LE CONFIGURAZIONI PIANE

DI CAPORALI

Nelle Memorie di Geometria di Ettore Caporali si trovano due frammenti *sulla teoria delle configurazioni.* Tale teoria è stata studiata in seguito sotto altri punti di vista e con maggiore profondità da altri. (*)

Tuttavia credo non inutile rimettere in luce su questo periodico il concetto fondamentale che deve aver guidato l'illustre geometra, troppo presto rapito alla scienza, specialmente considerando che la sua teoria si può svolgere in modo elementare, ammettendo come note soltanto le principali proprietà dei coefficienti binomiali ed il teorema fondamentale dell'omologia, cioè: " Se due triangoli si corrispondono in modo che le rette, che congiungono i vertici corrispondenti, concorrano in un punto (*centro d'omologia*), le coppie di lati corrispondenti s'incontrano in tre punti situati in linea retta (*asse di omologia*); e viceversa ". I due triangoli si dicono allora *omologici.*

Mostrerò poi in un'altra nota come le configurazioni piane di Caporali si possano estendere allo spazio.

1. Se in un piano sono dati n circoli $S_1, S_2, \dots S_n$, i cui centri tre a tre non sono in linea retta, è noto che due di essi S_i, S_h ammettono un asse radicale r_{ih}, e tre di essi S_i, S_h, S_k un centro radicale P_{ihk}, per il quale passano le tre rette r_{hk}, r_{ki}, r_{ih}. Si ha così un esempio

(*) Trattano delle configurazioni i lavori seguenti:
S. Kantor. *Ueber eine Gattung von Configurationen.* Sitzungsberichte der Wiener Akad. Vol. 80.
— *Ueber die Configurationen* (3, 3) ecc. Ibid. Vol. 84.
Th. Reye. *Das Problem der Configurationen.* Acta Mathematica. Vol. 1.
G. Jung. *Sull'equilibrio dei poligoni articolati in connessione col problema delle configurazioni.* Annali di Matematica. Tomo 12.
Martinetti. *Sopra alcune Configurazioni piane.* Ibid. Serie II, tomo 14.
— *Sulle Configurazioni piane* μ_3. Ibid. Serie II, tomo 15.
— *Sopra un gruppo di Configurazioni regolari* ecc. Atti dell'Acc. Gioenia. Vol. 3°, Serie IV.

di un sistema formato da $\binom{n}{3}$ punti P_{ihk} e da $\binom{n}{2}$ rette r_{ih}. Per ogni punto passano tre rette; quelle che si ottengono togliendo uno ad uno gl'indici che rappresentano il punto considerato; ogni retta contiene $n-2$ punti; quelli che si ottengono associando ai due indici della retta considerata uno qualunque dei rimanenti.

Un altro esempio dello stesso genere si ha dalla figura formata da n piani, dalle $\binom{n}{2}$ rette d'incontro di essi presi due a due e dagli $\binom{n}{3}$ punti d'incontro dei piani stessi presi tre a tre. Proiettando queste rette e questi punti da un punto dello spazio sopra un piano, si ottengono $\binom{n}{3}$ punti P e $\binom{n}{2}$ rette r, tali che per ogni punto P passano tre rette r ed ogni retta r contiene $n-2$ punti P.

Similmente, se consideriamo n sfere $S_1, S_2, S_3 \ldots S_n$ tali che i centri di quattro qualunque di esse non siano in un piano, è noto che due di esse S_i, S_h determinano un piano radicale π_{ih}, tre S_i, S_h, S_k determinano un asse radicale r_{ihk}, quattro S_i, S_h, S_k, S_l, determinano un centro radicale P_{ihkl}. Per il punto P_{ihkl} passano quattro rette r_{hkl}, r_{ikl}, r_{ihl}, r_{ihk}; per la retta r_{ihk} passano tre piani π_{hk}, π_{ik}, π_{ih}. Proiettando i punti P e le rette r da un punto qualunque dello spazio sopra un piano α, si ottiene in questo un sistema di $\binom{n}{4}$ punti e di $\binom{n}{3}$ rette; per ogni punto passano quattro di queste rette; ogni retta contiene $n-3$ di quei punti.

Questi esempi suggeriscono naturalmente l'idea di studiare dei sistemi composti di $\binom{n}{v}$ punti e di $\binom{n}{v-1}$ rette, tali che, rappresentando ciascun punto con una combinazione di v fra n indici $1, 2, 3, \ldots n$, e ciascuna retta con una combinazione di $v-1$ fra gl'indici stessi, ogni punto appartenga a tutte le rette, i cui simboli si ottengono da quello del punto stesso, sopprimendo uno dei suoi indici, e per conseguenza ogni retta contenga gli $n-v+1$ punti, i cui simboli si ottengono da quello della retta stessa, aggiungendo uno degl'indici rimanenti.

Chiamasi *configurazione di ordine* n e *classe* v un tale sistema di punti e rette, che rappresenteremo colla scrittura $C_{n,v}$.

I sistemi sopra citati sono $C_{n,3}$ e $C_{n,4}$.

Per brevità adotteremo in seguito la seguente notazione. Essendo $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ indici dati, per es. $1, 2, 3 \ldots n$, scritti in un ordine qualsiasi, rappresenteremo con A_v il gruppo d'indici $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \ldots \alpha_v$, con $A_v\, \alpha_r\, \alpha_s \ldots$ il gruppo d'indici che si ottiene aggiungendo al gruppo $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \ldots \alpha_v$ gl'indici $\alpha_r, \alpha_s \ldots (r, s = v+1, v+2, \ldots, n)$, con $A_v\,(-\alpha_r)\,(-\alpha_s)\ldots$ il gruppo che si ottiene dal gruppo A_v sopprimendo gl'indici α_r, α_s $(r, s = 1, 2 \ldots v)$.

Così un punto di una $C_{n,v}$ si può rappresentare col simbolo A_v, e le rette che passano per esso col simbolo $(A_v, (-\alpha_r))$; una retta della $C_{n,v}$ si può rappresentare col simbolo (A_{v-1}); i punti che giacciono su di essa col simbolo $(A_{v-1}\,\alpha_h)$.

2. Si potrebbero anche studiare sistemi di $\binom{n}{v}$ rette e $\binom{n}{v-1}$ punti, tali che le rette fossero rappresentate dalle combinazioni v a v di n indici, ed i punti dalle combinazioni a $v-1$ a $v-1$ degli stessi indici, e che verificano la condizione che ad ogni retta (A_v), appartengano i v punti, il cui simbolo si ottiene da A_v, sopprimendo uno dei suoi indici, e per conseguenza per ogni punto (A_{v-1}) passino $n-v+1$ rette $(A_{v-1}\,\alpha_r)$, i cui simboli si ottengono aggiungendo ai suoi indici uno qualunque dei rimanenti. Indicheremo con $\Gamma_{n,v}$ un tale sistema.

Si capisce facilmente però che le proprietà di una $\Gamma_{n,v}$ si ricavano facilmente da quelle di una $C_{n,v}$ scambiando la parola *punto* colla parola *retta*, le parole *retta che passa per due punti* colle altre *punto d'incontro delle due rette* ecc., applicando cioè il principio detto di *dualità*.

Inoltre, essendo $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, è chiaro che una $\Gamma_{n,v}$ non è altro che una $C_{n,n-v+1}$. Infatti il numero dei suoi punti è $\binom{n}{v-1} = \binom{n}{n-v+1}$, e il numero delle sue rette è $\binom{n}{v} = \binom{n}{n-v}$.

Ci limiteremo perciò allo studio delle $C_{n,v}$.

3. Dalla definizione stabilita si ricava:

1°. Una $C_{n,1}$ è un gruppo di n punti in linea retta.

2°. Una $C_{n,2}$ è un *n-latero completo*. Infatti, le sue rette essendo $r_1, r_2, \ldots r_n$, i suoi punti P_{ih} non sono altro che i punti d'incontro di quelle rette prese a due a due.

3°. Una C_{nn} è un gruppo di n rette che passano per un punto.

3°. Una $C_{n, n-1}$ è un *n-gono completo*. Infatti, se per brevità conveniamo di sostituire ad una combinazione di $(n-1)$ o $(n-2)$ indici l'indice o i due indici rimanenti, i suoi punti si possono rappresentare con $P_1, P_2, \ldots P_n$, e le sue rette sono le congiungenti di questi punti due a due.

4. *Se in una $C_{n, v}$ si separano gli elementi che non contengono un determinato indice da quelli che lo contengono, i primi formano una $C_{n-1, v}$ e gli altri una $C_{n-1, v-1}$.*

Ogni retta della $C_{n, v}$ contiene un solo punto della $C_{n-1, v-1}$, e viceversa ogni punto di questa giace sopra una sola retta di $C_{n-1, v}$. Diremo perciò che la $C_{n-1, v}$ è circoscritta alla $C_{n-1, v-1}$ o che la $C_{n-1, v-1}$ è inscritta nella $C_{n-1, v}$.

Se infatti separiamo per es. l'indice n dai rimanenti $1, 2, 3 \ldots n-1$, che scritti in un ordine qualunque chiameremo $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$, i punti e rette dalla $C_{n, v}$, che si possono rappresentare colle combinazioni a v a v e a $v-1$ a $v-1$ di questi $n-1$ indici, formano una $C_{n-1, v}$. Tutte le rette rimanenti hanno simboli della forma $(A_{v-2}\, n)$, ed i punti rimanenti hanno simboli della forma $(A_{v-1}\, n)$, e formano una $C_{n-1, v-1}$, perchè i loro numeri sono rispettivamente $\binom{n-1}{v-2}$, $\binom{n-1}{v-1}$, per ogni punto passano $v-1$ rette, ogni retta contiene $(n-1)-(v-1)+1 = n-v+1$ punti. Per ogni punto $(A_{v-1}\, n)$ passa poi una ed una sola retta della $C_{n-1, v}$ già considerata, cioè la (A_{v-1}). Perciò questa si può dire circoscritta alla $C_{n-1, v-1}$.

Inversamente:

Quando una $C_{n-1, v}$, è circoscritta ad una $C_{n-1, v-1}$ i punti e le rette delle due configurazioni costituiscono una $C_{n, v}$.

Infatti il numero complessivo dei punti delle due configurazioni è

$$\binom{n-1}{v-1} + \binom{n-1}{v} = \binom{n}{v},$$

e il numero complessivo delle rette è

$$\binom{n-1}{v-2} + \binom{n-1}{v-1} = \binom{n}{v-1}.$$

Per ogni punto della $C_{n-1, v}$ circoscritta passano v rette della medesima, e per ogni punto della $C_{n-1, v-1}$ passano $v-1$ rette della medesima ed una della $C_{n-1, v}$ circoscritta, ossia per ogni punto dell'una o dell'altra configurazione passano v rette. Similmente sopra ogni retta della $C_{n-1,v}$ circoscritta giacciono $(n-1) - v + 1 = n - v$ punti della medesima ed una della $C_{n-1,v-1}$ iscritta, e sopra ogni retta della $C_{n-1,v-1}$ giacciono $(n-1) - (v-1) + 1 = n - v + 1$ punti di essa; così ogni retta dell'una o dell'altra configurazione contiene $n - v + 1$ punti delle medesime.

5. *Se in una configurazione,* $C_{n,v}$ *si considerano* k *indici* ($k < v < n - k$) *separatamente dagli altri, la configurazione si può considerare come l'insieme*

$$
\begin{array}{llll}
di\ 1 = \binom{k}{0} & \textit{configurazione} & C_{n-k,v-k}, \\
\text{„} \quad \binom{k}{2} & \textit{configurazioni} & C_{n-k,v-k+1}, \\
\text{„} \quad \binom{k}{2} & \quad\text{„} & C_{n-k,v-k+2}, \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\text{„} \quad \binom{k}{h} & \quad\text{„} & C_{n-k,v-k+h}, \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\text{„} \quad \binom{k}{k-1} & \quad\text{„} & C_{n-k,v-1}, \\
\text{„}\ 1 = \binom{k}{k} & \quad\text{„} & C_{n-k,v}.
\end{array}
$$

Si scelgano k indici ad arbitrio fra gli n che determinano la $C_{n,v}$, e scritti in un ordine qualsiasi, chiamamoli $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_k$; gli $n-k$ indici rimanenti scritti in un ordine qualunque siano $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-k}$. Rappresentiamo inoltre con B_r il gruppo d'indici $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_r$ e con A_s il gruppo d'indici $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_s$.

Tutti gli elementi della $C_{n,v}$, che contengono tutti i k indici β, cioè i punti $(B_k\, A_{v-k})$ e le rette $(B_k\, A_{v-k-1})$ formano una configurazione di ordine $n-k$ e di classe $v-k$ che chiameremo $C^{(B_k)}_{n-k,v-k}$.

Tutti gli elementi che contengono $k-1$ indici β per es. $\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_{k-1}$, cioè i punti $(B_{k-1}\, A_{v-k+1})$ e le rette $(B_{k-1}\, A_{v-k})$, formano una configurazione di ordine $n-k$ e di classe $v-k+1$, che chiameremo $C^{(B_{k-1})}_{n-k,v-k+1}$. Le configurazioni di questo tipo sono $\binom{k}{1}$, e sono circoscritte alla $C^{(B_k)}_{n-k,v-k}$, perchè ogni retta $(B_{k-1}\, A_{v-k})$ contiene uno ed un solo punto $(B_k\, A_{v-k})$ di questa configurazione.

Tutti gli elementi che contengono $k-2$ indici β, per es. $\beta_1, \beta_2 \ldots$

β_{k-2}; cioè i punti $(B_{k-2}\,A_{v-k+2})$ e le rette $(B_{k-1}\,A_{v-k+1})$ formano una configurazione di ordine $n-k$ e di classe $v-k+2$, che chiameremo $C^{(B_{k-2})}_{n-k, v-k+2}$. Le configurazioni di questo tipo sono $\binom{k}{2}$, e ciascuna di esse è circoscritta a due $C^{(B_{k-1})}_{n-k, v-k+1}$; quelle che si ottengono aggiungendo ai suoi indici β uno qualunque dei due rimanenti. E così di seguito.

In generale tutti gli elementi che contengono $k-h$ elementi, per es. $\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_{k-h}$ cioè i punti $(B_{k-h}\,A_{v-k+h})$ e le rette $(B_{k-h}\,A_{v-k+h-1})$ formano una configurazione di ordine $n-k$ e di classe $v-k+h$ che chiameremo $C^{(B_{k-h})}_{n-k, v-k+h-1}$.

Le configurazioni di questo tipo sono $\binom{k}{h}$. Ciascuna di esse è circoscritta ad h $C^{(B_{k-h+1})}_{n-k, v-k+h-1}$; quelle che si ottengono aggiungendo ai $k-h$ indici β, uno qualunque dei rimanenti.

Infine tutti gli elementi che non contengono alcuno degl'indici β, cioè i punti (A_v) e le rette (A_{v-1}) formano una $C_{n-k, v}$, che è circoscritta alle $\binom{k}{k-1}$ configurazioni $C^{\beta_r}_{n-k, v-1}$.

Si osservi che il numero complessivo dei punti della $C_{n,v}$ deve essere $\binom{n}{v}$, e quello di una $C_{n-k, v-k+h}$ deve essere $\binom{n-k}{v-k+h}$; e perciò risulta l'identità

$$\binom{n}{v}=\binom{k}{0}\binom{n-k}{v-k}+\binom{k}{1}\binom{n-k}{v-k+1}+\binom{k}{2}\binom{n-k}{v-k+2}+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\binom{k}{h}\binom{n-k}{v-k+h}+\ldots\ldots+\binom{k}{k}\binom{n-k}{v};$$

ovvero, essendo $\binom{k}{h}=\binom{k}{k-h}$,

$$\binom{n}{v}=\binom{k}{k}\binom{n-k}{v-k}+\binom{k}{k-1}\binom{n-k}{v-k+1}+\binom{k}{k-2}\binom{n-k}{v-k+2}+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\binom{k}{k-h}\binom{n-k}{v-k+h}+\ldots\ldots\binom{k}{0}\binom{n-k}{v}.$$

Questa identità si dimostra anche in algebra.

Nei §§ seguenti dimostreremo che sono veri i teoremi inversi di quelli enunciati, e ne dedurremo un mezzo semplice per costruire una $C_{n,\nu}$ per mezzo di configurazioni di ordine e classe inferiori.

6. *Se due configurazioni* $C^{(1)}_{n,\nu+1}$ $C^{(2)}_{n,\nu+1}$ *sono circoscritte ad una stessa* $C^{(1,2)}_{n,\nu}$, *esse sono inscritte in una stessa* $C_{n,\nu+2}$. *Tutte insieme queste quattro configurazioni formano una* $C_{n+2,\nu+2}$.

Rappresentiamo con $(A_\nu)^{(12)}$ $(A_{\nu+1})^{(1)}$ $(A_{\nu+1})^{(2)}$ i punti, con $(A_{\nu-1})^{(12)}$, $(A_\nu)^{(1)}$ $(A_\nu)^{(2)}$ le rette delle configurazioni $C^{(1,2)}_{n,\nu}$, $C^{(1)}_{n,\nu+1}$, $C^{(2)}_{n,\nu+1}$.

I due triangoli, che hanno per lati

$$(A_{\nu-1}\alpha_\nu)^{(1)} \quad , \quad (A_{\nu-1}\alpha_{\nu+1})^{(1)} \quad , \quad (A_{\nu-1}\alpha_{\nu+2})^{(1)},$$
$$(A_{\nu-1}\alpha_\nu)^{(2)} \quad , \quad (A_{\nu-1}\alpha_{\nu+1})^{(2)} \quad , \quad (A_{\nu-1}\alpha_{\nu+2})^{(2)},$$

e per vertici

$$(A_{\nu-1}\alpha_{\nu+1}\alpha_{\nu+2})^{(1)} \quad , \quad (A_{\nu-1}\alpha_\nu\alpha_{\nu+2})^{(1)} \quad , \quad (A_{\nu-1}\alpha_\nu\alpha_{\nu+1})^{(1)},$$
$$(A_{\nu-1}\alpha_{\nu+1}\alpha_{\nu+2})^{(2)} \quad , \quad (A_{\nu-1}\alpha_\nu\alpha_{\nu+2})^{(2)} \quad , \quad (A_{\nu-1}\alpha_\nu\alpha_{\nu+1})^{(2)},$$

sono omologici, perchè per ipotesi i lati concorrono nei punti

$$(A_{\nu-1}\alpha_\nu)^{(12)} \quad , \quad (A_{\nu-1}\alpha_{\nu+1})^{(12)} \quad , \quad A_{\nu-1}\alpha_{\nu+2})^{(12)},$$

della retta $(A_{\nu-1})^{(12)}$. Perciò le rette che congiungono i vertici, e che chiameremo

$$(A_{\nu-1}\alpha_{\nu+1}\alpha_{\nu+2}) \quad , \quad (A_{\nu-1}\alpha_\nu\alpha_{\nu+2}) \quad , \quad (A_{\nu-1}\alpha_\nu\alpha_{\nu+1}),$$

devono concorrere in un punto, che chiameremo $(A_{\nu+2})$. Nella stessa guisa si dimostra che tutte le rette, il cui simbolo si ottiene da $(A_{\nu+2})$ sopprimendo un indice, passano per il punto $(A_{\nu+2})$. Dunque i punti $(A_{\nu+2})$ e le rette $(A_{\nu+1})$ formano una $C_{n,\nu+2}$ circoscritta alle

$$C^{(1)}_{n,\nu+2} \quad , \quad C^{(2)}_{n,\nu+1}$$

Le quattro configurazioni insieme poi formano una $C_{n+2,\nu+2}$. Infatti il numero complessivo di vertici è

$$\binom{n}{\nu} + 2\binom{n}{\nu+1} + \binom{n}{\nu+2} = \binom{2}{2}\binom{n}{\nu} + \binom{2}{1}\binom{n}{\nu+1} + \binom{2}{0}\binom{n}{\nu+2} = \binom{n+2}{\nu+2},$$

e il numero complessivo di rette è

$$\binom{n}{\nu-1} + 2\binom{n}{\nu} + \binom{n}{\nu+1} = \binom{2}{2}\binom{n}{\nu-1} + \binom{2}{1}\binom{n}{\nu} + \binom{2}{2}\binom{n}{\nu+1} = \binom{n+2}{\nu+1};$$

ed è facile vedere che per ognuno di quei punti passano $\nu+2$ rette.

Si ottengano facilmente i simboli di questa $C_{n+2,\nu+2}$ nella forma ordinaria, dando agli indici $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ i valori $1, 2, 3 \ldots n$, e facendo seguire le combinazioni che rappresentano gli elementi di $C^{(1,2)}_{n,\nu}$, dagli indici $n+1$, e $n+2$, quelle degli elementi di $C^{(1)}_{n,\nu+1}$ dall'indice $n+1$ e quelle degli elementi di $C^{(2)}_{n,\nu+1}$ dall'indice $n+2$.

7. *Se tre configurazioni* $C^{(2,3)}_{n,\nu+1}$, $C^{(3,1)}_{n,\nu+1}$, $C^{(1,2)}_{n,\nu+1}$ *sono circoscritte ad una* $C^{(1,2,3)}_{n,\nu}$, *le tre configurazioni* $C^{(1)}_{n,\nu+2}$, $C^{(2)}_{n,\nu+2}$, $C^{(3)}_{n,\nu+2}$, *circoscritte a due di esse, sono inscritte in una* $C_{n,\nu+3}$. *Queste 8 configurazioni insieme formano una* $C_{n+3,\nu+3}$.

Indichiamo i punti delle varie configurazioni con

$$(A_\nu)^{(1\,2\,3)},\ (A_{\nu+1})^{(2\,3)},\ (A_{\nu+1})^{(3,1)},\ (A_{\nu+1})^{(1,2)},\ (A_{\nu+2})^{(1)},\ (A_{\nu+2})^{(2)},\ (A_{\nu+2})^{(3)},$$

e le loro rette con

$$(A_{\nu-1})^{(1\,2\,3)},\ (A_\nu)^{(2\,3)},\ (A_\nu)^{(3\,1)},\ (A_\nu)^{(1\,2)},\ (A_{\nu+1})^{(1)},\ (A_{\nu+1})^{(2)},\ (A_{\nu+1})^{(3)}.$$

I due triangoli che hanno per lati

$$\begin{array}{ccc} (A_\nu\,\alpha_{\nu+1})^{(1)} \;, & (A_\nu\,\alpha_{\nu+1})^{(2)} \;, & (A_\nu\,\alpha_{\nu+1})^{(3)} \\ (A_\nu\,\alpha_{\nu+2})^{(1)} \;, & (A_\nu\,\alpha_{\nu+2})^{(2)} \;, & (A_\nu\,\alpha_{\nu+2})^{(3)}, \end{array}$$

e per vertici

$$\begin{array}{ccc} (A_\nu\,\alpha_{\nu+1})^{(2\,3)} \;, & (A_\nu\,\alpha_{\nu+1})^{(3\,1)} \;, & (A_\nu\,\alpha_{\nu+1})^{(1\,2)} \\ (A_\nu\,\alpha_{\nu+2})^{(2\,3)} \;, & (A_\nu\,\alpha_{\nu+2})^{(3\,1)} \;, & (A_\nu\,\alpha_{\nu+2})^{(1\,2)}, \end{array}$$

sono omologici, perchè le rette che congiungono i vertici, cioè

$$(A_\nu)^{(2\,3)} \;,\quad (A_\nu)^{(3\,1)} \;,\quad (A_\nu)^{(1\,2)},$$

concorrono nel punto $(A_\nu)^{(1\,2\,3)}$. Perciò i punti d'incontro dei lati

$$(A_{\nu+2})^{(1)} \;,\quad (A_{\nu+2})^{(2)} \;,\quad (A_{\nu+2})^{(3)}$$

sono situati sopra una retta, che chiameremo $(A_{\nu+2})$. Ciò prova che la $C_{n,\nu+3}$ circoscritta a due delle $C^{(1)}_{n,\nu+2}$, $C^{(2)}_{n,\nu+2}$, $C^{(3)}_{n,\nu+2}$ è circoscritta anche alla terza.

Le 8 configurazioni insieme fanno una $C_{n+3,\nu+3}$. Infatti il numero complessivo di vertici è

$$\binom{n}{\nu} + 3\binom{n}{\nu+1} + 3\binom{n}{\nu+2} + \binom{n}{\nu+3} = \binom{3}{3}\binom{n}{\nu} + \binom{3}{2}\binom{n}{\nu+1} + \binom{3}{1}\binom{n}{\nu+2} + \\ + \binom{3}{0}\binom{n}{\nu+3} = \binom{n+3}{\nu+3}.$$

In simil guisa si vede che il numero complessivo delle rette è $\binom{n+3}{\nu+2}$, ed è facile riconoscere che per ogni vertice passano $(v+3)$ rette, e che ogni retta contiene $(n+3)-(v+3)+1=n-v+1$ vertici.

8. *Se k configurazioni* $C_{n,v+1}$ *sono circoscritte ad una* $C_{n,v}$, *prese due a due determinano* $\binom{k}{2}$ $C_{n,v+2}$, *nelle quali sono inscritte; queste combinate convenientemente tre a tre determinano* $\binom{k}{3}$ $C_{n,v+3}$, *nelle quali sono inscritte ....; così proseguendo si giunge a* $\binom{k}{k-1}$ $C_{n,v+k-1}$, *che sono inscritte in una stessa* $C_{n,v+k}$.

Tutte queste configurazioni insieme formano una $C_{n+k,v+k}$.

Supponiamo dimostrato il teorema per un dato valore di $k-1$, e dimostriamo che esso è vero anche per k.

Indicheremo la data configurazione con $C_{n,v}^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}$ ossia con $C_{n,v}^{(B_k)}$ (dove $\beta_1\beta_2\ldots\beta_k$ son k indici scritti in un ordine qualsiasi) con $C_{n,v+1}^{(B_{k-1})}$ quelle ad essa circoscritta, con $C_{n,v+2}^{(B_{k-2})}$ quella circoscritta a $C_{n,v+1}^{(B_{k-2}\beta_r)}$ $(r=k-1,k)$..., in generale con $C_{n,v+h}^{(B_{k-h})}$ quella circoscritta alle $C_{n,v+h-1}^{(B_{k-h}\beta_r)}$ $(r=k-h+1,\ k-h+2,\ldots,k)$.

I triangoli che hanno per lati

$$(A_{v+k-3}\,\alpha_r)^{\beta_1}\ ,\ (A_{v+k-3}\,\alpha_r)^{\beta_2}\ ,\ (A_{v+k-3}\,\alpha_r)^{\beta_3},$$
$$(A_{v+k-3}\,\alpha_s)^{\beta_1}\ ,\ (A_{v+k-3}\,\alpha_s)^{\beta_2}\ ,\ (A_{v+k-3}\,\alpha_s)^{\beta_3},$$

e per vertici

$$(A_{v+k-3}\quad\alpha_r)^{\beta_2\beta_3}\ ,\ (A_{v+k-3}\quad\alpha_r)^{\beta_3\beta_1}\ ,\ (A_{v+k-3}\quad\alpha_r)^{\beta_1\beta_2},$$
$$(A_{v+k-3}\alpha_s)^{\beta_2\beta_3}\ ,\ (A_{v+k-3}\alpha_s)^{\beta_3\beta_1}\ ,\ (A_{v+k-3}\alpha_s)^{\beta_1\beta_2},$$

sono omologici, perchè le rette che congiungono i vertici, cioè

$$(A_{v+k-3})^{\beta_1\beta_3}\ ,\ (A_{v+k-3})^{\beta_3\beta_1}\ ,\ (A_{v+k-3})^{\beta_1\beta_2},$$

concorrono nel punto $(A_{v+k-3})^{\beta_1\beta_2\beta_3}$. Perciò i punti d'incontro dei lati, che (supposto $\alpha_r=\alpha_{v+k-2}$, $\alpha_s=\alpha_{v-k-1}$) sono

$$(A_{v+k-1})^{\beta_1}\ ,\ (A_{v+k-1})^{\beta_2}\ ,\ (A_{v+k-1})^{\beta_3},$$

sono situati sopra una retta che chiameremo (A_{v+k-1}). Ciò prova che la $C_{n,v+k}$, circoscritta a due delle $C_{n,v+k-1}^{\beta_h}$, è circoscritta anche alle altre.

Tutte queste configurazioni prese insieme formano un $C_{n+k,v+k}$.

Infatti il numero complessivo di vertici è

$$\binom{n}{v} + \binom{n}{v+1}\binom{k}{1} + \binom{n}{v+2}\binom{k}{2} + \ldots + \binom{n}{v+k-1}\binom{k}{k-1} + \binom{n}{v+k} =$$
$$\binom{n}{v}\binom{k}{k} + \binom{n}{v+1}\binom{k}{k-1} + \binom{n}{v+2}\binom{k}{k-2} + \ldots + \binom{n}{v+k-1}\binom{k}{1} +$$
$$\binom{n}{v+k}\binom{k}{0} = \binom{n+k}{v+k}.$$

In simil guisa, ponendo $v-1$ al posto di v, si vede che il numero complessivo delle rette è $\binom{n+k}{v+k-1}$ ecc.

Si ottengono facilmente i simboli dei punti e rette di questa configurazione nella forma consueta, dando agl' indici α i valori $1, 2 \ldots n$, agli indici β i valori $n+1$, $n+2, \ldots n+k$. E facendo seguire il gruppo d' indici di ogni elemento di una $C_{n, v+h}^{(B_{k-h})}$ da quelli del gruppo B_{k-h} della configurazione.

9. I teoremi esposti permettono di costruire una $C_{n,v}$ per mezzo di altre di ordine inferiore.

Dal teorema del § precedente risulta infatti che una $C_{n,v}$ è determinata, quando si conosce una $C_{n-k,\, v-k}$ in essa contenuta e le k configurazioni $C_{n-k,\, v-k+1}$ a questa circoscritte e contenute nella $C_{n,v}$ data. Se si prende $k=v-1$, la $C_{n-k,\, v-k}$ diventa una $C_{n-v+1,1}$, ossia il gruppo di $n-v+1$ vertici situati sopra una retta. Le k $C_{n-k, v-k+1}$ diventano $v-1$ $C_{n-v+1,2}$ ossia i $v-1$ $(n-v+1)$ -lateri formati dalle rette, che passano per quei punti. Se ne deduce:

1°. *Una $C_{n,v}$ è individuata dalle $(v-1).(n-v+1)+1$ rette, che passano per i vertici di una sua retta.*

Si noti però che, affinchè la $C_{n,v}$ sia determinata in modo unico, deve esser dato, oltre ai $n-v+1$ punti in linea retta e alle $(v-1).(n-v+1)$ rette condotte per questi punti, anche il modo col quale devono esser aggruppate queste rette in $(v-1)$ $C_{n-v+1,2}$ appartenenti alla $C_{n,v}$. Se ciò non fosse dato, si potrebbero costruire $(n-v+1)^{v-1}$ configurazioni $C_{n,v}$.

2°. *Il numero di condizioni necessarie a determinare una $C_{n,v}$ è*

$$n.v-(v+1)(v-2)$$

Infatti per determinare la retta che si sceglie, occorrono due condizioni, per determinare $(n-v+1)$ punti su di essa occorrono $(n-v+1)$ condizioni, per determinare le rette che passan per questi punti $(v-1$

per ogni vertice), occorrono $(v-1)(n-v+1)$ condizioni. In tutto dunque il numero delle condizioni è

$$2+(n-v+1)+(v-1)(n-v+1)=v(n-v+1)+2=n.v-v(v-1)+2=$$
$$=nv-(v+1)(v-2).$$

Per es. una $C_{n,3}$ è determinata da $3n-4$ condizioni.

10. *Se due $C^{(1)}_{n,v-1}$ $C^{(2)}_{n,v-1}$ sono inscritte in una $C_{n,v}$, esse sono circoscritte ad una $C^{(1,2)}_{n,v-2}$. Tutte insieme queste configurazioni formano una $C_{n+2,v}$.*

Indichiamo con (A_v) i punti con (A_{v-1}) le rette di una $C_{n,v}$; con $(A_{v-1})^{(1)}$, $(A_{v-2})^{(1)}$ i punti e le rette di una $C^{(1)}_{n,v-1}$ inscritta in essa, con $(A_{v-1})^{(2)}$, $(A_{v-2})^{(2)}$ i punti e le rette di un'altra $C^{(2)}_{n,v-1}$ pure inscritta in essa.

I triangoli che hanno per lati

$$(A_{v-3}\alpha_{v-2})^{(1)} \quad , \quad (A_{v-3}\alpha_{v-1})^{(1)} \quad , \quad (A_{v-3}\alpha_v)^{(1)},$$
$$(A_{v-3}\alpha_{v-2})^{(2)} \quad , \quad (A_{v-3}\alpha_{v-1})^{(2)} \quad , \quad (A_{v-3}\alpha_v)^{(2)},$$

e per vertici

$$(A_{v-3}\alpha_{v-1}\alpha_v)^{(1)} \quad , \quad (A_{v-3}\alpha_{v-2}\alpha_v)^{(1)} \quad , \quad (A_{v-3}\alpha_{v-2}\alpha_{v-1})^{(1)}$$
$$(A_{v-3}\alpha_{v-1}\alpha_v)^{(2)} \quad , \quad (A_{v-3}\alpha_{v-2}\alpha_v)^{(2)} \quad , \quad (A_{v-3}\alpha_{v-2}\alpha_{v-1})^{(2)},$$

sono omologici, perchè le rette che congiungono questi vertici sono

$$(A_{v-3}\alpha_{v-1}\alpha_v) \quad , \quad (A_{v-3}\alpha_{v-2}\alpha_v) \quad , \quad (A_{v-3}\alpha_{v-2}\alpha_{v-1})$$

e concorrono nel punto (A_v). Perciò le coppie di lati s'incontrano in tre punti, che chiameremo

$$(A_{v-3}\alpha_{v-2})^{(1,2)} \quad , \quad (A_{v-3}\alpha_{v-1})^{(1,2)} \quad , \quad (A_{v-3}\alpha_v)^{(1,2)},$$

e che sono situati sopra una retta, che chiameremo $(A_{v-3})^{(1,2)}$.

Tenendo fisse le prime due coppie di lati dei triangoli considerati, e variando la terza (ponendo cioè al posto di α_v successivamente $\alpha_{v+1}\,\alpha_{v+2}\ldots\alpha_n$) si trova che tutti gli $n-v+3$ punti $(A_{v-3}\alpha_r)^{(1,2)}$ $(r=n-v+1, n-v+2, n-v+1, n-v, \ldots n)$ giacciono sulla retta $(A_{v-3})^{(1,2)}$.

Se ora si considera la coppia di rette $(A_{v-2})^{(1)}(A_{v-2})^{(2)}$ con tutte quelle che si ottengono sopprimendo un indice α_h e sostituendo successivamente tutti i rimanenti, si ottiene, operando nel modo sopra indicato, una retta $(A_{v-2}(-\alpha_h))^{(1,2)}$ che passa per $(A_{v-2})^{(1,2)}$. Così per $(A_{v-2})^{(1,2)}$ passano $(v-2)$ rette.

Dunque i punti $(A_{v-2})^{(1,2)}$ e le rette $(A_{v-3})^{(1,2)}$ formano una $C^{(1,2)}_{n,v-2}$ inscritta alla $C^{(1)}_{n,v-1}$ $C^{(2)}_{n,v-1}$. Come caso particolare si ha:

Se due n-lateri ($C_{n,2}$) *sono inscritti in una* $C_{n,3}$, *i lati corrispondenti si tagliano in* n *punti situati in linea retta* ($C_{n,1}$).

Questa retta, insieme coi due n-lateri e la $C_{n,3}$ formano una $C_{n+2,3}$.

II. *Se tre* $C^{(1)}_{n,\nu-1}$, $C^{(2)}_{n,\nu-1}$, $C^{(3)}_{n,\nu-1}$ *sono inscritte in una* $C_{n,\nu}$ *le* $C^{(2,3)}_{n,\nu-2}$, $C^{(3,1)}_{n,\nu-2}$, $C^{(1,2)}_{n,\nu-2}$, *alle quali sono circoscritte a due a due, sono circoscritte ad una stessa* $C^{(1,2,3)}_{n,\nu-3}$. *Tutte insieme queste configurazioni formano una* $C_{n+3,\nu}$.

Indichiamo con (A_ν) i punti della $C_{n,\nu}$, con $(A_{\nu-1})$ le sue rette, con $(A_{\nu-1})^{(1)}$ $(A_{\nu-1})^{(2)}$ $(A_{\nu-1})^{(3)}$ i punti delle tre configurazioni $C^{(1)}_{n,\nu-1}$, $C^{(2)}_{n,\nu-1}$, $C^{(3)}_{n,\nu-1}$, inscritte nella $C_{n,\nu}$, con $(A_{\nu-2})^{(1)}$, $(A_{\nu-2})^{(2)}$, $(A_{\nu-2})^{(3)}$ le loro rette, con $(A_{\nu-2})^{(2,3)}$, $(A_{\nu-2})^{(3,1)}$, $(A_{\nu-2})^{(1,2)}$ i punti e con $(A_{\nu-3})^{(2,3)}$, $(A_{\nu-3})^{(3,1)}$, $(A_{\nu-3})^{(1,2)}$ le rette delle $C^{(2,3)}_{n,\nu-2}$, $C^{(3,1)}_{n,\nu-2}$, $C^{(1,2)}_{n,\nu-2}$ inscritte in due delle $C^{(1)}_{n,\nu-1}$, $C^{(2)}_{n,\nu-1}$, $C^{(3)}_{n,\nu-1}$.

