espone (cap. II) alcune considerazioni generali di didattica matematica per poi occuparsi successivamente dell' insegnamento del calcolo numerico (cap. III), dell'aritmetica e dell' algebra (cap. IV e V) e della geometria (cap. VI e VII). Risalendo poi a considerazioni di più ampia portata egli dà dei saggi consigli e degli ottimi suggerimenti ai professori di ogni ramo

---

(*) Ciò equivale ad un' esplicita dichiarazione che le nostre considerazioni si limitano alla parte matematica dell' opuscolo in esame, nella parte fisica basti rilevare lo studio delle relazioni fra l'insegnamento di questa scienza e quello della matematica.

(**) Cfr. questo *Periodico*, t. VIII, pp. 94, 95.

(***) Cfr. questo *Periodico*, t. IV. p. 125-128 e t. VIII. p. 101 e seg.

(****) *Report of the Committee of Ten on Secondary School Studies* (New-York, Cincinnati, Chicago; 1894).

(*****) Esiste una rassegna analoga di quanto accadde in Italia?

di matematica (cap. VIII), per finire discorrendo dei trattati e delle raccolte di di problemi (cap. IX).

Fra le tesi a noi simpatiche che l'autore sostiene noteremo quella dell'introduzione dell'elemento storico nell'insegnamento elementare (*) (del qual elemento egli determina la portata ed i confini), quella dell'utilità di fondere planimetria e stereometria, e quella delle relazioni di buon vicinato che importa stabilire e rendere quanto più è possibile strette fra l'istruzione secondaria e l'universitaria (**). Fra le questioni più ricche di interesse ed importanza noteremo la determinazione degli scopi che ha l'insegnamento delle matematiche nelle scuole medie e dell'aiuto che esso può prestare all'insegnamento degli altri rami ivi professati, nonchè quella del genere di lavoro personale a cui può dedicarsi un professore di ginnasio o liceo per evitare i due scogli altrettanto pericolosi del cristallizzarsi nello stesso cerchio di idee in cui si aggira la sua opera didattica e del perdersi nelle nubi delle questioni irresolute che la scienza nostra presenta.

Eccellenti sono le osservazioni del sig. Simon sulle opere a cui l'insegnante può ricorrere per allargare un po' il campo intellettuale de' migliori fra suoi studenti, per dar loro almeno un'idea dei campi sconfinati che stanno al di là di quello in cui sono trattenuti dei programmi governativi, osservazioni che sembrano ispirate dalle auree parole di Abel: « Si l'on veut faire des progrès dans les mathématiques, il faut étudier les maîtres et non pas les écoliers ». Inoltre va data a lui lode incondizionata per avere richiamata in vita una geniale osservazione di Möbius, che cioè le dimostrazioni *per assurdo* che intervengano nella geometria elementare si possono in generale trasformare in altre dirette fondandosi sulla proposizione seguente: « Se due serie di concetti a_k, b_k $(k = 1, 2, ..)$ appartenenti a due distinte totalità di concetti A, B contengono lo stesso numero di elementi e sono in tale relazione di corrispondenza che ogni elemento a_k di A abbia in B un determinato corrispondente b_k, allora ogni elemento b_k di B troverà in A un corrispondente determinato a_k ». Per converso non ci troviamo d'accordo coll'autore nell'annoverare la Trigonometria fra le scienze applicate; era tale nell'origine, quando fungeva da semplice ausiliare dell'astronomia; non lo è più oggi che forma un capitolo della geometria di misura (***) ed in certo modo una propedeutica all'applicazione dell'algebra alla geometria.

A queste notizie ed osservazioni potremmo aggiungere; ma (per usare le parole di Amleto)

. . . . . since brevity is the soul of wit
I will be brief.

Genova, 20 novembre 1895. GINO LORIA.

GARDENGHI dott. GIUSEPPE. — *Manuale tecnico per le Società di mutuo soccorso.* 174° Manuale della collezione Hoepli. — Milano, 1895. — Prezzo, L. 1. 50.

Di questo libretto, scarso di mole ma ricco d'importanza, che viene a far seguito a diversi lavori congeneri meritamente apprezzati (****) dello stesso A., si occupò con parole molto lusinghiere il sig. dott. Ch. Moser in una recensione pubblicata nel fascicolo di luglio dei *Schweizerische Blätter für Wirtschafts und Socialpolitik.* Pare nondimeno che non sia fuori di proposito parlarne di nuovo per contribuire a rendere edotto il pubblico italiano dei pregi del libro, facendolo in questo periodico, giacchè l'operetta, malgrado la sua forma popolare, ha fondamento matematico.

(*) Cfr. questo *Periodico*, t. V, p. 59-61.
(**) Cfr. questo *Periodico*, X, p. 187.
(***) Cfr. questo *Periodico*, t. III, p. 50.
(****) V. ad es. la recensione pubblicata nel vol. IV, pp. 156-159 di questo *Periodico* dell'opera *Teoria matematica della previdenza.*

Scopo dell'A. è di stabilire con quale ordinamento tecnico siano da regolare le Società di mutuo soccorso basate sostanzialmente sul risparmio, affinchè possano corrispondere ai loro fini principali che sono i seguenti: 1° Assicurazione di un sussidio di malattia; 2° assicurazione di un sussidio di vecchiaia; 3° assicurazione di un sussidio alle vedove o alle famiglie dei soci defunti. È perciò che l'A., mostrando la necessità che tali Società vengano considerate come Istituti di assicurazione poggiati su basi matematiche, si propone di dare le norme per stabilire l'*ordinamento tecnico* in base al quale la Società può venir costituita con criteri razionali, e le norme con le quali sia possibile di calcolare il valore capitale attuale, cioè in un istante qualsiasi, di tutti i sussidi promessi e di tutte le quote da versarsi dagli assicurati, ciò che costituisce il *bilancio tecnico.*

Il Manuale comprende quattro capitoli, ossia: I. *Considerazioni generali sulle Società di mutuo soccorso;* II. *Questioni fondamentali di aritmetica sociale;* III. *Applicazioni;* IV. *Elementi e norme da applicarsi in casi speciali.* Segue un'*appendice* in cui si trova uno schema di statuto per le Società in parola, redatto in base ai principii fondamentali dell'ordinamento razionale e alle prescrizioni della legge vigente (15 aprile 1886) sulla costituzione legale delle Società di mutuo soccorso, e infine la *proposta* dell'ipotesi da farsi per i calcoli relativi ai sussidi d'invalidità.

Il libretto è poi ricchissimo di valori calcolati in base a diverse tavole di mortalità e morbosità.

Il consiglio della previdenza (nell'ultima sessione), dovendo esaminare le condizioni tecniche di diverse casse-pensioni e in particolare il progetto di una cassa d'assicurazione per gli operai addetti all'industria dei marmi di Carrara, non esitò a prendere per guida il manuale del prof. Gardenghi (*).

Ove si aggiunga che questo manuale è redatto con molta chiarezza di stile così da far entrare con facilità il lettore nell'ordine d'idee dell'A., ognuno intenderà di leggieri il nuovo importante contributo portato dal prof. Gardenghi allo svolgersi della previdenza sociale (**).

A. L.

Annuaire pour l'an 1896 publié par le Bureau des Longitudes. *Avec des Notices scientifiques.* In-18 de IV-894 pages, avec 2 Cartes magnétiques. Paris, Gauthier-Villars et fils. — Prix: fr. 1,50; franco, fr. 1,85.

Come ogni anno a quest'epoca è comparso l'*Annuaire du Bureau des Longitudes.* L'annuario per il 1896 contiene in gran copia delle indicazioni pratiche riunite in questo piccolo volume per comodo degli studiosi e degli uomini pratici. Vi si trovano anche articoli dovuti agli scienziati più illustri sulle Monete, la Statistica, la Geografia, la Mineralogia, ecc., infine le notizie seguenti: *Les Forces à distance et les ondulations*; per A. Cornu — *Les Travaux de Fresnel en Optique*; per A. Cornu — *Sur la construction des nouvelles Cartes magnétiques du globe*, intraprese sotto la direzione dell'Ufficio delle Longitudini; per de Bernardières — *Sur une troisième ascension à l'observatoire du sommet du mont Blanc et les travaux exécutés pendant l'été de 1895 dans le massif de cette montagne*; per J. Janssen — *Notice sur la vie et les travaux du contre-amiral Fleuriais*; per de Bernardières — *Allocutions prononcées aux funérailles de M. É. Brunner;* per J. Janssen e F. Tisserand.

(*) V. *Annali del credito e della previdenza*, n. 20, pag. 18 e seguenti.

(**) Il presente manualetto fu premiato con medaglia d'argento dalla Giuria delle Esposizioni riunite di Milano, Sezione Previdenza.

Finita la Redazione il dì 20 gennaio 1896.

DI UNA NUOVA FORMULA
PER CALCOLARE LA SOMMA DELLE POTENZE SIMILI
DEI NUMERI NATURALI

1. Alle formule note per determinare la somma delle potenze simili dei numeri naturali se ne può aggiungere un'altra nella quale non appariscono esplicitamente i coefficienti binomiali. A tale oggetto osserviamo che dalla identità $n^k = n\,(n^{k-1})$ seguono, quando n sia anche intero e positivo, le seguenti:

$$\begin{aligned}
n^k &= n^{k-1} + n^{k-1} + n^{k-1} + \dots + n^{k-1} + n^{k-1} + n^{k-1} \\
(n-1)^k &= (n-1)^{k-1} + (n-1)^{k-1} + (n-1)^{k-1} + \dots + (n-1)^{k-1} + (n-1)^{k-1} \\
(n-2)^k &= (n-2)^{k-1} + (n-2)^{k-1} + (n-2)^{k-1} + \dots + (n-2)^{k-1} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
2^k &= 2^{k-1} + 2^{k-1} \\
1^k &= 1^{k-1}
\end{aligned}$$

ove i secondi membri hanno rispettivamente $n,\ n-1, \dots 2,\ 1$ termini. Sommando per colonne si ha

$$\sum_{x=1}^{x=n} x^k = \sum_{x=1}^{x=n} x^{k-1} + \sum_{x=2}^{x=n} x^{k-1} + \sum_{x=3}^{x=n} x^{k-1} + \dots + \sum_{x=n-1}^{x=n} x^{k-1} + \sum_{x=n}^{x=n} x^{k-1}.$$

Ma per ogni intero positivo $r \leq n$ si ha ($r = 1$ escluso)

$$\sum_{x=r}^{x=n} x^{k-1} = \sum_{x=1}^{x=n} x^{k-1} - \sum_{x=1}^{x=r-1} x^{k-1} \qquad (r = 2, 3, 4, \dots n),$$

onde sostituendo nella precedente

$$\sum_{x=1}^{x=n} x^k = n \sum_{x=1}^{x=n} x^{k-1} - \left[\sum_{x=1}^{x=1} x^{k-1} + \sum_{x=1}^{x=2} x^{k-1} + \dots + \sum_{x=1}^{x=s} x^{k-1} + \dots + \sum_{x=1}^{x=n-1} x^{k-1} \right]$$

ovvero

$$\sum_{x=1}^{x=n} x^k = n \sum_{x=1}^{x=n} x^{k-1} - \sum_{s=1}^{s=n-1} \sum_{x=1}^{x=s} x^{k-1}$$

e posto per brevità $\sum_{x=1}^{x=n} x^k = \sigma_{k,n}$ si avrà per k qualunque,

$$(1) \quad \dots\dots\dots \quad \sigma_{k,n} = n\,\sigma_{k-1,n} - \sum_{s=1}^{s=n-1} \sigma_{k-1,s}$$

2. Di questa formula ci varremo dapprima per stabilire in generale la *forma* della funzione di n che rappresenta il valore di $\sigma_{k,n}$. Vi si ponga a tal fine $k=1$, si avrà

$$\sigma_{1,n} = n\,\sigma_{0,n} - \sum_{s=1}^{s=n-1} \sigma_{0,s}.$$

Ma $\sigma_{0,n} = n$, quindi $\sigma_{0,s} = s$, $\sum_{s=1}^{s=n-1} \sigma_{0,s} = \sum_{s=1}^{s=n-1} s = \sigma_{1,n} - n$

onde

$$\sigma_{1,n} = n^2 - \sigma_{1,n} + n$$

ovvero la notissima relazione

$$\sigma_{1,n} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

La somma $\sigma_{k,n}$ per $k=1$, è dunque una funzione intera di grado $k+1=2$ in n. Supponiamo che questo fatto si verifichi per alcuni valori consecutivi dell'esponente k, e precisamente supponiamo che per $\lambda = 1, 2, 3, \ldots, k-1$ la somma $\sigma_{\lambda,n}$ sia definita dalla relazione

$$(2) \qquad \sigma_{\lambda,n} = a_{0,\lambda}\,n^{\lambda+1} + a_{1,\lambda}\,n^{\lambda} + \ldots + a_{\lambda,\lambda}\,n + a_{\lambda+1,\lambda}$$

e dimostriamo che una relazione analoga sussiste per $\lambda = k$.

Poniamo infatti nella (2) $\lambda = k-1$ e sostituiamo il valore così trovato di $\sigma_{k-1,n}$ (e quello di $\sigma_{k-1,s}$) nella (1). Avremo subito:

$$\sigma_{k,n} = n\left[a_{0,k-1}\,n^{k} + a_{1,k-1}\,n^{k-1} + \ldots + a_{k,k-1}\right] -$$
$$\sum_{s=1}^{s=n-1}\left(a_{0,k-1}\,s^{k} + a_{1,k-1}\,s^{k-1} + \ldots + a_{k-1,k-1}\,s + a_{k,k-1}\right).$$

Ma alla $\sum$ del secondo membro può sostituirsi una somma di $k+1$ termini della forma $\sum_{s=1}^{s=n-1} a_{k-r,k-1}\cdot s^r = a_{k-r,k-1}\cdot\sigma_{r,n-1}$ $(r=k,\ k-1,\ \ldots\ 1,\ 0)$, quindi la relazione precedente diviene:

$$\sigma_{k,n} = n\left[a_{0,k-1}\,n^{k} + a_{1,k-1}\,n^{k-1} + \ldots + a_{k,k-1}\right] -$$
$$\left[a_{0,k-1}\,\sigma_{k,n-1} + a_{1,k-1}\,\sigma_{k-1,n-1} + \ldots + a_{k-1,k-1}\,\sigma_{1,n-1} + a_{k,k-1}\,\sigma_{0,n-1}\right].$$

Per la prima delle σ del secondo membro, che ha l'indice k, si ha evidentemente

$$\sigma_{k,n-1} = \sigma_{k,n} - n^{k}$$

onde sostituendo e trasportando nel primo membro il termine $-a_{0,k-1}\sigma_{k,n}$ si ricava

$$(\alpha)\qquad \sigma_{k,n} = \frac{n[a_{0,k-1}n^k + a_{1,k-1}n^{k-1} + \dots + a_{k,k-1}] + a_{0,k-1}n^k}{1+a_{0,k-1}} - \frac{a_{1,k-1}\sigma_{k-1,n-1} + a_{2,k-1}\sigma_{k-2,n-1} + \dots + a_{k,k-1}\sigma_{0,n-1}}{1+a_{0,k-1}}.$$

Ma le σ del secondo membro hanno indice non maggiore di $k-1$, e quindi, a causa della (2), sono funzioni intere rispettivamente di grado k, $k-1$, ... 2, 1 nella variabile $n-1$, per cui anche nella variabile n. Ne segue immediatamente che il secondo membro dell'ultima relazione è una funzione intera di grado $k+1$ in n, sicchè potremo scrivere

$$\sigma_{k,n} = a_{0,k}n^{k+1} + a_{1,k}n^k + \dots + a_{k,k}n + a_{k+1,k}$$

come si voleva provare.

3. La formula (α) può ora ritenersi vera per *qualunque* valore di k, e poichè la quantità entro la prima parentesi del secondo membro è $\sigma_{k-1,n}$, assumerà la forma

$$(3)\qquad \sigma_{k,n} = \frac{n[\sigma_{k-1,n} + a_{0,k-1}n^{k-1}]}{1+a_{0,k-1}} - \frac{a_{1,k-1}\sigma_{k-1,n-1} + a_{2,k-1}\sigma_{k-2,n-1} + \dots + a_{k-1,k-1}\sigma_{1,n-1} + a_{k,k-1}\sigma_{0,n-1}}{1+a_{0,k-1}}.$$

Questa formula serve a determinare il valore di $\sigma_{k,n}$ quando siano già noti quelli di $\sigma_{0,n}$, $\sigma_{1,n}$, ... $\sigma_{k-1,n}$, giacchè in tale ipotesi sono note anche le $a_{r,k-1}$ ($r = 0, 1, 2, \dots k$) *perchè coefficienti della funzione già trovata*, che rappresenta il valore di $\sigma_{k-1,n}$. La (3) è appunto la formula cercata.

Cesena, dicembre 1895.

ALBERTO TAGIURI.

SULLE FRAZIONI CONTINUE NUMERICHE

(Continuazione: V. pag. 13).

Frazioni continue ad elementi positivi.

14. Da quanto fu detto al numero 9 [*V.* X)] segue immediatamente che: *Ogni frazione continua ad elementi positivi è monovalente o bivalente;* se è monovalente, il suo valore è limite inferiore delle ridotte d'ordine dispari ed è limite superiore di quelle d'ordine pari; se è bivalente, il maggior valore è limite inferiore delle ridotte d'ordine dispari ed il minore è limite superiore delle ridotte d'ordine pari.

Se sono positivi tutti gli elementi della frazione continua

$$\frac{a_1}{b_1+}\,\frac{a_2}{b_2+}\,\frac{a_3}{b_3+}\cdots\cdots$$

e $\frac{\lambda_n}{\mu_n}$ è la n^{ma} ridotta della medesima, sono certamente convergenti le serie

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1}-\frac{a_1\,a_2\,b_3}{\mu_1\,\mu_3}-\frac{a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,b_5}{\mu_3\,\mu_5}-\cdots\cdots$$
$$\frac{\lambda_2}{\mu_2}+\frac{a_1\,a_2\,a_3\,b_4}{\mu_2\,\mu_4}+\frac{a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,b_6}{\mu_4\,\mu_6}+\cdots\cdots$$

e le loro somme sono i valori della frazione continua, che è monovalente o bivalente secondo che le due somme sono uguali o diseguali. Nel primo caso il valore della frazione continua è pur dato dalla serie

$$\frac{a_1}{b_1}-\frac{a_1\,a_2}{\mu_1\,\mu_2}+\frac{a_1\,a_2\,a_3}{\mu_2\,\mu_3}-\frac{a_1\,a_2\,a_3\,a_4}{\mu_3\,\mu_4}+\cdots\cdots$$

che allora è convergente, e nel 2° caso questa serie non è convergente e precisamente è bivalente ed ha gli stessi due valori della frazione continua, cioè questi sono i limiti dell'insieme $(s_1, s_2, s_3, \ldots)$ dove s_n indichi la somma dei primi n termini dell'ultima serie.

15. Teorema. *Se sono tutti positivi i numeri* $a_1, a_2, a_3, \ldots;$ $b_1, b_2, b_3, \ldots,$ *perchè sia monovalente la frazione continua*

$$\frac{a_1}{b_1+}\,\frac{a_2}{b_2+}\,\frac{a_3}{b_3+}\cdots\cdots$$

è necessario e sufficiente che sia divergente il prodotto di infiniti fattori:

$$\left(1+\frac{b_2}{a_2}b_1\right)\left[1+\frac{b_3}{a_3}\left(b_2+\frac{a_2}{b_1}\right)\right]\left[1+\frac{b_4}{a_4}\left(b_3+\frac{a_3}{b_2+}\frac{a_2}{b_1}\right)\right]\ldots\ldots$$

Dimostrazione. La XII) mostra infatti che, se è soddisfatta la condizione del teorema e soltanto se è soddisfatta, si ha

$$\lim_{m=\infty}\left(\frac{\lambda_{2m}}{\mu_{2m}}-\frac{\lambda_{2m-1}}{\mu_{2m-1}}\right)=0 \quad \text{ossia} \quad \lim\frac{\lambda_{2m}}{\mu_{2m}}=\lim\frac{\lambda_{2m-1}}{\mu_{2m-1}}.$$

La condizione enunciata nel teorema è dunque appunto necessaria e sufficiente perchè le ridotte d'ordine pari e quelle d'ordine dispari tendano al medesimo limite, cioè (V. 14) sia monovalente la frazione continua.

16. Come *Corollario* del teorema precedente abbiamo per es. che: Se sono tutti positivi i numeri $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ ed è divergente il prodotto

$$\left(1+\frac{b_1 b_2}{a_2}\right)\left(1+\frac{b_2 b_3}{a_3}\right)\left(1+\frac{b_3 b_4}{a_4}\right)\ldots,$$

allora è monovalente la frazione continua

$$\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\frac{a_3}{b_3+}\ldots.$$

17. Teorema. *Se* $\frac{\lambda_n}{\mu_n}$ *è la* n^{ma} *ridotta della frazione continua ad elementi positivi ed interi*

$$\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\frac{a_3}{b_3+}\ldots.$$

ed è:

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{\lambda_n+\mu_n}=0.$$

la frazione continua è monovalente ed ha valore irrazionale.

