Di alcune successioni ricorrenti a termini interi e positivi

1. Formano oggetto di questa nota quelle successioni di numeri interi e positivi ciascuno dei quali è uguale alla somma dei due precedenti.

Detta U una di tali successioni e indicati con

$$U_1\ U_2\ U_3 \ldots U_n \ldots$$

i suoi termini si ha per ipotesi ($n \geqq 3$)

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$$

e la successione sarà individuata allorchè siano fissati i valori di $U_1\ U_2$ che rappresenteremo rispettivamente con a, b e diremo *termini iniziali*. Nel caso particolare di $a=1, b=1$ si ha la successione

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

che diremo u; ne rappresenteremo i termini anche colle notazioni $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots$

Le proprietà della successione U dipendono da quelle della u; tra i loro termini si ha infatti una relazione che passiamo subito a stabilire.

A tal uopo osserviamo che se ai due termini della relazione $U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$, data per ipotesi, si aggiunge U_n si ha, tenendo conto di nuovo della legge di ricorrenza,

$$U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$$

$$U_{n+2} = 2U_n + U_{n-1}$$

e sommando

$$U_{n+3} = 3U_n + 2U_{n-1}$$

ovvero, osservando che è $u_4 = 3$, $u_3 = 2$,

$$U_{n+3} = u_4\, U_n + u_3\, U_{n-1}.$$

Ma allora è facile vedere che si ha in generale

$$U_{n+s} = u_{s+1}\, U_n + u_s\, U_{n-1}. \qquad \text{(I)}$$

Supposto infatti che questa sia vera fino ad un certo valore di s si avranno le relazioni

$$U_{n+(s-1)} = u_s U_n + u_{s-1} U_{n-1}$$

$$U_{n+s} = u_{s+1} U_n + u_s U_{n-1}$$

e sommando, tenendo conto della legge di ricorrenza, si trova subito

$$U_{n+(s+1)} = u_{s+2} U_n + u_{s+1} U_{n-1}$$

pertanto la (I) è dimostrata per valori arbitrari di n, s. E se in particolare si suppone che la U coincida colla u si dedurrà mutando U_r in u_r

$$u_{n+s} = u_{s+1} u_n + u_s u_{n-1}. \tag{1}$$

Se invece nella (I) si pone $n=2$ e si tiene conto che è $U_2 = b$, $U_1 = a$ si ha

$$U_{s+2} = u_s a + u_{s+1} b$$

e mutando ora s in $n-2$

$$U_n = u_{n-2} a + u_{n-1} b \tag{2}$$

Nelle relazioni (1), (2) hanno fondamento le proprietà della successione U.

2. Definizioni:

a) *Se in quattro termini* $U_\alpha, U_\beta, U_\gamma, U_\delta$ *è* $\beta-\alpha=\delta-\gamma$ *si dirà che essi formano un gruppo simmetrico.*

b) *Due gruppi simmetrici* $U_\alpha, U_\beta, U_\gamma, U_\delta$ *e* $U_{\alpha'}, U_{\beta'}, U_{\gamma'}, U_{\delta'}$ *si diranno equisimmetrici quando è* $\beta-\alpha=\beta'-\alpha'$, $\gamma-\beta=\gamma'-\beta'$.

c) *Un gruppo di tre termini* U_a, U_b, U_c *si dirà simmetrico se è* $b-a=c-b$.

d) *due gruppi simmetrici* U_a, U_b, U_c; $U_{a'}, U_{b'}, U_{c'}$ *si diranno equisimmetrici se è* $b-a=b'-a'$.

e) *Due gruppi equisimmetrici (di quattro o tre termini) si diranno consecutivi se le differenze tra gli indici di due termini corrispondenti sono uguali ad* 1.

Due gruppi equisimmetrici consecutivi sono cioè della forma

$$\begin{array}{llll|lll} U_\alpha, & U_\beta, & U_\gamma, & U_\delta & U_a, & U_b, & U_c \\ U_{\alpha-1}, & U_{\beta-1}, & U_{\gamma-1}, & U_{\delta-1} & U_{a-1}, & U_{b-1}, & U_{c-1} \end{array}$$

Teorema. — *Nei gruppi equisimmetrici formati di quattro termini la differenza tra il prodotto dei medi ed il prodotto degli estremi è costante in valore assoluto.*

1°. Dimostriamo dapprima la proprietà pei gruppi della successione u: un suo gruppo simmetrico qualunque è della forma

$$u_{n-k}\,,\ u_n\,,\ u_s\,,\ u_{s+k}.$$

Ora se nella (1) si muta s in $s-1$ si ha

$$u_{n+s-1}=u_s\,u_n+u_{s-1}\,u_{n-1}$$

e mutando in questa n in $n-k$ ed s in $s+k$ si deduce ancora

$$u_{n+s-1}=u_{s+k}\,u_{n-k}+u_{s+k-1}\,u_{n-k-1}$$

e sottraendo questa dalla precedente si ricava

$$u_s\,u_n-u_{s+k}\,u_{n-k}=-(u_{s-1}\,u_{n-1}-u_{s+k-1}\,u_{n-k-1})$$

pertanto è dimostrato che le differenze tra il prodotto dei medi e quello degli estremi dei due gruppi equisimmetrici consecutivi

$$u_{n-k}\quad,\ u_n\quad,\ u_s\quad,\ u_{s+k}$$
$$u_{n-k-1}\,,\ u_{n-1}\,,\ u_{s-1}\,,\ u_{s+k-1}$$

sono uguali in valore assoluto e di segno opposto.

Per calcolare la costante osserviamo che se nell'ultima uguaglianza si diminuiscono successivamente gli indici di 1 per $n-k-2$ volte consecutive e si moltiplicano membro a membro tutte le relazioni così ottenute si troverà

$$u_s\,u_n-u_{s+k}\,u_{n-k}=(-1)^{n-k-1}(u_{s-n+k+1}\,u_{k+1}-u_{s-n+2k+1}\,u_1)$$

e poichè è $u_1=1$ avremo ponendo $s-n=\delta$,

$$u_s\,u_n-u_{s+k}\,u_{n-k}=(-1)^{n-k-1}(u_{\delta+k+1}\,u_{k+1}-u_{\delta+2k+1}).$$

Abbiamo così, nel secondo membro, l'espressione della costante dipendente *soltanto* dalle due differenze tra gli indici del gruppo simmetrico dato. Ma le si può dare ancora una forma più semplice; se infatti nella (1) si muta s in k ed n in $\delta+k+1$ si ricava

$$u_{\delta+k+1}\,u_{k+1}-u_{\delta+2k+1}=-u_k\,u_{\delta+k}$$

e quindi sostituendo

$$u_s\,u_n-u_{s+k}\,u_{n-k}=(-1)^{n-k}u_k\,u_{\delta+k}. \qquad (3)$$

2°. Passiamo ora a dimostrare il teorema enunciato per la successione U, ma per maggiore chiarezza di ciò che segue facciamo un cambiamento di notazioni nella (3) osservando che se u_α, u_β, u_γ, u_δ è un gruppo simmetrico, e si pone $\beta-\alpha=\Delta'$, $\gamma-\beta=\Delta$ essa assume la forma

$$u_\beta\,u_\gamma-u_\alpha\,u_\delta=(-1)^{\alpha}\,u_{\Delta'}\,u_{\Delta+\Delta'}. \qquad (3')$$

Ciò premesso sia

$$U_{n-k}\,,\ U_n\,,\ U_s\,,\ U_{s+k}$$

un gruppo simmetrico qualunque di U. Se nella espressione

$$U_n\,U_s - U_{n-k}\,U_{s-k}$$

si sostituiscono alle U le loro espressioni in funzioni delle u calcolate per mezzo della (2) si ha

$$\begin{aligned} U_n\,U_s - U_{n-k}\,U_{s+k} = {} & (u_{n-2}\,a + u_{n-1}\,b)\,(u_{s-2}\,a + u_{s-1}\,b) - \\ & - (u_{n-k-2}\,u_{n-k-2}\,a + u_{n-k-1}\,b)\,(u_{s+k-2}\,a + u_{s+k-1}\,b) \end{aligned}$$

che sviluppando i prodotti del secondo membro assume la forma

$$\begin{aligned} U_n\,U_s - U_{n-k}\,U_{s+k} = {} & a^2\,(u_{n-2}\,u_{s-2} - u_{n-k-2}\,u_{s+k-2}) + \\ & + b^2\,(u_{n-1}\,u_{s-1} - u_{n-k-1}\,u_{s+k-1}) + \\ & + ab\,\{(u_{n-2}u_{s-1} - u_{n-k-2}\,u_{s+k-1}) + (u_{n-1}\,u_{s-2} - u_{n-k-1}\,u_{s+k-2})\}. \end{aligned}$$

Le differenze nelle parentesi del secondo membro si possono calcolare mediante la (3') applicata successivamente ai gruppi simmetrici

$$\begin{gathered} u_{n-k-2}\,,\ u_{n-2}\,,\ u_{s-2}\,,\ u_{s+k-2} \\ u_{n-k-1}\,,\ u_{n-1}\,,\ u_{s-1}\,,\ u_{s+k-1} \\ u_{n-k-2}\,,\ u_{n-2}\,,\ u_{s-1}\,,\ u_{s+k-1} \\ u_{n-k-1}\,,\ u_{n-1}\,,\ u_{s-2}\,,\ u_{s+k-2} \end{gathered}$$

pei quali avendo riguardo alle differenze degli indici e posto, come nel primo caso, $s - n = \delta$ si trova subito

$$\begin{aligned} u_{n-2}\,u_{s-1} - u_{n-k-2}\,u_{s+k-2} &= (-1)^{n-k}\,u_k\,u_{\delta+k} \\ u_{n-1}\,u_{s-1} - u_{n-k-1}\,u_{s+k-1} &= (-1)^{n-k-1}\,u_k\,u_{\delta+k} \\ u_{n-2}\,u_{s-1} - u_{n-k-2}\,u_{s+k-1} &= (-1)^{n-k}\,u_k\,u_{\delta+k+1} \\ u_{n-1}\,u_{s-2} - u_{n-k-1}\,u_{s-k-2} &= (-1)^{n-k-1}\,u_k\,u_{\delta+k-1} \end{aligned}$$

onde sostituendo sarà

$$\begin{aligned} U_n\,U_s - U_{n-k}\,U_{b+k} = {} & (-1)^{n-k}\,u_k\,u_{\delta+k}\,(a^2 - b^2) + \\ & + (-1)^{n-k}\,a\,b\,u_k\,(u_{\delta+k+1} - u_{\delta+k-1}\,). \end{aligned}$$

Ma per la legge di ricorrenza stabilita per definizione la quantità entro l'ultima parentesi è uguale a $u_{\delta+k}$ e quindi

$$U_n\,U_s - U_{n-k}\,U_{s+k} = (-1)^{n-k}\,u_k\,u_{\delta+k}\,(a^2 - b^2 + ab). \qquad (4)$$

Il secondo membro dipende soltanto dai termini iniziali a, b della successione e dalle differenze δ, k tra gli indici del gruppo simmetrico dato; esso è dunque costante in valore assoluto nei gruppi equisimmetrici di U come si voleva provare.