Le due configurazioni $C^{(1,2)}_{n,\nu-2}$, $C^{(1,3)}_{n,\nu-2}$ inscritte nella $C^{(1)}_{n,\nu-2}$ sono circoscritte ad una $C^{(1,2,3)}_{n,\nu-3}$. Dico che a questa è circoscritta anche la $C^{(2,3)}_{n,\nu-2}$. Infatti i due triangoli che hanno per lati

$$(A_{\nu-3}\,\alpha_r)^{(1)} \;,\; (A_{\nu-3}\,\alpha_r)^{(2)} \;,\; (A_{\nu-3}\,\alpha_r)^{(3)},$$
$$(A_{\nu-3}\,\alpha_s)^{(1)} \;,\; (A_{\nu-3}\,\alpha_s)^{(2)} \;,\; (A_{\nu-3}\,\alpha_s)^{(3)},$$

e per vertici

$$(A_{\nu-3}\,\alpha_r)^{(2,3)} \;,\; (A_{\nu-3}\,\alpha_r)^{(3,1)} \;,\; (A_{\nu-3}\,\alpha_r)^{(1,2)},$$
$$(A_{\nu-3}\,\alpha_s)^{(2,3)} \;,\; (A_{\nu-3}\,\alpha_s)^{(3,1)} \;,\; (A_{\nu-3}\,\alpha_s)^{(1,2)},$$

sono omologici, perchè le coppie di lati s'incontrano nei punti

$$(A_{\nu-3}\,\alpha_r\,\alpha_s)^{(1)} \;,\; (A_{\nu-3}\,\alpha_r\,\alpha_s)^{(2)} \;,\; (A_{\nu-3}\,\alpha_r\,\alpha_s)^{(3)},$$

della retta $(A_{\nu-3}\,\alpha_r\,\alpha_s)$; e perciò le rette che congiungono i vertici, cioè

$$(A_{\nu-3})^{(2,3)} \;,\; (A_{\nu-3})^{(3,1)} \;,\; (A_{\nu-3})^{(1,2)}$$

concorrono in un punto $(A_{\nu-3})^{(1,2,3)}$.

Che le sei configurazioni insieme formino una $C_{n+3,\nu}$ risulta da quanto abbiamo detto nel § 7.

Come caso particolare si ha:

Se tre n*-lateri* ($C_{n,2}$) *sono inscritti in una* $C_{n,3}$, *le tre rette, che contengono i punti d'incontro dei lati corrispondenti degli* n*-lateri presi a due a due, concorrono in un punto.*

Se ne deduce:

Se k n*-lateri* $C_{n,2}$ *sono inscritti in una* $C_{n,3}$, *le* $\binom{k}{2}$ *rette, che contengono i punti d'incontro degli* n*-lateri presi due a due formano una* $C_{k,3}$.

La figura formata da questa $C_{k,3}$, *dagli* n-*lateri e dalla* $C_{n,3}$ *è una* $C_{n+k,3}$.

12. *Se* k $(k<v)$ $C^{(\beta_1)}_{n,v-1}$ *sono inscritte in una* $C_{n,v}$, *in esse sono inscritte* $\binom{k}{2}$ $C^{(\beta_1\beta_2)}_{n,v-2}$; *queste alla loro volta determinano* $\binom{k}{3}$ $C^{(\beta_1\beta_2\beta_3)}_{n,v-2}$ *inscritte in tre di esse, ecc...... Così proseguendo si ottengono* $\binom{k}{k-1}$ $C^{(\beta_1\ldots\beta_{k-1})}_{n,v-k+1}$ *che sono circoscritte ad una* $C^{(\beta_1\ldots\beta_k)}_{n,v-k}$.

Essendo già dimostrato il teorema per $k=3$, supponiamo che esso sia dimostrato per un dato valore di k, e facciamo vedere che esso è vero anche per $k+1$

Poniamo al solito $B_s=\beta_1\beta_2\ldots\beta_s$, e consideriamo i due triangoli che hanno per lati

$$(A_{v-k-1}\,\alpha_r)^{(B_{k-2}\beta_{k-1})}\ ,\ (A_{v-k-1}\,\alpha_r)^{(B_{k-2}\beta_k)}\ ,\ (A_{v-k-1}\,\alpha_r)^{(B_{k-2}\beta_{k+1})},$$
$$(A_{v-k-1}\,\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_{k-1})}\ ,\ (A_{v-k-1}\,\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_k)}\ ,\ (A_{v-k-1}\,\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_{k+1})},$$

e per vertici

$$(A_{v-k-1}\,\alpha_r)^{(B_{k-2}\beta_k\beta_{k+1})}, (A_{v-k-1}\,\alpha_r)^{(B_{k-2}\beta_{k-1}\beta_{k+1})}, (A_{v-k-1}\,\alpha_r)^{(B_{k-2}\beta_{k-1}\beta_k)},$$
$$(A_{v-k-1}\,\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_k\beta_{k+1})}, (A_{v-k-1}\,\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_{k-1}\beta_{k+1})}, (A_{v-k-1}\,\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_{k-1}\beta_k)}.$$

Essi sono omologici, perchè le coppie di lati s'incontrano nei punti

$$(A_{v-k-1}\,\alpha_r\,\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_{k-1})}, (A_{v-k-1}\,\alpha_r\,\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_k)}, (A_{v-k-1}\,\alpha_r\,\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_{k+1})}$$

della retta $(A_{v-k-1}\,\alpha_r\,\alpha_s)^{B_{k-2}}$;

perciò le rette che congiungono i vertici, cioè

$$(A_{v-k-1})^{(B_{k-2}\beta_k\beta_{k+1})}, (A_{v-k-1})^{(B_{k-2}\beta_{k-1}\beta_{k+1})}, (A_{v-k-1})^{(B_{k-2}\beta_{k-1}\beta_k)},$$

concorrono in un punto $(A_{v-k-1})^{B_{k+1}}$.

Così si vede che tutte le rette $(A_{v-k-1})^{(B_{k+1}(-\beta_r))}$ passano per un vertice della $C^{(B_k)}_{n,v-k+1}$ inscritta a due $C_{n,v-k}$.

Tutte queste configurazioni insieme formano un $C_{n+k,v}$ per il teorema del § 8.

Si possono avere i simboli della C^v_{n+k} sotto la forma ordinaria facendo seguire il simbolo di ciascun punto o retta dagl'indici della configurazione parziale di cui fa parte.

13. *Una* $C_{n,v+1}$ *circoscritta ad una* $C_{n,v}$ *è individuata da* $n-v+1$ *rette, condotte per altrettanti punti situati sopra una retta della* $C_{n,v}$.

Infatti una $C_{n,\nu}$ ed una $C_{n,\nu+1}$ ad essa circoscritta formano insieme una $C_{n+1,\nu+1}$ (§ 4), per determinare la quale è necessario e sufficiente che sieno dati $(n+1)-(\nu+1)+1=n-\nu+1$ punti sopra una sua retta e ν rette, per ognuno di questi vertici. — Ma gli $n-\nu+1$ punti suddetti e $\nu-1$ rette per ognuno di questi determinano la $C_{n,\nu}$, perciò le rimanenti $(n-\nu+1)$ rette (una per vertice) dovranno servire a individuare la $C_{n,\nu+1}$.

Una $C_{n,\nu-1}$ inscritta in una $C_{n,\nu}$ è individuata da ν *suoi punti scelti sopra altrettante rette della $C_{n,\nu}$, concorrenti in un punto di essa.*

Questo teorema si può dedurre dal precedente, osservando che una $C_{n,\nu}$ non è altro che una $\Gamma_{n,n-\nu+1}$ (§ 2).

14. *Se esiste una $C_{n,\nu}$, circoscritta ad una $C_{n,\nu-1}$ e inscritta in una $C_{n,\nu+1}$, esistono altre $C_{n,\nu}$ in numero semplicemente infinito circoscritte alla $C_{n,\nu-1}$ e inscritte alla $C_{n,\nu+1}$ date.*

Essendo

$$(A_{\nu-2}\,\alpha_{\nu-1})\ ,\ (A_{\nu-2}\alpha_{\nu})\ ,\ (A_{\nu-2}\alpha_{\nu+1})$$

tre rette della $C_{n,\nu}$, che formano un triangolo che ha per vertici

$$(A_{\nu-2}\,\alpha_{\nu}\,\alpha_{\nu+1})\ ,\ (A_{\nu-2}\,\alpha_{\nu-1}\,\alpha_{\nu+1})\ ,\ (A_{\nu-2}\,\alpha_{\nu-1}\,\alpha_{\nu}),$$

queste giacciono sulle rette, rappresentate dagli stessi simboli, della $C_{n,\nu+1}$, che concorrono nel punto $(A_{\nu+1})$ mentre i lati passano per i punti, rappresentati dai medesimi simboli della $C_{n,\nu-1}$, che giacciono sulla retta $(A_{\nu-2})$. Ora, se si prende una retta ad arbitrio r, che passa per uno dei punti suddetti della $C_{n,\nu-1}$, e si costruisce un triangolo omologico a quello considerato, che abbia per lato la retta scelta, essendo $(A_{\nu+1})$ il centro e $(A_{\nu-2})$ l'asse d'omologia, e si prosegue poi la costruzione per tutti i possibili triangoli della $C_{n,\nu}$, ricordando il § 6, si vede che per ogni posizione della retta r esiste una ed una sola $C_{n,\nu}$ circoscritta alla $C_{n,\nu-1}$ e inscritta nella $C_{n,\nu-1}$.

In altre parole:

Se è data una $C_{n,\nu+1}$, circoscritta ad una $C_{n,\nu-1}$ e inscritta ad una $C_{n,\nu+1}$, e si fa rotare una retta della $C_{n,\nu}$ attorno ad un punto di $C_{n,\nu-1}$, mentre due suoi punti, appartenenti alla stessa $C_{n,\nu}$ scorrono su due rette della $C_{n,\nu+1}$, anche le altre rette di $C_{n,\nu}$ rotano attorno ai vertici della $C_{n,\nu-1}$, mentre i suoi vertici scorrono sulle rette della $C_{n,\nu+1}$.

G. LAZZERI.

ESERCIZIO DI ARITMETICA

1. Problema. (¹) — *Quali sono i numeri interi, che scritti nel sistema usuale di numerazione, uguagliano il quadruplo del prodotto delle loro cifre?*

Tralasciando la soluzione in cui tutte le cifre sono nulle, osservo che nessuna delle cifre di un tal numero potrà essere zero, per cui non potrà essere nemmeno cinque, perchè in questo caso tale numero dovrebbe essere multiplo di venti ed avere perciò nulla la sua cifra delle unità.

Se indichiamo con $a_{n+1}, a_n \dots a_2, a_1$ le $n+1$ cifre dell'intero cercato, il problema proposto è quello di determinare le a_s $(s=1, 2 \dots, n+1)$ in modo che con $0 < a_s < 10$ ed intero sia

$$(1) \quad 10^n . a_{n+1} + 10^{n-1} a_n + \dots + 10 a_2 + a_1 = 4 a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n a_{n+1}.$$

Se poniamo

$$(2) \qquad P_s = a_1 a_2 \dots a_s, \quad Q_s = a_{s+1} a_{s+2} \dots a_n,$$

la (1) può essere scritta sotto la forma

$$(3) \qquad 10^n a_{n+1} + 10^{n-1} a_n + \dots + 10 a_n + a_1 = 4 P_s Q_s a_{n+1}$$

Osserviamo qui che in Q_s entrano $n - s$ fattori, ciascuno dei quali è compreso fra 1 e 9 i limiti inclusi; così sarà

$$Q_s \leqq 9^{n-s} < 9 \times 10^{n-s-1};$$

ed osserviamo pure che il nostro numero non può essere che maggiore di $10^n a_{n+1}$, e perciò verrà

$$10^n a_{n+1} < 36 \times 10^{n-s-1} P_s a_{n+1},$$

e dividendo per $36 \times 10^{n-s-1} a_{n+1}$, risulta

$$\frac{25}{9} \times 10^{s-1} < P_s,$$

ossia

$$(4) \qquad P_s > 2 \times 10^{s-1} + 7 \times 10^{s-2} + \dots + 7 \times 10 + 7.$$

(¹) Questo problema è stato suggerito da quello proposto dal Signor Eugenio Galassi: *Trovare il più piccolo numero intero che sia uguale al quadruplo del prodotto delle sue cifre.* Da questo enunciato sembrerebbe che vi potessero essere più numeri soddisfacenti il nostro problema, ciò che, come vedremo, non si verifica.

2. È facile vedere direttamente che non vi sono numeri con una o due cifre che rendano soddisfatto il problema.

Se dividiamo per 4 i due membri della (3), risulta che deve essere $\frac{10a_2 + a_1}{4}$ un numero intero: con questa condizione e coll'altra, che risulta dalla (4) cioè $a_1 a_2 > 27$, e poichè entrambi a_1 ed a_2 sono compresi fra 1 e 9, i limiti inclusi, risulta che per le due cifre a_1, a_2 non si possono avere che i seguenti sistemi

$$(5)\qquad \begin{cases} a_1=8, a_2=4;\ a_1=4, a_2=8;\ a_1=6, a_2=7;\ a_1=8, a_2=6; \\ a_1=6, a_2=9;\ a_1=8, a_2=8. \end{cases}$$

Quali sono i numeri di tre cifre che soddisfanno il problema proposto? Indicando con x la cifra delle centinaia, intero compreso fra 1 e 9 (1 e 9 inclusi) esaminiamo, se e per quali dei sistemi (5) è soddisfatta la

$$10^2 x + 10a_2 + a_1 = 4a_1 a_2 x.$$

Fatto questo, vedremo che essa non è soddisfatta che pel sistema $a_1=4$, $a_2=8$, con che si ha $x=3$ e perciò *384 è il solo numero di tre cifre che soddisfaccia questo problema.*

3. Se vi sono interi con più di tre cifre che soddisfacciano il problema, osserviamo che nei (5), vi sono una o più cifre pari; così $4a_1 a_2 \ldots a_{n+1}$ sarà multiplo di 8, e dividendo per 8 i due membri della (1), risulta

$$(6)\qquad \frac{25}{2} a_3 + \frac{10a_2 + a_1}{8} = \text{intero},$$

e perciò nel caso di $a_1 = 8$, $a_2 = 4$, a_3 dovrà essere pari e compreso fra 1 e 9; il che contraddice alla condizione $a_1 a_2 a_3 > 277$, quindi non vi possono essere numeri di più di tre cifre quando si abbia $a_1=8$, $a_2=4$.

Se $a_1=4$, $a_2=8$ per la (6) si vede che a_3 deve essere dispari, l'unico valore ammissibile di a_3 che soddisfaccia questa condizione e la $a_1a_2a_3>277$ è $a_3=9$, resta quindi a provare il sistema $a_1=4$, $a_2=8$, $a_3=9$.

Con $a_1=6$, $a_2=7$ risulta che a_3 è impari, e dovendo essere $a_1a_2a_3>277$, si scorge che gli unici valori ammissibili per a_3 sono $a_3=7$ e $a_3=9$, e quindi si avranno da provare i sistemi $a_1=6$, $a_2=7$, $a_3=7$; $a_1=6$, $a_2=7$, $a_3=9$.

In modo analogo si deduce che con $a_1=8$, $a_2=6$ non può essere che $a_3=7$ od $a_3=9$; con $a_1=6$, $a_2=9$ non può essere che $a_3=6$ od $a_3=8$; e con $a_1=8$, $a_2=8$ non può essere che $a_3=6$ od $a_3=8$.

Da questa discussione risulta, che pei numeri con più di tre cifre, che possono soddisfare il problema, i soli sistemi delle ultime tre cifre, sono dati dal quadro seguente:

$$(7)\qquad \begin{cases} a_1=4, a_2=8, a_3=9;\ a_1=6, a_2=7, a_3=7;\ a_1=6, a_2=7, a_3=9; \\ a_1=8, a_2=6, a_3=7;\ a_1=8, a_2=6, a_3=9;\ a_1=6, a_2=9, a_3=6; \\ a_1=6, a_2=9, a_3=8;\ a_1=8, a_2=8, a_3=6;\ a_1=8, a_2=8, a_3=8. \end{cases}$$

Per un numero di quattro cifre a_4 dovrebbe soddisfare sotto le solite condizioni l'equazione

$$1000\,a_4 + 100\,a_3 + 10\,a_2 + a_1 = 4\,a_4\,a_3\,a_2\,a_1\,;$$

equazione non soddisfatta da valori interi di a_4, compresi nei soliti limiti in corrispondenza dei nove sistemi (7) per a_1, a_2, a_3.

4. Vi sono numeri con più di quattro cifre che soddisfacciano il problema?

Con $a_1=4$, $a_2=8$, $a_3=9$ e $a_1=6$, $a_2=7$, $a_3=7$, non esiste un $a_4<10$, pel quale sia $a_1\,a_2\,a_3\,a_4>2\,7\,7\,7$; quindi a questi due sistemi non possano corrispondere numeri con più di quattro cifre, soddisfacenti il problema.

Quanto al sistema $a_1=6$, $a_2=7$, $a_3=9$, onde sia $a_1\,a_2\,a_3\,a_4>2\,7\,7\,7$, dovremo avere o $a_4=8$ o $a_4=9$.

Nei casi restanti, poichè $4\,a_1\,a_2\,a_3$ è multiplo di 16, dividendo i due membri della (1) per 16 risulta

$$\frac{a_4}{2}+\frac{100\,a_3+10\,a_2+a_1}{16}=\text{intero}\,; \tag{8}$$

per cui con $a_1=8$, $a_2=6$, $a_3=7$ si scorge che a_4, oltre alle solite limitazioni, dovrebbe essere pari, e soddisfare la $a_1\,a_2\,a_3\;a_4>2\,7\,7\,7$; e ciò è in contraddizione colle condizioni precedenti.

Con $a_1=8$, $a_2=6$, $a_3=9$ dalla (8) si deduce che a_4 deve essere impari, per cui essa non potrà avere che i due valori 7 e 9.

In modo analogo si scorge che per $a_1=6$, $a_2=9$, $a_3=6$ deve essere $a_4=9$; e per $a_1=6$, $a_2=9$, $a_3=8$ deve essere $a_4=8$; per $a_1=8$, $a_2=8$, $a_3=6$ sarà o $a_4=6$ o $a_4=8$; per $a_1=8$, $a_2=8$, $a_3=8$, dovrà essere $a_4=7$ o $a_4=9$.

Onde riassumendo i soli sistemi di quattro cifre, coi quali possono terminare i numeri con più di quattro cifre, che soddisfacciano il problema sono compresi nel quadro seguente

$$\left\{\begin{array}{ll}
a_1=6,\ a_2=7,\ a_3=9,\ a_4=8; & a_1=6,\ a_2=7,\ a_3=9,\ a_4=9;\\
a_1=8,\ a_2=6,\ a_3=9,\ a_4=7; & a_1=8,\ a_2=6,\ a_3=9,\ a_4=9;\\
a_1=6,\ a_2=9,\ a_3=6,\ a_4=9; & a_1=6,\ a_2=9,\ a_3=8,\ a_4=8;\\
a_1=8,\ a_2=8,\ a_3=6,\ a_4=6; & a_1=8,\ a_2=8,\ a_3=6,\ a_4=8;\\
a_1=8,\ a_2=8,\ a_3=8,\ a_4=7; & a_1=8,\ a_2=8,\ a_3=8,\ a_4=9.
\end{array}\right. \tag{9}$$

Nel modo consueto si vede che non vi possono essere interi di cinque cifre che rendano soddisfatto il problema.

5. Vi sono numeri di più di cinque cifre, che lo rendano soddisfatto?

Con $a_1=6$, $a_2=7$, $a_3=9$, $a_4=8$, ovvero $a_1=8$, $a_2=6$, $a_3=9$, $a_4=7$, o $a_1=6$, $a_2=9$, $a_3=6$, $a_4=9$, o $a_1=8$, $a_2=8$, $a_3=6$, $a_4=6$, ovvero $a_1=8$, $a_2=8$, $a_3=6$, $a_4=8$ non esistono interi $a_5<10$ pei quali sia soddisfatta la condizione $a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5>2\,7\,7\,7\,7$; quindi nessun numero che termini con quei sistemi di quattro cifre può soddisfare il problema.

Con $a_1=6$, $a_2=7$, $a_3=9$, $a_4=9$ è soltanto l'intero $a_5=9<10$, che soddisfaccia la $a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5>27777$.

Per tutti i restanti sistemi di valori il prodotto $4\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5$ è multiplo di 32; e dividendo per 32 i due membri della (I) risulta.

$$(10)\qquad \frac{a_5}{2}+\frac{1000\,a_4+100\,a_3+10\,a_2+a_1}{32}=\text{intero};$$

e quindi con $a_1=8$, $a_2=6$, $a_3=9$, $a_4=9$ dovrà l'intero $a_5<10$ essere impari; e perchè sia $a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5>27777$ dovrà essere $a_5=9$.

Per la (10) con $a_1=6$, $a_2=9$, $a_3=8$, $a_4=8$, l'intero a_5 deve essere pari; ma non vi è intero pari $a_5<10$, pel quale sia $a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5>27777$, dunque etc.

Con $a_1=8$, $a_2=8$, $a_3=8$, $a_4=7$, per la (10) l'$a_5<10$ deve essere impari, e per la $a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5>27777$ non si potrà avere che $a_5=9$,

Con $a_1=8$, $a_2=8$, $a_3=8$, $a_4=9$ per la (10) l'$a_5<10$ dovrà essere pari, e perchè sia $a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5>27777$, non si potrà avere che $a_5=8$.

Onde riassumendo, se vi sono interi, con più di cinque cifre, tali che siano uguali al quadruplo del prodotto delle loro cifre, dovranno terminare con uno di questi sistemi

$$(11)\quad \begin{cases} a_1=6,\ a_2=7,\ a_3=9,\ a_4=9,\ a_5=9;\ \ a_1=8,\ a_2=6,\ a_3=9,\ a_4=9,\ a_5=9 \\ a_1=8,\ a_2=8,\ a_3=8,\ a_4=7,\ a_5=9;\ \ a_1=8,\ a_2=8,\ a_3=8,\ a_4=9,\ a_5=8. \end{cases}$$

Col metodo solito si fa vedere che non vi sono numeri con sei cifre che soddisfacciano il problema.

6. Vi sono numeri con più di sei cifre che lo rendano soddisfatto?

Con $a_1=6$, $a_2=7$, $a_3=9$, $a_4=9$, $a_5=9$ non esiste un intero $a_6<10$, pel quale sia $a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_6>277777$, dunque ecc.

Pei sistemi restanti $4\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5$ è divisibile per 64, e quindi diviso il primo membro della (1) per 64 resta

$$(12)\qquad \frac{a_6}{2}+\frac{10^4\,a_5+10^3\,a_4+10^2\,a_3+10\,a_2+a_1}{64}=\text{intero};$$

per cui con $a_1=8$, $a_2=6$, $a_3=9$, $a_4=9$, $a_5=9$, deve l'$a_6<10$ essere pari, e quindi il solo valore ammissibile di a_6, pel quale si abbia

$$a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_6>277777,\ \text{è}\ a_6=8$$

Con $a_1=8$, $a_2=8$, $a_3=8$, $a_4=7$, $a_5=9$ per la (10) $a_6<10$ dovrà essere impari e per la condizione $a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_6>277777$ dovrà essere $a_6=9$.

Con $a_1=8$, $a_2=8$, $a_3=8$, $a_4=9$, $a_5=8$ allo stesso modo si vede che dovrà essere $a_6=9$.

Riepilogando risulta che, se vi sono interi con più di sei cifre che soddisfacciano il problema, la loro ultime sei saranno

$$a_1=8,\ a_2=6,\ a_3=9,\ a_4=9,\ a_5=9,\ a_6=8$$
$$a_1=8,\ a_2=8,\ a_3=8,\ a_4=7,\ a_5=9,\ a_6=9$$
$$a_1=8,\ a_2=8,\ a_3=8,\ a_4=9,\ a_5=8,\ a_6=9$$

Nel modo consueto si vede poi che non vi sono numeri di sette cifre che soddisfacciano il problema.

7. Ve ne sono di quelli con più di sette che lo rendano soddisfatto? Per il primo e pel secondo sistema non esista un a_7, tale che sia $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 > 2777777$ dunque ecc.

Col terzo sistema non vi è che $a_7=9$, che essendo intero e < 10 soddisfaccia la $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 > 2777777$: e quindi è impossibile che un numero soddisfaccia il problema, se le sue ultime sette cifre non sono $a_1=8$, $a_2=8$, $a_3=8$, $a_4=9$, $a_5=8$, $a_6=9$, $a_7=9$.

Si scorge col metodo consueto che non vi possono essere numeri di otto cifre che lo soddisfacciano, come pure non esistendo un $a_8<10$ pel quale sia $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8 > 27777777$, non potranno esistere numeri con più di otto cifre che lo rendano soddisfatto; perciò 384 è la sola soluzione dal problema.

C. M. Piuma.

LA RISOLUZIONE DELLE DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

e delle disequazioni biquadratiche (1) a coefficienti reali

I.

Limiti delle soluzioni reali. (2)

1. Una disequazione a coefficienti reali

$$f(x) < 0$$

è soddisfatta da tutti i valori reali della x che non soddisfano nè la disequazione

$$f(x) > 0,$$

nè l'equazione

$$f(x) = 0;$$

(1) Intendiamo per disequazioni biquadratiche le disequazioni di quarto grado, che mancano delle potenze dispari della variabile.

(2) Abbiamo creduto opportuno tener disgiunta la ricerca dei limiti delle soluzioni reali da quella dei limiti delle soluzioni complesse ed immaginarie, bastando per la prima le nozioni di algebra elementare.

è quindi superflua ogni ricerca relativa ai limiti dei valori reali, che soddisfano una delle anzidette disequazioni, quando tale ricerca sia stata esaurita per l'altra.

Supporremo, in ciò che segue, che il coefficiente della massima potenza della variabile sia, in ogni disequazione, uguale all'unità positiva.

2. *Disequazioni di secondo grado.* (¹) — Sia la disequazione

$$x^2 + px + q > 0,$$

e siano x_1 ed x_2 le radici dell'equazione

$$x^2 + px + q = 0.$$

Supponendo dapprima che le suddette radici siano reali, e che, in tale ipotesi, sia $x_1 > x_2$, dalla disequazione precedente, posta sotto la forma

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0,$$

si deduce dover essere

$$x > x_1, \quad \text{oppure} \quad x < x_2.$$

Nel caso particolare che x_1 ed x_2 siano reali ed uguali, la disequazione è manifestamente soddisfatta da qualunque valore reale si attribuisca alla x, all'infuori del valore $x = x_1 = x_2$.

Quando le radici dell'equazione non siano reali, il primo membro della disequazione, posta sotto la forma

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) > 0,$$

è costituito dalla somma di due quantità positive, la prima per sua natura, la seconda per ipotesi; quindi la disequazione è soddisfatta per qualunque valore reale della x.

3. *Disequazioni biquadratiche.* — Sia la disequazione

$$x^4 + px^2 + q > 0,$$

e siano x_1, x_2, $-x_2$, $-x_1$ le radici dell'equazione

$$x^4 + px^2 + q = 0.$$

Supponendo in primo luogo che tali radici siano reali, la disequazione in esame si potrà porre sotto la forma

$$(x - x_1)(x - x_2)(x + x_2)(x + x_1) > 0,$$

ed affinchè questa disequazione sia soddisfatta, dovranno darsi alla x tali valori da rendere i fattori del primo membro o tutti quattro positivi, o tutti quattro negativi, o due positivi e due negativi. Quindi, se suppo-

(¹) A rendere completa la teoria che veniamo esponendo, riportiamo in questo paragrafo la consueta risoluzione in numeri reali di tali disequazioni.

niamo che x_1 ed x_2 siano le radici positive, e che inoltre sia $x_1 > x_2$. dovrà essere

$$x > x_1, \quad \text{oppure} \quad x < -x_1, \quad \text{oppure} \quad -x_2 < x < x_2.$$

Vale a dire che la x può assumere qualunque valore, che non sia nè uguale ad una delle radici dell'equazione, nè compreso fra le radici positive o fra le radici negative.

Nel caso particolare in cui sia $x_1 = x_2$, sono da escludersi soltanto i valori $x = \pm x_1$.

Supponiamo in secondo luogo che due sole radici x_1 e $-x_1$ siano reali, e che x_1 sia la positiva; allora la disequazione si potrà porre sotto la forma

$$(x - x_1)(x + x_1)\,\mathrm{H} > 0,$$

ove H rappresenta un fattore di secondo grado in x, tale che le radici dell'equazione $\mathrm{H} = 0$ non sono reali. In base a quanto precedentemente si disse, il fattore H è positivo per qualunque valore reale della x, ed affinchè la disequazione sia soddisfatta, dovrà essere

$$x > x_1, \quad \text{oppure} \quad x < -x_1.$$

Supponiamo da ultimo che nessuna delle radici dell'equazione sia reale; ciò può avvenire o perchè, $p^2 < 4q$, o perchè, essendo $p^2 > 4q$, si ha $p > 0$ e $q > 0$. Nel primo caso, ponendo la disequazione sotto la forma

$$\left(x^2 + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) > 0,$$

è chiaro che il primo membro, risultando dalla somma di due quantità positive, la prima per sua natura e la seconda per ipotesi, è positivo; nel secondo caso il primo membro $x^4 + px^2 + q$, essendo p e q quantità positive per ipotesi, è con maggior evidenza pur sempre positivo. Adunque nell'un caso e nell'altro la disequazione è soddisfatta da qualunque valore reale si attribuisca alla x.

II.

Limiti delle soluzioni complesse ed immaginarie.

4. Converremo che per soluzioni complesse di una disequazione $f(x)>0$ o $f(x)<0$ si debbano intendere quei valori complessi che rendano $f(x)$ numero reale e rispettivamente positivo o negativo.

Non vale nella ricerca dei limiti delle soluzioni complesse ed immaginarie quanto si disse al primo paragrafo, potendo un dato numero complesso od immaginario rendere complessa la $f(x)$, e quindi non soddisfare alcuna delle relazioni

$$f(x) > 0, \quad f(x) = 0, \quad f(x) < 0.$$

5. Osserveremo pure in generale che una disequazione a coefficienti reali

$$f(x) \gtrless 0,$$

al pari di una equazione, se è soddisfatta da un numero complesso

$$x_1 = \alpha + \beta i,$$

lo è pure dal suo coniugato

$$x_2 = \alpha - \beta i.$$

Infatti, se il valore x_1 soddisfa l'anzidetta disequazione, è quanto dire che esso soddisfa una determinata equazione

$$f(x) \mp h = 0,$$

in cui h rappresenta una quantità reale, positiva e indipendente dalla x; ma tale equazione ammette pure la radice coniugata x_2, e quindi x_2 è pure soluzione della disequazione suddetta.

6. *Disequazioni di secondo grado.* — Affinchè un numero complesso $\alpha+\beta i$ soddisfi la disequazione

$$x^2 + px + q > 0,$$

dovrà aversi

$$(\alpha + \beta i)^2 + p(\alpha + \beta i) + q > 0,$$

ossia

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta i - \beta^2 + p\alpha + p\beta i + q > 0,$$

e quindi

$$\begin{cases} 2\alpha\beta + p\beta = 0 \\ \alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q > 0. \end{cases}$$

Dalla equazione del sistema, dividendone tutti i termini per β, che non può essere nulla per ipotesi, si ricava

$$\alpha = -\frac{p}{2},$$

e la disequazione del sistema, sostituendo ad α tale valore, diviene

$$\beta^2 + \frac{p^2}{4} - q < 0;$$

dunque la disequazione

$$x^2 + px + q > 0$$

è soddisfatta da tutti i numeri complessi $\alpha + \beta i$, che si ottengono dando ad α il valore $-\frac{p}{2}$, e a β uno qualunque dei valori reali che soddisfano la disequazione

$$\beta^2 + \frac{p^2}{4} - q < 0.$$

È opportuno notare che la disequazione in esame potrà quindi essere soddisfatta da un numero immaginario, solo quando sia $p = 0$; ed allora il coefficiente reale β della i dovrà soddisfare la disequazione

$$\beta^2 - q < 0.$$

7. Analogamente la disequazione

$$x^2 + px + q < 0$$

è soddisfatta da tutti i numeri complessi $\alpha + \beta i$ che si ottengono dando ad α il valore $-\frac{p}{2}$ e a β uno qualunque dei valori reali, che soddisfano la disequazione

$$\beta^2 + \frac{p^2}{4} - q > 0.$$

Noteremo pure che la disequazione in esame potrà quindi essere soddisfatta da un numero immaginario, solo quando sia $p = 0$; ed allora il coefficiente reale β della i dovrà soddisfare la disequazione

$$\beta^2 - q > 0.$$

8. *Disequazioni biquadratiche.* — Quando un'equazione biquadratica ammette due sole radici reali, le altre due, dovendo essere ad un tempo coniugate nonchè uguali e di segno contrario, non saranno complesse ma immaginarie; quando non ammette alcuna radice reale, per la suesposta ragione, le radici saranno o tutte immaginarie, o tutte complesse e precisamente della forma

$$\alpha + \beta i, \quad -\alpha - \beta i, \quad \alpha - \beta i, \quad -\alpha + \beta i.$$

Ne consegue, tenuto presente quanto superiormente si disse, che, se una equazione od una disequazione biquadratica ammette per soluzione uno qualunque dei quattro numeri precedenti, li ammette tutti quattro.

9. Prendiamo ora in esame la disequazione

$$x^4 + px^2 + q > 0.$$

Sostituendo ad x il numero $\alpha + \beta i$, si ha

$$(\alpha + \beta i)^4 + p(\alpha + \beta i)^2 + q > 0,$$

ossia

$$\alpha^4 + 4\alpha^3\beta i - 6\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta^3 i + \beta^4 + p\alpha^2 + 2p\alpha\beta i - p\beta^2 + q > 0;$$

quindi dovrà essere

$$\begin{cases} 4\alpha^3\beta - 4\alpha\beta^3 + 2p\alpha\beta = 0 \\ \alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4 + p\alpha^2 - p\beta^2 + q > 0. \end{cases}$$

Dividendo tutti i termini dell'equazione del sistema per 2 e per β, che non può essere nulla per ipotesi, e ponendovi α a fattor comune, essa diviene

$$\alpha\,(2\alpha^2 - 2\beta^2 + p) = 0,$$

ed il sistema precedente si può quindi scindere nei due sistemi

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4 + p\alpha^2 - p\beta^2 + q > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha^2 = \beta^2 - \dfrac{p}{2} \\ \alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4 + p\alpha^2 - p\beta^2 + q > 0. \end{cases}$$

Se poi nella disequazione di ciascun sistema si sostituisce ad α il valore dato dalla corrispondente equazione, i due sistemi divengono

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta^4 - p\beta^2 + q > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha^2 = \beta^2 - \dfrac{p}{2} \\ (4\beta^2 - p)^2 - 4\,q < 0. \end{cases}$$

Emerge dal primo sistema che la disequazione

$$x^4 + px^2 + q > 0$$

ammette per soluzioni immaginarie tutti i numeri βi che si ottengono, dando a β uno qualunque dei valori reali, che soddisfano la disequazione

$$\beta^4 - p\beta^2 + q > 0;$$

dal secondo sistema che la disequazione in esame ammette per soluzioni complesse tutti i numeri $\alpha + \beta i$, che si ottengono dando a β uno qualunque dei valori reali che soddisfano la disequazione

$$(4\beta^2 - p)^2 - 4q < 0,$$

purchè si abbia $\beta^2 > \dfrac{p}{2}$, e dando ad α l'uno o l'altro dei due valori che corrispondentemente si ricavano dall'equazione

$$\alpha^2 = \beta^2 - \frac{p}{2}.$$

10. Analogamente la disequazione

$$x^4 + px^2 + q < 0$$

è soddisfatta da tutti i numeri immaginari βi, in cui β sia soluzione reale della disequazione

$$\beta^4 - p\beta^2 + q < 0.$$

Ed è soddisfatta inoltre da tutti i numeri complessi $\alpha + \beta i$, in cui β sia soluzione reale della disequazione

$$(4\beta^2 - p)^2 - 4q > 0,$$

e tale da avere $\beta^2 > \dfrac{p}{2}$; corrispondentemente si hanno per α i due valori dati dall'equazione

$$\alpha^2 = \beta^2 - \frac{p}{2}.$$

D. Fellini.

SOLUZIONI DELLE QUESTIONI 318*, 319*

318*. *In un triangolo sferico, secondo che* $\mathrm{sen}^2 \frac{1}{2} a$ *è uguale maggiore o minore di* $\mathrm{sen}^2 \frac{1}{2} b + \mathrm{sen}^2 \frac{1}{2} c$, *anche* α *sarà rispettivamente uguale maggiore o minore di* $\beta + \gamma$; *e inversamente.*

L. Bosi.

Soluzione di Francesco Barbagallo alunno del R. Ist. Tecnico di Catania.

