PRIMO CONGRESSO

tenuto dai Professori di matematica delle scuole secondarie

AD INIZIATIVA DELL'ASSOCIAZIONE « MATHESIS »

Torino, 9-14 Settembre 1898.

Elenco dei Professori presenti al Congresso

Soci di " Mathesis „.

1. Bettazzi prof. Rodolfo, R. Liceo e R. Accademia Militare, Torino.
2. Buffa prof. Pietro, R. Istituto Tecnico, Nocera Inferiore.
3. Bustelli prof. Anton Maria, R. Provveditore, Aquila.
4. Buzzi prof. Omobono, Direttore Scuole Normali, Forlì.
5. Castellano prof. Filiberto, R. Accademia Militare, Torino.
6. Certo prof. Luigi, R. Liceo Vittorio Emanuele, Palermo.
7. Ciabò prof. Giorgio, Preside del R. Istituto Tecnico, Bergamo.
8. Ciamberlini prof. Corrado, R. Liceo, Fermo.
9. De Amicis prof. Enrico, R. Istituto Tecnico, Brescia.
10. De Zolt prof. Antonio, R. Liceo Parini, Milano.
11. Fabris prof. Vittorio, R. Istituto Tecnico, Mantova.
12. Ferrari prof. Francesco, R. Liceo Galvani, Bologna.
13. Frizzo prof. Giacomo, R. Provveditore, Forlì.
14. Garrone prof. Luigi, R. Liceo, Vercelli.
15. Gazzaniga prof. Paolo, R. Liceo, Padova.
16. Giudice prof. Francesco, R. Istituto Tecnico, Genova.
17. Gremigni prof. Michele, R. Liceo Galilei, Firenze.
18. Imperato prof. Fortunato, R. Istituto Nautico, Pian di Sorrento.
19. Lazzeri prof. Giulio, R. Accademia Navale, Livorno.
20. Marangoni prof. Gio. Batta, R. Ginnasio, Bassano.
21. Nannei prof. Enrico, R. Istituto Tecnico, Bari.
22. Nassò prof. Marco, Seminario Valsalice, Torino.
23. Palatini prof. Francesco, R. Istituto Tecnico, Sondrio.
24. Piazza prof. Saulle, R. Istituto Tecnico, Milano.
25. Riboni prof. Giovanni, R. Istituto Tecnico, Milano.
26. Sola prof. Filippo, R. Liceo, Carmagnola.

Non Soci.

1. Aychino prof. Edoardo, Istituto Tecnico pareggiato, Casale.
2. Bardelli prof. Giuseppe, Preside R. Istituto Tecnico, Milano.
3. Berzolari prof. Luigi, R. Università, Torino.
4. Borio prof. Agostino, aggiunto R. Liceo Gioberti, Torino.
5. Candido prof. Giacomo, Lecce.
6. Canizza prof. Francesco, R. Istituto Tecnico, Palermo.
7. Cardoso-Laynes prof. Giulio, Istituto Nazionale, Livorno.
8. Crepas prof. Emilio, R. Ginnasio, Ceva.
9. D'Ovidio prof. Enrico, R. Università, Torino.

10. Eugenio prof. Vito, Preside R. Istituto Tecnico, Palermo.
11. Fagnano prof. Francesco, R. Ginnasio Gioberti, Torino.
12. Felizatti prof. Edoardo, assistente R. Università, Torino.
13. Ferrari prof. Achille, Preside Istituto Tecnico, Torino.
14. Ferro prof. Giovanni, R. Ginnasio Cavour, Torino.
15. Giuliano Severino, licenziato in Matematiche, Torino.
16. Gerbaldi prof. Francesco, R. Università, Palermo.
17. Mezzana prof. Niccolò, R. Liceo, Savona.
18. Mocagatta Celestina, Torino.
19. Mortara prof. Eugenio, R. Scuola Tecnica, Parma.
20. Occella prof. Federico, R. Liceo, Casale.
21. Oseletto prof. Tersilla, R. Scuola Normale femminile, Firenze.
22. Padoa prof. Alessandro, R. Liceo, Pinerolo.
23. Peano prof. Giuseppe, R. Università, Torino.
24. Puntoni prof. Pietro, R. Liceo, Spezia.
25. Segre prof. Corrado, R. Università, Torino.
26. Teglio dott. Emilio, Torino.
27. Vacca dott. Giovanni, assistente R. Università, Torino.
28. Veronese prof. Giuseppe, R. Università, Padova.
29. Vailati prof. Giovanni, assistente R. Università, Torino.
30. Volterra prof. Vito, R. Università, Torino.

Elenco dei Professori aderenti al Congresso

Soci di " Mathesis ".

1. Bettini prof. Bettino, Liceo pareggiato, Osimo.
2. Burali-Forti prof. Cesare, R. Accademia Militare, Torino.
3. Caminati prof. Pietro, R. Istituto Tecnico, Foggia.
4. Fazzari prof. Gaetano, R. Liceo Umberto I, Palermo.
5. Fenoglio prof. Luigi, R. Istituto Tecnico, Torino.
6. Marchesini prof. Alessandro, R. Liceo, Massa Carrara.
7. Mariscotti prof. Luigi, R. Ginnasio, Caltanisetta.
8. Marsaglia prof. Natale, R. Liceo, Potenza.
9. Panizza prof. Francesco, R. Liceo, Como.
10. Poinelli prof. Giuseppe, R. Ginnasio, Mondovì.

Non Soci.

1. Amaldi prof. Italo, R. Istituto Tecnico, Aquila.
2. Bacchiani prof. Giovanni, Cesena.
3. Campetti prof. Adolfo, R. Accademia Militare, Torino.
4. Chini prof. Mineo, R. Istituto Tecnico, Pavia.
5. Cumani prof. Guglielmo, R. Scuola Tecnica, Vasto.
6. De Montel prof. Enrico, R. Istituto Tecnico, Bari.
7. Foa prof. Raffaele, Casal Monferrato.
8. Galli-Jognotta prof. Giulio, R. Scuola Tecnica, Castelfranco Veneto.
9. Greggio prof. Pietro, R. Scuola Tecnica Caboto, Venezia.
10. Malesani prof. Gaetano, R. Scuola Tecnica Caboto, Venezia.
11. Malfer prof. Floreste, R. Scuola Tecnica, Acireale.
12. Mandoli prof. Castruccio, Liceo pareggiato, Cava dei Tirreni.
13. Martini-Zuccagni prof. Aroldo, Livorno.
14. Modigliano prof. Cesare, R. Istituto Tecnico, Torino.
15. Pittarelli prof. Giulio, R. Università, Roma.
16. Ramorino prof. Angelo, R. Accademia Militare, Torino.
17. Santacroce prof. Giuseppe, Scuola Normale e Professionale, Foggia.

VERBALI DEL CONGRESSO

Seduta prima.

Torino, giovedì 9 settembre, ore 16.

Alle ore 16, in una sala della Scuola d'applicazione degli Ingegneri, il professor Giudice, a nome del professor Bettazzi presidente del Comitato dell'Associazione «Mathesis,» saluta con sentite parole i colleghi che risposero all'invito dell'Associazione e comunica il seguente telegramma:

Grave lutto domestico obbligami lontano Torino; spero essere costà seduta lunedì. Saluto colleghi: auguro frutto lavori adunanza.

Bettazzi.

Giudice propone di mandare, a nome dell'assemblea, un affettuoso saluto al collega, augurando di averlo presto a partecipare ai lavori comuni.

In seguito propone di proclamare a presidente il professore commendator Enrico D'Ovidio, preside della facoltà di matematica della R. Università di Torino; e a vice-presidenti, i professori Peano e Segre, della stessa facoltà.

Propone inoltre a segretari i professori Castellano e Vacca.

L'assemblea approva all'unanimità.

In assenza del professor D'Ovidio, il professor Peano assume la presidenza e dichiara aperta l'adunanza.

Fa l'appello dei presenti affinchè serva come reciproca presentazione.

Il Presidente dà la parola al professor Giudice, che deve riferire sulla questione 1ª dell'ordine del giorno.

Giudice legge la sua relazione su tale questione:

Data la possibilità della fusione della geometria piana colla solida, proporre un programma che permetta agli insegnanti la libera scelta fra il metodo della fusione e quello della separazione.

Tale relazione, che è unita agli *Atti* del Congresso, si chiude col proporre al voto dell'assemblea le seguenti quistioni:

1° *Rispondere alla domanda: è conveniente concedere possibilmente all'insegnante la libertà di scegliere fra il metodo separatista ed il fusionista?*

2° *Fissare un programma, che stabilisca con precisione, ma molto concisamente, la ripartizione tra i vari anni di corso dell'insegnamento della geometria piana e solida.*

3° *Proporre la compilazione di un programma molto dettagliato,* *che sia sviluppo di quello fissato, e fare istanza presso il Ministero della P. I. perchè solleciti questa compilazione.*

Dopo la relazione il PRESIDENTE apre la discussione.

IMPERATO è contrario, per esperienza, alla fusione.

FRIZZO osserva come l'uso dei due metodi in iscuole diverse possa costituire un inconveniente per le famiglie che, ad anno incominciato, sono obbligate a trasferirsi da una città ad un'altra.

PADOA. Non crede del caso di votare la prima parte delle conclusioni del Relatore, parendogli essere necessario dimostrare prima con convenienti programmi e discussione dei medesimi la possibilità di seguire i due metodi.

PALATINI. Non crede assolutamente possibile la libertà di scelta tra un metodo e l'altro, se la materia non è condensata in un anno.

BUSTELLI. Osserva come la discussione dei programmi si connetta colla distribuzione della materia nei varî anni, e quindi alla questione 4ª di cui egli è relatore.

DE AMICIS. Riferisce su quanto ha già deliberato l'Associazione « MATHESIS » nelle sue adunanze particolari, ed insieme col professor LAZZERI espone varî argomenti in favore della fusione, citando in proposito le opere in questo senso del compianto professore De Paolis e dei professori Lazzeri e Bassani.

LAZZERI. Crede che si possa giungere alla libertà di scelta separandò la geometria in due parti: *geometria pura* e *geometria metrica,* che dovrebbero formare argomento di due anni distinti di corso.

PADOA. È assolutamente contrario, per ragioni didattiche, all'insegnamento della geometria in un solo anno; osserva che è necessario anche in conformità alla distribuzione della matematica del ginnasio, ripartire la geometria in parecchi anni, ed in ciascuna parte mescolare gli elementi di *geometria piana* con quelli di *geometria solida.*

GIUDICE *(relatore).* Desidera che il programma sia molto conciso. al fine di lasciare la massima libertà.

GIULIANO. Osserva come nei programmi accennati manchi un cenno sulla *geometria descrittiva.*

Dopo viva discussione sulla opportunità della votazione sul paragrafo primo delle conclusioni, a cui prendono parte i professori CARDOSO-LAYNES, DE AMICIS, GIUDICE, CIAMBERLINI, LAZZERI, si conviene di adottare l'interpretazione data alla parola *fusione* nell'adunanza di Recanati.

CIAMBERLINI ne dà lettura:

Per fusione deve intendersi un metodo didattico secondo il quale fin da principio si studiano simultaneamente gli argomenti affini di geometria piana *e* solida, *e si vengono in seguito applicando le proprietà dell'una o dell'altra per trarne il maggiore vantaggio possibile.* (*Bollettino III,* pag. 6.)

In seguito si riprende la discussione se si debba o no votare la prima parte dell'ordine del giorno proposto dal Relatore, ed a questa prendono parte i professori De Amicis, Castellano, Marangoni, Lazzeri, Padoa, De Zolt.

Il Presidente mette ai voti la prima parte della proposta Giudice. *È approvata in questi termini:*

È conveniente modificare possibilmente i programmi in modo che sia concessa all' insegnante la libertà di scegliere fra il metodo separatista ed il fusionista.

Bardelli. Dichiara di essersi astenuto non avendo ancora potuto formarsi una convinzione sull'argomento.

Veronese intervenuto nel frattempo si fa rileggere l'ordine del giorno votato, e quindi fa una estesa dissertazione sui diversi metodi di presentare i fondamenti della *geometria elementare*. Accenna al metodo seguito nelle sue ultime pubblicazioni; osserva come dal congresso debbano partire proposte concrete, perchè possano essere sostenute dai legislatori e prese in considerazione dalle autorità competenti. Accetta in massima l'ordine del giorno.

Lazzeri ricorda che i vantaggi che si ottengono dalla fusione si possono riassumere così:

1º risparmio di tempo, trattando insieme argomenti affini di *geometria piana e solida*;

2º semplificazione di alcune dimostrazioni di planimetria coll'aiuto di considerazioni stereometriche;

3º miglior coordinamento delle varie materie.

Il secondo argomento, che è il più importante, è quello a cui si fa meno attenzione.

Si insiste da quattordici anni nel dire che l'unico vantaggio ottenuto è quello di semplificare la costruzione della quinta parte dell'angolo piatto, come asserivano il professor Palatini un anno fa ed il professor Angeleri pochi giorni or sono. Insiste invece nel far notare che ciò non è vero, e che coll'aiuto della fusione si è resa molto semplice ed indipendente dalla teoria delle proporzioni, tutta la teoria dell'equivalenza e quella degli assi radicali con innumerevoli problemi che si collegano a queste quistioni.

In seguito ai discorsi dei professori Veronese e Lazzeri s'impegna una animata discussione tra i professori Giudice, Lazzeri, Veronese, De Amicis.

Il Presidente dichiara come, dopo la dotta discussione avvenuta, sia il caso di passare alla seconda parte dell'ordine del giorno del professor Giudice; però, dietro richiesta del professor Palatini, domanda la controprova sulla votazione avvenuta, in seguito alla quale risulta che l'ordine del giorno *era stato approvato ad unanimità, con una astensione già notata.*

Aperta la discussione sulla seconda parte dell'ordine del giorno, dopo alcune osservazioni in merito dei professori Lazzeri e Padoa, il professore Bustelli osserva come la questione dei programmi rientri nella questione 4ª, di cui egli è relatore, e propone che si discuta dopo di quella.

Il Presidente pone ai voti la chiusura della discussione e la proposta Bustelli. *Sono approvate.*

In fine il PRESIDENTE avverte i congressisti che sono in distribuzione due opuscoli del professor Burali-Forti.

1° *Les postulats pour la géométrie d'Euclide et de Lobatschewsky.*

2° *Sulla questione 3ª proposta da* MATHESIS.

Ed uno del professor Piazza:

Sull'insegnamento della matematica nella sezione di commercio e ragioneria dell'Istituto tecnico.

Dopo di che si scioglie la seduta.

f.to PEANO.

Seduta seconda.

Torino, venerdì 10 settembre, ore 15.

Il professor D'OVIDIO, assumendo la presidenza del congresso, ringrazia con eloquenti parole l'assemblea di averlo voluto a quel posto. Considera questa nomina come un omaggio reso alla facoltà di Matematica, di cui egli è decano.

Proclama l'alta importanza dell'insegnamento secondario della Matematica e per la sua efficacia sulla cultura nazionale e per la sua influenza ed intima connessione coll'insegnamento superiore. Le facoltà di matematica sono direttamente interessate ai lavori promossi dall'Associazione « MATHESIS, » ed egli, come padre, come insegnante e cittadino, si compiace di questa operosità, ed è riconoscente all'assemblea di aver voluto, col proclamarlo presidente, riconoscere l'interessamento che ha sempre dimostrato per questi studi.

È all'ordine del giorno la questione 2ª cioe:

Uniformità nel linguaggio e nelle notazioni della matematica elementare. Fissare i vocaboli da adottarsi definitivamente per gli enti pei quali se ne usano più di uno: stabilire quali vocaboli e quali notazioni possono abolirsi senza danno.

Il PRESIDENTE concede la parola al professore DE AMICIS, relatore, il quale svolge la prima parte della sua relazione riferentesi all'aritmetica e all'algebra, che sarà allegata agli atti.

Il presidente professore D'OVIDIO propone che, prima che il relatore completi la sua relazione sulla parte geometrica, si apra la discussione sulla parte svolta. *L'assemblea approva.*

Vari congressisti esprimono la loro opinione sulle idee esposte dal relatore.

GIUDICE accenna alla convenienza di stabilire il nome di ogni operazione, e di dare poi colla medesima radice i nomi ai termini colla desinenza in *ando* ed in *ore.* (Esempio: logaritmicando e logaritmicatore; moltiplicando e moltiplicatore ecc.)

PADOA parlando della necessità di un segno che dice *è un* (come l'ε del *Formulaire de Mathématique*) per scrivere che un numero è multiplo di un altro, evitare l'errore in cui cade chi in quel senso adopera il segno (=).

Accenna alla possibilità di adoperare un segno solo (una croce colle due aste non egualmente lunghe) che rotando successivamente di 45^0 nel piano possa rappresentare i segni delle diverse operazioni, e leggermente modificato (per esempio senza il tratto) rappresentare le operazioni inverse. Fa osservare come la sua proposta possa semplificare diciture e ragionamenti e rendere alla mente dei giovani allievi più evidenti certe relazioni tra le diverse operazioni.

Propone la soppressione delle parole che indicano il risultato delle operazioni, bastando leggere la scrittura $a+b$, $a-b$. ab invece di dire somma differenza, prodotto.

Trova inutile l'insegnamento nelle scuole della teoria delle proporzioni e complicata la terminologia relativa.

Giudice, per quanto trovi ingegnose le idee del Padoa sui segni rotanti, non le approva.

De Amicis combatte l'idea del professore Padoa di sopprimere i nomi che esprimono il risultato delle operazioni: dice che la matematica non deve diventare la scienza dei muti; ritiene che giovi conservare nelle scuole la teoria aritmetica delle proporzioni, perchè facilita la memoria; la stessa teoria è indispensabile per le grandezze.

Padoa conviene col De Amicis sulla necessità di conservare la teoria delle proporzioni tra le grandezze, ma insiste nel ritenerla inutile tra i numeri.

Mortara desidera che si mantenga nella scuola lo studio delle proporzioni e propone la sostituzione della parola *scomporre* alla parola *dividere*.

Il presidente professore D'Ovidio fa notare che probabilmente la maggior parte dei congressisti non saranno in grado di votar subito le proposte del relatore, mancando il tempo ad un serio e ponderato esame.

De Amicis propone che l'Associazione « Mathesis » dirami un questionario sulle proposte fatte a tutti i congressisti.

D'Ovidio osserva che si potrebbe dire *assoluto*.

Frizzo desidera conoscere con quali mezzi il congresso cercherà di eseguire le deliberazioni che si prenderanno.

Giudice ritiene che i professori aderenti al congresso dovrebbero impegnarsi ad adottare nelle pubblicazioni e nell'insegnamento i deliberati del congresso approvati a maggioranza.

Lazzeri osserva che la diffusione delle deliberazioni si otterrà per mezzo del Bollettino.

Bustelli con calde parole di elogio encomia la relazione De Amicis; conviene col presidente D'Ovidio sulla impossibilità morale di addivenire ad una immediata votazione.

Peano propone che si chiuda questa discussione con un voto di plauso al professore De Amicis per la sua importante e dotta relazione.

In seguito il professore De Amicis espone la seconda parte della sua relazione.

A questo punto, stante l'ora tarda, il presidente professore D'Ovidio propone di sospendere la seduta e per intanto di deliberare la stampa integrale della importante relazione De Amicis. *L'assemblea approva all'unanimità.*

Il Presidente fa distribuire ai Congressisti una parte stampata della relazione del professore commendatore A. M. Bustelli sulla questione 4ª, che sarà letta e discussa nei giorni successivi.

Dopo di che l'assemblea si scioglie.

f.to D'Ovidio.

Seduta terza.

Torino, lunedì 12 settembre, ore 15.

Apre la seduta il vice-presidente Segre.

Il segretario Vacca legge il verbale della seduta di venerdì 9 settembre. Dopo una breve osservazione del professore Veronese il verbale è approvato.

Quindi il segretario professor Castellano legge il verbale della seduta di sabato 10 settembre.

Su proposta del Presidente si omette il sunto della relazione De Amicis, essendone stata deliberata la stampa integrale.

Con ciò il verbale della seconda seduta è approvato.

In seguito a domanda del professor Frizzo, che vuole schiarimenti sul modo con cui saranno votate posteriormente le proposte del relatore De Amicis, il Presidente professore Segre fa notare la difficoltà grandissima di votare anche con schede un gran numero di modificazioni alle notazioni e diciture in uso.

De Amicis ripete la sua proposta di mandare il questionario a ciascuno dei congressisti che risponderanno per *si* e per *no*.

De Zolt esprime il voto che le modificazioni si riducano al minor numero possibile, rispettando il carattere storico delle notazioni e dei segni e l'autorità di uomini illustri che li hanno adoperati. (Es. Bellavitis $\triangleq$ per *equipollente*; Beltrami *tg* per *tang.* etc.)

Bettazzi propone di rimandare la discussione alle ulteriori adunanze di Mathesis, promovendone l'esame e le eventuali aggiunte sul Bollettino dell'Associazione. *La proposta Bettazzi è approvata all'unanimità.*

Bettazzi comunica le adesioni dei professori Pittarelli, Bettini, Caminati, i quali salutano, dolenti di non potere intervenire.

Certo, relatore della questione 5ª, giustifica con un telegramma la sua assenza per indisposizione, ed incarica lo stesso professor Bettazzi di leggere la sua relazione nel caso che egli non possa, intervenire nella seduta di mercoledì 14 settembre.

Fazzari direttore del *Pitagora*, incarica per lettera il professor Nannei di rappresentare il giornale.

Uguale incarico è dal professor CAPELLI trasmesso al professor BETTAZZI per il *Giornale di Battaglini.*

Il *Circolo matematico di Palermo* incarica a rappresentarlo i professori PEANO e GERBALDI.

LAZZERI, CANDIDO e CARDOSO-LAYNES dichiarano di rappresentare il *Periodico di matematica* e il relativo *Supplemento.*

MARANGONI rappresenta la *Scuola secondaria* di Milano.

Il presidente professor SEGRE interpreta i sentimenti dell'assemblea dando il benvenuto al professor BETTAZZI, presidente del Comitato dell'Associazione « MATHESIS » e felicitandosi dell'opera sua come organizzatore del Congresso.

BETTAZZI ringrazia.

Il presidente professor SEGRE in seguito all'interpellanza del professor MARANGONI sulla necessità di fissare una seduta speciale per discutere le proposte presentate dai soci, propone di interrompere alle ore 17 la discussione sulla quistione 3ª (se non sarà esaurita) per discutere in seguito le proposte importantissime a cui accenna il professor MARANGONI. *Questa proposta è approvata.*

Concede quindi la parola al professor CIAMBERLINI relatore sulla questione 3ª, che è così concepita:

I libri di testo dal punto di vista scientifico e didattico. Errori che vi dominano, mezzi perchè si limiti per quanto si può il danno che tali errori arrecano alla scuola. Questa relazione è unita agli atti.

Terminata la lettura della prima parte della relazione relativa ai libri di testo delle scuole elementari, il presidente mette in discussione le proposte del professor Ciamberlini.

Dopo breve discussione, cui prendono parte il PRESIDENTE ed i professori NANNEI e BETTAZZI, *si approva* il seguente ordine del giorno del professor BETTAZZI:

*Si fa voto che l'*Associazione MATHESIS *promuova la pubblicazione di un periodico destinato agli insegnanti delle scuole elementari, inspirato ai principi rigorosi della matematica.*

Quindi il professor CIAMBERLINI legge la 2ª parte della sua relazione.

Il presidente professor SEGRE ha parole di vivo encomio per la elaborata relazione del professor Ciamberlini: comunica quindi ai Congressisti che:

1°. Il professor PEANO terrà la sua conferenza sul tema: *Conversazione sul Formulario di matematica* alle ore 10 del giorno 13 settembre in una sala dell'Università.

2°. Il professor LORIA terrà la sua conferenza col tema: *La storia della matematica come anello di congiunzione tra l'insegnamento secondario e l'insegnamento universitario* alla stessa ora e nello stesso luogo, il giorno 15 settembre.

BETTAZZI espone il contenuto dell'opuscolo del professor BURALI-FORTI sulla questione 3ª ed osserva che le conclusioni dell'opuscolo concordano in massima con quelle del relatore.

Dopo viva discussione, cui prendono parte i professori SEGRE, VERONESE, BETTAZZI, NANNEI, BUSTELLI, *si approva alla unanimità* l'ordine del giorno Ciamberlini così modificato:

*Si fa voti che l'*Associazione Mathesis *dedichi una parte del suo Bollettino o promuova su altro giornale uno studio critico dei libri di testo pubblicati o da pubblicarsi.*

Castellano propone che sia pubblicata integralmente la relazione Ciamberlini.

Alle osservazioni del professor Bettazzi, che le condizioni finanziarie di Mathesis non potranno forse permettere questa serie di integrali pubblicazioni, il presidente risponde che l'assemblea dovrebbe deliberare di far voto che si trovi il modo che questi lavori siano dati alle stampe. *Tale proposta è approvata.*

Esaurita così la discussione sulla questione 3ª, il presidente mette in discussione le proposte particolari dei soci:

La 1ª di esse, inviata dal professore Angeleri, assente, è così formulata:

Fare uffici presso il Ministero, perchè fra gli ispettori centrali vi sia anche un professore di matematiche di scuole secondarie.

Dopo un'animata e viva discussione tra i professori Marangoni, De Amicis, Gremigni, Bustelli, Veronese, Frizzo e Nannei, da cui risulta che dei dodici ispettori centrali, undici sono professori di lettere ed uno di scienze fisiche e naturali, e nessuno di matematica, si fanno voti dai diversi oratori che in detto ispettorato siano chiamati professori di matematica, versati nelle questioni che interessano l'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie.

Messa ai voti la proposta Angeleri modificata da Nannei in questi termini:

L'Assemblea fa voti che tra gli ispettori centrali sieno chiamati anche professori di matematica, in equa proporzione, è approvata all'unanimità.

Marangoni riferisce sulla seconda questione da lui proposta:

Necessità di introdurre la prova scritta di matematica in tutte le classi dell'attuale ginnasio liceo.

Osserva come, per la mancanza di prova scritta, la matematica non sia in queste scuole tenuta nella considerazione che le spetta; colla prova scritta insegnanti ed allievi troveranno facilitato l'esercizio del loro dovere.

Potrà l'insegnante con compiti ed esercizii adattati alla maggioranza degli allievi, mettere in vista l'importanza della applicazione; all'obbiezione che negli esami si copia facilmente il lavoro di matematica, osserva che anche facilmente si copiano altri temi.

Piazza è contrario alla prova scritta non soltanto nelle scuole classiche, ma anche nelle tecniche, per la impossibilità in cui si trovano i professori di impedire che si copii; crede l'insegnamento possa raggiungere il suo scopo con frequenti esercizii fatti durante l'anno a casa ed in iscuola sulla lavagna.

Crepas è contrario alla proposta Marangoni. Ha ottenuto buoni risultati anche senza la prova scritta, nella quale molte volte anche ottimi allievi falliscono.

D'Ovidio è fermamente convinto della utilità della prova scritta. Cita il fatto che quando il ministero lasciò libera ai giovani la scelta tra la prova scritta di greco e quella di matematica — per addivenire ad una graduale soppressione del greco — la maggioranza di essi scelse il tema greco, ciò che prova essere forse più facile copiare il tema greco, che quello di matematica. Gli pare che non si siano pensati tutti i modi di rendere efficace ed utile la prova scritta di matematica.

Si possono dare agli allievi in uno stesso esame temi diversi, perchè l'insegnamento delle matematiche deve ottenere per risultato che ogni allievo da solo, dinnanzi ad una questione che non esiga che un pensiero, un ricordo, un'applicazione delle cose studiate, sia in grado di risolverla.

La diversità dei temi, che recherebbe gravi difficoltà in un esame di classificazione, non presenta inconvenienti negli esami che debbono costituire soltanto una prova d'idoneità.

De Amicis cita l'opinione del professor Globus contraria ai temi scritti, per l'impossibilità di impedire che si copii. Egli è contrario alla prova scritta anche per le scuole e gli istituti tecnici. Il professore deve con altri mezzi imprimere nella mente degli allievi l'importanza della materia insegnata.

Parlano ancora in favore della prova scritta i professori Marangoni, Veronese, il quale domanda una proposta semplice, perchè possa con maggior speranza di successo essere sostenuta presso le autorità.

Parlano inoltre in vario senso i professori De Zolt, Garrone, Bustelli, Bettazzi, D'Ovidio ecc. finchè è approvata la proposta Marangoni così modificata dal professore D'Ovidio:

Il Congresso proclama la necessità di introdurre la prova scritta di matematica in tutte le scuole, circondata da tutte quelle garanzie che possono assicurarne la sincerità, per esempio togliendo l'unicità del tema per tutti i candidati.

Il proponente Marangoni espone la 3ª questione.

Necessità di portare l'insegnamento delle matematiche nel Ginnasio Liceo ad un minimum di tre ore settimanali per classe, e ciò anche conservando i programmi attuali.

Dopo breve discussione, a cui prendono parte i professori Segre, Mortara, Gremigni e Bustelli, si conviene di rimandare la proposta alla seduta di martedì 13 settembre, in cui si tratta della ripartizione dell'insegnamento della matematica tra le diverse scuole.

Marangoni riferisce sulla questione 4ª da lui proposta, cioè che:

Nelle circolari, nei programmi e nei regolamenti sparisca la distinzione tra le materie principali e le materie secondarie, non ultima causa del poco profitto dell'insegnamento matematico nelle scuole.

Dopo lunga ed animata discussione, a cui prendono parte i professori Veronese, Mortara, Piazza, Marangoni, Castellano, Bettazzi, Frizzo, Bustelli, D'Ovidio, quest'ultimo, col professor Veronese, propongono il seguente ordine del giorno:

Considerato il carattere spiccatamente razionale ed educativo della matematica, e considerato che essa è materia essenziale per il passaggio a tutto un ordine di studi superiori, si fa voti che nelle circolari, nei *programmi e nei regolamenti essa non sia considerata come materia di secondaria importanza.*

Bettazzi si dichiara lieto di votare quest'ordine del giorno che rispecchia le idee espresse in un memoriale che l'Associazione « Mathesis » ha inviato al Ministero.

Messo ai voti quest'ordine del giorno è approvato all'unanimità.

Dopo di che il Presidente dichiara chiusa la seduta.

f.to Segre.

Seduta quarta.

Torino, martedì 13 settembre, ore 15.

Alle ore 15 il Presidente professor D'Ovidio apre la seduta.

Il Segretario Vacca legge il verbale, che dopo brevi osservazioni è approvato.

Lazzeri propone che si pubblichino integralmente in un volume i rendiconti dettagliati del Congresso, colle relazioni sui temi. Per sopperire alle spese di tale pubblicazione propone che si apra tra i presenti una sottoscrizione per l'acquisto del volume; il cui prezzo si può approssimativamente supporre che varierà da 3 a 5 lire.

Alesio, segretario del Congresso Pedagogico, osserva che si pubblicherà un volume nel quale saranno contenute in esteso le discussioni dell'intero congresso pedagogico, ed il riassunto di quelle avvenute nelle sottosezioni.

Dopo osservazioni dei professori Candido e Bettazzi, il quale ultimo fa riflettere che, oltre alla pubblicazione del congresso pedagogico, sarà sempre utile ed opportuna anche la pubblicazione di rendiconti più estesi del congresso indetto da « Mathesis »; su iniziativa del presidente si *approva la proposta Lazzeri.*

Il Presidente annuncia che gli intervenuti, i quali desiderano acquistare i rendiconti del Congresso possono sin d'ora farlo, sottoscrivendo un'apposita scheda.

Si passa quindi alla discussione della quistione già posta all'ordine del giorno, presentata alla Presidenza dal professore Imperato:

Se sia opportuno nello studio dell'aritmetica dar maggiore sviluppo al calcolo materiale numerico, nell'intento di rendere più spediti i calcoli mentali e numerici e non poche operazioni algebriche: in particolare se sia opportuno spingere la tavola pitagorica sino al 15 ed apprendere i quadrati sino al 20 ed i cubi sino al 10.

Il proponente svolge la sua tesi. Egli vuole che l'insegnamento di aritmetica nelle scuole elementari venga limitato allo studio delle quattro operazioni dell'aritmetica sui numeri interi e sui numeri decimali, allo studio del sistema metrico, e ad alcune nozioni sulle frazioni ordinarie. Vuole che si tolgano dalle scuole elementari lo studio delle proporzioni e gli elementi di geometria. Crede che nella vita pratica le proporzioni non servano: che serva invece assai la speditezza nel calcolo numerico. Crede essere utile invece far cenno nelle scuole elementari degli antichi sistemi di misure usati nelle varie regioni d' Italia.

