LA FUSIONE DELLA PLANIMETRIA CON LA STEREOMETRIA

UNA PAGINA DI STORIA CONTEMPORANEA

DI

GINO LORIA

Nel suo trattato di *Géométrie descriptive* MONGE ha mostrato come alla proposizione " i centri di similitudine esterna di tre cerchi di un piano considerati a due a due „ si giungesse nel modo più naturale e luminoso, considerando i circoli dati come sezioni centrali di tre sfere e quindi immaginando i tre coni inviluppati dai piani che ne toccano esternamente due qualunque. È questo forse il più antico e certamente uno dei più brillanti esempi del vantaggio che vi è in certi casi di invocare considerazioni stereometriche nella geometria del piano. Un altro, di natura un po' più elevata, ma non meno bello, venne offerto da QUETELET e DANDELIN, quando mostrarono con quanta naturalezza si pervenga ai fuochi di una curva del second'ordine, con quanta eleganza se ne stabiliscano le proprietà, riguardando quella curva come sezione piana di un cono circolare retto e quei punti come di contatto del piano della curva con sfere inscritte nel cono. Un terzo esempio è somministrato dalla notissima dimostrazione stereometrica della proprietà caratteristica di due triangoli omologici appartenenti allo stesso piano.

Altri ed altri esempi congeneri si aggiunsero in processo di tempo. Essi fecero sorgere e sviluppare il desiderio di introdurre siffatte lucidissime argomentazioni nelle esposizioni più elementari della scienza dell'estensione. Ora a far ciò si opponeva un ostacolo insormontabile, cioè il costume (che risale per lo meno sino ad EUCLIDE) di considerare la planimetria e la stereometria come discipline separate, di esporre quindi le proprietà plastiche dello spazio soltanto dopo di avere esaurite quelle delle figure piane. A togliere questo ostacolo una sola via si apriva dinnanzi all'innovatore animoso: quello di fare della planimetria e della stereometria un tutto organico, riavvicinandone tra loro i temi aventi fra loro intima affinità ed esteriore somiglianza. Chi per primo ebbe tale idea, che, in un regno vivente sotto lo scettro di EUCLIDE, doveva sembrare estremamente anarchica? Non ardisco di rispondere categoricamente a tale domanda, perchè lo studio della storia della scienza in genere e della matematica in ispecie, rivelando che un gran numero di idee, considerate dai moderni come opera propria, sono frutti di investigazioni molto anteriori, impone una prudenza estrema nel pronunciare giudizî di tal fatta. (*) Mi limito pertanto a constatare quanto segue.

Nel 1825 il Gergonne scriveva: " Il est donc raisonnablement permis de se demander... si notre maniére de diviser la Géométrie, en *Géométrie plane* et *Géométrie de l'espace*, est aussi naturelle et aussi exactement conforme à l'essence des choses, que vingt siècles d'habitude ont pu nous le persuader. Toujours du moins demeure-t-il vrai qu'en y renonçant, on parviendrait, en ne recourant pour ainsi dire qu'à la simple intuition, à pousser assez avant dans la Géométrie, des commençants que l'étude du calcul, présentée dès l'entrée, ne rebute que trop souvent, et qui peut-être s'y livreraient plus tard avec beaucoup moins de répugnance, lòrsque leur intelligence se serait agrandie et fortifiée par l'étude d'une série plus ou moins prolongée de proprietés de l'étendue ". (**) Queste auree parole rimasero inascoltate; infatti Euclide e Legendre continuarono ad imperare in Francia come altrove, e non ad esse si deve il primo tentativo a me noto di cancellare la linea di demarcazione esistente fra la geometria piana e quella dello spazio. Esso è rappresentato da *Lehrgebäude der niederen Geometrie für den Unterricht am Gymnasien und höheren Realschulen* di C. A. Bretchneider (Gotha, 1844). In questo ottimo libro — ove molto si può ancora imparare, malgrado i progressi che fece la geometria in quest'ultimo mezzo secolo! — la innovazione di cui si tratta è praticata e consigliata riflettendo: 1° che trattenendo un giovane a lungo sulla geometria piana, la sua fantasia geometrica diviene tarda e priva di agilità, 2° che (come l'esperienza dimostra) il metodo didattico, che si fonda sulla separazione della planimetria con la stereometria, non dà di regola migliori risultati di quello basato sulla fusione dell'una coll'altra. In conformità a tal modo di vedere il Bretschneider divise la parte del suo libro relativo alla " Geometria sintetica " in tre sezioni intitolate risp. " Geometrie der Lage ", " Geometrie der Gestalt " e " Geometrie des Maasses ".

E poichè la distribuzione della materia è quello che a noi specialmente interessa, poichè d'altronde la questione di redigere un programma a doppio uso (***) è attualmente all'ordine del giorno fra noi, (****) così ritengo opportuno riferirne qui l'indice dei capitoli contenuti in ognuna delle tre citate sezioni.

(*) Mi sia concesso giustificare questa mia riservatezza con un esempio. Fu di recente sollevata la questione: chi per primo tentò fondere il calcolo differenziale con l'integrale? Alcuni risposero ricordando uno, altri un altro dei trattatisti di quest'ultimo ventennio. Ora chi mai avrebbe creduto che la risposta vera non si sarebbe ottenuta se non citando le *Institutiones analyticae* pubblicate per la prima volta a Bologna nel 1767 da V. Riccati e G. Saladini?

(**) *Annales de Mathématiques*, T. XVI, p. 209.

(***) Si noti che il Bretschneider, prevedendo le opposizioni che avrebbe incontrate, adottò un ordinamento tale che il suo libro potesse anche venire preso come testo da un professore antifusionista.

(****) Cfr. una relazione del Prof. Giudice inserita nel T. XIV, p. 34-36 del *Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario*.

I. *Geometria di posizione:* 1° Retta. 2° Piano. 3° Angoli piani. 4° Parallelismo nel piano. 5° Diedri. 6° Angoli di rette e piani. 7° Parallelismo nello spazio.

II. *Geometria della forma:* 1° Figure piane in generale. 2° Proprietà dei triangoli. 3° Quadrilateri, in particolare parallelogrammi. 4° Il circolo. 5° Figure inscritte e circoscritte. 6° Angoli solidi. 7° Poliedri in generale. 8° Piramidi. 9° Prismi. 10° La sfera.

III. *Geometria di misura:* 1° Divisione e misura delle rette. 2° Proporzioni. 3° Area delle figure rettilinee. 4° Similitudine. 5° Relazioni metriche tra figure simili. 6° Periferia ed area del circolo. 7° Volume di prismi e piramidi. 8° Similitudine e simmetria di solidi. 9° Area e volume di figure tronche. 10° Area e volumi della sfera e di solidi annulari.

***

Se il Bretschneider abbia trovato seguaci ignoro; (*) ma è certo che non debbono essere stati molto numerosi e significanti, dal momento che il nuovo metodo da lui immaginato cadde ben presto in dimenticanza (il Baltzer stesso, che in molte occasioni attinse a larga mano all'opera del Bretschneider, non solo non ne adottò il concetto fondamentale, ma nemmeno lo onorò di una semplice citazione!) Sicchè si può affermare, senza tema di ingannarsi, che dalle idee dell'egregio professore del Liceo di Gotha non trasse la propria ispirazione il secondo, in ordine di tempo, di coloro che propugnavano l'utilità di alternare nell'insegnamento gli argomenti di geometria piana con quelli di geometria solida; è desso il sig. C. Méray, autore dei *Nouveaux Éléments de Géométrie* pubblicati a Parigi nel 1874, il quale giustifica l'innovazione da lui arrecata, con le parole seguenti: " J'ai abbandonnée la distinction d'usage entre la Géométrie plane et la Géométrie dans l'espace. Outre qu'elle n'est pas dans la réalité des choses, puisque la nature ne nous offre que des figures dans l'espace, elle met un long interval entre la théorie de la ligne droite et celle du plan, dont chacune cependant est nécessaire à la parfaite intelligence de l'autre; elle nécessite même une interruption dans l'étude de la ligne droite. Enfin, elle est encore plus nuisible dans l'enseignement professionnel, car la pratique des Arts réclame bien plus la connaissance approfondie des principales combinaisons de droites et de plans, que celle de propositions théoriques, comme les propriétés des sécantes du cercle. Ces inconvenients m'ont paru surpasser de beaucoup les avantages que cette méthode peut avoir comme artifice didactique; si elle divise et aplanit un peu les premières difficultés de la Géométrie, on ne pent nier qu'elle soit pour beaucoup dans la

(*) Tale è forse A. Steen, capo della scuola dei fusionisti danesi.

lenteur que mettent les élèves à acquérir la faculté de *lire dans l'espace* „.

A chi legge non isfuggirà certamente l'indiscutibile analogia di natura che esiste fra i motivi addotti dall'eminente geometra francese e quelli che guidarono il BRETSCHNEIDER a conclusioni analoghe. Riguardo alla maniera in cui quello tradusse in atto le proprie idee, affinchè il lettore se ne formi un concetto dirò che il MÉRAY abbandonò la solita divisione in libri, e distribuì tutta la materia trattata in ventisette capitoli, ai quali seguono sette appendici relative a questioni speciali. Un esame un po' attento di tutta l'opera manifesta che quei ventisette capitoli compongono varî gruppi. Infatti dai primi sette si apprendono relazioni di posizione e il paragone (cioè la semplice constatazione dell'eguaglianza o della diseguaglianza) di angoli e porzioni di rette; per precisare questi dati notisi che — prescindendo dal Cap. I introduttorio — il II contiene delle generalità sopra rette e piani, il III è consacrato al parallelismo (con ispeciale riguardo al moto di traslazione) nonchè all'intersezione di rette e piani, il IV alla perpendicolarità (con nozioni relative al moto di rotazione), il V ed il VI trattano del paragone fra angoli (piani o diedri) o fra segmenti rettilinei, ed il VII delle proprietà principali dei triangoli. — Passando quindi alla misura, il MÉRAY consacra un capitolo (l'VIII) alle mutue distanze fra punti, rette e piani, ed applica subito le nozioni stabilite alla determinazione della lunghezza di un arco di curva (Cap. IX), dell'area di una superficie piana (Cap. X) o curva (Cap. XI), e del volume dei solidi (Cap. XII). L'autore ritorna poi a questioni attinenti alla posizione, trattando delle figure omotetiche e simili (Cap. XIII) e di quelle simmetriche (Cap. XIV) e dimostrando le principali proprietà del triedro. Nel resto dell'opera il concetto di fusione non rappresenta più che una parte secondaria, giacchè i Cap. XVI-XXI sono tutti dedicati al cerchio ed ai poligoni regolari, mentre i restanti trattano successivamente di cilindri, di coni, di superficie di rivoluzione e finalmente della sfera.

All'opera del MÉRAY non arrise migliore fortuna di quello che ebbe lo scritto del BRETSCHNEIDER, giacchè, non soltanto le proposte ivi fatte vennero accolte con estrema diffidenza dalla classe dei vecchi insegnanti, affetti dappertutto di misoneismo cronico, pronti sempre a giudicare le cose nuove più difficili delle antiche; ma anche agli scienziati essa passò inosservata, onde venne troppo presto dimenticata, e si presenta, dopo un quarto di secolo, come opera nuova, tuttora in attesa di un giudizio. Ma chi voglia oggi misurarne il valore deve tener sempre presente l'epoca in cui venne scritta; altrimenti rischierebbe di misconoscerne le doti di originalità e quegli altri pregi che ora in Francia (probabilmente per l'incontestata autorità nel frattempo acquistatasi, coi suoi lavori di analisi, quello si considera, da un certo punto di vista, per il WEIERSTRASS della Francia) vengono riconosciuti nel modo più esplicito, cioè coll'adozione di quell'opera come libro di testo in parecchi istituti. (*)

***

I venticinque anni che sono ormai scorsi dalla pubblicazione dei *Nouveaux éléments de géométrie* sino ad oggi compongono un periodo estremamente importante per tutto quanto concerne la filosofia e la didattica della geometria. Si ricordi infatti che gli è nel decennio 1870-1880 che si diffusero in tutto il mondo, divenendo proprietà comune, le idee radicalmente riformatrici di Lobatscheffsky e Bolyai; fu allora che divenne generale e profonda la convinzione della necessità di sottoporre ad una revisione completa la materia della geometria di Euclide, nonchè il metodo con cui è trattata, specialmente coll'intento di misurare quanto solido fosse l'edificio eretto dal sommo Alessandrino. E nei quindici anni che seguirono, questo assiduo lavoro di revisione non è cessato un istante; inoltre, in Italia, una schiera di giovani valorosi, abbandonando le aule universitarie, dove avevano apprese le nuove idee, popolarono le scuole medie, infiammati dalla nobile intenzione di far fruttare quanto avevano appreso, sicchè un soffio di nuova vita parve circolare nelle aule, in cui dianzi maestri e discepoli sonnecchiavano sugli *Elementi* di Euclide.

Come esponente di questo nuovo stato di cose ci si presenta un trattato di geometria informato all'idea di fondere la planimetria con la stereometria; ma di fonderle, non col semplice intento di rendere più agevole, più dilettoso, più fecondo lo studio della geometria, ma con quello, ben più nobile ed alto, di rendere meno numerosi o più chiari i postulati fondamentali della geometria, più semplici e rigorose certe argomentazioni, più " pura „ la compagine di alcune teorie coll'eliminazione di certi elementi estranei. Il trattato a cui alludo (il lettore se n'è già accorto) è quello pubblicato da R. De Paolis quindici anni or sono sotto il titolo di *Elementi di geometria* (Torino, 1884), ed ove tutta la scienza dell'estensione è divisa in sei sezioni, cioè: 1° Verità fondamentali, 2° le figure fondamentali della geometria (triangoli e poligoni, angoli triedri e angoli poliedri, solidi poliedri, 3° cerchio, cono, cilindro e sfera, 4° teoria dell'eguaglianza, 5° teoria della proporzionalità, 6° teoria della misura. Va rammentato che dal ben auspicato connubio fra planimetria e stereometria, celebrato dal De Paolis, nacquero delle nuove dimostrazioni, così importanti dal punto di vista dottrinale, da costituire un vero progresso scientifico.

La novità dei concetti e la concisione del dettato fanno apparire, oggi, come quando vennero alla luce, gli *Elementi* del De Paolis, piut-

(*) Vennero anche costruiti dei modelli in legno per illustrarne il contenuto e facilitarne l'intelligenza tosto come un " livre du maître " all'uso francese, che come un manuale scolastico: ciò spieghi perchè essi ottennero scarsa diffusione nelle scuole italiane, anche in quelle dirette da fusionisti. Fortunatamente due egregi insegnanti (uno dei quali discepolo del De Paolis) contribuirono al trionfo delle nuove idee, esperimentando il nuovo metodo nell'Accademia Navale di Livorno e poi pubblicando un'opera (*), ove i procedimenti ideati dal compianto professore dell'Università di Pisa sono modificati in modo da meglio corrispondere alle esigenze delle scuole, e formano un trattato che nulla vieta di adottare come piattaforma di un insegnamento elementare della geometria. In conseguenza il numero dei fusionisti da manipolo diventò legione; (**) e si accrebbe a dismisura il numero di coloro che, pur non arrolandosi in tale schiera, assumono un'attitudine favorevole alla fusione, e se ne servono ne' casi in cui da essa provengano indiscutibili vantaggi. (***)

***

Il problema della fusione non può, nè deve restringersi entro gli angusti confini della geometria elementare. E di vero — per non parlare della geometria sintetica, ove la considerazione simultanea di figure piane e di figure solide è sangue e midollo di tutti i concetti e di tutti i metodi — è naturale domandarsi se essa sia teoricamente possibile e praticamente utile nella geometria analitica. Orbene, per quanto concerne la parte elementare di questa disciplina, l'Italia ha già da tempo risposto affermativamente a tale domanda; giacchè, tanto nella *Geometria alle coordinate* (Parma, 1891) di L. Raschi, quanto nel *Trattato di geometria analitica* (Livorno, 1893) di G. Lazzeri, sono esposti contemporaneamente i fondamenti del metodo delle coordinate per forme di I, II e III specie, e quindi applicati alle figure di primo ordine (rette e piani) ed a quelle di secondo (coniche e quadriche). Per quanto invece concerne la geometria analitica superiore o geometria differenziale delle curve e superficie, la risposta venne data da quello stesso eminente scienziato che si fece in Francia apostolo della fusione per l'insegnamento elementare. Giacchè il Méray nella IV ed ultima parte (Paris, 1898) delle sue ottime *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques*, più ancora che mescolare le considerazioni concernenti il piano con considerazioni relative allo spazio, riguarda la planimetria infinitesimale siccome caso particolare della stereometria, ed ottiene così rilevanti

(*) G. Lazzeri e A. Bassani, *Elementi di geometria*. Livorno, 1ª ediz., 1891; 2ª, 1898.

(**) Cfr. la vivace relazione del Prof. De Amicis, *Pro fusione*, Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario, T. XIII, 1898, p. 49-72; e l'articolo del Dott. G. Candido *Sur la fusion de la planimétrie et de la stéréométrie dans l'enseignement de la géométrie élémentaire en Italie* in *L'enseignement mathématique*, T. I, 1899, p. 204-215.

(***) Basti annoverare fra questi ultimi il Prof. Veronese (v. le dichiarazioni nella Prefazione agli *Elementi di Geometria*. Padova, 1897, da lui redatti colla collaborazione del Prof. Gazzaniga).

semplificazioni e ravvicinamenti importanti. A tale innovazione siamo sicuri che molti faranno buon viso: giacchè se in taluno può sorger dubbio sulla possibilità che uno, digiuno di planimetria, sia in grado di assimilarsi la stereometria, nessuno potrà giudicare più difficile il rettificare una curva gobba del rettificarne una piana, ovvero più complicata la determinazione analitica del piano tangente ad una superficie di quello che sia la risoluzione del corrispondente problema per una curva piana.

Da tutto quanto precede scaturisce che l'idea di fare un tutto della geometria del piano e di quello dello spazio, sorta dapprima dal modesto desiderio di meglio corrispondere ai fini ed alle esigenze dell'insegnamento elementare, si manifestò gradatamente sotto l'aspetto assai più imponente di metodo atto a rendere più perfetta la struttura della geometria, più sciolto e regolare il funzionamento de' suoi organi. Concepita in origine come applicabile soltanto ai rudimenti della scienza della estensione, essa a poco a poco mette ali così robuste da poterne attingere le vette più eccelse. Quanto essa sia esente da artificio, quanto corrisponda allo stato odierno della scienza, è dimostrato dal vederla nascere (almeno) nella mente di tre persone differenti per indole di studi, per tendenze scientifiche e per nazionalità, dal vederla riuscir vittoriosa sull'indifferenza sprezzante di alcuni, sull'aperta opposizione di altri. Non basta forse ciò a consigliare chiunque insegna a considerare il metodo della fusione almeno come uno di quelli che si possono scegliere per l'istruzione della gioventù? E l'aver aggiunto un metodo di esposizione e coordinamento, nuovo e potente, a quello che ha il suo prototipo negli *Elementi* di Euclide, non è forse titolo sufficiente per accordare un posto stabile nella storia della scienza a coloro che primi predicarono coll'esempio il principio della fusione?

Genova, 20 Aprile 1899.

OSSERVAZIONI SOPRA LE COORDINATE POLARI

DI

GINO LORIA

Si sogliono ordinariamente considerare come coordinate polari di un punto P del piano il *raggio vettore* ρ e *l'anomalia* ω, cioè il numero positivo che misura la distanza di P da un punto fisso O (*polo*) e l'angolo, contato in un senso determinato, formato dalla semiretta OP con una semiretta fissa uscente da O (*asse polare*). Tale definizione è perfettamente logica e non presenta inconveniente alcuno, allorquando si considerano dei punti isolati; inoltre, essa viene in certo modo legittimata considerando, assieme al sistema di coordinate polari, il sistema di coordinate cartesiane ortogonali, la cui origine cade nel polo e di cui l'asse delle ascisse coincide coll'asse polare; l'accettabilità di essa viene ancora confermata notando che la prima delle definite coordinate polari altro non è che il *modulo* o *valore assoluto* del numero complesso rappresentato nel modo consueto dal punto P.

Ma, quando si considerano delle serie continue di punti (linee) e si vogliono studiarle coll'uso esclusivo delle coordinate polari, s'incontra una difficoltà assai grave. Infatti per rappresentare mediante un tale sistema una curva, si dovrà adoperare un'equazione della forma

$$f(\rho, \omega) = 0; \tag{1}$$

orbene è chiaro che facendo variare ω da $-\infty$ a $+\infty$, in generale, in certi intervalli ρ risulterà positivo, ma in altri negativo, e ad interpretare siffatti valori è impotente la definizione che abbiamo riferita in principio.

Ad ovviare a tale inconveniente basta modificare un po' le considerazioni di partenza, surrogandole con le seguenti: Si consideri in un piano un punto fisso O ed una semiretta fissa a uscente da esso, e s'immagini che una semiretta giri attorno a O partendo dalla posizione a o rotando nel senso considerato come positivo o nell'opposto. Per ogni sua posizione r si troveranno su di essa infiniti punti (li indicheremo con M) ed altrettanti se ne troveranno sulla semiretta complementare $\overline{r}$ (li indicheremo con $\overline{\mathrm{M}}$). Orbene per fissare la posizione di un punto M si prenderanno i numeri:

$$\rho = + \text{lunghezza } \overline{\mathrm{OM}}, \ \omega = \text{angolo } (ar),$$

mentre per fissare quella di un punto $\overline{\mathrm{M}}$ si assumeranno i numeri

$$\rho = - \text{lunghezza } \overline{\overline{\mathrm{OM}}}, \ \omega = \text{angolo } (ar).$$

In conseguenza tutti i punti di qualsivoglia semiretta avranno positiva la prima coordinata polare, mentre tutti quelli della semiretta complementare l'avranno negativa; la seconda coordinata sarà la stessa per tutti i punti di una semiretta, e precisamente positiva o negativa secondochè la semiretta mobile per raggiungere la posizione considerata ruotò nel senso positivo o nell'opposto.

Osservando: 1° che se una semiretta r fa con la retta fissa a un certo angolo, la complementare fa con a l'angolo $\omega \pm \pi$, 2° che per arrivare a quella posizione r può sempre ruotare nel senso positivo, risulta evidente che per determinare un punto mediante coordinate polari, si potranno sempre surrogare i numeri precedenti con altri sempre positivi. Ma tale artificiosa sostituzione, se può tornare utile quando si tratti di punti isolati o quando si voglia passare a coordinate cartesiane, complica di regola la risoluzione delle questioni riferentisi alle curve, in particolare quella del problema (pel geometra fondamentale) che consiste nel determinare la forma della curva rappresentata da un'equazione del tipo (1).

Per dimostrare la verità di questo asserto addurremo due soli esempi, dopo avere premessa l'osservazione seguente: per costruire la curva rappresentata dalla equazione (1), il modo più consentaneo alla natura delle cose è di far ruotare una semiretta attorno al polo, in un senso o nell'altro, partendo dalla posizione a, e determinare sopra ciascuna i punti corrispondenti della curva; tale rotazione dovrà essere continuata indefinitamente in entrambi i sensi, se si tratta di una curva trascendente, ma se si tratta di una curva algebrica si potrà arrestarla dopo un certo numero di giri, perchè, a un certo momento, si ricadrà in punti già segnati.

Esempio I. — Abbiasi la curva rappresentata dalla equazione

$$\rho = 2\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\omega; \tag{2}$$

è subito visto essere dessa non altro che il cerchio di raggio R tangente all'asse polare nel polo e posto nel semipiano delle y positive. Ora dalla (2) risulta che:

$$\begin{array}{llll} \text{per} & 0 < \omega < \pi & \text{è} & \rho > 0 \\ \text{per} & \pi < \omega < 2\pi & \text{è} & \rho < 0. \end{array}$$

Interpretando questi fatti conformemente alle esposte definizioni si vede che su ognuna delle semirette uscenti dal polo e situate nel semipiano delle y positive si trova un punto della nostra curva, e che altrettanto accade per la complementare di ognuna delle semirette situate nell'altro semipiano: ciò è appunto quello che corrisponde allo stato di cose rappresentato dalla figura, che lasciamo al lettore di tracciare.

Esempio II. — La curva rappresentata dalla fig. 1 rientra nella categoria delle " rodonee " di Guido Grandi, la cui equazione generale è $\rho = 2\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,m\omega$; ora tale classe di curve, meglio di qualunque altra, può servire a dimostrare l'utilità delle nuove coordinate polari; essa ci somministrerà il secondo esempio che vogliamo svolgere. — La curva

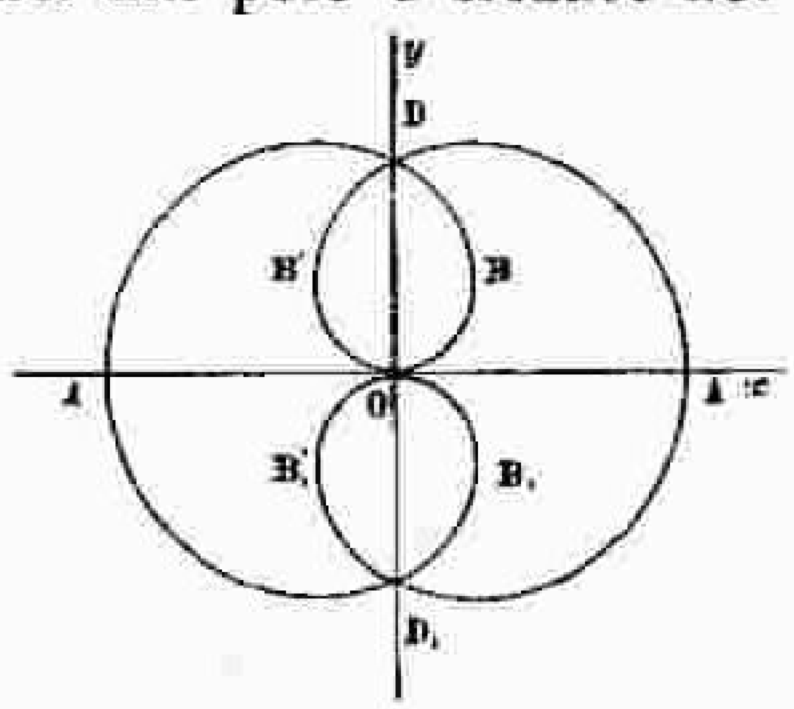


Fig. 1.

$$\rho = 2\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\frac{\omega}{2}, \tag{3}$$

in coordinate cartesiane è rappresentata dall'equazione seguente:

$$(x^2 + y^2)^3 - 4\mathrm{R}^2(x^2 + y^2)^2 + 3\mathrm{R}^4 y^2 = 0.$$

Essa è dunque una curva del sest'ordine, simmetrica rispetto ai due assi della coordinata, avente nell'origine un punto di contatto di due rami con per Ox relativa tangente; su quest'asse ha inoltre due punti semplici A, A' tali che $\overline{0A} = \overline{0A'} = 2\mathrm{R}$, mentre sull'asse delle y ha due punti doppi D, D_1 tali che $\overline{0D} = \overline{0D_1} = \mathrm{R}\sqrt{2}$. La forma generale della curva risulta dalla fig. 1. — Ora riprendiamo la equazione (3), per applicare ad essa le nostre considerazioni generali. Per ottenere tutta la curva basterà evidentemente far compiere alla semiretta r due giri; la (3) fa vedere che

$$\begin{array}{llll} \text{per} & 0 < \omega < 2\pi & \text{è} & \rho > 0, \\ \text{per} & 2\pi < \omega < 4\pi & \text{è} & \rho < 0. \end{array}$$

Perciò su ogni semiretta del primo giro esiste un punto della curva in questione; il luogo geometrico di essi è l'arco $0BDA'D_1B_10$. Invece su nessuna semiretta del secondo giro si trovano punti della curva, ma uno ne esiste sulla complementare di ciascuna; si genera in conseguenza l'arco $0B'_1D_1ADB'0$, che completa la curva.

È superfluo per noi il moltiplicare gli esempi; il giovane lettore potrà svolgergli per proprio esercizio. Importa invece fare un'osservazione concernente certe spirali notevoli conosciutissime.

Definita la spirale di Archimede mediante l'equazione

(4) $$\rho = a\omega \quad \text{ove} \quad a > 0,$$

facendo variare ω da 0 a $+\infty$ si conclude che la curva parte dal polo e fa attorno ad esso nel senso positivo infinite circonvoluzioni allontanandosene indefinitivamente; si ottiene così la curva segnata a tratto punteggiato nella fig. 2. Se invece si fa variare ω da 0 a $-\infty$, attenendosi alle convenzioni suesposte, si ottiene un altro ramo di curva, simmetrico rispetto a $0y$ della curva dianzi tracciata: è quello che è segnato nella fig. 2 a tratto continuo. Ora è chiaro che volendo

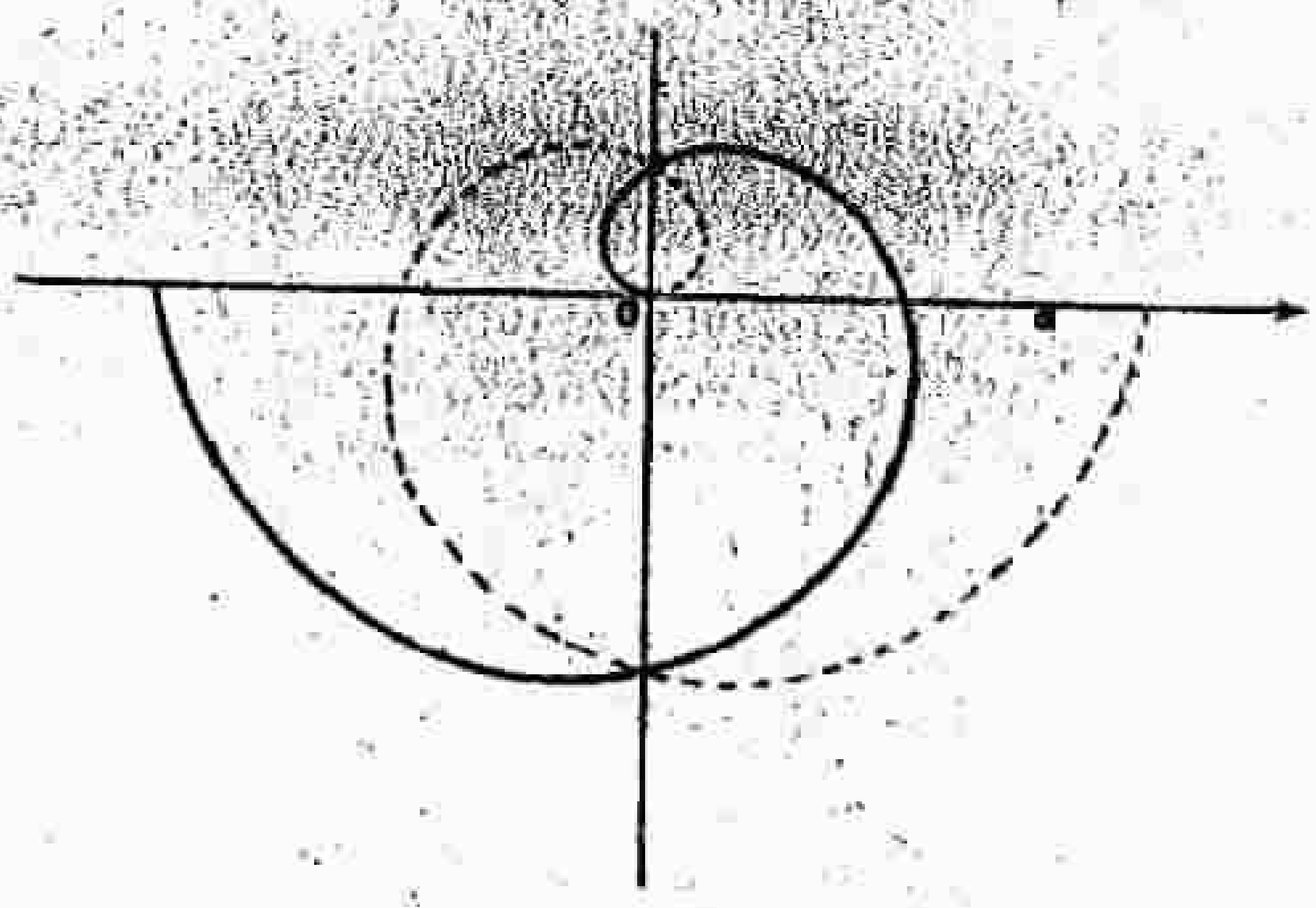


Fig. 2.

lasciare alla ω la massima libertà, di cui ha diritto, converrà concederle tutti i valori da $-\infty$ a $-\infty$; onde (contrariamente a quello che di consueto si pratica) come *rappresentazione geometrica* COMPLETA dell'equazione (1) si deve considerare l'insieme dei due rami segnati nella fig. 2. Perciò la spirale d'Archimede è una curva simmetrica rispetto all'asse delle y e possiede infiniti punti doppi distribuiti su quest'asse.

Similmente: tutte le spirali rappresentate dall'equazione

(5) $$\rho = a\omega^n,$$

ove n è intero positivo, sono curve simmetriche rispetto a O_x se n è pari, a $0y$ se n è dispari; in ogni caso sono fornite di ∞^1 punti doppi, allogati sopra una retta. — Di analoghe prerogative godono le spirali

(6) $$\rho^m = a\omega^n,$$

ove m e n sono numeri interi, positivi o negativi; lasciamo al lettore di enunciarle, nonchè di verificare che la spirale logaritmica, oltre il ramo continuo generalmente considerato, ne possiede un secondo punteggiato.

Considerazioni analoghe a quelle qui svolte, potrebbero istituirsi relativamente alle coordinate polari nello spazio.

Genova, 10 Aprile 1899.

SULLA DEFINIZIONE DEL NUMERO

1. Nella mia *Teoria delle Grandezze* (*) ho dato la seguente definizione: " Data una classe di grandezze Γ (senza porre per essa nessuna " condizione) e prese due sue grandezze qualunque A e B, secondochè " esse sono uguali disuguali, diremo che esse hanno *uguali numeri* o " *numeri disuguali* ".

A tale definizione, citata nei precisi termini ora detti e senza alcun'altra delle parole che poi seguono nel testo, il Prof. A. M. Bustelli, in un suo lavoro (**) fa la seguente osservazione: " Mi pare che questo " modo di esprimersi dell'autore possa dar luogo a degli equivoci. Parrebbe infatti, stando a codesta enunciazione, che il numero fosse " qualche contrassegno assoluto di A e B nel modo stesso che è tale " delle pluralità. Ma ciò evidentemente non è, quando si tratta di grandezza in generale, perchè allora il numero è relativo all'unità di " misura; e cosiffatte relatività l'autore avrebbe fatto bene a metterle " in rilievo da bel principio ".

E il Prof. De Amicis in una sua *Lettera aperta* al Prof. Bustelli (***) trova giustissima l'obbiezione e aggiunge: " Al sostantivo grandezze " doveva seguire l'aggettivo misurabili, e, se io non erro, dovevasi " poi dimostrare che se A, B hanno numeri uguali (o disuguali) per " una data unità di misura, hanno pure numeri uguali (o disuguali " per qualunque altra unità di misura ". (****)

Per la chiara cognizione di quanto sto per scrivere, aggiungo che alla mia citata definizione fanno seguito poco dopo nel mio libro le parole: " Collegando ad ogni grandezza di Γ un ente da dirsi numero, " considerati due di questi enti possiamo sempre concludere che deve " dirsi che essi sono uguali o disuguali. Questi enti sono quindi per " noi grandezze ". E poco più in giù: " Se indicando S il simbolo del" l'operazione generatrice della classe Γ ed essendo A , B . . . . L , M gran-

(*) Bettazzi, *Teoria delle Grandezze.* Pisa, Spoerri, 1890, pag. 67.

(**) A. M. Bustelli, *La Matematica ed i fenomeni naturali.* Dispensa 1ª. *I fenomeni naturali e le rappresentazioni matematiche.* Milano, Trevisini, 1898, pag. 56.

(***) *La matematica ed i fenomeni naturali.* Discorsi del Prof. Anton Maria Bustelli. Lettera aperta del Prof. Enrico De Amicis all'autore. *Periodico di matematica*, Tomo XIV, Marzo-Aprile 1899.

(****) In detti lavori si fanno anche altre osservazioni alla mia citata *Teoria delle Grandezze*: ma su quelle non intendo in questa circostanza intrattenermi pubblicamente, ed alcuno, del resto, riconosco giuste senz'altro io pure.

" dezze di questa classe, $\alpha, \beta \dots \lambda, \mu$ i loro numeri si abbia $S(A, B, \dots L) = M$, " a μ daremo il nome di somma di $\alpha, \beta \dots \lambda$ e scriveremo allora " $\alpha + \beta + \dots + \lambda = \mu$ ".

Esaminerò le obiezioni mosse, prendendo motivo così ad illustrare e chiarire la definizione da me usata.

2. E innanzi tutto, una definizione di quella forma colla quale si introduce una parola nuova *(numero)* senza dare ad essa un significato, costituisce un errore? Senza dubbio no; essa, per adottare la terminologia usata dal Prof. Burali-Forti (*) è una definizione di quarta specie, simile a quella a cui ricorre Euclide il quale, per esprimere un certo fatto geometrico, che egli definisce, usa la frase: *avere ragioni uguali,* nella quale comparisce il nome di *ragione* senza che ad esso si dia un significato. Definizioni di questo genere ci permettono spesso di preparare la via alla creazione di concetti nuovi, per es. gli ordini di infinitesimo, o ad introdurre concetti difficili a definire direttamente in sè, come per es. il tempo. (**)

Nè si può opporre che con tal modo si fa uso di parole non definite; giacchè una parola acquista spesso un diverso significato a seconda delle frasi in cui entra, talchè sono veramente queste frasi che vanno definite quando la parola non debba usarsi isolata: e se son ben definite le frasi, poco importa che siano definite tutte le parole che vi compaiono, precisamente come per definire una parola poco importa che abbiano o no ricevuto un significato le sillabe che la compongono. L'essenziale è che non ci si prenda la libertà di usare quelle parole fuori delle frasi colle quali sono state presentate, o delle altre di cui si sia dopo data la definizione.

Ciò non toglie per altro che si possa a quella parola dare dei significati per usarla isolatamente o farla servire ad indicare enti nuovi, purchè quei significati si accordino coll'uso delle frasi già definite. Così alla parola *ragione* usata da Euclide si può dare il significato di *rapporto* fra due grandezze, non perchè ciò sia necessario, ma perchè la fraseologia del rapporto è identica a quella della ragione; agli ordini di infinitesimo, o almeno ad alcuni, si dà il significato di numero, o si tengono in conto di enti nuovi, e via dicendo. Ma nel momento di dar la definizione di una frase, questa questione del dare un significato ad una parola di essa usata sola, si lascia impregiudicata.

L'obiezione del Prof. Bustelli apparisce (per le parole che egli cita) che sia fatta alla mia definizione della frase " aver numeri

(*) Burali-Forti, *Logica matematica*. Milano, Manuali Hoepli, 1894, pag. 140.

(**) Vedi mia *Teoria delle Grandezze*, pag. 5-6. Il Couturat, *De l'infini mathématique*, 2ª Parte, Libro I, Cap. III, scrive: " In generale il matematico non definisce mai nessuno dei concetti fondamentali della scienza: nè il numero, nè la lunghezza, nè la durata, nè la massa, che sono tuttavia gli oggetti proprii della speculazione matematica e gli elementi costitutivi di tutte le grandezze. Egli non può nè deve definire che l'uguaglianza e l'addizione di due grandezze omogenee; queste definizioni gli bastano a caratterizzare ogni specie di grandezze e le determinano interamente " e altrove (ivi 1ª Parte, Libro I, Cap. III). " Il matematico... *pone* dei simboli e pone insieme le regole, secondo cui dovrà combinarli insieme, e queste regole bastano a caratterizzare questi simboli e a dar loro un valore matematico. In una parola, egli crea degli enti matematici per mezzo di convenzioni arbitrarie.

uguali „; ma siccome egli dice che si viene così a fare di ogni numero il contrassegno di una grandezza, senza che si sia stabilito di assumere un'unità, mentre il numero è relativo a questa unità, io osservo che con quella mia parola si definisce la frase " aver numeri uguali „ la quale accenna all'uguaglianza di due grandezze, che è un fatto assoluto e non relativo ad un'unità. Mi pare dunque che l'obiezione sia piuttosto da trasportarsi a quel tratto (da me superiormente citato) nel quale mi propongo di attribuire alla parola numero il significato di ente che stia da sè. Altrettanto dicasi dell'obiezione del Prof. De Amicis, il quale, chiedendo che si dimostri che se A e B hanno numeri uguali rispetto ad un'unità non li possono avere disuguali rispetto a qualche altra unità, tende a far vedere che la frase, " aver numeri uguali „ corrisponde ad una relazione assoluta fra A e B, indipendente dal mezzo scelto per la rappresentazione (unità); se ci limitiamo a quelle parole citate dal Prof. Bustelli, la frase " aver numeri uguali „ esprime l'assoluta uguaglianza delle grandezze ed è inconciliabile colla frase, " aver numeri disuguali „ che è il contrassegno delle grandezze disuguali, talchè anche tale obiezione deve esser fatta non a quella frase ma all'idea seguente, che ad *ogni* grandezza si faccia corrispondere *un* numero.