Il procedimento tenuto nella precedente dimostrazione è valido anche se $s = n$ e, per conseguenza, $\delta = 0$; in questa nuova ipotesi le (3) (4) divengono

$$u^2_n - u_{n-k}\, u_{n+k} = (-1)^{n-k} u^2_k \tag{5}$$

$$U^2_n - U_{n-k}\, U_{n-k} = (-1)^{n-k} u^2_k\, (a^2 - b^2 + ab). \tag{6}$$

Riferendosi soltanto alla seconda (giacchè la prima ne è un caso particolare per $a = b = 1$) osserviamo che il primo membro è la differenza tra il quadrato del termine medio ed il prodotto degli estremi nel gruppo simmetrico

$$U_{n-k}\,,\ U_n\,,\ U_{n-k}$$

pertanto è dimostrato anche il seguente

Teorema. — *Nei gruppi equisimmetrici formati di tre termini la differenza tra il quadrato del medio ed il prodotto degli estremi è costante in valore assoluto.*

Osservazioni:

a) Se in luogo di s si pone il suo uguale $n + \delta$ le (3) (4) divengono (*)

$$(3'') \qquad u_n\, u_{n+\delta} - u_{n-k}\, u_{n+\delta+k} = (-1)^{n-k}\, u_k\, u_{\delta+k}$$

$$(4') \qquad U_n\, U_{n-\delta} - U_{n-k}\, U_{n+\delta+k} = (-1)^{n-k}\, u_k\, u_{\delta+k}\, (a^2 - b^2 + ab).$$

b) Denotando con $g(\delta, k)$, $G(\delta, k)$ i valori assoluti delle differenze al primo membro delle (3) (4) (o di quest'ultime) e con $|a^2 - b^2 + ab|$ quello di $a^2 - b^2 + ab$ avremo

$$\frac{G(\delta, k)}{g(\delta, k)} = |a^2 - b^2 + ab|$$

e denotando analogamente con $g(0, k)$, $G(0, k)$ i valori assoluti di quelle al primo membro delle (5) (6) si ricava pure

$$\frac{G(0, k)}{g(0, k)} = |a^2 - b^2 + ab|$$

e poichè i secondi membri sono interi uguali e *indipendenti* da δ e da k possiamo concludere:

In due gruppi equisimmetrici appartenenti uno ad U *l'altro ad* u, *le differenze tra il prodotto dei medi e quello degli estremi (o tra il quadrato del medio e il prodotto degli estremi) sono proporzionali e la costante di proporzionalità e il numero* **intero** $|a^2 - b^2 + ab|$ ecc. ecc.

(*) Per $\delta = k = 1$, poichè è $u_k\, u_{\delta+k} = u_1\, u_2 = 1$ si ha come caso particolarissimo

$$u_n\, u_{n+1} - u_{n-1}\, u_{n+2} = \pm 1, \quad U_n\, U_{n+1} - U_{n-1}\, U_{n+2} = \pm (a^2 - b^2 + ab)$$

cioè: *In quattro termini consecutivi di* U *la differenza tra il prodotto dei medi e quello degli estremi* è $\pm (a^2 - b^2 + ab)$. Analogamente si trova valendosi di (5) (6)

$$u^2_n - u_{n-1}\, u_{n+1} = (-1)^{n-1}, \quad U^2_n - U_{n-1}\, U_{n+1} = (-1)^{n-1} (a^2 - b^2 + ab) \text{ ecc.}$$

3. Accanto alla successione U consideriamone un'altra U' di termini iniziali a', b' (definita colla medesima legge di ricorrenza stabilita in principio) ossia

$$U \equiv a,\ b,\ U_3,\ U_4 \ldots, \overbrace{U_n \ldots U_s}, \ldots, \overbrace{U_{n+\rho} \ldots U_{s+\rho}}, \ldots,$$
$$U' \equiv a',\ b',\ U'_3,\ U'_4 \ldots, U'_n \ldots U'_s, \ldots, U'_{n+\rho} \ldots U'_{s+\rho}, \ldots$$

diremo *simili* due coppie $(U_n U_s)$, $(U_{n+\rho} U_{s+\rho})$ che hanno uguali le differenze tra gli indici dei loro termini, e diremo *corrispondenti* due coppie come $(U_n U_s)$ $(U'_n U'_s)$ i cui termini hanno indici rispettivamente uguali. Ciò premesso si ha il seguente

TEOREMA. — *Se si fanno corrispondere due successioni* U, U' *termine a termine tutti i determinanti di secondo ordine formati da coppie corrispondenti e simili sono uguali in valore assoluto.*

Qui si tratta di provare che si ha in valore assoluto

$$\begin{vmatrix} U_n & U_s \\ U'_n & U'_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_{n+\rho} & U_{s+\rho} \\ U'_{n+\rho} & U'_{s+\rho} \end{vmatrix}.$$

A tal fine osserviamo che se nella espressione $U_s U'_n - U'_s U_n$ sostituiamo alle U le loro espressioni in funzione delle u ricavate dalla (2) si ha subito

$$U_s U'_n - U_s U_n = (u_{s-2}\, a + u_{s-1}\, b)(u_{n-2}\, a' + u_{n-1}\, b') -$$
$$- (u_{s-2}\, a' + u_{s-1}\, b')(u_{n-2}\, a + u_{n-1}\, b)$$

ed anche sviluppando i prodotti

$$U_s U'_n - U'_s U_n = (ab' - a'b)(u_{n-1}\, u_{s-2} - u_{s-1}\, u_{n-2}).$$

Qui è opportuno considerare il gruppo simmetrico

$$u_{n-2},\ u_{n-1},\ u_{s-2},\ u_{s-1}$$

dove è certo $n - 1 \leqq s - 2$ essendo per ipotesi $n < s$; allora applicando la formola (3') dopo aver posto $s - n = \delta$ si trova

$$u_{n-1}\, u_{s-2} - u_{s-2}\, u_{n-2} = (-1)^n\, u_\delta$$

e sostituendo

$$U_s U'_n - U'_s U_n = (-1)^n (ab' - a'b)\, u_\delta \qquad (7)$$

Il secondo membro di questa relazione dipende in quanto a valore assoluto *solamente da* δ, e dai valori iniziali; pertanto mutando n in $n + \rho$ s in $s + \rho$ poichè non varia δ resta invariato anch'esso. Ciò prova quanto si è affermato.

4. Sul precedente risultato si fonda una notevole proprietà della successione U, contenuta nel seguente

TEOREMA. — *In ogni gruppo simmetrico formato di tre termini come* $(U_{n-\delta}, U_n, U_{n+\delta})$ *il termine medio è un divisore della somma degli estremi* *se δ è pari, ed è un divisore della loro differenza se δ è dispari. Inoltre il quoto intero è, nei rispettivi casi, costante in tutti i gruppi equisimmetrici al primo, e di più è indipendente da* a *e* b.

Si tratta di dimostrare che è $\dfrac{U_{n+\delta}+(-1)^\delta U_{n-\delta}}{U_n}=$ intero indipendente da a, b, n.

Se infatti nella (7) sostituiamo ad s il suo uguale $n+\delta$ si ha per qualunque valore di n e δ

$$U_{n+\delta} U'_n - U'_{n+\delta} U_n = (-1)^n (ab'-a'b)\, u_\delta$$

e per conseguenza cangiando n in $n-\delta$ sarà ancora

$$U_n U'_{n-\delta} - U'_n U_{n-\delta} = (-1)^{n-\delta} (ab'-a'b)\, u_\delta$$

segue quindi

$$U_{n+\delta} U'_n - U'_{n+\delta} U_n = (-1)^\delta U_n U'_{n-\delta} - (-1)^\delta U'_n U_{n-\delta}$$

ed anche

$$\frac{U_{n+\delta}+(-1)^\delta U_{n-\delta}}{U_n} = \frac{U'_{n+\delta}+(-1)^\delta U'_{n-\delta}}{U'_n}$$

Ma la successione U′ che ha per termini iniziali due valori arbitrari a', b' può supporsi in particolare coincidente colla u col porre $a'=b'=1$, ed allora è $U'_t = u_t$ e la formola precedente diviene

$$\frac{U_{n+\delta}+(-1)^\delta U_{n-\delta}}{U_n} = \frac{u_{n+\delta}+(-1)^\delta u_{n-\delta}}{u_n}.$$

La dimostrazione del teorema è così riportata ad un gruppo equisimmetrico al dato, ma appartenente alla successione u. Occupiamoci dunque del quoziente

$$\frac{u_{n+\delta}+(-1)^\delta u_{n-\delta}}{u_n}.$$

Qui conviene ricorrere alla formola (1): se in essa si muta s in δ si ha intanto

$$u_{n+\delta} = u_{\delta+1} u_n + u_\delta u_{n-1}$$

e se inoltre si considera il gruppo simmetrico

$$u_{\delta-1},\ u_\delta,\ u_{n-1},\ u_n$$

si ha per la solita formola (3′)

$$u_\delta u_{n-1} - u_{\delta-1} u_n = (-1)^{\delta-1} u_{n-\delta}.$$

Sottraendo quest'ultima dalla precedente uguaglianza si ha

$$u_{n+\delta} + (-1)^\delta u_{n-\delta} = u_{\delta+1} u_n + u_{\delta-1} u_n$$

e quindi

$$\frac{u_{n+\delta}+(-1)^\delta u_{n-\delta}}{u_n} = u_{\delta+1} + u_{\delta-1}.$$

Concludendo sarà

$$\frac{U_{n+\delta} + (-1)^\delta U_{n-\delta}}{U_n} = u_{\delta+1} + u_{\delta-1}$$

Il secondo membro essendo *intero e indipendente* da a, b, n il teorema è completamente dimostrato

Casi particolari della (8).

a) Per $n = \delta + 1$, e poichè è $u_1 = 1$, si ha

$$\frac{u_{2\delta+1} + (-1)^\delta}{u_{\delta+1}} = u_{\delta-1} + u_{\delta+1}$$

b) Per $n = \delta + 2$, essendo pure $u_2 = 1$, è invece

$$\frac{u_{2\delta+2} + (-1)^\delta}{u_{\delta+2}} = u_{\delta-1} + u_{\delta+1}$$ ovvero, mutando δ in $\delta - 1$

$$\frac{u_{2\delta} - (-1)^\delta}{u_{\delta+1}} = u_\delta + u_{\delta-2}$$ ecc.

5. *a)* La successione particolare u sulle cui proprietà sono basate quelle di ogni successione U, ha oltre le esposte comuni colle U, altre proprietà speciali. Una di queste che passiamo subito a stabilire ci servirà per dimostrare un'*altra* delle U. La questione che ci proponiamo ora è di vedere se esistono e come sono distribuiti nella successione u i multipli di un suo termine u_i. Cominciamo dal dimostrare che *per qualunque valore di* m *il termine* u_{mi} *è multiplo di* u_i.