Passa poi ad altre sue proposte, che egli presenta in un ordine del giorno d'accordo col professore MARANGONI, ed osserva che l'aritmetica non è abbastanza curata nelle scuole elementari; propone che nelle Commissioni d'esame di licenza delle scuole elementari si trovi un professore di matematica. Quanto alle nozioni geometriche, egli crede che siano dannose anzichè utili agli studii ulteriori, le nozioni per lo più confuse ed inesatte acquistate nelle scuole elementari.

PADOA crede che gli inconvenienti, che il professore Imperato lamenta, provengano dal doppio scopo a cui deve soddisfare la scuola elementare: essere fine a sè stessa, e preparazione a studii superiori. È certo che gli insegnanti delle Scuole superiori preferiscono che vi giungano degli allievi i quali, anzichè un ricco bagaglio di cognizioni, abbiano il sicuro possesso di poche nozioni fondamentali; ma d'altra parte coloro che non proseguono gli studii oltre le scuole elementari, qualora si diminuisse ancora il ristretto programma di aritmetica delle Scuole elementari, ne risentirebbero grave danno.

Il solo modo di togliere questo inconveniente sarebbe per lui quello di aggiungere un anno d'insegnamento complementare per coloro che non continuano gli studi, dopo le scuole elementari.

Presenta in questo senso una proposta, che però dopo osservazione del Presidente che essa uscirebbe dall'ordine del giorno, egli stesso ritira.

Infine fa voti affinchè sia ristabilito l'esame obbligatorio d'ammissione al ginnasio.

CIAMBERLINI osserva che la proposta del professore Imperato non cambia in sostanza i vigenti programmi per l'insegnamento dell'aritmetica nelle scuole elementari. Osserva che è impossibile togliere dalle scuole stesse quei rudimenti di geometria che vi si insegnano, essendo strettamente connessi all'insegnamento del sistema metrico decimale (metro quadrato, metro cubo, litro etc.) Osserva che già nella terza classe elementare si fa cenno degli antichi sistemi di misura delle varie regioni.

CREPAS vuole che il professor Imperato includa nel suo ordine del giorno che all'esame di licenza dalle scuole elementari intervengano due professori uno di matematica ed uno di lettere.

MARANGONI insiste nella sua proposta (che è la seconda dell'ordine del giorno Imperato), accettando la modificazione del professore Crepas.

IMPERATO accetta che nelle scuole elementari rimanga l'insegnamento dei rudimenti della geometria in quanto essi servono all'insegnamento del sistema metrico; mantiene però le altre parti del suo ordine del giorno, accettando anche la modificazione del professore Crepas.

DE ZOLT osserva che l'insegnamento dei rudimenti della geometria è indispensabile nelle scuole elementari: se vi sono cattivi trattati, specialmente nella parte geometrica, non ne mancano di buoni e rigorosi.

Posto ai voti l'ordine del giorno IMPERATO si approvano successivamente la prima e la seconda parte ed a debole maggioranza la terza parte.

L'ordine del giorno IMPERATO, colle modificazioni approvate, dice: *Si fa voti:*

1º Che dagli attuali programmi di matematica delle scuole elementari vengano eliminate le proporzioni e la regola del tre, ma che l'insegnamento della matematica sia dato in guisa che i giovanetti siano atti ad eseguire colla maggiore speditezza e correttezza possibile un calcolo numerico e facili quesiti della vita pratica.

2º Che delle commissioni di esame di licenza delle scuole elementari facciano parte anche un professore di lettere ed un professore di matematica delle scuole secondarie.

3º Che nell'insegnamento dell'aritmetica così nelle scuole primarie come nelle secondarie inferiori si dia maggiore sviluppo al calcolo materiale numerico, nell'intento di rendere più spediti i calcoli mentali e numerici e non poche operazioni algebriche, epperciò nelle prime si spinga la tavola per la moltiplicazione fino al 15, e nelle seconde si facciano apprendere i quadrati fino al 20 ed i cubi fino al 10.

RIBONI svolge quindi la sua proposta: *che sia concesso anche ai licenziati agrimensori degli Istituti Tecnici di adire alla facoltà matematica, esclusivamente però per le Scuole di applicazione degli Ingegneri.*

Lo svolgimento della suesposta proposta è allegato agli atti.

Il Presidente professore D'OVIDIO dichiara di astenersi dalla votazione. Dichiarano pure di astenersi i professori DE ZOLT, CIABÒ, CASTELLANO.

VERONESE, per avvalorare la proposta del professore Riboni ricorda che dalle statistiche da lui fatte a Padova, Roma ed al Politecnico di Milano risulta che non sussiste la pretesa superiorità nelle scuole di matematica dell'università dei giovani provenienti dal liceo su quelli degli istituti tecnici; è vero anzi il contrario. Avendo parlato col professore Cremona, non gli consta che egli abbia una opinione così ostile agli istituti tecnici, quale gli viene di solito attribuita.

CREPAS propone, e l'assemblea accetta, che si rimandi la votazione a dopo lo svolgimento della relazione Bustelli.

Il relatore professor BUSTELLI sulla questione 4ª: *Ripartizione dell'insegnamento della matematica fra i vari gradi e le varie specie di scuole secondarie* legge la sua relazione. Essa è allegata agli atti.

Terminata la lettura della relazione stessa, il presidente professore D'OVIDIO ringrazia l'oratore per la sua poderosa relazione.

BUFFA fa alcune osservazioni, alle quali risponde il relatore, su alcune denominazioni di cui il professore Bustelli ha fatto uso.

Il presidente D'OVIDIO, stante l'ora tarda, scioglie la seduta, rinviando al domani il proseguimento della discussione.

f.to D'OVIDIO.

Seduta quinta.

Torino, mercoledì 14 settembre, ore 15.

Apre la seduta il vice-presidente professore PEANO. Il segretario VACCA legge il verbale, che è approvato.

Il professor DE AMICIS, il professore ALESIO ed altri vorrebbero ritornare sulla terza parte della proposta IMPERATO che riguarda il calcolo mentale; ma il Presidente interrompe la discussione, perchè argomento già esaurito nella seduta precedente.

Riaperta la discussione sulla relazione BUSTELLI, parlano in vario senso i professori CANDIDO, PIAZZA, DE ZOLT, BUSTELLI, MARANGONI, CREPAS, LAZZERI ecc. facendo tutti notare l'impossibilità in cui si trovano i congressisti, stante la brevità del tempo e l'importanza dell'argomento, di discutere la relazione e votare le proposte Bustelli.

E propongono la sospensiva, senza pregiudizio delle proposte subordinate e posposte alla relazione Bustelli.

Il Presidente mette ai voti *l'ordine del giorno* DE ZOLT così concepito:

L'assemblea delibera di sospendere ogni discussione sulla relazione Bustelli, la quale dovrà costituire argomento di discussione, che avrà la precedenza sopra ogni altro, nel prossimo congresso di MATHESIS *che fin d'ora si delibera, e le cui modalità saranno in seguito fissate.*

Esso è *approvato all'unanimità.*

A questo punto il professor LAZZERI, anche a nome di altri firmatari, presenta l'ordine del giorno che segue:

Il congresso fa voti affinchè la materia dell'attuale insegnamento geometrico sia distribuita nei modi seguenti:

nei Licei: 1° anno — *Proprietà di posizione e di eguaglianza.*
2° anno — *Equivalenza, similitudine.*
3° anno — *Misura, Trigonometria Piana.*
negl'Istit. tecnici: 1° anno — *Proprietà di posizione ed eguaglianza.*
2° anno — *Equivalenza, similitudine e misura.*
3° e 4° anno — *Trigonometria e teorie complementari.*

Il congresso inoltre fa voti che nelle prime tre classi del Ginnasio sia dato un conveniente insegnamento di Geometria intuitiva, e che l'insegnamento della Geometria nelle due classi superiori sia ordinato in guisa da servire di introduzione e di preparazione all'insegnamento liceale.

Firmati: E. NANNEI — E. DE AMICIS — G. VERONESE — G. LAZZERI — F. IMPERATO — C. CIAMBERLINI — F. PALATINI — C. SEGRE — G. CARDOSO-LAYNES — G. CANDIDO — G. B. MARANGONI — MORTARA.

Il Presidente lo pone in discussione.

Parlano in vario senso i professori DE ZOLT, LAZZERI, BETTAZZI, GREMIGNI, CASTELLANO, CANDIDO, DE AMICIS, PIAZZA, OCCELLA ecc.

finchè il Presidente pone ai voti la sospensiva, che il professor Gremigni propone per non contradire a quella già deliberata sulla questione 4ª, alla quale questione l'attuale è subordinata: la sospensiva è approvata con 15 voti favorevoli. 8 contrarii.

Il Presidente, in seguito alle deliberazioni della seduta precedente, pone in discussione la proposta Marangoni sulla

Necessità di portare l'insegnamento delle matematiche nel Ginnasio Liceo ad un minimum di tre ore settimanali per classe, e ciò anche conservando i programmi attuali.

De Amicis e Giudice credono che questa proposta debba essere sospesa come quella presentata dal professore Lazzeri: ma la proposta Marangoni messa ai voti *è approvata a maggioranza.*

Anche la proposta Riboni. che l'assemblea aveva preso impegno di votare in questa seduta, e che si riferiva alla *ammissione alla facoltà di Ingegneria degli studenti di agrimensura, è approvata con 11 voti favorevoli, 1 contrario,* avendo dichiarato di astenersi dal voto i professori De Zolt, Peano. Ciabò. Occella. Castellano, Fabris.

De Amicis dichiara di essersi astenuto dal votare i due ultimi ordini del giorno, perchè gli pare che non potevano essere messi in votazione, dopo aver approvata la sospensiva Bustelli.

Il presidente dà la parola al professore Piazza sulla sua proposta.

Insegnamento della matematica nella sezione di commercio e ragioneria dell' istituto tecnico, la cui relazione è allegata agli atti.

In seguito a varie osservazioni dei professori Bustelli, Nannei, Lazzeri e Piazza si conviene di sospendere ogni deliberazione e di rimandare la deliberazione dell'argomento al prossimo congresso dopo le proposte Bustelli.

In seguito il Presidente dà la parola al professore Certo che legge la sua relazione sulla questione 5ª. (Allegata agli atti.)

Modificazioni da introdursi nell'ordinamento degli studii matematici universitari, affine di ottenere buoni insegnanti secondarii.

La lettura della relazione è accolta da vivissimi e prolungati applausi.

Il Presidente professore Peano ringrazia il relatore a nome dell'Assemblea e dice che la fede, che il professore Certo ha dimostrato nel trionfo della logica matematica, è per lui una delle più belle soddisfazioni.

Dopo viva discussione a cui prendono parte i professori Bettazzi, D'Ovidio (giunto da poco). Nannei. il Presidente Peano osserva l'impossibilità, stante la brevità di tempo, di discutere le proposte del professore Certo: si conviene di sospendere anche questa discussione e di rimandare questa questione al prossimo congresso, dopo aver dato un voto di plauso, ed una approvazione complessiva alle proposte del relatore.

L'assemblea delibera di dare alle stampe integralmente le relazioni dei professori Bustelli e Certo.

De Zolt propone che avanti di chiudere il primo congresso si stabilisca il tempo e il luogo per un secondo.

De Amicis. si associa, e propone che per sede del futuro congresso si scelga Livorno, città che si presta per la sua centralità, e che è sede del *Periodico di matematica*. Dopo breve discussione si approva all'unanimità, su proposta del BETTAZZI, di affidare all'Associazione « MATHESIS » la cura di organizzare un secondo congresso non più tardi del 1901, e di stabilirne la sede.

In seguito il Presidente saluta i Congressisti ed encomia vivamente l'Associazione « MATHESIS » per l'opera sua.

Il segretario CASTELLANO partecipa ai Congressisti una lettera del professore Segre che, assente per indisposizione, manda ai colleghi un cordiale saluto.

Su proposta del professore Bettazzi l'assemblea delibera di inviare il seguente telegramma:

Ministro Istruzione. Roma

Insegnanti matematica raccolti Torino adunanza promossa Associazione MATHESIS, *chiudendo lavori inviano rispettoso saluto E. V., augurando voglia accogliere loro proposte per migliorare importantissimo insegnamento scienza matematica scuole secondarie.*

D'OVIDIO, *Presidente Adunanza*
BETTAZZI, *Presidente* Mathesis.

Dopo di che la seduta è sciolta, e il Congresso è dichiarato chiuso.

f.to PEANO.

ALTRE NOTIZIE SUL CONGRESSO

Il giorno 13, a ore 10, in una sala della R. Università, cortesemente concessa dal signor Rettore, e dinanzi ad un rilevante numero di Congressisti, il Professore GIUSEPPE PEANO della R. Università di Torino, tenne la conferenza annunziata durante il Congresso. In essa presentò il n. 2 del Vol. II del " Formulaire de Mathématiques " pubblicato dalla *Revue de Mathématiques* sotto la sua direzione: ne espose il contenuto, e, date le necessarie indicazioni per renderne possibile la lettura a chi non fosse abituato all'uso dei simboli di logica coi quali esso è scritto, ne lesse alcune proposizioni, illustrandole opportunamente, e facendo così risaltare i pregi della scrittura simbolica in confronto alla frequente incertezza ed imprecisione del linguaggio ordinario. Vivi applausi accolsero l'oratore alla fine della conferenza.

***

Il giorno 15, alla stessa ora e nella stessa località, il Professore GINO LORIA della R. Università di Genova lesse a moltissimi Congressisti la sua conferenza annunziata nella quarta seduta. Fu accolto in fine da generali applausi e dal voto del Professor D'Ovidio che egli stesso sia il primo a realizzare la sua idea nella Università dove insegna. La sua conferenza è allegata agli *Atti*.

Al termine della sua lettura venne, fra gli applausi, data comunicazione del seguente telegramma pervenuto dopo la chiusura del Congresso dal Prof. Veronese.

Professore D'Ovidio,

Dolente mie occupazioni abbiano impedito assistere banchetto, mando mio plauso benemerita "Associazione Mathesis *" per opera felicemente iniziata a vantaggio insegnamento matematico secondario, che quale deputato e professore asseconderò con tutte mie forze.*

Veronese.

* * *

Il giorno 14, ma soltanto dopo la chiusura del Congresso, pervenne al Presidente dell'Associazione la seguente lettera:

Chiarissimo Signor Presidente.

Non potendo intervenire all'adunanza di domani (14 settembre) mi permetto comunicarle quanto desiderei esporre in relazione alla quistione 4ª, pregandola di dar lettura di queste poche righe agli egregi colleghi:

" Essendo la dotta conferenza tenuta il 13 settembre dal Professore Bustelli una risposta del medesimo alla quistione 4ª piuttosto che una vera relazione, avrei piacere che fosse data se non lettura almeno comunicazione anche delle risposte da altri inviate, convinto che dal raffronto di proposte di varia indole più facilmente possa nascere una buona conclusione ".

Con la massima stima mi dico

Francesco Palatini
Socio di *Mathesis.*

* * *

Il 19 settembre pervenne la seguente risposta al telegramma inviato all'onorevole Ministro della Pubblica Istruzione.

Professore Enrico D'Ovidio. — *Università di* Torino.

Ringrazio per cortese saluto assicurando lei e presidente benemerita Associazione Mathesis *che assai volentieri prenderò in esame le proposte intese migliorare insegnamento delle matematiche nelle scuole secondarie.*

Ministro Baccelli.

* * *

Il 7 ottobre il presidente dell'Associazione, anche a nome del presidente del Congresso professor D'Ovidio, indisposto, presentò all'onorevole Ministro Baccelli, allora in Torino, quelli fra i voti del Congresso che riflettevano l'ordinamento scolastico e i programmi, e che l'assemblea aveva approvati almeno con notevole maggioranza. L'onorevole Ministro promise di esaminarli e di dare opera al miglioramento in genere dell'insegnamento secondario, non appena avesse risoluta la questione della riforma dell'insegnamento superiore.

LA STORIA DELLA MATEMATICA

COME ANELLO DI CONGIUNZIONE FRA L'INSEGNAMENTO SECONDARIO E L'INSEGNAMENTO UNIVERSITARIO

Lettura pronunciata a Torino addì 15 Settembre 1898

dinanzi all'Associazione « MATHESIS » fra gl'insegnanti di scuole medie dal Prof. GINO LORIA

EGREGI COLLEGHI,

Da parecchi scienziati e pedagogisti, specialmente di Germania e d'Italia, venne segnalato, quale inconveniente a cui urge porre riparo, il fatto che allorquando un giovane, esauriti gli studi universitari e conseguita l'agognata Laurea in Matematica, entra come insegnante in una scuola secondaria, avverte un senso di scoraggiante isolamento, somigliante a quello che prova colui il quale muove il passo in una contrada che gli sia sconosciuta e straniera. In disparte egli deve mettere quei metodi generali ed elevati che i suoi maestri di jeri gli avevano additato come pari in potenza alle bibliche trombe, dinnanzi a cui caddero per incanto le mura di Gerico, chè ben presto egli li ravvisa inadeguati allo scopo, e d'altronde egli ignora con quali surrogarli. Lungi da sè egli deve cacciare gli scritti che gli furono amici fedeli ed ajutanti efficaci durante quattro anni, nè sa a quali rivolgersi, perchè lo dirigano o sorreggano nella sua nuova missione.

È questa una condizione perfettamente analoga a quella in cui trovansi i giovani uscenti dalle nostre Facoltà di lettere; essi, nello abbandonare le aule universitarie per recarsi ad insegnare gli elementi delle letterature classiche, cadono nella tormentosa alternativa o di abbandonare, come utensili inservibili, i procedimenti che sono caratteristica e vanto della moderna filologia per altri di cui ignorano il congegno, oppure di adoperare nel loro insegnamento metodi talmente sproporzionati allo scopo, da rievocare il ricordo dell'uomo combattente una formica con una clava!

L'inconveniente che ho segnalato merita senza dubbio di venire seriamente considerato e sarebbe assai desiderabile che fosse tolto, rendendo più amichevoli e stretti i rapporti fra l'insegnamento universitario e l'insegnamento secondario. Tuttavia è per me un obbligo imprescindibile e ad un tempo un vero piacere il dichiarare come le conseguenze di esso siano passeggiere, epperò non possiedano una estrema gravità; lo dimostra la numerosa e brillante coorte di giovani professori, usciti recentemente dalle nostre Università ed oggi occupanti con plauso le cattedre di matematica nelle nostre scuole medie; essi, col loro insegnamento, improntato ad un misurato spirito innovatore, malgrado le opposizioni non rare che incontrano da parte di chi non dovrebbe dar loro che incoraggiamenti ed ajuti, efficacemente cooperano a che il livello della coltura matematica senza posa si elevi. Possano la coscienza della efficacia dei loro nobili sforzi e la soddisfazione di sentire la loro opera debitamente apprezzata spronarli a perseverare!

Non ostante la limitata gravità della screpolatura segnalata nel nostro edificio scolastico, dal momento che esiste, è doveroso di pensare a toglierla. Tale scopo hanno appunto le Scuole di Magistero annesse ad alcune Facoltà di Scienze. Ma, sintantochè il relativo diploma non sia per un giovane titolo indispensabile per ottenere l' inscrizione del proprio nome nell'*Annuario del Ministero della pubblica istruzione*, quell' istituto, se ha diritto ad un posto fra i palliativi, non merita per fermo il grado di rimedio efficace. Questo d'altronde non deve cercarsi in un abbassamento del livello dell' insegnamento superiore, se non si vuole che la Università cessi di essere la vigile custode e la sapiente amministratrice del patrimonio scientifico della nazione, di essere un vivajo perenne di cultori della scienza. Nè tampoco è da pensare ad un'elevazione dell'insegnamento secondario, il quale, come è ora, corrisponde, almeno nelle sue linee generali, alla maturità che possiedono ed al grado di coltura che devono conseguire coloro a cui è destinato. Non resta dunque che aggiungere al quadro delle materie d'insegnamento nei nostri Atenei una categoria di lezioni capaci di richiamare e fissare l'attenzione dei laureandi sopra i temi che dovranno quotidianamente trattare, quando occuperanno un posto nell' insegnamento classico o tecnico. Tale indirizzo avrebbe un corso biennale sulla storia della matematica, di cui io vorrei venissero arricchiti i programmi delle nostre Facoltà di Scienze. E questa una proposta che io presento essendo convinto che nulla serva meglio a sradicare errori inveterati, nulla aiuti meglio nella ricerca della propria strada didattica, che la storia degli oggetti stessi da insegnare; è un progetto in cui si rispecchia una massima di Napoleone, il quale lasciò scritto che *la storia è base delle scienze morali, fiaccola della verità, distruggitrice di pregiudizi;* è un suggerimento che già altra volta ebbi l'occasione di dare(*) e che venne accolto da varie parti con un favore evidente e per me assai incoraggiante. Sono appunto tali accoglienze oneste e liete di cui venne onorata la mia proposta, che mi consigliarono ed animarono a svolgerla colla debita larghezza; e ciò, non soltanto affinchè essa sia intesa conformemente alle mie intenzioni e quindi giudicata a dovere, ma anche per segnalare alcune ricerche che è d'uopo compiere prima di poterla attuare. Per far tutto ciò non mi

(*) Veggasi l'articolo " Matematica „ pubblicato due anni or sono nel *Dizionario illustrato di pedagogia*, diretto dai professori Martinazzoli e Credaro.

si poteva presentare occasione più propizia di quella offertami dall'onorevole invito che mi venne rivolto di prender parte ai lavori dell'Associazione *Mathesis;* invito riboccante di seduzione e lusinghe, e che non ebbi la forza di rifiutare, benchè io mi riconosca privo delle qualità necessarie per adempiere il còmpito che mi sono addossato; invito pel quale rivolgo al Chiarissimo Presidente di questo florido sodalizio i ringraziamenti più vivi e sinceri.

I.

La storia della scienza in varie epoche e da differenti scrittori venne intesa in modi assai differenti.

Alcuni — disconoscendo totalmente essere la storia, non soltanto racconto di effetti, ma anche ricerca di cause — ritennero essere unico ufficio dello storico l'esporre sotto forma brillante, accessibile a tutti, l'andamento generale del pensiero matematico, additando i punti salienti e quelli di regresso, i punti d'inflessione e quelli di diramazione che presenta la trajettoria da esso descritta, infiorando il loro discorso con aneddoti più o meno piccanti, che essi certamente avrebbero banditi come fantastici se si fossero arrestati a studiarne la genesi, ed enunciando delle massime generali, per dimostrare la verità delle quali sarebbero state necessarie appunto quelle indagini minute ed esatte da cui essi rifuggivano. Sorsero così degli edifici di regola monumentali, spesso di bell'aspetto, ma privi di solidità; edifici che riducevansi, si può ben dire, alla sola facciata. La parte veramente scientifica della storia veniva in tal modo sagrificata alla parte artistica. È questo il metodo a cui i matematici dell'*Enciclopedia* diedero tanta rinomanza e tanta diffusione col magistero di uno stile mirabile. Un corso sulla storia della matematica informato a tal metodo non corrisponderebbe evidentemente all'intento pel quale io ne suggerisco l'introduzione; esso infatti trascurerebbe il necessario per il superfluo, il principale per l'accessorio.

Altri storici, scegliendo come base la celebre massima di Carlyle: *la storia del mondo non è che la biografia dei grandi uomini*, equipararono la storia della scienza ad una collezione di biografie dei più fortunati pionieri del progresso, degli eroi dello spirito umano. Così intesa la storia della matematica può fungere quale ottimo diversivo da occupazioni più faticose, può anche far la parte di efficacissimo incentivo allo studio, se venga scritta da una persona che tenga fra le proprie mani la penna di Arago, ma non possiede quel carattere altamente educativo della mente, di cui deve essere dotato qualsia insegnamento superiore.

Alcuni storici si proposero di esporre le vicende che ebbero le scienze esatte presso un popolo determinato o in tutto il mondo dal dì della creazione in poi. Ora è chiaro che — eccezion fatta per la storia della matematica greca, e forse per questa soltanto — dato il meraviglioso sviluppo che ebbero le scienze del numero e della estensione, date le innumerevoli divisioni e suddivisioni che esse oggi presentano, tali trattazioni della storia non possono indirizzarsi che a chi abbia già compiuti i propri studi ed in conseguenza possieda quella maturità di intelligenza e quella vastità di coltura che sono indispensabili per orizzontarsi in uno qualunque dei campi che costituiscono la ricchezza della matematica odierna. (*)

Ma vi è ancora un'altra maniera di concepire la storia della scienza; essa s'inspira al grande principio della ripartizione del lavoro e fu adottata — per non citare che i modelli più celebri — dal Cossali in Italia, dallo Chasles in Francia ed in Germania dal Nesselmann. Chi vi si attiene sceglie una branchia speciale dello scibile matematico, ne scopre le scaturigini od almeno ne risale finchè è possibile il corso, ne segue con cura lo svolgimento, ne sorprende le successive modificazioni di sostanza e di forma, ne osserva le relazioni con altre branchie per rivelare quali influenze reciproche siansi manifestate, non senza trascurare di porgere notizie intorno alla vita ed alle opere delle più eminenti personalità nelle quali s'imbatte, ed intorno alle condizioni politiche, sociali e letterarie dei mezzi intellettuali in cui quella branchia ha prosperato. Un siffatto insegnamento della storia, se venga condotto in modo da attingere l'altezza di una vera filosofia della scienza, se venga organizzato in maniera tale che una considerevole profondità ne compensi la limitata estensione, varrà a completare la coltura matematica dei nostri laureandi e fors'anche a soddisfare il desiderio che molti hanno di vedere in Italia continuate le nobili tradizioni di Guglielmo Libri e Baldassare Buoncompagni.

Uno qualunque dei rami che oggi presenta il grand'albero della matematica può dar materia ad un capitolo almeno di un corso architettato nello stile che ho testè caratterizzato. Ma volendo che tal corso raggiunga lo scopo supremo pel quale io ne chiedo l'introduzione nelle Facoltà di Scienze, volendo cioè che esso serva di anello di congiunzione fra l'insegnamento universitario e l'insegnamento secondario, farebbe mestiere sceglierne i tèmi nella matematica elementare: i soggetti geometrici dovrebbero dar materia al corso di un intero anno, quelli aritmetici al corso di un altro, come ora mi volgo ad esporre con qualche dettaglio.

II.

Il fondamento del corso sulla storia della geometria elementare dovrebbe essere, a parer mio, una esposizione particolareggiata degli *Elementi* di Euclide, dalla quale venisse messa a nudo l'intima struttura di quest'opera magistrale e in pari tempo ne fossero rivelate le particolarità di stile, dalla quale risultassero tanto i metodi d'indagine, quanto i procedimenti di esposizione usati dal celebre Alessandrino.

(*) Credo superfluo arrestarmi a sconsigliare un corso di storia modellato sulla notissima opera del Kästner; esso non sarebbe che un arido ed infecondo catalogo di opere di matematica.

Così sarebbe di sommo interesse il porre in piena luce quale parte fondamentale rappresentino i problemi nel sistema euclideo e lo spiegare come e perchè Euclide scrupolosamente si attenga al precetto di non adoperare nelle dimostrazioni se non costruzioni già insegnate, come e perchè i seguaci di Legendre lo abbiano cancellato dal codice regolatore dell'insegnamento geometrico. Sarebbe anche assai opportuno, epperò consigliabile, uno studio accurato del *valore pratico* delle soluzioni che si leggono negli *Elementi;* per dichiarare il mio pensiero osservo che nella soluzione di qualunque problema è necessario distinguere nettamente *semplicità teorica* da *semplicità pratica:* dico teoricamente più semplice quella soluzione che fondasi sul minor numero di teoremi, invece praticamente più semplice quella che esige un minor numero di operazioni geometriche ed aritmetiche. Orbene è facile dimostrare che le soluzioni di Euclide eccellono tutte per semplicità teorica, ma non tutte per semplicità pratica, il che non deve far meraviglia, perchè la maggior parte delle costruzioni contenute negli *Elementi* altro non sono che dimostrazioni dell'esistenza di certe figure. La constatazione di tali importanti particolarità del metodo euclideo porgerebbe l'occasione propizia, non soltanto per insegnare le soluzioni praticamente più convenienti dei problemi fondamentali della geometria elementare, non soltanto per esporre i fondamenti de *La geometria del compasso* di Lorenzo Mascheroni, ma eziandio per far conoscere, almeno la quintessenza di quel complesso di norme, atte a misurare la semplicità di una costruzione geometrica, che il sig. Lemoine ha di recente riunita in un corpo di dottrina, a cui impose il nome di *geometrografia,* e che non dovrebbe rimanere sconosciuta ad alcun insegnante presente o futuro.

Altro punto importantissimo che l'insegnante dovrebbe rilevare negli *Elementi* di Euclide è la teoria delle proporzioni e la soluzione geometrica ivi insegnata di tutte le equazioni quadratiche: gli sarebbe così offerto il destro di tracciare le linee fondamentali di una disciplina, ormai collocata a riposo per constatata inabilità a prestare ulteriori servigi; alludo a quel metodo per sciogliere graficamente i problemi di primo e secondo grado, a cui lo Zeuthen impose il nome assai espressivo di *algebra geometrica.* Similmente dovrebbero venire segnalate in Euclide le prime applicazioni di un altro metodo ancor più celebre ed oggi pure posto nel museo delle anticaglie: parlo del *metodo di esaustione,* il quale condusse Archimede a quelle scoperte che tramanderanno il suo nome, circondato di gloria, alla più lontana posterità.

Anche la forma in cui sono redatti gli *Elementi* di Euclide è meritevole di un esame minuzioso, se non altro per sradicare un pregiudizio assai diffuso. È nota a tutti la rigida uniformità dello stile euclideo, nella quale a taluno parve quasi di scorgere un riflesso delle linee severe del Partenone; per ogni teorema, dopo l'enunciato, vengono indicate le condizioni a cui debbono soddisfare i dati, quando sia necessario limitarne l'arbitrarietà, segue la ripetizione dell'enunciato sulla figura e quindi la costruzione, seguita dalla dimostrazione; questa finisce coll'enunciato invertito, al quale tengon dietro le sacramentali parole « come dovevasi dimostrare »; similmente pei problemi. Ora questa inalterabile regolarità di stile che di consueto si considera come una concezione euclidea od almeno come un prodotto del genio greco, non è una cosa nè l'altra. La si ritrova infatti, non soltanto negli scritti superstiti di un astronomo un po' anteriore ad Euclide — Autolico da Pitana — ma anche, benchè meno perfetta, nella così detta *Arte di Eudosso,* conservata in un papiro del Museo del Louvre a Parigi, e, allo stato embrionale, nel celebre *Manuale del calcolatore,* che leggesi in un antichissimo papiro egiziano appartenente al British Museum di Londra. Se dunque si vuole ad ogni costo stabilire una relazione fra la forma sotto cui ci si presentano le proposizioni degli *Elementi* di Euclide e lo stile di qualche edificio, il termine di paragone si deve ricercare non già sulle rive dell'Ellesponto, ma piuttosto su quelle del Nilo, non già nei Propilei, ma piuttosto nelle Piramidi!

Tali indagini intorno agli stadi di sviluppo che attraversò lo stile geometrico, non sono le uniche investigazioni collegate agli *Elementi,* che abbiano diritto ad essere considerate come parte integrante di un corso di storia sulla geometria elementare. Altre, non meno essenziali, hanno per intento di rilevare la evoluzione che subì la materia trattata negli *Elementi,* hanno per attori i geometri greci precursori di Euclide, hanno per fine supremo di estirpare un altro inveterato preconcetto, quello cioè che la geometria sia uscita dal capo di Euclide, armata di scudo e lancia, come Minerva uscì dal capo di Giove. La perdita, mai abbastanza deplorata, delle opere storiche di due celebri discepoli di Aristotele — Eudemo di Rodi e Teofrasto da Lesbo —, la mancanza di altri antichi lavori congeneri, la esiguità di documenti di quell'epoca, rendono estremamente difficile la ricostruzione della geometria greca pre-euclidea. Ciò non ostante, ricorrendo alle informazioni più attendibili intorno ai popoli che precorsero i Greci sul cammino della civiltà — e specialmente intorno agli Egiziani, che i Greci a ragione consideravano come loro maestri in geometria — e scrutando i monumenti scritti che la classica antichità ci ha tramandati, si giunge a formarsi un concetto abbastanza esatto dell'opera scientifica di Euclide e a dimostrare che il suo trattato, ben lungi dal figurare nella letteratura matematica come un picco isolato in una vasta pianura, ci si presenta quale uno dei componenti di un'intera catena di montagne, i cui ultimi contrafforti si spingono al di là dei confini dell'Europa.