Circa l'aggettivo *misurabili* che il Prof. De Amicis vorrebbe aggiunto alla parola grandezze, osservo che il concetto di misura non essendo che quello di applicazione del numero alle grandezze, non mi pare che si possa parlare di grandezze misurabili, prima di parlare del numero, a meno che con quella parola misurabili non si voglia alludere a speciali classi di grandezze da definirsi prima in modo conveniente; limitazione che io in quella definizione non intendevo porre, volendo io nel mio libro studiare il concetto di numero nella sua ampiezza e non il solo numero (reale) che si ottiene dalle ordinarie classi continue.

3. Esaminiamo dunque l'idea, alla quale soltanto si possono riferire le mosse obiezioni, che cioè " ad ogni grandezza si colleghi un ente da dirsi numero „; e vediamo anzitutto due modi di far tale collegamento, cioè o senza fare intervenire il concetto di unità, o servendosi di esso. Quando si dice: " ad ogni grandezza si faccia corrispondere un ente nuovo da chiamarsi *numero* „ questo nuovo ente non vien definito in sè, ma soltanto dalle relazioni di uguale, e di somma, che esso ha con altri numeri; talchè di tale ente non può farsi uso se non nelle frasi che alludono a queste relazioni, oltre, s'intende, a tutte quelle altre che vengono definite mediante esse, come quelle in cui si parla di moltiplicazione, divisione, elevazione a potenza ecc. che si definiscono, ricorrendo soltanto ai concetti di uguale e di somma. L'introduzione di un ente apposito per ciascuna grandezza, se altro non si dice, non autorizza ad usare la locuzione " numero di A „ legata a frasi consimili (numero di B, numero di C, ecc.), da relazioni diverse da quelle ora citate di uguale e di somma e dipendenti; e quindi in sostanza la teoria dei numeri non è mutata da questa introduzione del numero isolato, e perciò a rigore potrebbesi fare a meno di una tale introduzione. Non si può negare peraltro che l'introduzione di questo ente, cioè in sostanza l'autorizzazione di usare sola la locuzione *numero di A*, (purchè se la si usa associata ad altre sia sempre nel senso sopra detto) è utile per la rappresentazione delle grandezze, giacchè in sostanza questo ente numero viene a potersi concepire come la grandezza stessa priva di ogni altra proprietà che non sia quella di potersi paragonare colle altre omogenee, per giudicare se ad esse è uguale o no, o se di esse è la somma. Questa concezione del numero è didatticamente utile e insieme facile assai. Siccome le grandezze geometriche (segmenti per es.) sono gli enti ideali che si ottengono dalla considerazione di cose della realtà astraendo da alcune loro proprietà, da tutte quelle cioè che non influiscono su ciò che praticamente si dice forma ed estensione, (*) così non resta difficile allo scolaro il continuare per queste grandezze l'astrazione, e spogliarle di altre proprietà per ridursi soltanto a quelle esprimibili colle parole uguale e somma, nel qual modo resta nella mente il concetto di numero. L'esperienza mi ha mostrato la facilità di un simile concetto.

4. Per indicare questi numeri così introdotti e per scrivere i risultati delle operazioni si richiede per ciascuno di essi un segno scritto ed una voce. Ma siccome l'uso ha già introdotto una terminologia apposita e razionale per tale scopo, conviene servirsi di questa, e ad uno di questi numeri far corrispondere il segno 1 e la voce "*uno*"; al numero somma di $1+1$ il segno 2 "*due*", al numero metà di 1 il segno $\frac{1}{2}$ (un mezzo) ecc. Come si capisce, peraltro, il numero a cui far corrispondere il segno 1 è pienamente arbitrario; il che a prima vista appare strano, perchè avremmo la possibilità di *più* numeri 1, anzi qualunque numero potrebbe essere 1, mentre invece siamo usi a parlar di *numero* 1 (al singolare). La stranezza, solo apparente, dipende dal fatto che si fa confusione ordinariamente fra il numero e la sua rappresentazione materiale, dicendo indifferentemente numero tanto l'ente, quanto la voce ed il segno che lo rappresentano. Sparirebbe la stranezza e insieme si farebbe cosa a mio credere più propria e più opportuna, se si usassero nomi diversi, dicendo per es. *numero* l'ente e *simboli numerici* (verbali o scritti) i segni ad esso destinati: allora non parrebbe assurdo che ad un medesimo numero corrispondessero più simboli numerici o che un medesimo simbolo numerico potesse rappresentare volta a volta e secondo le circostanze numeri diversi. (**)

(*) Cfr. la mia *Introduz. a un corso di geom. elem.* Lezione pubblicata nel giornale *Il Pitagora*, fasc. I.

(**) Tale convenzione farebbe risaltare meglio la differenza fra il metodo d'introduzione del numero partendo dalle grandezze (sintetico) da noi seguito, per l'altro che introduce i numeri come enti da sè, indipendenti da altri (analitico). Il primo introduce il numero e poi usa i simboli numerici per rappresentarlo, il secondo introduce e studia i puri simboli aritmetici, che applica dopo direttamente alle grandezze.

E del resto si rifletta che anche nell'uso comune non si usa poi già costantemente lo stesso simbolo per indicare uno stesso numero: per es. il 10 si indica talora con 1 quando si cessi di parlare di unità e si parli di diecine, e così dicasi del 100, del 1000 ecc.; il 9 del sistema decimale si scrive 10 nel sistema di numerazione a base 9 e invece si indica col segno 11 in quello a base 8, e coi segni 12, 13, 14, 21, 100, 1000 rispettivamente nei sistemi a base 7, 6, 5, 4, 3, 2 e così dicasi di qualunque altro numero.

Con questo metodo ad ogni grandezza corrisponde il proprio numero che *in modo assoluto* la rappresenta. Le obiezioni citate, allora, non hanno più ragione di essere, perchè in tal modo il numero è davvero il contrassegno assoluto della grandezza.

5. Il metodo ora accennato, per il quale ad ogni grandezza di una classe si fa corrispondere un ente che la rappresenta in modo assoluto, fa sì, come si è detto, che ogni numero possa rappresentarsi con uno qualunque dei simboli numerici. Ciò, veramente, fa contro l'uso comune, secondo il quale ogni segno numerico risveglia l'idea di un ente *determinato,* tantochè, per es. il numero 1 è un ente di natura ben fissa e definita nella mente di ciascuno: la corrispondenza variabile fra numeri e simboli, intesa non nel senso che, ideato un sistema di simboli per tutti i numeri, se ne possa ideare uno o più altri differenti, ma nel senso che proprio lo *stesso* sistema di simboli possa rappresentare in modo diverso la classe di tutti i numeri, pare dunque non opportuna. Si aggiunga a carico di questo metodo, che con esso ad ogni classe di grandezze corrisponde uno *speciale* sistema di numeri, quelli che la rappresentano; ed allora tali sistemi di numeri costituiscono un ben meschino vantaggio e meriterebbe il conto di identificarli colle grandezze stesse, se non si potessero ridurre ad un sistema unico di numeri, che servissero a *tutte* le classi di grandezze o almeno a tutte quelle di un certo tipo (classi continue).

Per raggiungere tale intento bisognerebbe che il numero di una grandezza di una classe, per es. di *un* certo segmento, fosse anche il numero di una grandezza di un'altra classe, per es. di *un* angolo; ma il numero di un dato segmento sarà uguale al numero di *quale* angolo? Occorrerebbe in ogni classe fissare una grandezza ad arbitrio e stabilire che fosse lo stesso il numero di tutte quelle grandezze scelte, talchè avuta la classe dei numeri, per es. dei segmenti, gli angoli sarebbero rappresentati dagli stessi numeri, facendo servire il numero di un dato segmento a rappresentare un angolo da stabilirsi ad arbitrio, e quindi il numero per l'angolo non sarebbe più un ente che rappresenta *assolutamente* quell'angolo, ma lo rappresenta dipendentemente da una scelta fatta nella classe, contro il concetto stesso che ha servito a creare i numeri con questo metodo.

Non pare quindi conveniente tener questa precisa via per introdurre il concetto di numero.

6. Ed allora, se davvero si vuole ad ogni grandezza far corrispondere un numero, converrà tener l'altro metodo (quello, in sostanza, a cui mi sono attenuto io nei Capitoli II e III della Parte 2ª della mia *Teoria delle Grandezze*) col quale si fa corrispondere ad ogni grandezza di una classe un numero che la rappresenta rispetto ad una speciale grandezza della classe stessa: cioè, per usare un linguaggio più rigoroso, scelta una grandezza A della classe, se B è un'altra grandezza qualunque della classe, ad ogni *coppia* di grandezze B, A si fa corrispondere un ente che si dice rappresenti B. Ciò equivale a convenire, colle regole accennate al § 2, di usare la locuzione *numero di* B, ma non già isolata, sibbene unita all'altra (espressa o sottintesa) *rispetto ad A*, che si suol tacere quando, com'è frequente il caso, l'ambiguità è impossibile. Introducendo dunque *un* numero per rappresentare ogni grandezza con questo metodo, apparisce necessario ricordare la grandezza scelta come unità, e l'obiezione del Prof. Bustelli diviene una giusta osservazione, se la si riferisce non alle parole che egli cita, ma alle seguenti da me riportate, sebbene rispondano ad esse i seguenti capitoli del libro, nei quali l'idea è completamente chiarita. Scelta dunque una grandezza arbitraria A in una classe Γ (che, senza dirlo ogni volta, supporremo ad una dimensione e continua acciocchè i numeri che definiamo siano gli ordinari numeri reali), ad ogni grandezza della classe faremo corrispondere un ente, il numero, sempre dando alle frasi " numeri uguali " " numero somma di più altri " il significato stabilito in principio. Si creerà così una classe di numeri, che sono i numeri della classe proposta rispetto all'unità A. Parrebbe allora che per ogni grandezza scelta come unità A, risultasse una speciale classe di numeri rappresentativi; ma evidentemente la classe ottenuta coll'unità A serve, comunque si scelga un'altra unità, giacchè la classe con sè stessa si può porre, ed in un modo unico, in quella corrispondenza che nella mia *Teoria delle Grandezze* (Parte 2ª, Cap. II) dissi *corrispondenza metrica,* e che non è che la corrispondenza di proporzionalità diretta, stabilendo la condizione che debba corrispondere B ad A. La corrispondenza metrica fra due classi di grandezze o fra una classe e sè stessa si definisce così: 1° che sia univoca, 2° che a grandezze uguali corrispondano grandezze uguali, 3° che ad una grandezza di una classe, che sia somma di altre, corrisponda la somma delle corrispondenti di esse. Chiaramente se una classe è in corrispondenza metrica con sè stessa in modo che ad A corrisponda B, se costruiamo la classe dei numeri coll'unità A e li associamo rispettivamente a quelle grandezze che in quella corrispondenza metrica corrispondono alle grandezze che essi rappresentano coll'unità A, questa nuova associazione fra grandezze e numeri ha luogo in modo che a grandezze uguali vanno associati numeri uguali e alla grandezza somma di più altre il numero somma dei numeri ad essi rispettivamente associati;

talchè i numeri che rappresentavano le grandezze della classe rispetto all'unità A, le rappresentano ora rispetto all'unità B. E del pari se si mette in corrispondenza metrica la classe in questione con un'altra di altre grandezze (purchè continua anch'essa) in modo che ad A corrisponda un'arbitraria grandezza A', si vede che i numeri introdotti nella prima classe rispetto all'unità A servono per l'altra classe rispetto all'unità A', e che quindi una classe di numeri introdotti come rappresentanti di una classe (continua) di grandezze con una certa unità, serve a rappresentare qualunque identica o distinta classe continua rispetto a qualunque unità.

Tutto ciò dimostra quanto chiedeva il Prof. De Amicis nella sua seconda obiezione, e trovasi appunto sviluppato nei Cap. II e III della Parte 2ª della mia *Teoria delle Grandezze.*

Con questo metodo ad ogni grandezza di una classe corrisponde un numero che può dirsi la rappresenti; ma questo numero non è sempre lo stesso, giacchè dipende dalla scelta dell'unità. Esso perciò non è contrassegno delle grandezze, ma delle coppie di esse grandezze e dell'unità, come s'è già accennato.

Questa variabilità dell'ente numero che rappresenta una grandezza non nuoce alla rappresentazione delle grandezze stesse, giacchè la locuzione " numero di una grandezza " si associa soltanto alle frasi " uguale al numero di un'altra " o " somma dei numeri di più altre ", oltrechè alle dipendenti da queste (come già si è detto), e quest'associazione, come s'è visto, accade qualunque sia l'unità rispetto alla quale i numeri rappresentano le grandezze.

In questo metodo possiamo ad un medesimo numero associare un unico simbolo numerico, che è ciò che si fa ordinariamente: quindi ogni simbolo numerico rappresenta in sostanza non una grandezza fissa, ma una grandezza variabile, determinata per altro quando è fissata l'unità.

Si può riassumere lo spirito di questo metodo, dicendo consistere esso nel creare una classe di enti destinati a rappresentare complessivamente ogni classe di grandezze, a cui la si faccia corrispondere metricamente: e che *in ciascuna corrispondenza* ogni numero rappresenta singolarmente ed assolutamente una grandezza.

Si osservi che lo stabilire una corrispondenza metrica fra la classe di grandezze e quella dei numeri non è che il far corrispondere ad ogni grandezza quel numero che è la sua misura rispetto a quella grandezza a cui si fa corrispondere il numero 1: talchè con questo metodo si ha il vantaggio che coll'introduzione del numero risulta immediatamente già stabilita la teoria della misura.

Anche con questo metodo l'introduzione del concetto di numero è didatticamente facile. Si può partire da un'arbitraria classe, per es. quella dei segmenti, e dire di astrarre in ogni segmento da tutte le proprietà eccetto quelle che rappresentano le relazioni di uguaglianza e di somma (e dipendenti, cioè differenza, multiplo, summultiplo, limite di variabili convergenti) che possono legarlo ad un determinato segmento S. Resta così un ente per ogni segmento, finchè si mantiene fisso quel segmento S scelto (unità); e per tali enti si devono dare le definizioni necessarie acciocchè essi rappresentino i vari segmenti in quelle relazioni. E quindi per definizione diremo uguali due di tali enti che corrispondono a grandezze uguali, e un ente lo diremo somma di più altri se corrisponde ad un segmento che è somma dei corrispondenti agli altri. E a tali enti si darà il nome di *numeri*, e a quello che corrisponde al segmento unità il nome di *uno*. Poi si dimostrerà colla possibile corrispondenza metrica fra due classi, o di una classe con sè stessa, che questi numeri possono identificarsi con quelli che vengono in modo analogo da un'altra classe di grandezze, o dalla stessa cambiando unità.

Mi pare che il metodo da me seguito nella *Teoria delle Grandezze* e da me illustrato nei precedenti paragrafi, sia suscettibile di una leggiera modificazione che lo migliora. Invece delle definizioni: " Di grandezze uguali diremo che hanno numeri uguali „ e " se la grandezza A è somma di B, C ecc. diremo che il numero di A è uguale alla somma di quelli di B, C „ ecc., potremo dare l'altra: " Due grandezze uguali hanno *lo stesso* numero „: il numero di A *è* la somma di quelli di B, C ecc.

E invero, a rigore, numeri uguali non ci sono: e si usa a proposito dei numeri la parola *uguale* solamente per accennare a due diversi modi di indicare il medesimo numero o a due espressioni che esprimono operazioni, le quali diano lo stesso risultato $\left(\frac{8}{4}=2; 5+3=9-1 \text{ ecc.}\right)$ Per i numeri l'uguaglianza è l'*identità*.

Il metodo di introduzione dei numeri si svolge allora in modo identico a quello esposto nei precedenti paragrafi, salvo leggiere e facili modificazioni di qualche parola. Forse sarebbe utile, non necessario, modificare la definizione di corrispondenza metrica (proporzionalità) dicendo essere in corrispondenza metrica due classi di grandezze quando alla sottoclasse composta di una grandezza e delle sue uguali, corrisponde quella d'un'altra grandezza con tutte le sue uguali e ad una sottoclasse che contenga tutte le grandezze (uguali fra loro) somma di grandezze date la sottoclasse che contiene le somme delle grandezze corrispondenti e le loro uguali.

Torino, Aprile 1899.

RODOLFO BETTAZZI.

SULLE DISTANZE DEI PUNTI NOTEVOLI DI UN TRIANGOLO

In una mia *nota* (*) feci conoscere una relazione tra le distanze di 5 punti, 4 dei quali sono posti in uno stesso piano. Mi propongo ora di far vedere come per mezzo di essa si possa ricavar subito la distanza di un punto qualunque da uno qualsivoglia dei *punti notevoli* di un triangolo. e quindi, in particolare, le distanze a due a due di questi punti.

1. Siano A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 cinque punti, dei quali i primi quattro siano situati nello stesso piano. Se si indica con a_{ik} la distanza A_iA_k; con Δ_{ikl} l'area del triangolo $A_iA_kA_l$, e con ε_5 l'area del triangolo che ha per lati i prodotti $a_{23}a_{14}$, $a_{31}a_{24}$, $a_{12}a_{34}$ dei lati opposti del quadrangolo $A_1A_2A_3A_4$, la relazione è la seguente:

$$a^2_{15}\,\Delta_{234} - a^2_{25}\,\Delta_{341} + a^2_{35}\,\Delta_{412} - a^2_{45}\,\Delta_{123} - \varepsilon_5 = 0,$$

nella quale, per le aree Δ, va tenuto conto dell'ordinaria regola dei segni.

Sia M un punto del piano di un triangolo ABC, X un altro punto qualsivoglia (che può anche non essere situato nel piano ABC) le cui distanze dai vertici A, B, C indicheremo con x, y, z. Applicando la relazione suddetta ai 5 punti A, B, C, M, X, si trova

$$\overline{XM}^2 . \Delta = x^2 . MBC + y^2 . MCA + z^2 . MAB - \varepsilon, \tag{1}$$

dove $\Delta = ABC$, e ε è l'area del triangolo che ha per lati i prodotti MA . BC, MB . CA, MC . AB.

Indicando con l, m, n le distanze del punto M dai vertici A, B, C, e supponendo che il punto X coincida con M, dalla (1) si trae

$$\varepsilon = l^2 . MBC + m^2 . MCA + n^2 . MAB. \tag{2}$$

2. Supponiamo che il punto M coincida col baricentro G del triangolo ABC. Poichè in tal caso

$$GBC = GCA = GAB = \frac{1}{3} ABC;$$

$$l^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2); \quad m^2 = \frac{1}{9}(2c^2 + 2a^2 - b^2); \quad n^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2b^2 - c^2);$$

le (1) e (2) danno

$$\overline{XG}^2 . \Delta = \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2) . \Delta - \varepsilon,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) . \Delta;$$

dalle quali si ricava:

$$\overline{XG}^2 = \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2). \text{ (**)} \tag{3}$$

Per mezzo della (3) si può calcolare la distanza di un punto qualunque X dal baricentro G, quando si conoscano le sue distanze x, y, z dai vertici A, B, C. In

(*) *Intorno alla relazione tra le distanze di 5 punti dello spazio* (vol. XXXIV del *Giornale di Matematiche di Battaglini*, n. 4).

(**) Il Dr. Henke di Dresda trova questa relazione servendosi di considerazioni sui *momenti d'inerzia*. (V. il fasc. del 26 ott. 1897 del *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftliche Unterricht*). Va notato che la relazione vale anche nel caso che il punto X non sia situato nel piano ABC.

particolare, si potranno calcolare in funzione dei lati a, b, c le distanze del baricentro da ciascuno dei punti notevoli. (*)

3. Supponiamo che il punto M coincida col centro O del cerchio circoscritto al triangolo ABC. Allora, detto R il raggio del circumcircolo, si ha

$$l = m = n = \mathrm{R};$$

$$\mathrm{OBC} = \frac{1}{4}\, a\sqrt{4\mathrm{R}^2 - a^2}\,; \qquad \mathrm{OCA} = \frac{1}{4}\, b\sqrt{4\mathrm{R}^2 - b^2}\,; \qquad \mathrm{OAB} = \frac{1}{4}\, c\sqrt{4\mathrm{R}^2 - c^2}\,;$$

e poichè

$$\mathrm{R}^2 = \frac{a^2b^2c^2}{16\,\Delta^2}\,; \qquad 16\,\Delta^2 = 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4\,;$$

si ha

$$\sqrt{4\mathrm{R}^2 - a^2} = \frac{a}{4\Delta}(b^2 + c^2 - a^2)\,; \quad \sqrt{4\mathrm{R}^2 - b^2} = \frac{b}{4\Delta}(c^2 + a^2 - b^2); \quad \sqrt{4\mathrm{R}^2 - c^2} = \frac{c}{4\Delta}(a^2 + b^2 - c^2).$$

Tenendo conto di queste relazioni, dalle (1) e (2) si ricava

$$\overline{\mathrm{XO}}^2 \,.\, \Delta = \frac{a^2(b^2 + c^2 - a^2)\,.\,x^2 + b^2(c^2 + a^2 - b^2)\,.\,y^2 + c^2(a^2 + b^2 - c^2)\,.\,z^2}{16\,\Delta} - \varepsilon\,,$$

$$\varepsilon = \frac{a^2b^2c^2}{16\,\Delta}\,;$$

quindi

$$(4) \quad \overline{\mathrm{XO}}^2 = \frac{1}{16\,\Delta^2}[a^2(b^2+c^2-a^2).x^2 + b^2(c^2+a^2-b^2).y^2 + c^2(a^2+b^2-c^2).z^2 - a^2b^2c^2].\ (**)$$

Per mezzo della (4) si può calcolare la distanza di un punto qualunque X dal centro O del circumcircolo. In particolare, si potranno trovare per mezzo di essa le distanze del centro O da tutti i punti notevoli.

Se il punto X coincide col punto K di *Lemoine*, poichè in questo caso

$$x^2 = \frac{b^2c^2(2b^2 + 2c^2 - a^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}\,; \quad y^2 = \frac{c^2a^2(2c^2 + 2a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}\,; \quad z^2 = \frac{a^2b^2(2a^2 + 2b^2 - c^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}\,;$$

dalla (4) si ricava

$$\overline{\mathrm{KO}}^2 = \mathrm{R}^2 - \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{3a^2b^2c^2}\,.$$

Se il punto X coincide col punto positivo Ω di *Brocard*, poichè in questo caso

$$x^2 = \frac{b^4c^2}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}\,; \quad y^2 = \frac{c^4a^2}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}\,; \quad z^2 = \frac{a^4b^2}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}\,,$$

dalla (4) si ricava

$$\overline{\Omega\mathrm{O}}^2 = \mathrm{R}^2 - \frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}\,.$$

Dalla simmetria di questa formola si deduce che i due punti di *Brocard* sono equidistanti dal centro del circumcircolo.

(*) V. in proposito l'art. di A. MARTINI-ZUCCAGNI (*Supplemento al Periodico di matematica*, anno I, fasc. I).

(**) Cfr. questo risultato coll'altro ottenuto nella mia nota: *Sopra una particolare corrispondenza tra i punti di un piano e i punti di un paraboloide ellittico*. (*Giornale di Matematiche di Battaglini*, vol. XXXII). In questa nota (v. n. 13) trovai il valore della potenza di un punto qualunque rispetto al cerchio circoscritto ad un triangolo. Aggiungendo R^2 al valore della potenza si ha il quadrato della distanza di un punto del piano del triangolo dal centro del circumcircolo.

4. Supponiamo che il punto M coincida col centro O′ del cerchio inscritto. In tal caso, detto p il semiperimetro del triangolo ABC, si ha

$$\mathrm{MBC} = \frac{a\Delta}{2p}; \quad \mathrm{MCA} = \frac{b\Delta}{2p}; \quad \mathrm{MOB} = \frac{c\Delta}{2p};$$

$$l^2 = \frac{bc\,(p-a)}{p}; \quad m^2 = \frac{ca\,(p-b)}{p}; \quad n^2 = \frac{ab\,(p-c)}{p};$$

quindi dalle (1) e (2) si ricava

$$\overline{\mathrm{XO}'}^2 \,.\, \Delta = \frac{\Delta}{2p}(ax^2 + by^2 + cz^2) - \varepsilon,$$

$$\varepsilon = \frac{abc\,\Delta}{2p};$$

quindi

$$\overline{\mathrm{XO}'}^2 = \frac{ax^2 + by^2 + cz^2 - abc}{2p}. \tag{5}$$

Per mezzo della (5) si può calcolare la distanza di un punto qualunque, e in particolare di ciascun punto notevole, dal centro O′ del cerchio inscritto.

5. Se il punto M coincide col centro ortico H, siccome si ha

$$\overline{\mathrm{HA}}^2 = 4\mathrm{R}^2 - a^2; \quad \overline{\mathrm{HB}}^2 = 4\mathrm{R}^2 - b^2; \quad \overline{\mathrm{HC}}^2 = 4\mathrm{R}^2 - c^2;$$

$$\mathrm{HBC} = \frac{a^4 - (b^2 - c^2)^2}{16\,\Delta}; \quad \mathrm{HCA} = \frac{b^4 - (c^2 - a^2)^2}{16\,\Delta}; \quad \mathrm{HAB} = \frac{c^4 - (a^2 - b^2)^2}{16\,\Delta};$$

dalle (1) e (2) si ricava

$$\overline{\mathrm{XH}}^2 = \frac{1}{16\,\Delta^2}\Big\{(x^2 - 4\mathrm{R}^2 + a^2)[a^4 - (b^2 - c^2)^2] + (y^2 - 4\mathrm{R}^2 + b^2)[b^4 - (c^2 - a^2)^2] +$$
$$+ (z^2 - 4\mathrm{R}^2 + c^2)[c^4 - (a^2 - b^2)^2]\Big\},$$

per mezzo della quale si troverà la distanza di un punto qualunque X dall'ortocentro.

6. Per ricavare dalle (1) e (2) la distanza di un punto qualunque X dal centro O_9 del cerchio dei nove punti, si faccia coincidere il punto M col punto O_9, e si osservi che

$$\overline{\mathrm{O}_9\mathrm{A}}^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{R}^2 + b^2 + c^2 - a^2); \quad \overline{\mathrm{O}_9\mathrm{B}}^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{R}^2 + c^2 + a^2 - b^2);$$

$$\overline{\mathrm{O}_9\mathrm{C}}^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{R}^2 + a^2 + b^2 - c^2);$$

$$\mathrm{O}_9\mathrm{BC} = \sqrt{a^2\mathrm{R}^2 - \left(\frac{b^2 - c^2}{2}\right)^2}; \quad \mathrm{O}_9\mathrm{CA} = \sqrt{b^2\mathrm{R}^2 - \left(\frac{c^2 - a^2}{2}\right)^2};$$

$$\mathrm{O}_9\mathrm{CA} = \sqrt{c^2\mathrm{R}^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^2}.$$

7. Supponiamo che il punto M coincida col punto K di *Lemoine*. Le distanze del punto K dai lati sono, com'è noto:

$$\frac{2a\Delta}{a^2 + b^2 + c^2}; \quad \frac{2b\Delta}{a^2 + b^2 + c^2}; \quad \frac{2c\Delta}{a^2 + b^2 + c^2};$$

quindi si ha,

$$\mathrm{KBC} = \frac{a^2\Delta}{a^2 + b^2 + c^2}; \quad \mathrm{KCA} = \frac{b^2\Delta}{a^2 + b^2 + c^2}; \quad \mathrm{KAB} = \frac{c^2\Delta}{a^2 + b^2 + c^2};$$

e poichè le distanze l, m, n del punto K dai punti A, B, C sono quelle indicate nel n. 3, dalle relazioni (1) e (2) si ricava:

$$\overline{XK}^2 . \Delta = \frac{\Delta}{a^2+b^2+c^2}(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2) - \varepsilon ,$$

$$\varepsilon = \frac{3a^2b^2c^2\,\Delta}{(a^2+b^2+c^2)^2};$$

quindi:

$$\overline{XK}^2 = \frac{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}{a^2+b^2+c^2} - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}. \tag{6}$$

Per mezzo della (6) si può calcolare la distanza di un punto qualunque X dal punto di *Lemoine*. Volendo, ad esempio, trovare la distanza tra il punto di *Lemoine* e il punto positivo Ω di *Brocard*, basterà porre in luogo di x, y, z i valori delle distanze di Ω dai vertici A, B, C (indicati nel n. 3), e si avrà:

$$\overline{\Omega K}^2 = a^2b^2c^2\left(\frac{1}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2} - \frac{3}{(a^2+b^2+c^2)^2}\right).$$

Dalla simmetria di questa formola si deduce che il punto di *Lemoine* è equidistante dai due punti di *Brocard*.

Inoltre, come si può subito verificare, si ha:

$$\overline{KO}^2 = \overline{\Omega O}^2 + \overline{\Omega K}^2,$$

e perciò i quattro punti O, L, Ω, Ω' giacciono sopra una stessa circonferenza *(circonferenza brocardiana)*, di diametro KO.

8. Supponiamo infine che il punto M coincida col punto positivo Ω di *Brocard*. Le distanze del punto Ω dai lati del triangolo ABC sono

$$\frac{2ac^2\,\Delta}{K};\quad \frac{2ba^2\,\Delta}{K};\quad \frac{2cb^2\,\Delta}{K};$$

dove

$$K = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2;$$

quindi si ha

$$\Omega BC = \frac{a^2c^2\,\Delta}{K};\quad \Omega CA = \frac{b^2a^2\,\Delta}{K};\quad \Omega AB = \frac{c^2b^2\,\Delta}{K};$$

e poichè le distanze l, m, n del punto Ω dai punti A, B, C sono quelle indicate nel n. 3 dalle (1) e (2), si ricava

$$\overline{X\Omega}^2 . \Delta = \frac{\Delta}{K}(a^2c^2x^2 + b^2a^2y^2 + c^2b^2z^2) - \varepsilon,$$

$$\varepsilon = \frac{a^2b^2c^2 . \Delta}{K};$$

quindi

$$\overline{X\Omega}^2 = \frac{a^2c^2x^2 + b^2a^2y^2 + c^2b^2z^2 - a^2b^2c^2}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}. \tag{7}$$

Per mezzo della (7) si può trovare la distanza di un punto qualunque dal punto positivo Ω di *Brocard*. Poichè, per esempio, i quadrati delle distanze del punto negativo Ω' di *Brocard* dai vertici A, B, C, sono

$$\frac{c^4b^2}{K};\quad \frac{a^4c^2}{K};\quad \frac{b^4a^2}{K};$$

si ha, per la distanza dei due punti di *Brocard:*

$$\overline{\Omega\Omega'}^2 = \frac{a^2b^2c^2(a^4+b^4+c^4-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2)}{(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)^2},$$

come si trova anche osservando che dev'essere

$$\Omega\Omega' = \frac{2\Omega K \,.\, \Omega O}{KO}.$$

Fermo, Gennaio 1898.

CORRADO CIAMBERLINI.

SOPRA LE FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA

nelle quali la parte reale è un polinomio algebrico, razionale intero.

NOTA DI LABINDO GIANNI

I.

1. Se $f(z)$ indica un polinomio algebrico, razionale, intero di grado m in z, e se in esso si pone $z = x + iy$, ove x ed y sono due variabili reali ed i è l'unità immaginaria, separando in $f(x+iy)$ la parte reale U dal coefficiente V dell'immaginario, allora tanto la U quanto la V sono manifestamente due polinomî in x ed y algebrici, razionali interi del grado stesso di $f(z)$.

Io mi propongo, inversamente, di prendere in esame quelle funzioni di variabile complessa nelle quali la parte reale è un polinomio algebrico, razionale, intero: di esporne le principali proprietà: e da queste dedurre — ciò che d'altronde è molto facile a prevedere — che la forma analitica di funzioni cosiffatte è quella di un polinomio in z algebrico, razionale, intero.

2. Si osservi subito, in generale, che se $\mathrm{U} + i\mathrm{V}$ è una funzione di una variabile complessa nella quale la parte reale è separata dalla immaginaria, avendosi

$$-\mathrm{V} + i\mathrm{U} = i(\mathrm{U} + i\mathrm{V}),$$

anche $-\mathrm{V} + i\mathrm{U}$ è manifestamente una funzione della stessa variabile complessa. Perciò qualunque proprietà che compete alla U per il fatto che è parte reale di una funzione di variabile complessa, competerà pure a $-\mathrm{V}$; e se da un gruppo di ipotesi fatte sopra U si deduce una certa proprietà per la V, quella stessa proprietà appartiene anche alla U, quando quel gruppo di ipotesi si riferisca alla $-\mathrm{V}$. Tale osservazione sarà applicata molto utilmente nel seguito.

II.

1. Essendo:

$$U + iV = f(x + iy)$$

una funzione della variabile complessa $x + iy$, nella quale U e V indicano respettivamente la parte reale e il coefficiente dell'immaginario, sono verificate le relazioni

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dV}{dy} \quad ; \quad \frac{dU}{dy} = -\frac{dV}{dx}. \tag{1}$$

E quindi, se si suppone in primo luogo che U sia una funzione lineare delle variabili x ed y, ed abbia perciò la forma

$$U = mx + ny + h,$$

si deduce subito, in virtù delle (1),

$$V = my - nx + k,$$

la quale prova che anche la V è una funzione lineare delle variabili stesse.

2. Se la U è una espressione di 2° grado in x ed y, poichè deve verificare l'equazione:

$$\Delta^2 U = \frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} = 0,$$

in U dovranno comparire ambedue i termini in x^2 ed in y^2 o nessuno dei due: e se vi compariscono, debbono avere coefficienti numericamente eguali, ma di segno contrario. Talchè la forma generale della U sarà la seguente:

$$U = mx^2 + 2nxy - my^2 + hx + ky + r.$$

Da questa, a causa delle (1), si otterrà

$$\frac{dV}{dy} = 2mx + 2ny + h \quad , \quad \frac{dV}{dx} = -2nx + 2my - k.$$

Indicando quindi con φ una funzione arbitraria della sola x si avrà:

$$V = 2mxy + ny^2 + hy + \varphi.$$

Da questa, tenendo conto della seconda delle precedenti eguaglianze ed indicando con φ' la derivata prima di φ rispetto ad x, si deduce

$$2my + \varphi' = -2nx + 2my - k.$$

Da cui

$$\varphi' = -2nx - k, \qquad \text{e perciò} \qquad \varphi = -nx^2 - kx + s$$

dove s è la costante d'integrazione. Sarà quindi:

$$v = ny^2 + 2mxy - nx^2 + hy - kx + s.$$

Così, in generale, assegnando alla U la forma che ha il polinomio in x ed y di grado m, il quale soddisfa alla equazione $\Delta^2 U = 0$, si vede subito quale è la via che si avrebbe a tenere per determinare, ove esista, la forma corrispondente della V, allo scopo di costruire la funzione $U + iV$ della variabile $x + iy$. Dall'esame allora della U e della V se ne potrebbero dedurre le loro scambievoli proprietà e si potrebbe ancora risalire alla forma analitica della funzione $f(x+iy)$ che è eguale ad $U + iV$. Ma non si tarda a riconoscere che questo metodo, così semplice dal lato teorico, non sarebbe poi altrettanto semplice quando si volesse praticamente attuare: mentre d'altra parte non è difficile studiare molte delle proprietà dei polinomi U e V anche senza che sia sviluppata la loro forma; per lo meno quelle che sono sufficienti a farci dedurre la espressione analitica della funzione di $x + iy$ che ha dato luogo alla $U + iV$.

3. Cominciamo col dimostrare che: “ *Se la parte reale di una funzione della variabile complessa* x + iy *è un polinomio in* x *ed* y *di grado* m, *essendo* m *un numero intero e positivo, anche il coefficiente dell'immaginario deve essere un polinomio in* x *ed* y *del grado stesso* m ”.

Se infatti la U è di grado m, una almeno delle sue derivate prima parziali rispetto ad x e ad y sarà un polinomio di grado $m-1$, l'altra un polinomio di grado non superiore all' $(m-1)^{\text{esimo}}$. Indicando respettivamente quelle derivate con P_1 e P_2, si avrà, in virtù delle (1)

$$\frac{dV}{dy} = P_1 \qquad \frac{dV}{dx} = -P_2.$$

E se è P_2 quello dei due polinomi che certamente è di grado $m-1$, sarà $\int P\,dx$ un polinomio di grado m, che indicheremo con P. Talchè, indicando con $\varphi(y)$ una funzione arbitraria della sola y, si avrà

$$V = -P + \varphi(y).$$

Ma per la prima delle precedenti eguaglianze si ha

$$-\frac{dP}{dy} + \varphi'(y) = P_1.$$

E questa c'indica chiaramente che $\varphi'(y)$ deve essere un polinomio di grado non superiore all'$(m-1)^{\text{esimo}}$: quindi la conseguenza che $\varphi(y)$ è di grado non superiore ad m. E perciò $V = -P + \varphi(y)$ è un polinomio di grado m, come si voleva dimostrare.

a) Poichè se V è un polinomio di grado m, tale è pure $-V$, così, in ordine a quanto abbiamo osservato in principio (I, 2) potremo ancora affermare:

“ *Se il coefficiente dell'immaginario di una funzione della variabile complessa* x + iy *è un polinomio di grado* m *in* x *ed* y, *anche la parte reale è un polinomio in* x *ed* y *del grado stesso* ”.

b) Per il nostro scopo, nella dimostrazione del teorema precedente è bastato assicurare che una almeno delle due derivate di U rispetto ad x e ad y era un polinomio di grado $m-1$; ma è facile provare che entrambe le derivate della U sono di grado $m-1$, posto che la U sia un polinomio di grado m.

Per $m=2$, la cosa è manifesta solo che si osservi la forma che in tale ipotesi ha la U (II, 2). Quando m sia maggiore di 2, la nostra affermazione risulterà provata tostochè si dimostri che in U deve sempre esistere almeno un termine della forma $\alpha x^r y^s$, con $r+s=m$ ed r ed s differenti da zero. Per provar questo, si osservi che se la U è un polinomio in x ed y del grado m e non contiene i termini in x^m ed in y^m, deve allora contenere certamente almeno un termine $\alpha x^r y^s$, con $r+s=m$. Chè se poi la U contenga uno almeno dei termini in x^m o in y^m, per es. il termine βx^m, si potrà porre:

$$U=\beta x^m+\varphi(x,y),$$

e la $\varphi(x,y)$ risulterà: di termini indipendenti da x e da y; di termini contenenti ambedue le variabili x ed y; di termini contenenti la sola y e di termini contenenti la sola x: ma questi ultimi di grado inferiore ad m. Ciò posto, poichè deve aversi $\Delta^2 U=0$, sarà

$$m(m-1)\beta x^{m-2}+\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}=0.$$

Ora perchè tale relazione sia verificata, dovrà intanto la espressione

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}$$

contenere il termine: $-m(m-1)\beta x^{m-2}$. Ma per quanto si è visto circa la forma dei termini di $\varphi(x,y)$, nessuno di essi derivato due volte rispetto ad x può originare un termine della forma: γx^{m-2}: dunque dovrà necessariamente aversi:

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2}=-m(m-1)\beta x^{m-2}+\psi(x,y).$$

E perciò sarà:

$$\varphi(x,y)=-\frac{m}{2}(m-1)\beta x^{m-2}y^2+\xi(x,y)$$

ove ξ è il simbolo di un polinomio in x ed y. Laonde:

$$U=\beta x^m-\frac{m(m-1)}{2}\beta x^{m-2}y^2+\xi(x,y).$$

E questa eguaglianza prova appunto quanto volevamo dimostrare.

c) Poichè se V è un polinomio di grado m, tale è pure $-V$, così potremo concludere (I, 2) che per $m>2$ anche V conterrà sempre un termine di grado m nel quale compariscono entrambe le variabili x ed y. E si potrà quindi in generale affermare che:

" *Se* U + iV *è una funzione della variabile complessa* x + iy *ed* U *è un polinomio in* x *ed* y *del grado* m > 2, *non è possibile che* U *e* V *siano somme di termini che contengono la sola* x *con termini che contengono la sola* y ".

d) La verità della precedente proposizione può anche accertarsi nel seguente modo che ha carattere di maggiore generalità.

Si consideri una funzione U della x e della y nella quale le variabili siano separate così da avere:

$$U = \varphi(x) + \psi(y);$$

e vediamo di determinarla in modo che soddisfi alla equazione $\Delta^2 U = 0$.

Dovendosi allora avere

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} = 0,$$

sarà necessariamente

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 2m \quad , \quad \frac{d^2\psi}{dy^2} = -2m$$

ove $2m$ è una costante. Quindi:

$$\varphi = mx^2 + hx + n \quad , \quad \psi = -my^2 + ky + p$$

essendo h, n, k, p altre costanti. E ponendo $r = n + p$ sarà:

$$U = mx^2 + hx - my^2 + ky + r. \tag{2}$$

Dunque la funzione U di x e di y, che soddisfa alla $\Delta^2 U = 0$ e che ha le variabili separate, è un polinomio di secondo grado in x ed y, la cui forma è appunto data dalla (2). Da ciò la conseguenza che se la parte reale U di una funzione della variabile complessa $x + iy$ è un polinomio di grado $m > 2$, non potrà essere

$$U = \varphi(x) + \psi(y).$$

E questo conferma appunto quanto avevamo concluso precedentemente *c*).

e) Una funzione $U + iV$ della variabile complessa $x + iy$ nella quale la U ha la forma data dalla (2) esiste effettivamente. Si può infatti mediante la U costruire la V; e si ha

$$V = 2mxy + hy - kx + s.$$

III.

