UNA GENERALIZZAZIONE DEI TEOREMI
di Ceva e di Menelao

I. — *Tre punti A_1, B_1, C_1 presi rispettivamente sulle rette di un triangolo ABC determinano su queste sei segmenti tali che la differenza fra il prodotto di tre di essi non consecutivi e il prodotto degli altri tre è*

$$\frac{abc}{a'b'c'}\alpha\beta\gamma\left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^2$$

dove Δ, a, b, c *sono rispettivamente l'area e le lunghezze dei lati di ABC;* Δ', a', b', c' *l'area e le lunghezze dei lati del triangolo formato dalle congiungenti i tre punti A_1, B_1, C_1 coi vertici opposti A, B, C; α, β, γ le lunghezze delle trasversali AA_1, BB_1, CC_1.* (1)

Sieno A', B', C' i punti d'incontro delle coppie di rette (BB_1, CC_1), (CC_1, AA_1), (AA_1, BB_1), e $B'C' = a'$, $C'A' = b'$, $A'B' = c'$, $A'B'C' = \Delta'$; e si ponga

$$\frac{BA_1}{A_1C} = h, \frac{CB_1}{B_1A} = p, \frac{AC_1}{C_1B} = q; \tag{1}$$

componendo, si ha

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{BC}{BA_1} = \dfrac{h+1}{h}, \dfrac{CA}{CB_1} = \dfrac{p+1}{p}, \dfrac{AB}{AC_1} = \dfrac{q+1}{q}, \\ \dfrac{BC}{A_1C} = h+1, \dfrac{CA}{B_1A} = p+1, \dfrac{AB}{C_1B} = q+1. \end{array}\right. \tag{2}$$

Si ponga inoltre

$$1 + h + hp = \mu_1, \ 1 + p + pq = \mu_2, \ 1 + q + qh = \mu_3.$$

I triangoli AA_1C, AA_1B segati rispettivamente dalle rette BB_1, CC_1 danno

$$\frac{AC'}{C'A_1}\cdot\frac{A_1B}{BC}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = -1, \qquad \frac{AB'}{B'A_1}\cdot\frac{A_1C}{CB}\cdot\frac{BC_1}{C_1A} = -1$$

(1) Questo teorema fu proposto nelle *Nouvelles Annales* (questione 1529, anno 1892) dal professore Cesaro e vi rimase indimostrato.

donde per le (1) (2)

$$\frac{AC'}{C'A_1} = \frac{h+1}{hp}, \quad \frac{AB'}{B'A_1} = q(h+1),$$

e componendo,

$$\frac{AC'}{AA_1} = \frac{h+1}{\mu_1}, \quad \frac{AB'}{AA_1} = \frac{q(h+1)}{\mu_3};$$

e sottraendo e riducendo

$$\frac{a'}{\alpha} = \frac{(h+1)(1-hpq)}{\mu_3\,\mu_1}.$$

Analogamente si troverà

$$\frac{b'}{\beta} = \frac{(p+1)(1-hpq)}{\mu_1\,\mu_2}, \quad \frac{c'}{\gamma} = \frac{(q+1)(1-hpq)}{\mu_2\,\mu_3}.$$

Dalle quali moltiplicando

$$(3) \qquad \frac{a'b'c'}{\alpha\beta\gamma} = \frac{(1-hpq)^3(h+1)(p+1)(q+1)}{\mu_1^2\,\mu_2^2\,\mu_3^2}$$

Si sa che l'area del triangolo A'B'C', circoscritto ad ABC, si può esprimere mediante la formola

$$(4) \qquad \Delta' = \Delta\,\frac{(1-hpq)^2}{\mu_1\,\mu_2\,\mu_3};$$

e perciò la (3) si può scrivere

$$\frac{a'b'c'}{\alpha\beta\gamma} = \left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^2 \frac{(h+1)(p+1)(q+1)}{1-hpq},$$

ossia

$$(5) \qquad \frac{\alpha\beta\gamma}{a'b'c'}\left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^2 = \frac{1-hpq}{(h+1)(p+1)(q+1)}.$$

Ora dalle (2) si ha

$$\frac{1}{(h+1)(p+1)(q+1)} = \frac{A_1C\,.\,B_1A\,.\,C_1B}{BC\,.\,CA\,.\,AB},$$

$$\frac{hpq}{(h+1)(p+1)(q+1)} = \frac{BA_1\,.\,CB_1\,.\,AC_1}{BC\,.\,CA\,.\,AB};$$

e perciò la (5) diventa

$$(6) \qquad \frac{\alpha\beta\gamma}{a'b'c'}\,abc\left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right)^2 = A_1C\,.\,B_1A\,.\,C_1B - BA_1\,.\,CB_1\,.\,AC_1$$

Questa relazione per $\Delta' = o$ dà quella di Ceva.

II. — *Tre punti delle tre rette di un triangolo ABC determinano su queste segmenti tali che la somma del prodotto di tre non consecutivi e del prodotto degli altri tre è*

$$\frac{\Delta_1}{\Delta}\,abc$$

dove Δ, a, b, c, *sono l'area e i lati di ABC, e* Δ_1 *è l'area del triangolo dei tre punti.*

Essendo A_1, B_1, C_1 i tre punti presi rispettivamente sulle rette BC, CA, AB, e ritenendo le denominazioni del teorema I, dalle (2) si ha

$$\frac{BA_1}{BC}\cdot\frac{CB_1}{CA}\cdot\frac{AC_1}{AB}+\frac{A_1C}{BC}\cdot\frac{B_1A}{CA}\cdot\frac{C_1B}{AB}=\frac{1+hpq}{(h+1)(p+1)(q+1)},$$

e poichè l'area del triangolo $A_1B_1C_1$ inscritto in ABC si può esprimere mediante la formola

$$\Delta_1=\Delta\frac{1+hpq}{(h+1)(p+1)(q+1)},$$

la precedente diviene

$$(7)\qquad BA_1 \,.\, CB_1 \,.\, AC_1 + A_1C \,.\, B_1A \,.\, C_1B = \frac{\Delta_1}{\Delta}\,abc.$$

La (7) per $\Delta_1 = o$ dà il teorema di Menelao.

III. — *Quattro punti A_1, B_1, C_1, D_1 presi rispettivamente sulle rette AB, BC, CD, DA di un quadrangolo gobbo ABCD determinano su queste otto segmenti tali che la differenza fra il prodotto di quattro di essi non consecutivi e il prodotto degli altri quattro è*

$$\frac{a'b'c'd'}{abcd}\,\alpha\beta\gamma\delta\left(\frac{T'}{T}\right)^3$$

dove T, a, b, c, d *sono rispettivamente il volume del tetraedro ABCD e i lati AB, BC, CD, DA del quadrangolo ABCD; T'*, a', b', c', d' *sono il volume e le faccie del tetraedro formato dai quattro piani ABC_1, BCD_1, CDA_1; DAB_1; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ le aree dei triangoli trasversali ABC_1, BCD_1, CDA_1, DAB_1.*

Sieno A', B', C', D' rispettivamente i punti d'incontro delle quattro terne di piani (CDA_1, DAB_1, ABC_1), (DAB_1, ABC_1, BCD_1), (ABC_1, BCD_1, CDA_1), (BCD_1, CDA_1, DAB_1), e $A'B'C' = a'$, $B'C'D' = b'$, $C'D'A' = c'$, $D'A'B' = d'$, $A'B'C'D' = T'$; e si ponga

$$(8)\qquad \frac{AA_1}{A_1B}=h,\quad \frac{BB_1}{B_1C}=p,\quad \frac{CC_1}{C_1D}=q,\quad \frac{DD_1}{D_1A}=r;$$

se ne deduce, componendo

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{AB}{AA_1}=\dfrac{h+1}{h}, & \dfrac{BC}{BB_1}=\dfrac{p+1}{p}, \quad \dfrac{CD}{CC_1}=\dfrac{q+1}{q}, \quad \dfrac{DA}{DD_1}=\dfrac{r+1}{r} \\[2ex] \dfrac{AB}{A_1B}=h+1, & \dfrac{BC}{B_1C}=p+1, \quad \dfrac{CD}{C_1D}=q+1, \quad \dfrac{DA}{D_1A}=r+1. \end{cases}$$

Si ponga inoltre

$$1+h+hp+hpq=\mu_1,\qquad 1+p+pq+pqr=\mu_2$$
$$1+q+qr+qrh=\mu_3,\qquad 1+r+rh+rhp=\mu_4$$

e sia N il punto d'incontro delle rette (BC_1, B_1D) ed S quello delle rette (AC_1, CD_1).

Dai triangoli BCC_1, DAC_1, segati rispettivamente dalle rette DB_1 e CD_1, si ha

$$\frac{BN}{NC_1}\cdot\frac{C_1D}{DC}\cdot\frac{CB_1}{B_1B}=-1,\quad \frac{C_1S}{SA}\cdot\frac{AD_1}{D_1D}\cdot\frac{DC}{CC_1}=-1,$$

donde per le (8) (9)

$$(10)\qquad \frac{BN}{NC_1}=p(q+1),\quad \frac{C_1S}{SA}=\frac{rq}{q+1}.$$

Ora il triangolo $A'B'C'$ è circoscritto al triangolo ABC_1, ed i suoi lati $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$, incontrano i lati BC_1, C_1A, AB di ABC_1 rispettivamente nei punti N, S, A_1, e perciò, applicando ad esso la formola (4) e tenendo presenti i valori (8) (9) (10), si trova

$$\frac{a'}{\alpha}=\frac{(1-hpqr)^2(q+1)}{\mu_1\mu_2\mu_3}.$$

Analogamente

$$\frac{b'}{\beta}=\frac{(1-hpqr)^2(r+1)}{\mu_2\mu_3\mu_4},\quad \frac{c'}{\gamma}=\frac{(1-hpqr)^2(h+1)}{\mu_3\mu_4\mu_1},\quad \frac{d'}{\delta}=\frac{(1-hpqr)^2(p+1)}{\mu_4\mu_1\mu_2}.$$

E moltiplicando

$$(11)\qquad \frac{a'b'c'd'}{\alpha\beta\gamma\delta}=\frac{(1-hpqr)^8(h+1)(p+1)(q+1)(r+1)}{\mu_1^3\mu_2^3\mu_3^3\mu_4^3}.$$

Si sa che il volume di un tetraedro $A'B'C'D'$, le cui faccie passano per i lati del quadrangolo gobbo ABCD si può esprimere mediante la formola

$$T'=T\frac{(1-hpqr)^3}{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4},$$

e perciò la (11) si può scrivere

$$\frac{a'b'c'd'}{\alpha\beta\gamma\delta}=\left(\frac{T'}{T}\right)^3\frac{(h+1)(p+1)(q+1)(r+1)}{1-hpqr},$$

ossia

$$(12)\qquad \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{a'b'c'd'}\left(\frac{T'}{T}\right)^3=\frac{1-hpqr}{(h+1)(p+1)(q+1)(r+1)}.$$

Ora dalla (9) si ha

$$\frac{1}{(h+1)(p+1)(q+1)(r+1)}=\frac{A_1B\,.\,B_1C\,.\,C_1D\,.\,D_1A}{AB\,.\,BC\,.\,CD\,.\,DA},$$

$$\frac{hpqr}{(h+1)(p+1)(q+1)(r+1)}=\frac{AA_1\,.\,BB_1\,.\,CC_1\,.\,DD_1}{AB\,.\,BC\,.\,CD\,.\,DA};$$

e perciò la (12) diventa

$$(13)\quad \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{a'b'c'd'}\,abcd\left(\frac{T'}{T}\right)^3 = A_1B\,.\,B_1C\,.\,C_1D\,.\,D_1A - AA_1\,.\,BB_1\,.\,CC_1\,.\,DD_1$$

La (13) per $T' = o$ dà il noto teorema sul quadrangolo gobbo analogo al teorema di Ceva.

IV. — *La differenza dei prodotti dei segmenti, di cui è questione nel teorema III è, anche eguale a*

$$\frac{T_1}{T}\,abcd$$

dove T_1 *è il volume del tetraedro* $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$, *e* T, a, b, c, d *hanno il significato del teorema III.*

Difatti dalle (9) si ha

$$\frac{AA_1\,.\,BB_1\,.\,CC_1\,.\,DD_1}{AB\,.\,BC\,.\,CD\,.\,DA} - \frac{A_1B\,.\,B_1C\,.\,C_1D\,.\,D_1A}{AB\,.\,BC\,.\,CD\,.\,DA} = \frac{1-hpqr}{(h+1)(p+1)(q+1)(r+1)};$$

e poichè si sa che il volume del tetraedro $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ inscritto nel quadrangolo gobbo ABCD si può esprimere colla formola

$$T_1 = T\,\frac{1-hpqr}{(h+1)(p+1)(q+1)(r+1)},$$

la precedente diviene

$$(14)\qquad AA_1\,.\,BB_1\,.\,CC_1\,.\,DD_1 - A_1B\,.\,B_1C\,.\,C_1D\,.\,D_1A = \frac{T_1}{T}\,abcd$$

La (14) per $T_1 = o$ dà il noto teorema sul quadrangolo gobbo analogo al teorema di Menelao.

Ottobre 1897.

FRANCESCO FERRARI.

Qualche osservazione sulla determinazione di numeri come limiti di insiemi

Gli Ill.mi Prof.ri RICCI e CAPELLI (1) hanno svolta recentemente la teoria delle operazioni numeriche, facendo uso rispettivamente di ripartizioni di DEDEKIND e di classi contigue per la determinazione di numeri. Il metodo delle classi contigue permette molta semplicità nelle dimostrazioni;

(1) *Giornale di Matematiche*, Napoli, 1897, pag. 22, 209.

e per ciò lo ho seguito in miei libri elementari: (1) esso collegasi strettamente agli altri metodi usuali per la determinazione di numeri, come feci vedere nel Periodico di Matematica, (2) e potrebbesi dire molto opportunamente *metodo dei valori approssimati*. Ed è chiaro che conviene considerare sistemi ascendenti o discendenti, perchè il concetto, che si ha d'un numero per la conoscenza d'un valore approssimato ad esso, si può migliorare solo con la conoscenza d'un valore più approssimato.

Il metodo ora accennato e quello delle *parti integranti di* Weierstrass (3) sono facilmente accessibili agli scolari, che sono abituati a considerare un numero decimale periodico come somma della parte intera con i decimi, i centesimi, i millesimi ecc. ed anche come unico numero separante i valori approssimati ad esso per difetto a meno di 1, di 0,1, di 0,01, di 0,001, ecc. da quelli approssimati per eccesso. Ed anche nella pratica è uso costante e naturale di considerare appunto una grandezza come somma delle parti integranti in cui vien divisa dal processo di misurazione, cosicchè dall'estensione della parte misurata progressivamente si ricava, per successive approssimazioni, un concetto relativamente esatto dell'estensione dell'intera grandezza.

Delle considerazioni utili anche relativamente alla determinazione di numeri mediante insiemi di numeri razionali, e specialmente atte a giustificare la sostituzione di successioni ascendenti o discendenti ad insiemi disordinati di valori approssimati per difetto o per eccesso, trovansi in una mia comunicazione al Circolo Matematico di Palermo, (4) dove ho date notevoli proposizioni sulle successioni a più limiti; le quali provano p. es. che; *se si può stabilire una corrispondenza univoca tra i limiti d'un insieme ed i numeri 1. 2. 3,..., si può stabilire una corrispondenza univoca ancora tra questi numeri e tutti i numeri dell'insieme, cioè i numeri dell'insieme si possono ordinare in successione*. Prima di procedere oltre faremo vedere come queste cose possano avere svariate applicazioni.

Se una grandezza finita è divisa in infinite parti, l'insieme di queste ha necessariamente per limite lo zero (grandezza nulla, se s'ammetta questa espressione) ed esso solo: per ciò esse parti si possono ordinare in successione, e questa, comunque siasi formata, tenderà necessariamente al limite zero (cioè qualsiasi grandezza α, omogenea con quella divisa, ne supererà tutte le parti, che nella successione seguono una di posto assegnabile dopo che α sia data). (5) E, se si aggruppino arbitrariamente delle parti consecutive in modo da avere ancora una successione infinita, questa tenderà anch'essa a zero per la stessa ragione, cioè per essere necessariamente ancora zero unico limite dell'insieme dei gruppi, la

(1) *Algebra*, Palermo, (ed. R. Sandron) 1886: *Geometria piana*, Brescia, (ed. F. Apollonio) 1897; *solida*, Palermo, 1890.
(2) *Periodico di Matematica*, 1893, pag. 144.
(3) V. L. Pincherle, *Giornale di Matematica*, 1880, pag. 178.
(4) V. Rendiconti, V, 1891, pag. 280.
(5) V. S. Sbrana, *Rivista di Matematica*, Torino, 1894, pag. 147.

somma di questi dovendo essere ancora la primitiva grandezza finita. Mediante considerazioni analoghe si potrebbe manifestamente stabilire il criterio generale di convergenza delle serie.

Per la determinazione di numeri mediante parti integranti, od anche mediante successioni ascendenti o discendenti di valori approssimati, ho dati due metodi, molto convenienti nella pratica, in una nota, che, sebbene vi sia fatto uso delle notazioni della logica matematica, (1) può facilmente intendersi da tutti.

Dopo d'aver fatti alcuni richiami al solo scopo d'evitare ripetizioni, credo opportuno di fare alcune considerazioni nuove.

Si suol dire che il metodo delle parti integranti di Weierstrass è indipendente dai concetti d'ordine e di limite, ed altrettanto, con egual ragione, si può dire del metodo dei valori approssimati: ed invero un numero s'intuisce come somma delle sue parti integranti o come separante due suoi sistemi contigui di valori approssimati, per difetto e per eccesso, senza ricorrere, almeno apparentemente, nè all'idea d'ordine nè a quella di limite. La cosa presentasi però affatto diversamente nella pratica. Per dare infiniti numeri razionali in modo, che si possano veramente concepire, dovremo generalmente darli ordinati, la qual cosa sarà sempre possibile, perchè l'insieme di tutti i numeri razionali è di prima potenza, cioè numerabile; e mentre può sembrare, e generalmente si crede, che l'ordine si possa stabilire ad arbitrio, è invece prestabilito, in quanto che si potrà bensì dare un ordine arbitrario ad un numero illimitato di termini e precisamente a quelli che la mente può isolare; ma, per quanto sia grande il numero degli elementi già separati ed ordinati, sarà sempre infinita la probabilità che un elemento casuale dell'insieme si trovi tra quelli, che non furono ancora separati, perchè rimarranno sempre degli insiemi parziali condensati intorno ai limiti e formanti come degli elementi di continuo; questi insiemi si potranno dire molto a proposito *gruppi filanti* o *chiome dei limiti*, e si possono concepire solo (affatto astrattamente) come elementi di continuo formati dai numeri estremi d'una successione od, in generale, dai numeri d'un insieme discontinuo.

Per chiarire quanto ora fu detto, limitandoci al caso d'un sol limite, dimostreremo la seguente proposizione, che si trova nella già citata comunicazione al Circolo Matematico:

Ogni successione ad unico limite tende a questo nel senso usuale della parola; cioè diviene infinitesima con $\frac{1}{n}$ *la differenza tra il termine* n^{mo} *della successione ed il limite, se questo è finito, e diviene infinitesimo positivo o negativo il reciproco del termine* n^{mo} *della successione, se il limite è* $+\infty$ *o* $-\infty$.

Supponiamo infatti che la successione

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ .$$

(1) V. Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, XXIX, 1893-94, pag. 110.

abbia l'unico limite a. Per quanto piccolo sia ε, la successione avrà soltanto un numero finito di termini fuori dell'intervallo $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, perchè, se ne avesse infiniti, avrebbe anche un limite finito od infinito fuori di questo intervallo e per ciò diverso da a, la qual cosa è contraria all'ipotesi. Dopo d'aver dato ε in qualunque modo, si potrà dunque fissare n abbastanza grande, perchè precedano a_n tutti i termini della successione, che non sono interni all'intervallo $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, e conseguentemente siano interni a questo intervallo tutti i numeri

$$a_n\,,\ a_{n+1}\,,\ a_{n+2}\,,\ \ldots\,,$$

ciascuno dei quali avrà quindi da a una differenza minore di ε. Segue di qui che la differenza tra a_n ed a tende a zero coll'aumentare indefinitamente di n, e questo è appunto quanto dire che la successione tende ad a nel senso usuale. Per vedere che il teorema è vero anche per una successione, che abbia per unico limite $+\infty$ o $-\infty$, basta p. es. riflettere che, in luogo d'una tal successione, se ne può considerare un'altra, che abbia per termini quelli della proposta, che son compresi tra -1 e $+1$, ed i reciproci dei rimanenti.

Ciò spiega come mai, per quanto si alteri l'ordine dei termini della successione a_1, a_2,.... sfuggiranno sempre a qualsiasi alterazione i numeri, che sono, per così dire, aderenti al limite, come mai cioè la successione debba sempre far capo allo stesso insieme filante od elemento di continuo, il quale seguirà sempre necessariamente i termini isolati della successione (esterni alla sfera d'attrazione del limite), che sono in numero illimitato, ma non assolutamente infinito.

Si riconosce così facilmente perchè, nella pratica, un'idea relativamente esatta d'un numero, che sia definito mediante insiemi di numeri razionali, si acquisti generalmente considerando valori sempre più approssimati e seguendoli colla mente in modo da intuire il numero, che si concepisce appunto come limite a cui il pensiero è guidato dalla progressiva considerazione dei numeri razionali, che lo determinano; il numero cioè, che è centro comune d'attrazione di tutte le menti, che percorrano affatto liberamente i numeri razionali componenti i detti insiemi, cosicchè ad esso convergono tutte le vie non chiuse attraversanti questi numeri, essendo esso comune limite delle successioni infinite separabili da questi insiemi.

Queste considerazioni peraltro non tolgono pregio ai metodi dei valori approssimati e delle parti integranti, mediante i quali si può dare la teoria dei numeri irrazionali in modo affatto elementare, evitando di ricorrere esplicitamente ai concetti d'ordine e di limite. Questi concetti riceveranno intanto un lento, ma continuato, sviluppo virtuale, per cui si presenteranno poi spontaneamente e si potranno quindi esplicare con facilità estrema.

F. Giudice.

UN TEOREMA SULL' APPROSSIMAZIONE DELLE RADICI QUADRATE

Le radici quadrate a meno di $\frac{1}{2n+1}$ per difetto dei $2n$ interi compresi fra n^2 ed $(n+1)^2$ e, rispetto ai numeratori delle frazioni che ne danno i valori, i resti relativi, godono le seguenti proprietà, che ne permettono la quasi immediata determinazione.

1°. *Tali numeratori, termini consecutivi e crescenti della serie de' numeri naturali, si possono ottenere coll'aggiungere* n^2+n *all' intero di cui si vuole la radice; la quale uguaglia* n *più una frazione di numeratore eguale al numero che ne indica il posto.*

2°. *I resti relativi alla determinazione degli anzidetti numeratori, formano ordinatamente i termini della serie.*

$1.2n,\ 2(2n-1),\ 3(2n-2)\ldots\ k[2n-(k-1)]\ldots\ (2n-2)3,\ (2n-1)2,\ 2n.1,$ (1)

evidentemente eguali, se equidistanti dagli estremi.

3°. *Per questi la somma di ogni coppia di radici a meno di* $\frac{1}{2n+1}$ *per difetto, dei numeri che vi corrispondono, è costante ed eguale a* $2n+1$.

Infatti, estraendo la radice quadrata a meno di un'unità per difetto dal prodotto $(n^2+k)(2n+1)^2$, si ottiene l'identità

$$(n^2+k)(2n+1)^2 = [(n^2+k)+(n^2+n)]^2 + k[2n-(k-1)],$$

e ponendo $2n-(k-1)$ al posto di k

$$[n^2+2n-(k-1)](2n+1)^2 = [(n^2+2n-(k-1)+(n^2+n)]^2 + [2n-(k-1)]k,$$

epperò le radici quadrate a meno di $\frac{1}{2n+1}$ dei numeri n^2+k, ed $n^2+2n-(k-1)$
saranno rispettivamente

$$\frac{2n^2+n+k}{2n+1} = n + \frac{k}{2n+1},$$

$$\frac{2n^2+3n-(k-1)}{2n+1} = n + \frac{2n-(k-1)}{2n+1} = n+1-\frac{k}{2n+1};$$

dalle quali formole risultano evidentemente le proprietà enunciate.

Ecco infine alcuni esempi di applicazione:

Pei numeri 5, 6, 7, 8, compresi fra i quadrati consecutivi $4=2^2$ e $9=3^2$,

(1) Ove la somma dei due fattori di ciascun termine è $2n+1$, mentre il primo è quanto il numero che ne indica il posto; inoltre i due resti consecutivi r_n ed r_{n+1}, eguali e necessariamente massimi, sono anche eguali al minore $n^2+n=n(n+1)$ dei due termini medii della serie degl'inter fra n^2 ed $(n+1)^2$

essendo $n=2$, il denominatore dell'approssimazione è $2n+1=5$, ed $n^2+n=6$ è la costante da aggiungere ai dati, per ottenere a meno di una unità per difetto i numeratori delle rispettive radici; i quali saranno quindi 11, 12, 13 e 14, rispettivamente coi resti 4, 6, 6 e 4 poichè è ora $1 \cdot 2n=4$; $2(2n-1)=6=3(2n-2)$ ecc. Ovvero, più semplicemente, tali radici, a meno di $\frac{1}{5}$ per difetto, saranno $2\frac{1}{5}$, $2\frac{2}{5}$, $2\frac{3}{5}$, $2\frac{4}{5}$.

Trattisi ancora di calcolare $\sqrt{275}$: poichè 275 è compreso fra $256=16^2$ e $289=17^2$, si ha qui per $n=16$, $2n+1=33$ (denominatore dell'approssimazione); ed essendo inoltre $275-216=19$, sarà questo il numero che indica il posto di 275 nella serie degli interi fra 256 e 289. Quindi a meno di una unità per difetto, $\sqrt{275\times 33^2}=275+16^2+16=547$ col resto $r_{19}=19\times 14$ (essendo $14=33-19$): ed a meno di $\frac{1}{33}$ per difetto, e indipendentemente dalla divisione di 547 per 33, sarà $\sqrt{275}=16+\frac{19}{33}$ ecc.

Similmente, a meno di $\frac{1}{2001}$ per difetto, sarà $\sqrt{1000^2+1}=1000+\frac{1}{2001}$.

Ed è ovvio come tali calcolazioni siano tanto più vantaggiose, quanto più grandi sono i numeri dei quali ricercasi la radice quadrata; giacchè cresce con essi l'indicato denominatore dell'approssimazione.

Palermo, Settembre 1897.

F. P. PATERNÒ.

GEOMETRIA ELEMENTARE RECENTE

Nel fascicolo I dell'anno VI-1892 del *Periodico di Matematica* l'egregio prof. A. Lugli, di cui amici e colleghi piansero la dolorosa perdita, pubblicò una nota riassuntiva delle prime nozioni di Geometria elementare recente, alla quale ne sarebbe certamente seguita un'altra che la completasse, se la morte non avesse privato il *Periodico* del suo valente Direttore.

E poichè ognora più progrediscono in Italia ed all'estero gli studi della Geometria recente, per opera specialmente del prof. Cesàro, del Lemoine, del Casey, del Brocard, del Neuberg, ho stimato conveniente ed utile esporre in questa interessante rivista un riassunto delle teorie che fanno seguito a quelle contenute nella citata nota del prof. Lugli, sperando d'invogliare con ciò i giovani studiosi di Matematica a dare parte della loro attività a questo nuovo ed importante ramo della Geometria elementare, che, al dire del Davis, « a été le progrès le plus remarquable et le plus important qu'aient fait les mathématiques élémentaires en ces derniers temps ».

I. — Figure direttamente simili.

1. Se sopra ciascuna delle semirette DA, DB, DC,...., essendo D un punto fisso arbitrario ed A, B, C,.... gli elementi di un dato sistema di punti, si prende un segmento DA′, DB′, DC′,.... in modo che si abbia la serie di rapporti uguali:

$$\frac{DA'}{DA} = \frac{DB'}{DB} = \frac{DC'}{DC} = \ldots\ldots\ldots = k,$$

i due sistemi di punti A, B, C,.... e A′, B′, C′,.... sono *omotetici*, essendo D il loro *centro* di omotetia.

Il punto D, se si considera come punto di uno dei due sistemi, è anche il suo omologo nell'altro, e perciò si chiama *punto doppio* dei due sistemi. Dati due poligoni, si può determinare con facilità il loro punto doppio. Due lati omologhi AB e A′B′ s'intersechino in G; le due circonferenze determinate rispettivamente dai punti A, A′ e G, B, B′ e G oltre al punto G avranno in comune un altro punto, che è il punto doppio D domandato, perchè nei due triangoli DAB e DA′B′ simili il vertice D del primo è omologo al vertice D del secondo. Questa costruzione non vale nel caso che i due lati omologhi scelti siano segmenti consecutivi. Siano ad esempio AB ed AC; in tal caso si descrivono le due circonferenze aggiunte relative ai segmenti considerati, cioè le circonferenze passanti per B o per C e tangenti in A ad AB o ad AC; il secondo punto d'intersezione di esse è il punto doppio richiesto D [perchè ADB ed ADC sono simili e D è omologo a D], il quale gode anche la proprietà di essere il centro del segmento AH, essendo H l'intersezione di AD colla circonferenza Z circoscritta ad ABC. Esso gode di altre proprietà, fra cui le seguenti:

1ª le distanze di D da due punti omologhi hanno un rapporto costante

2ª le distanze di D da due rette omologhe hanno un rapporto costante

3ª l'angolo di vertice D ed avente i lati passanti per due punti omologhi è costante.

2. D_1, D_2, D_3 siano rispettivamente i punti doppi delle coppie F_2 ed F_3, F_3 ed F_1, F_1 ed F_2 di tre figure direttamente simili; il triangolo $D_1D_2D_3 = t$ chiamasi *triangolo di similitudine* ed il circolo circoscritto c chiamasi *circolo di similitudine.*

3. In ogni sistema di tre figure direttamente simili F_1, F_2 ed F il triangolo $S_1S_2S_3$, formato da tre rette omologhe s_1, s_2 ed s_3, è omologico col triangolo di similitudine t, ed il luogo dei centri di omologia è la circonferenza di similitudine c. Infatti si ha per ipotesi:

$$\frac{(D_1, s_2)}{(D_1, s_3)} = \frac{a_2}{a_3}, \quad \frac{(D_2, s_3)}{(D_2, s_1)} = \frac{a_3}{a_1}, \quad \frac{(D_3, s_1)}{(D_3, s_2)} = \frac{a_1}{a_2},$$

essendo a_1, a_2, a_3 tre lati omologhi di F_1, F_2, F_3 ed indicando con (D, s) la distanza del punto D dalla retta s; le tre rette D_1S_1, D_2S_2, D_3S_3 si tagliano quindi in un punto K tale che le sue distanze dalle tre rette s_1, s_2, s_3 sono proporzionali alle lunghezze a_1, a_2, a_3 di tre lati corrispondenti in F_1, F_2 ed F_3 e che viene chiamato *centro di omologia* dei triangoli $D_1D_2D_3$ ed $S_1S_2S_3$. Gli angoli di $S_1S_2S_3$ sono i supplementi degli angoli α_1, α_2, α_3, angoli costanti che formano tra loro due rette omologhe di F_2 ed F_3, di F_3 ed F_1 di F_1 ed F_2; e perciò gli angoli S_1KS_2, S_2KS_3, S_3KS_1, ossia anche gli angoli D_1KD_2, D_2KD_3, D_3KD_1, sono costanti. Ne viene che il punto K descrive al variare di $S_1S_2S_3$ la circonferenza c circoscritta a $D_1D_2D_3$, perchè si muove sulle circonferenze passanti per le coppie D_1 e D_2, D_2 e D_3, D_3 e D_1.

4. Le rette KP_1, KP_2, KP_3, parallele ai lati di $S_1S_2S_3$ e condotte per K, centro di omologia di $D_1D_2D_3$ ed $S_1S_2S_3$, fino a tagliare la circonferenza c, sono rette omologhe, perchè si ha:

$$\frac{(D_i, KP_m)}{(D_i, KP_n)} = \frac{(D_i, s_m)}{(D_i, s_n)} = \frac{a_m}{a_n},$$

con $i = 1, 2, 3$; $m = 2, 3, 1$; $n = 3, 1, 2$. Inoltre è: $D_i\widehat{K}P_i$ = angolo (KS_i, S_mS_n) = costante; quindi l'arco D_iP_i è fisso e perciò fisso anche il punto P_i. Dunque nel sistema F_1, F_2, F_3 di tre figure direttamente simili vi sono infiniti gruppi di tre rette omologhe concorrenti, le quali ruotano intorno a tre punti fissi della circonferenza c. Questi tre punti P_1, P_2 e P_3 diconsi *punti invariabili* ed *invariabile* il triangolo $P_1P_2P_3$, che è inversamente simile ad ogni triangolo formato da tre rette omologhe. I triangoli $P_1P_2P_3$ e $D_1D_2D_3$ sono omologici e le distanze del loro centro di omologia dai lati di $P_1P_2P_3$ sono inversamente proporzionali ad a_1, a_2, a_3, lunghezze di lati omologhi di F_1, F_2, F_3. Basta per ciò dimostrare che le rette che congiungono due a due i vertici omologhi dei due triangoli si tagliano in un medesimo punto. Infatti si ha:

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{D_i P_m}{D_i P_n} = \frac{(D_i, P_iP_m)}{(D_i, P_iP_n)},$$

con $i = 1, 2, 3$; $m = 2, 3, 1$; $n = 3, 1, 2$; dunque D_1P_1, D_2P_2, D_3P_3 si tagliano in un medesimo punto Δ, che chiamasi *punto direttore* delle tre figure F_1, F_2, F_3.

5. Sia D'_1, punto di F_1, omologo a D_1, punto di F_2 e di F_3; per questo le rette D'_1P_1, D_1P_2, D_1P_3 si tagliano in un medesimo punto ed i punti D'_1, P_1 e D_1 sono collineari. Similmente se D'_2, punto di F_2, è l'omologo di D_2, punto di F_3 e di F_1, i punti D'_2, P_2 e D_2 sono collineari; come pure sono collineari D'_3, P_3 e D_3 nelle ipotesi corrispondenti. Quindi i tre triangoli $D_1D_2D_3$ (di similitudine), $P_1P_2P_3$ (invariabile) e $D'_1D'_2D'_3$ sono omologici ed hanno il medesimo centro di omologia. I punti D'_1, D'_2, D'_3 si dicono *punti aggiunti*.

6. Come esercizio si può dimostrare che il punto direttore Δ e l'uno e l'altro dei triangoli $D_1D_2D_3$ e $P_1P_2P_3$ sono sufficienti per determinare le figure F_1, F_2 ed F_3.

7. Di un triangolo ABC siano O il centro del circolo circoscritto Z e K il punto di Lemoine; su OK, come diametro, si descriva un circolo, che chiamasi *circolo di Brocard* [Lugli, N. C., 16]; le perpendicolari OX, OY, OW ai lati di ABC incontrino il circolo di Brocard nei punti A', B', C' che determinano un triangolo detto *primo triangolo di Brocard.* Si ha per costruzione che OA', OB' ed OC' sono rispettivamente perpendicolari ai lati BC, CA, AB; quindi con semplici considerazioni si ottiene:

$$A'\widehat{O}B' = A\widehat{C}B = A'\widehat{C'}B',$$
$$B'\widehat{O}C' = B\widehat{A}C = B'\widehat{A'}C',$$
$$C'\widehat{O}A' = C\widehat{B}A = C'\widehat{B'}A',$$

cioè i triangoli ABC e A'B'C' sono inversamente simili. E poichè si ha: $O\widehat{A'}K = O\widehat{B'}K = O\widehat{C'}K = 90°$, le rette A'K, B'K, C'K non sono altro che le parallele di Lemoine.

Si prolunghi KA' e siano F' ed E i punti di intersezione col circolo circoscritto Z ad ABC. Il circolo di Lemoine [Lugli, N. C., 11] ed il circolo di Brocard sono concentrici; la perpendicolare OQ ad EF' divide per metà tanto EF', quanto KA' e però è: F'A'=KE. Ne viene che AA' ed AK sono coniugate isotomiche [Lugli, N. C., 7] rispetto ad A. Similmente si prova, che BB' e BK, che CC' e CK sono coniugate isotomiche rispetto a B ed a C; quindi AA', BB', CC' si tagliano in un medesimo punto, che è il coniugato isotomico del punto di Lemoine.

8. Si conducano le simediane [Lugli, N. C., 2] del triangolo ABC; i punti d'intersezione col circolo di Brocard siano A'', B'', e C''; il triangolo A''B''C'' chiamasi *secondo triangolo di Brocard;* esso è il triangolo di similitudine (2) di tre figure direttamente simili e qualunque costruite sui lati di ABC.

E invero $O\widehat{A''}K$ è retto, perchè inscritto in semicirconferenza, A'' è il centro della corda simediana corrispondente (1) e per conseguenza è il punto doppio delle due figure direttamente simili descritte sui lati AB ed AC. Perciò A''B''C'' è il triangolo di similitudine.

Poichè $A_1A_2A_3$, triangolo formato da tre rette omologhe di tre figure direttamente simili costruite sui lati di ABC, è simile ad ABC, essendo A'' il punto doppio delle due figure costruite sui lati BA ed AC omologhi ai lati A_1A_2 e A_2A_3, la retta $A''A_2$ divide l'angolo $A_1A_2A_3$ in parti rispettivamente uguali a quelle in cui A''A divide l'angolo BAC; quindi $A''A_2$ è una simediana di $A_1A_2A_3$, e tali sono pure $B''A_1$ e $C''A_3$; perciò si ha che le simediane di $A_1A_2A_3$ passano per i vertici del secondo triangolo di Brocard. Essendo poi $A_1A_2A_3$ omologico col triangolo di similitudine A''B''C'' (3), il centro di omologia, che è il punto di Lemoine di $A_1A_2A_3$, è un punto del circolo di similitudine, cioè del circolo di Brocard di ABC.

Si ha infine che i vertici A', B', C' del primo triangolo di Brocard sono i punti invariabili (4) di tre figure direttamente simili descritte sui lati di ABC.

9. Esercizio utile ed elegante è il seguente: I simmetrici dei vertici A, B, C di un triangolo ABC rispetto ai lati opposti siano A_1, B_1, C_1; supponendo che A_1BC, B_1CA, C_1AB facciano parte di tre figure direttamente simili descritte sui lati di ABC, dimostrare che: 1° A, B, C sono i punti doppi; 2° gli ortocentri di A_1BC, B_1CA, C_1AB sono i punti invariabili; 3° A_1, B_1, C_1 sono i punti aggiunti; 4° l'ortocentro di ABC è il punto direttore.

II. — Poligoni armonici.

10. La teoria dei poligoni armonici può ritenersi come la generalizzazione della Geometria recente del triangolo, estensione intuita fino dal 1886 dall'illustre geometra Tucker, il quale lasciò scritto: «je crois que «tous ces résultats auraient lieu pour un polygone inscrit dans un cercle, «s'il y avait entre les côtés une relation telle qu'il existe un point, «dont les distances aux côtés soient proportionelles à ces côtés».

Sui poligoni armonici pubblicarono note importanti il Tucker, il Neuberg, il Casey, il Tarry ed il Simmons in varii periodici di matematica di Francia e di Inghilterra.

11. Nel piano di un poligono qualunque ABCD.... inscritto in un circolo si possa trovare un punto K, il quale abbia la proprietà che le sue distanze dai lati del poligono siano proporzionali ai lati stessi; il poligono ABCD.... chiamasi allora *poligono armonico;* le rette KA, KB, KC,.... *simediane* del poligono ed il punto K *centro delle simediane*. Se due poligoni hanno le medesime simediane diconsi *co-simediani*.

12. Sia O il centro del circolo circoscritto al poligono ABCD....; siano $a, b, c,....$ i suoi lati; $x, y, z,....$ le lunghezze delle perpendicolari condotte dal centro delle simediane K ai lati; il circolo di diametro OK chiamasi allora *circolo di Brocard* [Lugli, N. C., 16] e l'angolo ω determinato da una delle seguenti equazioni: $\operatorname{tang}\omega = \frac{2x}{a} = \frac{2y}{b} = \frac{2z}{c} = ...$ dicesi *angolo di Brocard* [Lugli, N. C., 8].

13. In un circolo Z qualunque di centro M sia inscritto un poligono regolare ABC....; i raggi AM, BM, CM,.... prolungati oltre M incontrino il circolo nei punti A', B', C',....; sia un punto qualunque P del piano del poligono il polo d'inversione rispetto al quale si trasformi la figura per inversione. Il circolo circoscritto si trasforma allora in un altro circolo X; se $\alpha, \beta, \gamma,....$ è il sistema di punti che corrisponde al sistema A, B, C,.... ed $\alpha', \beta', \gamma',....$ quello che corrisponde al sistema A', B', C',.... si ha che le rette congiungenti α con α', β con β', γ con γ',.... passano per un medesimo punto K, e siccome i punti A, B, C, B′ formano un gruppo armonico, anche i loro inversi α, β, γ e β' formeranno un gruppo armonico; e poichè la retta $\beta\beta'$ passa per K, le perpendicolari condotte da K sui lati $\alpha\beta$ e $\beta\gamma$ sono proporzionali a questi stessi lati; perciò per inversione dal poligono regolare ABC.... si è ottenuto un poligono armonico $\alpha\beta\gamma$.... dello stesso numero di lati.

Reciprocamente si può sempre trasformare un poligono armonico in un poligono regolare dello stesso numero di lati. Sia infatti ABC.... un poligono armonico, Z il circolo circoscritto di centro O e K il centro delle simediane. Siano S ed S′ i punti limiti del circolo Z e di quello OKX descritto sul diametro OK; si unisca S con B e con A e si prolunghino le congiungenti, qualora occorra, fino a tagliare il circolo Z nei punti A′ e B′; il segmento A′B′ è il lato del poligono regolare risultante dalla trasformazione. Le rette AB e A′B′ si taglino in P e taglino OK in C e C′.