Il procedimento che teniamo conduce anche alla determinazione del quoziente. Se infatti nella (1) poniamo $s = (m-1)i$, $n = i$, risulta

$$u_{mi} = u_{(m-1)i+1}\, u_i + u_{(m-1)i}\, u_{i-1}$$

e quindi

$$\frac{u_{mi}}{u_i} = u_{(m-1)i+1} + \frac{u_{(m-1)i}}{u_i} u_{i-1}$$

Da questa relazione di ricorrenza si riconosce che affinchè sia intero $\frac{u_{mi}}{u_i}$ basta che sia tale $\frac{u_{(m-1)i}}{u_i}$. E poichè quest'ultimo rapporto per $m = 2$ assume il valore 1, così saranno interi successivamente $\frac{u_{2i}}{u_i}, \frac{u_{3i}}{u_i} \ldots \frac{u_{mi}}{u_i}$ come si voleva provare.

Dalla precedente relazione di ricorrenza risultano poi, facendovi successivamente $m = 2, 3, 4, \ldots m$ e valendosi ogni volta della relazione precedente, le seguenti

$$\frac{u_{2i}}{u_i} = u_{i+1} + u_{i-1}$$

$$\frac{u_{3i}}{u_i} = u_{2i+1} + u_{i-1}(u_{i-1} + u_{i+1})$$

$$\frac{u_{4i}}{u_i} = u_{3i+1} + u_{i-1}\{u_{2i+1} + u_{i-1}(u_{i-1} + u_{i+1})\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

e da queste, come è facile vedere col solito metodo di induzione, discende poi la notevole uguaglianza

$$(\beta)\quad \frac{u_{mi}}{u_i}=u_{i-1}^{m-1}+u_{i+1}\,u_{i-1}^{m-2}+u_{2i+1}\,u_{i-1}^{m-3}+\dots$$

$$+u_{(m-3)i+1}\,u_{i-1}^2+u_{(m-3)i+1}\,u_{i-1}+u_{(m-1)i+1}$$

b) Per esaurire la questione posta resta a vedere se oltre i termini

$$u_i,\ u_{2i},\ u_{3i}\dots u_{mi},\dots$$

esistono *nella successione* u altri multipli di u_i. Supponiamo che ne esista uno compreso tra due dei precedenti multipli, per esempio tra $u_{(m-1)i}$ ed u_{mi}: esso sarà necessariamente delle forma $u_{mi-\varrho}$ con $\rho<i$. Indichiamo con q il quoto intero della divisione di mi per ρ se si vuole supporre mi non multiplo di ρ, e col medesimo simbolo q indichiamo invece l'intero immediatamente inferiore al quoto esatto di mi per ρ se mi si suppone invece multiplo di ρ. Sarà così necessariamente a seconda del caso

$$mi-q\rho\leqq\rho$$

Ciò premesso se si prendono a considerare nella successione u i termini a indici decrescenti

$$u_{mi},\ u_{mi-\varrho},\ u_{mi-2\varrho},\dots u_{mi-(\alpha-1)\varrho},\ u_{mi-\alpha\varrho},\ u_{mi-(\alpha+1)\varrho},\dots u_{mi-q\varrho}$$

dico che resulteranno *tutti* multipli di u_i; tali sono infatti u_{mi} per quanto precede, ed $u_{mi-\varrho}$ per l'attuale ipotesi, e quindi basterà provare che ove la proprietà si verifichi per tutti i termini scritti fino a $u_{mi-\alpha\varrho}$ incluso si verificherà pure per il successivo $u_{mi-(\alpha+1)\varrho}$. Per comodità si ponga

$$mi-\alpha\,\rho=j$$

sarà quindi $mi-(\alpha-1)\,\rho=j+\rho$, $mi-(\alpha+1)\,\rho=j-\rho$.

Dalla (1) si deduce

$$u_{j+\varrho}=u_j\,u_{\varrho+1}+u_{j-1}\,u_\varrho\,.$$

Ma per ipotesi $u_{j+\varrho}$, u_j sono entrambi multipli di u_i, e perciò sarà multiplo di u_i anche il prodotto $u_{j-1}\,u_\varrho$. D'altra parte essendo $j=mi-\alpha\rho>\rho$ è il caso di considerare il gruppo simmetrico

$$u_{\varrho-1},\ u_\varrho,\ u_{j-1},\ u_j$$

nel quale si ha per le solite formole del n. 2,

$$u_\varrho\,u_{j-1}-u_{\varrho-1}\,u_j=(-1)^{\varrho-1}\,u_{j-\varrho}$$

ma allora poichè risultano multipli di u_i entrambi i termini del primo membro, sarà multiplo di u_i anche il secondo $u_{j-\varrho}$ cioè $u_{mi-(\alpha+1)\varrho}$; l'affermazione posta è dunque dimostrata, e dovrà essere multiplo di u_i anche il termine ultimo della successione considerata, cioè $u_{mi-q\rho}$. D'altra parte essendo per ipotesi

$$mi - q\rho \leqq \rho < i$$

è certo

$$u_{mi-q\rho} < u_i$$

la conclusione precedente è quindi assurda.

Relativamente alla successione u possiamo dunque enunciare il seguente:

TEOREMA. — *La condizione necessaria è sufficiente affinchè* u_r *sia multiplo di* u_s *è che* r *sia multiplo di* s.

COROLLARIO I. — *I termini con indici composti sono composti.*

COROLLARIO II. — *Un termine* u_r *ha tanti divisori nella successione quanti ne ha l'indice* r *nella serie dei numeri naturali* (ossia nella successione degli indici).

COROLLARIO III. — *Se* d, m *sono rispettivamente il massimo comune divisore ed il minimo comune multiplo di più numeri* r, s, t..., *saranno* u_d, u_m *massimo comun divisore e minimo-comune multiplo,* **nella successione** u, *dei termini* u_r, u_s, u_t, ... ecc. ecc.

Questi risultati mettono in vista delle analogie tra la successione u e quella dei numeri naturali.

6. Torniamo ora a considerare la successione U. A partire da un termine *qualunque,* si consideri la successione di tutti i termini aventi gli indici in progressione aritmetica di differenza qualunque ρ. Tale successione potrà rappresentarsi così:

$$U_x \ldots U_{p-m\rho}\, U_{p-(m-1)\rho} \ldots U_{p-\lambda\rho} \ldots U_p \ldots U_{p+\lambda\rho} \ldots U_{p+(m-1)\rho}\, U_{p+m\rho} \ldots$$

Se allora si prendono in esame, le due coppie simmetriche rispetto all'elemento U_p:

$$(U_{p-m\rho}\, U_{p+m\rho})\ (U_{p-\lambda\rho},\, U_{p+\lambda\rho})$$

si ha il seguente

TEOREMA. — *Il quoziente*

$$\frac{U_{p+m\rho} - (-1)^{m\rho}\, U_{p-m\rho}}{U_{p+\lambda\rho} - (-1)^{\lambda\rho}\, U_{p-\lambda\rho}}$$

è un numero intero se e solamente quando m *è multiplo di* λ, **è costante** *al variare di* U_p *nella successione* U *mentre sono fissi* m *e* ρ, *è* **indipendente** *dai termini iniziali* a, b *della successione* U.

Per la dimostrazione conviene premettere alcune semplici considerazioni relative alla successione u. Denotando p ed n numeri qualunque sappiamo che è per la (1)

$$u_{p+n} = u_p\, u_{n+1} + u_{p-1}\, u_n\,.$$

E supposto $p > n$ (ciò che è lecito perchè p ed n sono permutabili) si consideri il gruppo simmetrico

$$u_n\,,\ u_{n+1}\,,\ u_p\,,\ u_{p+1}.$$

Applicando il teorema del n. 2, come altre volte, si avrà:

$$u_{n+1}\, u_p - u_n\, u_{p+1} = (-1)^n\, u_{p-n}$$

che sottratta dalla precedente dà la seguente

$$u_{p+n} - (-1)^n\, u_{p-n} = u_n\,(u_{p-1} + u_{p+1}).$$

Ora tornando alla U si costruisca l'espressione $U_{p+n} - (-1)^n\, U_{p-n}$. Tenuto conto della (2) risulta

$$U_{p+n} - (-1)^n\, U_{p-n} = (au_{p+n-2} + bu_{p+n-1}) - (-1)^n\,(au_{p-n-1} + bu_{p-n-1})$$

da cui

$$U_{p+n} - (-1)^n U_{p-n} = a(u_{p+n-2} - (-1)^n u_{p-n-2}) + b(u_{p+n-1} - (-1)^n u_{p-n-1})$$

Ma se nell'ultima relazione tra le sole u_r si muta una volta p in $p-2$ ed un'altra volta p in $p-1$ si trova

$$u_{p+n-2} - (-1)^n\, u_{p-n-2} = u_n\,(u_{p-3} + u_{p-1})$$
$$u_{p+n-2} - (-1)^n\, u_{p-n-1} = u_n\,(u_{p-2} + u_p)$$

e quindi sostituendo

$$U_{p+n} - (-1)^n\, U_{p-n} = u_n\,\left[[au_{p-1} + bu_p] + [au_{p-3} + bu_{p-2}]\right]$$

e poichè le due quantità entro le parentesi interne sono, a causa della (2), rispettivamente uguali ad U_{p+1}, U_{p-1} così avremo ancora

$$U_{p+n} - (-1)^n\, U_{p-n} = u_n\,(U_{p+1} + U_{p-1})$$

dalla quale mutando n in $m\varrho$ una prima volta, poi in $\lambda\varrho$ e dividendo le due relazioni ottenute si ricava

$$\frac{U_{p+m\varrho} - (-1)^{m\varrho}\, U_{p-m\varrho}}{U_{p+\lambda\varrho} - (-1)^{\lambda\sigma}\, U_{p-\lambda\varrho}} = \frac{u_{m\varrho}}{u_{\lambda\varrho}}\,.$$

Poichè il secondo membro è indipendente da p, a, b sono dimostrate la seconda e la terza proprietà contenute nell'enunciato del teorema; in quanto alla prima risulta pure immediatamente osservando che il quoziente $\frac{u_{m\varrho}}{u}$ è intero *soltanto e sempre* che sia $m\varrho$ multiplo di $\lambda\varrho$, cioè m multiplo di λ, come abbiamo dimostrato al n. 5.

OSSERVAZIONI:

a) Dalla relazione $u_{p+n} - (-1)^n u_{p-n} = u_n (u_{p-1} + u_{p+1})$ stabilita in principio della precedente dimostrazione risulta

$$\frac{u_{p+n} - (-1)^n u_{p-n}}{u_n} = u_{p-1} + u_{p+1}$$

e poichè il secondo membro è indipendente da n, così possiamo dire che nella *successione* u *il rapporto al primo membro della precedente eguaglianza è intero e costante al variare di* n.

a) Mutando n in δ e p in $\delta + 1$ si ha in particolare

$$\frac{u_{2\delta+1} - (-1)^\delta}{u_\delta} = u_\delta + u_{\delta+2}$$

b) Mutando invece n in δ e p in $\delta + 2$, e nella formola ottenuta cangiando di nuovo δ in $\delta - 1$ si ricava

$$\frac{u_{2\delta} + (-1)^\delta}{u_{\delta-1}} = u_{\delta-1} + u_{\delta+1}$$

c) Nella successione particolare u si ha poi un'altra proprietà notevole che discende subito dalla (1). Infatti se vi si pone $n = s + 1$ si ha subito

$$u_{2s+1} = u^2_{s+1} + u^2_s$$

ossia: *tutti i termini di indice dispari sono la somma di due quadrati interi, e di più dei quadrati di due termini consecutivi della successione.*

La Spezia, aprile 1900.