Dimostrazione. Le ridotte d'ordine dispari, come mostrano le X), decrescono sempre e tendono ad un limite, che indicheremo con p; le ridotte d'ordine pari crescono sempre e tendono ad un limite, che non può essere maggiore di p ed indicheremo con q. Supponiamo che esista un numero razionale, che non sia nè maggiore di

p nè minore di q; e tal numero sia la frazione a termini interi $\frac{a}{b}$; questa frazione sarà compresa fra due ridotte consecutive qualunque e sarà per ciò:

$$\left|\frac{\lambda_n}{\mu_n}-\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}}\right|>\left|\frac{a}{b}-\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}}\right|,\quad\left|\frac{\mu_n}{\lambda_n}-\frac{\mu_{n-1}}{\lambda_{n-1}}\right|>\left|\frac{b}{a}-\frac{\mu_{n-1}}{\lambda_{n-1}}\right|$$

dove si son chiuse le differenze tra sbarre per indicare che si debbono prendere i valori assoluti delle medesime. Da queste diseguaglianze, tenendo conto della prima VIII) ed osservando che il valore assoluto di $a\mu_{n-1}-b\lambda_{n-1}$, essendo intero non nullo, non può essere minore di 1, deducesi:

$$b>\frac{\mu_n}{a_1 a_2 \ldots a_n},\qquad a>\frac{\lambda_n}{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

per cui è:

$$a+b>\frac{\lambda_n+\mu_n}{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Dovendo questa relazione sussistere per ogni valore di n, ne segue che, se la condizione del teorema si verifica, deve essere $\frac{1}{a+b}=0$ per cui a e b non possono essere finiti, cioè non può esistere una frazione, che non sia nè maggiore di p nè minore di q e ciò è precisamente quanto dire che q è eguale a p e non è razionale, ossia che la frazione continua è monovalente ed ha valore irrazionale.

18. Come *Corollario I* del numero precedente e della terza XI), possiamo dire che:

Se sono tutti positivi ed interi i numeri $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ ed è divergente il prodotto

$$\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}\frac{b_3}{a_3}\cdots$$

allora è monovalente ed ha valore irrazionale la frazione continua

$$\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\frac{a_3}{b_3+}\cdots$$

19. E come *Corollario II* possiamo dire che:

Se sono tutti positivi ed interi i numeri $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ ed è divergente il prodotto

$$\left(\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_1}{a_2+b_1 b_2}\right)\left(\frac{b_4}{a_4}+\frac{b_2}{a_3+b_2 b_3}\right)\left(\frac{b_5}{a_5}+\frac{b_3}{a_4+b_3 b_4}\right)\cdots,$$

allora è monovalente ed ha valore irrazionale la frazione continua

$$\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\frac{a_3}{b_3+}\cdots.$$

20. Teorema. *Se è monovalente la frazione continua ad elementi positivi*

$$\frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{b}_1+}\frac{\mathrm{a}_2}{\mathrm{b}_2+}\frac{\mathrm{a}_3}{\mathrm{b}_3+}\cdots.$$

perchè sia $\mathrm{u}_1 : \mathrm{u}_0$ *il valore della medesima, è necessario e sufficiente che siano tutte dello stesso segno le quantità* $\mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3, \mathrm{u}_4, \ldots$ *determinate mediante le equazioni III.*

Dimostrazione. Per la V), indicando sempre con $\frac{\lambda_n}{\mu_n}$ la n^{ma} ridotta, si ha:

$$\frac{u_1}{u_0}=\frac{\lambda_{n-1}u_{n+1}+\lambda_n u_n}{\mu_{n-1}u_{n+1}+\mu_n u_n}.$$

Ora una frazione, che abbia per termini le somme degli omonimi termini di due date frazioni, è compresa oppure non è compresa fra le date secondo che i denominatori delle medesime sono di segno uguale o diverso: per ciò, essendo positivi μ_{n-1} e μ_n, il secondo membro dell'ultima eguaglianza è compreso oppure non è compreso fra $\lambda_{n-1}u_{n+1} : \mu_{n-1}u_{n+1}$ e $\lambda_n u_n : \mu_n u_n$, ossia tra $\lambda_{n-1} : \mu_{n-1}$ e $\lambda_n : \mu_n$, secondo che u_n ed u_{n+1} sono di segno uguale o diverso. Concludiamo quindi che, se le u sono tutte dello stesso segno, $\frac{u_1}{u_0}$ è compreso tra $\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}}$ e $\frac{\lambda_n}{\mu_n}$, qualunque sia n, e per ciò è precisamente il valore della frazione continua; se invece non sono tutte del medesimo segno ed è per es. u_{r+1} la prima, che abbia segno diverso da quello di u_1, per cui abbiano diverso segno u_r ed u_{r+1}, $\frac{u_1}{u_0}$ non è allora compreso fra $\frac{\lambda_{r-1}}{\mu_{r-1}}$ e $\frac{\lambda_r}{\mu_r}$ e non può quindi essere uguale al valore della frazione continua, il quale è compreso fra queste due ridotte.

21. Una frazione continua, che abbia tutti i numeratori uguali ad 1 e tutti i denominatori positivi ed interi, la diremo *irreducibile.*

Le proprietà delle frazioni continue irreducibili deduconsi immediatamente da quanto precede; noi, per non fermarci su cose troppo note, ci limiteremo a ricordare che:

Le ridotte d'una frazione continua irreducibile sono frazioni ordinarie irreducibili. Ogni frazione continua irreducibile è monovalente ed ha valore irrazionale.

Applicazioni.

Per provar subito l'importanza delle proposizioni date qui, le utilizzeremo per dimostrare in modo nuovo l'irrazionalità delle potenze di e d'esponente razionale e del quadrato di π.

22. Se nelle equazioni III) si fa

$$u_0 = \cos h x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}, \quad u_1 = \operatorname{sen} h x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

$$a_1 = x, \quad a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = x^2; \quad b_n = 2n - 1$$

si trova:

$$u_{k+1} = \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{2^k (m-1)(m-2)\ldots(m-k)}{(2m-1)!} x^{2m-1},$$

onde (V. 6 e 20) si ha:

$$\operatorname{tg} h x = \frac{\operatorname{sen} h x}{\cos h x} = \frac{x}{1+} \frac{x^2}{3+} \cdots \frac{x^2}{2n-1+} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{1+} \frac{x^2}{3+} \frac{x^2}{5+} \frac{x^2}{7+} \cdots$$

per cui, essendo

$$e^{2x} = 1 + \cfrac{2}{-1 + \cfrac{1}{\operatorname{tg} h x}},$$

ne segue essere:

$$e^{2x} = 1 + \frac{2x}{-x+} \frac{}{1+} \frac{x^2}{3+} \frac{x^2}{5+} \frac{x^2}{7+} \cdots$$

Ponendo $\frac{x}{2}$ in luogo di x ed approfittando della formula di trasformazione I), si ottiene infine:

$$e^x = 1 + \cfrac{2x}{2 - x + \cfrac{x^2}{6 + \cfrac{x^2}{10 + \cfrac{x^2}{14 + \ldots}}}}$$

Il prodotto $\frac{6}{x^2} \frac{10}{x^2} \frac{14}{x^2} \ldots$ è divergente per tutti i valori di x, perchè il suo fattor generale $\frac{2+4n}{x^2}$ aumenta indefinitamente con n, onde (*V*. 18) ne segue che e^x è irrazionale per tutti i valori interi di x e tale è quindi anche per tutti i valori frazionarii di x, perchè, se fosse razionale $e^{\frac{m}{n}}$, sarebbe razionale anche $(e^{\frac{m}{n}})^n$ ossia e^m.

Sono dunque irrazionali tutte le potenze di e *d'esponente razionale* (*).

23. Siccome una frazione continua irreducibile, che abbia per valore un irrazionale quadratico, è necessariamente periodica e dal precedente sviluppo di e^x deducesi subito

$$\frac{e-1}{2} = \frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{10+}\,\frac{1}{14+}\,\frac{1}{18+}\cdots$$

così ne segue immediatamente che $\frac{e-1}{2}$, quindi ancora e, *non può essere irrazionale quadratico, cioè non può essere radice di un'equazione di 2° grado con coefficienti razionali* (**).

24. Se nelle equazioni III) si fa

$$u_0 = \cos x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}, \quad u_1 = \operatorname{sen} x = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$
$$a_1 = -x, \quad a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = -x^2, \quad b_n = -(2n-1),$$

si trova

$$u_{k+1} = \sum_{m=k+1}^{\infty} (-1)^{m-k-1} \frac{2^k (m-1)(m-2)\ldots(m-k)}{(2m-1)!} x^{2m-1},$$

onde (*V*. 6) ne segue essere:

$$\operatorname{tg} x = \frac{-x}{-1+}\,\frac{-x^2}{-3+}\,\frac{-x^2}{-5+}\cdots\frac{-x^2}{-(2n-1)+}\,\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Da questa relazione, mediante le formule di trasformazione I) e II), si deduce subito:

$$1 - x \cot x = \frac{x^2}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{x^2}{4-x^2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{x^2}{6-x^2+}\cdots$$
$$\cdots\frac{x^2}{2(n-1)-x^2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{u_{n+1}}{u_n-u_{n+1}}.$$

(*) Per la *trascendenza* di e e π e per altre questioni celebri nella Storia della Matematica convien leggere il libro, di sole 66 pagine: F. KLEIN - *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*. Leipzig, 1895.

(**) Per gli irrazionali in genere, gli irrazionali quadratici e cubici ed algebrici in particolare, le frazioni continue numeriche usuali ed anche per la trascendenza di π ed e si può pur leggere utilmente il piccolo libro (151 pagine): P. BACHMANN - *Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen*. Leipzig, 1892.

Per quanto fu detto al n. 20, essendo

$$u_k - u_{k+1} = \sum_{m=k}^{\infty} (-1)^{m-k}(2m-2k+1)\frac{2^{k-1}(m-1)\ldots(m-k+1)}{(2m-1)!}x^{2m-1},$$

sussiste quindi, per tutti i valori di x da $-\frac{\pi}{2}$ a $+\frac{\pi}{2}$, il seguente sviluppo di $1 - x\cot x$ in frazione continua ad elementi positivi:

$$1 - x\cot x = \cfrac{x^2}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{x^2}{4 - x^2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{x^2}{6 - x^2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{x^2}{8 - x^2 + \ldots}}}}}}}$$

25. Da quanto fu detto nel precedente numero segue pure che, se nelle equazioni III) si pone

$$a_{2n-1} = x^2, \quad a_{2n} = b_{2n} = 1, \quad b_1 = 2, \quad b_{2n+1} = 2(n+1) - x^2$$

$$v_0 = \operatorname{sen} x, \quad v_1 = \operatorname{sen} x - x\cos x = \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^{m-2}\frac{2(m-1)}{(2m-1)!}x^{2m-1},$$

si deve trovare

$$v_{2k-1} = \sum_{m=k+1}^{\infty} (-1)^{m-k-1}\frac{2^k(m-1)(m-2)\ldots(m-k)}{(2m-1)!}x^{2m-1},$$

$$v_{2k} = \sum_{m=k+1}^{\infty} (-1)^{m-k-1}(2m-2k-1)\frac{2^k(m-1)\ldots(m-k)}{(2m-1)!}x^{2m-1}.$$

Ciò si verifica facilmente e si perviene così per via più diretta al precedente sviluppo di $1 - x\cot x$.

26. Si riconosce ora subito che π ed anche il suo quadrato sono irrazionali. Infatti, se il quadrato di π fosse razionale, tale sarebbe ancora quello di $\frac{\pi}{2}$; ma, se il quadrato di $\frac{\pi}{2}$ fosse la frazione a termini interi $\frac{r}{s}$, ponendo $x^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{r}{s}$ nello sviluppo precedente di $1 - x\cot x$ e ricorrendo alla formula di trasformazione I), si otterrebbe:

$$1 = \frac{r}{2s+}\,\frac{s}{1+}\,\frac{r}{4s-r+}\,\frac{s}{1+}\,\frac{r}{6s-r+}\cdots.$$

Questa uguaglianza è assurda, perchè (V. 18) il secondo membro ha valore irrazionale, essendo divergente il prodotto

$$\frac{2s}{r} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{4s-r}{r} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{6s-r}{r} \cdot \frac{1}{s} \cdot \cdot \cdot$$

come si riconosce immediatamente osservando che $\frac{2ns-r}{r} \cdot \frac{1}{s}$, ossia $2n\frac{1}{r} - \frac{1}{s}$, cresce indefinitamente con n. È dunque assurdo l'ammettere, che sia razionale il quadrato di π, per cui si conclude che π^2 *è irrazionale ed è quindi irrazionale anche* π.

27. Il pregio delle rigorose dimostrazioni date in queste applicazioni consiste specialmente in ciò, che la validità degli sviluppi dati ai numeri 22 e 24 (*V.* 25) e la prova dell'irrazionalità delle potenze di e d'esponente razionale e del quadrato di π sono fondate solo sulle proposizioni semplicissime dei numeri 20 e 18.

Genova, settembre 1895.

F. Giudice.

TEMI DI MATEMATICA DATI PER L'ESAME DI MATURITÀ
IN GINNASI E SCUOLE REALI SUPERIORI DELL'AUSTRIA-UNGHERIA
alla fine degli anni scolastici 1891-92 e 1892-93.

(*Continuazione: V. pag. 27, 55, 97, 148, 184 dell'anno IX, 25, 58 dell'anno X e 20 dell'anno XI*).

Rudolfswert: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Dopo quanti anni sarà estinto un prestito di 4000000 f. al 6 % se la rata semestrale d'ammortamento importa 144500 f.? Qual'è la prima e quale l'ultima rata?

2. Un cono retto viene troncato alla distanza di 2 *m.* dalla base talchè il volume del tronco è di 36 $m.^3$ Se le due basi stanno fra loro come 5 : 3, quale è l'altezza e quale il volume dell'intiero cono, e quale l'inclinazione del lato sulla base?

3. Sono condotte delle tangenti all'ellisse $4x^2 + 25y^2 = 100$ da quel punto che ha per coordinate i valori intieri e positivi di x ed y che soddisfanno l'equazione $3x + 1\frac{2}{3}y = 17$. Si domandano le equazioni delle tangenti e l'angolo da esse compreso.

Znaim: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Una somma di 6400 (k) f deve venir pagata con 12 ($2n$) rate annuali eguali, calcolando l'interesse composto nei primi 6 (n) anni al 4 (p_1.) % e quindi al 5 (p_2.) %. Quanto importa la rata annuale?

2. $11 \cdot 4^{2x+2} + 8326 \cdot 9^{x-1} = 132 \cdot 9^{x+1} - 8 \cdot 4^{2x+5}$.

3. Una sfera vuota di ferro pesa 30 (k) $Kg.$ e s'immerge a metà nell'acqua, qual'è la grossezza del guscio, se il peso specifico del ferro si prende eguale a 7,7?

4. Sono condotte delle tangenti alla parabola $y^2 = 4x$ nei punti d'intersezione colla retta $x + y = 3$. Calcolare l'area del triangolo formato dalla retta colle due tangenti.

CZERNOWITZ: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Dividere il numero 18 in tre parti, che formino una progressione aritmetica, e tali che il quadrato della terza parte sia di 9 minore della doppia somma dei quadrati delle due prime parti. Quali sono le tre parti?

2. Qual'è la superficie d'una sfera inscritta ad un cono equilatero che ha l'altezza $h = 3$?

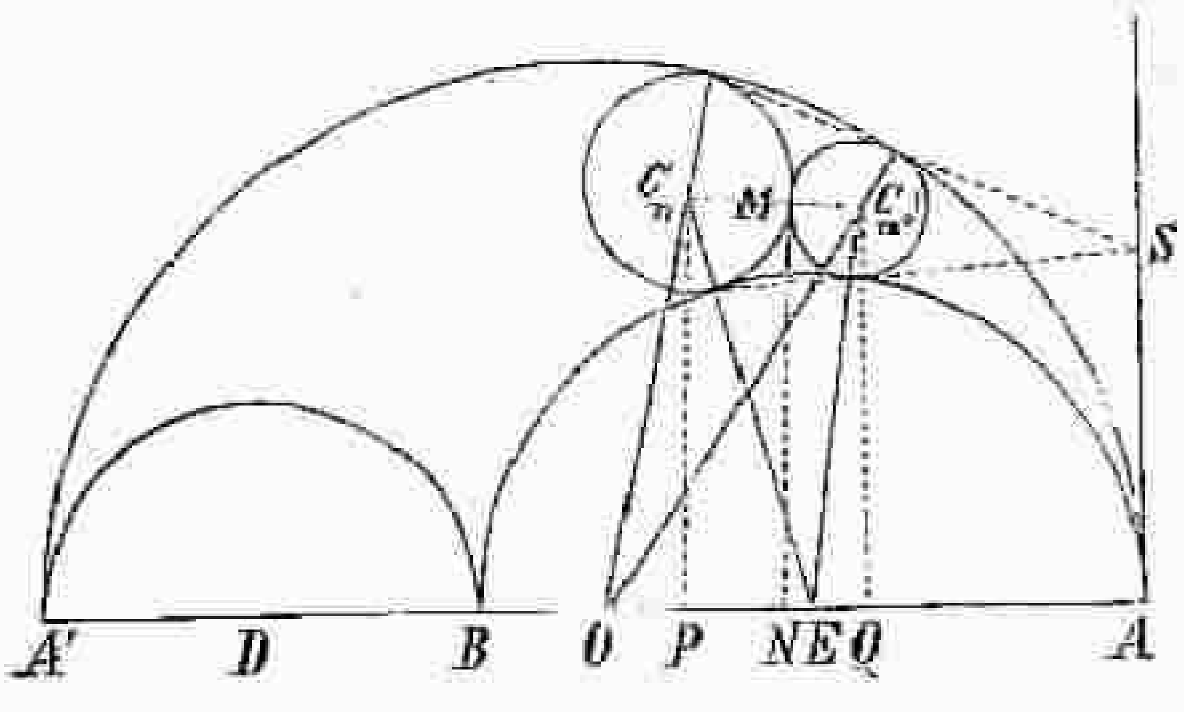
3. Un angolo d'un triangolo è $\alpha = 57^0\, 7'\, 18''$, la sua bisettrice è $b_1 = 10{,}248\, m.$ ed uno dei lati che lo comprendono è $b = 14\, m.$ Si domandano gli altri lati ed angoli del triangolo e l'area.

4. La tangente condotta al cerchio $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ dal punto $x = -3, y = 0$ divide il cerchio $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ in due parti disuguali. Si domanda l'area del segmento minore.

(Continua).

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Problema di geometria elementare. — *Si divide un segmento rettilineo* A'A *in due parti* A'B = a, BA = b *e sopra* A'A, A'B, BA *quali diametri si descrivono tre semicirconferenze* σ, α, β, *nell'arbelo o spazio compreso fra queste si costruisce un cerchio* α_1 *tangente a ciascuna, indi nello spazio racchiuso fra i cerchi* σ, α_1, β *si disegna la circonferenza* α_2 *che li tocchi; parimente nello spazio compreso fra le linee* σ, α_2, β *si descrive il cerchio* α_3 *ad essi tangente e così di seguito; esprimere il raggio del cerchio* α_n *in funzione di* a, b, n.