La polare di S passerà per P e per S′, ed il fascio P (SCS′C′) è armonico; quindi si ha:

$$\frac{2}{SS'} = \frac{1}{SC} + \frac{1}{SC'} = \frac{1}{SK} + \frac{1}{SO};$$

$$\frac{SK - SC}{SK\,.\,SO} = \frac{SC' - SO}{SC'\,.\,SO};\quad \frac{KC}{SC} : \frac{OC'}{SC'} = \frac{SK}{SO};$$

$$\frac{(K,\,AB)}{(S,\,AB)} : \frac{(O,\,A'B')}{(S,\,A'B')} = \frac{SK}{SO},$$

ossia:

$$\frac{(K,\,AB)}{AB} : \frac{(O,\,A'B')}{A'B'} = \frac{SK}{SO},$$

perchè dai triangoli simili SAB ed SA′B′ si ha:

$$\frac{(S,\,AB)}{(S,\,A'B')} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Ma $\frac{(K,\,AB)}{AB}$ è costante, perchè AB è lato del poligono armonico, di cui K è il centro delle simediane; $\frac{SK}{SO}$ è dato, perchè S, K ed O sono punti dati; dunque $\frac{(O,\,A'B')}{A'B'}$ è costante e però costante è pure A′B′.

I punti S ed S′ si chiamano *centri d'inversione* del poligono armonico e sono coniugati armonici rispetto ad O ed a K.

Si può quindi trasformare sempre un poligono armonico in un altro pure armonico.

14. In un poligono armonico siano 1, 2, 3,.... i vertici; siano 1, 2 e 3 tre vertici consecutivi; KP e KP′ le perpendicolari condotte dal centro delle simediane ai lati 1, 2 ed 1, 3; sia 1′ il punto d'intersezione di 1, K col circolo circoscritto Z. Il rapporto $\frac{KP}{1,\,2} : \frac{KP'}{1,\,3}$ è uguale al rapporto anarmonico (1, 2, 3, 1′), il quale è costante, perchè uguale al rapporto anarmonico corrispondente in un poligono regolare; essendo $\frac{\mathrm{KP}}{1,\,2}$ costante, lo è pure $\frac{\mathrm{KP}'}{1,\,3}$; cioè il poligono stellato formato dalle corde (1, 3), (2, 4), (3, 5).... è un poligono armonico ed ha K per centro delle simediane.

In modo analogo si può dimostrare che è pure armonico il poligono stellato formato dalle corde (1, 4), (2, 5), (3, 6),.... che ha K per centro delle simediane.

Così pure si può dimostrare facilmente che i poligoni formati dai vertici alternati 1, 3, 5,.... $2n-1$ e 2, 4, 6,.... $2n$ di un poligono armonico di un numero pari di lati sono pure armonici e che hanno il medesimo centro delle simediane.

15. Sia d la lunghezza KO ed R il raggio di Z. Si è visto che ω è definito dalla equazione: $\operatorname{tang}\omega = \frac{2x}{a} = \frac{2\,(\mathrm{K, AB})}{\mathrm{AB}}$; sia A′B′ il lato del poligono regolare di n lati inscritto a Z; si ha dalla geometria elementare: $\operatorname{cotang}\frac{\pi}{n} = \frac{2h_n}{a}$; essendo: $h_n = a\,(\mathrm{O, A'B'})$, è: $\operatorname{cotang}\frac{\pi}{n} = \frac{2\,(\mathrm{O, A'B'})}{\mathrm{A'B'}}$.

Dividendo termine a termine le espressioni che danno $\operatorname{tang}\omega$ e $\operatorname{cotang}\frac{\pi}{n}$ si ottiene:

$$\frac{\operatorname{tang}\omega}{\operatorname{cotang}\frac{\pi}{n}} = \frac{(\mathrm{K, AB})}{\mathrm{AB}} : \frac{(\mathrm{O, A'B'})}{\mathrm{A'B'}} = \frac{\mathrm{SK}}{\mathrm{SO}},$$

per quanto si è visto precedentemente (14).

Ma siccome O e K sono coniugati armonici rispetto ad S ed S′, che sono inversi rispetto a Z, si ha:

$$\mathrm{SK} : \mathrm{SO} = \sqrt{1 - \frac{d^2}{\mathrm{R}^2}};$$

e quindi si ricava:

$$\operatorname{tang}\omega = \operatorname{cotang}\frac{\pi}{n}\sqrt{1 - \frac{d^2}{\mathrm{R}^2}},$$

da cui, risolvendo rispetto a d:

$$d^2 = \mathrm{R}^2\left(1 - \operatorname{tang}^2\omega \operatorname{tang}^2\frac{\pi}{n}\right).$$

Come caso particolare si supponga che il poligono armonico sia un triangolo equilatero. Poichè le distanze x, y, z del punto K di Lemoine dai lati sono proporzionali ai lati stessi [Lugli, N. C., 5], da: $\operatorname{tang}\omega = \frac{2x}{a}$, si ha: $\operatorname{tang}\omega = \frac{4\Delta}{3a^2}$; ed essendo: $h_a = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ e quindi: $2\Delta = ah_a = \frac{a^2}{2}\sqrt{3}$, sostituendo si ricava: $\operatorname{tang}\omega = \frac{a^2\sqrt{3}}{3a^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e perciò: $\omega = 30^\circ$ [Lugli, N. C., 9].

Essendo dunque: $\tang \frac{\pi}{n} = \tang \frac{180^\circ}{3} = \tang 60^\circ = \sqrt{3}$, si ottiene: $d^2 = R^2 \left(1 - \frac{1}{3} \cdot 3\right) = 0$, come si poteva prevedere, giacchè nel caso del triangolo equilatero il centro del circolo circoscritto ed il punto di Lemoine coincidono.

Si verifica subito che per gli angoli ω ed ω' di Brocard di due poligoni armonici di m e di n lati, aventi il medesimo circolo circoscritto e lo stesso centro delle simediane, si ha la relazione:

$$\tang \omega : \tang \omega' = \cotang \frac{\pi}{m} : \cotang \frac{\pi}{n} .$$

E poichè un poligono regolare di n lati può occupare nel circolo circoscritto infinite posizioni, risulta evidente che nel medesimo circolo si possono inscrivere infiniti poligoni armonici di n lati col medesimo centro delle simediane.

16. Per il punto K di un poligono armonico ABCD.... di n lati si conduca una retta qualunque che tagli i lati nei punti $R_1, R_2, R_3, \ldots$; il luogo del punto P di essa preso in modo da verificare l'uguaglianza:

$$\frac{1}{KR_1} + \frac{1}{KR_2} + \frac{1}{KR_3} + \ldots = \frac{n}{KP},$$

è la polare di K rispetto al circolo circoscritto Z, polo e polare armonica rispetto al dato poligono, che furono chiamati *punto* e *retta di Lemoine* del poligono.

Analogamente se il punto P è l'intersezione della retta arbitraria col circolo circoscritto Z, è verificata la medesima uguaglianza.

17. Con una dimostrazione analoga a quella fatta al n. 16 della nota del prof. Lugli, linea 5ª, si può provare esattamente la seguente proprietà generale: in ogni poligono armonico di n lati le perpendicolari condotte dal centro del circolo circoscritto Z ai lati incontrano il circolo Z in n punti tali che la $2n$ rette congiungenti questi punti cogli estremi dei lati corrispondenti si tagliano, n ad n, in due punti fissi Ω ed Ω' di Z che si chiamano *punti di Brocard* del poligono [Lugli, N. C., 10]. Gli n punti L, M, N,...., in cui le perpendicolari tagliano il circolo di Brocard sono detti *punti invariabili* [4]; le proiezioni del centro O di Z sulle simediane sono i *punti doppi* [1] del poligono.

18. Sia ABCD.... un poligono armonico inscritto in un circolo Z; per il centro K delle simediane si conduca la KU_1, parallela alla tangente AT condotta al circolo Z per il vertice A, sino a tagliare in U il lato AB; il segmento KU è costante. Sia A' il punto, in cui AK incontra Z; si congiunga A' con B e si conduca KX perpendicolare ad AC. Si ha subito per semplici cognizioni di geometria piana e di trigonometria:

$$KX : KU = \operatorname{sen} A\widehat{U}K = \operatorname{sen} T\widehat{A}U = \operatorname{sen} A\widehat{A'}B = \frac{AB}{2} : R;$$

è dunque:

$$KX : KU = \frac{AB}{2} : R,$$

ossia:

$$KU : R = KX : \frac{AB}{2};$$

ed essendo [12]: $\operatorname{tang} \omega = \frac{2KX}{AB}$, è pure: $KU = R \operatorname{tang} \omega =$ costante.

Si divida ora KA con un punto A″ in modo che sia: $KA'' : A''A = m : n$, essendo m ed n quantità date; per A″ si conducano le A″U′ e A″O′, parallele alla tangente AT e ad OA, sino a tagliare AB in U′ e KO in O′; si unisca O′ con U′ e si conduca KU parallela ad A″U′ sino a tagliare AB in U. Il triangolo O′U′A″ è rettangolo in A″; quindi è:

$$\overline{O'U'}^2 = \overline{A''U'}^2 + \overline{A''O'}^2 .$$

Dai triangoli simili KAO e KA″O′ si ha:

$$KA : KA'' = AO : A''O' ;$$

e dalla ipotesi $KA'' : A''A = m : n$ con semplici trasformazioni si ricava: $KA : KA'' = m + n : m$; quindi si ha:

$$AO : A''O' = m + n : m,$$

ossia:

$$A''O' = \frac{m \, . \, AO}{m+n} = \frac{m \, . \, R}{m+n} .$$

Analogamente dai triangoli simili AU′A″ e AKU si ha:

$$KA : AA'' = KU : A''U' = m + n : n,$$

avendosi:

$$KA : AA'' = m + n : n ;$$

e perciò:

$$A''U' = \frac{n : KU}{m+n} = \frac{nR \operatorname{tang} \omega}{m+n}$$

per quanto precede. Quadrando ed addizionando i valori di A″U′ e A″O′ si ottiene:

$$\overline{O'U'}^2 = R^2 (m^2 + n^2 \operatorname{tang}^2 \omega) : (m+n)^2 = \text{costante},$$

e quindi O′U′ = costante, cioè i punti analoghi ad U′ sono sopra una circonferenza Γ di centro O′ e di raggio O′U′.

Se B″V è parallela alla tangente in B al circolo Z e taglia BC in V′, il triangolo O′B″V′ è ugnale al triangolo O′A″U′; quindi si ha:

$$U'\widehat{O'}V' = A\widehat{O}B ;$$

se ne deduce perciò che i punti U′, V′,.... sono i vertici di un poligono simile al poligono ABC...., e formano dunque un poligono armonico. Un altro poligono armonico si ottiene ripetendo la costruzione nel senso opposto, cioè rispetto alla semiretta AT′ opposta ad AT.

19. Da questa importante proposizione si possono trarre alcuni casi particolari dando al rapporto $m:n$ valori diversi. Si ha così:

1° se $m=0$, il circolo Γ è il secondo circolo di Lemoine (circolo del coseno degli Inglesi) [Lugli, N. C., 17];

2° se $m=n$, O' è il centro di OK ed il circolo Γ è concentrico al circolo di Brocard; per analogia chiamasi *primo circolo di Lemoine* del poligono [Lugli, N. C., 11]; il suo diametro è uguale ad $R \sec \omega$;

3° se $m = n \operatorname{tang}^2 \omega$, il centro del circolo Γ è il centro del segmento $\Omega\Omega'$ [17];

4° se il poligono si riduce ad un triangolo, e se è:

$$m:n = -\operatorname{cotang} A \operatorname{cotang} B \operatorname{cotang} C : \operatorname{cotang} \omega,$$

il circolo Γ è il circolo di Taylor [Lugli, N. C., 18];

5° ogni circolo di Tucker [Lugli, N. C., 20] di un triangolo ABC è un circolo di Taylor di qualunque altro triangolo A'B'C' che abbia il medesimo circolo circoscritto ed il medesimo punto di Lemoine.

Chi abbia desiderio di acquistare più estese cognizioni su questo argomento, potrà consultare le seguenti pubblicazioni, delle quali io pure mi sono servito: Annuaire de l'Association française pour l'avancement des sciences, année 1881-1883-1886; Chapitre supplémentaire de A sequel to the first six Books of the Elements of Euclid del Casey; Companion to the Weehly Papers del Milne, Mathesis de Mansion et Neuberg, tome II, V, VII e Nouvelle Correspondance mathématique, tome III, IV, V et VI.

Novembre, 1897.

Dott. U. Ceretti.

A proposito della nota del prof. Ciamberlini

" Sulle definizioni di equazione e di sistemi di equazione "

(V. *Periodico*, anno XII, fasc. VI, pag. 184)

Nel mio insegnamento io definisco l'equazione od inequazione un *problema da risolvere*, che consiste nel cercare quali sono i valori dell'incognita o delle incognite che rendono uguali o disuguali, due date espressioni algebriche. E similmente pei sistemi. Così si mette in luce, io credo, la vera natura delle equazioni od inequazioni, e restano incluse anche le equazioni od inequazioni impossibili e quelle identiche; e le equazioni identiche conservano una certa distinzione dalle identità, in quanto le prime corrispondono, come *problemi*, alle *domande:* " Cercate il valore di x per cui A è uguale a B " alla quale si risponde: " x può assumere qualunque valore, " mentre le seconde sono veri *teoremi*, ed *enunciano le verità* " A è uguale a B per ogni valore di x " costituendo così questa come la *risposta* a quelle.

Nel concetto, come si vede, la mia definizione collima con quella del prof. Ciamberlini.

Torino, Novembre 1897.

Rodolfo Bettazzi.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 190 278 281 293 325 358

190. *Date tre tangenti* a, b, c, *alla parabola ed il punto* M_c *di contatto sull'una* c, *determinare analiticamente il fuoco e la grandezza del parametro.*

Applicazione. — *Cercare il luogo geometrico dei fuochi delle parabole tangenti a due rette fisse e ad una circonferenza inscritta nell'angolo di queste rette.*

Bellacchi.

Risoluzione del Prof U. Ceretti di Badia Polesine.

Assi coordinati siano le tangenti c e b, che formino un angolo θ; siano x_1 e 0 le coordinate cartesiane di M_c. Le equazioni di b di c, e di a saranno: $x=0$, $y=0$, $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$, essendo perciò $-\frac{1}{m}$ e $-\frac{1}{n}$ le coordinate plückeriane di a. L'equazione della parabola tangente agli assi coordinati è della forma

(1) $$uv+hu+kv=0,$$

nella quale h e k sono parametri arbitrari. Ogni tangente alla (1) essendo rappresentata da

(2) $$ux+vy+1=0,$$

affinchè la parabola sia tangente alla c nel punto M_c $(x_1, 0)$, dovrà essere $u=-\frac{1}{x_1}$, e dalla (1) si dedurrà: $v=\frac{h}{kx_1-1}$; se la tangente c è anche l'asse delle ascisse, il valore di v deve essere infinito per h diverso da zero, onde si ha: $k=\frac{1}{x_1}$. Inoltre alla parabola è pure tangente la a; perciò la (1) deve essere soddisfatta da $-\frac{1}{m}$ e $-\frac{1}{n}$; si ha così la condizione: $hn+km=1$, la quale coll'altra $k=\frac{1}{x_1}$ dà: $h=\frac{x_1-m}{nx_1}$. Eliminando v fra le equazioni (1) e (2) si ottiene

$$u^2x+u(kx-hy+1)+k=0,$$

di cui il discriminante, uguagliato a zero, rappresenta la parabola in coordinate cartesiane e cioè

(3) $$(kx-hy)^2-2(kx+hy)+1=0,$$

dalla quale, per una nota formola della Geometria analitica, per il parametro p risulta

(4) $$p=\frac{2hk\,\mathrm{sen}^2\theta}{(h^2+k^2+2hk\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Poichè le rette congiungenti il fuoco F (X, Y) della parabola coi punti ciclici all'infinito sono date dalle equazioni $y-Y+(x-X)(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)=0$ per $i=\pm\sqrt{-1}$, ponendole sotto la forma (2), si ricava:

$$u=-\frac{\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta}{Y+X(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)},\ v=-\frac{1}{Y+X(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)}=u(\cos\theta-i\,\mathrm{sen}\,\theta);$$

sostituendo questi valori di u e di v nella formola (1) si trova:

$$h(X\cos\theta+Y)+k(X+Y\cos\theta)-1+i\,\mathrm{sen}\,\theta\,(hX-kY)=0;$$

da cui si ha il sistema:

$$(5)\qquad \begin{cases} hX - kY = 0, \\ kX + h(2X\cos\theta + Y) = 1, \end{cases}$$

il quale risolto rispetto ad X e ad Y dà

$$(6)\qquad \begin{cases} X = \dfrac{k}{h^2 + k^2 + 2hk\cos\theta}, \\ Y = \dfrac{h}{h^2 + k^2 + 2hk\cos\theta}, \end{cases}$$

coordinate che determinano il fuoco pei valori determinati di h e di k. Sostituendo nelle (4) e (6) $\frac{1}{x_1}$ a k e $\frac{x_1 - m}{nx_1}$ ad h, e ponendo $P = (x_1 - m)(x_1 - m + 2n\cos\theta) + n^2$ si ottiene

$$p = \frac{2n^2 x_1 (x_1 - m)\,\mathrm{sen}^2\theta}{P^{\frac{3}{2}}},\quad X = \frac{n^2 x_1}{P},\quad Y = \frac{nx_1(x_1 - m)}{P},$$

relazioni che risolvono la prima parte della questione.

Osservazione. — Per $\theta = 90°$ i numeratori non variano, essendo: $\mathrm{sen}^2\theta = 1$ ed il denominatore P diventa: $(x_1 - m)^2 + n^2$.

Applicazione. — Come precedentemente siano le tangenti b e c assi coordinati che formino un angolo θ. L'equazione generale del cerchio in coordinate pluche-riane, essendo α e β le coordinate del suo centro, ed R il raggio, è

$$(\alpha u + \beta v + 1)^2\,\mathrm{sen}^2\theta - R^2(u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta) = 0;$$

e poichè deve essere tangente agli assi coordinati, si hanno le relazioni

$$\beta^2\,\mathrm{sen}^2\theta - R^2 = 0 \qquad , \qquad \alpha^2\,\mathrm{sen}^2 - R^2 = 0,$$

dalle quali si ottiene $\alpha = \beta = \frac{R}{\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{1}{s}$; e però l'equazione precedente si riduce ad

$$\left\{R(u+v) + \mathrm{sen}^2\theta\right\}^2 - R^2(u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta) = 0,$$

oppure

$$(7)\qquad 2quv + 2s(u+v) + s^2 = 0,$$

avendo posto per brevità $1 + \cos\theta = q$, $\frac{1}{R}\,\mathrm{sen}\,\theta = s$.

Eliminando v tra le equazioni (1) e (7) si ottiene l'equazione

$$2u^2(qh - s) - u\left[2s(k - h) + s^2\right] - ks^2 = 0;$$

il discriminante nullo di questa esprime che le curve (1) e (7) sono tangenti, il che appunto si ha per dato; si ricava così

$$(8)\qquad \left\{2(k - h) + s\right\}^2 + 8k(qh - s) = 0.$$

Eliminando h e k fra le equazioni (5) e (8) si ricava una equazione fra X e Y che rappresenta il luogo cercato. Dalla prima delle (5) si ha:

$$h = \lambda Y \qquad e \qquad k = \lambda X;$$

e perciò dall'altra si ha

$$\lambda = \frac{1}{X^2 + 2XY\cos\theta + Y^2};$$

sostituendo ora nella (8) e riducendo, si ottiene l'equazione:

$$(9)\qquad \begin{cases} X^4 + Y^4 + AXY + B(X^3Y + XY^3) + C(X^3 + Y^3) + D(X^2Y + XY^2) \\ \qquad + E(X^2 + Y^2) + FXY = 0, \end{cases}$$

avendo posto $A = 2(1 + 2\cos\theta)$; $B = 4\cos\theta$; $C = -\frac{4}{s}$; $D = -\frac{4}{s}(1 + 2\cos\theta)$; $E = \frac{4}{s^2}$; $F = \frac{8}{s^2}\cos\theta$, equazione di una curva di 4° ordine passante per l'origine.

Osservazione. — Per $\theta = 90°$ la (6) diventa:

$$X^4 + Y^4 + 2X^2Y^2 - \frac{4}{s}(X^3 + Y^3) - \frac{4}{s}(X^2Y + XY^2) + \frac{4}{s^2}(X^2 + Y^2) = 0\,,$$

che si può anche scrivere

$$(10) \qquad (X^2 + Y^2)\left\{X^2 + Y^2 - \frac{4}{s}(X + Y) + \frac{4}{s^2}\right\} = 0\,,$$

equazione di un luogo di 4° ordine che si scinde nei due:

$$X^2 + Y^2 = 0 \qquad e \qquad X^2 + Y^2 - \frac{4}{s}(X + Y) + \frac{4}{s^2} = 0\,,$$

dei quali il primo è l'insieme delle rette isotrope condotte per l'origine, ed il secondo è una circonferenza tangente agli assi coordinati.

278. *Si considerino tutti i triangoli inscritti in una conica, aventi un vertice comune ed il lato opposto parallelo alla tangente in quel punto. Trovare il luogo del centro del cerchio circoscritto a ciascuno di questi triangoli.*

G. Scorza.

Risoluzione del sig. G. Gallucci studente a Napoli.

Supponiamo che la conica sia una ellisse. Prendiamo come assi di coordinate, il diametro passante pel vertice fisso A ed il suo coniugato. L'equazione della curva sarà

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

Se alla distanza $OP = m$ dal centro O si conduce la parallela alla tangente in A, ossia all'asse delle y, questa incontra l'ellisse in due punti, di cui l'ascissa comune è m e le ordinate sono $x = \pm\, l$, ove $l^2 = b'^2\left(1 - \frac{m^2}{a'^2}\right)$. Allora i 3 punti A, M, M' avranno per coordinate $(a', 0)$, (m, l), $(m, -l)$. Se x, y sono le coordinate di un punto equidistante da A, M, N, si avrà, indicando con ω l'angolo degli assi,

$$(2) \quad \begin{cases} (x - a')^2 + y^2 + 2(x - a')y\cos\omega = (x - m)^2 + (y - l)^2 + 2(x - m)(y - l)\cos\omega \\ (x - a')^2 + y^2 + 2(x - a')y\cos\omega = (x - m)^2 + (y + l)^2 + 2(x - m)(y + l)\cos\omega. \end{cases}$$

Per trovare l'equazione del luogo richiesto bisogna eliminare la m e la l. Per sottrazione dalle (2) si ha

$$4ly + 4l(x - m)\cos\omega = 0;$$

da cui

$$x - m = -\frac{y}{\cos\omega}, \qquad m = \frac{x\cos + y}{\cos\omega}.$$

Addizionando invece si ha:

$$(x - a')^2 + y^2 + 2y(x - a')\cos\omega = (x - m)^2 + y^2 + l^2 + 2(x - m)y\cos\omega.$$

Sostituendo in questa eguaglianza $-\frac{y}{\cos\omega}$ ad $x - m$, e

$$b'^2\left(1 - \frac{m^2}{a'^2}\right) = b'^2 - b'^2\frac{x^2\cos^2\omega + y^2 + 2xy\cos\omega}{a'^2\cos^2\omega}$$

ad l^2, dopo le opportune riduzioni si ha

$$x^2(a'^2 + b'^2)\cos^2\omega + 2xy(a'^2\cos^3\omega + b'^2\cos\omega) + y^2(2a'^2\cos^2\omega - a'^2 + b'^2) -$$
$$- 2xa'^3\cos^2\omega + 2ya'^3\cos^3\omega + (a'^4 - a'^2b'^2)\cos^2\omega = 0.$$

Questa è l'equazione del luogo. Se la conica data è una iperbole, il risultato è analogo; basta sostituire $-b'^2$ a b'^2. In entrambi i casi è facile vedere che l'invariante assoluto

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

è $-a'^4 \, sen^2 \omega \cos^2 \omega$, onde il luogo richiesto è una iperbole, che può degenerare anche in due rette secondo i valori ω.

Se la conica data è una parabola, prendendo come assi il diametro passante per A e la tangente in A, la sua equazione è $y^2 = px$ e le coordinate dei 3 punti A, M, M' sono $(0,0)$, $(m, \sqrt{pm})$, $(m, -\sqrt{pm})$. Con lo stesso procedimento precedente si arriva alla equazione

$$x^2 \cos^2 \omega + 2\,xy \cos^2 \omega - y^2\, sen^2 \omega - px \cos^2 \omega - py \cos \omega = 0$$

la quale rappresenta un'iperbole.

Se $\omega = 90°$, qualunque sia la conica data l'equazione del luogo si riduce ad $y^2 = 0$, che rappresenta il diametro passante per A contato due volte.

281. *Due cerchi di centri* O,O' *si tagliano in* A *e* B. *Preso un punto* P *sul primo e condotte le secanti* PA, PB *a tagliare il secondo nuovamente in* A', B', *dimostrare che al muoversi di* P *sull'arco esterno del cerchio* O, *rimane costante il rapporto della potenza di* P, *rispetto ad* O', *all'area del quadrilatero* ABB'A'.

GALLUCCI.

Risoluzione del Sig. Francesco Celestri.

Si ha, indicando con θ l'angolo APB

$$\begin{aligned} \text{area ABB'A} &= \text{area A'PB'} - \text{area APB} \\ &= \frac{1}{2} \text{PA'} \times \text{PB'} \,.\, sen\, \theta - \frac{1}{2} \text{PA} \times \text{PB} \,.\, sen\, \theta \\ &= \frac{1}{2} (\text{PA'} \times \text{PB'} - \text{PA} \times \text{PB}) \,.\, sen\, \theta. \end{aligned}$$

Bisogna dunque dimostrare che si ha

$$(1) \qquad \frac{\text{PA'} \times \text{PA}}{\frac{1}{2}(\text{PA'} \times \text{PB'} - \text{PA} \times \text{PB})\, sen\, \theta} = \text{costante};$$

ossia, essendo $sen\, \theta$ costante, deve essere

$$\frac{\text{PA'} \times \text{PB'} - \text{PA} \times \text{PB}}{\text{PA'} \times \text{PB}} = \text{costante};$$

ossia ancora, dividendo numeratore e denominatore per PA' $\times$ PA,

$$(2) \qquad \frac{1}{\frac{\text{PB'}}{\text{PA}} - \frac{\text{PB}}{\text{PA'}}} = \text{costante}.$$

Tiriamo ora le rette A'B, AB'; per un noto teorema si sa che al variare del punto P sull'arco esterno del cerchio O gli angoli PAB', PBA si mantengono costantemente uguali all'angolo OAO' sotto cui si tagliano i due cerchi, e quindi al variare di P i triangoli PAB', PBA, avendo sempre due angoli costanti, si mantengono simili a sè stessi e quindi i rapporti $\frac{\text{PB'}}{\text{PA}}$, $\frac{\text{PB}}{\text{PA'}}$ rimangono costanti e perciò rimane anche costante la (2) d'onde deriva che è anche vera la (1). c. d. d.

293. *Se gli spigoli di un triedro trirettangolo, di vertice* O, *sono tagliati da un piano arbitrario* π *nei punti* A, B, C, *e sono* M, M' *due punti qualunque simmetrici rispetto a* π, *si ha la relazione*

$$\frac{4\,\overline{MM'}^2}{(\overline{OM}^2-\overline{OM'}^2)^2}=\frac{1}{\overline{OA}^2}+\frac{1}{\overline{OB}^2}+\frac{1}{\overline{OC}^2}$$

A. Del Re.

Risoluzione del sig. prof. Pietro Castelli.

Poniamo $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$. Nel tetraedro rettangolo OABC sieno S_1, S_2, S_3, S le aree delle facce OBC, OAC, OAB, ABC. Si ha la relazione $S^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$, ossia $4\,S^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2$. Inoltre il volume del tetraedro è la sesta parte del parallelepipedo retto avente i tre spigoli non paralleli eguali ad a, b, c. Quindi, se H è la proiezione del vertice O sulla faccia ABC, si ha

$$\frac{1}{6}\,abc=S\,.\,\frac{1}{3}\,OH,$$

donde

$$a^2b^2c^2=4\,S^2\,.\,\overline{OH}^2=\overline{OH}^2\,(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)$$

Dividendo per $a^2b^2c^2\,.\,\overline{OH}^2$ avremo

$$\frac{1}{\overline{OH}^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \tag{1}$$

Siano N la traccia della retta MM' sul piano π e D la proiezione del vertice O su MM'. Nel triangolo OMM' la retta ON è mediana, quindi per un teorema noto si ha

$$\overline{OM}^2-\overline{OM'}^2=2\,MM'\,.\,ND=2\,MM'\,.\,OH,$$

donde

$$(\overline{OM}^2-\overline{OM'}^2)^2=4\,\overline{MM'}^2\,.\,\overline{OH}^2,$$

ossia

$$\overline{OH}^2=\frac{(\overline{OM}^2-\overline{OM'}^2)^2}{4\,\overline{MM'}^2}.$$

Sostituendo questo valore nella (1) si ha,

$$\frac{4\,\overline{MM'}^2}{(\overline{OM}^2-\overline{OM'}^2)^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

$$=\frac{1}{\overline{OA}^2}+\frac{1}{\overline{OB}^2}+\frac{1}{\overline{OC}^2}. \qquad \text{c. d. d.}$$

Altra risoluzione del sig. Francesco Celestri.

325. *Se si pone* $\varphi=u^2+v^2+w^2$, $\Delta=u\xi+v\eta+w\zeta+1$, *e si eliminano le* ξ', η', ζ' *fra le equazioni*

$$u\xi'+v\eta'+w\zeta'+(u\xi+v\eta+w\zeta+2)=0, \tag{1}$$

$$u'\xi'+v'\eta'+w'\zeta'+1=0, \tag{2}$$

$$\xi'-\xi:\eta'-\eta:\zeta'-\zeta=u:v:w, \tag{3}$$

si ha per equazione risultante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2\Delta & -\varphi \\ 1 & 0 & 0 & -\xi & u \\ 0 & 1 & 0 & -\eta & v \\ 0 & 0 & 1 & -\zeta & w \\ u' & v' & w' & 1 & 0 \end{vmatrix}=\varphi\,(u'\xi+v'\eta+w'\zeta+1)-2\Delta\,(uu'+vv'+ww')=0$$

Del Re.

Risoluzione del Sig. E. Palumbo Todaro studente della R. Università di Palermo.

Dalle (3), indicando con ρ un fattore di proporzionalità, si ricava

$$(4)\qquad \begin{cases} \xi' - \xi = \rho u \\ \eta' - \eta = \rho v \\ \zeta' - \zeta = \rho w. \end{cases}$$

Da ambo i membri della (1) togliamo $2(u\xi + v\eta + w\zeta)$, ed otteniamo riducendo

$$u(\xi' - \xi) + v(\eta' - \eta) + w(\zeta' - \zeta) = -2(u\xi + v\eta + w\zeta + 1).$$

Sostituendo in questa a $(\xi' - \xi)$, $(\eta' - \eta)$, $(\zeta' - \zeta)$ i loro valori ricavati dalle (4), si ha

$$\rho(u^2 + v^2 + w^2) = -2(u\xi + v\eta + w\zeta + 1).$$

ossia, per quanto è stato premesso nell'enunciato

$$(\alpha)\qquad \rho\varphi = -2\Delta$$

Se ora dalle (4) ricaviamo i valori di ξ', η', ζ' e li sostituiamo nella (2) essa diventa

$$u'\xi + v'\eta + w'\zeta + 1 + \rho(uu' + vv' + ww') = 0,$$

ossia

$$(\beta)\qquad u'\xi + v'\eta + w'\zeta + 1 = -\rho(uu' + vv' + ww').$$

Moltiplicando adesso le (α), (β) membro a membro, si ha

$$\varphi(u'\xi + v'\eta + w'\zeta + 1) = 2\Delta(uu' + vv' + ww')$$

ossia

$$\varphi(u'\xi + v'\eta + w'\zeta + 1) - 2\Delta(uu' + vv' + ww') = 0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2\Delta & -\varphi \\ 1 & 0 & 0 & -\xi & u \\ 0 & 1 & 0 & -\eta & v \\ 0 & 0 & 1 & -\zeta & w \\ u' & v' & w' & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

358. *Se $(\rho_0\,\omega_0)$ $(\rho_1\,\omega_1)$ $(\rho_2\,\omega_2)$ sono i raggi vettori focali e le corrispondenti anomalie vere di un pianeta in tre posizioni P_0, P_1, P_2, il parametro dell'orbita è*

$$p = \frac{\rho_0\,\rho_1\,\rho_2}{2\Delta}\left[\operatorname{sen}(\omega_0 - \omega_1) + \operatorname{sen}(\omega_1 - \omega_2) + \operatorname{sen}(\omega_2 - \omega_0)\right],$$

ove Δ è l'area del triangolo $P_0\,P_1\,P_2$.

RETALI.

Risoluzione del sig. Ernesto Laura.

L'equazione polare dell'orbita al fuoco è

$$\rho = p\,\frac{1}{1 + e\cos(\omega - \beta)},$$

ove β è l'angolo che fa l'asse fisso con l'asse principale.

Da essa deducesi

$$p - x\rho\cos\omega + y\rho\operatorname{sen}\omega = \rho,$$

ove

$$x = e\cos\beta, \qquad y = -e\operatorname{sen}\beta.$$

Sostituendo in essa in luogo di (ρ, ω) rispettivamente $(\rho_0\,\omega_0)$, $(\rho_1\,\omega_1)$, $(\rho_2\,\omega_2)$ si ottiene

$$\begin{aligned} p - x\rho_0\cos\omega_0 + y\rho_0\operatorname{sen}\omega_0 &= \rho_0 \\ p - x\rho_1\cos\omega_1 + y\rho_1\operatorname{sen}\omega_1 &= \rho_1 \\ p - x\rho_2\cos\omega_2 + y\rho_2\operatorname{sen}\omega_2 &= \rho_2. \end{aligned}$$

Eliminando x e y, si ha

$$p = \frac{\begin{vmatrix} \rho_0 & -\rho_0 \cos\omega_0 & \rho_0 \operatorname{sen}\omega_0 \\ \rho_1 & -\rho_1 \cos\omega_1 & \rho_1 \operatorname{sen}\omega_1 \\ \rho_2 & -\rho_2 \cos\omega_2 & \rho_2 \operatorname{sen}\omega_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\rho_0 \cos\omega_0 & \rho_0 \operatorname{sen}\omega_0 \\ 1 & -\rho_1 \cos\omega_1 & \rho_1 \operatorname{sen}\omega_1 \\ 1 & -\rho_2 \cos\omega_2 & \rho_2 \operatorname{sen}\omega_2 \end{vmatrix}};$$

da cui

$$p = \rho_0\, \rho_1\, \rho_2 \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos\omega_0 & \operatorname{sen}\omega_0 \\ 1 & \cos\omega_1 & \operatorname{sen}\omega_1 \\ 1 & \cos\omega_2 & \operatorname{sen}\omega_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_0 \cos\omega_0 & \rho_0 \operatorname{sen}\omega_0 \\ 1 & \rho_1 \cos\omega_1 & \rho_1 \operatorname{sen}\omega_1 \\ 1 & \rho_2 \cos\omega_2 & \rho_2 \operatorname{sen}\omega_2 \end{vmatrix}}.$$

Ma

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\omega_0 & \operatorname{sen}\omega_0 \\ 1 & \cos\omega_1 & \operatorname{sen}\omega_1 \\ 1 & \cos\omega_2 & \operatorname{sen}\omega_2 \end{vmatrix} = \operatorname{sen}(\omega_2 - \omega_1) + \operatorname{sen}(\omega_0 - \omega_2) + \operatorname{sen}(\omega_1 - \omega_0)$$

e in valore assoluto

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho_0 \cos\omega_0 & \rho_0 \operatorname{sen}\omega_0 \\ 1 & \rho_1 \cos\omega_1 & \rho_1 \operatorname{sen}\omega_1 \\ 1 & \rho_2 \cos\omega_2 & \rho_2 \operatorname{sen}\omega_2 \end{vmatrix} = 2\Delta.$$

Quindi in valore assoluto

$$p = \frac{\rho_0\, \rho_1\, \rho_2}{2\Delta} \left[\operatorname{sen}(\omega_0 - \omega_1) + \operatorname{sen}(\omega_1 - \omega_2) + \operatorname{sen}(\omega_2 - \omega_0)\right].$$

QUISTIONI PROPOSTE

391. 1°. Se una conica, inscritta nel triangolo ABC, ha un fuoco nel punto H d'incontro delle altezze, ha l'altro nel centro O del cerchio circoscritto ad ABC.

2°. Se una conica, inscritta nel triangolo ABC, ha un fuoco nel centro D del cerchio inscritto ad ABC, è un cerchio.

3°. Se una conica, inscritta in ABC, ha un fuoco nel baricentro G di ABC, vuolsi sapere quale è il rapporto delle distanze di due vertici di ABC dalla retta, che unisce il terzo vertice al secondo fuoco H della conica.

FUBINI.

392. Se a e b sono tangenti a una conica K^2 nei punti A e B:

1°. La conica K_0^2 omologica armonica di K^2 con A centro e b asse di omologia, coincide con la omologica armonica di K^2, quando si prende B per centro ed a per asse di omologia.

2°. Ognuna delle coniche K^2 e K_0^2 è polare reciproca di sè stessa rispetto all'altra.

3°. Le due coniche K^2 e K_0^2 in ognuno dei punti A e B, ove esse si toccano, hanno raggi di curvatura eguali e di segno contrario.

4°. Determinare la specie della conica K_0^2 dipendentemente dalla posizione del punto $O = (ab)$ e dalla natura della K^2, supposta fissa.

RETALI.

393. Entro un'urna sono n palle numerate $(P_1, P_2 \ldots P_n)$ e si estraggono tutte ad una alla volta. Probabilità che una almeno sorta nell'ordine dato dal proprio numero. — Caso di $n = \infty$.

394. Dati due mazzi di carte, se ne estraggono due alla volta, una per ogni mazzo. Probabilità che sortano insieme due carte uguali.

BAROZZINI.

395. Sieno c, c' due circoli posti nello stesso piano, che abbiano per centri rispettivamente C, C', e s'incontrino in due punti H e K. Imaginando un triangolo variabile MNP, tale che i lati MN, MP, NP, passino rispettivamente per H, C, C' ed i vertici M, N sieno rispettivamente su c e su c', dimostrare che il luogo del terzo vertice P è il circolo che passa per C, C' e K.

CARDOSO-LAYNES.

396. Sia data la parabola $x^2 + 2hy\,(1 + \cos 2\alpha) - 2hx \operatorname{sen} 2\alpha = 0$, che ha l'asse di figura parallelo all'asse delle y. Dimostrare, essendo gli assi ortogonali,

1° che α è l'angolo che la tangente alla parabola nell'origine forma con l'asse positivo delle x;

2° che staccando sull'asse delle y, a partire dall'origine, un segmento $OA = h$, la parallela all'asse delle x condotta da A è la direttrice della parabola;

3° descrivendo su di OA come diametro una semicirconferenza che incontri in B la tangente alla curva nell'origine, la parallela condotta da B all'asse delle x è la tangente alla parabola nel suo vertice;

4° se questa tangente incontra in C l'asse delle y, prendendo il segmento BD uguale ed opposto a BC, sarà D il vertice della parabola;

5° congiungendo A con B e prolungando questo segmento AB di altrettanto in F, sarà F il fuoco della parabola;

6° Il luogo dei vertici di tutte le parabole, che si ottengono dall'eq.^{e} data lasciando inalterato h e facendo variare α con legge di continuità, è una ellisse che ha per asse minore il segmento $OA = h$, e l'asse maggiore uguale a $2h$;

7° in questa stessa ipotesi di α variabile ed h costante il luogo dei fuochi di tutte le parabole è un circolo di centro O e raggio h;

8° nella stessa ipotesi l'inviluppo di tutte le parabole è un'altra parabola avente il vertice in A ed il fuoco in O;

9° il luogo dei vertici di tutte le parabole, che si ottengono dalla equazione data lasciando invariata α e facendo variare h con legge di continuità, è una retta che passa per l'origine e divide per metà le ordinate della tangente alla parabola nell'origine;

10° nella stessa ipotesi il luogo dei fuochi di tutte le parabole è una retta che passa per l'origine ed è perpendicolare alla retta che forma un angolo uguale a 2α con l'asse positivo delle x;

11° nella stessa ipotesi l'inviluppo di tutte le parabole è la retta che passa per l'origine e forma un angolo uguale ad α con l'asse positivo delle x.

BONOLIS.

BIBLIOGRAFIA

Roubaudi. - *Cours de géométrie descriptive.* - Paris, Masson et C^{ie}., 1897.

Questo libro, è la riproduzione delle lezioni che l'egregio autore fa da molti anni agli allievi della classe di seconda moderna; è quindi il frutto di una lunga esperienza dell'insegnamento.

L'opera è preceduta da una breve introduzione, nella quale sono esposte le prime nozioni sulla proiezione cilindrica, e conica (prospettiva) e la nozione degli elementi all'infinito della retta e del piano, con varie eleganti applicazioni. Fra queste ci sembra notevole una dimostrazione assai elementare delle proprietà di due triangoli omologici in un piano, dedotta da quelle di due triangoli omotetici.

Nella stessa introduzione è fatto opportunamente cenno della distinzione delle proprietà delle figure in descrittive, proiettive e metriche.

Nei 16 capitoli dei quali si compone il libro è trattata diffusamente la descrittiva col metodo di Marge, ed è fatta larga parte all'importantissimo metodo dei ribaltamenti. È esposta con cura la punteggiatura delle parti invisibili di una figura per distinguerle dalle visibili e la teoria delle ombre.

Il libro termina con una nota relativa alla soppressione della linea di terza nei disegni, nella quale nota sono esposti i vantaggi che derivano da tale soppressione.

Crediamo utile riportare le seguenti parole, colle quali l'egregio autore chiude la prefazione.

“ In tutte le quistioni che io ho trattato, io mi sono attenuto a presentare i „ metodi generali nel modo più semplice, a applicarli in tutti i casi piuttosto che „ ricorrere ad artifizi; e a separare in ogni problema la soluzione geometrica, in „ generale indipendente dalla rappresentazione adottata, dalla soluzione grafica „ che si riduce sempre a un piccolo numero di tracciati fondamentali „.