ALBERTO TAGIURI.

TRASFORMAZIONE DI UNA FRAZIONE NELLA SOMMA DI PIÙ FRAZIONI

i cui denominatori sono le successive potenze di un numero dato

Data una frazione propria $\frac{m}{n}$, ed un numero intero p, ci proponiamo di dimostrare che si possono sempre trovare dei numeri interi $q_1, q_2 \ldots q_s$ minori di p, tali che la frazione data si trasformi nella somma

$$\frac{q_1}{p} + \frac{q_2}{p^2} + \ldots + \frac{q_s}{p^s}$$

esattamente o con un errore assoluto minore di $\frac{1}{p^s}$, e che in tutti e due i casi la trasformazione si può fare in un solo modo.

Ricercheremo quindi la condizione necessaria e sufficiente perchè la detta trasformazione si possa fare esattamente, e considereremo poi il caso particolare di $p = 10$.

Indicheremo per brevità con T la trasformazione di cui si tratta.

Premettiamo il seguente

LEMMA. — *Se* $q_1, q_2 \ldots q_s$ *sono minori di* p, *ed* $\frac{h}{k}$ *è minore di* $\frac{1}{p^s}$, la somma

$$\text{(A)} \qquad \frac{q_1}{p} + \frac{q_2}{p^2} + \ldots + \frac{q_s}{p^s} + \frac{h}{k}$$

è minore di 1.

Infatti, se nei termini della somma (A) in luogo di q_i $(i = 1, 2, \ldots s)$ si pone $(p-1)$, che è il massimo dei valori che può avere q_i, si trova

$$\frac{p-1}{p} + \frac{p-1}{p^2} + \ldots + \frac{p-1}{p^s} + \frac{h}{k} = \frac{(p-1)(p^{s-1} + p^{s-2} + \ldots + 1)}{p^s} + \frac{h}{k} = \frac{p^s - 1}{p^s} + \frac{h}{k},$$

e poichè $\frac{h}{k} < \frac{1}{p^s}$, si deduce

$$\frac{p^s - 1}{p^s} + \frac{h}{k} < 1,$$

e quindi a maggior ragione la somma (A) sarà minore di 1.

TEOREMA 1°. — *La trasformazione* T *si può sempre effettuare ed in un solo modo.*

Infatti si divida mp per n, sia q_1 la parte intera del quoziente ed r_1 il resto; si divida $r_1 p$ per n, sia q_2 la parte intera del quoziente ed r_2 il resto; . . . . si divida $r_{s-1}\, p$, per n, sia q_s la parte intera del quoziente ed r_s il resto.

Dobbiamo distinguere due casi:

1° $r_s = 0$

2° $r_s > 0$, nè è possibile trovare un resto nullo. Sia nel primo che nel secondo caso avremo i due gruppi d'eguaglianze:

$$\text{(B)} \begin{cases} \dfrac{mp}{n} = q_1 + \dfrac{r_1}{n} \\ \dfrac{r_1 p}{n} = q_2 + \dfrac{r_2}{n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{r_{s-1}\, p}{n} = q_s + \dfrac{r_s}{n} \end{cases} \qquad \text{(C)} \begin{cases} \dfrac{m}{n} = \dfrac{q_1}{p} + \dfrac{r_1}{np} \\ \dfrac{r_1}{np} = \dfrac{q_2}{p^2} + \dfrac{r_2}{np^2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{r_{s-1}}{np^{s-1}} = \dfrac{q_s}{p^s} + \dfrac{r_s}{np^s} \end{cases}.$$

e i numeri $q_1, q_2 \ldots q_s$ saranno minori di p.

Addizionando le (C) membro a membro e sopprimendo nell'eguaglianza dedotta i termini comuni ai due membri, si trova nel 1° caso

$$\frac{m}{n} = \frac{q_1}{p} + \frac{q_2}{p^2} + \ldots + \frac{q_s}{p^s},$$

nel 2° caso

$$\frac{m}{n}=\frac{q_1}{p}+\frac{q_2}{p^2}+\ldots+\frac{q_s}{p^s}+\frac{r_s}{np^s};$$

e siccome $\frac{r_s}{np^s}<\frac{1}{p^s}$ perchè $r_s<n$, la prima parte del teorema è dimostrata.

Supponiamo ora di aver trovato mediante due procedimenti diversi

$$\frac{m}{n}=\frac{q_1}{p}+\frac{q_2}{p^2}+\ldots+\frac{q_s}{p^s}+\frac{c}{d},$$

$$\frac{m}{n}=\frac{g_1}{p}+\frac{g_2}{p^2}+\ldots+\frac{g_s}{p^s}+\frac{h}{k},$$

essendo

$$\frac{c}{d}<\frac{1}{p^s},\quad \frac{h}{k}<\frac{1}{p^s}.$$

Si deduce l'eguaglianza

$$\text{(D)}\quad \frac{q_1}{p}+\frac{q_2}{p^2}+\ldots+\frac{q_s}{p^s}+\frac{c}{d}=\frac{g_1}{p}+\frac{g_2}{p^2}+\ldots+\frac{g_s}{p^s}+\frac{h}{k},$$

e moltiplicando i due membri della (D) per p si trova

$$\text{(E)}\quad q_1+\frac{q_2}{p}+\ldots+\frac{q_s}{p^{s-1}}+\frac{pc}{d}=g_1+\frac{g_2}{p}+\ldots+\frac{g_s}{p^{s-1}}+\frac{ph}{k},$$

e sarà

$$\frac{pc}{d}<\frac{1}{p^{s-1}},\quad \frac{ph}{k}<\frac{1}{p^{s-1}}.$$

Ma affinchè la (E) possa sussistere deve essere

$$q_1=g_1,$$

perchè per la proposizione premessa la somma dei rimanenti termini in ciascun membro della (E) è una frazione minore di uno. Allora avremo anche

$$\frac{q_2}{p}+\frac{q_3}{p_2}+\ldots+\frac{q_s}{p^{s-1}}+\frac{pc}{d}=\frac{g_2}{p}+\frac{g_3}{p_2}+\ldots+\frac{g_s}{p^{s-1}}+\frac{ph}{k};$$

e da quest'ultima eguaglianza si ricava, ragionando come prima,

$$q_2=g_2,$$

e così continuando si arriverà all'eguaglianza

$$\frac{q_s}{p}+\frac{p^{s-1}c}{d}=\frac{g_s}{p}+\frac{p^{s-1}h}{k},$$

da cui si deduce

$$q_s = g_s,$$
$$\frac{c}{d} = \frac{h}{k};$$

ed il teorema è completamente dimostrato.

Osservazione. — *Nel caso in cui non si può trovare un resto nullo, la trasformazione* T *si può effettuare con un errore sempre più piccolo, perchè minore di* $\frac{1}{p^s}$, *dove* s *si può prendere grande a piacere.*

Teorema 2°. — *Per una frazione* $\frac{a}{p^s}$, *il cui denominatore è una potenza* s^{esima} *perfetta, la trasformazione* T *si può sempre effettuare esattamente, e il numero dei termini è eguale ad* s.

Infatti operando con la frazione $\frac{a}{p^s}$ (per la quale è lecito supporre a non divisibile per p) come si è operato con la frazione $\frac{m}{n}$, si trovino i quozienti incompleti $q_1, q_2 \ldots q_s$ ed i resti $r_1, r_2 \ldots r_s$. Poichè r_1 è il resto della divisione di ap per p^s, r_1 sarà divisibile per p e allora $r_1 p$ per p^2, $r_2 p$ per p^3, $r_{s-1} p$ per p^s; dunque $r_s = 0$ ed avremo

$$\frac{a}{p^s} = \frac{q_1}{p} + \frac{q_2}{p^2} + \ldots + \frac{q_s}{p^s}.$$

Teorema 3°. — *La condizione necessaria e sufficiente perchè per una frazione propria* $\frac{m}{n}$ *irriducibile la trasformazione* T *si possa effettuare esattamente è che i fattori primi di* n *siano fattori primi di* p; *e quando la trasformazione* T *è effettuabile, il numero dei termini la cui somma equivale alla frazione data è uguale al più piccolo esponente per cui si ha una potenza di* p *divisibile per* n.

La condizione è necessaria. Infatti se

$$\frac{m}{n} = \frac{q_1}{p} + \frac{q_2}{p^2} + \ldots + \frac{q_s}{p^s},$$

si deduce

$$\frac{m}{n} = \frac{q_1 p^{s-1} + q_2 p^{s-2} + \ldots + q_s}{p^s};$$

ed essendo $\frac{m}{n}$ irriducibile, p^s dev'essere multiplo di n, e quindi i fattori primi di n devono essere fattori primi di p^s e perciò di p.

La condizione è sufficiente. Infatti se i fattori primi di n sono fattori primi di p, potremo trovare una potenza p^s, sia questa la più piccola, divisibile per n ed allora avremo

$$\frac{m}{n} = \frac{\mu}{p^s}$$

e per il teorema precedente $\frac{m}{n}$ si potrà trasformare esattamente nel modo detto e il numero dei termini sarà s.

Osservazione. — *Se gli esponenti dei fattori primi di* p *sono eguali ad* 1, *e i fattori primi di* n *sono fattori primi di* p, *la più piccola potenza di* p *multipla di* n *è quella che ha per esponente il più grande degli esponenti dei fattori primi di* n.

Se è data una frazione $\frac{b}{n}$ maggiore di 1, si divida b per n; sia q la parte intera del quoziente ed r il resto; avremo

$$\frac{b}{n} = q + \frac{r}{n}$$

essendo $\frac{r}{n} < 1$; e quindi la frazione data si potrà trasformare nella somma

$$q + \frac{q_1}{p} + \frac{q_2}{p^2} + \ldots + \frac{q_s}{p^s}$$

esattamente o con un errore assoluto minore di $\frac{1}{p^s}$, operando sulla frazione $\frac{r}{n}$ la trasformazione T.

Supponendo $p = 10$ risultano dai teoremi precedenti le seguenti proposizioni:

a) Una frazione si può trasformare in un numero decimale esattamente o con un errore assoluto minore di una unità di un ordine decimale qualunque.

Infatti la frazione data si potrà, per quanto abbiamo dimostrato, trasformare nella somma

$$\text{(F)} \qquad q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \ldots + \frac{q_s}{10^s}$$

esattamente o con un errore assoluto minore di $\frac{1}{10^s}$; essendo la somma (F) un numero decimale, che ha q per parte intera e per cifre decimali

$$q_1, q_2 \ldots q_s \, .$$

b) La condizione necessaria e sufficiente perchè una frazione $\frac{m}{n}$ irriducibile si possa trasformare esattamente in un numero decimale, è che n non contenga fattori primi diversi da 2 e da 5; e quando la detta trasformazione è effettuabile, il numero delle cifre decimali è uguale al più grande degli esponenti dei fattori 2 e 5 di n.

Ciò risulta dal teorema 3°, notando che $10 = 2 \times 5$, e tenendo conto dell'osservazione fatta a detto teorema.

Belluno, dicembre 1899.