III.

Ricostruito per tal modo l'albero genealogico degli *Elementi,* ed esposto, in base alla posizione ufficiale di Euclide nel Museo di Alessandria, il perchè essi divennero le Pandette dell'insegnamento geometrico, lo storico ha il dovere di demolire un'altra leggenda, quella cioè che gli *Elementi* siano stati considerati nell'antichità un'opera tanto superiore alla critica, da rendere ingiustificato e vano qualunque tentativo inteso a migliorarla.

Tale intangibilità dell'opera di cui ci occupiamo è un parto dell'accesa fantasia dei ciechi adoratori venuti dopo il Rinascimento, dei primi adepti di quella schiera di credenti i quali si fecero una bandiera del manto reale di Euclide. Ciò è dimostrato dal notissimo commento di cui il filosofo neo-platonico Proclo corredò il I libro di Euclide. Infatti da esso apprendesi che gli Epicurei irriverentemente sostenevano che il teorema: « la somma di due lati di qualunque triangolo è maggiore del terzo, » non abbisogna di dimostrazione, essendo evidente *persino ad un asino;* esso inoltre dà notizia di un gran numero di modificazioni sostanziali ai fondamenti della geometria, suggerite da un altro sommo scienziato dell'antichità, Apollonio Pergeo. Nè basta. Proclo insegna pure un tentativo fatto dal celebre astronomo Claudio Tolomeo per migliorare la teoria delle parallele, *« l'écueil et le scandale des éléments de la géométrie ».* (*) Tale conato non va certo ascritto fra i maggiori titoli di gloria di colui che rappresenta nella storia dell'astronomia greca una parte analoga a quella che il destino affidò ad Euclide nella storia della geometria. Tuttavia esso ha diritto di venir segnalato come inaugurante la ricchissima letteratura sopra il troppo famoso postulato.

Se ad esso altri abbiano tenuto dietro immediatamente ci è ignoto, chè per trovar notizia di qualche seguace di Tolomeo bisogna lasciare i Greci per gli Arabi, bisogna saltare a piè pari quattordici secoli di storia; così s'incontra in Nasir-Eddìn uno che s'arrabatta a sormontare una difficoltà oggi dimostrata invincibile. Rimesso in onore lo studio della geometria dopochè, dissipata la tenebra medievale, fu reso possibile a tutti, mediante la stampa, lo studio degli *Elementi,* divenne legione il manipolo di coloro a cui arrise la prospettiva di rabberciare l'edificio euclideo nell'unico punto di solidità incerta. Analizzare tutti i mezzi che a tal uopo vennero adoperati, dedurne la spiegazione del fatto che il fine proposto non venne conseguito, descrivere i risultati che tuttavia per tal modo si raggiunsero, in particolare mostrare come vide la luce la geometria non euclidea, ecco un cómpito al quale non può sottrarsi lo storico della matematica elementare. Che egli assoggettandovisi compia opera altamente istruttiva, che egli getti un solido ponte fra l'Università e la Scuola media, non è chi non vegga. Ma ciò che importa rilevare si è che per comporre questa parte del suo corso all'insegnante non basterà ricorrere alla letteratura storica moderna — pur tanto ricca di scritti sulla geometria non-euclidea! — ma dovrà intraprendere il faticoso studio delle fonti più antiche; giacchè, se furono già scoperte e valutate le più cospicue investigazioni a cui devono la vita le geometrie di Lobatschewsky e di Riemann, restano ancora da studiare moltissime fra le innumerevoli opere che servirono per l'istruzione geometrica della gioventù dal Rinascimento sino alla fine del secolo XVIII.

(*) Nota espressione del d'Alembert.

Tale studio non è certo esente da fatiche e da spine, ma promette allori non scarsi a chi saprà compierlo con scienza e coscienza; permettetemi pertanto, o Signori, di consigliarlo a chiunque abbia interesse a conoscere l'evoluzione del pensiero matematico, a chiunque senta il proprio cuore palpitare all'idea di presentare al mondo qualche documento ancora vergine: la recente esumazione del Padre Saccheri, stella perduta nel cielo matematico, basti a calmare l'apprensione di qualche mio ascoltatore, che io sia in questo momento invaso dal *furore dell' inedito,* malattia oggi tanto diffusa!

La ricerca che io suggerisco, varrà inoltre a gettare qualche sprazzo di luce sopra un altro problema storico sul quale mi piace di fissare la Vostra attenzione, quello cioè di determinare le differenti direzioni in cui, nelle varie epoche e presso i vari popoli, procedette l'insegnamento della geometria. Mentre nel 1566 il decano del Collegio Reale di Parigi sosteneva innanzi al Parlamento la necessità di revocare il professore di matematica, per ciò solo che, ignorando il greco, non era in grado di insegnare gli *Elementi,* due secoli e mezzo più tardi vediamo nella stessa Francia venire esposto, poi acquistar favore, in seguito venire combattuto e da ultimo abbandonato il metodo algebrico-geometrico di Legendre, in deciso contrasto con quello purissimo di Euclide. Ai giorni nostri, dopochè il Bretschneider in Germania, il Méray in Francia (*) ed il de Paolis in Italia bandirono una crociata contro la scolastica separazione tra planimetria e stereometria, vediamo il pacifico universo dei geometri diviso in due campi, quello dei fusionisti e quello degli anti-fusionisti, campi analoghi, quantunque più agitati, a quelli in cui il mondo degli analisti venne diviso, allorquando fu additata la convenienza di abbattere la barriera separante il calcolo differenziale dal calcolo integrale. Orbene si manifestarono anche in passato queste od altre divergenze di opinioni? a quali idee e per merito di quali persone o di quali circostanze arrise la vittoria? Sono questi problemi di cui non è mestieri dimostrare l'alto interesse. Industriandosi a risolverlo si giungerà senza dubbio a dissotterrare e rimettere in circolazione qualche procedimento dimenticato, qualche buona idea su cui oggi si stende il velo di un melanconico oblio. Limitandosi al nostro paese, lo storico arriverà a decidere se nei tempi calamitosi in cui l'Italia non veniva considerata che come una espressione geografica, fosse almeno libera ed una nell'investigazione scientifica; se i nostri antichi oppressori, non paghi di annoverare fra i delitti il pronunciare il sacro nome di patria, imponessero anche al pensiero matematico certe strade determinate; e, prendendo il posto che il Libri lasciò vacante, (**) egli giungerà a dimostrare come sotto il cielo che vide nascere il Fibonacci, il Tartaglia ed il Cardano,

---

(*) Colgo quest'occasione per richiamare l'attenzione dei miei compatriotti sopra i *Nouveaux éléments de géométrie* pubblicati fin dal 1874 dal Méray, nei quali la fusione è praticata; agli stessi concetti si è di recente inspirato questo eminente scienziato nel redigere le applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale, che chiudono degnamente le sue *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale.*

(**) È noto che l'*Histoire des sciences mathématiques en Italie* si arrestò al IV vol., per ragioni che è carità non ricordare.

anche dopo la morte di Galileo, non vegetasse un popolo dimentico delle sue glorie più pure, non si stendesse una desolante terra di morti.

IV.

Compiuta la narrazione della diversa fortuna che ebbero gli *Elementi* di Euclide, lo storico deve volgersi ad esporre quali complementi essi abbiano ricevuto dall'epoca greco-alessandrina in poi. A tale scopo, per quanto concerne la planimetria, egli dovrà presentare un catalogo illustrato delle ricchezze racchiuse nelle opere superstiti di Erone e nella *Collezione matematica* di Pappo d'Alessandria, e descrivere come siasi costituita l'odierna « geometria del triangolo, » nuova diramazione della geometria elementare che a nessuno è omai lecito di ignorare: così verranno incidentalmente segnalate al futuro insegnante due abbondantissime fonti a cui potrà attingere ispirazione nel formulare le questioni da proporre come esercizî ai propri discepoli.

Con maggiore ragione e maggiore larghezza lo storico deve tracciare un quadro delle amplificazioni e dei miglioramenti di cui ebbe a gioire la parte stereometrica degli *Elementi*, la quale, notoriamente, più di tutto il resto rimane lontana dalla perfezione. Così gli sarà offerta propizia occasione per riprodurre in compendio gli stadi di successivo sviluppo che attraversò la teoria dei poliedri per opera di Archimede, Ipsicle e Pappo nell'antichità, di Keplero, Descartes ed Eulero in tempi a noi più vicini, di Cauchy e Poinsot nell'epoca nostra; nonchè per segnalare quali memorabili progressi abbia fatto compiere Archimede alla teoria dei corpi rotondi, nei famosissimi suoi libri *Su la sfera ed il cilindro,* sfruttando il metodo di esaustione che egli dotò di un'isperata potenza.

Con i libri testè ricordati il geometra di Siracusa insegnò, fra altre cose, gli elementi essenziali per la misura del volume e della superficie della sfera e delle sue parti. Ora nasce spontanea la domanda: le proprietà descrittive delle figure tracciate sulla superficie di una sfera, delle quali Euclide non si occupa, rimasero forse sconosciute agli antichi? La risposta è negativa. Ma va notato come la scoperta di quelle proprietà appartenga in gran parte, non già a geometri di professione, ma a persone che all'astronomia consacrarono il fiore del loro ingegno. La contemplazione del cielo in una notte serena — quali eran quelle proverbiali dell'Ellade — conduce naturalmente ad assimilare la volta celeste alla superficie di una sfera, avente per centro il centro della terra: gli è il partito al quale si appigliarono i primi astronomi che ricordi la storia. Essi, ignorando la scienza dei moti e delle forze, si limitarono a proporsi la descrizione dei fenomeni celesti, lasciando il compito di spiegarli ai loro pronipoti in possesso delle leggi della dinamica. Da ciò ebbero lo stimolo allo studio della geometria della sfera, della *Sferica,* come allora si chiamava. Inaugurato da persone di cui l'ingrata indifferenza dei posteri non conservò nemmeno il nome — eppure fra esse si trovava probabilmente un'individualità eminente, Eudosso da Cnido! — ristretto nei primordi alla considerazione di circoli massimi e circoli minori, di meridiani e paralleli, esso acquistò i lineamenti definitivi sotto cui ci si presenta nelle opere di Teodosio da Tripoli e Menelao da Alessandria, allorquando venne avvertita la perfetta corrispondenza che vige fra la geometria piana e la geometria sferica, ove si convenga di associare metodicamente ad ogni retta del piano un circolo massimo della sfera.

I progressi dell'astronomia ben presto mostrarono come la Sferica fosse bensì un ausiliare prezioso, ma non però sufficiente in ogni contingenza; insufficiente ad esempio si manifestò a chi per primo ebbe la sublime idea di tentare la determinazione col mezzo di numeri dell'andamento dei fenomeni celesti. Nacque in conseguenza e si raffermò la convinzione di essere indispensabile il possesso di una tavola delle lunghezze delle corde di una circonferenza, servendosi della quale, dati certi elementi di un triangolo, gli altri potevano venir calcolati. La *Composizione matematica* o, come ordinariamente si chiama, l'*Almagesto* di Tolomeo ci tramandò i metodi con cui tale tavola venne costruita ed adoperata dagli antichi; per ciò — nonchè per altre ragioni su cui mi è forza sorvolare — l'analisi del grande codice astronomico dei Greci deve occupare un bel posto nel corso del quale vado svolgendo il programma: se l'insegnante avrà cura di segnalare le proposizioni di trigonometria sferica note al tempo in cui esso venne redatto, e quelle che furono aggiunte poi, riuscirà ad agevolare ai suoi discepoli il maneggio di un importante ramo di matematiche col quale pochi hanno oggi dimestichezza, e se egli non si isdegnerà di arrestarsi sull'algoritmo usato da Tolomeo, li famigliarizzerà coi mezzi usati dai Greci per effettuare i calcoli aritmetici.

E qui mi sia concesso di attrarre l'attenzione dei valorosi colleghi che a me d'intorno veggo sul metodo adoperato — certamente non inventato — da Tolomeo per stabilire i teoremi fondamentali della trigonometria sferica. (*) Il pernio attorno al quale si aggira tutto il congegno da lui architettato è il noto teorema di Menelao sul triangolo sferico tagliato da una trasversale. Applicandolo convenientemente, il celebre astronomo arriva a risolvere un triangolo sferico in tutti i casi che incontra; similmente si potrebbe procedere negli altri casi. Ora poichè il teorema di Menelao sulla sfera è un'immediata conseguenza dell'analogo nella geometria del piano e questo si stabilisce mediante semplicissime considerazioni sopra triangoli simili, il procedimento espositivo di Tolomeo, grazie alla sua uniformità, alla sua forza ed alla sua semplicità, è dotato di un eminente valore didattico; ond'è sorprendente e deplorevole che esso sia stato abbandonato e poi dimenticato. Perciò io esprimo il voto che qualche prossimo espositore della trigonometria sferica, lasciando le usate forme, svolga completa-

(*) Più minuti ragguagli sopra tale argomento si troveranno nel III Libro della mia opera su *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, di prossima pubblicazione.

mente l'idea di cui si giovò Tolomeo, dandoci una trattazione completa di tale disciplina sulla base del teorema di Menelao; il giorno in cui tale desiderio sarà soddisfatto, verrà offerto un nuovo esempio degli utili insegnamenti che ancor possono dare le opere antiche, verrà illustrato il concetto che Leibniz esprimeva con le parole seguenti: *la verità è più diffusa di quanto si pensi, ma spessissimo è nascosta, avvolta, affievolita, mutilata, corrotta da aggiunte. Col rilevare le tracce di verità presso gli antichi ed i predecessori si caverà il diamante dalla sabbia, la luce dalle tenebre e si riuscirà a formare una filosofia perenne.*

Dopo questa breve digressione, che spero mi sarà perdonata, riprendo il filo interrotto della mia esposizione schematica della storia della geometria. Ed osservo che, mentre l'*Almagesto* di Tolomeo fa fede della somma di cognizioni sulla trigonometria sferica possedute dagli antichi, una analisi microscopica di molte altre opere appartenenti alla letteratura greca prova come ad essi non rimanessero sconosciute molte delle proposizioni che si considerano oggi come parti integranti della trigonometria rettilinea: basterebbe a dimostrarlo il fatto che, nel teorema di Tolomeo sul quadrilatero inscritto, si trovano, allo stato di germe in procinto di sbocciare, le formule per l'addizione e la sottrazione, la duplicazione e la bisezione delle funzioni circolari. Quantunque tali elementi sparsi non basterebbero a costruire per intero un trattato di trigonometria piana, pure essi devono venire segnalati ai giovani studenti, specialmente per merito del metodo con cui sono dimostrati i relativi teoremi, metodo schiettamente geometrico, che è in aperta opposizione con quello a cui accordano la preferenza i moderni, i quali trasformarono una disciplina essenzialmente geometrica, quale è la trigonometria, in un armeggio di formule ben disciplinate ed eleganti. Il raffronto fra i due metodi, ove sia fatto con la profondità sufficiente per raggiungere il grado di studio comparativo fra i due aspetti sotto cui si può considerare ed insegnare la trigonometria, famigliarizzando i futuri insegnanti con una importante questione didattica, porgerà loro senza dubbio vital nutrimento. Ad essi dovrebbe da ultimo essere fatto vedere per qual modo e per opera di chi sia avvenuta la sostituzione metodica dei *seni* alle *corde* e la conseguente trasformazione in una scienza completa delle poche sparse proposizioni trigonomiche note ai Greci e da essi applicate.

V.

A questo punto l'insegnante può dire di avere segnalate le principali vicende che accompagnarono l'evoluzione de' vari rami della geometria elementare. Tuttavia prima di considerare come esaurito il suo còmpito, oppure, se il tempo gli mancasse, come proemio alla storia dell'aritmetica, dovrebbe narrare la storia dei tre maggiori problemi che si proposero gli antichi, additando le più cospicue indagini che da essi rampollarono. A voi tutti è noto che il prof. Klein, in una serie di bellissime conferenze, già tradotte nelle principali lingue d'Europa ed aventi appunto l'intento di servire di base ad un trattato di amicizia, ad un'alleanza fra l'insegnamento medio ed il superiore, espose con la lucidità e la suggestività che caratterizzano ogni scritto di quel gran maestro, l'ultima fase di sviluppo di quei problemi. Ma anche le fasi precedenti, per l'influenza benefica che esercitarono e per i risultati importanti che diedero, meritano di venire accuratamente caratterizzate, ed io potrei suggerire, come aiuti a chi intendesse descriverle, non meno di tre pregievoli lavori nei quali le più antiche fra esse sono ottimamente delineate. (*) La descrizione delle altre non deve venir passata sotto silenzio, se non si vuol commettere una solenne ingiustizia. Ma per ciò sono necessarie estese ricerche sulle opere dei geometri posteriori a Descartes; se esse saranno condotte a dovere guideranno a conseguenze di qualche rilievo. Alcuni tentativi da me fatti in questo senso, servendomi soltanto delle opere di Huygens, mi autorizzano a garantire colui che vi si accingesse di non perdere tempo e fatica; e per non domandarvi di credere ad una semplice asserzione cito un fatto.

Chi di voi percorse in questi ultimi anni le *Nouvelles Annales* e il periodico *Mathesis* conoscerà una certa curva di cui i nostri vicini d'oltre Frejus hanno il monopolio, a cui essi danno il nome di « strofoide » e della quale scopersero una folla di proprietà notevoli e buon numero di applicazioni; però, quello che nessuno, per quanto mi costa, ha osservato si è che la strofoide appartiene tanto alla categoria costituita dalle curve risolutrici del problema della trisezione dell'angolo, quanto a quella formata dalle linee capaci di sciogliere quello della moltiplicazione del cubo. Orbene un'attenta lettura del carteggio di Huygens (**) rivela questo fatto interessante, facendo apparire il celebre geometra olandese pari a

...... quei che va di notte,
Che porta il lume retro e sè non giova
Ma dopo sè fa le persone dotte.

VI.

Tutte le idee che campeggiano nella matematica traggono, in ultima analisi, la loro origine da due osservazioni fondamentali. Consiste la prima nel constatare che qualsia corpo solido possiede, indipendentemente da tutte le sue qualità fisiche — colore, temperatura, stato elettrico, ecc. — una forma determinata, la quale, ove non intervengano violenti cause perturbatrici, è invariabile e quindi per quell'oggetto caratteristica. La seconda osservazione concerne un gruppo di

(*) REIMER, *Historia problematis de cubi duplicatione* (Gottingae, 1798); MONTUCLA, *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle* (2e éd., Paris, 1831); A STURM, *Das delische Problem* (Linz, 1895, 1896, 1897).

(**) *Oeuvres complètes de C. Huygens*, T. I (La Haye, 1887) p. 235 e 238. V. una mia noticina nel fascicolo di Dicembre 1898 del periodico *Mathésis*.

cose e consiste nel notare che, se si fa astrazione da tutte le proprietà fisiche di queste ed anche dalla loro forma, quel gruppo conserva un *quid* specifico che chiamiamo *numero* di quelle cose.

Il concetto di forma di un corpo scientificamente svolto diede vita alla scienza dell'estensione, alla *geometria;* invece l'idea di numero è la madre dall'*aritmetica* tutta.

Le esperienze quotidiane di qualsiasi persona intelligente guidano tanto spontanemente alla concezione delle più semplici figure geometriche e suggeriscono così naturalmente l'idea d'investigare le loro proprietà, che è impossibile dire chi sia stato il primo individuo od il primo popolo che coltivò la geometria, e quale sia stata l'epoca che la vide nascere.

Similmente, le occasioni al contare sono tanto frequenti e la relativa operazione è talmente connaturata al nostro meccanismo mentale, che vano riuscirebbe ogni tentativo di redigere la fede di nascita dell'aritmetica. Ben se n'avvide Platone, il quale, a chi pretendeva si attribuisse ad un tal Palamede l'arte del conteggio, argutamente rispose: « E che forse Agamennone, senza Palamede, avrebbe ignorato quanti piedi aveva!.... » Ma se, pertanto, si cercherebbe indarno di scoprire chi prima dei Greci, prima dei Fenici — che i Greci salutavano loro maestri di aritmetica — abbia coltivata la scienza dei numeri, è possibile e ad un tempo sommamente interessante il determinare quali mezzi gli uomini si creassero per effettuare, a voce o per iscritto, i calcoli sempre più complicati che il consorzio civile ed i progressi della scienza imponevano. Notoriamente tali mezzi sono la numerazione parlata e la numerazione scritta. La descrizione di essi dovrebbe formare — secondo il mio modo di vedere — il proemio indispensabile ad un corso sulla storia dell'aritmetica e dell'algebra; proemio nel quale dovrebbe prender posto una notizia particolareggiata dei segni numerali usati dai popoli più antichi, dai Greci e dai Latini, una esposizione del problema che Archimede ha risolto nell'*Arenario*, ed una narrazione del come vennero introdotte in Europa le cifre oggi in uso presso tutti i popoli civili.

Come alla descrizione di qualunque macchina deve tener dietro l'indicazione del modo di servirsene, così all'enumerazione dei principali sistemi di numerazione deve seguire una esposizione dell'aritmetica pratica presso gli antichi — con speciale riguardo alla estrazione delle radici quadrate e cubiche — e presso i moderni: da essa si dovrebbe apprendere l'invenzione e l'uso delle frazioni continue e la *instauratio ab imis fundamentis* che l'aritmetica pratica subì per l'invenzione dei logaritmi; altri giudichi se qui potrebbe trovar posto un cenno sulle macchine aritmetiche, che, a partire dall'epoca di Pascal, vennero inventate. Quello che a me pare si è che tale parte del corso che propongo, ove fosse fatta a dovere, varrebbe forse a vincere la ripugnanza pei calcoli aritmetici, assai comune nei giovani e così lamentata, ripugnanza che rende deserti tanti nostri osservatori astronomici e che a molti fa apparire falsa od almeno esagerata la esclamazione di Gauss: « quale e quanta poesia vi è in una tavola di logaritmi! »

Risposto così alla domanda « con quali mezzi si è calcolato nelle varie epoche? », lo storico deve abbandonare l'aritmetica pratica per l'aritmetica teorica, a fine di rispondere all'altra domanda « che cosa conobbero i differenti popoli, in varie epoche, intorno ai numeri ed alle loro proprietà? » A questo scopo comincerà a segnalare il misticismo di cui venne ravvolta l'aritmetica nella scuola di Pitagora, senza tacere come ivi siasi intuito essere tutti i fenomeni fisici governati da leggi matematicamente esatte, come pertanto in quella scuola esista in embrione il nostro indirizzo scientifico. seguendo il quale si cerca in ogni fenomeno l'elemento numerico e si ritiene, con Leonardo da Vinci, che le scienze siano tanto più vere quanto meglio s'informano ai metodi della matematica. Narrerà poi come l'aritmetica — forse sotto l'influenza delle esortazioni e dei consigli di Platone — abbia cambiato aspetto per presentarsi, prima quale una appendice della geometria in Euclide, in seguito, quale una disciplina autonoma in Nicomaco e Diofanto.

Sopra questo secondo scienziato farà mestieri arrestarsi a lungo, giacchè la sua maggiore opera fa, rispetto all'aritmetica ed all'algebra, un ufficio perfettamente analogo a quello che. nella storia della geometria, rappresentano gli *Elementi* di Euclide. Ivi infatti si trova la prima radice del nostro algoritmo algebrico; ivi un gran numero di problemi di analisi determinata ed indeterminata risolti con artifici estremamente ingegnosi; ivi applicate parecchie proposizioni dell'odierna teoria dei numeri. Sicchè da essa traggono origine due rami fondamentali di matematica: l'algebra e la teoria dei numeri. La prima nacque quando i germi esistenti nell'opere di Diofanto vennero fecondati al contatto di popoli Orientali; la seconda divenne una vera « chimica dei numeri » (*) quando si avvertì la distinzione fra problema determinato e problema indeterminato e quando si vide essere assai più interessante lo scoprire le proprietà dei numeri, che industriarsi a sciogliere questioni scelte a capriccio. La prima ebbe il suo maggiore sviluppo quando venne trasportata in Europa; la seconda celebrò i suoi maggiori trionfi quando Fermat, studiando appunto l'opere di Diofanto, enunciò quelle bellissime proposizioni, a dimostrar le quali si sforzarono geometri di primo ordine quali Eulero e Lagrange, Legendre, Dirichlet e Kummer. Seguendo minutamente la figliazione di queste idee, riannodando sapientemente l'antico col nuovo, lo storico arriverà a mettere in luce la continuità perfetta del pensiero matematico attraverso i secoli.

Ma l'opera di Diofanto gli suggerirà altresì una bella questione da consigliare ai suoi discepoli: concedetemi, o Signori, di segnalarvela prima di prendere commiato da Voi. I problemi trattati da Diofanto sono in gran parte indeterminati; il geometra greco ne trova di regola soltanto una soluzione particolare, però con metodi che quasi sempre permettono di ottenerne infinite altre. Per l'analista moderno ciò non basta; egli esige si assegni il grado di generalità dei risultati conseguiti e si dia la massima estensione a quelli che ancor

(*) Espressione di Kummer.

non la possiedono; in alcuni casi tale complemento indispensabile all'opera di Diofanto venne somministrato da Eulero; ma, nella maggioranza dei casi, quella questione si presenta dinanzi agli occhi dell'esploratore animoso col fascino ineffabile emanante da una terra incognita.

Quanto ebbi l'onore di esporvi, o Colleghi egregi, sarà senza dubbio sufficiente a chiarire sopra quale piano io vorrei architettate le lezioni universitarie sulla storia delle matematiche elementari. Se non discendo a particolari più minuti, gli è che temo di abusare del Vostro tempo prezioso, distraendovi da occupazioni più feconde; gli è che sono certo essere tutti Voi in grado di colmare le lacune che ho lasciate, di colorire il quadro del quale non volli tracciare se non le linee fondamentali, di valutare le mie proposte e quindi giudicare se siano da accettare o da respingere, da appoggiare o da combattere. A Voi che spendete tutte le forze del Vostro ingegno alla diffusione del sapere, al miglioramento delle condizioni intellettuali della nostra Gran Madre, io volli sottoporre almeno uno schizzo delle idee, pel trionfo delle quali da alcuni anni vo combattendo; a Voi che, nelle controversie di didattica matematica, io considero come tribunale supremo. Ed ora che la mia parte è finita, nella coscienza della purezza delle mie intenzioni, colla fede incrollabile di un apostolo fervente, io attendo serenamente, ma non senza trepidanza, il Vostro verdetto.

RELAZIONE SULLA PRIMA QUISTIONE

proposta dal Comitato dell'Associazione "MATHESIS"

Data la possibilità della fusione della geometria piana colla solida, proporre un programma che permetta agli insegnanti la libera scelta fra il metodo della fusione e quello della separazione.

Egregi Colleghi,

La questione 1ª non ha, secondo me, una grande importanza sostanziale; per questo la mia relazione sarà fredda, e non avrei accettato di farla, se non fossi convinto che l'indifferenza del relatore giovi più che non nuoccia alla ricerca del meglio. Io non sono separatista, perchè, avendo un anno (1886-87) adottato il De Paolis nel R. Liceo V. E. di Palermo, ho potuto constatare che il metodo della fusione offre dei vantaggi; ma, per gli inconvenienti che pur presenta questo metodo, non sono neppure fusionista. Certamente non si può dire che un semplice ravvicinamento di proposizioni affini, nel piano e nello spazio, sia conveniente per ogni riguardo, perchè, per fissare stabilmente e con chiarezza nella mente degli scolari le diverse proprietà ed i varii ragionamenti, giova molto il darne di simili a distanza per ribadirle quando il ricordo potrebbe esser confuso ed affievolito od anche scomparso: e mi pare d'altra parte, che in un insegnamento elementare non si possa trarre gran profitto dal principio di dualità.

A me parrebbe opportuno adottare la fusione solo dove si presenta spontanea, per es. nella simmetria nella similitudine, che si fondano sostanzialmente, nel piano e nello spazio, su queste due proposizioni: 1ª due angoli a lati paralleli di stesso verso sono uguali, 2ª le diagonali d'un trapezio si tagliano nel rapporto delle basi. Per poter far questo basterebbe esporre in principio, nelle generalità, le proposizioni più semplici sull'intersezione di piani e rette, ciò che permetterebbe anche di ricorrere allo spazio per dimostrar semplicemente delle proposizioni di planimetria.

Riconosco peraltro, e questo anzi mi par quasi indiscutibile, che la libertà di scelta nel metodo, permettendo all'insegnante di seguire la via ch'egli preferisce, renderebbe l'insegnamento più spontaneo e più vivo; cosicchè, per gli scolari, riuscirebbe meno pesante e più efficace. Questa ragione è più che sufficiente per mettere in evidenza l'importanza didattica della questione 1ª, la quale si risolverebbe immediatamente, se la distribuzione della materia d'ogni insegnamento tra i varii anni di corso si potesse fare affatto arbitrariamente in ciascuna scuola, e presenta invece serie difficoltà, se, specialmente per evitare in parte gli inconvenienti causati dai traslochi, si esige che l'accennata distribuzione sia la stessa negli istituti congeneri. È appunto in questo senso che, per l'ordinamento attuale della scuola e per durevoli ragioni d'equità, va studiata la questione; ed in questo senso la studiano infatti quelli, che se ne occupano o direttamente od indirettamente.

Il Prof. BETTAZZI (*Period. di Mat.* 1891) propone che l'insegnamento della Geometria nelle scuole classiche sia così ripartito:

1° Anno di liceo (o 5ª di ginnasio). Generalità. Uguaglianze e disuguaglianze. Relazioni di posizione.

2° Anno di liceo (o tra 1° e 2°). Teorie dell'equivalenza, delle proporzioni e della misura.

E si potrebbe proporre la stessa ripartizione per il primo biennio dell'istituto tecnico.

Il Prof. BIASI presenta un saggio di programmi per l'insegnamento della geometria nelle scuole medie superiori, pei due metodi della fusione e della separazione. Ripartisce l'insegnamento in tre anni.

Il Prof. BUZZI osserva che il metodo della fusione è già in vigore, in certo qual modo, nei giardini d'infanzia e nelle scuole elementari: dice che solamente studiando nell'evoluzione storica lo sviluppo parallelo della planimetria e della stereometria, si può trovare una guida sicura per ricavare metodo e programma.

Il Prof. CATANIA, che pratica da tre anni il metodo della fusione nel Liceo e non ha potuto fare la stessa cosa nell'istituto tecnico, dove pure insegna, ritiene che la questione, così come è posta, non possa aver soluzione soddisfacente. Presenta programma ed orario per l'insegnamento della Matematica nelle varie scuole, classiche e tecniche.

Il Prof. IMPERATO presenta un programma di geometria unico pei licei e pei tre primi anni d'istituto tecnico. È separatista per esperienza.

Il Prof. PALATINI presenta un programma di geometria diviso in due anni.

Questi cenni si riferiscono alle comunicazioni trasmessemi dalla Presidenza di Mathesis: le cinque ultime son manoscritte d'occasione. Tutte, se s'eccettua quella del Prof. BUZZI, che non dà nessun programma, e quella di BIASI, che mette nel 2° anno la misura nel piano, pongono in ultimo tutta la teoria della misura. Acconsentendo che la misura sia trattata in fine, si potrebbe avere una soluzione comoda anche attenendosi per es. agli *Elementi di Geometria* dei Prof. Lazzeri e Bassani, che sono didatticamente e scientificamente ben fatti. Molti però dei separatisti ed alcuni dei fusionisti considerano come un grave inconveniente il posticipare la teoria della misura. Ho quindi preparato un nuovo programma da discutersi cogli altri, ed è questo:

1° Anno (liceo ed istituto tecnico). Generalità sulle figure piane e solide: proprietà, uguaglianze e disuguaglianze. Intersezione di circoli, rette, piani e sfere. Massima comune misura. Rapporto razionale ed irrazionale. Area di poligoni. Quadrati e rettangoli di segmenti divisi in parti. Rapporti di lati di triangoli fra loro equiangoli. Teorema di Pitagora e conseguenze.

2° Anno (liceo ed istituto tecnico). Volume di poliedri. Ciclometria e Sferometria. Poligoni e poliedri regolari.

3° Anno (liceo ed istituto tecnico). Simmetria. Proporzionalità. Similitudine. Teorie complementari di Geometria piana e solida.

4° Anno (istituto tecnico). Sezioni coniche.