Rappresentino O, D, E i punti medii dei segmenti $A'A$, $A'B$, BA; due circonferenze successive α_n, α_{n+1} abbiano i raggi r_n, r_{n+1}; i loro centri C_n, C_{n+1} ed il contatto M si proiettino ortogonalmente nei punti P, Q, N della retta $A'A$. È facile stabilire le relazioni $C_nC_{n+1} = r_n + r_{n+1}$, $EC_n = \frac{b}{2} + r_n$, $EC_{n+1} = \frac{b}{2} + r_{n+1}$, $OC_n = \frac{a+b}{2} - r_n$, $OC_{n+1} = \frac{a+b}{2} - r_{n+1}$; dai triangoli OEC_n,

OPC_n ricaveremo l'eguaglianze $\overline{EC}_n^2 = \overline{OC}_n^2 + \overline{OE}^2 - 2\,OE.OP$, $\overline{PC}_n^2 = \overline{OC}_n^2 - \overline{OP}_n^2$ dalle quali si traggono $OP = \frac{a+b}{2} - \left(\frac{2b+a}{a}\right) r_n$, $PC_n = \frac{1}{a}\sqrt{2b(a+b)r_n(a-2r_n)}$; in simil modo per i triangoli OEC_{n+1}, OQC_{n+1} otteniamo

$$OQ = \frac{a+b}{2} - \left(\frac{2b+a}{a}\right) r_{n+1}, \quad QC_{n+1} = \frac{1}{a}\sqrt{2b(a+b)r_{n+1}(a-2r_{n+1})};$$

inoltre il trapezio birettangolo $C_n P Q C_{n+1}$ fornisce $\overline{C_n C_{n+1}}^2 = \overline{PQ}^2 + (PC_n - QC_{n+1})^2$, ovvero

$$(r_n + r_{n+1})^2 = 2\,\frac{b}{a^2}\,(a+b)\left[\sqrt{r_n(a-2r_n)} - \sqrt{r_{n+1}(a-2r_{n+1})}\right] + \left(\frac{2b+a}{a}\right)^2 (r_n - r_{n+1})^2$$ che si trasforma nell'equazione razionale

$$(1) \qquad a^2(a+b)^2\left(\frac{1}{r_{n+1}} - \frac{1}{r_n}\right)^2 - 4ab(a+b)\left(\frac{1}{r_{n+1}} - \frac{1}{r_n}\right) + 4(2b+a)^2 - 8\,\frac{ab}{r_n}(a+b) = 0.$$

Risolvendola avremo

$$\frac{1}{r_{n+1}} - \frac{1}{r_n} = \frac{2}{b(a+b)}\left[a \pm \sqrt{\frac{2ab}{r_n}(a+b) - 4b(a+b)}\right].$$

Col porvi $n=0$, $r_0 = \frac{a}{2}$, raggio del cerchio α, risulta $2r_1 = \frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$ e per $n=1$ si trova $2r_2 = \frac{ab(a+b)}{4a^2+ab+b^2}$; in generale col supporre

$$(2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2r_n = \frac{ab(a+b)}{n^2a^2+ab+b^2}$$

dall'equazione (1) dedurremo $2r_{n+1} = \frac{ab(a+b)}{(n\pm 1)^2a^2+ab+b^2}$ e per $n>1$ si dovrà prendere il segno $+$ per il primo coefficiente del denominatore, così la legge è verificata. Ne consegue

$$(3) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad PC_n = \frac{ab(a+b)n}{n^2a^2+ab+b^2}$$

la quale proposizione di PAPPO (*Mathematicae collectiones*, liber IV) si enuncia *la distanza del centro* C_n *dalla retta* A'A *stà al diametro* $2r_n$ *del cerchio corrispondente* α_n *nel rapporto di* n *all'unità.*

Si dimostrano con semplice ragionamento le relazioni

$$MN = \frac{r_n QC_{n+1} + r_{n+1} PC_n}{r_n + r_{n+1}}, \qquad ON = \frac{r_n OQ + r_{n+1} OP}{r_n + r_{n+1}};$$

che per i valori precedenti si riducono alle

$$MN = \frac{2 r_n r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}} (2n + 1), \qquad ON = \frac{a+b}{2} - 2\left(\frac{2b+a}{a}\right) \frac{r_n r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}},$$

ne derivano

$$NA = 2\left(\frac{2b+a}{a}\right) \frac{r_n r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}}, \quad \overline{MA}^2 = \left[\left(\frac{2b+a}{a}\right)^2 + (2n+1)^2\right]$$

$$\left(\frac{2 r_n r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}}\right)^2 = 4b\left(\frac{a+b}{a}\right) \frac{r_n r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}}$$

a motivo di

$$\frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_{n+1}} = \frac{(2b+a)^2 + a^2(2n+1)^2}{ab(a+b)}$$

si conchiude la proprietà $\dfrac{\overline{MA}^2}{\overline{NA}} = \dfrac{2b(a+b)}{a+2b}$, dunque prendendo A per origine di questo segmento sulla retta AA', ed A_0 per suo termine, *il luogo geometrico di* M *è la circonferenza descritta col diametro* $\mathrm{AA_0}$; *dove* $\mathrm{A_0}$ *divide internamente* A'A *nella ragione di* a : 2b; *il luogo dei centri* $\mathrm{C_n}$ *è l'ellisse avente i fuochi* O *ed* E, *a causa di* $\mathrm{OC_n + EC_n} = \dfrac{\mathrm{a}}{2} + \mathrm{b}$. La corda dei contatti fra il cerchio α_n e ciascuno dei cerchi β, σ passa costantemente per il centro di omotetia inversa di questi cerchi.

A tutte le proposizioni dimostrate si giunge subito col metodo d'inversione; poichè scegliendo per polo il punto A e per potenza il quadrato $m^2 = b(a+b)$ della tangente condotta dal punto A al cerchio α, i cerchi σ e β passando per il polo si convertono in due rette σ', β' normali ad AA', tirate per B ed A' ed il cerchio α si trasformerà in se stesso. Ora i cerchi α'_n tangenti alle parallele σ', β' ed esternamente fra loro hanno il diametro a, e la distanza del polo A dal loro centro C'_n sarà evidentemente $d'_n = \sqrt{\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 + n^2 a^2}$; quindi il diametro del cerchio inverso α_n verrà determinato per $2r_n = \dfrac{m^2 a}{d'^2_n - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{ab(a+b)}{b^2 + ab + n^2 a^2}$, e detto φ_n l'angolo $A'AC_n$ si troverà pure tang $\varphi_n = \dfrac{2na}{a+2b}$.

Il numero $x_1 = \dfrac{15}{19}$ corrispondente al raggio del cerchio α_1 per i valori particolari $a = 3$, $b = 2$ si legge nel *liber assumptorum*, che vien attribuito ad Archimede come si riferisce alla pagina 136 del libro 2° della pregiata opera *Le scienze esatte nell'antica Grecia* del Prof. Gino Loria.

Avvertiremo infine che nell'ipotesi di $a = \infty$ e b costante dalle formule (2), (3) si deducono $\lim r_n = \dfrac{b}{2n^2}$, $\lim PC_n = \dfrac{b}{n}$, le circonferenze σ, α divenendo le perpendicolari innalzate dai punti A, B alla retta AA'.

G. Bellacchi.

Sopra una disposizione particolare dei triangoli simili. (*Continuazione:* V. p. 103 del vol. X). — 6 Il triangolo coi vertici nei centri dei cerchi α, β, γ, e che indicheremo rispettivamente con H_α, H_β, H_γ, è pure simile ai triangoli ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ ...., e passante per K. Difatti i suoi lati sono rispettivamente perpendicolari alle rette a, b, c, le quali formano appunto fra loro angoli rispettivamente eguali a quelli dei noti triangoli simili ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ .... (n. 3); l'angolo dei raggi KH_β, KH_γ, è evidentemente supplementare all' ang $(\beta, \gamma) = $ ang $(b, c) =$ ang $H_\beta H_\alpha H_\gamma$; ne viene che il quadrangolo $K H_\beta H_\alpha H_\gamma$, avendo gli angoli in K e in H_α opposti supplementari, è inscrittibile in un cerchio; ossia il cerchio circoscritto al triangolo $H_\alpha H_\beta H_\gamma$ passa per K, e perciò gode pur esso la proprietà già notata al n. 5.

7. Chiamo *retta di Pascal* rispetto un triangolo quella che contiene i punti d'incontro dei lati colle tangenti nei vertici opposti, al cerchio ad esso circoscritto.

Ciò posto si considerino le rette di Pascal rispetto i triangoli $I_c I_b A_1$, $I_c I_\alpha B_1'$, $I_\alpha I_b C_1''$ inscritti rispettivamente nei cerchi α, β, γ (Tav. II, fig. 1ª del vol. X) determinate dalle tre coppie di punti d'incontro forniti dai tre sistemi di due coppie di rette:

$$\text{I}: (I_b A_1,\ I_c B_1');\ (I_b C_1'',\ I_a A_1). \quad \text{II}: (I_c B_1',\ I_a C_1'');\ (I_c A_1,\ I_a B_1')$$
$$\text{III}: (I_b C_1'',\ I_a B_1');\ (I_b A_1,\ I_c C_1'')$$

le cui equazioni riferite all' origine I_α, alla retta i come asse delle ordinate, alla perpendicolare ad essa in I_a come asse delle ascisse, sono:

$$\begin{array}{lll}
\text{I.} & (y = - m_c x + i_b,\ y = - m_a x - i_c; & (y = m_a x + i_b,\ y = m_b x - i_c) \\
\text{II.} & (y = - m_a x - i_c,\ y = - m_b x); & (y = m_b x - i_c,\ y = m_c x) \\
\text{III.} & (y = m_a x + i_b,\ y = m_c x); & (y = - m_c x + i_b,\ y = - m_b x)
\end{array}$$

dove è $I_a I_b = i_b$, $I_a I_c = - i_c$; tang $(90^0 - A) = m_a$, tang $(90^0 - B) = m_b$, tang $(90^0 - C) = m_c$.

I due sistemi $x'y'$, $x''y''$ di coordinate di punti fornito dalla soluzione comune di ciascuna coppia:

$$\text{I.} \left\{ \begin{array}{l} x' = \dfrac{i_b + i_c}{m_a - m_a} \\[2ex] y' = - m_c \dfrac{i_b + i_c}{m_c - m_a} + i_b \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x'' = - \dfrac{i_b + i_c}{m_a - m_b} \\[2ex] y'' = - m_a \dfrac{i_b + i_c}{m_a - m_b} + i_b \end{array} \right.$$

$$\text{II.} \left\{ \begin{array}{l} x' = \dfrac{- i_c}{m_a - m_b} \\[2ex] y' = \dfrac{m_b i_c}{m_a - m_b} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x'' = \dfrac{- i_c}{m_c - m_b} \\[2ex] y'' = \dfrac{- m_c i_c}{m_c - m_b} \end{array} \right.$$

$$\text{III.} \left\{ \begin{array}{l} x' = \dfrac{i_b}{m_c - m_a} \\[2ex] y' = \dfrac{m_c i_b}{m_c - m_a} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x'' = \dfrac{i_b}{m_c - m_b} \\[2ex] y'' = \dfrac{- m_b i_b}{m_c - m_b} \end{array} \right.$$

sostituiti successivamente nell' equazione della retta congiungente due punti di coordinate note $x'y'$, $x''y''$:

$$x(y'-y'')-y(x'-x'')-y'x''+x'y''=0,$$

danno le tre rette di Pascal considerate

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & (m_b m_c - m_a^2)\,x + (m_b - m_c)\,y - i_c\,(m_a + m_c) - i_b\,(m_a + m_b) = 0 \\ \text{II.} & (m_b^2 - m_a m_c)\,x + (m_a - m_c)\,y - i_c\,(m_b + m_c) = 0 \\ \text{III.} & (m_c^2 - m_a m_b)\,x + (m_b - m_a)\,y - i_b\,(m_b + m_c) = 0 \end{array}$$

di cui il determinante dei coefficienti è:

$$\begin{vmatrix} -m_a^2 + m_b m_c & m_b - m_c & -i_c(m_a + m_c) - i_b(m_a + m_b) \\ m_b^2 - m_a m_c & m_a - m_c & -i_c(m_b + m_c) \\ m_c^2 - m_a m_b & m_b - m_a & -i_b(m_b + m_c) \end{vmatrix}.$$

Dico che se è I_a punto di mezzo di $I_b I_c$ ed $A = 90^0$, le tre rette di Pascal considerate, s'incontrano in un punto. Difatti essendo allora $m_a = 0$, $i_b = i_c$ ed inoltre

$$m_b m_c = 1\,;$$

quel determinante diventa

$$-i_b(m_b + m_c)(m_b - m_c)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m_b & 1 & 1 \\ -m_c & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

che è la condizione necessaria perchè p_α, p_β, p_γ passino per lo stesso punto.

La costruzione da fare per trovarsi nel caso testè considerato è la seguente.

Si faccia centro nel punto di mezzo I_a d'un segmento $I_b I_c$, e con raggio $I_a I_b = I_a I_c$ si descriva un cerchio α. Su questo cerchio si prenda un punto qualunque K, e si costruiscano i cerchi $K I_a I_b \equiv \gamma$, $K I_a I_c \equiv \beta$. Come risulta dalla proprietà del n. 2, le tangenti a γ su I_b e a β in I_c s'incontrano in un punto A_1 di α; così pure le tangenti a γ in I_a e ad α in I_c s'incontrano in un punto B_1' di β, a le tangenti a β in I_a e ad α in I_b s'incontrano in un punto C_1'' di γ. Le rette di Pascal rispetto ai triangoli $I_c I_b A_1$, $I_c I_a B_1'$, $I_a I_b C_1''$ così ottenuti s'incontrano allora nello stesso punto P. Dalla relazione delle coordinate cartesiane di P con ang. $B =$ ang. $ac =$ ang. $\alpha\gamma$ (n. 3) ricavata dalla soluzione comune di due rette di Pascal nelle condizioni del teorema; e dalla relazione di B coll'angolo θ che il raggio vettore ρ di P fa coll'asse delle x, risulta assai facilmente

$$\rho^2 = 1 + 3\cos^2\theta,$$

equazione della curva luogo dei punti come P.

8. Si prendano ora tre punti qualunque I_a, I_b, I_c del piano: supponiamo che in questi punti s'incontrino i lati omologhi a, a'; b, b'; c, c' di due triangoli simili ABC, $A'B'C'$; in altri termini sieno I_a, I_b, I_c i punti d'incontro dei lati omologhi a, a'; b, b'; c, c' di due triangoli simili ABC, $A'B'C'$ comunque posti sul piano. È chiaro che i vertici omologhi A, A' giacciono in un

cerchio α passante per I_b, I_c; B, B' in un cerchio β passante per I_a, I_c; C, C' su un cerchio γ passante per I_a, I_b. Per considerazioni affatto analoghe a quelle dei nn. 1 e 3 i cerchi α, β, γ passano per un unico punto K; i lati omologhi come a, b, c di tutti i triangoli simili ai triangoli dati coi vertici omologhi come A, B, C situati in α, β e γ passano per I_a, I_b, I_c, e tutti questi triangoli sono evanescenti verso il punto K.

Qui spariscono tutte quelle proprietà che dipendevano dall'allineamento dei punti I_a, I_b, I_c, fra cui quella dei cerchi α, β, γ di formare intorno al loro punto comune K angoli eguali a quelli dei triangoli simili.

Ciò posto si imaginino i punti I_a, I_b, I_c situati a distanza infinita. Allora i tre cerchi α, β, γ si riducono a tre rette concorrenti in un punto K. Infatti i triangoli simili coi vertici omologhi rispettivamente su quelle tre rette hanno i lati omologhi incontrantisi all'infinito, ossia paralleli; vale a dire sono omotetici.

Dunque l'omotetia dei triangoli non è che un caso particolare di questa disposizione dei triangoli simili da me studiata.

9. Si può ormai scorgere agevolmente come le precedenti proprietà siano in parte estendibili ai poligoni simili. A tal uopo, dati due poligoni simili, basta considerare le coppie dei triangoli simili cui danno luogo le diagonali condotte da due vertici omologhi. I vertici omologhi si troveranno su altrettanti cerchi tutti passanti per un medesimo punto; i lati omologhi e le diagonali omologhe passeranno rispettivamente nei punti dove quei cerchi s'incontrano a due a due.

Emilio Cominotto.

Ancora sulla simmetria in alcune dimostrazioni della geometria elementare. (V. Anno X p. 163 e anno XI p. 28) — Ringrazio il sig. prof. Riboni di aver rivolta la sua attenzione alla nota suddetta, e ho piacere ch'egli convenga in massima nelle osservazioni in essa contenute. — L'egregio professore mentre trova lodevole la modificazione da me suggerita alla dimostrazione della prop. VI del libro XI di Euclide, non crede possa dirsi altrettanto per gli altri esempi da me citati, e fa in proposito alcune considerazioni. Permetta ora che io risponda alle sue con altre brevi osservazioni.

Non credo di aver esagerato nell'affermare che la ordinaria dimostrazione del teorema: *la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due retti*, è artificiosa in confronto dell'altra, da me indicata, nella quale si conducono per un punto qualunque le parallele ai lati del triangolo.

Certo, un artificio v'è, e lo stesso prof. Riboni lo conferma, facendo però osservare che, in grazia di esso, « non resta che tracciare la parallela al lato opposto al vertice scelto, e ciò *con notevole semplicità nella costruzione* » Egli entra così nella questione se la mia dimostrazione sia o no preferibile, dal lato didattico, a quella ordinaria; questione che, in realtà, io non avevo affatto affrontato, avendo avuto soltanto intenzione di presentare una dimostrazione che rivestisse il carattere della simmetria. Ora, è certo che la costruzione richiesta dalla mia dimostrazione è più complicata dell'ordinaria, ma non tanto quanto a prima vista può parere, perchè la figura formata dalle tre parallele rimane completamente staccata dal triangolo, e perciò riesce chiara ad ogni alunno, mentre quella della dimostrazione ordinaria, benchè più semplice, può forse riuscire confusa. Ma la semplicità della costruzione non costituisce la principal dote di una dimostrazione; chè, alcune volte, le figure che accompagnano le dimostrazioni più intuitive non sono le più semplici. Resta il ragionamento; ma, se si osserva che, nella ordinaria dimostrazione del suddetto teorema, i tre angoli formati attorno al vertice scelto sono rispettivamente uguali a quelli del triangolo *per ragioni tutte differenti*, mentre gli angoli formati attorno ad un punto qualunque sono uguali a quelli del triangolo *per una stessa ragione*, mi pare non si possa negare che il ragionamento seguito nella dimostrazione simmetrica sia tale da essere più facilmente compreso, e meglio ricordato dagli alunni.

Il prof. Riboni non trova buona la mia dimostrazione simmetrica del teorema: *in ogni triangolo un lato è minore della somma degli altri due*, perchè « sebbene assai spedita, richiede che si sappia costruire la bisettrice di un angolo « od almeno che ne sia provata l'esistenza, premessa non necessaria, e che da « buona parte dei trattatisti è data in seguito » A ciò si può obbiettare che una certa dimostrazine può convenire ad alcuni libri e ad altri no; e se si volessero chiamare buone soltanto quelle dimostrazioni che convengono a tutti, poche se ne conterebbero. La mia semplice dimostrazione può star bene p. es. negli elementi di Euclide, di Sannia e D' Ovidio, di Faifofer,... nei quali l'esistenza della bisettrice è provata fin dal principio; gli altri autori trovino, se vogliono, un'altra dimostrazione, chè non ve ne sarà in generale una sola, neanche se si vuole che essa abbia il pregio della simmetria. Eccone p. es. un' altra pure simmetrica e semplice che potrebbe star benissimo negli elementi del De Paolis. « Sia il triangolo ABC; basta provare che il teorema sussiste per il lato che « supera ciascuno degli altri due. Sia questo il lato BC. Gli angoli adiacenti « a questo lato sono ambedue acuti, e quindi l'altezza AD, relativa al lato BC, « cade dentro il triangolo. Ora si ha: $BD < AB$, $DC < AC$; quindi « $BD + DC < AB + AC$, cioè $BC < AB + AC$. » Del resto, per la stessa ragione per la quale all'egregio prof. Riboni non par buona la mia dimostrazione potrebbe a qualcuno non piacere quella ch'egli suggerisce per il teorema: *in un triangolo la bisettrice di un angolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due*, poichè la proprietà: *due triangoli di uguali altezze stanno tra loro come le basi*, è una premessa davvero non necessaria per stabilire il teorema di cui si tratta, senza contare che qualcuno potrebbe anche essere dispiacente di dover ricorrere al confronto di due superficie per dimostrare una proprietà relativa a segmenti rettilinei.

Una delle dimostrazioni simmetriche da me indicate pel teorema relativo alla distanza di due rette sghembe, si trova già nel Sannia e D'Ovidio.

In conclusione, mi pare, contrariamente a quanto afferma il prof. Riboni, di non aver sacrificato, al pregio della simmetria, le altre doti apprezzabili dal lato didattico.

Il Prof. Riboni termina osservando che la mia cura per la simmetria è tanto più eccessiva, « in quanto che la preferenza data a qualche elemento nella di-

« mostrazione è apparente più che altro, poichè ciascuno degli elementi di cui « si parla può trovarsi nelle stesse condizioni in cui è posto uno di essi »; cosicchè, in sostanza, la preferenza sarebbe apparente per la ragione che può essere preferito uno qualunque degli elementi di cui si tratta. Ciò non mi pare giusto. La preferenza v'è invece *di fatto*; e ciò è tanto vero, che di essa rimane traccia in tutta la dimostrazione, appena uno degli elementi sia posto in condizioni diverse dagli altri, e che, per questo soltanto, la dimostrazione stessa cessa di essere simmetrica.

Fermo, febbraio 1896.