1. Premettiamo due proposizioni semplicissime relative alle funzioni omogenee, delle quali avremo occasione di servirci in seguito.

LEMMA 1°. — " *Se una funzione di due (o più) variabili è omogenea, le sue derivate parziali rispetto alle variabili stesse sono funzioni omogenee* ".

Sia $f(x, y)$ una funzione omogenea di x e di y, e sia m l'ordine della sua omogenità. Ponendo: $\frac{x}{y}=X$, $\frac{y}{x}=Y$, potremo scrivere:

$$f(x, y)=y^m f(X, 1) \quad , \quad f(x, y)=x^m f(1, Y).$$

Indicando con f'_x, f'_y le derivate parziali di f rispetto ad x e ad y, si avrà:

$$f'_x(x, y)=y^{m-1} f'_X(X, 1) \quad , \quad f'_y(x, y)=x^{m-1} f'_Y(1, Y).$$

Queste relazioni provano appunto che f'_x, f'_y sono funzioni omogenee.

Lemma 2°. — " *Se le derivate prime rispetto ad* x *ed* y *di una funzione di queste due variabili sono polinomi omogenei di grado* r, *la funzione è un polinomio omogeneo, all'infuori di una costante additiva* ".

Sia $f(x, y)$ una funzione delle due variabili x ed y; e le sue derivate prime rapporto ad x e ad y, che indicheremo rispettivamente con $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, siano polinomi omogenei del medesimo grado r. Si avrà intanto

$$f(x, y)=\int \varphi(x, y)\, dx+\chi(y),$$

dove χ è il simbolo di una funzione arbitraria. Ponendo

$$\Phi(x, y)=\int \varphi(x, y)\, dx,$$

siccome $\varphi(x, y)$ è un polinomio in x ed y, i termini di Φ si sono ottenuti da quelli di φ colla moltiplicazione di ciascuno di questi per un fattore αx, ove α è un numero diverso da termine a termine: e quindi poichè φ è un polinomio omogeneo di grado r, sarà Φ un polinomio omogeneo di grado $r+1$. Ora si ha:

$$\frac{d\Phi}{dy}+\frac{d\chi}{dy}=\psi(x, y). \tag{3}$$

Ma ψ è per dato un polinomio omogeneo di grado r: $\frac{d\Phi}{dy}$, se non è zero, è, in forza del primo lemma, un polinomio pure omogeneo di grado r; dunque dovrà essere necessariamente

$$\frac{d\chi}{dy}=hy^r,$$

essendo h una costante. Laonde:

$$\chi(y)=\frac{h}{r+1} y^{r-1}+k.$$

ove k è un'altra costante. Sarà per conseguenza:

$$f(x, y)=\Phi(x, y)+\frac{h}{r+1} y^{r-1}+k.$$

Questa eguaglianza prova appunto che $f(x, y)$ è un polinomio omogeneo di grado $r+1$, all'infuori di una costante additiva.

a) Se fosse $\frac{d\Phi}{dy}$ eguale a zero, la Φ sarebbe indipendente dalla y, ed avrebbe perciò la forma αx^{r+1}. Quindi si avrebbe dovuto avere $\varphi=(r+1)\alpha x^r$. E sebbene questo caso non sia esplicitamente contemplato nell'ipotesi del nostro teorema, pure questo sussiste ancora. In tale supposizione, la (3) ci dà

$$\psi=\frac{d\chi}{dy}=hy^r.$$

E quindi

$$f(x, y)=\alpha x^{r+1}+\frac{h}{r+1}y^{r+1}+k,$$

che è una funzione omogenea di x e di y all'infuori di una costante additiva.

2. Ciò premesso, riprendasi ora la nostra funzione

$$U+iV=f(x+iy),$$

e suppongasi che la U sia un polinomio omogeneo di grado p. Poichè deve aversi:

$$\frac{dU}{dx}=\frac{dV}{dy} \quad , \quad \frac{dU}{dy}=-\frac{dV}{dx},$$

e $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$ sono, in virtù del primo lemma, polinomi omogenei di grado $p-1$, tali saranno ancora $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$. E allora, per il secondo lemma, V sarà un polinomio omogeneo di grado p, all'infuori di una costante additiva. Dunque:

" *Se la parte reale di una funzione della variabile complessa* x + iy *è un polinomio omogeneo, il coefficiente dell'immaginario è, all'infuori di una costante additiva, un polinomio omogeneo (del medesimo grado)* ".

a) Poichè se V è un polinomio omogeneo, tale è pure — V, così potremo anche affermare (I, 2):

" *Se il coefficiente dell'immaginario di una funzione di variabile complessa è un polinomio omogeneo, la parte reale è, all'infuori di una costante additiva, un polinomio omogeneo (del medesimo grado)* ".

3. Abbiamo visto che se nella $U+iV$ la U è un polinomio in x ed y di grado m, tale è pure la V. Si aggruppino in U tutti i termini di grado m e si chiami U_m il polinomio che così si ottiene; si chiami U_{m-1} quello che si ottiene aggruppando i termini di U che sono di grado $m-1$ e così via via. Si faccia lo stesso per i termini di v e si adottino notazioni analoghe alle precedenti. Sarà allora

$$U=\Sigma U_s \quad , \quad V=\Sigma V_s \quad (s=m, m-1, \ldots 2, 1, 0).$$

E si potrà scrivere

$$U+iV=\Sigma(U_s+iV_s).$$

Quindi

$$\Sigma \frac{dU_s}{dx} = \Sigma \frac{dV_s}{dy} \quad ; \quad \Sigma \frac{dU_s}{dy} = \Sigma \left(- \frac{dV_s}{dx} \right).$$

Ora poichè U_s e V_s sono polinomî omogenei, tali saranno pure

$$\frac{dU_s}{dx} \quad , \quad \frac{dU_s}{dy} \quad , \quad \frac{dV_s}{dx} \quad , \quad \frac{dV_s}{dy}.$$

E le precedenti eguaglianze non potranno sussistere, se non si abbia separatamente

$$\frac{dU_s}{dx} = \frac{dV_s}{dy} \quad , \quad \frac{dU_s}{dy} = - \frac{dV_s}{dx},$$

per tutti i valori di s da zero ad m. Ciò vuol dire che ciascuna $U_s + iV_s$ è una funzione della variabile complessa $x + iy$. Potremo quindi concludere che:

" *Se* $U + iV$ *è una funzione della variabile complessa* $x + iy$, *e la sua parte reale è un polinomio in* x *ed* y *di grado* m, *la funzione è decomponibile in una somma di funzioni della variabile stessa, le quali hanno la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario che sono polinomî omogenei di grado* m, $m - 1$, $m - 2$... *respettivamente* ".

4. Poichè la $U_s + iV_s$ considerata precedentemente è una funzione di $x + iy$, pongasi

$$U_s + iV_s = \varphi(x + iy).$$

E chiamando z la variabile $x + iy$, si potrà scrivere:

$$U_s + iV_s = \varphi(z).$$

Se ora si indica con φ' la derivata di φ rispetto a z, si ha

$$\frac{dU_s}{dx} + i\frac{dV_s}{dx} = \varphi' \quad ; \quad \frac{dU_s}{dy} + i\frac{dV_s}{dy} = i\varphi'. \tag{4}$$

Ma, per il teorema di Eulero relativo alle funzioni omogenee, si ha

$$x\frac{dU_s}{dx} + y\frac{dU_s}{dy} = sU_s \quad ; \quad x\frac{dV_s}{dx} + y\frac{dV_s}{dy} = sv_s.$$

Da queste si deduce immediatamente

$$s(U_s + iV_s) = x\left(\frac{dU_s}{dx} + i\frac{dV_s}{dx}\right) + y\left(\frac{dU_s}{dy} + i\frac{dV_s}{dy}\right).$$

Ossia per le (4):

$$s(U_s + iV_s) = (x + iy)\varphi'. \tag{5}$$

Poichè poi $\frac{dU_s}{dx}$, $\frac{dV_s}{dx}$ sono polinomi omogenei di grado $s - 1$, si dedurrà in modo analogo, indicando con φ'' la derivata di φ' rispetto a z,

$$(s - 1)\varphi' = (x + iy)\varphi''.$$

E similmente

$$(s-2)\varphi'' = (x+iy)\varphi'''$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$2\varphi^{(s-2)} = (x+iy)\varphi^{(s-1)}$$
$$1\varphi^{(s-1)} = (x+iy)\varphi^{(s)}.$$

Si ottiene per conseguenza

$$\pi(s)(U_s + iV_s) = (x+iy)^s\varphi^{(s)}.$$

E perchè

$$\varphi^{(s)} = \frac{d^sU_s}{dx_s} + i\frac{d^sV_s}{dx^s},$$

sarà $\varphi^{(s)}$ una costante complessa. Ponendo allora

$$c_s = \frac{\varphi^{(s)}}{\pi(s)},$$

si avrà finalmente

$$U_s + iV_s = c_s(x+iy)^s. \qquad (6)$$

Potremo dunque in generale affermare:

Una funzione della variabile x + iy, *che ha la parte reale e il coefficiente dell' immaginario, che sono polinomî omogenei di grado* s, *è eguale al prodotto di una costante complessa per la potenza* s^esima^ *di* x + iy.

E in virtù di quanto si è visto precedentemente (III, 2, *a*), potremo dire anche più generalmente:

Se la parte reale o il coefficiente dell' immaginario di una funzione della variabile complessa x + iy *è un polinomio omogeneo in* x *ed* y, *la funzione, è all' infuori di una costante additiva eguale al prodotto di una costante complessa per una potenza di* x + iy, *il cui esponente è eguale al grado del polinomio omogeneo. La costante additiva è nel primo caso immaginaria, nel secondo, reale.*

a) Abbiamo dimostrato la (6) per tutti i valori di s positivi, interi, diversi da zero: ma si riscontra facilmente che essa sussiste anche per $s=0$. In tal caso infatti $U_s + iV_s$ è una costante complessa: e la (6) ci dice appunto questo.

b) Pel nostro intento, che è quello di considerare funzioni U_s V_s che sono polinomî in x ed y di grado intero e positivo, la (6) serve completamente, avendola ricavata appunto in tale ipotesi. Ma non è fuori di proposito l'avvertire che essa è valida per qualsivoglia valore di s, come si dimostra agevolmente nel seguente modo.

La $U_s + iV_s$ è una funzione φ della $z = x+iy$ che soddisfa, come abbiamo visto, all'equazione differenziale (5)

$$s\varphi = z\varphi'.$$

Ora questa può scriversi

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = s\frac{dz}{z}.$$

Quindi, essendo c una costante, sarà

$$\int\frac{d\varphi}{\varphi} = s\int\frac{dz}{z} + c.$$

Cioè

$$\log\varphi = s\log z + c.$$

E ponendo $c = \log c_s$, si ha subito:

$$\varphi = c_s z^s,$$

nella quale nessuna ipotesi limita ora il valore di s.

5. Sostituendo nella relazione

$$U + iV = \Sigma(U_s + iV_s)$$

la espressione di $U_s + iV_s$ data dalla (6), si ottiene

$$U + iV = \Sigma c_s (x + iy)^s.$$

E questa denota appunto la forma che ha la funzione della variabile complessa che avevamo presa in esame.

Firenze, Marzo 1899.

PROPRIETÀ DELL'ORTOCENTRO DEL TRIANGOLO

1. Dato un triangolo ABC ed un punto H, sono determinate le tre rette AL, BM, CN coniugate armoniche di H rispetto ai tre angoli A, B, C ossia le *polari* di H rispetto agli angoli del triangolo. I punti d'incontro L, M, N di queste polari di H con i lati BC, CA, AB stanno su una retta che si chiama la *retta polare* di H rispetto al triangolo ABC. La corrispondenza tra un punto e la sua polare rispetto ad un triangolo conduce a notevoli risultati ed è stata ampiamente studiata (vedi TRUDI e CREMONA, *Giornale di Matematica,* vol. I). Ricorderò che se A_1, B_1, C_1 sono i punti d'incontro di AH, BH, CH con BC, CA, AB ed A_2, B_2, C_2 i coniugati armonici di H rispetto alle coppie AA_1, BB_1, CC_1, i punti A_2, B_2, C_2 sono i vertici del triangolo formato dalle AL, BM, CN e questo triangolo è omologico ad ABC con il centro d'omologia H e con l'asse d'omologia LMN polare di H rispetto ad ABC.

Se H è l'ortocentro di ABC, il triangolo A_2, B_2, C_2 avrà certe proprietà rispetto agli elementi del triangolo ABC; lo studio di queste proprietà è l'argomento della presente nota.

2. Sia A' la proiezione dell'ortocentro H di ABC nella sua polare AL rispetto all'angolo $\widehat{A}$. I punti A, B_1, C_1, A' stanno sul cerchio descritto su AH come diametro, quindi $LA \,.\, LA' = LB_1 \,.\, LC_1$; i punti B_1, C_1 stanno sul cerchio descritto su BC come diametro, quindi $LB_1 \,.\, LC_1 = LB \,.\, LC$ e per conseguenza $LA \,.\, LA' = LB \,.\, LC$, ossia A' deve stare sul cerchio ABC.

Risulta così il teorema: *in ogni triangolo le proiezioni dell'ortocentro sulle sue polari rispetto ai tre angoli stanno sul cerchio circoscritto.*

Vedremo ora che l'ortocentro è il solo punto del piano del triangolo che abbia questa proprietà.

3. Ricerchiamo prima di tutto il luogo dei punti K, le cui proiezioni sulle loro polari rispetto ad un angolo A del triangolo stanno sul cerchio circoscritto. Sia D il punto diametralmente opposto ad A nel cerchio ABC ed N un punto qualunque di questo cerchio; al variare di N i fasci delle rette $AN = n$ e $DN = m'$ variano proiettivamente, ma la $AK = m$ varia proiettivamente ad AN, dunque i due fasci di centri A, D formati con le rette m, m' sono proiettivi e perciò K descrive una conica α che passa per A, D ed anche per B, C come è facile vedere. Considerando le bisettrici dell'angolo A si scorge che la conica α ha i punti all'infinito nelle loro direzioni e quindi è una iperbole equilatera.

Procedendo allo stesso modo per i vertici B, C si trovano altre due iperbole equilatere β, γ circoscritte ad ABC e con gli assintoti paralleli rispettivamente alle bisettrici di $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.

Un punto le cui proiezioni sulle sue polari rispetto ad A, B, C stanno sul cerchio ABC deve necessariamente appartenere alle tre iperboli α, β, γ; ma queste all'infuori di A, B, C non hanno che il solo punto H di comune, dunque resta dimostrato che la proprietà del numero precedente compete unicamente all'ortocentro.

4. Sarebbe forse interessante studiare le proprietà delle tre iperbole α, β, γ; mi limiterò ad alcune ovvie osservazioni.

Le iperbole α, β, γ hanno i centri rispettivamente nei punti medii di BC, CA, AB. L'iperbole α ha come tangente in A la simediana di BC e le tangenti in B, C sono perpendicolari al diametro del cerchio ABC passante per A. Lo stesso per le iperbole β, γ.

I punti di ciascuna delle tre iperbole hanno la proprietà che i cerchi determinati dalle loro proiezioni sopra i tre lati passano per un punto fisso, e questo punto è il centro della rispettiva iperbole.

5. Le considerazioni precedenti dànno delle proprietà dell'iperbole equilatera:

1° *se in una iperbole equilatera si congiungono gli estremi di un diametro con un punto della curva, le proiezioni di un altro punto qua-*

lunque della curva sopra il diametro e sopra le congiungenti stanno su un cerchio passante per il centro di essa.

2° *le rette che proiettano i diversi punti dell'iperbole sopra le loro polari rispetto alle due congiungenti passano per uno stesso punto della curva* ecc.

6. Ritornando alle proprietà dell'ortocentro, è facile vedere che la retta HA′ proiettante di H su AL passa pel punto medio di BC. Infatti se D è il punto d'incontro di HA′ con il cerchio ABC, sarà AD un diametro di questo cerchio e quindi BD è parallela a CH e CD parallela a BH; per conseguenza HA′ passa pel punto medio di BC.

Se A″, B″, C″ sono i punti medii di BC, CA, AB, le tre rette A′A″, B′B″, C′C″ passano per H, quindi i triangoli A′B′C′, A″B″C″ sono omologici col centro d'omologia H; l'asse d'omologia è la retta LMN *asse ortico* di ABC, perchè i punti d'incontro delle coppie di lati B′C′, B″C″; C′A′, C″A″; A′B′, A″B″ sono punti di eguale potenza rispetto al cerchio ABC ed al cerchio dei 9 punti di ABC.

7. I due triangoli $A_2B_2C_2$, A″B″C″ stanno in una posizione notevole: *essi sono ortologici con i due centri di ortologia coincidenti nell'ortocentro del triangolo* ABC. Infatti le perpendicolari abbassate da $A_2B_2C_2$ su B″C″, C″A″, A″B″ passano per H e le perpendicolari abbassate da A″, B″, C″ su B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 passano pure per H. È facile vedere anche che i due triangoli sono *omologici;* noi dimostreremo però che in generale: *se due triangoli sono ortologici con i due centri di ortologia coincidenti, essi sono reciproci rispetto ad un cerchio e quindi omologici.*

Siano ABC, A′B′C′ due triangoli tali che le perpendicolari $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ abbassate da A′, B′, C′ su BC, CA, AB passino per un punto M e che le perpendicolari AA_1', BB_1', CC_1' abbassate da A, B, C su B′C′, C′A′, A′B′ passino per lo stesso punto M. Dalla figura risulta subito che i sei prodotti

$$MA' \,.\, MA_1,\ \ MB' \,.\, MB_1,\ \ MC' \,.\, MC_1,\ \ MA \,.\, MA_1',\ \ MB \,.\, MB_1',\ \ MC \,.\, MC_1',$$

sono eguali, quindi descritto il cerchio di centro M e col raggio eguale alla radice quadrata del valore comune di questi prodotti, i triangoli ABC, A′B′C′ risultano reciproci rispetto a questo cerchio; quindi sono omologici ed il centro d'omologia e l'asse d'omologia sono polo e polare rispetto allo stesso cerchio.

Il teorema reciproco del precedente non si verifica, cioè se due triangoli sono omologici ed ortologici, i due centri di ortologia in generale non coincidono; (*) così ad esempio un triangolo ABC ed il suo primo triangolo di Brocard sono omologici ed ortologici; ma i due centri di ortologia sono distinti, ma è il centro del cerchio ABC e l'altro è il punto di Tarry di ABC.

(*) Per riguardo a questi triangoli SONDAT ha dimostrato che la congiungente i due centri di ortologia contiene il centro d'omologia ed è perpendicolare all'asse d'omologia (*Intermédiaire des mathématiciens*, question 38, 1894).

8. Un altro esempio di coppie di triangoli ortologici con i due centri di ortologia coincidenti è il seguente. In un triangolo ABC siano O', O'', O''' i simmetrici del centro O del cerchio circoscritto rispetto a BC, CA, AB; è noto che i due triangoli ABC, $O'O''O'''$ sono simmetrici col centro di simmetria nel centro del cerchio dei nove punti di ABC (vedi ad es. le quistioni 206, 304 del *Periodico*). Aggiungiamo che: *il triangolo* $O'O''O'''$ *è ortologico al triangolo* $A_1B_1C_1$ *ortico di* ABC *ed i due centri di ortologia coincidono nell'ortocentro di* ABC.

La dimostrazione risulta evidente dalla figura.

Dal teorema del n. prec. possiamo poi conchiudere che $O'O''O'''$, $A_1B_1C_1$ sono pure omologici.

9. Un ragionamento del tutto analogo a quello del n. 7 conduce a dimostrare che: *se due tetraedri sono ortologici ed i centri di ortologia sono coincidenti, essi sono reciproci rispetto ad una sfera.* Se ne deduce che i due tetraedri sono anche *iperboloidici* cioè le congiungenti delle coppie di vertici corrispondenti sono quattro rette di un'iperboloide rigato.

G. Gallucci.

CORRISPONDENZA

Orvieto, 16 Giugno 1898.

Sig. Direttore del " Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario "

Livorno.

Il dottor G. B. Marangoni in una sua *Nota critica*, dedicata ai tre professori Frattini, De Amicis e Fazzari, fa *alcune osservazioni* sul mio opuscolo *I fenomeni naturali e le rappresen'azioni matematiche.* Siccome la *Nota*, venuta in mia conoscenza oggi stesso, e non prima, ha relazione anche al giudizio che sul detto mio opuscolo diede nel fascicolo marzo-aprile ultimo di codesto *Periodico* il professore De Amicis; così prego la sua gentilezza di voler dar posto nel prossimo fascicolo del *Periodico* alla seguente mia comunicazione, significandole in pari tempo che consimile preghiera rivolgo oggi stesso al periodico *La nostra scuola*, da cui la *Nota* fu estratta, e agli altri due *Il Pitagora* e la *Scuola educatrice*, che pubblicarono giudizî rispettivamente dei due professori Fazzari e Frattini, sul mio opuscolo, giudizî ai quali anche ha relazione la *Nota* stessa.

Il Marangoni, com'egli stesso richiama nella sua *Nota*, già altra volta si era occupato del mio opuscolo, e precisamente nel numero del 10 dicembre 1898 del periodico *La scuola secondaria italiana.* Allora, e propriamente con mia lettera indirizzata alla direzione di quel periodico ed inserita nel numero 24 dicembre del medesimo, rilevate alcune *inesattezze di fatto* nelle quali era caduto l'articolista, soggiungevo che *quanto al merito o valore intrinseco delle considerazioni* contenute nell'articolo *avrei avuto occasione di parlarne fra brevissimo in una Nota che avrei premessa al 2° discorso d'imminente pubblicazione: in essa Nota, raccolte e ordinate le osservazioni di tutti coloro che mi avessero fatto l'onore di occuparsi del 1° discorso, avrei detto schiettamente e motivatamente quali osservazioni mi fossero sembrate accettabili e quali no.* Ma le condizioni della mia salute, per le quali in febbraio ultimo fui collocato, e mi trovo tuttora, in aspettativa relativamente all'uffizio mio di provveditore agli studi, furono la causa onde rimase, ed è tuttora, sospesa quella mia pubblicazione.

In ogni modo però il 2° *discorso*, con la *Nota* che lo procederà, sarà prestissimo dato alle stampe, e immancabilmente non oltre il novembre prossimo. Nella *Nota* che lo precederà comprenderò pertanto anche l'esame delle nuove censure del Marangoni; ma frattanto vo' rilevare le seguenti altre *inesattezze di fatto*, la terza delle quali è la ripetizione, con rafforzamento, di una di quelle in cui il Marangoni era già incorso nella prima recensione, e già da me denunziate con la richiamata mia lettera del 24 dicembre alla direzione della *Scuola secondaria italiana*. Ecco, senz'altro, le nuove *inesattezze di fatto:*

1°. La lettera del De Amicis a me, sebbene inserita nel fasc. marzo-aprile 1899 del *Periodico di matematica*, non è *posteriore*, ma anteriore alla recensione 10 dicembre 1898 del Marangoni sulla *Scuola secondaria italiana*. La lettera stampata porta nel *Periodico* la data 2 novembre 1898, e la lettera manoscritta, che conservo, porta la stessa data, fu allora diretta a me in Aquila, ed è identica a quella stampata.

2°. Non è esatto che io nel parag. IV abbia fatto *sfuriate contro i filosofi positivisti;* le ho fatte soltanto (si legga bene) contro una certa classe di essi, parlando anzi con rispetto degli altri, e facendo pur qualche nome tra questi.

3°. Mi si attribuisce novamente, e con un crescendo, di *aver diretta la frase indecente " purus mathematicus purus asinus „ ai geometri e agli annalisti che hanno voluto porre in questi ultimi tempi la scienza matematica su basi razionali* ecc., e *di aver* con la *frase* stessa *tentato di offendere tutto un gruppo di studiosi italiani, benemeriti della scienza, dell'insegnamento e della patria;* mentre la conclusione esplicita alla quale io pervengo nel N. 20 a pag. 20 è soltanto questa: *Il noto adagio " purus mathematicus purus asinus „ è una condanna severa sì, troppo severa, di quei matematici che rimangono chiusi in un ordine speculativo e di pure astrazioni; ma un qualche fondamento giusto lo ha.*

4°. Di quella che il Marangoni chiama *traduzione fedele dal Couturat* ne discorreremo, come di tutto il resto, nella promessa *Nota*, che precederà il 2° discorso; ma, se mai, quella *traduzione* sarebbe non del *capo* VII, cioè dell'intero capo VII, come asserisce il Marangoni, bensì di una *sesta parte appena* di esso capo, occupante, tutto intiero, un pochino più di cinque pagine e mezzo di 16° grande: l'insieme delle particole *fedelmente tradotte dal Couturat* si limiterebbe a un po' meno di una paginetta del mio opuscolo. È una verificazione sperimentale che chiunque può fare.

Mi creda, Sig. Direttore,

Dev.mo suo

ANTON MARIA BUSTELLI.

QUISTIONI PROPOSTE

470. Il luogo dei vertici dell'angolo retto i cui lati abbiano date direzioni ed intercettino in una data iperbole equilatera corde tali, che la differenza dei loro quadrati sia costante, è un'iperbole equilatera concentrica alla data.

Considerando poi il caso in cui le corde debbano essere eguali dedurne la seguente proprietà: Due rette ortogonali passanti per il fuoco di una iperbole equilatera intercettano in questa corde eguali.

Si può generalizzare quest'ultima proprietà?

471. Si consideri il parallelogrammo che ha per vertici due diametri coniugati di un ellisse, e per un punto P di uno di questi diametri si conducano due parallele ai lati del parallelogrammo. Se A, A', B, B' sono i punti d'incontro di tali rette con l'ellisse, a e b i semiassi di questo, si ha

$$\overline{PA}^2 + \overline{PA'}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PB'}^2 = 2(a^2 + b^2).$$

CELESTRI.

BIBLIOGRAFIA

MAURICE D'OCAGNE. — *Traité de Nomographie.* — Paris, Gauthier-Villars, 1899. — Fr. 14.

L'uso di grafici (diagrammi o abbachi), i quali diano immediatamente il valore di una funzione a più variabili, va sempre più estendendosi nella matematica applicata; ma i procedimenti per la loro costruzione erano fin'ora poco noti e disparati, perchè non esisteva un'opera che li raccogliesse o li coordinasse.

A questa mancanza ha voluto riparare il prof. M. d'Ocagne (nome già noto ai matematici), il quale ha elevato questo ramo secondario della *Statica grafica* a nuova scienza, attribuendole il nome di *Nomografia;* e con questo titolo egli pubblicò fin dal 1891 un compendioso fascicolo, pregievolissimo; ma i numerosi contributi personali, le moltissime applicazioni fatte, da quell'epoca in poi, dei moderni metodi (all'ingegneria, alla navigazione, alla balistica, all'astronomia, all'idraulica, alle operazioni finanziarie, ...), han fatto sì che quel fascicolo di cento pagine appena è ora diventato un volume di ben cinquecento pagine.

Non è possibile dare, in poche parole, un'idea di tutto ciò che questo volume contiene, perchè gli argomenti in esso trattati sono o nuovi o poco noti, ci limiteremo per ciò ad alcune osservazioni di indole generale.

Noteremo prima di tutto che l'A. (meno che in una parte dell'ultimo capitolo) non suppone nel lettore altro che una conoscenza elementare della *Geometria analitica,* e che, essendosi proposto di essere utile principalmente ai tecnici, comincia coll'occuparsi del caso più semplice (quello delle equazioni a due variabili (cap. I), per risalire di mano in mano a casi più complicati. Poscia, dopo aver studiato a fondo (cap. II) il caso in cui un'equazione a tre variabili può essere rappresentata da un grafico contenente tre sistemi di rette quotate (*anamorfosi* del Lalanne, generalizzata dal Massau), passa a esporre (cap. III e IV) il suo *metodo dei punti allineati a una sol quota* (che nel citato fascicolo del 1891 aveva chiamato *metodo dei punti semplicemente isopleti*), metodo fecondissimo, il quale semplifica la costruzione e l'uso dei grafici e la cui importanza è largamente dimostrata dalle numerosissime applicazioni che l'A. stesso o espone per disteso, o cita soltanto. Ma dove il pregio della geniale idea dei punti allineati è messo in piena luce è nel capitolo seguente (V), nel quale l'A. fa vedere come il metodo stesso si possa facilmente estendere ad alcuni tipi frequentissimi di equazioni a quattro, a cinque e a sei variabili, dando così luogo al *metodo dei punti allineati a due quote* (già *metodo dei punti doppiamente isopleti*). E fra gli esempi citeremo quello delle equazioni complete di 3° e di 4° grado, e quello per la risoluzione di tutti i triangoli sferici. Il cap. VI (ed ultimo), dal punto di vista teorico, è il più importante di tutti. In esso l'A., dopo aver determinati e classificati tutti i modi possibili per rappresentare le equazioni a un numero qualunque di variabili, esamina i tipi generali che comprendono tutti quelli studiati nei capitoli precedenti, e si propone il problema di cercare quando una equazione qualunque sia riducibile a un determinato tipo: si presentano così problemi notevolissimi di Analisi il primo dei quali fu risolto dal nostro Di S^t. Robert. — Ma anche la *Geometria superiore* può nella Nomografia trovare largo campo di applicazione, e lo prova l'utilità che si è già potuto ricavare dal principio di dualità (cap. III, 56-59) e dalla trasformazione omografica (cap. II, 49-50).

A noi pare, insomma, che questo libro meriti di essere studiato sia dai tecnici, sia dai matematici: dai primi perchè fornirà loro il mezzo di evitare (nella maggior parte dei casi) i calcoli numerici, dai secondi perchè presenterà loro nuovi e interessanti problemi teorici, ma di applicazione utile e immediata.

G. Pesci.

H. Poincaré. — *La théorie de Maxwell et les oscillations Hertziennes.* — Paris, G. Carré et C. Naud, 1899.

Il volumetto fa parte della collezione " Scientia „ colla quale il benemerito editore intende di esporre, in forma accessibile anche ai non specialisti, i problemi scientifici che sono, come suol dirsi, all'ordine del giorno. Non bisogna dunque richiedere la forma elevata e la profondità delle ricerche analitiche, che il Poincaré adoperò già in due precedenti volumi *Electricité et Optique, Les oscillations électriques;* egli ha qui inteso di sviluppare in modo facile la teoria di Maxwell, e ciò che il Righi chiamò, in modo intuitivo, l'*Ottica delle oscillazioni elettriche* (Bologna, Zanichelli, 1897). Ma, ed è forse superfluo farlo notare, anche in queste pagine elementari abbondano le osservazioni acute e geniali, e si ritrova la chiarezza e la vivacità del dire, che è una delle più brillanti caratteristiche dell'illustre scienziato.

La trattazione può dirsi completa, ed estesa per quanto poteva permetterlo la mole del libro. Dove, malgrado la penna illustre che lo ha dettato ci permettiamo di dirlo, ci siamo imbattuti in parecchie asserzioni, che non si possono certo accettare ad occhi chiusi. Così non sembra logico dire che, riconosciuto il parallelismo fra un dato fenomeno ed un fenomeno meccanico, si abbia garanzia sufficiente della spiegazione meccanica del primo; che innanzi Maxwell i fisici consideravano la scarica di una bottiglia di Leyda come una corrente a circuito aperto, etc.

Trattandosi poi di un'opera di volgarizzazione, ci sarebbe piaciuto di vedere, a fianco delle analogie idrauliche e delle altre sviluppata qualche analogia fra l'elettricità ed il calore. Questo secondo metodo, non sempre applicabile è vero, ha il vantaggio di non materializzare i fenomeni elettrici, e di ravvicinarli a fenomeni, la di cui natura vibratoria è a tutti nota.

Il volumetto fa larga parte ai lavori del nostro Righi e del Garbasso; ed esso è infine da raccomandarsi vivamente come introduzione generale, sia alle altre opere del Poincaré, sia all'insigne studio sopra citato del Righi. (*)

R. Pitoni.

Georges Maupin. — *Opinions et Curiosités touchant la Mathématique, d'après les ouvrages français des XVI, XVII, XVIII siècles,* 1 vol. in-8° di 200 pagine, con figure. Parigi, Georges Carré e C. Naud, editori, 1899.

Nei secoli passati cosa pensavano dell'utilità delle matematiche non solo i dotti, ma specialmente i fabbricatori di libri ed anche gl'ignoranti? Quali vantaggi si credeva trarne per l'educazione; che legame speciale volevasi stabilire tra la dottrina matematica e la religione? Ecco di che tratta questo volume. Offrendo estratti interessanti e curiosi degli autori che cita, il sig. Maupin non si è permesso d'aggiungere che brevi commenti e corte note biografiche, non volendo toglier nulla del loro carattere ai testi citati.

Dobbiamo soggiungere che questo non è un lavoro dotto e che, nei punti principali, è stato cercato di renderlo alla portata di tutti coloro che hanno in matematica mediocri cognizioni.

Questo libro ha, d'altronde, un lato documentario il quale sedurrà coloro che s'interessano all'evoluzione dell'idea matematica attraversa le gravi quistioni di scuole e le scottanti discussioni dei dogmatici. — I matematici s'interesseranno vivamente a questa escursione retrospettiva nel campo della geometria, ed i curiosi, che non si spaventano degli argomenti imprevisti, troveranno piacere nell'intervento delle matematiche nel dogma della Presenza reale. — D'altronde, il volume del sig. Maupin, veramente istruttivo in ogni sua parte, ci offre come d'attualità, dei punti di vista originali su ciò che pensavano i maestri di prima sull'utilità dell'insegnamento del latino.

Molte delle idee che emettiamo oggi a questo proposito sono, per dire il vero, quelle d'ieri, e dobbiamo al libro del sig. Maupin la soddisfazione di apprenderlo.

G. de Longchamps. — *Cours de problèmes de Geom. Analytique.* Parigi, Delagrave, 1898-99.

Quest'opera che consta di tre grossi volumi non è una delle solite raccolte di esercizi, ma bensì un vero e proprio trattato nel quale l'autore, dopo aver classificato i vari problemi che possono presentarsi in Geometria analitica, espone per ciascuna classe, con la chiarezza ed il rigore scientifico che lo distinguono, i vari

(*) Ricordiamo come a questo medesimo scopo giovino le *15 Lezioni sulla luce* di A. Garbasso Milano, L'*Elettricità*, 1897.

metodi che conviene seguire per giungere alla soluzione. La teoria è seguita sempre da numerosi esempî parte già risoluti, parte lasciati a risolvere al lettore, quasi sempre però accennando ai resultati finali.

I due primi volumi comprendono la Geometria a due dimensioni. Vi sono trattati successivamente i problemi che si riferiscono alle tangenti, ai poli ed alle polari, ai luoghi di centri, di fuochi, di vertici, alle normali, alle corde, alle direttrici ecc.

Un capitolo è destinato alle Coordinate baricentriche ed alle tangenziali ed uno alle Trasformazioni delle curve.

Con lo stesso metodo è composto il volume 3° che si riferisce alla Geometria a tre dimensioni. In esso vi si trattano i problemi relativi a tangenti e piani tangenti, centri, poli e piani polari, corde e piani secanti, normali, *piani ciclici e iperciclici, generatrici*, ecc.

L'ultimo capitolo è intieramente destinato allo studio particolareggiato di una superficie speciale. È scelta come esempio per questo studio la superficie di Steiner o *superficie romana* (del 4° ordine e della 3ª classe), quella superficie cioè che è caratterizzata dalla proprietà che ogni suo piano tangente la sega secondo due coniche.

In conclusione la nuova opera del Longchamps colma un vuoto, giacchè quantunque non manchino, specialmente in Francia, le buone raccolte di esercizî, sia risoluti (per es. quella del Brisse, del Rémond ecc.) od enunciati semplicemente (per es. quella del Laisant), non c'era ancora, almeno ch'io sappia, un libro che contenesse una trattazione sistematica del modo di risolvere i problemi in Geometria analitica.

Il " *Cours de problèmes* " mi sembra che riconfermi sempre più l'alto valore dell'autore dell'*Algèbre* e della *Géometrie Analytique*.

G. C. L.

*DA GIORNALI E RIVISTE

Nouvelles Annales de math. T. XVIII$_3$. 1899 (Paris, Gauthier-Villars).

Fasc. II (febbraio). *Staeckel P.* Sopra alcune proprietà aritmetiche delle funzioni analitiche (traduzione della Mem. di egual titolo inserita nel t. XLVI dei *Mathematische Annalen*). — *Pleskot A.* Nuovo processo per risolvere le equazioni del terzo grado. — *Fontené G.* Sopra alcuni poliedri mobili comparabili ai poligoni di Poncelet. — *Vaes F. J.* Soluzione grafica di n equazioni lineari con n variabile. — *Vaquant A.* Risoluzione della quistione di Matematiche elementari; Aggregazione delle scienze matematiche; concorso del 1898. — Certificati di studi superiori della facoltà di scienze Sessione di novembre 1898 (Caen, Grenoble). — Risoluzione di quistioni proposte: 1722 (*E. Malo*) 1727 (*G. Tzitzéica*); 1729 (*Tzitzéica*). — Quistioni 480, 495, 496, 512, 513 (nuovamente proposte perchè fin'ora insolute) 1812 (*), 1813, 1814.

Avvertenza. — Gli articoli contrassegnati con asterisco (*) sono stati inviati dal Comitato dell'Associazione *Mathesis*.

(*) Questa quistione 1812 (E. Duporcq) deve essere stata inserita per una svista, giacchè enuncia il teorema del Chasles fondamentale nella teoria delle cubiche gobbe, relativo ai piani osculatori in tre punti della curva. — (V. p. es. Reye, *Geométrie de position*, T. II, p. 112 della trad. francese; Schröter, *Theorie der Oberfläche 2. O und der Raumkurven 3. O*; p. 260). (V. R.)

Fasc. III (marzo). *Ripert L.* Sull'omografia e la dualità applicata alle proprietà metriche del piano. — *Böklen O.* Sulle normali dell'elissoide (tre nuovi teoremi sull'argomento indicato). — *Mariantoni e Palatini.* Sul problema della polisezione dell'angolo (elegante applicazione della teoria delle corrispondenze $(1, n)$ al problema indicato nel titolo) (*). — *Piccioli E.* Un teorema di geometria ad n dimensioni (estensione ad un S_n del teorema: le sviluppanti delle eliche cilindriche di un S_3 son curve piane). — *Vacquant A.* Risoluzione della quistione di Analisi (Aggregazione delle Sc. Mat. Concorso del 1898). — Certificati di studi superiori della Facoltà di Sc., sessione di novembre 1898 (Lilla). — Bibliografia. — Quistioni 416. 1816-1818 (**).

(V. R.)

Mathesis, Recueil mathematique etc. par M. M. *P. Mansion* et *J. Neuberg*, T. IX_2, Gand, Ad. Hoste, editeur.

Fasc. III (marzo, 1899). *Barbarin E. Costruzioni sferiche con la riga e col compasso.* — (l'A. si propone di mostrare come sopra grandi superficie sferiche, e in particolare sul piano riemanniano possa usarsi la riga e il compasso per i tracciamenti elementari). — *Jerabek V. Sulla Trisettrice di Maclaurin* (dal centro O e da un punto fisso A d'una circonferenza O^2 si tirano il raggio variabile OM e la corda parallela AN: il luogo del polo P di |MN, rispetto a O^2 è la Trisettrice di Maclaurin avente in B il vertice e in O il fuoco; l'inviluppo di |MN| è una cardioide; il luogo del punto medio di $\overline{MN}$ è una lumaca di Pascal; il luogo del punto comune a |MN| e alla tangente in P, una cardioide). — *Note matematiche:* Osservazioni sul triangolo (*Ripert*); *sul parallelepipedo* (*Stuyvaert*); *Teorema sull'iperbole* (*G. Gerard*). — *Formole relative al triangolo* (*Delahaye*). — Bibliografia. — Quistioni risolute: 1056 (*Droz-Farny*); 1161 (*Gerard, Depréz, Droz*); 1186; 1189 (*Buysens*); 1192 (*Retali*); Quistioni d'esame 881-882. — Quistioni proposte 1211-1214. — Al presente fascicolo è unita come Supplemento la Mem. *Sopra una trasformazione geometrica* del sig. *H. Brocard*, (Estr. dalle Mem. Soc. R. delle Sc. di Liège).

Fasc. IV (aprile). *Barbarin E.* Costruzioni sferiche etc. (continuaz. e fine). — Congresso Internaz. dei matematici a Parigi. — *Retali V.* Sopra una cubica circolare. — *Note matematiche:* Calcolo approssimato di una radice quadrata (*G. Fratini*). — Sulla sfera dei dodici punti (*Ripert*). — Un regolo calcolatore o abaco. (*Lambert*). — Paradosso concernente l'inviluppo delle ellissi omofocali (*Barisien*). — Bibliografia. — Risoluzioni di quistioni proposte. 594. (*Neuberg*): 1041; 1156 (*Gerard*); 1176, 1177 (*Buysens*) (***). — *Quistioni d'esame* 883-887. — Quistioni proposte 1215-1218.