La lucidità e chiarezza di esposizione, unite alla bontà del metodo seguito e che è riassunto nelle parole sopra citate, rende il libro molto raccomandabile ai giovani studiosi.

K.

F. Gomes Teixeira. — *Curso de Analyse Infinitesimal.* 3ª Ed. (Calculo Differencial) premiado pela Academia Real des Sciencias de Lisboa — Porto, 1896.

Questa nuova edizione del Calcolo Differenziale dell'illustre professore F. Gomes Teixeira, venuta in luce sotto gli auspici della Reale Accademia delle Scienze di Lisbona, non poteva, anche a prescindere dal chiaro nome dell'autore, essere meglio raccomandata agli studiosi di matematica. Essa non è, come del resto era facile imaginare, per chi conosce l'operosità e la grande coltura dell'autore, una semplice ristampa delle precedenti edizioni, benchè l'autore vi abbia mantenuta inalterata, per così dire, l'orditura.

Questo primo volume del Corso di Analisi Infinitesimale si può dividere regolarmente in tre parti: Nozioni di analisi algebrica — Teoria elementare del calcolo differenziale — Nozioni sulle funzioni di variabili imaginarie. La prima parte è divisa in due capitoli, nel primo dei quali, dopo un breve cenno sull'operazioni algebriche, l'autore espone succintamente la teoria dei numeri irrazionali definiti mediante la decomposizione in classi, imaginata da Dedekind, e definisce i numeri negativi e le operazioni degli imaginari sotto forma ordinaria e sotto forma ridotta. A ciò fa seguito un'accurata nozione di limite, di cui faceva difetto la prima edizione, e quindi una elementare esposizione della teoria delle serie, dei prodotti infiniti e delle frazioni continue. Nel secondo capitolo l'autore espone, in base ai teoremi di Weierstrass sull'esistenza dei limiti e di Cantor sulla continuità, i fondamenti della teoria di funzioni di variabili reali, poi dimostra alcune proprietà delle funzioni algebriche e delle trascendenti elementari. Questa prima parte occupa quasi un terzo del volume.

Nella seconda parte, premessa una facile e chiara esposizione della teoria delle derivate e dei differenziali delle funzioni a variabili reali, l'autore si occupa della derivazione del limite di una somma e dei determinanti funzionali, dimostrando alcune proprietà dell'jacobiano e dell'hessiano. A ciò fa seguito un capitolo sulle applicazioni geometriche, ed un altro sulle derivate e differenziali di ordine superiore. In questo l'autore dimostra una propria formola di analisi, da cui deduce lo sviluppo di Taylor colle forme dei resti più importanti, e nel capitolo seguente l'applica allo sviluppo in serie di funzioni esplicite ed implicite, alla determinazione dei massimi e minimi di una funzione ad una o due variabili indipendenti. Quivi è anche un breve cenno sull'interpolazione, nel quale, unitamente alle note formole di Lagrangia e di Newton, l'autore dimostra una propria formola estratta dalle Memorie della Società Reale di Liegi. Segue poi un capitolo di applicazioni geometriche relative ai contatti ed alle singolarità delle curve. Due teoremi sulle funzioni definite per serie, l'uno per stabilire la continuità e l'altro la derivabilità, e da ultimo un interessante studio sulle singolarità di alcune funzioni mettono fine a quella che abbiamo chiamata la seconda parte del volume.

La terza parte è una interessante monografia di circa 50 pagine intorno ai più recenti progressi delle nostre conoscenze sulle funzioni di variabili imaginari, dovuti specialmente all'opera insigne di Weierstrass e di Mittagleffler. A. B.

N. Cor & J. Riemann. — *Traité d'Algèbre élémentaire.* — Librairie Nony & C.ie Paris.

Ho studiato questo eccellente trattato e credo bene meriti il detto: *indocti discant, ament meminisse periti.* — Quantunque il titolo indichi trattarsi di un libro elementare, pure vi è della materia superiore, che da noi viene trattata nel primo anno universitario. La esposizione, in generale, ha sapore di originalità e possiede rigore scientifico. Quasi sempre la teoria è accompagnata da applicazioni importanti che accrescono certamente l'interesse che desta l'opera; nè meno importante trovo la eccellentissima scelta dei gruppi di esercizi proposti.

La materia è così distribuita.

Numeri algebrici, Polinomi. Principî generali relativi alle equazioni considerate isolatamente. Principî generali relativi alle equazioni simultanee. Determinanti. Risoluzione d'un sistema qualunque di equazioni del primo grado. Equazione del secondo grado. Equazioni e sistemi di equazioni riducibili al secondo grado. Problemi del secondo grado. Progressioni. Definizioni riguardanti i limiti e la continuità. Studio di qualche funzione semplice.

$$\left[ax+b,\ ax^2+bx+c,\ \frac{ax+b}{a'x+b'}\ x+\frac{m}{x},\ \frac{1}{ax^2+bx+c},\ \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c}\right].$$

Studio della funzione esponenziale. Studio della funzione logaritmica, del numero e. Funzioni circolari (è un bellissimo trattato di goniometria). Definizioni e teoremi generali sulle derivate. Calcolo delle derivate. Applicazioni (Studio della funzione $y = A(x-a)(x-b)\ldots.(x-l)$, si ritorna sulla funzione $\frac{ax+byc}{a'x+b'y+c}$, sviluppo in serie della funzione esponenziale, logaritmica, di arctg x, studio di $y = x^x$ $y = \frac{a^x}{x^n}$).

Credo che il libro meriti l'attenzione dei signori Professori delle nostre Scuole Secondarie; indubbiamente poi i giovani studiosi di queste scuole che avessero intenzione di dedicarsi agli studi matematici si avvantaggerebbero non poco collo studio di questo trattato. Dott. G. Candido.

IL 1° CONGRESSO INTERNAZIONALE DI MATEMATICHE A ZURIGO

9-11 Agosto 1897

Il 1° congresso internazionale di matematiche tenuto a Zurigo nello scorso Agosto è riuscito veramente degno degli egregi scienziati che lo organizzarono e della nazione che accolse, ospiti graditi, i più illustri matematici d'Europa.

Fra questi notiamo: *Brioschi* (Milano), *G. Cantor* (Halle), *M. Cantor* (Heidelberg), *Klein* (Göttingen), *Lindelöf* (Helsingfors), *Mittagleffler* (Stockholm), *Peano* (Torino), *Picard* (Parigi), *Weber* (Strassburg), *Weingarten* (Berlino) etc.

Anche il sesso gentile era degnamente rappresentato al congresso, poichè fra i congressisti si notavano ben 30 signore.

Il 9 Agosto il presidente del comitato promotore, sig. *Geiser* (Zurigo) tenne, in un'aula della scuola politecnica, il discorso inaugurale e dichiarò aperto il 1° congresso matematico.

Fu nominato il comitato definitivo come segue: *Geiser* (Zurigo) Presidente, *Franel* e *Rudio* (Zurigo) segretari generali;

Borel (Parigi), *Pierpont* (New-Haven), *Volterra* (Torino), *Weber* (Monaco) segretari;

Membri: *Brioschi* (Milano), *Bugaieff* (Mosca), *Hobson* (Cambridge), *Klein* (Göttingen), *Mertens* (Vienna), *Mittag-Leffler* (Stocolma), *Picard* e *Poincaré* (Parigi), *H. Weber* (Strasburgo).

Il Presidente scusò l'assenza del Poincaré che non potè intervenire per un lutto in famiglia, ma che però inviò una memoria " *Sui rapporti de l'analisi e de la fisica matematica.*

Le decisioni prese nell'adunanza generale furono le seguenti:

I. Per l'avvenire i congressi internazionali di matematiche si succederanno a intervalli di 3 a 5 anni. Sarà tenuto conto nella scelta delle sedi dei legittimi desideri dei differenti paesi.

II. Si sceglierà alla fine di ogni congresso la data e la sede del prossimo congresso come pure gli organi e le associazioni incaricate di prepararlo e di organizzarlo.

III. Se in seguito a casi imprevisti un congresso non potrà esser tenuto nel giorno e nel luogo fissato, il comitato dell'ultimo congresso dovrà prendere le disposizioni necessarie per la convocazione di un nuovo congresso. A questo scopo il comitato si accorderà con gli organi e le associazioni di cui al n. II.

IV. Ogni congresso può, quand'esso lo creda utile, per lo studio di certe questioni di natura internazionale, nominare delle commissioni permanenti, per le quali il mandato dura dall'uno all'altro congresso.

V. Il prossimo congresso sarà tenuto a Parigi nel 1900. La società matematica di Francia è incaricata della sua preparazione e organizzazione.

VI. L'ufficio del congresso di Zurigo è costituito in commissione permanente, in esecuzione della decisione IV per istudiare le questioni che giudicherà più importanti fra quelle che sono menzionate nel rapporto del comitato preparatorio o che potranno essergli sommesse. Esso potrà aggiungervi dei nuovi membri, e fornirà alla società matematica di Francia tutte le indicazioni utili per la preparazione del congresso del 1900.

Nella 2ª seduta si formarono le seguenti sezioni:

I. Aritmetica e Algebra. II. Analisi e teoria delle funzioni. III. Geometria. IV. Meccanica e Fisica matematica. V. Storia e Bibliografia.

I lavori letti nelle diverse sezioni furono i seguenti:

Iª Sezione.

H. Weber. Über die Genera in algebraischen Zahlkörpern.

C. Reuschle. Konstituantentheorie eine neue, prinzipielle und genetische Methode zur Invariantentheorie.

C. Stephanos. Sur les systèmes associatifs des nombres symboliques.

P. Gordan. Resultante ternärer Formen.

F. Enriques. Sur les problèmes qui se rapportent aux résolutions des équations algébriques renfermant plusieurs inconnues.

E. Schröder. On Pasigraphy its presents state and the passigraphic movement in Italy.

G. Rados. Zur Theorie der adjungirten quadratischen Former.

H. Tarry. 1° Généralisation du problème des reines. 2° Procédés mécaniques pour résoudre les équations indéterminées.

A. Vassilief. Über einige asymptotische Werte.

2ª Sezione.

F. Brioschi. Sur une classe d'équations du cinquième degré résolubles algébriquement et la transformations du onzième ordre des fonctions elliptiques.

E. Picard. Sur les fonctions de plusieurs variables et en particuliers des fonctions algébriques.

Z. de Galdeano. L'unifications des concepts dans la science mathématique.

Bugaieff. Les mathématiques et la conception du monde au point de vue de la philosophie scientifique.

3ª Sezione.

Reye. Neue Eigenschaften des Strahlenkomplexes zweiten Grades.

Gerbaldi. La configurazione del gruppo semplice di 360 collineazioni piane.

Burali. Les postulats pour la geométrie d'Euclide et de Lobatschewsky.

Andrade. La statique non euclidienne et diverses formes mécanique du postulatum d'Euclide.

Fano. Über Gruppen insbesondere kontinuierliche Gruppen von Cremona — Transformationen der Ebene und des Raumes.

4ª Sezione.

Stodola. Die Beziehungen der Technik zur Mathematik.

Joukowski. Über einen gyroskopischen Apparat.

5ª Sezione.

H. G. Zeuthen. Isaac Barrow et la méthode inverse des tangentes.

G. Eneström. Über die neusten mathematisch-bibliographischen Unternehmungen.

ASSOCIAZIONE « MATHESIS »

Il num. 1 dell'anno II del Bollettino di detta associazione, oltre alle consuete bibliografie e riviste di pubblicazioni, contiene una nota del prof. Certo sull'equivalenza e il Verbale dell'adunanza del Comitato Direttivo. In questa adunanza insieme ad altre cose furono proposte allo studio dei professori (soci o no) le seguenti questioni:

Questione VIII. — Dato che lo studio dell'aritmetica razionale debba assegnarsi parte al Ginnasio e parte al Liceo, o parte al 1° biennio e parte al 2° di Istituto Tecnico, fissare come debba essere distribuito il programma di detta disciplina.

Questione IX. — Dato che debba modificarsi il programma di geometria assegnato al Ginnasio, stabilire i limiti dell'insegnamento di questa materia nel Ginnasio, perchè dia in esso buoni frutti, e prepari allo studio della geometria nel Liceo.

Questione X. — Dato che debba lasciarsi agli insegnanti libera scelta fra il metodo della fusione e quello della separazione della geometria piana e solida, formulare programmi secondo i quali tale scelta sia possibile.

Questione XI. — Se, ed in quali scuole secondarie, convenga trattare la teoria delle proporzioni per un qualunque sistema di grandezze di 1°, 2° e 3° genere senza altra nozione numerica che quella dei numeri naturali (in modo che la detta teoria resti anche stabilita, in particolare, pel sistema dei numeri reali assoluti); ovvero se sia preferibile, premessa la teoria dei numeri reali assoluti e sviluppata la teoria delle proporzioni per essi, dedurre, mediante la teoria della misura, la teoria delle proporzioni anche per ciascuno dei citati sistemi di grandezze.

Questione XII. — In quali scuole secondarie conviene procedere allo studio delle varie specie di numeri in questo ordine: numeri interi assoluti, numeri razionali assoluti, numeri reali assoluti, numeri reali relativi.

Questione XIII. — Si indichino tutti gli enti della matematica elementare per i quali si usa dai vari autori, e talora con qualche ambiguità, più di un vocabolo (per es., rombo, romboide; cerchio, circolo, circonferenza; raggio, semiretta, direzione; semipiano, falda; quoto, quoziente, ecc.): e si proponga per ciascuno di essi il vocabolo da adottarsi definitivamente.

Questione XIV. — Sulle modificazioni da introdursi nell'ordinamento degli studi matematici universitari, affine d'ottenere buoni insegnanti secondari.

Il num. 2 contiene le relazioni sulle questioni I e IV proposte l'anno scorso dal Comitato e riprodotte nella copertina del n. 1° 1897 di questo Periodico, una bibliografia di pubblicazioni tedesche recenti, una replica del prof. Giudice all'articolo sull'equivalenza del prof. Certo, un riassunto di un articolo del prof. Pontain sul modo di insegnare la matematica, e un'osservazione del prof. Burali-Forti sui programmi delle scuole complementari. Nelle notizie varie si trova il rendiconto dell'adunanza di una società tedesca assai analoga a Mathesis.

CORRISPONDENZA

Nel N°. precedente di questo periodico è stato pubblicato un sunto di quanto ha fatto l'associazione *Mathesis* nel corso dell'anno 1897. Fra le cose pubblicate nel Bollettino dell'Associazione fu riportata anche una definizione di equivalenza proposta dal Prof. Bettazzi che dichiarammo di non potere approvare " poichè " ci sembrava della stessa natura di quest'altra evidentemente *assurda*. Si chiama " parallelogrammo un quadrangolo che ha ogni lato parallelo al suo opposto, oppure che ha ogni lato eguale al suo opposto, oppure ecc. "

Questa osservazione ci ha procurato una risposta del Prof. Bettazzi, che non accetta la parola *assurda* applicata alla definizione sopra citata. Posso convenire che, in quella definizione non esistendo contradizione, la parola *assurda* non era forse la più propria ad esprimere il mio pensiero; ma, tolto questo, non posso che confermare il mio giudizio.

G. Lazzeri.

Giulio Lazzeri — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 18 Decembre 1897.

FRANCESCO BRIOSCHI

Straordinaria versalità d'ingegno, singolare potenza di assimilazione rapida e profonda, instancabile tenacia in ogni ricerca come in ogni intrapresa, tali furono le doti onde rifulse la mente, davvero eccelsa, di Francesco Brioschi.

Nelle scienze matematiche poi, in cui egli raggiunse più presto la gloria, e gloria solida e duratura, recò un'altra preziosissima dote, quella che or si direbbe una impareggiabile virtuosità, cioè una agilità elegante di forma e di pensiero, la quale, se sgomentava gli impazienti ed i meno provetti, formava l'ammirazione dei dotti e degli studiosi di lena.

Allevato alla scuola di Bordoni nel culto, forse un po' troppo esclusivo, dei metodi lagrangiani, entrò poco appresso con Piola nell'ambiente meno rigido delle ricerche fisico-matematiche di Fourier, di Poisson e di Cauchy. Ma, per quanto grande e feconda fosse allora la produzione matematica francese, che era la sola cui attingessero i pochi studiosi d'Italia, egli intuì ben presto la necessità d'allargare la cerchia delle fonti, estendendola alla produzione delle altre nazioni colte d'Europa, massimamente della Germania e dell'Inghilterra. Fra noi egli fu indubbiamente il primo a mettersi risolutamente per questa via, e ad indirizzarvi quanti allievi e studiosi potè attirare con sè in quest'opera, che può ben dirsi di risanamento, giacchè soltanto per essa cessò quel tale ristagno che da lungo tempo pesava sulla scienza italiana, e incominciò quel sempre più attivo e fecondo ricambio intellettuale colla scienza e cogli scienziati di fuori, che fu certamente favorito e promosso dalla fortunata ricostituzione dell'unità nazionale, ma che sarebbe ingiustizia non revocare a lui, per ciò che spetta alle sue prime origini, ben più modeste, ma ben più laboriose.

È incredibile la quantità di lavori che il Brioschi seppe comporre e produrre in luce, nei più svariati indirizzi, non appena si fu rapidamente orientato nel vastissimo campo delle ricerche che occupavano, alla metà di questo secolo, i più valorosi matematici d'Europa.

La recente scomparsa del grande Jacobi, col quale il Brioschi aveva tanta affinità di temperamento scientifico, richiamava allora la attenzione sul grande problema delle equazioni dinamiche, e fu questo uno dei primi soggetti a cui egli si rivolse, trattovi anche dalla natura dell'insegnamento che impartiva all'Università di Pavia. Numerosi ed apprezzatissimi sono i suoi lavori, sia sul problema d'integrazione, sia sulle affini teorie delle equazioni a derivate parziali e delle equazioni isoperimetriche. Nè cessò mai, anche a maggior distanza di tempo, di ritornare su quei primi studii con altre geniali pubblicazioni, come, a cagion d'esempio, con quelle relative all'ellissoide fluido di Dirichlet ed al problema dei tre corpi.

Altro argomento di numerose ed interessantissime pubblicazioni è la teoria analitica della superficie, rimessa allora in onore da una celebre Memoria di Gauss, che era passata per lungo tempo inosservata, ma di cui i geometri riconoscevano finalmente la fondamentale importanza. Il Brioschi prese parte grandissima allo svolgimento (divenuto poi sempre più largo e più complesso) di questa teoria, e vi arrecò più d'un contributo essenziale, tra altro col concetto di coordinate curvilinee tangenziali, da lui primamente adombrato in una nota sulla superficie delle onde.

Non volle rimanere estraneo agli studi di pura geometria, il cui decisivo risveglio risale a un dipresso alla medesima epoca, benchè l'indole peculiare del suo ingegno lo chiamasse di preferenza alle ricerche di pura analisi; e fu felicissimo nella trattazione di quelle questioni in cui l'una e l'altra disciplina gareggiano nel raggiungere una stessa meta, del che basterà citare l'esempio fornito dei poligoni di Poncelet.

Ma l'indirizzo in cui il Brioschi si slanciò con vera passione e con istraordinario successo fu quello delle ricerche sulle equazioni algebriche e sui nuovi algoritmi, che si riassumono nell'uso sistematico dei determinanti, degli invarianti, dei covarianti e delle forme algebriche e simboliche. Basterebbe già il libro dei Determinanti, che risale ai primissimi anni della sua carriera scientifica, e che fu tradotto in pressochè tutte le lingue colte, per constatare le eminenti sue doti d'assimilazione e d'invenzione, come il profondo e sicuro possesso d'ogni più disparato dominio dello scibile matematico. Ma sarebbe impossibile analizzare anche sommariamente senza entrare in particolari troppo disformi dall'indole d'un giornale, l'infinita copia di nuove vedute, di nuove proposizioni, di nuovi procedimenti che si trovano disseminati nelle numerosissime memorie di lui sulle indicate teorie, fra le quali basterà menzionare quella Monografia sulle forme binarie, che doveva riassumere gran parte dei suoi studii e che sebbene rimasta incompleta, contiene pur tuttavia un ricco tesoro di materiali preziosi. E, per citare almeno uno dei moltissimi argomenti speciali in cui maggiormente brillarono l'acume e la genialità del

Brioschi, giovi ricordare le sue elegantissime ricerche sulle serie analoghe a quella di Sturm.

Per ciò poi che spetta alla dottrina delle equazioni algebriche, basti il dire che, nella memorabile scoperta della risoluzione dell'equazione di 5° grado, il nome di Brioschi è indissolubilmente legato a quelli di Hermite e di Kronecker, con questo di più, ch'egli non ha poi mai cessato di illustrare con nuove ricerche questo campo così irto di difficoltà, preparando il terreno e partecipando attivamente ad altri non meno cospicui progressi.

Un altro larghissimo campo di studii ai quali, non meno che ai precedenti, il Brioschi si trovò spontaneamente attratto dalle sue peculiari attitudini e preferenze scientifiche, e che del resto si collegava necessariamente ed intimamente coll'ultimo dei dianzi accennati, fu quello delle funzioni trascendenti, inaugurato da Legendre e recato d'un tratto a smisurate altezze dai lavori di Abel, di Jacobi e da quelli, allora recentissimi, di Weierstrass. Qui forse, più che altrove, il Brioschi era destinato a raccogliere una messe oltremodo feconda e rigogliosa, la materia prestandosi mirabilmente a quel suo genio, ormai maturo, di annalista supremamente classico, e già egli era entrato gloriosamente nell'arringo, ispirandosi ai lavori di Weierstrass, quando sopravvenuti gli eventi del 1859, si trovò d'un tratto chiamato a spendere in altro modo le forze esuberanti del suo ingegno. Così si chiuse il periodo eroico della sua operosità scientifica, periodo che durò non più d'un decennio, ma che bastò a circondare per sempre il suo nome d'una aureola di gloria purissima così presso di noi, come presso tutte le culte nazioni, di cui in così breve tempo egli aveva saputo assimilare ed eguagliare la poderosa produzione scientifica.

Se tuttavia, in tutto il tempo successivo, egli non potè mai più consacrare alla scienza pura l'intera somma delle sue smisurate energie intellettuali, neppur cessò mai di tener sempre ed amorosamente fiso in essa lo sguardo, tornando ad ogni tratto, e più d'una volta abbastanza intensamente, al culto di essa, così da aggiungere molto al moltissimo già prodotto, e nulla trascurando di ciò che poteva, direttamente od indirettamente, favorire la diffusione ed il progresso degli alti studii nel nostro paese. In quest'ultimo senso merita principalmente d'esser ricordata l'opera indefessa da lui data nel mantenere in vita dapprima, e nel recare poscia a rigogliosa fioritura quella pubblicazione periodica che s'intitola *Annali di matematica pura ed applicata*, e che da non breve tempo rappresenta degnamente l'Italia fra le congeneri e più apprezzate pubblicazioni d'Europa e d'America. Già fin dal 1858, quando questo periodico sorse in Roma, in continuazione d'un altro più modesto che lo precedette, egli aveva contribuito moltissimo a dargli alimento e notorietà; ma nel 1867, quando la vita ne era divenuta alquanto languida e stentata, egli ne trasportò la sede da Roma a Milano, e ne assunse la direzione, dapprima insieme col collega Cremona, poi, dopo la partenza di questo, da solo. Nei trent'anni trascorsi dopo questo rinnovamento dell'antico periodico romano, ne sono apparsi in luce ben 26 volumi in-4°, ai quali collaborarono tutti i migliori matematici italiani e non pochi fra gli stranieri d'ogni nazione, attivando così anche fra noi quel ricambio d'ospitalità scientifica, che già s'era iniziato altrove, ed al quale il Brioschi aveva già tanto e così ampiamente contribuito coll'esempio e col consiglio.

È inutile dire a lungo dell'opera data, in un senso più universale, a pro della scienza italiana durante la lunga presidenza dell'Accademia dei Lincei. Niuno ignora come primo pensiero del Brioschi sia sempre stato quello di far convergere i maggiori mezzi possibili all'ampliamento delle pubblicazioni accademiche, così da potervi accogliere, come può ora ben dirsi che avvenga, ogni degna manifestazione degli studii nazionali.

Senonchè l'analisi delle varie, per non dire infinite forme sotto cui si estrinsecò l'ardore inestinguibile del Brioschi per tutto ciò che s'attiene agli studii ed agli studiosi del nostro paese, ardore che andò facendosi sempre più largo e comprensivo di ogni sana manifestazione del pensiero scientifico, mentre da un lato condurrebbe troppo lontano e sconfinerebbe dal campo prefisso, riuscirebbe forse dall'altro ad offuscare un cotal poco, specialmente agli occhi di chi non ebbe la ventura di conoscere da vicino l'uomo, l'immagine integra e distinta che di lui dobbiamo formarci, e che è bene rimanga scolpita indelebilmente nella storia degli intelletti d'Italia. La quale immagine è quella d'un forte campione della schietta stirpe latina, la cui mente, sovranamente equilibrata, fu sempre aperta ad ogni più alta aspirazione ideale come ad ogni più intimo bisogno di vertiginosa attività esterna, e che nell'opera sua, di qualunque natura si fosse, recò invariabilmenle la benevolenza, la sicurezza, la serenità e, non ultima attrattiva, quell'amabile scioltezza che, nell'esercizio delle discipline e delle cose severe, lascia come spirare un sottile profumo di squisita artisticità.

Ho menzionato per prima la benevolenza fra le nobili caratteristiche dell'azione del Brioschi, e non a caso. Come ben disse l'illustre Ascoli, l'assistenza affettuosa di cui egli ha favorito, con criterii perspicacissimi, un numero sterminato di cultori d'ogni più disparata disciplina, basterebbe alla gloria d'un uomo.

Eugenio Beltrami

Professore all'Università di Roma.

(Dalla " Perseveranza ").

SUL CERCHIO DI TAYLOR

NOTA DI GEOMETRIA RECENTE.

1. È noto il seguente

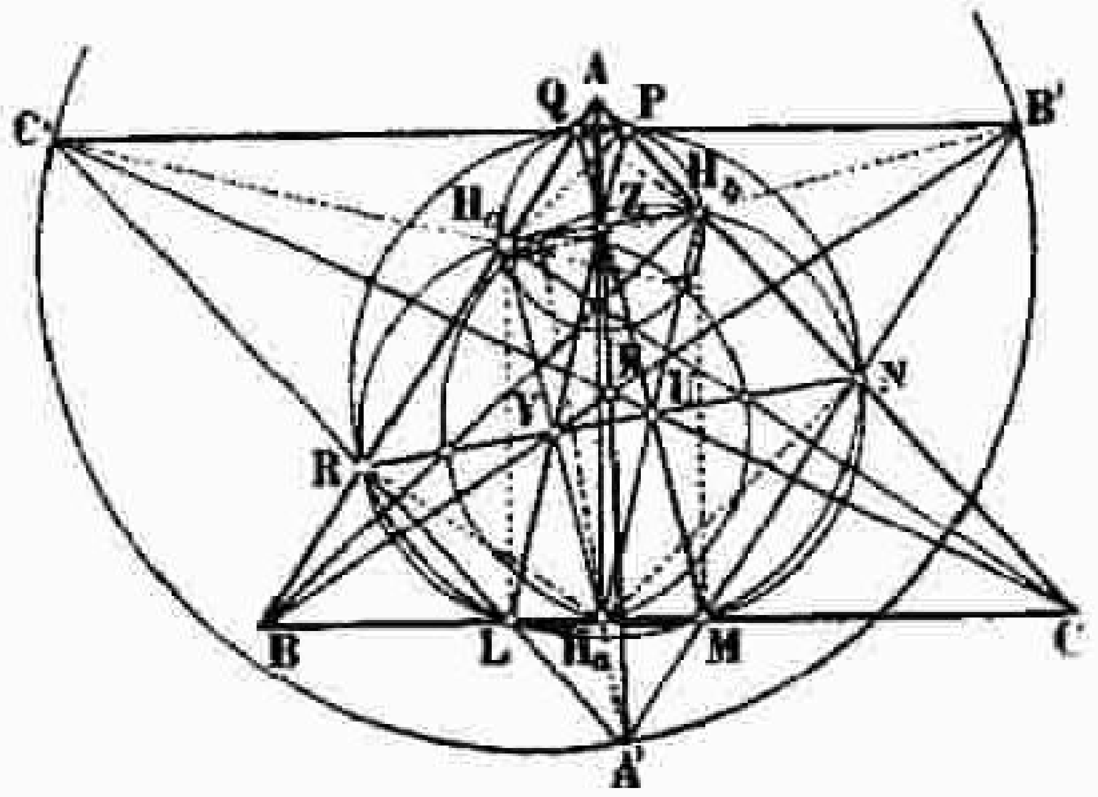
Teorema A) — *Proiettando i piedi delle altezze di un triangolo sui lati di questo si hanno sei punti conciclici.*

Definizione I. — *Il circolo che passa per questi sei punti è detto* circolo di Taylor.

Definizione II. — *L'esagono, che ha per vertici questi stessi punti lo diremo* esagono di Taylor.

Sia il triangolo ABC, H il suo ortocentro, H_a, H_b, H_c i piedi delle sue altezze ed LMNPQR le projezioni di questi sui lati (v. fig.)

Consideriamo la congiungente i punti R ed N; questa per la omotetia delle due figure AH_cHH_b, ARH_aN è parallela alla H_cH_b; ma questa è antiparallela al lato BC, rispetto all'angolo in A, epperò anche RN è antiparallela al lato BC rispetto all'angolo in A. Analogamente



dicasi delle QN e PM. Di più osserviamo che la RN taglia il lato H_aH_c in V, ed il triangolo H_cVR (essendo $V\widehat{H_c}R = V\widehat{RH_c}$) ha $VH_c = VR$. Si ha pure $V\widehat{H_a}R = A + B - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - C$, e $V\widehat{RH_a} = \frac{\pi}{2} - C$, epperò $RV = VH_a$, da cui, tenendo conto che $VH_c = RV$, si ha $H_aV = VH_c$.

Osservando che si possono ripetere le analoghe considerazioni per i punti in cui le altre antiparallele tagliano i lati del triangolo ortico, otteniamo il noto

Teorema B) — *Congiungendo i punti medi del triangolo ortico di un triangolo, dette congiungenti tagliano i lati del triangolo fondamentale in sei punti che costituiscono l'esagono di Taylor.*

2. Ora osserviamo le tre circonferenze aventi per diametri i lati del triangolo ortico. Relativamente a queste si hanno alcuni teoremi che andiamo ad esporre.

Dalla fig. risulta facilmente che *ciascuna antiparallela è divisa* dai centri di due delle notate circonferenze in tre parti che sono rispettivamente i raggi delle tre circonferenze U, V, Z. In altre parole, poichè ciascuno dei raggi delle tre circonferenze U, V, Z risulta uguale alla metà di un lato del triangolo ortico, possiamo ricavare il seguente

Teorema 1°. — *Le antiparallele* RN, MQ, PL *sono fra loro eguali, ed eguali alla somma dei raggi delle circonferenze* U, V, Z (*oppure al semiperimetro del triangolo ortico*).

Osservazione. — Considerando il triangolo NRH_a si ricava $\dfrac{NR}{\operatorname{sen} A} = h_a$ da cui $NR = h_a \operatorname{sen} A$, ed analogamente $MQ = h_b \operatorname{sen} B$, $LP = h_c \operatorname{sen} C$, e per il teorema precedente

$$h_a \operatorname{sen} A = h_b \operatorname{sen} B = h_c \operatorname{sen} C = RN.$$

Teorema 2°. — *Gli assi radicali del circolo di Taylor, rispetto ai tre circoli* U, V, Z, *sono i lati dell'esagono di Taylor, che non sono sui lati del triangolo fondamentale.*

La cosa resulta facilmente dalla semplice ispezione della figura.

Teorema 3°. — *Gli assi radicali dei circoli* U, V, Z *sono le altezze del triangolo ortico del triangolo fondamentale.*

Infatti le circonferenze U, V, Z si tagliano a due a due sui lati del triangolo ortico, ed hanno rispettivamente per diametri i lati di questo; ciò rende evidente il teorema.

Teorema 4°. — *Per gli stessi punti in cui i circoli di Taylor dei triangoli* BHC, CHA, AHB *tagliano i lati di questi, passano le circonferenze* U, V, Z.

Infatti è noto che *le antiparallele* RN, QM, LR *tagliano i lati dei triangoli* BHC, CHA, AHB *rispettivamente nei loro punti d'intersezione coi circoli di Taylor di questi triangoli;* allora basta per esempio dimostrare che l'antiparallela RN è tagliata dal circolo V nel punto in cui questa incontra la H_cC; e questo si vede subito, perchè la RV passa per V, l'angolo in H_c è retto, quindi per il punto in cui la H_cC taglia la RV passa anche il circolo V e si può dedurre il teorema.

3. Definizione. — *Il triangolo che si ottiene dall'incontro degli assi radicali dei circoli* U,T; V,T; Z,T; *(con* T *indichiamo il circolo di Taylor) lo diremo* triangolo dei centri radicali.

Relativamente a questo triangolo si hanno i seguenti teoremi.

Teorema 1°. — *Per i vertici del triangolo dei centri radicali passano rispettivamente gli assi radicali dei circoli* U, V, Z.

Infatti consideriamo il vertice A'; esso è dato dall'intersezione degli assi radicali di V,T ed U, T, evidentemente per A passerà l'asse radicale di U,V ed analogamente ripetendo per B', C', si giunge all'enunciato.

Teorema 2°. — *Il centro del circolo circoscritto al triangolo dei centri radicali è l'ortocentro del triangolo ortico del triangolo fondamentale.*

Infatti l'ortocentro del triangolo ortico del triangolo fondamentale è il centro radicale dei circoli U, V, Z [§ 2, Teor. 3°], ossia il punto d'incontro delle perpendicolari [§ 3, Teor. 1°] abbassate dai vertici del triangolo dei centri radicali sulle antiparallele ai suoi lati. Ricordando allora che « la congiungente il centro del cerchio circoscritto di un triangolo con un vertice, è perpendicolare alla antiparallela al lato opposto, » ed essendo i lati del triangolo ortico antiparalleli ai lati del triangolo dei centri radicali (perchè è noto che i lati PQ, LR, MN dell'esagono di Taylor sono respettivamente paralleli ai lati del triangolo fondamentale), il teorema resta dimostrato.

Teorema 3°. — *Il triangolo dei centri radicali ed il triangolo fondamentale hanno lo stesso punto di Lemoine.*

Il triangolo A′B′C′ dei centri radicali ed il triangolo ABC sono omotetici, giacchè sono simili ed hanno i lati paralleli. Indichiamo con K il loro centro di omotetia. Osserviamo per esempio la BB′, essa taglia la QM nel suo punto medio, perchè diagonali entrambe del parallelogrammo B′QBM; dunque la BB′ è la mediana del lato QM nel triangolo B′QM, epperò è simediana del lato C′A′ del triangolo A′B′C′; lo stesso dicasi della QM considerata come lato del triangolo QBM in relazione col triangolo fondamentale ABC, e poichè la stessa considerazione si può ripetere per le CC′, AA′ il teorema rimane dimostrato.

Teorema 4°. — *La somma dei quadrati delle distanze dei lati dell'esagono di Taylor dal centro di omotetia del triangolo fondamentale e del triangolo dei centri radicali è un minimo.*

Il centro di omotetia, di cui nell'enunciato, è il punto di Lemoine dei triangoli A′B′C′, ABC [§ 3, Teor. 5°]. Ricordando allora che la somma dei quadrati delle distanze del punto di Lemoine di un triangolo dai suoi lati è un minimo, si ha subito l'enunciato.

Osservazione. — Le BB′,CC′AA′ passano anche per i punti U,V,Z, come si vede considerando che ognuno di essi è centro di omotetia, rispettivamente delle coppie di triangoli: QC′R, MCN; NB′P, LBR; MA′L, PAQ. D'altra parte è noto che i punti medi delle QM,PL,RN sono i punti di contatto del cerchio inscritto nel triangolo UVZ; si viene quindi a concludere:

Le congiungenti di U, V, Z *con i punti di contatto del cerchio inscritto nel triangolo* U, V, Z *sono le simediane del triangolo fondamentale.*

Ciò può enunciarsi in maniera più elegante.

Teorema. — *Il punto di Gergonne del triangolo mediano* (*) *di un triangolo ortico, è il punto di Lemoine del triangolo fondamentale.*

Lemma. — *Se* X, Y, Z *sono le distanze di un punto* M *qualunque del piano dai vertici di un triangolo in cui trovansi le masse* a^n, b^n, c^n *la espressione*

$$a^n X^2 + b^n Y^2 + c^n Z^2$$

è un minimo se il punto M *coincide col punto* $K^{(n)}$. (**)

(*) Che ha i vertici nei punti medi di un triangolo.

(**) $K^{(n)}$ è il punto d' incontro delle rette che partendo dai vertici dividono il lato opposto nel rapporto inverso delle potenze n^{me} dei lati adiacenti.

Si vede intanto facilmente che il baricentro del triangolo ABC nei cui vertici trovansi rispettivamente le masse a^n, b^n, c^n è il punto $K^{(a)}$.

È noto d'altra parte che la somma dei quadrati delle distanze di un punto M dai punti $A_1 A_2 \ldots A_n$ moltiplicate rispettivamente per le masse $m_1 m_2 \ldots m_n$, di cui sono caricati questi punti, è un minimo, quando il punto M coincide col baricentro; epperò il lemma è dimostrato.

Poniamo $e_a = LM$, $e_b = NP$, $e_c = QR$, allora risulta facilmente che $A'B' = c + e_c$, $B'C' = a + e_a$, $C'A' = b + e_b$.

Teorema 6°. — *Indicando con* $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ *le distanze del centro di omotetia dei due triangoli fondamentale e dei centri radicali, dai vertici* A, B, C, A', B', C' *la espressione*

$$a^2X_1^2 + b^2X_2^2 + c^2X_3^2 + (a + e_a)^2X_4^2 + (b + e_b)^2X_5^2 + (c + e_c)^2X_6^2$$

è un minimo.

Il teorema risulta evidente tenendo conto del lemma, e considerando che il centro di omotetia dei due triangoli ABC, A'B'C' è il punto $K^{(2)}$ comune [§ 3, Teor. 4°].

Valori di e_a, e_b, e_c. — Si possono facilmente calcolare i valori di e_a, e_b, e_c in funzione degli elementi del triangolo fondamentale.

Infatti si ha che i lati del triangolo ortico sono dati rispettivamente da

$$\begin{aligned} H_c H_b &= \cos A\,(b \cos B + c \cos C) \\ H_b H_c &= \cos B\,(a \cos A + c \cos C) \\ H_a H_a &= \cos C\,(b \cos B + a \cos A) \end{aligned}$$

e da questi risulta subito

$$\begin{aligned} e_a &= \cos A \cos (B - C)\,(b \cos B + c \cos C) \\ e_b &= \cos B \cos (A - C)\,(a \cos A + c \cos C) \\ e_c &= \cos C \cos (A - B)\,(a \cos A + b \cos B). \end{aligned}$$

Nota. — Applicando il *Lemma*, per mezzo di teoremi già noti, si hanno le seguenti proposizioni:

1°. *Indicando con* m'_a, m'_b, m'_c *le distanze del baricentro di un triangolo da' suoi vertici, l'espressione* $m'^2_a + m'^2_b + m'^2_c$ *è un minimo.*

2°. *Indicando con* $l'_{1a}, l'_{1b}, l'_{1c}$ *le distanze dell'incontro delle bisettrici dai vertici di un triangolo, la espressione* $l'^2_{1a}a + b\,l'^2_{1b} + c\,l'^2_{1c}$, *è un minimo.*

3°. *Indicando con* s'_a, s'_b, s'_c *le distanze del punto di Lemoine di un triangolo da' suoi vertici, l'espressione* $a^2s'^2_a + b^2s'^2_b + c^2s'^2_c$ *è un minimo.* (*)

4°. *Indicando con* $\omega'_{1a}, \omega'_{1b}, \omega'_{1c}$ *le distanze del punto* Ω *di Brocard dai vertici* A, B, C, *di un triangolo la espressione* $\frac{\omega'^2_{1a}}{b^2} + \frac{\omega'^2_{1b}}{c^2} + \frac{\omega'^2_{1c}}{a^2}$ *è un minimo.*

(*) Questa proposizione è stata già enunciata (indi mostrata) da Lemoine. (Vedi M. E. Lemoine, *Mélanges sur la géométrie du triangle, Congrès de Bordeaux* (1895) *pour l'avancement des sciences*).

5°. *Indicando con* $\omega'_{2a}, \omega'_{2b}, \omega'_{2c}$ *le distanze del coniugato isogonale del punto* Ω (secondo punto di Brocard) *dai vertici di un triangolo la espressione* $\frac{\omega'^2_{2a}}{c^2} + \frac{\omega'^2_{2b}}{a^2} + \frac{\omega'^2_{2c}}{b^2}$ *è un minimo.*

Una proposizione analoga al lemma enunciato innanzi si ottiene considerando che i punti $K^{(n)}$ e $K^{(-n)}$ sono coniugati isotomici ed è la seguente:

Indicando con $K^{(-n)}$ *il coniugato isotomico del punto* $K^{(n)}$ *e con* μ, θ, ξ *le distanze di questo punto dai vertici* A, B, C *del triangolo carichi di masse rispettivamente* a^{-n}, b^{-n}, c^{-n}, *la espressione*

$$\frac{\mu^2}{a^n} + \frac{\theta^2}{b^n} + \frac{\xi^2}{c^n}$$

è un minimo.

E da questa proposizione ne discendono altre analoghe alle precedenti.

Pisa, gennaio 1898.

Dott. G. Candido.