CORRADO CIAMBERLINI.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 231**, 233**, 250, 258**, 259**, 263*, 264*, 265*, 266* e 267*

231.** *Di due fasci proiettivi di raggi* (U), (U'), *giacenti nello stesso piano, sono noti: il centro di proiettività* U'', *due punti* M, N *per cui passano due raggi corrispondenti, gli angoli* θ, θ' *che questi formano con le rette* U''U, U''U', *e la retta* UU'. *Si domanda di costruire i due fasci, e di discutere il problema.* (A. DEL RE).

Risoluzioni analoghe dai Sigg. *V. Columbo* e *G. Gallucci*, studenti nella R. Università di Napoli.

La quistione si riduce a trovare i punti U, U' poichè allora essendo noti il centro di proiettività U'', due raggi corrispondenti UM, $U'N$ e i centri U, U' dei due fasci questi si possono costruire.

Si descriva su MU'' un segmento di circolo capace dell'angolo θ, completando il relativo circolo, e su NU'' un segmento capace dell'angolo θ', completando il circolo. Questi circoli taglieranno in generale la retta $UU' \equiv s$ in quattro punti U, U_1 ed U', U_1'. Allora per centri dei due fasci si potranno scegliere U, U'; U, U_1'; U_1, U'; U_1, U_1', il che darebbe quattro soluzioni. Ma su MU'' ed NU'' si possono descrivere *da una parte e dall'altra* due segmenti capaci degli angoli θ, θ' per modo che esistono in generale due altri punti U e due altri U' e siano U_2, U_3 ed U_2', U_3'. Allora potendosi accoppiare ciascuno dei quattro punti U coi punti U', si hanno in generale 16 soluzioni del problema.

Se U'' è fuori di s ed M, N non cadono in s e si trovano rispetto ad U'' dall'altra parte di s, il problema avrà tutte le soluzioni possibili. Se ciò non avviene qualcuno dei circoli passanti per M, U'' od N, U'' può non incontrare s od essere tangente ad s, riducendosi le soluzioni a 12 o meno di 12 od anche a nessuna.

Se U'' cade in s il numero delle soluzioni può ancora venir diminuito, potendo qualcuno dei circoli ausiliari riuscire tangente ad s, senza tuttavia diventar zero.

Riguardo ai valori di θ si può osservare che se θ è di $90°$ i punti U_2, U_3 coincidono con U, U_1 e così per $\theta' = 90°$ coincideranno U' con U_2 e U_1' con U_3'. Se poi θ, θ' son zero si ha un solo punto $U \equiv (s, MU'')$ e un sol punto $U' \equiv (s, NU'')$. In ambedue i casi il numero delle soluzioni diminuisce (*).

233.** *Di due fasci proiettivi di raggi* (U), (U′), *giacenti nello stesso piano, sono noti: i centri* U, U′, *il centro di proiettività* U″, *i punti limiti* J, I′ *di due punteggiate che ne sono sezioni, e l'angolo* θ *dei sostegni di queste punteggiate. Si domanda di costruire i due fasci, e le due punteggiate.*

(A. Del Re).

Risoluzione del Sig. *G. Gallucci*, studente nella R. Università di Napoli.

Il problema si riduce a costruire i raggi i, j' dei due fasci (U), (U') che corrispondono ai raggi $U'I' \equiv i'$, $UJ \equiv j$, poichè allora conoscendo i centri dei due fasci, la coppia i, i' o j, j' di raggi corrispondenti e il centro di proiettività U'', si può trovare il corrispondente di ogni altro raggio dell'uno o dell'altro fascio, insieme ai sostegni delle due punteggiate.

Si descriva a tal uopo sopra UU' un segmento di cerchio capace dell'angolo dato θ, completando il cerchio al quale appartiene l'arco, quindi si trovi il punto $M \equiv (j, i')$. Per una nota proprietà il punto $N \equiv (i, j')$ cadrà nella $U''O$. Ma d'altra parte se osserviamo che per dato i è parallela al sostegno u della punteggiata che contiene J e j' è parellela al sostegno u' della punteggiata contenente I', lo stesso punto N si troverà altresì sul cerchio precedentemente descritto e perciò esso coinciderà con l'uno o l'altro dei punti d'intersezione della retta $U''M$ con questo cerchio. Trovato N per completare la soluzione converrà poi tracciare $UN \equiv i$, $U'N \equiv j'$ e descrivere per J, I' le u, u' ordinatamente parallele ai raggi i, j'.

Osservando che su UU' si possono descrivere tanto da una parte che dall'altra archi di cerchio capaci dell'angolo θ, si deduce che il problema ha in generale 4 soluzioni, le quali si riducono a 2 nel caso di $\theta = 90°$.

Se U, U' cadono da bande opposte di $U''M$ nessuna soluzione viene a comparire, ma se U, U' sono dalla stessa parte di $U''M$ può accadere che uno od ambedue i cerchi passanti per U, U' siano tangenti od esterni ad $U''M$ per modo che le soluzioni possono ridursi a 3, 2, una o nessuna.

Se poi $\theta = 0$ i sostegni delle due punteggiate sono paralleli o coincidenti e la costruzione del problema si riduce a condurre da U, U' le parallele ad

(*) Potrà essere un utile esercizio pei giovani quello di completare la presente discussione trovando il numero delle soluzioni corrispondenti ai diversi casi particolari possibili, per il che sarà utile introdurre gli angoli α, α' sotto i quali sono veduti i segmenti MU'' ed NU'' dai punti di contatto dei cerchi passanti rispettivamente per M ed U'', N ed U'' e tangenti ad s. [N. d. Red.].

$U''M$ e così si ottengono i, j', conducendo poi da J, I' le parallele alla stessa $U''M$ si hanno i sostegni u, u', che coincideranno fra loro nel caso di JI' parallela ad $U''M$. Il problema ha in questo caso una sola soluzione (*).

250. *Dato il triangolo* ABC $(=\triangle)$ *e il punto interno* M, *si tirino per i vertici le trasversali* AM, BM, CM *ad incontrare i lati opposti in* A′, B′, C′ *e si costruiscano i coniugati armonici* M_a, M_b, M_c *di* M *rispetto ad* A *e* A′, B *e* B′, C *e* C′. *Posto* $BA' : A'C = m$, $CB' : B'A = n$, $AC' : C'B = p$, *dimostrare che l'area del triangolo* $M_a M_b M_c$ *è data da*

$$4\triangle : \left[\left(m+1-\frac{1}{p}\right)\left(n+1-\frac{1}{m}\right)\left(p+1-\frac{1}{n}\right)\right].$$

(A. Lugli).

Dimostrazione del Sig. Prof. *F. Ferrari* a Chieti.

Le trasversali (AM_a, BM_a, CM_a), (AM_b, BM_b, CM_b), (AM_c, BM_c, CM_c) dividono i lati opposti di ABC rispettivamente nei rapporti $(m, -n, -p)$, $(-m, n, -p)$, $(-m, -n, p)$. La presente quistione è quindi un corollario della seguente più generale, che passo a risolvere:

Dati nel piano di un triangolo ABC *tre punti* P′, P″, P‴, *esprimere l'area del triangolo* P′P″P‴ *in funzione dei rapporti secondo cui le trasversali che uniscono i vertici di* ABC *a ciascuno dei punti* P′, P″, P‴ *dividono i lati opposti di* ABC.

Indico con P_a', P_b', P_c' i punti ove AP', BP', CP' incontrano BC, CA, AB, ecc., e pongo

$$BP_a' : P_a'C = m', \quad CP_b' : P_b'A = n', \quad AP_c' : P_c'B = p', \text{ ecc.}$$

donde componendo

$$BP_a' : BC = m' : m' + 1, \text{ ecc.}$$

Dal triangolo $AP_a'C$ segato dalla BP_b' si ha pel teorema di Menelao

$$\frac{AP'}{P'P_a'}\,\frac{P_a'B}{BC}\,\frac{CP_b'}{P_b'A} = -1$$

onde per le precedenti relazioni

$$\frac{AP'}{P'P_a'} = \frac{m'+1}{m'n'}, \quad \text{e componendo,} \quad \frac{AP'}{AP_a'} = \frac{m'+1}{m'n'+m'+1}.$$

Analogamente si troverà

$$\frac{AP''}{AP_a''} = \frac{m''+1}{m''n''+m''+1}.$$

Inoltre dalle relazioni

$$\frac{BP_a'}{BC} = \frac{m'}{m'+1}, \quad \frac{BP_a''}{BC} = \frac{m''}{m''+1},$$

(*) Un'altra risposta alla quistione pervenne dal Sig. *V. Columbo*, studente nella R. Università di Napoli.

sottraendo si ha

$$\frac{P_a' P_a''}{B C} = \frac{m'' - m'}{(m' + 1)(m'' + 1)}.$$

Perciò

$$\frac{A P' P''}{A B C} = \frac{A P' P''}{A P' P_a''} \cdot \frac{A P' P_a''}{A P_a' P_a''} \cdot \frac{A P_a' P_a''}{A B C} =$$

$$\frac{A P''}{A P_a''} \cdot \frac{A P'}{A P_a'} \cdot \frac{P_a' P_a''}{B C} = \frac{m'' - m'}{(m' n' + m' + 1)(m'' n'' + m'' + 1)}$$

Analogamente si troverà

$$\frac{A P'' P'''}{A B C} = \frac{m''' - m''}{(m'' n'' + m'' + 1)(m''' n''' + m''' + 1)}$$

$$\frac{A P''' P'}{A B C} = \frac{m' - m'''}{(m''' n''' + m''' + 1)(m' n' + m' + 1)}$$

Ora si sa che, tenendo conto del segno, è sempre

$$P' P'' P''' = A P' P'' + A P'' P''' + A P''' P'$$

e perciò

$$\frac{P' P'' P'''}{A B C} = \frac{A P' P''}{A B C} + \frac{A P'' P'''}{A B C} + \frac{A P''' P'}{A B C}.$$

Nella quale sostituendo i valori precedenti e riducendo, si ottiene

$$\frac{P' P'' P'''}{ABC} = \frac{m'n'(m''' - m'') + m''n''(m' - m''') + m'''n'''(m'' - m')}{(m'n' + m' + 1)(m''n'' + m'' + 1)(m'''n''' + m''' + 1)} \quad [1]$$

In essa al posto di $m' n'$ si può anche porre $\frac{1}{p'}$, ecc.

Il numeratore del secondo membro della [1] si può anche scrivere così

$$\begin{vmatrix} m' n' & 1 & m' \\ m'' n'' & 1 & m'' \\ m''' n''' & 1 & m''' \end{vmatrix}$$

La [1] non è che la nota formola che dà l'area del triangolo in funzione delle coordinate baricentriche relative dei vertici riferite ad un triangolo fondamentale $A B C$, poichè $(m' n', 1, m')$, $(m'' n'', 1, m'')$, $(m''' n''', 1, m''')$ non sono che le coordinate baricentriche relative di P', P'', P''', la quale formola risulta così stabilita direttamente.

Per risolvere la questione proposta non si ha che a porre nella [1] i rapporti corrispondenti ad M_a, M_b, M_c e tener presente che $m n p = 1$.

258.** *Due fasci proiettivi di raggi* (S, σ), (S′, σ′) *essendo dati in due piani diversi, ed intorno a due diversi punti, proiettare l'uno di essi* (S′, σ′) *nel fascio* (S_1, σ) *sul piano dell'altro, per modo che, in* σ, *il centro di proiettività di* (S), (S_1) *sia un dato punto* S_2. (A. Del Re).

Soluzione del Sig. Prof. *V. Retali* a Milano.

Sulla retta u_1 comune ai due piani σ e σ' i fasci S e S' segnano due punteggiate proiettive $u_1(P)$ e $u_1(P_1)$; sia C la intersezione di u_1 col raggio

$|SS_2| \equiv c$ del fascio S, e C_1 il punto corrispondente a C nella $u_1 (P_1)$: il raggio $|SC_1| \equiv c_1$ dovrà passare per S_1; se ora denotiamo con B il punto C_1, considerato come appartenente alla $u_1 (P)$, e B_1 è il suo corrispondente nella $u_1 (P_1)$, la retta $|S_2 B_1| \equiv b_1$ passerà pure per S_1; questo punto è dunque la intersezione delle due rette $|S_2 B_1|$ e $|SB|$ (*).

259.** *Si vuole proiettare una* u′ *di due punteggiate proiettive, sopra un piano* σ *condotto pel sostegno* u *dell'altra, per modo che la proiezione contenga un assegnato punto* M *di* σ, *ed abbia con* (u) *un dato asse di proiettività* u″.

(A. Del Re).

Soluzione del Sig. Prof. *V. Retali* a Milano.

Il sostegno u_1' della punteggiata proiezione è la retta che unisce M col punto $(u' \sigma)$: se ora poniamo $(u u_1') \equiv B$ e $(u u'') \equiv C$, poichè (u) e (u_1') debbono avere u'' per asse di proiettività, sarà $(u_1' u'') \equiv B_1'$ e C_1' coincide con B; se denotiamo con B' e C' i punti che nella (u') corrispondono rispettivamente ai punti B e C della (u), le due rette $|B' B_1'|$ e $|B C'|$ si segano nel centro di proiezione cercato (**).

263*. *Di un trapezio simmetrico calcolare i lati ed il raggio del cerchio circoscritto in funzione dell'angolo acuto* A, *della diagonale* 2d *e dell'area* m².

(G. Bellacchi).

Soluzione del Sig. *G. Manfredini*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Venezia (***).

Sia $ABCD$ il trapezio che si considera di basi AB, CD. Pongasi $AD = x$, $DC = y$, $AB = z$ e si chiami h la sua altezza DE, sarà $AE = h \cot A$ ed $AB = BE + h \cot A$, $DC = BE - h \cot A$. Ora dalle relazioni evidenti $BE \,.\, DE = m^2$, $\overline{BD}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{EB}^2$, sostituendo si ha

$$(y + h \cot A) \,.\, h = m^2, \qquad 4d^2 = h^2 + (y + h \cot A)^2.$$

Da queste, eliminando la quantità $y + h \cot A$, si deduce l'equazione biquadratica

$$h^4 - 4d^2 h^2 + m^4 = 0,$$

che risoluta dà

$$h = \sqrt{2d^2 \pm \sqrt{4d^4 - m^4}} = \sqrt{d^2 + \frac{m^2}{2}} \pm \sqrt{d^2 - \frac{m^2}{2}}.$$

(*) Il problema è stato risoluto anche dai Sigg. *V. Columbo*, Dott. *F. Mariantoni* e Professor *E. Nannei*.

(**) Il problema è stato risoluto anche dai Sigg. *V. Columbo*, Dott. *F. Mariantoni* e Professor *E. Nannei*.

(***) Soluzione analoga dal Sig. Prof. *V. Retali* a Milano. Altre soluzioni dai Sigg. *E. Biscaldi*, licenziato dal R. Liceo di Novara e *G. Gallucci*, studente nella R. Università di Napoli.

Le espressioni per i lati x, y, z si possono ora ottenere osservando che

$$x = h : \operatorname{sen} A, \quad y = \frac{m^2}{h} - h \cot A, \quad z = \frac{m^2}{h} + h \cot A.$$

Il raggio del cerchio circoscritto al trapezio è poi evidentemente $= \dfrac{d}{\operatorname{sen} A}$.

264*. *Se* A′, B′, C′ *sono punti dei lati* a, b, c *di un triangolo* ABC *tali che* BA′ : A′C = CB′ : B′A = AC′ : C′B = m : n, *posto* B′C′ = a′, C′A′ = b′, A′B′ = c′, *dimostrare la relazione*

$$\Sigma \overline{AA'}^2 + \frac{(m-n)^2 - mn}{(m+n)^2} \Sigma a^2 = 2 \Sigma a'^2.$$

(P. Castelli).

Dimostrazione del Sig. *A. Bozal Obejero*, professore nell' Istituto di Bilbao (Spagna).

Chiamando P, P', P'', le potenze totali dei triangoli ABC, $A'B'C'$ e di quello i cui lati sono AA', BB', CC', è noto che si ha

$$2P' = \frac{2(m^2 - mn + n^2)}{(m+n)^2} P, \quad P'' = \frac{m^2 + mn + n^2}{(m+n)^2} P.$$

Sottraendo queste eguaglianze membro a membro si deduce

$$P'' + \frac{(m-n)^2 - mn}{(m+n)^2} P = 2P',$$

od anche, sostituendo a P'', P e P' le somme che rappresentano

$$\frac{1}{2} \Sigma \overline{AA'}^2 + \frac{1}{2} \frac{(m-n)^2 - mn}{(m+n)^2} \Sigma a^2 = \Sigma a'^2,$$

da cui si ha infine

$$\Sigma \overline{AA'}^2 + \frac{(m-n)^2 - mn}{(m+n)^2} \Sigma a^2 = 2 \Sigma a'^2, \qquad \text{c. d. d. (*)}.$$

265*. *Dimostrare che, per* n *intero e positivo qualunque, l'espressione*

$$3^n [1296 \cdot 3^{4n-3} + 3(3^{4n-1} - 2^{4n+4}) - 2^{4n}]^n - 2^{4n} \left(\frac{9^{2n} - 4^{2n}}{13} \right)^n$$

è divisibile per 1895.

(S. Gatti).

Dimostrazione del Sig. *G. Vitali*, licenziato dal R. Liceo di Ravenna (**).

Consideriamo l'espressione

$$a^n [b^4 a^{4n+1} + a(a^{4n-1} - b^{4n+4}) - b^{4n}]^n - b^{4n} \left(\frac{a^{4n} - b^{4n}}{a^2 + b^2} \right)^n$$

(*) Dimostrazioni sostanzialmente analoghe pervennero dai Sigg. *G. Gallucci*, studente nella R. Università di Napoli e Prof. *V. Retali* a Milano.

(**) Altre dimostrazioni pervennero dai Sigg. *L. Agosti* (R. Ist. tec. Piacenza), *S. Resta* (R. Ist. tec. Bari) e *G. Gallucci*, studente a Napoli.

in cui a, b, n sono interi e positivi. Essa è divisibile per

$$a\,[b^4 a^{4n+1} + a\,(a^{4n-4} - b^{4n+4}) - b^{4n}] - b^4 \frac{a^{4n} - b^{4n}}{a^2 + b^2}$$

cioè per

$$(a^{4n} - b^{4n})\,(b^4 a^2 + a) - b^4 \frac{a^{4n} - b^{4n}}{a^2 + b^2}$$

o anche per

$$[(b^4 a^2 + a)\,(a^2 + b^2) - b^4]\,\frac{a^{4n} - b^{4n}}{a^2 + b^2}$$

e più semplicemente per

$$[(b^4 a^2 + a)\,(a^2 + b^2) - b^4]\,(a^2 - b^2).$$

In particolare facendo $a = 3$, $b = 2$ si ha l'espressione

$$3^n\,[1296\,.\,3^{4n-3} + 3\,(3^{4n-4} - 2^{4n+4}) - 2^{4n}]^n - 2^{4n}\left(\frac{9^{2n} - 4^{2n}}{13}\right)^n$$

che è divisibile quindi per

$$[(2^4\,.\,3^2 + 3)\,(3^2 + 2^2) - 2^4]\,(3^2 - 2^2)$$

ossia per 1895 . 5.

266'. *Se di un triangolo* ABC *inscritto in un cerchio il vertice* A *rimane fisso e i vertici* B *e* C *variano così che la somma* $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ *rimanga costante, dimostrare che il luogo del punto medio di* BC *è una retta perpendicolare al diametro passante per* A (*). (S. Gallucci).

Dimostrazione del Sig. *S. Resta*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari.

Chiamando M il punto medio del lato BC, per un noto teorema si ha subito $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\,\overline{AM}^2 + 2\,\overline{BM}^2$ e poichè per ipotesi $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 =$ costante, segue che è pure costante la somma $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$, e quindi costante la quantità $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 - \overline{OM}^2 - \overline{BM}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{OM}^2$, dove O designa il centro del cerchio circoscritto al $\triangle$. Il punto M gode dunque della proprietà che la differenza dei quadrati delle sue distanze da due punti fissi A e O è costante e perciò il luogo di esso è una retta perpendicolare alla congiungente questi due punti (Baltzer: *Geo.*, § 14, 2.)

Il Sig. Prof. *V. Retali*, osserva, nello stesso ordine d'idee della dimostrazione precedente, che posto $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 4\,k^2$ e indicando con r il raggio del cerchio circoscritto al $\triangle$ ed A' il punto diametralmente opposto ad A, si ha

$$\overline{AM}^2 - \overline{A'M}^2 = 4\,(k^2 - r^2),$$

(*) Il Sig. *Gallucci* A. della quistione avverte la Redazione che la quistione stessa è stata da lui rinvenuta in questi ultimi giorni, espressa quasi nei medesimi termini, nel periodico belga *Mathesis*, contraddistinta col n. 197 e dovuta al Sig. V. Jamet. Esponendo le ricerche le quali lo condussero alla proposizione in parola, il Sig. Gallucci avverte poi che un teorema analogo esiste nella stereometria ed è il seguente: *Se di un tetraedro* ABCD, *inscritto in una sfera, il vertice* A *rimane fisso e i vertici* B, C, D *variano in modo che la somma* $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2$ *rimanga costante, il luogo del baricentro di* BCD *è un piano perpendicolare al diametro della sfera passante per* A.

cosicchè il luogo di M è la perpendicolare ad AA' nel punto X tale che $AX : A'X = (k^2 + r^2) : (k^2 - r^2)$.