Sapendo che (Fodhunter trig. sferica art. 49)

$$\mathrm{sen}^2 \frac{1}{2} a = -\frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{sen}\,\gamma},\ \mathrm{sen}^2 \frac{1}{2} b = -\frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\beta)}{\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\gamma},$$

$$\mathrm{sen}^2 \frac{1}{2} c = -\frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\gamma)}{\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta},$$

se $\mathrm{sen}^2 \frac{1}{2} a \overset{=}{\underset{<}{>}} \mathrm{sen}^2 \frac{1}{2} b + \mathrm{sen}^2 \frac{1}{2} c,$

si ha

$$\frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{sen}\,\gamma} \overset{=}{\underset{>}{<}} \frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\beta)}{\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\gamma} + \frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\beta)}{\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta};$$

e siccome $\cos\sigma$ è negativo, dividendo per $\cos\sigma$, riducendo allo stesso denominatore e moltiplicando per $\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{sen}\,\gamma$, si ha

$$\cos(\sigma-\alpha)\,\mathrm{sen}\,\alpha \overset{=}{\underset{<}{>}} \cos(\sigma-\beta)\,\mathrm{sen}\,\beta + \cos(\sigma-\gamma)\,\mathrm{sen}\,\gamma,$$

cioè

$$\cos\sigma\,\mathrm{sen}\,2\alpha + 2\,\mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}^2\alpha \overset{=}{\underset{<}{>}} \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,2\beta + 2\,\mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}^2\beta + \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,2\gamma + 2\,\mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}^2\gamma,$$

$$\cos\sigma(\mathrm{sen}\,2\alpha - \mathrm{sen}\,2\beta - \mathrm{sen}\,2\gamma) \overset{=}{\underset{<}{>}} 2\,\mathrm{sen}\,\sigma\,(\mathrm{sen}^2\beta + \mathrm{sen}^2\gamma - \mathrm{sen}^2\alpha),$$

$$\text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \overset{=}{\underset{<}{>}} \mathrm{sen}\,\sigma\,(\cos 2\alpha - \cos 2\beta - \cos 2\gamma + 1),$$

$$(\mathrm{sen}\,\sigma\cos 2\beta - \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,2\beta) - (\mathrm{sen}\,\sigma\cos 2\alpha - \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,2\alpha) \overset{=}{\underset{<}{>}} \mathrm{sen}\,\sigma - (\mathrm{sen}\,\sigma\cos 2\gamma - \cos\sigma\,\mathrm{sen}\,2\gamma),$$

$$\mathrm{sen}\,(\sigma - 2\beta) - \mathrm{sen}\,(\sigma - 2\alpha) \overset{=}{\underset{<}{>}} \mathrm{sen}\,\sigma - \mathrm{sen}\,(\sigma - 2\gamma),$$

$$\cos(\sigma - \alpha - \beta)\,\mathrm{sen}\,(\alpha - \beta) \overset{=}{\underset{<}{>}} \cos(\sigma - \gamma)\,\mathrm{sen}\,\gamma,$$

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right)\mathrm{sen}\,(\alpha-\beta) \overset{=}{\underset{<}{>}} \cos\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right)\,\mathrm{sen}\,\gamma;$$

ovvero, poichè $\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$ è minore di 90°, epperò il suo coseno è positivo, si ha:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) \overset{=}{\gtrless} \operatorname{sen}\gamma,$$

cioè

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)-\operatorname{sen}\gamma \overset{=}{\gtrless} 0,$$

donde

$$2\cos\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma+\beta-\alpha}{2} \overset{=}{\lessgtr} 0;$$

e siccome $\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} < 90°$, epperò il suo coseno è positivo e diverso da zero, deve essere

$$\operatorname{sen}\frac{\gamma+\beta-\alpha}{2} \overset{=}{\lessgtr} 0$$

d'onde, esssendo $\frac{\gamma+\beta-\alpha}{2} < 90°$, si ha

$$\gamma+\beta-\alpha \overset{=}{\lessgtr} 0,$$

cioè

$$\gamma+\beta \overset{=}{\lessgtr} \alpha.$$

C. V. D.

Similmente, se $\alpha \overset{=}{\gtrless} \beta+\gamma$, cioè $\beta+\gamma-\alpha \overset{=}{\lessgtr} 0$, sarà pure

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right) \overset{=}{\lessgtr} 0;$$

d'onde

$$2\cos\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} \overset{=}{\lessgtr} 0;$$

cioè

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) \overset{=}{\gtrless} \operatorname{sen}\gamma,$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta \overset{=}{\gtrless} \operatorname{sen}\gamma;$$

e sapendo che

$$\cos\alpha=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c},\quad \cos\beta=\frac{\cos b-\cos a\cos c}{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} c},$$

e

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{M}{\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c},\quad \operatorname{sen}\beta=\frac{M}{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} c},\quad \operatorname{sen}\gamma=\frac{M}{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b},$$

dove

$$M=\sqrt{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c},$$

si ha

$$\frac{M(\cos b-\cos a\cos c)}{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\operatorname{sen}^2 c}-\frac{M(\cos a-\cos b\cos c)}{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\operatorname{sen}^2 c} \overset{=}{\gtrless} \frac{M}{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b};$$

donde

$$(\cos b-\cos a)(1+\cos c) \overset{=}{\gtrless} \operatorname{sen}^2 c,$$

$$\cos b-\cos a \overset{=}{\gtrless} 1-\cos c,$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b) \gtreqless \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}c,$$

$$\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a - \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b \gtreqless \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}c,$$

$$\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a \gtreqless \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b + \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}c$$

C. V. D.

319*. *In un triangolo sferico, secondo che* $\cos^2\frac{1}{2}\alpha$ *è uguale maggiore o minore di* $\cos^2\frac{1}{2}\beta + \cos^2\frac{1}{2}\gamma$; $a + 180°$ *sarà rispettivamente uguale, minore o maggiore di* $b + c$; *e inversamente.*

L. Bosi.

Soluzione di Francesco Barbagallo alunno del R. Ist. Tecnico di Catania.

Sapendo che (Todhunter trig. sfer. art. 45)

$$\cos^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-a)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c},\ \cos^2\frac{1}{2}\beta = \frac{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c},\ \cos^2\frac{1}{2}\gamma = \frac{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b},$$

se $\cos^2\frac{1}{2}\alpha \gtreqless \cos^2\frac{1}{2}\beta + \cos^2\frac{1}{2}\gamma$, si ha

$$\frac{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-a)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \gtreqless \frac{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c} + \frac{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b},$$

$$\operatorname{sen}(s-a)\operatorname{sen} a \gtreqless \operatorname{sen}(s-b)\operatorname{sen} b + \operatorname{sen}(s-c)\operatorname{sen} c,$$

$$\operatorname{sen} s \operatorname{sen} 2a - 2\cos s \operatorname{sen}^2 a \gtreqless \operatorname{sen} s \operatorname{sen} 2b - 2\cos s \operatorname{sen}^2 b + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} 2c - 2\cos s \operatorname{sen}^2 c,$$

$$\operatorname{sen} s(\operatorname{sen} 2a - \operatorname{sen} 2b - \operatorname{sen} 2c) \gtreqless 2\cos s(\operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b - \operatorname{sen}^2 c),$$

$$〃 \quad 〃 \gtreqless \cos s(\cos 2b + \cos 2c - \cos 2a - 1),$$

$$(\cos s \cos 2a + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} 2a) - (\cos s \cos 2b + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} 2b) \gtreqless (\cos s \cos 2c + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} 2c) - \cos s,$$

$$\cos(s-2a) - \cos(s-2b) \gtreqless \cos(s-2c) - \cos s,$$

$$\operatorname{sen}(s-a-b)\operatorname{sen}(a-b) \gtreqless \operatorname{sen}(s-c)\operatorname{sen} c,$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(c-a-b)\operatorname{sen}(a-b) \gtreqless \operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b-c)\operatorname{sen} c,$$

$$\operatorname{sen}(b-a) \gtreqless \operatorname{sen} c,$$

cioè

$$\operatorname{sen}(b-a) - \operatorname{sen} c \gtreqless 0,$$

$$2 \cos \frac{1}{2}(b + c - a) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a + c - b) \overset{=}{\lessgtr} 0,$$

e siccome $0 < \frac{1}{2}(a + c - b) < 90^\circ$, epperò il suo seno è positivo e diverso da zero, deve essere

$$\cos \frac{1}{2}(b + c - a) \overset{=}{\lessgtr} 0,$$

cioè

$$\cos \frac{1}{2}(2\pi + a - b - c) \overset{=}{\gtrless} 0,$$

per cui, essendo $\frac{1}{2}(2\pi + a - b - c) < \pi$, deve essere

$$2\pi + a - b - c \overset{=}{\lessgtr} \pi,$$

cioè

$$\pi + a \overset{=}{\lessgtr} b + c.$$

C. V. D.

Similmente, se $\pi + a \overset{=}{\gtrless} b + c$, cioè $2\pi + a - b - c \overset{=}{\gtrless} \pi$, sarà

$$\cos \frac{1}{2}(2\pi + a - b - c) \overset{=}{\lessgtr} 0,$$

e quindi

$$2 \cos \frac{1}{2}(b + c - a) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a + c - b) \overset{=}{\gtrless} 0;$$

da cui

$$\operatorname{sen} c \overset{=}{\gtrless} \operatorname{sen} (b - a),$$

$$\operatorname{sen} c \overset{=}{\gtrless} \operatorname{sen} b \cos a - \cos b \operatorname{sen} a;$$

e sapendo che

$$\cos a = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma}, \quad \cos b = \frac{\cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \gamma},$$

$$\operatorname{sen} a = \frac{2N}{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma}, \quad \operatorname{sen} b = \frac{2N}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \gamma}, \quad \operatorname{sen} c = \frac{2N}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta},$$

dove

$$N = \sqrt{-\cos \sigma \cos (\sigma - \alpha) \cos (\sigma - \beta) \cos (\sigma - \gamma)},$$

si ha

$$\frac{2N}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \overset{=}{\gtrless} \frac{2N(\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma)}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen}^2 \gamma} - \frac{2N(\cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma)}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen}^2 \gamma};$$

da cui

$$\operatorname{sen}^2 \gamma \overset{=}{\gtrless} (\cos \alpha - \cos \beta)(1 - \cos \gamma),$$

$$1 + \cos \gamma \overset{=}{\gtrless} \cos \alpha - \cos \beta,$$

$$\cos^2 \frac{1}{2}\gamma \overset{=}{\gtrless} \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\beta - \alpha),$$

$$\cos^2 \frac{1}{2}\gamma \begin{smallmatrix} = \\ > \\ < \end{smallmatrix} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\beta - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\cos^2 \frac{1}{2}\gamma \begin{smallmatrix} = \\ > \\ < \end{smallmatrix} \cos^2 \frac{1}{2}\alpha - \cos^2 \frac{1}{2}\beta,$$

$$\cos^2 \frac{1}{2}\gamma + \cos^2 \frac{1}{2}\beta \begin{smallmatrix} = \\ > \\ < \end{smallmatrix} \cos^2 \frac{1}{2}\alpha.$$

C. V. D.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

327. Qualunque numero, tranne 2 e 5 ed i loro multipli, è un divisore d'un numero formato da cifre tutte uguali a 9.

328. Ogni frazione irriducibile che ha per denominatore $3,^m$ ridotta in decimale, genera una frazione decimale periodica che ha per periodo un numero di 3^{m-2} cifre.

329. Se una frazione irriducibile, che ha per denominatore il numero primo p diverso da 3, ridotta in decimali genera una frazione periodica, il cui periodo contiene p' cifre, ogni altra frazione ordinaria irriducibile che ha per denominatore p^m, ridotta in decimali produrrà una frazione periodica il cui periodo conterrà $p'.p^{m-1}$ cifre.

330. Se una frazione irriducibile ha per denominatore un prodotto di più fattori primi $p, q, r, \ldots.$ diversi da 2 e da 5, e le frazioni $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}, \ldots.$ ridotte in decimali producono periodi di $p', q', r', \ldots.$ cifre rispettivamente, la data frazione ridotta in decimali produrrà un periodo di m cifre, essendo m il minimo multiplo comune di $p', q', r', \ldots.$

331. Se $\frac{a}{b}$ è una frazione irriducibile in cui $b = 3^m . p^\alpha . q^\beta . r^\gamma \ldots.$, e $p, q, r, \ldots$ sono numeri primi differenti da 2 e da 5, indicando con $p', q', r', \ldots.$ rispettivamente i numeri delle cifre dei periodi delle frazioni decimali equivalenti ad $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}, \ldots,$ la frazione $\frac{a}{b}$ ridotta in decimali produrrà un periodo di k cifre, essendo k il minimo multiplo comune dei numeri $3^{m-2}, p', p^{\alpha-1}, q', q^{\beta-1}, r', r^{\gamma-1}, \ldots.$

Bonolis.

(*) Le quistioni contrassegnate con un asterisco sono proposte agli studenti delle scuole secondarie; le altre a tutti gli studiosi indistintamente.

332*. Dati cinque punti in un piano o nello spazio, tali che tre di essi non sieno in linea retta, si possono formare con essi 10 triangoli. I dieci segmenti, che congiungono il baricentro di ciascuno di questi triangoli col punto medio del segmento individuato dagli altri due, passano tutti per un punto.

333*. Con sei punti dati nello spazio, in modo che quattro di essi non sieno in un piano, si possono formare quindici terne di segmenti aventi per estremi i sei punti dati. I quindici piani individuati dai punti di mezzo delle quindici terne di segmenti passano per un punto. Per questo punto passano anche le rette che congiungono i baricentri di ciascuna coppia di triangoli che si possono formare coi sei punti dati.

334*. Con sette punti dati nello spazio, in modo che quattro non sieno in un piano, si possono formare 35 tetraedri. Le rette che congiungono il baricentro di uno di questi tetraedri col baricentro del triangolo determinato dagli altri tre punti dati, passano tutte per uno stesso punto.

335*. Con 8 punti dati nello spazio, in modo che quattro di essi non sieno in un piano, si possono formare 35 coppie di tetraedri. Le rette che congiungono i baricentri di ciascuna coppia di tetraedri passano per un punto. (1)

LAZZERI.

336. Di un quadrilatero piano qualunque ABCD si conoscono gli angoli interni A e D, il lato $AB = a$, e il rapporto $BC : AD = k$; e inoltre si sa che $AB = CD$. Si considerino su AD e su CB rispettivamente due punti mobili U e V, tali che sia sempre $DU : CV = k$. Determinare il valore minimo del segmento UV.

G. PESCI.

337*. Dati due corpi di forma sferica e di peso P, P′, determinare la relazione fra p e p' (pesi specifici), perchè, essendo $P = nP'$, il corpo di peso P′ cadendo nell'aria acquisti una velocità costante maggiore di quella che acquisterebbe il corpo di peso P′, ammettendo che la resistenza dell'aria sia proporzionale al quadrato della velocità.

F. BARBAGALLO.

(1) N. B. Le quistioni 332*, 333*, 334*, 335* devono essere risolute indipendentemente dalla teoria delle proporzioni e dell'equivalenza e da considerazioni di meccanica.

GIULIO LAZZERI — *Direttore responsabile.*

Finito di stampare il 16 Gennaio 1897.

SOPRA CERTI DETERMINANTI

i cui elementi sono funzioni trigonometriche

(Estratto di una lettera del Prof. G. Loria al Direttore).

Ella ricorda certamente la seguente identità

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 1 \\ \cos\beta & \operatorname{sen}\beta & 1 \\ \cos\gamma & \operatorname{sen}\gamma & 1 \end{vmatrix} = 4 \operatorname{sen}\frac{\beta-\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma-\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2},$$

che (a tacer d'altri) è riferita dal Mansion nel suo ben noto libretto sopra i determinanti. Forse Le sarà pur nota l'altra relazione

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & \operatorname{sen}2\alpha \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & \operatorname{sen}2\beta \\ \operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & \operatorname{sen}2\gamma \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \operatorname{sen}\frac{\beta-\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma-\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}[\operatorname{sen}(\beta+\gamma)+\operatorname{sen}(\gamma+\alpha)+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)],$$

che è dimostrata nel Vol. VI (p. 88) di *Mathésis*. Ora, alcune ricerche geometriche che mi occupano da vario tempo, mi condussero a stabilire le seguenti relazioni analoghe a quelle surriferite:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{tg}\alpha & 1 \\ \cos\beta & \operatorname{tg}\beta & 1 \\ \cos\gamma & \operatorname{tg}\gamma & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}\frac{\beta-\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma-\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}[\cos(\beta+\gamma)+\cos(\gamma+\alpha)+\cos(\alpha+\beta)-1];$$

$$\begin{vmatrix} \cos2\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 1 \\ \cos2\beta & \operatorname{sen}\beta & 1 \\ \cos2\gamma & \operatorname{sen}\gamma & 1 \end{vmatrix} = 16\operatorname{sen}\frac{\beta-\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma-\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}2\alpha & 1 \\ \cos\beta & \operatorname{sen}2\beta & 1 \\ \cos\gamma & \operatorname{sen}2\gamma & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\operatorname{sen}\frac{\beta-\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma-\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}[\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta+\gamma)],$$

la dimostrazione delle quali può fornire un ottimo esercizio ai giovani lettori del *Periodico* da Lei diretto. Tutte queste relazioni, eccettuata la seconda, danno il valore di determinanti del seguente tipo:

$$(A)\quad \begin{vmatrix} \operatorname{sen} m_1\alpha_1, & \operatorname{sen} m_2\alpha_1, & \ldots\ldots, & \operatorname{sen} m_k\,\alpha_1, & \cos m_{k+1}\alpha_1, & \ldots\ldots, & \cos m_n\,\alpha_1 \\ \operatorname{sen} m_1\alpha_2, & \operatorname{sen} m_2\alpha_2, & \ldots\ldots, & \operatorname{sen} m_k\,\alpha_2, & \cos m_{k+1}\alpha_2, & \ldots\ldots, & \cos m_n\,\alpha_2 \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots \\ \operatorname{sen} m_1\alpha_n, & \operatorname{sen} m_2\alpha_n, & \ldots\ldots, & \operatorname{sen} m_k\,\alpha_n, & \cos m_{k+1}\alpha_n, & \ldots\ldots, & \cos m_n\,\alpha_n \end{vmatrix},$$

ove $m_1 m_2 \ldots . m_n$ sono numeri interi, uno dei quali (a partire da m_{k+1}) può essere nullo. Il calcolo di tale determinante presenta qualche difficoltà, e può essere necessario in molte circostanze. Quando fosse eseguito, si potrebbero assegnare i valori degli analoghi determinanti del tipo seguente:

$$(B)\quad \begin{vmatrix} \operatorname{sen}^{m_1}\alpha_1, & \ldots\ldots, & \operatorname{sen}^{m_k}\alpha_1 & , \cos^{m_k+1}\alpha_1, & \ldots\ldots, & \cos^{m_n}\alpha_1 \\ \operatorname{sen}^{m_1}\alpha_2, & \ldots\ldots, & \operatorname{sen}^{m_k}\alpha_2 & , \cos^{m_k+1}\alpha_2, & \ldots\ldots, & \cos^{m_n}\alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \operatorname{sen}^{m_1}\alpha_n, & \ldots\ldots, & \operatorname{sen}^{m_k}\alpha_n & , \cos^{m_n+1}\alpha_n, & \ldots\ldots, & \cos^{m_n}\alpha_n \end{vmatrix}.$$

Ma è ancor dubbio se invece non convenga ridurre il calcolo dei determinanti dal tipo (A) a quello dei determinanti del tipo (B). Comunque, Ella vede che siamo qui dinnanzi ad una miniera di questioni piene d'interesse per l'analista e pel geometra, e sulle quali bramerei che Ella fissasse l'attenzione dei nostri colleghi, affinchè, se non altro, arricchissero di qualche nuovo numero il catalogo dei casi speciali in cui esse sono risolte. Che tali quistioni formino un campo tuttora inesplorato, sembra risultare dall'esame dell'eccellente Manuale del Pascal su la teoria e le applicazioni dei determinanti, recentemente pubblicato dall'Hoepli.

SULLA DEFINIZIONE DI INFINITO

Il prof. Bettazzi, nel suo pregevole lavoro *Fondamenti per una teoria generale dei gruppi* inserito nel vol. XI del *Periodico*, a pag. 82, mi fa l'onore di citare i miei *Elementi di aritmetica e algebra*, combattendo la definizione di sistema infinito in essi contenuta e così concepita: „ Un sistema si dirà infinito se, dopo aver pensato più cose del sistema, sia sempre possibile pensarne altre ancora ". Sembrandomi le sue censure ingiustificate, credo mio dovere e mio diritto il rispondergli.

Egli dice prima che il prof. Burali-Forti mette in mostra alcune imperfezioni del mio libro che *rendono illusoria* quella definizione. L'obbiezione del prof. Burali-Forti consiste nel dire che io chiamo infinito ciò che è infinito e finito ciò che è finito; e per provare come ciò non sia vero, basta l'esempio del gruppo dei punti contenuti in un segmento, il quale può dirsi finito perchè ha *fine* da una banda e dall'altra, mentre per la mia definizione è infinito.

Il prof. Bettazzi aggiunge poi che la mia definizione è assurda, ove non si completi la frase dicendo « dopo aver pensato più cose del sistema *costituenti un gruppo finito* ». Ora questo complemento, che, come egli dice, darebbe origine a un circolo vizioso, è affatto superfluo, poichè la definizione stabilisce come condizione sufficiente, non necessaria, affinchè il gruppo sia finito, il fatto che le cose sieno pensate. E invero io non avevo precedentemente ammessa la possibilità di pensare tutte le cose di un sistema, e mi era perciò lecito parlare di sistemi, i cui individui non si potessero tutti pensare, come ho fatto; mi par dunque strano che egli dica « potendosi per più cose (pensate) prendere tutte quelle del gruppo, oltre le quali non ve ne sono altre », una volta che io, per il gruppo in quistione, avevo legittimamente stabilito il contrario.

D'altronde l'esistenza di gruppi infiniti secondo la mia definizione si può dimostrare collo stesso esempio di Bolzano e Dedekind, riportato dal Prof. Bettazzi a pag. 87 del citato lavoro; poichè dopo aver pensato più enti, sieno essi materiali, o pensieri essi stessi, rimangono sempre a pensare le loro immagini nella nostra mente.

G. BIASI.

SUL POSTULATO DELL'EQUIVALENZA

1. La breve nota del mio egregio collega ed amico Giudice, pubblicata nel 1° fascicolo del *Bollettino dell'associazione Mathesis*, sembra che risolva l'importante quistione di dimostrare il postulato dell'equivalenza per una via assai più facile e sollecita di quelle proposte in precedenza, ammesso però che si possa accettare senza discussione la definizione ch'egli da di grandezze finite ed infinite.

Su questa definizione, e sulle considerazioni relative ad essa fatte dall'altro mio amico e collega Sforza (*Bollettino di Mathesis n. 2*) mi permetto di fare alcune modeste osservazioni, allo scopo d'invogliare i professori delle scuole secondarie ad applicarsi allo studio di questo argomento interessantissimo, per risolverlo di comune accordo in modo definitivo e completamente soddisfacente.

2. Il Prof. Giudice stabilisce la definizione di finito e infinito nel modo seguente: " *Diremo che una grandezza è finita, se non è possibile togliere una prima parte, indi una seconda che sia eguale alla prima, poi una terza che sia eguale alla prima, e così via indefinitamente: se invece sia possibile allora diremo che la grandezza è infinita* ".

Premessa questa definizione il Prof. Giudice dimostra la proposizione comunemente ammessa come postulato per la teoria dell'equivalenza, cioè "*se una grandezza A è scomposta in parti, non è possibile trascurando alcune di queste parti ricomporre le altre in modo da ricostituire la grandezza A stessa*". La dimostrazione si può riassumere così. Supponiamo che, trascurando una parte B di A si possa colle altre ricostituire la grandezza A. Allora, trascurando una seconda volta la grandezza B, si potrà di nuovo costituire la grandezza A, e così via indefinitamente, di guisa che A dovrebbe essere infinita. Sulla dimostrazione mi sembra che non ci sia nulla da obiettare, e da essa apparisce che il postulato sull'equivalenza discende da quello di Archimede; ma la definizione, sulla quale essa è basata, mi sembra un po' troppo indeterminata e non interamente esatta, se non si stabilisce senza ambiguità che specie di parte si deve togliere successivamente da una grandezza data, per stabilire se essa è finita o no. E infatti per es. una striscia è secondo la definizione di Giudice una grandezza *infinita*, poichè si può da essa togliere successivamente e infinitamente una sua parte che sia un rettangolo, ma è *finita*, se si considera che da essa si può togliere soltanto un numero finito di volte successivamente un'altra striscia. Nello stesso modo l'angolo è *finito* se si confronta con altri angoli; *infinito* se si confronta con striscie o poligoni.

Da questi esempi chiaramente apparisce che, come non è possibile definire *la grandezza*, ma si possono definire le *classi di grandezze*, così non si può parlare di grandezza *finita o infinita individualmente*, ma soltanto di *classi di grandezze finite*, o *infinite*, chiamando classi di grandezze finite (o di 1ª specie secondo il Bettazzi) (*) le classi che soddisfano al postulato di Archimede, tali cioè che date due grandezze della classe esiste sempre una multipla della minore che supera la maggiore.

Così, pur riconoscendo che l'acuta osservazione di Giudice è del massimo interesse, e che contiene probabilmente il germe della dimostrazione semplicissima, che si dovrà accettare come definitiva, pure ritengo che per ora non si possa ritenere la quistione come esaurita, finchè non sia ben precisata la definizione di finito e infinito.

3. Passiamo alla nota di Sforza che si può riassumere così.

Premessa l'osservazione che la definizione di finito data dal Giudice coincide col postulato di Archimede, egli fa il seguente sillogismo.

(*) Bettazzi, *Teoria delle grandezze*, § 50. Pisa 1890.

Ogni grandezza che soddisfa al postulato di De Paolis relativo all'equivalenza è finita.

Il segmento soddisfa al postulato di De Paolis (V. De Paolis, *Elem. di geom.* pag. 42 n. 56).

Dunque il segmento soddisfa al postulato di Archimede, che almeno per i segmenti diventa un teorema.

La forma del sillogismo è perfetta. Vediamo la sostanza.

Non so se il mio collega ha osservato che la dimostrazione della premessa minore (*il segmento soddisfa al postulato di De Paolis*) è basata sul postulato della possibilità d'invertire un segmento. Dunque l'unica conseguenza logica che si può dedurre dal detto sillogismo, è che il postulato di Archimede per il segmento è conseguenza di quello di De Paolis e di quello della possibilità di far coincidere un segmento con se stesso rovesciandolo. Siccome però il sig. Gérard ha dimostrato che l'inversibilità di un segmento discende dal postulato di Archimede,(*) vi è in tutto questo un circolo vizioso. Piuttosto da tutto quello che è stato scritto parrebbe si dovesse concludere che tre postulati, quello della inversibilità di un segmento, quello dell'equivalenza, quello di Archimede debbano essere raggruppati in un solo, che valga a caratterizzare le classi di grandezze finite.

Non so come ciò si debba o si possa fare, ma mi pare che la cosa non sia impossibile, e varrebbe la pena che molti se ne occupassero.

4. Credo opportuno di aprire qui una parentesi.

Ho adoperato sopra la locuzione *postulato di De Paolis* per riportare fedelmente le parole del Prof. Sforza; ma per amor di giustizia devo osservare che, se si dovesse dare un nome alla proposizione ormai tanto discussa, questo dovrebbe essere il nome di *De Zolt*, il quale l'enunciò per il primo fino dal 1881 e coi suoi pregevoli opuscoli *sull'eguaglianza dei poligoni e dei poliedri* mise le fondamenta di questa importante parte della geometria elementare. Infatti a pag. 12 della prefazione ai *Principi sull'eguaglianza dei poligoni* stampati nel 1881 (mentre la geometria del De Paolis fu stampata nel 1884) è osservato che per trattare la teoria dell'equivalenza è necessario che *si ammetta esplicitamente quale assioma o si dimostri, come noi* PROCURAMMO *di fare, la proposizione: se un poligono è diviso in parti in un*

(*) GÉRARD, *Sur l'équivalence de deux portions de droites.* — *Periodico di mat.*, Vol. XI, pag. 23.

modo qualunque, non è possibile, trascurando alcune di esse parti, disporre le rimanenti in modo da coprire interamente il poligono.

La dimostrazione lascia a desiderare, e sembra che lo stesso autore ne dubitasse, poichè dice che egli *ha procurato di dimostrare* la citata proposizione e non che l'ha dimostrata; ma ciò non toglie che egli per primo riconoscesse che quella proposizione era il cardine della teoria dell'equivalenza.

5. A proposito della definizione di classi di grandezze finite ricorderò che il Bettazzi nella sua pregevole teoria delle grandezze chiama classi di 2ª specie assoluta quelle classi di grandezze, che si possono scomporre in sottoclassi ordinarie di 1ª specie (separate da salti), in modo che qualsiasi multiplo di una grandezza di una sottoclasse è minore di qualsiasi grandezza della sottoclasse successiva. Ebbene le parti di piano offrono un esempio interessantissimo di queste grandezze. I poligoni, le striscie, gli angoli costituiscono tre sottoclassi di grandezze di 1ª specie o finite, considerate separatamente; ma prese insieme formano una classe di 2ª specie assoluta; e, chiamando finiti i poligoni, possiamo dire che le striscie formano una classe di grandezze infinite di 1° ordine, e gli angoli formano una classe di grandezze infinite di 2° ordine.

In simil guisa le parti di spazio si possono suddividere in quattro sottoclassi, poliedri, prismi indefiniti, strati, diedri e angoloidi; ogni sottoclasse è finita o di 1ª specie; ma tutte insieme formano una classe di 2ª specie assoluta; e se chiamiamo finiti i poliedri, potremo dire che i prismi indefiniti costituiscono una classe di grandezze infinite di 1° ordine; gli strati una classe di grandezze infinite 2° ordine, e i poliedri e gli angoloidi una classe di grandezze infinite di 3° ordine.

Osservo intanto che, se non esplicitamente, almeno implicitamente, in tutti i corsi di geometria si dice che le grandezze finite si possa trascurare in confronto delle infinite, e queste in confronto degl'infiniti di ordine superiore. Infatti, quando si considerano due rette parallele, e si dice che gli angoli corrispondenti sono eguali, si dice in sostanza che una striscia è trascurabile in confronto di un angolo. Anzi in un vecchio libro, il trattato di geometria del Luvini, è esposta una pretesa dimostrazione del postulato delle parallele fatta dal sig. Bertrand basata su questi principi. Il ragionamento certamente non regge, ed è ormai noto che il postulato delle parallele è indimostrabile; ma non si può asserire che esso non si possa trasformare, e far dipendere da un altro.

Ora, se si potesse stabilire elementarmente il concetto degl'infiniti dei vari ordini, e il postulato che le grandezze finite o infinite sono trascurabili in confronto degl'infiniti degli ordini superiori, come in calcolo infinitesimale si stabilisce che gl'infinitesimi degli ordini superiori sono trascurabili in confronto delle grandezze finite o infinitesime di ordine inferiore, molte dimostrazioni di teoremi fondamentali della geometria diverrebbero di una semplicità sorprendente, e lo stesso postulato delle parallele verrebbe a collegarsi con questi concetti. Ecco degli esempi.

a) TEOREMA. — *La somma degli angoli esterni di un poligono convesso è uguale a due angoli piatti.*

Infatti la somma degli angoli esterni di un poligono convesso forma tutto il piano (ossia due angoli piatti) meno il poligono ABCDE, che, essendo finito, è trascurabile in confronto di un infinito di 2° ordine.

COROLLARIO. — *La somma degli angoli interni di un poligono di* n *lati è* n — 2 *piatti, e in particolare quella degli angoli di un triangolo è eguale ad un angolo piatto.*

b) Premessa la dimostrazione del teorema. “ Se due rette tagliate da una terza fanno gli angoli corrispondenti uguali, esse non s'incontrano „, si può stabilire la definizione di *striscia* e *semistriscia*, ed osservare che l'angolo è infinito rispetto alla striscia. Si deduce allora il

TEOREMA. — *Se due rette parallele sono tagliate da una terza, gli angoli coniugati interni sono supplementari.*

Infatti la loro somma è un angolo piatto più una semistriscia trascurabile.

COROLLARIO. — *Per un punto non si può condurre che una parallela ad una retta data.*

Altrimenti un angolo dovrebbe essere uguale ad un altro angolo che è una sua parte.

c) TEOREMA. — *La somma dei diedri esterni di un angoloide convesso è minore di due diedri piatti.*

Infatti essa è uguale a tutto lo spazio (ossia a due diedri piatti) diminuito della somma dell'angoloide e del suo opposto al vertice, la quale è dello stesso ordine d'infinito dell'intero spazio. Perciò la somma suddetta dei diedri esterni di un angoloide è minore di due diedri piatti.

COROLLARIO. — *La somma dei diedri interni di un angoloide convesso di* n *faccie è compresa fra* n *e* n — 2 *diedri piatti.*

Infatti, indicando con E la somma dei diedri esterni, con I quella dei diedri interni, con p un diedro piatto, si ha

$$I + E = np,$$

ed essendo

$$E < 2p,$$

segue

$$np > I > (n-2)\,p.$$

6. Questi esempi, ed altri che si potrebbero trovare, saranno sufficienti a dimostrare l'importanza della questione, e spero che invoglieranno altri più abili di me ad occuparsene. Questione che per concludere si può riassumere in questi termini.

Se, e in qual modo, si possa negli elementi di geometria stabilire con assoluta esattezza per mezzo di un postulato il concetto di classi di grandezze finite e infinite dei vari ordini, e far dipendere da esso i quattro postulati delle parallele, della equivalenza, di Archimede, della inversibilità del segmento, dell'angolo, ecc.

Tengo però a ripetere che io propongo la quistione, ma non pretendo minimamente di risolverla. Anzi osservo che mentre è indiscutibile l'utilità di fondere più postulati in uno, di semplificare certe dimostrazioni, mettendo in certa guisa in evidenza la causa prima di certe verità, non è egualmente certa l'opportunità di introdurre fin dal principio il concetto d'infinito, che è abbastanza difficile e delicato, dato anche che si riesca a farlo con tutto il rigore desiderabile.

G. Lazzeri.

APPENDICE

AI FONDAMENTI PER UNA TEORIA GENERALE DEI GRUPPI

DI RODOLFO BETTAZZI

(v. Periodico, fasc. 3, 4, 5 e 6 dell'anno 1896)

1. Durante la stampa degli ultimi capitoli del mio lavoro è comparsa negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino (Anno 1896-97) una Nota del Prof. Burali-Forti, col titolo " Le classi finite ", nella quale egli dimostra un teorema da cui si può trarre profitto per togliere un dubbio che io avevo accennato sussistere circa la validità di una proprietà esposta dal Dedekind.

Nei " Fondamenti " io ho dimostrato (§ 96 Cor. 2°) che è infinito (cioè, secondo le mie denominazioni, non finito, ossia che non si può rendere semplicemente ordinato e limitato) ogni gruppo sviluppabile (cioè equivalente ad una sua parte propria); ma ho accennato (§ 96 oss. 1ª e Nota) che la inversa non è provata vera, non essendo priva di obiezioni la dimostrazione datane dal Dedekind. Ricordando che il Dedekind dice *infinito* un gruppo equivalente ad una sua parte propria (gruppo *sviluppabile* secondo il mio linguaggio) e *finito* un gruppo che non è infinito, dal mio lavoro si deduce che:

a) i gruppi che sono finiti secondo la mia definizione sono tali anche secondo quella del Dedekind (§ 59 Cor. 1°);

b) i gruppi che sono infiniti nel senso del Dedekind (sviluppabili) sono tali anche nel senso usato da me (§ 96 Cor. 2°);

proposizioni equivalenti fra loro, delle quali restavano dubbie le inverse.

Le ricerche del Prof. Burali-Forti portano a concludere che queste inverse sussistono.