INTORNO AL CALCOLO APPROSSIMATO DELLE RADICI QUADRATE

Indicando le lettere numeri positivi, sia ω un valore approssimato di $\sqrt{D}$. Si elevi il binomio $\omega + \sqrt{D}$ a esponente intero e positivo m, e si chiami Q_m il coefficiente di $\sqrt{D}$ e P_m la parte razionale della potenza, così da avere

$$(\omega + \sqrt{D})^m = P_m + Q_m\sqrt{D}.$$

Sarà altresì

$$(\omega - \sqrt{D})^m = P_m - Q_m\sqrt{D}.$$

D'onde

$$\frac{P_m}{Q_m} = \sqrt{D}\,.\,\frac{(\omega + \sqrt{D})^m + (\omega - \sqrt{D})^m}{(\omega + \sqrt{D})^m - (\omega - \sqrt{D})^m}, \tag{1}$$

o anche

$$\frac{P_m}{Q_m} = \sqrt{D}\,\frac{1 + \left(\frac{\omega - \sqrt{D}}{\omega + \sqrt{D}}\right)^m}{1 - \left(\frac{\omega - \sqrt{D}}{\omega + \sqrt{D}}\right)^m}.$$

Da questa eguaglianza, per essere il valore assoluto del rapporto

$$\frac{\omega - \sqrt{D}}{\omega + \sqrt{D}}$$

minore dell'unità, s'inferisce che

$$\lim_{m=\infty} \frac{P_m}{Q_m} = \sqrt{D}.$$

Quanto al modo di convergere delle frazioni $\frac{P_m}{Q_m}$ al limite $\sqrt{D}$, esso è diverso, secondochè ω è un valore di $\sqrt{D}$ approssimato in eccesso, oppure in difetto. Nel primo caso, come apparisce dalla (1), le $\frac{P_m}{Q_m}$ tendono al limite decrescendo. Nel secondo caso esse tendono al limite decrescendo, se m assume valori dispari, e crescendo se m assume valori pari. Cosicchè nella serie

$$\frac{\omega}{1},\ \frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_2}{Q_2},\ \frac{P_3}{Q_3},\ldots$$

i termini di posto dispari e quelli di posto pari tendono a un comune limite $\sqrt{D}$, i primi crescendo e i secondi decrescendo, nello stesso modo che le ridotte di una frazione continua. Didatticamente parlando, questo secondo caso è notabile, come esempio elementarissimo di una quantità che tende al limite oscillando intorno ad esso. Ne segue che, applicato nella scuola alla ricerca del valore di una radice quadrata per successive approssimazioni, permette di valutare ad ogni istante l'errore, mediante la differenza tra due valori approssimati consecutivi.

Debbasi per esempio calcolare $\sqrt{19}$, di cui un valore approssimato in difetto è 4. Moltiplicando $4+\sqrt{19}$ per $4+\sqrt{19}$, si avrà

$$(4+\sqrt{19})\,(4+\sqrt{19})=35+8\sqrt{19}.$$

Un secondo valore di $\sqrt{19}$, approssimato in eccesso, sarà dunque $\frac{35}{8}$. Si moltiplichi ora $35+8\sqrt{19}$ per $4+\sqrt{19}$, e si avrà

$$(35+8\sqrt{19})\,(4+\sqrt{19})=292+67\sqrt{19}.$$

D'onde $\frac{292}{67}$, valore di $\sqrt{19}$ approssimato in difetto. Così continuando, si otterranno i seguenti valori di $\sqrt{19}$, alternativamente approssimati in difetto e in eccesso:

$$\frac{4}{1},\ \frac{35}{8},\ \frac{292}{67},\ \frac{2441}{560},\ \frac{20404}{4681},\ \text{ecc.}$$

Se si pone

$$\sqrt{19}=\frac{2441}{560},$$

si commette un errore minore di

$$\frac{2441}{560}-\frac{20404}{4681}=\frac{81}{560.4681}.$$

Si noti che, mentre nel calcolo di $\sqrt{D}$ mediante le frazioni continue, per conoscere una ridotta, è necessario passare pei valori di tutte le ridotte precedenti, nel nostro caso ciò non occorre. Debbasi per esempio calcolare $\sqrt{3}$, di cui un valore approssimato in difetto è 1. Basterà fare il quadrato di $1 + \sqrt{3}$, poi il quadrato del quadrato, quindi il quadrato del nuovo quadrato e via dicendo. Si otterrà successivamente

$$2 + \sqrt{3}\ (*) \qquad 7 + 4\sqrt{3} \qquad 97 + 56\sqrt{3} \qquad 18817 + 10864\sqrt{3} \ \text{ecc.}$$

La frazione
$$\frac{18817}{10864}$$

sarà dunque un valore di $\sqrt{3}$ approssimato in eccesso. Ora si domandi l'errore, si moltiplicherà $1817 + 10864\sqrt{3}$ per $1 + \sqrt{3}$ a fine di ottenere la frazione susseguente, approssimata in difetto, che è

$$\frac{51409}{29681}.$$

E poichè
$$\frac{18817}{10864} - \frac{51409}{29681} = \frac{1}{10864.29681},$$

si avrà
$$\sqrt{3} = \frac{18817}{10864} \text{ a meno di } \frac{1}{10864.29681}.$$

Applicando l'esposto algoritmo al calcolo di $\sqrt{a^2 + k}$, partendo dal valore a, si ottengono le seguenti frazioni, alternativamente approssimate in difetto e in eccesso:

$$\frac{a}{1} \quad \frac{2a^2 + k}{2a} \quad \frac{4a^3 + 3ak}{4a^2 + k} \quad \frac{8a^4 + 8a^2k + k^2}{8a^3 + 4ak} \quad \frac{16a^5 + 20a^3k + 5ak^2}{16a^4 + 12a^2k + k^2} \ldots \quad (**)$$

Si può notare che la differenza fra due consecutivi di questi valori approssimati di $\sqrt{a^2 + k}$, è una frazione che ha per numeratore una potenza di k.

G. Frattini.

SU UNA FORMOLA D'ANALISI COMBINATORIA

Nella teoria dei determinanti si dimostra che il numero dei termini di un determinante d'ordine n è $n!$ Esso è evidentemente anche il numero dei modi secondo i quali in uno scacchiere quadrato di lato n si possono scegliere dei gruppi di caselle talmente che ogni gruppo ne contenga una sola su ogni linea ad una sola su ogni colonna. In questa nota mi propongo di far conoscere un'espressione di un numero più generale del precedente. Dati quattro numeri positivi interi n, m, h, k tali che $h \leq n$, $k \leq m$, ed uno scacchiere Δ di dimensioni $\longrightarrow n$ ed $\downarrow m$,

(*) Invece di $4 + 2\sqrt{3}$, il che non turba il rapporto fra la parte razionale e il coefficiente di $\sqrt{3}$.

(**) Sono le ridotte della frazione continua che ha per quozienti incompleti

$$a, \ \frac{2a}{k}, \ 2a, \ \frac{2a}{k}, \ 2a, \ldots,$$

e, per $k = 1$, le note ridotte di $\sqrt{a^2 + 1}$.

mi propongo di trovare un'espressione del numero dei modi secondo i quali si possono scegliere in Δ dei gruppi di caselle, talmente che ogni linea di Δ ne contenga h di quelle di ciascun gruppo, ed ogni colonna ne contenga k. Incidentalmente dimostro anche una notevole proprietà delle potenze intere e positive del simbolo combinatorio $\binom{m}{k}$.

Si indichi con X_{hk} uno qualunque dei gruppi suddetti e con $(n, h; m, k)$ il loro numero. Se esiste almeno un X_{hk}, le dimensioni di Δ devono essere proporzionali ad h e k. Infatti il numero degli elementi appartenenti ad un X_{hk} si può esprimere con uno dei prodotti nk ed mh, che sono uguali soltanto quando $\frac{n}{m} = \frac{h}{k}$, il che appunto supporremo. Il simbolo $(n, h; m, k)$ soddisfa alla relazione

$$(n, h; m, k) = (n, n-h; m, m-k),$$

che si dimostra osservando che le caselle di Δ non appartenenti ad un X_{hk} appartengono ad un $X_{n-h,m-k}$ e viceversa. Supposto $h = n$, $k = m$ e ricorrendo alla relazione suddetta, si dà significato al simbolo $(n, 0; m, 0)$, ponendo

$$(n, 0; m, 0) = 1.$$

Consideriamo uno dei gruppi X_{hk}. Esso contiene k caselle sulla 1ª colonna di Δ poste su k linee. Delle caselle del gruppo che sono sulla 2ª colonna ve ne sarà un certo numero r_{22}, al più ugnale a k, poste su r_{22} delle k linee di Δ suddette, e le rimanenti $k - r_{22}$ saranno su altre $k - r_{22}$ linee di Δ. Sicchè ponendo $r_{21} = k$; $r_{23} = m - k$; $r_{24} = k - r_{22}$, risulta che si possono scegliere k caselle sulla 1ª colonna di Δ e k sulla 2ª, talmente che l'insieme delle $2k$ caselle scelte possa far parte di un qualche gruppo X_{hk}, in $\binom{m}{k} \sum_{r_{22}=0}^{r_{22}=r_{21}} \binom{r_{21}}{r_{22}} \binom{r_{23}}{r_{24}}$ modi differenti. Consideriamone uno soltanto.

Noi abbiamo in Δ r_{22}, linee ognuna delle quali contiene una delle caselle scelte nella 1ª colonna ed una di quelle scelte nella 2ª; poi altre $2(k - r_{22})$ linee contenenti ciascuna una delle caselle scelte nella 1ª o 2ª colonna; infine $m - 2k + r_{22}$ linee non contenenti alcuna delle caselle scelte. Possiamo associare queste caselle con k caselle della 3ª colonna di Δ, in modo da avere un insieme di $3k$ caselle appartenenti ad un qualche gruppo X_{hk}, prendendone su di essa un certo numero $r_{32} \leq r_{22}$ posta su r_{32} delle r_{22} linee di Δ suddette; poi un certo numero $r_{34} \leq 2(k - r_{22})$ posta su r_{34} delle $2(k - r_{22})$ linee di Δ suddette; infine un certo numero $r_{36} = k - r_{32} - r_{34}$ poste su r_{36} della $m - 2k + r_{22}$ linee di Δ rimanenti. Sicchè ponendo $r_{31} = r_{22}$; $r_{33} = 2(k - r_{22})$; $r_{35} = m - 2k + r_{22}$, risulta che possiamo scegliere k caselle sulla 1ª colonna di Δ, k sulla 2ª e k sulla 3ª, in modo da avere un insieme di $3k$ caselle appartenenti ad un qualche X_{hk}, in

$$\binom{m}{k}\sum_{r_{22}=0}^{r_{22}=r_{21}}\ \sum_{r_{32}=0}^{r_{32}=r_{31}}\ \sum_{r_{34}=0}^{r_{34}=r_{33}}\binom{r_{21}}{r_{22}}\binom{r_{23}}{r_{24}}\binom{r_{31}}{r_{32}}\binom{r_{33}}{r_{34}}\binom{r_{35}}{r_{36}}$$

modi diversi.

Consideriamone un soltanto. Abbiamo in Δ $r_{41} = r_{32}$ linee contenenti ciascuna una casella scelta sulla 1ª colonna di Δ, una scelta sulla 2ª ed una scelta sulla 3ª; poi altre $r_{43} = r_{22} - r_{32} + r_{34}$ linee, ognuna delle quali contiene due caselle scelte su due delle tre prime colonne, una per colonna; poi altre $r_{45} = 3\,k - 2\,r_{22} - 2\,r_{34} - r_{32}$ linee contenenti ciascuna una delle caselle scelte nella 1ª o 2ª o 3ª colonna, infine $r_{47} = m - 3\,k + r_{22} + r_{32} + r_{34}$ linee non contenenti alcuna delle caselle scelte. Sul gruppo delle $3k$ caselle scelte si può ragionare come precedentemente su quello di $2k$ e così via. Poniamo ora $r_{11} = m$; $r_{12} = k$ e consideriamo le successioni

$$\begin{array}{llllllll}
r_{11} & r_{12} \\
r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\
r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} & r_{36} \\
r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & r_{45} & r_{46} & r_{47} & r_{48}.
\end{array}$$

Tenuto conto di quanto si è detto, risulta che: 1° l'ultimo numero di ciascuna linea è uguale a k diminuito della somma delle r poste nella stessa linea ed aventi il 2° indice pari; 2° ogni r avente il 2° indice dispari è uguale alla differenza tra le r che sono nella linea soprastante e nelle due colonne precedenti, aumentata della r posta nella linea soprastante e nella colonna seguente. Continuando il ragionamento fino qui fatto, si conclude ovviamente che, se date le successioni

$$\begin{array}{lllllll}
r_{11} & r_{12} \\
r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
r_{h1} & r_{h2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & r_{h,2h}
\end{array}$$

si pone

$$(1)\quad \left.\begin{array}{l}
r_{11} = m \\
r_{12} = k \\
r_{s,2z+1} = r_{s-1,2z-1} - r_{s-1,2z} + r_{s-1,2z} + r_{s-1,2z+2} \\
r_{s,2s} = k - r_{s2} - r_{s4} - \ldots - r_{s,2s-2} \\
r_{sy} = 0 \quad \text{per} \quad y > 2s \quad \text{ed} \quad y \leq 0
\end{array}\right\}\begin{array}{l} z = 0,\,1,\ldots,\,s-1 \\ s = 2,\,3,\ldots,\,k \end{array}$$

e si calcola l'espressione

$$\sigma = \binom{m}{k}\sum_{r_{p,2i}=0}^{r_{p,2i}=r_{p,2i-1}}\ \prod_{s=2}^{s=h}\binom{r_{s1}}{r_{s2}}\binom{r_{s3}}{r_{s4}}\cdots\binom{r_{s,2s-1}}{r_{s,2s}}\quad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots,p-1 \\ p = 2,3,\ldots,h \end{array}$$

si ha il numero dei gruppi di hk caselle contenenti k caselle su ognuna delle prime h colonne di Δ scelte per modo che il loro insieme possa far parte di qualche X_{hk}. È a notare che un tal numero non è altro che $\binom{m}{k}^h$, giacchè tutti i suddetti gruppi si possono ottenere prendendo in tutti i modi possibili una delle combinazioni k a k delle caselle della 1ª colonna di Δ, una di quelle della 2ª, ... una di quelle della h^{ma}. Perciò, ponendo nella relazione precedente $\sigma = \binom{m}{k}^h$, si ha per $h \geq 2$:

$$\binom{m}{k}^{h-1} = \sum_{r_{p,2i}=0}^{r_{p,2i}=r_{p,2i-1}} \prod_{s=2}^{s=h} \binom{r_{s1}}{r_{s2}} \cdots \binom{r_{s,2s-1}}{r_{s,2s}}; \quad \begin{array}{l} i = s, \ldots, p-1 \\ p = 2, \ldots, h. \end{array}$$

Il ragionamento fatto per le prime h verticali di Δ si può continuare per le rimanenti $n-h$. Si conclude allora che il simbolo $(n, h; m, k)$ può mettersi sotto la forma:

$$(2) \quad (n, h; m, k) = \binom{m}{k} \sum_{r_{p,2i}=0}^{r_{p,2i}=r_{p,2i-1}} \prod_{s=2}^{s=n} \binom{r_{s1}}{r_{s2}} \cdots \binom{r_{s,2s-2}}{r_{s,2s}}; \quad \begin{array}{l} i = 1, 2 \ldots, p-1 \\ p = 2 \ldots, n \end{array}$$

ritenendo $r_{h+\lambda,2} = r_{h+\lambda,4} = \ldots\ldots = r_{h+\lambda,2\lambda} = 0$, quando $s = h + \lambda$, e supponendo le r assoggettate alle condizioni (1), nelle quali però s possa variare da 2 ad n.

Volendo servirsi della (2) per calcolare $(n, h; m, k)$, dati n, h, m, k, è utile saper esprimere prontamente ogni r avente il 2° indice dispari in funzione di m, k e delle r aventi il 2° indice pari. Cambiando nella 3ª delle (1) s in $s-1$, $s-2, \ldots, 2$ e corrispondentemente z in $z-1$, $z-2, \ldots, z-s+2$, indi sommando e riducendo si ha:

$$r_{s,2z+1} = r_{1,2z-2s+3} + \sum_{i=1}^{i=s-1} (r_{s-i,2(z+2-i)} - r_{s-i,2(z+1-i)}).$$

Escluso il caso $s < z+1$ per il quale è $r_{s,2z+1} = 0$, si hanno questi tre altri casi: 1° $s > z+2$; 2° $s = z+2$; 3° $s = z+1$.

Il termine $r_{1,2z-2s+3}$ è nullo, eccetto quando $2z - 2s + 3 = 1, 2$; perciò esso è nullo nei primi due casi ed è uguale ad $r_{11} = m$ nel 3°.

Tenuto poi conto del fatto che $r_{s-i,2(z+2-i)} = 0$, quando $2(s-i) < 2(z+2-i)$ e quando $z-2-i < 0$ e parimenti che $r_{s-i,2(z+1-i)} = 0$ quando $2(s-i) < 2(z+1-i)$ e quando $z-1-i \leq 0$, si trovano le formole seguenti:

$$r_{s,2z+1} = r_{s-z-1,2} + \sum_{i=1}^{i=z} (r_{s-i,2(z+2-i)} - r_{s-i,2(z+1-i)}) \qquad \text{se } s > z+2$$

$$r_{s,2z+1} = k(s-1) - 2r_{22} - \sum_{i=1}^{i=z-1} \left(2r_{z+2-i,2(z+1-i)} + \sum_{j=1}^{j=z-i} r_{z+2-i,2j}\right) \qquad \text{se } s = z+2$$

$$r_{s,2z+1} = m - k(s-1) + \sum_{i=1}^{i=z-1} \sum_{j=1}^{j=z-i} r_{z+1-i,2j} \qquad \text{se } s = z+1$$

Dalla definizione del simbolo $(n, h; m, k)$ risulta ch'esso non cambia di valore scambiando n con m ed h con k. Perciò di tale proprietà deve godere anche il 2° membro della (2).

Naturalmente volendola verificare bisogna supporre che anche nelle (1) siansi fatti i suddetti cambiamenti.

Chiudo osservando che i gruppi X_{hk} sono suscettibili di essere rappresentati mediante successioni di elementi, e ciò nel seguente modo. Siano $\alpha_{11}\,\alpha_{12}\ldots\alpha_{1k}\,;\ \ldots\ ;\ \alpha_{n1}\,\alpha_{n2}\ldots\alpha_{nk}$, n delle combinazioni k a k degli indici $1, 2, \ldots, m$, scelte per modo che soltanto h di esse contengano lo stesso indice.

Disponiamole l'una di seguito all'altra in un ordine qualunque, ed affinchè resti traccia del posto occupato da ciascuna combinazione, apponiamo agli elementi di quella che occupa il posto i^{mo} l'indice superiore i.

Avremo una successione d'indici del tipo

$$\alpha^{(1)}_{s_1,1}\ \alpha^{(1)}_{s_1,2}\ldots\ \alpha^{(1)}_{s_1,k}\ \alpha^{(2)}_{s_2,1}\ \alpha^{(2)}_{s_2,2}\ldots\ \alpha^{(2)}_{s_2,k}\ldots\ldots\ \alpha^{(n)}_{s_n,1}\ \alpha^{(n)}_{s_n,2}\ldots\ \alpha^{(n)}_{s_n,k},$$

che diremo β. A ciascuna α di β facciamo corrispondere una casella di Δ e precisamente ad $\alpha^{(i)}_{s_i,j}$ la casella posta nella linea $(\alpha_{s_i,j})^{ma}$ e nella colonna i^{ma}, ossia la colonna indicata dall'indice superiore. È allora chiaro che ad ogni successione β corrisponde un X_{hk} e viceversa, perciò $(n, h; m, k)$ è anche il numero delle β. Notiamo che una β non cambia, o per meglio dire continua sempre a rappresentare lo stesso X_{hk}, comunque si cambi l'ordine delle α in essa contenute, purchè ogni α si ritenga invariabilmente collegata al suo indice superiore. Al contrario da una β rappresentante un dato X_{hk} se ne può avere una rappresentante un X_{hk} diverso dal primo tenendo fissi gli indici superiori e scambiando opportunamente le α munite dei soli indici superiori. Un'operazione a ciò sufficiente sarebbe ad esempio una successione di sostituzioni della forma

$$\begin{pmatrix}\alpha_{s_i\theta_1} & \alpha_{s_i\theta_2}\ \ldots & \alpha_{s_i\theta_r}\\ \alpha_{s_j\theta_1} & \alpha_{s_j\theta_2}\ \ldots & \alpha_{s_j\theta_r}\end{pmatrix},$$

ritenendo ogni α_{s_i} del numeratore diversa da ogni α_{s_j} anche non appartenente al denominatore, ed ogni α_{s_j} del denominatore diversa da ogni α_{s_i} anche non appartenente al numeratore.

Dr. NICOLÒ TRAVERSO.

SULLE QUESTIONI 293, 325

La proposizione contenuta nella quistione 293, da me stesso proposta in questo *Periodico*, e della quale una dimostrazione è apparsa nel 1° fascicolo del corrente anno, può essere dedotta come conseguenza delle equazioni (1), (3), di cui si parla nella quistione 325, allorchè queste equazioni vengano convenientemente interpretate.

In fatti, si assumano $OA\equiv x$, $OB\equiv y$, $OC\equiv z$, come una terna di assi coordinate ortogonali, e, rispetto ad essi, si dicano (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ') ordinatamente le coordinate di M, M'. — Si dicano poi u, v, w le coordinate plückeriane del piano $ABC\equiv\pi$, rispetto ad OA, OB, OC.

La equazione (1) della quistione 325 dice che il punto medio di MM' è su π, e le equazioni (3) della stessa quistione dicono che MM' è perpendicolare a π; dunque, il fatto di essere M, M' simmetrici rispetto a π, è tradotto dalle equazioni

(1) $$u(\xi+\xi')+v(\eta+\eta')+w(\zeta+\zeta')+2=0$$

(2) $$\xi-\xi'=\rho u,\ \eta-\eta'=\rho v,\ \zeta-\zeta'=\rho w,$$

ove ρ è il valore comune dei rapporti eguali

(3) $$\xi - \xi' : u = \eta - \eta' : v = \zeta - \zeta' : w.$$

Dalle equazioni (2) deduciamo

$$\xi^2 - \xi'^2 + \eta^2 - \eta'^2 + \zeta^2 - \zeta'^2 = \rho\left[u(\xi + \xi') + v(\eta + \eta') + w(\zeta + \zeta')\right]:$$

epperò, in forza della (1), pure

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = -2\rho;$$

ovvero $\overline{OM}^2 - \overline{OM'}^2 = -2\rho$, d'onde

(4) $$(\overline{OM}^2 - \overline{OM'}^2)^2 = 4\rho^2.$$

Ora dalle (2), quadrando e sommando, abbiamo anche

$$\overline{MM'}^2 = \rho^2 (u^2 + v^2 + w^2);$$

dunque abbiamo in fine

$$\frac{4\,\overline{MM'}^2}{(\overline{OM}^2 - \overline{OM'}^2)^2} = u^2 + v^2 + w^2 = \frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{1}{\overline{OB}^2} + \frac{1}{\overline{OC}^2},$$

tenuto conto del significato di u, v, w.

Alla risoluzione della quistione 325, da me proposta in questo *Periodico*, e della quale una risoluzione (difettosa nel fatto che non lascia subito vedere in qual modo alla eliminata richiesta si possa dare la forma di determinante prescritta nell'enunciato) è apparsa nel 1° fasc. del corrente anno, si può arrivare in una maniera rapidissima come segue.

Introducendo un conveniente fattore di proporzionalità ρ, le equazioni (3) si possono scrivere così:

$$\xi' - \xi - \rho u = 0,\quad \eta' - \eta - \rho v = 0,\quad \zeta' - \zeta - \rho w = 0;$$

dunque, invece di eliminare, ξ', η', ζ' fra le (1), (2), (3) proposte, si possono eliminare $\xi', \eta', \zeta', \rho$ fra le equazioni del sistema

$$\begin{aligned}
u\xi' + v\eta' + w\zeta' + 0.\rho + \Delta + 1 &= 0\\
u'\xi' + v'\eta' + w'\zeta' + 0.\rho + 1 &= 0\\
\xi' + 0.\eta' + 0.\zeta' - u\rho - \xi &= 0\\
0.\xi' + \eta' + 0.\zeta' - v\rho - \eta &= 0\\
0.\xi' + 0.\eta' + \zeta' - w\rho - \zeta &= 0.
\end{aligned}$$

Ora, l'eliminata di questo sistema si ottiene eguagliando a zero il determinante

$$\Omega = \begin{vmatrix} u & v & w & 0 & \Delta + 1 \\ u' & v' & w' & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -u & -\xi \\ 0 & 1 & 0 & -v & -\eta \\ 0 & 0 & 1 & -w & -\zeta \end{vmatrix}.$$

Ma moltiplicando per u, v, w ordinatamente gli elementi della 3ª, 4ª, 5ª orizzontale, e sottraendo i prodotti ottenuti dalla 1ª, si ha

$$\Omega = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \varphi & 2\Delta \\ u' & v' & w' & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -u & -\xi \\ 0 & 1 & 0 & -v & -\eta \\ 0 & 0 & 1 & -w & -\zeta \end{vmatrix};$$

dunque, permutando l'ultima con la penultima verticale, e trasportando la seconda orizzontale dopo la quinta, si ha appunto quanto si era proposto.

N. B. La quistione precedente ha un significato geometrico molto importante. Essa si attacca alla quistione dei punti e delle linee brillanti delle superficie considerate in una metrica euclidea. È da un tal punto di vista che io l'ho incontrata nella mia memoria *Ricerche geometriche diverse* etc., in corso di stampa negli atti della R. Accademia di Modena, della quale memoria una parte, dell'estensione di 80 pagine, è già da parecchi mesi stampata.

A. Del Re.

PRO FUSIONE

Relazione *sulla questione* V *proposta nel N. 1 (anno I) del Bollettino dell'Associazione Mathesis " Opportunità della fusione della geometria piana con la solida nell'insegnamento "*.

Inviarono risposte scritte relative alla questione V i professori: F. Ferrari (I. T. Alessandria), F. Palatini (I. T. Sondrio), G. Riboni (I. T. Milano), F. Sola (L. Carmagnola). Il prof. R. Bettazzi (L. Torino) come risposta alla stessa questione inviò due suoi articoli pubblicati nei fascicoli IV e V del vol. VI del *Periodico di Matematica*.

Come il lettore vede, la questione V ebbe scarsissime risposte. Dovremo concludere per questo che la questione non abbia destato interesse fra i nostri colleghi? Preferiamo credere che la maggior parte di essi abbia pensato: « *La questione, ormai vecchia, e replicatamente dibattuta e discussa, è così importante che ogni insegnante deve già averla per proprio conto risolta; ciascuno ha dunque preso oramai (per motivi didattici o scientifici, o, più specialmente, soggettivi) una decisione definitiva in proposito; e pertanto sarebbe infruttuoso il ragionarne ancora* ». Anzi fra gli stessi professori che hanno risposto, il Riboni, dopo di aver detto che non gli era stato concesso di esperimentare in iscuola il metodo della fusione, conchiude appunto: « *Perciò il parlarne a priori, dopo quanto è stato detto pro e contro da chi è assai più di me competente, mi sembra inutile* ». Avremmo tuttavia gradito che ciascuno dei molti nostri colleghi avesse espresso, magari con due sole parole, il proprio parere; ciò, se non altro, avrebbe potuto servire a fare un po' di statistica, a contare cioè e distinguere fra loro i *fusionisti* e i *separatisti*; poichè, è inutile dissimularlo, sul campo della questione V, sono appunto l'uno contro l'altro schierati questi due partiti scientificamente e didatticamente avversi.

Ma passiamo senz'altro a comunicare al lettore il tenore di ciascuna delle poche risposte pervenuteci.

Il prof. Bettazzi è favorevole alla fusione, così favorevole che in uno degli articoli suddetti scrive: « *Quanto alla fusione della geometria piana con la solida, stimo inutile mostrarne i vantaggi* »; e tanto nello stesso articolo, che è una recensione degli ottimi *Elementi di Geometria* di LAZZERI e BASSANI — prima edizione (*) —, come nell'altro, che è uno studio sull'insegnamento della Geometria nei Licei, con validissimi argomenti egli domanda che sia resa possibile dai programmi la fusione della geometria piana colla solida in tutte le nostre scuole secondarie, facendo anche osservare i vantaggi che ne risulterebbero pel coordinamento coi programmi delle materie affini.

Il prof. RIBONI, quantunque autore di due pregevoli libri di testo di Geometria, l'uno per le scuole secondarie inferiori e l'altro per le superiori (**), nei quali è praticata la separazione, tuttavia non è contrario alla fusione; difatti nella sua risposta così si esprime: « *Se in un primo insegnamento non mi sembra opportuna la fusione della Planimetria colla Stereometria, ho desiderato di tentarla nell'Istituto per vederne alla prova i risultati, ma dovetti abbandonare l'idea per l'impossibilità di attuarla in quest'Istituto coi corsi suddivisi, tanto più che il Preside ed i colleghi non erano del mio avviso* ».

Il Prof. FERRARI invece scrive: « *Sono partigiano dell'insegnamento separato della geometria piana e solida e questo anche per l'esperienza di 22 anni di insegnamento* ».

Il prof. SOLA si dichiara contrario alla fusione « *a causa del differimento alla 3ª classe di Liceo dello studio delle ragioni delle grandezze e della misura, richiesti in classi anteriori dai programmi di fisica e di cristallografia* ».

Finalmente il prof. PALATINI fa lunghe osservazioni antifusionistiche, che qui raggruppiamo, abbreviandone qualcuna.

1ª. *È certo che vi sono proposizioni di geometria piana la cui dimostrazione mediante considerazioni stereometriche è più semplice delle dimostrazioni fatte senza uscire da concetti di pura planimetria, ma ben inteso delle dimostrazioni fin qui conosciute, giacchè, siccome le vie più semplici sono ordinariamente le più tarde a presentarsi, nulla c'impedisce di ammettere che anche senza uscire dal piano, si possano ottenere dimostrazioni altrettanto semplici.*

2ª. *E pur certo però che tale applicazione della stereometria ha luogo, almeno per quanto si può asserire allo stato attuale delle ricerche di tal genere, in particolare per quelle proposizioni che riguardano proprietà di posizione, le quali nella geometria elementare sono in numero molto ristretto, essendo questa di natura principalmente metrica,* e per quanto si desume dagli « *Elementi di Geometria* » del DE PAOLIS,... *si riduce in fondo a qualche rotazione del piano intorno ad un asse* (come p. es. per dimostrare che esistono rette perpendicolari), *ed a ricavare certi luoghi geometrici piani come casi particolari di luoghi analoghi nello spazio,... se si faccia astrazione dalla soluzione del problema di costruire un triangolo isoscele che abbia ciascuno dei due angoli eguali doppio dell'altro,...*

(*) Come nessuno ignora, in questi Elementi, pubblicati nel 1891, è stata praticata la *fusione*, forse, didatticamente almeno, in maniera anche più felice che nell'opera analoga del DE PAOLIS; dei medesimi uscirà quanto prima, con vivo interesse e compiacimento degli studiosi, una nuova edizione; consideriamo tale ristampa ancora come un pratico argomento a favore della *fusione*.

(**) Bologna, 1892 e 1894; Ed. Zanichelli. Del secondo è ora uscita una nuova edizione (colla data del veniente 1898).

e perciò non è da *ammettersi in favore della fusione della geometria elementare piana con la solida la ragione del sussidio che si possa trarre dallo studio di questa per la trattazione di quella.*

3ª. Sempre da quanto si desume dal libro del DE PAOLIS, *la fusione apparisce più che altro intesa nel senso di alternare gli argomenti di geometria piana con quelli di geometria solida, trattando successivamente quelli che presentano analogie fra loro, le quali però molto facilmente si possono mettere in rilievo quando si tratta la geometria solida, col vantaggio... così di richiamare dimostrazioni già studiate.*

4ª. *Accettando la fusione, conviene rimandare alla fine del corso tutta la teoria della misura, rinunciando così... per lunghissimo tempo a far esercitare i giovani nel vasto e importantissimo campo delle applicazioni dell'algebra alla geometria.*

5ª. *Conviene far comprendere agli alunni che i principî sui quali si fonda la planimetria sono sufficienti per se stessi a svolgere senza aiuti esterni tutte le proprietà ad essa inerenti.*

6ª. *Che si debba procurare di dimostrare ogni proposizione della geometria elementare senza ricorrere a quelle teorie dalle quali essa non dipende necessariamente è principio sostenuto dai fautori stessi della fusione, e l'esempio sopra riferito del* DE PAOLIS *valga a provarlo. Questo autore stesso si mostra propugnatore di tal principio anche con l'osservazione che fa nella nota XXII, chè egli dimostra il teorema* fondamentale sulla perpendicolarità fra retta e piano *fondandosi soltanto sulle proprietà più semplici degli angoli e dei diedri, senza ricorrere all'eguaglianza dei triangoli. Non capisco perciò come chi è tanto tenero della distinzione fra le proprietà che appartengono alle diverse teorie della planimetria voglia asservire, dirò così, questa alla stereometria. È certo però che i principî si modificano a seconda dei casi e in conformità dei proprî intenti; tant'è vero che in contraddizione con quanto abbiamo ora osservato l'autore stesso nella nota XXVII dice: « Riconosciuta la necessità di domandare il postulato delle parallele, è meglio concederlo subito e trarne le principali conseguenze ecc. »*

Esaminiamo ora ad una ad una le risposte medesime. Quanto ai due articoli del prof. BETTAZZI, mentre preghiamo i nostri colleghi di rileggerli e discuterli, è debito nostro dichiarare che, nella parte specialmente che si riferisce alla questione V, li approviamo pienamente, e desidereremmo vivamente che fossero letti, segnatamente il secondo, anche da coloro ai quali pare che attualmente sia affidata una radicale riforma dei programmi didattici governativi, in occasione della *fusione* delle scuole destinate a costituire la futura *Scuola secondaria inferiore unica,* cioè la *Scuola media* da tanto tempo desiderata e promessa (*).

(*) Nella *Scuola media* dovrebbero a parer nostro essere riunite non solo le scuole Ginnasiali e Tecniche, ma anche le così dette Complementari (cioè preparatorie alle Normali); e gli attuali programmi di queste tre scuole dovrebbero, coordinati e riuniti, ma sfrondati del superfluo, costituire il programma della *Scuola media*. Unico titolo per l'ammissione a questa scuola dovrebbe essere la licenza elementare. La *Scuola media* dovrebbe essere di quattro anni, con tasse complessivamente uguali alle attuali del Ginnasio, dalle quali si potessero però esentare quegli alunni appartenenti a disagiate famiglie i quali dessero prova non dubbia di eccellenti doti intellettuali. Ben inteso, oltre la *Scuola media*, vi dovrebbe essere una *Scuola popolare*, con intendimenti veramente pratici e con inse-

Ed in sostegno delle considerazioni che il prof. Bettazzi svolge in favore della fusione della Geometria piana con la solida, crediamo opportuno ricordare che il chiarissimo professore di Geometria superiore dell'Ateneo genovese, Gino Loria, nell'importante suo studio storico e didattico « *Della varia fortuna di Euclide in relazione con i problemi dell'insegnamento geometrico elementare* », (*) dopo aver dimostrata la necessità che l'insegnamento della geometria elementare prepari allo studio della geometria che si espone nelle Università, conclude: « *Ora per raggiungere tale intento, non potendosi pensare ad aggravare i programmi delle scuole secondarie,...* (**) *fa d'uopo riordinare completamente il piano degli elementi. Bisogna* **anzitutto** *togliere la vieta separazione della planimetria dalla stereometria, al che non si oppone nessuna* **seria** *difficoltà scientifica, nè* **(come l'esperienza dimostra)** *didattica, e potrebbe essere generalmente adottato purchè i programmi governativi avessero una* **elasticità sufficiente** ». E questa *elasticità dei programmi governativi,* desiderata dal Bettazzi (1891) e dal Loria (1893), è stata anche recentemente invocata nelle adunanze, promosse dalla *Associazione Mathesis,* tenute quest'anno a Torino, a Palermo e a Firenze, e presiedute rispettivamente dai professori D'Ovidio, Torelli e Lazzeri, facendosi voto dai numerosi convenuti *che sia resa possibile ai professori la scelta, nell'insegnamento della Geometria, fra il metodo della separazione e quello della fusione;* e lo stesso voto, che manifestamente suona adesione a quest'ultimo metodo, è stato comunicato a S. E. il Ministro della Pubblica Istruzione nel *Memoriale* — Torino, 13 maggio 1897 — presentatogli dal Comitato dell'Associazione medesima. Aggiungiamo che anche reputatissimi autori di libri di testo di Geometria elementare, nei quali la fusione non è ancora adottata, si esprimono tuttavia in modo favorevole alla fusione medesima. Così per es. il prof. Giudice, in una nota alla fine della prima edizione della sua *Geometria piana* (Palermo, 1890), non manca di avvertire che lo studio contemporaneo delle Geometrie piana e solida è da ritenersi conveniente, sia per *far rilevare subito un gran numero di proposizioni correlative per indirizzare di buon'ora al fecondo importantissimo* **principio di dualità,** sia per poter *sviluppar meglio alcune teorie,* per es. la similitudine, sia per altre ragioni; e se nella seconda edizione (Brescia, 1897) egli non si è *ancora* deciso ad adottare la fusione, a noi consta che se ne deve ricercare la causa *nei programmi tuttora restrittivi del Ministero della Pubblica Istruzione.* (***)

---

gnamenti di arti e mestieri, totalmente gratuita. La licenza della *Scuola media* dovrebbe essere l'unico titolo di ammissione alle *Scuole secondarie* successive, e cioè al Liceo, all'Istituto Tecnico e alla Scuola Normale, le quali, conservando presso a poco gli attuali programmi rispettivi, che dovrebbero però svolgersi in maniera piuttosto intensiva che estensiva, dovrebbero essere portate tutte e tre a quattro anni di studio; e per tutte e tre dovrebbero assegnarsi tasse eguali (corrispondenti alle attuali del Liceo), condonabili anche queste agli alunni di molto ingegno e di insufficienti fortune.

(*) *Periodico di Matematica,* 1893, vol. VIII, pag. 81-113.

(**) Per quanto riguarda la matematica attualmente assegnata agli Istituti Tecnici, con un programma comune per tutte le Sezioni nel 1° biennio e con programmi speciali per le sezioni di Agrimensura e Fisico-matematica nel 2° biennio, crediamo anzi che si debba piuttosto pensare ad alleggerire che non ad aggravare.

(***) Cfr. colla prefazione dei precitati *Elementi* di Lazzeri e Bassani, pag. XI; ivi è pur fatto

Lo stesso prof. GIUDICE nella *Rivista di Matematica*, Torino, 1891, a proposito dei precitati *Elementi* di LAZZERI e BASSANI, esprime il parere che lo studio contemporaneo della Geometria piana e solida *giovi sia per migliorare o semplificare dimostrazioni o anche intere teorie, sia per scolpire i varii concetti in modo più completo ed esatto nelle menti degli scolari*.

Il prof. TESTI nella prefazione alla sua Geometria elementare (per le Scuole secondarie superiori, Livorno, 1896) scrive: « *Sono stato lungamente in dubbio se dovevo separare la geometria piana dalla solida oppur no, e confesso che per opinione mia volentieri avrei abbandonata questa separazione; ma il desiderio di uniformarmi più che è possibile ai programmi vigenti nelle nostre scuole, mi ha deciso a conservarla.* (*) *Però... non ci sarebbe inconveniente nessuno a far seguire allo studio del primo libro* (Le figure piane), *quello del terzo* (Le figure solide) *e passare poi agli altri due* (Equivalenza, similitudine e misura delle figure piane, Libro secondo, e solide, Libro quarto): *anzi così facendo si avrebbe il vantaggio di avere distinte tutte le proprietà di forma da quelle di grandezza e ravvicinate teorie che hanno tra loro così intimi legami* ». Analogamente negli ottimi *Elementi di Geometria* di SANNIA e D'OVIDIO (che per la maggior parte dei meno anziani professori che oggi insegnano matematica nelle Scuole italiane sono stati la pietra angolare sulla quale ciascuno ha fondato le proprie cognizioni geometriche) in una delle prime pagine della sesta edizione (Napoli, 1886) è scritto: « *Nulla vieta di alternare i quattro Libri di Stereometria coi quattro di Planimetria, eccetto qualche punto speciale* » (**), e nella prefazione alla

---

notare che *già da anni* la separazione della geometria piana dalla solida *è soppressa nelle scuole danesi* (ove l'insegnamento geometrico raggiunge un livello di considerevole altezza, come dice il LORIA nello scritto precitato).

(*) In altri termini si ripete l'antico motto " *Video meliora, proboque; deteriora sequor* "; e perchè? Per seguire i programmi. Si facciano invece ancora nuovi libri di testo di geometria in cui la fusione sia coraggiosamente adottata, traendone tutto l'utile didattico-scientifico possibile, e si facciano appunto dai più reputati nostri autori, e specialmente *(quod est in votis)* da quei Maestri medesimi ai quali l'Italia deve già le migliori geometrie elementari nelle quali l'intera Planimetria precede la Stereometria e che sono state scritte (le prime edizioni almeno) quando di qua dall'Alpi di fusione ancora non si parlava, cosicchè la maggior parte degli insegnanti, almeno i più volenterosi, siano disposti ad adottarli; saranno allora i compilatori dei programmi che seguiranno i nuovi testi, e, se non prescriveranno, almeno permetteranno la fusione; poichè non bisogna dimenticare che non pochi programmi si redigono sulle orme, o sull'indice, di qualche testo (non sempre scelto fra i preferibili; si confrontino ad esempio i programmi di geometria per l'ammissione alla Scuola Militare di Modena e il *Trattato di Geometria elementare* di A. AMIOT, versione del Novi).

(**) Anche il prof. M. GREMIGNI, quantunque separatista (si vedano i suoi *Elementi di Geometria ad uso delle scuole professionali e tecniche;* Firenze: Vol. I, *Planimetria*, 1896; Vol. II, *Stereometria, ad uso anche della terza classe liceale*, 1897), tuttavia, a pag. 69 del Vol. III della *Rivista di Matematica* (Torino, 1893), scrive: " *Non si creda però che combattendo la fusione delle due Geometrie, io voglia tenerle nettamente separate, perocchè penso che* **sarebbe molto utile l'alternarne convenientemente le parti.** *E vedrei anzi di buon grado cangiati i programmi ministeriali dei Licei in modo che, dopo i primi quattro libri d'Euclide, si potessero esporre le proprietà di posizione delle rette e dei piani dello spazio; di guisa che i giovani, avanti di accingersi allo studio delle proporzioni, avessero ad un tempo e maggiore coltura matematica e più familiarità colle questioni geometriche* ".