La parte assegnata al 1° Anno, che può sembrare eccessiva, si svolgerà invece molto comodamente, se, insegnandola, si seguiranno quei metodi semplici, che si convengono ad una prima classe di scuola media. Pare, da qualche tempo, che tutti gli sforzi sian diretti a render difficile ed antipatico, per gli scolari, lo studio della Geometria. Si posticipa l'introduzione d'alcuni postulati e si complicano altri, rendendo così necessarie delle discussioni relativamente oscure e lunghe, che si potrebbero evitare, e creando difficoltà, che allungano ed oscurano molte dimostrazioni. Mi sembra che le verità fondamentali si debbono porre il più presto possibile per poterle utilizzare subito, e si debbono dare le proprietà veramente utili con semplicità e chiarezza, curando solo che le dimostrazioni siano rigorose. Le difficoltà create artificiosamente, disgustando lo scolaro, l'allontanano dallo studio ed assorbono del tempo, che dovrebbe invece essere impiegato per vincere le difficoltà inevitabili, per es. per svolgere con sufficiente chiarezza e con rigore la teoria dei rapporti irrazionali. La riduzione dei postulati, l'esame delle varie maniere di concatenazione, lo studio delle questioni astruse si deve pur fare nelle scuole, ma in quelle di magistero, di dove debbono uscire giovani preparati per l'insegnamento medio e pronti a rispondere alla feconda curiosità degli scolari più intelligenti. L'insegnamento elementare deve essere diretto dall'intuito, e quello medio deve accettar per guida l'utilità pratica. Soltanto l'insegnamento superiore può varcare i confini del sensibile ed elevarsi fin dove può portarlo la libera intelligenza.

Le teorie complementari sono poste in fine del 3° anno, in fine cioè dell'ordinario Corso di geometria elementare. Per esse sarà bene concedere libertà all'insegnante, che potrà anche ritornare su qualche argomento, per es. su quello dell'equivalenza, per far vedere da quali postulati possano venir liberate alcune proposizioni, ciò che servirà anche a risvegliare negli studenti il criterio critico-analitico ed a vivificare in essi l'amore per la matematica pura.

La mia relazione è finita. Ora non resta che discutere; ed, affinchè la discussione non rimanga senza frutto, mi parrebbe conveniente la seguente procedura:

1°. Rispondere alla domanda: è conveniente concedere possibilmente all'insegnante la libertà di scegliere tra il metodo separatista ed il fusionista?

2°. Fissare un programma, che stabilisca con precisione, ma molto concisamente, la ripartizione tra i varii anni di corso dell'insegnamento della geometria piana e solida.

3°. Proporre la compilazione di un programma molto dettagliato, che sia sviluppo di quello fissato, e far istanza presso il Ministero della P. I. perchè solleciti questa compilazione.

Se riusciremo in questo, allora saremo a buon punto e potremo gioirne per la nostra *Mathesis*.

Prof. Francesco Giudice.

RELAZIONE SULLA TERZA QUISTIONE

proposta dal Comitato dell'Associazione " MATHESIS „

Libri di testo dal punto di vista scientifico e didattico. Errori che vi dominano, mezzi perchè si limiti, per quanto si può, il danno che tali errori arrecano alla scuola.

EGREGI COLLEGHI,

Pochi soci hanno presentato in tempo qualche studio su questa III questione: i professori BUZZI e CARDOSO-LAYNES che hanno mandato direttamente alcune osservazioni al Presidente della nostra Associazione, e il prof. BETTINI che fece pervenire a me un suo scritto prima dell'adunanza tenuta a *Recanati* nel giugno scorso. Ma, considerazioni importanti sull'argomento si son venute facendo sempre e in lavori scientifici e didattici, e un po' anche nelle adunanze parziali promosse dall'Associazione *Mathesis;* cosicchè, o egregi Colleghi, io ho avuto il modo di conoscere i pensieri di parecchi altri di voi, e di essi mi son giovato assai per questo mio studio.

Per seguire un certo ordine, credo conveniente parlar dapprima rapidamente delle scuole primarie e poi di quelle secondarie, benchè alcune considerazioni d'indole generale possano valere sì per le une che per le altre.

*
* *

Riguardo alle scuole elementari, giova anzitutto, per poter poi correre più dirittamente, e senza inciampi, nella discussione, rispondere alla domanda: i libri di testo hanno da essere obbligatori in tutte le classi? La Commissione Centrale si pronunziò chiaramente su tale questione fin dal settembre 1894, e le proposte ch'essa fece furono subito approvate e attuate dal Ministero. Si disse in sostanza: come volete che i bambini della prima classe, che alla fine dell'anno scolastico arrivano sì e no a legger qualche parola senza sillabare, che quelli della seconda e della terza per i quali la lettura è ancora una cosa quasi tutta materiale, poco più di un semplice esercizio degli occhi e degli organi vocali, possano comprendere un libro d'aritmetica? Costretti a studiarne qualche pagina, essi non riusciranno che a fare un esercizio mnemonico di nessuna utilità: impareranno, per es., a recitare correntemente definizioni più o meno scientifiche dell'unità e del numero, come inopportunamente si trovano in qualche trattatello, ma ciò non li aiuterà affatto a risolvere, con la necessaria speditezza, i quesiti più comuni della vita. Quindi, con saggio provvedimento, si stabilì di non permettere, nelle scuole elementari inferiori, l'uso, come libro di testo, di un trattato d'aritmetica. « Soltanto la viva voce del maestro, si disse giustamente, (*) « soltanto l'uso giornaliero e graduale della lavagna può permettere « di adattare lo studio dell'aritmetica alle condizioni delle scuole e « di farlo seguire parallelamente allo sviluppo dell'intelligenza, per « modo che questo le dia e ne riceva ad un tempo, aiuto; e solo « per tal via sarà possibile, dall'apprendimento meccanico delle più « elementari osservazioni, pervenire a poco alla volta a raccogliere « le cognizioni apprese in regole generali, che non siano formule « astratte insegnate a priori, ma il risultato di elementari osserva-« zioni, abilmente suscitate dal maestro su fatti comuni e sempli-« cissimi, e perciò atte ad essere conservate nella memoria ».

Quanto però al corso elementare superiore fu proposto e approvato che l'insegnamento orale del maestro sia aiutato e fermato nella mente degli alunni mediante la parola scritta d'un libro, al quale gli alunni stessi possano e sappiano ricorrere quando per il succedersi delle nozioni acquistate, o per il tempo trascorso, o per altra ragione, l'impressione ricevuta dalla viva voce del maestro si sia affievolita o mescolata con altre per modo da lasciar sorgere dubbiezza o confusione.

A queste disposizioni, tuttora in vigore, si opporrebbe, per la parte che riguarda il corso elementare superiore, il prof. Buzzi che si dichiara contrario ai libri di testo in generale. « Il più delle « volte, egli dice, il libro non rappresenta le idee dell'insegnante, « la cui opera rimane intralciata. O il professore elimina il testo, « o il testo elimina il professore. Il libro costituisce il pericolo di « esercizi puramente mnemonici, fomentando la disattenzione in « classe, perchè la lezione si trova su di esso ». Ciò in parte è giusto; ma mi pare che il prof. Buzzi parli in modo un po' troppo assoluto. Gli si potrebbe anzitutto rispondere col dilemma. O l'insegnante è capace, o no. Se è capace, comincerà collo scegliere un libro che rappresenti il più che è possibile le sue idee, e che quindi non intralci del tutto la sua opera. All'efficacia dell'insegnamento concorreranno anzi, allora, due forze: quella dell'insegnante e quella del libro, e questo e quello si aiuteranno a vicenda, e, allorchè se ne presenterà l'occasione, ciascuno farà l'errata-corrige all'altro. L'insegnante incapace non potrà, naturalmente, che far male in ogni caso; peggio però farà senza nessuna guida. E neppure si rimedierebbe così alla lamentata disattenzione; chè il lavoro materiale dello scrivere non è nell'alunno quasi mai accompagnato da concentrazione vera. Si andrebbe incontro ad una perdita non indifferente di tempo; si rinuncierebbe al vantaggio di quell'esercizio continuo che conduce gradatamente l'alunno ad intendere anche un libro di scienza. Che dire poi dei tristi effetti che negli insegnanti svogliati produrrebbe la completa abolizione del testo? Chi parlerà più a costoro

(*) V. la relazione della Commissione per i libri di testo per le scuole elementari (*Bollettino del Ministero della P. I. a. 1894*).

degli utimi metodi d'insegnamento, riconosciuti migliori? Quanto alle scuole elementari, la proscrizione del testo d'aritmetica dal corso superiore sarebbe pericolosa anche perchè lascierebbe ai maestri una completa libertà nella scelta d'un libro da poter servire ad essi di guida nell'insegnamento. I maestri hanno tutti, chi più, chi meno, bisogno d'una guida. E potrebbe avvenire, più facilmente di quanto ora non accada, appunto perchè non si eserciterebbe nessun controllo diretto, che molti di essi, o per indolenza, o per ignoranza, o per risparmio di spesa, accettassero per buono qualunque libro, anche pieno zeppo di errori, e ad esso conformassero il loro insegnamento.

Ammesso dunque che, per l'una o l'altra delle ragioni esposte, se non per tutte insieme, ci voglia il testo pel corso elementare superiore, domandiamoci: come dovrà esser fatto un tal libro? Naturalmente, e a questo punto non potremo che trovarci tutti d'accordo, esso dovrebbe svolgere il programma intero, in modo pratico e facile, senza offender la scienza, cui dovrebbe sempre inspirarsi; esser scevro non solo da errori, ma anche da improprietà di linguaggio e da ogni inesattezza; informarsi al metodo oggettivo e sperimentale; dare equo e proporzionato svolgimento alle varie parti; contenere degli esercizi graduati, pratici, interessanti, mai quelli ingegnosamente complicati che spaventano lo scolaro e lo disamorano dallo studio.

Ma, salvo poche eccezioni, i libri che entrano nelle nostre scuole non son fatti così. Si crede da molti che per trattare cose elementarissime basti un po' di pedagogia. Nulla di più falso. Occorre esser veri maestri di metodo e di esperienza; occorre sopratutto esser padroni della materia. La Commissione Centrale dei libri di testo, nell'esame che fece l'anno scorso dei trattati d'aritmetica delle scuole elementari, constatò che fra essi primeggiano per ordine, chiarezza e precisione, per l'appunto quelli che son opera di matematici valenti. E invero, i 12 libri che si approvarono definitivamente portano nomi in generale notissimi anche nel campo scientifico; mentre ben pochi degli autori dei 16 trattati di cui, indulgentemente, si permise l'uso per un anno, figurano nell'annuario della Pubblica Istruzione tra gl'insegnanti di matematiche.

Una caccia piuttosto accanita delle inesattezze e degli errori che ricorrono in tali libri si è andata facendo in questi ultimi tempi. Ne rilevò parecchi gravi il prof. Bustelli nella sua opera *l'insegnamento dell'aritmetica e della geometria nelle scuole primarie e popolari* (*); ne feci una lista anch'io alcuni anni sono in un più modesto lavoro (**); se ne sono pubblicati elenchi nel Bollettino dell'Ass. « *Mathesis* » e nel periodico « Il *Pitagora* »; ultimamente ne ho trovata una raccolta più estesa in un recente libro del professore Frizzo (***).

Passiamo insieme in rassegna alcuni di questi spropositi. I più lamentati, e non pertanto i più sparsi, sono quelli che provengono dalla confusione dei numeri sui quali si opera colle grandezze che

(*) Città di Castello, Lapi, 1889.
(**) *Sull'insegnamento dell'aritmetica pratica nelle scuole primarie*, Fermo, Baker, 1895.
(***) *L'insegnamento della matematica nelle scuole primarie e popolari*, Verona, F.lli Drucker, 1898.

essi rappresentano. Non soltanto chilometri che si moltiplicano per giorni; chilogrammi che moltiplicati per 10, 100, 1000 si trasformano in *hg, dg, g;* metri lineari che moltiplicati per metri lineari si cangiano in metri quadrati; ma, metamorfosi più strane ancora, ettolitri che, divisi, diventano barili; arance che saltan fuori, non si sa come, da divisioni di lire. Nella risoluzione dei problemi si ritorni al ragionamento scritto, valido sussidio anche alla composizione italiana, e si raccomandi sopratutto che, nelle indicazioni delle operazioni, non si scrivano le diverse specie delle grandezze rappresentate dai numeri, se si vogliono evitare tali errori. Mentre le operazioni dell'aritmetica non si fanno o non si dovrebbero fare che sui numeri, i nostri scolari, dice umoristicamente il prof. BETTINI, sommano litri come vecchi beoni, sottraggono lire come tanti cassieri, moltiplicano uomini rubando così il mestiere alle loro madri!

Comunissime nei libri destinati alle scuole elementari sono le *false eguaglianze* colle quali si vorrebbero riepigolare delle serie di operazioni.

Ma errori più gravi si commettono in geometria. — Proposti e risoluti da maestri, da libri e da giornali didattici si trovano spesso dei quesiti in cui, dati ad arbitrio due numeri, si chiede l'area del poligono regolare di dato numero di lati, colla condizione che uno di quei numeri sia il valore del lato, l'altro quello dell'apotema, e ciò senza punto *interpellar le parti,* come direbbe il prof. BUSTELLI, per vedere se esse andrebbero d'accordo. Affinchè nel proporre gli esercizi relativi all'area dei poligoni regolari, il maestro non commetta questi deplorevoli errori sarebbe bene che in ogni libro di testo fosse indicato, per alcuni poligoni regolari, il rapporto tra il valore dell'apotema e quello del lato.

Molti confondono le regole per la misurazione delle superficie dei solidi con quelle per il calcolo dei loro volumi. Ho visto più volte, per es., trovar l'area della superficie laterale della piramide regolare moltiplicando il perimetro della base per metà dell'altezza; e, *viceversa,* trovarne il volume moltiplicando l'area della base per un terzo dell'apotema!

Ma dove si pecca assai più è nelle definizioni di cui voglio darvi alcuni saggi. — *Cilindro circolare è un solido che ha per basi due circoli e lateralmente una superficie curva.* Forse l'autore avrà voluto generalizzare così la definizione per avere il piacere di dire che anche una botte, per es., ha la forma cilindrica! — *Cono circolare è un solido che ha per base un cerchio e lateralmente una superficie curva che va sempre più restringendosi finchè termina in un punto.* Non si può dir meglio di così, se ad ogni costo si vuole che anche un corno, per es., abbia la forma conica! — *Sfera è un poliedro regolare di un numero infinito di facce che saranno tanto piccole da confondersi l'una coll'altra.* Non importa se non si è così in armonia col fatto che di poliedri regolari non se ne hanno che cinque! — Mi pare che questi saggi possano bastare! Ora io domando: ma non sarebbe meglio di non darle affatto, nelle scuole elementari, le definizioni, piuttosto che correr pericolo di metterne insieme come queste? Che male vi sarebbe? Non basta che nella mente degli alunni restino chiari ed esatti i concetti delle varie forme geometriche e le loro principali proprietà, cui si perviene con continue presentazioni e descrizioni delle figure? La definizione scientifica sarà indispensabile nelle scuole secondarie superiori, ove ha da essere il fondamento della ragionata ricerca delle proprietà relative alla figura di cui si tratta. Nelle scuole primarie, ove è da sfuggirsi tutto ciò che è formalismo, essa è inutile, perchè nulla aggiunge in realtà al concetto che l'alunno si è formato, in altro modo, di ciascuna figura. Che importa, ad es., che lo scolaro non sappia recitare una definizione esatta della piramide, quando egli sa rintracciare questo solido in mezzo a molti altri, e quando sa farne, a mano libera, un disegno da cui si scorge che ha conoscenza esatta della figura?

Ma torniamo ai libri di testo. — Come tener conto di tutte le improprietà di linguaggio, di tutte le osservazioni inopportune per un insegnamento primario che in molti di essi si contengono? Si confonde quasi sempre l'*area* colla *superficie,* il *volume* col *solido.* In un trattatello, invece di *misure delle superficie* ho trovato *misure delle aree!* Non si dovrebbe dire neanche *misure dei volumi,* ma *misure dei solidi.* E poichè tra lunghezza e linea, v'è convenzionalmente la stessa differenza che tra area e superficie, tra volume e solido così si dovrebbe dire che il *m,* il *dm* sono *misure lineari,* e non già *misure delle lunghezze.* — In un libretto, in cui l'A., molto inopportunamente, vuol fare sfoggio di erudizione matematica presa senza dubbio a prestito da qualche libro di scienza, ho trovato: *la retta, secondo alcuni valenti matematici, non si può definire; due punti* NON CONSECUTIVI *di una retta la dividono in tre parti;* e perfino: *si badi che una quantità divisa per zero è eguale all'* ∞ ! Non bisogna scherzare coll' ∞ ! Con questa frase, che è del prof. CERRUTI, il professor BUSTELLI sintetizzò le censure contro i concetti nebulosi sempre, morbosi spesso, e, comunque, prematuri in un insegnamento elementare, di poligono infinitilatero, numero infinito di lati infinitesimi, e via dicendo, di cui qualche autore vuol far uso nel parlar di cerchi, di coni, di cilindri e di sfere. — Dalla raccolta di forme erronee ed inesatte che si trova nell'opera citata del prof. FRIZZO, tolgo: In un voluminoso corso di Pedagogia premiato da un congresso pedagogico è riportata la tavola seguente:

$$m^3 = \text{chilolitro} = \text{tonnellata di mare}$$
$$\text{ettolitro} = \text{quintale metrico, ecc.!}$$

Avevo ragione di dire che non basta saper un po' di pedagogia per fare un buon trattato d'aritmetica!

E, da ultimo, per darvi un'idea di quanti e quali errori si possano accumulare in uno stesso libro, vi riferirò alcune delle tante *corbellerie geometriche* messe giù in un trattatello da persona che vive in mezzo ai maestri: da un ispettore scolastico. Non sarà, egregi Colleghi, un *per finire* breve, nè esilarante, ma per questa volta avrete pazienza. Quest'ispettore ha dato anch'egli le definizioni generalizzate del cono e del cilindro: quelle del corno e della botte! «La « superficie è un piano chiuso tra diversi lati. Lo spazio chiuso tra le

« linee di una figura si chiama area. Volendo trovare approssimativa-
« mente l'area d'un piccolo segmento (*spazio* compreso tra una corda e
« il suo arco) basta moltiplicare la corda per metà della saetta. Trat-
« tandosi di grandi segmenti, l'area si ottiene moltiplicando la corda
« per $\frac{3}{4}$ della saetta. Questa regola anzi è preferibile, come quella
« che ci fa avere un valore dell'area del segmento assai prossimo
« al vero. *(Chi si contenta, gode!)*. — La parte più alta della pira-
« mide, che finisce in punta, si chiama vertice, e quelle dove le
« facce si uniscono si dicono i lati. — Il prisma è un corpo termi-
« nato da due basi eguali e da tante facce rettangolari quanti sono
« i lati di queste basi. — Il poliedro si dice regolare, quando ha
« tutte le facce eguali. — Un piano che taglia la sfera passando
« per il suo centro si dice circolo massimo, ... ». — Ma è ormai tempo di passare in più *spirabil aere!*

Questi, egregi Colleghi, sono alcuni degli errori più comuni che compariscono in molti libri destinati a maestri e a fanciulli, errori gravi, come vedete, che gli alunni portano con sè nelle scuole secondarie, e che difficilmente si riescono poi ad estirpare. Or, quali mezzi si dovranno mettere in opera per limitare, più che si può, il danno che essi arrecano? Anche quando si sarà riusciti ad ottenere che nella scuola entrino soltanto i libri buoni, e a ciò penserà la Commissione centrale, rimarranno i giornali didattici, nei quali coloro che si erigono a maestri dei maestri incorrono anch'essi molto spesso negli stessi spropositi. E questi bisognerà tener d'occhio il più che è possibile, e, senza riguardi, mettere all'indice, quando se ne siano riconosciuti i difetti. Ma è necessario che tutti ci sottoponiamo con buona volontà a questo lavoro di depurazione. Non bisogna disdegnare, egregi Colleghi, l'abbicci dell'insegnamento che, anche in Italia, ha attratto matematici valenti come il PINCHERLE, il GERBALDI, il FRATTINI. Quando si pensi che milioni di persone debbono conoscere le operazioni fondamentali dell'aritmetica, mentre a pochi soltanto può interessare il teorema di Pitagora, ognuno si persuade che è della più alta importanza rivolgere le nostre cure ai primi elementi.

L'Associazione « Mathesis » deve esercitare un'influenza diretta, energica, continua sull'insegnamento della matematica nelle scuole elementari, senza di che essa non potrà mai raggiungere completamente lo scopo per cui è sorta. E per ciò non basta far discussioni tra noi per accordarci sui metodi migliori che si devono seguire nell'insegnare. Occorre che i nostri studi sian fatti conoscere, per la parte che li riguarda, a tutti i maestri. Naturalmente, quest'intento non si potrà raggiungere pubblicando soltanto nel Boll.° di « Mathesis » i resoconti delle nostre adunanze. Ben altro ci vuole! Si tratta, voi lo sapete, di più di 50 mila maestri! Il mezzo migliore potrebbe essere, secondo me, quello d'un periodico d'aritmetica e di geometria fatto esclusivamente per uso degli insegnanti elementari e degli allievi delle scuole normali; periodico che dovrebbe sorgere e vivere sotto gli auspici della nostra Associazione, e in cui i soci più esperti nella didattica delle scuole primarie dovrebbero non soltanto suggerire le norme per un buon insegnamento, ma rilevare altresì le inesattezze e gli errori che ricorrono in libri e periodici, per mettere in guardia i maestri. L'Associazione « Mathesis » non dovrebbe perciò sobbarcarsi ad alcuna spesa; ma dovrebbe, ben inteso, rifuggir anche da qualunque atto che, pur lontanamente, potesse far sospettare essere in noi l'intenzione di fare una speculazione. Se ne affidi la pubblicazione a qualche Casa editrice che si assuma l'obbligo di stampare il giornaletto a suo danno o vantaggio, colla condizione principale che il prezzo d'abbonamento sia minimo, inferiore a quello che si usa per gli altri periodici congeneri. L'autorità di tal periodico non potrebbe esser disconosciuta da alcuno. L'Associazione « Mathesis », benchè non conti tra i soci che pochi insegnanti di scuole normali (6 su 147, e ciò è male), accoglie fortunatamente persone di riconosciuta valentia nella didattica delle scienze esatte, alcune delle quali, non solo per la fama acquistatasi con importanti lavori, ma anche per l'alto posto che occupano, sarebbero in grado di far presto conoscere il periodico, e di assicurarne la vita. Ricordo in especial modo il Bustelli, il Valeri, il Frizzo, regi provveditori agli studi. Col concorso di queste forze il nostro intento non fallirebbe!

*
* *

Passiamo alle scuole medie. — Qui, per fare uno studio esatto, ordinato sarebbe bene dividere i libri di testo in vari gruppi, potendo essi riferirsi o all'insegnamento pratico dell'aritmetica dei corsi inferiori, o all'insegnamento razionale, della matematica in genere, di quelli superiori, o anche all'insegnamento pratico-razionale della geometria nelle scuole tecniche e professionali. Ma mi pare che in questo modo il lavoro riuscirebbe assai lungo; e io devo pur pensare, egregi Colleghi, a non annoiarvi troppo! Farò dunque così: fisserò rapidamente alcuni criteri generali che, fin dalle prime pagine, dovrebbero regolare i libri di testo per ciascuno dei tre gruppi; poi parlerò, nello stesso tempo, senza confondere, degli errori scientifici e didattici che si commettono dai libri in genere e in particolare da alcuni cattivi; da ultimo suggerirò quei mezzi che, a parer mio, potrebbero limitare i danni che tali errori arrecano alle scuole.

Poichè l'aritmetica del corso medio inferiore non è, o non dovrebbe essere, che continuazione e compimento delle nozioni già apprese nelle prime scuole, mi pare che per i libri di testo del primo gruppo possa valere, in massima, tutto quanto si è detto per quelli delle scuole elementari. Essi devono prefiggersi il doppio scopo di dare agli alunni in modo pratico, ma pur rigoroso, tutte le cognizioni richieste, e di renderli capaci di poter seguire più tardi, con profitto, il corso razionale degli elementi di matematica.

Quanto agli altri libri, occorre intenderci bene sopra un punto essenziale. Seguiteremo a dire che nell'insegnamento medio superiore vanno osservate tutte le regole di PASCAL (ricordate anche da DE PAOLIS nei suoi *Elem. di Geometria*) fra cui v'è anche quella di non definire alcuna delle cose talmente cognite per se stesse che non vi siano termini più chiari per spiegarle, e di non dimostrare alcuna delle cose talmente evidenti per sè stesse che non vi sia nulla di più chiaro per provarle? Ma i libri di testo non cercano di definire anche le cose che sono o sembrano chiarissime, e, se non ci riescono, non affermano essi, con manifesto rincrescimento, non già che è inutile definirle, ma che non si può o non si sa definirle? Quali proposizioni potrebbero dirsi più evidenti di queste, per esempio: il segmento è invertibile, il cerchio ha un sol centro, che tuttavia si trovano dimostrate nei trattati elementari? Gli sforzi fatti dai migliori autori per accomodare le prime pagine dei loro libri, per cambiar oggi quel che ieri poteva sembrare definitivo, provano che alle suddette regole non si bada più in un corso razionale di matematica elementare. E ad esse non si può, non si deve infatti badare se, come ormai tutti pensiamo, l'insegnamento della matematica razionale deve consistere nel definire colla massima precisione (sia direttamente, sia assegnando un sistema di proprietà dalle quali tutte le altre possano essere logicamente dedotte) tutti gli enti geometrici o analitici che si sottopongono allo studio, e le relazioni tra gli enti stessi, che devono essere il fondamento d'ogni singola teoria; e, come fu anche dichiarato nell'adunanza di Sassari dello scorso aprile, e come fu convenuto in quella di Recanati, nel distinguere le proposizioni in *indeducibili* (di cui deve esser fatta una enunciazione esplicita) e *deducibili*, e non già in *evidenti* e *bisognevoli di dimostrazione*, come si usava una volta. La vecchia distinzione dovrà soltanto esser presa per base in un insegnamento pratico-razionale, com'è quello della geometria nelle scuole tecniche e professionali, giacchè sarebbe vano costringere gli alunni di questi ad esaurire le loro forze e il loro tempo in sottigliezze. Non sarà qui, è vero, del tutto facile distinguere nettamente le proprietà evidenti da quelle che non son tali, e potrà accadere che i libri di testo per tali scuole non vadano completamente d'accordo su ciò. Ma sarà questione di pochi punti, e il buon senso e l'esperienza dell'insegnante vi rimedieranno.

A questi principî fondamentali debbono informarsi i libri di testo delle scuole secondarie, e, mentre per tutti è da richiedersi la massima chiarezza, senza prolissità, per modo che siano alla portata della cultura e dell'intelligenza degli alunni, per quelli destinati all'insegnamento razionale è da esigersi specialmente che non siano mai applicate proposizioni non ancora ammesse o dimostrate; che gli enunciati e le dimostrazioni dei teoremi, non che le risoluzioni dei vari quesiti, siano valevoli per tutti i casi particolari che possono presentarsi, dei quali, se occorre, dovrà esser fatta un'analisi completa; e che le definizioni poste da principio non siano poi dimenticate, per modo che qualche ente abbia più tardi, inaspettatamente, delle proprietà in più o meno di quelle che gli furono accordate nella definizione o che sono conseguenze di queste.

Ora chiediamo: son fatti così i nostri trattati? Si attengono essi tutti a queste norme?

Con frase felice, il mio amico BETTINI afferma che, salvo poche rare eccezioni, i trattati scientifici elementari, di qualunque specie essi siano, son tutti buoni ... *se si cominciano a leggere dal II capitolo.* Il guaio maggiore, egli dice, e talvolta unico, si riscontra nel I capitolo. — È proprio così: proprio nei fondamenti peccano, qual più, qual meno, anche molti dei buoni libri di testo. Quelli destinati all'insegnamento medio superiore vi passano sopra un po' leggermente, senza tener conto degli studi più recenti fatti su di essi; quelli del corso inferiore presentano assai spesso l'inconveniente di estendersi troppo su particolari che riguardano la metafisica della scienza.

Recentemente ebbi occasione di riunire insieme alcune obiezioni che si possono muovere contro i principî posti dagli ordinari trattati di geometria razionale elementare (*): non son cose tutte nuove, ma le accennerò tuttavia perchè rientrano nella questione. — Da quasi tutti si comincia coll'ammettere il *postulato degli enti geometrici*, che, così com'è posto ordinariamente, contiene concetti logici inutili o mal determinati. — Vi si dice per es.: lo spazio è omogeneo. Ma che vuol dire *omogeneo? Egualmente costituito,* dicono tutti. Ora, starà bene che il dizionario si esprima così; ma al geometra, che si occupa di enti ideali, a nulla serve il dizionario comune, neppure se esso porta i nomi autorevoli del FANFANI o del RIGUTINI! Se lo spazio non è che il luogo di cui i corpi occupano una parte, di che cosa sarà costituito? E, ammesso anche che di *qualche cosa* sia composto, quale sarà il significato da darsi a quell'avverbio *egualmente?* Non potrà qui trattarsi se non di eguaglianza geometrica, giacchè è un ente geometrico lo spazio. Ma, a tal punto, è detto forse in che consiste l'eguaglianza geometrica? — Vi si ammette tacitamente il concetto della *divisione in parti.* Ma quando è che un ente è diviso in parti? E perchè alcuni degli ordinari trattati ammettono questo concetto, e poi, dopo essersene valsi, tentano di definirlo per mezzo del punto e del moto? — (A questo punto apro una breve parentesi. Qualcuno forse potrà dire che queste sono pedanterie. No, rispondo subito, non vi sono pedanterie nella matematica razionale. Non si adontino però gli autori dei buoni libri di testo che sono più o meno colpiti da queste osservazioni. Non si riscontrano dei nei anche nelle migliori opere d'arte?). — Si dice da alcuni: corpo è *ogni* parte dello spazio. Ora, volendo che la geometria abbia riscontro negli enti reali, sarà bene chiamar corpo anche una parte illimitata dello spazio, per esempio il diedro, o ciascuna delle parti in cui il piano o la superficie sferica dividono lo spazio? D'altra parte, considerando il corpo come un ente limitato, qual'è

(*) " Il nuovo indirizzo della geometria razionale elementare „ (*Rivista scientifica*, a. XXX, Firenze, 1898).

il concetto che noi abbiamo di esso guardando gli oggetti del mondo esteriore, e definendo la superficie come l'ente che limita o divide in parti un corpo, come si potrà dire che il piano è una superficie se non v'è alcun corpo da esso limitato? — Si dice: sono superficie gli enti che dividono in parti i corpi, sono linee gli enti che dividono in parti le superficie. Ma, come osservò già il prof. BETTAZZI (*), e come osservò anche il prof. CARDOSO-LAYNES, è ciò sempre rispondente al vero? Ad esempio, l'ente che divide una falda dall'altra di una superficie conica è esso una linea? — A proposito del postulato degli enti geometrici, il prof. PEANO (**), dopo aver indicato le difficoltà che s'incontrano nel dare i concetti degli enti geometrici affermò che « queste difficoltà si evitano facilmente « col non parlare di solido, superficie, linea in generale, ma parlando « solamente della retta, del piano, della sfera, . . . cioè di quelle linee « superficie e solidi, che compaiono effettivamente in geometria ele- « mentare, lasciando alla matematica superiore lo studio di questi « enti in generale. Liberatici così dai concetti inutili e mal deter- « minati, l'esame dei concetti fondamentali di geometria acquista « notevole semplicità ».

Non voglio, egregi Colleghi, intrattenervi su altre inesattezze (del genere per es. di questa: diconsi corpi i luoghi occupati dagli enti materiali: dicesi che due corpi coincidono se occupano lo stesso luogo; da cui discenderebbe: *due luoghi coincidono se occupano lo stesso luogo*) inesattezze che spesso s'incontrano nei primi capitoli di geometria, e neppure sull'obbiezione che potrebbe muoversi contro la definizione: *si dice che due figure coincidono quando ogni punto di una qualunque di esse appartiene all'altra*, in seguito alla quale, per esempio, il sistema dei cerchi concentrici e complani coinciderebbe con un fascio di raggi dello stesso piano; e perciò, secondo tali autori, queste figure dovrebbero ritenersi eguali. Ma c'è una questione assai importante sui fondamenti della geometria, e le discussioni che si son fatte intorno ad essa non possono non avere un'eco in questo Congresso. Intendo dire di quella relativa alla definizione di eguaglianza basata sul postulato del movimento, in cui si riscontrerebbe un errore logico grave, nientemeno che una petizione di principio. E che effettivamente la petizione di principio vi sia è stato dimostrato nel modo il più chiaro, per es. dal prof. MARANGONI (***); lo dimostra indirettamente anche il fatto che qualche trattatista ben noto ha finito col non dare più affatto alcuna definizione di eguaglianza, cadendo però così in altro errore grave, più grave ancora di quello che alcuni commettono nel porre a capo della teoria dell'equivalenza la così detta definizione: *due superficie si dicono equivalenti se hanno eguale estensione*, cui non corrisponde nessun concetto geometrico determinato. Se adunque, l'ordinario postulato del movimento ci conduce inesorabilmente ad un errore logico quando in base ad esso si

(*) " I postulati e gli enti geometrici " (*Periodico di Matematica*, a. I).