G. Monti.

QUALCHE COMPLEMENTO AL TEOREMA DI HUNYADY

su certi determinanti

Dato un determinante qualunque d'ordine n

$$D = [a_{ik}] \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

il teorema di Hunyady dimostra come un certo determinante Δ di ordine $\frac{n(n+1)}{2}$, opportunamente formato con gli elementi a_{ik}, sia esprimibile con una potenza di D. Non fu avvertito però, per quanto è a mia cognizione, che pure i complementi algebrici di primo ordine in Δ, ammettono una espressione elegante in funzione di D e de' suoi complementi di primo ordine.

Tale semplice ricerca e le conseguenti relazioni intendo porre in evidenza nella nota che segue.

1. Approfitto di un richiamo del teorema di Hunyady per introdurre qualche utile notazione.

Per mezzo del determinante D costruisco le n funzioni lineari:

$$(A) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n = y_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{n2}x_n = y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = y_n . \end{cases}$$

Si facciano ora i quadrati ed i prodotti due a due delle funzioni (A), e indichiamo con $\alpha_{(ij)(hk)}$ il coefficente di $(x_i x_j)$ nella funzione quadratica $(y_h y_k)$. Le $\alpha_{(ij)(hk)}$ non mutano scambiando due indici di una stessa parentesi, e si presentano in numero di

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Scrivendo ordinatamente le funzioni quadratiche $(y_h y_k)$ si ottiene:

$$(B) \quad \begin{cases} \alpha_{(11)(11)}x_1^2 + \alpha_{(12)(11)}x_1x_2 + \dots + \alpha_{(nn)(11)}x_n^2 = y_1^2 \\ \alpha_{(11)(12)}x_1^2 + \alpha_{(12)(12)}x_1x_2 + \dots + \alpha_{(nn)(12)}x_n^2 = y_1y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{(11)(nn)}x_1^2 + \alpha_{(12)(nn)}x_1x_2 + \dots + \alpha_{(nn)(nn)}x_n^2 = y_n^2 \end{cases}$$

Si costruisca allora il determinante

$$\Delta = [\alpha_{(ij)(hk)}],$$

ponendo nella stessa colonna tutte le α in cui sono fissi i primi indici (ij), e nella stessa linea tutte quelle α in cui sono fissi i secondi indici (hk).

Le colonne e le linee così costruite si indicheranno brevemente con i rispettivi simboli (ij), (hk).

Ora il teorema di Hunyady è espresso dalla formola

$$\Delta = D^{n+1}, \tag{1}$$

intendendo che le linee e le colonne in Δ sieno opportunamente ordinate, così per es. come nella tabella (B), si presentano i coefficenti α.

2. Si attribuisca alle y_r significato di quantità arbitrarie. Allora dal sistema (A) ricavando i valori di x_i, x_j risulta

$$x_i = \frac{D_i(y)}{D}, \qquad x_j = \frac{D_j(y)}{D}, \tag{2}$$

dove $D_i(y)$, $D_j(y)$ si deducono dal determinante D ponendo la colonna delle y rispettivamente al posto delle colonne di posto i, j.

Dal sistema (B) ricaviamo ora x_i^2, $x_i x_j$, x_j^2, onde

$$x_i^2 = \frac{\Delta_{ii}(y)}{\Delta}, \qquad x_i x_j = \frac{\Delta_{ij}(y)}{\Delta}, \qquad x_j^2 = \frac{\Delta_{jj}(y)}{\Delta}, \tag{3}$$

dove Δ_{ij} si deduce dal determinante Δ, ponendo i prodotti

$$y_h y_k \; (h, k = 1, 2, \ldots n)$$

al posto della colonna (ij).

Eliminando x_i, x_j fra le (3) si ottiene la formola

$$\Delta_{ij}^2(y) = \Delta_{ii}(y)\, \Delta_{jj}(y), \tag{4}$$

la quale è molto interessante per chi ne analizzi il significato, e servirà di cardine a parte delle nostre ricerche.

3. Si confrontino ora i valori delle x_i^2 dati dalle (2) e (3). Tenuta presente la (1), si ottiene in modo ovvio

$$\Delta_{ii}(y) = D^{n-1} . D_i^2(y). \tag{5}$$

Sostituendo ora questa espressione nelle Δ_{ii}, Δ_{jj} della formola (4) ed estraendo la radice, risulta

$$\Delta_{ij}(y) = D^{n-1} . D_i(y) . D_j(y), \tag{6}$$

dove, calcolando il segno di un medesimo termine nei due membri, è tosto verificato che, nell'estrazione di radice del secondo membro, a questo compete il segno positivo appunto, come si è posto.

4. Dalle (5) e (6) è facile ora dedurre l'espressione dei minori di primo ordine di Δ. Indichiamo in generale con D_{ij} il complemento algebrico di a_{ij} in D, e con $\Delta_{(ij)(hk)}$ il complemento di $\alpha_{(ij)(hk)}$ in Δ.

Poniamo

$$y_h = 1, \quad y_r = 0 \; (r \neq h).$$

Per tal modo i determinanti

$$D_i(y), \qquad D_j(y), \qquad \Delta_{ii}(y), \quad \Delta_{ij}(y)$$

diventano rispettivamente

$$D_{ih}, \qquad D_{jh}, \qquad \Delta_{(ii)(hh)}, \quad \Delta_{(ij)(hh)}.$$

Onde la (5) e la (6) diventano

$$\Delta_{(ii)(hh)} = D^{n-1} . D_{ih}^2, \tag{7}$$

$$\Delta_{(ij)(hh)} = D^{n-1} . D_{ih} D_{jh}, \tag{8}$$

delle quali la prima naturalmente è caso particolare della seconda. In questo modo abbiamo determinata l'espressione dei complementi algebrici di elementi, in cui almeno i secondi indici sono uguali.

5. Per procedere ora alla ricerca generale poniamo

$$y_h = y_k = 1, \qquad y_r = 0, \qquad (r \neq h, k),$$

e sostituiamo nella (5). I determinanti

$$D_i(y) \quad , \quad \Delta_{ii}(y)$$

si mutano allora in

$$D_{ih} + D_{ik}, \qquad \Delta_{(ii)(hh)} + \Delta_{(ii)(hk)} + \Delta_{(ii)(kk)}:$$

onde

$$\Delta_{(ii)(hh)} + \Delta_{(ii)(hk)} + \Delta_{(ii)(kk)} = D^{n-1} (D_{ih} + D_{ik})^2,$$

e tenuto conto della (7)

$$\Delta_{(ii)(hk)} = 2D^{n-1} D_{ih} D_{ik} \qquad (h \neq k) \tag{9}$$

espressione del minore in cui i primi indici sono uguali. Sostituendo invece i posti valori delle Δ nella (6), essa diventa analogamente

$$\Delta_{(ij)(hh)} + \Delta_{(ij)(hk)} + \Delta_{(ij)(kk)} = (D_{ih} + D_{ik}) (D_{jh} + D_{jk}).$$

Relazione questa, che, sviluppando il secondo membro e tenendo presente la (8), si riduce alla forma

$$\Delta_{(ij)(hk)} = D^{n-1}(D_{ih} D_{jk} + D_{ik} D_{jh}). \tag{10}$$

E questa comprende la (9), ma è vera soltanto per $h \neq k$.

6. In sostanza adunque abbiamo ottenute due formole generali, la (8) e la (10), per l'espressione dei minori di Δ. Tali formole non sono riconducibili l'una all'altra in quanto la prima vale quando in $\Delta_{(ih)(jk)}$ i secondi indici sono uguali, e l'altra solo nel caso che sieno essenzialmente diversi.

Per riassumerle in una forma comprensiva possiamo porre

$$\Delta_{(ij)(hk)} = \varepsilon D^{n-1}(D_{ih} D_{jk} + D_{ik} D_{jh}) \tag{11}$$

dove $\varepsilon = \frac{1}{2}$ per $h = k$, $\varepsilon = 1$ per $h \neq k$.

7. Per indicare qualche applicazione della (11) deduciamo un teorema abbastanza interessante.

Calcolando il reciproco Δ' di Δ, e posto

$$c = \frac{(n^2-1)(n+2)}{2},$$

si ottiene, rammentando la (1),

$$\Delta' = D^c.$$

D'altra parte se con Γ indico il determinante di elementi

$$\gamma_{(ij)(hk)} = D_{ih} D_{jk} + D_{ik} D_{jh},$$

questo, a meno del fattore

$$M = \frac{1}{2^n} D^{\frac{n(n^2-1)}{2}}$$

coincide con Δ'. Risulta adunque paragonando,

$$\Gamma = [\gamma_{(ij)(hk)}] = 2^n D^{n^2-1}. \tag{12}$$

Segue quindi il teorema:

Se $D = [a_{ik}]$ *è un determinante d'ordine* n, *e mediante i complementi algebrici de' suoi elementi si formano le espressioni*

$$\gamma_{(ij)(hk)} = D_{ih} D_{jk} + D_{ik} D_{jh},$$

allora il determinante

$$\Gamma = [\gamma_{(ij)(hk)}]$$

d'ordine $\frac{n(n+1)}{2}$, *formato ponendo nella stessa colonna le* γ *in cui i primi indici sono fissi, e nella stessa linea tutti quelli in cui sono fissi i secondi, è espresso per* D *nel modo seguente:*

$$\Gamma = \pm 2^n D^{n^2-1},$$

in cui il segno dipende dall'ordinamento delle colonne.

8. Applichiamo ancora la (11) a qualche determinante speciale.

a) Si supponga D un emisimmetrico d'ordine dispari.

Allora dal noto teorema $D=0$ discende

$$\Delta = 0 \quad , \quad \Delta_{(ij)(hk)} = 0.$$

Supponiamo invece D d'ordine pari, onde

$$D = (1, 2, 3, \ldots n)^2,$$

e indichiamo con $[ij]$ il pfaffiano che si deduce da $(1, 2, 3, \ldots n)$, sopprimendo gli indici i, j, considerato con segno $+$ o $-$ a seconda che $i \lesseqgtr j$.

Ricordando allora che

$$D_{rs} = (1, 2, 3, \ldots n)[rs] \qquad (r \neq s),$$

le (1) ed (11) diventano

$$\Delta = (1, 2, 3, \ldots n)^{2n+2}.$$
$$\Delta_{(ij)(hk)} = \varepsilon (1, 2, 3, \ldots n)^{2n-2} \{[ih][jk] + [ik][jh]\}.$$

In virtù poi della formola (12) con facili osservazioni si ha pure che, formando gli elementi

$$\beta_{(ij)(hk)} = [ih][jk] + [ik][jh],$$

e con essi il determinante

$$B = [\beta_{(ij)(hk)}],$$

questo è dato dall'espressione

$$B = 2^n . (1, 2, 3, \ldots n)^{(n+1)(n-2)}.$$

b) Facciamo ora l'ipotesi che il determinante D sia ortogonale, ad esempio destrorso. In tal caso si ha

$$D = 1 \quad , \quad D_{rs} = a_{rs};$$

onde le formole

$$\Delta = 1,$$
$$\Delta_{(ij)(hk)} = \varepsilon (a_{ih} a_{jk} + a_{ik} a_{jh}),$$

in cui ε ha i soliti valori.