Per quanto, piuttosto affermando che provando, fu scritto dallo stesso prof. GREMIGNI contrariamente alla *fusione*, rimandiamo i lettori agli articoli che egli ed il prof. LAZZERI hanno pubblicato nella già citata *Rivista di Matematica* (1892 fasc. 11°, 1893 fasc. 4°-5° e fasc. 8°, 1894 fasc. 2°), nonchè alla *Prefazione alla seconda edizione del Libro primo degli Elementi di Euclide* (Firenze, 1893), ed alla prefazione al vol. I degli *Elementi di Geometria* sopracitati.

stessa ed. 6ª la *fusione della Geometria piana colla solida* è considerata come uno dei titoli di merito pei quali *molto si raccomandano* gli *Elementi* del DE PAOLIS. E analogamente ancora nella 6ª edizione degli *Elementi di Geometria* del prof. A. FAIFOFER, alla fine del IV capitolo della Planimetria (la quale consta di quattordici capitoli) si legge: « *A tal punto si può passare alla lettura dei tre primi capitoli della Stereometria* ». Finalmente il chiariss. prof. VERONESE, nei suoi recentissimi *Elementi di Geometria* (Padova, 1897), quantunque per certe ragioni scientifiche ritenga opportuno distinguere nel principio del suo testo non solo la *Planimetria* dalla *Stereometria*, ma anche la *Rettimetria* da entrambe, tuttavia ad un certo punto, per altre ragioni scientifiche, ma specialmente per ragioni didattiche, fonde nella loro esposizione queste *tre* geometrie; emancipa egli pure (seguendo il DE PAOLIS) la costruzione del pentagono regolare dalle teorie dell'equivalenza e delle proporzioni, e nella prefazione del suo libro scrive: « *Per parte mia ritengo che* **nel primo insegnamento della Geometria** *sia di regola più utile procedere dal particolare al generale e dal semplice al composto. Ciò che però riesce senza dubbio utile* **anche** *didatticamente è la trattazione simultanea delle teorie speciali (dopo aver premesse le proprietà generali della retta, del piano e dello spazio), cioè le teorie della congruenza e simmetria, dell'equivalenza, delle proporzioni, delle figure simili e della misura; raccogliendo così in un solo capitolo le proprietà della retta, del piano e dello spazio che dipendono dagli stessi principî. In tal modo non solo si consegue nell'insegnamento un notevole risparmio di tempo, ma, ciò che più importa, lo scolaro comprende meglio le relazioni che sussistono fra le figure piane e solide raccolte nello stesso capitolo e s'accorge di leggeri che molte dimostrazioni date per le seconde sono una facile estensione di quelle date per le prime. Con ciò è possibile ovviare all'inconveniente da alcuni lamentato, che cioè, al contrario di quanto avviene nell'Istituto tecnico, nel Liceo non si svolgono alla fine della classe 1ª o in principio della classe 2ª le proposizioni delle figure solide utili ad alcune parti della Fisica e della Cristallografia* ».

Da tutto questo si ricava che la fusione, specialmente se intesa come trattazione contemporanea degli argomenti affini di Planimetria e Stereometria che come sistematico sussidio di questa a quella, non può essere seriamente osteggiata da alcuno; e pertanto affermiamo nuovamente che le idee del prof. BETTAZZI favorevoli alla fusione meritano approvazione pienissima.

Veniamo a quanto dice il prof. RIBONI. Egli pure, come il VERONESE, ritiene che *in un primo insegnamento della geometria* la fusione non sia opportuna. Giova peraltro osservare che il prof. RIBONI allude qui in particolar modo alle Scuole Tecniche; e conveniamo con lui, poichè crediamo che i giovanetti che le frequentano siano ancora in troppo tenera età per possedere la così detta fantasia geometrica, o intuizione spaziale, in grado sufficiente alle concezioni stereometriche (tanto più che per le misere risorse finanziarie delle scuole medesime, anche la stereometria viene ad essi insegnata, non già come si dovrebbe, e cioè con appositi modelli solidi, ma *sulla lavagna*, e perciò *in prospettiva*, senza che essi possano aver già alcuna idea delle proiezioni piane di una figura non piana). Però nell'Istituto tecnico il prof. Riboni avrebbe desiderato tentare la fusione; è cosa per noi veramente spiacevole che le circostanze alle quali egli accenna glielo abbiano impedito; poichè siamo certi che anche l'esperimento del prof. Riboni, nell'importante Istituto tecnico di Milano, sarebbe riuscito favorevole alla fusione, e in questa certezza ne induce non tanto la personale esperienza che della proficua superiorità di tal metodo abbiamo potuto fare nell'Istituto tecnico di Alessandria, quanto piuttosto il sapere che da circa dodici anni il metodo della fusione è adottato con ottimi risultati nella Regia Accademia Navale di Livorno. È inoltre a nostra cognizione che lo stesso metodo è praticato attualmente in diversi Licei ed Istituti tecnici d'Italia, e da per tutto con risultati assai migliori di quelli che solitamente si ricavano coll'antico metodo della separazione, prescritta dai vigenti programmi.

I ventidue anni d'insegnamento separato della geometria piana dalla solida, pei quali il prof. Ferrari si dichiara partigiano del metodo della separazione, diventano ventidue secoli di esperienza generale del metodo medesimo, se pensiamo che la separazione è stata seguita per lo meno da Euclide ad ora; ma neppure questi ventidue secoli potrebbero essere citati come argomento a sostegno del detto metodo; l'equità vorrebbe che il prof. Ferrari facesse altri ventidue anni di insegnamento (e come antichi suoi colleghi glielo auguriamo di cuore) e il mondo matematico altri ventidue secoli di esperienza, adottando invece il metodo della fusione; allora solamente, confrontando i risultati, il nostro buon collega dell'Istituto tecnico di Alessandria e i matematici del secolo XLII potranno citare tali prove a favore dell'uno oppure dell'altro metodo: per ora, se si vuole essere imparziali, l'anzianità di servizio del metodo della separazione non deve essere considerata nè come titolo di preferenza, nè come motivo di collocamento a riposo.

Mentre il prof. Bettazzi e il Veronese (brano citato, ultimo periodo) giustamente osservano che la fusione permetterebbe nel Liceo di anticipare cognizioni stereometriche a profitto della Fisica e della Cristallografia, il prof. Sola invece asserisce precisamente il contrario, e cioè che la fusione sarebbe causa di differimento di altre cognizioni geometriche, proporzioni e misure, richieste nelle classi anteriori dalla Fisica e dalla Cristallografia. È il caso di dire: « *Tot capita, tot sententiae?* » No, poichè la contraddizione non è che apparente, ed infatti lo stesso prof. Bettazzi, prevenendo fin dal 1891 l'obiezione del professor Sola, nel secondo dei suoi articoli precitati aveva già scritto: « *Se si pensa allo sconcio notato nella predetta prefazione* (della 1ª ed. degli *Elem. di Geom.* di Lazzeri e Bassani), *che cioè* **i giovani del Liceo arrivano al terzo anno senz'avere nessuna nozione di geometria solida, mentre assai prima il professore di fisica e quello di scienze naturali hanno bisogno di presupporre tali nozioni specialmente nella cosmografia e nella cristallografia,** *si vede che, adottando nei licei la fusione delle due geometrie col mantenere la divisione dell'insegnamento in tre anni di studio, si scanserebbe il guaio accennato, per cadere forse nell'altro di vedere trattate le teorie delle proporzioni, della similitudine e della misura in terzo corso, mentre oc-*

corrono certamente prima al professore di fisica ». Giova però osservare che la Fisica e la Cristallografia hanno bisogno delle proporzioni, della similitudine e della misura, non soltanto nel piano, ma anche (e precipuamente) nello spazio; la separazione adunque della geometria piana dalla solida, mentre non recherebbe a quelle due scienze i vantaggi che loro porterebbe la fusione, e ai quali accennano i professori LAZZERI e BASSANI, BETTAZZI e VERONESE, non ovvierebbe nemmeno agli inconvenienti ora lamentati dal prof. SOLA e già previsti dal BETTAZZI relativamente alla fusione.

È indubitato che il coordinamento dei programmi di materie affini è questione spesso ardua a risolversi; tuttavia nel caso attuale vi si potrebbe acconciamente provvedere esaurendo nelle prime due classi liceali, come già ebbe a proporre il prof. BETTAZZI nello scritto ora citato, l'insegnamento della matematica (considerata come materia di coltura generale e ridotta al puro necessario, purchè sufficiente per l'indispensabile sussidio alle materie affini, da svolgersi, queste, nella 3ª classe, nelle loro parti dipendenti dalla matematica); è naturale poi che adottando questo provvedimento (*) rimarrebbe impregiudicata la questione se si debba svolgere l'intiero programma di geometria col metodo della fusione o con quello della separazione, al qual proposito ripetiamo che le disposizioni governative dovrebbero lasciare libera scelta all'insegnante (sia nei primi due anni di Liceo, come nel primo biennio nell'Istituto tecnico), anche perchè all'atto pratico la preferenza che ciascun insegnante è indotto a dare all'uno piuttosto che all'altro metodo deriva ben sovente, come abbiamo accennato in principio, da motivi specialmente soggettivi, sui quali non è possibile discutere.

E veniamo finalmente alle obbiezioni che il prof. PALATINI, decisamente separatista, muove contro i fusionisti. Quanto alla 1ª è intanto da osservare che in essa egli non può fare a meno di concedere che vi sono proposizioni planimetriche la cui dimostrazione è più semplice se ci si aiuta con considerazioni stereometriche; e ciò è ben naturale: come molte volte avviene che una cosa si veda meglio se ci si ponga a riguardarla dal *di fuori* piuttosto che rimanendo e addentrandoci in essa, così può accadere che certe proprietà del piano meglio si chiariscano osservandole in certo qual modo da un punto *esterno*, cioè da un punto che non sia sul piano, o in altri termini servendosi della geometria solida; e come il famoso *punctum ubi consistam*, situato fuori della Terra, sarebbe bastato ad Archimede per sollevarla (**), così la Stereometria, cioè l'ammettere la esistenza di un punto *fuori* di un piano, può fornire in certa qual maniera al geometra *il punto d'ap-*

(*) Che presenta anche altri vantaggi, pei quali rimandiamo il lettore allo stesso articolo del prof. BETTAZZI. Si vegga anche lo scritto presente a pag. 64.

(**) La scoperta del principio della leva, comunemente attribuita ad ARCHIMEDE (208 a. G. C.), è certamente anteriore, poichè questo principio si trova già enunciato nel libro sulle *Questioni meccaniche* di ARISTOTILE (384 a. G. C.); " *ciò che tanto* ERONE *come* PAPPO *attribuiscono ad* ARCHIMEDE *è la* dimostrazione *di tale principio e il suo ricollegamento a una teoria generale dei centri di gravità* ". Si veda in proposito la interessantissima nota del Dott. G. VAILATI: *Del concetto di centro di gravità nella Statica di Archimede* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. Adunanza del 9 Maggio 1897).

poggio per una dimostrazione relativa a quel piano. E gli esempi, che in geometria proiettiva abbondano (vedi p. es. i teoremi di DESARGUES sui triangoli omologici, dimostrazione BALTZER-CREMONA, e i teoremi di PASCAL e BRIANCHON, dimostrazione FARJON), anche se ci si limita al campo strettamente elementare, non mancano, e sono tutti importanti poichè servono quasi sempre a completare una teoria. Così, per citare ancora una volta l'esempio più noto, la teoria delle antiche sezioni del giro, o, ciò che è poi lo stesso, la costruzione dei poligoni regolari di 3, 4, 5, 6, 10, 15 lati, che una volta non poteva essere esposta intieramente se non che dopo la teoria delle proporzioni, ed al più dopo quella dell'equivalenza, le quali, direttamente almeno, non sono collegate coll'argomento, può adesso, col metodo dovuto al DE PAOLIS (ed al quale si sono attenuti non solamente i professori LAZZERI e BASSANI, ma anche il VERONESE), relativo al pentagono ed al decagono, precedere invece entrambe queste teorie, con progresso nell'ordine logico, scientifico e didattico; ed a questo proposito giova notare che nel programma di geometria assegnata alla 1ª classe dell'Istituto tecnico, *quantunque questo programma escluda la fusione*, la teoria dei poligoni regolari precede appunto le teorie della equivalenza e delle proporzioni. Indipendentemente da queste stesse teorie, si può, ricorrendo ad una sfera, dimostrare semplicissimamente il teorema relativo all'uguaglianza delle distanze tangenziali di due circoli segantesi da uno stesso punto della retta contenente i loro punti d'intersezione; anche quest'esempio dell'efficacia della stereometria riguardo a questioni planimetriche, che altrimenti esigerebbero l'uso di teorie non direttamente collegate coll'argomento, è dovuto al DE PAOLIS; (*) così questo teorema può prendere il suo posto naturale, subito dopo a quello relativo alla uguaglianza dei segmenti condotti da un punto tangenzialmente ad un circolo o ad una sfera. E, per considerare anche un esempio che non è dovuto al DE PAOLIS, si pensi che la divisione di un segmento in parti eguali, che occorre prestissimo, è al solito basata sul teorema « *A segmenti uguali d'una trasversale d'un fascio di rette* **parallele** *corrispondono segmenti uguali d'un'altra trasversale* **qualunque** »; se non altro l'analogia e l'ordine logico vorrebbero che a questo teorema si accompagnasse immediatamente il seguente « *A segmenti uguali di una trasversale di un fascio di rette* **qualunque** *corrispondono segmenti uguali d'un'altra trasversale* **parallela** », tanto più che anche sul secondo potrebbe basarsi la suddetta divisione dei segmenti (anzi, dal punto di vista grafico, meglio sul secondo che sul primo, specialmente se trattisi di piccoli segmenti); ma *se non si vuole uscire dal piano*, il secondo teorema non si sa dimostrare, e perciò il secondo metodo di divisione non si può esporre (e si noti che gli alunni dell'Istituto Tecnico già lo conoscono dal Disegno lineare), fino a che esplicitamente o implicita-

(*) V. G. FRATTINI: *Una bella osservazione del* DE PAOLIS "Periodico di Matematica 1896". Invece di ricorrere ad una sola sfera (passante pei due circoli, dopo di averne fatto rotare uno attorno alla retta che ne contiene i punti di intersezione *di tal guisa che la figura cessi di essere piana)*, si potrebbe, *lasciando piana la figura data* e schivando il movimento, ricorrere a due sfere uguali (vedi LAZZERI e BASSANI, op. cit., art. 215), ma la dimostrazione riuscirebbe meno semplice.

mente non si sia parlato di rapporti o di proporzioni o almeno dell'equivalenza dei triangoli, e pertanto, fino ad allora, la trattazione della predetta questione rimane incompiuta; cerchiamo al contrario un punto d'appoggio nello spazio (al quale ad ogni modo, anche per proposizioni planimetriche preliminari — data l'ordinaria definizione di uguaglianza — è giuocoforza ricorrere), e anche il secondo teorema sarà subito esponibile, e per farne la dimostrazione basteranno in sostanza *due piani paralleli tagliati da un terzo* (V. pag. 67). A tutti è poi noto l'ingegnoso e semplicissimo procedimento col quale recentemente (26 agosto 1896) il prof. GIUDICE ha mostrato come dalla proposizione « *La sfera è finita* » si possa dedurre « *Il cerchio è finito* » e quindi « *Il segmento è finito* » (postulato d'Archimede), e come conseguentemente la suddetta proposizione possa esser posta a base dell'ordinaria teoria dell'equivalenza (ricavandone come teorema il noto postulato che DE PAOLIS ha formulato sopra una proposizione del DE ZOLT). E finalmente tutti sanno con quanta semplicità ed eleganza col sussidio della geometria solida si venga ad emancipare dalla teoria delle proporzioni la teoria dell'equivalenza (cfr. DE PAOLIS), e da entrambe queste teorie quella degli assi radicali, come può vedersi nell'opera precitata di LAZZERI e BASSANI. Anzi questi due autori, sempre col possente aiuto dello spazio, sono riusciti ad ottenere *senza proporzioni e rapporti* una mirabile trattazione della teoria delle figure omotetiche; cosicchè, basandosi su tale trattazione e dicendo *simili* due figure *se si possono disporre in modo che siano omotetiche* (*), o in altri termini *se una di esse è uguale ad una delle omotetiche all'altra* (**), si potrebbe pervenire al risultato notevole

(*) Questa definizione, basata sull'altra " *Si dice che due figure sono omotetiche se i loro punti si corrispondono in modo che le rette individuate da coppie di punti corrispondenti formano un fascio ed ogni retta individuata da due punti di una figura sia parallela a quella individuata dai loro corrispondenti dall'altra* ", può vedersi nella *Geometria piana* di F. GIUDICE (Brescia 1897, p. 282 e 278). Salvo la forma, la stessa definizione di similitudine era già stata data dal GIUDICE nella prima edizione della sua *Geometria piana* (Palermo 1890, pag. 20 e 196) e nella sua *Geometria solida* (Palermo 1891, pag. 64).

(**) Così si esprime il prof. MORENO nei suoi *Elementi di Geometria* (Napoli 1871, pag. 96), adoperando pertanto una maniera di dire che permetterebbe di adottare questa definizione anche a chi, esplicitamente almeno, volesse *schivare l'idea di movimento*. Si noti che nella definizione di figure omotetiche (op. cit., pag. 90) il MORENO, uniformandosi all'uso più comune, introduce il concetto di proporzionalità e rapporto; la definizione di similitudine dovuta al prof. GIUDICE (V. annotazione precedente) non coincide adunque con quella adottata dal MORENO; quest'ultima appartiene, sostanzialmente, a DUHAMEL, il quale nella sua opera *Des méthodes dans les sciences de raisonnement (1867)* mise innanzi appunto la nuova definizione " *Due sistemi di punti diconsi simili se è possibile situarli in modo che le congiungenti le coppie di punti omologhi passino per uno stesso punto il quale abbia da due punti corrispondenti qualunque distanze aventi un rapporto costante* ", seguita poi anche dal Dr. F. HOCEVAR nel 1888 (cfr. lo scritto precitato del LORIA, pag. 87 e 98). La definizione del GIUDICE ha fra gli altri vantaggi anche quello di mettere immediatamente davanti il carattere più intuitivo della similitudine; ed infatti chi fosse anche totalmente digiuno di teorie geometriche, per vedere se sono veramente simili due figure che altri avesse già riscontrato per tali e che tali a lui le dicesse (e converrebbe piuttosto dirgli che *quelle figure si assomigliano, hanno la medesima forma*) si porrebbe a riguardarle da ogni parte, per ogni verso, ma sempre, se sono materiali e spostabili, disponendole, inconsciamente, *in modo che siano omotetiche fra loro* nel senso inteso appunto dal GIUDICE (e da LAZZERI e BASSANI), riferendosi cioè instintivamente ai concetti intuitivi di rette concorrenti e di rette parallele: egli non andrebbe certamente a pensare a proporzioni fra segmenti e all'uguaglianza di rapporti e di angoli. E del resto quando, ad esempio, per esporre ai discenti la dimostrazione di una proposizione relativa alla similitudine di due poligoni, arbitrariamente situadi *dare una teoria della similitudine indipendentemente da proporzioni e rapporti*. Non per nulla, insomma, il prof. A. Faifofer, quantunque *per ora* separatista, esprimendosi ne' suoi *Elementi di Geometria* (Ed. 10ª pag. 38) intorno alla relativa divisione in *piana* e *solida*, parla di *pretesti* per separare e *ragioni* per unire.

Nella stessa obbiezione 1ª il prof. Palatini osserva però che anche di quelle proposizioni planimetriche, la cui dimostrazione egli concede

---

bili, li si disegnano sulla lavagna o altrove, non si è soliti forse a tracciarli, appunto perchè riescano simili, in modo che risultino omotetici, anche se all'omotetia in quel momento non si pensa? L'omotetia, giova notarlo, basata sui soli concetti di concorrimento e parallelismo, *ed esponibile coll'aiuto della geometria solida indipendentemente dalle proporzioni*, viene ad essere in sostanza una teoria più semplice dell'ordinaria teoria della similitudine dei poligoni *colle annesse proporzioni fra grandezze*, quantunque la prima, dovuta specialmente a Chasles, sia relativamente recente, e la seconda risalga, se non fino a Talete, almeno a Euclide, e quantunque i programmi governativi di matematica per gli Istituti tecnici assegnino la prima al terzo corso e alla sola sezione fisico-matematica e la seconda al primo corso e perciò a tutte le sezioni. È tuttora comune, e pur troppo si manifesta anche nella distribuzione della materia dei suddetti programmi e di altri ancora, l'inveterato e nocivo pregiudizio del ritenere tanto più elementare, tanto più facile e tanto più necessaria una teoria, quanto più essa è notoriamente antica, e tanto più elevata, tanto più difficile e tanto più accessoria, quanto più essa è moderna. Così per esempio le non facili *nozioni sui numeri irrazionali e sulle operazioni ad esse relative* costituiscono uno dei primi argomenti del programma di matematica assegnato alla 2ª classe e a tutte le sezioni dell'Istituto tecnico; e si tratta appunto di argomento noto perfino agli antichi: ma convien peraltro ritenere che questi lo reputassero ben arduo, dappoichè il Commandino (nel suo *Euclide*, Urbino, 1575) lasciò scritto "... *narrano i Pythagorici.... che colui, il quale prima ardì di palesare la contemplatione delle quantità irrationali, in mare annegò... dicono anchora, che se per auuentura alcuno hauendo appreso qualche cosa delle quantità irrationali, la publicasse, subitamente è mandato nel luogo del profondo, et quivi perpetualmente è tormentato* ". Le nozioni invece relative alle *disposizioni, permutazioni*, e *combinazioni*, così semplici e così utili in tante elementarissime questioni di enumerazione, ma i cui germi risalgono *solamente* al secolo XVI, sono tuttora considerate nei programmi come una difficile novità e perciò relegate al quarto corso della sola sezione fisico-matematica. Le *nozioni sulla divisione armonica delle rette*, tramandateci è vero dai Greci (*Nicomaco, Apollonio*, ecc.), ma in uno studio elementare indubitatamente accessorie, sono per la 1ª classe e per tutte le sezioni: mentre invece quelle sulle *figure simmetriche*, dovute specialmente al Legendre, sono per la 3ª classe e per la sola sezione fisico-matematica, quantunque siano assolutamente indispensabili per completare il concetto fondamentale della uguaglianza geometrica. Le sottili teorie aritmetiche dei numeri primi, della divisibilità dei numeri interi e del massimo divisore e minimo multiplo di due o più numeri (vale a dire l'introduzione alla *teoria dei numeri*), che ben a ragione si possono qui dire accessorie, poichè la loro ommissione non sarebbe di ostacolo allo svolgimento dei successivi programmi di *aritmetica generale* e di *algebra*, e che spesso danno luogo a dimostrazioni che l'esperienza ha provato non facili ad essere generalmente bene intese e ritenute, sono assegnate alla 1ª classe, probabilmente esse pure perchè trattate dai Greci (Euclide, l. VII, VIII, IX); la formazione dei coefficienti binomiali, incomparabilmente più semplice, ma avvertita soltanto nel 1534 da Stifel e per completare la quale ci volle il sommo Newton, è naturalmente giudicata nei programmi come cosa ben difficile, e come tale, assegnata alla 4ª classe fisico-matematica, a meno che sia considerata come cosa accessoria, il che non crediamo, poichè, se l'insegnante non vi si intrattiene fin dalla prima classe, vi è il grave pericolo, comprovato dall'esperienza, di veder scrivere alla lavagna $(a+b)^m = a^m + b^m$, e cose simili, ecc. Ma, poichè ci siamo, chi saprebbe dirci perchè le proporzioni fra grandezze (Euclide, l. V) siano per la 1ª classe e quelle fra numeri (Euclide, l. VII) per la 2ª? Perchè il volume del *segmento sferico* è assegnato alla 2ª classe e quello dello *spicchio sferico* alla 4ª? Il lettore vorrà perdonarci la non breve digressione.

P. S. Durante la stampa dello scritto presente il chiaris. prof. V. Retali, nostro collega nel Comitato direttivo dell'*Associazione Mathesis*, gentilmente ci fa sapere che la definizione di similitudine che abbiamo riportato al principio di questa annotazione, e che il Loria (l. c.) attribuisce a Duhamel, " *fu enunciata prima dall'*Olivier *(1826, G. di* Crelle, *vol. I, pag. 247-248) e sviluppata ampiamente dal* Crelle *stesso in una memoria letta il 13 Marzo 1828 alla R. Accad. delle Scienze di Berlino* ".

essere più semplice se si fa uso di considerazioni stereometriche, nulla impedisce di ammettere che si possano trovare nuove dimostrazioni planimetriche altrettanto semplici: si vede però facilmente che tale ammissione, certamente possibile, è peraltro assolutamente inverosimile se si pensa che è già da oltre due millennii che si studiano e si perfezionano tali dimostrazioni planimetriche; all'opposto invece, poichè l'applicazione sistematica e generale della stereometria alla planimetria, specialmente in geometria elementare, data solamente, almeno per quanto è noto, da ben pochi anni, è ragionevole cosa il credere piuttosto che quando tale applicazione diventerà più comune, e sarà generalmente adottata nell'insegnamento, allora si semplificheranno anche maggiormente quelle dimostrazioni nelle quali si fa uso di questa applicazione, e il loro numero crescerà rapidamente, poichè, come già avvertì il De Paolis, *se molti di questi esempi finora non si sono presentati, nella Geometria elementare, è proprio l'antica e costante divisione che ha impedito di scoprirli.*

Che questo numero sia almeno per ora, *molto ristretto*, specialmente perchè la geometria elementare è *di natura principalmente metrica*, è cosa asserita, nella sua obbiezione 2ª, dal prof. Palatini, il quale pertanto ritiene doversene concludere *che non possa ammettersi in favore della fusione della geometria piana colla solida la ragione del sussidio che si possa trarre dallo studio di questa per la trattazione di quella*. In questo apprezzamento il prof. Palatini è in pieno accordo col Veronese, il quale nella prefazione precitata scrive pure « .... *la Geometria euclidea elementare è principalmente di natura metrica, a base della quale sta il concetto dell'eguaglianza.... Nei miei lavori geometrici io sono stato fautore non solo della fusione della geometria dello spazio ordinario con quella del piano, ma eziandio di quella degli spazi superiori con gli inferiori, perchè appunto lo studio delle proprietà proiettive di questi trova per mezzo di quelli la sua più completa e più alta estrinsecazione, tuttavia non posso non riconoscere che la Geometria solida è in questo senso di poco aiuto alla Geometria elementare del piano e della retta, perchè questa, come dissi, è per sua natura metrica* ». Ed in appoggio dell'asserito numero ristretto dei casi in cui si può utilmente applicare la geometria solida alla piana il prof. Palatini, nella stessa obbiezione 2ª, cita pure in proposito le applicazioni che si possono vedere negli *Elementi* del De Paolis; ma non tutte; infatti il Palatini ommette di citare in proposito proposizioni importantissime, quali p. es. il postulato della reversibilità dell'angolo (p. 17), il teorema dell'uguaglianza degli angoli opposti al vertice (p. 20), i due teoremi reciproci sul triangolo isoscele (p. 80), i teoremi sui triangoli uguali (da p. 82 a p. 87, vedi specialmente quello del num. 106) e conseguentemente la bisezione del segmento e dell'angolo (p. 95 e 96), l'uguaglianza dei segmenti obliqui condotti da un punto ad una retta ed aventi su questa proiezioni uguali (p. 98), la uguaglianza dei poligoni (p. 118 e 119) e conseguentemente l'equivalenza dei poligoni (da p. 292 a p. 310) e segnatamente i due teoremi reciproci sui triangoli fra loro equiangoli, esposti nella prima parte del numero 362 e per la dimostrazione dei quali il De Paolis fa nuovamente uso della stessa proposizione *stereometrica* (*) che gli ha servito a costruire il triangolo isoscele con ciascun angolo alla base doppio dell'angolo al vertice indipendentemente dalle teorie dell'equivalenza e delle proporzioni. Ben è vero che, fatta eccezione solamente per questi due ultimi teoremi, in tutte queste proposizioni, come in questa relativa all'esistenza di rette perpendicolari, citata dal PALATINI, in tanto solamente si ricorre allo spazio in quanto che per le dimostrazioni adottate occorre, o può occorrere, di dover scambiare fra loro le due *pagine* di una figura piana; ma, in tutte queste dimostrazioni, allo spazio, sia pure per un semplice movimento in esso di una figura piana, si ricorre. E ciò avviene non solamente nel testo del DE PAOLIS; ciò, più o meno esplicitamente, ma ad ogni modo inevitabilmente per quasi tutte le proposizioni suddette, *avviene in tutti i testi*, tanto fusionisti che separatisti (nel senso usuale di queste denominazioni), *nei quali si espone l'ordinaria geometria euclidea elementare, a base della quale sta il concetto dell'uguaglianza,* **intesa come sovrapponibilità mediante movimento eseguito se occorre eziandio nello spazio** (sia cioè che, per verificare la possibilità di sovrapporre due figure, supposte movibili, di uno stesso piano, supposto immobile, basti spostare una di esse in questo piano, ovvero occorra prima *rivoltarla* e perciò farla uscire dal piano facendola poi ricadere, così *rivoltata,* sul piano, eseguendo pertanto un movimento *nello spazio,* movimento che sarebbe assolutamente vietato, anzi, inconcepibile, *per un geometra piano:* (**) poichè bisogna aver presente che anche la Geometria *piana* di EUCLIDE, come quella del SANNIA e D'OVIDIO, del FAIFOFER, del BALTZER, del GIUDICE, del TESTI, del RIBONI, ecc. ecc., non è assolutamente *tale* nel senso rigorosamente scientifico, dal momento che, seguendo il metodo tradizionale e comune, in essa si fa uso (indispensabile, una volta intesa la uguaglianza nel significato predetto) del concetto di *spazio; tale* invece è quella esposta nel libro II dei precitati *Elementi* del VERONESE, *basati però su una definizione di uguaglianza, diversa da quella fino ad ora universalmente adottata:* bisogna insomma che i seguaci della scolastica divisione si convincano che essi pure, se adottano la comune definizione di uguaglianza e se non vogliono rinunciare a buona parte delle proposizioni fondamentali della Geometria *piana,* (nel senso tradizionale di questa denominazione), sono necessariamente, dal punto di vista scientifico, *fusionisti:* infatti, data quella definizione, essi, se per evitare per davvero l'abborrita fusione s'imporranno coscienziosamente l'indispensabile vincolo di *non uscire dal piano,* non solamente

---

(*) " *Se due triangoli sono prospettivi e due lati dell'uno sono paralleli ai corrispondenti dell'altro, anche i due lati rimanenti sono paralleli* ". Questa proposizione, com'è noto, può considerarsi come un caso particolare del teorema di DESARGUES sui triangoli omologici; e non è qui fuor di luogo l'avvertire che " *Il teorema dei triangoli omologici, nel piano, ... è un teorema di Geometria solida* "; questa notevole osservazione è dovuta al PEANO (*Sui fondamenti della Geometria,* Rivista di Matematica, 1894, p. 73); egli prova il suo asserto col dimostrare che questo teorema è conseguenza del postulato " *Dato un piano, si può segnare un punto fuori di esso* ", senza del quale la proposizione sui triangoli omologici può non sussistere, pur essendo verificati tutti i postulati precedenti.

(**) Un geometra a due dimensioni non potrebbe adunque *rivoltar la frittata!* Il lettore voglia permetterci questo scherzo, gastronomicamente efficace.

non potranno neppur parlare delle due *pagine* di un piano, e perciò nemmeno della *reversibilità* di certe figure piane, quali ad esempio il cerchio, il triangolo isoscele, e particolarmente l'angolo, ma non potranno neanche dimostrare p. es. l'esistenza della bisettrice di un angolo, nè quella di rette perpendicolari, nè tampoco l'uguaglianza degli angoli opposti al vertice, a meno che non introducano appositi ed ulteriori postulati, (*) senza dire che essi dovranno necessariamente restringere la teoria delle figure uguali al caso dell'uguaglianza diretta e conseguentemente lasciare incompleta eziandio la teoria dell'equivalenza; e pertanto i geometri separatisti, o superficiali, o piani che dire si debbano, se, rifuggendo dal rinunciare al loro misoneismo, non s'indurranno ad accettare *la novità della fusione*, si troveranno poi costretti, per essere separatisti sul serio, ad accettare il sovraccennato metodo del VERONESE, cioè una *novità* molto maggiore e veramente essenziale (poichè il VERONESE, modificando in conformità dei proprii intenti la definizione di uguaglianza, viene in sostanza a *mutare le ipotesi* fondamentali della Geometria ordinaria); ma nessuna novità è tollerata da coloro « *qui se montrent fort désobligés quand on les invite à réfléchir* » (**).

E ritornando ora all'obbiezione 2ª del prof. PALATINI ci sia lecito domandare: Perchè egli, tanto in questa come nella 3ª e 5ª, sia per giudicare della maggiore o minor portata del metodo della fusione, come per investigarne il sostanziale indirizzo nonchè *i principii sostenuti dai fautori stessi della fusione*, si riferisce sempre ed esclusivamente al libro del DE PAOLIS?

Non vi sono forse (per tacer d'altri testi, d'Italia e fuori, nei quali la fusione è praticata) gli ottimi *Elementi* di LAZZERI e BASSANI, ormai

---

(*) L'ordinaria dimostrazione dell'eguaglianza degli angoli opposti al vertice, basata sulla nozione di *angolo conseguente ad un altro* (l'angolo ω'' si dice conseguente all'angolo ω' se ha rispettivamente per lato-origine e per lato-termine il lato-termine di ω' e la semiretta opposta al lato-origine di ω') e sul teorema " *Se α, β, γ sono angoli, e se α è conseguente a β, e β è conseguente a γ, sarà α uguale a γ* " (per la cui dimostrazione si ricorre, come è noto, alla *reversibilità dell'angolo*, eseguendo un movimento nello spazio), può essere sostituita da un'altra, per la quale non occorre se non che un movimento nel piano, purchè si ammettano i due seguenti postulati: I. " *Se s' e s'' sono due semirette uscenti da un punto P e costituenti una retta s, e se σ' e σ'' sono due semipiani uscenti dalla retta s e costituenti un piano σ, questo può muoversi di tal guisa che, al termine del movimento, P, s', σ' vengano rispettivamente a coincidere con le situazioni primitive di P, s'', σ''* ". II. " *Dati tre punti non collineari A, B, C, se il piano ABC si muove di tal guisa che, al termine del movimento, il punto A, la semiretta uscente da A e passante per B, e il semipiano uscente dalla retta AB e passante per C vengano rispettivamente a coincidere con le loro situazioni primitive, altrettanto avverrà per ogni punto del piano ABC* ": di qui infatti, coll'aiuto delle note proposizioni " *Due punti individuano una retta* " e " *Se σ' e σ'' sono due semipiani uscenti da una retta s e costituenti un piano σ, e se Q' e Q'' sono due punti (situati entrambi fuori di s) l'uno su σ' e l'altro su σ'' le due rette s e Q'Q'' avranno un punto a comune* ", si deduce che *mediante il movimento di cui si parla nel postulato* I (che può concepirsi come uno strisciamento di σ su se stesso *– rotazione piana di σ attorno a P di 180° –*) *ogni punto Q di σ vien condotto sulla semiretta opposta alla situazione primitiva della semiretta uscente da P e passante per Q*: per la dimostrazione basta eseguire due volte il movimento suddetto; collo stesso movimento si prova allora immediatamente l'uguaglianza degli angoli opposti al vertice (supposti situati su σ). Si veda in proposito la precitata nota *Sui fondamenti della Geometria* del prof. PEANO, la quale non sarà mai abbastanza meditata da chiunque voglia esporre razionalmente i principii della Geometria elementare.

(**) Parole di LAURENT TAILHADE a proposito di certi critici di IBSEN; le quali, ben inteso, qui non voglionsi riferire se non che a coloro che, deliberatamente e sempre, opponendo una cieca forza d'inerzia intellettuale a qualsiasi novità scientifica o didattica che li obblighi a pensare, non per altro le si dichiarano contrari che per scansare il disturbo di averla a studiare.

giunti in breve tempo, ad una nuova edizione, nei quali la fusione è anche più intima, le applicazioni del nuovo metodo sono più numerose e relative ad intere teorie, e la trattazione apparisce dal punto di vista pratico meglio rispondente in generale alle esigenze didattiche?

Forse che pel prof. PALATINI *Fusione* e *De Paolis* sono tutta una cosa, come già pel GIUSTI *Granduca* e *Tedeschi*? (*)

Come si è visto più sopra, il BETTAZZI, il GIUDICE, il TESTI, il GREMIGNI (V. nota a pag. 53), e il VERONESE specialmente, fanno osservare i vantaggi che derivano dalla trattazione simultanea, o alternazione, degli argomenti analoghi di planimetria e stereometria, sia pel notevole risparmio di tempo che così si consegue, sia per far meglio comprendere allo scolaro le relazioni fra le corrispondenti figure piane e solide, sia per altre ragioni; ma in questo mondo ogni medaglia ha il suo *rovescio* (*anche pei geometri piani*, pare impossibile!): infatti nella obbiezione 3ª il prof. PALATINI afferma al contrario che con la separazione si ha il vantaggio, quando si tratta la geometria solida, di richiamare dimostrazioni già studiate in geometria piana, cioè di ripeterle. Ma ciò non è al certo possibile p. es. negli Istituti tecnici, ove l'intiero insegnamento della matematica razionale elementare — *Aritmetica, Algebra, Geometria* — deve essere impartito in due anni — 1° biennio — (**) assolutamente insufficienti per un coscienzioso svolgimento di così vasto programma richiedente esercitazioni numerose, ed ove pertanto non si può certamente far gettito di tempo in ripetizioni, per quanto utilissime (***).

Quanto alla 4ª obbiezione potremmo osservare che dal lato strettamente scientifico *l'applicazione dell'Algebra alla Geometria* (ben inteso dal punto di vista puramente elementare, e quindi astraendo completamente dalla Geometrica analitica) *è piuttosto argomento di Algebra che di Geometria* (non ostante che solitamente lo si esponga come *Appendice* alla seconda, anzichè alla prima), e quindi il ritardo di tale applicazione, portato dalla fusione non è a rigor di termini, da considerarsi come

---

(*) " Ma l'uso in oggi alla voce *Tedeschi*
Sposò talmente la voce *Granduca*,
Che *Tedeschi* significa *Granduca*,
E *Granduca* significa *Tedeschi* ".

Le poesie di G. Giusti, Firenze. Barbera, 1860, p. 372.

Della scherzevole forma di quest'ultima domanda, relativa al prof. PALATINI, chiediamo a lui venia ed al lettore; non senza ricordare, a nostro discarico, le note parole di BIAGIO PASCAL: " *Les matières de géométrie sont si sérieuses d'elles mêmes, qu'il est avantageux qu'il s'offre quelque occasion pour les rendre un peu divertissantes* ".

(**) Nel 1° biennio degli Istituti tecnici, che, per l'età degli alunni e pel numero degli anni dedicati a studi precedenti, corrisponde ora alle classi 4ª e 5ª ginnasiali, è attualmente prescritto di svolgere (salvo l'omeopatica *trigonometria senza triangoli obbliquangoli* ora assegnata alla 3ª classe Liceale) quello stesso programma di matematica che nelle scuole classiche si svolge invece in cinque anni (due di Ginnasio superiore e tre di Liceo) ad alunni generalmente meglio disposti ad apprendere per molteplici ragioni sociologiche (specialmente atavistiche). Si vegga in proposito il precitato *Memoriale a S. E. il Ministro* (p. 68).

(***) Si è invece costretti a fare la massima economia possibile di tempo; e poichè nessuno potrà negare che la fusione arrechi appunto siffatta economia, si ha così, almeno per gli Istituti tecnici, un nuovo argomento didattico a favore della fusione. Sotto lo stesso punto di vista giova pure negli Istituti tecnici fondere insieme l'insegnamento di una parte dell'aritmetica razionale con quello dell'aritmetica generale, introducendo cioè i numeri negativi appena si parla della sottrazione, ecc.

ragione contraria alla fusione, in sè, la quale è questione di *Geometria* e non di *Algebra;* ma preferiamo far notare, tanto più che l'obbiezione è didattica, che di tale applicazione conviene piuttosto essere parchi nell'insegnamento, se si vuole evitare che gli alunni, sedotti dalla speditezza dei metodi algebrici, che non affaticano il pensiero, attutiscano in breve il loro delicato senso geometrico, abituandosi troppo presto a preferire *la comodità di lasciarsi guidare dal calcolo* al profittevole cimento contro la difficoltà e sottigliezza delle investigazioni puramente geometriche; il ritardo nell'applicare i procedimenti algebrici alla Geometria è dunque a ritenersi più utile che dannoso; e ad ogni modo poi, negli Istituti tecnici, per gli alunni a cui interessano, tali applicazioni, sulle quali vertono con singolare costanza i temi (*) proposti dal Ministero per l'esame scritto di matematica pei licenziandi della sezione, fisico-matematica, possono essere fatte in seguito, e con miglior profitto, nel 2° biennio; nel Liceo si possono fare nella 3ª classe, sia coi programmi attuali, sia, e allora meglio ancora, adottando la proposta del prof. BETTAZZI, e già riferita in parte a pagina 55, di esaurire cioè nei primi due anni di Liceo l'insegnamento della matematica elementare, ridotta alle sue parti assolutamente indispensabili per tutti gli alunni, riserbandone le parti complementari ai terzo anno, *per quei soli alunni che fossero destinati alle facoltà scientifiche dell'Università* (**).

Come si è veduto più addietro, *senza uscire dal piano non è possibile trattare tutta l'ordinaria geometria piana euclidea elementare;* nè varrebbe addurre in contrario l'esempio di quanto fa il VERONESE nei suoi *Elementi,* poichè la *Geometria del piano* ivi trattata, nel precitato libro II, cambiate le premesse fondamentali perchè intesa l'eguaglianza in senso *nuovo* (***), non è più l'ordinaria Geometria piana euclidea ele-

---

(*) Tolti le più volte, da qualche anno a questa parte, da pubblicazioni francesi.