(**) Nella sua nota: " Sui fondamenti di Geometria " (*Rivista di Matematica*, Vol. IV, pag. 51).

(***) *Il concetto di uguaglianza in Geometria e gli Elementi* del prof. Veronese (Padova, Fratelli Gallina, 1897).

vuol definire l'eguaglianza delle figure, e se, come dice il prof. LORIA (*), per nessun conto, nell'insegnamento della matematica razionale, il rigore scientifico deve cedere dinanzi al desiderio di evitare le difficoltà, perchè non ci poniamo d'accordo nell'accettare, per quanto è possibile, le modificazioni che a tal riguardo sono già state introdotte nei fondamenti? Non soltanto la petizione di principio si eviterebbe, ma qualche altro guaio ancora.

A perfetta imagine e somiglianza di quelli di geometria razionale sono fatti i primi capitoli di molti trattatelli che dovrebbero servire per uso delle scuole professionali e tecniche. E questo è, senza dubbio, un errore didattico grave. Come pretendere che dei giovanetti, usciti da poco dalle scuole elementari, s'innamorino dello studio della Geometria, se si comincia e si seguita a infastidirli con considerazioni, di cui essi non arrivano a comprender l'importanza? Ma, se presteranno attenzione, essi non potranno trattener le risa, quando si vorrà loro spiegare che se due rette d'un piano hanno un sol punto comune i raggi di ciascuna sono da parti opposte rispetto all'altra; o, come trovo perfino in qualche libro, quando si vorrà loro dimostrare che il segmento è invertibile!

Quanto ai libri d'aritmetica e d'algebra rarissimi sono quelli nei quali il concetto di numero, le relazioni fondamentali di eguaglianza e diseguaglianza, le definizioni delle varie operazioni sieno date esattamente, volta per volta, per ogni ente che si pone in campo, in guisa che si possano poi applicare con rigore le regole del calcolo logico. Benchè abbastanza si sia detto e ripetuto ormai su quei *non sensi* (come li chiama il prof. BURALI-FORTI), ai quali si suol dare ad esempio il nome di definizione di numero intero, di eguaglianza, ecc.; benchè si sia indicata chiaramente la via che si deve seguire per evitarli, essi seguitano generalmente ad apparire nelle prime pagine dei trattati più recenti e anche nelle nuove edizioni dei vecchi. In libri d'aritmetica pur buoni per altre ragioni si trova per es.: *Numero (intero) è una parola che esprime quante cose sono in una collezione.* Ma, se i numeri non sono che parole, starà bene di parlar poi di parola maggiore di un'altra, di parole somma, differenza, prodotto, quoto di altre parole? — *Il numero è un ente ideale che serve a rappresentare una grandezza in relazione a una grandezza unitaria.* Come potrà esser presa per base d'una teoria una definizione così vaga? — In qualche trattato d'algebra si chiama in aiuto l' ∞ *(numero maggiore di qualunque numero dato!)* per poter dire quando un numero reale è maggiore di un altro o per definire la somma di due numeri reali. *Conveniamo di dir maggiore di un numero qualunque altro che* CADE *tra il primo e* $+\infty$. *Diremo somma di un numero con uno positivo quel numero cui si perviene contando in seguito al primo e verso* $+\infty$ *tanti termini quante sono le unità del secondo.* — Per giustificare che di due numeri negativi è maggiore quello che ha valor numerico minore, si aggiunge ordinariamente:

(*) "Della varia fortuna d'Euclide in relazione con i problemi dell'insegnamento geometrico elementare" (*Period. di Mat.* a. VIII, p. 81).

invero, chi ha 100 di debito è più ricco di chi deve 200. Ora, ciò può far colpo sugli alunni, ma non giustifica nulla, perchè, se alla frase *più ricco* si sostituisce l'altra *meno povero,* l'esempio non è più in accordo colla relazione di diseguaglianza. — E, per ragione analoga, neppure la regola dei segni della moltiplicazione può esser giustificata, come fa qualcuno, dall'esempio di un problema.

Fatte queste considerazioni generali sui libri di testo in rapporto ai fondamenti della scienza, esaminiamoli nello svolgimento delle varie parti per vedere se si attengano alle norme indicate.

Di proposizioni enunciate e dimostrate senza la necessaria cura dei casi particolari ne ho trovate un po'dappertutto, tanto che tempo fa potei farne una raccolta, copiandole dai libri di testo più comuni. In parecchi trattati di geometria ho trovato per es. gli enunciati seguenti.

In un triangolo, la bisettrice di un angolo esterno INCONTRA *il prolungamento del lato opposto in un punto tale che le sue distanze dagli estremi del lato sono proporzionali agli altri due lati;*

Il luogo dei punti che hanno da due punti distanze proporzionali a due segmenti dati è la circonferenza, ecc. (dove si passa sotto silenzio il caso in cui i 2 segmenti dati sono eguali);

Se una retta è parallela ad un'altra di un piano, la prima è parallela al piano (naturalmente dovrebbe dirsi ... *la prima è parallela al piano o giace in esso.* Non è quindi esatto il dire come fa qualcuno: *la condizione necessaria e* SUFFICIENTE *perchè una retta sia parallela ad un piano è che sia parallela ad una retta del piano*);

Due angoli coi lati paralleli giacciono in piani paralleli (dovrebbe aggiungersi: *o in uno stesso piano.* Siccome gli angoli potrebbero esser piatti, questo teorema dovrebbe, a rigore, essere enunciato così: *due angoli non piatti coi lati paralleli giacciono in uno stesso piano o in piani paralleli,* giacchè due angoli piatti coi lati paralleli in generale giacciono in due piani che si tagliano);

Una retta non può avere in comune col contorno di un poligono convesso più di due punti. (Si deve dire: *una retta non può avere in comune col contorno di un poligono convesso più di due punti, se non ne contiene un lato);*

La superficie descritta da un segmento in una rotazione intorno ad un asse con cui sta in uno stesso piano senza essere tagliato è equivalente al rettangolo della proiezione del segmento sull'asse e della circonferenza che ha per raggio, ecc. (Fa eccezione il caso in cui il segmento è perpendicolare all'asse di rotazione);

E ho trovato anche: *le diagonali d'un parallelogrammo o d'un parallelepipedo son diseguali; la proiezione di una retta su di un piano è un'altra retta; per tre punti passano innumerevoli sfere; per i vertici d'un parallelepipedo retto passa sempre una sfera e una sola; ogni piano che passa per una di due rette sghembe taglia l'altra; le tangenti comuni a due cerchi che si tagliano s'incontrano in un punto della retta dei centri;* ecc.

Questi esempi bastano per mostrare quanta cura si deve avere nel porre tutte le limitazioni necessarie, affinchè gli enunciati dei teoremi non soffrano eccezioni. Ma non si devono porre peraltro delle limitazioni inutili. Per es. il teorema: *se due linee rette che si incontrano sono parallele a due altre che pure s'incontrano ma non nel medesimo piano, l'angolo contenuto dalle prime due è eguale all'angolo contenuto dalle altre due* (Euclide, L. XI, prop. X), così com'è enunciato, potrebbe far credere all'alunno che esso valga solo pel caso in cui le rette non siano nel medesimo piano (tanto più che in geometria piana Euclide non dimostra il corrispondente teorema).

Ecco poi alcuni esempi di dimostrazioni geometriche in cui non sono contemplati tutti i casi che possono darsi. — *Un quadrangolo convesso ABCD è circoscrittibile se la somma di due lati opposti è eguale alla somma degli altri due.* Questo teorema si dimostra da molti così: « il cerchio tangente ai lati CB, BA, AD non sia tan-« gente a CD. Si conduca da C la tangente al cerchio che *incontri* « il lato AD in D', ecc. » Contro questa dimostrazione si può obiettare: e se la tangente condotta dal punto C non incontra il lato AD? Evidentemente, per questo caso, la dimostrazione non reggerebbe più. Alcuni autori conducono la tangente parallela a CD, e la dimostrazione che ne risulta è esente da qualsiasi obiezione. — Qualche autore dimostra che *archi diseguali sottendono corde diseguali nello stesso senso,* e pone come corollario: *il diametro è la massima corda.* Ciò non è esatto, giacchè la dimostrazione ordinaria del teorema pel caso di due corde (non diametri) non si adatta al caso in cui una di esse è un diametro. Per la stessa ragione non è esatto dedurre che il diametro è la massima corda dal teorema: *la corda più vicina al centro è la maggiore.* Bisogna che i teoremi relativi alle corde siano dimostrati anche pel caso dei diametri, se valgono anche per questo caso, o enunciati in modo da escludere questo caso, se per esso non valgono, o se, pur valendo, si preferisce di trattare il caso particolare separatamente. — Parecchi autori, dopo aver distinto i poligoni in *intrecciati* e *non intrecciati,* in *concavi* e *convessi,* non fanno alcuna avvertenza sulla specie dei poligoni che vogliono poi studiare, e danno più tardi dei teoremi sui poligoni in generale che non valgono però per tutti i poligoni, o che, se valgono per tutti, sono ordinariamente dimostrati soltanto per quelli convessi. Per es., quegli autori che non dichiarano esplicitamente di limitarsi ai poligoni convessi non potrebbero poi affermare in generale che *unendo un punto interno di un poligono con tutti i vertici, il poligono resta decomposto in triangoli; che le diagonali uscenti da due vertici omologhi di due poligoni simili li dividono in triangoli simili;* ecc. — Qualche autore afferma che l'ordinaria costruzione di un poligono in altro equivalente con un lato di meno si può applicar sempre anche se il poligono non è convesso. Ciò non può dirsi; giacchè se C, D, E sono tre vertici consecutivi di un poligono non convesso, e se dal vertice intermedio D si conduce la parallela alla diagonale CE, può darsi che questa parallela non incontri nessuno dei lati del poligono che hanno le estremità in C e in E, o che li incontri soltanto dopo aver incontrato altri lati del poligono. E in questi casi l'ordinaria costruzione non è applicabile. — In un libro di testo molto diffuso trovo pel teorema: *due angoli coi lati egualmente diretti sono eguali,* una dimostrazione basata sull'eguaglianza dei triedri, che quindi vale solo pel caso in cui i due angoli sono situati in piani diversi. Seguendo tal libro rimane dubbio se due angoli complani coi lati egualmente diretti siano eguali, giacchè lo stesso A. non dimostra affatto il teorema corrispondente in Geometria piana.

Poca cura dei casi particolari si ha anche nell'aritmetica e nell'algebra. Molti autori non considerano affatto il caso del divisore nullo (nonostante quanto giustamente disse il prof. BETTAZZI nel suo articolo: *sull'impossibilità di certe divisioni e sull'equivalenza delle equazioni* (*)), nè tengono conto di questo caso in certi teoremi, i quali appunto si fondano sulla divisione. Si dice senz'altro $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ senza dire che cosa succede se $a = 0$; si ripete da qualcuno, pel teorema relativo al resto della divisione per $x - a$, la vecchia dimostrazione basata sopra una identità che si fà valere senz'altro, per $x = a$; per risolvere il sistema:

$$a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2 = d,$$
$$a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d'$$

si pone $y = xz$, e nessun autore avverte che, allorchè è possibile la ipotesi $x = 0$, non esiste corrispondentemente un valore finito per l'incognita ausiliara z (cosicchè quando sia $cd' = dc'$, non è lecito porre $y = xz$, chè, in tal caso, si perderebbero le soluzioni $x = 0$, $y = \pm\sqrt{\frac{d}{c}}$). — Parecchi danno la definizione: *la potenza con esponente zero di una base qualunque è eguale all'unità,* senza dir nulla esplicitamente pel caso in cui la base è eguale a zero. — Da alcuni si dice: *elevando ambo i membri di un'equazione alla stessa potenza s'introducono soluzioni estranee,* mentre ad es. elevando al quadrato ambo i membri dell'equazioni:

$$\sqrt{x} = 4,$$
$$2x + 3 = -2x + 7$$

si ottengono equazioni equivalenti. — Altri dicono: *elevando alla stessa potenza ambo i membri di un'equazione s' introducono* IN GENERALE *soluzioni estranee.* La frase *in generale* che figura in questo enunciato meriterebbe alcune considerazioni, giacchè, come osservò anche il prof. SEGRE, essa viene spesso usata nei trattati elementari, senza che se ne diano sempre le spiegazioni necessarie. In questo teorema non si trova a proposito, se non si è svolta la teoria dei numeri complessi. Invero nel campo dei numeri reali, le due equazioni:

$$A = B; \quad A^m = B^m$$

sono equivalenti se m è dispari; e se m è pari, la seconda, oltre alle soluzioni della prima, avrà anche quelle dell'altra $A = -B$, posto che questa ne abbia. Non è vero dunque che *in generale* la seconda equazione ha altre soluzioni oltre quelle della prima. E come

(*) *Periodico di Matematica*, anno I.

se si dicesse che un numero intero qualunque è in generale pari, mentre v'è egual probabilità che esso sia pari o dispari.

La frase *in generale (il più delle volte, ordinariamente,)* che spesso accompagna una proposizione matematica, è posta per significare che c'è qualche caso speciale in cui la stessa proposizione non ha luogo. Quindi il ragionamento che si deve fare per giungere a stabilire con tutta esattezza la proposizione di cui si tratta si deve comporre di due parti, nella prima delle quali s'ha da provare che nel *maggior* numero dei casi la proprietà sussiste, mentre nella seconda si devono indicare tutti i casi in cui essa non sussiste egualmente. Occorrerebbe però, se non erro, che la frase *in generale* fosse matematicamente definita, in guisa che non si avesse alcun dubbio sul suo significato. Qualcuno potrebbe osservare che è inutile dare per essa una definizione apposta, e che basta prendere il significato che le attribuisce il dizionario. Se ad es. è dato il numero 99, e a rappresenta un numero intero sottoposto alla condizione di non superare 100, vi sono 98 casi nei quali il numero a è minore di 99 e 2 soltanto in cui ciò non ha luogo. Quindi in questo esempio si ha *in generale* $a > 99$, e in particolare $a \geqq 99$. Ma non sempre nello studio dell'algebra si può, secondo me, decidere se in una data questione il numero dei casi, in cui succede un certo fatto, sia maggiore del numero di quelli in cui lo stesso fatto non accade. Se a e b sono due numeri dati arbitrariamente, v'è un numero *non finito* di casi in cui essi sono diseguali, e anche un numero non finito di casi in cui sono eguali e, nello studio elementare dell'algebra, non si dice quale dei due sia il maggiore.

Riguardo alle definizioni trovo che, dopo averle poste, spesso alcuni autori dimenticano quanto hanno detto in esse.

Esempi. Tempo fa (*) feci osservare che, mentre secondo tutti gli autori l'equazione apparisce dapprima come il contrapposto della identità, più tardi il nome di equazione viene esteso tacitamente anche all'eguaglianza identica. E proposi perciò di dare per l'equazione e per i sistemi di equazioni delle definizioni più larghe.

Tutti gli autori da me consultati dicono che il simbolo $\sqrt[n]{a}$ rappresenta *ogni* numero la cui potenza n^{ma} è eguale ad a. Ma, dopo aver dato questa definizione, senza aggiunger più nulla sul significato di $\sqrt[n]{a}$, dichiarano ad es. che l'equazione

$$\sqrt{x} = -4$$

non ha nessuna soluzione. — Il prof. BETTINI rileva giustamente che, stando attaccati alla locuzione: *il 1° e il 2° termine di una proporzione si dicono inversamente proporzionali al 4° e al 3°*, non sarebbe poi vero che, *se due corde di un cerchio, si tagliano, i segmenti dell'una sono inversamente proporzionali a quelli dell'altra.* — Il professore CARDOSO-LAYNES osserva che parecchi autori, dopo aver detto

(*) *Periodico di Matematica*, anno XII " Sulle definizioni di equazione e di sistemi di equazione ".

che la retta è *indefinita,* definiscono le parallele *due rette complane che* PROLUNGATE INDEFINITAMENTE *non s' incontrano.* — Ma una mancanza di rispetto ancor più grave alle definizioni è questa. Un libro di testo dà per le parallele la definizione ordinaria (rette complane che non s' incontrano) e poi, poco dopo, pone e dimostra il *teorema* (!): *due rette parallele giacciono sempre in uno stesso piano.*

Molto spesso si applicano proposizioni non ancora enunciate o dimostrate. Esempi. Parecchi autori di Geometria dimostrano l'equivalenza dei parallelogrammi di egual base e altezza applicando tacitamente il postulato d'Archimede che enunciano più tardi. — Il prof. BETTINI ricorda che in alcune aritmetiche, per dimostrare la regola del m. c. m. si applica il teorema non ancora enunciato nè dimostrato: se un numero divide un prodotto di due fattori ed è primo con uno di essi, divide l'altro. — Si segue ancora da qualcuno la vecchia dimostrazione relativa alla generatrice d'una frazione decimale periodica, applicando a questa la regola (non dimostrata) della moltiplicazione di un numero decimale per una potenza di 10. — In un trattato di geometria si ammette che nessuna parte di un angolo è eguale all' intero e si pretende di ricavarne che l'angolo è invertibile. Ma in che modo? Se l'angolo (ab) non si potesse far coincidere con (ba) che cosa avverrebbe? Che uno dei due angoli (ab) e (ba) sarebbe eguale ad una parte dell'altro; ma non si contradirebbe la proprietà ammessa che l'angolo non è eguale ad una *sua parte.* Neppure dal postulato dell'angolo si può, secondo me, ricavare, come alcuni fanno, che il segmento è rovesciabile. Si dice: « Facciasi ruotare il segmento AB in un piano passante per esso « una volta attorno ad A, un'altra volta attorno a B. Sia C uno « dei punti comuni alle circonferenze descritte da A e B. Invertendo « l'angolo CAB, il punto B va in C, e C in B, perchè i due seg- « menti AB, AC sono due posizioni di uno stesso segmento. Così il « segmento BC s' inverte, e poichè esso non è che una posizione « del segmento AB, ne segue che AB è invertibile ». Ora si può obiettare che, affermando che dopo il secondo movimento il punto C va in B, si viene ad ammettere che il segmento AB non può coincidere con una sua parte, e quindi che nessun segmento è eguale ad una sua parte, proprietà che è data in seguito come corollario.

Seguitando la rassegna degli errori e delle inesattezze più comuni, credo necessario, egregi Colleghi, richiamare la vostra attenzione anche sui seguenti.

In parecchi trattati d'algebra elementare si fa la convenzione: *quando una frazione, per tutti i valori delle lettere che essa contiene assume un medesimo valore* K, *e per valori particolari delle stesse lettere assume la forma* $\frac{0}{0}$, *si ammette che alla frazione spetti il valore* K *anche per questi valori particolari delle lettere.* Questa convenzione è pericolosa. Difatti in un libro di testo (che non è poi il solo) si dice ad esempio: « Risolvendo l'equazione:

«
$$\frac{a^2}{x-1}=\frac{a^3+2x-1}{x^2-1}-\frac{a}{x+1},$$

« si ha:

« $$x = \frac{a^3 - a^2 + a - 1}{a^2 + a - 2}$$

« e supposto $a = 1$ si avrebbe:

« $$x = \frac{0}{0};$$

« ma i due termini della frazione son divisibili per $a-1$, per cui « essa si riduce ad

« $$x = \frac{a^2 + 1}{a + 2}$$

« e per $a = 1$ si ottiene $x = \frac{2}{3}$ ». Ora io osservo che per $a = 1$ la equazione diventa:

$$\frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x+1},$$

la quale in realtà è indeterminata.

Il prof. BETTINI fa notare che ordinariamente il segno = separa numeri o espressioni eguali soltanto approssimativamente, per es.:

$$\sqrt{2} = 1{,}41,$$
$$\log 2 = 0{,}3010300.$$

Nell'ordinario linguaggio algebrico s'incontrano parecchie inesattezze. Quasi tutti gli autori, per es., denominano le potenze secondo i loro esponenti. Ciò può dar luogo a qualche equivoco. Ognuno vede subito infatti che le frasi *potenze crescenti, potenze decrescenti.* invece di potenze con esponenti crescenti o decrescenti, possono indurre l'alunno a credere che il valore di una potenza debba necessariamente aumentare o diminuire col crescere o diminuire dell'esponente. Ad errori analoghi possono condurre le frasi *potenza intera, frazionaria, positiva, negativa, pari, dispari, massima, minima,* ecc., invece di potenza con esponente intero, frazionario, positivo, ecc. Che cosa possono pensare per esempio i nostri alunni di un teorema come il seguente, che tolgo da un trattato d'algebra: *tutte le potenze positive o negative di un numero positivo sono positive?* Benchè usate da tutti gli autori da me consultati, non credo possano essere giustificate in alcun modo le frasi: *numero piccolo a piacimento, numero sufficientemente grande, numero piccolissimo,* ecc., che specialmente si incontrano nella teoria degl'irrazionali e in quella dei limiti. Anzitutto queste frasi non sono necessarie. Invero, allorchè nella teoria degl'irrazionali si dimostra, per esempio che una certa differenza può esser minore di qualsivoglia numero (positivo), s'intende che la differenza stessa può esser minore di un numero *anche piccolissimo,* se la frase *anche piccolissimo* avesse un significato. Ma quali sono i numeri piccolissimi? Quali i grandissimi? Nè si dica che l'uso di queste frasi sia consigliato da ragioni didattiche, perchè si può anche osservare che gli alunni, usandole, possono pervenire alla falsa conclusione dell'esistenza di numeri assolutamente piccolissimi o grandissimi.

Non posso tacere d'un grosso errore trovato in un trattato dovuto a persona che ha nome molto conosciuto tra gli autori di libri di testo. L'A., dopo aver detto che le definizioni non dovrebbero contener nulla di *sovrabbondante* (è questa una questione di molta importanza in cui entrerei volentieri se non avessi il timore di uscir fuori d'argomento) dice che, per ragioni di opportunità didattica, una buona definizione può anche contenere qualche cosa di più di quanto è strettamente necessario, com'è ad esempio quella che ordinariamente si dà pel poligono regolare, mentre volendo star proprio alla lettera del concetto logico e rigoroso di definizione bisognerebbe dire: *un poligono di* n *lati chiamasi regolare quando è equilatero ed ha* $n - 3$ *angoli consecutivi eguali*. Ciò è falso manifestamente, chè per esempio per $n = 4$ si avrebbe che un quadrangolo è regolare se è equilatero.

Poichè risolvere un sistema di equazioni significa trovarne *tutte* le soluzioni, è grave errore se in pratica si trascurano alcune di esse. Nella raccolta degli esercizi dell'*Heiss* sono molti errori di questo genere, che si trovano ripetuti in parecchi dei nostri trattati d'algebra. Si dice per esempio che il sistema:

$$\begin{aligned} xy + yz + xz &= 3xyz, \\ yz + 2xz + 3xy &= -4xyz, \\ 3xy + 2yz + xy &= 4xyz, \end{aligned}$$

ha due soluzioni una delle quali è $x = y = z = 0$ e l'altra si ottiene col dividere ambo i membri delle 3 equazioni per xyz; mentre il sistema ha anche tutte le soluzioni che si ottengono col dare valori eguali a zero a due qualunque delle tre incognite, e un valore qualsivoglia alla terza.

Ma questi errori sono ben poca cosa in confronto di altri grossolanissimi che compariscono in certi libri. Alcuni trattatelli di geometria non si contentano, per esempio, d'insegnare che *dai postulati e dalle definizioni si deducono gli assiomi; che se una retta ha due punti in un piano coincide con esso; che l'angolo piatto divide il piano in due parti eguali; che il rapporto di due grandezze omogenee* A *e* B *è il loro quoto* A : B (A : B *il loro rapporto diretto,* B : A *il loro rapporto inverso*), ecc.; ma pretenderebbero anche di dimostrare che *da un punto si può condurre una sola parallela ad una retta* (senza premettere altro postulato per la teoria delle parallele); e perfino, come fa osservare anche il prof. Cardoso-Laynes, di estrarre la radice quadrata non da numeri ma da grandezze, giacchè dalla relazione geometrica:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$$

ricavano:

$$BC = \sqrt{(AB)^2 + (AC)^2},$$

senza aver trattato prima della misura delle superficie. Si può avere indulgenza per tali libri? Che dire poi di altri destinati ad insegnamento più elevato, qual'è quello del liceo o dell'istituto tecnico, nei quali non solo manca il rigore logico, ma sono anche dimenticati i precetti più elementari della grammatica? In una *seconda edizione* MIGLIORATA di un trattato d'algebra tolgo per esempio. *Il simbolo* 0 *lo considereremo definito dall'eguaglianza* $(+1)+(-1)=0$ il *quale* (!) *separa i numeri positivi dai numeri negativi. Se da* 5 *si voglia togliere* -8, *dopo aver contato da* 1 *a* 5 *nel senso positivo, si debbono nel medesimo senso contare altre* 8 *unità, perchè se per togliere le unità positive si deve tornare indietro, per togliere quelle negative bisogna che si prosiegua in avanti:* $a+b$ *significa contare* a *unità nel senso positivo a cominciare da* 1 *e proseguire contando altre* b *unità e si arriva così a trovare* $a+b$ *unità.* Vi si confondono spesso i numeri coi loro valori assoluti: *Per far la riduzione dei termini simili, si trova prima la somma dei coefficienti positivi, poi quella dei negativi, dalla maggior somma si toglie la minore*, ecc. Vi si dimostra la proprietà distributiva della moltiplicazione $(a-b+c)\,m=am-bm+cm$ pel solo caso in cui m è intero (va notato che nella dimostrazione data dall'A. si legge: *se* m *è negativo, i segni dei termini* am, $-$ bm, $+$ cm *cambiano, perchè il moltiplicando deve ripetersi come addendo* m *volte in senso opposto.* — Per dimostrare che (1) $\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}\,.\,\sqrt[n]{c}$ si dice: *è chiaro che se due quantità sono eguali, le loro potenze* n^{me} *sono eguali, quindi il teorema rimane dimostrato, se, elevando alle* n^{me} *potenze i due membri della* (1) *si hanno quantità eguali.* E giù di questo passo: *una eguaglianza algebrica non si altera se ad una lettera si sostituisce un'altra; due espressioni diconsi eguali, se si possono ridurre a due numeri eguali in valore e forma; se due potenze di grado pari sono eguali, le radici sono eguali* SOLAMENTE *in valore assoluto; se un'equazione contiene più radicali, questi spariscano coll'inalzare successivamente a quadrato ambo i membri delle successive equazioni; come non havvi nessuna relazione di eguaglianza e di diseguaglianza tra i numeri razionali e gl'irrazionali, così non può esservene tra i reali e gl'immaginari; affinchè una equazione di* 2° *grado abbia reali ambedue le radici, è necessario che i segni dei suoi termini facciano una variazione e una permanenza; se ciascun membro di un'eguaglianza si compone di un termine razionale e di un termine irrazionale, saranno eguali i razionali tra loro e gli irrazionali tra loro; le potenze negative di un numero maggiore di* 1 *decrescono col crescere dell'esponente;* ecc. ecc. Eppure, per quanto mal fatto, non è questo il peggiore dei trattati d'algebra elementare. Ne ho avuto uno nuovo in questi ultimi giorni, al quale non si può davvero augurare di giungere alla seconda edizione! L'A. dà per la grandezza la definizione di Grassmann e poi dice subito: *la grandezza di una quantità si ottiene misurandola;* afferma che *i numeri negativi sono la manifestazione di un errore commesso nell'accennare ad un'operazione di addizione e sottrazione mediante una locuzione impropria; che il limite di una quantità è quella quantità che si avvicina ad un'altra più di qualunque altra;* non dà alcun teorema sulla equivalenza delle equazioni, ma dice soltanto che la *soluzione* della equazione è appoggiata a questi assiomi: la somma delle parti è eguale al tutto; due quantità eguali ad una terza sono eguali tra loro; eseguendo identiche operazioni in entrambi i membri di una eguaglianza, l'eguaglianza non si altera; non tratta affatto la teoria degli irrazionali; chiama *rapporto* il confronto di due quantità; ecc.

Ma è ormai ora di terminare questa rassegna!

Indicati i mali, resta suggerirne i rimedi. Ecco il compito più arduo, egregi Colleghi! Anche pei medici la terapia delle malattie è sempre più difficile della diagnosi. E, giacchè ho nominato medici e malattie, permettetemi di classificare gli errori commessi dagli alunni in *sporadici* ed *epidemici*, con due brutte parole tolte dalla scienza medica. I primi dirò quelli che l'alunno fa da sè, spontaneamente, senza che ne abbia colpa nessuno fuori che lui. Esempi: $2^3 = 6$; i lati di un triangolo stanno tra loro come gli angoli opposti. A questi errori l'alunno è trascinato forse dall'abitudine di semplificare il più che è possibile; potendosi ritenere più semplice che 2^3 sia eguale $2 . 3$ che a $2 . 2 . 2$; più semplice che i lati siano proporzionali agli angoli opposti che ai seni degli angoli opposti. Epidemici dirò tutti gli altri errori, dei quali causa principale è precisamente il libro di testo. Veramente, a rigore, la tesi che devo trattare vorrebbe che io non parlassi che di questi ultimi, giacchè degli altri non è causa il libro. Ma che male vi sarà se dirò due parole anche di questi?

La cura per gli errori sporadici deve essere specialmente preventiva e si può riassumere così: premunire continuamente gli alunni contro gli errori stessi. Il medico curante non sia soltanto il maestro; ma un po' anche il libro. Un trattato recente di Geometria ha cominciato col dare il buon esempio, sottoponendo agli alunni esercizi utilissimi nell'intento di non farli cadere in circoli viziosi, o in altri errori logici. Ma io crederei che si dovesse far di più. Non potrebbe il libro di testo contenere opportune avvertenze là dove si sa che gli alunni sono più facili a cadere in errori? Se, per esempio, non appena dimostrato il teorema: in un triangolo a lato maggiore è opposto angolo maggiore, si domanda agli alunni che cosa succede degli angoli opposti quando un lato sia doppio di un altro, molto probabilmente parecchi risponderanno che l'angolo opposto al primo è doppio di quello opposto al secondo. Ebbene, perchè non premunirli subito contro questo probabile errore? Perchè non aggiungere, sia pure come esercizio, che se un lato di un triangolo è doppio d'un altro, l'angolo opposto al primo è più del doppio dell'angolo opposto al secondo? Avvertiti così, nello stesso modo, in ogni singolo caso, gli alunni cadranno più difficilmente in errori; se poi vi cadranno, la loro colpa sarà maggiore.

Quanto agli errori epidemici, è assai più difficile indicarne la cura. Il testo unico? Guai! Sarebbe un grave inciampo, la fine quasi per la produzione scientifico-didattica; farebbe strillar troppo; non soddisferebbe tutti i gusti. E poi, qual libro sarebbe superiore ad ogni critica? Anche quelli che, nei fondamenti e nel metodo, non lasciano nulla a desiderare, hanno qualche difetto: per es. quello di non aver saputo o potuto ancora conciliare completamente la scienza colla didattica.

Dunque il testo unico, no. Ma, allora, che cosa fare perchè nelle scuole entrino soltanto i libri migliori? Il prof. Cardoso-Laynes ci proporrebbe di nominare una commissione permanente di una ventina di membri almeno da scegliersi tra i soci o i non soci di « Mathesis, » che abbia l'ufficio di compilare ogni anno un elenco di libri di testo da potersi adottare utilmente. Ma! E la Commissione governativa? Se la nostra procederà completamente d'accordo con questa, la sua opera sarà inutile; e se vi sarà disaccordo? Cosa diranno quegli autori che, approvati da una delle due Commissioni, saranno bocciati dall'altra? E poi non pare che, col sottoporre agli insegnanti la lista dei libri di testo, si venga ad urtare un po' la loro suscettibilità, perchè, in certo modo, si verrebbe a ritenerli incapaci di fare una buona scelta da sè?