Di qui si vede che il teorema del n. 7 diventa in questa ipotesi particolarmente semplice:

Se $D = [a_{ih}]$ *è un determinante ortogonale destrorso, e mediante i suoi elementi si formano le espressioni*

$$\gamma_{(ij)(hk)} = a_{ih}\, a_{jk} + a_{ik}\, a_{jh}\,,$$

allora costruendo il determinante $\Gamma = [\gamma_{(ij)(hk)}]$ *d'ordine* $\dfrac{n(n+1)}{2}$, *secondo l'esposta legge, questo ha il valore* $\Gamma = 2^n$, *quando alle colonne di* Γ *si dia un ordinamento opportuno.*

Omettiamo ogni esempio ulteriore.

Sassari, 4 maggio 1900.

Tito Cazzaniga.

INTORNO AL TEOREMA DI WILSON

1. In questa breve nota ci proponiamo di stabilire alcune formule analoghe a quella celebre di Wilson

$$(p-1)\,!+1 \equiv 0 \pmod{p},$$

la quale offre, come si sa, una proprietà caratteristica dei numeri primi.

Abbiamo

$$(p-1)\,! = (p-2)\,!\,p - (p-2)\,!$$

e quindi

$$(p-2)\,! - 1 \equiv 0 \pmod{p};$$

così

$$(p-2)\,! = (p-3)\,!\,p - 2\,(p-3)\,!$$

onde

$$2\,(p-3)\,! + 1 \equiv 0 \pmod{p};$$

proseguendo così si ottiene la formula generale

$$(\alpha) \qquad x\,!\left\{p-(x+1)\right\}! \equiv (-1)^{x+1} \pmod{p}.$$

Se questa formula è vera per il valore x_1 di x, essa è pure vera pel valore x_1+1; infatti, essendo

$$\left\{p-(x_1+1)\right\}! \equiv -\left\{p-(x_1+2)\right\}!\,(x_1+1) \pmod{p}.$$

si ha

$$(x_1+1)\,!\left\{p-(x_1+2)\right\}! \equiv (-1)^{x_1+2} \pmod{p}.$$

Così la (α) è dimostrata. Essa vale per ogni valore intero compreso fra 0 e $p-1$: per tali due valori di x si ricade nella formula di Wilson. Può farsi in particolare: $x=\frac{p-1}{2}$; si ha allora:

(1) $$\left(\frac{p-1}{2}\right)^{2}!^{2}\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}}\quad(\text{mod. } p).$$

Ma ai fattori del prodotto

$$2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 4^2 \ldots \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

si possono sostituire i residui quadratici di p; indicando con π_p il loro prodotto, si ha

(2) $$\pi_p\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}}\quad(\text{mod. } p),$$

cioè: *Per ogni numero primo* p, *il prodotto dei residui quadratici, aumentato o diminuito di 1, è divisibile per* p; *viceversa tale proprietà caratterizza i numeri primi.*

12. Riprendiamo la (1). Si può scrivere

$$\frac{p-1}{2}!=\frac{p-3}{2}!\,\frac{p-1}{2}=\frac{1}{2}\,\frac{p-3}{2}!\,p-\frac{1}{2}\,\frac{p-3}{2}!$$

onde

$$\left(\frac{1}{2}\,\frac{p-3}{2}!\right)^2\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}}\quad(\text{mod. } p);$$

così analogamente

$$\left(\frac{3}{2^2}\,\frac{p-5}{2}!\right)^2\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}}(\text{mod. } p);$$

ed in generale

(γ) $$\left\{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\ldots(2y-1)\right\}^2\frac{\left(\frac{p-2y-1}{2}!^{2}\right)^2}{2^{2y}}\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}}\quad(\text{mod. } p).$$

Se la formula è vera pel valore y_1 di y, lo è pure pel valore y_1+1, perchè è

$$\frac{p-2y_1-1}{2}!=\frac{p-2y_1-3}{2}!\,p-\frac{p-2y_1-3}{2}!\,\frac{2y_1+1}{2}\,.$$

Essa vale per ogni valore di y compreso fra 0 e $\frac{p-1}{2}$. Per $y=0$ si ricade nella (1). Per $y=\frac{p-1}{2}$ si ha

$$\left\{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\ldots(p-2)\right\}^2\equiv2^{p-1}(-1)^{\frac{p+1}{2}}\quad(\text{mod. } p),$$

e pel teorema di Fermat

(3) $$\left\{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\ldots(p-2)\right\}^2\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}}\quad(\text{mod. } p),$$

oppure

$$\left\{4 \,.\, 6 \,.\, 8 \ldots (p-1)\right\} \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}.$$

In generale sarà opportuno prendere per caso particolare della (β) il massimo valore di y che soddisfa la disuguaglianza:

$$\mathrm{E}\left(\frac{p-2y-1}{2^2}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{p-2y-1}{2^3}\right) + \ldots \quad + \mathrm{E}\left(\frac{p-2y-1}{2^u}\right) \geq 2^y,$$

dove E (a) è il simbolo di Legendre e 2^u è la massima potenza di 2 contenuta in $p-2y-1$.

3. Si ha ancora

$$\left(\frac{p-1}{2}\,!\right)^2 \equiv \left(\frac{p-3}{2}\,!\; p-1\,\frac{p-1}{2}\,! - \frac{p-3}{2}\,!\right)^2 \equiv \left(\frac{p-1}{2}\,! + \frac{p-3}{2}\,!\right)^2 \pmod{p};$$

sostituendo per $\left(\frac{p-1}{2}\,!\right)^2$ e $\left(\frac{p-3}{2}\,!\right)^2$ i valori congrui che si ricavano dalla (β), si ha

$$2\,(-1)^{\frac{p+1}{2}} + \frac{p-1}{2}\,!\,\frac{p-3}{2}\,! \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p};$$

proseguendo così per $\frac{p-2}{2}\,!\,,\frac{p-5}{2}\,!\,,\ldots$, si ottiene la formula generale:

$$(\gamma) \quad 2^{2z+1}\,(-1)^{\frac{p+1}{2}} + (2z+1)\left\{3 \,.\, 5 \ldots (2z-1)\right\}^2 \frac{p-2z-3}{2}\,!\,\frac{p-2z-1}{2}\,! \equiv 0 \pmod{p},$$

dove z può variare fra 0 e $\frac{p-3}{2}$. Per quest'ultimo valore di 2 si ottiene ancora la formula (β).

4. Le formule (α), (β), (γ) e le altre, che ne sono particolari casi danno altrettante condizioni necessarie e sufficienti pel riconoscimento di un numero primo. Benchè esse siano ancor lungi dall'offrire criteri pratici, si possono tuttavia notare dal punto di vista logico.

MARIO VECCHI.

PROPRIETÀ DEL TETRAEDRO E DEL QUADRILATERO

1. In questa nota chiameremo: A_1, A_2, A_3, A_4 i vertici di un tetraedro; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ le facce opposte; γ_{ij} il piano elevato perpendicolarmente allo spigolo A_iA_j nel suo punto medio, δ_{ij} il piano perpendicolare allo spigolo A_iA_j condotto dal punto medio dello spigolo opposto, G il baricentro, O il centro della sfera circoscritta ed H l'ortocentro, ossia il centro dell'iperboloide delle altezze.

Osserviamo prima di tutto che il piano γ_{ij} è il simmetrico del piano δ_{ij} rispetto a G. Infatti essi piani sono paralleli perchè entrambi perpendicolari ad A_iA_j, ed il punto ove il primo incontra A_iA_j (punto medio di A_iA_j) è il simmetrico rispetto a G del punto ove il secondo incontra lo spigolo opposto A_kA_l (punto medio di A_kA_l). Risulta allora che, allo stesso modo come i 6 piani γ_{ij} formano un angolo quadrispigolo di vertice O, i sei piani δ_{ij} formano un angolo quadrispigolo il cui vertice è il punto simmetrico di O rispetto a G, il quale in virtù di un teorema di Monge(*) è l'ortocentro H del tetraedro.

2. È facile vedere che il trispigolo diagonale dell'angolo quadrispigolo dei piani γ_{ij} ha per facce i 3 piani antiradicali(**) delle tre coppie di sfere descritte sulle coppie di spigoli opposti del tetraedro considerati come diametri (***). Si deduce quindi che le facce del trispigolo diagonale dell'angolo quadrispigolo dei piani δ_{ij} sono i piani radicali delle stesse coppie di sfere. Entrambe le terne dei piani sono costituite da piani perpendicolari alle 3 congiungenti le coppie di punti medii degli spigoli opposti.

3. È noto che se $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ sono i piani condotti da O perpendicolarmente alle mediane del tetraedro partenti da A_1, A_2, A_3, A_4 per ogni punto M del piano β_i si ha:

$$3\,\overline{MA_i}^2 = \overline{MA_j}^2 + \overline{MA_k}^2 + \overline{MA_l}^2 \quad (****)$$

ove i, j, k, l sono, indipendentemente dall'ordine, i numeri $1, 2, 3, 4$. Possiamo aggiungere che: *l'angolo tetraedro dei quattro piani* $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ *è armonicamente circoscritto all'angolo quadrispigolo dei piani* γ_{ij}, cioè le tre coppie di spigoli opposti dell'angolo tetraedro dei piani β si trovano sulle tre coppie di facce dell'angolo tetraspigolo dei piani γ_{ij} ed il triedro diagonale del primo coincide col trispigolo diagonale del secondo.

Infatti, per ogni punto M comune ai piani β_1, β_2 si ha:

$$\left.\begin{aligned} 3\,\overline{MA_1}^2 &= \overline{MA_2}^2 + \overline{MA_3}^2 + \overline{MA_4}^2 \\ 3\,\overline{MA_2}^2 &= \overline{MA_1}^2 + \overline{MA_3}^2 + \overline{MA_4}^2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

e sottraendo: $4\,\overline{MA_1}^2 = 4\,\overline{MA_2}^2$, ossia $MA_1 = MA_2$. Sicchè il punto M si trova anche nel piano γ_{12}. Inoltre la prima delle due equazioni (1) per $MA_1 = MA_2$ si può scrivere:

$$\overline{MA_1}^2 + \overline{MA_2}^2 = \overline{MA_3}^2 + \overline{MA_4}^2,$$

e ciò indica che il punto M si trova pure nel piano antiradicale delle due sfere descritte su A_1A_2, A_3A_4 come diametri. Potremo quindi affermare che i piani $\beta_i\beta_j$ si incontrano in una retta che è comune anche al piano γ_{ij} ed al piano antiradicale delle due sfere descritte su A_iA_j e sullo spigolo opposto come diametri; ed il teorema è con ciò dimostrato.

Da ciò che precede si ricava pure che *l'angolo tetraedro formato dai piani* $\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3, \beta'_4$ *condotti da* H *perpendicolarmente alle mediane uscenti da* A_1, A_2, A_3, A_4 *è armonicamente circoscritto all'angolo quadrispigolo dei piani* δ_{ij}.

4. Vogliamo ora ricercare la relazione che passa tra le distanze di un punto P di un piano β'_1 dai 4 vertici del tetraedro. Siano A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 i simmetrici di $A_1 A_2 A_3 A_4$ rispetto a G, avremo allora:

$$3\,\overline{PA'_1}^2 = \overline{PA'_2}^2 + \overline{PA'_3}^2 + \overline{PA'_4}^2 \quad \text{ecc.}$$

(*) *Correspondance sur l'école polytechnique*, Vol. II. 1809.
(**) Sono i piani simmetrici dei piani radicali rispetto ai punti medii delle centrali.
(***) Cfr.: *A.* " Quelques théorèmes de géométrie „. *Nouvelles Annales de Math.*, pag. 17, 1897.
(****) Cfr.: la nota citata, pag. 13.