(**) Ai quali così *si potrebbero completare gli insegnamenti propri dei corsi secondari, preparandoli a seguire con frutto le lezioni universitarie: il che non è possibile con l'attuale ordinamento, com'è universale lagnanza.* (BETTAZZI, l. c.)

(***) Non solamente *nuovo,* ma in disaccordo coll'ordinario e perciò col principio che lo stesso VERONESE enuncia nell'*Appendice* ai suoi *Elementi* " *didatticamente in un trattato elementare non conviene mutare senza necessità l'uso di parole accettate comunemente da secoli* " (p. 25); nè crediamo che la mutazione del tradizionale significato dell'uguaglianza geometrica risponda ad una vera necessità scientifica o, tanto meno, didattica; poichè non sappiamo ancora che *la scienza abbia veramente dimostrato che l'ordinaria determinazione del concetto dell'uguaglianza delle figure geometriche sia logicamente errata,* e tanto meno riusciamo a vedere che effettivamente sia *ormai incontestabile* che in essa si riscontri una *petizione di principio* (cfr. VERONESE: l. c. pag. VII; *Elementi di Geometria* pag. VII; L. CERTO, *Sull'equivalenza, Bollettino dell'Associazione Mathesis,* 1897-98, pag. 17): siamo invece convinti che per trattare rigorosamente la geometria metrica, nella quale appunto comparisce il concetto di figure uguali, non sia affatto *necessario* mutare l'ordinaria definizione relativa, e chiunque potrà persuadersene leggendo la seconda parte della precitata nota del PEANO (da p. 75 a p. 90). Per convincersi poi che il nuovo senso nel quale il VERONESE intende l'uguaglianza geometrica è in disaccordo coll'ordinario basta pensare a due triedri o angoloidi opposti al vertice, ovvero a due poliedri simmetrici, o a due figure solide qualunque fra loro simmetriche; tali figure non sono in generale sovrapponibili mediante movimento, nel nostro spazio ordinario a tre dimensioni, e perciò non sono uguali nel senso ordinario; invece nel senso adottato dal VERONESE sono uguali. Ma in questa circostanza, e in questo disaccordo specialmente, consiste appunto l'ingegnosità e la seducente genialità di questo modo di vedere del VERONESE, mediante il quale non solamente si evita in certo qual modo un movimento in uno spazio lineare a quattro dimensioni, ma si viene poi ad essere in accordo colla intuizione naturale, la quale (contrariamente all'ordinario concetto geometrico dell'uguaglianza), talora, non volendo, ci fa dire che qualunque corpo è *uguale* alla propria mentare (*), a base della quale, giova ripeterlo, sta *la nozione comune di uguaglianza,* cioè l'uguaglianza non altrimenti intesa se non come sovrapponibilità mediante movimento eseguito occorrendo *anche nello spazio;* e perciò, una volta adottato il metodo ordinario, il *far comprendere agli alunni,* come vorrebbe il prof. PALATINI nella sua obbiezione 5ª, *che senza aiuti esterni si possono svolgere tutte le proprietà inerenti alla planimetria* è assolutamente impossibile

« Per la contraddizion che nol consente ».

Si dovrà dunque *pur di non uscire dal piano* abbandonare il metodo ordinario? Non lo crediamo. D'altra parte, perchè questo *orrore dello spazio?* Perchè affaticarsi a compiere questa difficile opera contro natura (poichè *lo spazio fisico* esiste, e non così il piano) di impedire almeno per un anno che gli alunni pensino lo spazio, di ridurli intellettualmente ad animali piatti, schiacciando sulla tavola nera ogni loro concezione geometrica? (**) Perchè infine condannare il giovanile ingegno a strisciare sul piano, tarpandone le ali, limitandone le forze? (***)

Astrarre dall'inevitabile concetto di spazio è altrettanto difficile sia per guidare il pensiero al di fuori di questo, nei campi ideali dell'*ambiente assoluto,* come per costringerlo nelle angustie di un'unica retta o di un unico piano; curare in ogni caso di evitare locuzioni le quali a tale astrazione perfettamente non corrispondano può riuscire malagevole non solamente ai discenti, ma eziandio ai Maestri. Il pensiero umano,

---

immagine, ottenuta mediante uno specchio piano. La definizione dovuta al VERONESE ha dunque il vantaggio di *allargare,* per le figure solide e nello spazio ordinario, *il concetto di uguaglianza,* ed anche per le figure piane se ci si impone il vincolo di non uscire dal piano; ma non per questo è giusto il dire che la definizione antica avesse il difetto di *restringere* tale concetto a quello della congruenza (cfr. colla prefazione dei precitati *Elementi di Geometria* del VERONESE, pag. VII, e colla relativa recensione del prof. BORDIGA, *Periodico di mat.,* 1897, pag. 135); se una nuova convenzione allarga certi confini, ciò non vuol dire che la convenzione primitiva li abbia ristretti. La nuova definizione ha inoltre il vantaggio di ridurre l'uguaglianza di due figure qualunque al concetto più semplice dell'uguaglianza dei segmenti (il quale però, così come è posto nell'opera del VERONESE mediante il relativo postulato II, rimane alquanto vago e indeterminato, poichè nel postulato medesimo non si dà nessun criterio per decidere in ogni caso se dati due segmenti a e b, abbia o non abbia luogo il fatto che si vuol esprimere dicendo " b *è uguale ad* a "). Per queste e per altre ragioni il metodo del VERONESE e l'intiero suo testo, cui la novità di vedute distinguono subito da qualsiasi altro consimile, non possono mancare dall'interessare favorevolmente tutti quegli insegnanti ai quali sta a cuore il progresso scientifico e didattico della geometria elementare: e le stesse difficoltà che in questo testo s'incontrano possono essere non ultima circostanza la quale induca alcuni dei più volenterosi fra essi ad adottarlo nei Licei e negli Istituti tecnici. Tale adottazione gioverà non poco alla fusione della geometria piana colla solida, poichè il VERONESE pratica siffatta fusione appena terminato il precitato libro II, e cioè *in tutti i rimanenti sette libri dei suoi Elementi,* secondo quanto abbiamo già detto a p. 57.

(*) Inoltre nel precitato libro II non è trattata che una prima parte della Geometria piana: le parti rimanenti sono svolte, simultaneamente ai corrispondenti argomenti stereometrici, nei libri V, VI, VII, VIII e IX, dopo trattata nel libro III la prima parte della Geometria solida, e dopo introdotti nel libro IV i concetti di congruenza, simmetria e movimento delle figure, nel piano e nello spazio.

(**) Salvo poi, naturalmente, a guardarsi bene dallo *schiacciare* gli alunni stessi agli esami, anche se daranno prova di non aver saputo ricavare verun costrutto da così scientifica e snaturata astrazione (alla quale ad ogni modo, studiando poi Geometria solida, convien pur rinunciare!).

(***) " *Obbligandoci a cercare la proprietà di una linea o di una superficie, senza potere utilizzargli enti geometrici posti fuori della linea o della superficie stessa,* limitiamo le forze *di cui possiamo disporre* ". (DE PAOLIS, l. c. pag. III).

obbediente ad ineluttabili leggi speciali, quali a facoltà intellettuale di esseri a tre dimensioni si convengono, mal s'acconcia alla tirannia di un raziocinio geometrico rigidamente astratto che voglia adattarlo a comportarsi come pensiero di geometri dotati di un minore o maggior numero di dimensioni; ed è appunto per questo che tal'una volta trattando la *Geometria del piano* come geometri piani, e cioè senza ammettere l'esistenza di punti fuori del piano, anzi per intanto escludendola, avviene che si trascuri tuttavia di evitare parole accennanti a siffatti punti (*); tal'altra invece, trattando prima la *Geometria dello spazio* come geometri a quattro o più dimensioni, accennando implicitamente alla possibilità di spazi distinti a tre dimensioni col dimostrare p. es. che: « Se un piano α ha in comune *con lo spazio* $O\pi$ tre punti non collineari, *il piano α stesso apparterrà allo spazio anzidetto* » e che « Dati quattro punti *qualsivogliano* non complanari, il piano determinato da tre di essi e il quarto punto *determinano lo spazio a cui appartengono i quattro punti* » (**), accade poi che, quantunque scientificamente non si sia esclusa l'esistenza di punti fuori dello spazio che si considera, si dica p. es. senz'altro « *Per qualsiasi punto del piano o fuori del piano si può condurre una sola retta perpendicolare al piano* » (***) ommettendo di preporre le parole « Nello spazio » o meglio « In un dato spazio » (mentre invece, se si suppone p. es. di essere in un S_4, di tali perpendicolari, quando il punto è sul piano dato, esistono infinite, e cioè una in ciascuno degli S_3 passanti per quel piano e giacenti in quell'S_4), e adoperando ancora le locuzioni *del piano* e *al piano* dopo aver considerato eziandio piani distinti (****).

E veniamo finalmente alla 6ª e ultima obbiezione. È certamente ottimo principio (possibilmente seguito non solo dai fusionisti in geometria, ma da chiunque si occupi di scienze di natura specialmente deduttiva) che ogni proposizione sia dimostrata senza ricorrere a teorie dalle quali essa non dipende necessariamente (*****); consideriamo anzi come progresso logico e scientifico non indifferente lo svincolare la dimostra-

---

(*) Veronese, *El. di geom.*: p. 37 " *Un piano* è determinato da una retta e da un punto qualsiasi *di esso*, ecc. "; p. 38 " Due rette parallele, o che s'incontrano, determinano *un piano* "; p. 54 " ... *se i due angoli non sono situati nello stesso piano* "; p. 55 Se due rette di *un* piano sono rispettivamente perpendicolari a due altre rette *di esso* ecc. "

(**) Loc. cit. p. 109 e 111. Proposizioni cosiffatte costituiscono certamente un efficace avviamento alla *teoria degli iperspazi* " gloria tutta italiana "; tuttavia ci domandiamo: È veramente opportuno introdurle nell'insegnamento della Geometria assegnata alle scuole secondarie? Se si pensa che fino a pochi anni or sono di tale teoria non si teneva parola nemmeno nei corsi universitarii, che anche nelle Università illustri matematici (quali ad esempio Giuseppe Battaglini) furono avversi all'introduzione di questo nuovo genere di studi (V. il cenno necrologico dettato da E. Pascal nella *Rivista di Matematica* del 1894), e finalmente che *la Geometria non è una scienza di puro ragionamento* (De Paolis, l. c. p. 475) e conseguentemente affinchè una teoria matematica *meriti il nome di Geometria bisogna che le sue ipotesi o postulati esprimano il risultato delle osservazioni più semplici ed elementari delle figure fisiche* (Peano, l. c., p. 75), o in altri termini soddisfacciano *al principio che tutti i postulati sono tratti direttamente da oggetti sensibili* (Veronese, l. c., p. XI), la risposta non può essere dubbia. Vedi anche la precitata *Appendice*: Nota XIII, da p. 30 a p. 34, e p. 87.

(***) Loc. cit. p. 119. Vedi anche, nella precitata *Appendice*, l'annotazione a p. 87 e 88.

(****) Loc. cit. p. 107 corollario; p. 113 teor. IV e V; p. 115 teor. I; e § 2 del Libro III.

(*****) In omaggio a questo medesimo principio il chiar.mo e compianto prof. A. Lugli, fra le varie condizioni alle quali deve soddisfare *un libro di aritmetica rigorosa* includeva appunto *che ciascuna* zione sia pure di un solo teorema da teorie alle quali esso non appartiene. E appunto nel suddetto principio, e nel desiderio del conseguimento di siffatto progresso, è forse a ricercarsi la genesi o il primo incentivo del metodo della fusione.

Siano ad esempio a, b, c semirette complanari uscenti da uno stesso punto O (fig. 1) ed incontranti rispettivamente due rette parallele nei punti A e A', B e B', C e C', di tal guisa che AB = BC, e si voglia dimostrare che A'B' = B'C'. Il procedimento comune è questo: si ha A'B' : AB :: OB' : OB :: B'C' : BC; di qui A'B' : AB :: B'C' : BC; ma AB = BC, dunque A'B' = B'C', c. d. d. Ma che cosa ha che fare la complessa teoria delle proporzioni col teorema considerato, il quale nella sua ipotesi e nella sua tesi, non è che una delle più semplici proposizioni che costituiscono il nesso fra la teoria del parallelismo e quella dell'uguaglianza?

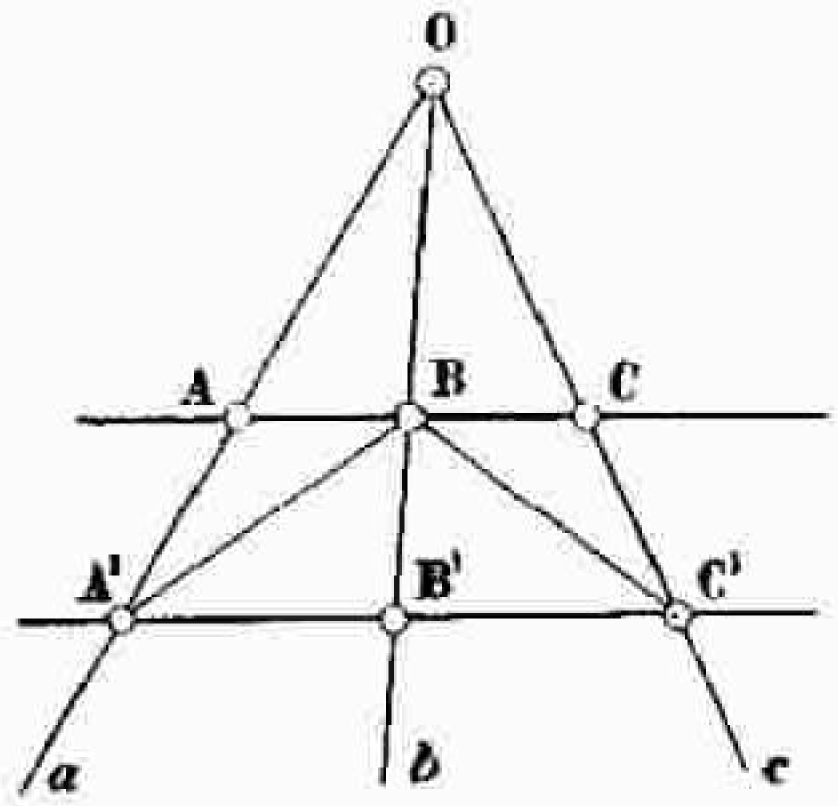


Fig. 1.

Potremmo dire: i triangoli OAB e OBC sono equivalenti, perchè hanno le basi AB e BC uguali e la stessa altezza; i triangoli A'AB e C'BC parimenti; dunque anche i triangoli OBA' e OBC' sono equivalenti; ma questi hanno la stessa base OB, dunque saranno uguali le loro corrispondenti altezze; e poichè queste sono pure altezze dei triangoli A'BB' e C'BB', questi, avendo inoltre la stessa base BB', saranno equivalenti; ma essi possono anche considerarsi come aventi le basi A'B' e B'C' e corrispondentemente la medesima altezza, e pertanto queste basi dovranno essere uguali; cioè A'B' = A'C', c. d. d. Ma che ha che fare l'equivalenza colla questione trattata?

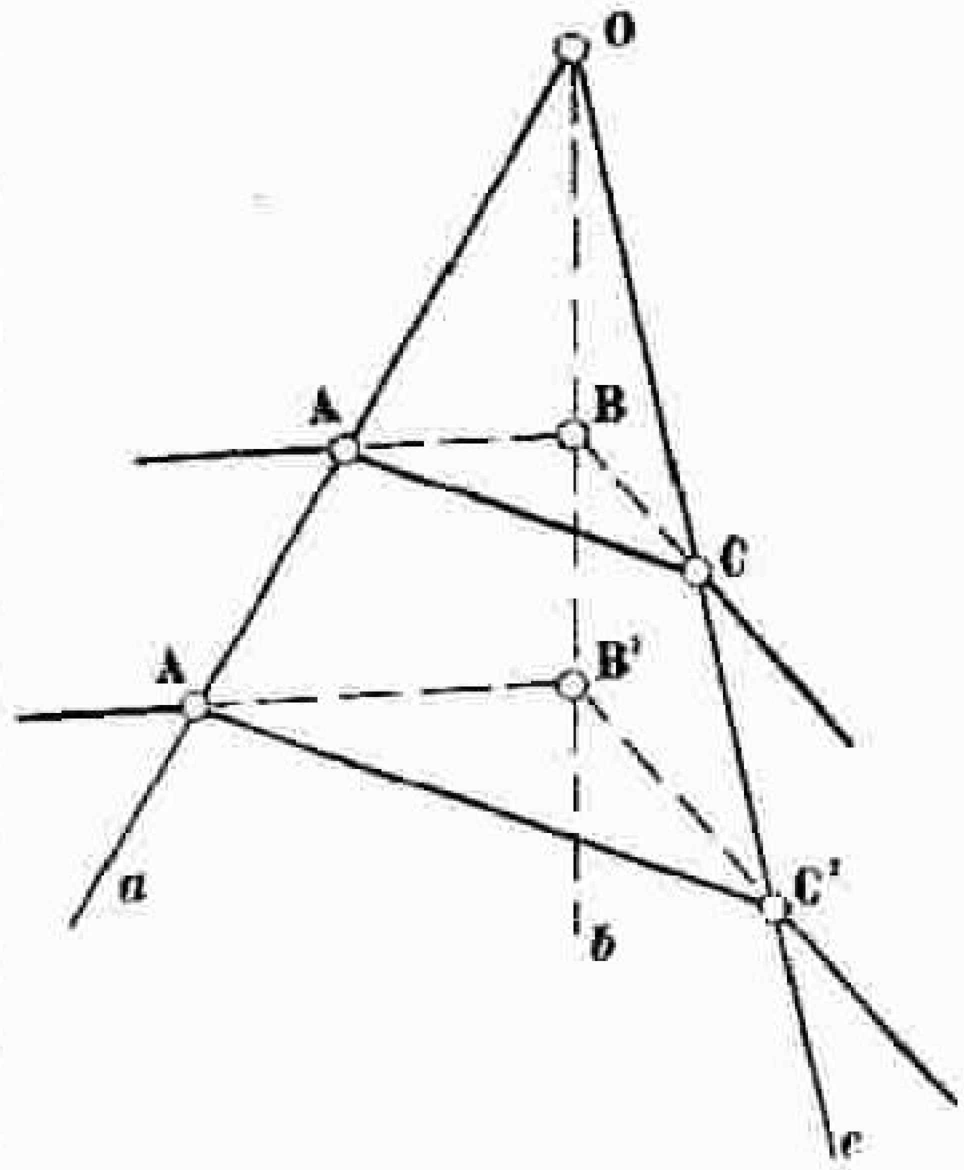


Fig. 2.

Ricorriamo allo spazio: facciamo rotare l'angolo $\widehat{bc}$ attorno a b per meno di 180°; congiungiamo poi (fig. 2) A con C, e A' con C'; poichè BA || B'A', e BC || B'C', sarà il piano ABC parallelo al piano A'B'C', e perciò le intersezioni AC e A'C' di essi col piano dell'angolo $\widehat{ac}$ saranno parallele; quindi $B\widehat{A}C = B'\widehat{A'}C'$, e $A\widehat{C}B = A'\widehat{C'}B'$; ma AB = BC e perciò $B\widehat{A}C = A\widehat{C}B$, dunque $B'\widehat{A'}C' = A'\widehat{C'}B'$; di qui A'B' = B'C', c. d. d.

E con questa dimostrazione, come con quelle che accenniamo qui in

teoria per essere stabilita senza eccezione non dovrebbe valersi di enti estranei alla propria natura („Periodico di Matematica „ 1893, p. 199).

nota, (*) si esce, è vero, dal piano, ma non si esce dalla teoria del parallelismo e della eguaglianza, alle quali la questione appartiene; e questo

(*) Chi volesse *lasciar piana la figura data*, e schivare il movimento, potrebbe condurre per AC e per A'C' (fig. 3) i piani paralleli α e α', e prendere su α e fuori della retta AB un punto E tale che $BE = AB$; la semiretta OE incontrerà α' in un punto E' tale che $A'B' = B'E'$, e $B'E' = C'D'$ (dimostrazione precedente); dunque $A'B' = C'D'$, c. d. d. — Se si volesse considerare anche il caso

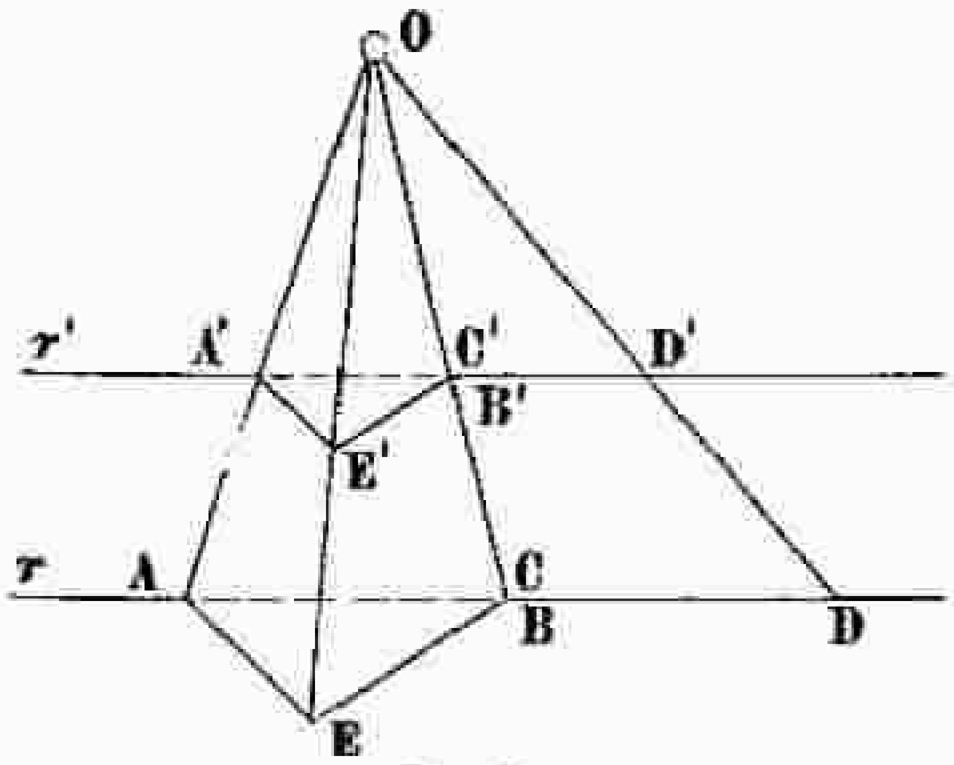


Fig. 3.

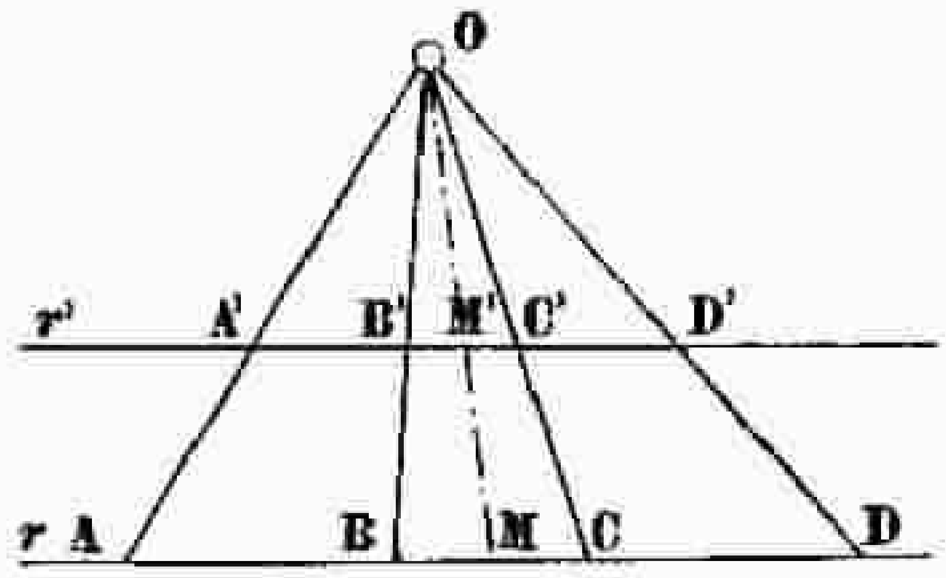


Fig. 4.

di quattro semirette complanari a, b, c, d uscenti da O (fig. 4) ed incontranti rispettivamente due parallele r, r' nei punti A e A', B e B', C e C', D e D', di tal guisa che $AB = CD$, e si volesse dimostrare che $A'B' = C'D'$, basterebbe appoggiarsi al caso precedente, poichè, detto M il centro di BC e M' il punto in cui la semiretta OM incontra la retta r', si avrebbe $BM = MC$ e perciò $B'M' = M'C'$, si avrebbe inoltre $AM = MC$ e perciò $A'M' = M'C'$, e conseguentemente $A'B' = C'D'$, c. d. d. — Oppure: condotti per AC e per A'C' (fig. 5) i piani paralleli α e α' e preso su α e fuori della retta AC un segmento UV equipollente ad AE, siano U' e V' i punti in cui le semirette OU e OV incontrano α'; si avrà

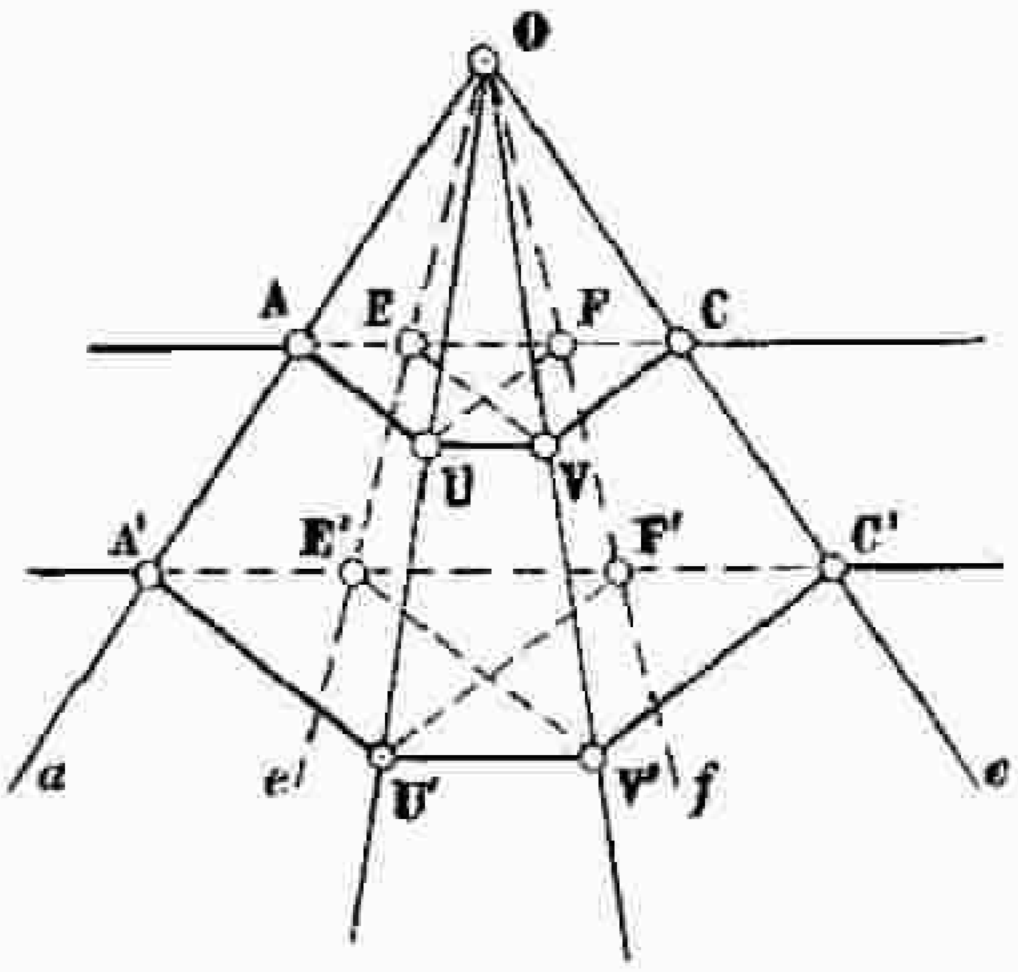


Fig. 5.

$AU \parallel EV$, $AU \parallel A'U'$, $EV \parallel E'V'$, e quindi $A'U' \parallel E'V'$; inoltre $AE \parallel UV$, $AE \parallel A'E'$, $UV \parallel U'V'$, e quindi $A'E' \parallel U'V'$; dunque $A'E' = U'V'$; parimenti $F'C' = U'V'$; conseguentemente $A'E' = F'C'$, c. d. d. — La stessa dimostrazione potrebbe farsi anche pel primo caso. Un'altra dimostrazione, basata su una semplice proprietà del tetraedro, può vedersi a p. 114 dei precitati *Elementi* di LAZZERI e BASSANI. Su questa stessa proprietà " *La sezione di un tetraedro ottenuta mediante un piano parallelo a due spigoli opposti è un parallelogramma* ", che può anche enunciarsi " *Un piano parallelo alle diagonali di un quadrilatero gobbo taglia i lati nei vertici di un parallelogramma* " e che è conseguenza quasi immediata del concetto di parallelismo, i medesimi Autori hanno pure basato una semplicissima ed elegante dimostrazione della notevole proposizione stereometrica " *Le sezioni di piramidi aventi basi ed altezze uguali, ottenute mediante piani paralleli ai piani delle basi ed equidistanti da questi, sono poligoni uguali* ", e di qui come semplice corollario hanno dedotto l' importante teorema dal punto di vista logico è l'essenziale, ed anche dal punto di vista didattico, tanto più poi per chi la geometria solida deve pur studiare; e altrettanto si dica per questioni analoghe ed in particolare per la già ricordata costruzione del triangolo isoscele relativo al pentagono e al decagono regolari, ottenuta dal DE PAOLIS indipendentemente dalle proporzioni e dall'equivalenza. E tutto questo è non solamente in armonia coll'ottimo principio suddetto, ma anche in pieno accordo, anzichè in contraddizione come vorrebbe il PALATINI, coll'altro principio (didatticamente inoppugnabile) adottato dal DE PAOLIS nei suoi *Elementi* ed esposto, riguardo al postulato delle parallele, nella precitata nota XXVII, che, riguardo all'impiego della stereometria nella planimetria, potrebbe enunciarsi analogamente così « *Riconosciuta la necessità di domandare il postulato* della esistenza dello spazio (che è fuor di dubbio il più evidentemente fondato sulla osservazione) *è meglio concederlo subito e trarne le principali conseguenze. Si potranno poi* (in uno studio complementare o superiore) *utilmente distinguere le proprietà che esisterebbero anche se il postulato non fosse ammesso* ». E non è certamente a RICCARDO DE PAOLIS, la cui immatura perdita non sarà mai abbastanza compianta, che si possono riferire le dure parole del prof. PALATINI « *È certo però che i principî si modificano a seconda dei casi e in conformità dei proprî intenti* ». È però debito nostro avvertire che lo stesso prof. Palatini, quasi pentito di averle scritte, dà termine alle sue considerazioni dichiarando di non aver inteso *con le obbiezioni mosse ad alcune asserzioni del* DE PAOLIS *di menomare il merito dell'illustre geometra, le cui coscienziose ricerche sulla geometria elementare hanno prodotto un testo che va sempre annoverato fra i migliori.*

E finalmente non crediamo neppur giusto il dire, come fa il PALATINI, che chi della Geometria solida si serve a prò di proposizioni appartenenti alla Planimetria *voglia asservire questa alla Stereometria.*

Stereometria e Planimetria, figlie entrambe del concetto di forma e dell'idea di estensione, sono scienze naturalmente congiunte, destinate a contraccambiarsi continuamente reciproco appoggio; a seconda dei casi, specialmente dal punto di vista didattico, può convenire che la prima, sorella più robusta e gagliarda, aiuti la seconda, più delicata e sottile, o la seconda aiuti alla sua volta la prima. Chi, facendo opera contraria alla loro intima essenza, nell'insegnamento elementare le vuole disgiunte, fa loro violenza e reca danno ad entrambe; al pari, del resto, di chi vuole rendere l'una serva e l'altra signora. E coll'antico metodo di trattazione della Stereometria col quale si fa quasi tutto *a furia di triangoli*, si viene appunto a far dipendere la Stereometria dal beneplacito della Planimetria. (Vedi per esempio il teorema fondamentale sulla perpendicolarità fra retta e piano — dimostrazioni di EUCLIDE, di CRELLE (*), di LEGENDRE (**) —, quello sul parallelismo di rette perpen-

« *Se due piramidi hanno basi equivalenti e altezze uguali, due loro sezioni qualunque parallele alle basi e da esse equidistanti sono pure equivalenti* », dimostrandolo così per la prima volta indipendentemente dalle proporzioni (op. c., p. 113 e 284).

(*) La dimostrazione di CRELLE è quella adottata ordinariamente (V. p. es. *Elementi* di SANNIA e D'OVIDIO, ed. 5ª, p. 345).

(**) La dimostrazione di LEGENDRE è basata sopra equivalenze relative a quadrati di lati di triangoli.

dicolari ad uno stesso piano — dimostrazioni di EUCLIDE e di BALTZER —, quello *delle tre perpendicolari* — dimostrazione di FAIFOFER — (*), quelli relativi agli angoli a lati paralleli e alla somma delle faccie di un angoloide convesso — dimostrazioni di EUCLIDE —, quello sull'equivalenza dei poligoni ottenuti sezionando piramidi aventi uguali altezze e basi equivalenti mediante piani paralleli ai piani delle basi ed equidistanti da questi — dimostrazioni di LEGENDRE (**) e di BETTI e BRIOSCHI — (***), ecc., e confronta tutte queste dimostrazioni, non sempre semplici e spesso indubitatamente artificiose, colle corrispondenti dimostrazioni naturali e facili che si possono vedere invece nelle opere precitate di DE PAOLIS e di LAZZERI e BASSANI).

Crediamo così di aver risposto alle obbiezioni del prof. PALATINI e dei professori SOLA e FERRARI.

Ma vi è un'altra obbiezione, che non può essere passata sotto silenzio; ci fu fatta, alcuni anni or sono dal prof. ing. F. RAMPONE, Preside del R. Istituto Tecnico di Alessandria, e può formularsi così « *La separazione è un progresso, dunque la fusione è un regresso* ». L'obbiezione, non si può dissimularlo, nella sua espressiva brevità, colpisce e pare inconfutabile.

Con essa si vuol dire: « *In questa questione della* fusione *è corso un equivoco. Chi la vagheggia come l'ultimo e il più sapiente prodotto dell'arte* dell'insegnamento geometrico, *esamini più attentamente la questione e troverà che la* fusione *ne è invece il primo rudimento.* Infatti il primo concetto geometrico è stato indubitatamente per l'uomo (ente ragionevole a tre dimensioni) quello dello spazio, esistente in natura; il concetto di piano, risultato di una proficua ma artificiale astrazione, ha dovuto dunque essere posteriore; e pertanto in principio, la Geometria doveva necessariamente essere una sola; solamente più tardi (le vie più semplici sono ordinariamente le più tarde a presentarsi (****)), perfezionata la facoltà di astrarre ed affinato il senso geometrico, per comodità di studio e per la facilità del tracciamento di segni per esempio sul limo delle sponde del Nilo o sulle arene delle spiaggie mediterranee, si è trovato esser cosa più opportuna, più perfezionata, più semplice, separare la geometria piana dalla solida e quella porre a fondamento di questa. *Dunque chi cerca la* fusione *invece d'andare avanti, vuole tornare indietro: e questo è quanto molti amanti della* fusione *non avevano forse mai avvertito.* « NIHIL NOVI SUB LUNA ».

Noti il lettore: tutte le parole scritte in corsivo nel capoverso precedente sono di MASSIMO D'AZEGLIO e si possono leggere in un suo opuscolo dal titolo QUESTIONI URGENTI, pubblicato coi tipi del Barbéra a Firenze nel 1861; ben inteso egli non parla di fusione e separazione di Stereometria e Planimetria, ma di .... Repubblica e Monarchia. È forse questa la prima volta che una questione matematica può trattarsi colle stesse parole relative ad una questione politica, e perciò solamente

(*) *Elementi di Geometria*, ed. 10ª, n. 581 e 582.

(**) *Éléments de Géométrie.* Paris chez F. Didot, 1823, p. 183, 184.

(***) *Appendice agli Elementi di Euclide.* Firenze, 1868, p. 415.

(****) Aforisma citato anche dal prof. PALATINI nella sua 1ª obbiezione.

ci è piaciuto riportarle testualmente; non si spaventi pertanto il lettore *purus mathematicus* senza quel che segue; quantunque l'obbiezione D'Azeglio sia della stessa forma e natura dell'obbiezione Rampone, non vogliamo qui discutere la prima, ma bensì la seconda.

Ed anche rispetto a questa, pur riconoscendo la gravità che essa può avere, ci limitiamo a domandare: Ma è proprio vero che la Geometria, in principio, fosse una sola, e la separazione sia venuta più tardi? Se, come abbiamo detto più sopra, delle due scienze sorelle, Planimetria e Stereometria, la seconda è dal punto di vista naturale e scientifico la più gagliarda e robusta, dal punto di vista cronologico non è forse a ritenersi che essa sia pure la sorella più giovane, cosicchè il vanto di essere primogenita debba spettare alla Planimetria? E nol proverebbero forse l'etimologia dello stesso nome « *Geometria* », e la nota osservazione, che con questa etimologia si collega, che la necessità di operazioni catastalitopografiche fu il primo incentivo alle ricerche geometriche? (*) Confessiamo tuttavia che non siamo in possesso di dati storici sufficienti per risolvere con sicurezza questa questione « *In geometria è più antico il metodo della fusione o quello della separazione?* ». Qualora si pervenisse a provare che l'opinione, per la quale propendiamo, della minore antichità, anzi della quasi attualità della fusione (che probabilmente, scientificamente almeno, non risale più addietro del Monge) è realmente conforme al vero, l'argomentazione antifusionistica del prof. Rampone cadrebbe immediatamente e percuoterebbe di rimbalzo i separatisti medesimi. Ma del resto, dato anche che la fusione, o per dir meglio la *non separazione,* fosse il metodo iniziale e primitivo, forsechè ogni ritorno all'antico è da considerarsi come un regresso? Forsechè i *laudatores temporis acti* hanno sempre ad essere dalla parte del torto? Per conto nostro dichiariamo che l'intima convinzione che abbiamo nella preferibilità del metodo adottato da De Paolis non scemerebbe in alcun modo, anche se i separatisti, scuola certamente antica perchè anteriore a Platone (**), riuscissero tuttavia a provare che i perfezionatori, i progressisti, i novatori sono essi, o per lo meno lo furono, e che per conseguenza i retrogradi, i rudimentali, i neòfobi sono precisamente i seguaci della *primordiale* fusione.

E con questa dichiarazione poniam termine alla presente relazione, seppure il benigno lettore permette ancora che relazione si dica questo scritto, al quale noi stessi abbiamo ritenuto conveniente preporre un titolo di battaglia « Pro Fusione » (***).

(*) *La parola Geometria*, misura della terra, *accenna ad uno scopo primitivo, ad una serie di ricerche, da cui poi è sorta la scienza dell'estensione* (De Paolis. o. c. pag. 461).

(**) *Gli antichi separarono la cognitione de piani della scienza de solidi, percioche quella chiamarono Geometria, come mostra* Platone *ne i libri politici, et questa stereometria. Ma li moderni, perchè la cognitione dell'una, et dell'altra scienza consiste intorno alle grandezze, etiandio con un nome commune l'hanno chiamata Geometria, congiungendo quelle insieme, et facendone una sola* (Commandino, o. c. retro pag. 205).

(***) E la battaglia non sarà perduta se varrà ad indurre qualche nostro collega, finora separatista, a sperimentare la fusione; in questo caso *provare provvisoriamente* vorrà dire, potendo, *adottare definitivamente,* poichè di questo siamo certi " fra gli avversari della fusione non ve ne è uno che tale sia diventato per averne fatto una conveniente e sfavorevole esperienza ". Ed è

Come relatori avremmo dovuto limitarci, dopo riassunte le risposte alla questione V, a porre sotto agli occhi dei fusionisti e dei separatisti le seguenti parole « *Un cambiamento spesso non è un progresso, come dice una parte degli uomini, nè un regresso, come dice l'altra, non un vantaggio nè una rovina, ma un cambiamento. Null'altro* ». (*)

Brescia 14 Novembre 1897.

E. De Amicis.

---

appunto nella speranza di poter in qualche modo contribuire a far sì che del metodo della fusione siano fatte in pratica più ampie e numerose prove, che allo scritto presente abbiamo dato un'estensione maggiore di quella che sarebbe convenuta ad una semplice relazione sulle poche risposte pervenute al Comitato dell'*Associazione Mathesis* intorno alla *Questione della fusione* della geometria piana colla solida. Ma, non ostante siffatta estensione preghiamo il lettore di non voler considerare questo articolo come una relazione intorno a quanto fu scritto su questo dibattuto argomento e tanto meno poi come uno studio scientifico-didattico apposito e completo sulla predetta *Questione*. In un tale studio, che avrebbe dovuto esser fatto da chi avesse voluto dare esauriente risposta alla *Questione* medesima (e che ci auguriamo sia fatto in seguito, al più presto) converrebbe anzitutto che fossero nettamente separate due cose:

1°. — La possibilità scientifica di separare certe cose da altre, e la necessità scientifica di riunirle; poichè è necessario che ogni teorema sia enunciato dopo i postulati di cui ha bisogno nella dimostrazione.

2°. — La convenienza didattica di riunire o di separare.