(*) Sia s la perpendicolare ad |AB| in B ed X un punto tale che $n.\widehat{XAB}=\widehat{XBA}$: la retta |BX'| simmetrica di |BX| rispetto ad s sega |AX| in un punto X' il cui luogo è una *curva settrice* Γ^n d'ordine n con un punto $(n-1)$-plo in A, passante (una volta) pei punti ciclici ecc. La curva C_n studiata dai sigg. Mariantoni e Palatini è dunque la omologica armonica della *settrice* Γ^n quando si prenda A per centro ed s per asse d'omologia, se ne possono ricavare le proprietà da quelle note di Γ^n. Più generalmente se $n.\,X'AB = n'.(180^0 - X'BA)$ il luogo di X' è una *curva settrice* $\Gamma^{n+n'-1}$ dell'ordine $n+n'-1$, con un punto $(n-1)$-plo in A, un punto $(n'-1)$-plo in B, un punto n'-plo in ognuno dei punti ciclici ecc. Queste *curve settrici* sono state studiate accuratamente dal sig. Prof. *P. H. Schoute* di Groninga (V. *Archives Néerlandaises des Sc. exactes* etc., t. XX, p. 49-94, e *J. de Mat. spéc.*, anno 1885). (V. R.)

(**) Per la quistione 1817 (del sig. Cardoso-Laynes) veggasi la risoluzione che io ne ho data nel T XIII di questo *Periodico* (pag. 124, quistione 403). (V. R.)

(***) La costruzione data dal sig. Prof. NEUBERG, nella nota che segue la risoluzione del sig. BUYSENS, vale anche nel caso generale di una curva piana qualunque; veggasi la mia quistione 401 (*Periodico di Mat.*, anno XIII, pag. 85). (V. R.)

Fasc. V (maggio). *Jérabek V.* Curve polari reciproche delle epicicloidi ed ipocicloidi (risultati importanti relativi alle curve ρ sen $(n+1)\ \varphi = k$, alle loro inverse etc). — *Orlando L.* Applicazioni dell' inversione (osservazioni su teoremi molto noti). — *Note matematiche:* Sulla quistione 1171; Sulle coniche omotetiche passanti per due punti fissi (*Déprez*). — Bibliografia. — Risoluzioni di quistioni; 1042 (*Retali, Buysens, Gob, Droz, Déprez, Mandart*); 1102 (*Stuyvaert*); 1181 (*Lorent*); 1199. Quistioni d'esame 888-891. — Quistioni proposte 1219-1222.

(V. R.)

Revue de mathématiques Spéciales, redigée par M. M. *E. Humbert* et *G. Papelier*, 9ᵉ année. Paris, librairie Nony et Cⁱᵉ.

Fasc. 6° (marzo 1899). *Lagrange A.*, Lezione sulla generazione delle cubiche (prodotto di due fasci proiettivi l'uno di coniche e l'altro di raggi; costruzione della cubica coi due metodi di Chasles e Jonquieres; costruzione (di Hart) del nono punto comune a 2 cubiche passanti per 8 punti dati). — *Lapointe G.*, Sopra una proprietà delle cubiche gobbe. (È il teorema indicato nella nota a pag. 274 del *Periodico di Mat.* che l'A. ricava con trasformazione omografica da una proprietà delle cubiche equilatere). — *Proubet*. Sopra una formola della quale è caso particolare quella degli incrementi finiti. — Soluzione della quistione 753 (Scuola Politecnica, concorso del 1898). *Geom. Analitica.* — Risoluzioni delle quistioni: 746 (relativa all'ellisse di Frégier) (*) 757. — Quistioni proposte 815-816. — *P. Barbarin,* Teoremi da dimostrare, parte 2ª. — *Geom. Analitica,* Quistione 768 (Scuola Centrale 1898) (luoghi relativi alla parabola, alla cubica cuspidale; la curva ortoptica di una parabola di *Neil* è una parabola ordinaria etc). — Quistioni proposte 824-826. — Bibliografia.

Fasc. 7° (aprile 1899). Parte 1ª. *Chalaux M.* Invarianti di un polinomio intero in x, relativi alla trasformazione lineare $x = x' + h$. — Risoluzione della quistione 762 (Aggregazione delle Sc. mat. 1898) (quistione relativa alla superficie di *Steiner*, che non può riassumersi qui brevemente). Scuola Normale Superiore, Concorso del 1898 (quistione relativa alla superficie cubica circolare $x(x^2 + y^2 + z^2) + a(x^2 + y^2 - z^2) = 0$, inversa di una quadrica di rivoluzione rispetto a un suo punto). — *Geom. Analitica*, Risoluzione della quistione 758 (**). (ABC è un triangolo inscritto alla conica C^2 e circoscritto a K^2; α, β, γ sono i punti di contatto; il luogo del punto M comune alle rette $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ è una conica del fascio (C^2, K^2)). — *Fisica e Chimica,* Risoluzioni delle quistioni 750 e 752. — Quistioni proposte negli esami orali della Scuola Normale Superiore (1898). — *Matematiche,* 218-272. — *Fisica,* 273-288. — Quistioni proposte 827-828. — *P. Barbarin,* Teoremi da dimostrarsi 829-832 (seguito).

(*) La costruzione delle intersezioni di una conica reale C^2 con le rette isotrope uscenti da un suo punto M si fa assai semplicemente così: Sieno MR la corda normale in M, MT la tangente in M; MC_1, MC_2 bisettrici degli angoli di queste due rette, seghino C^2 respettivamente in A_1 e B_1; posto $(|MA_1|, |RB_1|) \equiv C_1$, $(|MB_1|, |RA_1|) \equiv C_2$, i due punti cercati sono sulla retta $|C_1C_2|$ e posto $(|C_1C_2|, |MR|) \equiv C$, $(|MT|, |C_1C_2|) \equiv T$, sono i punti doppi della involuzione $(C_1, C_2; C, T)$. ne segue che il polo $M' \equiv (|A_1B_1|, |MR|)$ di $|C_1C_2|$ rispetto alla conica C^2 è il punto di *Frégier* corrispondente ad M, ossia lo inviluppo di $|C_1C_2|$ *è la polare reciproca, rispetto a C^2, dell'ellisse di Frégier.* Veggasi il § 17 delle mie *Ricerche sopra l'immaginario in Geometria* (Serie IV, T. IX delle Mem. della R. Acc. delle Scienze di Bologna): per diverse proprietà dell' ellisse di Frégier v. *Steiner* (Crelle t. XLV) e *Retali* (Mem. dell'Acc. di Bologna, Serie IV, T. VII, pp. 620-622).

(V. R.)

(**) Risoluzione geometrica: cerchiamo i punti del luogo che cadono su C^2: se A è uno dei punti comuni a C^2 e K^2 e la tangente a K^2 in A seghi C^2 in T, la tangente in T a C^2 toccherà K^2 in un punto α, i due punti $\gamma\beta$ sono riuniti in A sulla $|AT|$, e i due BC sulla $|T\alpha|$ in T; il triangolo ABC è inscritto in C^2 e circoscritto a K^2, le rette $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ si segano in A. Il luogo ha dunque in comune con C^2 i 4 punti (C^2K^2).

(V. R.)

Parte 2ª. — Scuola centrale, Concorso del 1898. — *Trigonometria*, 771 (Calcolo); 772 (Risolvere il triangolo ortico d'un triangolo dato acutangolo ABC; dimostrare ch'esso fra i triangoli inscritti in ABC ha il minimo perimetro). — Scuola delle miniere di Saint-Etienne. 724 (es. di geom. analitica). — Quistioni proposte 833-834.

(V. R.)

Bulletin de mathématiques speciales, publié par M.M. *L. Gerard, G. de Longchamps* et *B. Niewenglowski,* anno 5°.

Fasc 5° (febbraio 1899). — *Michel Ch.* Teoria sintetica delle cubiche a punto doppio e delle curve di terza classe con tangente doppia (continuazione e fine; cenno sulle cubiche cuspidali). — *Bally.* Dimostrazione di alcuni teoremi relativi alle coniche (continuazione; Se P_1P_2 sono i poli di p_1p_2 rispetto a una conica C^2, il covariante fondamentate del sistema formato dalle due coniche C^2 e P_1P_2 è una conica T^2 passante per P_1P_2 e pei punti $(C^2p_1)(C^2p_2)$: reciprocamente. C_2 è il contravariante fondamentale del sistema T^2, p_1p_2; se P_1P_2 sono i punti ciclici, Γ è il cerchio di Monge di C^2. L'A. dimostra geometricamente varie proprietà col sistema C^2, Γ^2). — *Gérard L.* Sul teorema di Poncelet (la quistione dei poligoni inscritti a una conica K^3 e circoscritti ad un'altra C^2 si abbassa al 1° grado quando le coniche date hanno fra loro doppio contatto, nel caso generale occorrono le funzioni ellittiche: l'A. mostra che se K^2 e C^2 sono tangenti, bastano le funzioni circolari) (*). — Quistioni risolute 154 (Barisien). — *Barisien.* Nota relativa a due curve che possono essere considerate come una generalizzazione della lumaca di Pascal. La prima curva considerata dall'A., $(x^2+y^2-ax)^2(B^2x^2+A^2y^2) = A^2B^2(x^2+y^2)^2$ è la concoide generalizzata dell'origine O rispetto all'ellisse $B^2x^2 + A^2y^2 = A^2B^2$ e al cerchio $x^2+y^2-ax=0$) (**). — Quistioni proposte 165-170.

Fasc. 6° (marzo 1899). — *Michel Ch.* Sulle coniche bitangenti a due coniche date ed i cerchi tangenti a due cerchi dati (nota di geom. analitica). — *Bally E.* Dimostrazione di alcuni teoremi relativi alle coniche (cont. il teorema di Poncelet). — *L. G.* Sul teorema di Rolle. — Quistioni risolute 154; 155 (Barisien). — *Barisien.* Nota relativa a due curve che possono essere considerate come una generalizzazione della lumaca di Pascal (cont. la seconda curva considerata dal sig. B. non è altro che la pedale di un'ellisse rispetto a un punto del suo asse maggiore e perciò perfettamento conosciuta (***). — Quistioni proposte 171-172.

(V. R.)

(*) È ormai provato che Steiner aveva scoperto la trasformazione quadratica razionale generale prima del 1829. (Veggasi la mia nota: *Sur la trasformation quadratique rationelle,* nel T. V. p. 44 dell'*Interm. des Math.*) è dunque molto probabile ch'Egli fosse, nell'epoca indicata, anche in possesso del metodo d'inversione: in ogni caso, assai prima del 1843, *Magnus* (Crelle T. VIII, 1831, p. 52) e il *Bellavitis* (ann. della Sc. T. VI, Padova 1836) avevano esposto completamente questo metodo.

(V. R.)

(**) Se $r_1 = f_1(\theta), r_2 = f_2(\theta), \ldots r_n = f_n(\theta)$ sono le equazioni polari di n curve, riferite allo stesso polo e al medesimo asse polare, la curva $r = \Sigma f_n(\theta)$ si dice *concoide generalizzata* del polo rispetto ad esse. Sebbene non sia stata finora studiata la trasformazione piana doppia del quart'ordine che dà la chiave della teoria delle concoidi, si conoscono parecchie proprietà della curva $r = \Sigma f_n(\theta)$, per es.: se ne può costruire la tangente in un punto, il centro di curvatura etc. Nel caso particolare considerato dall'A. la normale alla sestica nel punto (0, B) passa per (A, 0); Concoidi generalizzate di un ellisse o di un cerchio si presentano spesso nelle applicazioni della Geometria descrittiva e precisamento nella teoria delle ombre ed in quella delle linee isofote.

(V. R.)

(***) Se rispetto a due assi rettangolari $0x, 0y$ paralleli a quelli d'un ellisse di semiassi A, B le coordinate del centro sono m, n, la equazione polare

$$r = m\cos\theta + n\cos\theta \pm \sqrt{A^2\cos^2\theta + B^2\operatorname{sen}^2\theta}$$

rappresenta la pedale dell'ellisse rispetto ad O: ponendo in questa $n=0$, $m=a$ abbiamo la seconda curva del sig. *Barisien*, che è dunque la pedale di $0(-a, 0)$ rispetto all'ellisse. — Ne segue subito,

El Progreso Matematico, Rivista de Matemáticas puras y aplicadas; director *D. Zoel G. de Galdeano*, catedrático de la Universidad de Zaragoza, serie 2ª, num. 1 (maggio 1899). — Ragione, oggetto e programma. — Appunti per un piano di educazione scientifica. — *D. Zoel G. de Galdeano*. La moderna organizzazione della Matematica (è la prima di una serie di Conferenze tenute dall'A. nel marzo 1898 all'Università di Madrid). — Cronaca; Congresso di Zurigo; congresso di Dusseldorf; la società italiana *Mathesis*. — Bibliografia. — Quistioni risolute (*) (Brocard). — Quistioni proposte 254-256.

(V. R).

Dalla: **Zeitschrift fur Matem. und Naturwiss. Unterricht.** rileviamo nel:

Fasc. V. 1898. 1°. Una recensione sulle: Lezioni di Storia della Matematica di *M. Cantor* (vol. III, Lipsia, *G. B. Teubner*); e sull'opera: Trattazione elementare del potenziale e sue applicazioni alla teoria della gravitazione del magnetismo, dell'elettricità, del calore e dell'idrodinamica di *Holzmüller* (ibd).

2°. Relazione di A. Peter sul VII congresso dell'Associazione fra gli insegnanti di Mat. e Scienze, avuto luogo a Lipsia nell'estate scorso (e di cui fu dato già un cenno nel nostro Bollettino).

Fasc. VI. 1°. In questo fascicolo rilevasi una: Ricerca statistico-scolastica accompagnata da alcune tabelle concernenti gli Istituti delle varie regioni della Germania e i libri di testo di Matematica (Aritm., Alg., Esercitaz. alg., geom. piana, stereometria, trigonom.) ivi adottati. Da queste ricerche risulta che di quei 400 istituti secondari la maggior parte adotta i compendi del Kambly, del Mekler, del Reidt, i trattati algebrici di Bardey, di Kambly, del Reidt; le raccolte di esercizi di Bardey, dell'Heis, dell'Hirsch..., la planimetria del Kambly, dello Spieker, del Lieber, e del Reidt. In questa statistica però non si tien conto dell'epoca in cui quei libri di testo vennero pubblicati, nè vuolsi trarre alcuna conclusione circa il merito scientifico e didattico dei medesimi. L'autore di questo articolo fa rilevare che molte scuole non hanno adottato alcun libro di testo per l'insegnamento della matematica.

2°. Il detto fascicolo contiene una recensione sopra la: Guida pratica per l'insegnamento del conteggio nelle scuole popolari di *K. Streng*.

Fasc. VII. Questo fasc. contiene, fra altre cose:

1°. Un tentativo di ricostruzione di un ponte sul Reno, conforme i Commentari. De bello Gallico di G. Cesare, di *F. Zimmerhaechel*.

---

oltrechè la discussione completa della quartica, anche la sua area, giacchè per un teorema noto, essa in generale è $\frac{\pi}{2}(m^2+n^2)$ aumentata dell'area della pedale rispetto ad O. essa è dunque $\frac{\pi}{2}(m^2+n^2+A^2+B^2)$, e nel caso particolare, del sig. B. $\frac{\pi}{2}(a^2+A^2+B^2)$.

(V. R.)

(*) Il sig. *Brocard* trova per equazione del luogo

$$d^2x^2[(x-a)^2+(y-b)^2]-(bx-ay)^2[x^2+(y-d)^2]=0$$

ma questa non rappresenta, come dice l'A., una curva del quart'ordine perchè si spezza in due fattori, il primo dei quali $(d-b)x+a(y-d)=0$ è la retta che unisce il punto luminoso A col punto B, e l'altro

$$[(d+b)x-ay](x^2+y^2)-d(ax^2+2bxy-ay^2)=0,$$

rappresenta la strofoide obliqua col punto doppio nell'origine C, passante per A, B e per la proiezione di C sopra |AB|. Allo stesso risultato si arriva subito osservando che il luogo è il prodotto dei due fasci involutori quadratici A, B *in posizione ridotta del prim'ordine*. È facile riconoscere la identità del problema di ottica geometrica trattato dal sig. Brocard con quello risoluto sinteticamente dal Prof. *Loria* nel fasc. Juin 1897 dei *Nouvelles Annales*. Il Prof. *Loria* trova la strofoide sopraindicata, ma la genera come prodotto di due fasci di raggi C, B in corrispondenza (1, 2).

(V. R.)

2°. Una recensione dell'opera di *I. P. Schmidt:* Discussioni su alcune teorie e quistioni di Aritmetica e di Algebra elementare, stampata a Triev nel 1897.

Il fasc. VIII è dedicato ad articoli di Botanica e contiene il Resoconto della riunione di naturalisti e medici, che ebbe luogo a Düsseldorf nel settembre 1898.

P. G.

Giornale di Matematica. Nov. e dic. 1898. — *Ramorino A.* Gli elementi immaginari nella geometria (continuazione e fine). — *Viterbi A.* Sui gruppi di sostituzioni a coefficienti interi appartenenti a un corpo di numeri complessi di grado finito qualunque. [Si tratta dei gruppi di sostituzioni della forma di quelle che il Fricke (Zur gruppentheoretischen Grundlegung der autormorphen Functionen, Math. An. XLII Bd) studiò soltanto nel caso in cui i loro coefficienti siano numeri interi d'un corpo reale]. — *Cazzaniga T.* Sul calcolo di qualche determinante numerico. [Si fanno delle applicazioni di due sviluppi dati dal Mangeot (Sur une méthode de développement, An. École n. 1897]. — *Palatini F.* Linee contenute nelle rigate razionali di ordine n immerse nello spazio di $n+1$ dimensioni. [Partendo dai resultati ottenuti dal Segre (*Sulle rigate razionali di uno spazio lineare qualunque*, Atti Acc. Torino 1884) si arriva a concludere che in una data rigata di ordine n e direttrice minima m si hanno tanti sistemi di dato ordine k quante sono le unità della parte intera di $\frac{k}{n-m}$, e si danno i caratteri di tali sistemi]. — *Cyp. Stéphanos.* Sur un mode de composition des déterminants et des formes bilinéaires.

Genn. e febb. 1899. — *Gallucci G.* Studio sui tetraedri biomologici con applicazioni alle configurazioni armoniche ed alla configurazione di Klein. [Viene considerata una coppia di tetraedri omologici nei due modi $\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} O$, $\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} O'$ e insieme a questa si considera un'altra coppia detta *coniugata* ed una terza detta *associata* alla data. Lo studio di queste coppie permette all'A. di stabilire nuove proprietà della configurazione armonica (per la quale trova che le rette k formano una cfz. $(72_8\ 72_8)$ di rette e quadriche tutte reali) e di quella di Klein (per la quale trova che le rette k formano una cfz. $(360_8,\ 720_{16})$ di rette e quadriche in parte immaginarie)]. — *Massarini I.* Intorno alle coniche rispetto alle quali due altre sono polari reciproche. [Contiene la determinazione, fatta per via analitica con metodo uniforme, delle 4 coniche rispetto a ciascuna delle quali due coniche date sono polari reciproche, e delle 32 coniche rispetto a ciascuna delle quali sono polari reciproche una di quelle 4 ed una delle date]. — *Gattorno G.* Sulle due curve luoghi dei centri di curvatura geodetica e di curvatura normale di una linea tracciata su una superficie. [Stabilite alcune formole preliminari, e notato il fatto importante che " la curvatura geodetica di una linea tracciata su una superficie non è che la curvatura normale cambiata di segno della stessa linea, quando questa linea la si consideri tracciata sopra una superficie ortogonale alla precedente lungo di essa ", l'A. trovasi in grado di studiare parallelamente le due curve nominate nel titolo del lavoro, 1° ricavandone le proprietà fondamentali sia nel caso generale che in casi particolari, 2° trattando il problema inverso della determinazione di una linea (descritta su una conveniente superficie) conoscendo che una data linea ne è il luogo dei centri di una curvatura geodetica o di quelli di curvatura normale]. — *Ciani E.* Sopra la configurazione di Kummer. [È una Nota destinata a sostituirne un'altra dello stesso A. pubblicata nel vol. XXXV del Giornale di Matematiche, allo scopo di esporne in altro modo una parte che conteneva una dimostrazione non del tutto rigorosa].

Marzo e aprile 1899. — *Ciani E.* Sopra la cfz. di Kummer (continuazione e fine). — *Scarpis U.* Una proprietà dei determinanti dedotta dal concetto di sostituzione. — *Marolli B.* Di una classe di funzioni finite e continue, non sviluppabili in serie di Fourier nel punto $x=0$. [Trattasi di una categoria di funzioni che differiscono sostanzialmente da quelle, dotate della stessa proprietà enunciata nel titolo, trovate dal Du Bois-Reymond, e tali da potersene dedurre, sotto certe restrizioni, una funzione, avente la detta proprietà, portata quale esempio dallo Schwarz nelle sue Lezioni]. — *De Francesco D.* Sopra alcune formole elementari di Geometria non euclidea. [L'A. si serve di facili considerazioni di Statica per ottenere con metodo più semplice di altri proposti le note formole che nella geometria iperbolica legano gli elementi di un triangolo rettilineo e per stabilire l'equazione della retta nel piano di detta geometria, riferendola a due assi ortogonali]. — *Del Prete G.* Le omografie e correlazioni permutabili fra di loro in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni. [Contiene, in forma sintetica, in parte una generalizzazione ed in parte un complemento dei risultati ottenuti, sull'argomento indicato dal titolo, dal Sannia, dal Reye, dallo Sturm, dal Segre. Il lavoro si chiuderà con un'applicazione della teoria dei gruppi continui del Lie]. — *Da Porto A.* Sulla generazione, per stelle reciproche, delle quadriche ad un numero qualunque di dimensioni. [Nel presente fascicolo trovasi soltanto la prefazione e parte dell'introduzione].

FRANCESCO PALATINI.

The Mathematical Gazette. — Il n. 16 (febbr. 1899) contiene gli articoli: *Roberts H. A.* Moto uniformemente accelerato: dimostrazione vettoriale della formola dello spazio descritto. — *Mc. Vicker C. E.* Un teorema su due lacci isoperimetrici: se due ellissi si tagliano, sono di eguale perimetro i lacci chiusi formati da archi delle due ellissi insieme con due tangenti comuni, date speciali relazioni di lunghezza di queste tangenti. — Contiene le seguenti piccole note. *Palmer J. C.* In un quadrangolo sferico gli archi congiungenti i punti di mezzo delle tre coppie di lati opposti sono concorrenti. — *Durell C. V.* e *Beard W. F.* Metodo geometrico per trisecare un angolo con un'iperbole equilatera. — Problemi. — Soluzioni. — Nella copertina contiene una breve notizia delle adunanze generali tenute dalla *Mathematical Association* (di cui esso è organo) il 15 gennaio, 6 maggio e 23 settembre 1898, coll'elenco delle memorie che vi furono lette.

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXIV, disp. 5-10. — *Volterra V.* Sopra una classe di moti permanenti stabili. — *Daniele E.* Alcune osservazioni preliminari sulla teoria del movimento delle superficie. — *Giudice F.* Angolo di due rette e di due piani; perpendicolarità e parallelismo in coordinate omogenee. — *Severini C.* Sulla rappresentazione analitica delle funzioni reali discontinue di variabili reali. — *Segre C.* Sophus Lie: cenni. — *Volterra V.* Sul flusso di energia meccanica. — *Guidi C.* Sopra un problema di elasticità. — *Fano G.* Sulle equazioni differenziali lineari che appartengono allo stesso spazio delle loro aggiunte. — *Id.* Sulle equazioni differenziali lineari del 5° e del 6° ordine le cui curve integrali sono contenute in una quadrica.

Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, serie II, anno XLVIII. — *Pieri M.* I principii della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo. — *Levi B.* Sulle varietà delle corde di una curva algebrica. — *Fano G.* I gruppi di Jonquiéry generalizzati.

R. Istituto lombardo di scienze e lettere, serie II, vol. XXXI fasc. 6-8. — *Vivanti G.* Sull'estensione del metodo di integrazione di Monge e Ampére. — *Veneroni E.* Sopra il complesso delle rette polari rispetto ad un fascio di superficie d'ordine qualunque. — *Vivanti G.* Sulle funzioni trascendenti intere. — *Tedone O.* Sulla teoria degli spazi a curvature costanti.

Atti del R. Istituto Veneto di scienze. lettere ed arti, serie VII, vol. X. — *Cassani P.* Sui fondamenti della Geometria: considerazioni e proposte. — *Palatini F.* Alcune proprietà sul sistema di superficie di ordine r passanti per gli spigoli di un $(r+1)$*edro* completo, e alcuni teoremi sulle superficie algebriche in relazione colla teoria delle polari. — *Volterra V.* Sulle funzioni poliarmoniche. — *Lauricella G.* Integrazione della doppia equazione di Laplace in un campo a forma di corona circolare.

Rendiconti della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, nuova serie vol. III, fasc. 1-3. — *Ruffini F. P.* Ricerche intorno ai momenti d'inerzia di un sistema di punti privi di baricentro. — *Pincherle S.* A proposito di un recente teorema del sig. Hadamard.

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie V, tomo VII, fasc. 3. — *Donati L.* Sulle proprietà caratteristiche dei campi vettoriali.

Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche (Sezione della società Reale di Napoli) serie III, vol. V, anno XXXVIII, fasc. 2-4. — *Siacci F.* Sulla composizione delle forze nella statica e sui suoi postulati. — *Montesano D.* La superficie romana di Steiner.

Atti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche (Società Reale di Napoli) serie II, vol. IX. — *Brambilla A.* Sopra una particolare varietà del 27° ordine nello spazio a 4 dimensioni. — *Amodeo F.* Curve k ogonali di s^{esima} specie. — *Pietrocola C.* Sull'uso dall'algoritmo isobarico nella risoluzione delle serie ricorrenti. — *Brambilla A.* I poligoni principali di una quartica gobba dotata di punto doppio. — *Cavalli C.* Le figure reciproche e la trasformazione quadratica nella simmetrica. — *Brambilla A.* Sopra una classe di superficie e di varietà razionali.

Annali di Matematica pura ed applicata (Milano) serie III, tomo II, fasc. 2-3. — *Bianchi.* Alcune ricerche di geometria non euclidee. — *Levi.* Intorno alla composizione dei punti generici delle linee singolari delle superficie algebriche. — *Cifarelli.* Le congruenze. — *Scorza.* Sopra la teoria delle figure polari delle curve piane del 4° ordine. — *Sabinina.* Sur les formules qui servent à représenter la variation d'une intregrale définie multiple sous la forme propre aux applications. — *Cazzaniga.* Appunti sulle moltiplicazioni dei determinanti normaloidi. — *Timerding.* Ueber ein quadratisches Nullsystem.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XIII, fasc. 1-2. — *De Franchis.* Riduzione dei fasci di curve piane di genere 2. — *Daniele.* Sull'equilibrio delle reti. — *Vivanti.* Sugli aggregati perfetti. — *Pizzetti.* Nuova dimostrazione di taluni teoremi relativi alle funzioni sferiche contenuti in una Nota del Prof. *Paci* (Da una lettera al Prof. *Paci*). — *Gegenbauer,* Generalizzazione di alcuni teoremi intorno alle funzioni sferiche contenuti in una nota del Prof. *Paci.* (Da una lettera al Prof. *Paci*). — *Enriques.* Una proprietà delle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica regolare. — *Alagna.* Delle congruenze binomie rispetto ad un modulo primo p e ad una potenza di esso, nel caso in cui $\frac{p-1}{2}$ sia un numero primo, ovvero il doppio di un numero primo

Il Pitagora, pubblicato dal Prof. *G. Fazzari.* Il numero 4 dell'anno V (1° semestre) contiene: Relazione sui lavori presentati pel concorso del 1898. — *Riboni.* Sulle serie ricorrenti (cont.) — *Bustelli.* La grandezza in generale e la grandezza matematica in particolare. (cont. e fine). — *Testi.* Sui problemi di massimo e minimo (cont.) — *Palatini.* La teoria detta dei segmenti proporzionali svolta indipendentemente dalle teorie delle proporzioni e dell'equivalenza mediante trattazione puramente planimetrica. — *Archimede.* Da arenae numero: trad. da A. Mancini (cont.) — Quistioni e soluzioni.

Il num. 5 contiene: *Testi.* Sui problemi di massimo o minimo (cont. e fine). — *Cardoso-Laynes,* Circonferenza, cerchio e circolo. — *Riboni.* Sulle serie ricorrenti (cont. e fine). — *Archimede.* De arenae numero: trad. da A. Mancini (cont.) — Quistioni e risoluzioni.

Il num. 6 contiene: *Bosi.* Dimostrazione di un teorema sui polinomi. — Alcune denominazioni di quadrangoli. — *Ciamberlini.* Quistioni di nomenclatura geometrica. — Esercizi. — Quistioni e soluzioni. — Temi per il concorso del 1899.

R. B.

NUOVI GIORNALI

El progreso matemático, revista de matematicas puras y aplicadas. — Dopo 4 anni di sosta il Prof. *Don Zoel G. de Galdeano* dell'Università di Saragozza ha iniziato la pubblicazione della seconda serie del suo giornale.

Riportiamo qui qualche brano del 1° articolo *Causas, objeto y programa de la actual publication,* per far conoscere ai nostri lettori lo scopo e l'indole del *Progreso.*

" Nella parte speculativa si pubblicheranno lavori di carattere generale entro " il dominio della critica scientifica che esprimano la generazione sia logica, sia " istorica della scienza, ed anche lavori sopra argomenti speciali di carattere pu- " ramente tecnico, che possano servire agli alumni delle facoltà e a quelli delle " carriere speciali come complementi dei loro studi; e infine si eserciterà la loro " attività con collezioni di problemi.

" Nell'ordine concreto sarà necessario pure discendere a trattare della orga- " nizzazione dell'insegnamento e dell'educazione scientifica, oggi eccessivamente " trascurata fra noi; e segnalare alcuni vizi o difetti della medesima e indicare " i mezzi di evitarli, sarà tanto utile quanto l'esporre le più interessanti teorie, " poichè equivarrà a facilitare il modo di impadronirsene coll'aiuto dei mezzi che, " come la sua etimologia indica, sono le vie della scienza.

" Si pubblicheranno le notizie più interessanti del movimento scientifico, sia " relative ad avvenimenti straordinari, sia concernenti individualità o corporazioni " scientifiche, invenzioni o modificazioni degne di essere menzionate nei progressi " della scienza o dell'insegnamento, ed a questo scopo il giornale destinerà una " sezione intitolata *Cronaca scientifica* ed un'altra di *Bibliografia matematica.*

" Riassumendo il nostro programma sarà: *Lo svolgimento matematico come* " *base dell'educazione scientifica* ".

Al valente matematico spagnuolo, che con tanta attività ed erudizione dà opera a diffondere nel suo paese la conoscenza di quanto si fa nel campo scientifico in tutto il mondo civile, ed in particolare anche in Italia, al forte campione della fusione della geometria piana colla solida in Spagna, il *Periodico* invia un fraterno saluto e un sincero augurio di prosperità per il suo giornale.

Lo stesso augurio invia ai Sigg. D.r O. Böklen e Dr. E. Wölffing, che hanno iniziato a Stuttgart la 2a serie delle *Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen in Auftrag des mathematisch-naturwissenschaftlichen Vereins in Württemberg,* che era sospeso da sei anni.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 24 Luglio 1899.

I NUMERI IRRAZIONALI CON METODO SINTETICO (*)

PER LA SCUOLA

1. Se A e B sono due grandezze commensurabili fra loro e C un summultiplo comune contenuto m volte in A e n volte in B, il numero, intero o frazionario, $\frac{m}{n}$ dicesi rapporto di A a B.

Consideriamo quattro grandezze in proporzione, (**)

$$A : B = C : D;$$

cioè, tali che due equisummultipli qualisivogliano di B e di D sieno contenuti lo stesso numero di volte rispettivamente in A e in C. Se A e B sono commensurabili lo sono pure C e D e i due rapporti sono eguali fra loro. Se A e B non sono commensurabili, non possono esserlo neppure C e D, tuttavia *ammetteremo,* anche in questo caso, che esista un rapporto fra la 1ª e la 2ª grandezza ed uno fra la 3ª e la 4ª e che questi rapporti sieno eguali fra loro.

Due rapporti eguali a uno stesso sono eguali fra loro.

Infatti, se hanno luogo le due proporzioni

$$A : B = C : D \qquad M : N = C : D$$

ha pur luogo l'altra $A : C = M : N$.

Due grandezze eguali hanno ad una medesima grandezza rapporti eguali e reciprocamente.

Infatti, supposto $A = B$, ha sempre luogo la proporzione

$$A : C = B : C;$$

reciprocamente, ammesso che abbia luogo questa proporzione se ne deduce $A = B$.

2. Se quattro grandezze A, B, C, D non formano proporzione, *diremo* che i rapporti di A a B e di C a D sono fra loro disuguali.

L'eguaglianza e la disuglianza di due rapporti s'escludono a vicenda evidentemente.

Se un certo summultiplo di B, ad es. l'n^{esima} parte è contenuto m volte in A, e l'n^{esima} parte di D è contenuta in C m' volte, *diremo* che il rapporto di A a B è maggiore o minore del rapporto di C a D secondochè sia $m \gtrless m'$.

(*) Nell'adunanza del 19 gennaio u. s. fra i soci di "Mathesis„ residenti in Torino, discutendosi sul modo di presentare nelle scuole secondarie la teoria dei numeri irrazionali, fu convenuto dalla maggioranza dei presenti, di dare la preferenza, anzichè a un metodo puramente aritmetico, a un metodo sintetico in cui si metta a profitto le cognizioni geometriche già acquistate dai giovani.

In favore d'un tal metodo parlarono il presidente prof. Bettazzi (per il primo) e i professori Burali-Forti, Nassò, Angeleri e Modigliano.

È in seguito a questo giudizio dell'autorevole consesso che mi sono deciso di pubblicare il presente *sunto* della Teoria dei numeri irrazionali, come la espongo da qualche anno nella scuola.

(**) Suppongo note la teoria delle proporzioni e quella dei segmenti proporzionali.

Il rapporto fra due date grandezze non può essere a un tempo maggiore e minore del rapporto fra due altre date grandezze.

Infatti, se nell'esempio ora considerato è $m > m'$, la grandezza A è minore di quella L che sodisfa alla proporzione

$$L : B = C : D$$

(giacchè L deve contenere l' n^{esima} parte di B soltanto m' volte): se in pari tempo esistessero due equisummultipli di B e di D, ad es. le q^{esime} parti, contenuti il 1° p volte in A e il 2° p' volte in C e fosse $p < p'$, dovrebbe essere A minore della stessa grandezza L. Non potendo essere A maggiore e minore di L, non è ammissibile che possano verificarsi contemporaneamente i due casi $m > m'$, $p < p'$.

Quando le quattro date grandezze A, B, C, D sono segmenti o poligoni, si può sempre *praticamente* giudicare se il rapporto fra la 1ª e la 2ª sia maggiore, minore o eguale a quello fra la 3ª e la 4ª, confrontando la A con L.

Se le grandezze date sono (almeno due) angoli o archi, quest'operazione grafica non può sempre farsi, perchè in generale non sappiamo costruire un angolo quarto proporzionale rispetto a tre angoli dati. Per la teoria basta sapere però che un tale angolo esiste, il che può dimostrarsi o col mezzo delle classi contigue o colla considerazione degli archi rettificati.

COROLLARI. — *Dati due rapporti, necessariamente, o essi sono eguali o il 1° è maggiore del 2° o il 2° è maggiore del 1° e ognuno di questi casi esclude gli altri due.*

Se di tre rapporti il 1° è maggiore o eguale al 2° e il 2° è maggiore del 3°, anche il 1° è maggiore del 3°.

Due grandezze disuguali hanno ad una medesima grandezza rapporti disuguali ed è maggiore quello corrispondente alla grandezza maggiore e reciprocamente.

Infatti, se $A > B$, un summultiplo qualsiasi di C che sia minore della differenza $A - B$ è contenuto più volte in A che in B, e perciò il rapporto di A a C è maggiore di quello di B a C; reciprocamente, se un certo summultiplo di C è contenuto più volte in A che in B è manifestamente $A > B$.

3. Il concetto di rapporto, fra grandezze incommensurabili, può dirsi così completamente definito; infatti, con un postulato se n'è ammessa l'esistenza e con appropriate definizioni si sono poi stabilite le condizioni d'eguaglianza e di disuglianza in modo tale da render sodisfatte le leggi fondamentali comuni a tutti gli altri enti aritmetici, geometrici e fisici che nella scienza si considerano.

I rapporti fra grandezze incommensurabili sono grandezze che appartengono alla classe dei numeri. (*)

(*) BETTAZZI, *Teoria delle grandezze.*

Questi nuovi numeri diconsi *irrazionali* per distinguerli dagli altri, interi e frazionari (esprimenti rapporti fra grandezze commensurabili) i quali diconsi *razionali*. I numeri irrazionali non hanno un sistema speciale di numerazione, ma s'indicano mediante simboli particolari, che variano a seconda della categoria cui essi appartengano, come vedremo ai §§ 10-16.

Il rapporto d'una grandezza a quella della sua specie, assunta come unità, dicesi *misura*, o *valore* di quella grandezza, o numero ad essa *corrispondente*.

A ogni grandezza corrisponde un numero; a grandezze eguali, riferite a una medesima unità, corrispondono numeri eguali e reciprocamente; a grandezza maggiore corrisponde numero maggiore e reciprocamente.

4. *Addizione.* — Date due o più grandezze omogenee, la misura della loro somma *dicesi* somma delle loro misure.

Poichè l'addizione delle grandezze è un'operazione commutativa e associativa, lo stesso sarà dell'addizione dei numeri che le rappresentano.

Sottrazione. — Date due grandezze omogenee disuguali, la misura della loro differenza *dicesi* differenza delle loro misure.

Poichè la differenza fra due grandezze omogenee disuguali esiste sempre, altrettanto dovrà dirsi della differenza fra due dati numeri qualunque disuguali.

La differenza fra due numeri eguali s'indica con 0.

Aggiungendo alla differenza fra due numeri il sottraendo, si ottiene il minuendo.

5. *Moltiplicazione.* — Data una grandezza A e un numero b, *dicesi* prodotto di A per b quella grandezza P il cui rapporto ad A è eguale a b; essa deve dunque sodisfare alla proporzione

$$P : A = B : U,$$

ove B è la grandezza che ha alla sua unità U un rapporto indicato da b. Si suole scrivere $P = A \,.\, b$.

La grandezza prodotto è sempre omogenea al moltiplicando, in alcuni casi si sa geometricamente costruire, in altri no; però essa esiste sempre ed è unica.

Grandezze eguali moltiplicate per numeri eguali danno prodotti eguali e grandezze disuguali prodotti disuguali, ed è maggiore quello corrispondente alla grandezza maggiore.

Infatti, se $P = A \,.\, b$, $P' = A' \,.\, b$, dovendo aver luogo le due proporzioni $P : A = B : U$, $P' : A' = B : U$ ha pur luogo l'altra $P : A = P' : A'$ dalla quale ricavasi che se $A = A'$ anche $P = P'$, se $A > A'$ anche $P > P'$.

Grandezze eguali moltiplicate per numeri disuguali danno prodotti disuguali, ed è maggiore quello corrispondente al moltiplicatore maggiore.

Infatti, se $P = A . b$, $P' = A . b'$, dovendo aver luogo le due proporzioni $P : A = B : U$, $P' : A = B' : U$, ha pur luogo l'altra $P : P' = B : B'$, dalla quale ricavasi che se $B > B'$ (cioè $b > b'$) è anche $P > P'$.

Moltiplicando una grandezza successivamente per due numeri si ottiene un prodotto che non cambia invertendo l'ordine dei due moltiplicatori.

Sia A la grandezza moltiplicando, b e c i due moltiplicatori, misure rispettive delle due grandezze B e C rispetto alle loro unità U e V. Ponendo $P = A . b$ e $P' = A . c$, abbiamo

$$P : A = B : U \qquad P' : A = C : V ;$$

e ponendo

$$R = P . c = A . b . c \qquad R' = P' . b = A . c . b ,$$

abbiamo

$$R : P = C : V \qquad R' : P' = B : U .$$

Ora, dalle proporzioni 1ª e 4ª deducesi $P : A = R' : P'$, e dalla 2ª e 3ª $P' : A = R : P$, e da queste due $R = R'$, *c . v . d.*

Se i moltiplicatori sono più di due si può invertire l'ordine di due consecutivi qualunque, e in conseguenza disporli tutti quanti in ordine arbitrario.

La misura del prodotto d'una grandezza per un numero *dicesi* prodotto della misura di quella grandezza per questo numero.

Se uno dei due fattori d'un prodotto diviene eguale a zero anche il prodotto *si pone* eguale a zero.

Il prodotto di due dati numeri non cambia invertendo l'ordine dei fattori.

Sieno a e b i due dati numeri, misure rispettive delle grandezze A e B (omogenee o no) riferite alle unità U e V. Ponendo $P = A . b$ $R = B . a$, avremo

$$P : A = B : V , \qquad R : B = A : U ;$$

scrivendo i termini della 2ª in ordine inverso otteniamo una proporzione che ha i medi ordinatamente eguali a quelli della 1ª, e perciò dalle due proporzioni deducesi quest'altra

$$P : U = R : V ,$$

la quale appunto significa (essendo P omogeneo con A e R con B) che la misura di P, ossia $a . b$, è eguale alla misura di R, ossia a $b . a$, *c . v . d.*

Il prodotto di parecchi numeri è indipendente dall'ordine dei fattori.