Per $k^2 = - r^2$ il luogo è la tangente in A; per $k^2 = r^2$, la tangente in A'; per $k^2 = 0$, il diametro perpendicolare ad AA', per $k^2 = \infty$, la retta all'infinito.

Dimostrazione del Sig. *G. Taschieri,* alunno del R. Istituto tecnico di Piacenza.

Si proiettino i punti B e C sul diametro AO in B' e C' e si tiri per M, centro di BC, la perpendicolare MH ad AO. Si ha subito $B'H = HC'$ e chiamando r il raggio del cerchio, per un teorema noto: $\overline{AB}^2 = 2r \,.\, AB'$, $\overline{AC}^2 = 2r \,.\, AC'$, donde sommando segue:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2r \,.\, (AB' + AC').$$

Ma per essere H punto medio di $B'C'$, $AB' + AC' = 2AH$, onde

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 4 \,.\, r \,.\, AH.$$

Ora l'ipotesi di $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ costante porta che AH è invariabile, cosicchè il luogo del punto M è appunto la perpendicolare MH al diametro AO (*).

267*. *Se si costruiscono i punti simmetrici* I′, I″, I‴ *del centro* I *del cerchio inscritto in un triangolo* ABC *rispetto ai lati* BC, CA, AB, *le rette che congiungono questi punti ordinatamente con* A, B, C *concorrono in un punto.*

(S. Catania).

Dimostrazione del Sig. *G. Gallucci*, studente nella R. Università di Napoli.

Siano A', B', C' i punti in cui AI', BI'', CI''' tagliano i lati BC, CA, AB del triangolo e conducansi da A' ed I' le perpendicolari $A'D'$, $A'E'$ ed $I'D$, $I'E$ ad AB, AC. È chiaro che si avrà $D'A' : A'E' = DI' : I'E$, ma $BA' = D'A' : \text{sen}\, B$, $A'C = A'E' : \text{sen}\, C$, onde

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{D'A'}{A'E'} \cdot \frac{\text{sen}\, C}{\text{sen}\, B} = \frac{DI'}{I'E} \cdot \frac{\text{sen}\, C}{\text{sen}\, B}.$$

Rimane ora a trovare il valore del rapporto $DI' : I'E$. Osservando per l'ipotesi che i due angoli $I'BA$, $I'CA$ sono rispettivamente eguali a $B + \frac{1}{2}B$ e $C + \frac{1}{2}C$, si deduce subito $DI' = BI' \,.\, \text{sen}\, \frac{3}{2}B$, $I'E = I'C\, \text{sen}\, \frac{3}{2}C$, onde

$$\frac{DI'}{I'E} = \frac{BI'}{I'C} \cdot \frac{\text{sen}\, \frac{3}{2}B}{\text{sen}\, \frac{3}{2}C} = \frac{BI}{IC} \, \frac{\text{sen}\, \frac{3}{2}B}{\text{sen}\, \frac{3}{2}C} = \frac{\text{sen}\, \frac{1}{2}C\; \text{sen}\, \frac{3}{2}B}{\text{sen}\, \frac{1}{2}B\; \text{sen}\, \frac{3}{2}C},$$

(**) Altre dimostrazioni pervennero dai Sigg. *E. Biscaldi, F. Marzani* (R. Liceo Novara) e dal Sig. Prof. *G. Giovannini* a Mondragone.

per cui finalmente

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{\operatorname{sen} C \operatorname{sen} \frac{1}{2} C \operatorname{sen} \frac{3}{2} B}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} \frac{1}{2} B \operatorname{sen} \frac{3}{2} C}$$

e analogamente

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \operatorname{sen} \frac{3}{2} C}{\operatorname{sen} C \operatorname{sen} \frac{1}{2} C \operatorname{sen} \frac{3}{2} A}, \quad \frac{AC'}{C'B} = \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} \frac{1}{2} B \operatorname{sen} \frac{3}{2} A}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \operatorname{sen} \frac{3}{2} B}.$$

Moltiplicando queste tre relazioni membro a membro segue

$$\frac{BA'}{B'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1,$$

cosicchè pel teorema di Ceva, le tre rette AI', BI'', CI''' concorrono in un punto.

Dimostrazione del Sig. Prof. V. *Retali* a Milano.

I due triangoli ABC e $I'I''I'''$ sono polari reciproci rispetto al cerchio di centro I e raggio eguale a $r\sqrt{2}$, se r è il raggio del cerchio inscritto, essi sono dunque omologici.

Osservazione. Se sopra i raggi I_1, I_2, I_3 che vanno ai punti di contatto, a partire da questi punti e nel medesimo senso si staccano tre segmenti eguali $11'$, $22'$, $33'$, i due triangoli ABC e $1'2'3'$ sono omologici.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

303. Risolvere il sistema d' equazioni

$$\begin{aligned} a(1 + x) &= (y + z)^2 \\ b(1 + y) &= (z + x)^2 \\ c(1 + z) &= (x + y)^2. \end{aligned}$$

304*. Se A, B, C sono i punti simmetrici del centro del circolo circoscritto al triangolo DEF rispetto ai lati EF, FD, DE, le rette AD, BE, CF concorrono in un punto che è il centro del circolo passante pei punti medi dei lati del triangolo DEF.

S. Resta.

(*) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle Scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle Scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

305*. Dimostrare che in un triangolo rettangolo, di cui C è l'angolo retto, si ha la relazione

$$a\left(1-\cot^2\frac{A}{2}\right)+2b\cot\frac{A}{2}=0.$$

e in qualunque triangolo rettilineo, la relazione

$$ac\,\text{sen}\,(A-B)=(a^2-b^2)\,\text{sen}\,A.$$

G. Giovanetti.

306*. È dato un semicerchio AMB, di diametro AB. Condurre al medesimo una tangente MT, terminata al prolungamento del diametro, in modo da formare con esso un angolo, da determinarsi, tale che facendo ruotare la figura intorno ad AB la superficie generata dal segmento MT sia in un rapporto dato n con quella della sfera generata da AMB, o che siano in un rapporto dato n' la superficie conica generata da MT e quella della zona sottostante al cono. – Discussione.

F. Celestri.

307*. Se a, b, c sono le misure dei lati di un triangolo, ed α, β, γ le misure delle distanze dei suoi vertici da un punto del cerchio circoscritto, si ha

$$(a^2-\beta^2+\gamma^2)(b^2-\gamma^2+\alpha^2)(c^2-\alpha^2+\beta^2)=$$
$$(a^2+\beta^2-\gamma^2)(b^2+\gamma^2-\alpha^2)(c^2+\alpha^2-\beta^2).$$

S. Catania.

308*. Essendo dato nello spazio un numero dispari di punti O_1, O_2, ... O_{2n+1}, e preso ad arbitrio un punto P, si trovi di questo il simmetrico P_1 rispetto al centro O_1, poi il simmetrico P_2 di P_1 rispetto al centro O_2; e così di seguito finchè si ottenga P_{2n+1} simmetrico di P_{2n} rispetto al centro O_{2n+1}, e si ripeta ancora, partendo dal punto P_{2n+1}, l'operazione prima fatta partendo dal punto P; s'otterrà così in fine il punto P_{4n+2}. Dimostrare che questo punto coincide con P.

G. Biasi.

309**. Dimostrare che la potenza di un triangolo è eguale alla semisomma delle potenze dei triangoli aventi per vertici i centri dei quadrati costruiti esteriormente ed internamente sui lati del triangolo.

A. Bozal Obejero.

310. È noto che il problema analogo a quello di Malfatti nello spazio è più che determinato epperò generalmente impossibile. Trovare le (due) relazioni che devono passare fra i sei spigoli di un tetraedro affinchè esistano quattro sfere ognuna delle quali tocchi le altre tre e tre delle facce del tetraedro.

G. Loria.

311.** Eliminare x ed y dal sistema

$$a^2 y^2 (2rx + dy)^2 = c^2 x^2 (1 + r y^2)$$
$$2a^2 y\,(2rx + dy) = cx\,(dx + cy - 2a)$$
$$c^3 x^3 + 8a^4 y^2 (2rx + dy) = 4a^2 cx\,(rx^2 + cy^2 + 2dxy - 2ay).$$

G. Frattini.

312.** Eliminare x ed y dal sistema

$$(2arxy + ady^2 - cx)^2 = c^2 x^2 \left(1 + ry^2 - \frac{cy}{a}\right)$$
$$2a\,(2arxy + ady^2 - cx) = cx\,(dx + cy - 2a)$$
$$c^3 x^3 + 8a^3 y\,(2arxy + ady^2 - cx) = 4a^2 cx\,(rx^2 + cy^2 + 2dxy - 2ay).$$

G. Frattini.

313.** Se $ABC \equiv abc$ è un triangolo in un piano σ, e sono e, f due rette condotte ordinatamente per A, B in σ, per ogni punto P, di σ, posto

$$P(A, B, C) \equiv p, q, r; \quad (cbep) = u, \quad (cafq) = v, \quad r(e, f) \equiv E, F$$

si ha, θ essendo l'argomento del numero complesso $u + iv$,

$$\theta = \text{arc . tg}\,(CcEF).$$

A. Del Re.

314. Mostrare che, l'equazione cubica in ρ

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \rho - (\beta^2 + \gamma^2) & \alpha\beta + 2\gamma' & \gamma\alpha - 2\beta' \\ \alpha\beta - 2\gamma' & \rho - (\gamma^2 + \alpha^2) & \beta\gamma + 2\alpha' \\ \gamma\alpha + 2\beta' & \beta\gamma - 2\alpha' & \rho - (\alpha^2 + \beta^2) \end{vmatrix} = 0,$$

quando si ponga

$$\omega^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \qquad \omega'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2,$$
$$\omega\omega' . \cos\theta = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$$

si riduce all' altra

$$\rho^3 - 2\,\omega^2\rho^2 + (\omega^4 + 4\,\omega'^2)\,\rho - 4\,\omega^2\,\omega'^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta = 0,$$

ed ha una sola radice reale inferiore ad $\omega^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta$.

NB. Io ho incontrato la precedente equazione in alcune ricerche intorno alla distribuzione delle accelerazioni nei moti rigidi dei solidi; e, dato il carattere *invariante*, rispetto ad una trasformazione di coordinate delle quantità ω, ω', θ, ho potuto riconoscere, SENZA CALCOLI, che *sviluppare il determinante* (1) *è come sviluppare il determinante*

$$(2) \ldots \quad \begin{vmatrix} \rho & 0 & -2\beta_1 \\ 0 & \rho - \omega^2 & 2\alpha_1 \\ 2\beta_1 & -2\alpha_1 & \rho - \omega^2 \end{vmatrix},$$

dove ora sia $\omega'^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2$, $\omega' . \cos\theta = \alpha_1$.

Può qualche lettore del *Periodico* arrivare a mostrare l' identità fra i determinanti (1) e (2) senza confrontarne gli sviluppi?

A. DEL RE.

315.** L' espressione $[(n+1)\,b - na]^2\,a^n - b\,(b^{n+1} + ab^n - a^{n+1})$ è divisibile per $(a-b)^3$; determinare il quoziente; dedurne in particolare la somma $2^{2n}\,(3\,n - 1)^2 + 2^{2(n+1)}$ divisa per 27 dare per resto 5.

G. BELLACCHI.

316*. Un cono circoscritto ad una sfera ha per base il cerchio del contatto, la superficie laterale (o totale) ha il rapporto m con la calotta iscritta (o con l'intera superficie del segmento sferico iscritto); determinare l'angolo al vertice del cono ed il rapporto fra i volumi del cono e del segmento sferico.

G. BELLACCHI.

317*. Se in un cerchio O s' inscrive un esagono $AEBFCD$, tale che sia $AD = AE$, $BE = BF$, $CD = CF$, dimostrare che: 1° le diagonali AF, BD, CE passano per lo stesso punto; 2° l'esagono $AEBFCD$ è doppio del triangolo ABC; 3° la somma dei quadrati dei lati dell' esagono è doppia del quadrato del lato del triangolo equilatero inscritto nel cerchio O aumentato del quadrato del segmento congiungente O coll' ortocentro di ABC.

S. GATTI.

RIVISTE E NOTIZIE BIBLIOGRAFICHE

Prof. V. AICARDI. — *Il triangolo* — E. Loescher. Roma, 1896. – Prezzo Lire 4.

La geometria del triangolo ha ricevuto da circa un ventennio un impulso considerevole per opera di diversi distinti matematici, fra i quali sono particolarmente da annoverare il LEMOINE, DE LONGCHAMPS, BROCARD, NEUBERG. Le ricerche compiute da questi scienziati e da molti altri, fra cui è ben giusto ricordare il nostro Prof. CESÀRO, sulle proprietà del triangolo, disseminate per la maggior parte negli atti della *Association Française pour l'Avancement des Sciences*, nel *Journal de Mathématiques* del Prof. LONGCHAMPS, nei *Nouvelles Annales de Mathématiques* e nel periodico *Mathesis*, sono venute in breve a costituire un nuovo ed importante capitolo della geometria elementare, comunemente designato col nome di *Geometria elementare recente*, ed hanno fornito occasione a lavori sistematici di grande interesse sull'argomento fuori della patria nostra (*). E però è venuta molto opportuna la pubblicazione del libro del Prof. AICARDI, quantunque non sia ispirata che in limitata misura alla geometria recente ed assomigli molto nella sua parte teorica ad un lavoro d'ignoto raccoglitore col titolo: *Relations entre les éléments d'un triangle*, apparso da pochi anni in Francia. Ma in realtà qui fra noi credo non abbia nulla di analogo, anche nella parte pratica, salvo forse un libretto di problemi dell'Ing. NICITA sulla *Descrizione del cerchio*.

L'opera, come l'A. avverte nella prefazione, è divisa in due parti ben distinte; nella prima si enunciano e si dimostrano relazioni degli elementi del triangolo fra loro, con altezze, mediane e bisettrici ed anche coi cerchi inscritti, circoscritti, ex-inscritti e d'Eulero; la seconda è una raccolta di 7840 problemi sulla costruzione del triangolo, che sono raggruppati in serie principali, ciascuna delle quali si suddivide in serie secondarie, distribuzione originale e ben fatta per evitare ripetizioni che l'A. spiega con parecchi esempi, sia che si ricerchi un problema, sia che di un dato problema si voglia la soluzione. In generale le dimostrazioni sono ben condotte ed abbastanza sviluppate; alcune peraltro un po' laboriose, come per il Teor. 45 a pag. 51, pel quale se ne può ricavare una assai semplice dalle formule 1', 2', 3', 4' che nel Corol. 5 a pag. 27 danno i valori di r, r', r'', r'''. Bene dedotti i corollari, per quanto in qualche caso tale denominazione non sia matematicamente esatta. Il linguaggio alcune volte lascia a desiderare per chiarezza e per precisione; così ad esempio non è esatto il seguente enunciato (Corol. 1° e 2°, pag. 4): il luogo geometrico dei vertici dei triangoli della stessa base $BC = a$ ed uguale altezza h [superficie S] è *una parallela alla base* condotta alla distanza h [determinata dalla relazione $S = \frac{a}{2} . h$]; nè sono corrette le seguenti espressioni: è costante un *dato* rapporto degli altri due lati (del triangolo) [Teor. 18, pag. 22], – il centro del cerchio ...... *è sulla metà della retta* ..... [Teor. 29, pag. 34]. Nel teorema 52 e seguito viene trattata la Geometria elementare moderna; ed è qui nuovamente da

(*) Citiamo ad es. il capitolo supplementare dell'opera: CASEY (J.). *A Sequel to the first six Books of the elements of Euclid*, una nota molto estesa del Prof. NEUBERG (J.) [*Sur la géométrie récente du triangle*] in appendice al *Traité de Géométrie* dei Proff. ROUCHÉ et COMBEROUSSE e le opere separate: MILNE and SIMMONS (T. C.). *Companion to the weekly problem papers* — EMMERICH (A.). *Die Brocardschen Gebilde.*

osservare che a questa importante parte della geometria del triangolo l'A. ha dato uno sviluppo insufficiente, limitandosi a poche proprietà delle antiparallele, delle simediane, delle coniugate isogonali e del circolo d'Eulero. Pochi gli errori di stampa; nitide le figure, alcune delle quali però poco precise, specialmente quando trattisi di circonferenze tangenti fra loro e con rette.

In conclusione è un libro che io consiglio ben volentieri ai giovani studiosi, augurandomi che l'egregio A. in una prossima ristampa, tolte le poche e lievi mende cui ho accennato, dia alla 1ª parte quello sviluppo che è necessario, perchè lo studio del triangolo possa dirsi completato, avendo egli ora tralasciato altresì parecchie relazioni metriche importanti.

U. Ceretti.

Elementi di Geometria, a uso delle Scuole Secondarie inferiori, di G. Riboni, corredati da una raccolta di circa seicento esercizi, per cura di D. Gambioli. — Bologna, Ditta Nicola Zanichelli, 1896 — Prezzo: L. 2.

Di quest' operetta io tenni parola in questo periodico (*), allorchè apparve la prima edizione ed ora che è comparsa la seconda, assai migliorata e tale da renderla ancor meglio adattata alle Scuole secondarie inferiori, sono lieto di constatare, a lode degli autori, che era nel vero asserendo che il libro non pareva destinato a finire dimenticato nei polverosi scaffali delle librerie.

A. L.

CORRADO CIAMBERLINI. — *Elementi di geometria* per le scuole tecniche, normali e professionali. - Parte 1ª, planimetria. — Montegiorgio, 1895. — Prezzo: L. 2,50.

L'A. ha ben compreso come deve essere fatto un libro per queste scuole, cosicchè il suo, apparentemente modesto, ma scritto con forma facile e piana, contenente tutto quello che deve essere insegnato nelle scuole, alle quali è destinato, e ottimi e numerosi esercizi, è riuscito fra i migliori e tale da fare desiderare che presto vegga la luce anche la seconda parte.

A. M.

VARIETÀ

AVVISO.

L'Associazione *Mathesis* fra Insegnanti di matematica di Scuole secondarie fa noto che si è costituito il suo Comitato Direttivo.

Il primo anno sociale comincierà col *1º luglio 1896*.

La sede sociale per il primo biennio (1896-97 e 97-98) è *Torino* presso il *Presidente*, Prof. Rodolfo Bettazzi, *Corso S. Martino, 1*.

Per quanto concerne l'amministrazione, l'inscrizione a socio, il pagamento delle quote, le informazioni, le richieste di stampati, ecc., occorre rivolgersi al *Segretario-Tesoriere* Prof. Francesco Giudice, *Corso Ugo Bassi, 40 – Genova*.

Il Comitato farà conoscere dopo la sua prima adunanza ordinaria autunnale il regolamento che avrà adottato per il funzionamento dell'Associazione.

Torino, 3 aprile 1896.

Per il Comitato: Prof. Rodolfo Bettazzi.

(*) Vol. VII, pp. 77-78.

Finita la Redazione il dì 13 aprile 1896.

La cagione del lutto dell'odierna puntata del Periodico di matematica è ormai nota ai lettori: nè io ricorderò loro, dopo il giudizio che ne avranno recato essi stessi, quale e quanta iattura sia la morte di **Aurelio Lugli**, non solo per le sorti del Periodico, ma altresì per la scienza e l'insegnamento.

Incaricato dal Consiglio direttivo dell'Associazione *Mathesis* della cura del Periodico fino al termine dell'annata in corso, mi sono messo all'opera con animo volonteroso, sicuro che alla mia pochezza supplirà la copia di eccellenti scritti che il compianto professore teneva in serbo per la pubblicazione (*). Cedo ora la parola al prof. Elia Millosevich, vicedirettore dell'Osservatorio astronomico del Collegio romano e professore nell'Istituto tecnico di Roma, come a quei che più di ogni altro, fra i numerosi amici del **Lugli**, ebbe con esso comunanza di vita e di uffici. Ma prima mi sia permesso di mandare, anche a nome di *Mathesis* e del suo presidente prof. Bettazzi, un ultimo saluto al caro Estinto; a un cuore che, diviso tra la famiglia, la scienza e l'amicizia, fu illustre tempio di domestiche e civili virtù. Possa un raggio della virtù di lui brillare sulla fronte de'suoi figlioletti divenuti adulti, e sia raggio che sul ciglio della sposa desolata terga le lagrime dell'ora presente.