Il primo punto specialmente è di massima importanza, perchè ad esso è subordinato il secondo, e perchè, come lo studio che si è fatto in questo secolo sulla teoria delle parallele, o *Geometria assoluta*, non è che l'analisi di un postulato, così lo studio che attualmente si va facendo sulla fusione o separazione delle geometrie piana e solida, sotto l'aspetto scientifico è l'analisi di un altro postulato, il quale la richiede anche più acuta e più vasta e profonda.

(*) Alan-René Le Sage, *Turcaret*, versione italiana con prefazione di Gallo Marcucci. Roma, 1884, p. 13.

(Estratto dal *Bollettino dell'Associazione Mathesis*).

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI

379 380 382 385 389 390 391 393 394 395 396

---

379. *Se* A, A'; B, B'; C, C'; D, D' *sono quattro coppie di elementi coniugati in una involuzione quadratica* I, *i coniugati di* A', B', C' *rispettivamente nelle involuzioni* $(B, C; D, D')$, $(C, A; D, D')$, $(A, B; D, D')$ *sono un medesimo elemento* E; *e i coniugati rispettivi di* A, B, C *nelle involuzioni* $(B', C'; D, D')$, $(C', A'; D, D')$, $(A', B'; D, D')$ *coincidono nell'elemento* E' *coniugato ad* E *nella* I.

RETALI.

Risoluzione geometrica del Prof. S. Catania e del sig. Guido Fubini.

Siano P, Q, R i coniugati di A', B, C' rispettivamente nelle involuzioni indicate nell'enunciato. Dalla prima involuzione si ha

$$DD'BA' \barwedge D'DCP; \tag{1}$$

dalla seconda

$$DD'AB' \barwedge D'DCQ, \tag{2}$$

e dalla I

$$DD\,BA' \barwedge D\,DB'A.$$

Ma $D'DB'A \barwedge DD'AB$, quindi $DD'BA' \barwedge DD'AB'$, e perciò dalle (1) e (2) si deduce

$$D'DCP \barwedge D'DCQ,$$

e quindi $P \equiv Q$.

Dalla 2ª e 3ª involuzione si hanno nello stesso modo:

$D'CB' \barwedge D'DDAQ$, $D'DC'B \barwedge DD\,RA$, da cui $D'DAQ \barwedge DD'RA \barwedge D'DAR$,

e perciò $Q \equiv R$.

Si dica E il punto in cui coincidono P, Q, R.

Si dimostra similmente che in un medesimo punto E' coincidono i coniugati rispettivi di A, B, C nelle altre tre involuzioni indicate nell'enunciato.

Dalle due involuzioni

$$(B, C; D, D'; A', E)\ ,\ (B', C'; D, D'; A, E')$$

si trae $BDCA' \barwedge CD'BE$, $B'D'C'A \barwedge C'DB'E'$. I primi membri sono proiettivi a causa dell'involuzione I; lo saranno perciò i secondi, cioè

$$CD'BE \barwedge C'DB'E',$$

il quale risultato mostra che E ed E' sono coniugati nella I.

Risoluzione analitica del Prof. A. Barozzini di Mirandola.

Sia il caso d'una involuzione di punti; le ascisse di $A, A', B\ldots$ siano $a, a', b\ldots$ sarà allora

$$a\,a' = b\,b' = c\,c' = d\,d' = r^2.$$

L'involuzione $(B, C; D, D')$ ha per equazione

$$\begin{vmatrix} x\,y & x+y & 1 \\ b\,c & b+c & 1 \\ r^2 & d+d' & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

e il coniugato di A′ ha un'ascissa x data dall'equazione

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} r^2 x & a x + r^2 & a \\ b c & b + c & 1 \\ r^2 & d + d & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Così i coniugati di B′, C′ nelle (C,A; D,D′), (A,B; D,D′) hanno per ascisse rispettive quelle date dalle equazioni

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} r^2 x & b x + r^2 & b \\ c a & c + a & 1 \\ r^2 & d + d' & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad\qquad (3) \qquad \begin{vmatrix} r^2 x & c x + r^2 & c \\ a b & a + b & 1 \\ r^2 & d + d' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Addizionando le (1), (2), (3) ho un'equazione che dà

$$(4) \qquad x = \frac{r^4 - r^2 (b c + c a + a b) + a b c (d + d')}{r^2 [d + d' - (a + b + c)] + a b c}.$$

Si può verificare che tale valore soddisfa le equazioni (1), (2), (3) e dà l'ascissa del punto E. Quella del punto E′ si ha mutando nella (4) le a, b, c, nelle $a' \, b' \, c'$ o nelle $\frac{r^2}{a}, \frac{r^2}{b}, \frac{r^2}{c}$, e si ha

$$x' = \frac{r^2}{x}.$$

Quindi E, E′ sono coniugati nella I. c. d. d.

In modo analogo, si procederebbe, se si trattasse d'una involuzione di raggi o d'una involuzione di piani.

380. *Determinare lo inviluppo d'un cerchio, il cui centro percorre una parabola data, e che tocca una retta parallela alla direttrice. Trovare il punto di contatto del cerchio mobile col suo inviluppo, e dimostrare che quest'ultimo è pure lo inviluppo delle rette simmetriche della retta data rispetto alle tangenti della parabola.*

Retali.

Risoluzione del Prof. A. Barozzini di Mirandola.

Siano tracciate una parabola, la sua direttrice d, una retta r parallela alla direttrice, un cerchio col centro M sulla parabola e tangente alla retta r; conduco per M una parallela all'asse della parabola sino ad incontrare le rette d, r rispettivamente in D, R. Se unisco il fuoco F della parabola con M, e P è il punto d'incontro del circolo colla retta FM, è facile vedere che è

$$FP = DR,$$

perchè M dista ugualmente dal fuoco e dalla direttrice. Il circolo M è dunque sempre tangente ad un cerchio di centro F e raggio DR (distanza della direttrice dalla parallela r data). Tale inviluppo passa anche pei punti (reali o immaginari) in cui r taglia la parabola.

Se conduco la perpendicolare a FP in P fino ad incontrare in L la r, dai due triangoli uguali LMP, LMR deduco che PL è simmetrica ad r rispetto ad LM; che LM è tangente alla parabola, perchè passa per M e vi biseca l'angolo formato dal raggio focale colla parallela all'asse e quindi il circolo di centro F e raggio FP è pure inviluppo delle rette PL c. d. d.

Altre risoluzioni del sig. G. Fubini e del Dott. G. Cardoso-Laynes.

382. *Luogo dei fuochi delle parabole che toccano una parabola data ed hanno per direttrice una medesima retta, parallela alla direttrice della parabola data.*

RETALI.

Risoluzione del Prof. Giulio Cardoso-Laynes di Livorno.

Conservando le notazioni adottate nella risoluzione della questione 380, supponendo che la parabola data sia quella di cui si parla nella detta questione e la retta data sia la r, osserviamo che dall'eguaglianza dei triangoli LMP e LMR segue che ML è bisettrice dell'angolo PMR. Perciò, se immaginiamo che una parabola tangente in M alla parabola data, cioè avente per tangente ML, abbia per direttrice r, il suo fuoco dovrà trovarsi su MP per il noto teorema " la tangente in un punto M di una parabola è la bisettrice dell'angolo formato dal raggio focale passante per M con la parallela condotta da M all'asse ". E poichè inoltre è $MR = MP$ il punto P sarà il fuoco della parabola variabile. Ma quando M scorre sulla parabola data, P si muove sul circolo che ha per centro il fuoco F e per raggio la distanza DR delle rette d, r, perciò questo circolo è il luogo cercato.

Altra risoluzione analitica del medesimo ed altra geometrica del sig. G. Fubini.

385. *Dimostrare l'uguaglianza*

$$\sqrt[7]{29+13\sqrt{5}}+\sqrt[7]{29-13\sqrt{5}}=\sqrt[7]{2}.$$

GÉLIN.

Risoluzione del sig. Giuseppe Cavacchioli.

Si ha identicamente sviluppando

$$(1+\sqrt{5})^7 = 1+7\sqrt{5}+105+175\sqrt{5}+875+525\sqrt{5}+875+125\sqrt{5}$$
$$=1856+832\sqrt{5}=64(29+13\sqrt{5})=\frac{2^7}{2}(29+13\sqrt{5}),$$
$$(1-\sqrt{5})^7=\frac{2^7}{2}(29-13\sqrt{5}),$$

quindi

$$29+13\sqrt{5}=\frac{2(1+\sqrt{5})^7}{2^7}; \quad 29-13\sqrt{5}=\frac{2(1-\sqrt{5})^7}{2^7};$$

e perciò

$$\sqrt[7]{29+13\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt[7]{2},$$
$$\sqrt[7]{29-13\sqrt{5}}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\sqrt[7]{2};$$

d'onde

$$\sqrt[7]{29+13\sqrt{5}}+\sqrt[7]{29-13\sqrt{5}}=\sqrt[7]{2}.$$

Altra risoluzione del Prof. Sarozzini.

389. *Se* N *e* k *sono numeri interi ed* $r > 1$, *si ha* $N^{6k+r} \equiv N^r$ (modulo 9).

BONOLIS.

Risoluzione del sig. Attilio Crepas.

Si ha

(1) $$N^{6k+r} - N^r = N^r(N^{6k} - 1).$$

Distinguiamo due casi:

1°. Sia N della forma $3X$. Allora N^r, purchè sia $r > 1$, è divisibile per 9, e quindi la (1) è divisibile per 9, e perciò, in tal caso, si ha

$$N^{6k+r} \equiv N^r \text{ (mod. 9)}.$$

2°. Sia N primo con 9. Sarà allora N^k primo con 9, e quindi (V. questione 372) la sesta potenza di N^k è congrua ad 1 rispetto al modulo 9, e perciò, anche in tal caso, è

$$N^{6k+r} \equiv N^r \text{ (mod. 9)}.$$

390. *La quinta potenza d'ogni numero intero è congrua a* 0, *o a* ± 1 *rispetto al modulo 11.*

BONOLIS.

Risoluzione del sig. Attilio Crepas.

Qualsiasi numero N o è divisibile per 11 o è primo con 11.

Nel 1° caso abbiamo

$$N^5 \equiv 0 \text{ (mod. 11)}.$$

Nel 2° caso, pel teorema di Fermat, si ha

$$N^{10} \equiv 1 \text{ (mod. 11)};$$

e quindi

$$N^5 \equiv \pm 1 \text{ (mod. 11)}.$$

391. 1°. *Se una conica, inscritta nel triangolo* ABC, *ha un fuoco nel punto* H *d'incontro delle altezze, ha l'altro nel centro del cerchio circoscritto ad* ABC.

2°. *Se una conica, inscritta nel triangolo* ABC, *ha un fuoco nel centro* D *del cerchio inscritto ad* ABC, *è un cerchio.*

3°. *Se una conica, inscritta in* ABC, *ha un fuoco nel baricentro* G *di* ABC, *vuolsi sapere quale è il rapporto delle distanze di due vertici di* ABC *dalla retta che unisce il terzo vertice al secondo fuoco della conica.*

FUBINI.

Risoluzione del sig. Prof. Retali.

I teoremi 1° e 2° sono evidenti, perchè i fuochi di una conica centrale inscritta nel triangolo ABC son coniugati isogonali rispetto al triangolo e; 1° il coniugato isogonale dell'ortocentro è il centro del cerchio circoscritto; 2° il centro del cerchio inscritto è coniugato isogonale a se stesso. Quanto al 3° basta osservare che il coniugato isogonale del baricentro G è il punto di Lemoine L del triangolo ABC: ne segue che il rapporto p. es. delle distanze dei vertici A e B dalla retta CL è $b^2 : a^2$.

Altra risoluzione del sig. Radolfe.

Risoluzione e generalizzazione delle questioni 393, 394 del sig. Eugenio Strocchi.

Col simbolo $X_{m,k,r}$ indicheremo il numero delle disposizioni a k a k di m elementi $a_1, a_2, \ldots a_m$, nelle quali nei primi r posti non vi è nessun elemento che occupi il posto dato dal proprio indice; qualche volta col simbolo stesso indicheremo per brevità le medesime disposizioni.

Si prendano gli $m-1$ elementi $a_1 a_2 \ldots a_{r-1} a_{r+1} \ldots a_m$, e se ne considerino le disposizioni a $k-1$ a $k-1$, in numero di $X_{m-1, k-1, r-1}$, nelle quali nei primi $r-1$ posti nessun elemento occupa il posto dato dal proprio indice; in ognuna di queste si ponga a_r all'r^o posto; in tal modo si hanno tutte le disposizioni di m elementi a k a k in cui nei primi $r-1$ posti nessun elemento occupa il posto dato dal proprio indice, mentre a_r è all'r^o posto.

Per avere le $X_{m,k,r}$ bisogna evidentemente escludere dalle $X_{m,k,r-1}$, quelle che contengono a_r all'r^o posto; ma si è visto che queste sono in numero di $X_{m-1, k-1, r-1}$, quindi si ha

$$(1) \qquad X_{m,k,r} = X_{m,k,r-1} - X_{m-1,k-1\,r-1},$$

dove si suppone evidentemente $m \geqq k \geqq r$.

È facile persuadersi che è:

$$X_{m,k,1} = D_{m,k} - D_{m-1,k-1} \quad \text{se } k > 1$$
$$X_{m,k,1} = D_{m,k} - 1 \quad \text{se } k = 1.$$

Avremo dunque, mediante la (1),

$$X_{m,k,2} = D_{m,k} - D_{m-1,k-1} - (D_{m-1,k-1} - D_{m-2,k-2}) = \\ = \binom{2}{0} D_{m,k} - \binom{2}{1} D_{m-1,k-1} + \binom{2}{2} D_{m-2,k-2}$$

$$X_{m,k,2} = D_{m,k} - D_{m-1,k-1} - (D_{m-1,k-1} - 1) = \\ = \binom{2}{0} D_{m,k} - \binom{2}{1} D_{m-1,k-1} + \binom{2}{2} . 1$$

a seconda che è k maggiore od eguale a 2.

Così procedendo, con un calcolo molto facile si giunge alle seguenti formole generali:

$$X_{m,k,h} = \binom{h}{0} D_{m,k} - \binom{h}{1} D_{m-1,k-1} + \binom{h}{2} D_{m-2,k-2} \ldots + (-1)^h \binom{h}{h} D_{m-h,k-h}$$

$$X_{m,k,h} = \binom{h}{0} D_{m,k} - \binom{h}{1} D_{m-1,k-1} + \binom{h}{2} D_{m-2,k-2} \ldots + (-1)^h \binom{h}{h} . 1$$

a seconda che è $k > h$ oppure $k = h$.

Queste due formole possono unirsi in una sola ponendo $D_{s,0} = 1$, qualunque sia s.

Possiamo dunque enunciare il seguente

Teorema. — *Il numero delle disposizioni a* k *a* k *di* m *elementi* $a_1 \ldots a_m$, *nelle quali nei primi* h *posti nessun elemento occupa il posto dato dal proprio indice è*

$$\sum_{r=0}^{r=h} (-1)^r \binom{h}{r} D_{m-r,k-r}.$$

Nella dimostrazione di questo teorema è inclusa quella del

Corollario 1°. — *Il numero delle disposizioni di* m *elementi* $a_1 \dots a_m$, *a* k *a* k, *nelle quali nessun elemento occupa il posto designato dal proprio indice è:*

$$\sum_{r=0}^{r=k} (-1)^r \binom{k}{r} D_{m-r,k-r}.$$

Si ha poi finalmente, facendo $h = k = m$, il

Corollario 2°. — *Il numero delle permutazioni di* m *elementi* $a_1 \dots a_m$, *nelle quali nessun elemento occupa il posto designato dal proprio indice, è*

$$m! \sum_{r=0}^{r=m} (-1)^r \frac{1}{r!}$$

Ora siamo in grado di risolvere la seguente quistione:

Entro un'urna sono m *palle numerate* $P_1, P_2 \dots P_m$, *e se ne estraggono* k, *una alla volta. Probabilità che una almeno sorta nell'ordine dato dal proprio numero.*

Estraendo k palle, e tenendosi conto dell'ordine, noi potremo formare egualmente una qualunque delle disposizioni a k a k delle m palle, cosicchè i casi possibili sono in numero di $D_{m,k}$. Sono favorevoli quei casi, in cui almeno una palla sorta nell'ordine dato dal proprio numero; tali casi sono (1° Cor.) in numero di

$$D_{m,k} - \sum_{r=0}^{r=k} (-1)^r \binom{k}{r} D_{m-r,k-r}$$

La probabilità cercata è dunque

$$\frac{D_{m,k} - \sum_{r=0}^{r=k} (-1)^r \binom{h}{r} D_{m-r,k-r}}{D_{m,k}} =$$

$$= \frac{k}{m} - \frac{k(k-1)}{m(m-1)} \frac{1}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)}{m(m-1)(m-2)} \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{k(k-1)\dots[k-(k-1)]}{m(m-1)\dots[m-(m-1)]} \frac{1}{k!}.$$

Se si fa $k = m$, la probabilità diventa

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{m+1} \frac{1}{m!}.$$

A questo risultato si poteva giungere applicando direttamente il 2° corollario.

Si noti che se nell'ultimo risultato si cambia m in $m+1$ la probabilità aumenta o diminuisce secondo che m è dispari o pari; cosicchè aumentando m successivamente di una unità, la probabilità oscilla, ossia subisce degli aumenti e delle diminuzioni.

Se si fa $m = \infty$, la probabilità è data dalla somma s della serie

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots$$

Tale serie è [Cesàro, *Analisi Alg.* pag. 128, § 9] convergente, ed ha per somma

$$1 = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} = \frac{1,718281828459045\dots\dots}{2,718281828459045\dots\dots}.$$

Si può trovare questo valore di s, anche osservando che essa è il limite comune delle due serie

$$\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \dots$$

$$\frac{1}{1!} - \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) - \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) - \dots$$

I termini della 1ª serie sono tutti positivi, quelli tra parentesi della 2ª sono pure positivi, dunque la probabilità per $m = \infty$ è compresa tra 0 e 1; non solo, ma è sempre compresa tra la somma di un numero qualunque di termini della 1ª serie e la somma di quanti si vogliano termini della 2ª.

La somma dei primi 4 termini della 1ª serie è $\frac{25447}{40320} = 0{,}631125\ldots$

" " 5 " " 2ª " $\frac{229024}{362880} = 0{,}631128\ldots$

Cosicchè la probabilità è compresa tra 0,631125 e 0,631129 e si può prendere eguale a 0,631125 coll'approssimazione di $\frac{4}{10^6}$ per difetto.

Abbiamo così risoluto la seguente quistione proposta dal Periodico:

393. *Entro un'urna sono* n *palle numerate* $(P_1 P_2 \ldots P_n)$ *e si estraggono tutte ad una alla volta. Probabilità che una almeno sorta nell'ordine dato dal proprio indice. Caso di* $n = \infty$.

BAROZZINI.

Possiamo ancora risolvere la seguente quistione:

Date due urne contenenti ciascuna m *palle numerate, se ne estraggono due alla volta, una per ciascuna urna. Probabilità di estrarre insieme due palle collo stesso numero.*

Quando avremo levato tutte le palle, avremo formato tanto con quelle di un'urna, quanto con quelle dell'altra, una permutazione delle m palle. È dunque possibile di associare fra loro due permutazioni qualunque delle m palle; quindi il numero dei casi possibili è $(m!)^2$.

Si prenda una permutazione qualunque delle m palle della 1ª urna, e sia $a_1\, a_2 \ldots a_m$; tale permutazione potrà unirsi ad una qualunque delle permutazioni delle m palle date, ossia delle stesse palle $a_1, a_2, \ldots a_m$.

Si avrà un caso favorevole ogni volta che alla permutazione presa ne assoceremo una che contenga qualche elemento nel posto dato dal proprio indice: ora tali permutazioni sono in numero di $m! - m! \sum_{r=0}^{r=m} (-1)^r \frac{1}{r!}$. Cosicchè il numero totale dei casi favorevoli è

$$\frac{(m!)^2 \left[1 - \sum_{r=0}^{r=m} (-1)^r \frac{1}{r!}\right]}{(m!)^2} =$$

$$= 1 - \sum_{r=0}^{r=m} (-1)^r \frac{1}{r!} = \sum_{r=1}^{r=m} (-1)^{r+1} \frac{1}{r!}$$

Le probabilità domandate dalle questioni ultima e penultima sono dunque eguali.

Se nell'ultima probabilità trovata si fa $m = 40$, si ha la soluzione della quistione seguente proposta dal Periodico:

394. *Dati due mazzi di carte, se ne estraggono due alla volta, una per ogni mazzo. Probabilità che sortano insieme due carte uguali.*

BAROZZINI.

Altre risoluzioni del sig. D'Ormea.

395. *Siano* c *e* c′ *due circoli posti nello stesso piano, che abbiano per centri rispettivamente* C *e* C′, *e s' incontrino in due punti* H, K. *Immaginando un triangolo variabile* MNP, *tale che i lati* MN, MP, NP *passino rispettivamente per* H, C, C′ *ed i vertici* M, N *siano rispettivamente su* c *e* c′, *dimostrare che il luogo del terzo vertice* P *è il circolo che passa per* C, C′ *e* K.

CARDOSO-LAYNES.

Risoluzione del sig. Eugenio Strocchi.

I diametri di c e c' passanti per K incontrino i due cerchi rispettivamente in M′, N′; gli angoli KHM′, KHN′ essendo retti, le corde M′H, HN′ sono per diritto, ossia K è un punto del luogo.

Consideriamo una posizione qualunque di P e distinguiamo due casi, a seconda che P cade o no dalla stessa parte di K rispetto alla retta CC′.

Nel 1° caso sia Q il punto d'incontro dei segmenti M′K, NP (o a seconda del caso N′K, MP).

Si ha evidentemente

$$\widehat{MHM'} = \widehat{NHN'},$$
$$\widehat{MCM'} = 2\,.\,\widehat{MHM'}, \quad \widehat{NCN'} = 2\,.\,\widehat{NHN'}.$$

Quindi

$$\widehat{PCQ} = \widehat{MCM'} = \widehat{NC'N'} = \widehat{KC'Q}.$$

Ed essendo $\widehat{CQP} = \widehat{C'QK}$, risulta

$$\widehat{MPN} = \widehat{M'KN'},$$

ossia P si trova sul circolo dei tre punti C, C′, K.

Nel 2° caso, l'angolo $\widehat{NC'N'}$ è eguale al doppio del supplemento di $\widehat{NHN'}$, ossia al doppio di $\widehat{MHM'}$.

Ma anche $\widehat{MCM'}$ è doppio di $\widehat{MHM'}$, dunque

$$\widehat{NC'N'} = \widehat{MCM'} = \widehat{PCK}.$$

Dunque gli angoli $\widehat{PCK}$, $\widehat{PC'K}$ sono supplementari, quindi sono supplementari anche gli altri $\widehat{CPC'}$, $\widehat{CKC'}$; ossia P è un punto del cerchio passante per C, C′, K.

Altre risoluzioni della signora Dott. Ersilia Bisson e dei sigg. E. Stretti, F. Celestri, L. D'Ormea, Radolfe e M. Bello.

396. *Sia data la parabola* $x^2 + 2hy(1 + \cos 2\alpha) - 2hx \operatorname{sen} 2\alpha = 0$, *che ha l'asse di figura parallelo all'asse delle* y. *Dimostrare, essendo gli assi ortogonali,*

1° *che* α *è l'angolo che la tangente alla parabola nell'origine forma con l'asse positivo delle* x;

2° *che staccando sull'asse delle* y, *a partire dall'origine, un segmento* OA = h, *la parallela all'asse delle* x *condotta da* A *è la direttrice della parabola;*

3° *descrivendo su di* OA *come diametro una semicirconferenza che incontri in* B *la tangente alla curva nell'origine, la parallela condotta da* B *all'asse delle* x *è la tangente alla parabola nel suo vertice;*

4° *se questa tangente incontra in* C *l'asse delle* y, *prendendo il segmento* BD *uguale ed opposto a* BC, *sarà* D *il vertice della parabola;*

5° *congiungendo* A *con* B *e prolungando questo segmento* AB *di altrettanto in* F, *sarà* F *il fuoco della parabola;*

6° *il luogo dei vertici di tutte le parabole, che si ottengono dall'equazione data lasciando inalterato* h *e facendo variare* α *con legge di continuità, è una ellisse che ha per asse minore il segmento* OA = h, *e l'asse maggiore uguale a* 2h;

7° *in questa stessa ipotesi di* α *variabile ed* h *costante il luogo dei fuochi di tutte le parabole è un circolo di centro* O *e raggio* h;

8° *nella stessa ipotesi l'inviluppo di tutte le parabole è un'altra parabola avente il vertice in* A *ed il fuoco in* O;

9° *il luogo dei vertici di tutte le parabole, che si ottengono dalla equazione data lasciando invariata* α *e facendo variare* h *con legge di continuità, è una retta che passa per l'origine e divide per metà le ordinate della tangente alla parabola nell'origine;*

10° *nella stessa ipotesi il luogo dei fuochi di tutte le parabole è una retta che passa per l'origine ed è perpendicolare alla retta che forma un angolo uguale a* 2α *con l'asse positivo delle* x;

11° *nella stessa ipotesi l'inviluppo di tutte le parabole è la retta che passa per l'origine e forma un angolo uguale ad* α *con l'asse positivo delle* x.

BONOLIS.

Risoluzione del Prof. Giulio Cardoso-Laynes.

I. La tangente nell'origine delle coordinate ad una conica

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0 \tag{1}$$

è

$$a_{13}x + a_{23}y = 0\,,$$

quindi nel nostro caso, essendo

$$x^2 + 2hy(1+\cos 2\alpha) - 2hx \operatorname{sen} 2\alpha = 0 \tag{2}$$

l'equazione della conica, quella della tangente nell'origine sarà:

$$y(1+\cos 2\alpha) - x \operatorname{sen} 2\alpha = 0$$

cioè

$$y = x \operatorname{tg} \alpha, \tag{3}$$

ciò che prova la 1ª parte della questione.

II. La direttrice della (1) è data da

$$A_{13}x + A_{23}y = \frac{A_{11} + A_{22}}{2},$$

dove con A_{rs} s'indicano gli elementi reciproci di a_{rs} nel discriminante della (1), perciò nel nostro caso essendo

$$A_{11} = -h^2(1+\cos 2\alpha)^2, \quad A_{22} = -h^2 \operatorname{sen}^2 2\alpha, \quad A_{13} = 0, \quad A_{23} = -h(1+\cos 2\alpha),$$

avremo

$$y = \frac{h\left\{(1+\cos 2\alpha)^2 + \operatorname{sen}^2 2\alpha\right\}}{2(1+\cos 2\alpha)} \qquad \text{cioè} \qquad y = h$$

dunque la direttrice della (2) è la parallela condotta dal punto $A \equiv (0, h)$ all'asse delle x.

III. Il circolo che ha per diametro OA, ha per equazione

$$x^2 + y^2 - hy = 0\,. \tag{4}$$

Questo incontra la retta (3) nei punti le cui ascisse son radici dell'equazione

$$x^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha) = hx \operatorname{tg}\alpha,$$

$$\text{cioè} \quad x_1 = 0 \qquad \text{e} \quad x_2 = h \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$

e perciò le ordinate corrispondenti sono

$$y_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad y_2 = h \operatorname{sen}^2 \alpha .$$

Dunque il circolo (4) e la retta (3), oltre che nell'origine, s'incontrano nel punto B che ha per coordinate

(5)
$$x = h \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha , \qquad y = h \operatorname{sen}^2 \alpha .$$

Ora osserviamo che l'asse della parabola (1) è dato da

$$a_{11} x + a_{12} y + a_{13} + \frac{A_{13}}{a_{11} + a_{22}} = 0$$

cioè nel nostro caso,

(6)
$$x = h \operatorname{sen} 2\alpha ,$$

e perciò, dovendo il vertice D essere il punto d'incontro (a distanza finita) della (6) con la (2), avrà per coordinate

(7)
$$x = h \operatorname{sen} 2\alpha , \qquad y = h \operatorname{sen}^2 \alpha ;$$

ed allora facilmente si vede che la tangente nel vertice D è la

$$y = h \operatorname{sen}^2 \alpha$$

la quale, come si vede dalla (5) è la parallela condotta da B all'asse delle x.

IV. La tangente nel vertice incontra l'asse delle y nel punto $C \equiv (0, h \operatorname{sen}^2 \alpha)$. Dalle (5) (7) è evidente che B è il punto medio di CD.

V. Sia $F \equiv (x_0, y_0)$ il fuoco della parabola. Poichè il vertice D ha per coordinate le (7), ed il punto d'incontro dell'asse della parabola con la direttrice $y = h$ ha per coordinate $(h \operatorname{sen} 2\alpha, h)$ avremo

(8)
$$x_0 = h \operatorname{sen} 2\alpha ,$$

e y_0 deve essere tale che sia $h \operatorname{sen}^2 \alpha = \dfrac{h + y_0}{2}$, cioè

(8')
$$y_0 = - h \cos 2\alpha .$$

Le coordinate dei fuochi possono anche trovarsi direttamente per mezzo delle note equazioni

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{y}\right)^2 = (a_{11} - a_{22}) f(x, y) , \qquad \left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = a_{12} f(x, y)$$

che nel nostro caso divengono rispettivamente

$$(x - h \operatorname{sen} 2\alpha)^2 - h^2 (1 + \cos 2\alpha)^2 = x^2 + 2hy (1 + \cos 2\alpha) - 2hx \operatorname{sen} 2\alpha$$

e

$$(x - h \operatorname{sen} 2\alpha) (1 + \cos 2\alpha) h^2 = 0 .$$

La seconda infatti dà subito $x = h \operatorname{sen} 2\alpha$, e la 1ª che per la 2ª può facilmente ridursi alla forma

$$2y (1 + \cos 2\alpha) - h \operatorname{sen}^2 2\alpha + h (1 + \cos 2\alpha)^2 = 0$$

dà

$$y = - h \cos 2\alpha .$$

Ora osserviamo che essendo $A \equiv (0, h)$ e $F \equiv (h \operatorname{sen} 2\alpha, - h \cos 2\alpha)$ il punto B le cui coordinate son date dalla (5) è evidentemente il punto medio di AF.

VI. Eliminando α dalle (7) si ha

$$\frac{x^2}{h^2} = \frac{4y (h - y)}{h^2}$$

cioè

$$x^2 + 4y^2 - 4hy = 0$$

la quale equazione rappresenta un ellisse di centro $\left(0, \frac{h}{2}\right)$. Trasportando l'origine degli assi in questo punto con una semplice traslazione, l'equazione precedente diviene

$$\frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{h}{2}\right)^2} = 1,$$

dalla quale si vede chiaramente che le lunghezze degli assi sono rispettivamente $2h$ e h.

VII. Eliminando invece α dalle (8), (8′) che dànno le coordinate dei fuochi, si ha

$$x^2 + y^2 = h^2$$

cioè l'equazione del circolo di raggio h, che ha il centro nell'origine.

VIII. Vediamo ora qual'è l'inviluppo delle parabole al variare di α. Dalla (2) si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = -4\,hy \operatorname{sen} 2\alpha - 4\,hx \cos 2\alpha.$$

L'equazione $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ dà $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{x}{y}$

e quindi

$$\cos 2\alpha = \pm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \operatorname{sen} 2\alpha = \mp \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e sostituendo questi valori nella (2) si ha

$$x^2 + 2hy \pm 2h \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

cioè

$$x^4 + 4\,hx^2 y - 4\,h^2 x^2 = 0$$

la quale si scinde nelle due seguenti

$$x^2 = 0$$
$$x^2 + 4\,hy - 4h^2 = 0.$$

Quest'ultima rappresenta una parabola. Trasportando con una traslazione l'origine in $(0, h)$ la precedente equazione diviene

$$x^2 = -4\,hy$$

la quale ci mostra che A è il vertice della parabola e che, il parametro essendo $2h$, il fuoco sarà alla distanza h dal vertice, e poichè tale distanza va contata nel senso negativo delle ordinate, il fuoco sarà in O.

IX. Dalle (7) eliminando h si ha $\frac{x}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{y}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$ cioè $x \operatorname{sen} \alpha - 2y \cos \alpha = 0$, da cui

$$y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

X. Dalle (8), (8′) eliminando h, si ha invece $\frac{x}{\operatorname{sen} 2\alpha} + \frac{y}{\cos 2\alpha} = 0$ cioè

$$y = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha}\, x.$$

XI. Finalmente dalla (2) si ha

$$\frac{\partial f}{\partial h} = 2y\,(1 + \cos 2\alpha) - 2x \operatorname{sen} 2\alpha$$

e perciò la $\frac{\partial f}{\partial h} = 0$ ci dà

$$y = x \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = x \operatorname{tg} \alpha.$$

Altra risoluzione del sig. Radolfe.

QUISTIONI PROPOSTE

354. (*) Dati in un piano due cerchi, la conica k^2 avente per fuochi i loro centri, e inscritta nel quadrilatero delle tangenti nei punti al finito comuni, è bitangente al cerchio radicale dei cerchi dati: il luogo dei punti di mezzo delle corde (reali o ideali), che le tangenti di k^2 staccano nei due cerchi, è il cerchio radicale.

381. (*) Due parabole omofocali hanno le direttrici parallele, ed r è la bisettrice della striscia formata da queste direttrici: dimostrare che lo inviluppo delle rette simmetriche di r rispetto a una tangente variabile dell'una o dell'altra parabola è un medesimo cerchio

V. Retali.

397. Un determinante D_n di ordine n, in cui un termine qualunque $a_{r,s}$ è nullo, se r ed s differiscono tra loro per più che un'unità, diventa $(-1)^n D_n$, se si cambiano di segno gli elementi della diagonale principale. Se n è dispari ed i termini principali sono anch'essi nulli, il determinante D_n è nullo.

G. Fubini.

398. Se A, B, C sono i punti di fuga di 3 rette 2 a 2 ortogonali sopra un piano σ d'una rappresentazione prospettiva, e sono rispettivamente O, R il centro ed il raggio del cerchio di distanza, si ha identicamente

$$\frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{1}{\overline{OB}^2} + \frac{1}{\overline{OC}^2} = \left(\frac{1}{R}\right)^2.$$

In che senso questa quistione si può considerare come un corollario della quistione 293?

A. Del Re.

399. Un punto A percorre una curva $f(x, y) = 0$; un altro punto B si muove in modo che restino costanti la distanza BA e l'angolo che il raggio vettore BA fa colla tangente della traiettoria di B.

Si domanda in qual modo si può determinare 1° l'equazione della traiettoria di B, 2° il rapporto delle velocità di B ed A.

Si studi particolarmente il caso in cui A percorre una retta con moto uniforme.

(Questo problema si presenta nel caso che una nave voglia inseguirne un'altra, mantenendosi a distanza determinata da essa e rilevandola sotto un angolo determinato).

400. Un punto A percorre una curva $f(x, y) = 0$ con velocità V. Un punto B percorre con velocità V' una curva tale che in ogni istante la tangente in B passi per il punto A. Si domanda come si possa trovare l'equazione della traiettoria di B. Si studi il caso particolare in cui A percorre una retta o altri casi particolari.

G. Lazzeri.

(*) Il prof. Barozzini scrisse alla Direzione, notando che gli enunciati delle quistioni 354, 381 erano inesatti; contemporaneamente l'autore delle medesime prof. Retali inviò gli enunciati rettificati, che qui publichiamo.

(Nota del Direttore).

401. Determinare lo inviluppo di un cerchio, il cui centro percorre una curva piana C, e che tocca una retta fissa r del suo piano: trovare il punto di contatto del cerchio mobile col suo inviluppo; e dimostrare che quest'ultimo è pure lo inviluppo delle rette simmetriche di r rispetto alle tangenti di C. Esaminare il caso particolare in cui C è una conica.

V. RETALI.

402. Il luogo geometrico del vertice di un triangolo, di cui la base rimane fissa e nel quale gli angoli ad essa adiacenti differiscano costantemente di 90°, è una iperbole equilatera.

E. PICCIOLI.

403. Sieno c e c' due circoli posti nello stesso piano, che s'incontrino in due punti H e K.

Considerando un triangolo variabile AMB, il cui lato AB passi per H e gli altri due lati AM, BM sieno tangenti rispettivamente ai circoli c e c' nei punti A e B, dimostrare che il luogo del terzo vertice M è una *cardioide* che ha per regresso il punto K.

404. Il luogo dei fuochi di tutte le iperbole equilatere di un piano, concentriche in O e passanti per uno stesso punto M è la *lemniscata di Bernoulli* che ha il centro in O e un fuoco in M.

G. CARDOSO-LAYNES.

BIBLIOGRAFIA

A. SOCCI e G. TOLOMEI. — *Gli elementi di Euclide.* — Firenze, Succ. Le Monnier, 1897.

Pensando che taluni professori continuano tuttora a tener per guida nell'insegnamento gli " Elementi di Euclide, „ c'è da domandarsi, e con ragione, se in tanti secoli la Geometria non abbia affatto progredito e se nessun trattato moderno sia scientificamente e didatticamente pregevole. Che il testo euclideo puro e semplice abbia molte lacune e molti difetti è fuori di dubbio: va dunque ampliato e corretto per adattarlo alle nostre scuole, ma allora di Euclide che cosa resta?... Questo ho voluto notare perchè mi sembra giusto; ma siccome vi son sempre in Italia molti insegnanti, che stimano conveniente adottare il testo euclideo, era davvero sentito il bisogno di una nuova edizione dell'opera del grande geometra greco; perciò non fuori di proposito è uscita dalla casa editrice Le Monnier di Firenze una nuova edizione degli elementi di Euclide, per cura dei professori Socci e Tolomei.

Questa, per certi riguardi è superiore alle altre precedentemente pubblicate. In essa infatti gli autori non hanno conservato il testo secondo la traduzione del Viviani, ma l'hanno migliorato assai stilisticamente, hanno cambiato alcune denominazioni che più non si confacevano all'uso moderno, come ad es. *retta* per *segmento, figure eguali* per *equivalenti* ecc.; hanno aggiunto quei postulati che in Euclide erano ammessi tacitamente e così pure molti teoremi e corollari che mancavano nel testo, e le dimostrazioni di questi sono condotte, in generale, con rigore scientifico. È stata aggiunta ancora un'appendice sulla " *Misura* " e riordinate e collegate le proposizioni di Geometria solida, colmandone le lacune.

Certamente il libro dei prof. Socci e Tolomei non è privo di mende, che spero vedere tolte in una prossima edizione. Accennerò alla poca precisione nel dare alcune definizioni come, ad es., quella di rette parallele: (L. I, pag. 70) *Due rette si dicono parallele, quando....* cioè PROLUNGATE INDEFINITAMENTE.... *non s'incontrano* e quest'altra: (pag. 10) *un punto O si dice esterno* (ad un segmento) *quando si trova sul prolungamento del segmento.* Noterò ancora che a pag. 1 e 2 è detto: " *il limite... che separa due parti di uno stesso corpo si chiama* SUPERFICIE " e " *il limite che separa due parti di una superficie... si chiama* LINEA ". Queste definizioni, quantunque si trovino in quasi tutti i trattati di geometria, non mi sembrano esatte: per esse infatti, ad es., ciò che separa le due falde di una superficie conica sarebbe una linea o ciò che separa i due solidi corrispondenti sarebbe una superficie, mentre è chiaro che in questo caso, tanto le due parti contigue di superficie, quanto le due parti contigue di solido sono separate da un punto; analogamente si potrebbero citare altri esempi.

Così pure alcuni enunciati di teoremi sono inesatti, come ad es. quello della Prop. A del 1° libro: 3) *di due segmenti obliqui,* DISEGUALMENTE DISTANTI *dal piede della perpendicolare, il più* LONTANO *è il maggiore:* anche ammettendo che in Geometria la frase " *segmento più o meno* LONTANO *da un punto* " abbia un significato non sarebbe certo quello che le danno gli A.

Un errore assai grave trovasi a pag. 27 dove è detto: .... *una retta è individuata da due sole condizioni....:* ciò non è vero sempre; analiticamente parlando sarà vero quando le condizioni date sieno traducibili in relazioni lineari fra le due indeterminate dell'equazione di una retta, ma soltanto allora; del resto, in Geometria elementare quella proposizione, anche se fosse vera, come potrebbe giustificarsi?

Tralasciando di notare altre mende che ho riscontrato, come conclusione dirò che, secondo il mio debole parere, nelle scuole classiche possono con più profitto usarsi dei buoni trattati moderni di Geometria, ma volendo adottare un rifacimento più o meno fedele degli " Elementi di Euclide, " il libro dei Prof. Socci e Tolomei è certo il più indicabile.

Dott. G. CARDOSO-LAYNES.

DA GIORNALI E RIVISTE

Dal *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.*

Il problema delle 3 bisettrici.

Nel fascicolo 8 (Heft 8. Dez. 1896) del " Zeitschrift etc... " il Prof. Heymann invitava i colleghi a studiare la questione di *determinare i 3 lati* a, b, c, *di un triangolo, conoscendo di grandezza le 3 bisettrici* w_a, w_b, w_c.

Questa stessa questione era stata posta nella " Rivista matematica " di Peano Vol. II, pag. 34 sotto la forma seguente:

Costruire il triangolo avente per bisettrici interne tre segmenti dati, usando soltanto di rette e circoli. In caso d'impossibilità provarla.

Nella successiva annata del " Zeitschrift etc. [1897] sono comparsi due articoli riguardanti la questione enunciata che credo utile riassumere.

***

Dr. A Korselt, Löban [Zeitschrift etc., Heft 2, Marzo 1897]. *Un triangolo non può in generale esser costruito geometricamente date le 3 bisettrici.*

In questo articolo l'A. parte dalla nota formula

$$w_a^2 = \frac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2},$$

ove s è il semiperimetro, e calcola $w_a^2 - w_b^2$, deducendo dalla espressione trovata, che se $w_a \gtreqless w_b$, deve essere corrispondentemente $b \gtreqless a$, e inversamente.

Considera poi il caso particolare in cui $w_a = w_b = w$, ponendo $\frac{w_c}{w} = \frac{1}{2}m$ $\frac{a}{c} = \frac{x-1}{2}$, e trova così: $\left(\frac{w_c}{w}\right)^2 = \frac{(x+1)^2(x-2)}{8(x-1)} = \frac{m^2}{4}$ da cui si ricava l'equazione di 3° grado

$$x^3 - (2m^2+3)x + 2m^2 - 2 = 0. \tag{1}$$

Dimostra poi che ogni radice della equazione del 3° grado trovata si può esprimere razionalmente per mezzo di una delle altre, ed osserva che per valori generali di m la (1) è irriducibile, e che quindi una radice qualunque della (1) non potendo esprimersi per soli radicali quadratici, si può concludere della irrisolubilità geometrica del problema per mezzo di sole rette e circonferenze.