Avendo già dimostrato che la grandezza prodotto $A . b . c . d \ldots$ non cambia mutando l'ordine dei moltiplicatori, si può intanto concludere che neppure la sua misura, cioè il numero $(a . b . c . d \ldots)$, cambia al cambiare dell'ordine dei fattori che vengono dopo il primo. Che esso poi rimanga inalterato anche scambiando fra loro i primi due fattori (e perciò anche scambiando il 1º con un altro qualunque) resulta dal teorema precedente relativo a un prodotto di due fattori.

Il prodotto della somma di più grandezze per un numero è eguale alla somma dei prodotti di quelle grandezze per questo numero.

Poniamo

$$P = (A + B + C + \ldots) m$$

e

$$P_1 = A \, . \, m \qquad P_2 = B \, . \, m \qquad P_3 = C \, . \, m \ldots$$

Indicando con M una grandezza (omogenea alle altre date) corrispondente ad m rispetto all'unità U, si ha

$$P_1 : A = M : U \, , \qquad P_2 : B = M : U \, , \qquad P_3 : C = M : U \ldots ,$$

dalle quali, dopo aver scambiato di posto i medi, deducesi

$$(P_1 + P_2 + P_3 + \ldots) : M = (A + B + C + \ldots) : U ,$$

e da questa

$$P_1 + P_2 + P_3 + \ldots = (A + B + C + \ldots) \, . \, m \, , \qquad c. v. d.$$

Se con $a, b, c \ldots m$ indichiamo dei numeri qualsiensi, si ha dunque

$$(a + b + c + \ldots) \, . \, m = a \, . \, m + b \, . \, m + c \, . \, m + \ldots$$

6. *Divisione.* — Data una grandezza A e un numero b, *dicesi* quoziente di A per b quella grandezza Q che moltiplicata per b dà per prodotto A; essa deve dunque sodisfare alla proporzione

$$A : Q = B : U ,$$

ove B è una grandezza il cui valore, rispetto a U, è uguale a b.

In alcuni casi, la grandezza quoziente la sappiamo geometricamente costruire, in altri no; però essa esiste sempre ed è unica.

La misura del quoziente d'una grandezza per un numero *chiamasi* quoziente della misura di quella grandezza per questo numero.

Se q è la misura della grandezza quoziente Q, a la misura del dividendo A e b il divisore, dall'eguaglianza

$$A = Q \, . \, b$$

si passa all'altra

$$a = q \, . \, b \, ;$$

e perciò può anche, aritmeticamente, definirsi il quoziente di due numeri, quel terzo numero che moltiplicato per il divisore dà per prodotto il dividendo.

Da questa definizione (o proprietà) del quoziente e dai teoremi sulla moltiplicazione, collo stesso metodo che si usa in aritmetica pei numeri razionali, si possono estendere ai numeri irrazionali i teoremi relativi alla divisione d'un prodotto per un numero, d'un numero per un prodotto, d'una somma o d'una differenza per un numero, non che il teorema secondo il quale il quoziente di due numeri non cambia moltiplicando o dividendo l'uno e l'altro per un medesimo numero.

7. *Il rapporto fra due grandezze è uguale al quoziente delle loro misure.*

Infatti, se r è il rapporto fra due date grandezze A e B, ed a e b sono le respettive loro misure, essendo (§ 5) $A=B.r$ è pure $a=b.r=r.b$ e perciò $r=a:b$, *c. v. d....*

8. Il quoziente di due numeri a e b suol indicarsi, in generale, colla scrittura $\frac{a}{b}$. Per *convenzione* ha dunque sempre luogo l'eguaglianza

$$\frac{a}{b}.b=a,$$

e *per conseguenza*, le regole delle operazioni sulle frazioni a termini irrazionali sono le stesse di quelle relative alle frazioni a termini razionali.

9. Se A, B, C, D sono quattro grandezze in proporzione e a, b, c, d sono le respettive loro misure, si ha (§ 1, 7)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Categorie notevoli di numeri irrazionali.

10. Se C e C' sono i segmenti equivalenti rispettivamente ai due circoli di raggi R e R', ha luogo, com'è noto, la proporzione

$$C:C'=R:R'$$

e perciò anche l'altra

$$C:2R=C':2R',$$

la quale significa che il rapporto d'un cerchio (rettificato) al suo diametro è *costante*. Questo rapporto, che *Lambert* nel 1770 dimostrò essere un numero irrazionale, viene indicato colla lettera π.

11. Dato un numero qualunque a, razionale o irrazionale, esso esprimerà la misura d'un certo segmento A rispetto a un altro arbitrario U, preso come unità. Se immaginiamo di costruire con questi due segmenti il rettangolo e poi il quadrato equivalente, sarà il lato del quadrato un segmento B medio proporzionale fra A e U, e perciò se con b indichiamo la sua misura, avremo (§ 9)

$$a:b=b:1$$

da cui,

$$b^2=a.$$

Il numero b chiamasi la *radice quadrata* di a e s'indica col simbolo $\sqrt{a}$.

Questo simbolo serve dunque ad esprimere la misura del lato del quadrato equivalente al rettangolo costruito sul segmento rappresentato dal radicando e su quello unità. Non sarà inutile far vedere che la misura del lato d'un tal quadrato è indipendente dalla scelta del segmento unità. Se A è il segmento rappresentato dal numero a rispetto all'unità U e A' quello rappresentato dallo stesso numero rispetto ad U', abbiamo $A : U = A' : U'$ e perciò i due rettangoli (A, U) (A', U') sono simili. Se L^2 e L'^2 sono i quadrati ad essi equivalenti abbiamo dunque

$$(A, U) : (A', U') = U^2 : U'^2 = L^2 : L'^2$$

da cui deducesi

$$L : L' = U : U'$$

e infine

$$L : U = L' : U', \ c. v. d.$$

12. Un'altra categoria di numeri irrazionali ha origine dalla considerazione dei rapporti che hanno fra loro i lati d'un medesimo triangolo rettangolo.

Questi rapporti, che variano soltanto al variare degli angoli del triangolo, diconsi *funzioni goniometriche*. Qualche volta essi hanno valori razionali ma più spesso valori irrazionali. Se α indica la misura d'uno degli angoli (acuti) d'un triangolo rettangolo, queste funzioni si rappresentano colle notazioni: $\text{sen}\,\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{tang}\,\alpha$, $\text{cotang}\,\alpha$, $\sec\alpha$, $\text{cosec}\,\alpha$, secondochè si vuol rappresentare il rapporto che ha il cateto opposto o il cateto adiacente (ad α) all'ipotenusa, o il rapporto dei due cateti, oppure i rapporti inversi dei primi due.

13. Vi sono poi altre importanti categorie di numeri irrazionali che hanno un'origine puramente aritmetica.

Per intendere come ciò possa avvenire, conviene anzitutto stabilire le proposizioni seguenti:

I numeri corrispondenti agli elementi di due classi contigue (di grandezze) *formano due classi che sono contigue.*

Ciò resulta immediatamente dalla nota definizione di classi contigue e dal concetto di numeri eguali e differenti (§ 3).

Date due classi contigue di numeri, esiste un numero ed uno solo maggiore di tutti gli elementi dell'una e minore di tutti quelli dell'altra.

Ciò discende dalle analoghe proposizioni (postulato e teorema) relative alle classi di grandezze.

Ogni numero irrazionale è compreso fra due classi contigue di numeri razionali.

Infatti, se a è un numero irrazionale e A la grandezza da esso rappresentata, incommensurabile coll'unità U, le due classi contigue $\frac{m}{n}U$, $\frac{m+1}{n}U$ (con n e per conseguenza anche m crescenti indefinitamente) comprendono A, e perciò le due classi $\frac{m}{n}$, $\frac{m+1}{n}$ comprendono a.

14. Sia a un dato numero, razionale o irrazionale; se indichiamo con V, W, le due classi di numeri formate colle radici n^{esime} di a, approssimate per difetto e per eccesso, le due classi V, W sono contigue, e perciò comprendono un numero b razionale o irrazionale. Ma anche le due classi V^n, W^n sono contigue (*) e comprendono a e comprendono b^n, sarà dunque

$$b^n = a.$$

Il numero b si chiama radice n^{esima} di a, e si indica col simbolo $\sqrt[n]{a}$.

In questo modo resta stabilito che ogni numero ammette la radice (esatta) di qualsiasi ordine, la quale, se non è un numero intero o frazionario, è un numero irrazionale che esprime la misura della grandezza limite comune di quelle rappresentate dalle radici approssimate del radicando. (**)

15. Sieno dati un numero qualsiasi a (differente da 1) e uno irrazionale b; se indichiamo con V, W una di quelle coppie di classi contigue di numeri razionali che comprendono b, e consideriamo le due classi

$$a^{v}\ ,\ a^{w}\ ,$$

per le note proprietà delle funzioni esponenziali, se ne inferisce che anche queste due classi sono contigue e individuano per conseguenza un numero c. Questo numero non può essere eguale a una potenza di a ad esponente *razionale*, perchè un tal esponente, dovendo essere compreso fra V ed W, non esiste, e perciò si stabilisce per convenzione l'eguaglianza

$$c = a^b\ .$$

Il nuovo simbolo a^b chiamasi *potenza ad esponente irrazionale.* (***) Con a^b s'intende dunque di rappresentare la misura di quella grandezza limite comune delle grandezze rappresentate dagli elementi delle due classi contigue a^v, a^w.

16. Dopo aver dimostrato che la funzione a^b gode le stesse proprietà, ed è sottoposta alle stesse regole di calcolo, tanto che b vari per valori razionali che irrazionali, si dimostra che l'equazione

$$a^b = c,$$

nella quale a e c sono due *dati* numeri qualsiensi (a differente da 1), ammette sempre una ed una sola radice (reale).

Il valore di questa radice, che in certi casi può essere razionale ma più spesso è irrazionale, chiamasi logaritmo di c in base a, e si indica colla notazione $\log_a c$.

Altri numeri irrazionali notevoli s'incontrano nello studio della Matematica superiore.

Pistoia, Giugno 1899. SILVIO SBRANA.

(*) Infatti, essendo

$$w_x^n - v_y^n = (w_x - v_y)(w_x^{n-1} + v_y w_x^{n-2} + \ldots + v_y^{n-1}) < (w_x - v_y)\, n w_x$$

la differenza $w_x^n - v_y^n$ decresce indefinitamente insieme alla differenza $w_x - v_y$.

(**) Giunti a questo punto, nella scuola, converrà svolgere la teoria dei radicali, quella delle potenze ad esponente frazionario e le proprietà della funzione esponenziale con esponente razionale.

(***) Se $a = 1$, le due classi a^v, a^w non sono contigue, perchè composte d'elementi tutti eguali a 1; per questo caso non vale la definizione generale ma l'altra particolare $a^b = 1$

SOPRA UN METODO

per formare alcune combinazioni di elementi a più indici dette combinazioni ad 1, 2, 3 .... dimensioni

Studiando le proprietà di alcuni enti algebrici, dei quali forse tratterò in altra nota, ho dovuto occuparmi di alcune combinazioni di elementi a più indici, delle quali sono caso particolare quelle studiate nell'ordinaria analisi combinatoria. In questa nota mi propongo di definire tali combinazioni, ed indicare un metodo per formarle tutte senza ripetizioni od omissioni.

Consideriamo mn elementi $a_{11} \dots a_{1n}$, $a_{21} \dots a_{2n} \dots a_{m1} \dots a_{mn}$ ed $m+n$ numeri positivi interi $\mu_1, \dots \mu_m$, $\nu_1, \dots \nu_n$, tali che $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n = N$; $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_m \leq n$; $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_n \leq m$. Proponiamoci di formare tutti i possibili gruppi G, contenenti ciascuno N elementi, dei quali μ_i abbiano il 1° indice uguale ad i, e ν_j abbiano il 2° uguale ad j ($i = 1, 2, \dots m$; $j = 1, 2, \dots n$). Per esempio se fosse $m = 3$, $n = 4$; $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 2$; $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 2$, $\nu_3 = 2$, $\nu_4 = 1$, fra i possibili gruppi di $N = 6$ elementi vi sarebbero i seguenti: $a_{14} a_{21} a_{22} a_{23} a_{32} a_{33}$, $a_{11} a_{22} a_{23} a_{24} a_{32} a_{33}$, $a_{12} a_{21} a_{22} a_{23} a_{33} a_{34}$, ecc.... Immaginiamo ora uno scacchiere rettangolare di dimensioni $\updownarrow m$ ed $\rightarrow n$, e deponiamo l'elemento a_{ij} nella casella appartenente all'orizzonte i^{ma} ed alla verticale j^{ma}. Ad ogni gruppo G di elementi corrisponde un gruppo G' di caselle, scelte nello scacchiere per modo che se ne trovino $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_m$ rispettivamente sulla 1ª, 2ª ... m^{ma} orizzontale, e $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_n$ rispettivamente sulla 1ª, 2ª, ... n^{ma} verticale; è poi evidente che ad ogni gruppo G' corrisponde un gruppo G; pertanto i gruppi G' di caselle si possono assumere come gruppi rappresentativi dei gruppi G di elementi. Appunto per la possibilità di essere rappresentati mediante gruppi di caselle scelte in uno scacchiere rettangolare, i gruppi G si chiameranno combinazioni a due dimensioni, od anche rettangolari, degli mn elementi dati. I numeri m ed n si diranno prima e seconda dimensione di tali combinazioni; i numeri $\mu_1, \dots \mu_m$, 1°, ... m^{mo} coefficiente relativo alla 1ª dimensione, i numeri $\nu_1, \dots \nu_n$; 1°, ... n^{mo} coefficiente relativo alla 2ª. (*)

Risulta da quanto si è detto che per sapere formare i gruppi G basta saper formare i gruppi G' e viceversa.

(*) Poichè qui si parla di combinazioni a due dimensioni, è naturale il chiedersi che debba intendersi per combinazioni ad una dimensione. Supponiamo $m = 1$. Allora le combinazioni suddette non sono altro che le combinazioni μ_1 a μ_1 degli elementi $a_{11}, \dots a_{1n}$; in tal caso evidentemente si ricade nelle usuali combinazioni, e poichè per gruppi rappresentativi di esse possono assumersi i gruppi di μ_1 caselle, scelte in tutti i modi possibili fra n assegnate disposte in fila, tali combinazioni possono chiamarsi ad una dimensione, od anche lineari. Il numero n è la loro dimensione, il numero μ_1 il coefficiente di essa.

Consideriamo la successione S dei numeri $\nu_1, \ldots \nu_n$; scegliamo in essa un gruppo di μ_1 numeri in tutti i modi possibili, e formiamo una seconda successione di numeri, deducendola dalla S col diminuire di un'unità i numeri appartenenti al gruppo considerato. Avremo così $\binom{n}{\mu_1}$ successioni che chiameremo successioni S_{μ_1}. In ciascuna di queste scegliamo in tutti i modi possibili μ_2 numeri fra quelli che non sono nulli, e deduciamo da essa una $S_{\mu_1\mu_2}$, diminuendo i numeri scelti di un'unità. Su ognuna delle $S_{\mu_1\mu_2}$ operiamo analogamente, ma relativamente al numero μ_3, e così via. Avremo così altre serie di successioni $S_{\mu_1\mu_2\mu_3}, \ldots S_{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_m}$. Consideriamo ora le $S_{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_m}$; mostreremo che esse sono composte di tutti zero e che il loro numero è eguale a quello dei gruppi G′. Infatti una qualunque delle $S_{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_m}$ si ottiene diminuendo dapprima in S di un'unità μ_1 numeri aventi certi posti $\alpha_1 \ldots \alpha_{\mu_1}$, poi diminuendo di un'unità nella successione ottenuta μ_2 numeri aventi i posti $\beta_1, \ldots \beta_{\mu_2}$ ecc. ecc.

Pertanto le unità complessivamente tolte dalla S per passare ad una $S_{\mu_1 \ldots \mu_m}$ sono $\mu_1 + \cdots + \mu_m$, cioè tante quante ne contiene la somma dei numeri della S. Adunque la somma dei numeri di ogni $S_{\mu_1 \ldots \mu_m}$ è zero vale a dire ogni $S_{\mu_1 \ldots \mu_m}$ è formata da tutti zero.

Scegliamo ora nella 1ª orizzontale dello scacchiere le caselle aventi i posti $\alpha_1 \ldots \alpha_{\mu_1}$, nella 2ª quelle aventi i posti $\beta_1 \ldots \beta_{\mu_2}$ ecc. ...; avremo uno dei gruppi di caselle precedentemente indicati con G′. In vero, se la $S_{\mu_1 \ldots \mu_m}$ considerata contiene soli zero, vuol dire che in qualcheduna di quelle fra le $S_{\mu_1}, S_{\mu_1\mu_2}, \ldots S_{\mu_1 \ldots \mu_{m-1}}$ dalle quali è stata dedotta, compariranno al posto i^{mo} $(i = 1, 2, \ldots n)$ i numeri $\nu_i - 1, \nu_i - 2, \ldots 1$, e quindi delle caselle del gruppo suddetto ce ne saranno appunto ν_i sulla i^{ma} verticale dello scacchiere. Viceversa si comprende facilmente che, in corrispondenza di ogni gruppo G′, è possibile costrurre una serie di successioni, la 1ª appartenente alle S_{μ_1}, la 2ª alle $S_{\mu_1\mu_2}, \ldots$ l'ultima alle $S_{\mu_1 \ldots \mu_m}$ dedotte, ciascuna dalla precedente, colla legge ora esposta; pertanto vi sono tanti gruppi G′ quante $S_{\mu_1 \ldots \mu_m}$. Da quanto ho detto risulta subito come devesi procedere per formare tutti i gruppi G′ senza ripetizione od ommissione; basta formare le $S_{\mu_1 \ldots \mu_m}$ ad elementi tutti nulli ed in corrispondenza a ciascuna d'esse, formare il gruppo G′ al quale dà luogo. La formazione delle $S_{\mu_1 \ldots \mu_m}$ non offre difficoltà; giova anche osservare che da una $S_{\mu_1 \ldots \mu_k}$ non si può passare ad una $S_{\mu_1 \ldots \mu_k \mu_{k+1}}$, se quella non contiene almeno μ_{k+1} numeri diversi da zero. È poi evidente che invece di partire dalla successione $\nu_1 \ldots \nu_n$ ed ottenere le $S_{\mu_1}, \ldots S_{\mu_1 \ldots \mu_m}$, si può partire dalla successione $\mu_1, \ldots \mu_m$, ed ottenere le $S_{\nu_1}, \ldots S_{\nu_1 \ldots \nu_n}$; il numero delle $S_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ composte di tutti zeri è anch'esso uguale al numero dei gruppi G′.

Credo non inutile illustrare il metodo esposto con qualche esempio.

Sia $n = 5$; $m = 3$; $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 1$, $\nu_3 = 1$, $\nu_4 = 2$, $\nu_5 = 2$; $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 4$.

Si ha $$S \equiv 2, 1, 1, 2, 2$$

$$S_{\mu_1} \equiv \left\{ \begin{matrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & \mathbf{0} & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & \mathbf{0} & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & \mathbf{1} & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & \mathbf{1} \end{matrix} \right.$$

(per ciascuna delle S_{μ_1} sono segnati in carattere grande i numeri che si ottengono diminuendo di 1 quelli che occupano in S lo stesso posto).

Poichè ciascuna delle S_{μ_1} così ottenute contiene almeno $\mu_2 = 3$ elementi diversi da zero, si possono dedurre da essa delle $S_{\mu_1\mu_2}$; di quest'ultime quelle che servono devono contenere almeno $\mu_3 = 4$ elementi diversi da zero, e sono, come è facile verificare:

$$S_{\mu_1\mu_2} \equiv \left\{ \begin{matrix} 1\,1\,\mathbf{0}\,\mathbf{1}\,\mathbf{1},\ 1\,\mathbf{0}\,1\,\mathbf{1}\,\mathbf{1},\ \mathbf{0}\,1\,1\,\mathbf{1}\,\mathbf{1} & \text{dedotte dalla } 1^a \text{ delle } S_{\mu_1} \\ \mathbf{1}\,0\,1\,\mathbf{1}\,\mathbf{1} & \text{»} \quad 2^a \quad \text{»} \\ \mathbf{1}\,1\,0\,\mathbf{1}\,\mathbf{1} & \text{»} \quad 3^a \quad \text{»} \\ \mathbf{1}\,\mathbf{0}\,1\,1\,\mathbf{1},\ \mathbf{1}\,1\,\mathbf{0}\,1\,\mathbf{1},\ \mathbf{1}\,1\,1\,\mathbf{0}\,\mathbf{1} & \text{»} \quad 4^a \quad \text{»} \\ \mathbf{1}\,\mathbf{0}\,1\,1\,1,\ \mathbf{1}\,1\,\mathbf{0}\,\mathbf{1}\,1,\ \mathbf{1}\,1\,1\,\mathbf{1}\,\mathbf{0} & \text{»} \quad 5^a \quad \text{»} \end{matrix} \right.$$

(per ciascuna $S_{\mu_1\mu_2}$ sono segnati in carattere grande i numeri ottenuti diminuendo di 1 quelli che occupano lo stesso posto nella S_{μ_1} dalla quale derivano).

Da ciascuna delle $S_{\mu_1\mu_2}$ si può ottenere una sola $S_{\mu_1\mu_2\mu_3}$, e questa ha elementi tutti nulli, giacchè ogni $S_{\mu_1\mu_2}$ ha quattro elementi diversi da zero e tutti uguali ad 1.

Dunque le $S_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ ad elementi tutti nulli sono in numero di 11, e quindi anche i gruppi G' sono 11. Scriviamo ciascuna delle $S_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ ad elementi nulli e sovr'essa la $S_{\mu_1\mu_2}$ e la S_{μ_1} dalle quali proviene. Avremo i quadri

$$\left. \begin{matrix} \mathbf{1}\,1\,1\,2\,2 \\ 1\,1\,\mathbf{0}\,\mathbf{1}\,\mathbf{1} \\ \mathbf{0}\,\mathbf{0}\,0\,\mathbf{0}\,\mathbf{0} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \mathbf{1}\,1\,1\,2\,2 \\ 1\,\mathbf{0}\,1\,\mathbf{1}\,\mathbf{1} \\ \mathbf{0}\,0\,\mathbf{0}\,\mathbf{0}\,\mathbf{0} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \mathbf{1}\,1\,1\,2\,2 \\ \mathbf{0}\,1\,1\,\mathbf{1}\,\mathbf{1} \\ 0\,\mathbf{0}\,\mathbf{0}\,\mathbf{0}\,\mathbf{0} \end{matrix} \right\} \text{ provenienti dalla } \mathbf{1}\,1\,1\,2\,2$$

$$\left. \begin{matrix} 2\,\mathbf{0}\,1\,2\,2 \\ \mathbf{1}\,0\,1\,\mathbf{1}\,\mathbf{1} \\ \mathbf{0}\,0\,\mathbf{0}\,\mathbf{0}\,\mathbf{0} \end{matrix} \right\} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 2\,\mathbf{0}\,1\,2\,2$$

$$\left. \begin{matrix} 2\,1\,\mathbf{0}\,2\,2 \\ \mathbf{1}\,1\,0\,\mathbf{1}\,\mathbf{1} \\ \mathbf{0}\,\mathbf{0}\,0\,\mathbf{0}\,\mathbf{0} \end{matrix} \right\} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 2\,1\,\mathbf{0}\,2\,2$$

$$\left. \begin{matrix} 2\,1\,1\,\mathbf{1}\,2 \\ \mathbf{1}\,\mathbf{0}\,1\,1\,\mathbf{1} \\ \mathbf{0}\,0\,\mathbf{0}\,\mathbf{0}\,\mathbf{0} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2\,1\,1\,\mathbf{1}\,2 \\ \mathbf{1}\,1\,\mathbf{0}\,1\,\mathbf{1} \\ \mathbf{0}\,\mathbf{0}\,0\,\mathbf{0}\,\mathbf{0} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2\,1\,1\,\mathbf{1}\,2 \\ \mathbf{1}\,1\,1\,\mathbf{0}\,\mathbf{1} \\ \mathbf{0}\,\mathbf{0}\,\mathbf{0}\,0\,\mathbf{0} \end{matrix} \right\} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 2\,1\,1\,\mathbf{1}\,2$$

$$\left. \begin{matrix} 2\,1\,1\,2\,\mathbf{1} \\ \mathbf{1}\,\mathbf{0}\,1\,1\,1 \\ \mathbf{0}\,\mathbf{0}\,\mathbf{0}\,\mathbf{0}\,\mathbf{0} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2\,1\,1\,2\,\mathbf{1} \\ \mathbf{1}\,1\,\mathbf{0}\,\mathbf{1}\,1 \\ \mathbf{0}\,\mathbf{0}\,0\,\mathbf{0}\,\mathbf{0} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2\,1\,1\,2\,\mathbf{1} \\ \mathbf{1}\,1\,1\,\mathbf{1}\,\mathbf{0} \\ \mathbf{0}\,\mathbf{0}\,\mathbf{0}\,\mathbf{0}\,0 \end{matrix} \right\} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 2\,1\,1\,2\,\mathbf{1}$$

che diremo quadri rappresentativi dei gruppi G' e G. (Nella $S_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ ad elementi tutti nulli di ciascuno dei quadri, sono segnati in carattere grande i numeri (zeri) che si ottengono diminuendo di un'unità quelli che nella $S_{\mu_1\mu_2}$ soprastante occupano lo stesso posto).

In corrispondenza di ciascun quadro si ottiene un gruppo G' scegliendo nello scacchiere di dimensioni $\downarrow$ 3 e $\rightarrow$ 5 le caselle aventi il posto che nei quadri è occupato dai numeri scritti in carattere grande, e si ottiene un gruppo G scegliendo otto delle $a_{11}, \ldots a_{15}, a_{21}, \ldots a_{25}, a_{31}, \ldots a_{35}$, in modo che ciascuna abbia per indice i numeri d'ordine dell'orizzontale e verticale del quadro che s'incontrano in uno degli otto numeri segnati in carattere grande.

Tutti i gruppi G sono adunque i seguenti:

$$\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\
a_{11} & a_{22} & a_{24} & a_{25} & a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\
a_{11} & a_{21} & a_{24} & a_{25} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\
a_{12} & a_{21} & a_{24} & a_{25} & a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\
a_{13} & a_{21} & a_{24} & a_{25} & a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\
a_{14} & a_{21} & a_{22} & a_{25} & a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\
a_{14} & a_{21} & a_{23} & a_{25} & a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\
a_{14} & a_{21} & a_{24} & a_{25} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\
a_{15} & a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\
a_{15} & a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\
a_{15} & a_{21} & a_{24} & a_{25} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}
\end{array}$$

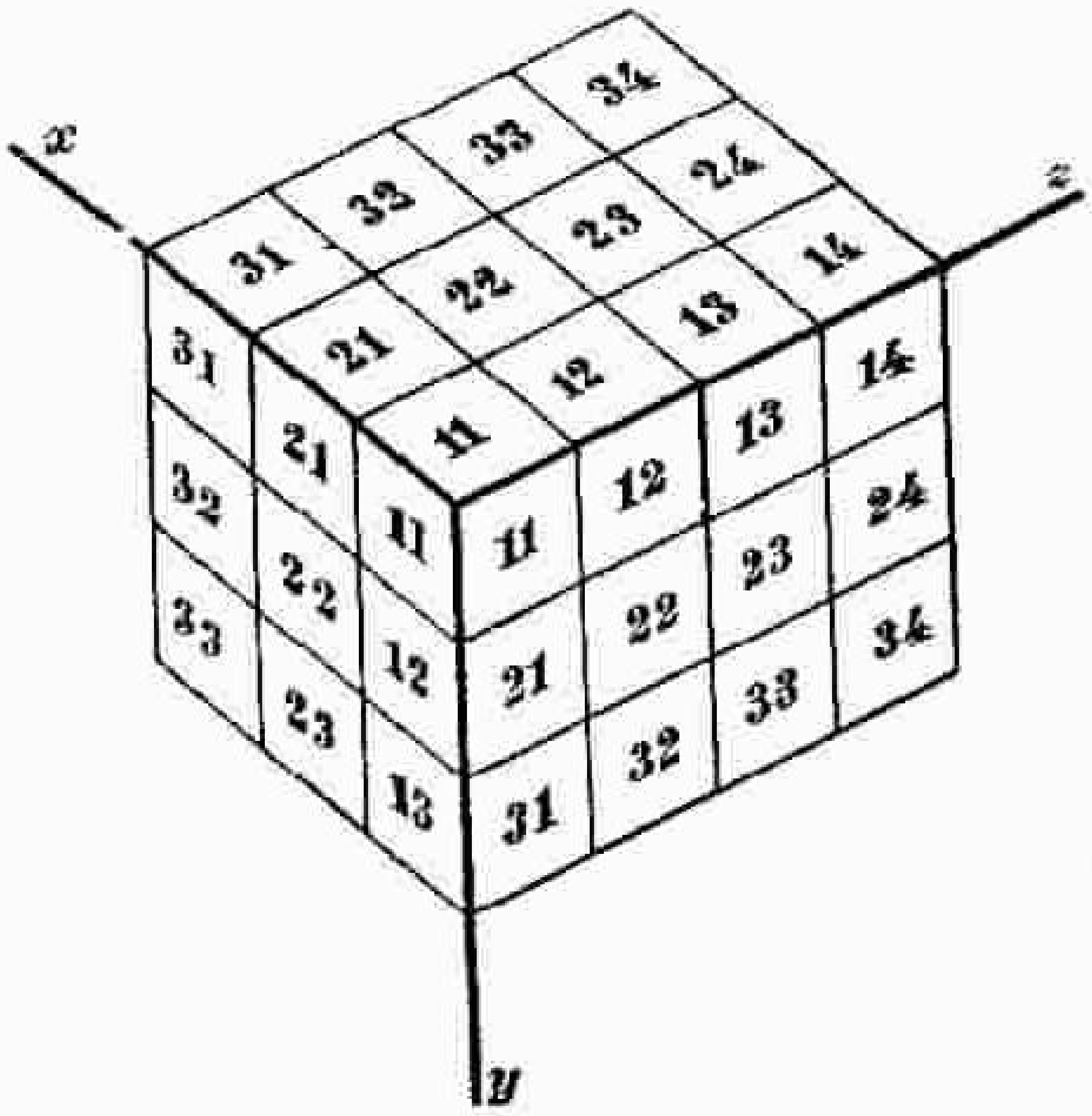
Estendendo oltre le due dimensioni il concetto di combinazione, noi incontriamo subito quelle a tre dimensioni. Per intender bene la definizione che ne daremo fra breve, consideriamo l'esempio seguente. Siano $3 \, . \, 3 \, . \, 4 = 36$ elementi a_{xyz} $(x = 1, 2, 3; y = 1, 2, 3; z = 1, 2, 3, 4)$.

Consideriamo il gruppo γ dei 22 elementi

$$\gamma \equiv \begin{cases} a_{113} & a_{122} & a_{123} & a_{124} & a_{131} & a_{132} & a_{134} & a_{211} & a_{212} & a_{214} & a_{222} \\ a_{231} & a_{233} & a_{234} & a_{311} & a_{314} & a_{321} & a_{323} & a_{324} & a_{332} & a_{333} & a_{334} \end{cases}$$

Esaminandolo, si vede che le coppie di indici 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33, sono le coppie del 1° e 2° indice rispettivamente in 1, 3, 3, 3, 1, 3, 2, 3, 3 elementi di esso; le coppie 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, sono le coppie del 1° e 3° indice rispettivamente in 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 3 elementi, e le coppie 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24; 31, 32, 33, 34, sono le coppie del 2° e 3° indice rispettivamente in 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3 elementi.

Consideriamo uno scacchiere romboidale le cui dimensioni secondo i tre assi x, y, z siano 3, 3, 4. Esso pertanto consta di tre strati che supporremo contati nel senso dell'asse x; ognuno di essi contiene tre orizzontali contate nel senso dell'asse y e quattro verticali contate nel senso dell'asse z. Noi possiamo immaginarlo costituito da $3 \, . \, 3 = 9$ file di caselle parallele all'asse z, contenenti ciascuna tre caselle. Individuiamo tali file colle nove coppie di indici 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33. Possiamo anche immaginare lo scacchiere costituito da 12 file di caselle parallele all'asse y ed individuate dalle coppie di indici 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, oppure da 12 file parallele all'asse x, contraddistinte colle coppie di indici 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34. Individuiamo poi ciascuna casella dello scacchiere con tre indici, dei quali il 1° indichi lo strato al quale appartiene, il 2° ed il 3° rispettivamente l'orizzontale e la verticale di tal strato che s'incrociano in essa. Per es. 213 indica la casella del 2° strato, appartenente alla 1ª orizzontale e 3ª verticale di esso.



Al gruppo di elementi indicato con γ possiamo ora far corrispondere un gruppo γ' di caselle, scegliendo quelle che sono rispettivamente individuate dai tre indici di ciascun elemento di γ. Il gruppo γ' gode della proprietà che delle caselle ad esso appartenenti, se ne trovano 1, 3, 3, 3, 1, 3, 2, 3, 3 rispettivamente nelle file 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33 dello scacchiere, parallele all'asse z; 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 3 rispettivamente nelle file 11, 12, ..., 34, parallele all'asse y, ed 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3 rispettivamente nelle file 11, ..., 34 parallele all'asse x. Al gruppo γ si è fatto corrispondere il gruppo γ' e viceversa a γ' si potrebbe far corrispondere γ; pertanto γ' è un gruppo di caselle rappresentativo del gruppo γ di elementi. Appunto per la proprietà di essere rappresentabile con un gruppo di caselle scelte in uno scacchiere romboidale, il gruppo γ si può chiamare una combinazione a tre dimensioni o romboidale dei 36 elementi dati; i numeri 3, 3, 4 ossia i massimi valori di x, y, z, sono la 1ª, 2ª, 3ª, dimensione di essa; i numeri 1, 3, 3, 3, 1, 3, 2, 3, 3 sono i coefficienti della 3ª dimensione (riferendoci allo scacchiere il 1° di essi si può chiamare coefficiente della fila 11, il 2° della fila 12, ... l'ultimo della fila 33), i numeri 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 3 i coefficienti della 2ª, ed i numeri 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3 coefficienti della 1ª. Poichè quelle delle caselle di γ che appartengono ad uno stesso strato dello scacchiere, parallelo ad uno dei piani xy, xz, yz, costituiscono il gruppo rappresentativo di una combinazione rettangolare degli elementi corrispondenti alle caselle di quello strato, fra i coefficienti suddetti, quelli che si riferiscono a tutte le file parallele di caselle costituenti uno stesso strato, devono dare una somma costante (variabile però in generale da strato a strato). Infatti scrivendo le tre serie di coefficienti

$$1\,,\,3\,,\,3\,,\,3\,,\,1\,,\,3\,,\,2\,,\,3\,,\,3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1}^{\text{a}}\text{)}$$
$$1\,,\,2\,,\,2\,,\,2\,,\,2\,,\,2\,,\,1\,,\,2\,,\,2\,,\,1\,,\,2\,,\,3 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(2}^{\text{a}}\text{)}$$
$$2\,,\,1\,,\,1\,,\,2\,,\,1\,,\,2\,,\,2\,,\,2\,,\,2\,,\,2\,,\,2\,,\,3 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(3}^{\text{a}}\text{)}$$

è facile verificare che le somme del $1^o\ 2^o\ 3^o$, $4^o\ 5^o\ 6^o$, $7^o\ 8^o\ 9^o$ della 1^a serie, sono uguali rispettivamente alle somme del $1^o\ 2^o\ 3^o\ 4^o$, $5^o\ 6^o\ 7^o\ 8^o$, $9^o\ 10^o\ 11^o\ 12^o$ della 2^a; le somme del $1^o\ 4^o\ 7^o$, $2^o\ 5^o\ 8^o$, 3^o, 6^o, 9^o della 1^a sono rispettivamente uguali alle somme del $1^o\ 2^o\ 3^o\ 4^o$, $5^o\ 6^o\ 7^o\ 8^o$, $9^o\ 10^o\ 11^o\ 12^o$ della terza; le somme del $1^o\ 5^o\ 9^o$, $2^o\ 6^o\ 10^o$, $3^o\ 7^o\ 11^o$, $4^o\ 8^o\ 12^o$, della seconda sono rispettivamente uguali alle somme del $1^o\ 5^o\ 9^o$, $2^o\ 6^o\ 10^o$, $3^o\ 7^o\ 11^o$, $4^o\ 8^o\ 12^o$ della terza; infine la somma dei coefficienti di ciascuna serie è costante ed uguale a 22, numero degli elementi della combinazione γ.

Più generalmente siano r, m, n tre interi positivi ed a_{yzx} ($x = 1, 2, \ldots r$; $y = 1, 2, \ldots m$; $z = 1, 2, \ldots n$), rmn elementi dati. Consideriamo le successioni di numeri

$$1, 2, \ldots r\ ;\ 1, 2, \ldots m\ ;\ 1, 2, \ldots n$$

e formiamo le coppie di numeri $11, \ldots mn$, in numero di mn, contenenti un numero della 2^a successione ed uno della 3^a; le coppie $11, \ldots rn$, in numero di rn, contenenti un numero della 1^a ed uno della 3^a; infine le coppie $11, \ldots rm$, in numero di rm contenenti un numero della 1^a ed uno della 2^a. Avremo in tutto $mn + rn + rm$ coppie di numeri. In corrispondenza di ciascuna coppia sia dato un intero positivo, e siano $\rho_{11}, \ldots \rho_{mn}$ gli interi rispettivamente corrispondenti alle coppie $11, \ldots mn$; $\mu_{11}, \ldots \mu_{rn}$ quelli rispettivamente corrispondenti alle coppie $11, \ldots rn$; $\nu_{11}, \ldots \nu_{rm}$ quelli rispettivamente corrispondenti alle coppie $11, \ldots rm$.

Sia inoltre:

$$\rho_{11}, \ldots \rho_{mn} \leq r\ ;\ \mu_{11} \ldots \mu_{rn} \leq m\ ;\ \nu_{11}, \ldots \nu_{rm} \leq n$$

$$\begin{cases} \nu_{11} + \ldots + \nu_{1m} = \mu_{11} + \ldots + \mu_{1n} \\ \vdots \\ \nu_{r1} + \ldots + \nu_{1m} = \mu_{r1} + \ldots + \mu_{rn} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_{11} + \ldots + \mu_{1r} = \rho_{11} + \ldots + \rho_{1m} \\ \vdots \\ \mu_{n1} + \ldots := \mu_{nr} = \rho_{n1} + \ldots + \rho_{nm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_{11} + \ldots + \rho_{1n} = \nu_{11} + \ldots + \nu_{1r} \\ \vdots \\ \rho_{m1} + \ldots + \rho_{mn} = \nu_{m1} + \ldots + \nu_{mr} \end{cases}$$

e pertanto

$$\Sigma\nu = \Sigma\mu = \Sigma\rho = \sigma$$

dove $\Sigma\nu$, $\Sigma\mu$, $\Sigma\rho$ rappresentano rispettivamente la somma di tutti i ν, μ, ρ.

Se $a_{\xi_1\eta_1\theta_1} \dots a_{\xi_i\eta_i\theta_i} \dots a_{\xi_\sigma\eta_\sigma\theta_\sigma}$ è una successione di σ degli elementi dati, tali che gli indici ξ_i, η_i, $(i = 1, 2, \dots \sigma)$ si trovino 1° e 2° in $\nu_{\xi_i\eta_i}$ elementi di essa, gli indici ξ_i, θ_i, si trovino 1° e 3° in $\mu_{\xi_i\theta_i}$ elementi, gli indici η_i, θ_i, si trovino 2° e 3° in $\rho_{\eta_i\theta_i}$ elementi, e se inoltre tra le coppie $\xi_1\eta_1, \dots \xi_\sigma\eta_\sigma$ vi è almeno una volta ciascuna delle coppie $11, \dots mn$; tra le coppie $\xi_1\theta_1, \dots \xi_\sigma\theta_\sigma$ almeno una volta ciascuna delle coppie $11, \dots rn$ e tra le coppie $\eta_1\theta_1, \dots \eta_\sigma\theta_\sigma$ almeno una volta ciascuna delle coppie $11, \dots rm$, diremo allora che tal successione è una combinazione a tre dimensioni, o romboidale, degli rmn elementi dati.

I numeri r, m, n si diranno 1ª, 2ª, 3ª dimensione della combinazione; i numeri $\rho_{11} \dots \rho_{mn}$ coefficienti della 1ª dimensione; i numeri $\mu_{11}, \dots \mu_{rn}$ coefficienti della 2ª ed i numeri $\nu_{11}, \dots \nu_{rn}$ coefficienti della 3ª.

Consideriamo ora uno scacchiere romboidale di dimensioni r, m, n, vale a dire formato di r strati, ciascuno dei quali contenga m orizzontali ed n verticali. Se a ciascun elemento $a_{\xi_i\eta_i\theta_i}$ $(i = 1, 2, \dots \sigma)$ della combinazione suddetta si fa corrispondere la casella $\xi_i\,\eta_i\,\theta_i$ dello scacchiere, si ha un gruppo rappresentativo della combinazione stessa, contenente σ caselle tali che di esse se ne trovino $\nu_{\xi_i\eta_i}$ sulla fila $\xi_i\,\eta_i$ parallele all'asse z, $\mu_{\xi_i\theta_i}$ sulla fila $\xi_i\theta_i$ parallela all'asse y, $\rho_{\eta_i\theta_i}$ sulla fila $\eta_i\theta_i$ parallela all'asse x. Appunto perciò la combinazione si chiama a tre dimensioni o romboidale.