2. Il Prof. Burali-Forti parte dalla definizione dei gruppi finiti ed infiniti data dal Dedekind (v. Burali-Forti, Nota citata, § 2. Prop. 1, 2). Per ogni gruppo finito G definisce poi un gruppo Γ, che dice *gruppo (classe) normale formato cogli enti di* G, colle seguenti leggi: (ivi § 3 Prop. 1) — 1° i suoi elementi sono gruppi non nulli di enti di G. — 2° se un elemento di Γ è di potenza minore od uguale ad un altro pure di Γ, il primo è parte del secondo (in particolare due elementi equivalenti sono identici, o, sotto altra forma, tutti gli elementi distinti di Γ hanno disugual potenza) — 3° in Γ vi è un elemento che consta di un solo ente di G (dirò tale elemento l'elemento *unitario* di Γ) — 4° per ogni elemento G_p di Γ che sia diverso dall'intero gruppo G, esiste in G un altro elemento G_{p+} contenente un ente di più, che sia distinto da tutti gli enti già contenuti in G_p (elemento *seguente* a G_p: io dirò inoltre G_p *precedente* a G_{p+})

Per un simile gruppo egli dimostra, fra le altre, queste proprietà:

1° che esso è finito (ivi § 3 Prop. 9).

2° che in esso ogni elemento, che non sia quello unitario, ha il precedente (Prop. 10).

3° che di esso fa parte G (Prop. 11).

4° che in esso si verifica il principio d'induzione (Prop. 12).

5° che da ogni gruppo finito (s'intende secondo Dedekind) si può dedurre almeno un gruppo normale formato coi suoi enti (Prop. 13).

3. È facile allora il vedere che ogni gruppo finito (secondo Dedekind) può rendersi semplicemente ordinato e limitato.

Infatti dal gruppo finito G si deduca un gruppo normale Γ, che esiste sempre, secondo la Prop. 13 del Prof. Burali-Forti ora citata: poi si consideri il gruppo G_o costituito dagli enti di G, ciascuno dei quali è o l'ente che costituisce l'elemento unitario di Γ, o l'ente che si ottiene facendo la differenza fra ciascun elemento di Γ ed il suo precedente.

Tale gruppo coincide con G. Ed invero:

I. Ogni ente di G comparisce in G_o. Perchè se α è un ente di G, esso appartiene a tutti gli elementi di Γ, quindi anche a quello unitario, e perciò al gruppo G_o. Se α non appartiene a tutti, ma manca in qualcuno (in tutti no, appartenendo almeno a G che è elemento di Γ) non può mancare nel seguente di ogni elemento di Γ in cui manca, perchè dovrebbe, per il principio di induzione di Γ, mancare in tutti; e quindi se α mancherà in un elemento G_p e non nel seguente G_{p+}, verrà ad appartenere a G_o, perchè α sarà la differenza fra G_{p+} e G_p.

II. Ogni ente di G comparisce in G_o una volta sola. Perchè infatti se α comparisce una volta come differenza fra G_{p+1} e G_p ed un'altra come differenza fra G_q e G_{q}, dove G_p è distinto da G_q, allora essendo p. es. G_p di potenza minore a G_q, sarebbe G_{p+1} di potenza minore od uguale a G_q, e quindi per la definizione dei gruppo normale sarebbe G_{p+1} parte, propria o no, di G_q, ed in G_q comparirebbe x, e non potrebbe x essere la differenza fra G_{q+1} e G_q per il modo con cui si prende il seguente di G_q.

Se in tale gruppo G_a si prende come ente σ (§ 31) di un ente x che provenga dalla differenza fra G_{p+1} e G_p quello che proviene dalla differenza dei due elementi seguenti a questi, e come ente originario quello costituente l'elemento unitario di Γ, il gruppo risulta chiaramente bene ordinato, ed è anche limitato avendo per ente finale la differenza fra l'elemento G ed il suo precedente. Inoltre essa è catena dal suo ente originario, giacchè sodisfa chiaramente al principio d'induzione a cui sodisfa Γ. Ciò è quanto si voleva dimostrare.

4. Si vede da quanto precede che un gruppo che è finito secondo Dedekind è finito anche nel senso usato da me. Perciò è vera la inversa della *a*) e quindi anche quella della *b*).

I concetti di gruppo finito e di infinito dati nei miei " Fondamenti „ non si differenziano dunque *per la sostanza* da quelli del Dedekind, come prima della dimostrazione della Prop. 13 del Prof. Burali-Forti era legittimo il dubitare (v. Introduzione e § 96 dei miei " Fondamenti „ ed anche il § 10 della mia Nota " Gruppi finiti ed infiniti di enti „).

La denominazione di gruppo sviluppabile potrà quindi d'ora in là essere soppressa, equivalendole l'altra di gruppo infinito; salvo a mantenerla provvisoriamente nello svolgere la teoria, fin quando si vegga opportuno di usare il relativo concetto anche senza aver dato la definizione di gruppi finiti ed infiniti.

5. La coincidenza delle due definizioni di gruppo finito le dimostra opportune entrambe, perchè ciascuna dà (o come punto di partenza o come teorema) le due diverse proprietà, ugualmente importanti, delle quali, da qualunque punto di vista si consideri, interessa sia dotato un gruppo che voglia dirsi finito.

Quale delle due definizioni sia da preferirsi, non spetta a me qui il decidere. Il Prof. Burali-Forti obietta alla mia definizione che non è necessario il ricorrere al concetto di ordine per definire il gruppo finito, non avendone egli fatto uso. Questa osservazione è scientificamente giusta; ma giacchè per mettere in rilievo le proprietà più notevoli del gruppo finito egli ricorre ai gruppi normali dai quali quasi spontaneamente scaturisce la proprietà dell'ordinabilità che così trovasi inclusa anche nel suo modo di considerare il gruppo finito, io credo che, didatticamente, sia più conveniente il ricorrere esplicitamente al concetto di ordine, che può gettare assai luce sulla definizione di gruppo finito. Resta inoltre il fatto che, seguendo il Dedekind, occorre definire prima il gruppo infinito e poi il gruppo finito, o dare questo con una proprietà negativa (impossibilità che una sua parte propria sia equivalente all'intero gruppo), mentre colla mia definizione si dà prima direttamente l'idea di gruppo finito; il che a mio credere, specialmente nell'insegnamento, offre un notevole vantaggio.

Torino, Gennaio 1897.

SUL NUMERO DELLE CIFRE DEL PERIODO
NELLE FRAZIONI DECIMALI PERIODICHE (*)

1. È noto che la frazione *propria irriducibile* $\frac{a}{b}$, il cui denominatore b è primo con 2 e con 5, convertita in decimale dà luogo a una frazione *periodica semplice*; da questa si ritorna alla generatrice $\frac{a}{b}$ per mezzo della frazione avente per numeratore il periodo P e per denominatore $10^n - 1$, essendo *n il numero delle cifre del periodo*, compresi gli zeri che possono precedere le cifre significative di P; si ha cioè

$$\frac{a}{b} = \frac{P}{10^n - 1},$$

e quindi, poichè $\frac{a}{b}$ è irriducibile, dovrà essere $10^n - 1$ divisibile per b, ossia

(1) $$10^n \equiv 1 \pmod{b},$$

dove n è il *minimo* esponente, diverso da zero, che soddisfa alla (1). Come si vede il valore di n è affatto indipendente da a, epperò potrebbe togliersi la restrizione ammessa $a < b$; e così pure rispetto a b, che abbiamo supposto primo con 2 e con 5, non s'è nulla tolto alla generalità della quistione, perchè il valore di n dipenderà sempre e soltanto dai fattori di b differenti dal 2 e dal 5; questi ultimi fattori, come si sa, influiscono solamente sull'*antiperiodo*.

In quel che segue chiameremo per brevità, n e b *numeri corrispondenti*.

2.(**) *Proprietà fondamentale del numero* n. — Dalla teoria delle congruenze si ha che la (1) è sempre verificata (teorema di Fermat generalizzato) dal numero $\varphi(b)$, indicando con questa funzione il numero dei numeri inferiori a b e primi con esso; come pure sappiamo che il valore di n deve esser dato da un divisore di $\varphi(b)$, non escluso $\varphi(b)$ stesso. *Questa proprietà, sebbene non determini il valore di* n, *tuttavia lo limita ai soli divisori di* $\varphi(b)$.

(*) Questo lavoro che contiene la risoluzione delle quistioni 327, 328, 329, 330, 331 proposte dal Prof. Bonolis nel 1° fascicolo del corrente anno fu inviato dall'autore al Prof. Frattini fino dallo scorso Nov., ma l'attuale direzione non ne ebbe notizia altro che dopo la pubblicazione del 1° fasc.: i professori Bonolis e Bettini dunque sono giunti agli stessi risultati, ignorando ciascuno il lavoro dell'altro. (Nota di G. LAZZERI).

(**) Le proprietà accennate in questo e nel seguente § si possono leggere, esposte con metodo anche più elementare, nella nota " sulle frazioni decimali periodiche " del compianto Prof. Lugli, inserita nel Vol. II. fasc. 6° del presente Periodico.

Se b è primo si ha

$$\varphi(b) = b - 1,$$

mentre invece quando siano α, β . . . i fattori primi disuguali di b, si ha

$$\varphi(b) = b\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\ldots \qquad < b - 1;$$

risulta pertanto che il massimo valore di n, cioè $b - 1$, può aversi solamente nel caso che b sia primo.

3. *Il valore di* n *si può determinare per mezzo dei numeri* n_1, n_2 . . . *che corrispondono ai fattori primi disuguali di* b. — Supponiamo in primo luogo $b = \alpha \, . \, \beta \, . \, \gamma \ldots .$, con $\alpha, \beta, \gamma \ldots .$ fattori primi tutti differenti tra loro, e si siano trovati i minimi esponenti che soddisfano alle congruenze

$$\begin{aligned} 10^{n_1} &\equiv 1 \qquad (\text{mod } \alpha) \\ 10^{n_2} &\equiv 1 \qquad (\text{mod } \beta) \\ 10^{n_3} &\equiv 1 \qquad (\text{mod } \gamma) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Poichè $\alpha, \beta, \gamma \ldots .$ sono primi fra loro, il minimo comune multiplo di n_1, n_2, n_3, ... sarà il valore di n che corrisponde a b, non potendosi con un numero più piccolo verificare contemporaneamente la congruenza $10^n \equiv 1$ (mod b) e tutte le antecedenti.

Pel caso di più fattori uguali limitiamoci a porre

$$b = \alpha^h$$

con $h > 2$, e dimostriamo che *se* n_1 *corrisponde ad* α, $n_1\alpha^{h-1}$ *dovrà corrispondere a* b, *purchè non sia*

$$10^{n_1} \equiv 1 \qquad (\text{mod } \alpha^2).$$

Infatti per quel che s'è detto, dovendosi avere

$$10^{n_1} \equiv 1 \qquad (\text{mod } \alpha)$$

e

$$10^{n} \equiv 1 \qquad (\text{mod } b) \text{ e, a fortiori, } (\text{mod } \alpha)$$

sarà necessariamente $n = n_1 \text{K}$; e perchè $10^{n_1} - 1$ è divisibile per α e non per α^2, si avrà

$$10^{n_1} = 1 + \alpha q, \tag{2}$$

dove q è primo con α. Elevando la (2) alla potenza K, e sviluppando colla formola del binomio, si ha

$$10^n - 1 = \alpha \text{K} q + \frac{\text{K}(\text{K} - 1)}{2}\alpha^2 q^2 + \ldots\ldots;$$

questa egnaglianza, divisa successivamente per $\alpha^2, \alpha^3 \ldots$, ci porta facilmente a concludere che deve essere K multiplo di α^{h-1}; e perchè è sufficiente elevare la (2) alla potenza α^{h-1}, affinchè si abbia $10^n \equiv 1$ (mod b), sarà $\text{K} = \alpha^{h-1}$ e quindi $n = n_1\, \alpha^{h-1}$.

Se poi insieme alla $10^{n_1} \equiv 1$ (mod α), si ha pure

$$10^{n_1} \equiv 1 \qquad (\text{mod } \alpha^2)$$

con $2 \leq s \leq h$, si avrà subito con ragionamento analogo al precedente $n = n_1 \alpha^{h-s}$. Del resto il caso ora considerato è assai raro, come osserva il Lucas (Théorie des Nombres p. 423), perchè, per numeri primi inferiori a 1000, solamente il 3 e il 487 verificano contemporaneamente le congruenze

$$10^{n_1} \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\ \alpha)\ \text{e}\ (\mathrm{mod}\ \alpha^2).$$

Riassumendo, risulta che « se $b = \alpha^h . \beta^k \ldots$, *il corrispondente valore di* n *sarà sempre dato dal minimo multiplo comune dei vari prodotti* $n_1 \alpha^{h-s}$, $n_2 \beta^{k-t} \ldots$, *che separatamente si ricavano da* α^h, $\beta^k \ldots$ »; epperò in seguito supporremo sempre che b sia uguale a un numero primo p differente dal 2 e dal 5.

4. Teorema. — *Il valore di* n, *che corrisponde a un numero primo* p, *è dato dal quoto di* $p-1$ *per il massimo comun divisore di* $p-1$ *e dell'indice di 10 rispetto al modulo* p.

I numeri r, pei quali $p-1$ è il primo valore dell'esponente, per cui si abbia $r^h \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$ si chiamano *radici primitive* di p, e hanno la proprietà di dare un sistema di $p-1$ resti incongrui per tutti i valori da 1 a $p-1$ dell'esponente; esiste pertanto un numero x (indice di 10 rispetto alla base r), per il quale si ha

(3) $$r^x \equiv 10 \qquad (\mathrm{mod}\ p).$$

Elevando alla potenza n, si ha

$$r^{xn} \equiv 10^n \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\ p);$$

e dovendo essere xn = multiplo di $p-1$, il valore di n sarà dato dal quoto $\frac{p-1}{m}$, dove m è il m. c. d. di $p-1$ e x. Così il problema che ci eravamo proposti è completamente risoluto servendoci *d'una tavola delle radici primitive e degli indici dei numeri primi*; in essa ritroveremo subito se il 10 è o no radice primitiva di p; nel primo caso

$$n = p - 1;$$

nel secondo caso, calcolato il m. c. d. m di $p-1$ e dell'*indice di 10*, si ha

$$n = \frac{p-1}{m}.$$

Osservazione. — Indipendentemente dalle *tavole* ora nominate, poco diffuse e sempre abbastanza ristrette, in moltissimi casi si possono stabilire dei criteri per avere il valore di n o almeno la forma di questo numero, come vedremo in seguito. Del resto per numeri p che non si trovino in dette tavole, si può ottenere agevolmente il corrispondente valore di n, operando per congruenze e tenendo conto della proprietà fondamentale, per la quale sappiamo che in questo caso n deve essere un divisore di $p-1$.

5. Teorema. — *Per numeri primi della forma*

$8K \pm 3$	e *terminati per* 1 *ovvero per*	9
$8K \pm 1$	» » 3 »	7

il corrispondente valore di n *è sempre pari.*

Ripigliamo la relazione (3)

$$r^x \equiv 10 \qquad (\text{mod } p),$$

e supponiamo

$$10^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \qquad (\text{mod } p),$$

ammettiamo cioè che il 10 sia *non residuo quadratico di p*, ciò che il Legendre esprimeva simbolicamente coll'eguaglianza $\left(\frac{10}{p}\right) = -1$. Elevando la (3) alla potenza $\frac{p-1}{2}$, si ha

$$r^{x.\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \qquad (\text{mod } p),$$

e questa congruenza non potrebbe sussistere, se fosse x divisibile per 2, perchè in tale ipotesi il 2° membro deve essere 1; pertanto essendo x dispari, $x.n$ multiplo di $p-1$, e quindi pari, sarà n numero pari, ed anzi avrà per fattore la massima potenza di 2 contenuta in $p-1$; da ciò concludiamo: *n è sempre pari in tutti i casi in cui il 10 è non residuo quadratico di* p.

È facile ora determinare la forma di tutti i numeri p di cui il 10 è *non residuo*, servendoci delle proprietà del simbolo di Legendre. Nel nostro caso abbiamo

$$\left(\frac{10}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{5}{p}\right) = -1.$$

Ricordiamo inoltre che

$$\left(\frac{2}{p}\right) = 1 \quad \text{se } p \text{ è della forma } 8K \pm 1,$$
$$\left(\frac{2}{p}\right) = -1 \quad \text{»} \qquad \text{»} \qquad 8K \pm 3;$$

di più per la legge di reciprocità

$$\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right) = \left(\frac{\alpha}{5}\right),$$

ove α è il resto della divisione di p per 5, ove cioè α è la cifra delle unità di p, diminuita, se occorre, di 5. Quando il valore di α è 1 ovvero 4, ossia quando p termina per 1 ovvero per 9

$$\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{4}{5}\right) = 1;$$

se poi α è 2 ovvero 5, cioè quando p termina per 7 ovvero per 3, si ha

$$\left(\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right) = -1;$$

tanto che

$$\left(\frac{5}{p}\right) = 1 \quad \text{quando } p \text{ termina per 1 ovvero per 9}$$
$$\left(\frac{5}{p}\right) = -1 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 3 \quad \text{»} \quad 7.$$

Combinando tra loro i resultati ottenuti, relativi a $\left(\frac{2}{p}\right)$ e a $\left(\frac{5}{p}\right)$, concludiamo che si avrà $\left(\frac{10}{p}\right) = -1$, ossia che il valore di n sarà pari, quando il numero p soddisfa all'una o all'altra delle condizioni poste nel teorema.

Osservazione. — È importante per la pratica riconoscere *a priori* quando n è pari, perchè in tal caso trovato il 1° semiperiodo decimale corrispondente alla frazione $\frac{a}{b}$, l'altro semiperiodo è formato colle cifre complementari, rispetto a 9, delle antecedenti. (Vedi Mem. citata.)

6. *Classi di numeri* p *pei quali si ha* n = p − 1. — Tra i numeri considerati nel teorema antecedente, e tra essi soltanto, vi saranno certamente quelli per cui $n = p - 1$, tali cioè che hanno per radice primitiva il 10, e che quindi danno luogo al massimo valore di n possibile. Se ne possono trovare alcune classi molto semplicemente:

1° Ai numeri primi di Gauss maggiori di 5, dati dalla formula $p = 2^h + 1$, dove h è una potenza di 2 deve corrispondere $n = p - 1$, perchè, come sopra s'è detto, n deve essere divisibile per la massima potenza di 2 contenuta in $p - 1$; questi numeri p finora conosciuti sono: 17, 257, 65537.

2°. Se p è della forma voluta, ed è uguale a $2p_1 + 1$, con p_1 primo, si avrà sempre

$$n = 2p_1 = p - 1$$

tranne il caso di $p = 11$, unico numero che verifichi la congruenza $10^2 \equiv 1 \pmod{p}$.

Si trovano in queste condizioni i numeri

$$59,\ 167,\ 179,\ 263,\ 383 \ldots\ldots 863, \text{ etc.}$$

3°. Qualunque sia il numero primo p_1, purchè terminato per 7, se si ha

$$p = 4p_1 + 1,$$

si avrà pure in ogni caso $n = p - 1$, perchè nessun numero p di questa forma verifica la congruenza

$$10^4 \equiv 1 \pmod{p};$$

Esempi: Da

$$p_1 = 7,\ 37,\ 67,\ 97 \ldots\ldots$$

si ottiene

$$p = 29,\ 149,\ 269,\ 389 \ldots\ldots$$

Nessun altro numero p_1 che termini con cifra differente da 7 può dare di tali numeri p, perchè $4p_1 + 1$ risulterebbe della forma $8K - 3$ e terminato per 3 ovvero per 7.

4°. In generale i numeri primi terminati per 3 ovvero per 7 e della forma $2^h p_1 + 1$, con $h > 2$ e p_1 primo, avranno per radice primitiva il 10, ad eccezione di quei pochi che potessero verificare la congruenza

$$10^{2^h} \equiv 1 \pmod{p}$$

e fossero della forma voluta.

Così per es. 233, 857 etc. e tutti gli altri della forma $2^3 p_1 + 1$ hanno sempre per radice primitiva il 10, ad eccezione del 137, unico per cui si abbia

$$10^8 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Lo stesso dicasi dei numeri della forma $2^4 p_1 + 1$, nessuno dei quali, eccettuato il 17, verifica la congruenza

$$10^{16} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Per es. 113, 593, 977, 1553, etc.

Osservazione. — Siccome i numeri p delle classi ora considerate non possono terminare che per una delle cifre 3, 7, 9, s'intende come siano poco frequenti i numeri terminati per 1, e che hanno il 10 per radice primitiva; i primi che si trovano sono 61, 131, 181, 461.

7. *Condizione necessaria e sufficiente perchè* n *sia dispari.* — Le condizioni sufficienti stabilite nel § 5, affinchè n sia pari, non sono tuttavia necessarie, tanto che n può esser pari anche in altri casi. Prendiamo perciò a considerare i numeri primi p, che hanno il 10 per residuo quadratico; quanto alla loro forma, per quel che s'è detto al § 5, dovrà essere

(4) $p = 8\text{K} \pm 1$ e terminato per 1 ovvero per 9
$p = 8\text{K} \pm 3$ » » 3 » 7,

e noi sappiamo solamente che per essi deve aversi

$$10^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

In tale ipotesi, quando $p = 2d + 1$, con d dispari, anche n è certamente dispari, e per di più se d è primo si ha addirittura $n = d$; per es. da $p = 107, 227, 3119 \ldots$ abbiamo senz'altro $n = 53, 113, 1559 \ldots$; ma quando $p = 2^h d + 1$ con $h > 1$, può benissimo il valore di n esser pari come avviene pei numeri:

$$p = \begin{cases} 13,\ 197,\ 293 \ldots\ldots & \text{della forma } 4d + 1 \\ 89,\ 281,\ 2521 \ldots\ldots & \text{»} \quad 8d + 1 \\ 241,\ 1009 \ldots\ldots & \text{»} \quad 16d + 1 \text{ etc.} \end{cases}$$

E difatti per avere n dispari non basta che sia il 10 residuo quadratico di p, ma, come sappiamo, deve essere almeno residuo d'ordine 2^h, dove 2^h è la massima potenza di 2 contenuta in $p - 1$; si riconosce poi, che quest'ultima condizione è anche sufficiente, ma quando non è soddisfatta ancora per numeri della forma (4) si ha che n è pari. Spetta alla teoria generale dei residui determinare con *metodi facilmente applicabili* le condizioni per le quali il 10 è un residuo d'ordine 2^h dei numeri $p = 2^h d + 1$;

risoluta questa quistione ben s' intende il vantaggio che se ne può trarre, quando si pensi che i pochi resultati, che siamo venuti accennando, sono stati ricavati dal considerare il 10 come *residuo* o *non residuo quadratico*.

8. *Tavola dei valori di* n *corrispondenti ai numeri primi sino a 277:*

p	n	p	n	p	n
3	1	79	13	179	178
7	6	83	41	181	180
11	2	89	44	191	95
13	6	97	96	193	192
17	16	101	4	197	98
19	18	103	34	199	99
23	32	107	53	211	30
29	28	109	108	223	222
31	15	113	112	227	113
37	3	127	42	229	228
41	5	131	130	233	232
43	21	137	8	239	7
47	46	139	46	241	30
53	13	149	148	251	50
59	58	151	75	257	256
61	60	157	78	263	262
67	33	163	81	269	268
71	35	167	166	271	5
73	8	173	43	277	69

L'opportunità di avere una tavola abbastanza estesa dei valori di n sarà sufficientemente spiegata dalle seguenti

Applicazioni: 1° Vogliasi trovare il numero n corrispondente a

$$b = 113778 = 2 \,.\, 3^3 \,.\, 7^2 \,.\, 43\,;$$

prescindiamo dal fattore 2 di b e sotto gli altri scriviamo i valori $n_1 \alpha^{h-a}$ corrispondenti (V. § 3), con l'avvertenza che $10 \equiv 1 \pmod{3^2}$

$$\begin{array}{ccc} 3^3 & 7^2 & 43 \\ 3 & 6\,.\,7 & 21; \end{array}$$

ora essendo 42 il m. m. c. di questi ultimi numeri sarà $n = 42$.

2°. Serviamoci dei valori di n per scomporre in fattori primi le espressioni della forma $10^h \pm 1$; per es. $10^{16} - 1$: scriviamo in una riga tutti i divisori del 16, e sotto di essi i numeri p corrispondenti quali si trovano nella tavola superiore

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3^2 & 11 & 101 & 73\,.\,137 & 17. \end{array}$$

Il prodotto di questi fattori, eccettuato il 17, dà $10^8 - 1$, epperò gli altri divisori richiesti, tra cui il 17, si avranno da $10^8 + 1$ e saranno tutti della forma $16k + 1$; fatto quest'ultimo calcolo, finalmente otteniamo:

$$10^{16} - 1 = 3^2 . 11 . 17 . 73 . 101 . 137 . 5882353.$$

Il caso ora presentatosi, in cui i divisori di $10^8 + 1$ sono tutti della forma $16k + 1$, vale soltanto quando l'esponente di 10 è una potenza di 2; ma in generale per la scomposizione di $10^h + 1$ dovremo ricercare tutti i numeri p che corrispondono a $n = 2^s d$, dove 2^s indica la massima potenza di 2 contenuta in $2h$, e d ognuno dei divisori dispari di h, l'unità compresa; infatti dovendosi scomporre $10^{2h} - 1 = (10^h - 1)(10^h + 1)$, tutti i fattori primi di quest'espressione si avranno in corrispondenza dei vari divisori di $2h$, i quali si possono ordinare in due gruppi: se poniamo nel primo gruppo tutti i divisori di h, nel secondo vi rimarranno soltanto quelli della forma $2^s d$; e perchè ai numeri del primo gruppo corrispondono tutti i fattori primi di $10^h - 1$, dovranno necessariamente ai numeri del secondo gruppo corrispondere i fattori primi di $10^h + 1$, i quali pertanto saranno della forma $p = 2^s dk + 1$. Abbiasi pur es. $10^9 + 1$:

$$\begin{array}{llll} n = & 2, & 6, & 18 \\ p = & 11 & 7 . 13 & 19 \end{array}$$

e quindi

$$10^9 + 1 = 7 . 11 . 13 . 19 . 52579.$$

Osimo, novembre 1896.

B. Bettini

CORDE NOTEVOLI DEL TRAPEZIO

1. Prendiamo a considerare un trapezio qualunque AA'BB', le cui basi AA', BB' indicheremo risp. con a e b $(a \geqq b)$. Diremo, per brevità, corda u un segmento EE' parallelo alle basi e terminato ai lati obliqui. Congiunti coi vertici i due punti F e F', nei quali la corda è segata dalle diagonali del trapezio, verranno determinati sulle due basi rispettivamente due punti D e D' e altri due C, C'. È chiaro intanto che essendo:

$$EF : AA' = E'F' : AA'$$

sarà $EF = E'F'$, e quindi anche $EF' = E'F$. Ne segue subito che sarà $AD = A'D' = x$, e $BC = B'C' = y$.

Conducendo poi da un estremo della corda la parallela a un lato obliquo, e dicendo h_a, h_b le distanze che essa ha dalle basi, si rendono evidenti le proporzioni:

$$\text{(I)} \qquad a - u : u - b = h_a : h_b = x : b = a : y$$

Confrontando il primo rapporto col terzo e col quarto rispettivamente, se ne deduce

$$\text{(II)} \qquad u = \frac{b\,(a + x)}{b + x} = \frac{a\,(b + y)}{a + y};$$

e confrontando il terzo col quarto,

$$\text{(III)} \qquad xy = ab.$$

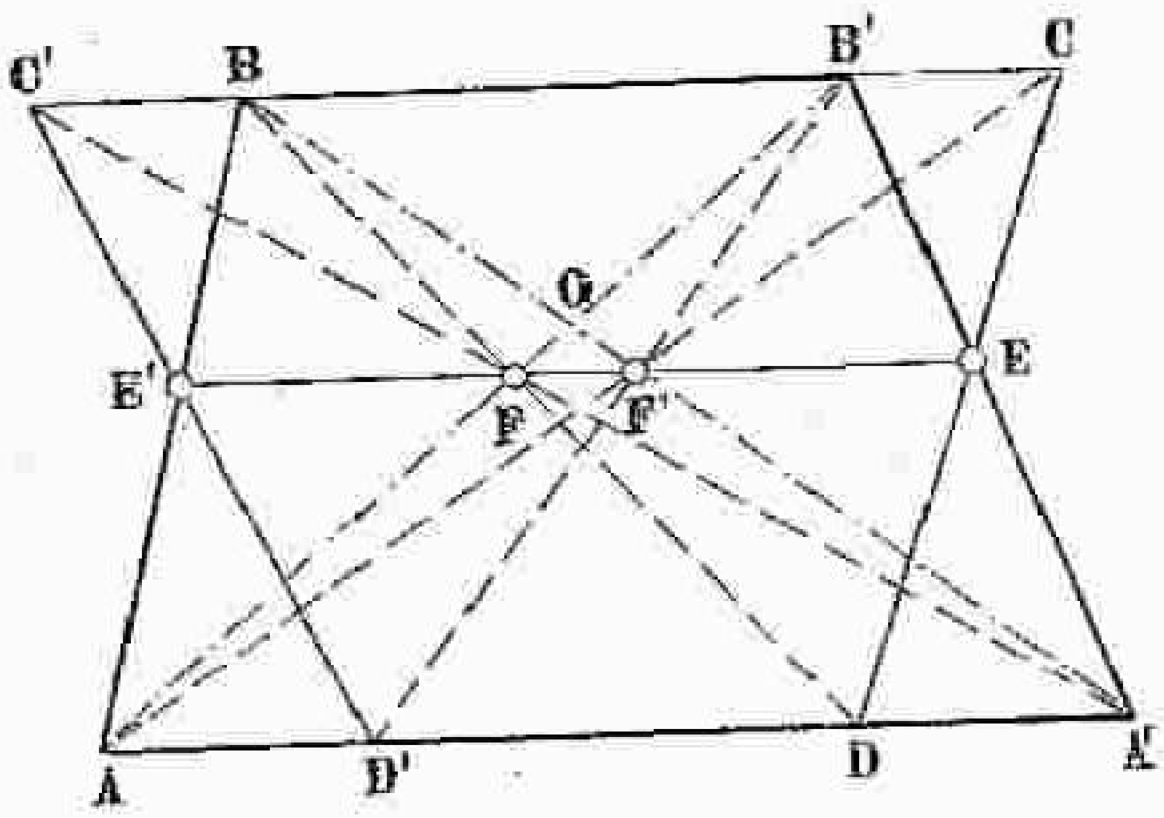
Quest'ultima eguaglianza potendosi anche scrivere

$$a : x = y : b,$$

dà, a causa della (I)

$$a - x : y - b = x : b = h_a : h_b.$$

E se ne deduce che i triangoli A'DE, B'CE sono simili, epperò che D, E, C sono per diritto. Saranno parimente per diritto D', E' C'.



Otteniamo in tal modo due trapezi ABCD, A'B'C'D', che per un momento diciamo *annessi* al dato, l'area dei quali sta all'area del dato nel rapporto $\dfrac{x + y}{a + b}$.

2. Diremo simmetrica di u la corda u' che dista da una base quanto u dista dall'altra. Per la (I) si ha

$$a - u : u - b = u' - b : a - u',$$

onde

$$\text{(IV)} \qquad u + u' = a + b.$$

Due corde simmetriche hanno quindi somma costante. Dalla (I), e precisamente dalla $h_a : h_b = x : b$, si ricava che le x di due corde simmetriche hanno costantemente il prodotto b^2. Analogamente si prova che le y hanno costantemente prodotto $= a^2$.

Si diranno invece *coniugate* due corde che hanno costantemente il prodotto $= ab$.

3. Vediamo anzitutto quando avvenga che i trapezi annessi equivalgono al dato. Occorrerà a tal uopo che $x + y$ sia $= a + b$. Ora essendo già, per la (III), $xy = ab$, dovrebbe essere $x = a$, $y = b$, oppure $x = b$, $y = a$.

Nel primo caso i trapezi annessi vengono a coincidere col dato, i punti F e F' coincidono in O, e la corda passa quindi per il punto d'incontro delle diagonali, ed è ivi dimezzata. Oltre a ciò avendosi

$$a - u : u - b = a : b,$$

la u risulta media armonica fra a e b, epperò eguale a $\frac{2\,ab}{a+b}$. (*)

Nel secondo caso avendosi dalla (I) $h_a = h_b$, la corda passa a eguale distanza dalle basi. Oltre a ciò, poichè $a - u = u - b$, sarà $u = \frac{a+b}{2}$, cioè u è media aritmetica fra a e b, cosa del resto notissima.

Se infine si pone la condizione che uno, epperò anche l'altro trapezio annesso diventi un parallelogrammo, dovendo allora essere $x = y = \sqrt{ab}$, per la (III), si vede che la corda risulterebbe eguale alla base di questi parallelogrammi stessi, epperò alla *media geometrica* fra a e b.

4. Rispetto alle corde simmetriche osserviamo anzitutto che la simmetrica di sè stessa è per la (IV) $= \frac{a+b}{2}$, cioè la *media aritmetica* fra le basi, il che è noto. La simmetrica invece della corda u, che soddisfa alla $a - u : u - b = a : b$, cioè della *media armonica*, soddisfarà alla $a - u' : u' - b = b : a$, essendo il rapporto $a - u' : u' - b$ eguale a quello delle distanze fra la u' e le basi. Ciò è quanto dire che la u' sarà eguale alla *media antiarmonica* $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ fra le basi.

Rispetto invece alle corde coniugate si vede subito dalla definizione data, che la coniugata di sè stessa è $\sqrt{ab}$, cioè la *media geometrica;* e la coniugata della *media aritmetica* è la *media armonica.*

5. Abbiamo così trovato quattro corde, già notevoli per altre loro proprietà, le quali servono a rappresentare in modo affatto intuitivo le quattro medie fra a e b, cioè l'*armonica* $\frac{2\,ab}{a+b}$, la *geometrica* $\sqrt{ab}$, l'*aritmetica* $\frac{a+b}{2}$, e l'*antiarmonica* $\frac{a^2+b^2}{a+b}$.

(*) Detta f una delle due parti eguali in cui la corda armonica è divisa da O, si avrebbe $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ che è la nota formola delle lenti. E si ha così la costruzione grafica che il Sig. *Cole* ha dato recentemente nella sua nota, *Nuovo metodo grafico per le lenti*, inserita nel Philosophical Magazine (vol. 41, Marzo 1896 — Vedi *Nuovo Cimento* — luglio 1896). Analoga costruzione si avrebbe per gli specchi.

Queste notizie, che mi pare aggiungono interesse all'argomento, devo alla cortesia dell'amico Prof. Gressi.

L'*armonica* è quella corda che passa per O, l'*antiarmonica* è la sua simmetrica, l'*aritmetica* è la simmetrica di sè stessa (quella che passa a egual distanza dalle basi), e la *geometrica* è quella che eguaglia la propria x e la propria y, e cioè quella per la quale i trapezi annessi al dato divengono parallelogrammi.

Il trapezio permette quindi di costruire immediatamente le prime tre medie, e dà di tutte e quattro una rappresentazione geometrica che rende evidenti molte loro proprietà.

Così per $a > b$ essendo chiaro che la corda è tanto più grande quanto più si accosta alla a, ossia quanto più piccolo è il rapporto $h_a : h_b = x : b$, epperò quanto più piccola è la x, le *predette medie armonica, geometrica, aritmetica, antiarmonica si susseguono in ordine crescente.* Per la prima è infatti (vedi n. 3) $x = a$, per la seconda è $x = \sqrt{ab}$, per la terza $x = b$, che evidentemente si susseguono in ordine decrescente. La quarta, poi essendo simmetrica della prima, sarà la più vicina alla base maggiore epperò la più grande di tutte.

È reso inoltre chiaro che queste medie sono comprese fra a e b, e si riducono tutte eguali nel caso lo fossero due di esse, e conseguentemente anche a e b.

Si vede ancora che, poichè le due corde armonica e antiarmonica passano a egual distanza dall'aritmetica, la *media aritmetica fra* a *e* b *lo è anche fra le due medie armonica e antiarmonica fra le stesse* a *e* b.

6. Consideriamo ora altre corde notevoli.

Cominciamo dalla baricentrale. Per essa è notoriamente

$$h_a : h_b = 2b + a : 2a + b$$

e si ricava subito dalla (I) che la sua lunghezza è $\frac{2}{3} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$.

Calcoliamo ora la corda mediana, quella cioè che divide a metà il trapezio.