Nell'adunanza di Torino del febbraio scorso fu approvata la proposta di far pratiche perchè le relazioni della Commissione per la revisione dei libri di testo vengano pubblicate in un giornale, dove ogni professore possa esporre la propria opinione in proposito. Si può tentare di ottenere questo. Ma dubito fortemente che si riuscirà nell'intento. La Commissione dei libri di testo per le scuole elementari ha già espresso il suo parere negativamente a tal riguardo.

Ecco quanto proporrei io. L'Associazione « Mathesis » pubblica attualmente, ogni due mesi, un Bollettino, e le notizie che esso porta, propagate dai soci, riprodotte in parte in altri giornali, vengono direttamente o indirettamente a conoscenza della maggioranza degli insegnanti delle scuole medie. Questo Bollettino dovrebbe essere pubblicato più spesso, se è possibile ogni mese, e lasciando da parte le cose meno necessarie, dovrebbe ogni volta dedicare una parte agli studi critici sui libri di testo. Francamente, senza riguardi ad amicizie, senza livori di parte, animati soltanto dal bene inseparabile della scienza e della scuola, gl'insegnanti di buona volontà pubblicherebbero in questa rubrica gli elenchi degli errori più gravi, coi nomi degli autori che li hanno commessi. Non fu consigliata e già messa in pratica, con vantaggio grande degli alunni, l'idea di pubblicare elenchi di errori sporadici? Perchè non si ha da fare altrettanto per quelli epidemici? Il lavoro, che potrebbe essere iniziato anche subito, riuscirebbe senza dubbio utilissimo a tutti. A chi lo fa, perchè l'esame critico di un trattato è ottimo esercizio per la mente; agli insegnanti tutti, perchè potrebbero più facilmente procedere poi alla scelta del testo o guardarsi dagli errori che si trovassero in quello già adottato; agli autori, perchè in base a quegli elenchi potrebbero correggere e migliorare le loro opere.

Prof. Corrado Ciamberlini.

RELAZIONE SULLA QUARTA QUISTIONE

proposta dal Comitato dell'Associazione " MATHESIS „

Ripartizione dell'insegnamento della matematica elementare tra i vari gradi e le varie specie di scuole secondarie.

SOMMARIO. — I. Preambolo. — II. La matematica nel piano organico dell'istruzione secondaria. — III. La propedeutica matematica per le scuole secondarie inferiori, e la matematica razionale per le superiori. — IV. Le linee generali della ripartizione. — V. Le linee particolari corrispondenti alle singole discipline: *a)* la geometria; *b)* l'aritmetica; *c)* l'algebra. — VI. Conclusione.

I.

1. Ardua quanto rilevante, egregi colleghi, è la questione che ci occupa; ardua e rilevante così per le attinenze sue ai problemi, che tuttora si agitano, di ricostituzione organica delle nostre scuole primarie e mezzane, come per gli ostacoli che incontra, e non può non incontrare, l'applicazione dei nuovi processi e metodi voluti dal presente movimento d'idee intorno ai fondamentali concetti della matematica. D'altra parte, io, che da 23 anni, circa, chiuso già con gli anteriori 13 il periodo di magistero militante, mi son dovuto rassegnare in silenzio ad una vita scientifica di pure reminiscenze e di libazioni nelle poche ore di svago concesse dall'uffizio mio di provveditor di studi, avrei pur dovuto rinunziare all'incarico onde fui onorato. Ma un pensiero recatomi alla mente dal Venosino fece ch'io dicessi tra me e me: se non sarò buono ad altro, potrò forse, chi sa? riuscire a maggiormente eccitare ne' miei colleghi il desiderio, già vivo in essi, di proporre al governo centrale tale una risoluzione della questione, da soddisfare il meglio possibile ai presenti bisogni delle nostre scuole. E così, dopo aver tentennato parecchio, finii per accettare; ed oggi dinanzi a voi

. . . . fungar vice cotis, acutum
reddere quae ferrum valet, exsors ipsa secandi.

2. Credo necessario dichiararvi in prima rapidamente il pensier mio intorno ad alcune riforme, di cui tanto si è parlato e si parla, del piano organico de' nostri studi secondari, nel rispetto, precipuamente, dell'insegnamento matematico, discorrendo del quale non si può fare a meno di alcuni punti di orientazione nel piano stesso; ed io, naturalmente, ho scelto e fissato quelli che mi sembravano più acconci allo scopo. Dovrò, in secondo luogo, tenervi proposito del carattere che, secondo me, dovrebbe imprimersi e rimanere impresso all'insegnamento della matematica elementare distintamente

nelle scuole mezzane inferiori e nelle superiori. Dopo ciò, ed indicato il filo direttivo dello studio da me fatto, renderò ragione del disegno di ripartizione che avete sott'occhio,(*) a compiere il quale mi sono giovato assai delle particolari relazioni di alcuni soci, e dei risultati delle discussioni che in più occasioni ebbero luogo in adunanze promosse dall'Associazione « MATHESIS ». E così riuscirà naturamente divisa in tre principali parti la modesta mia relazione.

II.

3. Prima di tutto io mi schiero addirittura tra coloro che vogliono mantenuta la separazione dell'istruzione classica dalla tecnica, mantenuta per guisa che la biforcazione, come la chiamano, continui ad aver luogo subito dopo il periodo delle scuole elementari (un po' diversamente la pensavo parecchi anni fa, ma l'esperienza ammaestra). Nutro uguale affetto per entrambe le maniere d'istruzione; perocchè, se è dovere di noi italiani custodire con sollecita e religiosa cura il tesoro di quei nobili studi classici, nei quali si formò la robusta civiltà dei nostri padri, e i quali furono il balsamo vitale che preservò dalla barbarie e dalla corruzione la parte migliore del genere umano, dobbiamo in pari tempo sentir sempre il bisogno di porre e conservare accanto all'educazione togata e accademica a pro di coloro che possono aspirare ed aspirano, per la via delle università, ad un'alta scienza e a porsi in ischiera coi principali dotti della nazione, il bisogno, dico, di porre a fianco di codesta maniera di educazione un'altra più direttamente operosa, produttiva, strumentale per coloro, e sono i più, che hanno a menar la vita nei campi, nelle viscere dei monti, nelle officine e negli opifici, sulle navi, tra i vari rami di commercio e d'industria, o a dedicarsi all'esercizio di professioni liberali, attinenti ai vari rami d'ingegneria. Volendo essere razionalmente conservatori, dobbiamo essere altresì progressivi come la natura, come la società, come la ragione.

Tutto questo io ho voluto ricordare per concluderne poi che è appunto l'uguale affetto per le due forme d'istruzione quello che mi fa desiderare la separazione loro nel modo detto. Fondere insieme i due primi gradi d'istruzione classica e tecnica, l'attuale ginnasio inferiore e l'attuale scuola tecnica, in un sol corso comune: se col latino, riuscirebbe a totale scapito dei giovinetti che poi o abbandonassero gli studi o prendessero la via dell'istituto tecnico, i quali non resterebbero nè carne nè pesce rispetto al pochissimo latino appreso, mentre avrebbero potuto più proficuamente impiegare quel tempo; se senza latino, riuscirebbe a scapito totale dei giovinetti che poi prendessero la via del ginnasio superiore e del liceo, i quali

(*) Il disegno a cui si allude fu precedentemente stampato, tirandosene una cinquantina di copie, non per essere pubblicato, ma per essere distribuito, come fu, ai partecipanti al congresso, a fine di metterli meglio in grado di esaminare e valutare le proposte del relatore. Il disegno medesimo, con alcune variazioni arrecatevi dopochè era stato stampato, e con alcune note aggiuntevi a titolo di chiarimenti, costituisce la 6ª ed ultima delle proposte, alle quali si perviene nella conclusione della presente relazione (VI, 29).

dovrebbero incominciar lo studio del latino in età, in cui le regole grammaticali di quella lingua mal si sopportano e peggio si digeriscono; se, finalmente, col latino facoltativo, questo, come riuscirebbe sicuramente (e chi è pratico di scuole e di scolari non potrà contraddirmi) sinonimo di abolito, così riuscirebbe anche fomite continuo d'indisciplina, e quindi danno permanente all'istruzione dell'una e dell'altra schiera di giovinetti. Si mette innanzi la troppo tenera età in cui trovansi i giovinetti, compiuto il corso elementare, per potere scegliere tra le due forme d'istruzione quella che meglio loro convenga, e il conseguente danno che può derivare ad essi e alle rispettive famiglie da una scelta non corrispondente o alle condizioni economiche di queste o alle attitudini intellettuali di quelli. Potrei osservare e dimostrare, se i limiti e l'indole di questa relazione lo permettessero, che pericoli di tal fatta verrebbero, in gran parte almeno, scongiurati, quando famiglie, maestri di scuole elementari, direttori di scuole secondarie e, previ acconci ordinamenti direttivi, lo stesso governo centrale mettessero a base della educazione lo studio accurato, al dir di Dante, del *fondamento che natura pone,* delle attitudini, cioè, e delle tendenze naturali dimostrate dai giovinetti nella prima loro età: allora la scelta di cui parliamo verrebbe di molto e razionalmente agevolata. Capisco che in pratica anche certe norme, buone e giuste per sè stesse, possono a volta fallire; ma in questi casi i danni cagionati dalla sbagliata strada potrebbero in buona parte alleviarsi, quando, pur tenendo separati e distinti l'indirizzo e il carattere del ginnasio inferiore e della scuola tecnica, vi si ordinassero gl'insegnamenti omonimi ed affini per guisa da impedire sbalzi ed urti violenti nel passaggio di un alunno da uno ad altro ordine di studi.

4. Piuttosto un'altra importante questione resterebbe da risolvere quanto alla scuola tecnica.

Il ginnasio inferiore ha e deve avere a scopo essenziale, e quasi unico, quello di preparare al ginnasio superiore e al liceo: tutti in questo sono d'accordo. Nella scuola femminile complementare, che è una specie di scuola tecnica, può con unico ordinamento di studi raggiungersi il doppio scopo, un complemento di coltura generale per la donna e la preparazione alla scuola normale femminile, la quale, al pari della normale maschile, è da porsi nel novero delle scuole secondarie superiori, e da considerarsi quasi come una speciale separata sezione d'istituto tecnico. Ma nella scuola tecnica per i maschi può, così com'è costituita, raggiungersi proficuamente e contemporaneamente il triplice scopo voluto dai vigenti ordinamenti? Triplice scopo, ho detto; e cioè: 1°) di preparare all'istituto tecnico, e quindi anche alla scuola normale maschile; 2°) d'impartire un'istruzione pratica di cui possano giovarsi del pari così i giovinetti di classe agiata, ai quali per la condizione speciale dell'ingegno loro non si addicono gli studi classici, come quegli altri che, per la condizione civile ma non agiata delle famiglie, intendono darsi ai modesti impieghi amministrativi; 3°) di compiere in un triennio l'istruzione elementare di quei giovinetti del popolo minuto che dovrebbero poi andare alla bottega, all'officina, o dedicarsi ad un mestiere o ad un'arte fabbrile. Or bene, le statistiche hanno dimostrato che, se sono conseguibili con unico ordinamento di studi i primi due scopi, non è conseguibile con l'ordinamento medesimo il terzo. Intanto che cosa accade? Questo: che la scuola tecnica, forzata a dover servire in qualche modo a tutti e tre gli scopi, serve male ad ognun dei tre. Ma v'ha di peggio: v'ha il guaio che risentono, in ultima analisi, l'ordine morale e il sociale da quel ricco vivaio di giovani spostati che va formandosi nelle nostre scuole tecniche. Il fabbro, il muratore, il sarto, il calzolaio, il legnaiuolo, per l'insufficienza della scuola elementare, mandano i loro figliuoli a perfezionar gli studi nella scuola tecnica, quando pur non salti loro il ticchio di mandarli al ginnasio: nei genitori si desta allora l'ambizione di vedere i propri figli arrampicarsi su per le scuole superiori; i figli, ne' quali durante il triennio di studi si è sviluppata la ritrosia e, sarei per dire, la vergogna, il ribrezzo e l'odio per i lavori manuali, conseguita la licenza, non tornano, o tornano di assai mala voglia, alla bottega, all'officina, all'umile mestiere del padre. Non si creda veh! che io desideri il ritorno del tempo delle caste e delle privilegiate corporazioni di arti e mestieri, sebbene le vediamo oggi ripullulare sotto altre forme e mascherate da altri nomi; ma io penso che gli ostacoli naturali frapponentisi al passaggio di un cittadino da una condizione ad un'altra s'abbiano a rimuovere, se mai, non dalla mano artificiosa dello stato, che eserciterebbe con ciò una funzione non sua, ma dall'ingegno, dal lavoro e dalla volontà dell'individuo medesimo. Urge davvero, da parte dello stato, un provvedimento di riforma, perchè a questi lumi di luna *periculum est in mora;* ed è il pericolo delle conseguenze disastrose a cui andremmo incontro, quando ci trovassimo in uno spazio saturo di codeste miriadi di spostati e di malcontenti. E la riforma urgente, necessaria, a giudizio di tutti, perchè da un pezzo se ne parla, ma senza conclusioni pratiche, avrebbe ad esser questa: ordinare la scuola tecnica dei maschi secondo due tipi distinti, uno rispondente ai primi due scopi rilevati dianzi, l'altro, vera scuola di arti e mestieri, al terzo.(*)

Queste sono state le mie mire nell'occuparmi del modo di ripartizione, quantitativa e qualitativa, dell'insegnamento matematico per le scuole secondarie inferiori, riunendo, rispetto a tale insegnamento, in un sol gruppo il ginnasio inferiore, la scuola tecnica per i maschi e la scuola tecnica, o complementare, per le femmine, ferma sempre, quanto ad applicazioni e a metodo, la differenza specifica d'indirizzo tra scuola classica e tecnica, e, in particolare, tra scuola maschile e femminile.

(*) Su questi pensieri cade ora, come suol dirsi, qual cacio su' maccheroni, l'annunzio che fa il ministro Guido Baccelli nella sua circolare del 12 settembre 1898, n. 75, che ha per oggetto il *lavoro educativo*, e che è venuta in mia conoscenza dopo chiuso il congresso. Ecco le efficacissime parole colle quali il ministro formula la sua promessa: *La scuola tecnica, il generata com'è in un ginnasio senza il latino e il greco, dovrà presto ricostituirsi, per virtù del lavoro educativo, in corpo organico e fecondo, e risorgere varia di programmi e di ordini, come varie si offrono le condizioni delle sedi. In essa allora si svolgeranno i nuovi polsi e nuovi nervi; le sarà consentito di assidersi degnamente al posto che le si addice tra le istituzioni educative.* — Benissimo; ed auguriamoci che non soltanto *presto*, ma *prestissimo*, la promessa diventi un fatto compiuto.

5. Passo a dire delle scuole secondarie superiori.

Io, veramente, vorrei veder fuse in unico ordine di studi, da chiamarsi liceo, l'attuale classe 5ª ginnasiale, opportunamente modificata, e le attuali tre classi liceali, lasciandosi a costituire il ginnasio le attuali prime quattro classi, pur opportunamente modificate; di guisa che il corso ginnasiale quadriennale fosse il primo grado dell'istruzione secondaria classica, il corso liceale, pur quadriennale, ne fosse il secondo. In questo modo, s'intende, l'insegnamento matematico che si propone per l'attuale ginnasio inferiore andrebbe, senz'altra variazione, spartito in quattro anni, anzichè in tre; e analogamente dicasi dell'insegnamento per l'attuale ginnasio superiore e liceo. Ma quest'argomento lasciamolo, perchè mi farebbe oltrepassar di troppo i limiti del mio discorso. Considereremo il ginnasio e il liceo quali ora sono; e piuttosto parliamo della scuola normale e dell'istituto tecnico.

La scuola normale ha un fine ben determinato; e se per un rispetto può considerarsi quale una sezione d'istituto tecnico, il carattere suo speciale esige uno speciale insegnamento matematico, il quale però può esser della medesima estensione per le due scuole, la maschile e la femminile, salvo, s'intende, la differenza di trattamento tra le due scuole medesime per ciò che si attiene ad indirizzo, a metodo, ad applicazioni. All'insegnamento della matematica nella scuola normale maschile e femminile, ed anche nella complementare femminile, va congiunto, secondo i programmi governativi, l'insegnamento della economia domestica e computisteria, affidato e, secondo me, improvvidamente affidato, allo stesso maestro di matematica, al quale nessuna meraviglia, se continueranno a prevalere certe tendenze, nessuna meraviglia di veder commesso per ragion di economia anche l'insegnamento, per esempio, della ginnastica muscolare, considerata l'affinità di questa con la ginnastica del pensiero (la paternità della facezia, va notato, spetta all'uomo illustre che dirige i nostri lavori, se ben ricordate le brevi ma eloquentissime parole ch'ei pronunziò qui nel prender possesso dell'uffizio suo). Del resto, di economie e di computisterie non ho creduto di tener conto, e perchè mi manca la competenza di parlarne, e perchè, d'altronde, il nostro tema riguarda esplicitamente il solo insegnamento della matematica.

Le sezioni, dirò così, ordinarie dell'istituto tecnico sono le tre agronomica, commerciale e fisico-matematica; ed a queste ho rivolta la mia attenzione, lasciando da parte le sezioni industriali e gl'istituti nautici, avuto riguardo alla specialità loro, che richiederebbe, per poterne trattare *ex professo,* quella speciale e tecnica competenza che a me manca; il che va con maggior ragione osservato per le scuole industriali, aventi carattere locale, in quanto trovansi istituite con particolari ordinamenti nei centri industriali.

Le sezioni agronomica e commerciale conferiscono entrambe speciali diplomi professionali, e danno pur adito a scuole superiori, che sono una specie di università tecniche: la sezione agronomica alla scuola superiore di agricoltura, la sezione commerciale alla scuola superiore di commercio. La sola sezione fisico-matematica non conferisce verun diploma professionale; e mette direttamente al solo istituto tecnico superiore di Milano. Io penso, come pensano molti, e per ragioni notissime, che la sezione fisico-matematica abbia ragion d'esistere solo quando venga direttamente allacciata anche alle altre scuole d'applicazione per gl' ingegneri. Ciò potrebbe, parmi, conseguirsi: 1° separando completamente la scuola d'applicazione dalla facoltà matematica universitaria; 2° accrescendo di un anno, e portandola così da 3 anni a 4, la durata del corso della scuola d'applicazione; 3° accrescendo pur di un anno, e portandola così da 4 a 5, la durata del corso della sezione fisico-matematica. Allora l' insegnamento matematico elementare potrebbe ripartirsi tra i primi quattro anni, e sarebbe meglio digerito dagli alunni: nel 5° anno di sezione s'impartirebbe l'insegnamento matematico complementare. Agli studi della facoltà matematica universitaria si dovrebbe accedere per la sola via del liceo, a fine di conseguirvi poi la laurea dottorale; agli studi della scuola d'applicazione dovrebbe accedersi, di regola, per la via della sezione fisico-matematica d'istituto tecnico, a fine di conseguir poi il diploma d'ingegnere civile. Presentemente siedono agli stessi banchi di scuola nei primi due anni di facoltà matematica i licenziati dal liceo e i licenziati dalla sezione fisico-matematica d'istituto tecnico: i primi con intenti puramente scientifici ed istruiti nella matematica elementare con questi medesimi intenti; gli altri con intenti puramente professionali e preparati agli studi superiori con intenti di tale indole. Gl'inconvenienti che da una tale miscela derivino alla educazione scientifica degli uni e alla professionale degli altri, non avete bisogno vi sieno additati da me. La proposta congiunzione diretta della sezione fisico-matematica con la scuola d'applicazione farebbe poi cessare, vantaggio non ispregevole nel rispetto educativo, la indecente commedia, per limitarmi a chiamarla così, dell'esamuccio, *pro forma,* di latino, e soltanto orale, a cui vengono sottoposti i licenziati dalla sezione fisico-matematica quando dopo i primi due anni di facoltà vogliano continuar gli studi, anzichè nella scuola d'applicazione, nel secondo corso biennale di facoltà, a fine di conseguir la laurea. S'intende poi che, se e quando la proposta venisse accolta, anche la durata degli studi nell'istituto superiore di Milano dovrebbe essere ridotta da 5 a 4 anni.

Ciò premesso, vi dichiaro che per gl' istituti tecnici io mi sono occupato della sola matematica elementare, distribuendola, per tutte e tre le sezioni in comune, tra i quattro anni di corso: la sola differenza è questa, che la trigonometria, posta in quarto anno, sarebbe per i soli alunni della sezione fisico-matematica. L'estensione poi dell' insegnamento figura la medesima per il liceo e per l' istituto tecnico: dovrebb'esservi soltanto differenza di metodo e d' indirizzo in certe speciali teorie. Non mi son dato pensiero dei complementi di matematica, e per più ragioni: primieramente perchè la questione su cui ho l'onore di riferire è limitata alla matematica elementare; secondariamente perchè, se, nel caso più sfavorevole, le cose avessero a restar così, miglior partito sarebbe rafforzar l' insegnamento della matematica elementare, sopprimendo l'attuale complementare, che gli alunni dovrebbero ripetere nel primo anno di facoltà matematica; in terzo luogo perchè, nella fortunata ipotesi di accettazione della ripetuta proposta, mancherebbe ora il modo di fissare la qualità e quantità delle conoscenze destinate a far da anello di congiunzione della matematica elementare della sezione con la matematica superiore del primo anno di scuola d'applicazione. (*)

(*) SAUL PIAZZA, prof. di matematica nell'istituto tecnico di Milano, in un suo foglio a stampa, del quale fu differito ad altro congresso l'esame, propone per la sezione di commercio e ragioneria, 1°) che l'insegnamento stereometrico si riduca a semplici *nozioni*, e precisamente a *poco più che una semplice ripetizione di quanto i giovani già impararono nella scuola tecnica;* 2°) che l'insegnamento algebrico sia impartito *con metodo molto più pratico, dando massima importanza alle applicazioni dell'interesse composto e delle annualità;* 3°) che tra le materie d'insegnamento si aggiungano: per la parte aritmetico-algebrica *le permutazioni, disposizioni e combinazioni, il binomio di Newton per esponente intero e gli elementi del calcolo delle probabilità con qualche applicazione;* per la parte geometrica *le nozioni fondamentali sulle coordinate cartesiane, a solo scopo di render chiaro agli alunni il modo di poter rappresentare per punti con una curva una funzione qualunque, p. e. la mortalità nelle varie età* ecc.

Convengo pienamente sulla opportunità della terza proposta, e, quanto alla seconda, sulla opportunità altresì di trattare con una certa larghezza la teoria dell'interesse composto e delle annualità, compito però, quest'ultimo, da ripartirsi acconciamente tra i due maestri di matematica e di computisteria; e mi sembrano giuste e assennate le considerazioni del Piazza sulla importanza che pur dovrebbe darsi (ma, mi permetto di aggiunger io, *oculatamente*) anche tra noi, nella sezione di commercio e ragioneria, alla matematica detta *sociale*, avente principal fondamento nella teoria delle probabilità. I complementi matematici indicati saggiamente dal professore nella terza delle sue proposta troverebbero acconcia sede nella matematica assegnata, secondo le proposte mie, alla classe 4ª, e propriamente potrebbero prendere il posto della trigonometria rettilinea, assegnata alla sola sezione fisico-matematica; e vi troverebbero sede acconcia anche per la corrispondenza loro con gli *elementi di statistica*, assegnati appunto alla classe 4ª dal vigente programma governativo degli *Elementi di scienza economica*. Ma in veruna guisa io posso trovarmi d'accordo col Piazza sulla prima proposta, nè, per il modo com'ei la intende, sulla prima parte della seconda, perchè con esse si mira ad una notevole riduzione quantitativa e qualitativa dell'insegnamento della stereometria e dell'algebra elementari. Ei fonda le proposte sue sulle seguenti precipue considerazioni: 1°) *l'insegnamento della geometria solida*, ei dice, *fatto ai giovani della sezione di commercio e ragioneria con la stessa estensione che ai giovani delle altre sezioni, è ai primi perfettamente inutile nell'esercizio della loro professione;* 2°) *in quasi nessuna delle scuole commerciali all'estero, corrispondenti alle sezioni di commercio e ragioneria dei nostri istituti tecnici, havvi un programma di geometria, mentre essa s'insegna, come da noi, nelle scuole inferiori, corrispondenti alle nostre scuole tecniche;* 3°) quanto all'algebra, *se*, domanda il Professore, *può comprendersi, benchè molti vi sieno contrari, l'insegnamento completo della teoria degl'irrazionali ai giovani delle sezioni fisico-matematica e di agrimensura, si può davvero asserire utile ed opportuno pei giovani della sezione di commercio e ragioneria?* 4°) gli stessi *alunni* della sezione di commercio e ragioneria *danno poca importanza, ritenendolo quasi inutile*, all'*insegnamento* geometrico ed algebrico, che ricevono in comune cogli alunni delle altre due sezioni. — Del secondo di codesti quattro ordini di considerazioni vo' sbarazzarmi subito, perchè io credo che s'abbia a finire una volta con la imitazione pedissequa di tutto ciò che si fa all'estero, la quale è appunto una delle malattie che ci travagliano nell'ordinare e nel riordinare che facciamo delle nostre istituzioni educative e scolastiche: possibile che in cosiffatta opera non ci dovranno entrar mai per nulla i costumi nostri, la nostra indole, le nostre tradizioni? Ai rimanenti tre ordini di considerazioni del prof. Piazza mi sia lecito contrapporre le seguenti mie:

1°) Se avessero fondamento vero certe asserzioni del Piazza, e se prevalessero certi suoi criteri, bisognerebbe, a fil di logica e per senso di giustizia, farne anche applicazione, per esempio, all'insegnamento della fisica elementare, il quale per gli alunni della sezione di commercio e ragioneria dovrebb'essere notevolmente ridotto; e passando da uno ad altro ordine di studi, bisognerebbe nel liceo abbassar di molto, ad esempio, l'insegnamento del greco per i laureandi in matematica, quello della matematica elementare per i laureandi in lettere. E di questo passo dove andremmo a parare?

2°) *Altro è l'insegnamento classico ed altro il tecnico*, osserva il Piazza; e ne convengo anch'io, e ne conveniamo tutti. Ma in pari tempo, altra cosa sono le scuole d'arti fabbrili e altra le sezioni d'istituto tecnico, le quali avviano a professioni liberali, richiedenti una certa dose di coltura generale, differente sì sotto certi aspetti in quantità e qualità da quella dei licei, ma pur sempre organica e razionale; e di cosiffatta coltura sono parte integrante, per universale consenso, gli elementi di matematica contenuti entro i tradizionali confini. E non lo nega neanche il prof. Piazza, il quale riconosce l'*utilità* della matematica elementare *come mezzo efficacissimo allo scolgimento dell'intelligenza*, ma poi, parlando della stereometria, per giustificare la proposta sua di ridurla nel modo da lui suggerito, dice che *una parte di* codesto *utile i futuri ragionieri l'hanno già avuta con lo studio* della planimetria razionale. Ma, prima di tutto, perchè ai *futuri ragionieri* non farglielo conseguir per intiero codesto *utile?* Ed inoltre, non vede il Piazza che impartendo l'insegnamento razionale della planimetria e non facendo poi altro, quanto a stereometria, che riprodurre, o poco più, l'insegnamento dato nella scuola tecnica, si avrebbe una miscela geometrica di razionale e di pratico, con la quale si correrebbe serio pericolo di sfruttare quella stessa *parte di utile* già acquistata?

3°) Il Piazza parla *d'insegnamento completo della teoria degl'irrazionali*, che vorrebbe veder bandito, siccome non *utile* e non *opportuno*, dalla sezione di commercio e ragioneria. Ed avrebbe ragione quanto alla inopportunità di un *insegnamento completo*, degno di esser bandito anche dalle altre due sezioni; ma sta in fatto che il vigente programma governativo prescrive semplici *nozioni*

III.

6. Non v' ha dubbio, o signori, e lo sapete meglio di me, che il movimento d'idee matematiche del nostro secolo non s'abbia da annoverare tra i più poderosi de' quali si vanti la storia della scienza. Ma errerebbe grandemente chi giudicasse dell' importanza e della grandezza di tale movimento alla sola stregua de' nuovi veri acquistati e delle stesse nuove dottrine. V' ha un lato importantissimo per il quale l'odierna fase si differenzia dalle precedenti, ed è l'accurata e severa disamina dei principî, dei concetti fondamentali, dei metodi: in breve, l'applicazione della critica ad una scienza che prima si credeva intangibile. Nè la matematica avrà mai a temer nulla dalla critica. La matematica trovasi in una condizione, sarei per dire, privilegiata rispetto alle altre scienze tutte, condizione fattale dalla sua *intima perfezione teorica, della quale è testimonio irricusabile* (stacco queste parole dall' *Uno sguardo alle origini ed allo sviluppo della matematica pura* di ENRICO D' OVIDIO: Torino, 1889) *il fatto che dalla più lontana antichità sino a noi, delle successive conquiste fatte dalla matematica nessuna ha distrutto le precedenti. Quanti sistemi filosofici non si sono succeduti, ciascuno in antagonismo al precedente, da Talete e Platone al Cartesio, dal Kant all'Hegel e allo Spencer! E nelle scienze sperimentali, quante ipotesi inconciliabili tra loro non hanno successivamente imperato nella spiegazione dei fenomeni naturali da Aristotele al Darwin! Solo nel successivo sviluppo delle discipline matematiche nulla vi è stato da rinnegare, nulla da mutare sostanzialmente; ed il trionfo di concetti nuovi non ha infirmato mai le verità già acquisite, ma ne ha soltanto mutato il posto e la ragion logica, accresciuto o scemato il pregio e l'uso.*

Il lavoro di revisione o ispezione provocato dal nuovo indirizzo non è ancora compiuto, perocchè le lacune e i difetti, che esso ha condotto a poco a poco a scoprire nell'orditura generale della scienza, hanno rese necessarie nuove e delicate ricerche, che a loro volta hanno messo in luce altri punti scabrosi, o hanno dovuto arrestarsi dinanzi ad ostacoli non preveduti e neanche sospettati. In poco più di mezzo secolo d'indagini è stato fatto parecchio, non v'ha dubbio, ed i migliori tra i moderni trattati in uso presso di noi debbono l'origine loro agli sforzi di benemeriti e valenti autori, che hanno ritentata con soddisfacenti risultati l'esposizione dei primi elementi per armonizzarli col nuovo indirizzo, in cui si è messa la scienza. E qui parmi doveroso un atto di meritato plauso all'Associazione « MATHESIS », che in due anni, circa, dalla sua fondazione ha dato prove non dubbie del grande amor suo alla diffusione

---

sui numeri irrazionali e sulle operazioni ad essi relative; e non più che semplici nozioni sono quelle indicate nelle mie proposte.

4°) Quanto, infine, alla *poca importanza* che danno gli allievi ragionieri a quelle parti di matematica elementare, che essi ritengono *inutili*, mi scusi il prof. Piazza, ma qui vedo far capolino tendenze morbose, che il buon maestro, lungi dal secondare, dovrebbe anzi con tutte le sue forze reprimere e soffocare.

dei buoni metodi. Lode dunque a « MATHESIS », e lode, in particolare, al degno e benemerito suo presidente, Rodolfo Bettazzi. Ma, ripeto, se è molto ciò che si è conseguito, non è tale da poter bastare. Per quanto è dell'aritmetica e dell'algebra, limitandomi ad accennare, nel ristretto campo degli elementi, ai numeri irrazionali e ai complessi, e ai concetti di funzione e di continuità, converremo tutti nel riconoscere che ancora non può dirsi veramente appagato il desiderio d'una trattazione didascalica ordinata ed efficace di cotali argomenti, soddisfacente del pari ai bisogni delle scuole nei rispettivi ordini e gradi e alle esigenze della scienza. E parimente, per ciò che si attiene alla geometria, non può dirsi ancora risoluto il problema di rannodare i primi anelli della sintesi moderna alla grandiosa tradizione euclidea, e meno ancora l'altro problema di dare a questa una forma che, senza offenderne i lineamenti classici, non escluda per sè stessa quella geometria che si fonde in un sol getto con la geometria proiettiva, della quale Euclide non era forse così ignaro come alcuni credono, e la quale, studiando le poche relazioni fondamentali semplicissime cui sono organicamente connessi i disparati fenomeni del mondo geometrico, si è impadronita degli elementi onde si traggono e si dispongono e collegano in bell'ordine e in ben delineati gruppi, e con la maggior possibile economia e nel modo il più semplice, le innumerevoli proprietà delle figure. Ora, è urgente compier l'accordo, in questi punti fondamentali, tra la scienza insegnata, sia pur quella delle scuole secondarie, e la scienza militante, ed impedire che gli alunni delle scuole classiche, che a questa si avviano, abbiano a dimenticare la prima istruzione avuta, anzichè farne tesoro e fondamento per gli studi ulteriori. D'altra parte, si badi, gli argomenti cui feci allusione non vanno riposti tra le considerazioni scientifiche d'ordine elevato o speciale, e meno ancora tra i processi variamente artificiosi, escogitati a fine di agevolare qualche applicazione teorica o pratica: nell'un caso e nell'altro l'istruzione secondaria classica non avrebbe in che giovarsene, e verrebbe anzi allontanata dal suo vero obbiettivo. Si tratta, invece, di considerazioni le quali, circoscrivendo entro limiti sempre più angusti il materiale, per così dire, meccanico della scienza, vanno diritte diritte all'analisi dei concetti; epperò, lungi dal rendere più astrusa o più tecnica la matematica elementare, tendono a ricondurla sul terreno dell'ordinario ragionare. Ed è anzi da riguardare come un accordo fortunato e veramente meraviglioso questo, in virtù del quale quei medesimi concetti che si sono venuti svolgendo dal lavoro dei dotti nelle più elevate regioni della scienza, e che dominano anche al presente le loro investigazioni, sono eziandio i più propri ad accrescere l'efficacia educativa dei primi elementi, eliminandone ogni inutile meccanismo e facendone un vero strumento di coltura generale.