G. Frattini.

✝

AURELIO LUGLI

Dal defunto Enrico Lugli e dalla vivente Teresa Bertelli nasceva il nostro **Aurelio** a Modena, il 6 dicembre 1853.

Perchè figlio unico, i genitori di lui poterono, ad onta di mezzi economici esigui, dargli una completa istruzione, con grande loro sacrificio e con sussidì esteriori.

Noi lo troviamo da prima studente alla Scuola tecnica, poi al patrio Istituto tecnico, nel quale conseguì il Diploma di Perito meccanico e Costruttore, nell'estate del 1871. Le classificazioni conseguite fino dai primi studi presagivano l'esito splendido col quale avrebbe il **Lugli** compiuto il corso dei medesimi.

(*) Per la precedenza nella stampa dei medesimi furono osservati e si osserveranno gl'impegni già presi dal Lugli.

Dall'Università di Modena, nella quale percorse il primo biennio della Facoltà delle scienze fisico-matematiche, passò, per i suoi meriti, alla Scuola Normale di Pisa; e fu proclamato, fra il plauso di uomini illustri, Dottore in scienze fisico-matematiche il 27 novembre 1876, con pieni voti assoluti e la lode; il Diploma di Magistero della R. Scuola Normale di Pisa porta la firma di Enrico Betti. Nell'anno 1877 gli veniva conferito dalla R. Università di Pisa il posto di perfezionamento in Fisico-matematica; subito dopo, dal Governo, quello di reggente di matematica nel R. Liceo di Catanzaro, e poi di titolare di 1ª classe nella R. Scuola tecnica *P. Metastasio* in Roma.

Nel 1879 creavasi in Roma l'Ufficio centrale di Meteorologia, e il Direttore di quell'Istituto eleggeva **Aurelio Lugli** quale assistente al servizio della prognosi del tempo, nel qual posto egli rimase dal dicembre 1879 fino al giorno della sua morte.

Classificato subito dopo l'eletto alla cattedra di fisica del R. Liceo *T. Mamiani* in Roma, vinceva il concorso al posto di titolare di matematica nel R. Istituto tecnico *Leonardo da Vinci*, e dall'ottobre 1888 insegnò matematica in ambiente numeroso, dove potè mettere a prova le attitudini didattiche eminenti di cui era fornito, e delle quali un illustre matematico, Valentino Cerruti, aveva già fatto fede in ufficiale documento al Governo.

Quando il prof. Davide Besso fondava il periodico di matematica per l'insegnamento secondario, rivolse gli occhi al **Lugli** per averlo come con-direttore, e, dopochè il Besso fu chiamato a più alti uffici, il **Lugli** ne rimase direttore di fatto, e quanto amore egli abbia posto nella direzione di questo periodico e con quanto disinteresse lo abbia retto, e quanto bene abbia recato e al corpo insegnante e agli allievi, non v'è alcuno che, occupandosi di matematica elementare, non lo sappia.

Circondato dalla stima universale per la sua dottrina e per l'equilibrio delle sue qualità morali, maestro severo, ma equanime, rigoroso nell'adempimento de' suoi obblighi, mite nel giudicare gli obblighi altrui, pareva destinato, anche fisicamente considerato, ad una vita lunga e felice. Tre innocenti bambini, natigli in seconde nozze da un'egregia signora, gli rendevano beata la vita domestica, che egli divideva colla vecchia sua madre, verso la quale ebbe culto degno di ammirazione.

Parve agli amici suoi che ai primi di maggio egli dimagrasse; invece era ferito a morte, come ben disse il Frattini in un momento solenne. Ed in verità il 23 maggio cadeva ammalato, e, prima che la scienza accertasse la malattia, egli moriva serenamente il 27 maggio verso mezzanotte.

Le pubblicazioni di **Aurelio Lugli** sono di due specie: alcune riguardano la matematica elementare, altre sono di meteorologia; le une e le altre in armonia coi posti che così degnamente occupava:

Alla prima categoria appartengono:

1. « Soluzione di alcuni problemi generali di geometria » (*Ist. Lombardo*, 1881).

2. « Soluzione d'un problema di geometria elementare » (*Rivista di matematica*, 1884).

3. « Alcuni teoremi generali sul moto d'una figura nello spazio » (Rivista citata, 1885).

4. « Superficie e volume dell'anello poligonale regolare e circolare » (Rivista citata, 1885).

5. « Volume dell'anello ellittico di rivoluzione. — Una questione di trigonometria » (Rivista citata, 1885).

6. « Sulla proiezione stereografica » (*Periodico di matematica*, 1886).

7. « Sulle frazioni decimali periodiche » (Periodico citato, 1887).

8. « Un problema d'aritmetica » (Periodico citato, 1890).

9. « Alcuni teoremi della recente geometria del triangolo » (Periodico citato, 1891).

10. « Alcuni problemi relativi alla divisione d'un poligono convesso in parti proporzionali a più segmenti dati » (Periodico citato, 1891).

11. « Volume del segmento sferico a due basi » (Periodico citato, 1892).

12. « Sopra una formola per la misura dei volumi » (Periodico citato, 1894).

13. « Alcuni teoremi di geometria » (Periodico citato, 1895).

Oltre queste Note noi dovremmo aggiungere un numero stragrande di riviste bibliografiche, di problemi proposti per esercizio, di soluzioni di essi, ecc. ecc.

Alla seconda categoria appartengono le Memorie seguenti:

A) « Sulla variazione media della temperatura in Italia con la latitudine ed altezza ». — Questa Memoria ha reso possibile di ridurre al livello del mare le temperature lette in un luogo qualunque in Italia (isoterme normali). *Annali di Metereologia*, 1882.

B) « Primi risultati sui presagi del tempo, fatti nell' Ufficio centrale di Meteorologia in Roma » (Annali citati, 1882).

C) « Sulla variazione media della tensione del vapore acqueo atmosferico in Italia secondo la latitudine ed altezza » (Annali citati, 1883).

D) « Sull'ipsometria barometrica ». — È un contributo notabile per migliorare la formola che dà l'altezza d'un luogo sul livello del mare con osservazioni barometriche. (Annali citati, 1883).

(Un riassunto di detta Nota trovasi nei transunti della R. Accademia dei Lincei, 1884).

E) « Risultati dei presagi del tempo fatti nell' Ufficio centrale di Meteorologia ». (Annali citati, 1885).

F) « Sul *Lehrbuch der Meteorologie* del dott. Sprung » (*Memorie della Società degli spettroscopisti italiani*, 1886).

G) « Periodi, intensità e traiettorie delle depressioni sull'Italia e paesi limitrofi nel decennio 1880-89 » (*Annali dell' Ufficio centrale di Meteorologia*, vol. X, 1888, pubblicato nel 1891).

Quest' ultima Memoria è un riassunto cartografico di tutto il lavoro fatto dal **Lugli** sopra la prognosi del tempo a proposito delle depressioni. Dodici Carte rappresentano lo stato di fatto del fenomeno per un decennio; da queste egli si riprometteva di poter cavare conclusioni importanti per la predizione delle burrasche nel nostro paese.

R. Osservatorio del Collegio Romano.

E. Millosevich.

FONDAMENTI
PER UNA TEORIA GENERALE DEI GRUPPI

DI RODOLFO BETTAZZI

INTRODUZIONE.

Lo scopo principale del presente lavoro è quello di dare la distinzione fra i gruppi finiti e gli infiniti. La questione, certamente non nuova, è stata studiata, anche recentemente, da altri autori.

Il DEDEKIND nella sua operetta *Was sind und was sollen die Zahlen* (Braunschweig, 1888) dà una definizione rigorosa di ciò che egli intende per gruppi infiniti: e veramente i gruppi che egli indica con tal nome hanno un carattere che anche in pratica si tradurrebbe colla frase « essere infiniti ». Ma dopo, egli dice finito ogni gruppo non infinito; e ciò, sebbene rigoroso, non pare sufficiente a dare un'immagine netta di quello che sia un gruppo finito. E resta inoltre il dubbio se tutti i gruppi che non sono infiniti siano di quelli a cui, presi isolatamente, ci sembrerebbe adatto il nome di finito, quando almeno si voglia con tal nome interpretare l' idea che grossolanamente nella pratica si enuncia col nome « finito ». Opportuno mi sembra quel nome per gli speciali gruppi finiti che il Dedekind stesso studia di poi come parte dei gruppi da lui detti semplicemente infiniti; ma non può dirsi se ogni gruppo finito (cioè non infinito) si possa ridurre ad uno di essi, non sembrandomi rigorosa la dimostrazione del suo Teorema del n. 159 (*), dal quale dipende quello del n. 160, dove egli invece asserisce che vi si possa ridurre.

Il CANTOR non dà una esplicita definizione del gruppo infinito. Nel suo opuscolo *Zur Lehre vom Transfiniten* (Halle-Saale, 1890) egli discute il concetto d'infinito, e sembra (vedi pag. 42) che egli intenda dire infinito il gruppo di potenza maggiore a qualunque gruppo finito. Ma la definizione di gruppo finito egli la dà solo più tardi (pag. 61) e sotto una forma non del tutto chiara e rigorosa, e, comunque, non completa, dimenticando di citare il principio d'induzione. Peraltro i suoi concetti si prestano abbastanza bene per essere completati e resi adatti all'uso: ed appunto da essi io ho preso l'idea per la definizione di gruppo finito che presento in questo lavoro.

Il prof. VERONESE nei suoi *Fondamenti di Geometria* (Padova 1891) fa nell'introduzione uno studio sui gruppi ordinati. Egli considera dei gruppi

---

(*) Cfr. il § 96 di questo scritto.

da dirsi finiti e dei gruppi da dirsi infiniti, sebbene queste parole egli le usi solo più tardi parlando di grandezze. Limitandosi ai gruppi ordinati, mentre colla sua serie limitata di 1ª specie (Introduzione n. 35) può dare un'idea esatta del gruppo finito, non può spingersi invece fino ad un concetto che tutti abbracci i gruppi infiniti, come fa p. es. il Dedekind in modo preciso ed esplicito. Di più il suo concetto di ordine è dato in modo assoluto fondandolo sul pensare gli enti *prima* o *poi;* e quindi mi pare che implichi necessariamente l'idea di tempo, estranea invece a quella generale di gruppo, o, quanto meno, quella (in generale non necessaria) di successione di pensieri. Inoltre, a mio credere, quel concetto di ordine non è capace di generare altri gruppi infiniti, che quelli che egli dice serie illimitate di 1ª specie (Introduzione n. 39).

Il prof. Biasi tenta egli pure una distinzione fra i gruppi finiti e gli infiniti nei suoi *Elementi di aritmetica e di algebra* (Sassari, 1892). Il professor Burali-Forti sul vol. II della *Rivista di Matematica* in una sua recensione di questo libro (ottimo del resto per altri riguardi) mette in mostra alcune imperfezioni che rendono illusoria quella distinzione. Io qui osservo che la definizione data dal prof. Biasi pel gruppo infinito (che precede nel suo libro quella del gruppo finito) assegna quel nome ad un gruppo o sistema tale che « dopo aver pensato più cose del sistema, sia sempre possi- « bile pensarne altre ancora (§ 4) » Ora tale definizione: 1° o presuppone quella di gruppo finito, affine di poter completare la frase dicendo: « dopo aver pensato più cose del sistema *costituenti un gruppo finito* », senza di che la definizione è assurda (potendosi per più cose prendere tutte quelle del gruppo oltre le quali non ve ne sono altre) ed in tal caso dà origine ad un circolo vizioso, giacchè il prof Biasi dice finito ogni gruppo che non è infinito — 2° o suppone tacitamente il concetto di ordinamento, mentre questo nel libro è dato dopo, e, comunque, limita il concetto di gruppo infinito.

Nel presente lavoro io ho creduto bene di dare da sè e prima il concetto di gruppo finito, perchè ci si possa servire di esso (che nel primo insegnamento delle matematiche è il più importante) anche senza ricorrere a quello del gruppo infinito, e l'ho fatto appoggiandomi al concetto di ordine: poi ho definito come gruppo infinito quello che non è finito, o, il che è lo stesso, (come si dimostra) quello che ha maggior potenza di qualunque gruppo finito. I gruppi che io dico finiti sono tali anche nel concetto del Dedekind; il reciproco non può asserirsi se non ammettendo il Teorema 160 del Dedekind, che dipende dal Teorema 159, il quale ultimo, come ho già detto, non pare rigorosamente dimostrato.

I gruppi che dice infiniti il Dedekind (e da me detti sviluppabili) sono infiniti anche nel mio concetto, senza che possa asserirsi il contrario, se non accettando il Teorema 159 del Dedekind del quale si parlava ora.

Colle distinzioni da me adottate c'è il vantaggio di avere per la definizione dei gruppi in questione proprietà, le quali pare che rispecchino con assai fedeltà il concetto che ci si fa ordinariamente e spontaneamente, sebbene grossolanamente, di ciò che è gruppo finito od infinito.

Il presente scritto mostra che è rigoroso l'uso di alcune frasi da me adoperate nella mia *Teoria delle grandezze* (*) e che a prima vista sembrerebbero dipendere necessariamente dal concetto di numero dal quale ivi io intendeva prescindere, o le sostituisce con altre in cui è chiara la mancanza di tale dipendenza. Esso permette anche di enunciare esplicitamente la qualità di finiti in quei gruppi nei quali in detta mia opera la supponevo tacitamente, e ciò senza ricorrere all'idea di numero, l'uso della quale avrebbe costituito un circolo vizioso; volendo io in quella *Teoria delle grandezze* dedurre il concetto di numero appunto da quello delle classi di grandezze (**).

Non tutto quello che ho esposto nel presente lavoro è indispensabile alla rigorosa trattazione della *Teoria delle grandezze* a cui ora accennavo: credo anzi che si possa ridurre a piccola parte quello che è necessario porre a fondamento dell'introduzione esatta del concetto di numero partendo dalle grandezze, così spesso usata nell'insegnamento. Il metter più dello strettamente indispensabile, come il riportare cose già esposte e dimostrate da altri, mi è parso utile per offrire un tutto armonico e completo, che da sè servisse di fondamento ad una teoria generale dei gruppi.

Torino, maggio 1896.

Capitolo I.

I GRUPPI.

1. Ammettiamo note le frasi:

I. *Avere enti* (Si hanno, si abbiano enti, e simili);

II. *Avere un ente* (solo);

III. *Avere un ente ed un ente;*

IV. *Non avere nessun ente;*

senza preoccuparci se si intendono definite o assunte come primitive, purchè nel loro uso si rispettino le leggi seguenti:

I è conseguenza e della II e della III; non possono coesistere II e III, I e IV, II e IV, III e IV.

Definiamo:

V. *Aversi più enti,*

come l'aversi enti che non siano un ente solo: e

VI. *Aversi un gruppo* (***),

l'aversi o un ente o più enti.

(*) Bettazzi - «Teoria delle Grandezze» - (Pisa 1890) - Parte I^a: «Le Grandezze e le classi».

(**) Vedi, in proposito, alcune osservazioni in:

Peano - «Sul concetto di numero» - Nota II - (*Rivista di Matematica* - Vol. I).

Biasi - «Elementi di Aritmetica e di Algebra» - (Sassari 1892) - Prefazione.

Burali Forti - «Sul Trattato di Aritmetica razionale del Dott. G. M. Testi» - (*Rivista di Matematica* - Vol. II).

(***) Uso qui la parola *gruppo* invece dell'altra *classe* che pur da molti è adoprata (V. «Formulaire de Mathématiques» publié par la «Rivista di Matematica» - Turin 1895) e perchè

Il non aversi nessun ente si indica talora anche con la frase:

VII. *Aversi il gruppo nullo.*

Gli enti di un gruppo costituito di più enti si diranno *distinti* fra loro.

Il gruppo costituito di un ente ed un ente si dirà *coppia di enti* e, soltanto se ciò sia conveniente alla speditezza del linguaggio, si dirà anche *gruppo di due enti.*

2. Ammetteremo che un medesimo ente si possa trovare in più gruppi, ed allora diremo che quei gruppi hanno quell'ente *comune*, o una coppia di enti *identici.*

Se tutti gli enti di un gruppo G' sono identici ad enti (alcuni o tutti) di un altro gruppo G, diremo quello *parte* di questo: e lo diremo *parte propria* se, inoltre, in G vi siano altri enti non comuni con G'.

Si dice *parte comune* di più gruppi un gruppo che è parte di ciascuno di essi: e *legame* (*) di essi il gruppo costituito da tutti e soli gli enti ad essi comuni.

3. Se gli enti di un gruppo G sono tutti e soli gli enti dell'uno e dell'altro di più gruppi G_1, G_2 ecc., si dirà G *composto* di G_1, G_2 ecc.

Se G è il gruppo composto di più gruppi G_1, G_2, ... privi di enti comuni, diremo che G *si spezza* nei gruppi G_1, G_2, ... dei quali esso si dirà la *somma*, scrivendo anche $G = G_1 + G_2 + \ldots\ldots$ In particolare se a è un ente non di G, il gruppo composto di G ed a si spezzerà in G ed a, e lo indicheremo con $G + a$.

Se G si spezza nei due gruppi G_1 e G_2, diremo G_2 (o G_1) *differenza* fra G e G_1 (o risp. G_2) scrivendo rispettivamente

$$G_2 = G - G_1, \quad G_1 = G - G_2.$$

In particolare, se a è un ente di G, sarà $G - a$ il gruppo degli enti di G distinti da a.

Capitolo II.

CORRISPONDENZA FRA I GRUPPI.

4. Dati due gruppi G_1 e G_2, si associno gli enti dell'uno e quelli dell'altro, pensando i gruppi formati ciascuno o da coppie di un ente di G_1 ed uno di G_2, o da un solo ente di G_1 o di G_2, in modo che: 1° ogni ente comparisca in uno di tali gruppi ed in uno solo, 2° se vi è qualche ente di G_1 che costituisca da sè solo un gruppo, non ve ne siano tali di G_2 e viceversa.

---

gruppo è il primo nome con cui in lingua italiana vennero indicati i *Menge* del Cantor, che li ideò (Dini - « Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali » - Pisa 1878), e perchè io adopro con altro significato il nome di *classe* nella mia « Teoria delle Grandezze » - (Pisa 1890). In lingua francese la parola corrispondente usata è *ensemble* - Il Dedekind « Was sind und was sollen die Zahlen? - Braunschweig » si serve della parola *System*.

Accenneremo d'ora in là a quest'ultimo lavoro semplicemente colla parola Dedekind.

(*) Il Dedekind usa la parola *Gemeinheit* (§ 1, N. 17).

Gli enti di ogni coppia si diranno allora *corrispondenti*, gli altri *isolati*; il fatto ora definito si dirà una *corrispondenza* fra i gruppi G_1 e G_2.

Una corrispondenza di una coppia di gruppi la diremo *distinta* da un'altra della stessa coppia, quando nell'una comparisca almeno un gruppo parziale (di uno o due enti) che non sia nell'altra.

5. Quando si considera un gruppo ed insieme il medesimo gruppo, ritenendolo una volta distinto dall' altro per il solo fatto che possiamo dare ad esso il pensiero in momenti diversi, si vede potersi parlare anche di *corrispondenza di un gruppo con se stesso.*

Una tale corrispondenza si dice *identità*, quando in essa non vi sono enti isolati, ed ogni coppia è formata da enti identici.

Se nella corrispondenza di un gruppo G con sè stesso accade che i corrispondenti di una parte G' del gruppo sono di nuovo tutti e soli gli enti di G', cioè G' corrisponde a sè stesso, diremo che in questa corrispondenza G' è un *ciclo*. Un ciclo può essere composto anche di un ente solo. I cicli parti proprie del gruppo si diranno *parziali*.

Se nessuna parte di un ciclo è ciclo essa stessa, diremo *semplice* il ciclo.

6. Per indicare una corrispondenza χ fra due gruppi G_1 e G_2 scriveremo:

$$(G_1,\ G_2)_\chi$$

e, naturalmente, tale simbolo equivarrà all' altro $(G_2,\ G_1)_\chi$.

Per indicare i tre fatti distinti: 1° che nella corrispondenza non vi siano enti isolati, 2° che se ne abbiano in G_1, 3° che se ne abbiano in G_2, scriveremo rispettivamente:

$$(G_1 \sim G_2)_\chi,\quad (G_1 > G_2)_\chi,\quad (G_1 < G_2)_\chi \text{ (*)}$$

e diremo che, *rispetto ad* χ, è G_1 risp. *equivalente*, *prevalente* o *suvvalente* a G_2. Se $(G_1 \sim G_2)_\chi$, diremo anche che, rispetto ad χ, G_1 e G_2 sono in *corrispondenza univoca*.

È chiaro che se $(G_1 > G_2)_\chi$, sarà $(G_2 < G_1)_\chi$, e che i tre casi sopra citati si escludono a vicenda nella stessa corrispondenza. Con ciò non si vuole escludere che in corrispondenze distinte possa aversi talora un caso, talora un altro.