È chiaro intanto che le due parti, in cui una corda qualunque u divide il trapezio, hanno per la (I) il rapporto $\frac{(a + u)h_a}{(b + u)h_b} = \frac{(a + u)(a - u)}{(b + u)(u - b)} = \frac{a^2 - u^2}{u^2 - b^2}$. Perchè queste due parti sieno equivalenti occorre che sia $a^2 - u^2 = u^2 - b^2$, onde $u^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$. *Il quadrato della corda mediana è quindi media aritmetica fra i quadrati delle basi.*

La corda invece che divide il trapezio in due parti, che stanno fra loro come $b^2 : a^2$, ha per quadrato $a^2 + b^2$. *Essa è quindi l'ipotenusa del triangolo di cui* a *e* b *sono i cateti.*

Vi sono poi altre due corde importanti: quelle divise in 3 parti eguali dalle diagonali, e che si ottengono quando sia $x = \frac{a}{2}$ oppure

$y = \frac{b}{2}\cdot$ Esse sono quindi rispettivamente eguali a $\frac{3\,ab}{a+2b}$ e $\frac{3\,ab}{2a+b}$. Si noti che esse stanno fra loro come $2a+b:2b+a$, cioè come le distanze che il centro di gravità del trapezio ha dalle basi. Si osservi ancora che le loro coniugate sono $\frac{a+2b}{3}$, $\frac{2b+a}{3}$, le quali alla loro volta sono tra loro simmetriche, e dividono in 3 parti eguali l'altezza. Esse infatti si ottengono dalla (I) facendo $x:b=2$ oppure $x:b=\frac{1}{2}\cdot$ Si può anche dire che *le due corde che dividono in 3 parti eguali le diagonali sono coniugate delle due che dalle diagonali stesse sono divise in 3 parti eguali.*

7. Può giovare in certi casi di esprimere la u per mezzo del rapporto r fra h_a e h_b, ossia dalle due parti in cui essa divide la diagonale (o i lati obliqui). Avendo allora $\frac{a-u}{u-b}=r$, si avrebbe $u=\frac{a+br}{1+r}\cdot$

Se in particolare si pone $r=\frac{a^n}{b^n}$, si ha $u=\frac{ab\,(a^{n-1}+b^{n-1})}{a^n+b^n}\cdot$ Per $n=1$ si trova la corda armonica, per $n=0$ si ha l'aritmetica, per $n=\frac{1}{2}$ si ha la geometrica, per $n=-\frac{1}{2}$ si ha $u=\frac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}=a+b-\sqrt{ab}$ epperò la simmetrica della media geometrica.

Per $r=2$ oppure $=\frac{1}{2}$ si ritrovano le due corde che dividono in 3 parti eguali l'altezza del trapezio; per $r=1$ si ritrova la media aritmetica, ecc.

8. Se si fa $a=b$ il trapezio diventa un parallelogrammo, e tutte le medie risultano eguali, come fu detto.

Se si fa $b=0$, il trapezio diventa un triangolo, e le quattro medie diventano 0, 0, $\frac{a}{2}$, a; la corda media diventa $\sqrt{\frac{a^2}{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ e la baricentrale $\frac{2a}{3}$, cose notissime.

Alessandria, 31 dicembre 1896.

V. MURER.

Sullo sviluppo del seno e del coseno della somma di n archi

Nel trattato di Trigonometria del Serret, a pag. 42 della traduzione italiana del Prof. Grassi (Torino, Fratelli Bocca 1893) trovasi una nota del traduttore, nella quale è detto: “ Le formule generali “ che esprimono il seno ed il coseno della somma di un numero m di “ archi, in funzione dei seni e dei coseni di questi archi, è stata tro- “ vata dal Prof. E. De Angelis, che ne esponeva la ricerca diretta “ negli annali del R. Istituto tecnico e nautico di Napoli (anno 1885). “ Presentando qui appresso queste formule, colmeremo un vuoto, il “ quale si ravvisa in tutti i trattati di Trigonometria pubblicati fin “ oggi ”.

Anzitutto credo doveroso di notare che le formule in questione erano conosciute molto tempo prima della pubblicazione del Professore De Angelis. E infatti esse possono riscontrarsi alla pag. 164-165 del *Lehrbuch der ebenen und sphärischen trigonometrie* di *I. H. T. Müller* (*Halle, verlag der Buchandlung des Waisenhauses, 1852*). In quest'ultimo trattato, per altro, le formule, predette non sono veramente dimostrate, ma piuttosto *concluse induttivamente* da quelle che esprimono lo sviluppo del seno e del coseno della somma di 2, 3 e 4 archi.

Mi propongo con questa nota, di dare una dimostrazione delle medesime formule, seguendo una via alquanto diversa da quella tenuta dal Prof. De Angelis, e che, se non vado errato, mi pare che abbia il vantaggio di una maggiore facilità, e semplicità, e di condurre contemporaneamente alla dimostrazione delle due formule.

Le formule che si tratta di dimostrare sono le seguenti:

$$(1)\quad \text{sen}\,(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = + \Sigma\, \text{sen}_1 \cos_{n-1} - \Sigma\, \text{sen}_3 \cos_{n-3} + \\ + \Sigma\, \text{sen}_5 \cos_{n-5} - \dots + (-1)^p\, \Sigma\, \text{sen}_{2p+1} \cos_{n-(2p+1)} \dots,$$

$$(2)\quad \cos\,(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = + \cos_n - \Sigma \cos_{n-2}\, \text{sen}_2 + \\ + \Sigma \cos_{n-4}\, \text{sen}_4 - \dots + (-1)^p\, \Sigma \cos_{n-2p}\, \text{sen}_{2p} \dots,$$

ove in generale col simbolo $\Sigma\, \text{sen}_r \cos_{n-r}$ si vuole indicare la somma di tutti i prodotti di n fattori, r dei quali sono i *seni* di altrettanti archi scelti in tutti i modi possibili fra gli n considerati, e $n-r$ sono i *coseni* di tutti gli archi rimanenti. Si osservi poi che nel primo sviluppo ogni termine contiene *sempre un numero dispari di seni,* e il segno di ciascun termine è $+$ o $-$ secondochè quel numero dispari è un multiplo di 4 più o meno 1. Nel secondo sviluppo, invece, ogni termine contiene *sempre un numero pari di seni*, e il segno di ciascun termine è + o — secondochè quel numero dispari è o no un multiplo di 4.

Ciò premesso, è facile dimostrare che lo sviluppo (2) è conseguenza necessaria dello sviluppo (1).

Infatti, se uno qualunque degli n archi dati, per es. a_s, viene cambiato nel respettivo complemento, e tutti gli archi rimanenti si cambiano solamente di segno, il primo membro della (1) diviene:

$$\text{sen}\left\{-a_1-a_2\ldots-a_{s-1}+\left(\frac{\pi}{2}-a_s\right)-a_{s+1}-\ldots-a_n\right\}=$$
$$=\text{sen}\left\{\frac{\pi}{2}-(a_1+a_2\ldots+a_{s-1}+a_s+a_{s+1}\ldots+a_n)\right\}=$$
$$=\cos\left\{a_1+a_2+a_3\ldots+a_n\right\}.$$

Quanto al secondo membro osserviamo che, dopo avervi effettuato i cambiamenti accennati, ogni termine della somma

$(-1)^p\,\Sigma\,\text{sen}_{2p+1}\cos_{n-(2p+1)}$ verrà a contenere o $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-a_s\right)$ o $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a^s\right)$. Nel primo caso quel termine perde un seno, acquista un coseno, e subisce $2p$ cambiamenti di segno. Nel secondo caso, invece, perde un coseno, acquista un seno, e subisce $2p+1$ cambiamenti di segno. Ossia un termine qualunque $(-1)^p\,\text{sen}_{2p+1}\cos_{n-(2p+1)}$ dello sviluppo (1) si trasforma, per effetto dei cambiamenti predetti, o nel termine

$$\left\{(-1)^p\,\text{sen}_{2p}\cos_{n-2p}\right\}(-1)^{2p}=(-1)^p\,\text{sen}_{2p}\cos_{n-2p}\quad,$$

oppure nell'altro

$$\left\{(-1)^p\,\text{sen}_{2p+2}\cos_{n-(2p+2)}\right\}(-1)^{2p+1}=(-1)^{p+1}\,\text{sen}_{2(p+1)}\cos_{n-2(p+1)}.$$

E poichè quest'ultimo termine è della stessa forma del precedente, possiamo dire che in ogni caso si giunge ad un termine, che contiene *sempre un numero pari di seni*, e che ha il segno + o — secondochè questo numero pari è o no multiplo di 4. Ora tutti i termini di questa specie appartengono allo sviluppo (2); dunque possiamo concludere che lo sviluppo (2) è conseguenza dello sviluppo (1).

Dopo ciò basterà limitarci alla dimostrazione della sola formula (1), e per far questo (ritenendo come verificato lo sviluppo pel caso di due archi) seguiremo il metodo di conclusione da n a $n+1$. Considerando dunque $n+1$ archi avremo

$$\text{sen}\left\{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}\right\}=\text{sen}\left\{(a_1+a_2\ldots+a_n)+a_{n+1}\right\}=$$
$$=\text{sen}\,(a_1+a_2+\ldots+a_n)\cos a_{n+1}+\cos(a_1+a_2+\ldots+a_n)\,\text{sen}\,a_{n+1}.$$

Ossia limitandoci a considerare i soli termini generali degli sviluppi, avremo, per quanto è stato ammesso e dimostrato,

$$\text{sen}\left\{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}\right\}=\cos a_{n+1}\,(-1)^p\,\Sigma\,\text{sen}_{2p+1}\cos_{n-(2p+1)}+$$
$$+\,\text{sen}\,a_{n+1}\,(-1)^p\,\Sigma\cos_{n-2p}\,\text{sen}_{2p}\,.$$

Ora è facile riconoscere che ogni termine del 2° membro è un prodotto di $n+1$ fattori, tra i quali si trova sempre *un certo numero dispari di seni*, associati *con i coseni di tutti gli archi rimanenti*. Si riconosce pure che il segno di ciascun termine è positivo o negativo secondochè il numero dei fattori *seno* è un multiplo di 4 più o meno uno. Inoltre la prima parte del 2° membro ci dà tutti i termini in cui l'$(n+1)^{mo}$ arco, ossia a_{n+1}, apparisce come *fattore coseno;* complessivamente le due parti forniscono quindi tutti i termini della forma

$$(-1)^p \Sigma \operatorname{sen}_{2p+1} \cos_{(n+1)-(2p+1)},$$

che è il termine generale dello sviluppo di sen $(a_1 + a_2 \ldots . a_n + a_{n+1})$. Ma questo termine è della stessa forma di quello dello sviluppo (1); possiamo dunque concludere che lo sviluppo, essendo vero pel caso di n archi, è altresì vero pel caso di $(n+1)$ archi, e quindi è vero in generale.

Corollario I. — Se nel secondo membro dell'espressione,

$$\operatorname{tang}(a_1 + a_2 \ldots . + a_n) = \frac{\operatorname{sen}(a_1 + a_2 \ldots . + a_n)}{\cos(a_1 + a_2 \ldots . + a_n)}$$

sostituiamo gli sviluppi forniti dalle (1) e (2), e dividiamo poi numeratore e denominatore per $\cos_n$, si trova

$$(3) \quad \operatorname{tang}(a_1 + a_2 \ldots . + a_n) = \frac{\Sigma \operatorname{tang}_1 - \Sigma \operatorname{tang}_3 + \Sigma \operatorname{tang}_5 - \Sigma \operatorname{tang}_7 + \ldots .}{1 - \Sigma \operatorname{tang}_2 + \Sigma \operatorname{tang}_4 - \Sigma \operatorname{tang}_6 + \ldots .}.$$

In modo analogo si ottiene:

$$(4) \quad \cot(a_1 + a_2 + \ldots . + a_n) = \frac{\cot_n - \Sigma \cot_{n-2} + \Sigma \cot_{n-4} - \Sigma \cot_{n-6}}{\Sigma \cot_{n-1} - \Sigma \cot_{n-3} + \Sigma \cot_{n-5} - \Sigma \cot_{n-7}},$$

che può dedursi anche dalla precedente, scambiando i due membri nei loro inversi, dividendo numeratore e denominatore per $tang_n$ e sostituendo infine la cotangente a $\frac{1}{\text{tangente}}$.

Se nelle espressioni

$$\sec(a_1 + a_2 \ldots . + a_n) = \frac{1}{\cos(a_1 + a_2 + \ldots . + a_n)}$$

$$\operatorname{cosec}(a_1 + a_2 \ldots . + a_n) = \frac{1}{\operatorname{sen}(a_1 + a_2 + \ldots . + a_n)}$$

sostituiamo, nei secondi membri, gli sviluppi (1) e (2), e dividiamo poi numeratore e denominatore di ciascuna espressione pel prodotto $\operatorname{sen}_n \cos_n$ si ottiene dopo aver sostituito *cosecante* e *secante* rispettivamente a $\frac{1}{\operatorname{sen}}$ e a $\frac{1}{\cos}$,

$$(5) \quad \sec(a_1 + a_2 + \ldots . + a_n) = \frac{\sec_n \operatorname{cosec}_n}{\operatorname{cosec}_n - \Sigma \operatorname{cosec}_{n-2} \sec_2 + \Sigma \operatorname{cosec}_{n-4} \sec_4 - \ldots .},$$

$$(6) \quad \operatorname{cosec}(a_1 + a_2 \ldots a_n) = \frac{\sec_n \operatorname{cosec}_n}{\Sigma \sec_1 \operatorname{cosec}_{n-1} - \Sigma \sec_2 \operatorname{cosec}_{n-2} + \Sigma \sec_3 \operatorname{cosec}_{n-3} - \ldots .}$$

Nelle quattro formule precedenti, tang_r, $\cot_r$, $\sec_r$, cosec_r hanno un significato analogo a quello che abbiamo stabilito in principio per sen_r e $\cos_r$.

Corollario II. — Le formule (1), (2), (3), (4), (5), (6), per

$$a_1 = a_2 = a_3 \dots \qquad = a_n = a,$$

divengono rispettivamente:

$$\operatorname{sen} na = \sum (-1)^p \binom{n}{2p+1} \operatorname{sen}^{2p+1} a \,.\, \cos^{n-(2p+1)} a \tag{1'}$$

$$\cos na = \sum (-1)^p \binom{n}{2p} \operatorname{sen}^{2p} a \cos^{n-2p} a \tag{2'}$$

$$\operatorname{tang} na = \frac{\sum (-1)^p \binom{n}{2p+1} \operatorname{tang}^{2p+1} a}{\sum (-1)^p \binom{n}{2p} \operatorname{tang}^{2p} a} \tag{3'}$$

$$\cot na = \frac{\sum (-1)^p \binom{n}{2p} \cot^{n-2} a}{\sum (-1)^p \binom{n}{2p+1} \cot^{2p+1} a} \tag{4'}$$

$$\sec na = \frac{\sec^n a \operatorname{cosec}^n a}{\sum (-1)^p \binom{n}{2p} \sec^{2p} a \operatorname{cosec}^{n-2p} a} \tag{5'}$$

$$\operatorname{cosec} na = \frac{\sec^n a \operatorname{cosec}^n a}{\sum (-1)^p \binom{n}{2p+1} \sec^{2p+1} a \operatorname{cosec}^{n-(2p+1)} a}. \tag{6'}$$

Dalla semplice ispezione delle formule precedenti si ricava:

1°. Che *sen na* non può *mai* esprimersi razionalmente per $\cos a$; ma può esprimersi razionalmente per $\operatorname{sen} a$ tutte le volte che n è un numero dispari.

2°. Che *cos na* è *sempre* esprimibile razionalmente per $\cos a$, mentre non può esserlo per il seno, se n non è un numero pari.

3°. Che *sec na* è *sempre* esprimibile razionalmente per *sec a*, mentre non può esserlo per la cosecante, se n non è un numero pari.

4°. Che *cosec na* non può *mai* esprimersi razionalmente per *cos a*; ma può esprimersi razionalmente per *cosec a* tutte le volte che n è un numero dispari.

I resultati 3° e 4° si deducono rispettivamente dal 2° e 1°, scambiando *seno* e *coseno* in *cosecante* e *secante*, ciò che del resto poteva facilmente prevedersi a causa delle relazioni $\operatorname{sen} a = \frac{1}{\operatorname{cosec} a}$, $\cos a = \frac{1}{\sec a}$.

A. Andreini.

SULLA QUISTIONE 324*

La quistione 324* da me proposta nel volume dell'anno 1896 di questo *Periodico* può essere risoluta, con l'intervento di considerazioni geometriche, in una maniera abbastanza elegante, dalla quale maniera apparirà che le formole, di cui in questa questione si discorre, sono le formole di una interessante trasformazione quadratica (doppia) dello spazio. Rammentiamo che si tratta di mostrare come, risolvendo rispetto alle u, v, w, le equazioni

$$(1)\quad \begin{cases} u' = \dfrac{\lambda(-u^2+v^2+w^2)-2(\mu v+\nu w)u}{u^2+v^2+w^2-2\lambda u-2\mu v-2\nu w} \\ v' = \dfrac{\mu(u^2-v^2+w)-2(\nu w+\lambda u)v}{u^2+v^2+w^2-2\lambda u-2\mu v-2\nu w} \\ w' = \dfrac{\nu(u^2+v^2-w^2)-2(\lambda u+\mu v)w}{u^2+v^2+w^2-2\lambda u-2\mu v-2\nu w}, \end{cases}$$

si hanno, dopo aver posto $H=\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}$, $K=\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}$, le formule

$$(2)\quad \begin{cases} u = \dfrac{H\lambda \pm K u'}{H \pm K} \\ v = \dfrac{H\mu \pm K v'}{H \pm K} \\ w = \dfrac{H\nu \pm K w'}{H \pm K}, \end{cases}$$

dove i segni superiori (e così pure gli inferiori) si corrispondono.

Siano (u, v, w) le coordinate di un piano π, (u', v', w') quelle di un piano π' e (λ, μ, ν) quelle di un piano α; cerchiamo in quali relazioni devono essere queste 3 terne di coordinate, affinchè π' sia simmetrico di α rispetto a π. È chiaro che, essendo

$$ux+vy+wz+1=0,\quad \lambda x+\mu y+\nu z+1=0$$

le equazioni di π e di α, la equazione di π' dovrà avere la forma

$$(3)\quad ux+vy+wz+1+k(\lambda x+\mu y+\nu z+1)=0,$$

dove k è da determinarsi. Prendiamo in α un punto arbitrario L (ξ, η, ζ) e diciamo L' (ξ', η', ζ') il suo simmetrico rispetto a π; avremo le relazioni

$$(4)\quad \begin{cases} \xi' = \xi - \dfrac{2u}{\varphi}\Delta \\ \eta' = \eta - \dfrac{2v}{\varphi}\Delta \\ \zeta' = \zeta - \dfrac{2w}{\varphi}\Delta \end{cases}$$

ove $\varphi=u^2+v^2+w^2$, $\Delta=u\xi+v\eta+w\zeta+1$, perchè, insieme alle (4) è

$$\frac{\xi-\xi'}{u}=\frac{\eta-\eta'}{v}=\frac{\zeta-\zeta'}{w},$$

e perchè dette p, p' le lunghezze delle perpendicolari abbassate da L, L' sopra π, per essere

$$u\xi'+v\eta'+w\zeta'+1=-(u\xi+v\eta+w\zeta+1)$$

[come facilmente si vede moltiplicando ordinatamente le (4) per u, v, w e sommando con l'unità] è pure $p=-p'$.

Scriviamo ∇ invece di $\lambda u+\mu v+\nu w$; siccome L' dovrà trovarsi sopra π', l'equazione (3) dovrà essere verificata dai valori ξ', η', ζ' di x, y, z. Dunque, si dovrà avere

$$-\Delta-k\frac{2\Delta\nabla}{\varphi}=0;$$

d'onde $k=-\frac{\varphi}{2\nabla}$. Ne segue che l'equazione di π' è

$$\left(u-\frac{\varphi}{2\nabla}\lambda\right)x+\left(v-\frac{\varphi}{2\nabla}\mu\right)y+\left(w-\frac{\varphi}{2\nabla}\right)z+1-\frac{\varphi}{2\nabla}=0;$$

e da questa seguono le relazioni

$$(5)\qquad\left\{\begin{aligned} u'&=\frac{\varphi\lambda-2\nabla u}{\varphi-2\nabla}\\ v'&=\frac{\varphi\mu-2\nabla v}{\varphi-2\nabla}\\ w'&=\frac{\varphi\nu-2\nabla w}{\varphi-2\nabla};\end{aligned}\right.$$

cioè appunto le (1). La soluzione delle (1) rispetto alle u, v, w si può, dunque, fare, tenendo presente il precedente significato geometrico, nella maniera elegante che segue.

Dalle (1) [e converrà guardare le (5)] si ricavano le seguenti

$$\begin{aligned}(u'-\lambda)\varphi&=(u'-u)2\nabla,\\(v'-\mu)\varphi&=(v'-v)2\nabla,\\(w'-\nu)\varphi&=(w'-w)2\nabla,\end{aligned}$$

per cui possiamo scrivere, introducendo il fattore ρ da determinare in funzione di u', v', w', λ, μ, ν:

$$(6)\qquad\left\{\begin{aligned} u&=u'-\rho(u'-\lambda)\\ v&=v'-\rho(v'-\mu)\\ w&=w'-\rho(w'-\nu).\end{aligned}\right.$$

Queste relazioni mostrano che l'equazione del piano $\pi(u,v,w)$ è la seguente

$$u'x+v'y+w'z+1+\frac{\rho}{1-\rho}(\lambda x+\mu y+\nu z+1)=0;$$

ma poichè questo piano deve essere bisettore degli angoli dei piani $\pi'(u', v', w)$, $\alpha(\lambda, \mu, \nu,)$, si dovrà avere

$$\frac{\rho}{1-\rho} = \pm \frac{H}{K},$$

epperò

$$\rho = \frac{H}{H \pm K}.$$

Questo valore di ρ, sostituito nelle (6) fornisce per u, v, w le espressioni

$$u = \frac{H\lambda \pm Ku'}{H \pm K},$$

$$v = \frac{H\mu \pm Kv'}{H \pm K},$$

$$w = \frac{H\nu \pm Kw'}{H \pm K},$$

che si volevano trovare.

A. Del Re.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 269* 270* 275* 286* 327 328 329 330 E 331

269. *Qualunque sia l'intero positivo* m, *si ha*

$$\frac{1}{m+n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{m}{(n+1)(n+2)} + \frac{m(m-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \dots\dots$$

$$\dots\dots + (-1)^m \frac{m(m-1)\dots 2.1}{(n+1)(n+2)\dots(n+m+1)}.$$

G. Musso.

Risoluzione del sig. Giuseppe Vitali, licenziato dal Liceo Alighieri di Ravenna.

Se S indica la somma e u_r l'r^{o} termine dell'espressione

$$\frac{1}{n+1} - \frac{m}{(n+1)(n+2)} + \frac{m(m-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \dots + (-1)^m \frac{m(m-1)\dots 2.1}{(n+1)(n+2)\dots(n+m+1)},$$

si ha

$$u_{r+1} = -\frac{m-(r-1)}{n+r+1} u_r,$$

e quindi

$$(m+1)u_r - r\,u_r + (r+1)u_{r+1} + n\,u_{r+1} = 0.$$

Ponendo in questa relazione $r = 1, 2, 3 \dots m$, e sommando le eguaglianze che risultano, si trova

$$(m+n+1)S - (n+1)u_1 = 0$$

$$(m+n+1)S = 1$$

$$S = \frac{1}{m+n+1}.$$

c. d. d.

Altre risoluzioni analoghe del prof. Luigi Bosi, e del sig. Vincenzo Columbo.

270*. *In un'urna si trovano un egual numero di palle rosse e nere. Ne vengono estratte successivamente* n, *rimettendo volta per volta la palla estratta nell'urna. Dimostrare che la probabilità che le* n *palle estratte presentino una determinata disposizione di colori è data da*

$$\frac{1}{2+P_n\Sigma\frac{1}{P_\alpha P_\beta}}$$

in cui $\alpha+\beta=n$ e $P_n=1.2....n$.

F. Verde.

Risoluzione del sig. F. Celestri studente della R. Università di Napoli.

Qualunque sia la determinata disposizione di colori che devono presentare le n palle da estrarre, la probabilità che questa disposizione avvenga è sempre $\frac{1}{2^n}$. Così per esempio, se delle n palle da estrarre si vuole che se ne estraggono prima a rosse, poi b nere, indi c rosse, ecc. si ha anzitutto che le probabilità di estrarre di seguito a palle rosse, o b nere, o c rosse, ecc....., sono rispettivamente $\frac{1}{2^a}, \frac{1}{2^b}, \frac{1}{2^c}$, ecc. e quindi la probabilità che questi gruppi di palle si succedano nell'estrazione ordinatamente sarà:

$$\frac{1}{2^a}\times\frac{1}{2^b}\times\frac{1}{2^c}\times....=\frac{1}{2^{a+b+c+....}}=\frac{1}{2^n}.$$

Volendo ora ridurre questa espressione a quella data nell'enunciato osserviamo che può scriversi

$$\frac{1}{2^n}=\frac{1}{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+....+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}}=\frac{1}{2+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+....+\binom{n}{n-1}}=$$

$$=\frac{1}{2+\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}+.....+\frac{n(n-1)(n-2).....2.1}{1.2.3....(n-1)}},$$

e moltiplicando ciascuna frazione del denominatore per l'espressione $\frac{1.2.3....n}{1.2.3....n}$, (ciò che non altera l'espressione) si ha:

$$\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2+\frac{n}{1}\frac{1.2.3...n}{1.2.3...n}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1.2.3...n}{1.2.3...n}+......+\frac{n(n-1)(n-2)...2.1}{1.2.3...n}\frac{1.2.3...n}{1.2.3...n}}=$$

$$=\frac{1}{2+1.2.3...n\left\{\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1.2.3...(n-1)}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{1.2.3...(n-2)}+......+\frac{1}{1.2.3...(n-1)}\cdot\frac{1}{1}\right\}}.$$

la quale espressione per le considerazioni fatte nell'enunciato può scriversi ancora

$$\frac{1}{2+P_n\Sigma\frac{1}{P_\alpha}\cdot\frac{1}{P_\beta}}.$$

c. d. d.

275*. *Fra tutti i triangoli i cui lati formano una progressione aritmetica di data ragione, quali sono rettangoli, quali acutangoli, quali ottusangoli?*

L. Bosi.

Risoluzione del sig. F. Celestri studente della R. Università di Pisa.

Indichiamo con d la ragione data e con x il lato minore. I lati del triangolo saranno perciò

$$x, \quad x+d, \quad x+2d;$$

ed essendo $x+2d$ il lato maggiore, ne viene che il triangolo sarà rettangolo, acutangolo, ottusangolo, a seconda che sussiste la prima, la seconda o la terza delle tre relazioni

$$x^2+(x+d)^2 \begin{smallmatrix}=\\>\\<\end{smallmatrix} (x+2d)^2;$$

ossia, sviluppando e riducendo,

$$x^2-2dx-3d^2 \begin{smallmatrix}=\\>\\<\end{smallmatrix} 0,$$

e scomponendo il primo membro in fattori di primo grado le relazioni precedenti possono scriversi

$$(x-3d)\,(x+d) \begin{smallmatrix}=\\>\\<\end{smallmatrix} 0;$$

e i valori accettabili, che si ricavano da queste tre relazioni, sono per la prima $x=3d$, per la seconda $x>3d$ e per la terza $x<3d$. Quindi potremo dire che

Fra tutti i triangoli i cui lati formano una progressione aritmetica di ragione data, sono rettangoli quelli in cui il lato minore è triplo della ragione data, acutangoli quelli in cui il lato minore è maggiore del triplo della ragione data, e ottusangoli quelli in cui il lato minore è minore del triplo della ragione data.

286*. *Risolvere il sistema d'equazioni*

$$(x+y)(xy+1)=axy$$
$$(x^3+y^3)(x^3y^3+1)=bx^3y^3.$$

F. Cecchepini.

Risoluzione del sig. F. Celestri studente a Napoli.

Dividendo i due membri della prima equazione per xy e quelli della seconda per x^3y^3, il sistema proposto diviene

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\left(xy+1\right)=a \\ \left(\frac{1}{y^3}+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^3y^3+1\right)=b, \end{cases}$$

e sviluppando può scriversi

$$(1) \qquad \begin{cases} \left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)=a \\ \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)=b, \end{cases}$$

e ponendo

$$(2) \qquad x+\frac{1}{x}=u, \quad y+\frac{1}{y}=v,$$

il sistema (1) diviene

$$\begin{cases} u+v=a \\ u^3+v^3-3\,(u+v)=b, \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} u+v=a \\ u^3+v^3=b+3a. \end{cases}$$

Per avere ora i valori di u e v si sottragga in quest'ultimo sistema la seconda equazione del cubo della prima, e si ottiene

$$3uv(u+v) = a^3 - 3a - b,$$

d'onde

$$uv = \frac{a^3 - 3a - b}{3(u+v)} = \frac{a^3 - 3a - b}{3a}.$$

Sicchè dei valori u e v si conosce la somma

$$u + v = a$$

e il prodotto

$$uv = \frac{a^3 - 3a - b}{3a},$$

e quindi questi valori sono le radici dell'equazione

$$(3) \qquad z^2 - az + \frac{a^3 - 3a - b}{3a} = 0;$$

d'onde

$$z = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4\,\dfrac{a^3 - 3a - b}{3a}}}{2} = \frac{3a^2 \pm \sqrt{3a(4b + 12a - a^2)}}{6a}.$$

Dunque

$$u = \frac{3a^2 \pm \sqrt{3a(4b + 12a - a^2}}{6a}$$

$$v = \frac{3a^2 \mp \sqrt{3a(4b + 12a - a^2}}{6a}.$$

Dalle (2) si hanno poi le equazioni

$$x^2 - ux + 1 = 0$$
$$y^2 - vy + 1 = 0,$$

d'onde

$$x = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4}}{2}$$

$$y = \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 4}}{2},$$

e sostituendo ad u e v i loro valori ottenuti dalla (3), corrispondenti ai segni superiori, si ottiene

$$x = \frac{3a^2 + \sqrt{3a(4b + 12a - a^2)} \pm \sqrt{6a\left(2b - 18a + a^3 + a\sqrt{3a(4b + 12a - a^2)}\right)}}{12a}$$

$$y = \frac{3a^2 - \sqrt{3a(4b + 12a - a^3)} \pm \sqrt{6a\left(2b - 18a + a^3 - a\sqrt{3a(4b + 12a^2 - a^2)}\right)}}{12a}.$$

Dall'avere poi diviso la prima equazione per xy e la seconda per x^3y^3, si hanno le due soluzioni

$$x = 0, \; y = 0.$$

327. *Qualunque numero, tranne 2 e 5 e i loro multipli, è un divisore d'un numero formato da cifre tutte uguali a 9.*

Le risoluzioni pubblicate di questa e delle quistioni successive fino alla 331 sono del sig. L. Nofolbasso studente della R. Università di Napoli.

Se a è un numero qualunque primo con 2 e 5, la frazione $\frac{1}{a}$ ridotta in decimali produce una frazione periodica semplice, la cui generatrice ha per numeratore il periodo N e per denominatore un numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo: questa generatrice essendo equivalente alla frazione $\frac{1}{a}$, ne segue che a deve essere divisore d'un numero formato da cifre tutte uguali a 9.

C. B. D.

328. *Ogni frazione irriducibile che ha per denominatore* 3^m, *ridotta in decimali genera una frazione decimale periodica semplice, che ha per periodo un numero di* 3^{m-2} *cifre.*

Si ha $10 = 1 + 3^2$, e quindi $10^3 = (1 + 3^2)^3 = 1 + h.3^3$, cioè $10^3 \equiv 1$ (mod. 3^3). Similmente si ha $10^{3^2} = (1 + h.3^3)^3 = 1 + h'.3^4$, cioè $10^{3^2} \equiv 1$ (mod. 3^4): e seguitando ad innalzare successivamente a 3^a potenza si ha

$$10^{3^{m-2}} \equiv 1 \text{ (mod. } 3^m).$$

Da ciò segue che la frazione irriducibile $\frac{a}{3^m}$ può porsi sotto la forma $\frac{K}{10^{3^{m-2}} - 1}$, e ridotta in decimale dà una frazione periodica semplice, che ha un periodo di 3^{m-2} cifre.

C. B. D.

329. *Se una frazione irriducibile che ha per denominatore il numero primo* p *diverso da* 3, *ridotta in decimale genera una frazione periodica, il cui periodo contiene* p' *cifre, ogni altra frazione ordinaria irriducibile, che ha per denominatore* p^m, *ridotta in decimali produrrà una frazione periodica, il cui periodo conterrà* $p' \cdot p^{m-1}$ *cifre.*

Se la frazione $\frac{1}{p}$, in cui p è un numero primo diverso da 2, 3, 5 ridotta in decimali dà un periodo di p' cifre, vuol dire che

$$10^{p'} \equiv 1 \text{ (mod. } p), \text{ cioè } 10^{p'} = 1 + hp.$$

Innalzando a potenza p^{ma}, poichè p è primo, si ha $10^{p'p} = (1 + hp)^p = 1 + h'p^2$ cioè $10^{p'p} \equiv 1$ (mod. p^2). Innalzando di nuovo a potenza p^{ma} si ha

$$10^{p'p^2} = (1 + h'p^2)^p = 1 + h''p^3, \text{ cioè } 10^{p'p^2} \equiv 1 \text{ (mod. } p^3);$$

e così innalzando successivamente sempre a potenza p^{ma} si ricava

$$10^{p'p^{m-1}} \equiv 1 \text{ (mod. } p^m).$$

Da ciò segue che la frazione irriducibile $\frac{a}{p^m}$ si può porre sotto la forma $\frac{K}{10^{p'p^{m-1}} - 1}$ e quindi ridotta in decimali produce una frazione periodica il cui periodo è di $p' \cdot p^{m-1}$ cifre.

Quest'ultimo numero si riduce a $p' \cdot p^{m-2}$ nel caso, rarissimo però, che sia $10^{p'} \equiv 1$ (mod. p^2): pei numeri primi maggiori di 3 e minori di 1000 questo caso si verifica una sola volta ed è per $p = 487$.

C. B. D.

330. *Se una frazione irriducibile ha per denominatore un prodotto di più fattori primi* p, q, r,... *diversi da 2 e da 5, e le frazioni* $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$,.... *ridotte in decimali producono periodi di* p', q', r',.... *cifre rispettivamente, la data frazione ridotta in decimale produrrà un periodo di* m *cifre, essendo* m *il minimo multiplo comune di* p', q', r',...

Poichè $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}$,... ridotte in decimali dànno periodi di p', q', r',... cifre rispettivamente, vuol dire che $10^{p'} \equiv 1$ (mod. p), $10^{q'} \equiv 1$ (mod. q), $10^{r'} \equiv 1$ (mod. r),... Ora essendo m il minimo multiplo comune di p', q', r',.. osservando che con ogni congruenza della forma $10^h \equiv 1$ (mod. k) sussiste la congruenza $10^m \equiv 1$ (mod. k) purchè m sia multiplo di h, ne segue che la congruenza $10^m \equiv 1$ vale per ciascuno dei moduli p, q, r,... e quindi, poichè essi sono numeri primi, anche pel modulo $P = p \cdot q \cdot r$.... Si conchiude che la frazione irriducibile $\frac{a}{P}$ può porsi sotto la forma $\frac{A}{10^m - 1}$, e quindi ridotta in decimale dà un periodo di m cifre.

C. B. D.

331. *Se* $\frac{a}{b}$ *è una fazione irriducibile in cui* $b = 3^m \cdot p^\alpha \cdot q^\beta \cdot r^\gamma \ldots$ *e* p, q, r .... *sono numeri primi differenti da 2 e da 5, indicando rispettivamente con* p', q', r', ... *i numeri delle cifre dei periodi delle frazioni decimali equivalenti ad* $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{r}$, ... *la frazione* $\frac{a}{b}$ *ridotta in decimali, produrrà un periodo di* k *cifre, essendo* k *il minimo multiplo comune dei numeri* 3^{m-2}, $p' \cdot p^{\alpha-1}$, $q' \cdot q^{\beta-1}$, $r' \cdot r^{\gamma-1}$, ...

Dai teoremi precedenti si ricava che:

$$10^{3^{m-2}} \equiv 1 \ (\text{mod.} 3^m),\ 10^{p' \cdot p^{\alpha-1}} \equiv 1 (\text{mod.} p^\alpha),\ 10^{q' \cdot q^{\beta-1}} \equiv 1 (\text{mod.} q^\beta),\ 10^{r' \cdot r^{\gamma-1}} \equiv 1 (\text{mod.} r^\gamma) \ldots;$$

e quindi se k è il minimo multiplo comune di 3^{m-2}, $p' \cdot p^{\alpha-1}$, $q' \cdot q^{\beta-1}$, $r' \cdot r^{\gamma-1}$, ... osservando che con la congruenza $10^\pi \equiv 1$ (mod. ρ) sussiste la congruenza $10^k \equiv 1$ (mod. ρ) se k è multiplo di π, conchiudiamo che la congruenza $10^k \equiv 1$ vale per ciascuno dei moduli 3^m, p^α, q^β, r^γ, ... e quindi, poichè essi sono primi fra loro, anche pel modulo $b = 3^m \cdot p^\alpha \cdot q^\beta \cdot r^\gamma$ ..... Da ciò segue che la frazione irriducibile $\frac{a}{b}$ può porsi sotto la forma $\frac{A}{10^k - 1}$, e perciò ridotta in decimali dà un periodo di k cifre.

Se uno dei numeri primi dati, p per es., dà luogo all'eccezione indicata nel teorema 329, si calcolerà k sostituendo a $p' \cdot p^{\alpha-1}$ il numero $p' \cdot p^{\alpha-2}$.