Con ragionamento analogo a quello fatto parlando delle combinazioni a due dimensioni, si dimostrerebbe che, per formare tutte le combinazioni a tre dimensioni degli rmn elementi dati, basta operare come segue.

Si formano r serie di quadri rappresentativi delle combinazioni rettangolari di dimensioni $\downarrow m$ ed $\rightarrow n$ degli elementi $a_{11} \dots a_{1m} \dots a_{m1} \dots a_{mn}$; per costrurre la 1ª serie si assumono per coefficienti della dimensione m i numeri $\nu_{11} \dots \nu_{1m}$, e per coefficienti della dimensione n i numeri $\mu_{11} \dots \mu_{1m}$; per la 2ª serie si assumono i coefficienti $\nu_{21} \dots \nu_{2m}, \mu_{21} \dots \mu_{2n}, \dots$; infine per la r^{ma}, i coefficienti $\nu_{r1} \dots \nu_{rm}, \mu_{r1} \dots \mu_{rn}$. (Si potrebbero anche formare m (od n) serie di quadri rappresentativi delle combinazioni di dimensioni r, n (od m, r) assumendo opportunamente i coefficienti.)

Si scelgono in tutti i modi possibili r quadri $q_1, q_2, \dots q_r$ prendendone uno in ciascuna serie, e precisamente prendendo q_p nella serie p^{ma}. Essi contengono complessivamente rmn numeri, dei quali alcuni, in numero di λ_{ij}, saranno scritti in carattere grande, ed apparterranno o nel 1°, o nel 2°, ... o nell'r^{mo}, alla i^{ma} orizzontale ed alla j^{ma} verticale $(i = 1, 2, \dots m$; $j = 1, 2, \dots n)$. Nel quadro

$$Q \equiv \begin{cases} \rho_{11} \; \rho_{12} \cdots\cdots \rho_{1n} \\ \rho_{21} \; \rho_{22} \cdots\cdots \rho_{2n} \\ \vdots \\ \rho_{m1} \; \rho_{m2} \cdots\cdots \rho_{mn} \end{cases}$$

che contiene i coefficienti della 1ª dimensione (cioè la rimanente dopo le dimensioni m ed n) si diminuisca il numero ρ_{ij} di λ_{ij} unità, e supponiamo che dopo ciò si ottenga un quadro composto di tutti zero. Poniamo

$$\nu_{11} + \ldots + \nu_{1m} = \mu_{11} + \ldots + \mu_{1n} = \sigma_1 \; ;$$
$$\nu_{21} + \ldots + \nu_{2m} = \sigma_2 \; ; \ldots \nu_{r1} + \ldots + \nu_{rm} = \sigma_r \, .$$

Se

$$a_{b_1c_1} \, a_{b_2c_2} \ldots a_{b_{\sigma_1} c_{\sigma_1}} \, , \, a_{d_1 e_1} \, a_{d_2 e_2} \ldots a_{d_{\sigma_2} e_{\sigma_2}} \ldots , \, a_{h_1 k_1} \, a_{h_2 k_2} \ldots a_{h_{\sigma_r} k_{\sigma_r}}$$

sono le r combinazioni rettangolari corrispondenti ai quadri $q_1, q_2, \ldots q_r$, allora il gruppo di elementi

$$a_{1b_1c_1} \ldots a_{1b_{\sigma_1} c_{\sigma_1}} \, , \, a_{2d_1e_1} \ldots a_{2d_{\sigma_2} e_{\sigma_2}} \ldots a_{rh_1k_1} \ldots a_{rh_{\sigma_r} k_{\sigma_r}}$$

è una combinazione romboidale degli rmn elementi dati. Se il quadro ottenuto da ρ col procedimento dianzi indicato non è formato di tutti zero, gli r quadri $q_1, \ldots q_r$, non sono tali da dedurre una combinazione romboidale, e si ripete la prova su altri r scelti nel modo detto.

Estendendo oltre le tre dimensioni il concetto di combinazione, noi troviamo quelle a $4, 5, \ldots$ in generale a k dimensioni. Delle combinazioni a k dimensioni si potrebbe dare una definizione comprendente come casi particolari quelle date per le combinazioni a tre e due dimensioni, e si potrebbe pure dimostrare ch'esse possono formarsi combinando opportunamente combinazioni a $k-1$ dimensioni.

Sarebbe anche molto interessante risolvere relativamente alle combinazioni a k dimensioni quei problemi che l'ordinaria analisi combinatoria elementare risolve relativamente alle comuni combinazioni o ad una dimensione; per es. poichè già sappiamo formare le combinazioni a più dimensioni, è naturale ricercare come si possa calcolare il loro numero, senza farle, dati i valori delle dimensioni ed i loro coefficienti. Non conosco alcuna formola semplice atta a ciò, nè credo cosa facile il trovarla.

Dott. Nicolò Traverso.

Siracusa, Giugno, 1899.

UNA GENERAZIONE DELLE CUBICHE RAZIONALI CIRCOLARI

Queste cubiche, specializzate dal punto di vista proiettivo per la presenza di un punto doppio e dal punto di vista metrico per la proprietà ch'esse hanno di contenere i punti ciclici del piano, si possono immaginare generate per punti con molte e svariate costruzioni. Di ciò mi occupai altra volta. (*)

(*) *Le cubiche piane razionali circolari.* Livorno, Belforte, 1897.

In questa breve nota, mi propongo di dimostrare che *ogni cubica piana razionale circolare può essere considerata come l'inviluppo dei circoli che passano per un punto dato, ed il cui centro giace sopra una data parabola.*

Infatti sia

(1) $$y = ax^2 + bx + c$$

l'equazione cartesiana di una parabola, supposta l'origine nel punto dato P e gli assi x, y rispettivamente paralleli all'asse della parabola e alla tangente nel vertice.

Facilmente si vede che se m, n sono le coordinate del vertice della parabola e p è il parametro principale, sussistono le relazioni:

(2) $$a = \frac{1}{2p}, \qquad b = -\frac{m}{p}, \qquad c = \frac{m^2 + 2pn}{2p}.$$

Posto ciò, osserviamo che un circolo avente il centro sulla (1) ha per equazione

$$(x - \lambda)^2 + [y - (a\lambda^2 + b\lambda + c)]^2 = r^2,$$

dove λ è un parametro arbitrario; e se il cerchio deve passare per l'origine P, la sua equazione diverrà

(3) $$f(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2y(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0.$$

Resulterà perciò

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = -2(x + by + 2a\lambda y)$$

e quindi l'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0$$

dà

(4) $$\lambda = -\frac{x + by}{2ay}.$$

Eliminando λ fra le (3), (4), si ha per l'equazione dell'inviluppo del circolo variabile (3)

$$2ay(x^2 + y^2) + x^2 + 2bxy + (b^2 - 4ac)y^2 = 0,$$

od anche, sostituendo in questa i valori dati dalle (2),

(5) $$y(x^2 + y^2) + px^2 - 2mxy - 2ny^2 = 0.$$

Questa rappresenta evidentemente una cubica razionale circolare ed è generale (giacchè in essa compariscono tre costanti indipendenti).

Il punto doppio è in P. Notiamo che P sarà un nodo, una cuspide od un punto isolato della cubica, secondo che

$$2np + m^2 \gtreqless 0.$$

Ora osserviamo, che indicando con

$$\varphi(x, y) = 0$$

l'equazione della parabola data, quando siasi operata una traslazione degli assi trasportando l'origine nel vertice, e con Δ il discriminante della detta equazione, secondo che

$$\Delta \,.\, \varphi(-m, -n) \lesseqgtr 0,$$

il punto P sarà interno alla parabola, sulla parabola o esterno.

Poichè inoltre è $\Delta < 0$, come facilmente si verifica, ed è

$$\varphi(-m, -n) = m^2 + 2pn,$$

resulta che a seconda che è

$$2np + m^2 \gtreqless 0,$$

il punto P è esterno, sulla parabola o interno. Si conclude perciò che *la cubica* (5) *ha un nodo, un regresso o un punto isolato, secondo che* P *rispetto alla parabola data è esterno, o su di essa o interno.*

In particolare:

a) se P è sull'asse della parabola, cioè se

$$m = 0,$$

la (5) diviene

$$y(x^2 + y^2) + px^2 - 2ny^2 = 0$$

che rappresenta una Concoide Slusiana.

b) se P è sulla direttrice della parabola, cioè se

$$n = \frac{p}{2}$$

la (5) diviene

$$y(x^2 + y^2) - 2mxy + p(x^2 - y^2) = 0$$

che rappresenta una strofoide

c) se P coincide col punto d'incontro dell'asse con la direttrice per (*a*) (*b*) segue che la cubica è una strofoide retta.

d) se P coincide col vertice della parabola la cubica è una Cissoide di Diocle.

Infatti se $m = n = 0$ la (5) diviene

$$y(x^2 + y^2) + px^2 = 0$$

e) Finalmente se P coincide col fuoco, la cubica degenera.

La proposizione contenuta in questa noticina può generalizzarsi sotto due diversi punti di vista. Ciò sarà oggetto di altre mie note.

GIULIO CARDOSO-LAYNES.

Livorno, Agosto 1899.

UNA FORMOLA COMPRENSIVA DI GEOMETRIA METRICA

DI

AMEDEO GIACOMINI

Assumiamo in uno spazio a quattro dimensioni la piramide che ha per base il tetraedro ABCD e per vertice il punto V. Costruito il prisma, che ha la medesima base, e che ha per costola laterale per es. AV, dimostriamo facilmente che esso equivale a quattro volte quella piramide. Infatti, si stacchi dal prisma la data piramide mediante l'iperpiano passante pei vertici V, B, C, D; il solido rimanente γ è la piramide che ha per vertice V e per base il prisma triangolare BCDD'B'C'. Ora quest'ultimo, com'è noto, si può scomporre in tre tetraedri equivalenti di cui uno ha per base B'C'D'; onde il solido γ si scompone in tre piramidi equivalenti fra loro ed equivalenti alla data. (*) E ciò prova quanto si era asserito.

Osservando poi che ogni poliedro dello spazio ordinario si può scomporre in tetraedri, e che quindi ogni piramide dello spazio a quattro dimensioni si può scomporre in piramidi analoghe a quella considerata, ne concludiamo che la misura di una piramide dello spazio a quattro dimensioni equivale alla quarta parte della misura della base moltiplicata per la misura dell'altezza.

Col medesimo metodo ricorrente si dimostra che la misura di una piramide dello spazio ad n dimensioni equivale alla n-esima parte della misura della base moltiplicata per la misura dell'altezza.

Si abbia ora in generale, nello spazio ad n dimensioni ($n > 1$), una piramide tagliata da un iperpiano parallelo alla base. Siano B e b le misure delle due basi del tronco di piramide, h ed $h + d$ le misure delle altezze del tronco di piramide e della piramide data rispettivamente. Indichiamo ancora con $k = \dfrac{d}{d+h}$ il rapporto di similitudine delle due basi (le quali sono due poliedri simili ad $n - 1$ dimensioni).

La misura del tronco sarà

$$T = \frac{B}{n}(h + d) - \frac{b}{n}d.$$

E poichè (**)

$$d = -\frac{hk}{k-1} \quad ; \quad b = Bk^{n-1},$$

sarà, sostituendo,

$$T = \frac{Bh}{n}\left(\frac{k^n - 1}{k - 1}\right),$$

od anche

$$T = \frac{Bh}{n}(1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1}),$$

(*) Si suppone noto il teorema d'equivalenza delle piramidi, il quale si dimostra nello spazio a più di tre dimensioni con metodo analogo a quello che vale per le piramidi dello spazio ordinario.

(**) Dobbiamo supporre $k < 1$; ma la formola finale vale anche per il caso limite $k = 1$.

la quale formola dunque, attribuendo a k i valori 0 od 1 o i valori intermedi, si adatta ad esprimere la misura del triangolo, del parallelogrammo e del trapezio, del settore circolare, del cerchio, della corona circolare; della piramide, del cono, del prisma, del cilindro, del tronco di cono o di piramide, della sfera, ecc.; e dei solidi analoghi negli spazî a più di tre dimensioni.

Pedona, agosto 1899.

SULLA QUISTIONE 355

Se due cerchi eguali si segano sotto un angolo di 60°, il loro cerchio radicale è il luogo della projezione (ortogonale) di un punto dell'un cerchio sulla sua polare rispetto all'altro. V. Retali.

All'elegante dimostrazione analitica che della quistione 355 ha dato il professore *Cardoso-Laynes* (Anno XII, pag. 161) non mi sembra inopportuno aggiungere la seguente, che è molto elementare.

Indico con R il raggio di ciascun dei due circoli dati; D, E i loro centri; A, B i loro punti comuni. Il cerchio radicale dei dati cerchi è quello di diametro AB, il cui centro si indichi con O. Sieno M il punto del circolo O più vicino a D, Q il punto del circolo E più lontano da D. Si ha:

$$AB = R,\ DO = \frac{R\sqrt{3}}{2},\ DM = \frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{R}{2},$$

$$DQ = 2\,DO + R = R\sqrt{3} + R.\ \text{Quindi}\ DM\,.\,DQ = R^2,$$

la qualcosa mostra che la polare di Q rispetto al cerchio D passa per M; e siccome tale polare è perpendicolare alla retta QM, M è la proiezione ortogonale di Q sulla polare di Q rispetto al cerchio D. Reciprocamente; se $DM_1\,.\,DQ = R^2$, risulterà $M_1 \equiv M$.

Sia Q' un altro punto del cerchio E, M' il punto del cerchio O, situato su DQ', più prossimo a D. Tirato il raggio EF nella stessa direzione di OA, si dimostra subito che F, A, D sono per diritto, e che quindi D è il centro di omotetia diretta dei cerchi O ed E, e perciò i punti M, Q, M', Q', che non sono tutti e quattro su una delle traversali DQ, DQ' e sono anti-omologhi, saranno conciclici e si avrà

$$DM'\,.\,DQ' = DM\,.\,DQ = R^2,$$

e la polare di Q', rispetto al cerchio D, passerà per M', il quale sarà la proiezione ortogonale di Q' sulla polare di Q' rispetto al circolo D. Viceversa, se $DM'_1\,.\,DQ' = R^2$, risulterà $DM'_1 = DM'$, e quindi $M'_1 \equiv M$.

Prof. S. Catania.

LUOGHI ED INVILUPPI (*)

(ESERCIZI DI GEOMETRIA ANALITICA)

12. Se si proietta ortogonalmente sulle normali di una parabola un punto fisso O dell'asse, il luogo delle proiezioni è una *quartica circolare* con un punto triplo in O. (**)

13. Il luogo del vertice di un triangolo di cui è dato il lato opposto e l'altezza a questo relativa è uguale alla semi-differenza degli altri due lati, è una *kohlenspitzencurva equilatera* (inversa cartesiana di iperbole equilatera).

14. L'inviluppo dei cerchi che passano per un punto dato P ed hanno il centro sopra un dato cerchio C^2 è una *conchiglia di Pascal.*

Secondo che P è esterno a C^2, sopra C^2 o interno, la conchiglia è *crunodale, cuspidale* (cardioide) o *acnodale*.

15. Sia t una tangente fissa di un circolo C^2 ed m la tangente in un punto mobile M del circolo stesso;

1° Il luogo del simmetrico di $T \equiv (mt)$ rispetto ad M è una *trisettrice di Mac-Laurin* (oltre alla t)

2° Il luogo del simmetrico di M rispetto a T è una *cissoide di Diocle* (oltre alla t).

16. Sia C^2 un cerchio, O un suo punto fisso e d il diametro passante per O; il luogo del baricentro del triangolo variabile ABO, rettangolo in A e tale che A scorra su d e B su C^2, è una *ellisse*.

17. Se t è una tangente mobile di un'iperbole equilatera e P_1, P_2 sono le proiezioni ortogonali dei fuochi sopra t, il luogo del punto medio del segmento P_1P_2 è una *lemniscata di Bernoulli*.

18. Sieno Δ e Δ' due *kappa* eguali, col punto doppio O a comune e gli assi ortogonali ed r una semi-retta mobile uscente da O che incontra in M e M' rispettivamente le due curve.

Se, partendo da M, si riporta OM' nella direzione OM in MM'', il luogo di M'' è una *kreuzcurva equilatera*.

19. L'inviluppo delle parabole che hanno il fuoco sopra un circolo dato ed hanno per direttrice un diametro fisso di questo circolo è una *coppia di parabole*.

(*) Continuazione v. Vol. preced. a pag. 150.

(**) Questo es. è una generalizzazione dell'ultimo di pag. 151. Nel caso in cui O sia il fuoco, la quartica si scinde in una parabola passante per O ed in una coppia di rette isotrope incrociantesi in O. Vedi la nota 3ª a pag. 269 del fasc. scorso.

20. Sia O un punto fisso di un circolo C^2 e PQ un diametro mobile di questo circolo. La perpendicolare condotta da Q al diametro passante per O incontra la OP in un punto M che descrive una *cissoide di Diocle.*

21. Il luogo dei baricentri dei triangoli che una tangente mobile di un'iperbole fa con gli assi è una *kohlenspitzencurva.* (*)

22. Se r è una retta variabile perpendicolare al diametro AB di un circolo C^2 e se R, S sono le intersezioni di r con C^2, il luogo dei punti d'incontro delle rette BR ed AS è un'*iperbole equilatera.*

23. Data una parabola p^2 ed una retta r perpendicolare al suo asse, si conduca dal vertice di p un raggio mobile che seghi r in A e p^2 in B. Conducendo da A e B rispettivamente le parallele all'asse ed alla r, il luogo dei punti d'incontro di queste due rette è una *cubica iperbolica.*

24. È dato un cerchio C^2 di cui il centro è C ed un suo punto fisso P. Se M è un punto mobile su C^2, il luogo delle intersezioni I, I′ dei cerchi P(PM) e M(MC) è una *sestica tricircolare,* che ha tre punti doppi su CP.

L'inviluppo della retta II′ è una *parabola.*

25. Se un triangolo rettangolo variabile ha per ipotenusa una corda di un cerchio C^2, perpendicolare ad un raggio fisso OC di tale cerchio, ed uno dei cateti passa costantemente per O, il luogo del vertice dell'angolo retto è un *trifolium retto.* (**)

26. Sia OA un segmento dato ed r una retta perpendicolare a questo segmento. Si conduca per O una semi-retta mobile ρ e sia $T \equiv (r, \rho)$. Facendo centro in A, con un raggio AT, si descriva un cerchio che tagli ulteriormente ρ in M. Il luogo di M è una *concoide slusiana.*

Indicando con d la distanza di O da r e ponendo $OA = a$, se $d = 2a$, a, $\frac{a}{2}$, si ha rispettivamente una *cissoide di Diocle,* una *strofoide retta,* una *trisettrice di Mac-Laurin.* Se $d = 0$ la cubica si scinde.

27. Sia C^2 un cerchio di centro C, O un suo punto fisso ed M uno mobile. Sia T il punto d'incontro della tangente in M col diametro passante per O e Q la proiezione ortogonale di M sullo stesso diametro.

Se riportiamo, a partire da O e nei due sensi su OM, dei segmenti eguali a MT, CQ, CT, si hanno *rispettivamente* un *molino a vento,* un *rosone quadrifoglio* e una *kreuzcurva equilatera.*

28. Sia C^2 un circolo dato di centro C ed O un punto qualunque del suo piano: se da un punto mobile M di C^2 si conduce la perpendicolare m a CO e da O si conduce la parallela r al raggio CM, il luogo di $P \equiv (m, r)$ è una *concoide di Nicomede.*

Secondo che O è interno a C^2, su C^2 od esterno, la concoide ha in O un *nodo,* un *regresso* o un *punto isolato.* Se O coincide con C la curva degenera.

(continua)

G. Cardoso-Laynes.

(*) Cfr. n. 7.

(**) Segue da ciò una semplicissima costruzione per punti del *trifolium.*

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI

289, 350, 354, 401, 463, 464, 465, 468, 470, 471

289. *Dimostrare che il rapporto della potenza di un triangolo alla sua area è uguale al rapporto fra il quadruplo del raggio del circolo di Eulero e un cateto di un triangolo rettangolo avente per ipotenusa il raggio del primo circolo di Lemoine e per altro cateto il raggio del circolo di Brocard del triangolo.*

BOZAL-OBOJERO.

Soluzione del prof. U. Ceretti di Cesena.

Sia dato un triangolo ABC; siano a, b, c, i suoi lati, S la sua superficie, O ed R il centro ed il raggio del circolo circoscritto, K il punto di Lemoine. Il raggio del circolo di Eulero è subito determinato, perchè si sa che è sempre uguale alla metà di R. Determiniamo il raggio R_L del primo circolo di Lemoine. Dalla teoria dei poligoni armonici si ha che il diametro di questo circolo è dato da $R \sec m$, essendo m definito da una delle equazioni: $x = \frac{1}{2} a \operatorname{tang} m$, $y = \frac{1}{2} b \operatorname{tang} m, \ldots\ldots$, in cui $a, b, c, \ldots\ldots$ indicano i lati di un poligono ed $x, y, z, \ldots\ldots$ le perpendicolari condotte dal punto di Lemoine ai lati stessi. Nel caso nostro dalla prima di queste equazioni si ha: $\frac{x}{a} = \frac{1}{2} \operatorname{tang} m$; e per il teorema " le perpendicolari condotte da K ai lati di un triangolo sono proporzionali ai lati stessi " e cioè: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{2S}{a^2+b^2+c^2}$, si ottiene: $\operatorname{tang} m = \frac{4S}{a^2+b^2+c^2}$. Dalla trigonometria si ricava: $\sec m = \sqrt{1+\operatorname{tang}^2 m} = \sqrt{1+\frac{16S^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}}$; quindi è: $R_L = \frac{R}{2}\sqrt{1+\frac{16S^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}}$.

Passiamo ora a determinare il raggio R_B del circolo di Brocard. Il diametro di tale circolo è il segmento $KO = d$. Dalla citata teoria dei poligoni armonici per il teorema " se d è la distanza dal centro delle simediane al centro del circolo circoscritto di raggio R, si ha: $\operatorname{tang} m = \operatorname{cotang}\frac{\pi}{n}\sqrt{1-\frac{d^2}{R^2}}$, essendo n il numero dei lati del poligono armonico, " essendo ora $n=3$, si ha: $\operatorname{cotang}\frac{\pi}{n} = \operatorname{cotang} 60^0 = 1 : \sqrt{3}$; e perciò si ottiene: $\frac{4S}{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{1-\frac{d^2}{R^2}}\frac{1}{\sqrt{3}}$, da cui, risolvendo rispetto a d^2, si ha:

$$d^2 = R^2\left\{1-\frac{48S^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}\right\}$$

e quindi:

$$R^2_B = \frac{R^2}{4}\left\{1-\frac{48S^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}\right\}.$$

Calcoliamo ora la differenza $R^2_L - R^2_B$. Si ha subito:

$$R^2_L - R^2_B = \frac{R^2}{4}\left\{1 + \frac{16\,S^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}\right\} - \frac{R^2}{4}\left\{1 - \frac{48\,S^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}\right\} =$$

$$= \frac{R^2}{4}\,\frac{64\,S^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} = \frac{16\,R^2\,S^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

E formando la proporzione voluta dalla questione, si ha:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2} : S = 2R : \sqrt{\frac{16\,S^2\,R^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}},$$

ossia:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2} : S = 2R : \frac{4\,SR}{a^2+b^2+c^2},$$ proporzione identicamente vera.

Altra risoluzione del prof. Merizzi di Ceva.

350. *Dati due punti A, B ambedue esterni e ambedue interni ad un circolo o ad una sfera, si trovi un punto del circolo o della sfera, tale che la somma delle sue distanze da A e B sia massima o minima.*

GAMBIOLI.

Risoluzione del prof. Barozzini di Treviso.

Siano in un piano un cerchio di centro O e raggio r, e due punti A e B tali che sia $OA = a$, $OB = b$, $\widehat{AOB} = \omega$.

Se P è sulla circonferenza e AP + PB è massimo o minimo, la ellisse passante per P e avente per fuochi A e B sarà tangente al cerchio dato. Conducendo invece un'iperbole coi fuochi A, B e tangente al cerchio dato, il punto di contatto P darebbe un massimo o un minimo per AP — PB. In entrambi i casi per nota proprietà delle coniche, AP, PB sono ugualmente inclinati ad OP normale alla conica tangente al cerchio.

Assumo allora OA, OB come assi coordinati Ox, Oy, esprimo che la AP, BP, dove $P=(xy)$, distano ugualmente da O.

$$\frac{ay}{\sqrt{y^2+(x-a)^2+2y(x-a)\cos\omega}} = \frac{bx}{\sqrt{x^2+(y-b)^2+2x(y-b)\cos\omega}}$$

Quadro, tolgo il fattore $ay+bx-ab$ ed ho per luogo di P

$$[x^2+y^2+2xy\cos\omega][bx-ay] = ab\,[x^2-y^2]. \tag{1}$$

Tenendo conto che P si trova sul cerchio dato

$$x^2+y^2+2xy\cos\omega = r^2 \tag{2}$$

e ponendo

$$am = bn = r^2 \tag{3}$$

la (1) si riduce alla

$$mx - ny = x^2 - y^2 \tag{4}$$

Se M, N sono coniugati armonici di A, B rispetto al cerchio dato la (4) rappresenta un'iperbole equilatera con diametro MN, passante per O, e avente gli asintoti paralleli alle bisettrici di ω.

Con procedimento uguale si risolve il problema: Segnare il cammino che deve fare una palla in un bigliardo circolare affinchè partendo dal punto A dato, passi pel punto B dato, dopo aver toccata la sponda una sola volta.

Si potrà facilmente costruire e taglierà il cerchio dato in quattro punti (in generale); due daranno il massimo o minimo di $AP + PB$. Il ramo dell'iperbole che passa per O taglia sempre il cerchio dato: quindi due dei quattro punti P sono sempre reali. Gli altri due saranno reali o no, secondo che la minima distanza di O dai punti dell'altro ramo dell'iperbole è minore o maggiore di r.

Se, per esempio, i punti A e B sono entrambi fuori del cerchio, i punti cercati sono reali tutti quattro.

Se fosse data una sfera invece del cerchio, la si taglierebbe col piano ABO e si ricadrebbe nel problema precedente.

354. *Dati in un piano due cerchi, la conica K^2 avente per fuochi i loro centri, e inscritta nel quadrilatero delle tangenti nei punti al finito comuni, è bitangente al cerchio radicale dei centri dati: il luogo dei punti di mezzo delle corde che le tangenti di K^2 staccano nei due cerchi è il cerchio radicale.*

RETALI.

Risoluzione del prof. Barozzini di Treviso.

Prendo l'asse radicale dei due cerchi dati per asse delle y e la congiungente i centri per quello delle x: le equazioni dei cerchi saranno

$$f = x^2 + y^2 - 2ax - b^2 = 0 \qquad f' = x^2 + y^2 - 2a'x - b^2 = 0$$

dove $a\ a'$ sono le distanze dei centri A A' dall'asse radicale, b metà della corda che unisce i punti comuni B, B' supposti reali. Pongo inoltre

$$(1) \qquad a + a' = 2s \qquad a - a' = 2d$$

Una conica coi fuochi in A e A' ha per equazione:

$$(2) \qquad \frac{(x-s)^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1 \qquad (3) \qquad \text{dove} \quad u^2 - v^2 = d^2$$

e sarà tangente alla tangente in B ($x = 0$ $y = b$) al cerchio f cioè a

$$(4) \qquad b(y - b) = ax \qquad \text{se} \quad (5) \qquad a^2u^2 + b^2v^2 = (b^2 + as)^2.$$

Dalle (3) (4), tenendo conto delle (1), ottengo:

$$u^2 = b^2 + s^2, \qquad v^2 = b^2 + a\,a'$$

quantità che non variano mutando $+b$ in $-b$, od a in a', quindi valgono anche se prendiamo qualunque delle altre tangenti ai cerchi dati nei punti comuni invece della (4). La conica richiesta è allora:

$$(K^2) \qquad \frac{(x-s)^2}{b^2+s^2} + \frac{y^2}{b^2 + a\,a'} = 1.$$

Se ora scrivo l'equazione del cerchio radicale

$$f + f' = 0 \qquad x^2 + y^2 - 2sx - b^2 = 0$$

vedo che esso ha per diametro l'asse maggiore della K^2, quindi è la curva podaria dei fuochi di essa conica: sarà perciò bitangente alla conica (come d. d.) e conterrà tutti i piedi delle perpendicolari condotte da A e A' alle tangenti di K^2.

Ma le perpendicolari suddette cadranno nei punti di mezzo delle corde che i cerchi f, f' staccano sulle tangenti alla conica, quindi resta dimostrato che i punti medi di tali corde stanno sul cerchio radicale.

Nell'ipotesi fatta che i cerchi si taglino, la curva K^2 sarà

ellisse se $b^2 + a a' > 0$ ossia $\widehat{ABA'} < 90°$

iperbole $b^2 + a a' < 0$ $\widehat{ABA} > 90°$.

Nel caso in cui $b^2 + a a' = 0$, i cerchi sono ortogonali fra loro e la conica si riduce alla retta doppia $y^2 = 0$ come luogo di punti, e ai punti A, A' come inviluppo di rette. Allora il cerchio radicale ha per diametro A A' ed è il luogo dei punti medî delle corde condotte da A, A' ai due cerchi

Altra risoluzione del prof. Merizzi di Ceva.

401. *Determinare l'inviluppo di un cerchio, di cui il centro percorre una curva piana* C *e che tocca una retta fissa* r *del suo piano; trovare il punto di contatto del cerchio mobile col suo inviluppo e dimostrare che quest'ultimo è pure l'inviluppo delle rette simmetriche di* r *rispetto alle tangenti di* C. *Esaminare il caso particolare, in cui* C *è una conica.*

RETALI.

Risoluzione del prof. U. Ceretti di Cesena.

Sia dato un sistema di assi coordinati S e sia anzi asse delle ascisse la data retta fissa r; una curva piana qualunque C, riferita al sistema S, sia definita dalle equazioni:

$$(1) \qquad X = \varphi(t), \quad Y = \psi(t);$$

con centro in $P \equiv X, Y$, punto qualunque della curva C, si descriva una circonferenza C' tangente ad r nel punto Q, di cui le coordinate saranno X e O per le ipotesi fatte. L'equazione di C' è dunque:

$$(2) \qquad (x - X)^2 + y^2 - 2y\,Y = 0;$$

differenziando rispetto a t si ottiene:

$$(3) \qquad (x - X)\,dX + y\,dY = 0;$$

dalle (2) e (3) si ottengono uno ad uno i punti dell'inviluppo I cercato. Risolvendo infatti le (2) e (3) rispetto ad x e ad y si hanno le formole:

$$(4) \qquad \begin{cases} x = X - 2Y \dfrac{dX\,dY}{dX^2 + dY^2}, \\[2ex] y = 2Y \dfrac{dX^2}{dX^2 + dY^2}, \end{cases}$$

che danno le coordinate correnti x ed y dell'inviluppo I, il quale è così determinato.

Dalla (3) si ha inoltre:

$$x - X = -\frac{dY}{dX}\,y;$$

cioè la (3) rappresenta la perpendicolare alla tangente alla curva C nel punto P condotta per il punto Q, giacchè le coordinate X e O di Q la verificano; il punto M dell'inviluppo I è dunque il simmetrico di Q rispetto alla tangente TT' in P alla C; si ha quindi che la tangente in M alla circonferenza C' è la retta simmetrica di r rispetto alla tangente TT'. Inoltre la circonferenza C' e il suo inviluppo I si toccano nel punto M; e poichè la retta MR, essendo R il punto d'intersezione di r

con TT', nel suo variare si mantiene sempre tangente ad I, risulta evidente che il suo inviluppo è ancora l'inviluppo I.

APPLICAZIONI. — 1ª. Se C è una conica qualunque, si può supporre:

$$(5) \qquad X = \frac{at^2 + 2bt + c}{a''t^2 + 2b''t + c''} = \frac{a_1}{a_3}, \qquad Y = \frac{a't^2 + 2b't + c'}{a''t^2 + 2b''t + c''} = \frac{a_2}{a_3}$$

che definiscono appunto una conica qualunque; si ha così una discussione simultanea. Per applicare le (4) determiniamo $\frac{dX}{dt}$ e $\frac{dY}{dt}$. Differenziando le (5) si ottiene:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{a_3 \frac{da_1}{dt} - a_1 \frac{da_3}{dt}}{a_3^2}, \qquad \frac{dY}{dt} = \frac{a_3 \frac{da_2}{dt} - a_2 \frac{da_3}{dt}}{a_3^2},$$

ossia anche:

$$a_3^2 \frac{dX}{dt} = a_3 \frac{da_1}{dt} - a_1 \frac{da_3}{dt}, \qquad a_3^2 \frac{dY}{dt} = a_3 \frac{da_2}{dt} - a_2 \frac{da_3}{dt};$$

e quindi eseguendo:

$$a_3^2 \frac{dX}{dt} = 2\left\{(ab'' - a''b)\,t^2 + (ac'' - a''c)\,t + (bc'' - b''c)\right\} = 2b_1,$$

$$a_3^2 \frac{dY}{dt} = 2\left\{(a'b'' - a''b')\,t^2 + (a'c'' - a''c')\,t + (b'c'' - b''c')\right\} = 2b_2;$$

sostituendo nelle (4) si ha:

$$x = X - 2Y \frac{b_1 b_2}{b_1^2 + b_2^2} = \frac{a_1}{a_3} - \frac{2a_2 b_1 b_2}{a_3 (b_1^2 + b_2^2)} = \frac{a_1 (b_1^2 + b_2^2) - 2a_2 b_1 b_2}{a_3 (b_1^2 + b_2^2)},$$

$$y = 2Y \frac{b_1^2}{b_1^2 + b_2^2} = \frac{2a_2}{a_3} \frac{b_1^2}{b_1^2 + b_2^2} = \frac{2a_2 b_1^2}{a_3 (b_1^2 + b_2^2)},$$

equazioni che rappresentano una *sestica razionale.*

2ª. Supponiamo ora che la retta fissa r sia parallela ad una direttrice, si hanno per le coniche le tre forme seguenti:

Parabola	*Ellisse*	*Iperbole*
$Y + mX^2 = n$	$\begin{cases} X = a\cos t + c \\ Y = b \operatorname{sen} t \end{cases}$	$\begin{cases} X = a\cosh t + c \\ Y = b \operatorname{senh} t, \end{cases}$

nelle quali m, n, a, b, c sono costanti qualunque, e senh e cosh sono seno e coseno iperbolico. Consideriamo separatamente ciascuna di queste tre forme.

Parabola. — Si ha subito: $dX = dX$, $dY = 2m\,X\,dX$; quindi dalle (4) si ottiene:

$$x = X - 2(mX^2 + n)\frac{2m\,X\,dX^2}{dX^2 + 4m^2X^2\,dX^2} = \frac{X(1 - 4mn)}{1 + 4m^2X^2},$$

$$y = 2(mX^2 + n)\frac{dX^2}{dX^2 + 4m^2X^2\,dX^2} = \frac{2(mX^2 + n)}{1 + 4m^2X^2},$$

cioè per qualunque valore reale di m e di n un'ellisse reale, che ha per assi gli assi coordinati e per centro l'origine, qualora si supponga $m = -\frac{1}{4n}$.

Ellisse. — Dalle formole che determinano l'ellisse si ha: $dX = -a \operatorname{sen} t$, $dY = b \cos t$; e quindi immediatamente dalle (4):

$$x = c + \frac{a \cos t \left\{ b^2 + (a^2 + b^2) \operatorname{sen}^2 t \right\}}{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t},$$

$$y = \frac{2a^2 b \operatorname{sen}^3 t}{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t},$$

che danno una sestica razionale.

Iperbole. — Procedendo in modo analogo per l'iperbole si ha:

$$dX = -a \cosh t, \qquad dY = b \operatorname{senh} t$$

e quindi anche:

$$x = ac + \frac{a \cosh t \left\{ b^2 + (a^2 - b^2) \operatorname{senh}^2 t \right\}}{a^2 \operatorname{senh}^2 t + b^2 \cosh^2 t},$$

$$y = \frac{2a^2 b \operatorname{senh}^3 t}{a^2 \operatorname{senh}^2 t + b^2 \cosh^2 t},$$

cioè ancora una *sestica razionale.*

463. *Un triangolo* OVP *ha due vertici fissi e il terzo* P *descrive una retta* g *non passante per* V *nè per* O; *la perpendicolare a* |VP| *in* V *seghi* |OP| *in* P'; *dimostrare che*

1° *il luogo di* P' *è una conica* G^2 *passante per* O *e normale a* |OV| *nel punto* V; *costruire le tangenti in* O *e* P';

2° G^2 *è ellisse, parabola o iperbole secondochè il cerchio* G^2_∞ *descritto sul segmento* OV *come diametro sega* g *in due punti imaginari conjugati, reali e coincidenti, o reali e distinti;*

3° *se* g *passa pel punto medio* M *del segmento* |OV| *la* G^2 *è iperbole equilatera; il luogo dei centri delle iperboli equilatere corrispondenti ai raggi del fascio* M *è un cerchio;*

4° *il luogo dei fuochi delle parabole corrispondenti alle tangenti del cerchio* G^2_∞ *è una cissoide di Diocle.* (*)

RETALI.

Soluzione geometrica del prof. A. Droz-Farny di Porrentruy.

Quando P si muove sulla retta g, i raggi OP e VP costituiscono due fasci prospettivi VP e VP' essendo coppie in involuzione circolare, ne risulta che OP e VP' generano due fasci omografici. Il luogo dei punti P', o la trasformata della retta g è dunque una conica che passa per O e V. Se VP è perpendicolare in V su OV, VP' coincide con OV, OP è dunque tangente in O alla conica; ai raggi OP e VP coincidenti, e corrispondenti al punto P d'intersezione di g con OV, corrisponde un raggio VP' perpendicolare a OV e che sarà quindi tangente in quel punto. La conica è quindi normale in V a OV. Alla retta g_∞ corrisponde evidentemente il circolo descritto su OV come diametro, poichè i raggi omologhi OP e VP essendo paralleli, VP' è sempre perpendicolare ad OP. Se si fa girare la retta g intorno ad un punto fisso P, le coniche corrispondenti formano un fascio; passano tutte per O, e per il punto P' corrispondente a P e sono tangenti in V. I loro centri sono sulla conica dei nove punti del fascio. Se le rette g sono parallele, i quattro punti-base del fascio sono O, il punto V doppio ed un quarto

(*) Per 3° e 4° cfr. le mie risoluzioni delle quistioni 259 e 260 in *Progréso Matematico* di Zaragoza (Agosto 1899, pag. 120 e 125). V. R.

punto su G^2_∞ corrispondente al punto P_∞ delle rette g. In questo caso gli assi delle coniche sono paralleli.

Se g taglia g^2_∞ in due punti α' e α'', la conica corrispondente sarà una iperbole che ha $O\alpha'$ e $O\alpha''$ come direzioni asintotiche. Se α' e α'' coincidono in α, la conica è una parabola, il cui asse ha per direzione $O\alpha$. Se finalmente i punti α' e α'' sono imaginari coniugati, la conica è un'ellisse.

Se g è un diametro di g^2_∞, le direzioni $O\alpha'$ e $O\alpha''$ sono ortogonali, g^2 è dunque un' iperbole equilatera. Sia P' su G^2_∞ il punto corrispondente a P_∞ su g. Il triangolo $OP'V$ inscritto nell' iperbole equilatera è rettangolo in P'; dunque secondo un teorema conosciuto, la tangente di G^2 in P' sarà la perpendicolare abbassata da P' sull' ipotenusa OV. Le tangenti G^2 in P' e V sono dunque parallele; ne risulta che $P'V$ è un diametro della curva, che ha quindi il suo centro nel punto di mezzo di $P'V$. Il luogo geometrico dei centri delle iperboli equilatere corrispondenti ai varî raggi del fascio dei diametri M è la circonferenza descritta su MV come diametro.

Consideriamo finalmente una retta g tangente in P al circolo G^2_∞. La sua trasformata sarà una parabola il cui asse è parallelo a OP. La perpendicolare in V ad (OV) incontri g in S. La parabola è tangente in O a SO e in V a SV. Sieno B_1 il punto di mezzo di SO, B' quello di SV, B quello di B_1B'. Per una ben nota proprietà della parabola, B_1B' sarà altresì tangente della curva nel punto B e SBM sarà un diametro della parabola. BB' e $B'V$ essendo due tangenti ortogonali della parabola, B' è un punto della sua direttrice ed il piede F della perpendicolare abbassata da B' sulla sua polare BV sarà il fuoco della curva.

Tiriamo da B la perpendicolare BC su MV; C sarà il punto di mezzo di MV, quindi un punto fisso, e sia S il piede della perpendicolare abbassata da C su BV. Si ha evidentemente VS eguale ad FB: ora il luogo di S è la circonferenza descritta su CV come diametro. Il luogo di F è dunque una *cissoide di Diocle* avente VC per asse, CB per asintoto e V per punto di regresso.