L'autore fa osservare infine che se m ha la forma

$$m = \frac{n(3-n^2)}{2-n^2},$$

ove $n = 2\sqrt{\frac{x-2}{2(x-1)}}$, la x si può costruire geometricamente, e quindi per questo solo valore di m il problema delle 3 bisettrici, nel caso del triangolo isoscele è geometricamente risolubile

***

Dr. W. Heymann. *Il problema delle 3 bisettrici.*

L'A. divide l'articolo in 8 paragrafi.

Nel 1°, parte dalle formole:

$$w_1^2(x_2+x_3)^2 = x_2x_3(x_1+x_2+x_3)(-x_1+x_2+x_3),$$
$$w_2^2(x_3+x_1)^2 = x_3x_1(x_1+x_2+x_3)(x_1-x_2+x_3),$$
$$w_3^2(x_1+x_2)^2 = x_1x_2(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2-x_3),$$

e le analoghe per le bisettrici esterne $w_1'^2, w_2'^2, w_3'^2$ nelle quali x_1, x_2, x_3 indicano le lunghezze dei lati e suddivide il problema nei 3 gruppi di problemi seguenti, variando i dati.

I gruppo:

$a)$ $w_1\, w_2\, w_3$, $b)$ $w_1\, w_2'\, w_3'$, $c)$ $w_1'\, w_2\, w_3'$, $d)$ $w_1'\, w_2'\, w_3$.

II gruppo:

$a)$ $w_1'\, w_2'\, w_3'$, $b)$ $w_1'\, w_2\, w_3$, $c)$ $w_1\, w_2'\, w_3$, $d)$ $w_1\, w_2\, w_3'$.

III gruppo in cui i dati sono le 12 combinazioni ancora mancanti delle sei quantità $w_1\, w_2\, w_3\, w_1'\, w_2'\, w_3'$ prese 3 a 3.

Fa vedere poi che i problemi di ciascun gruppo possono ridursi l'uno all'altro, e che quindi, trovata la soluzione di uno dei problemi del gruppo, gli altri sono in conseguenza risoluti.

Osserva che i Problemi del I e III gruppo non sono fino ad oggi risoluti poichè secondo le più recenti ricerche il calcolo conduce ad equazioni del 10° grado. Al contrario quelli del gruppo II possono essere algebricamente risoluti mediante equazioni quadratiche e cubiche.

Nei successivi §§ l'A. passa al calcolo effettivo delle formole che risolvono il problema del 2° gruppo, calcoli che sarebbe qui troppo lungo riassumere.

Aroldo Martini Zuccagni.

VARIETÀ

La biblioteca Boncompagni. — Sta per cominciare, se già non è incominciata, l'asta pubblica per la vendita alla spicciolata delle opere che compongono questa magnifica e famosa biblioteca. Così la più grande e preziosa raccolta privata di opere matematiche, che esista, messa insieme in un mezzo secolo dal principe Baldassare Boncompagni con ingenti spese, continui studi ed accurate indagini andrà dispersa ai quattro venti, e in gran parte fuori d'Italia.

È doloroso che il Governo, il Municipio di Roma, gl'Istituti nazionali non abbiano voluto impedire che tanto lavoro andasse perduto, ed assistano indifferenti allo smembramento di una collezione così preziosa.

Bollettino di Bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. — Questo bollettino nacque lo scorso anno, sotto forma di appendice del giornale di Battaglini. D'ora in avanti, staccato completamente da questo giornale, verrà pubblicato dall'editore Clausen in fascicoli di 32 pagine (quattro per anno), e conterrà principalmente articoli relativi alla storia della matematica, recensioni, programmi e riassunti di corsi universitari necrologie, notizie scientifiche.

È noto con quanto ardore e altezza d'ingegno il Prof. G. Loria, il giovane e valente di professore di geometria superiore dell'Università di Genova, si è dedicato agli studi di storia e bibliografia matematica, e per conseguenza è certo che sarà da lui ben diretto il nuovo *Bollettino*, al quale inviamo i più sinceri auguri.

Premio Lobatchefsky. *(1° concorso - 1897).* — L'Accademia Scientifica di Kasan per onorare la memoria di Lobatchefsky, ha istituito questo premio di 500 rubli, da conferirsi ogni tre anni, alla migliore fra le opere relative alla geometria, e di preferenza alla geometria non-euclidea, pubblicate nei sei anni precedenti al giudizio della società.

Il primo di questi premi è stato conferito a S. Lie per la sua *Theorie der Transformations-gruppen. Band* III (Leipzig, 1893). Vennero poi conferite le seguenti menzioni onorevoli:

1ª al sig. L. Gérard di Lione per la sua *Thèse sur la géométrie non-euclidienne* (Paris, 1892).

2ª al Prof. E. Cesaro dell'Università di Napoli per le sue *Lezioni di geometria intrinseca* (Napoli, 1896).

3ª al sig. E. Fontené del collegio Rollin per la sua opera *L'hyperspace a n-1 dimensions* (Paris, 1892).

La Società ha conferito una medaglia d'oro a F. Klein per la sua interessantissima relazione intorno al risultato del concorso, che è stata pubblicata per cura della stessa società col titolo *Zur ersten Verteilung des Lobatchefsky Preises*.

Il 2° premio sarà conferito il 3 novembre 1900. Le opere destinate al concorso devono essere dirette alla *Société Physico-mathématique de Kasan* prima del 3 novembre 1899.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 27 Febbraio 1898.

SULLA TEORIA DELLA DIVISIONE E DELL'ESTRAZIONE DI RADICE

DI

OTTO STOLZ

DELL'UNIVERSITÀ DI INNSBRUCK

Le note regole che servono per eseguire sui numeri interi e frazionari la divisione e l'estrazione di radice si possono formulare con esattezza non solo, ma anche rigorosamente dimostrare in modo sistematico e semplicissimo come ora vedremo.

Nelle dimostrazioni che seguono ci limiteremo ai numeri del sistema decimale. Se si volessero estendere i teoremi ad un sistema a base $e > 1$ basterebbe porre e in luogo di 10 e ricordare che allora i numeri da introdursi come cifre sono $0, 1, 2 \ldots, e-1$.

I. — Divisione dei numeri interi.

Innanzi tutto determineremo il numero delle cifre del quoziente completo o incompleto di due numeri naturali.

1. Lemma. — *Se* b *è un numero di* n *cifre,* q *un numero di* k *cifre ed* r *è* 0 *o un numero naturale minore di* b, *il numero* $bq + r$ *ha* $n+k-1$ *o* $n+k$ *cifre.*

Dalle ipotesi fatte risulta immediatamente

$$\begin{aligned} 10^{n-1} &\leqq b \leqq 10^n - 1, \\ 10^{k-1} &\leqq q \leqq 10^k - 1, \\ 0 &\leqq r < 10^n; \end{aligned}$$

dunque

$$10^{n+k-2} \leqq bq + r < (10^n - 1)(10^k - 1) + 10^n < 10^{n+k},$$

la quale dimostra la proposizione enunciata.

2. Teorema. — *Sia* a *un numero intero di* m *cifre,* b *un altro numero intero di* n *cifre e precisamente* $a > b$, *dunque* $m \geqq n$ *e sia inoltre*

$$(1) \qquad a = bq + r \qquad 0 \leqq r < b.$$

Il quoziente q *ha* $m-n$ *o* $m-n+1$ *cifre, secondochè le prime* n *cifre del dividendo formano un numero minore o non minore di* b.

Secondo il lemma precedente, se k indica il numero incognito delle cifre del numero q deve essere $m = n + k$, ovvero $m = n + k - 1$ quindi $k = m - n$ o $k = m - n + 1$.

Per vedere quando si verifica l'uno o l'altro di questi casi, si procede nel modo seguente.

Come conseguenza immediata della (1) si ha

$$bq \leqq a < b(q+1). \tag{2}$$

Se s'indica con a' il numero formato dalle prime n cifre di a, avremo

$$a = a' 10^{m-n} + a'', \quad 0 \leqq a'' < 10^{m-n}, \tag{3}$$

da cui

$$a' 10^{m-n} \leqq a < (a'+1) 10^{m-n}. \tag{4}$$

Dalle relazioni (2) e (4) si deduce quanto segue.

Se $a' < b$ e quindi $a' + 1 \leqq b$, per le relazioni citate si ha

$$bq \leqq a < b\, 10^{m-n},$$

e conseguentemente

$$q < 10^{m-n}.$$

In questo caso q non può avere $m - n + 1$ cifre e ne avrà perciò $m - n$.

Se è invece $a' \geqq b$, si ha analogamente

$$b\, 10^{m-n} \leqq a < b(q+1),$$

da cui segue

$$10^{m-n} < q + 1,$$

cioè

$$10^{m-n} \leqq q;$$

q dovrà dunque avere almeno $m - n + 1$ cifre, e siccome abbiamo visto che non può averne più di questo numero si può concludere che ha $m - n + 1$ cifre.

II. — Divisione dei numeri decimali finiti.

Teorema. — *Sia* α *un numero decimale con* m *cifre significative e* 10^{p} $(p \gtreqless 0)$ *rappresenti l'ordine della 1ª cifra significativa a sinistra, sia* β *un altro numero decimale con* n *cifre significative e* 10^{q} $(q \gtreqless 0)$ *rappresenti l'ordine della prima cifra significativa a sinistra. Inoltre sia* α' *il numero formato con le prime* n *cifre di* α, *completato con zeri scritti alla destra nel caso che fosse* $m < n$.

Il quoziente $\alpha : \beta$ *comincia con unità il cui ordine è rappresentato da* 10^{p-q-1} *oppure da* 10^{p-q}, *secondochè* a′ *è minore o non minore del numero intero formato con le* n *cifre di* β.

Questo teorema, di cui la proposizione 2 del § precedente è un caso particolare, si dimostra facilmente, ponendo:

$$\alpha = 10^{p-m+1}\, a \qquad \beta = 10^{q-n+1}\, b$$

ove a, b sono numeri interi, il primo con m cifre, il secondo con n cifre. (*)

III. — Estrazione della radice m^{esima}.

1. Se la prima cifra significativa a sinistra di un numero decimale β è dell'ordine 10^q ($q \gtreqless 0$) i limiti fra cui è compreso l'ordine della prima cifra significativa a sinistra in β^m sono

$$mq\,, \qquad mq + m - 1. \;(**)$$

Ciò posto indichiamo con k l'ordine incognito della prima cifra significativa a sinistra della radice m^{esima} del numero decimale

$$\alpha = a_0\, 10^p + a_1\, 10^{p-1} + \ldots \qquad (p \gtreqless 0);$$

per quanto si è detto precedentemente dovremo avere

$$mk \leqq p \leqq mk + m - 1 < m\,(k+1);$$

e questo dimostra che k è il quoziente di p per m nel senso ordinario, cioè quel numero intero per cui si ha

$$p = mk + r, \qquad k \gtreqless 0, \qquad 0 \leqq r < m.$$

(*) Si ha infatti eseguendo il quoziente:

$$\alpha : \beta = 10^{p-q-(m-n)}\, \frac{a}{b}\,.$$

Se ora indichiamo con a' il numero formato con le prime n cifre di a, completato con zeri se $m < n$, la prima cifra del quoziente di $a : b$ sarà dell'ordine:

$$m - n - 1 \quad \text{o} \quad m - n$$

secondochè a' è minore o non minore di b.

L'ordine della prima cifra di $\alpha : \beta$ sarà dunque dato da:

$$p - q - (m - n) + m - n - 1 = p - q - 1,$$

se è $a' < b$; e invece da:

$$p - q - (m - n) + m - n = p - q,$$

se è a' non minore di b.

(**) Si ha infatti:

$$10^{q+1} > \beta \geqq 10^q,$$

quindi:

$$10^{mq+m} > \beta^m \geqq 10^{mq},$$

l'ordine della prima cifra di β^m dovrà dunque essere al minimo mq ed al massimo $mq + m - 1$.

(*Note del tradut.* **A. Martini-Zuccagni**).

La radice cercata potrà allora scriversi

$$\sqrt[m]{\alpha} = c_0 10^k + c_1 10^{k-1} + \ldots + c_r 10^{k-r} + \ldots$$

ed avremo allora

$$(5) \qquad c_0 10^k \leqq \sqrt[m]{\alpha} < (c_0 + 1) 10^k.$$

2. Si scomponga in classi di m cifre ognuna la parte intera di α, andando da destra a sinistra, e la parte decimale andando invece da sinistra a destra, dimodochè il numero α sia ridotto alla forma:

$$(6) \qquad \alpha = C_0 10^{mk} + C_1 10^{m(k-1)} + \ldots + C_r 10^{m(k-r)} + \ldots$$

in cui $C_0, C_1, \ldots$ sono numeri interi al più di m cifre.

Determiniamo allora la prima cifra c_0 di $\sqrt[m]{\alpha}$.

Se C_0 è la m^{esima} potenza di uno dei numeri naturali $1, 2, 3, \ldots 9$ questo numero sarà appunto la cifra cercata c_0. Altrimenti per c_0 si prende quello fra i detti numeri la cui m^{esima} potenza è più approssimata per difetto a C_0. Sarà cioè

$$c_0^m = C_0,$$

oppure

$$c_0^m < C_0 < (c_0 + 1)^m.$$

Infatti dalle (5) e (6) risultano le relazioni

$$c_0^m 10^{mk} \leqq \alpha < (c_0 + 1)^m 10^{mk},$$
$$C_0 10^{mk} \leqq \alpha < (C_0 + 1) 10^{mk},$$

quindi

$$c_0^m 10^{mk} < (C_0 + 1) 10^{mk}, \qquad C_0 10^{mk} < (c_0 + 1)^m 10^{mk},$$

ovvero

$$c_0^m < C_0 + 1, \qquad C_0 < (c_0 + 1)^m,$$

e quindi sarà

$$c_0^m \leqq C_0 < (c_0 + 1)^m.$$

3. La determinazione delle cifre successive di $\sqrt[m]{\alpha}$ si fonda sul noto teorema che, se A è un numero positivo la cui m^{esima} potenza è $< \alpha$, e si pone

$$\sqrt[m]{\alpha} = A + x,$$

è allora

$$(7) \qquad 0 < x < \frac{\alpha - A^m}{mA^{m-1}}.$$

" Supponiamo ora di conoscere già le prime r cifre

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{r-1}$$

di $\sqrt{\alpha}$, e poniamo

$$A = c_0 10^k + c_1 10^{k-1} + \ldots + c_r 10^{k-r+1},$$

se alla frazione $\frac{\alpha - A^m}{mA^{m-1}}$ diamo la forma

$$\frac{\alpha - A^m}{mA^{m-1}} = g_r 10^{k-r} + R, \tag{8}$$

in cui g_r è un numero intero ed R soddisfa alla relazione

$$0 \leqq R < 10^{k-r} \tag{9}$$

avremo allora

$$c_r \leqq g_r. \tag{10}$$

Se si pone infatti

$$x = c_r 10^{k-r} + c_{r+1} 10^{k-r-1} + \ldots . \tag{11}$$

avremo

$$c_r 10^{k-r} \leqq x,$$

e per le relazioni (7), ... (9)

$$x < (g_r + 1) 10^{k-r},$$

quindi

$$c_r < g_r + 1, \quad \text{cioè} \quad c_r \leqq g_r.$$

Abbiamo così un limite superiore per c_r e si determina allora per tentativi la cifra c_r, per cui si ha

$$(A + c_r 10^{k-r})^m \leqq \alpha < (A + (c_r + 1) 10^{k-r})^m.$$

Questa ricerca si può facilitare, determinando anche il limite inferiore di c_r.

4. Un tal limite si determina con l'aiuto della relazione

$$B - \frac{m-1}{2A} B^2 < x \ (*) \tag{12}$$

(*) Se ω è un numero positivo < 1 e μ è pure un numero positivo $\leqq 1$ nello sviluppo $(1+\omega)^\mu$ i termini successivi al 2° sono alternativamente negativi e positivi e siccome sono continuamente decrescenti, avremo la relazione:

$$1 + \mu\omega > (1+\omega)^\mu > 1 + \mu\omega + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2}\omega^2,$$

e quindi:

$$0 < 1 + \mu\omega - (1+\omega)^\mu < \frac{\mu(1-\mu)}{1 \cdot 2}\omega^2,$$

la quale vale del resto anche se $\omega > 1$, com'è facile dimostrare considerando lo sviluppo di $\left(1 - \frac{\omega}{1+\omega}\right)^\mu$ per $\omega > 1$.

Facendo in questa:

$$\mu = \frac{1}{m}, \quad \omega = \frac{\alpha - A^m}{A^m} < 1,$$

abbiamo:

$$1 + \frac{\alpha - A^m}{mA^m} - \left(\frac{\alpha}{A^m}\right)^{\frac{1}{m}} < \frac{m-1}{2m^2}\left(\frac{\alpha - A^m}{A^m}\right)^2.$$

Ponendo in questa:

$$B = \frac{\alpha - A^m}{mA^{m-1}},$$

e moltiplicando i due membri per A:

$$A + B - \sqrt[m]{\alpha} < \frac{m-1}{2A} B^2,$$

da cui immediatamente:

$$B - \frac{m-1}{2A} B^2 < x.$$

(Nota del Traduttore).

in cui è posto

$$B = \frac{\alpha - A^m}{mA^{m-1}}.$$

Dalla (8), abbiamo

$$g_r\, 10^{k-r} \leqq B < (g_r + 1)\, 10^{k-r},$$

e poichè $A > c_0\, 10^k$, da questa relazione si ricava

$$(13) \qquad g_r\, 10^{k-r} - \frac{m-1}{2c_0}(g_r + 1)^2\, 10^{k-2r} < B - \frac{m-1}{2A}B^2.$$

Osservando ora che per la (11) è $x < (c_r + 1)\, 10^{k-r}$, dalle (12) e (13), dopo averle moltiplicate per 10^{r-k}, si ha

$$(14) \qquad g_r - \frac{m-1}{2c_0}\frac{(g_r + 1)^2}{10^r} < c_r + 1.$$

Se è

$$\frac{m-1}{2c_0}\frac{(g_r + 1)^2}{10^r} < 1$$

dalla (14), essendo g_r intero, si deduce

$$g_r - 1 \leqq c_r.$$

Da questa e dalla (12) si deduce che in questo caso deve essere c_r uguale a g_r o $g_r - 1$.

N. B. Più abituale del precedente uso della disuguaglianza (12) è il seguente. Si calcoli il quoziente $\frac{\alpha - A^m}{mA^{m-1}}$ a meno di unità di ordine di $r-2$ volte più grande, cosicchè in luogo della (8) si ha la formola

$$B = h\, 10^{k-2r+2} + R', \qquad 0 \leqq R' < 10^{k-2r+2}$$

in cui h è un numero intero. Allora con ragionamenti analoghi a quelli del § 4, si perviene alla relazione

$$10^{k-2r+2}\left(h - \frac{m-1}{2c_0}\frac{(h+1)^2}{10^{2r-2}}\right) < x < (h+1)\, 10^{k-2r+2}.$$

Ordinariamente h è un numero di $r-1$ cifre, quindi $h+1 \leqq 10^{r-1}$, e perciò si avrà

$$10^{k-2r+2}\left(h - \frac{m-1}{2c_0}\right) < x < (h+1)\, 10^{k-2r+2}. \ (*)$$

O. Stolz.

(*) Più ampie applicazioni di quest'ultima formola si trovano nella pregevolissima opera dell'*Autore: Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, I, pag. 310.

(*Nota del Traduttore*).

DISCUSSIONE ELEMENTARE DEI CASI DI PLURIOMOLOGIA DEI TETRAEDRI

Si deve a *Schröter* ed a *Rosanes* la discussione dei casi di pluriomologia dei triangoli (Math. Annalen. V^{me} 2). La discussione analoga per i tetraedri è stata fatta da *Ed. Hess.* nella memoria: *Beiträge zur Theorie der mehrfach perspective Dreiecke und Tetraeder* (Math. Ann. V^{me} 28), ove sono trattati dettagliatamente i diversi casi, sia pel triangolo sia pel tetraedro. I tetraedri omologici in 4 modi, o tetraedri desmici, erano già stati studiati a fondo da *Stephanos, Veronese, Reye, Vietor* ecc. *Hess* dimostrò che solo un altro caso è possibile, quello dei tetraedri omologici in due soli modi, e dette pure qualche proprietà di questi tetraedri. Il procedimento di *Hess* è analitico, e quello delle altre memorie trattanti questo argomento non è nemmeno elementare; solo Schröter in una memoria del giornale di *Crelle* (*) V^{me} 109 si propose di dimostrare elementarmente le proprietà fondamentali dei tetraedri desmici, partendo da una costruzione data a priori.

Lo scopo della presente nota è di rifare la discussione di *Hess*, ma in modo sintetico e del tutto elementare; e di dedurre dalla costruzione effettiva dei tetraedri omologici in due ed in quattro modi le loro proprietà principali.

1. Se due tetraedri *completamente distinti* ABCD, A'B'C'D' sono omologici, in modo che le congiungenti AA', BB', CC', DD', passino per un punto O, ciò si indicherà brevemente scrivendo: $\left|\begin{matrix}A\,B\,C\,D\\A'B'C'D'\end{matrix}\right|$ O. Può darsi, che sostituendo nella scrittura precedente ad A'B'C'D' una delle permutazioni tra le 4 lettere, si abbia un'altra omologia, con un altro centro O'. Allora i tetraedri ABCD, A'B'C'D' si dicono omologici in due modi. Dobbiamo ora ricercare quale delle permutazioni bisogna scegliere perchè ciò sia possibile.

2. Tra le permutazioni delle lettere A', B', C', D' si vede facilmente che bisogna scartare quelle che lasciano al loro posto una o due lettere. Infatti, se insieme alla omologia $\left|\begin{matrix}A\,B\,C\,D\\A'B'C'D'\end{matrix}\right|$ O si avesse ad esempio l'altra $\left|\begin{matrix}A\,B\,C\,D\\A'C'D'B'\end{matrix}\right|$, i due triangoli BCD, B'C'D' non situati in un piano (per l'ipotesi dei tetraedri distinti) sarebbero omologici in due modi; e ciò non può essere, perchè allora si avrebbe un asse di omologia comune ai due modi, cioè l'intersezione dei piani dei due triangoli.

3. Le permutazioni restanti non lasciano nessuna lettera al suo posto;

(*) Elementar Construction der Figur dreier in desmicher Lage befindlichen Tetraeder.

esse sono le sei permutazioni dispari: B'C'D'A', B'D'A'C', C'A'D'B', C'D'B'A', D'A'B'C', D'B'C'A', e le tre pari D'C'B'A', B'A'D'C', C'D'A'B'.

Se si avessero le due omologie $\begin{vmatrix} A\,B\,C\,D \\ A'B'C'D' \end{vmatrix} O$, $\begin{vmatrix} A\,B\,C\,D \\ B'C'D'A' \end{vmatrix} O'$, lo spigolo AB si appoggerebbe tanto ad A'B' quanto a B'C', e perciò conterrebbe il punto B' d'incontro di queste rette; similmente lo spigolo CD si appoggerebbe tanto a C'D' quanto a D'A', quindi conterrebbe il punto D' comune a queste rette. Allora si avrebbe questo assurdo che le BB',DD' ossia i due spigoli opposti AB, CD si dovrebbero incontrare nel centro di omologia O. In modo del tutto analogo si arriva alla esclusione delle permutazioni B'D'A'C', C'A'D'B', D'A'B'C', D'B'C'A', così delle permutazioni dispari rimane C'D'B'A'. Se si avessero le due omologie $\begin{vmatrix} A\,B\,C\,D \\ A'B'C'D' \end{vmatrix} O$ $\begin{vmatrix} A\,B\,C\,D \\ C'D'B'A' \end{vmatrix} O$, lo spigolo AC si appoggerebbe tanto ad A'C' quanto a C'B', quindi conterrebbe il punto C' d'incontro di queste rette; lo spigolo BD si appoggerebbe tanto a B'D' quanto a D'A', quindi conterrebbe il punto D' d'incontro di queste rette; ed allora, come nel caso precedente si avrebbe l'assurdo che i due spigoli opposti AC, BD (coincidenti rispettivamente con CC', DD') si dovrebbero incontrare nel centro d'omologia O.

Così restano escluse tutte le permutazioni tranne queste tre: D'C'B'A' B'A'D'C', C'D'A'B'.

4. Dato un tetraedro ABCD ed un punto O, sia proposto di trovare un punto O' ed un tetraedro A'B'C'D' in modo da avere: $\begin{vmatrix} A\,B\,C\,D \\ A'B'C'D' \end{vmatrix} O$, $\begin{vmatrix} A\,B\,C\,D \\ D'C'B'A' \end{vmatrix} O'$. Si unisca O con A, B, C, D; siccome i punti B', C' si debbono trovare rispettivamente su OB, OC, il centro O' della seconda omologia, incontro di BC' con CB' deve stare nel piano OBC; i punti A', D' dovendo stare su OA, OD, lo stesso punto O', come incontro di AD' A'D, deve trovarsi nel piano OA'D', dunque O' è nella intersezione l dei piani OBC, OAD. Costruita questa retta l, che passa per O e si appoggia a BC, AD, e scelto su essa comunque il punto O', il tetraedro richiesto A'B'C'D' risulta determinato ponendo: $A' \equiv AO \cdot O'D$ $B' \equiv BO \cdot O'C$ $C' \equiv CO \cdot O'B$, $D' \equiv DO \cdot O'A$. Difatti le AA', BB', CC', DD', passano per O e le AD', BC', CB', DA' per O'.

Le stesse considerazioni precedenti valgono per le altre due permutazioni B'A'D'C', C'D'A'B'.

Riconosciuta così l'esistenza dei tetraedri biomologici passiamo a dimostrarne alcune proprietà.

5. Pongasi $M \equiv AC \cdot A'C'$, $N \equiv BD \cdot B'D'$; la retta MN trovandosi nei due piani BC'A', B'CA, si appoggia ad A'D, AD', ma queste due rette concorrono in O', dunque MN passa per O'. Similmente si vede che i punti $AB \cdot A'B'$, $CD \cdot C'D'$ stanno allineati con O'. Risulta da ciò che il piano ω della 1ª omologia comprende il centro della 2ª, e similmente il piano ω' della 2ª omologia comprende il centro O della 1ª. Dunque: *se due te-*

traedri sono biomologici il piano di una delle omologie passa per il centro dell'altra (Hess. mem. citata)

6. Dalle considerazioni fatte si deduce la costruzione dei due piani di omologia, dati che siano O ed O′: il piano ω è quello delle due rette passanti per O′, e che si appoggiano rispettivamente alle due coppie di spigoli AC, BD; AB, CD; il piano ω' è quello delle due rette passanti per O e che si appoggiano alle stesse coppie precedenti. Inoltre i punti $O_1 \equiv BC \cdot B'C'$, $O'_1 \equiv AD \cdot A'D'$ appartengono ad entrambi i piani ω, ω', dunque $O_1\, O'_1$ è l'intersezione di questi piani. Avremo dunque che: *fissato un tetraedro ABCD ed un punto O, esistono infiniti tetraedri A′B′C′D′ biomologici ad esso con uno dei centri in O; il piano ω' dell'altra omologia è un piano fisso, il punto O′ ed il piano ω appartengono a due rette fisse* (l *ed* $O_1\, O'_1$).

7. Nei due tetraedri biomologici ABCD, A′B′C′D′, escluse le coppie BC, B′C′; AD, A′D′ che si corrispondono in entrambe le omologie, ordiniamo le coppie rimanenti in due modi:

$$\left.\begin{matrix} AB,\ A'B' \\ AC,\ A'C' \\ CD,\ C'D' \\ BD,\ B'D' \end{matrix}\right\}\ \begin{matrix}\text{corrispondenti}\\ \text{nella 1}^{\text{a}}\text{ omologia,}\end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix} AB,\ D'C' \\ AC,\ D'B' \\ CD,\ B'A' \\ BD,\ C'A' \end{matrix}\right\}\ \begin{matrix}\text{corrispondenti}\\ \text{nella 2}^{\text{a}}\text{ omologia.}\end{matrix}$$

In ognuna delle coppie corrispondenti nella 1ª omologia unendo in croce, gli estremi avremo i punti $AB' \cdot BA' \equiv P$, $AC' \cdot CA' \equiv P'$, $CD' \cdot DC' \equiv Q$, $BD' \cdot DB' \equiv Q'$. Similmente per la 2ª omologia avremo i punti $AC' \cdot BD' \equiv R$, $AB' \cdot CD' \equiv R'$, $CA' \cdot DB' \equiv S$, $BA' \cdot DC' \equiv S'$. La PP′, trovandosi nei due piani AB′C′, A′BC si appoggia a B′C′, e BC quindi passa per O_1, incontro di queste rette; la QQ′ trovandosi nei due piani DB′C′, D′BC, si appoggia alle stesse BC, B′C′, quindi passa pure per O_1. Analogamente si trova che PQ′, P′Q passano per O_1 e PQ, P′Q′ per O′. Cioè i punti PP′ QQ′ stanno sul piano ω, formando un quadrangolo, il cui triangolo diagonale è $O_1 O'_1 O'$. Lo stesso vale per i punti R, R′, S, S′ rispetto al piano ω', onde: *in due tetraedri biomologici, esclusi gli spigoli che corrispondono in entrambe le omologie, si considerino le 4 coppie di spigoli che corrispondono in una di esse; se in ciascuna di queste coppie si trova il punto d'incontro delle rette che uniscono in croce gli estremi degli spigoli, si hanno 4 punti del piano di quella omologia; questi punti formano un quadrangolo, che ha per punti diagonali il centro dell'altra omologia ed i punti d'incontro degli spigoli non considerati.*

8. Se due triangoli sono omologici in due modi, in generale l'asse di una delle omologie non passa per il centro dell'altra. C'è però un caso particolare, (*) che corrisponde esattamente al caso dei tetraedri biomologici. Si ha questo teorema: *se due triangoli ABC, A′B′C′ sono omo-*

(*) Questo caso è considerato nella memoria di Hess.

logici nei due modi $\begin{vmatrix} A\,B\,C \\ A'B'C' \end{vmatrix}$ O o, $\begin{vmatrix} A\,B\,C \\ C'B'A' \end{vmatrix}$ O′ o′, *ed* O′ *appartiene ad* o, o′ *appartiene ad* O.

Siano dati il triangolo ABC e due punti O, O′ allineati con B; pongasi AO · CO′ ≡ A′, CO · AO′ ≡ C′, AC · A′D′ ≡ L, AB · LO′ ≡ N, NA′ · OO′ ≡ B′; il triangolo A′B′C′ così costruito è omologico ad ABC nei due modi $\begin{vmatrix} A\,B\,C \\ A'B'C' \end{vmatrix}$ O, $\begin{vmatrix} A\,B\,C \\ C'B'A' \end{vmatrix}$ O′, e l'asse *o* della 1ª omologia passa per il centro O′ della seconda. Vogliamo dimostrare che O sta su *o′*. Per il quadrangolo AA′CC′ il fascio delle rette *o*, *o′*, LC, LC′ è armonico; segando con CC′, si ha che il gruppo dei punti C, C′, P ≡ *o* · CC′ ed O è armonico; segando con CA′, si ha il gruppo armonico dei punti C, A′, Q ≡ CA′ · LO, O′. Proiettando il gruppo CC′OP su OO′ dal punto BC·B′C′, si ha il gruppo armonico BB′OO′, che con l'altro gruppo CA′QO′ ha un punto comune, dunque BC, A′B′, QO (ossia LO) concorrono in un punto. Ciò vuol dire che la congiungente di L con BC · A′B′, ovvero *o′* contiene il punto O.

9. In due triangoli omologici hanno importanza per lo studio delle configurazioni i punti d'incontro delle rette che si ottengono unendo in croce gli estremi di due lati corrispondenti. (*) Questi punti formano un triangolo (che si potrebbe chiamare triangolo di *Veronese*) omologico ad entrambi i triangoli primitivi e con lo stesso asse d'omologia. Se i due triangoli stanno nello spazio il piano del triangolo di *Veronese* passa per l'incontro dei piani dei triangoli primitivi. Si deduce da ciò che dati due tetraedri omologici, i piani dei 4 triangoli di *Veronese* corrispondenti alle 4 coppie di facce corrispondenti formano un tetraedro (tetraedro di *Veronese*) omologico ai tetraedri primitivi con lo stesso piano di omologia.

Posto ciò, il teorema di Hess e quello del n. 7 si possono enunciare completamente dicendo che: *in due tetraedri biomologici i tetraedri di Veronese corrispondenti alle due omologie si riducono ai piani di esse.*

Per il caso particolare dei triangoli biomologici, analizzato nel numero precedente si ha il teorema analogo, facilmente dimostrabile.

10. Ritorniamo ora alla discussione di *Hess*. Abbiamo visto che se due tetraedri ABCD, A′B′C′D′ omologici nel modo $\begin{vmatrix} A\,B\,C\,D \\ A'B'C'D' \end{vmatrix}$ O risultano omologici anche in un altro modo, questo dovrà corrispondere ad una delle 3 permutazioni: D′C′B′A′, B′A′D′C′, C′D′A′B′. Così è sempre possibile costruire due tetraedri ABCD, A′B′C′D′ omologici nei due modi $\begin{vmatrix} A\,B\,C\,D \\ A'B'C'D' \end{vmatrix}$ O $\begin{vmatrix} A\,B\,C\,D \\ A'B'C'D' \end{vmatrix}$ O′ (§ 4). Vogliamo vedere se due tetraedri siffatti possono risultare omologici anche in un terzo modo, il quale dovrà corrispondere ad una delle due permutazioni B′A′D′C′, C′D′A′B′. In-

(*) VERONESE, *Nuovi teoremi sull'esagrammo mistico*. Lincei, 1877.

sieme alle due omologie precedenti si abbia ad esempio l'altra $\begin{vmatrix} A\,B\,C\,D \\ B'A'D'C' \end{vmatrix} O''$
Allora, la retta A'D' incontra BC, B'C' incontra AD. La retta l intersezione dei due piani OBC, OA'D' dovrà incontrare BC, A'D', e quindi passare per il loro punto d'incontro G; analogamente l passa per l'incontro H di AD con B'C'. Risulta che il punto O' non si può scegliere comunque sulla retta l, ma deve essere il coniugato armonico di O rispetto ai punti G, H di appoggio di l con BC, AD Scelto O' in questo modo, si ha un tetraedro A'B'C'D', che effettivamente risulta omologico ad ABCD anche al terzo modo $\begin{vmatrix} A\,B\,C\,D \\ B'A'D'C' \end{vmatrix} O'$. Infatti per le costruzioni eseguite le 4 rette AB', BA', CD', DC' stanno a 2 a 2 in piani differenti, e perciò passano per uno stesso punto O''. Anzi abbiamo qualche cosa di più; le 4 rette AC', BD', CA', DB' stanno pure a 2 a 2 in piani differenti e perciò concorrono in uno stesso punto O'''. Dunque se due tetraedri ABCD, A'B'C'D' sono omologici in tre modi, essi risultano anche omologici in un quarto modo.

Perciò, il risultato finale della discussione è questo: *se due tetraedri ABCD, A'B'C'D' sono omologici in più modi, essi possono essere omologici in due, od in tutti e quattro i modi seguenti:*

$$\begin{vmatrix} A\,B\,C\,D \\ A'B'C'D' \end{vmatrix} O, \begin{vmatrix} A\,B\,C\,D \\ D'C'B'A' \end{vmatrix} O' \begin{vmatrix} A\,B\,C\,D \\ B'A'D'C' \end{vmatrix} O'' \begin{vmatrix} A\,B\,C\,D \\ C'D'A'B' \end{vmatrix} O'''.$$

I tetraedri omologici in quattro modi furono chiamati da *Stephanos* tetraedri desmici.

11. Nel numero precedente abbiamo dimostrato l'esistenza dei tetraedri desmici, e data nello stesso tempo la loro costruzione effettiva. Da questa costruzione dedurremo le loro proprietà principali. Sia $O_1 \equiv BC \cdot B'C'$, $O'_1 \equiv AD \cdot A'D'$; la retta $O_1\,O'_1$ appoggiandosi a BD e B'D', passa per il loro incontro O'''; ed appoggiandosi a CD', C'D, passa per il loro incontro O''; dunque O'' ed O''' stanno sulla retta $O_1\,O_1'$. Analogamente si dimostra che O''' ed O' si trovano sulla congiungente i punti AB · A'B', CD·C'D' e che O'O'' stanno sulla congiungente i punti BC·A'D', AD·B'C'. Ma i punti O_1, O'_1 AB · A'B', CD · C'D', BC · A'D', AD · B'C' stanno sul piano d'omologia ω corrispondente al centro O, dunque il piano O'O''O''' coincide con ω. Similmente i piani O''O'''O, O'O'''O, O'O''O coincidono rispettivamente con i piani d'omologia ω', ω'', ω''' che corrispondono ai centri O', O'', O'''. Dunque: *se due tetraedri sono desmici i 4 centri ed i 4 piani d'omologia sono i vertici e le facce di uno stesso tetraedro.* Questo tetraedro è desmico ad entrambi. Infatti dalla figura risulta subito:

$$\begin{vmatrix} A\,B\;C\;\;D \\ O\,O'O''O''' \end{vmatrix} A', \begin{vmatrix} A\;\;B\,C\,D \\ O'O\,O''O''' \end{vmatrix} B', \begin{vmatrix} A\;\;B\,C\,D \\ O''O'O\,O'' \end{vmatrix} C', \begin{vmatrix} A\,B\;\;C\;D \\ O'O'''O''O \end{vmatrix} D',$$
$$\begin{vmatrix} A'B'C'\,D' \\ O\,O'O''O''' \end{vmatrix} A, \begin{vmatrix} A'\,B'C'D' \\ O'O\,O''O''' \end{vmatrix} B, \begin{vmatrix} A'\;B'C'D' \\ O''O'O\,O'' \end{vmatrix} C, \begin{vmatrix} A'B'\;C'\,D' \\ O'O'''O''O \end{vmatrix} D.$$

si ha così un sistema *desmico* di 3 tetraedri ABCD, A'B'C'D', OO'O''O''', due qualunque di essi sono omologici in 4 modi con i centri ed i piani d'omologia nei vertici e nelle facce del 3° tetraedro.

12. In due tetraedri desmici ABCD, A'B'C'D' uno spigolo di uno di essi si appoggia ad una coppia di spigoli opposti dell'altro e propriamente AB, CD si appoggiano contemporaneamente ad A'B', C'D'; BC, AD si appoggiano a B'C', A'D' e BD, AC si appoggiano a B'D', A'C'. Più brevemente si può dire con *Stephanos* che i due tetraedri *si appoggiano tra loro*. Reciprocamente se due tetraedri ABCD, A'B'C'D' verificano le condizioni precedenti, essi sono desmici. Difatti per ipotesi le rette AA', BB', CC', DD' stanno a 2 a 2 in piani differenti, quindi concorrono in un punto O. Analogamente le altre tre quaterne di rette: AD', BC', CB', DA'; AB', BA', CD', DC'; AC', BD', CA', DB' sono costituite ciascuna di quattro rette concorrenti in un punto.

13. Nei tetraedri ABCD, A'B'C'D', OO'O''O''', appartenenti ad un sistema desmico, consideriamo la coppia di spigoli BC, AD del 1° tetraedro e le due coppie B'C', A'D'; OO', O''O''' degli altri due, che si appoggiano alla prima. Queste 6 rette sono gli spigoli del tetraedro $O_1O'_1GH$. Partendo dalla coppia BA, CD, si ottiene un altro tetraedro, e partendo dalla terza coppia AC, BD, se ne ottiene un terzo. In tal modo abbiamo 3 nuovi tetraedri, i cui spigoli coincidono con quelli dei tetraedri primitivi, ed i cui vertici sono i 12 punti ove concorrono a 3 a 3 questi spigoli all'infuori dei punti A, B, C, D A', B', C', D', O, O', O'', O'''. Risulta che i tre nuovi tetraedri, come i primitivi si appoggiano a due a due quindi formano un nuovo sistema desmico che dicesi il *sistema desmico coniugato* al primo sistema. Un tetraedro di uno dei due sistemi ha due spigoli opposti in comune con ciascuno dei 3 tetraedri dell'altro sistema.

14. I 18 spigoli dei tetraedri del sistema desmico ABCD, A'B'C'D', OO'O''O''' si incontrano a 3 a 3 nei vertici dei tetraedri del sistema coniugato. In ognuno di essi stanno dunque 4 punti, due vertici del 1° sistema e due del secondo: queste coppie si separano armonicamente. Difatti considerando ad esempio la coppia di spigoli BC, AD del 1° tetraedro, ad essa si appoggia la coppia B'C', A'D' del 2° nei punti G, O_1; H, O'_1, e la coppia OO', O''O''' negli stessi punti e dalla figura risulta subito che BC è diviso armonicamente da G, O_1 e AD da HO'_1. Analogamente per i punti che stanno AB, CD; AC, BD ecc.

15. È facile vedere che la retta OO' si appoggia alla coppia BC, AD in G, H ed il gruppo OO'GH è armonico. Similmente O, O'' sono divisi armonicamente dai punti di appoggio della loro congiungente con la coppia AB, CD, ed O, O''' sono divisi armonicamente dai punti di appoggio della loro congiungente con l'altra coppia BD, AC. Dunque in un sistema desmico di tre tetraedri, un vertice O di uno di essi e il polo della faccia opposta O'O''O'' rispetto a ciascuno degli altri tetraedri.

Sicchè dato un tetraedro ABCD ed un punto O si può costruire un solo tetraedro desmico ad ABCD, e di cui un vertice è O; basterà condurre per O le 3 rette, che si appoggiano rispettivamente alle 3 coppie di spigoli opposti di ABCD, e segarle col piano polare di O rispetto allo stesso tetraedro ABCD; i 3 punti di sezione O', O'', O''', insieme ad O,