C. B. D.

Questi teoremi del Bonolis riducono la ricerca del numero delle cifre del periodo d'una frazione decimale periodica al solo caso in cui la generatrice è una frazione irriducibile avente per denominatore la prima potenza d'un numero primo diverso da 2, 3 e 5: e di ciò ci occuperemo forse fra breve.

Oltre a quelle pubblicate. sono state inviate alla Direzione due soluzioni della questione 327 dal prof. Bettazzi, delle quistioni 327, 328, 329, 330, 331 dal prof. Gatti, e delle 327 e 328 dal prof. Padoa.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

338*. Determinare la parte di superficie sferica racchiusa fra due archi l'uno di circolo massimo, l'altro di circolo minore terminati alla corda comune.

339. Nel cono descritto dalla rotazione dell'angolo θ intorno ad un suo lato si conduce un piano perpendicolare ad una generatrice e distante del segmento d dal vertice; esprimere in funzione di θ e d gli assi, il parametro della conica e gli angoli formati dalle generatrici passanti per due vertici della curva.

340. Per un punto di una superficie conica circolare retta, condurre un piano segante in modo che gli assi della ellisse (o dell'iperbole) abbiano una data ragione k. Si conosce la distanza d del punto dal vertice e l'angolo 2θ del cono.

BELLACCHI.

341*. Due triangoli coi lati rispettivamente paralleli sono interni l'uno all'altro, e volti nello stesso senso. Prolungando i lati di quello interno, si hanno tre parallelogrammi x, y, z e tre trapezi t, t', t''. Determinare x, y, z in funzione di t, t', t'' e del triangolo interno T.

ALASIA.

342*. Indicando i vertici di un quadrangolo inscritto in un circolo con 1, 2, 3, 4; i lati con a, b, c, d; con h_{3a} p. es. la distanza del vertice 3 dal lato a, e con m_{3a} il segmento congiungente il vertice 3 col punto medio del lato a, dimostrare le formole

$$a)\qquad \frac{h_{1b}}{h_{2d}}=\frac{h_{3c}}{h_{2c}}=\frac{h_{3d}}{h_{4b}}=\frac{h_{1c}}{h_{4a}},$$

$$b)\qquad S=\frac{1}{2}\sqrt[4]{(ah_{4a}+bh_{4b})(bh_{1b}+ch_{1c})(ch_{2c}+dh_{2d})(dh_{3d}+ah_{3a})},$$

$$c)\qquad (h_{1b}+h_{3d}+h_{1c}+h_{3a})\left(\frac{1}{h_{1b}}+\frac{1}{h_{3d}}+\frac{1}{h_{1c}}+\frac{1}{h_{3a}}\right)=$$

$$(h_{2c}+h_{4a}+h_{2d}+h_{4b})\left(\frac{1}{h_{2c}}+\frac{1}{h_{4a}}+\frac{1}{h_{2d}}+\frac{1}{h_{4b}}\right)$$

$$=(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right),$$

$$d)\qquad m^2_{1b}+m^2_{2c}+m^2_{3d}+m^2_{4a}=m^2_{3a}+m^2_{2d}+m^2_{1c}+m^2_{4b}.$$

G. CANDIDO.

(*) Le quistioni contrassegnate con un asterisco sono proposte agli studenti delle scuole secondarie; le altre a tutti gli studiosi indistintamente.

343*. La cifra delle decine di qualunque potenza di 3 non può mai essere dispari.

344*. In qualunque potenza di 5 la cifra delle unità è sempre 5, quella delle decine è sempre 2, la cifra delle centinaia non può essere che 1 o 6, quella delle unità di migliaia non può essere che 0, 3, 5, 8 (0 e 5 corrispondono al 6; 3 ed 8 all'1), e finalmente la cifra delle decine di migliaia non può mai essere nè 3, nè 8.

345*. La cifra delle decine di qualunque potenza di 7 non può essere che 0 o 4; e propriamente è 0, se la cifra delle unità della potenza è 1 o 7, ed è invece 4 se la cifra delle unità è 3 o 9.

346*. Il quadrato d'un numero, formato da p cifre 9 seguite da una cifra qualunque a, si compone di p-1 cifre 9, seguite dal complemento a 100 del doppio di 10-a, da p-1 zeri e dal quadrato di 10-a preceduto da uno zero se è di una cifra. Per esempio

$$999998^2 = 9999\,96\,0000\,04,\quad 999993^2 = 9999\,86\,0000\,49.$$

347*. Se un numero P è formato da n cifre uguali ad a, seguite dalla cifra b, e da ognuna di queste cifre si tolgono c unità, si avrà un nuovo numero il cui quadrato si otterrà dal quadrato di P togliendo da ognuna delle sue cifre c unità, soltanto per

$$a = 5,\ 6,\ 7,\ 8$$
$$b = 6,\ 7,\ 8,\ 9$$
$$c = 1,\ 3,\ 5,\ 7.$$

Per esempio

$$(55\ldots56 - 11\ldots11)^2 = 55\ldots56^2 - 11\ldots11$$
$$(66\ldots67 - 33\ldots33)^2 = 66\ldots67^2 - 33\ldots33$$
$$(77\ldots78 - 55\ldots55)^2 = 77\ldots78^2 - 55\ldots55$$
$$(88\ldots89 - 77\ldots77)^2 = 88\ldots89^2 - 77\ldots77.$$

348*. Il prodotto d'un numero qualunque N di p cifre, per un numero formato da p cifre uguali a 9, è uguale al numero N-1, seguito dal complemento di N rispetto a 10^p.

BONOLIS.

VARIETÀ

Congresso internazionale di matematici. — Nei giorni 9, 10, 11 Agosto del corrente anno avrà luogo a Zurigo la prima riunione del congresso internazionale dei matematici, che sembra debba riuscire molto numerosa, avendo già aderito un gran numero di scienziati.

Planimetro Prytz e macchina di Torres per risolvere le equazioni. — Segnaliamo all'attenzione dei lettori del Periodico questi due strumenti d'invenzione recente, che sono importantissimi per la pratica. È noto che sono numerosissimi gli strumenti destinati alla misura delle aree piane; il planimetro Prytz si distingue dagli altri per la semplicità della sua costruzione e del modo di usarlo.

La macchina di Torres sin qui costruita serve a trovare le radici di un'equazione di tre soli termini; ma il principio sul quale si fonda può servire per la costruzione di altre macchine atte a trovare le radici di un'equazione qualsiasi.

ESAMI DI BACCALAUREATO DELL'APRILE 1896

Accademia di Lione.

1°. **Quistioni a scelta.** — *a)* Decomporre il trinomio $x^4 + px^2 + q$ in un prodotto di due trinomi di secondo grado.

b) Esporre la teoria delle annualità.

c) Progressioni geometriche; somma dei termini d'una tale progressione. Fra due numeri dati a e b inserire n medi geometrici.

2°. **Problema (obbligatorio).** — È data una sfera di raggio $R = 4$, e si domanda il raggio della base e l'altezza del cono di volume minimo circoscritto a questa sfera.

Accademia di Montpellier.

Calcolare i lati d'un triangolo isoscele, conoscendo l'area di questo triangolo e la superficie totale del cono che esso genera rotando attorno alla sua altezza. — Discussione.

Accademia di Nancy.

1°. **Quistioni a scelta.** — *a)* Dimostrare che tutte le linee trigonometriche dell'arco a s'esprimono razionalmente in funzione di tang $\frac{a}{2}$.

b) Conoscendo tang a, calcolare sen $\frac{a}{2}$. Discussione.

c) Risoluzione trigonometrica dell'equazione di secondo grado.

2°. **Problema.** — Studiare la variazione del quoziente

$$\frac{21\,x^2 - 8x - 5}{14\,x^2 - 31\,x - 15},$$

quando x varia in modo continuo da $-\infty$ a $+\infty$.

Accademia di Poitiers.

1°. **Quistioni a scelta.** — *a)* Dimostrare le formule d'addizione per il seno e coseno.

b) Conoscendo tang a, calcolare tang $\frac{a}{2}$. Discussione.

c) Dimostrare che fra gli angoli e i lati di un triangolo qualunque esistono le relazioni

$$a = b \cos C + c \cos B$$
$$b = c \cos A + a \cos C$$
$$c = a \cos B + b \cos A.$$

Dedurne le formule

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,ca \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b - 2\,ab \cos C.$$

2°. **Problema.** — Una piramide regolare ha per base un quadrato. In ciascuno dei triangoli isosceli, che formano le faccie laterali, si rappresenti la base con $2a$, gli altri lati con y, l'altezza corrispondente al lato $2a$ con h, le altezze corrispondenti ai lati y con x. Calcolare x e il coseno dell'angolo rettilineo del diedro, formato da due facce laterali. Come varia quest'angolo allorchè h decresce a partire da ∞?

(Continua)

BIBLIOGRAFIA

E. De Montel. — *Le leggi dell'interesse* (Scansano, 1896). (*)

Vogliamo dare un cenno di quest'Opuscolo, estratto dalla *Rivista di Sociologia*, in quanto che esso è una bellissima prova delle importanti e svariate applicazioni, che può trovare la Matematica nello studio delle leggi economico-sociali. È noto che fuori d'Italia tal genere di studi ha trovato ampio sviluppo: basterebbe citare il Maxwell e il Walras e dare un'occhiata al giornale degli attuari inglesi; ma in Italia finora son pochi gli studiosi di questo ramo delle matematiche discipline, e non ci pare superfluo dar notizia di quest'ultimo lavoro di uno dei più antichi e competenti cultori della materia, che suol chiamarsi *matematica finanziaria;* tanto più che tal lavoro contiene numerose ed eleganti applicazioni di algebra, di geometria analitica e proiettiva.

***

È noto che le leggi, affatto convenzionali, regolatrici dell'interesse sia semplice che composto, suppongono che il capitale abbia, per un tempo indefinito, la stessa capacità produttiva, ipotesi questa ben lontana dalla realtà, sia perchè ogni capitale col tempo si esaurisce, sia perchè l'aumento della rendita non è che in limiti ristretti, proporzionale all'aumento del capitale.

L'A. si occupa della questione cominciando col ricordare che il sig. Catalan fin dal Congresso di Bordeaux del 1871, proponeva, pel calcolo dell'interesse composto, in luogo dell'attuale, una formula empirica e complicata, colla quale voleva soddisfare a due condizioni:

1° che per piccoli valori del tempo, il frutto rimanesse proporzionale al tempo.

2° che coll'aumentare indefinito del tempo, il montante tendesse verso un limite assai ristretto. Questo limite è, naturalmente, convenzionale, e il Catalan lo supponeva inferiore a 10 volte il capitale; cioè supponeva che un capitale coi suoi interessi successivi non arrivasse mai a decuplicarsi.

L'A. nota gli evidenti difetti di questa formula. E, studiando il problema in generale, indicando con x il tempo, con y il montante di 1 lira, trova la relazione

$$xy + ay + bx - a = 0, \qquad (1)$$

dove i parametri a e b son determinati dal saggio r dell'interesse, giacchè, per $x=1$, dev'essere $y=1+r$, e dal massimo che si vuol raggiunto dal montante per $x=\infty$.

Da questa formula si deduce, come caso particolare, quella dell'interesse semplice. Essa si presta a svariate applicazioni, in particolare al caso in cui si desideri che il capitale dopo un certo numero di anni diventi infruttifero.

(*) Mentre si stampava questo breve cenno, il sig. *Rouché* presentava l'opera del prof. De Montel all'Accademia delle Scienze di Parigi e ne pubblicava una relazione nei *Comptes-Rendus* (1897 N. 5).

L'A. nota inoltre che la sua relazione è quella che in Geom. proiettiva stabilisce la corrispondenza univoca fra due punteggiate proiettive. Di più osserva, che, mentre per l'interesse semplice la curva del montante è una retta e per l'interesse composto una curva logaritmica, per l'interesse da lui calcolato è un ramo d'iperbole.

L'A. come esempio prende quindi a considerare il caso in cui sia $r = 4$, col massimo 8. Calcola, per questo caso, un'apposita tavola dei montanti da 1 a 29 anni; e servendosi di una nota formula d'Eulero, applica il suo metodo al calcolo di una rendita anticipata, e ne deduce importanti conseguenze d'ordine economico, che non è qui il luogo di rilevare. Noteremo solo questa: che, colla legge d'interessi contemplati dall'A. una rendita perpetua avrebbe un valore attuale infinito; quindi sarebbero inammissibili i debiti consolidati.

Segue poscia la trattazione del problema generale dell'emissione, dopo un breve e chiaro riassunto della teoria delle rendite a termine variabile.

E. Nannei.

Prof. Aroldo Martini-Zuccagni. — *Lezioni di Aritmetica teorica. — Teoria dei numeri razionali.* — Livorno, Stab. tip. S. Belforte, 1897.

Questo libro si allontana alquanto dagli ordinari trattati di Aritmetica razionale, che si adottano nelle scuole, sia per l'ordine che per le dimostrazioni di diversi teoremi. Esso è frutto di lungo studio ed è accuratamente redatto.

Nel 1° cap., dalla considerazione dei gruppi di oggetti, l'autore passa al concetto di numero; definisce l'unità e il numero, stabilisce un criterio per distinguere se un numero è uguale, maggiore o minore di un altro, ed enuncia infine il principio fondamentale: *Il numero intero è assolutamente indipendente dall'ordine e dal modo con cui sono aggruppate le sue unità.*

Nel cap. 2°, tratta dell'addizione, della moltiplicazione e dell'innalzamento a potenza, che chiama operazioni dirette di 1ª, 2ª e 3ª specie, rispettivamente. Dimostra prima i teoremi relativi alla proprietà associativa dell'addizione e della moltiplicazione, e poi quelli relativi alla proprietà commutativa. Indi, dimostra alcuni teoremi sulle somme e sui prodotti, avendo cura di metterli uno accanto all'altro, in modo che si possa scorgere come ciascuna proprietà di una delle due operazioni dirette di 1ª e 2ª specie, si possa dedurre dalla proprietà corrispondente dell'altra operazione.

Per dimostrare la proprietà associativa del prodotto di più fattori, l'autore si serve del metodo d'induzione (o di conclusione da n a $n+1$). Non crediamo che sia conveniente introdurre questo metodo di dimostrazione nell'insegnamento dell'aritmetica, e specialmente al principio del corso.

Nel cap. 3° sono dimostrate le regole per effettuare le operazioni dirette di 1ª e 2ª specie.

Nel cap. 4° l'autore parla di sintesi e di analisi, delle dimostrazioni indirette, del metodo di conclusione da n a $n+1$ (già adoperato prima), del metodo di riduzione all'assurdo, e dimostra infine il teorema di Hauber. Non crediamo che questo capitolo debba trovar posto in un trattato di aritmetica, e ci sembra che per dimostrare che se $b \gtreqless c$ deve essere $a + b \gtreqless a + c$, e simili teoremi, non valga la pena ricorrere al teorema di Hauber.

Nel cap. 5°, l'autore tratta della sottrazione e della divisione dei numeri interi, che chiama operazioni inverse di 1ª e 2ª specie, e dimostra le proprietà fondamentali di dette operazioni, facendo rilevare come ciascuna proprietà di una delle operazioni inverse, sottrazione e divisione, si possa dedurre dalla proprietà corrispondente dell'altra operazione, cambiando le parole resto in quoziente, diminuendo in dividendo, ecc., e viceversa.

Nei successivi capitoli, 6° e 7°, l'autore considera i teoremi relativi alla teoria del quoziente incompleto, ed alle regole per effettuare la sottrazione e la divisione, dando una lunga dimostrazione per la regola della divisione nel caso in cui il dividendo, il divisore e il quoziente sono di più cifre.

Nel cap. 8°, l'autore risolve diversi problemi, fra i quali i seguenti: " determinare la somma dei primi n numeri interi — determinare quanti ambi si possono formare con i primi 90 numeri — determinare la somma $1 + a + a^2 + \ldots + a^n$, ecc. ". Non crediamo che un prof. possa proporre ai suoi allievi, che hanno studiato appena le operazioni sui numeri interi, problemi del tipo di quelli accennati, e non ci sembra conveniente far studiare agli allievi quei problemi, che in seguito potranno più facilmente comprendere.

Negli ultimi quattro capitoli della prima parte, l'autore tratta della divisibilità dei numeri, del massimo comune divisore, del minimo comune multiplo, e della teoria dei numeri primi; mantenendo sempre nelle dimostrazioni dei differenti teoremi, quel rigore e quell'originalità che s'incontrano in tutto il libro. Abbastanza semplice ed originale ci sembra la dimostrazione del teorema relativo alla ricerca del *m. c. m.* di due numeri,

La 2ª parte del libro comprende lo studio delle grandezze in generale. Da questo studio, l'autore passa nella 3ª parte, a quello dei numeri frazionari occupandosi nei primi due capitoli delle frazioni ordinarie.

Nel 3° cap. tratta dei numeri decimali, dimostra le loro proprietà generali, e la regola per calcolare il valore di una frazione ordinaria in unità decimali di un ordine qualunque (*n.* 256). Dopo aver parlato delle operazioni sui numeri decimali, l'autore ritorna alla riduzione delle frazioni ordinarie in decimali; dimostra prima la condizione necessaria e sufficiente affinchè una frazione ordinaria irriducibile sia uguale ad un numero decimale, e poi dà nuovamente (n. 264) la dimostrazione (originale ma molto lunga) della regola per ridurre una frazione ordinaria in numero decimale. Quest'ultima dimostrazione si potrebbe sopprimere sostituendo il n. 256 al n. 264.

Abbastanza bene è svolta la teoria dei numeri decimali periodici, nella quale l'autore ha escluso ogni concetto di limite; però sarebbe bene modificare la dimostrazione del teorema che dà la generatrice di un numero decimale periodico semplice, che l'autore fa dipendere dal problema: calcolare la somma $1 + a + a^2 + \ldots + a^n$.

L'ultima parte del libro contiene la teoria delle misure delle grandezze commensurabili. In essa si trova la seguente definizione: " *Chiameremo misura di una grandezza* A, *rispetto ad un'altra grandezza* B, *commensurabile con la prima, il numero che rappresenta quante volte la grandezza* A *contiene la grandezza* B, *o una parte aliquota della grandezza* B ", che non è esatta.

In complesso il libro ha molti pregi, e crediamo che, sopprimendo qualche capitolo e modificando qualche dimostrazione, possa essere utile all'insegnamento.

P. Visalli.

Giulio Lazzeri — *Direttore responsabile.*

Finito di stampare il 3 Marzo 1897.

TEOREMI E PROBLEMI SUI TETRAEDRI ISOBARICENTRICI

Il prof. Besso per il primo e i professori Pesci e Panizza di poi, in Note apparse in questo *Periodico,* si occuparono dello studio dei triangoli aventi lo stesso baricentro. — Anch'io, in una Nota pubblicata nel fascicolo 3° dell'anno IV dello stesso *Periodico,* mi occupai dell'argomento, dimostrando proprietà che non erano state considerate, e risolvendo nuovi problemi.

La presente nota è un saggio d'uno studio, certo molto attraente, che si potrebbe fare sui tetraedri isobaricentrici.

1. Indico con A_1, A_2, A_3, A_4 i vertici d'un tetraedro, con A il suo baricentro. Il punto A è anche il baricentro di quattro pesi eguali applicati ai vertici. Le rette $A_i A$ tagliano le facce opposte del tetraedro nei baricentri delle facce stesse.

Un tetraedro è determinato in grandezza e posizione da dodici condizioni, perchè l'assegnazione d'un suo vertice equivale a tre condizioni. Il baricentro d'un tetraedro ne è un punto notevole (*). Infatti, dati tre vertici e il baricentro il tetraedro è determinato, e in modo unico.

2. Dati due vertici A_1, A_2 e il baricentro, vi ha una tripla infinità di tetraedri. Un altro vertice A_3 ne individua uno, e se A_3 descrive una figura F, il quarto vertice descrive una figura F′, che è simmetrica di F rispetto al punto che è simmetrico del simmetrico di A rispetto al punto medio di $A_1 A_2$. In particolare, se la figura F è una retta o un piano, la figura F′ sarà in corrispondenza una retta o un piano.

(*) In qualche trattato di Geometria il baricentro, l'ortocentro ecc. d'un triangolo sono detti *punti notevoli* del medesimo, ma non è detto che cosa si debba intendere per punto notevole d'una figura. In una mia nota pubblicata nella *Rivista di Matematica* (Torino, 1893) proposi, non so se per il primo, di chiamare *punto notevole* d'una figura piana un punto del piano della figura il quale, quando sia dato, equivalga ad assegnare *due* condizioni a cui la figura deve sodisfare. Per analogia si dirà punto notevole d'una figura solida un punto la cui assegnazione equivalga a *tre* condizioni per la figura.

3. Da quanto è stato detto nel numero precedente risulta la risoluzione del seguente problema: *Descrivere un tetraedro, dati* A_1, A_2, A, *una retta* a_3 *su cui deve stare* A_3, *e un piano* α_4 *su cui deve stare* A_4.

Il punto A_{34} (A_{ik} è il punto medio del segmento $A_i A_k$) è noto; è il simmetrico di A rispetto ad A_{12}. Descritta la retta a'_3 simmetrica di a_3 rispetto ad A_{34}, essa taglierà α_4 in un punto A_4, e la retta $A_4 A_{34}$ taglierà a_3 in un punto A_3, e sarà $A_1 A_2 A_3 A_4$ il tetraedro cercato (*).

4. Si ha pure la risoluzione del seguente problema:

Costruire un tetraedro, dati A, A_1 *e tre rette* a_2, a_3, a_4 *su cui devono stare* A_2, A_3, A_4.

Il problema è manifestamente determinato. Per risolverlo si può rammentare la risoluzione di quest'altro problema di stereometria: Date tre rette sghembe a, b, c, tirare una corda della prima e della terza, che sia bisecata dalla seconda. Basterà condurre da a e c i due piani paralleli, e poi il piano bisettore dello strato da essi determinato; questo piano taglierà b in un punto, da cui condurremo la retta che si appoggia ad a e c; giacerà su questa retta, la corda cercata.

Ciò posto, quando A_2 si muove su a_2, A_{12} descrive una retta a_{12} parallela ad a_2, e che si potrà costruire; A_{34} descriverà una retta a_{34}, che è la simmetrica di a_{12} rispetto ad A, e che si potrà anche costruire; tirando la corda $A_3 A_4$ delle rette a_3, a_4, che sia bisecata da a_{34}, si otterrà nel punto d'intersecazione di a_{34} con $A_3 A_4$ il punto A_{34}, da cui si ottiene A_{12}, e infine la retta $A_1 A_{12}$ taglierà a_2 nel punto A_2. Il tetraedro $A_1 A_2 A_3 A_4$ è quello cercato.

5. Nella figura del precedente problema si faccia muovere A_1 su a_1; ad ogni posizione di A_1 corrisponde una retta a_{12}. Per costruire tutte le rette a_{12}, basta prendere su a_2 un punto A_2, e pei punti medi dei segmenti $A_2 A_1$ tirare le parallele alla a_2. Siccome i punti medi dei segmenti $A_2 A_1$ sono in linea retta, così tutte le rette a_{12} sono in un piano, che è il bisettore dello strato determinato dai piani, fra loro paralleli, che passano per a_1, a_2. E allora staranno in un piano tutte le rette a_{34}; e siccome i punti A_{34} stanno in un piano, che è il bisettore dello strato determinato dai piani paralleli, condotti per a_3, a_4, così segue che A_{12}, A_{34} sono simmetrici rispetto ad A, e perciò stanno su due rette dei piani suddetti parallele alla loro intersezione. Si dimo-

(*) In questo e in altri problemi semplici ometto ogni discussione e la ricerca delle condizioni di possibilità.

stra similmente che in altrettante rette sono i punti $A_{13}, A_{14}, A_{23}, A_{24}$, e quindi il luogo delle posizioni della retta di un lato del tetraedro $A_1 A_2 A_3 A_4$ è quello d'una retta che si appoggia a tre rette sghembe. Si ha così il teorema:

Se un tetraedro si deforma in modo che i suoi vertici scorrano su quattro rette date, mentre il baricentro rimane fisso, le rette dei suoi lati generano sei quadriche a punti iperbolici, una per ogni retta.

6. Le considerazioni ora fatte ci permettono di risolvere il seguente problema: *Descrivere un tetraedro di noto baricentro, i cui vertici cadano su quattro rette date* a_1, a_2, a_3, a_4, *e la faccia opposta al vertice che deve cadere in* a_1 *passi per un dato punto* M.

Descritta la quadrica corrispondente ad a_2, a_3 e quella corrispondente ad a_3, a_4, si determinino i coni circoscritti alle medesime e aventi il vertice comune M. Se α_1 è un piano tangente comune, e A_2, A_3, A_4 sono i punti comuni ad α_1 e alle rette a_2, a_3, a_4, saranno A_2, A_3, A_4 tre vertici del tetraedro cercato, dai quali si deduce poi subito A_1.

7. È noto che, se si dividono nel medesimo senso i lati d'un poligono $A_1 A_2 \ldots$, piano o gobbo, nello stesso rapporto nei punti $B_1, B_2 \ldots$, i due sistemi di punti A e B hanno lo stesso baricentro. Se perciò si considerano due coppie di lati opposti d'un tetraedro come lati d'un quadrangolo, e si dividono nel modo ora indicato, si avranno i vertici d'un secondo tetraedro isobaricentrico con il dato.

Se si dividono due coppie di lati opposti d'un tetraedro nel rapporto $l' : l''$, *e nello stesso senso, i quattro punti di divisione sono vertici d'un secondo tetraedro isobaricentrico.*

(*) *Questo tetraedro ha col primo il rapporto* $(l' - l'')(l'^2 + l''^2) : (l' + l'')^2$.

Infatti si supponga che i lati $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$, $A_4 A_1$ sieno stati divisi nel rapporto $l'' : l'$ nei punti 1, 2, 3, 4. Si assumano $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_1 A_4$ come sistema di assi coordinati obliqui. Le coordinate dei punti 1, 2, 3, 4, posto $A_1 A_2 = b$, $A_1 A_3 = c$, $A_1 A_4 = d$, sono rispettivamente, come è facile verificare:

$$\left(\frac{l''}{l'+l''} b, 0, 0\right), \left(\frac{l'}{l'+l''} b, \frac{l''}{l'+l''} c, 0\right), \left(0, \frac{l'}{l'+l''} c, \frac{l''}{l'+l''} d\right), \left(0, 0, \frac{l'}{l'+l''} d\right).$$

Sostituendo questi valori nella nota formola che dà il volume d'un tetraedro in funzione delle coordinate dei suoi vertici, gli assi supposti obliqui, si ha:

$$V. (1234) = -\frac{1}{6} b \cdot c \cdot d \, \frac{(l' - l')(l'^2 + l''^2)}{l' + l'')^2} \operatorname{sen} xyz.$$

(*) Chi non conosce la geometria analitica può omettere le parti stampate in carattere piccolo, che non sono indispensabili per comprendere la parte principale di questa Nota.

Ma

$$V.\ (A_1 A_2 A_3 A_4) = -\frac{1}{6} b\,.\,c\,.\,d \operatorname{sen} xyz;$$

sostituendo si ha:

$$V.\ (1234) = \frac{(l' - l'')(l'^2 + l''^2)}{(l' + l'')^3}\,.\ V.\ (A_1 A_2 A_3 A_4),$$

8. Un tetraedro 1234 è individuato da uno de' suoi vertici, p. es. dal vertice 1. Si dirà il tetraedro corrispondente a quel punto. Se A_1 si muove in $A_1 A_2$, i vertici 2, 3, 4 descriveranno sulle corrispondenti rette dei lati in cui giacciono delle punteggiate simili a quella descritta da 1, e simili fra loro. Dati in $A_1 A_2$ due punti 1, 1', a questi corrisponderanno due tetraedri 1234, 1'2'3'4'. Se invece di considerare il quadrangolo gobbo $A_1 A_2 A_3 A_4$ si considera il quadrangolo gobbo $A_1 A_2 A_4 A_3$, ai punti 1 o 1' corrisponderanno due nuovi tetraedri 1567, 1'5'6'7'. Questi quattro tetraedri coi loro vertici segnano un segmento per ogni spigolo del tetraedro fondamentale, tranne per lo spigolo $A_3 A_4$, opposto ad $A_1 A_2$, nel quale sono segnati due segmenti 33', 66'; e poichè

$$A_3 3 : 3 A_4 = A_4 6 : 6 A_3, \quad A_3 3' : 3' A_4 : A_4 6' : 6' A_3,$$

i punti 3 e 6, come i punti 3' e 6' sono equidistanti da A_3, A_4, e perciò $33' = 66'$. Si hanno così in tutto sei segmenti distinti, uno per ogni spigolo. Ora le punteggiate descritte dai punti 1, 2,... essendo simili, e ad A_1 corrispondendo A_2, ad A_2, A_3 ecc., si ha come è facile verificare:

$$\frac{11'}{A_1A_2} = \frac{22'}{A_2A_3} = \frac{33'}{A_3A_4} = \frac{44'}{A_4A_1} = \frac{55'}{A_4A_2} = \frac{77'}{A_1A_3},$$

cioè:

Se su d'un lato d'un tetraedro si prendono due punti, e si costruiscono i quattro tetraedri ad essi corrispondenti, questi coi loro vertici determinano sui lati del tetraedro fondamentale sei segmenti, che sono lati d'un nuovo tetraedro simile al dato.

9. Per semplicità d'esposizione un tetraedro iscritto in un altro si dirà di prima specie, se i suoi vertici cadono sulle facce dell'altro, uno per ciascuna faccia; di seconda specie se ha i vertici in due coppie di spigoli opposti, uno per ogni spigolo; di terza specie, se i detti vertici cadono in una coppia di spigoli opposti, due per ogni coppia.

10. *Se si prolungano i lati d'un tetraedro iscritto di seconda specie e isobaricentrico con il dato, i prolungamenti taglieranno i due spigoli* *rimanenti nei vertici d'un tetraedro iscritto di terza specie e isobaricentrico col dato.*

Infatti: 12,34 taglino A_1A_3 in P e Q rispettivamente, e 23,14 seghino A_2A_4 in R ed S ordinatamente. Si ha per il teorema di Menelao:

$$\frac{A_2 1}{1 A_1}\cdot\frac{A_1 P}{P A_3}\cdot\frac{A_3 2}{2 A_2}=1,\quad \frac{A_1 4}{4 A_4}\cdot\frac{A_4 3}{3 A_3}\cdot\frac{A_3 Q}{Q A_1}=1,$$

da cui

$$\frac{A_3P}{A_1P}=\frac{QA_1}{QA_3},\quad \frac{A_3A_1}{A_1P}=\frac{A_3A_1}{QA_3},$$

e quindi $A_1P = QA_3$.

Similmente si dimostra che $A_2R = SA_4$.

Questi risultati dimostrano che PQ ed RS hanno gli stessi punti di mezzo di A_1A_3, A_2A_4, e cioè il tetraedro PQRS ha lo stesso baricentro di $A_1A_2A_3A_4$.

11. Si può determinare il volume del tetraedro PQRS. Infatti si deduce con facilità che

$$PQ=\frac{l'^2+l''^2}{l''^2-l'^2}A_1A_3,\qquad RS=\frac{l''^2+l'^2}{l''^2-l'^2}A_2A_4.$$

Inoltre

$$V.\,(A_1A_2A_3A_4)=\frac{1}{6}\delta A_1A_3\,.\,A_2A_4\,.\,\mathrm{sen}\,(A_1A_3,\,A_2A_4)$$

$$V.\,(PQRS)=\frac{1}{6}\delta PQ\,.\,RS\,.\,\mathrm{sen}\,(PQ,\,RS),$$

dove δ è la minima distanza fra le rette A_1A_3, A_2A_4. (*)

Di qui si trae

$$V.\,(PQRS)=\left(\frac{l'^2+l''^2}{l'^2-l''^2}\right)^2.\,V.\,(A_1A_2A_3A_4).$$

12. *Le mediane d'un tetraedro isobaricentrico iscritto di seconda specie tagliano le facce del tetraedro dato in quattro punti, vertici d'un tetraedro iscritto di prima specie isobaricentrico con il dato, e tagliano i prolungamenti delle facce stesse in altri quattro punti, vertici di un tetraedro analogo.*

Questo teorema insegna a costruire dei tetraedri isobaricentrici con uno dato e iscritti in esso.

I volumi di questi due tetraedri sono:

$$\frac{(l'-l'')(l'^2+l''^2)}{(3l'-l'')^2}\,.\,A_1A_2A_3A_4,\quad \frac{(l'-l'')(l'^2+l''^2)}{(l'-3l'')^2}\,.\,A_1A_2A_3A_4.$$

(*) BALTZER, *Trigon.*, § 6, 17.

Infatti, assunti come assi coordinati le rette A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, e posto $A_1A_2 = b$, $A_1A_3 = c$, $A_1A_4 = d$, con facili considerazioni si trovano come punti d'intersezione delle dette mediane con i piani delle facce del tetraedro fondamentale le seguenti due quaderne di punti:

$$A\left(\frac{b(l'-l'')}{3l-l'},\ \frac{cl'}{3l-l'},\ \frac{dl'}{3l'-l''}\right),\quad B\left(0,\frac{c(l'-l'')}{3l'-l''},\ \frac{dl'}{3l'-l'}\right),$$

$$C\left(\frac{bl'}{3l'-l''},\ 0,\ \frac{dl'}{3l'-l''}\right),\quad D\left(\frac{bl'}{3l-l'},\ \frac{cl'}{3l'-l},0\right);$$

$$A'\left(\frac{bl''}{3l''-l'},\ \frac{cl'}{3l'-l'},\ \frac{d(l''-l')}{3l''-l'}\right),\quad B'\left(0,\frac{cl'}{3l'-l},\ \frac{dl'}{3l''-l'}\right)$$

$$C'\left(\frac{b(l''-l')}{3l'-l'},\ 0,\ \frac{dl''}{3l''-l'}\right),\quad D'\left(\frac{bl''}{3l''-l'},\ \frac{c(l''-l')}{3l''-l'},0\right),$$

e si verifica subito che le coordinate dei baricentri dei tetraedri ABCD, A'B'C'D' sono $\frac{b}{4}$, $\frac{c}{4}$, $\frac{d}{4}$, cioè quelle stesse del baricentro del tetraedro dato.

Applicando poi a questi due tetraedri la nota formola per il calcolo del volume in funzione delle coordinate dei vertici, si otterranno, con facili trasformazioni, le formole scritte nell'enunciato.

13. *Se sulle rette* $A_{13}A_4$, $A_{13}A_2$ *si prendono i punti* A'_2, A'_4 *in modo che sia*

$$A_4A'_2 : A'_2A_{13} = A_2A'_4 : A'_4A_{13} = r$$

e sulle rette A_1A_{24}, A_3A_{24} *si prendono i punti* A'_3, A'_1 *in modo che sia pure*

$$A_1A'_3 : A'_3A_{24} = A_3A'_1 : A'_1A_{24} = r,$$

il tetraedro $A'_1A'_2A'_3A'_4$ *ha lo stesso baricentro del tetraedro dato.*

Infatti, posto $A_{24}A_{13} \,.\, A'_2A'_4 \equiv K$, $A_{24}A_{13} \,.\, A'_1A'_3 \equiv H$, si ha:

$$A_4A'_2 : A'_2A_{13} = A_{24}K : KA_{13};\quad A_1A'_3 : A'_3A_{24} = A_{13}H : HA_{24} = r.$$

Di qui si trae

$$A_{24}K : KA_{13} = HA_{13} : A_{24}H,$$

e quindi i segmenti $A_{13}A_{24}$, HK hanno lo stesso punto di mezzo. Ora essendo A_{13}, A_{24} i punti medi di A_1A_3, A_2A_4, ed H, K i punti medi di $A'_1A'_3$, $A'_2A'_4$, i due tetraedri $A_1A_2A_3A_4$, $A'_1A'_2A'_3A'_4$ hanno lo stesso baricentro, *c. d. d.*

Questo teorema insegna a costruire un'altra classe di tetraedri iscritti nel dato e isobaricentrici con esso.

14. *Se d'un tetraedro iscritto di 3ª specie e isobaricentrico con il dato le due coppie di spigoli, che hanno le medesime rette, sono proporzionali, le mediane tagliano le facce del tetraedro fondamentale in quattro punti, vertici d'un altro tetraedro isobaricentrico col dato.*

Sia PQRS, come precedentemente, un tetraedro isobaricentrico iscritto di 3ª specie, e si faccia l'ipotesi che $A_1A_3 : PQ = A_2A_4 : RS$. Si dicano G, G' i baricentri delle facce $A_2A_3A_4$, A_1RA_3, e si tiri A_4G', che tagli A_2A_{12} in un punto D. Applicando il teorema di Menelao al triangolo RA_2A_{12} tagliato dalla trasversale A_4G', si ha $A_2D : DA_{12} = 2SA_2 : RS$.