La perpendicolare abbassata da B' sul diametro SM è la direttrice della parabola; ora CB' è parallela a SM, dunque: le direttrici di queste parabole inviluppano una parabola che ha C per fuoco e VS per tangente al vertice.

Si dimostrerebbe inoltre che i loro assi inviluppano un' *ipocicloide di Steiner.*

464. *Un triangolo* OVP *ha due vertici fissi e il terzo* P *descrive nel suo piano una curva* C^n: *se* o *è la perpendicolare a* $|OV|$ *in* V, *e* P' *la intersezione di* $|OP|$ *con la perpendicolare a* $|VP|$ *in* V, *dimostrare che le tangenti a* C^n *nel punto* P *e alla curva corrispondente* C^{2n} *in* P' *si segano sulla retta* o' *simmetrica di* o *rispetto a* $|PV|$.

RETALI.

Soluzione geometrica del prof. A. Droz-Farny.

Ogni raggio OP incontra C^n in n punti P i cui corrispondenti P' sono su OP; la retta taglia C^n in n punti α i cui corrispondenti coincidono con O; la trasformata ha quindi in O un punto n-uplo, le tangenti in questo punto essendo le rette $O\alpha$; la trasformata è generalmente del $2n^{esima}$ grado. L'asse OV incontra C^n in n punti β i cui corrispondenti coincidono con V che è altresì n-uplo per la trasformata.

Supponiamo due segmenti rettilinei, PP' e P_1P_1' i cui estremi P, P_1 e P', P_1' sieno su due curve fisse C e C' e sieno visti da un punto fisso V sotto un angolo retto. Si domanda di determinare il punto di contatto di questi segmenti col loro inviluppo. Sia O il punto d'incontro di PP' e P_1P_1' e T quello delle corde PP_1 e P_1P_1'. Secondo un ben noto teorema, le rette PP_1, $P'P_1'$, PP' e P_1P_1' sono tangenti ad una conica avente V per fuoco.

Al limite le corde PP_1 e P_1P_1 divengono respettivamente tangenti in P e P' alle curve C e C' ed il punto limite di O diviene punto di contatto di PP' colla conica ed il suo inviluppo. Si costruirà dunque una conica avente un fuoco in V e tangente alle tre rette TP, TP' e PP'. Il punto O di contatto con PP' sarà il punto cercato. Utilizzando i teoremi di Poncelet, si vede facilmente che le rette VT e VO sono isogonali nell'angolo PVP'.

Se la retta PP' inviluppa un punto fisso O, come accade nella nostra trasformazione si ottiene il teorema seguente che coincide con quello del sig. *Retali*.

Le tangenti ai punti P di C^n e P' di C^{2n} s'intersecano sopra una retta o', isogonale dell'asse OV rapporto ai lati dell'angolo PVP'.

Si vede subito che VP e VP' sono bisettrici dell'angolo delle rette o e o'.

465. *Un triangolo* OVP *ha due vertici fissi e il terzo* P *descrive un cerchio, passante per* O, *col centro sulla perpendicolare in* V *alla* |OV|; *se il raggio* |OP| *è segato in* P' *dalla perpendicolare a* |VP| *in* V, *il luogo di* P' *è una strofoide. Costruire la tangente in* P'. RETALI.

Soluzione del prof. A. Droz-Farny.

Ad ogni raggio OP corrisponde su questo raggio un punto P'. La perpendicolare ad OV in V taglia il circolo nei punti α e α'. A questi punti, come punto P corrisponde il punto O. La curva è dunque di terzo grado col punto doppio in O. Le tangenti $O\alpha$ e $O\alpha'$ in questo punto sono ortogonali. Se P coincide con uno degli ombelichi del piano, il suo corrispondente P' coincide con esso. La curva è quindi di terzo grado, circolare, con nodo a tangenti ortogonali, ciò che caratterizza una strofoide. La strofoide è retta allorchè il centro del circolo coincide con V. Secondo la quistione 464, se l'isogonale di OV rispetto all'angolo PVP' taglia in T la tangente al circolo nel punto P, la retta CP' sarà tangente in P' alla curva.

468. *Sul raggio vettore condotto dal fuoco* F *di un'ellisse a un punto variabile* P *della curva si prendono a partire da* P *ed* F *nelle direzioni* PF, FP *i segmenti* PA', FA *eguali al semi-grande asse: dimostrare che l'angolo* AOA' *è retto; trovare il luogo del punto* A. RETALI.

Soluzione del prof. A. Droz-Farny.

Facciamo $FP = r$, $OF = c$ e angolo $AFO = \varphi$. Si ha prima

$$
\begin{aligned}
AA' &= a + a - r = 2a - r \\
\overline{OA}^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\varphi \\
\overline{OA_1}^2 &= (a-r)^2 + c^2 + 2(a-r)\,c\cos\varphi \\
\overline{OA}^2 + \overline{OA_1}^2 &= 2a^2 + c^2 - 2ar + (c^2 + r^2 - 2rc\cos\varphi) \\
&= 2a^2 + c^2 - 2ar + \overline{OP}^2 + 2c^2.
\end{aligned}
$$

Ora $r^2 + (2a-r)^2\, 2\,\overline{OP}^2 + 2c^2$, quindi:

$$\overline{OA}^2 + \overline{OA_1}^2 = 4a^2 + r^2 - 4ar = (2a-r)^2 = \overline{AA_1}^2 .$$

L'angolo AOA' è dunque retto.

Il luogo di A è la circonferenza descritta da F come centro con un raggio uguale ad a. Il luogo di A' è quindi una concoide d'ellissi, la *curva di Jerabek* (vedi quistione 466).

470. *Il luogo dei vertici dell'angolo retto i cui lati abbiano date direzioni ed intercettino in una data iperbola equilatera corde tali che la differenza dei loro quadrati sia costante, è un'iperbola equilatera concentrica alla data.*

Considerando poi il caso in cui le corde debbano essere eguali dedurne la seguente proprietà: Due rette ortogonali passanti per un fuoco di una iperbola equilatera intercettano in questa corde eguali: si può generalizzare quest'ultima proprietà?

CELESTRI.

Risoluzione del prof. V. Retali di Milano.

Se $xy = \frac{a^2}{2}$ è la equazione della iperbola equilatera riferita agli assintoti, facendo rotare gli assi attorno all'origine di un angolo α fino a renderli paralleli alle direzioni date, la equazione diviene

$$(x^2 - y^2) \operatorname{sen} 2\alpha + 2xy \cos 2\alpha = a^2$$

e i quadrati delle corde condotte pel punto (ξ, η) parallelamente ai nuovi assi, sono i discriminanti delle equazioni

$$x^2 \operatorname{sen} 2\alpha + 2\eta \,.\, \cos 2\alpha \,.\, x - (\eta^2 \operatorname{sen} 2\alpha + a^2) = 0$$
$$y^2 \operatorname{sen} 2\alpha - 2\xi \,.\, \cos 2\alpha \,.\, y - (\xi^2 \operatorname{sen} 2\alpha - a^2) = 0$$

divisi per $\operatorname{sen}^2 2\alpha$, cioè

$$(1) \qquad \frac{4}{\operatorname{sen}^2 2\alpha}(\eta^2 + a^2 \operatorname{sen} 2\alpha), \qquad \frac{4}{\operatorname{sen}^2 2\alpha}(\xi^2 - a^2 \operatorname{sen} 2\alpha).$$

Scrivendo che la loro differenza costante è $4k^2$, abbiamo per equazione del luogo del punto (ξ, η)

$$\xi^2 - \eta^2 = 2a^2 \operatorname{sen} 2\alpha + k^2 \operatorname{sen}^2 2\alpha\,.$$

Se prendiamo per (ξ, η) un fuoco, ponendo cioè

$$\xi = a(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)$$
$$\eta = a(\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)\,,$$

le espressioni (1) divengono entrambe eguali a $\left(\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2a}\right)^2$, ciò che dimostra la seconda parte dell'enunciato.

Altrimenti; Le equazioni polari dei due rami della iperbola sono

$$\rho = \frac{a}{1 + \sqrt{2}\,.\cos\omega}\,, \qquad \rho' = \frac{-a}{1 - \sqrt{2}\,.\cos\omega}$$

e per le lunghezze di due corde focali ortogonali troviamo:

$$\rho'_\omega - \rho_\omega = \frac{-a}{1 - \sqrt{2}\,.\cos\omega} - \frac{a}{1 + \sqrt{2}\,.\operatorname{sen}\omega} = \frac{2a}{\cos\omega}$$

$$\rho_{\omega + \frac{\pi}{2}} + \rho_{\omega + \frac{3\pi}{2}} = \frac{a}{1 - \sqrt{2}\,.\operatorname{sen}\omega} + \frac{a}{1 + \sqrt{2}\,.\operatorname{sen}\omega} = \frac{2a}{\cos\omega}\,.$$

Il teorema più generale (noto) è il seguente: *una iperbola equilatera omofocale a un'ellisse, intercetta sui lati d'un angolo retto circoscritto all'ellisse due corde eguali.*

471. *Si consideri il parallelogrammo che ha per vertici gli estremi di due diametri coniugati di un'ellisse, e per un punto P di uno di questi diametri si conducano* *due parallele ai lati del parallelogrammo. Se* A', A, B, B' *sono i punti d'incontro di tali rette con l'ellisse,* a *e* b *i semiassi di questo si ha*

$$\overline{PA}^2 + \overline{PA'}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PB'}^2 = 2(a^2 + b^2).$$

CELESTRI.

Risoluzione del prof. V. Retali.

Basta dimostrare che se per un punto P (α, β) interno all'ellisse conduciamo due corde AA', BB' parallele a due diametri coniugati si ha la relazione proposta.

La equazione dell'ellisse riferita a due assi condotti per P (α, β) parallelamente a due diametri coniugati è

$$b'^2(x+\alpha)^2 + a'^2(y+\beta)^2 = a'^2 b'^2;$$

i segmenti PA, PA'; PB, PB' son le radici delle equazioni

$$b'^2 x^2 + 2\alpha b'^2 . x + (\alpha^2 b'^2 + a'^2\beta^2 - a'^2 b'^2) = 0$$
$$a'^2 y^2 + 2\beta a'^2 . x + (\beta^2 a'^2 + b'^2\alpha^2 - a'^2 b'^2) = 0$$

dunque,

$$\overline{PA}^2 + \overline{PA'}^2 = 2a'^2\left(\frac{\alpha^2}{a'^2} - \frac{\beta^2}{b'^2} + 1\right)$$

$$\overline{PB}^2 + \overline{PB'}^2 = 2b'^2\left(\frac{\beta^2}{b'^2} - \frac{\alpha^2}{a'^2} + 1\right)$$

e sommando membro a membro

$$\overline{PA}^2 + \overline{PA'}^2 \overline{PB}^2 + \overline{PB'}^2 = 2(a'^2 + b'^2) = 2(a^2 + b^2).$$

QUISTIONI PROPOSTE

472. Se un determinante $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ è tale che per ogni elemento si abbia

$$a_{rs} = r^s \ .$$

esso è uguale a

$$1!.2!.3!\ldots\ldots n!$$

473. Se da un punto P, $(n-2)$plo sopra una curva C^n d'ordine n, si conduce una retta mobile che seghi ulteriormente la curva nei punti P_1 e P_2, il luogo del punto medio del segmento (reale o ideale) P_1P_2 è in generale una curva C'^n, d'ordine n, di cui P è un punto $(n-1)$plo.

Dare la dimostrazione analitica e sintetica. Esaminare i casi particolari e generalizzare la questione.

G. CARDOSO-LAYNES.

474. Sono dati un triangolo ABC, il suo cerchio inscritto di centro O ed una tangente Σ in un punto S di quest'ultimo. Si fa rotare il fascio O(ABC) di un angolo φ in un senso determinato: sia O(A'B'C') la sua nuova posizione. Le rette OA', OB', OC' incontrano Σ respettivamente in A', B', C'. Dimostrare che AA', BB', CC' si segano in un punto P. Qual'è il luogo di P;

1° se il punto S è fisso e se φ è variabile;

2° se φ è costante ed S è variabile?

475. È dato l'ortocentro del triangolo ABC ed il punto di mezzo del lato BC. I vertici B e C si muovono su di una retta fissa.

1°. Si cerchi l'inviluppo dei lati AB e AC.

2°. I piedi delle altezze abbassati da B e C sono su di una strofoide obliqua.

3°. La retta che congiunge questi due piedi passa per un punto fisso.

4°. Si cerchi il luogo dei punti d'intersezione col circolo ABC del diametro che passa per il punto di mezzo di BC.

5°. Si cerchi il luogo del punto di Lemoine del triangolo.

A. Droz-Farny.

476. Se una curva piana del quart'ordine e della sesta classe, ha un solo punto doppio di inflessione Y, i punti di contatto della curva con le due tangenti uscenti da uno degli altri suoi due punti doppi, sono allineati con Y sulla retta separata armonicamente mediante le due tangenti stazionarie in Y, da quella che unisce Y al terzo punto doppio.

V. Retali.

477. Risolvere l'equazione:

$$z^6 + 2z^5 - 2az^4 + z^2 - 2az + a^2 = 0.$$

F. Sibirani.

478. Date $2n$ variabili indipendenti

$$x_1 x_2 \ldots x_{2n}$$

dimostrare:

1°. Che il numero dei valori algebricamente diversi che può assumere la funzione

$$\varphi(x_1 x_2 \ldots x_{2n}) = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \ldots (x_{2n-1} + x_{2n})$$

per tutte le possibili sostituzioni sulle x, è dato da:

$$\lambda_{2n} = 1 . 3 . 5 \ldots (2n-1).$$

2°. Che, indicando con $\Sigma\varphi(x_1 x_2 \ldots x_{2n})$ la somma dei predetti valori, e con $\Sigma\varphi(x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{2n-2}}) . \varphi(x_{i_{2n-1}} x_{i_{2n}})$ il prodotto della somma dei λ_{2n-2} valori della funzione

$$\varphi(x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{2n-2}}) = (x_{i_1} + x_{i_2}) \ldots (x_{i_{2n-3}} + x_{i_{2n-2}})$$

per la funzione

$$\varphi\,(x_{i_{2n-1}}\, x_{i_{2n}}) = (x_{i_{2n-1}} + x_{i_{2n}})$$

si ha

$$\Sigma\varphi\,(x_1 x_2 \ldots x_{2n}) = \varphi\,(x_1 x_2)\,\Sigma\varphi\,(x_3 x_4 \ldots x_{2n}) + \varphi\,(x_1 x_3)\,\Sigma\varphi\,(x_2 x_4 \ldots x_{2n}) \ldots$$
$$+ \varphi\,(x_1 x_{2n})\,\Sigma\,\varphi\,(x_2 x_3 \ldots x_{2n-1}).$$

U. Scarpis.

QUESTIONI PROPOSTE NEL PERIODICO

rimaste senza risoluzione

Vol. V, pag. 90.

73. Dato un triangolo, non regolare, trovare il luogo geometrico dei punti tali che una delle perpendicolari condotte da ciascuno di essi ai lati uguagli la somma o la differenza delle altre due.

A. Baldassarre.

Vol. VII, pag. 42.

116. Dimostrare che, se nella serie $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots$ si cambia il segno ad ogni termine il cui denominatore ha la forma $4K + 1$ ed è composto di un numero dispari di fattori primi, uguali o disuguali, o ha la forma $4K - 1$ ed è composto d'un numero pari di tali fattori, la somma della serie che si ottiene è $\frac{\pi}{2}$. In altri termini.

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \ldots = \frac{\pi}{2}.$$

E. Cesàro.

117. Dimostrare che, se si cambiano i segni dei termini nella serie

$$\varphi(1) + \frac{\varphi(3)}{9} + \frac{\varphi(5)}{25} + \frac{\varphi(7)}{49} + \ldots$$

seguendo la legge indicata nella precedente questione, la somma della serie che si ottiene è uguale a

$$\frac{48}{\pi^3}\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \ldots\right).$$

E. Cesàro.

Vol. VII, pag. 161.

136. Se due gruppi di n numeri tutti differenti fra loro e da zero si possono porre in corrispondenza univoca di proporzionalità al più in m modi ($m > 1$), m sarà un divisore di n, ed i numeri dei due gruppi potranno essere tutti reali soltanto per $m = 2$.

G. Sforza.

Vol. VIII, anno 1893, pag. 78

158. Si ponga

$$\begin{aligned} \alpha' &= (\alpha s - \beta r)\mathrm{M} + (\gamma s - \delta r)\mathrm{N} \\ \beta' &= (\beta m - \alpha n)\mathrm{M} + (\delta m - \gamma n)\mathrm{N} \\ \gamma' &= (\alpha s - \beta r)\mathrm{R} + (\gamma s - \delta r)\mathrm{S} \\ \delta' &= (\beta m - \alpha n)\mathrm{R} + (\delta m - \gamma n)\mathrm{S} \end{aligned} \tag{A}$$

ed inoltre

$$\mathrm{MS} - \mathrm{NR} = ms - nr = 1. \tag{B}$$

Dalle (A), lineari e di determinante 1 per rispetto alle $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ si deduce

$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

È vera la reciproca? Se cioè $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ sono espresse per mezzo delle $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ da formole lineari di determinante 1, e se

$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = \alpha\delta - \beta\gamma$$

le $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ saranno sempre riducibili alla forma definita dalla (A) e dalle (B)?

G. Frattini.

Vol. VIII, pag. 132.

161. In un triangolo ABC, indicati con H l'ortocentro e con G il baricentro si conoscono le distanze $\mathrm{AH} = \alpha$, $\mathrm{GH} = l$, insieme all'angolo i di queste rette: esprimere le tangenti degli angoli A, B, C e le condizioni affinchè la GH sia parallela a ciascuno dei tre lati.

G. Bellacchi.

211. Presi ad arbitrio due punti L, M su di una conica φ, si trovano le proiezioni ortogonali H, K del polo della corda LM sugli assi a, b di φ, ed il simmetrico M' di M rispetto al centro C. si hanno le proprietà seguenti:

1° il simmetrico di M' rispetto ad a (a b) è allineato con K (con H) e con L;

2° i quattro punti L, M', HK . $\varphi \equiv$ P, Q sono su una circonferenza.

A. Del Re.

Vol. IX, pag. 121.

212. La conica che passa per i vertici di un rettangolo, di cui due lati sono gli assi di una conica φ, e pel punto all'infinito di uno dei diametri coniugati eguali di φ, passa pure pel punto all'infinito dell'altro di questi due diametri, e taglia φ in quattro punti conciclici.

A. Del Re.

Vol. IX, pag. 122.

216. Se aa', bb' sono due coppie di diametri coniugati di una conica φ, di centro C, tali che si abbia, in grandezza e verso $\widehat{aa'} = \widehat{bb'}$, e sono ML' due punti arbitrari di φ, conducendo per M le parallele ad a', b' le quali seghino di nuovo φ, ordinatamente in M_1, M_2, e, ponendo $M_1L' . a' \equiv H$, $M_2L' . b' \equiv K$, si avranno le proprietà seguenti: 1° la retta HK taglierà φ in due punti che insieme ad M, C ed al simmetrico L di L' rispetto a C, sono su di un'iperbole, che ha gli assintoti paralleli ad a', b'; 2° sostituendo a' con a, e b' con b, e, chiamando H', K' i punti che, dopo ciò, vengono a sostituire H, K, il punto $HK . H'K' \equiv S$ rimane fisso, quando $\widehat{aa'} = \widehat{bb'}$ varia.

Vol. IX. pag. 160. A. Del Re.

228. Per un punto S, ad un cerchio φ si conducano le secanti arbitrarie SBC, SMM′, e la secante SAD, perpendicolare al diametro che passa per B; si avrà

$$\tan\frac{BC}{2} . \tan\frac{BM}{2} . \tan\frac{BM'}{2} - \tan^2\frac{BA}{2}\left(\tan\frac{BM}{2} + \tan\frac{BM'}{2} - \tan\frac{BC}{2}\right) = 0.$$

(Continua) A. Del Re.

BIBLIOGRAFIA

Rebière. — *Mathématiques et Mathématiciens* (Pensées et Curiosités). — Parigi, Nony, 1898 (3ª edizione).

Questo libro, senza formule e senza figure, si legge con interesse e senza troppa applicazione dalla prima all'ultima pagina.

Può considerarsi composto di quattro parti: nella prima, che è certo la più importante, sono raccolti molti pensieri, sia sull'oggetto e sul carattere della Matematica, sia sui metodi, sia infine su questioni particolari; pensieri espressi tanto dai matematici stessi, quanto da filosofi, da storici ecc.

Descartes, Pascal, Newton, Eulero, Lagrange, Laplace, Jacobi, Chasles, per tacere di tanti e tanti altri fino a Bertrand, a Hermite e a Poincaré si susseguono e si alternano con Erodoto e Cicerone, con Napoleone I, Voltaire, Victor Hugo, ecc.

Da un lato Lamartine afferma che " l'enseignement mathématique fait l'homme " machine et degrade la pensée, " dall'altro Napoleone proclama che " l'avance- " ment, le perfectionnement des mathèmatiques sont liés à la prosperité de l'État " e Ed. Quinet è convinto " qu'il est tal problème de calcul... qui suppose autant " d'inspiration que la plus belle ode de Pyndare! ".

Voltaire osserva che " il faut bien distinguer entre la Géometrie utile et la " géometrie curieuse,... ", mentre Jacobi all'opposto pensa che lo scopo unico della Scienza è l'onore dello spirito umano, e a questo titolo una questione di teoria dei numeri vale quanto una riguardante il sistema del mondo.

Vorrei sopra ogni soggetto riportare alcuni brani, ma la ristrettezza dello spazio non me lo consente: mi limiterò perciò a riportare i titoli dei vari capitoli di questa prima parte.

Oggetto e carattere delle Matematiche. — Nozioni primitive. — Metodi. — Geometria e Analisi. — I numeri, i simboli e le funzioni. — Il limite, l'infinito e l'infinitesimo. — Matematiche applicate. — Sistema metrico. — Geometria descrittiva. — Meccanica. — Astronomia. — Probabilità. — Insegnamento. — Storia — Filosofia e Morale.

La 2ª parte contiene: Varietà e Aneddoti. L'autore dice nella prefazione: " nous nous sommes permis quand même, sur un sujet austère, quelques sourires " mesurés ". Questa dichiarazione riguarda evidentemente questa seconda parte, dove però mi sembra che l'autore abbia qualche volta sorpassati i limiti che si era imposto: in essa infatti si trovano riportate alcune cose affatto puerili e che stonano col resto del libro; per fortuna son poche, e si hanno in compenso degli interessanti e dilettevoli aneddoti della vita dei grandi matematici e una varietà straordinaria di scritti riguardanti più o meno da vicino la Matematica ed i Matematici, e che sono improntati ad un vero spirito di buona lega.

La 3ª parte contiene i paradossi e le singolarità: la materia è scelta assai bene. Nella 4ª infine si trovano moltissimi problemi ricreativi.

In conclusione il libro del Rebière, tolto quel piccolo difetto a cui sopra ho accennato, mi sembra che debba meritare l'attenzione dei matematici: nella prima parte infatti essi trovano dei pensieri che a lor volta fanno pensare (mi si conceda l'espressione): gli aneddoti e le varietà accrescono la cultura generale e alcuni possono fornire anche un certo contributo alla conoscenza della Storia della Matematica; infine un requisito, non del tutto trascurabile, di ogni parte del libro è che esso diverte. " La matières de géometrie sont si serieuses d'elles mêmes, qu'il est " avantageux qu'il s'offre quelque occasion pour le rendre un peu divertissantes ". Così dice l'immortale Pascal.

G. C.-L.

E. Fourrey. — *Récréations arithmétiques.* — Parigi, Nony, 1899.

" .... il n'existe à l'heure actuelle, à notre connaissance, sur les Récréations " arithmétiques, que des ouvrages ou trop anciens ou trop savant pour être à " la portée de tout le monde. Le present volume a pour object de combler cette " lacune. Sans rien sacrifier à la rigueur, nous avons seulement supposé chez nos " lecteurs la connaissance des opérations et règles pratiques de l'Arithmétique. " Nous rappelons, d'ailleurs, dans une Introduction, les quelques noctions théo- " riques necessaires ".

Così nella prefazione l'A. espone l'indole del libro.

I vari problemi che vi sono trattati non sono naturalmente originali, almeno in gran maggioranza, ma la materia è ben disposta e si nota sempre assai chiarezza nell'esposizione.

L'avere intercalato le nozioni teoriche alle applicazioni ricreative fa sì che questo libro raggiunga il duplice scopo d'istruire divertendo.

G. C.-L.

Giuseppe Ingrami. — *Elementi di geometria per le scuole secondarie superiori.* — Bologna, G. Cenerelli, 1899.

Questo libro si manifesta frutto di lunghe meditazioni e di uno studio accurato e intelligente dei più recenti lavori sui fondamenti della geometria. Noto anzitutto che vengono trattate (ciò che costituisce un pregio) le principali proprietà che si riferiscono alla generazione degli enti geometrici fondamentali (retta, piano, spazio, fascio di raggi e di piani, stella di raggi e di piani) ed alla intersecabilità di rette e piani fra loro, indipendentemente dal concetto di eguaglianza. La via scelta è la seguente. Preso come concetto primitivo, oltre al concetto di punto (la cui esistenza è ammessa dal post. I: *Esistono infiniti elementi che noi chiamiamo punti*), quello di segmento, ponendo il post. II: (1°. *Due punti qualunque non coincidenti determinano in modo unico una classe di infiniti punti, alla quale appartengono anche i due considerati: tale classe noi chiamiamo e comprendiamo colla parola segmento;* 2°. *Due punti qualunque di un segmento determinano un altro segmento appartenente al primo*), e chiesta l'esistenza dei prolungamenti di un segmento mediante il post. III: (1°. *Dato un segmento qualunque* $\overline{AB}$, *restano determinate altre due classi di infiniti punti: la prima classe è di punti* X *tali che per ognuno di essi riesca il punto* B *interno ad* $\overline{AX}$ *e si chiama il prolungamento di* $\overline{AB}$ *dalla parte di* B; *la seconda è la classe di punti* Y *tali che per ognuno di essi il punto* A *risulti interno a* $\overline{BY}$ *e nomasi il prolungamento di* $\overline{AB}$ *dalla parte di* A; 2°. *Se* M *sia un punto interno ad* $\overline{AB}$ *il prolungamento di questo dalla parte di* B *coincide coll'analogo di* $\overline{MB}$ *e quello dalla parte di* A *coll'analogo di* $\overline{MA}$: *il prolungamento di* $\overline{AM}$ *dalla parte di* M *si compone di* $\overline{MB}$ *e del suo prolungamento dalla parte di* B: *analogamente per* $\overline{BM}$), definisce la retta come la classe di infiniti punti formata da un segmento e da' suoi due prolungamenti, e ne stabilisce le principali proprietà di posizione fondandosi pure su altri due postulati, uno destinato ad escludere il caso della retta chiusa e l'altro destinato a chiedere l'esistenza di punti fuori di una retta data.

Quanto al piano ed allo spazio l'A. li genera (ammettendo, dopo aver parlato del piano, l'esistenza di punti fuori di un piano dato) proiettando i punti del contorno rispettivamente di un triangolo o di un tetraedro mediante raggi aventi l'origine nell'interno di questo triangolo o di questo tetraedro, e ne svolge le principali proprietà di posizione, muovendo dal post. VI: *Dati tre punti* A, B, C *non collineari, le tre classi di segmenti determinate la prima da* A *con ogni punto di* $\overline{BC}$, *la seconda da* B *con ognuno di* $\overline{AC}$, *la terza da* C *con ognuno di* $\overline{AB}$, *soddisfano alle seguenti proprietà:* 1° *ogni segmento dell'una classe ha un punto in comune con ciascun segmento delle altre due;* 2° *il raggio determinato da uno dei tre punti dati come origine e da un punto interno ad un segmento delle altre due classi, incontra il segmento individuato dagli altri due punti dati.* La genesi di piano e di spazio data dall'A. è notevole, perchè non ha bisogno di alcuna nozione sulle rette parallele. Oltre agli argomenti fin qui considerati vengono svolte nella prima parte le principali proprietà di posizione relative ai poligoni piani, agli angoloidi ed ai poliedri.

Riguardo a questa prima parte (cap. I-V) del libro osservo che il post. II ha bisogno di essere completato, aggiungendo che *se un punto* M *trovasi nel segmento* $\overline{AB}$, *questo si compone dei segmenti* $\overline{AM}$, $\overline{BM}$ (cioè *ogni suo punto appartiene o all'uno o all'altro di questi segmenti*, mentre dal detto postulato si può dedurre soltanto che ogni punto di $\overline{AM}$ e di $\overline{BM}$ appartiene ad $\overline{AB}$). Di questa proprietà, che non può nemmeno dedursi dal postulato III, si fa uso (oltre che esplicitamente in più punti, come per es. nella dim. del cor. n. 16) implicitamente nella dimostrazione del teorema (pag. 10): *Una retta è determinata da due suoi punti qualunque.*

In vero la prima parte di quella dimostrazione più esplicitamente può esporsi così. Si vuol dimostrare che, se M è un punto di $\overline{AB}$ la retta AM coincide con la AB. Difatti se un punto X è nella AM, esso è o sul prolungamento MA (*) che coincide (post. III, 2°) col prolung. BA, o in $\overline{AM}$ che appartiene (post. II, 2°) ad $\overline{AB}$ o sul prolung. AM che si compone (post. III, 2°) di $\overline{MB}$ (il quale, post. II, 2°, appartiene ad $\overline{AB}$) e del prolung. AB; dunque in ogni caso è sulla AB. Sia ora Y un punto della AB. Esso appartiene o al prolung. BA che coincide (post. III, 2°) col prolung. MA (quindi appartiene alla AM), o al prolungamento AB il quale (post. III, 2°) coincide col prolung. MB, il quale appartiene (post. III, 2°, seconda parte) al prolung. AM (quindi Y appartiene alla AM), o ad $\overline{AB}$, e perciò *o nel segmento* $\overline{AM}$ (e quindi nella AM) *o nel segmento* $\overline{MB}$ che fa parte (post. III, 2°) del prolung. AM (e perciò nella AM).

Inoltre si fa uso ripetutamente (v. per es. la dim. del t. n. 15, la parte 3ª della dim. del t. n. 17 ecc.) della proprietà che dato un triangolo ABC, se F è interno a un segmento che projetta da C un punto M di $\overline{AB}$, *il prolungamento di* $\overline{FA}$ *dalla parte di* F incontra BC, mentre nel post. VI è detto soltanto che il raggio AF incontra $\overline{BC}$, senza escludere così che l'incontro cada in $\overline{AF}$. È vero che tale proprietà può dedursi, per es. ragionando per assurdo, dal post. VI, ma non è conforme al metodo rigoroso che l'A. intende seguire, il farne uso senza averla dimostrata.

Il cap. IV è seguito da una nota, la quale introducendo un postulato non necessario, può esser sostituita a una parte del capitolo stesso da quegli insegnanti che credessero opportuno rimandare ad altro tempo le nozioni sul tetraedro in esso contenute.

La seconda parte (cap. VI-XIII) è dedicata alla trattazione dei seguenti argomenti: confronto fra i segmenti; confronto fra gli angoli; relazioni fra gli elementi dei poligoni; rette perpendicolari e oblique; parallelismo di rette e piani; confronto fra i diedri, piani perpendicolari; relazioni fra gli elementi degli angoloidi e dei poliedri; parallelogrammi, prismi, parallelepipedi. In questa parte l'A., assunto, seguendo la via tracciata dal Veronese, come primitivo il concetto di eguaglianza di due segmenti, dà separatamente la definizione di eguaglianza (diversa da caso a caso) tra gli angoli, i poligoni, i diedri, gli angoloidi, i poliedri, le striscie e gli strati, riservandosi di dimostrare, in un'appendice che segue il cap. XIII, che tutte quelle definizioni si possono sostituire con una sola. In ciò non mi trovo affatto d'accordo con l'egregio Collega, giacchè mi pare che col metodo da lui seguito si complica di molto la teoria della eguaglianza per il solo fatto di voler evitare di dar subito la definizione generale che, per quanto mi risulta dalla esperienza che ne ho fatto in iscuola, non trova gravi difficoltà ad esser afferrata anche dalla mente di alunni mediocri, qualora si proceda nei primordi abbastanza lentamente e si facciano opportuni disegni ed esercizi.

Da questo punto in poi il libro non differisce gran che dai comuni, come afferma l'A. nella prefazione. Vi è una terza parte (cap. XIV-XIX) che tratta del circolo e della sfera, dei poligoni e poliedri regolari, del cilindro e del cono in relazione alla teoria dell'eguaglianza, e che si chiude con la risoluzione dei problemi fondamentali di planimetria e stereometria. Nella quarta parte si svolge la teoria dell'equivalenza delle grandezze di 2° genere (cap. XX), partendo dalla definizione della scomposizione in parti rispettivamente eguali, e di quella delle grandezze di 3° genere (cap. XXI). Viene poi (cap. XXII) la teoria delle proporzioni trattata col metodo degli equimultipli e seguita dalle applicazioni ai segmenti

(*) Dirò per brevità con l'A. prolungamento MA invece di prolungamento di $\overline{MA}$ dalla parte di A.

proporzionali e (cap. XXIII) alla teoria della similitudine fondata sulla definizione: Due figure si dicono simili se fra i punti loro si possa porre una corrispondenza univoca tale che i segmenti determinati dai punti dell'una figura due a due, siano proporzionali ai corrispondenti dell'altra. Infine si ha (cap. XXIV) la teoria della misura con alcune applicazioni dell'algebra alla geometria e alcune brevi nozioni di trigonometria piana. Chiude il lavoro una raccolta di 231 esercizi.

Come risulta da quanto si disse, gli argomenti di stereometria sono alternati con gli analoghi di planimetria, però questi ultimi possono essere svolti tutti in precedenza, purchè (come avverte l'A. nella Prefaz.) si modifichi la dimostrazione del teor. (§ 173) " Due rette parallele ad una terza lo sono fra loro, " e si premetta a quella del lemma (§ 282) " Esiste un angolo quinta parte di due rette " la nota che trovasi in fine del libro, nella quale è riportata la dimostrazione planimetrica che il Faifofer nella 11ª edizione dei suoi *Elementi di geometria* dà del teorema relativo a due triangoli omologici aventi due coppie di lati corrispondenti paralleli.

Concludo con l'affermare che il libro è fatto coscienziosamente, e che contiene rilevanti pregi sia dal lato scientifico che didattico, sì da meritare il favore di quegli insegnanti che non temono di affrontare qualche difficoltà pur di ottenere che il loro insegnamento sia fondato sui notevoli risultati ottenuti dalla critica moderna relativamente alle basi della geometria elementare.

Sondrio, 1 giugno 1899.

FRANCESCO PALATINI.

NECROLOGIA

Nella notte dal 12 al 13 ottobre cessava di vivere a soli 29 anni il

Dott. FERRUCCIO MARIANTONI

professore di matematica nella R. Scuola Normale di Forlì

noto ai lettori di questo Periodico per alcuni eleganti articoli quivi inseriti. La scomparsa del Mariantoni, mentre lascia un profondo dolore nell'animo di quanti ebbero la fortuna di conoscere da vicino le sue elevate doti di cuore e di mente, costituisce pure una perdita considerevole per le nostre scuole secondarie, dov'egli insegnava con santo entusiasmo e con non comune abilità.

GIULIO LAZZERI — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 30 Ottobre 1899.

SULLE CONFIGURAZIONI NELLO SPAZIO

1. Sieno date n sfere $S_1, S_2 \dots S_n$. I loro $\binom{n}{2}$ piani radicali π_{ih}, i loro $\binom{n}{3}$ assi radicali r_{ihk}, i loro $\binom{n}{4}$ centri radicali P_{ihkl} (i, h, k, l essendo quattro degli indici $1, 2, 3 \dots n$) formano una figura che diremo $\Gamma_{n,4}$.

Ogni punto P_{ihkl} appartiene a

$$\binom{4}{2} = 6 \text{ piani } \pi_{ih}, \pi_{ik}, \pi_{il}, \pi_{hk}, \pi_{hl}, \pi_{kl} \text{ e a}$$

$$\binom{4}{3} = 4 \text{ rette } r_{hkl}, r_{kli}, r_{lih}, r_{ihk}.$$

Ogni retta r_{ihk} appartiene a tre piani $\pi_{hk}, \pi_{ki}, \pi_{ih}$ e contiene $n-3$ punti $P_{i,h,k,l}$, dove l è uno qualunque degli n indici dati, esclusi i, h, k.

Ogni piano π_{ih} contiene $(n-2)$ rette r_{ihk} e $\binom{n-2}{2}$ punti P_{ihkl} che formano una configurazione piana $C_{n-2,2}$ di ordine n e classe 2. (*)

Una tale figura $\Gamma_{n,4}$ si chiama *configurazione di ordine* n *e classe 4.*

2. Questo esempio fa nascere naturalmente l'idea di estendere tale definizione nel modo seguente.

Configurazione di ordine n *e classe* ν *è la figura* $\Gamma_{n,\nu}$ *formata da* $\binom{n}{\nu}$ *punti,* $\binom{n}{\nu-1}$ *rette e* $\binom{n}{\nu-2}$ *piani (che si possono rappresentare colle combinazioni a* ν *a* ν, *a* $\nu-1$ *a* $\nu-1$ *e a* $\nu-2$ *a* $\nu-2$ *rispettivamente di* n *indici* 1, 2, 3 ... n), *i quali verificano le condizioni seguenti.*

1°. *Ogni punto appartiene a tutte le* ν *rette i cui simboli si ottengono da quello del punto sopprimendo uno dei suoi indici.*

2°. *Ogni retta appartiene a tutti i* $\nu-1$ *piani i cui simboli si ottengono da quello della retta sopprimendo uno dei suoi indici.*

Se $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ sono gli n indici $1, 2, 3 \dots n$, scritti in un ordine qualunque, e poniamo per brevità (A_r) al posto di $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$, è chiaro che (A_ν), $(A_{\nu-1})$, $(A_{\nu-2})$ sono rispettivamente i simboli di un punto, di una retta e di un piano della configurazione $\Gamma_{n,\nu}$. Dalle proprietà precedenti discendono quest'altre.

(*) Cfr. LAZZERI, *Le configurazioni piane di Caporali.* "Periodico di Matematica", Tomo XIII, Fasc. I, 1897.

3°. *Ogni piano* $(A_{\nu-2})$ *contiene* $(n-\nu+2)$ *rette* $(A_{\nu-2}\,\alpha_r)$ *e* $\binom{n-\nu+2}{2}$ *punti* $(A_{\nu-2}\,\alpha_r\,\alpha_s)$ $(r, s)=(\nu-1, \nu, \nu+1, \ldots n)$. *Questi punti e rette formano una* $C_{n-\nu+2,2}$.

4°. *Tutti i piani e rette che passano per un vertice di* $\Gamma_{n,\nu}$ *formano una* $\Gamma_{\nu,2}$.

Ammetteremo per ora l'esistenza di queste $\Gamma_{n,\nu}$, delle quali del resto abbiamo già dato un esempio, e ne studieremo alcune proprietà che ci permetteranno poi di costituirle effettivamente.

3. Notiamo intanto le seguenti proprietà evidenti.

1°. *Una* $\Gamma_{n,1}$ *è un gruppo di punti in linea retta.*

2°. *Una* $\Gamma_{n,2}$ *è formata dalle* n *rette e dagli* $\binom{n}{2}$ *vertici di un* n-*latero piano completo, e dal piano di questo.*

3°. *Una* $\Gamma_{n,3}$ *è un* n— *edro completo.*

4°. *Una* $\Gamma_{n,n}$ *è la figura formata da* n *piani concorrenti in un punto e dalle* $\binom{n}{2}$ *rette d'intersezione a due a due.*

5°. *Una* $\Gamma_{n,n-1}$ *è la figura formata da* n *punti nello spazio, dalle rette che li congiungono due a due e dai piani che gli congiungano tre a tre.*

4. *Se in una* $\Gamma_{n,\nu}$ *separiamo un indice dai rimanenti, tutti gli elementi che contengono questo indice formano una* $\Gamma_{n-1,\nu-1}$, *quelli che non lo contengono una* $\Gamma_{n-1,\nu}$, *ogni piano della quale passa per una ed una sola retta della* $\Gamma_{n-1,\nu-1}$.

Chiamando β_1 l'indice considerato e $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$ i rimanenti, scritti in un ordine qualunque, gli elementi i cui simboli contengono β_1 sono i punti $(\beta_1\,A_{\nu-1})$, le rette $(\beta_1\,A_{\nu-2})$ e i piani $(\beta_1\,A_{\nu-3})$ che formano una configurazione di ordine $n-1$ e classe $\nu-1$, perchè ogni punto appartiene a $\nu-1$ rette ed ogni retta a $\nu-2$ piani, e che chiameremo $\Gamma^{\beta_1}_{n-1,\nu-1}$.

Gli elementi che non contengono β_1, cioè i punti (A_ν), le rette $(A_{\nu-1})$ i piani $(A_{\nu-2})$ formano evidentemente una $\Gamma_{n-1,\nu}$. Ogni sua retta $(A_{\nu-1})$ contiene uno ed un solo punto $(A_{\nu-1}\,\beta_1)$ della $\Gamma^{\beta_1}_{n-1,\nu-1}$, ogni suo piano $(A_{\nu-2})$ contiene una ed una sola retta $(A_{\nu-2}\,\beta_1)$ della medesima.