7. Alla domanda se dati due gruppi qualunque possa sempre stabilirsi una corrispondenza fra essi, non pare si possa rispondere in generale, finchè almeno si lasci così ampio il concetto di gruppo.

Fra un gruppo G ed una sua parte G' può stabilirsi una corrispondenza, almeno quella che associa gli enti di G' agli identici di G, e lascia isolati gli altri. In tale ultima corrispondenza α sarà $(G' < G)_\chi$; ma non può asserirsi che simile relazione accada in qualunque altra corrispondenza che possa stabilirsi fra G e G'.

(*) Il segno $\sim$ è usato dal Cantor (p. es. V. «Une contribution à la théorie des ensembles» Acta Math. Bd. 2, pag. 311). Esigenze tipografiche, ci obbligano, per indicare le altre relazioni, a usare, invece che segni speciali, quelli ordinari $>$ e $<$.

8. Dati i gruppi G_1, G_2, G_3 e due corrispondenze α, β risp. fra G_1 e G_2 e fra G_2, G_3, se non sia in esse G_2 insieme suvvalente (od insieme prevalente) a G_1 ed a G_3, avremo una corrispondenza fra G_1 e G_3, associando gli enti che in α ed in β corrispondevano allo stesso ente di G_2, e lasciando isolati gli altri. Diremo una tal corrispondenza fra G_1 e G_3 *composta* delle due α e β, e la indicheremo con $\beta\alpha$. Avremo precisamente che

$$\begin{array}{lllll} \text{se} & (G_1 < G_2)\alpha & \text{e} & (G_2 \mathrel{\underset{\backsim}{<}} G_3)\beta & \text{sarà} \ (G_1 < G_3)\beta\alpha, \\ \text{se} & (G_1 > G_2)\alpha & \text{e} & (G_2 \mathrel{\underset{\backsim}{>}} G_3)\beta & \text{sarà} \ (G_1 > G_3)\beta\alpha, \\ \text{se} & (G_1 \backsim G_2)\alpha & \text{e} & (G_2 \mathrel{\substack{> \\ \backsim \\ <}} G_3)\beta & \text{sarà} \ (G_1 \mathrel{\substack{> \\ \backsim \\ <}} G_3)\beta\alpha. \end{array}$$

Capitolo III.

POTENZA DEI GRUPPI.

9. Se dati due gruppi G_1 e G_2 esiste una corrispondenza α rispetto alla quale siano equivalenti, li diremo *equivalenti* (senz'altro) o *di ugual potenza.* Potremmo usare, seguendo l'esempio di altri, anche la parola *simili.*

Se invece fra G_1 e G_2 si possono stabilire corrispondenze, e in *tutte* le possibili corrispondenze sia *sempre* G_1 suvvalente a G_2, diremo G_1 *di potenza minore* a quella di G_2, e G_2 *di potenza maggiore* a G_1 (*). Scriveremo nel primo caso:

$$G_1 \backsim G_2$$

e nel secondo:

$$G_1 < G_2 \quad \text{e} \quad G_2 > G_1.$$

I tre casi:

$$G_1 < G_2, \quad G_1 \backsim G_2, \quad G_1 > G_2$$

si escludono a vicenda, senza che necessariamente possa dirsi che presi due gruppi G_1 e G_2, anche se si sa esistere fra essi qualche corrispondenza, debba accadere uno dei tre casi.

Diremo che due gruppi hanno *potenza consecutiva,* se non esiste nessun gruppo di potenza maggiore dell'uno e minore dell'altro.

Discende immediatamente dalle definizioni date, che:

Il gruppo nullo (§ 1) ha potenza minore di tutti gli altri non nulli.

Il gruppo di un ente (§ 1) ha potenza maggiore a quella del gruppo nullo, uguale a quella di qualunque altro gruppo di un ente solo, minore a quella di qualunque gruppo di più enti.

Un gruppo è sempre di ugual potenza a sè stesso (§ 5).

10. Come si vede facilmente per assurdo dal § 8, si ha, se G_1, G_2, G_3 sono gruppi, che:

(*) Cantor l. c. pag. 312. Vedi tracce di tali concetti anche in Bolzano, « Paradoxen der Unendlichen », 1850.

$$\text{da} \quad G_1 \gtrless G_2 \quad \text{e} \quad G_2 \sim G_3, \quad \text{discende} \quad G_1 \gtrless G_3,$$
$$\text{da} \quad G_1 \overset{>}{\underset{<}{\sim}} G_2 \quad \text{e} \quad G_2 \overset{>}{\underset{<}{\sim}} G_3, \quad \text{discende} \quad G_1 \overset{>}{\underset{<}{\sim}} G_3;$$

prendendo ogni volta i segni sulla medesima linea. Tali relazioni possono anche scriversi sotto le altre forme, che facilmente si deducono pure dal § 8:

$$\text{da} \quad G_1 \sim G_2 \quad \text{e} \quad G_2 \overset{>}{\underset{<}{\sim}} G_3 \quad \text{si ha} \quad G_1 \overset{>}{\underset{<}{\sim}} G_3,$$
$$\text{da} \quad G_1 < G_2 \quad \text{e} \quad G_2 \lesssim G_3 \quad \text{si ha} \quad G_1 < G_3,$$
$$\text{da} \quad G_1 > G_2 \quad \text{e} \quad G_2 \gtrsim G_3 \quad \text{si ha} \quad G_1 < G_3.$$

11. Diremo per brevità *paragonabili* due gruppi quando di essi possa dirsi se hanno ugual potenza, o, se non l'hanno, quale di essi l'ha maggiore e quale minore.

Un gruppo è paragonabile con sè stesso: il gruppo nullo ed il gruppo di un ente sono paragonabili con qualunque gruppo (§ 9).

Capitolo IV.

GRUPPI SVILUPPABILI.

12. Diremo *sviluppabile* ogni gruppo che sia equivalente ad una sua parte propria (*).

Teorema. — Esistono gruppi sviluppabili.

Tale è quello citato dal Dedekind (**) (che, a sua volta, lo prese dal Bolzano (***)) di tutti gli enti che possono essere oggetti del nostro pensiero, siano essi materiali o pensieri essi stessi. Associando ad ogni ente s di un tal gruppo G l'idea s' che s può essere oggetto del nostro pensiero (idea che essa pure è ente di quel gruppo), si stabilisce una corrispondenza fra tutti gli enti di quel gruppo ed enti di esso i quali non costituiscono l'intero gruppo G, essendovi in G enti (p. es. il nostro *io*) che sono distinti dalle idee s'. In tale corrispondenza il gruppo si vede essere equivalente ad una sua parte propria.

Si ha pure un gruppo cosiffatto se prendiamo come enti gli istanti del tempo a cominciare da un determinato fino nell'eternità, associando ciascuno di tali istanti p. es. a quello che lo segue dopo un minuto (o un secondo, o un ora ecc.), riuscendo così il gruppo equivalente a quella sua parte propria che si ha da esso sopprimendo gli istanti del primo minuto (o secondo, od ora ecc.).

(*) Tali gruppi sono dal Dedekind (§ 5, n. 64) detti *infiniti;* ma ho preferito dare in seguito tal nome ad un'altra categoria di gruppi a cui appartengono i gruppi sviluppabili, e che mi sembra corrisponda meglio al concetto che ci si fa ordinariamente del gruppo infinito. (V. § 96 e *Introduzione*).

(**) L. c. § 5, N. 66 — da lui detto, come si accennava ora, gruppo infinito.

(***) L. c. § 13.

E si potrebbero dare anche altri esempi.

13. Teorema. — Un gruppo Γ equivalente ad uno sviluppabile è tale esso pure (*).

Se G_1 è un' opportuna parte propria dal gruppo sviluppabile dato G, e α è una conveniente corrispondenza, dovrà essere, secondo l'ipotesi, $(G_1 \sim G)_\alpha$: e se β è la corrispondenza per cui $(\Gamma \sim G)_\beta$, e Γ_1 è il gruppo degli enti di Γ corrispondenti in β a quelli G_1 di G, dalle relazioni

$$(\Gamma_1 \sim G_1)_\beta, \quad (G_1 \sim G)_\alpha, \quad (G \sim \Gamma)_\beta$$

si ricava

$$(\Gamma_1 \sim \Gamma)_{\beta(\alpha\beta)},$$

cioè Γ è un gruppo sviluppabile.

Corollario. — Ogni gruppo equivalente ad uno non sviluppabile, non può essere sviluppabile neppur esso.

14. Teorema. — Se una parte di un gruppo G è sviluppabile, è tale anche il gruppo stesso (**).

Sia G_1 una parte sviluppabile del gruppo G: sarà per una conveniente parte propria G_2 di G_1 e per una conveniente corrispondenza α,

$$(G_1 \sim G_2)_\alpha.$$

Aggiungendo in α a G_1 ed a G_2 gli enti di G che non sono in G_1 e di essi facendo corrispondere gli identici nei due gruppi, si avrà che G_1 e G_2 si cambieranno il primo in G ed il secondo in una sua parte propria, e nella corrispondenza stabilita tali gruppi saranno equivalenti, il che dimostra il teorema.

Corollario 1. — Le parti di un gruppo non sviluppabile non sono sviluppabili.

Cor. 2. — Un gruppo prevalente ad uno sviluppabile G è sviluppabile esso pure, essendo per ipotesi una sua parte equivalente a G, e quindi (§ 13) sviluppabile essa stessa.

15. Teorema. — Se esiste una corrispondenza nella quale una parte di un gruppo (propria o no) è prevalente al gruppo, questo è un gruppo sviluppabile.

Infatti dovrà essere equivalente al gruppo una parte propria della parte citata, che pure è parte propria del gruppo.

Corollario I. — Se in una corrispondenza un gruppo è prevalente a sè stesso, il gruppo è sviluppabile.

Cor. 2. — Ogni parte di un gruppo il quale non sia sviluppabile è tale che, se esistono corrispondenze fra essa ed il gruppo, in ognuna di esse deve essere suvvalente al gruppo. Ma si possono sempre stabilire corrispon-

---

(*) Dedekind § 5, N. 67.
(**) Dedekind § 5, N. 68.

denze fra un gruppo ed una sua parte, per lo meno quella in cui gli enti della parte si accoppiano agli identici del gruppo; si conclude dunque che ogni parte di un gruppo non sviluppabile è suvvalente all'intero gruppo.

Capitolo V (*).

CATENA DI UN ENTE.

16. Supponiamo che si abbia un criterio qualunque, col quale, dato un gruppo G ed una sua parte, propria o no, G_1, ad ogni ente a di G_1 se ne colleghi un altro (solo) di G, che indicheremo con σa, colla condizione che a due enti distinti ne vadano collegati due pure distinti.

Se sia $b = \sigma a$, scriveremo anche $a = \pi b$. Se dunque α e β sono due enti distinti di G, saranno distinti fra loro (quando esistono) $\sigma\alpha$ e $\sigma\beta$, e così $\pi\alpha$ e $\pi\beta$.

Evidentemente si stabilisce con tale criterio una corrispondenza fra il gruppo G_1 ed una parte G', propria o no, di G, nella quale quello e questa sono equivalenti; ad a di G_1 corrisponde σa nella parte G' di G, ed a b di G' corrisponde πb di G_1. Ogni ente di G_1 ammette l'ente σ, ed ogni ente di G' ammette l'ente π: non è esclusa l'esistenza di enti di G privi di ente σ, o di ente π, o dell'uno e dell'altro.

Si costruisca un gruppo parte di G, tale che contenga un ente a di G, e che se contiene un ente di G contenga anche il suo ente σ (quando questo esista): si indichi tal gruppo scrivendo $(a)_\sigma$, o dicendolo gruppo (a) rispetto alla corrispondenza o criterio σ. Se non possa nascere ambiguità, lo indicheremo semplicemente con (a) (**).

Dei gruppi (a) di G relativi ad una stessa corrispondenza si costruisca il legame Γ (§ 2), che non è il gruppo nullo, contenendo per lo meno a. Esso è tale che se contiene un ente di G contiene anche il suo ente σ (quando questo c'è), ed è quindi esso stesso un gruppo (a).

Qualunque gruppo (a) di G dovendo contenere, per definizione di legame, tal gruppo Γ, sarà assurdo un gruppo (a) di G che sia parte propria di esso legame Γ: il quale quindi può dirsi, in certo modo, il minimo fra i gruppi (a) di G.

Definizione. — Il gruppo in questione si dirà *catena dell'ente* **a** nel gruppo G rispetto al criterio σ (***). E potendosi chiaramente parlar di catena anche invertendo, in quello che si è detto, le lettere σ e π, diremo il

---

(*) v. Bettazzi. « Sulla catena di un ente in un gruppo » (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, Vol. XXXI).

(**) Il Dedekind (§ 4) dice che tali gruppi sono catene che contengono a, dopo aver detto *catena* un gruppo equivalente ad una sua parte in una data corrispondenza.

(***) Cfr. Dedekind § 4 N. 44. Il Dedakind abbraccia anche le corrispondenze che egli dice dissimili; ma si restringe alle catene che più oltre dirò illimitate.

criterio σ e il criterio π *opposti*, e *opposte* le due catene di un ente prese rispetto a due criteri opposti.

Una catena si dirà *prodotta* dalla corrispondenza fra l'intero gruppo G, o una sua parte G_1, ed una parte G' di G, della quale si è parlato più sopra in questo paragrafo.

17. Teorema. — Se b appartiene alla catena di a fatta in G rispetto a σ, questa catena contiene come parte la catena di b.

Infatti la catena di a contiene b, per ipotesi, e se un ente di G, anche il suo ente σ. Ogni ente c della catena di b deve appartenerle: altrimenti il gruppo legame delle due catene sarebbe un gruppo che conterrebbe b, se un ente di G anche il suo σ, e non c, cioè non conterrebbe intera la catena di b, contro quello che si è detto della catena di un ente (§ 16).

18. Teorema. — In una catena (*) può esistere un solo ente privo in essa di ente π, ed un solo privo in essa di ente σ.

1. Se Γ è catena di a rispetto al criterio σ, e b è un ente di Γ diverso da a, dovrà in Γ esistere πb: altrimenti, sopprimendo b, che allora in Γ non è σ di nessun ente e non è a, resterebbe un nuovo gruppo (a) contenente a e il σ di ogni suo ente, e che farebbe parte della catena Γ, contro quanto si è visto (§ 16) per la catena. Il solo ente a può dunque (senza che così si mostri ciò necessario) essere privo di ente π, esista o no l'ente πa nel gruppo completo dato.

2. Sia b un ente della catena Γ di a che sia privo di ente σ. Se b è a, sarà Γ costituito dal solo ente a, e il teorema è provato. Se b non è a, si costruisca allora in Γ la catena Γ' di b rispetto al criterio π. Essa conterrà a; ed invero se non contenesse a non conterrebbe σa, giacchè a è l'ente π di σa, e π è il criterio della catena Γ' e quindi il contenere un ente, p. es.: σa, porta che esista il suo ente π, che sarebbe appunto a. In generale, se non contenesse un ente di G non conterrebbe il suo ente σ, e perciò non conterrebbe (§ 16) la intera catena di a, e quindi neppure b, che è di tal catena, e ciò è assurdo. E siccome in ogni catena, per la prima parte del teorema, il solo ente privo di π, se il criterio è σ, (e quindi di σ, se il criterio è π) può essere quello di cui essa è catena, così in Γ' il solo b può essere privo di ente σ e quindi Γ' contiene a, e contiene l'ente σ di ogni ente, che non sia b, e quindi contiene l'intera catena Γ: talchè Γ' coincide con Γ. E siccome in Γ', come si è visto per la prima parte del teorema applicata a Γ' col criterio π, il solo b può essere privo di ente σ, così ciò vale anche per Γ, identico a Γ', ed è provato il teorema.

Definizione. Una catena fatta rispetto al criterio σ si dirà *limitata* od *illimitata*, secondochè esiste in essa o no un ente privo di ente σ; *aperta* o *chiusa*, secondochè esiste in essa o no un ente privo di ente π.

(*) Dicendo *catena* senz'altro, intenderemo d'ora in là la catena di un conveniente ente, rispetto ad un conveniente criterio.

19. Teorema. — Una catena aperta illimitata è un gruppo sviluppabile (§ 12).

Infatti nella corrispondenza σ al gruppo equivale il gruppo stesso privo dell'ente di cui esso è catena.

20. Teorema. — Se la catena Γ di un ente a rispetto ad un criterio σ in un gruppo G è aperta, essa non può con la catena di a opposta ad essa (§ 16) aver comune altri enti che a.

Siano infatti Γ_1, Γ_2 le catene di a rispetto ai criteri σ e π, ammesso che esistano entrambi e non si riducano al solo a. Se p è un ente comune a Γ_1 e Γ_2 ed è diverso da a, esisteranno e saranno comuni anche σp e πp: invero essendo p di Γ_2, e non essendo a, esiste in Γ_2 il suo ente σ (§ 18), e quindi tale ente esiste nel gruppo G, e deve trovarsi anche in Γ_1, che è catena rispetto al criterio σ: in modo simile esiste in Γ_1 il πp, ed è anche in Γ_1: come si era accennato. Il gruppo degli enti comuni dunque contiene a, e dovrebbe contenere il σ di ogni proprio ente, e contenere perciò l'intera catena Γ_1: e dovendo contenere il π di ogni proprio ente, dovrebbe contenere anche l'intero Γ_2. Quindi dovrebbero essere comuni tutti gli enti di Γ_1 e Γ_2, e perciò essere identiche queste due catene. Dovrebbe quindi πa, che è per definizione in Γ_2, essere anche in Γ_1, il che non può essere, essendo Γ_1 aperto per ipotesi. Dunque è assurda l'esistenza di enti comuni a Γ_1 e Γ_2 diversi da a, che è quanto dovevasi dimostrare.

Osservazione. Anche la catena Γ_2 è aperta, non potendo contenere σa, che sarebbe comune con Γ_1.

21. Teorema. — Il gruppo Γ_0 composto della catena aperta di un ente a e della sua opposta (che è pure aperta) (§ 20) non può contenere al più che un solo ente privo di ente σ, ed uno solo privo di ente π.

Infatti gli enti di tal gruppo Γ_0 sono: 1° l'ente a, di cui esistono gli enti σ e π risp.: nelle catene Γ_1 e Γ_2 fatte rispetto a σ e π; 2° enti di Γ_1 distinti da a, di ciascuno dei quali esiste in Γ_1 l'ente π, ed al più di uno manca l'ente σ; 3° enti di Γ_2 distinti da a, di ciascuno dei quali esiste l'ente σ in Γ_2, ed al più di uno manca l'ente π.

22. Teorema. — Se per ogni ente del gruppo Γ_0 definito nel teorema precedente si costruisce l'analogo gruppo, esso coincide con Γ_0.

Sia Γ_0 il gruppo in questione costruito rispetto ad a, e b ne sia un ente diverso da a: e si indichino con $\Gamma_1^{(b)}$, $\Gamma_2^{(b)}$ le due catene di b prese risp. rispetto a σ e π, con $\Gamma_0^{(b)}$ il loro gruppo composto. Se b p. es. appartiene alla catena Γ_1 di a rispetto a σ, sarà $\Gamma_1^{(b)}$ parte di Γ_1 (§ 17) e quindi di Γ_0. Ma lo stesso deve aversi per $\Gamma_2^{(b)}$. Infatti se un ente c di $\Gamma_2^{(b)}$ è in Γ_0, deve, come si è visto, esservi πc, quando esiste, e perciò Γ_0 contiene b ed il π di ogni ente di $\Gamma_2^{(b)}$ che esso contenga, e quindi anche l'intera catena $\Gamma_2^{(b)}$. Si conclude che Γ_0 contiene b, $\Gamma_1^{(b)}$, $\Gamma_2^{(b)}$, e quindi il gruppo in questione $\Gamma_0^{(b)}$ è parte di Γ_0.

Ora $\Gamma_2^{(b)}$ deve contenere a: giacchè altrimenti, siccome $\Gamma_2^{(b)}$ contiene gli enti π dei propri enti, e quindi manca degli enti σ degli enti mancanti, così mancando di a e del σ di ogni ente mancante, mancherebbe della intera catena Γ_1 di a, e quindi di b, il che non dev'essere. Si conclude che a è un ente del gruppo $\Gamma_0^{(b)}$, quindi, per la parte già dimostrata, sarà Γ_0 parte di $\Gamma_0^{(b)}$. Le due parti combinate insieme dimostrano che Γ_0 e $\Gamma_0^{(b)}$ sono identici, come si doveva provare.

Analoga dimostrazione può farsi se b è di Γ_2.

Corollario. — Se in un gruppo come Γ_0 esiste un ente c privo di ente π, il gruppo è la catena di c rispetto al criterio σ: e se esiste un ente d privo di ente σ, il gruppo è la catena di d rispetto al criterio π.