Similmente si ottengono sulle altre facce del tetraedro dato altri tre punti B, C, D tali che

$$\frac{A_4B}{BA_{13}} = 2 . \frac{A_4R}{RS}, \quad \frac{A_1C}{CA_{24}} = 2 . \frac{PA_1}{PQ}, \quad \frac{A_2A}{AA_{24}} = 2 . \frac{PA_4}{PQ} .$$

In virtù dell'ipotesi fatta, e per quanto è stato dimostrato al n. **13**, i secondi rapporti sono eguali, e quindi saranno eguali anche i primi; e allora (teorema precedente) il tetraedro ABCD ha lo stesso baricentro del dato.

La condizione espressa dal teorema precedente per concludere che ABCD è isobaricentrico con il dato, la quale è stata dimostrata sufficiente, è anche necessaria, come è facile verificare.

Catania, agosto 1896.

S. Catania.

FORMOLE RELATIVE AL NUMERO DELLE COMBINAZIONI SEMPLICI E CON RIPETIZIONE

dedotte dalle progressioni aritmetiche

Lo scopo di questa breve nota è di mostrare come le ordinarie formole che danno il numero delle combinazioni semplici e quello delle combinazioni con ripetizione di h elementi, si possano con un metodo, che mi sembra più naturale, dedurre dalle progressioni aritmetiche, e quindi di far vedere come il soggetto dei numeri combinatorii, tanto importante in questioni teoriche e pratiche, si possa anche in un corso liceale opportunamente trattare come una applicazione della accennata teoria.

1. Rappresentiamo gli n elementi dati, fra di loro differenti coi simboli

$$(\alpha) \qquad a_1, \ a_2 \ \ a_3 \ldots a_n \, ;$$

e proponiamoci di trovare il numero delle combinazioni semplici della classe 2, cioè il numero dei gruppi che si possono formare con gli n elementi della serie (α), in modo che ogni gruppo contenga due elementi scelti da (α) e, ciascun gruppo differisca da ognuno degli altri per contenere almeno un elemento differente. Un tal numero si suole rappresentare con $C_{n,2}$ od anche con $\binom{n}{2}$.

Basterà osservare che il primo elemento a_1 di (α) si può successivamente accoppiare con ciascuno dei successivi, dando luogo in tal modo ad $(n-1)$ gruppi della specie richiesta, che il secondo elemento a_2 di (α) si può alla sua volta accoppiare con ciascuno dei successivi, dando luogo ad $n-2$ gruppi differenti fra di loro per il secondo elemento e differenti da quelli ottenuti prima per il primo elemento; nello stesso modo l'elemento a_3 darà $n-3$ gruppi differenti fra di loro e da tutti i precedenti, e finalmente il penultimo elemento a_{n-1} darà luogo al solo gruppo $(a_{n-1}\ a_n)$; in tal modo noi otteniamo tutte le combinazioni possibili della classe 2, poichè ognuna di queste, ordinata secondo gli indici crescenti degli elementi, dovrà cominciare con uno degli elementi di (α) e contenere un altro elemento ad esso successivo; inoltre tutti i gruppi ottenuti sono come si è visto, fra loro differenti, e però si avrà

$$C_{n,2} = \binom{n}{2} = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots 2 + 1$$

ossia

$$C_{n,2} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

2. Per avere $C_{n,3}$ od $\binom{n}{3}$, ossia il numero dei gruppi, composti ciascuno di tre elementi differenti scelti da (α), e tali che ciascuno differisca da ognuno dei rimanenti per contenere almeno un elemento diverso, basta osservare che da ciascun gruppo di due elementi noi possiamo ottenere $n-2$ gruppi di tre elementi, aggiungendo ad esso ad uno ad uno ciascuno degli elementi in esso non contenuti; però ripetendo questa operazione per ciascuno dei gruppi della classe 2, si otterrebbe tre volte il medesimo gruppo di tre elementi; infatti ad es. il gruppo

$$a_i \quad a_j \quad a_k$$

si sarà ottenuto dai tre gruppi

$$a_i\ a_j \qquad a_i\ a_k \qquad a_j\ a_k$$

aggiungendovi rispettivamente gli elementi a_k, a_j, a_i: se vogliamo dunque ottenere il numero delle combinazioni differenti degli n elementi della classe 3, dovremo dividere per 3 il numero

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$$

e quindi si avrà

$$C_{n,3} = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

3. Supponiamo ora che la legge precedentemente dimostrata per $C_{n,2}$ e $C_{n,3}$ sia valida per $C_{n,k}$ $(k < n)$ e dimostriamo che essa è valida per $C_{n,k+1}$ $(k + 1 \leqq n)$.

Per ipotesi avremo

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-k+1)}{1.2.3\ldots.\quad k};$$

ora se ad ognuno dei gruppi composti di k elementi scelti da (α) noi aggiungiamo ad uno ad uno gli elementi esclusi dal gruppo stesso, che sono in numero di $n - k$, noi otterremo $(n - k)$ gruppi della classe $k + 1$, e se nello stesso modo opereremo su ciascuno dei gruppi della classe k, otterremo in tutto

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-k+1)(n-k)}{1.2.3\ldots.\quad k}$$

gruppi composti di $k + 1$ elementi; ciascuno però di questi gruppi è ripetuto $k + 1$ volte perchè ottenuto dalle $k + 1$ combinazioni di k elementi deducibili dal gruppo stesso col trascurare uno qualunque degli elementi in esso contenuti; per avere quindi il numero dei gruppi differenti della classe $k + 1$, si dovrà dividere il numero ottenuto per $k + 1$ si avrà quindi

$$(\beta)\qquad C_{n,k+1} = \binom{n}{k+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-k)}{1.2.3\ldots.k.(k+1)}.$$

4. Dalla formola (β) si deduce immediatamente che

$$(\gamma)\qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1};$$

basterà ridurre i due termini del secondo membro allo stesso denominatore.

Applicando ripetutamente la (γ) avremo

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$
$$\binom{n-1}{k} = \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1},$$
$$\binom{n-2}{k} = \binom{n-3}{k} + \binom{n-3}{k-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\binom{k+1}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}.$$

e sommando le precedenti eguaglianze membro a membro, ed osservando che $\binom{k}{k} = \binom{k-1}{k-1} = 1$, avremo

$$(\delta)\qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \cdots \binom{k}{k-1} + \binom{k-1}{k-1}$$

5. Applichiamo la formola (δ) alla determinazione del numero $C'_{n,k}$ delle combinazioni con ripetizione degli elementi (α), cioè al numero dei gruppi che si possono formare cogli elementi di (α) ciascuno composto di k elementi eguali o differenti, ma tali che ogni gruppo differisca da ciascuno degli altri o per contenere un elemento differente oppure gli stessi elementi ma ripetuti un numero differente di volte.

Per avere $C'_{n,2}$ è chiaro che basta accoppiare ciascun elemento della serie (α) con sè stesso e con ciascuno dei seguenti, per cui si avrà

$$C'_{n,2} = n + (n-1) + (n-2) + \ldots 2 + 1,$$

cioè

$$C'_{n,2} = \frac{n(n+1)}{1 \, . \, 2} = \binom{n+1}{2}.$$

Ammesso ora che si abbia $C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$, dimostriamo che si avrà ancora $C'_{n,k+1} = \binom{n+k}{k+1}$.

A tale scopo immaginiamo di disporre gli elementi di ciascun gruppo secondo l'ordine crescente (non decrescente) dei loro indici, e contiamo quanti sono i gruppi che terminano coll'elemento a_1, quanti quelli che terminano coll'elemento a_2, e finalmente quanti sono quelli che terminano coll'elemento a_n.

Un solo gruppo terminerà coll'elemento a_1 il quale vi sarà ripetuto $k+1$ volte; dunque di questo tipo ne avremo $\binom{k}{k}$; coll'elemento a_2 termineranno tanti gruppi quante sono le combinazioni con ripetizione della classe k che si possano formare coi due elementi a_1, a_2; essi saranno in numero $\binom{k+1}{k}$; in generale termineranno coll'elemento a_k ($k \leqq n$) tanti gruppi quante sono le combinazioni con ripetizione della classe k che si possano formare cogli elementi $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_{k-1}, a_k$ ossia $\binom{2k-1}{k}$; coll'elemento a_n termineranno tanti gruppi quante sono le combinazioni con ripetizione della classe k che si possano formare cogli n elementi dati, ossia $\binom{n+k-1}{k}$; si avrà quindi

$$C'_{n,k+1} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \ldots \binom{n+k-1}{k}$$

ma per la formola (δ) il secondo membro equivale a $\binom{n+k}{k+1}$ e però si avrà

$$C'_{n,k+1} = \binom{n+k}{k+1}.$$

Francesco Panizza.

Venezia 1 febbraio 1897.

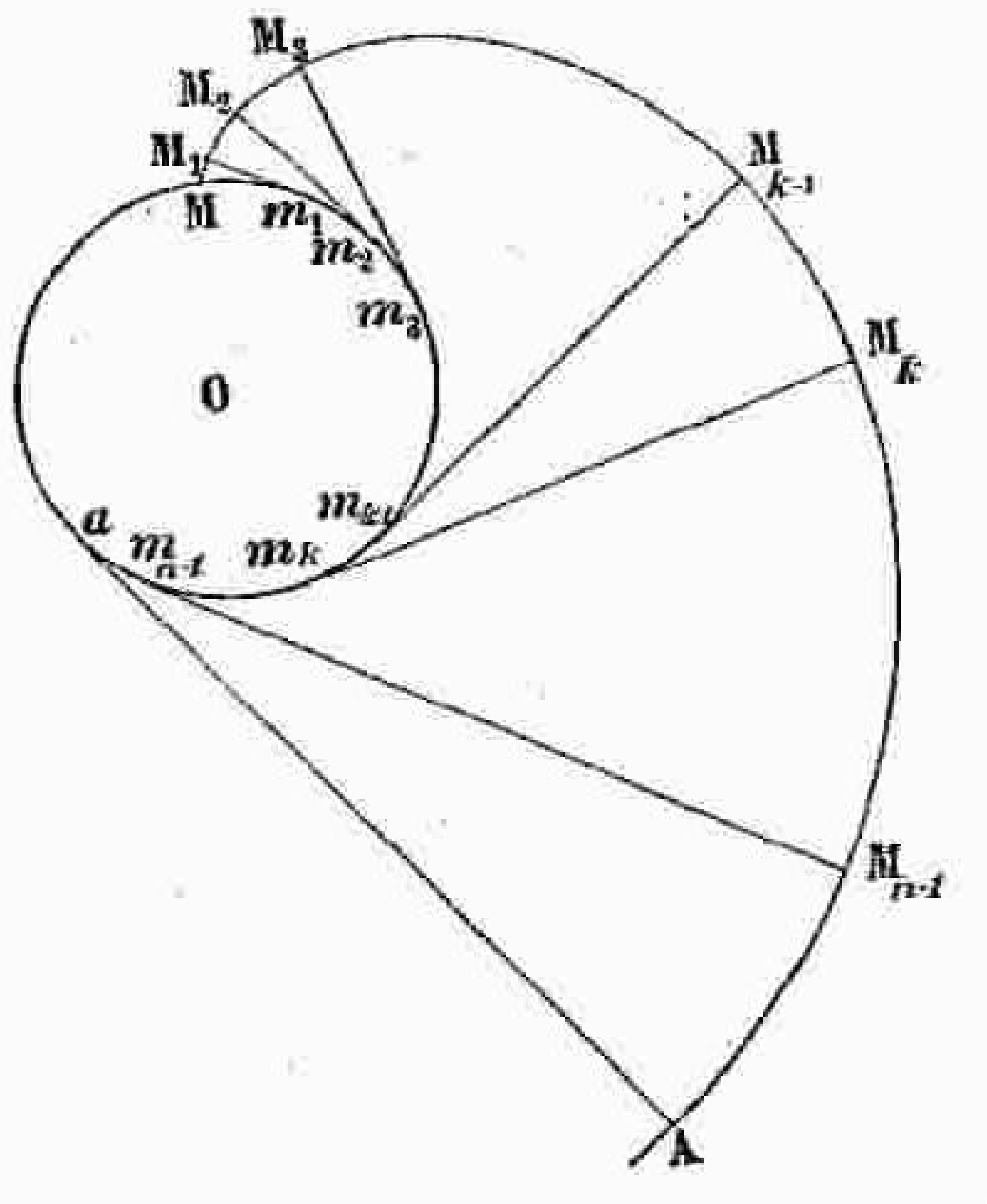
ALCUNE PROPRIETÀ DELLA SVILUPPANTE DI CERCHIO

§ 1. Se, dopo di avere avvolto un filo flessibile e inestendibile attorno a una circonferenza λ, lo si svolge tenendolo teso in linea retta e aderente al cerchio, l'estremità del filo descrive una curva Λ che si chiama *sviluppante* od *evolvente* del cerchio e questa inversamente è la *sviluppata* o l'*evoluta* della curva Λ. Potendosi il filo supporre idealmente di lunghezza indefinita, si comprende che Λ è una curva a spirale, che si avvolge infinite volte attorno al cerchio λ.

Sia M il punto comune alle curve Λ, λ (origine della sviluppante), o il centro del cerchio evoluta ed h il diametro di questo.

Fermato il movimento del filo quando è tangente al cerchio λ nel punto a, e chiamata aA la parte di esso che è rettilinea, i punti a e A si riguardano come *corrispondenti;* il punto a, il segmento aA $(=\rho)$ e l'altro OA $(=$ R$)$ si dicono rispettivamente *centro di curvatura, raggio di curvatura* e *raggio vettore di* Λ *nel punto* A.

Dalla generazione di Λ si ricava che il raggio di curvatura ρ è costantemente eguale in lunghezza all'arco del cerchio evoluta che è compreso fra l'origine M e il centro di curvatura.



Sia MA $= s$ un arco qualunque di Λ, cominciante dall'origine M e M$a = \sigma$ l'arco corrispondente del cerchio λ. Diviso l'arco Ma in n parti eguali nei punti m_1, m_2, m_3, ... m_{k-1}, m_k; .... m_{n-1}, si tirino le tangenti $m_1 M_1$, $m_2 M_2$, $m_3 M_3$ .... $m_{k-1} M_{k-1}$, $m_k M_k$, ... $m_{n-1} M_{n-1}$, Aa, prolungandole fino all'incontro di Λ.

Se n è sufficientemente grande, gli archi MM_1, M_1M_2, M_2M_3, ... si possono considerare come archi circolari di centri m_1, m_2, m_3, ... e di raggi m_1M_1, m_2M_2, m_3M_3, ...

Chiamando t l'arco Mm_1, ε l'angolo formato da due tangenti consecutive ed osservando che queste tangenti hanno la stessa lunghezza dell'arco corrispondente di λ, si ha:

$$\text{arco } M_{k-1}M_k = m_k M_k \cdot \varepsilon = Mm_k \cdot \varepsilon = kt \cdot \varepsilon$$

e quindi:

$$\sum_{k=1}^{k=n} M_{k-1}M_k = (1+2+3+\ldots+n) \cdot t\varepsilon = \frac{n(n+1)}{2} \cdot t\varepsilon = \frac{1}{2} nt \cdot (n\varepsilon + \varepsilon).$$

Passando al limite per $n = \infty$, si trova:

$$s = \frac{1}{2}\sigma \cdot \text{angolo } M\widehat{O}a;$$

e siccome:

$$\text{angolo } M\widehat{O}a = \frac{\text{arco } Ma}{\text{raggio}} = \frac{2\sigma}{h},$$

si ha:

$$s = \frac{\sigma^2}{h}. \tag{1}$$

Ne viene di conseguenza che il raggio di curvatura $\rho\,(=\text{arco } \sigma)$ in un punto qualunque della sviluppante di cerchio è legato all'arco s, contato dall'origine, dalla relazione:

$$\rho = \sqrt{h \cdot s}. \tag{2}$$

Ora dal triangolo rettangolo OAa si ricava:

$$OA = \sqrt{\overline{Aa}^2 + \overline{Oa}^2} = \sqrt{\sigma^2 + \frac{h^2}{4}}$$

e, in causa dell'equazione (1):

$$R = \sqrt{hs + \frac{h^2}{4}}. \tag{3}$$

Se A, B sono due punti qualunque della sviluppante, corrispondenti ai valori s, s_1 dell'arco ed R, R_1 i loro raggi vettori, la formola (3) e l'altra analoga:

$$R_1 = \sqrt{hs_1 + \frac{h^2}{4}}$$

(supponendo $s_1 > s$ e quindi $R_1 > R$) ci dànno:

$$h(s_1 - s) = R_1^2 - R^2,$$

da cui si ricava:

$$\text{arco } AB = \frac{R_1^2 - R^2}{h}. \tag{4}$$

Determiniamo l'inclinazione θ del raggio vettore sulla linea Λ. Siano A, A_1 due punti vicinissimi di Λ e sia $OA_1 > OA$. Col centro O e col raggio OA si descriva l'arco di cerchio AC intercetto fra i raggi vettori OA, OA_1; avendosi

$$\text{arco } AA_1 = \frac{(OA + CA_1)^2 - \overline{OA}^2}{h} = \frac{CA_1(2 \,.\, OA + CA_1)}{h},$$

si trova:

$$\frac{\text{arco } AA_1}{CA_1} = 2 \,.\, \frac{OA}{h} + \frac{h}{CA_1}.$$

Si passi ora al limite, supponendo che A_1 vada indefinitamente avvicinandosi ad A; siccome la posizione-limite della congiungente A_1 con A è la tangente in A alla linea Λ, si trova:

$$\frac{1}{\cos\theta} = 2 \,.\, \frac{OA}{h}, \qquad \text{ossia:} \qquad \cos\theta = \frac{2R}{h}.$$

§ 2. Dall'ultima formola trovata appare che il coseno θ è inversamente proporzionale al raggio vettore, e il fattore di proporzionalità è il raggio del cerchio evoluta.

Si trova ad es. $\theta = 30^\circ$, $\theta = 45^\circ$ rispettivamente nei punti in cui

$$s = \frac{h}{12}, \qquad s = \frac{h}{4}.$$

Gli archi MP_1, MP_2, MP_3 .... della sviluppante che corrispondono a 1, 2, 3, ... volte la circonferenza evoluta, si chiamino *cicli*. Essendo allora il raggio di curvatura della sviluppante all'estremità P_k del ciclo k^{mo} eguale a $kh\pi$, e quindi il raggio vettore eguale a:

$$\frac{h}{2}\sqrt{4k^2\pi + 1},$$

segue che:

« *L'inclinazione θ nell'estremità del ciclo* k^{mo} *è tale, che:* $\operatorname{tang}\theta = 2k\,.\,\pi$ ».

Dall'equazione (4) si deduce che secondo che si abbia:

$$R_1 + R = mh, \qquad \text{ovvero} \qquad R_1 - R = mh,$$

si ha rispettivamente:

$$AB = m(R_1 - R), \qquad \text{ovvero} \qquad AB = m(R_1 + R).$$

Dunque:

« *Se la somma, o la differenza, di due raggi vettori è eguale a* m *volte il diametro del cerchio evoluta, l'arco intercetto da quei due raggi è rispettivamente eguale ad* m *volte la differenza, o la somma, dei due raggi vettori* ».

Dalla (4) si vede che, se a partire da un dato punto A si vuol portare, sulla sviluppante, l'arco AB di data lunghezza l, la determinazione di R_1, a cui si riduce evidentemente la soluzione del problema, si fa col mezzo dell'equazione:

$$R_1 = \sqrt{R^2 \pm hl}, \tag{5}$$

nella quale si prenderà il segno + o il segno —, secondo che l'arco l deve essere portato verso la parte dei raggi vettori crescenti o dei raggi vettori decrescenti.

Nel secondo caso però si deve notare che, non essendovi nella sviluppante di cerchio alcun raggio vettore minore di $\frac{h}{2}$, il problema è possibile soltanto quando sia:

$$l \leqq \frac{R^2}{h} - \frac{h}{4}.$$

Presi, a partire da A, i due archi $AB = AC = l$ in direzioni opposte, e chiamati x, y, i raggi vettori dei punti B, C si ha dalla (5):

$$x = \sqrt{R^2 + hl}, \qquad y = \sqrt{R^2 - hl}$$

ed eliminando l:

$$x^2 + y^2 = 2R^2.$$

Dunque:

« *La somma dei quadrati dei raggi vettori che vanno a punti situati da bande opposte di un punto dato* A *ed equidistanti da esso, è costante ed eguale a due volte il quadrato del raggio vettore che va ad* A ».

Per $l = mR$, si ha:

$$x = \sqrt{R(R + mh)}, \qquad y = \sqrt{R(R - mh)}$$

e quindi:

« *Per portare sulla sviluppante, a partire da* A, *un arco eguale ad* m *volte il raggio vettore di* A, *basta far partire da* O *un raggio vettore media proporzionale fra* R *ed* R + mh, *ovvero fra* R *ed* R — mh, *secondo che l'arco deve essere diretto verso la parte dei raggi vettori crescenti o dei raggi vettori decrescenti.*

Se nell'equazione (5) si considera il segno + e si suppone $l = h$, risulta:

$$R_1^2 = R^2 + h^2.$$

Perciò:

« *Se sopra una sviluppante di cerchio si prende un arco* AB *eguale al diametro del cerchio evoluta, nel triangolo mistilineo* OAB *è verificato il teorema di Pitagora, quando si consideri come ipotenusa il raggio vettore più grande* OB ».

Se nel triangolo mistilineo OAB si suppone verificata la condizione $\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$, applicando l'equazione (4), si trova che fra i raggi vettori estremi R, R_1 deve sussistere la relazione:

$$\frac{(R_1^2 - R^2)^2}{h^2} = R_1^2 + R^2$$

la quale, risolta rapporto ad R_1 e limitata ai soli valori positivi, dà:

$$R_1 = \sqrt{\frac{h^2 + 2R^2 \pm h\sqrt{h^2 + 8R^2}}{2}}.$$

Non potendo R_1 ed R essere eguali, si può supporre $R_1 > R$, ed allora il segno $-$ davanti al radicale interno è da escludere, poichè prendendo tale segno, si giungerebbe alla diseguaglianza assurda:

$$h^2 - h\sqrt{h^2 + 8R^2} > 8.$$

Dunque:

« *In un triangolo mistilineo* OAB *è verificato il teorema di Pitagora, considerando l'arco* AB *come ipotenusa, quando si abbia:*

$$R_1 = \sqrt{\frac{h^2 + 2R^2 + h\sqrt{h^2 + 8R^2}}{2}}.$$

Nel caso particolare di $R = h$, si ha:

$$R_1 = \sqrt{3}\,.\,h.$$

A partire da un punto qualunque A si prenda un arco $AB = \frac{h}{4}$; e da B si conduca Bb tangente al cerchio evoluta. Dall'equazione (5) si ricava:

$$OB = \sqrt{\overline{OA}^2 + \frac{h^2}{4}}$$

e allora il triangolo rettangolo OBb ci dà:

$$Bb = \sqrt{\overline{OA}^2 - \frac{h^2}{4}} = OA.$$

Dunque:

« *Se sopra una sviluppante di cerchio, e a partire da un punto qualunque, si prende un arco eguale alla metà del raggio del cerchio evoluta, il raggio vettore nell'estremo più vicino all'origine dell'evoluta è eguale al raggio di curvatura nell'altro estremo* ».

Se nell'equazione (5) si suppone che il punto A coincida coll'origine M della sviluppante, si ha $R = \frac{h}{2}$ e l'equazione (5) diviene:

$$R_1 = \frac{\sqrt{h(h + l)}}{2}.$$

E se in questa si fa in generale:

$$l = n(n + 1)h,$$

essendo n un numero qualunque positivo, diverso da zero, si ha:

$$R_1 = \frac{2n + 1}{2}h.$$

Ad es. per $n = \frac{1}{2}$ risulta:

$$l = \frac{3}{4} h \quad , \quad R_1 = h$$

e quindi:

« *Un raggio vettore eguale al diametro del cerchio evoluta, stacca sulla sviluppante un arco eguale a $\frac{3}{4}$ del diametro; e reciprocamente* ».

Supponendo che nelle formole precedenti n sia un numero intero, si ha il teorema:

« *Se in una sviluppante di cerchio, a partire dall'origine, si prende un arco eguale ad* n (n + 1) *diametri del cerchio evoluta, il raggio vettore del punto estremo è eguale a* 2n + 1 *raggi; e reciprocamente* ».

(*Continua*) GEMINIANO PIRONDINI.

SOPRA ALCUNI POSTULATI DEL SEGMENTO

In una mia comunicazione all'Ass. Mathesis (Boll. 2), dopo aver constatata l'ingegnosità dell'osservazione del Prof. Frattini (1) (e del Prof. Giudice (2)) colla quale si deriva il postulato di De-Zolt (3) da quello di Archimede (4), esprimevo invece i miei dubbi sulla possibilità asserita dal Frattini (l. c.) di derivare inversamente A da Z.

La cosa per lo meno mi sembrava meritasse attenzione, perchè, dicevo se da Z discendesse A, il postulato A diverrebbe pei segmenti un teorema in quanto che Z è tale pei segmenti. Ora il Prof. Lazzeri ha osservato (5) che la dimostrazione di Z è appoggiata al postulato dell'inversibilità del segmento (6), per modo che il mio ragionamento si traduce nell'altro: da O discende Z, da Z discende A (per ipotesi), dunque da O discende A; sicchè, ricordando che Gérard (7) ha provato che da A discende O, il Prof. Lazzeri ha creduto a tutta prima di scorgere un

(1) Periodico 1895, pag. 153.

(2) *Boll. Mathesis*, 2.

(3) Questo postulato, (che, come mi ha osservato il Prof. Lazzeri, io avevo erroneamente attribuito al De-Paolis) ha per enunciato " Se una grandezza è divisa comunque in parti, non si può, trascurandone alcuno, comporre con le rimanenti l'intera grandezza, „ e sarà qui indicato con Z.

(4) Indicherò con A questo postulato che si enuncia: " date due grandezze omogenee diseguali esiste sempre una multipla della minore che supera la maggiore „.

(5) Periodico fas. 2, 1897 " Sul postulato dell'equivalenza „.

(6) Questo postulato è attribuito generalmente al Prof. D'Ovidio ed io l'indicherò sempre con O. Esso si enuncia " AB è sovraponibile a BA „. È da notarsi che esso equivale (logicamente) a quella parte del post. 2, di Veronese che si enuncia " Un segmento non è eguale ad una sua parte. Un segmento qualsiasi AB è eguale al segmento BA „. (Veronese in collab. con Gazzaniga — *Elementi di Geometria*, 1897, pag. 11. Cfr. più innanzi a pag. 14 il teor. 1 e seg.)

(7) Periodico 1896, fasc. 1.

circolo vizioso nel ciclo di proposizioni coesistenti: da A discende O, da O discende Z, da Z discende A (per ipotesi); e davvero a primo aspetto questo ciclo può parere vizioso; ma ritengo che il Prof. Lazzeri riconoscerà di essere stato tratto in inganno, forse dalla forma non sufficientemente esplicita del mio scritto, in cui di O non si parlava affatto. In ogni modo resta sempre desiderabile ciò che Egli in seguito richiede, che cioè si veda più chiaramente la dipendenza logica dei tre postulati O, Z, A pei segmenti. È ciò che tenterò di fare qui.

Intanto io proverò che *da* Z *non discende in generale* A, come appunto io avevo dubitato.

Consideriamo infatti con Bettazzi [1] la classe Γ di grandezze formata dall'insieme delle tre seguenti categorie:

1° ordini di infinitesimo di x^{μ} per x positivo e infinitesimo, ove μ prende tutti i valori reali e positivi; [2]

2° Ordini di infinitesimo di $\left(a^{-\frac{1}{x}}\right)^{\nu}$ per x infinitesimo positivo ed $a > 1$, ove ν prenda tutti i valori reali e positivi.

3° Ordini di infinitesimo di $\left(a^{-\frac{1}{x}}\right)^{n} x^{\pm m}$ per x infinitesimo positivo ed $a>1$, ove n ed m prendono tutti i valori reali e positivi.

È chiaro che indicando con Ω l'ordine di infinitesimo di $a^{-\frac{1}{x}}$, quello di $\left(a^{-\frac{1}{x}}\right)^{\nu}$ sarà $\nu\Omega$, e quello di $\left(a^{-\frac{1}{x}}\right)^{n} x^{\pm m}$ sarà $n\Omega \pm m$, e che inoltre si ha sempre

$$\mu < \nu\Omega \quad , \quad \mu < n\Omega \pm m. \tag{α}$$

La Classe così formata

$$\Gamma = (\mu, \nu\Omega, n\Omega \pm m)$$

è *ad una dimensione* perchè di due qualunque delle sue grandezze avviene che o sono eguali o una è maggiore dell'altra. Inoltre la Classe è *ad un senso* perchè la somma di alcune delle sue grandezze non è mai minore (anzi è maggiore) di ciascuna di esse; ed essendo poi $a + b > a$ la Classe è certamente senza infinitesimi cioè non contiene grandezze che siano la differenza di grandezze eguali [3]; in altre parole in essa vale il postulalo Z. La Classe è poi *propria* [4] ed inoltre è *illimitata* perchè non contiene grandezza minima [5].

---

(1) Bettazzi, *Teoria delle Grandezze*, opera premiata dalla R. Acc. dei Lincei. Pisa, Spoerri, 1890. V. pag. 41, n. 49.

(2) Qui, contrariamente a quanto fa il Bettazzi, si esclude che possa essere $\mu=0$ perchè, come non esiste il segmento zero, così vogliamo escludere per analogia che la nostra Classe contenga la differenza di due grandezze eguali.

(3) Quando, con Bettazzi, si ammette che ogni Classe contenga le differenze di grandezze eguali cioè gli infinitesimi, si possono fare due ipotesi: o si ammette che valga sempre per la somma la proprietà detta *dipendenza*, cioè si ammetta che la somma si alteri se si cangia una (una sola) sua parte in un'altra disuguale (non confondasi il cangiare col sopprimere a dirittura), oppure si nega la dipendenza per il caso che si tratti di sostituire un infinitesimo con un altro. Nel primo caso si prova che (almeno nelle Classi *proprie*, cioè tali che contengono la differenza di due qualunque loro grandezze) tutti gli infinitesimi sono uguali e la grandezza che li rappresenta prende allora il nome di modulo della somma e si indica col simbolo O. (Bettazzi, l. c., pag. 13). La possibilità di Classi con infinitesimi differenti è subito palese considerando l'insieme di tutti gli angoli e di tutte le semistriscie del piano (Lazzeri, l. c.); queste ultime sono infinitesimi perchè un angolo può rimanere invariato coll'aggiunta di una semistriscia di qualunque altezza.

(4) Cioè contiene la differenza di due qualunque sue grandezze *disuguali*.

(5) Una classe non può contenere grandezza massima, perchè se contiene a e b, contiene anche $a+b$, ed $a+b > a$ (per b non infinitesimo e quindi *sempre* nel caso nostro).

Tuttavia a cagione della (α) non è manifestamente valido in tale Classe il postulato di Archimede. E ciò prova il nostro assunto, perchè per tale Classe, come si è già notato, vale il postulato di De-Zolt.

In secondo luogo dico che *da* Z *deriva* O (pei segmenti).

Infatti supponiamo che ribaltando un segmento AB su se stesso in modo che A vada in B, il punto B prenda una posizione C diversa da A; si potrà sempre supporre che C cada fra A e B. Allora avremo $AB = BC$ e potremo prendere fra B e C un punto D in modo che sia $ACB = BDC$, donde $BC = CD$. Ne segue $AB = CD$, mentre, essendo $AB = AC + CD + DB$, dev'essere, pel postulato Z, $AB > CD$. Dunque O è vero.

Di qui segue che neppure A può derivare da O; perchè se da O derivasse A, da Z derivando O, da Z deriverebbe A, il che non è possibile come si è già notato.

Così abbiam veduto che dei tre postulati O, Z, A uno solo (A) contiene gli altri due e può esser preso per fondamentale. Ma la poca evidenza di A rende opportuno di cercare di ricavare A da qualche altro postulato, unito (se occorre) ad uno dei due Z, O. Ora Bettazzi ha provato che la *connessione* (1) è per le Classi proprie illimitate la condizione necessaria e sufficiente per la validità di A (2). E siccome la connessione anzi la continuità è molto più evidente che A per la classe dei segmenti, così sembra opportuno accettarla insieme a Z (o ad O) per dimostrare A, salvo poi a verificare se Z sia o no contenuto in essa.

Ammettendo la continuità, diviene accettabile per esempio la seguente dimostrazione di A, che mi è stata recentemente comunicata dal Prof. De Amicis, e che io applicherò per più chiarezza ai segmenti. Supponiamo che entro AB cadano infiniti segmenti consecutivi AC, CC', $C'C''$, ... eguali fra loro. Allora ammessa la continuità si prova esistere un segmento $AM \not> AB$ (3) limite di $AC + CC' + C'C'' + \ldots$

Anche CM poi è limite di $CC' + C'C'' + \ldots$, e poichè le parti di queste due somme sono rispettivamente eguali, deve essere $CM = AM$, cioè la parte eguale al tutto, contro al postulato Z.

È più semplice però la dimostrazione di Bettazzi che suppone soltanto la connessione. Essa è la seguente:

Sia a un segmento, e si pongano in un gruppo P_1 tutti i segmenti p_1 che sono minori di a o di qualche multiplo di a, e in un altro gruppo P_2 tutti i rimanenti

---

(1) Quando tutte le grandezze di una Classe propria si ripartiscono in due gruppi P_1, P_2, in modo che tutte le grandezze di P_1 siano minori di quelle di P_2 possono darsi quattro casi.

1° Può darsi che P_1 abbia massimo e P_2 minimo.
2° Può darsi che P_1 abbia massimo e P_2 non abbia minimo.
3° Può darsi che P_1 non abbia massimo e P_2 abbia minimo.
4° Può darsi che nè P_1 abbia massimo nè P_2 abbia minimo.

Si dice allora che P_1 e P_2 danno luogo nel 1° Caso a una *successione*, nel 2° e 3° a un *collegamento*, nel 4° a uno *spezzamento*.

Lo spezzamento si dice poi una *sezione* se la differenza fra una grandezza di P_2 e una di P_1 può prendersi minore di una grandezza qualunque assegnata; altrimenti si dice *salto*.

Le classi proprie illimitate non contengono che collegamenti o spezzamenti (mai successioni); esse diconsi *connesse*, quando non ammettono salti, e più in particolare diconsi *continue*, se non ammettono nè salti nè sezioni, cioè se ammettono soltanto collegamenti. (Non mi sembrano necessarie le considerazioni sulle classi chiuse e connesse che il Bettazzi premette alla definizione della continuità). Bettazzi, l. c., pag. 30, 31 e 40-41.

(2) Bettazzi, l. c., pag. 42-43.

(3) Il segno $\not>$ significa *non maggiore*. (Vedi Zeitschrift, fasc. 2° del 1897).

segmenti p_2, cioè quelli che sono maggiori di qualunque multiplo di a. Allora per la connessione si potrà prendere $p_2 - p_1 < a$ ossia $p_2 < p_1 + a$; ma se $p_1 < ma$ sarà $p_1 + a < (m+1)a$, e quindi $p_2 < (m+1)a$, contro l'ipotesi; dunque p_2 non esiste, e perciò nemmeno P_2, il che equivale a dire che è valido A.

Reggio Emilia 7 Aprile 97.

G. Sforza.

SULLA DEFINIZIONE D'INFINITO

Nei miei " Fondamenti per una teoria generale dei gruppi " (V. questo Periodico, anno 1896 e fasc. 2°, anno 1897) citando alcune delle definizioni di gruppo finito od infinito date da altri, censurai quella data dal prof. Biasi: il quale nell'ultimo fascicolo di questo Periodico difende la sua definizione. Mi permetta l'egregio prof. Biasi ch'io qui brevemente gli replichi.

La sua definizione è la seguente: (V. Biasi, *Elementi di Aritmetica ed Algebra*, Sassari, 1892, § 4). Un sistema si dirà *infinito*, se dopo aver pensato più cose del sistema, sia sempre possibile pensarne altre ancora o, brevemente, se si possa *continuare indefinitamente* a pensare nuove cose del sistema. In caso diverso si dirà *finito* ". Al § 1 del suo libro è poi detto: " Una cosa (prima) e un'altra od altre insieme (successive) sono *più* cose ". Io ho obiettato (V. Fondamenti-Introduzione) che tale definizione è assurda, cioè che non esistono gruppi o sistemi che sieno infiniti secondo essa, potendosi per *più* cose prendere *tutte* quelle del sistema, oltre le quali non ve ne sono altre; a meno di non intendere o sottintendere che le cose pensate costituiscano un gruppo finito, il che darebbe luogo ad un circolo vizioso.