Diremo che la $\Gamma_{n-1,\nu}$ *è ipercircoscritta alla* $\Gamma^{\beta_1}_{n-1,\nu-1}$, *ovvero che la* $\Gamma^{\beta_1}_{n-1,\nu-1}$ *è iperinscritta alla* $\Gamma_{n-1,\nu}$.

Una $\Gamma_{n,\nu}$ si può in n modi scomporre in una $\Gamma_{n-1,\nu-1}$ e in una $\Gamma_{n-1,\nu}$ ipercircoscritta ad essa.

5. *Una* $\Gamma_{n,\nu}$ *si può scomporre in una* $\Gamma_{n-2,\nu-2}$, *in due* $\Gamma_{n-2,\nu-1}$ *ipercircoscritte ad essa, in una* $\Gamma_{n-2,\nu}$ *ipercircoscritta a queste.*

Separiamo due indici β_1, β_2 dagli altri, che, scritti in un ordine qualunque, chiameremo $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{\nu-2}$.

Tutti gli elementi i cui simboli contengono β_1, β_2, cioè i punti $(\beta_1\,\beta_2\,A_{\nu-2})$, le rette $(\beta_1\,\beta_2\,A_{\nu-3})$ i piani $(\beta_1\,\beta_2\,A_{\nu-4})$ formano una configurazione di ordine $n-2$ e di classe $\nu-2$, che indicheremo con $\Gamma^{\beta_1\beta_2}_{n-2,\nu-2}$, perchè ogni punto appartiene a $\nu-2$, rette ed ogni retta a $\nu-3$ piani.

Tutti gli elementi i cui simboli contengono β_1 ma non β_2, cioè i punti $(\beta_1 A_{\nu-1})$, le rette $(\beta_1 A_{\nu-2})$, i piani $(\beta_1 A_{\nu-3})$ formano una $\Gamma^{(\beta_1)}_{n-2,\nu-1}$ ipercircoscritta alla $\Gamma^{(\beta_1\beta_2)}_{n-2,\nu-2}$.

Tutti gli elementi i cui simboli contengono β_2 e non contengono β_1 formano un'altra $\Gamma^{\beta_2}_{n-2,\nu-1}$ ipercircoscritta alla $\Gamma^{\beta_1\beta_2}_{n-2,\nu-2}$.

Infine tutti gli elementi come (A_ν), $(A_{\nu-1})$, $(A_{\nu-2})$ che non contengono nè β_1 nè β_2, formano una $\Gamma_{n-2,\nu}$ ipercircoscritta alle $\Gamma^{(\beta_1)}_{n-2,\nu-1}$ $\Gamma^{\beta_2}_{n-2,\nu-1}$.

Ogni piano $(A_{\nu-2})$ di questa contiene uno ed un sol punto $(A_{\nu-2}\beta_1\beta_2)$ della $\Gamma^{\beta_1\beta_2}_{n-2,\nu-2}$.

Diremo che la $\Gamma_{n-2,\nu}$ è circoscritta alla $\Gamma^{\beta_1\beta_2}_{n-2,\nu-2}$, o che questa è inscritta alla $\Gamma_{n-2,\nu}$.

Una $\Gamma_{n,\nu}$ si può scomporre nella maniera indicata in $\binom{n}{2}$ modi.

6. *Se* k *è un numero minore di* ν *e di* $n-\nu$, *una* $\Gamma_{n,\nu}$, *si può in* $\binom{n}{k}$ *modi scomporre in*

$$
\begin{array}{lll}
1=\binom{k}{0} & \textit{configurazioni} & \Gamma_{n-k,\nu-k} \\
\binom{k}{1} & \text{»} & \Gamma_{n-k,\nu-k+1} \\
\binom{k}{2} & \text{»} & \Gamma_{n-k,\nu-k+2} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\binom{k}{h} & \text{»} & \Gamma_{n-k,\nu-k+h} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\binom{k}{k-1} & \text{»} & \Gamma_{n-k,\nu-1} \\
1=\binom{k}{k} & \text{»} & \Gamma_{\nu-k,\nu}
\end{array}
$$

Scegliamo k indici arbitrari $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_k$ e siano $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{\nu-k}$ i rimanenti, scritti in un ordine qualunque, e rappresentiamo con B_r il gruppo d'indici $\beta_1\beta_2\ldots\beta_r$ e con A_s il gruppo d'indici $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s$.

Tutti gli elementi, i cui simboli contengono tutti i k indici $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_k$, cioè i punti $(B_k A_{\nu-k})$, le rette $(B_k A_{\nu-k-1})$ e i piani $(B_k A_{\nu-k-2})$ formano una configurazione di ordine $n-k$ e classe $\nu-k$ che chiameremo $\Gamma^{(Bk)}_{n-k,\nu-k}$.

Tutti gli elementi, i cui simboli contengono $k-1$ indici β, per es. $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_{k-1}$, cioè i punti $(B_{k-1} A_{\nu-k+1})$, le rette $(B_{k-1} A_{\nu-k})$, i piani $(B_{k-1} A_{\nu-k-1})$ formano una configurazione di ordine $n-k$ e classe

$\nu - k + 1$, che chiameremo $\Gamma^{(B_{k-1})}_{n-k,\nu-k+1}$. Le configurazioni di questo tipo sono $\binom{k}{1}$ e sono tutte ipercircoscritte alla $\Gamma^{(B_k)}_{n-k,\nu-k}$, perchè ogni retta $(B_{k-1}A_{\nu-k})$ contiene un punto $(B_k A_{\nu-k})$ ed ogni piano $(B_{k-1}A_{\nu-k-1})$ contiene una retta $(B_k A_{\nu-k-1})$.

Tutti gli elementi, i cui simboli contengono $k-2$ indici β, per es. $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_{k-2}$, cioè i punti $(B_{k-2} A_{\nu-k+2})$, le rette $(B_{k-2} A_{\nu-k+1})$ e i piani $(B_{k-2}A_{\nu-k})$ formano una configurazione di ordine $n-k$ e classe $\nu-k+2$, che chiameremo $\Gamma^{(B_{k-2})}_{n-k,\nu-k+2}$. Le configurazioni di questo tipo sono $\binom{k}{2}$, sono tutte circoscritte alla $\Gamma^{(B_k)}_{n-k,\nu-k}$, e ciascuna è ipercircoscritta a due $\Gamma^{(B_{k-1})}_{n-k,\nu-k+1}$.

. . . .

Tutti gli elementi, i cui simboli contengono $k-h$ indici β, per es. $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{k-h}$, cioè i punti $(B_{k-h} A_{\nu-k+h})$, le rette $(A_{k-h} A_{\nu-k+h-1})$ e i piani $(B_{k-h,\nu-k+h-2})$ formano una configurazione di ordine $n-k$ e classe $\nu-k+h$, che chiameremo $\Gamma^{(B_{k-h})}_{n-k,n-k+h}$. Le configurazioni di questo tipo sono $\binom{k}{h}$. Ognuna di esse è ipercircoscritta ad h configurazioni $\Gamma^{(B_{k-h+1})}_{n-k,n-k+h-1}$ (a quelle che si ottengono aggiungendo ai $k-h$ indici β uno qualunque dei rimanenti); ed è circoscritta ad $\binom{h}{2}$ configurazioni $\Gamma^{(B_{k-h+2})}_{n-k,n-k+h-2}$ (a quelle che si ottengono aggiungendo ai $k-h$ indici β due dei rimanenti).

. . . .

Finalmente gli elementi i cui simboli non contengono alcuno degl'indici β, cioè i punti (A_ν), le rette $(A_{\nu-1})$ e i piani $(A_{\nu-2})$ formano una configurazione $\Gamma_{n-k,\nu}$ di ordine $n-k$ e classe ν, che è ipercircoscritta alle $\binom{k}{k-1}$ configurazioni $\Gamma^{\beta_r}_{n-k,\nu-1}$ e circoscritta alle $\binom{k}{k-2}$ configurazioni $\Gamma^{\beta_i \beta_r}_{n-k,\nu-2}$.

6. *Se due configurazioni $\Gamma^{(1)}_{n,\nu+1}$, $\Gamma^{(2)}_{n,\nu+1}$ sono ipercircoscritte ad una stessa $\Gamma^{(1,2)}_{n,\nu}$, esse sono iperinscritte in una $\Gamma_{n,\nu+2}$, che è circoscritta alla $\Gamma^{(1,2)}_{n,\nu}$.*

Rappresentiamo con $(A_\nu)^{(12)}$, $(A_{\nu+1})^{(1)}$, $(A_{\nu+1})^{(2)}$ i punti, con $(A_{\nu-1})^{(12)}$, $(A_\nu)^{(1)}$, $(A_\nu)^{(2)}$ le rette, con $(A_{\nu-2})^{(12)}$, $(A_{\nu-1})^{(1)}$, $(A_{\nu-1})^{(2)}$ i piani delle $\Gamma^{(12)}_{n,\nu}$, $\Gamma^{(1)}_{n,\nu+1}$, $\Gamma^{(1)}_{n,\nu+1}$.

I due tetraedri, che hanno per piani corrispondenti $(A_{\nu-2}\,\alpha_r)^{(1)}$, $(A_{\nu-2}\,\alpha_r)^{(2)}$ $(r = \nu-1, \nu, \nu+1, \nu+2)$ sono omologici, perchè questi piani s'incontrano per ipotesi nelle rette $(A_{\nu-2}\,\alpha_r)^{(12)}$, appartenenti al piano $(A_{\nu-2})^{(1,2)}$. Ne segue che i piani $(A_{\nu-2}\,\alpha_r\,\alpha_s)$ che congiungono le coppie di spigoli corrispondenti $(A_{\nu-2}\,\alpha_r\,\alpha_s)^{(1)}$, $(A_{\nu-2}\,\alpha_r\,\alpha_s)^{(2)}$, e le rette $(A_{\nu-2}\,\alpha_r\,\alpha_r\,\alpha_s)$, che congiungono le coppie di vertici corrispondenti, concorrono in un punto $(A_{\nu+2})$.

Nella stessa guisa si dimostra che tutte le rette e piani, il cui simbolo si ottiene da $(A_{\nu+2})$ sopprimendo uno o due indici passano per il punto $(A_{\nu+2})$, e che tutti i piani, il cui simbolo si ottiene da $(A_{\nu+1})$ sopprimendo un indice, passano per la retta $(A_{\nu+1})$. Dunque i punti $(A_{\nu+2})$, le rette $(A_{\nu+1})$, i piani (A_ν) formano una $\Gamma_{n,\nu+2}$ ipercircoscritta a $\Gamma^{(1)}_{n,\nu+2}$, e a $\Gamma^{(2)}_{n,\nu+1}$ e circoscritta a $\Gamma^{(1,2)}_{n,\nu}$.

Le quattro configurazioni insieme formano un $\Gamma_{n+2,\nu}$. Infatti il numero complessivo di punti è

$$\binom{n}{\nu}+2\binom{n}{\nu+1}+\binom{n}{\nu+2}=\binom{2}{2}\binom{n}{\nu}+\binom{2}{1}\binom{n}{\nu+1}+\binom{2}{0}\binom{n}{\nu+2}=\binom{n+2}{\nu+2}.$$

In simil guisa si trova che il numero complessivo di rette è $\binom{n+2}{\nu}$, e quella dei piani $\binom{n+2}{\nu}$, ed è facile vedere che per ogni punto passano $\nu+2$ rette e per ogni retta $\nu+1$ piani,

7. *Se tre configurazioni $\Gamma^{(2,3)}_{n,\nu+1}$, $\Gamma^{(3,1)}_{n,\nu+1}$, $\Gamma^{(1,2)}_{n,\nu+1}$ sono ipercircoscritte ad una $\Gamma^{(1,2,3)}_{n,\nu}$, le tre configurazioni $\Gamma^{(1)}_{n,\nu+2}$, $\Gamma^{(2)}_{n,\nu+2}$, $\Gamma^{(3)}_{n,\nu+2}$ ipercircoscritte a due di esse e circoscritte alla $\Gamma^{(1,2,3)}_{n,\nu}$ sono iperinscritte ad una $\Gamma_{n,\nu+3}$.*

Indichiamo con $(A_\nu)^{(1,2,3)}$, $(A_{\nu+1})^{(2,3)}$, $(A_{\nu+1})^{(3,1)}$, $(A_{\nu+1})^{(1,2)}$, $(A_{\nu+2})^{(1)}$, $(A_{\nu+2})^{(2)}$, $(A_{\nu+2})^{(3)}$ i punti, con $(A_{\nu-1})^{(1,2,3)}$, $(A_\nu)^{(2,3)}$ $(A_\nu)^{(3,1)}$, $(A_\nu)^{(1,2)}$, $(A_{\nu+1})^{(1)}$, $(A_{\nu+1})^{(2)}$, $(A_{\nu+1})^{(3)}$ le rette, con $(A_{\nu-2})^{(1,2,3)}$ $(A_{\nu-1})^{(2,3)}$, $(A_{\nu-1})^{(3,1)}$, $(A_{\nu-1})^{(1,2)}$, $(A_\nu)^{(1)}$, $(A_\nu)^{(2)}$, $(A_\nu)^{(3)}$ i piani delle date configurazioni.

I due triedri che hanno per piani

$$\begin{array}{ccc}(A_{\nu-1}\,\alpha_\nu)^{(1)}, & (A_{\nu-1}\,\alpha_\nu)^{(2)}, & (A_{\nu-1}\,\alpha_\nu)^{(3)},\\ (A_{\nu-1}\,\alpha_{\nu+1})^{(1)}, & (A_{\nu-1}\,\alpha_{\nu+1})^{(2)}, & (A_{\nu-1}\,\alpha_{\nu+1})^{(3)},\end{array}$$

e per spigoli

$$\begin{array}{ccc}(A_{\nu-1}\,\alpha_\nu\;)^{(2,3)}, & (A_{\nu-1}\,\alpha_\nu\;)^{(3,1)}, & (A_{\nu-1}\,\alpha_\nu\;)^{(1,2)},\\ (A_{\nu-1}\,\alpha_{\nu+1})^{(2,3)}, & (A_{\nu-1}\,\alpha_{\nu+1})^{(3,1)}, & (A_{\nu-1}\,\alpha_{\nu+1})^{(1,3)},\end{array}$$

sono omologici, perchè i piani, che passano per gli spigoli corrispondenti, sono

$$(A_{\nu-1})^{(2,3)}, \qquad (A_{\nu-1})^{(3,1)}, \qquad (A_{\nu-1})^{(1,2)},$$

e passano per la retta $(A_{\nu-1})^{(1,2,3)}$. Perciò le rette d'incontro dei piani corrispondenti, cioè

$$(A_{\nu+1})^{(1)}, \qquad (A_{\nu+1})^{(2)}, \qquad (A_{\nu+1})^{(3)},$$

giacciono in un piano $(A_{\nu+1})$. Ciò prova che la $\Gamma_{n,\nu+3}$ ipercircoscritta a due delle $\Gamma^{(1)}_{n,\nu+2}$, $\Gamma^{(2)}_{n,\nu+2}$, $\Gamma^{(3)}_{n,\nu+2}$, è ipercircoscritta anche alla terza.

Le otto configurazioni insieme formano una $\Gamma_{n+3,\nu+3}$. Infatti il numero complessivo di vertici è

$$\binom{n}{\nu}+3\binom{n}{\nu+1}+3\binom{n}{\nu+2}+\binom{n}{\nu+3}=$$
$$=\binom{3}{3}\binom{n}{\nu}+\binom{3}{2}\binom{n}{\nu+1}+\binom{3}{1}\binom{n}{\nu+2}+\binom{3}{0}\binom{n}{\nu+3}=\binom{n+3}{\nu+3}.$$

In simil guisa si vede che il numero complessivo di rette è $\binom{n+3}{\nu+2}$, e quello dei piani è $\binom{n+3}{\nu+1}$. Ed è facile vedere che per ogni punto passano $\nu+3$ rette e per ogni retta $\nu+2$ piani.

8. *Se* k *configurazioni* $\Gamma_{n,\nu+1}$ *sono ipercircoscritte ad una* $\Gamma_{n,\nu}$, *prese due a due determinano* $\binom{k}{2}$ $\Gamma_{n,\nu+2}$ (*circoscritte a* $\Gamma_{n,\nu}$) *nelle quali sono iperinscritte: queste combinate convenientemente tre a tre determinano* $\binom{k}{3}$ $\Gamma_{n,\nu+3}$ *nelle quali sono iperinscritte: . . . . . così proseguendo si giunge a* $\binom{k}{k-2}\Gamma_{n,\nu+k-2}$, *poi a* $\binom{k}{k-1}\Gamma_{n,\nu+k-1}$, *ciascuna delle quali è ipercircoscritta a* $k-1$ *delle precedenti e finalmente ad una* $\Gamma_{n,\nu+k}$ *ipercircoscritta a tutte le* $\Gamma_{n,\nu+k-1}$ *e circoscritta a tutte le* $\Gamma_{n,\nu+k-2}$.

Tutte queste configurazioni formano una $\Gamma_{n+k,\nu+k}$.

Supponiamo di aver dimostrato il teorema per un dato valore $k-1$, e facciamo vedere che esso è vero anche per il valore k.

Indichiamo la data configurazione con $\Gamma_{n,\nu}^{\beta_1,\beta_2 \ldots \beta_k}$ ovvero con $\Gamma_{n,\nu}^{B_k}$ (dove $\beta_1\,\beta_2 \ldots . \beta_k$ sono k indici, scritti in un ordine qualunque), con $\Gamma_{n,\nu+1}^{(B_{k-1})}$ quelle ad essa ipercircoscritte con $\Gamma_{n,\nu+2}^{(B_{k-2})}$ quella ipercircoscritta a $\Gamma_{n,\nu+1}^{(B_{k-2}\beta_r)}$ $(r=k-1,k)$, ... , in generale con $\Gamma_{n,\nu+h}^{(B_{k-h})}$ quella ipercircoscritta alle $\Gamma_{n,\nu+h-1}^{(B_{k-h}\beta_r)}$ $(r=k-h+1,\,k-h+2,\ldots k)$.

I triedri che hanno per piani

$$(A_{\nu+k-4}\,\alpha_r)^{\beta_1},\qquad (A_{\nu+k-4}\,\alpha_r)^{\beta_2}.\qquad (A_{\nu+k-4}\,\alpha_r)^{\beta_3},$$
$$(A_{\nu+k-4}\,\alpha_s)^{\beta_1},\qquad (A_{\nu+k-4}\,\alpha_s)^{\beta_2},\qquad (A_{\nu+k-4}\,\alpha_s)^{\beta_3},$$

e per spigoli

$$(A_{\nu+k-4}\,\alpha_r)^{\beta_2\beta_3},\quad (A_{\nu+k-4}\,\alpha_r)^{\beta_3\beta_1},\quad (A_{\nu+k-4}\,\alpha_r)^{\beta_1\beta_2},$$
$$(A_{\nu+k-4}\,\alpha_s)^{\beta_2\beta_3},\quad (A_{\nu+k-4}\,\alpha_s)^{\beta_3\beta_1},\quad (A_{\nu+k-4}\,\alpha_s)^{\beta_1\beta_2},$$

sono omologici, perchè i piani che passano per questi spigoli, cioè

$$(A_{\nu+k-4})^{\beta_2\beta_3}\qquad (A_{\nu+k-4})^{\beta_3\beta_1}\qquad (A_{\nu+k-4})^{\beta_1\beta_2}$$

concorrono nella retta $(A_{\nu+k-4})^{\beta_1\beta_2\beta_3}$. Perciò le rette d'incontro dei piani, che (supposto $r=\nu+k-3$, $s=\nu+k-2$) sono

$$(A_{\nu+k-2})^{\beta_1}, \qquad (A_{\nu+k-2})^{\beta_2}, \qquad (A_{\nu+k-2})^{\beta_3},$$

sono situate in un piano, che chiameremo $(A_{\nu+k-2})$. Ciò prova che la $\Gamma_{n,\nu+k}$ ipercircoscritta a due della $\Gamma^{(\beta_r)}_{n,\nu+k-1}$ è ipercircoscritta anche alle altre.

Tutte queste configurazioni insieme formano una $\Gamma_{n+k,\nu+k}$.

Infatti il numero complessivo di vertici è

$$\binom{n}{\nu}+\binom{n}{\nu+1}\binom{k}{1}+\binom{n}{\nu+2}\binom{k}{2}+\ldots+\binom{n}{\nu+h}\binom{k}{h}+\ldots$$
$$+\binom{n}{\nu+k-1}\binom{n}{k-1}+\binom{n}{\nu+k}=$$
$$\binom{n}{\nu}\binom{k}{k}+\binom{n}{\nu+1}\binom{k}{k-1}+\binom{n}{\nu+2}\binom{k}{k-2}+\ldots+\binom{n}{\nu+h}\binom{k}{k-h}+\ldots$$
$$+\binom{n}{\nu+k-1}\binom{k}{1}+\binom{n}{\nu+k}\binom{k}{0}=\binom{n+k}{\nu+k}.$$

In simil guisa si vede che il numero complessivo di rette è $\binom{n+k}{\nu+k-1}$, e quello dei piani $\binom{n+k}{\nu+k-2}$. Ed è facile vedere che per ogni punto passano $\nu+k$ rette e per ogni retta $\nu+k-1$ piani.

Si ottengono facilmente i simboli degli elementi di questa configurazione, dando agl'indici α i valori $1, 2 \ldots n$, agl'indici β i valori $n+1, n+2 \ldots n+k$ e facendo seguire gl'indici di ogni elemento di una $\Gamma_{n,\nu+h}$ dal gruppo d'indici B_{k-h} della configurazione medesima.

9. I teoremi esposti permettono di costruire una $\Gamma_{n,\nu}$ per mezzo di altre configurazioni di ordine e classe inferiori.

Infatti dal teorema del § precedente risulta che una $\Gamma_{n,\nu}$ è completamente determinata, quando si conosce una $\Gamma_{n-k,\nu-k}$ contenuta in essa e le k configurazioni $\Gamma_{n-k,\nu-k+1}$ ad essa ipercircoscritte.

Se si suppone $k=\nu-1$, la $\Gamma_{n-k,\nu-k}$ diventa una $\Gamma_{n-\nu+1,1}$ cioè un gruppo di $n-\nu+1$ punti in linea retta e le k $\Gamma_{n-k,\nu-k+1}$ diventano $(\nu-1)$ $\Gamma_{n-\nu+1,2}$, cioè $(n-\nu+1)$ — lateri, le cui rette passano per quei punti se ne deduce.

Una configurazione $\Gamma_{n,\nu}$ è determinata dai $(\nu-1)$ piani che passano per una sua retta e dai $(\nu-1)$ $(n-\nu+1)$ — lateri formati dalle rimanenti rette situati in questi piani.

Se invece si suppone $k=\nu-2$, la $\Gamma_{n-k,\nu-k}$ diventa una $\Gamma_{n-\nu+2,2}$ cioè un $(n-\nu+2)$ — latero, le k $\Gamma_{n-k,\nu-k+1}$ diventano $(\nu-2)$ $\Gamma_{n-\nu+2,3}$ cioè $(n-\nu+2)$ — edri, i cui piani passano per quelle rette. Se ne deduce:

Una configurazione $\Gamma_{n,\nu}$ è determinata da un suo piano e da tutti gli altri piani che passano per le rette contenute in esso.

10. *Il numero di condizioni necessarie a determinare una $\Gamma_{n,\nu}$ è*

$$n \cdot \nu - (\nu + 1)(\nu - 3).$$

Infatti, se adottiamo il primo di metodi indicati nel § precedente per costruire la $\Gamma_{n,\nu}$, si vede che per determinare la retta scelta r occorrono 4 condizioni; per determinare $n - \nu + 1$ punti P sulla r occorrono $n - \nu + 1$ condizioni; per determinare $(\nu - 1)$ piani per la r occorrono $(\nu - 1)$ condizioni; per determinare in uno di questi piani $(n - \nu + 1)$ rette per i punti P occorrono $(n - \nu + 1)$ condizioni. Il numero complessivo di condizioni è dunque

$$4 + (n - \nu + 1) + (\nu - 1) + (n - \nu + 1)(\nu - 1) =$$
$$\nu(n - \nu + 1) + \nu + 3 = n\nu - (\nu^2 - 2\nu - 3) = n\nu - (\nu + 1)(\nu - 3).$$

Se poi adottiamo la seconda costruzione, si vede che per determinare un piano π della configurazione occorrono 3 condizioni; per determinare $(n - \nu + 2)$ sue rette occorrono $2(n - \nu + 2)$ condizioni; per determinare altri $\nu - 2$ piani che contengono una di queste rette occorrono $\nu - 2$ condizioni. Il numero complessivo di condizioni è dunque

$$3 + 2(n - \nu + 2) + (\nu - 2)(n - \nu + 2) = \nu(n - \nu + 2) + 3$$
$$= n \cdot \nu - (\nu^2 - 2\nu - 3) = n \cdot \nu - (\nu + 1)(\nu - 3),$$

come abbiamo già trovato.

11. *Se due $\Gamma^{(1)}_{n,\nu-1}$, $\Gamma^{(2)}_{n,\nu-1}$ sono iperinscritte in una $\Gamma_{n,\nu}$, esse sono ipercircoscritte ad una $\Gamma_{n,\nu-2}$.*

Tutte insieme queste configurazioni formano una $\Gamma_{n+2,\nu}$.

Indichiamo con (A_ν) i punti, con $(A_{\nu-1})$ le rette, con $(A_{\nu-2})$ i piani di una $C_{n,\nu}$, con $(A_{\nu-1})^{(1)}$, $(A_{\nu-2})^{(1)}$, $(A_{\nu-3})^{(1)}$ i punti, le rette e i piani di una $\Gamma^{(1)}_{n,\nu-1}$ in essa iperinscritta, con $(A_{\nu-1})^{(2)}$, $(A_{\nu-2})^{(2)}$ $(A_{\nu-3})^{(2)}$ i punti, le rette e i piani di un'altra $C^{(2)}_{n,\nu-1}$ iperinscritta.

I triedri che hanno per piani corrispondenti $(A_{\nu-4}\,\alpha_r)^{(1)}$ $(A_{\nu-4}\,\alpha_r)^{(2)}$, dove ad r si devono dare quattro valori qualunque da $\nu - 3$ a n, per es. $\nu - 3$, $\nu - 2$, $\nu - 1$, ν, sono omologici, perchè le rette che ne congiungono i vertici $(A_{\nu-4}\,\alpha_r\,\alpha_s\,\alpha_t)^{(1)}$ $(A_{\nu-4}\,\alpha_r\,\alpha_s\,\alpha_t)^{(2)}$ sono situati sulle rette $(A_{\nu-4}\,\alpha_r\,\alpha_s\,\alpha_t)$. Perciò le coppie di piani si tagliano secondo quattro rette $(A_{\nu-4}\,\alpha_r)$ situate in un piano $(A_{\nu-4})$.

Tenendo fisse tra delle coppie di piani considerate, e facendo variare la quarta, si vede che tutte le rette $(A_{\nu-4}\,\alpha_r)$ $(r = \nu - 3, \nu - 2 \ldots n)$ stanno nel piano $(A_{\nu-4})$.

Se ora si considera una coppia di piani $(A_{\nu-3})^{(1)}$ $(A_{\nu-3})^{(2)}$ insieme a quelle che si ottengono sopprimendo un dato indice α_s $(s = 1, 2 \ldots \nu - 3)$

e sostituendo uno qualunque dei rimanenti, si dimostra nello stesso modo che tutti si tagliano secondo rette di un piano $(A_{\nu-r}\,\alpha_s)$, che passa per la retta $(A_{\nu-3})^{(1,2)}$. Così tutti i $(\nu-3)$ piani $(A_{\nu-3}\,\alpha_s)^{(1,2)}$ passano per la retta $(A_{\nu-3})^{(1,2)}$.

In modo simile si dimostra che le rette $(A_{\nu-2}\,\alpha_s)^{(1,2)}$ passa per $(A_{\nu-2})^{(1,2)}$.

Come caso particolare si ha:

Se due n — *edri* $(\Gamma_{n,3})$ *sono iperinscritti in una* $\Gamma_{n,4}$ *i piani corrispondenti si tagliano secondo* n *rette* $(\Gamma_{n,2})$ *situate in un piano.*

12. *Se tre* $\Gamma^{(1)}_{n,\nu-1}$, $\Gamma^{(2)}_{n,\nu-1}$, $\Gamma^{(3)}_{n,\nu-1}$ *sono iperinscritte in una* $\Gamma_{n,\nu}$ *le* $\Gamma^{(2,3)}_{n,\nu-2}$, $\Gamma^{(3,1)}_{n,\nu-2}$, $\Gamma^{(1,2)}_{n,\nu-2}$, *alle quali esse sono ipercircoscritte a due a due sono ipercircoscritte ad una* $\Gamma^{(1,2,3)}_{n,\nu-3}$ *in esse inscritta. Tutte insieme queste configurazioni formano una* $\Gamma_{n+3,\nu}$.

Indichiamo con (A_ν), $(A_{\nu-1})$, $(A_{\nu-2})$ i punti, le rette i piani della $\Gamma_{n,\nu}$; con $(A_{\nu-1})^{(i)}$, $(A_{\nu-2})^{(i)}$, $(A_{\nu-3})^{(i)}$ i punti, le rette e i piani della $\Gamma^{(i)}_{n,\nu-1}$ $(i=1.2.3)$; con $(A_{\nu-2})^{(i,h)}$, $(A_{\nu-3})^{(i,h)}$ $(A_{\nu-4})^{(i,h)}$ i punti, le rette e i piani della $\Gamma^{(i,h)}_{n,\nu-2}$ $(i,h=1,2,3)$.

Le due configurazioni $\Gamma^{(1,2)}_{n,\nu-2}$, $\Gamma^{(1,2)}_{n,\nu-2}$ iperinscritte nella $\Gamma^{(1)}_{n,\nu-2}$, sono ipercircoscritte ad una $\Gamma^{(1,2,3)}_{n,\nu-3}$. Voglio dimostrare che anche la $\Gamma^{(2,3)}_{n,\nu-2}$ è ipercircoscritta alla stessa $\Gamma^{(1,2,3)}_{n,\nu-3}$.

Infatti i due triedri che hanno per facce corrispondenti

$$\begin{array}{lll}(A_{\nu-4}\,\alpha_r)^{(1)}, & (A_{\nu-4}\,\alpha_r)^{(2)}, & (A_{\nu-4}\,\alpha_r)^{(3)},\\ (A_{\nu-4}\,\alpha_s)^{(1)}, & (A_{n-4}\,\alpha_s)^{(2)}, & (A_{\nu-4}\,\alpha_s)^{(3)},\end{array}$$

e per spigoli

$$\begin{array}{lll}(A_{\nu-4}\,\alpha_r)^{(2,3)}, & (A_{\nu-4}\,\alpha_r)^{(3,1)}, & (A_{\nu-4}\,\alpha_r)^{(1,2)},\\ (A_{\nu-4}\,\alpha_s)^{(2,3)}, & (A_{\nu-4}\,\alpha_s)^{(3,1)}, & (A_{\nu-4}\,\alpha_s)^{(1,2)}.\end{array}$$

sono omologici, perchè le coppie di facce s'incontrano nelle rette

$$(A_{\nu-4}\,\alpha_r\,\alpha_s)^{(1)},\quad (A_{\nu-4}\,\alpha_r\,\alpha_s)^{(3)},\quad (A_{\nu-4}\,\alpha_r\,\alpha_s)^{(3)},$$

del piano $(A_{\nu-4}\,\alpha_r\,\alpha_s)$, e perciò i piani determinati dalle coppie di spigoli, cioè

$$(A_{\nu-4})^{(2,3)},\qquad (A_{\nu-4})^{(3,1)},\qquad (A_{\nu-4})^{(1,2)},$$

passano per una retta che è la $(A_{\nu-4})^{(1,2,3)}$.

Da quanto abbiamo detto nel § 7 risulta poi che le otto configurazioni insieme formano $\Gamma_{n+3,\nu}$.

Come casi particolari si ha:

Se tre n-*edri* $(\Gamma_{n,3})$ *sono iperinscritti in una* $\Gamma_{n,4}$, *i tre piani che contengono le rette d'intersezioni degli* n-*edri presi due a due concorrono in un punto.*

Se ne deduce:

Se k n-edri $(\Gamma_{n,3})$ sono iperinscritti in una $\Gamma_{n,4}$, i $\binom{k}{2}$ piani che contengono le rette d'intersezione dei piani degli n-edri, presi due a due formano un n-edro $(\Gamma_{n,3})$, che insieme agli n-edri dati e alla $\Gamma_{n,4}$ forma una $\Gamma_{n+k,4}$.

13. *Se k $(k < \nu)$ $\Gamma^{(\beta_1)}_{n,\nu-1}$ sono iperinscritte in una $\Gamma_{n,\nu}$, in esse sono iperinscritte $\binom{k}{2}$ $\Gamma^{(\beta_1\beta_2)}_{n,\nu-2}$: queste alla loro volta determinano $\binom{k}{3}$ $\Gamma^{(\beta_1\beta_2\beta_3)}_{n,\nu-3}$ iperinscritte in tre di esse, ecc.*

Così proseguendo si giunge a $\binom{k}{k-2}$ configurazioni $\Gamma^{(\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k-2})}_{n,\nu-k+2}$, poi a $\binom{k}{k-1}$ configurazioni $\Gamma^{(\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k-1})}_{n,\nu-k+1}$, le prime delle quali sono tutte circoscritte, le seconde ipercircoscritte ad $\Gamma^{(\beta_1\beta_2\ldots\beta_k)}_{n,\nu-k}$.

Per $k=3$ il teorema è già dimostrato. Supponiamo che esso sia dimostrato per un dato valore di k, e dimostriamo che è vero per $k+1$.

Poniamo al solito $B_s = \beta_1\beta_2\ldots\beta_s$, e consideriamo i due triedri che che hanno per piani.

$$(A_{\nu-k-1}\alpha_r)^{(B_{k-2}\beta_{k-1})},\ (A_{\nu-k-1}\alpha_r)^{(B_{k-2}\beta_k)},\ (A_{\nu-k-1}\alpha_r)^{(B_{k-2}\beta_{k+1})},$$
$$(A_{\nu-k-1}\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_{k-1})}.\ (A_{\nu-k-1}\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_k)},\ (A_{\nu-k-1}\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_{k+2})},$$

e per spigoli

$$(A_{\nu-k-1}\alpha_r)^{(B_{k-2}\beta_k\beta_{k+1})},\ (A_{\nu-k-1}\alpha_r)^{(B_{k-2}\beta_{k+1}\beta_{k-1})},\ (A_{\nu-k-1}\alpha_r)^{(B_{k-2}\beta_{k-1}\beta_{k+1})}$$
$$(A_{\nu-k-1}\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_k\beta_{k-1})},\ (A_{\nu-k-1}\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_{k+1}\beta_{k-1})},\ (A_{\nu-k-1}\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_{k-1}\beta_{k+1})}.$$

Essi sono analogici, perchè le coppie di piani s'incontrano nelle rette

$$(A_{\nu-k-1}\alpha_r\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_{k-1})};\ (A_{\nu-k-1}\alpha_r\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_k)},\ (A_{\nu-k-1}\alpha_r\alpha_s)^{(B_{k-2}\beta_{k+1})}$$

del piano $(A_{\nu-k-1}\alpha_r\alpha_s)^{(B_k)}$: perciò i piani che congiungono gli spigoli corrispondenti, cioè

$$(A_{\nu-k-1})^{(B_{k-2}\beta_k\beta_{k+1})},\ (A_{\nu-k-1})^{(B_{k-2}\beta_{k+2}\beta_{k-1})},\ (A_{\nu-k-1})^{(B_{k-2}\beta_{k-1}\beta_k)}$$

concorrono in una retta $(A_{\nu-k-1})^{(B_{k+1})}$.

Così si vede che tutti i piani, il cui simbolo si ricava da $(A_{\nu-k-1})^{(B_{k+1})}$ sopprimendo un indice β, passano per una retta della $\Gamma^{(B_k)}_{n,\nu-k+1}$ iperinscritti a due $\Gamma_{n,\nu-k}$.

14. *Una $\Gamma_{n,\nu+1}$ ipercircoscritta ad una $\Gamma_{n,\nu}$ è individuata da $n-\nu+2$ piani condotti per altrettante rette situate sopra un piano della $\Gamma_{n,\nu}$.*

Infatti una $\Gamma_{n,\nu}$ ed una $\Gamma_{n,\nu+1}$ ad essa ipercircoscritta formano (§ 4) una $\Gamma_{n+1,\nu+1}$, per determininare la quale è necessario e sufficiente conoscere un suo piano e tutti i piani che passano per le $(n+1)-(\nu+1)+2=n-\nu+2$ rette, che giacciono in esso ($\nu-1$ per ciascuna retta). Ma il piano suddetto e $\nu-2$ altri piani per ciascuna delle rette individuano la $\Gamma_{n,\nu}$, dunque i rimanenti piani (uno per ciascuna retta) individuano la $\Gamma_{n,\nu+1}$.

G. LAZZERI.

I NUMERI TRIANGOLARI

E LA RISOLUZIONE DI UNA PARTICOLARE EQUAZIONE DI 3° GRADO

Si consideri la serie di numeri

$$1, 3, 6, 10, \ldots .$$

ove, indicando con a_n l'ennesimo termine, si ha

$$(1) \qquad a_n - a_{n-1} = n, \quad \text{e però} \qquad (2) \quad a_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

I numeri a_n considerati si dicono numeri triangolari.

Scopo della presente nota è di esporre parecchie proprietà dei numeri triangolari e di studiare una particolare equazione di 3° grado, di cui le radici sono tre numeri triangolari consecutivi.

I. *Fra due termini* a_{n+m} *e* a_{n-1} *della serie considerata si ha la relazione*

$$(3) \qquad a_{n+m} = a_{n-1} + \frac{(m+1)(2n+m)}{2}.$$

Intanto per $m=0$ si ha la formula (1), e per $m=1$ si trova

$$a_{n+1} = a_{n-1} + 2n + 1.$$

Supposta ora vera la (3) per $m=p$, dico che è vera per $m=p+1$. Infatti per la (1) si ha

$$a_{n+p+1} = a_{n+p} + n + p + 1;$$

ed essendo, per ipotesi

$$a_{n+p} = a_{n-1} + \frac{(p+1)(2n+p)}{2},$$

si ha

$$a_{n+p+1} = a_{n-1} + n + p + 1 + \frac{(p+1)(2n+p)}{2} = a_{n-1} + \frac{(p+2)(2n+p+1)}{2}.$$

c. v. d.

Perciò essendo la (3) vera per $m=1$, è pur vera per $m=2, 3, \ldots$

II. Su due numeri triangolari consecutivi, abbiamo i seguenti teoremi.

1°. *La somma di due triangolari successivi è un quadrato e la differenza dei loro quadrati è un cubo.*

Abbiamo infatti

$$a_{n-1} + a_n = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2,$$

$$a^2_n - a^2_{n-1} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{(n-1)^2 n^2}{4} = n^3.$$

Corollario. — *Due numeri tali che la loro somma sia* K^2 *(essendo* K *un intero positivo qualunque) e la differenza dei loro quadrati sia* K^3, *sono due triangolari successivi.*

Ricordando che la somma dei quadrati dei primi m numeri interi, è data da

$$S_2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6},$$

se indichiamo con Σ_1 la somma dei primi n numeri triangolari, tenendo presente la prima parte del teorema dimostrato, si trova

$$\Sigma_1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

2°. *La somma dei quadrati di due numeri triangolari successivi è un triangolare.*

Si ha

$$a^2_{n-1} + a^2_n = \frac{(n-1)^2 n^2}{4} + \frac{n^2(n+1)^2}{4} = a_{n^2}.$$

3°. *Il doppio prodotto di due triangolari successivi è un triangolare.*

Si ha infatti

$$2a_{n-1}\,a_n = 2\,\frac{(n-1)n}{2}\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n^2-1)}{2} = a_{n^2-1}.$$

Corollario. — *La quarta potenza di un numero* n *diminuita del triangolare* a_{n^2} *è il doppio prodotto di due triangolari consecutivi.*

Abbiamo infatti

$$n^4 - a_{n^2} = a_{n^2-1} = 2a_{n-1}\,a_n.$$

4°. *Il quadruplo prodotto di due triangolari consecutivi è il quoziente di due triangolari.*

Ed invero si ottiene

$$4a_{n-1}\,a_n = 4\frac{(n-1)n}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = n^2(n^2-1) = \frac{(n^4-1)n^4}{2} : \frac{n^2(n^2+1)}{2} = \frac{a_{n^4-1}}{a_{n^2}}.$$

III. Notevoli sono, per l'applicazione che ne faremo, le seguenti proprietà di tre numeri triangolari successivi.

5°. *La differenza tra il quadrato di un numero triangolare e il triangolare stesso, è eguale al prodotto dei due triangolari che lo comprendono.*

Cioè, dico che si ha

$$a^2_n - a_n = a_{n-1}\,a_{n+1}:$$

Infatti è

$$a^2_n - a_n = a_n\,(a_n - 1) = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) =$$
$$= \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{4} = a_{n-1}\,a_{n+1}.$$