D'altra parte si ha

$$\left.\begin{array}{l}\overline{PA_1}^2 + \overline{PA'_1}^2 = 2\overline{PG}^2 + 2\overline{GA_1}^2 \\ \overline{PA_2}^2 + \overline{PA'_2}^2 = 2\overline{PG}^2 + 2\overline{GA_2}^2 \\ \overline{PA_3}^2 + \overline{PA'_3}^2 = 2\overline{PG}^2 + 2\overline{GA_3}^2 \\ \overline{PA_4}^2 + \overline{PA'_4}^2 = 2\overline{PG}^2 + 2\overline{GA_4}^2\end{array}\right\}$$

e sottraendo dal triplo della 1ª la somma delle altre tre, si ha:

$$3\overline{PA_1}^2 - (\overline{PA_2}^2 + \overline{PA_3}^2 + \overline{PA_4}^2) = 2\left\{3\overline{GA_1}^2 - (\overline{GA_2}^2 + \overline{GA_3}^2 + \overline{GA_4}^2)\right\}.$$

Ora, se indichiamo con G_1 il baricentro di $A_2 A_3 A_4$, si ha

$$\overline{GA_2}^2 + \overline{GA_3}^2 + \overline{GA_4}^2 = 3\overline{GG_1}^2 + \frac{1}{3}(\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_4A_2}^2).$$

Ed osservando che $GG_1 = \frac{1}{4} A_1G_1$, e che $A_1G = \frac{3}{4} A_1G_1$,

$$3\overline{GA_1}^2 - (\overline{GA_2}^2 + \overline{GA_3}^2 + \overline{GA_4}^2) = \frac{3}{2}\overline{A_1G_1}^2 - \frac{1}{3}(\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_4A_2}^2)$$

Inoltre: $\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_1A_3}^2 + \overline{A_1A_4}^2 = 3\overline{A_1G_1}^2 - \frac{1}{3}(\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_4A_2}^2)$

Ricavando $\overline{A_1G_1}^2$ e sostituendolo nella espressione precedente, si trova dopo facili riduzioni

$$3\overline{PA_1}^2 - (\overline{PA_2}^2 + \overline{PA_3}^2 + \overline{PA_4}^2) = (\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_1A_3}^2 + \overline{A_1A_4}^2) - (\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_4A_2}^2).$$

Analogamente per i punti dei piani β'_2, β'_3, β'_4.

L'ortocentro H *di un tetraedro* $A_1 A_2 A_3 A_4$ *ha adunque la proprietà espressa dalle eguaglianze seguenti:*

$$3\overline{HA_i}^2 = \overline{HA_j}^2 + \overline{HA_k}^2 + \overline{HA_l}^2 + \delta_i \quad \text{per } i = 1, 2, 3, 4 \qquad (2)$$

ove δ_i *è la differenza tra la somma dei quadrati degli spigoli passanti per* A_i *e la somma dei quadrati degli altri tre spigoli.*

In particolare se gli spigoli opposti sono eguali si ha $\delta_i = 0$ e quindi H coincide con O. Si ha così un teorema noto per il tetraedro equifacciale (v. ad es.: Besso, *Periodico di matematica*, Vol. I).

5. Si sa che $\overline{HA_1}^2 + \overline{HA_2}^2 + \overline{HA_3}^2 + \overline{HA_4}^2 = 4R^2$, ove R è il raggio della sfera circoscritta al tetraedro (v. Intrigila, " Sul tetraedro „ *Rendiconti dell'Accademia Reale di Napoli*, § II, 1883). Tenendo conto anche della (2) si ricaverà

$$\overline{HA_i}^2 - R^2 = \frac{1}{4}\delta_i,$$

e da qui si deduce facilmente che: *i valori assoluti delle* δ_i *sono proporzionali alle projezioni della* GA_i *sulla retta* GO.

6. Supponiamo che tre dei vertici $A_2 A_3 A_4$ del tetraedro siano e fissi, che il quarto vertice A_1 si muova su un piano π, quale è l'inviluppo dei piani β_1?

Sul piano π diseguiamo un circolo μ, e sia M il punto ove il suo asse r incontra uno dei piani β_1, quello corrispondente ad una certa posizione di A_1 su μ; si avrà: $3\overline{MA_1}^2 = \overline{MA_2}^2 + \overline{MA_3}^2 + \overline{MA_4}^2$. Se A'_1 è un altro punto di μ, per essere

$MA_1 = MA'_1$ si avrà: $3\overline{MA'_1}^2 = \overline{MA_2}^2 + \overline{MA_3}^2 + \overline{MA_4}^2$, e quindi il punto M si trova anche nel piano γ_1 corrispondente al tetraedro $A'_1A_2A_3A_4$. Risulta così dimostrato che, quando il punto A_1 si muove sul circolo μ del piano π, i piani β_1 corrispondenti passano per un punto M inviluppando un cono di secondo grado. Reciprocamente un punto M dà luogo ad uno solo di siffatti coni, perchè non può esistere un altro circolo che dia luogo pure ad un cono di vertice M.

Facendo variare il circolo μ su π si avranno ∞^3 coni di secondo grado, i cui piani tangenti sono i piani β_1, ed i cui vertici sono tutti i punti dello spazio. Risulta da ciò dimostrato che l'inviluppo richiesto è una quadrica.

7. Nelle stesse condizioni del paragrafo precedente, quale è l'inviluppo dei piani β'_1 condotti dagli ortocentri perpendicolarmente alle mediane passanti per i vertici A_1? Dimostreremo che tali piani passano per uno stesso punto M.

Dal baricentro G_1 di $A_2A_3A_4$ si abbassi la perpendicolare G_1P al piano π, e sia M il punto ove essa incontra il piano β'_1 corrispondente ad un punto A_1 di π; si avrà: $\overline{MA_1}^2 = \frac{1}{3}(\overline{MA_2}^2 + \overline{MA_3}^2 + \overline{MA_4}^2) + \frac{1}{3}\delta_1$, ossia, sostituendo a δ_1 il suo valore, ed esprimendo la somma $\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_4}^2$ mediante A_1G_1:

$$\overline{MA_1}^2 = \frac{1}{3}(\overline{MA_2}^2 + \overline{MA_3}^2 + \overline{MA_4}^2) + \overline{A_1G_1}^2 - \frac{8}{9}(\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_4A_2}^2).$$

Sia ora A un punto qualunque di π; col centro P e raggio PA si descrive la circonferenza μ che incontra PA_1 in un punto A'_1. Avremo:

$$\overline{MA_1}^2 - \overline{MA'_1}^2 = \overline{GA_1}^2 - \overline{GA'_1}^2,$$

onde si potrà scrivere:

$$\overline{MA'_1}^2 = \frac{1}{3}(\overline{MA_2}^2 + \overline{MA_3}^2 + \overline{MA_4}^2) + \overline{A'_1G_1}^2 - \frac{8}{9}(\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_4A_2}^2)$$
$$= \frac{1}{3}(\overline{MA_2}^2 + \overline{MA_3}^2 + \overline{MA_4}^2) + \frac{1}{3}\delta'_1,$$

ove δ'_1 è il δ_1 corrispondente ad A'_1 e ciò dimostra che il piano β'_1 corrispondente ad A'_1 passa pure M. Dal fatto poi che A si trova su μ risulta $MA = MA'_1$, d'onde si ricava facilmente che anche il piano corrispondente ad A passa per M. Così il teorema è dimostrato.

Nella memoria citata di Intrigila (§ 4° e 5°) si trova studiato il luogo degli ortocentri dei tetraedri, che è una quadrica.

8. Supponendo che i 4 punti $A_1A_2A_3A_4$ stiano su un piano, si hanno proprietà del quadrilatero. Invece dei piani γ_{ij}, δ_{ij} si avranno le rette g_{ij}, d_{ij}. Le rette g_{ij} sono i 6 lati di un quadrangolo che ha per vertici i centri dei cerchi circoscritti ai triangoli $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_4$ (triangoli parziali del quadrilatero). Le rette d_{ij} sono le simmetriche delle rette precedenti rispetto al baricentro G del quadrilatero, e quindi sono i lati di un altro quadrangolo. Nel caso particolare del quadrilatero inscrittibile (e solo allora) le rette G_{ij} concorrono in un punto O, e quindi le rette d_{ij} concorrono in un altro punto H simmetrico di O rispetto a G. Questo punto H, che si potrebbe chiamare l'ortocentro del quadrilatero inscrittibile, gode di parecchie altre proprietà (Cfr.: ad es.: GILLET, "Alcune proprietà del triangolo e del quadrangolo", *Periodico*, pag. 147, 1895 e la 15ª quistione a concorso del *Supplemento al Periodico*, proposta dal prof. CARDOSO-LAYNES).

9. Anche nel piano si può considerare il luogo dei punti M tali che:

$$\overline{MA_l}^2 = \frac{1}{3}\left(\overline{MA_i}^2 + \overline{MA_k}^2 + \overline{MA_j}^2\right)$$

ove i, j, k, l sono indipendentemente dall'ordine i numeri $1, 2, 3, 4$. Si avranno così 4 rette b_1, b_2, b_3, b_4, le quali soltanto nel quadrilatero inscrittibile concorrono in un punto; in generale però formano un quadrilatero armonicamente circoscritto al quadrangolo determinato dalle sei rette g_{ij} (v. la figura). Si ha così un mezzo semplice di costruire queste 4 rette.

10. Analogamente si troveranno 4 rette $b'_1 b'_2 b'_3 b'_4$ definite come i piani $\beta'_1 \beta'_2 \beta'_3 \beta'_4$; tali rette formano in generale un quadrilatero armonicamente circoscritto al quadrangolo determinato dalle 6 rette d_{ij}.

11. Se vi rimangono fissi 3 dei vertici, $A_2 . A_3 . A_4$ del quadrilatero dato, ed il 4° vertice A_1 si muove su una retta, l'inviluppo della retta b_2 è una conica e le rette b'_1 passano tutte per uno stesso punto.

G. Gallucci.

SUL BARICENTRO DEL TRONCO DI PRISMA TRIANGOLARE

Ill.mo Signor Direttore,

Nel fasc. V del *Periodico* di quest'anno ho letto una sua nota sul baricentro del tronco di prisma triangolare. A me pare che si possa dimostrare la quistione nella detta nota trattata, anche senza uscire dal campo della matematica elementare.