Queste non sono cose nuove per sè stesse, lo so, nè io intendo di spacciarle per tali; pur tuttavia un carattere estrinseco di novità par che lo abbiano nel bisogno che ne sia oggi rinnovato il ricordo alla distanza di 24 anni dalla affermazione solenne, che di certi criteri faceva un'autorevole commissione (Enrico Betti, Luigi Cremona, Eugenio Beltrami, Felice Casorati, Eugenio Bertini), giudicatrice di un concorso a premi pe' migliori trattati elementari di aritmetica, algebra e geometria.

7. Ho detto che i nuovi sistemi mirano a ricondurre la matematica elementare nella strada del comun ragionare. Da qui parmi seguire la convenienza e l'opportunità di assegnare, così per l'istruzione classica come, ed a maggior ragione, per la tecnica, due periodi all'insegnamento della matematica, per guisa da aversi una propedeutica matematica per le scuole secondarie inferiori, una matematica razionale per le superiori: la propedeutica avrebbe in pari tempo tale carattere da concorrere con le altre materie d'insegnamento a fornire di una istruzione pratica i giovinetti, per i quali la scuola secondaria inferiore è il termine degli studi. Una tale convenienza ed opportunità, oltrechè dalle considerazioni fatte, è pur giustificata dai seguenti motivi. La matematica, al pari di qualunque altra scienza, ha fondamento ultimo nell'esperienza, e dovrà non dimenticar mai questa sua prima origine e i concetti empirici della valutazione dei fenomeni naturali attentamente osservati, i quali concetti, da purificarsi a poco a poco, da allargarsi e coordinarsi, hanno da essere come il canovaccio sul quale imbastire la scienza; perocchè l'*ingegno* nostro, osserva l'Alighieri,

> . . . . . . solo da sensato apprende
> ciò che fa poscia d'intelletto degno.
>
> (*Paradiso*, c. IV.)

V'ha, inoltre, una gran serie di fatti del mondo metrico e geometrico, famigliari a noi sin dall'infanzia, e coi quali siamo continuamente alle prese nel comun vivere. Questi fatti, anche solo limitandoci a registrarli, ordinarli e classificarli, costituiscono già per sè stessi un piccolo tesoro di conoscenze, produttivo di altre per le vie percettive e di un ragionar semplice e facile. Ma non basta. Il giovinetto, al suo primo entrar nella scienza e movendovi i primi passi, certamente non potrà non incontrare alcune difficoltà; e quando con certi metodi d'insegnamento a base di certi libri par che tutto corra facile e spedito, si tratta allora di quella facilità e speditezza, che si ottengono col sacrifizio del rigor logico. D'altra parte, invocando anche qui una sentenza del divin poeta, l'insegnamento scientifico,

> . . . . . se . . . . . sarà molesto
> nel primo gusto, vital nutrimento
> lascerà poi quando sarà digesto.
>
> (*Paradiso*, c. XVII.)

E perchè la matematica della scuola secondaria superiore trovi ben disposto lo stomaco del giovinetto ad una buona digestione, somministreremo a questo, per tempo, con la propedeutica matematica un po' di magnesia effervescente, salutare e gradevole.

8. Ma quali i caratteri distintivi delle due matematiche?

Il carattere di razionalità risulta, com'è noto, di due elementi costitutivi, il minimo possibil numero di postulati e il procedimento costantemente e rigorosamente deduttivo: postulati, ho detto; da non confondersi con gli assiomi, chiamati da Euclide *communes animi conceptiones*. Gli assiomi, in numero invariabile, sono proposizioni evidenti di evidenza logica e conseguenze necessarie e immediate dei primi due principî di ragione, quello d' identità e l'altro di contraddizione: i postulati, invece, sono l'enunciazione o di fatti accettati interamente sulla testimonianza dei sensi e in base dell'esperienza, o di fatti idealizzati per guisa da farli servire a scopi scientifici, ma idealizzati sempre con aderenza alla realtà. Il carattere di razionalità, come ognun di voi m'insegna, non ha nè può avere senso assoluto, per doppia ragione, scientifica e didattica. Nel rispetto scientifico, non essendo ancor dimostrato quanti e quali postulati irriducibili costituiscano il fondamento necessario e sufficiente della matematica, siamo liberi di creare tanti sistemi di matematica (e ciò va detto in particolar modo per la geometria), tutti logicamente rigorosi, quanti i sistemi diversi di que' postulati: de' quali quanto minore è o sarà per diventare il numero, tanto maggiore riuscirà il grado di razionalità della scienza: e qui sta il progredir di questa. Nel rispetto didascalico poi possiamo estendere, oltre lo stesso relativo bisogno, il numero dei postulati, senza far perder nulla alla scienza elementare della sua orditura; e ciò a fine di spianar meglio la via allo scolaro, conseguendo così un piccolo organismo matematico tanto più razionale, quanto minore sarà il numero di essi; e i vari gradi è uffizio del provvido maestro accomodarli alle condizioni della propria scolaresca e allo special fine di questa nei propri studi. Quando poi con la riduzione dei postulati si faccia anche prevalere, nel processo dei ragionamenti, sul metodo deduttivo l'induttivo o l'analogico, o l'induttivo e l'analogico insieme, fondati nell'esperienza e nella osservazione, avremo appunto la propedeutica matematica, o matematica sperimentale, pratica, induttiva che dir si voglia.

A proposito d'induzione, tra parentesi, non per voi, dotti ed esperti colleghi, che non ne avete punto bisogno, nè io d'altra parte mi son partito dall'Abruzzo con la presunzione di venir qua ad ammaestrare alcuno, ma, all'opposto, col desiderio di tornarvi ammaestrato; non per voi, ripeto, ma perchè certe recenti, così dette, *istruzioni,* accompagnanti certi programmi ufficiali di matematica, mi par che istruiscano pochino e maluccio, mi piace di annunziarvi che in un mio modesto studio, in corso di pubblicazione,(*) ho innestato un capitolo che tratta appunto del fondamento della induzione matematica, del suo valor logico e delle cautele da aversi nel farne uso.

La propedeutica matematica, del resto, darà luogo anch'essa, e più anzi della matematica razionale, a vari sistemi, trovandosi ciascun d'essi definito da un maggiore variabil numero di postulati e

(*) *La matematica e i fenomeni naturali: discorsi di cose vecchie e nuove a base di nuove e vecchie.* È pubblicato il *Discorso I* dei sette di cui si compone l'intero lavoro, e che ha per titolo: *I fenomeni naturali e le rappresentazioni matematiche.* Milano, E. Trevisini, 1898, L. 0,60.

dal grado di prevalenza del metodo induttivo sul deduttivo; e questi vari sistemi debbono naturalmente adattarsi ai vari stadi di educazione intellettuale, dal giardino d'infanzia in su, fino a quando il senso numerico e il geometrico dell'adolescente, e, più in generale, il senso della grandezza, attuato dal concetto organico di uguaglianza, abbia conseguito quel graduale sviluppo e disciplinamento che permetta di affrontare lo studio della matematica razionale, della quale la sperimentale, lungi dal costituire un inciampo o una resistenza, sarà anzi, ripeto, una salutare preparazione.

Ad avere una rappresentazione spiccata dell'insegnamento matematico ne' vari ordini di scuole, io non vo' ricorrere ai soliti cicli o circoli concentrici, alle onde di crescente ampiezza determinate dalla caduta di un sasso sulla superficie di un lago, e via dicendo. Sono metafore codeste che, se ci riflettiamo attentamente, non si prestano a quella rappresentazione compiuta che si desidera; e piuttosto, quando di metafore o allegorie rappresentative si senta proprio il bisogno, attingiamole al mondo biologico; e mi permetterete che io in tal caso ne faccia istanza all'ostetricia. Ecco, in breve: la placenta, l'embrione, il feto, il neonato a me pare che rappresentino a meraviglia, nei loro periodi di svolgimento, i quattro insegnamenti matematici del giardino infantile, della scuola elementare, (*) della secondaria inferiore, della secondaria superiore.

9. V'ha chi si preoccupa della possibilità che una matematica sperimentale abbia, per così dire, a materializzare la mente dei giovani, o indurvi stati morbosi, per i quali sia poi reso loro difficile il salire alla generalità dei concetti. Non escludo che tale disastro possa avverarsi. Ma perchè si avveri bisogna proprio che il maestro non voglia o non sappia tener bene in mano e adoperare a modo e con le debite cautele l'istrumento di cui trattasi, cioè il metodo di esperienza e di osservazione; e allora il fatto si spiega. Codesto strumento, al pari di tutti gli strumenti fini e delicati, certo ha, non si nasconde, un difetto grave, insanabile, che può pure riuscir fatale; e il difetto si appalesa sempre che lo strumento venga adoperato da inesperto o negligente artefice, il quale, certo, farebbe minor male se ne mettesse in opera uno di mediocre valore. Uno squisito rasoio inglese, messo in azione da un buon barbiere, mi rade d'un tratto i peli tutti del mento, che è un piacere, come ho provato stamane prima di presentarmi a voi; adoperato da un macellaio può con ugual prontezza recidermi la carotide; e chi fosse condannato a farsi radere dal macellaio, correrebbe, forse, minor pericolo se questi facesse uso di un rasoio comune. Si sa poi che il carattere di pratico o sperimentale nei primi stadi dell'insegnamento non s'ha a scambiar mai col carattere negativo di non ragionato o, peggio, di sragionato: vo' alludere all'arte di certuni, consistente nel celare a bella posta concetti erronei e paralogismi col pretesto di una facilità, apparente e insidiosa, apportatrice di danno, talvolta irriparabile, alla futura istruzione dei gio-

(*) Ottime, a giudizio mio, le recentissime *Norme ai maestri e alle maestre per insegnare l'aritmetica e la geometria nelle scuole elementari* di GIOVANNI GABBIERI. Milano, F. Trevisini, 1898, L. 1,50.

vani, e quasi sempre causa remota, sebbene occulta, di quella feroce antipatia che giovani, pur provvisti di molto e acuto ingegno, sentono e manifestano per la povera matematica, antipatia alimentata anche dal pregiudizio di molti, che sia necessaria una speciale disposizione per capire la matematica elementare. Se, com'è possibile e com'è voluto dal magistero della natura, ci limitiamo a seguire nelle istituzioni matematiche le più semplici e ovvie leggi del pensiero, facendone poi applicazioni ugualmente semplici, e ovvie, d'onde potrà sorgere il bisogno di singolari attitudini e disposizioni? Possiamo benissimo e dobbiamo esser pratici, quando addestriamo i giovinetti nelle regole del conteggio e nella percezione e classificazione di fatti e leggi geometriche, e possiamo e dobbiamo contentarci di idee rudimentali, riservandoci di raffinarle e compierle a poco a poco negli stadi ulteriori dell'insegnamento; ma in pari tempo l'elementare, il pratico, il popolare dobbiamo sempre guardarci da scambiarlo con la nozione erronea o superstiziosa e coi procedimenti illogici. L'insegnamento, e questa è norma generale, deve impartirsi per guisa che lo scolaro, avanzando nella vita e nello studio, abbia bensì da imparare altre cose, ma non sia obbligato a disimpararne veruna; abbia da poter andare sempre avanti, ma giammai tornare indietro; sia messo in condizione di progredire di verità in verità, ma non costretto mai a riconoscere falso ed assurdo ciò che da prima aveva dovuto creder vero. In altri termini, l'insegnamento deve consistere nella sementa dei principî, che, fecondati a poco a poco dalla riflessione e confermati, ampliati, compiuti via via dalla teoria e dalla pratica, trasformino il giovinetto in un uomo, senza che il sapere dell'uomo abbia mai da smentire la coscienza del giovinetto.

10. Nel mio disegno la propedeutica matematica per le scuole secondarie inferiori è di unico grado; la matematica razionale per le superiori di due. Le scuole ginnasiali superiori e le liceali da una parte, le sezioni d'istituto tecnico dall'altra, avrebbero, in un sol grado, una matematica razionale fondata nel sistema di postulati comunemente accettato; la matematica, invece, della scuola normale verrebbe costituita in un grado di razionalità alquanto minore, lasciando, beninteso, al maestro la cura di fare, nel numero e nella qualità di postulati, quell'accrescimento ch'ei crederà conveniente. Così, per un esempio, se le leggi commutativa e associativa della somma, commutativa e distributiva del prodotto, movendo dal postulato inevitabile che il numero per sè stesso è indipendente dall'ordine secondo cui le cose si contano, sono teoremi rigorosamente dimostrabili; io crederei però conveniente e opportuno che nella scuola normale le intere leggi medesime si enunciassero quali postulati. E governandosi in questo modo, il maestro non farebbe nulla che potesse turbare la coscienza intellettuale, dirò così, del ragazzo; perchè quelle leggi, specie la commutativa e l'associativa della somma, ci sono assai famigliari negli usi della vita, famigliari sin dalla fanciullezza, tantochè si sogliono battezzar per assiomi, sebbene tali non sieno.

Ho detto dianzi aversi a fondare nel sistema di postulati comunemente accettato la matematica razionale delle scuole ginnasiali superiori e delle liceali e delle classi d' istituto tecnico; ma qui è necessario che io offra qualche altra spiegazione a scanso di possibili malintesi. Alcuni giovani professori abbracciano sino all'estremo limite di rigore la massima di R. Dedekind, *doversi sempre dimostrare,* prima di prestarvi credenza, ciò che è dimostrabile: e fedeli a tale massima, ripongono anzitutto ogni lor cura nel tener desta continuamente l'attenzione degli alunni a dover distinguere in ogni passo i concetti primordiali, indefinibili, da quelli che di vera e propria definizione sono suscettibili, gli assiomi propriamente detti dai postulati, e questi dai teoremi. Ecco: a me sembra che nell'insegnamento possa e debba seguirsi una via intermedia. Già, una separazione netta tra codesti ordini di veri non è sempre possibile, perocchè tra un ordine e l'altro s' interpongono in noi, come avviene in tutti gli stati psichici nostri, delle sfumature, che non sempre permettono di veder le precise linee di confine. Se prendiamo, inoltre, a considerare una data teoria già svolta, e ci ripieghiamo col pensiero su noi medesimi, ci accorgeremo che, oltre quelli messi facilmente in evidenza, vi si annidarono, quasi ad insaputa nostra, un mucchio di concetti primordiali, assiomi e postulati, quelli almeno, per non parlar di altri, che hanno attinenza allo spazio e al tempo e ai medesimi stati psichici nostri. Ci persuaderemo altresì che numerosi sono i principî sui quali quella teoria riposa, tutti dimostrabili, ma non tutti dimostrati, in questo senso che sulla dimostrazione di alcuni di essi la nostra mente sorvola, e vi sorvola perchè que' principî, sebbene non propriamente assiomi nè postulati, rifulgono tuttavia di tali caratteri di evidenza, che si richiede una certa analisi per riuscire ad introdurre il dubbio nell'animo nostro; e il dubbio noi lo facciamo a pie' di quelli rampollare a solo fine di mettere in rilievo la ragione di ciò di cui già siamo persuasi. Si sa poi che non per tutte le menti è ugualmente rapido l'apprendimento della ragione di una cosa; e così vediamo che, mentre per alcuni, dotati di grande potenza d' intuito, un vero apparisce d'un tratto quasi un assioma, per altri no; e tra quelli e questi ha luogo, s' intende, una graduazione immensa. Ho detto *quasi un assioma,* perchè il sentimento immediato dell'evidenza, senza ombra di deduzione, noi tutti, qualunque sia il grado di nostra intelligenza, lo abbiamo soltanto negli assiomi propriamente detti: del rimanente, la deduzione sarà più o meno rapida, e per alcune menti quasi inavvertita, ma ha luogo sempre. Or bene, io sono assai lontano dal volere che sieno banditi certi studi di ripiegamento della mente nostra sopra sè stessa; li credo, anzi, di utilità incontestabile nelle scuole superiori di magistero, costituendo essi la parte filosofico-critica della scienza, e li stimo validissimi a scongiurare gli errori a cui possono menare induzioni incompiute o mal fondate, sulle quali non di rado lo spirito tende a riposar tranquillo. Però, quando si tratti d' insegnamento secondario, parmi artifizio pedagogico non ispregevole, anzichè sfruttare codeste, mi si lasci dir così, persuasioni inconscie degli alunni, trarne partito a profitto della teoria principale. La stanchezza, il senso di noia, la sonnolenza che lo studio della matematica ingenera in una gran parte degli alunni delle nostre scuole, derivano anche, io penso, dal troppo frazionamento di concetti. Il principiante, sforzandosi di afferrare e ritenere la moltiplicità di proposizioni che ne vengon fuori, le confonde spesso; e la proposizione principale, veduta così attraverso ad un mezzo annebbiato, stancante l'occhio della mente, finisce di necessità con essere mal compresa. Non è fuor d'opera ricordare qui l'avvertimento sapientissimo lasciatoci da Seneca: *Comprehendere, quemadmodum maxima, ita minima difficile est.... Idem enim vitii habet nimia quod nulla divisio. Simile confuso est quidquid usque in pulverem sectum est.* (Epist. LXXXIX, 3.) Insomma, dove persuasione già c'è, perchè insistere insegnando, in certo qual modo, l'arte di dubitare? Tiriamo diritto, invece, mirando alla teoria principale, da esporsi il più brevemente possibile e con la maggior possibile semplicità. Solo dopo assodata la teoria principale, se il tempo e la condizione intellettuale media della scolaresca lo permettano, potrà il maestro istituire un'analisi retrospettiva, esaminare i principi tacitamente ammessi, dimostrarli o semplicemente affermarli, secondo i casi, istradando così i giovani in un proficuo genere di meditazioni: ma, ripeto, nel primo percorso di strada non frapponiamo ostacoli. Mi si consenta d'insistere discendendo ad alcuni particolari, perchè a me preme non si dia alla raccomandata parsimonia una portata maggiore di quella che io desidero abbia. Se dovessero ascoltarsi i dettami di certuni, un libro di matematica elementare razionale dovrebb'essere una specie di polverizzatore, con l'attitudine anche a snidare, ovunque s'incontrino, e mettere in mostra ogni sorta di concetti primitivi, di assiomi e di postulati, e crear dubbi anche dove la mente non sia punto disposta a dubitare, creandoli, come s'è avvertito, per voluttà di dimostrare, ad imitazione di coloro, e ve n'ha parecchi, che vanno in cerca di nemici per provar poi il gusto di combatterli. Bel gusto eh! Dinanzi ad un libro cosiffatto il principiante si spaventa, non muove più passo libero, non azzarda più nulla, non tenta più nulla. Poco male se lo sbigottimento incoglie una rapa; ma può anche impadronirsi dell'animo di un giovine d'ingegno e di felici attitudini. Mi spiegherò con esempi, sempre nel desiderio che le mie idee non sieno svisate, ed a conferma che tra il *nimia* e il *nulla divisio* di Seneca ci può essere, e c'è, una via di mezzo. La legge commutativa e associativa della somma certamente va messa in evidenza, perchè legge fondamentale, e perchè deve premere di allontanare possibili errori provenienti da non esatto apprezzamento di essa. Si dovrà, per le vie riflesse, far vedere che assioma propriamente non è, e neanche, tranne chè si tratti di numeri, un teorema da dimostrare: è bensì un postulato, una verità attinta all'esperienza e rispondente alla realtà fisica, verità che un procedimento naturale d'induzione e di analogia ci rende evidente. La legge stessa, in fine, non è applicabile ad ogni sorta di grandezze: e qui certo bisognerà mostrare quali tra esse, o in quali casi, godano di quella legge, e quali no. Qui dunque quella certa analisi è provvido ed opportuno che sia istituita; nell'esempio, invece, che sono per addurre, no. Dai *Preliminari* delle *Lezioni di aritmetica (Elementi della teoria dei numeri interi e frazionari)* di E. SADUN e C. SOSCHINO (Torino, 1893) stacco i due seguenti periodetti: *Quando, avendo gli oggetti* A, B, C, ... L, M, N *di un gruppo, si fanno loro corrispondere i numeri della serie dei numeri naturali in questo modo:* **uno** *ad* A, **due** *a* B, **tre** *a* C *ecc., si contano gli oggetti del gruppo. Avendo poi riguardo all'ordine nel quale si seguono gli oggetti,* A *si dice il* **primo** *oggetto,* B *il* **secondo,** C *il* **terzo,** *ecc.* — Non c'è bisogno di lente d' ingrandimento per accorgersi che là dentro que' due periodetti v' ha un brulichio di concetti primitivi, di concetti definibili, di assiomi e di postulati: il *gruppo*, l'*unione*, la *corrispondenza*, l'*ordine*, il *prima* e il *poi*, la *consecutività*, il *porre* e il *togliere*, ecc. Ma in questa prima nozione riflessa del contare, è necessario, è utile, è opportuno trarli fuori e proclamarli tutti, codesti concetti, o almeno qualcun di essi? I due autori hanno creduto di no, ed io penso com'essi. Invero, ne' due riportati periodi, che cosa di più innocuo, di più semplice, di più chiaro, di più famigliare a tutti, di più armonico con le nozioni e gli usi della vita abituale? Ma così non la pensa un severo critico, il quale in una sua recensione di cotesto libro lamenta l'*uso*, in esso, *dei concetti intuitivi di ordine e d'induzione completa, senza che il primo sia definito e il secondo enunciato.* Per questa ragione, e per questa soltanto, il critico infligge una specie di scomunica al libro, dichiarando *non potersi* questo *ritenere come un'aritmetica razionale e nemmeno come elementi di una teoria dei numeri, nel senso scientifico della parola.* Subito dopo, per altro, non so con quanta coerenza, ma forse a scopo d' indorar la pillola, chiama *piccoli e facilmente rimediabili* gli accennati difetti, e loda, e qui a buon diritto, la *chiarezza*, la *semplicità* e l'*ordine di esposizione* del libro stesso. Pare anzi che, secondo il critico stesso, l'aritmetica Sadun-Soschino sia la sola immune dai *tradizionali e grossolani errori e non-sensi:* tutte le altre, secondo lui, comprese le moderne, e niuna esclusa, ne rigurgitano (dobbiamo riferirci al tempo in cui la recensione fu scritta), e in tutte si lamenta la *mancanza assoluta di fondamenti.* Via, via, è troppo! Io conosco parecchi scritti dell'egregio critico, ne' quali al certo si ammirano la coltura vasta e soda di lui, l'acutezza dell' ingegno e lo zelo illuminato per l' insegnamento; ma non s'abbia a male se io gli manifesto sembrarmi che da codesto suo zelo e' si faccia talvolta trascinar tropp'oltre, sin quasi al punto d' inaugurare una specie di ipermetafisica, destando in altrui un certo qual senso di melanconia, di sconforto e, sarei per dire, di disperazione. E come no? Per citare un altr'esempio, al povero SALVATORE PINCHERLE, di nient'altro reo che di essersi permesso, ne' suoi *Elementi di aritmetica ad uso delle scuole secondarie inferiori* (notate bene: *scuole secondarie inferiori*), di essersi permesso, a chiarire il senso delle parole *addizione* e *sottrazione*, l'uso rispettivo dei verbi *riunire* e *togliere*, il critico medesimo, acceso di sdegno, gli fa: *E riunire che cosa significa?.... e togliere che cosa significa?* Osservate, all'opposto, ed ammirate lo spirito di savia moderazione ond'è compreso un altro critico, pur esimio, Giovanni Frattini, che nel *Periodico di Matematica* (vol. VI. 1891), parlando del libretto del Pincherle, si esprime così: *Pur di non venir meno al rigore scientifico che si è imposto, l'autore non è schivo di savie concessioni all'opportunità didattica.*

IV.

11. Passo ora a giustificare le linee generali della ripartizione che propongo.

Quelli che io sottometto all'esame vostro non sono programmi d'insegnamento, ma scheletri di programmi, libero, s'intende, chi insegna, d'impolparli a suo modo. Anzi, a proposito di programmi, desidero in prima che sappiate come io la penso. Saggio e provvido divisamento fu, in complesso, quello del ministro Ferdinando Martini, quando nel 1892 abolì per i ginnasi e licei i programmi ufficiali, *sostituendoli,* così egli si esprimeva, *con precisi e determinati limiti, e lasciando al maestro una saggia libertà di muoversi entro i confini tracciati.* Però in questa stessa buona riforma i limiti assegnati all'insegnamento matematico, e tuttora vigenti, non furono troppo buoni, nè riuscì troppo felice la ripartizione delle materie tra le varie classi; ed io conosco parecchi giovinetti licenziati dal ginnasio, i quali, non avendo voluto o potuto continuar gli studi al liceo, contrassero un eczema geometrico, nel quale si era andato a poco a poco trasformando il prurito destato in essi dal I° libro di Euclide, che è la sola particola geometrica assegnata al ginnasio. Però, prescindendo dalla matematica, il riordinamento martiniano, ripeto, fu, in complesso, saggio e provvido. Peccato che il Martini non estendesse la sua riforma agli altri ordini di scuole! Il ministro Baccelli nel 1894 seguì l'esempio del Martini, ma non ebbe la forza di andare più in là delle scuole elementari. Al Baccelli, tornato testè per la terza volta alla Minerva, mandiamo pure un augurio di lunga vita ministeriale, ma a patto ch'ei sottoscriva, con l'intervento di un notaio, una formale obbligazione di svincolare dai programmi anche l'insegnamento delle scuole secondarie tecniche e normali. Costringere i maestri a seguir tutti una medesima determinata via di passo uniforme fu, sino al 1892 per le scuole classiche, sino al 1894 per le elementari, ed è tuttora per le altre, uno dei precipui impedimenti, io penso, perchè non si avessero e non si abbiano libri interamente e per ogni rispetto buoni da parte anche dei migliori e più riputati autori. Se mai, quando proprio si volesse ritener la necessità di un programma ufficiale, come dicono, particolareggiato, dovrebbe questo modellarsi sopra un buon libro. All'opposto, i libri, per poter entrare nelle scuole, debbono o dovettero uniformarsi in tutto e per tutto al programma; e ne è così venuto, per molto tempo, che noi non abbiamo avuto (mi riferisco soprattutto alla matematica) nè buoni programmi nè, relativamente parlando, buoni libri. Dico *relativamente parlando,* perchè egregi autori hanno fatto quanto di meglio per loro si potesse, dati i programmi particolareggiati, ma non hanno potuto fare quanto avrebbero voluto. Fra essi, è vero, non mancarono uomini di gran coraggio che, senza troppo occuparsi nè preoccuparsi di programmi, composero libri che, secondo essi, avessero a corrispondere all'indirizzo e allo scopo di vere istituzioni matematiche ne' vari ordini di scuole; ma, come era da prevedere, cosiffatti libri non furono sempre i più fortunati. Come non compiangere, per citare un esempio solo tra parecchi, un pover uomo, avente scienza e coscienza, ma chiamato da forza irresistibile a scrivere un libriccino di matematica per le tre classi normali sul programma imposto nel 1897 dal ministro Giovanni Codronchi Argeli? Come non compiangere, ancor più dello scrittore, il povero maestro, obbligato ad insegnare nella classe prima normale gli *elementi di calcolo algebrico* con le *operazioni sulle* sole *quantità intere,* ma pur *con le equazioni di primo grado ad una incognita,* il tutto *con metodo induttivo* (notate bene, e ricordate quanto in proposito dissi dianzi), *e procurando* (notate bene ancor questo) *di mettere in grado il futuro maestro di analizzare e risolvere con facilità, rapidità e sicurezza svariate questioni* (Dio mio!) *di aritmetica,* ed obbligato poi, lo stesso infelice maestro, a dare l'anno successivo, e non prima, ai medesimi alunni, nella classe seconda, *con metodo che abbia rigore scientifico,* la teoria della *numerazione* e *l'analisi delle quattro operazioni* aritmetiche? Con voi qui, o signori, non ho bisogno di spiegarmi; ma mi spiegherò in altra sede, come suol dirsi.

12. Come vi dissi dunque, i miei sono semplici scheletri di programmi; e, anche per ragion di coerenza con l'accennatovi modo di vedere, non potevo regolarmi diversamente. D'altra parte, la matematica elementare ha i suoi naturali e tradizionali confini; e il professore, appena gli si accenni un argomento di quelli che integrano le istituzioni, vede subito e bene che cosa ei debba fare, o come e quanto debba estenderne il relativo insegnamento.

Ogni classe di ogni ordine di scuole ha lo scheletro della parte di matematica assegnatale: s'intende però, che non solo l'impolpamento, ma anche l'ordine secondo cui avranno a disporsi le ossa, è lasciato in libertà del maestro, libertà regolata e diretta dalla opportunità didattica. Io, naturalmente, nel descrivere ogni scheletro, dovevo incominciare dalle ossa del cranio, e venir giù giù sino a quelle degli arti inferiori. L'essenziale è che al termine dell'anno scolastico lo scheletro medesimo apparisca ritto e senza sostegni che lo reggano, o fili di ferro che ne tengano unite le ossa, ma impolpato e dotato di vita. Per altro, qua e là in ogni scheletro troverete, come eccezione alla regola, anche qualche muscolo: ciò accade, per uscir di metafora, rispetto a quei punti dell'insegnamento che, secondo me, richiedono una particolare attenzione da parte del maestro. Inoltre negli scheletri omonimi, per ritornare alla metafora, sebbene appartenenti a classi diverse o a diversi ordini di scuole, troverete, naturalmente, ripetuti pur col medesimo nome la maggior parte delle ossa; ma la grandezza di queste, la compattezza, la rigidezza, la resistenza ed altro debbono diversificare generalmente (non ho bisogno di spiegarmi) da uno ad altro ordine di scuole, da una ad altra classe.

13. Nella ripartizione delle materie di studio tra le varie classi di ciascun ordine di scuole superiori non mi sono dato verun pensiero di coordinamento con la fisica e la mineralogia rispetto ai soccorsi che a queste possano bisognare dalla matematica; perocchè sembrami poter provvedersi, temporaneamente almeno, anche con la matematica sperimentale appresa nelle scuole inferiori. Mi sono occupato della sola matematica, dividendola per guisa che in tutti gli ordini di scuole l'aritmetica, o l'aritmetica e l'algebra, si trovi interposta tra la geometria pura e la metrica, movendosi dalla geometria pura. La divisione della geometria elementare in pura e metrica fu introdotta provvidamente da Salvatore Pincherle nel 1881, presa la parola *metrica* non già in antitesi di geometria di posizione, ma nel significato particolare di trattazione indipendente da concetti di misura, mentre la geometria elementare, fondata com'è in ogni sua parte nel concetto di uguaglianza, è quasi per intero metrica nel significato generale di questa parola.