Ora il prof. Biasi, nelle sue osservazioni, dice: " ....la definizione stabilisce " come condizione sufficiente, non necessaria, affinchè il gruppo sia finito, il fatto " che le cose siano pensate. E invero io non avevo precedentemente ammessa la " possibilità di pensare tutte le cose di un sistema, e mi era perciò lecito parlar " di sistemi, i cui individui non si potessero tutti pensare, come ho fatto ". Rispondo che precedentemente egli non ha ammessa, è vero, ma neppure ha esclusa quella possibilità; ma anche accettando questa modificazione, domando come si concepisce un sistema, del quale non si possono *pensare* tutte le cose? E quelle che non si possono *pensare* di che natura saranno? Se anche l'autore volesse dire che ammette la possibilità di non pensare *successivamente* tutte le cose del sistema (come forse si può intendere dalla sua citata definizione di *più* cose a causa di quel *successive* fra parentesi) la cosa forse cambierebbe aspetto, ed io intravederei il suo pensiero, ma non accetterei ugualmente la definizione, giacchè in essa si trova allora il concetto di ordine, assai complesso, che l'autore non cita nè spiega affatto prima.

Inoltre il prof. Biasi, a dimostrare la non assurdità delle sue definizioni e l'esistenza dei suoi gruppi infiniti, cita l'esempio che il Dedekind prese al Bolzano, quello cioè di tutti gli enti che possono essere oggetto del nostro pensiero, perchè, egli dice, " dopo aver pensato più enti, sieno essi materiali, o pensieri essi " stessi, rimangono sempre a pensare le loro immagini nella nostra mente ". Tale esempio non dimostra nulla. Quel gruppo esiste infatti, è vero, ed altri, con altre definizioni, può giustamente chiamarlo infinito; ma il ragionamento che l'autore fa per dirlo infinito nel senso suo si può applicare a qualunque gruppo, facendo così parere infiniti tutti i gruppi, meno quello di un solo ente, giacchè in ogni gruppo che non sia di un solo ente, pensatine *alcuni* ce ne sono sempre altri a cui pensare.

L'obiezione che fa il prof. Burali-Forti, e che il prof. Biasi riporta, cioè: che " in sostanza egli dice che è infinito ciò che è infinito e finito ciò che è finito " mi pare che, interpretata convenientemente, abbia fondamento. Ed infatti intendendo la definizione del prof. Biasi nel solo modo nel quale, secondo me, può essere difesa, cioè col pensare *successivamente* le cose del sistema, se non si vuol cadere nell'obiezione fatta che si potranno sempre pensar *tutte* le cose dopo le quali non ce ne sono altre, bisognerà dire che un gruppo è infinito quando (come chiarisce l'autore stesso nel § 4) si possa continuare *indefinitamente* a pensare nuove cose del sistema, e qui si annida allora, com'è chiaro, l'idea di gruppo infinito, quella stessa che si vuol definire. E l'esempio che l'autore porta nel rispondere, cioè quello " dei punti contenuti in un segmento, il quale può dirsi finito perchè " ha *fine* da una banda e dall'altra, mentre per la definizione mia (del prof. Biasi) " è infinito " non vale giacchè gli estremi del segmento sono finali soltanto per la loro posizione, proprietà speciale alla natura geometrica del gruppo, che non ha che far niente coll'idea del gruppo finito: e il segmento è finito soltanto in quanto è un ente individuo indipendentemente dall'essere costituito da un gruppo infinito o finito di punti, mentre il prof. Burali-Forti non intendeva, com'è chiaro, usare le sue parole finito ed infinito se non nel senso dei gruppi di punti.

Torino, 9 marzo 1897.

R. Bettazzi.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 284* 298* 342* 343* 344* 345* 346* 347* 348*

284*. *Di un quadrilatero* ABCD *sono noti i lati* AB $= a$, BC $= b$ *e gli angoli* A, B, C. *Dimostrare che l'area del quadrilatero è espressa da*

$$\Big\{ ab\Big[\operatorname{sen} B . \operatorname{sen}(A+B+C) - \operatorname{sen} A . \operatorname{sen} C - \operatorname{sen}(B+C) . \operatorname{sen}(A+B)\Big] + a^2 \operatorname{sen} A . \operatorname{sen}(B+C) + b^2 \operatorname{sen} C . \operatorname{sen}(A+B)\Big\} : 2 \operatorname{sen}(A+B+C).$$

A. Lugli.

Risoluzione del Prof. A. Chiari.

Siano α e β gli angoli che i lati b e a del quadrilatero fanno con la sua diagonale $d =$ AC. Posto AD $= y$, CD $= x$, l'area della figura è espressa da

(1) $$S = \frac{1}{2}\Big\{ab \operatorname{sen} B + xy \operatorname{sen} D\Big\}.$$

Dal triangolo ACD, per le relazioni esistenti tra gli elementi d'un triangolo, si ottiene

$$x = \frac{d \operatorname{sen}(C - \alpha)}{\operatorname{sen} D}, \qquad y = \frac{d \operatorname{sen}(A - \beta)}{\operatorname{sen} D},$$

e quindi

(2) $$xy = \frac{d^2 \operatorname{sen}(C - \alpha) \operatorname{sen}(A - \beta)}{\operatorname{sen}^2 D}.$$

Dal triangolo ABC si ottiene

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a \operatorname{sen} B}{d}, \qquad \operatorname{sen} \beta = \frac{b \operatorname{sen} B}{d},$$

$$\cos \alpha = \frac{b - a \cos B}{d}, \qquad \cos \beta = \frac{a - b \cos B}{d}.$$

Sviluppando la (2), e sostituendo in essa questi valori si ha

$$xy = \frac{ab\left[\operatorname{sen} A . \operatorname{sen} C + \operatorname{sen}(A+B) . \operatorname{sen}(B+C)\right] - a^2 \operatorname{sen} A . \operatorname{sen}(B+C) - b^2 \operatorname{sen} C . \operatorname{sen}(A+B).}{\operatorname{sen}^2 D}$$

Posto questo valore nella (1) risulta, essendo $\operatorname{sen} D = - \operatorname{sen}(A + B + C)$,

$$S = \left\{ab\left[\operatorname{sen} B . \operatorname{sen} A(+ B + C) - \operatorname{sen} A . \operatorname{sen} C - \operatorname{sen}(B + C) . \operatorname{sen}(A + B)\right] + a^2 \operatorname{sen} A . \operatorname{sen}(B + C) + b^2 \operatorname{sen} C . \operatorname{sen}(A + B)\right\} : \operatorname{sen}(A + B + C).$$

Si osservi che se il quadrilatero è iscritto, $\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} C$; $\operatorname{sen}(A + B + C) = -$ $- \operatorname{sen} B$; $\operatorname{sen}(B + C) = \operatorname{sen}(A - B)$ e che la formola diviene in valore assoluto

$$S = \frac{2ab \operatorname{sen}^2 A - \left[(a^2 + b^2) \operatorname{sen} A \cos B - (a^2 - b^2) \cos A \operatorname{sen} B\right] \operatorname{sen} A}{2 \operatorname{sen} B}.$$

Se il quadrilatero è un parallelogrammo, la formola si semplifica in

$$S = ab \operatorname{sen} B.$$

Altre risoluzioni del Prof. Castelli e del sig. Celestri.

298*. *Scomporre un numero* N *in tre parti* x, y, z *in progressione aritmetica, e tali che la somma dei loro cubi sia eguale al cubo di un numero* P, *e trovare le condizioni perchè i tre numeri* x, y, z *resultino reali e positivi.*

Risoluzione dei sigg. Giulio Michetti, studente dell'Università di Pisa e G. Lubrano.

Si ha il sistema:

$$\left.\begin{array}{lr} (1) & x + y + z = N \\ (2) & x^3 + y^3 + z^3 = P^3 \\ (3) & x + z = 2y. \end{array}\right\}$$

Sostituendo nella (1) il valore di $x + z$ dato dalla (3) si ha l'equazione

$$y + 2y = N \quad , \quad \text{da cui} \quad y = \frac{N}{3}.$$

Sostituendo nella (2) questo valore di y, si ha

(4) $$x^3 + \frac{N^3}{27} + z^3 = P^3;$$

dall'identità

$$x^3 + z^3 = (x + z)^3 - 3xz(x + z),$$

sostituendoci i valori noti avremo:

$$x^3 + z^3 = \frac{8N^3}{27} - 2xz N,$$

e per conseguenza la (4) diviene

$$\frac{8N^3}{27} - 2xzN + \frac{N^3}{27} = P^3,$$

e da questa equazione si ricava

$$xz = \frac{N^3 - 3P^3}{6N};$$

ed essendo

$$x + z = \frac{2N}{3}$$

i valori di x e z sono le radici dell'equazione di 2° grado

$$(5) \qquad m^2 - \frac{2N}{3}m + \frac{N^3 - 3P^3}{6N} = 0;$$

dunque:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}\left(N \pm \sqrt{\dfrac{9P^3 - N^3}{2N}}\right) \\ y = \dfrac{N}{3} \\ z = \dfrac{1}{3}\left(N \pm \sqrt{\dfrac{9P^3 - N^3}{2N}}\right). \end{cases}$$

Queste due soluzioni sono simmetriche, e ragione di ciò si ha ricordando le proprietà delle progressioni aritmetiche.

Discussione. — Il numero dato N è da supporsi positivo, e quindi perchè x e z sieno reali bisogna che sia

$$9P^3 - N^3 \geqq 0,$$

da cui

$$N \leqq P\sqrt[3]{9}.$$

Siccome x e z sono le radici dell'equazione (5), affinchè sieno positive, bisognerà che il primo membro della (5) abbia due variazioni; il che richiede che sia

$$N^3 - 3P^3 \geqq 0,$$

da cui

$$N \geqq P\sqrt[3]{3}.$$

Dunque la condizione affinchè x, y, z sieno reali e positivi è:

$$P\sqrt[3]{9} \geqq N \geqq P\sqrt[3]{3}.$$

342*. *Indicando i vertici di un quadrilatero inscritto in un circolo con 1, 2, 3, 4 i lati con* a, b, c, d, *con* h_{3a}, *per esempio, la distanza dal vertice* 3 *al lato* a, *e con* m_{3a} *il segmento congiungente il vertice* 3 *col punto medio del lato* a. *Dimostrare le seguenti formule:*

a) $$\frac{h_{1b}}{h_{2d}} = \frac{h_{3a}}{h_{2c}} = \frac{h_{3d}}{h_{4b}} = \frac{h_{1c}}{h_{4a}},$$

b) $$S = \frac{1}{2}\sqrt[4]{(ah_{1a} + bh_{4b})(bh_{1b} + ch_{1c})(ch_{2c} + dh_{2d})(dh_{3d} + ah_{3a})},$$

c) $$(h_{1b} + h_{3d} + h_{1c} + h_{3a})\left(\frac{1}{h_{1b}} + \frac{1}{h_{3d}} + \frac{1}{h_{1c}} + \frac{1}{h_{3a}}\right) =$$

$$(h_{2c} + h_{4a} + h_{2d} + h_{4b}) \left(\frac{1}{h_{2c}} + \frac{1}{h_{4a}} + \frac{1}{h_{2d}} + \frac{1}{h_{4b}}\right)$$
$$= (a + b + c + d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right),$$

d) $$m^2_{1b} + m^2_{2c} + m^2_{3d} + m^2_{4a} = m^2_{3a} + m^2_{2d} + m^2_{1c} + m^2_{4b}.$$

G. Candido.

Risoluzione del sig. Gino Lubrano, studente d'Istituto tecnico a Livorno.

Dato un quadrilatero 1, 2, 3, 4 inscritto in un circolo di raggio R, indichiamo con x ed y le sue diagonali 13, 24.

Consideriamo separatamente i triangoli formati da una diagonale e da due lati consecutivi; per un teorema noto avremo

$$h_{1b} = \frac{ax}{2R},\ h_{3a} = \frac{bx}{2R},\ h_{3d} = \frac{cx}{2R},\ h_{1c} = \frac{dx}{2R},\ h_{2d} = \frac{ay}{2R},\ \ h_{2c} = \frac{by}{2R},\ h_{4b} = \frac{cy}{2R},\ h_{4a} = \frac{dy}{2R}.$$

Se dividiamo la prima di queste eguaglianze per la quinta, la seconda per la sesta, la terza per la settima, la quarta per l'ottava, abbiamo

$$\frac{h_{1b}}{h_{2d}} = \frac{x}{y},\quad \frac{h_{3a}}{h_{2c}} = \frac{x}{y},\quad \frac{h_{3d}}{h_{4b}} = \frac{x}{y},\quad \frac{h_{1c}}{h_{4a}} = \frac{x}{y}.$$

Siccome i secondi membri di queste eguaglianze sono eguali, così devono essere pure eguali i primi, e la formula (a) è dimostrata.

La superficie S di tutto il quadrilatero è uguale alla somma delle superficie dei due triangoli, nei quali è scomposto da ciascuna dalle due diagonali, così le aree dei triangoli 123, 341 essendo rispettivamente eguali a $\frac{1}{2}\, b\, h_{1b}$, $\frac{1}{2} ch_{1c}$, si ha

$$S = \frac{1}{2}(bh_{1b} + ch_{1c}),$$
$$S = \frac{1}{2}(ah_{4a} + bh_{4b}),$$
$$S = \frac{1}{2}(ch_{2c} + dh_{2d}),$$
$$S = \frac{1}{2}(dh_{3d} + ah_{3a}).$$

Moltiplicando membro a membro queste eguaglianze e risolvendo rispetto ad S, si ha la formula (b).

Per dimostrare la formula (c) basta sostituire alle altezze i valori che sono espressi dalle formule sopra stabilite, e si ha

$$\left(h_{1b} + h_{3d} + h_{1c} + h_{3a}\right)\left(\frac{1}{h_{1b}} + \frac{1}{h_{3d}} + \frac{1}{h_{1c}} + \frac{1}{h_{3a}}\right) = \frac{x}{2R}\left(a + b + c + d\right)\frac{2R}{x}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) =$$
$$= \left(a + b + c + d\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right).$$

Similmente

$$\left(h_{2c} + h_{4a} + h_{2d} + h_{4b}\right)\left(\frac{1}{h_{2c}} + \frac{1}{h_{4a}} + \frac{1}{h_{2d}} + \frac{1}{h_{4b}}\right) = \frac{y}{2R}\left(a + b + c + d\right)\frac{2R}{y}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) =$$
$$= \left(a + b + c + d\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$$

e la formula (c) è dimostrata.

Per dimostrare l'eguaglianza (d) applicheremo il teorema delle mediane ai triangoli già osservati, ed avremo:

$$m^2_{1b} = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{2}{a} - \frac{b^2}{2}\right) \qquad m^2_{3a} = \frac{1}{2}\left(x^2 + b^2 - \frac{a^2}{2}\right)$$

$$m^2_{2c} = \frac{1}{2}\left(y^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}\right) \qquad m^2_{2d} = \frac{1}{2}\left(y^2 + a^2 - \frac{d^2}{2}\right)$$

$$m^2_{3d} = \frac{1}{2}\left(x^2 + c^2 - \frac{d^2}{2}\right) \qquad m^2_{1c} = \frac{1}{2}\left(x^2 + d - \frac{c^2}{2}\right)$$

$$m^2_{4a} = \frac{1}{2}\left(y^2 + d^2 - \frac{a^2}{2}\right) \qquad m^2_{4b} = \frac{1}{2}\left(y^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}\right).$$

Sommando avremo:

$$m^2_{1b} + m^2_{2c} + m^2_{3d} + m^2_{4a} = x^2 + y^2 + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2),$$

$$m^2_{3a} + m^2_{2d} + m^2_{1c} + m^2_{4b} = x^2 + y^2 + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2);$$

ma due quantità eguali ad una terza sono eguali fra loro, e la formula (c) resta dimostrata.

Altre risoluzioni del sig. Barbagallo e del sig. G. Guadalupi, alunno del R. istituto tecnico di Bari.

343*. *La cifra delle decine di qualunque potenza di 3 non può mai essere dispari.*

Bonolis.

Risoluzione del sig. Francesco Barbagallo, alunno del R. istituto tecnico di Catania e del sig. T. Mari.

Infatti la cifra delle unità in qualunque potenza di 3 non può essere che 1, 3, 7, 9, poichè una potenza di 3 non è divisibile nè per 2, nè per 5, epperò moltiplicando una potenza di 3 per 3 la cifra delle decine da riportare è sempre 0 o 2; per cui, essendo il prodotto di due numeri dispari ugualе ad un numero dispari ed il prodotto di un numero dispari per un numero pari uguale ad un numero pari, la cifra delle decine in una potenza di 3 o è sempre pari, o è sempre dispari, ma nella terza potenza di 3 la cifra delle decine è 2, sicchè resta dimostrato che in una potenza qualunque di 3 la cifra delle decine non può essere mai dispari.

344*. *In qualunque potenza di 5 la cifra delle unità è sempre 5, quella delle decine è sempre 2, la cifra delle centinaia non può essere che 1 o 6, quella delle unità di migliaia non può essere che 0, 3, 5, 8 (0 e 5 corrispondono al 6; 3 ed 8 all'1), e finalmente la cifra delle decine di migliaia non può mai essere nè 3, nè 8.*

Bonolis.

Risoluzione del sig. Francesco Barbagallo.

Essendo una potenza di 5 divisibile per 5 e non per 2, è evidente che la cifra delle unità è sempre 5, onde moltiplicando una potenza di 5 per 5 la cifra delle decine da riportare è sempre 2. Ora essendo il prodotto di 5 per un numero pari uguale ad un multiplo di 10, ed il prodotto di 5 per un numero dispari = ad un multiplo di 10 più 5, risulta chiaro che in qualunque potenza di 5 la cifra delle decine deve essere o sempre 2, o sempre 7; ma è 2 nella potenza 5^2, onde resta dimostrato che la cifra delle decine in una potenza di 5 è sempre 2.

Moltiplicando così una potenza di 5 per 5 la cifra delle centinaia da riportare è sempre 1, epperò qualunque sia la cifra delle centinaia nella potenza 5^{m-1} è chiaro che nella potenza 5^m la cifra delle centinaia è o 1, o 6; e precisamente, se nella potenza 5^m è 1 la cifra delle centinaia è chiaro che in 5^{m+1} deve essere 6 ed in 5^{m+2} deve essere nuovamente 1, e così di seguito alternativamente: e siccome in 5^3 la cifra delle centinaia è 1, possiamo stabilire che in una potenza di 5. la cifra delle centinaia è 1 o 6 secondo che l'esponente è dispari o pari.

Moltiplicando una potenza di 5 per 5 la cifra delle unità di migliaia da riportare è 0 ovvero 3; epperò qualunque sia la cifra delle unità di migliaia nella potenza 5^{m-1}, la cifra delle unità di migliaia nella potenza 5^m deve essere 0, 3, 5, 8, e precisamente se $m=2n$, nella potenza 5^{m-1} la cifra delle centinaia è 1, onde moltiplicando 5^{m-1} per 5 la cifra delle unità di migliaia da riportare è 0, per cui in 5^m la cifra delle centinaia è 6, e la cifra delle unità di migliaia è o 0, o 5; se poi $m=2n+1$ allora nella potenza 5^{m-1} la cifra delle centinaia è 6 e moltiplicando 5^{m-1} per 5 la cifra delle unità di migliaia da riportare è 3, onde nella potenza 5^m la cifra delle centinaia è 1 e la cifra delle unità di migliaia è 3 o 8.

Moltiplicando una potenza di 5 per 5 la cifra delle decine di migliaia da riportare è sempre 0, 1, 2, 4, onde qualunque sia la cifra delle decine di migliaia nella potenza 5^m, nella potenza 5^{m+1} la cifra delle decine di migliaia non può essere nè 3, nè 8.

345*. *La cifra delle decine di qualunque potenza di 7 non può essere che* 0 *o* 4; *e propriamente è* 0 *se la cifra delle unità della potenza è* 1 *o* 7, *ed è invece* 4 *se la cifra delle unità è* 3 *o* 9.

BONOLIS.

Risoluzione del sig. Francesco Barbagallo.

Infatti è evidente che, se due potenze di 7 hanno contemporaneamente la stessa cifra delle unità e la stessa cifra delle decine, nelle potenze successive le cifre delle unità e le cifre delle decine si debbono ripetere con lo stesso ordine come nelle antecedenti, ed essendo, 7, 9, 3, 1, 7,... le cifre delle unità; 0, 4, 4, 0, 0,... le cifre delle decine nelle rispettive potenze 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª,..., possiamo dire che nelle potenze di 7 in cui la cifra delle unità è 7, 9, 3, 1, la cifra delle decine è rispettivamente 0, 4, 4, 0, e possiamo osservare inoltre che dette potenze debbono essere rispettivamente della forma $4K+1$, $4K+2$, $4K-1$, $4K$.

346*. *Il quadrato d'un numero, formato da* p *cifre* 9 *seguite da una cifra qualunque* a, *si compone di* p − 1 *cifre* 9, *seguite dal complemento* a 100 *del doppio di* 10 − a, *da* p − 1 *zeri e dal quadrato di* 10 − a *preceduto da uno zero se è di una cifra. Per esempio*

$$999998^2 = 9999\ 96\ 0000\ 04,$$
$$999993^2 = 9999\ 86\ 0000\ 49.$$

BONOLIS.

Risoluzione del sig. Francesco Barbagallo e del sig. Guido Bordi.

Infatti indicando con $999\ldots 9$ un numero in cui sono p cifre uguali a 9, abbiamo:

$$\begin{aligned}
999\ldots 9a^2 &= [10^{p+1}-(10-a)]^2\\
&= 10^{2p+2}-2(10-a)\,10^{p+1}+(10-a)^2\\
&= 10^{2p+2}-2\times 10^{p+2}+2a\,10^{p+1}+(10-a)^2\\
&= (10^p\ \ -2)\,10^{p+2}+2a\,10^{p+1}+(10-a)^2\\
&= (\underset{12\ldots p}{99\ldots 9}\times 10+8)\,10^{p+2}+2a'\,10^{p+1}+(10-a)^b\\
&= \underset{12\ldots p}{99\ldots 9}\times 10^{p+3}+8\times 10^{p+2}+2a\,10^{p+1}+(10-a)^2\\
&= \underset{12\ldots p}{99\ldots 9}\times 10^{p+3}+(80+2a)\,10^{p+1}+(10-a)^2
\end{aligned}$$

e siccome

$$80 + 2a = 100 - 2(10 - a)$$

e

$$a < 9$$

anche

$$80 + 2a < 100$$

onde $(80 + 2a)\,10^{p+1}$ non può contenere più di 2 cifre seguite da $p + 1$ zeri; e analogamente essendo

$$(10 - a)^2 < 100$$

anche $(10 - a)^2$ non può contenere più di 2 cifre, onde il teorema resta dimostrato.

347*. *Se un numero* P *è formato da* n *cifre uguali ad* a, *seguite dalla cifra* b, *e da ognuna di queste cifre si tolgono* c *unità, si avrà un nuovo numero il cui quadrato si otterrà dal quadrato di* P *togliendo da ognuna delle sue cifre* c *unità, soltanto per*

$$a = 5,\ 6,\ 7,\ 8$$
$$b = 6,\ 7,\ 8,\ 9$$
$$c = 1,\ 3,\ 5,\ 7$$

per esempio

$$(55\ldots56 - 11\ldots11)^2 = 55\ldots56^2 - 11\ldots11$$
$$(66\ldots67 - 33\ldots33)^2 = 66\ldots67^2 - 33\ldots33$$
$$(77\ldots78 - 55\ldots55)^2 = 77\ldots78^2 - 55\ldots55$$
$$(88\ldots89 - 77\ldots77)^2 = 88\ldots88^2 - 77\ldots77$$

BONOLIS.

Risoluzione del sig. Francesco Barbagallo, alunno del R. Istituto Tecnico di Catania.

Indichi λ un numero formato di n cifre uguali ad a, seguite dalla cifra b: e μ un numero formato di $n + 1$ cifre uguali a c; allora il problema può ridursi all'espressione

(1) $$(\lambda - \mu)^2 = \lambda^2 - [(\mu - c)\,10^n + \mu]$$

ovvero

(2) $$(\lambda - \mu)^2 = \lambda^2 - (\mu\,10^{n+1} + \mu)$$

secondo che λ^2 contenga $2n + 1$, o $2n + 2$ cifre. Dalle precedenti uguaglianze si può escludere il caso di $c = 9$ poichè allora in esse i secondi membri dovrebbero essere negativi.

Ora dalla (1) si ha:

$$\lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu = \lambda^2 - \mu\,10^n + c\,10^n - \mu$$

da cui

$$10^n + \mu + 1 - \frac{c}{\mu}\,10^n = 2\lambda$$

ciò che è impossibile, poichè n contenendo $n + 1$ cifre uguali a c sarà:

$$c\,10^n < \mu$$

per cui $10^n + \mu + 1 - \frac{c}{\mu}\,10^n$ è sempre frazionario, mentre 2λ è sempre intero.

Escluso il caso quindi che λ^2 contenga $2n + 1$ cifre, si ha dalla (2)

$$\lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu = \lambda^2 - \mu\,10^{n+1} - \mu$$

cioè $10^{n+1} + \mu + 1 = 2\lambda$ ovvero

$$c\,.\underset{12\,\ldots\,n+1}{11\ldots1} + 9\,.\underset{12\,\ldots\,n+2}{11\ldots1} + 2 = 2a\,.\underset{12\,\ldots\,n+1}{11\ldots1} - 2a + 2b$$

da cui

$$c = 2a - 9 - 2\,\frac{a - b + 1}{\underset{12\,\ldots\,n+1}{11\ldots1}}$$

ed in conseguenza, essendo c un numero intero di una sola cifra,

$$a - b + 1 = 9, \quad c = 2a - q, \quad a \overline{\gtrless} 5; \quad b = a + 1.$$

Dando quindi ad a i valori 5, 6, 7, 8 si ricavano per b i valori 6, 7, 8, 9 e per c i valori 1, 3, 5, 7.

348*. *Il prodotto d'un numero qualunque* N *di* p *cifre, per un numero formato da* p *cifre uguali a* 9, *è uguale al numero* N — 1, *seguito dal complemento di* N *rispetto a* 10^p.

BONOLIS.

Risoluzione dei sigg. Francesco Barbagallo, Guido Bordi, G. Guadalupi e T. Mari.

Indicando con N un numero in cui le cifre sono p, e con Ψ un numero formato da p cifre uguali a 9 si ha:

$$\begin{aligned} N \cdot \Psi &= N \times (10^p - 1) \\ &= N\, 10^p - N \\ &= (N - 1)\, 10^p + 10^p - N\,; \end{aligned}$$

e siccome N contiene p cifre sarà:

$$N > 10^{p-1}$$

onde

$$10^p - N < 10^{p-1}(10 - 1)$$

e a più forte ragione

$$10^p - N < 10^p$$

onde $10^p - N$ non può contenere più di p cifre; epperò il teorema resta dimostrato.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

349.* Se, A, B sono due punti qualunque di due piani α, β non paralleli, si trovi il punto X della retta (α, β) per il quale l'angolo $A\widehat{X}B$ è massimo.

350*. Dati due punti A, B, ambedue esterni o ambedue interni ad un circolo o ad una sfera, si trovi un punto del circolo o della sfera, tale che la somma delle due distanze da A e B sia massima o minima.

GAMBIOLI.

351*. Risolvere il sistema

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = a^2 \\ y(x + z + u) = b \\ x(z + u) + zu = c \\ xz = d \end{gathered}$$

CANDIDO.

352*. Determinare una piramide triangolare regolare, conoscendo la superficie totale s e la distanza h dei vertici della base dalle facce opposte.

353*. Determinare un triangolo, dati il perimetro $2p$ e due altezze h, k.

LUIGI BOSI.

(*) Le quistioni contrassegnate con un asterisco sono proposte particolarmente agli studenti delle scuole secondarie; le altre a tutti gli studiosi indistintamente.

354. Dati in un piano due cerchi, la conica K^2 avente per fuochi i loro centri, e inscritta nel quadrilatero ad essi circoscritto, è bitangente al cerchio radicale (1) dei cerchi dati: Il luogo dei punti di mezzo delle corde (reali o ideali), che le tangenti di K^2 staccano nei due cerchi, è il cerchio radicale.

355. Se due cerchi eguali si segano sotto un angolo di 60°, il loro cerchio radicale è il luogo della projezione (ortogonale) di un punto dell'un cerchio sulla sua polare rispetto all'altro.

356. Costruire le parabole che hanno una data direttrice, e
 a) passano per due punti dati,
 b) passano per un punto e toccano una retta data,
 c) toccano due rette date.

357. Costruire le parabole, aventi per direttrice una retta data, e
 a) bitangenti ad un cerchio dato;
 b) osculatrici ad un cerchio dato.

358. Se (ρ_0, ω_0), (ρ_1, ω_1), (ρ_2, ω_2) sono i raggi vettori e le corrispondenti anomalie vere di un pianeta in tre posizioni P_0, P_1, P_2, il parametro dell'orbita è

$$p = \frac{\rho_0\,\rho_1\,\rho_2}{2\,\Delta}\left[\operatorname{sen}(\omega_0 - \omega_1) + \operatorname{sen}(\omega_1 - \omega_2) + \operatorname{sen}(\omega_2 - \omega_0)\right],$$

ove Δ è l'area del triangolo $P_0 P_1 P_2$.

363*. Sapendosi che per $a > 7$, tra $\frac{a}{2}$ ed $a - 2$ esiste per lo meno un numero primo, dimostrare che il prodotto dei fattori primi inferiori ad n e che non lo dividono è, da un certo valore di n in poi, maggiore di n.

364. Indicando in generale con $f(a, b)$ l'espressione (2)

$$d_1 \,.\, d_2 \ldots . d_n \,.\, \varphi\left(\frac{a}{d_1 \,.\, d_2 \ldots . d_n}\right),$$

nella quale è

$$d_1 = \mathrm{D}(a,b),\ d_2 = \mathrm{D}\left(\frac{a}{d_1}, d_1\right),\ d_3 = \mathrm{D}\left(\frac{a}{d_1 d_2}, d_2\right) \ldots, d_n = \mathrm{D}\left(\frac{a}{d_1 d_2 \ldots . d_{n-1}}, d_{n-1}\right),$$

e si suppone $d_{n+1} = 1$, dimostrare che se a, b sono divisori di m sussiste la relazione:

$$f(n, a) \,.\, f(a, b) \,.\, b = + f(n, b)\, f(b, a) \,.\, a$$

365. Sia m multiplo di a, b.

Se m non contiene altri fattori primi oltre a quelli di a, b, sussiste la relazione

$$f(a, b) \,.\, m = f(m, b) \,.\, a\,;$$

ed inversamente, se ha luogo tale relazione, m si compone con soli fattori primi di a, b.

U. Scarpis.

(1) Intendiamo per *cerchio radicale* di due cerchi posti in un medesimo piano il luogo dei punti aventi, rispetto ai due cerchi, potenze eguali e di segno contrario. (v. Durán Loriga — *Sopra los circulos radicales;* Progr. mat. T. V. pag. 200. — *Sur les cercles radicaux;* Mathésis, T. VI, p. 105).

(2) I simboli $\mathrm{D}(a, b)$ e $\varphi(m)$ indicano rispettivamente il massimo comun divisore di a, b ed il numero dei numeri non superiori ad m e primi con esso.

BIBLIOGRAFIA

GAETANO FRASCA. — *Nozioni di algebra ad uso delle Scuole Tecniche.* — Napoli, 1896.

Il libro è diviso in due parti: nella prima l'A., dopo le necessarie definizioni, espone con studiata chiarezza le principali proprietà delle operazioni con numeri algebrici e con monomi e polinomi, alcuni brevi cenni sulla decomposizione in fattori, sulla ricerca del massimo comun divisore e del minimo comune multiplo di più monomi interi e sulle proprietà delle operazioni con frazioni algebriche. — La seconda parte, è riservata alle *equazioni ed ai problemi di primo grado* e contiene le proprietà generali e la risoluzione delle equazioni di primo grado ad un'incognita, i metodi di risoluzione dei sistemi di primo grado a due incognite, e un brevissimo cenno sul modo di risolvere un sistema di tre equazioni con tre incognite. In fine di ogni paragrafo trovasi una copiosa raccolta di esercizi e problemi accuratamente scelti ed ordinati.

Il libro comprende adunque tutto il programma per la licenza della *scuola tecnica.*

L'A. segue il metodo *intuitivo*, riuscendo sempre chiaro e rigoroso nell'esposizione, e superando felicemente molte delle non lievi difficoltà che presenta la compilazione dei trattati elementari. — Le mende sono così piccole e rare che non meritano rilievo. Forse era desiderabile uno svolgimento più ampio della seconda parte specialmente in ciò che riguarda la risoluzione delle equazioni e dei sistemi, ma a ciò può supplire l'insegnante.

L'A. ha avuto lo scopo (come Egli scrive nella prefazione) di fare un lavoro utile dal punto di vista didattico: questo scopo può dirsi raggiunto.

A. MASONI.

ERNESTO PASCAL. — *Calcolo delle Variazioni e delle Differenze finite (III^a Parte del Calcolo infinitesimale).* — Manuali Höepli.

La importante collezione dei Manuali Höepli è stata arricchita ultimamente di un altro volumetto che s'intitola " Calcolo delle Variazioni e delle Differenze finite ", il quale forma la terza parte del Calcolo infinitesimale, che il chiar. prof. E. Pascal dell'Università di Pavia ha dato recentemente alle stampe. La parte di Matematiche esposta in questo breve trattato è limitata, si può dire, ad un corso regolare di Calcolo, e benchè molto spesso la ristrettezza dello spazio obblighi l'autore a dare soltanto un rapido cenno di alcune teorie o di certe considerazioni svolte dai vari autori, tuttavia, con delle preziose indicazioni storiche e bibliografiche razionalmente ordinate, riesce a rendere interessante in ogni punto lo studio del suo libro, nel quale un misurato rigore scientifico si trova sempre in accordo con una mirabile chiarezza.

In quest'ultima parte del Corso, l'autore ha dato un maggiore e più accurato sviluppo alle indicazioni bibliografiche, indicando sommariamente la ragione d'essere dei metodi ivi studiati, e donde sono derivati. Così lo studioso, condotto passo a passo e quasi a sua insaputa, a ragionare intorno ad importanti problemi e a trattare di argomenti, su cui l'esame critico ebbe ed ha tuttora tanto da discutere, si trova senza fatica, con la scorta intelligente dell'autore, preparato dinanzi il terreno e facilitata l'indagine.

L'interesse sempre vivo che accompagna la lettura di quest'ultima pubblicazione del sig. Pascal, è la migliore prova ch'egli è riuscito nel suo intento, cioè di creare una guida veramente utile ai giovani studiosi.

A. B.

Dott. Prof. Giovanni Lozzi — *Primo libro sull'istruzione secondaria in Italia* " Il Personale insegnante „ Napoli 1896.

Il Prof. D'Ovidio disse, che le piaghe della Pubblica Istruzione in Italia sono tante, che non basterebbero dieci Rosmini a descriverle e dieci Petrarca a piangerle. Questa, che parrebbe una esagerazione rettorica, apparisce la verità dalla lettura dell'accuratissimo lavoro del Dott. Lozzi prof. di matematica nei RR. Licei di Roma.

Il libro è così ricco di argomenti e di notizie con somma cura raccolte, che non è possibile in un breve cenno riassumerlo convenientemente.

Sono notevoli le critiche che l'A. fa al modo di formazione dei professori per le scuole secondarie, la sua proposta del *tirocinio* anche per i laureati, le censure al difetto di ore di insegnamento per la matematica nelle scuole classiche.

Condotte con fine acume le osservazioni sugli orari, e giusta la proposta di perequazione degli orari medesimi.

Notevolissimi poi gli ultimi capitoli, nei quali sono esposti con chiarezza due progetti di nuovo organico, secondo i quali si potrebbero sensibilmente migliorare le condizioni degli insegnanti senza aggravare maggiormente il bilancio dello stato.

In conclusione l'A., mentre con precisione rinnova critiche già note, tratta molti ed importanti argomenti nuovi, trae conclusioni nuovissime, e studia il problema del personale da capo a fondo con amore vivo e sincero.

Il libro è dedicato all'ex-ministro Martini, e noi crediamo che possa essere utilmente consultato da insegnanti e studenti, e da quanti si occupano di scuole e di professori; perciò non è sembrato fuori di posto un breve cenno di tale opera in questo periodico.

A. Masoni.

Dott. S. Ortu Carboni. — *Problemi elementari di applicazione dell'algebra alla Geometria.* — Livorno, Tip. di R. Giusti, 1897.

Questo libro contiene un'introduzione sugli elementi della teoria delle equazioni e sulla risoluzione di problemi geometrici mediante l'Algebra, e circa 800 problemi.

Dei problemi non è data la soluzione, e questo è un pregio dell'opera; perchè, come giustamente osserva l'autore, nessuno può considerare come aventi meta plausibilmente didattica le Raccolte *con chiavi*, ossia con le soluzioni più o meno sviluppate in modo costante ed uniforme.

Però, di ogni problema, pochi eccettuati, l'autore dice qualche cosa che possa rendere più facile all'alunno la soluzione, in alcuni accenna le formole adatte che bisogna applicare o ricorda problemi analoghi, in molti dà il sistema risolvente, ed in altri indica soltanto il risultato.