Osservazione. Fra i gruppi precedentemente studiati, si distinguono dalle catene solo quelli in cui ogni ente possiede l'ente π e l'ente σ.

23. Definizione. — Il gruppo composto della catena aperta illimitata di un ente a e della sua catena opposta (che è pure aperta) supposta illimitata, si dice *bicatena* dell'ente a.

Corollario 1. - Una bicatena di un ente è bicatena rispetto a qualunque suo ente (§. 22).

Osservazione. Potremo, in base al Corollario precedente, indicare le bicatene di un ente col semplice nome di bicatene.

Cor. 2. - In una bicatena ogni ente ammette l'ente σ e l'ente π.

Cor. 3. - Una bicatena è un ciclo (§ 5) della corrispondenza che la produce (§ 16).

Cor. 4. - Una bicatena è un gruppo sviluppabile, avendo parti che sono ciascuna una catena aperta illimitata (§§ 19, 14).

24. Teorema. - Dato un gruppo G, se la catena Γ di un suo ente a presa rispetto ad un criterio σ non consta di un solo ente ed è chiusa (§ 18), è catena chiusa anche rispetto al criterio π, ed in entrambi gli aspetti è illimitata (§ 18).

Infatti nella catena data Γ ogni ente contiene il proprio ente π, ciò accadendo (§ 18) in tutte le catene per tutti i loro enti, eccetto al più per quello di cui sono catene, e nella nostra Γ anche per tale ente, per ipotesi, essendo la catena chiusa.

Si costruisca ora in G la catena Γ' di a rispetto al criterio π, cioè il legame dei gruppi $(a)_\pi$ i quali 1º contengono a, 2º se contengono un ente di G ne contengono anche l'ente π. Essendo Γ_1, come si è ora visto secondo l'ipotesi, uno di tali gruppi $(a)_\pi$, esso dovrà contenere l'intero Γ' (§ 16).

Reciprocamente deve Γ' contenere l'intero Γ. Ed invero Γ' contiene a. Inoltre in Γ' esiste l'ente σ di ogni ente, eccetto al più a, giacchè come in ogni catena presa rispetto al criterio σ esiste l'ente π di ogni ente (eccetto al più quello di cui si è fatta la catena) così nel caso nostro, essendo π il criterio, ed il corrispondente di ciò che prima si indicava con π essendo ora σ, si avrà che di ogni ente, per lo meno distinto da a, esisterà l'ente σ. Ed esiste in Γ' anche σa, altrimenti, mancando σa, mancherebbe il σ di σa (poichè essendovi tale ente vi sarebbe il suo ente π che è σa) ed in generale mancando un ente mancherebbe il suo ente σ: laonde il gruppo degli enti mancanti, aggiungendovi a, conterrebbe a e, se un ente, il suo σ, e quindi l'intera catena Γ, e la catena Γ' non conterrebbe altri enti di Γ che a. Ciò è assurdo, giacchè essa contiene πa, per definizione di catena, e πa è di Γ per ipotesi, e inoltre πa non è a, altrimenti sarebbe a anche σ di sè stesso, e Γ consterebbe del solo ente a contro l'ipotesi. È dunque provato che in Γ esiste a e il σ di ogni ente, e quindi Γ' contiene Γ.

I due gruppi Γ' e Γ essendo ciascuno parte dall'altro, sono identici, il che prova la prima parte del teorema.

Contenendo poi Γ', come si è visto, l'ente σ di ogni suo ente, ed essendo Γ' identico con Γ, lo stesso accadrà per Γ, e quindi Γ sarà catena illimitata pel criterio σ ed analogamente per quello π, il che prova la restante parte del teorema.

Corollario 1. - Ogni catena chiusa non di un solo ente coincide con la propria catena opposta (§ 16).

Cor. 2. - Ogni catena chiusa non di un solo ente è illimitata.

Cor. 3. - Ogni catena limitata è aperta.

25. Teorema - Una catena chiusa è un ciclo (§ 5) della corrispondenza che la produce (§ 16).

Infatti nella corrispondenza σ ogni ente della catena ne ammette uno π, perchè la catena è chiusa, ed uno σ, perchè quindi (§ 24 Cor. 2.) la catena è illimitata, cioè il gruppo corrisponde a sè stesso nella corrispondenza σ.

26. Teorema - Una catena chiusa Γ di un gruppo G, è in quel gruppo catena di uno qualunque dei propri enti, rispetto allo stesso criterio della catena data.

Infatti, se Γ è definita come catena di a rispetto per es. al criterio σ e b è un suo ente, dovrà (§ 17) Γ contenere la catena di b. Ora, nel caso attuale, si ha inoltre che la catena di b dovrà contenere a. Ed invero, se in essa manca un ente mancherà anche l'ente π di esso, giacchè se contenesse questo, conterrebbe anche il suo ente σ che è quello in questione. Se dunque mancasse in essa a, essa sarebbe priva di a e se di un ente anche del suo ente π, e quindi anche dell'intera catena fatta rispetto alla corrispondenza π. Ma tale catena coincide (§ 24) con la catena data di a, dunque la catena di b dovrebbe mancare di tutti gli enti della catena di a, fra i quali è b stesso. Non potendo ciò essere, la catena di b contiene a, e quindi la catena di a.

Le due catene di a e di b si contengono a vicenda, e quindi coincidono c. d. d.

Corollario 1. - Ogni catena chiusa, che non sia di un solo ente, coincide con ciascuna delle due catene

12

opposte di uno qualunque dei suoi enti, prese rispetto allo stesso criterio ed all' opposto.

27. Teorema. - Se in una corrispondenza α priva di cicli un gruppo G è simile ad una sua parte propria, esso si può spezzare in un gruppo di catene aperte ed illimitate di enti di G.

Sia G' la parte propria di G, a cui G equivale in α, e G_0 il gruppo $G - G'$ (§ 3). Definendo come ente σ di uno di G il suo corrispondente di G', ogni ente di G ammette l'ente σ, ed ammettono l'ente π gli enti di G' e non quelli di G_0.

Si costruisca la catena, rispetto al criterio σ, di ciascun ente di G_0. Allora

1° «Due catene Γa, Γb di enti distinti a, b di G_0 non «possono avere enti comuni».

Infatti b non può essere di Γa, giacchè b non ammette ente π ed in Γa ciò accade soltanto per a (§ 18), e b non è a. Analogamente a non può essere di Γb. Gli enti comuni a Γa e Γb, se esistono, devono dunque essere diversi da a e b. Ora se un ente di Γb che non sia b è anche ente di Γa distinto da a, di esso deve esistere l'ente π tanto in Γa quanto in Γb (§ 16): e quindi se un ente c di Γb non è di Γa, non lo deve essere neppure il suo ente σ, altrimenti l'ente π di questo, che è c, dovrebbe esserlo pure, contro l'ipotesi. Perciò il gruppo degli enti di Γb che *non* sono in Γa è tale che contiene b e se contiene un ente contiene anche il suo ente σ, e quindi contiene ogni ente di Γb, per il concetto di catena. Dunque nessun ente di Γb è in Γa, e quindi Γa e Γb non hanno enti comuni.

2° «Ogni ente di G deve trovarsi in qualche catena «di quelle ora costruite».

Ed invero gli enti privi di ente π sono quelli di G_0, e con ciascuno di essi si è costruita una catena. Se invece c è un ente che possiede ente π, si supponga, se è possibile, che non appartenga a nessuna delle catene costruite: non dovrà a nessuna di queste catene appartenere nè il suo ente σ (§ 18) nè il suo ente π (§ 16), poichè esso è ente π del primo ed ente σ del secondo. Consideriamo il gruppo di tutti gli enti che non appartengono a nessuna delle catene costruite: per quanto si è detto, ciascun ente di esso ammette in esso l'ente π e l'ente σ, e quindi questo gruppo è tale che i suoi enti corrispondono a enti del gruppo stesso senza enti isolati, ed esso è un ciclo, contro l'ipotesi. Dunque non possono esistere enti non appartenenti a nessuna delle catene costruite.

Si conclude che il gruppo proposto si spezza in più catene, una per ciascuno degli enti di G che non sono nella parte propria G' equivalente a G. Tali catene sono aperte, essendo l'ente, di cui sono catene, privo, per ipotesi, di π: e sono illimitate, poichè di ogni ente esiste l'ente σ. c. d. d.

Corollario 1° - Se p è un ente di G, e in una corrispondenza α priva di cicli parziali si ha $(G \backsim G - p)_\alpha$, sarà G catena dell'ente p rispetto alla corrispondenza α, e sarà una catena aperta illimitata.

Cor. 2° - Se in una corrispondenza un gruppo è equivalente ad una sua parte propria, esso, rispetto a quella corrispondenza, si spezza in un gruppo di catene aperte e di cicli.

28. Teorema. - Se in una corrispondenza α priva di cicli parziali un gruppo G è equivalente a sè stesso, (cioè G è un ciclo semplice) il gruppo è o una catena chiusa, o una bicatena.

Si prenda per ente σ di un ente di G il suo corrispondente pure di G, nella corrispondenza α: e quello sia l'ente π di questo. Si costruisca la catena Γ rispetto al criterio σ di un ente qualunque a di G. Se essa è chiusa, deve essere identica all'intero gruppo G, altrimenti (§ 25) sarebbe un ciclo della corrispondenza α, contro l'ipotesi. In tal caso il teorema è provato. Se invece Γ è aperta, non può essa essere identica al gruppo, giacchè in essa manca almeno l'ente π di a, che invece esiste nel gruppo a causa della supposta corrispondenza e del significato di π. Se in essa manca un ente p di G, mancherà anche il suo ente π, del quale, se non mancasse, dovrebbe esistere in Γ l'ente σ, che è p. Il gruppo Γ' composto di a e degli enti di G che sono in Γ è dunque tale che contiene a e l'ente π di ogni suo ente, quindi esso è un gruppo (a) rispetto al criterio π. E dovrà essere anzi catena di a rispetto a π Infatti, altrimenti, la catena di a rispetto a π dovrebbe esser parte propria di esso, (§ 16) ed il gruppo Γ_0 composto di tale catena e di Γ non esaurirebbe l'intero gruppo; ma in Γ_0 esiste l'ente σ e l'ente π di ogni proprio ente, dunque esso nella corrispondenza α corrisponderebbe a sè stesso e sarebbe un ciclo, contro l'ipotesi.

Dovrà dunque al gruppo dato essere identico il gruppo composto delle due catene citate, cioè la bicatena di un ente qualunque a del gruppo. Così è provato il teorema.

Corollario 1° - Se rispetto ad una corrispondenza priva di cicli parziali, in cui sia simile a sè stesso, un gruppo non è catena chiusa di un suo speciale ente (e quindi (§ 26) di nessun suo ente) il gruppo è sviluppabile (§ 23. Cor. 4°).

Cor. 2. — Se un gruppo non è sviluppabile, ed in una corrispondenza priva di cicli è simile a sè stesso, esso è catena chiusa di ogni suo ente.

Cor. 3. — Poichè tanto la catena chiusa (§ 25) quanto la bicatena (§ 23, Cor. 3.) sono cicli della corrispondenza che le produce, si ha che: Se in una corrispondenza un gruppo è equivalente a sè stesso, esso, rispetto a quella corrispondenza, si spezza in un gruppo di cicli.

29. In una catena Γ aperta illimitata di a rispetto ad un criterio σ, di ogni ente esiste l'ente σ e l'ente π, eccetto per l'ente a che non ha π; fra Γ e $\Gamma - a$ si può quindi stabilire una corrispondenza α, nella quale ad ogni ente di Γ corrisponde il suo σ in $\Gamma - a$, ed in essa si ha $(\Gamma \backsim \Gamma - a)_\alpha$.

In una catena chiusa (quindi illimitata), di ogni ente esistendo gli enti σ e π, si ottiene in modo simile una corrispondenza del gruppo Γ con sè stesso, nella quale Γ è simile a sè stesso. Così dicasi delle bicatene. E nella catena limitata ed aperta si ottiene una corrispondenza in cui Γ è simile a sè stesso, dicendo ad ogni ente corrispondente il suo σ, ed a ente corrispondente (σ) di quello privo di ente σ.

Definizione. — Diremo in ogni caso ciascuna di queste corrispondenze corrispondenza della catena o della bicatena.

30. Teorema. — La corrispondenza di una catena o bicatena di un ente a è priva di cicli parziali.

Sia Γ la catena di a e sia, se è possibile, Γ_1 un suo ciclo; Γ_1 sarà tale che conterrà gli enti σ e π di ciascun suo ente. Se Γ_1 contenesse a, allora contenendo a e l'ente σ di ogni proprio ente, dovrebbe contenere Γ_1, il che è assurdo dovendo essere Γ_1 parte propria di Γ. Se Γ_1 non contenesse a, la differenza $\Gamma - \Gamma_1$ conterrebbe a e l'ente σ di ogni suo ente (giacchè se un ente è di $\Gamma - \Gamma_1$, cioè non di Γ_1, il proprio π, di cui esso è σ, è ancora di $\Gamma - \Gamma_1$) e quindi conterrebbe Γ, il che è parimente assurdo. Dunque Γ_1 non può esistere, c. d. d.

Corollario. — Una bicatena ed una catena chiusa sono cicli semplici (§ 5) della corrispondenza che le produce.

(*Continua*).

RICERCA DEL MASSIMO COMUN DIVISORE

DI DUE O PIÙ NUMERI

MEDIANTE LA DIVISIONE

1. Il noto metodo per la ricerca del massimo comun divisore di due numeri mediante la divisione non è che un caso particolare d'un procedimento generale per trovare il massimo comun divisore di quanti si vogliano numeri.

Scopo della presente nota è appunto l'esposizione di tale procedimento, il quale offre tutti i vantaggi del caso particolare sopra citato riguardo all'uniformità ed alla facilità dell'applicazione.

Siano dati più numeri interi a_0, a_1. a_2, ... , a_n disposti in ordine decrescente e dividasi a_0 per a_1, il resto ottenuto per a_2, il nuovo resto per a_3 e così via; il resto dell'ultima divisione si dirà *residuo finale* dei numeri dati e la scrittura

$$[a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n] = r$$

indicherà che r è il residuo finale dei numeri $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

È evidente che se il resto di una delle divisioni è nullo, saranno nulli anche tutti i rimanenti e quindi anche il residuo finale. Se il resto di una divisione è minore del numero successivo o di più numeri successivi della serie data, si continuerà l'operazione dividendo questo resto per il primo numero che non lo supera. Finalmente se il resto di una divisione è minore dell'ultimo numero della serie data, esso sarà il residuo finale.

Esempio. Il residuo finale dei numeri 12365, 728, 425, 298, 96 è 4, cioè si ha

$$[12365,\ 728,\ 425,\ 298,\ 96] = 4.$$

L'operazione può disporsi nel seguente modo:

12365	728	16
5085		
717	425	1
292	96	3
4		

Siano $q_1, q_2, \ldots, q_n$ i quozienti delle divisioni eseguite coi numeri $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ nel modo ora dichiarato per ottenere il residuo finale r. È chiaro che si avrà:

$$a_0 = a_1 q_1 + a_2 q_2 + \ldots + a_n q_n + r.$$

Questa uguaglianza mostra che se i numeri $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ed r hanno un divisore comune, questo deve dividere anche il residuo finale r e che se i numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ed r hanno un divisore comune, questo deve dividere anche il numero a_0.

Restano quindi dimostrati i due seguenti teoremi:

Teorema I. — *Se un numero divide più numeri, anche il loro residuo finale è divisibile per quel numero.*

Teorema II. — *Se il residuo finale di più numeri e questi numeri, ad eccezione del primo, hanno un fattore comune, questo divide anche il primo numero.*

2. Premesso ciò, dati i numeri $a_0, a_1, \ldots, a_n$, si determinino i numeri $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots$, definiti dalle seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} [a_0, a_1, \ldots, a_n\ ] &= a_{n+1}, \\ [a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}] &= a_{n+2}, \\ [a_2, a_3, \ldots, a_{n+2}] &= a_{n+3}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Se qualcuno dei residui finali $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ che così vengono determinati successivamente è nullo, esso verrà abbandonato e si continuerà l'operazione cogli n numeri che lo precedono. Ottenuto nuovamente un residuo finale nullo, si abbandonerà e si continuerà l'operazione cogli $n-1$ numeri precedenti e così via, finchè dopo un numero finito di operazioni ci si ridurrà a due unici numeri, coi quali si procederà finchè si otterrà un residuo nullo.

È chiaro che si deve pervenire ad un tale risultato, giacchè i residui finali non nulli vanno successivamente decrescendo.

Teorema. — *L'ultimo residuo finale non nullo, ottenuto mediante il procedimento precedente, è il massimo comun divisore dei numeri dati.*

Siano infatti a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 cinque numeri interi disposti in ordine decrescente e suppongasi che, applicando il procedimento ora dichiarato, si ottenga il risultato espresso dalle seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} [a_0, a_1, a_2, a_3, a_4] &= a_5 \\ [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] &= 0 \\ [a_2, a_3, a_4, a_5] &= a_6 \\ [a_3, a_4, a_5, a_6] &= a_7 \\ [a_4, a_5, a_6, a_7] &= 0 \\ [a_5, a_6, a_7] &= 0 \\ [a_6, a_7] &= a_8 \\ [a_7, a_8] &= 0\,. \end{aligned}$$

Procedendo dall'ultima uguaglianza fino alla prima ed applicando replicatamente il teorema II, si riconosce subito che a_s divide tutti i numeri dati.

È poi evidente che i numeri dati non possono essere divisibili tutti per un numero maggiore di a_s, giacchè se ciò fosse, in base al teorema I dovendo essere divisibili per quel numero anche i residui finali, lo dovrebbe essere anche a_s, il che è impossibile.

In modo identico si può dimostrare il teorema per quanti si vogliano numeri.

Da quanto precede si ricava la seguente

Regola. *Per trovare il massimo comun divisore di più numeri, si dispongono dapprima in ordine decrescente e si trova il loro residuo finale; si abbandona il numero maggiore, alla destra del minore si scrive il residuo finale prima calcolato e si trova il residuo finale di questi numeri, e così via. I residui finali che risultano nulli si abbandonano di volta in volta.*

Terminata l'operazione, l'ultimo residuo finale non nullo è il massimo comun divisore dei numeri dati.

Esempio. Vogliasi determinare il massimo comun divisore dei numeri seguenti:

$$36738,\ 11448,\ 5904,\ 342,\ 288.$$

Operando secondo la regola si troverà:

$$\begin{aligned}
[36738,\ 11448,\ 5904,\ 342,\ 288] &= 0,\\
[11448,\ 5904,\ 342,\ 288] &= 72,\\
[5904,\ 342,\ 288,\ 72] &= 18,\\
[342,\ 288,\ 72,\ 18] &= 0,\\
[288,\ 72,\ 18] &= 0,\\
[72,\ 18] &= 0.
\end{aligned}$$

Il massimo comun divisore dei numeri dati è dunque 18.

In pratica si può disporre l'operazione come segue:

36738	11448	3
2394	342	7
0		
11448	5904	1
5544	342	16
2124		
72		
5904	342	17
2484		
90	72	1
18		

342	288	1
54	18	3
0		
288	72	4
0		
72	18	4
0		

Treviso, settembre 1895.

Prof. Luigi Carlini.

TEMI DI MATEMATICA DATI PER L'ESAME DI MATURITÀ
IN GINNASI E SCUOLE REALI SUPERIORI DELL'AUSTRIA-UNGHERIA
alla fine degli anni scolastici 1891-92 e 1892-93.

(*Continuazione e fine: V. pag. 27, 55, 97, 148, 184 dell'anno IX, 25, 58 dell'anno X, 20 e 55 dell'anno XI*).

Horn: *Ginnasio reale sup. provinciale.* — 1.

$$\log \sqrt[3]{12x\,(3x-1)+5\,(x-6)} - 2\log \sqrt[3]{x-1} = \frac{2}{3}.$$

2. In un quadrilatero inscritto la corda $AB = a = 93\,m$, $BC = b = 75\,m$ la diagonale $AC = e = 104\,m$, e l'angolo $CBD = \beta = 47^0\,18'\,32''$. Qual è l'altra diagonale? Costruzione.

3. Due persone A e B che abitano alla distanza di 93 miglia l'una dall'altra, partono contemporaneamente e si muovono incontro. Ognuna comincia facendo 5 miglia al giorno, A fa però ogni giorno successivo $\frac{1}{4}$ di miglio di meno, mentre B fa $\frac{1}{3}$ di miglio di più del giorno antecedente. Quando si incontrano? Quante miglia fa ognuna in tutto e quante ciascuna nell'ultimo giorno?

4. Si seghi la parabola $y^2 = 6x$ colla retta $3\,y - 4\,x + 6 = 0$ e nei punti d'intersezione si guidino le tangenti alla parabola. Si domandano le equazioni delle