Se ne' primi due periodi rudimentali dell'insegnamento, il giardino d'infanzia e la scuola elementare, può reputarsi conveniente e necessario mantenere in associazione intima e costante le operazioni e i fatti numerici e geometrici, cessa la ragione di tale convenienza e necessità quando l'insegnamento deve cominciare ad assumere, come è nelle scuole secondarie inferiori, una forma sistematica, e maggiormente poi sistematica e determinata nelle scuole secondarie superiori. Aggiungete che le proprietà, diremo così, descrittive e costruttive delle figure e la loro sperimentazione debbono riuscire, io penso, di più facile e piacevole apprendimento che non le proprietà metriche e gli esercizi di calcolo. Di entrambe le discipline, quella del numero e l'altra dell'estensione, viene così ad ottenersi un insegnamento più intensivo, senza che l'una delle due distragga dall'altra. L'insegnamento misto e alternato, condotto per guisa che in ogni anno di corso procedano quasi di pari passo l'aritmetica, o l'algebra, e la geometria, io credo che ne allontani dallo scopo che ci proponiamo di raggiungere. Oggi, per esempio, vedremo interessarsi i ragazzi ad un teorema di geometria che stuzzichi il loro appetito; ma domani probabilmente un arido esercizio di calcolo, necessario e, per le rotaie in cui l'insegnamento trovasi, indifferibile, turberà l'appetito del giorno innanzi, il quale appetito per ridestarsi avrà bisogno di vermouth alla noce vomica. Nelle scuole classiche superiori poi e nell'istituto tecnico si rende maggiormente necessario che la geometria pura non venga punto distratta o turbata dall'aritmetica o dall'algebra; massimamente nelle scuole classiche, in considerazione del non facile passaggio che le attende dalla proporzionalità tra grandezze alla proporzionalità tra le loro misure. Anzi, in cosiffatto passaggio sta una delle ragioni che mi fanno prediligere il metodo della fusione, mercè cui verrebbe fatto una volta sola, con più solida preparazione, e non due come oggi, il passaggio stesso, che, se non è paragonabile al passaggio del mar rosso, non è però tale da prendersi a gabbo.

14. Ho toccato un argomento scottante, quello della fusione, lo so; ma lo lascerò quasi subito, perchè con questo po' po' di calore che vi si aggiunge (il centigrado segna qui dentro in questo momento la bellezza di 33°,5), correremmo davvero il pericolo di rimaner fusi qui tutti insieme: e già un esperimento, e fu una fortuna se ne uscimmo illesi, fu fatto il giorno 9 nella calorosa discussione cui diede luogo il tema appunto della fusione. Mi limiterò a brevi spiegazioni della fatta professione di fede fusoria.

Ecco, in prima: io amo la fusione, non la confusione. Non soltanto la planimetria, ma la stessa rettimetria ha esistenza propria e distinta. Nello stato presente della scienza la geometria della retta si riduce a ben meschina cosa se non usciamo dalla retta, a tanto meschina cosa che, chiusi in cotal modo, non siamo buoni neanche a trovare il punto medio di un segmento; la geometria del piano, invece, può andare e va molto in là senza bisogno di uscir da esso: e il progredir di ciascuna consisterà nel crescente numero di veri acquistabili senza uscire rispettivamente dalla retta e dal piano. Ma quando noi rimiriamo la scienza non in sè e per sè, bensì in ordine all'apprendimento nostro, vengon fuori allora le ragioni di opportunità didattica che consigliano la fusione, consistente soprattutto nello studio simultaneo degli argomenti affini di planimetria e stereometria con indirizzo al fecondo principio di dualità, *nulla essendovi in geometria* (osserva Luigi Cremona nella prefazione agli *Elementi di geometria proiettiva:* Roma, 1873) *che così accenda i principianti e li stimoli a far da sè, come il principio di dualità, ed importando quindi sommamente di darne loro la cognizione quanto più presto è possibile e di abituarli ad usarne con sicurezza.* E qui ci calza anche quanto già sapientemente osservava il Lacroix nell'*Essai sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier. La conservation,* così egli, *de l'analogie entre les parties d'un même traicté est de la plus haute importance, puisqu'en même temps qu'elle aide la mémoire du lecteur, elle l'accoutume à généraliser ses idées.* Sono ormai 9 anni che in un mio scritto, (*) posta da prima la questione ne' suoi veri e precisi termini, procurai di rilevare cotali ragioni d'indole didattica consiglianti la fusione nelle stesse scuole elementari superiori. Rispetto poi alle scuole secondarie superiori, la fusione, nel senso dichiarato, è consigliata anche dal riflettere che, considerato lo stato presente della scienza e dei metodi d'insegnamento, ci si presentano spartite in quattro gruppi le proposizioni planimetriche: il primo di quelle che non ci è dato spiegare o dimostrare senza uscir dal piano; il secondo di altre la cui spiegazione o dimostrazione è resa più facile e semplice uscendo dal piano che non rimanendovi; il terzo di quelle la cui spiegazione o dimostrazione è resa, all'opposto, più facile e semplice rimanendo nel piano che non uscendone; il quarto

(*) *L'insegnamento dell'aritmetica e della geometria nelle scuole primarie e popolari* (Città di Castello, S. Lapi, 1889, L. 1.40), pag. 80 e seg.

ed ultimo di quelle che riguardano proprietà dipendenti da certi medesimi principî da cui dipendono le corrispondenti proprietà stereometriche, di guisa che le dimostrazioni date per queste non sono che una facile estensione delle dimostrazioni di quelle. (*)

15. Chiusa la breve digressione, torniamo all'argomento nostro, cioè alla convenienza che in tutti gli ordini di scuole l'insegnamento della geometria pura preceda quello dell'aritmetica, o dell'aritmetica e dell'algebra, al quale ultimo faccia seguito l'insegnamento della geometria metrica. Mi si obbietterà che lasciar gli alunni per lo spazio di uno o due anni senza insegnamento aritmetico o algebrico di sorta quando s'insegna geometria, senza insegnamento geometrico di sorta quando s'insegna aritmetica od algebra, può far dimenticar loro quanto avevano rispettivamente appreso nel precedente ordine di scuole. Ma è questo un pericolo che il maestro può scongiurare, se il voglia; e deve e può scongiurarlo. All'uopo sarà necessario e basterà ch'ei di quando in quando imponga esercizî intorno a cose studiate già in quel precedente ordine di scuole.

16. Darò compimento alla descrizione delle linee generali con un accenno alle ore settimanali d'insegnamento che si propongono.

Le 9 ore che, in complesso, verrebbero assegnate alle tre classi di scuole inferiori soverchiano di 3 le attuali del ginnasio inferiore: sono invece soverchiate di 2 da quelle della scuola tecnica, di 1 da quelle della scuola complementare. È da osservare, quanto al ginnasio inferiore, che il proposto aumento di orario è dovuto all'aggiunzione della geometria fisica.

Le 9 ore che si propongono, sempre in complesso, per la scuola normale soverchiano di 3 il vigente orario. Ma non saremo indiscreti pregando i maestri di calligrafia, di canto e di ginnastica di voler cedere, da buoni fratelli, alla matematica ciascuno un'ora del rispettivo orario. Se è vero, come sempre si dice e decanta, che nelle scuole normali l'insegnamento di capitale importanza è la pedagogia, che, quale astro benefico, illuminerebbe tutti gli altri, non dovrà usarsi un qualche riguardo alla matematica, che, a braccetto con la logica, è, ed è sul serio, la pedagogia della mente?

Le 15 ore proposte per le quattro classi d'istituto tecnico sono soverchiate di 6 dall'orario vigente; ma ricordiamo che è stato escluso l'insegnamento della matematica complementare per gli alunni della sezione fisico-matematica.

Finalmente le 16 ore per le cinque classi di ginnasio superiore e liceo soverchiano di 3 l'attuale orario. E qui, Dio non voglia, ma prevedo che incontreremo gravi ostacoli; tanto più che anche al ginnasio inferiore si recherebbe un aumento di orario. Da un pezzo, miei buoni amici, spira vento non propizio alla povera matematica.

(*) Un bellissimo ed efficacissimo studio è per me il *Pro fusione* di ENRICO DE AMICIS, prof. di matematica nell'istituto tecnico di Brescia: vedi *Bollettino* de l'Associazione " MATHESIS ", 1897-98, pag. 73. È anche notevole in questo scritto la forma vivace e talvolta un po' tagliente, ma pur sempre convenientissima. Vedo, e ne godo, che anche al mio amico De Amicis va molto a sangue il pensiero oraziano, così espresso nel lib. I delle satire:

. . . . Ridiculum acri
fortius et melius magnas plerumque secat res.

Di carezze e di baci ne ha sempre ricevuti e ne riceve a dovizia da tutti: un giorno la chiamano la ginnastica del pensiero, e la collocano al di sopra perfino della stessa logica; un altro la quadratrice delle teste; poi anche, con Aristotele, i manichi della filosofia; e poi le commettono altresì di *svolgere ed esercitare,* negli stessi ginnasi e licei, *lo spirito d'osservazione* dei giovani, e di *reintegrarvi,* in compagnia delle scienze fisiche e naturali, *la coltura dei tempi nostri,* essendo esse scienze, e con esse la matematica, così dicono, *opportune a rinvigorire il pensiero, cui danno senso e carattere di modernità.* Tutte belle e stupende cose, che si leggono in documenti ufficiali. Ma intanto? Intanto, fatta e promulgata. per i ginnasi e licei, la disorganizzante, almeno nel rispetto educativo, distinzione tra materie principali e materie secondarie, la matematica si colloca tra queste ultime; e quando agli esami, in applicazione del così detto criterio di maturità, la commissione dichiari maturo in complesso e promuova di classe o licenzi un giovine, sebbene giudicato deficientissimo, poni caso, in matematica, è fatta prescrizione tassativa di supplire senz'altro esame alla deficienza innalzando il voto di tanto quant'è necessario per l'approvazione legale, e segnando il nuovo voto nel registro e nell'attestato o nel diploma di promozione o di licenza. Si ricorre, evidentemente, a cosiffatto espediente offensivo, a dir poco, della serietà del magistero, per non cadere con documento pubblico nella contraddizione di dichiarare ad un tempo quel giovine maturo e immaturo negli studi di coltura generale. La legge del 12 luglio 1896, che, ministro Emanuele Gianturco, riordinava le scuole normali, metteva, è vero, la matematica tra le materie principali, in relazione a quel criterio di maturità; ma poco dopo, il regolamento per l'esecuzione della legge, distinguendo le materie principalissime dalle principali, lasciava la matematica e la storia tra le semplicemente principali; nè basta ancora, perchè poco altro dopo, ministro il Codronchi, le istanze della storia, per essere annoverata tra le principalissime, venivano accolte, quelle della matematica no.

V.

17. Non vi dispiaccia ora, o signori, di volgere uno sguardo ai lineamenti delle tre discipline di studio nei loro rispettivi gradi: la geometria, l'aritmetica e l'algebra.

a)

18. La geometria che io chiamo *fisica,* a meglio significare che i fatti geometrici s'abbiano in prima a studiare nei corpi e attorno ai corpi, è, in fondo, quella medesima che, sotto il nome di geometria *intuitiva,* con atto sapiente quanto provvido istituiva il Baccelli per il ginnasio inferiore nel 1881, quando la prima volta saliva alla Minerva, ma che poi nel 1884 cadde col cader di lui, come non infre-

quentemente succede delle salutari riforme. Il Baccelli però, risalito al potere nel 1893 e rimastovi sino al 1896, ebbe il torto di non far rivivere con sè quella sua figliuola. Lo faccia almeno ora, nella sua terza ascensione, ma lo faccia subito; e ne avrà il plauso e la riconoscenza degli istitutori. Gioverà intanto ricordar qui le efficacissime parole colle quali il Baccelli stesso nel 1881 definiva lo scopo e l'indole della geometria intuitiva. Ei si esprimeva così: *Lo scopo dell'insegnamento della geometria intuitiva nelle prime classi del ginnasio è di procurare ai giovinetti con metodi facili e, per quanto sia possibile, con prove di fatto, le prime e più importanti nozioni della geometria, nozioni che riescano acconce al regolare sviluppo del loro giovane intelletto, utili ad altre scienze positive che dovranno apprendere nel corso ginnasiale, ed opportune non solo ad aprire l'adito, ma a far desiderare lo studio razionale della stessa geometria, che è riservato al liceo.*

Il Baccelli, così parlando, era, si vede, penetratissimo, tra i detti della sapienza antica, dell'oraziano, che

segnius irritant animos demissa per aures,
quam quae sunt oculis subjecta fidelibus, et quae
ipse sibi tradit spectator . . . . :

e, tra i detti dei sapienti moderni, di quello autorevolissimo del nostro Cremona, il quale aveva già riconosciuto che il metodo intuitivo geometrico, usato a tempo e luogo, *lascia nella mente un cumulo di concetti indelebili.* Tutt'è che il maestro, con l'aiuto anche del disegno e di artifizî meccanici, tragga partito dai numerosi fatti geometrici che continuamente si presentano al ragazzo in casa, a scuola, per le strade, in chiesa, dovunque.

19. Un aureo libretto che traduce in atto il procedimento da doversi seguire nella geometria fisica è, per me, la *Geometria popolare* di C. L. Littrow, recata nel nostro idioma, con note, da David Besso. Di cosiffatti procedimenti trattai anch'io in due libriccini, pubblicato il primo nel 1882, (*) l'altro nel 1889; (**) e vorrete, egregi colleghi, perdonare alla debolezza di un padre il ricordo ch'ei fa di due suoi figliuoli, perchè, miei cari, il sangue non è acqua.

Io credo, del resto, che, a rendere efficace l'insegnamento della geometria fisica, la scuola debba esser fornita di un gabinettino e laboratorio geometrico: compassi, doppi decimetri, righe, squadre, parallele, modelli di cartone, di legno, di fil di ferro; fili e superfici flessibili e inestendibili, superfici sviluppabili; figure solide a superficie rivoltabile; solidi compenetrantisi; apparecchi semplicissimi per la sperimentazione delle equivalenze in lunghezza, in area e, per mezzo di polveri finissime e scorrevolissime o di liquidi, in volume; modelli per la rappresentazione delle simiglianze, ed anche delle uguaglianze e delle simiglianze simmetriche, ecc. ecc. Gli esercizî poi di disegno e di costruzioni effettive dovrebbero campeggiare largamente.

(*) *L'insegnamento dell'aritmetica e della geometria nelle scuole ginnasiali e tecniche.* Roma, Paravia, 1882, L. 1,25.

(**) Vedi nota a pag. 77.

20. Una visitina, di quando in quando, al gabinetto e laboratorio geometrico farà bene ai giovani anche nel periodo d'insegnamento della geometria razionale, senza verun pericolo che le antiche reminiscenze possano comecchessia contaminarla. *Se il sistema logico geometrico* (così Giuseppe Veronese nella prefazione agli « Elementi di geometria »: Verona, 1897) *vuol essere indipendente dall'intuizione, ciò non significa che la vogliamo bandire dall'insegnamento: tutt'altro; desideriamo anzi che ogni proposizione ed ogni ragionamento sieno continuamente vivificati dall'intuizione spaziale, mediante l'osservazione di figure o modelli che aiutino lo svolgimento dell'immaginativa geometrica, sì che il ragionamento stesso apparisca agli alunni conseguenza più dell'intuizione che di una logica arida ed astratta.* (*) Gli esercizi di disegno dovrebbero sempre, o quasi, accompagnare anche la geometria razionale, specie la pura, e quasi venir fusi con essa; ma con accuratezza massima, perocchè una figura, se mal fatta o sgarbata, anzichè aiutare la facoltà immaginativa dell'alunno, la svia e la corrompe. Già, una compiuta educazione geometrica, anche per le scuole classiche, dovrebbe non andar mai disgiunta da esercizi di disegno; e poi si sa che il tracciamento effettivo ed accurato delle figure agevola di molto lo studio delle proprietà loro.

Che questi desiderabili rapporti fraterni tra il disegno e la geometria razionale possano degenerare in amplessi incestuosi, da riuscire d'impedimento alla generalità dei concetti, è un timore vano, da cui può soltanto esser compreso chi non pone mente all'indole e alla genesi vera delle nozioni geometriche e alle leggi del pensiero. Le geometriche non sono mai idee pure, com'è pura l'idea astratta e generale di numero: qualunque figura è qualcosa di determinato dello spazio, che apparisce mai sempre risultante di elementi collocati l'uno di seguito all'altro *juxta positionem,* come suol dirsi, esteriori l'uno all'altro, i quali nel calcolo possiamo bensì surrogare con segni astratti, ma che poi siamo obbligati ad immaginare quando li supponiamo contenuti entro limiti di forma inflessibile. Ciascuna di tali forme può dar luogo a relazioni numeriche astratte, ma essa per sè non cessa mai di essere un'immagine, un'immagine, per altro, generale, nel senso che è schematica. In vero, se la geometria tiene sempre desta in noi la facoltà d'intuizione, le immagini però che in noi si producono, e quindi quelle altresì che con imitazione disegniamo sulla carta, sono ben diverse dalle immagini propriamente empiriche. Io vedo un foglio di carta tutto sparso di caratteri; chiudo gli occhi, ed ho l'immagine del medesimo foglio: questa è un'immagine del tutto empirica, e rassomiglia in tutto la rappresentazione stessa dell'oggetto, avendo di questo presenti a me le dimensioni, il colore, le piccole irregolarità, le linee nere che formano i caratteri, ed altre particolarità; in breve, è l'im-

(*) Ho citato le parole del Veronese come quelle che, per l'autorità scientifica della persona che le ha proferite e per il nome ch'egli ha di rigorista in geometria, avvalorano le mie affermazioni; perocchè, del resto, io sento di non poter seguire interamente l'illustre geometra italiano (e ne dirò le ragioni nello studio già annunziatovi) quanto al nuovo sistema, da lui inaugurato, d'insegnamento della geometria elementare, sebbene, forse e in sostanza, sia soltanto il caso di dover dissipare certi malintesi.

magine individua dell'oggetto individuo. Al contrario, quando io immagino un triangolo, un cerchio, un prisma, l'immagine è individua perchè tale è il carattere di qualunque immagine, ma nel tempo stesso è generale in quanto è uno schema: tracciandola, non mi subentra l'idea della riproduzione, tratto per tratto, di un modello individuale dato, ma soltanto mi accorgo distintamente di realizzare una certa legge di generazione, che è l'essenza della figura immaginata. Con la indifferenza nostra di dare alle immagini geometriche dimensioni di diversa grandezza, veniamo ad attestare sempre meglio l'attività mentale nostra, mercè cui facciamo variare all'infinito le grandezze rappresentate, senza che svaniscano o restino modificate le proprietà e le relazioni delle forme. Ecco perchè e in qual senso l'immagine schematica è generale, consistendo la generalità sua nella legge genetica, che può indifferentemente realizzarsi dovunque nello spazio. Pertanto, ove il disegno geometrico non sia altro che la riproduzione fedele, il più possibile, di quelle stesse immagini che lo scolaro è obbligato a formarsi nella mente sua per l'apprendimento dei veri geometrici, come e perchè avrà da venirne pregiudizio alla generalità dei concetti?

21. Alle due geometrie dell'istituto tecnico e del ginnasio superiore e liceo, costituiti, come avvertii (III, 11), in uno stesso grado di razionalità, si è data anche la medesima estensione, come apparisce dai quadri; ed in entrambe si è fatto pure accenno ai *luoghi geometrici*, perchè il metodo che da questi ha nome riuscirà un salutare principio di avviamento e come una preparazione indispensabile ai moderni studi geometrici per gli aspiranti dottori di matematica, ed alla geometria analitica per essi e per gli aspiranti ingegneri.

Quanto a metodo d'insegnamento però, nelle due geometrie per le due categorie di alunni, mi è sembrato opportuno e necessario, per ragioni troppo evidenti, relative all'indirizzo diverso de' loro studi, proporre una differenza di trattazione nelle teorie dell'equivalenza e della simiglianza. In breve: io renderei obbligatorio nell'istituto tecnico il trattare la teoria dell'equivalenza col metodo euclideo; quindi indipendentemente da concetti di misura, ma movendo dalle nozioni comuni di lunghezza, area e volume, quali grandezze, e dalle pur comuni nozioni di uguaglianza e somma di lunghezze, di aree e di volumi, con le corrispondenti leggi commutativa e associativa, quali postulati. Mi sembrano eccellenti anche nel rispetto di questa maniera di trattazione le edizioni anteriori a quella, interamente rifatta, del 1886 degli *Elementi di geometria* di Achille Sannia ed Enrico D'Ovidio. Nelle scuole classiche superiori, invece, lascerei libero il maestro di seguire, nella teoria stessa dell'equivalenza, o il metodo euclideo o il moderno, consistente, questo, nel sostituire alle dette nozioni comuni tanti speciali concetti di equivalenza (in fondo poi non sono che altrettanti postulati aderenti al concetto generale primordiale di uguaglianza), quante le diverse grandezze, specificabili sotto determinati punti di vista. Quale dei due sistemi sia preferibile nel duplice rispetto, scientifico e didattico, è questione che a me sembra non ancora risoluta in modo soddisfacente. Non è il caso di parlarne qui oggi; ma io ne tratto a fondo, nel miglior modo che per me si possa, nel lavoro in corso di pubblicazione, che ebbi già l'onore di annunziarvi (III, 8). Nel qual lavoro mi occupo anche della dottrina della simiglianza e di quella delle grandezze proporzionali, in ordine a metodo. Frattanto dichiaro, come apparisce dai quadri, che io renderei obbligatorio nell'istituto tecnico il metodo che muove dalla teoria numerica della proporzionalità; all'opposto, renderei obbligatorio per le scuole classiche superiori il metodo euclideo, o altro che si ritenga ad esso equipollente. (*)

(*) Mi piace, per altro, di far qui accenno ai principî dai quali io moverò per costituire la teoria della proporzionalità.

Numero, quoto, quoziente e misura da un lato, ragione e rapporto dall'altro sono due classi di concetti che a me pare s'abbiano a tenere ben distinte. Il numero è quel che è, vale a dire, un concetto primordiale, indefinibile. La specificazione che se ne fa è nominale, dipendente, per altro, dalla specificazione reale dell'azione sul modulo: e anche intorno a ciò darò complete spiegazioni nel mio lavoro, sottoponendo al giudizio dei maestri di matematica elementare una nuova maniera di graduale allargamento del concetto di numero e, corrispondentemente, della teoria delle operazioni sui numeri. Quoto, quoziente e misura sono casi particolari distinti del numero e dei concetti nominalmente specifici di questo, come il rapporto è caso particolare della ragione. La ragione nel suo concetto generico non è numero nè risulta di numeri; il rapporto neanche esso per sè è numero, ma risulta essenzialmente di due numeri. Consideriamo le due grandezze g, g' finite e omogenee, che possono anche esser numeri. A me piace di denotare con $\begin{smallmatrix} g \\ | \\ g' \end{smallmatrix}$, che si pronunzia *g sta raffrontata al* g', la ragione di g a g', e con g/g', che si pronunzia *g sta* (commisurata a) g' il rapporto di g a g'; conservando poi, in comune, la notazione $\frac{g}{m}$ $\left(\text{oppure } \frac{g'}{m}\right)$, $\frac{g}{g'}$, che si pronunziano ugualmente *g divisa* (partita in) m, *g divisa* (partita con) g', significanti rispettivamente il quoto, cioè la nuova grandezza γ che si ricava operando sopra g secondo $\frac{1}{m}$, divenendo così m la misura di g riferita a γ quale unità di misura, e il quoziente, cioè il numero m' secondo cui si deve operare su g' per riprodurre g, il quale m' è la misura di g riferita a g' quale unità di misura. Per ragione intendo, con Euclide, *quaelibet habitudo* tra g e g' *secundum quantitatem*. Per Euclide è un concetto primordiale quello di grandezza, come sono concetti primordiali quelli di uguaglianza, di maggiore e minor grandezza, e di somma e differenza di grandezze; e tacitamente viene assunto da lui come postulato che g, g' sono essenzialmente uguali o disuguali, e se disuguali, una di esse è essenzialmente maggiore o minore dell'altra. Nella nozione euclidea di ragione v'ha di oggettivo la presenza e la inseparabilità delle due grandezze g e g', di soggettivo la percezione della loro uguaglianza o disuguaglianza, a significare ciò che v'ha di minimo indispensabile nel rispetto loro valutativo. Quando l'*habitudo secundum quantitatem* tra g e g' è, in particolare, *secundum mensuram*, la ragione diventa rapporto; nel quale abbiamo la percezione simultanea della misura h di g riferita a g' come unità, e della misura $\frac{1}{h}$ di g', riferita a g. Ho detto che g e g' possono anche esser due numeri n, n'. In tal caso la ragione $\begin{smallmatrix} n \\ | \\ n' \end{smallmatrix}$ ci darà la percezione della uguaglianza o disuguaglianza dei numeri n, n'. Questi sono anche rappresentati dalle loro misure rispettive $\frac{n}{n'}$, riferita ad n' come unità, $\frac{n'}{n}$ riferita ad n; ed abbiamo nel rapporto n/n' la percezione simultanea di cotali misure. Finalmente, nel quoto $\frac{n}{n'}$ (n partito in n') abbiamo il nuovo numero $\frac{1}{n'}$ n, divenendo il numero n' la misura del numero n riferita a $\frac{1}{n'}$ n come ad unità; e nel quoziente $\frac{n}{n'}$ (n partito con n') abbiamo il numero h secondo cui si deve operare sul numero n' per riprodurre n, il qual numero h è poi la misura del numero n riferita al numero n'.

Il rapporto g/g' delle due grandezze matematiche g, g' è, a sua volta, esso stesso una grandezza matematica, potendovisi applicare i due concetti di uguaglianza e di somma di rapporti, di maggiore e di minor rapporto e di differenza di rapporti, e potendosi altresì stabilire gli assiomi e i postulati concernenti il rapporto molteplice e il summolteplice. Ma allora, pur rimanendo sempre sottintesa la diversità specifica tra rapporto e quoziente, tra rapporto e quoto, la teoria delle proprietà dei rapporti, delle relazioni loro e delle loro operazioni viene a coincidere, corrispondentemente, con la teoria delle frazioni; talchè potrà provvidamente sopprimersi la teoria dei rapporti e delle proporzioni per rapporto, come trattato speciale separato dalla teoria delle frazioni, avendo cura di comprendere in questa tra le proprietà delle uguaglianze di frazioni quelle che nei trattati ordinari corrispondono alle proprietà delle proporzioni, e ricordando di far passare dallo stato la-

22. Nella geometria razionale della scuola normale e, a più forte ragione, nella geometria fisica della scuola secondaria inferiore, non solo le proprietà geometriche concernenti la simiglianza, ma anche quelle che si riferiscono all'equivalenza, dovrebbero, come apparisce dai quadri, aver fondamento nel concetto di misura e ricevere svolgimento da esso. L'abito di riferire una cosa ad un'altra omogenea. intuendo così la misura di una di esse per mezzo dell'altra, è un abito istintivo, che, ben diretto e disciplinato, è fonte di molte ed utili conoscenze geometriche; e per la scuola normale, e, a maggior ragione, per la secondaria inferiore, avuto riguardo all'indole e all'indirizzo loro, sarà necessario e basterà s'interrompa e si freni codesto abito durante il solo periodo dello studio delle proprietà di congruenza.

S'intende che nel subordinare l'equivalenza alla misurazione dovremo però quanto alle lunghezze circolari, alle aree e ai volumi (non parlo delle lunghezze rettilinee e delle grandezze angolari, perchè in entrambe esse l'equivalenza è anche congruenza) premettere corrispondentemente: 1º la dimostrazione della costanza del rapporto della circonferenza al diametro; 2º la trasformazione del parallelogrammo in rettangolo di ugual base e di uguale altezza, e la decomposizione del primo in due triangoli uguali; 3º la trasformazione del prisma in prisma retto di ugual base e di uguale altezza, ed in particolare del parallelepipedo in parallelepipedo retto di ugual base e di uguale altezza, e poi analogamente del retto in rettangolo, ed inoltre la decomposizione del parallelepipedo in due prismi triangolari equivalenti, da trasformarsi a loro volta in prismi retti uguali, e la decomposizione di un prisma triangolare in tre piramidi triangolari equivalenti. Va poi con sè che l'accennato triplice procedimento sarà, almeno prevalentemente, sperimentale nella scuola secondaria inferiore, razionale nella scuola normale.

---

tente al libero le diversità specifiche tra rapporto e frazione, tra uguaglianza di frazioni e proporzione, tutte le volte che si tratterà di questioni concernenti grandezze proporzionali. In nessun caso però potremo omettere la teoria speciale e distinta delle ragioni e delle proporzioni per ragione. La ragione di due grandezze matematiche omogenee e finite è anch'essa una grandezza matematica. Euclide, per mezzo degli equimolteplici, vi applicò il concetto di uguaglianza e l'altro di maggiore e minor ragione; anzi li applicò anche al paragone tra la ragione di due grandezze omogenee e quella di due grandezze eterogenee alle prime. Non si curò di applicarvi il concetto di somma, ma, quasi in compenso di questo, applicò il concetto di ragion composta. A lui bastava l'applicazione di cotali concetti per edificare la teoria delle grandezze proporzionali e delle figure simili. Ma, volendo, si potrebbe benissimo precisare in tutta la generalità, mercè l'intervento del concetto di limite, il significato dell'espressione $\frac{g}{g'} + \frac{g_1}{g'_1}$, e, stabilendo poi gli assiomi o i postulati concernenti la ragion moltiplice e la summoltiplice, costituire la teoria matematica delle ragioni. Anzi, si potrebbe anche andare più in là; si potrebbe cioè costituire la teoria matematica delle ragioni tra certe grandezze anche non matematiche; ed allora tra queste e le matematiche farebbe quasi da anello di congiunzione la ragione. Qui accenno di volo ad argomento di cui mi occuperò con qualche larghezza nel mio lavoro. Se della teoria matematica delle ragioni non si vede a colpo d'occhio l'importanza nello stato presente della scienza, io credo però che la teoria stessa potrebbe gittar luce sopra altre speciali teorie, per esempio, sul *giocondo* ma pur sempre *nodoso*, come si esprime Daniele Bernoulli, calcolo delle probabilità. E chi sa che la teoria delle ragioni non sia destinata a far da intermediaria per veder modo di render tributarie della matematica alcune delle cose che sino ad oggi le si sono mostrate renitenti?

b)

23. Passiamo all'aritmetica.

Quanto, in prima, all'aritmetica pratica per le scuole secondarie inferiori, l'essenziale è che si dieno concetti esatti delle operazioni, facendoli derivare dal bisogno di risolvere i quesiti di varie specie, attinenti agli usi della vita, e stabilendo il nesso delle operazioni stesse dipendentemente dal nesso dei quesiti di varia indole. Le regole delle operazioni basterà che sieno enunciate con esattezza e verificate per via di esercizî. Analogamente dicasi delle proprietà e relazioni numeriche, all'infuori dei casi semplicissimi nei quali sia agevole con poche parole far afferrare dal giovinetto la dimostrazione generale di qualche regola o proprietà o relazione: ma anche in questi pochi casi la prova sperimentale deve precedere a guisa di preparazione e seguire a guisa di conferma. Sono, secondo me, da proscrivere certe laboriose dimostrazioni fatte sopra numeri particolari, come, ad esempio, quelle, che vedo in alcuni libretti di aritmetica pratica, relative ad alcuni caratteri di divisibilità. In questi casi è vano sperare che l'alunno capisca la dimostrazione in sole parole, nè riuscirebbe sufficiente allo scopo l'agevolazione, intempestiva, che si offerisse alla mente di lui col farla appoggiare sopra simboli spogli di rappresentazioni numeriche particolari: d'altra parte, istituire e condurre il ragionamento sopra due dati particolari numeri è rattenere la mente dell'alunno, alla quale non è possibile svincolarsi dagli elementi particolari per afferrare il valor generale del processo dimostrativo. Nè si dica che qualcosa di analogo accade in geometria quando si dimostra qualche proprietà di una figura disegnata. Qui, come avvertimmo, abbiamo sì un fatto individuo, quale è la figura disegnata, ma questo fatto individuo è tale da obbligar l'alunno a pensare alla legge generale di generazione della figura; tanto vero che se, ad esempio, si tratta di un triangolo, ch'ei vede disegnato in lavagna, ei si sente liberissimo di concepirlo con modalità diverse da quelle onde trovasi descritto. Se gli presentate, invece, i due numeri 145724, 18622, il suo pensiero non ha più veruna libertà di movimento, perchè si tratta di entità determinate e circoscritte per ogni verso, e del ragionamento fatto non resta nella mente di lui veruna traccia di generalità. Quando anche ei ricordi il procedimento indicato dal libro o spiegato dal maestro, e sappia ripeterlo sopra due altri diversi numeri, acquisterà tutt'al più la persuasione induttiva che il procedimento stesso è applicabile a tutti i casi possibili; donde la giustificazione della regola o della proprietà numerica. Ma allora val meglio, ed è cosa più spedita, enunciare addirittura e con precisione la regola o la proprietà, e contentarsi di verificarla sopra parecchi e svariati esempi, rimandandone la dimostrazione vera e propria allo studio dell'aritmetica generale.

24. L'aritmetica generale della scuola normale sino ed esclusivamente alla teoria della proporzionalità è in estensione pressochè