Conservo le notazioni adottate nel detto articolo, e suppongo noto anch'io, cosa del resto facilissima a dimostrarsi, che

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{c'}{a' + b'}.$$

Allora il baricentro del tronco di prisma coincide con il baricentro dei punti K_1, K_2, ai quali sieno applicati rispettivamente i coefficenti c', $a' + b'$, ovvero i coefficienti proporzionali $4c'$, $4a' + b'$. Il punto $K_2 . 4(a' + b')$ (*) può riguardarsi come il baricentro dei punti $C' . (a' + b')$, $H_2 . 3(a' + b')$; e il punto $K_1 . 4c'$ come come il baricentro dei punti $C'' . 2c'$, $D . 2c'$. D essendo il punto medio di AB. Il piano CC'D taglia il triangolo A''B''C'', secondo la mediana C''E uscente da C'',

(*) Seguendo il Baltzer indico con $P . m$ il punto P affetto dal coefficiente m.

e se I è il punto comune a detta mediana e alla retta C'D, risulta subito dalla considerazione dei triangoli simili IC'C'', IDE, che

$$\frac{IC'}{ID} = \frac{2c'}{a'+b'},$$

e perciò $I.(a'+b'+2c')$ può riguardarsi il baricentro dei punti $D.2b'$, $C'.(a'+b')$. E siccome è anche

$$\frac{IC''}{IE} = \frac{2c'}{a'+b},$$

$I.(a'+b'+2c')$ può ritenersi come il baricentro dei punti $C''.(a'+b')$, $E.2c'$: Infine $E.2c'$ è il baricentro dei punti $A''.c'$, $B''.c'$ e $H_2.3a'+b'$ è il baricentro dei punti $A'(2a'+b')+B(a'+2b')$, e quindi il baricentro del tronco di prisma coincide con il baricentro dei punti

$$A''.(2a'+b'+c'),\quad B''.(a'+2b'+c'),\quad C''.(a'+b'+2c),$$

che è quanto volevasi dimostrare.

S. Catania.

PROBLEMI DIVERSI

1. Sieno OA e OB due raggi perpendicolari fissi d'un circolo dato. La tangente in un punto variabile M del circolo incontri le rette OA e OB in P e Q. Sia S' il punto d'incontro della parallela ad OB condotta per P colla parallela ad OA condotta per Q. K la proiezione di S su PQ, K' la proiezione di K su OA, P' la proiezione di P sulla parallela PQ condotta per S', e H la proiezione di O su PP'.

1°. La curva luogo del punto K è una quartica unicursale. L'area compresa fra la curva e le rette OA, OB, KK' è equivalente a tre volte l'area del settore circolare MOA. L'area totale compresa fra la curva e i suoi asintoti è il triplo di quella del cerchio dato.

2°. Si costruisca il punto in cui la retta PP' tocca il suo inviluppo.

3°. Il luogo del punto P' è una quartica di cui l'area compresa fra la curva e gli asintoti è il triplo di quella del cerchio.

4°. Il luogo del punto H è un *cappa* di cui l'area compresa fra la curva e gli asintoti è equivalente all'area del cerchio.

2. La tangente in un punto M variabile d'un'ellisse incontra gli assi in T e T'; la normale in M li incontra in N, N'. Il luogo del centro dell'iperbole che passa per i punti T, T', N, N' ed ha i suoi assi paralleli a quelli dell'ellisse è una curva tale che l'area compresa fra essa ed i suoi asintoti è

$$U = ab - \frac{2c^4}{ab} + \frac{3\pi c^4}{4ab}.$$

3. Sieno O il punto di regresso e Ox l'asse di simmetria di una cardioide, Oy la perpendicolare ad Ox, M un punto qualunque della cardioide, P e Q le sue proiezioni sopra Ox, Oy. Trovare le aree delle tre curve seguenti:

1° inviluppo di PQ;

2° luogo della proiezione di O su PQ;

3° luogo della proiezione di M su PQ.

Si costruiscano queste curve.

4. La tangente in punto M di un'ellisse di centro O incontra l'asse maggiore in P. Sia Q il punto d'incontro della parallela all'asse maggiore, condotta per M colla parallela a OM condotta per P, Q' il simmetrico di Q rispetto a P, S la proiezione di O su QQ', H e H' le proiezioni di Q e Q' sulla perpendicolare a MP condotta per P, K il punto d'incontro di PQ colla parellela condotta per M all'asse minore.

1°. Il luogo del punto Q è la quartica

$$x^2 = \frac{a^2(2b^2 - y^2)^2}{b^2(b^2 - y^2)}$$

(essendo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ l'equazione dell'ellisse data), e l'area compresa fra la curva ed i suoi asintoti è $U = 3\pi ab$.

2°. Il luogo del punto Q' è la quartica

$$x^2 = \frac{a^2 y^4}{b^2(b^2 - y^2)};$$

e l'area compresa fra questa curva e gli asintoti è $U = \pi ab$.

3°. Il luogo del punto S è la sestica

$$b^2 y^2 (x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2).$$

L'area compresa fra questa curva e i suoi asintoti è

$$U = \frac{\pi a^2 (3a^2 - b^2)}{2b^2}.$$

4°. La retta PQ tocca il suo inviluppo in un punto che si ottiene nel modo seguente.

Si proietta M in I sull'asse maggiore, si prende il simmetrico I' di I rispetto a P. La parallela all'asse minore condotta per I' incontra la retta PQ nel punto cercato. Questa parallela incontra anche la retta PH nel punto in cui PH tocca il suo inviluppo.

5°. Il luogo del punto H è una curva unicursale; l'area compresa fra questa curva ed i suoi asintoti è

$$U = \frac{\pi}{2}(a^2 + 5b^2).$$

Si osservi che le aree delle curve 1 e 5 sono equivalenti per $a = b$ e per $a = 5b$.

6°. Il luogo del punto H' è una curva unicursale: l'area compresa fra questo ed i suoi asintoti è $U = \frac{\pi}{2}(a^2 - 3b^2)$.

7°. Il luogo del punto K è la sestica

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{(a^2 - x^2)^3}{x^4}.$$

5. Si consideri un circolo di centro O e due punti A e A' fissi situati sopra uno stesso diametro a eguali distanze da O; e sia M un punto variabile del circolo.

1°. Il luogo dell'ortocentro del triangolo MAA' è una quartica; l'area compresa fra la curva ed i suoi asintoti è equivalente alla differenza per il doppio dell'area del cerchio di diametro AA' e l'area del cerchio dato.

2°. Il luogo del punto di Lemoive del triangolo MAA' e dei suoi punti associati si compone d'un'ellisse, d'una retta e di due quartiche.

6. Si consideri un'ellisse e e il circolo c concentrico a e ed avente per diametro la somma degli assi di e. Esistono infiniti triangoli ABC inscritti a c e circoscritti a e. Sian A', B', C' i punti di contatto dei lati BC, CA, AB con e:

1° la perpendicolare condotta per A su B'C' è normale ad un'ellisse fissa;

2° questa perpendicolare e la normale ad e in A' s'incontrano sopra un'ellisse fissa;

3° il luogo delle proiezioni di A su B'C' è una curva unicursale, della quale si domanda l'area:

4° le perpendicolari abbassate rispettivamente da A, B, C su B'C', C'A', A'B' concorrono in uno stesso punto. Si trovi l'area della curva luogo di questo punto.

7. Se si prendono per ordinata ed ascissa di un punto rispetto ad assi ortogonali le distanze del centro di un'ellisse della tangente e della normale in un punto variabile dell'ellisse medesima, si forma una quartica costituita di due ovali. L'area di ciascuno di questi è eguale a quella delle podaria del centro della sviluppata dell'ellisse.

E. N. Barisien.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI

501, 506, 507, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517

501. *Dimostrare che nella quartica avente per equazione (assi rettangolari)*

$$(x^2+y^2)^2-4ax(x^2-y^2)+4a^2(x^2-3y^2)=0.$$

1°. *Le quattro tangenti condotte alla curva da ognuno dei suoi due punti doppi* A *e* B *formano un fascio equiarmonico.*

2°. *Delle otto tangenti doppie, quattro sono immaginarie e quattro reali; queste ultime, due delle quali sono isolate, concorrono in un punto, e gli otto punti di contatto sopra un cerchio. Trovare le otto equazioni delle tangenti doppie.*

3°. *Se* P *è un punto arbitrario della quartica, l'ortocentro del triangolo* PAB *cade sulla curva.*

V. Retali.

Risoluzione del prof. A. Barozzini di Treviso.

Una retta $y=\lambda x$ passante per A taglia la quartica in punti le cui ascisse sono date da

(1) $$(1+\lambda^2)^2x^2+4a(\lambda^2-1)x+4a^2(1-3\lambda^2)=0.$$

La retta è tangente se sono uguali le radici di (1), cioè se

$$3\lambda^4+5\lambda^2-1=0.$$

Se ε è il valore del rapporto anarmonico del fascio delle quattro tangenti si ha facilmente $\varepsilon^2-\varepsilon+1=0$, quindi il fascio è anarmonico come d. d.

Delle quattro tangenti due sono reali e due immaginarie, i contatti stanno sul cerchio $x^2+y^2+8ax-12a^2=0$, che contiene anche i punti J, J' della curva pei quali $x=0$.

Una retta per B $y=\mu(x-2a)$ tagliata la quartica nei punti le cui ascisse sono date da

(2) $$(1+\mu^2)^2x^2+4a\mu^2(1-\mu^2)x+4a^2\mu^2(\mu^2-3)=0.$$

Tale equazione si ottiene dalla (1) mutando λ^2 in $\frac{1}{\mu^2}$; cioè se P_1 è un punto della quartica, vi è sempre un raggio BP_2 perpendicolare ad AP_1, essendo P_2 altro punto della quartica colla medesima ascissa di P_1. In altre parole P_2 ortocentro di ABP_1 sta sulla curva come d. d.

La retta $y=\mu(x-2a)$ è tangente se $\mu^4-6\mu^2-3=0$. Ciò dimostra ancora che le tangenti condotte per B sono perpendicolari ordinatamente a quelle per A, quindi sono uguali i rapporti anarmonici dei due gruppi di tangenti. Quelle per B sono pure due reali e due immaginarie ed hanno i loro contatti sul cerchio

$$x^2+y^2-4ax=0$$

passante per A e col centro in B.

L'equazione della quartica si può scrivere

$$[x^2+y^2+2ax-6a^2]^2=4a[2x-3a][x^2-3a^2].$$

Si hanno allora quattro tangenti reali, due isolate (la retta all'∞ tangente nei ciclici e la $x = +a\sqrt{+3}$) e due coi contatti reali. Gli otto contatti stanno sul cerchio $x^2 + y^2 + 2ax - 6a^2 = 0$ e le quattro tangenti concorrono nel punto all'∞ della perpendicolare ad AB.

Altra forma dell'equazione della curva è

$$[3y^2 + x^2 - 6ax + 6a^2]^2 = 4[3y^2(x^2 + y^2 - 2ax) + (x^2 - 3ax + a^2)^2].$$

Il secondo membro ugagliato a zero dà l'equazione complessiva delle quattro tangenti doppie immaginarie; il primo membro una ellisse che passa pegli otto contatti delle tangenti medesime. I doppi A;B sono coniugati rispetto tale conica.

Nota. — Il chiar.^{mo} prof. Retali ottiene la costruzione della quartica nel seguente modo: Una retta $x = m$ tagli in P_0 il cerchio $x^2 + y^2 - 3a^2 = 0$: centro P_0 si descriva un cerchio ortogonale a quello il cui diametro è AB, e che tagli la retta in P_1, P_2: tali punti appartengono alla quartica.

Ora aggiungo che le tangenti a tale curva in $P_1 . P_2$ e la tangente al cerchio

$$x^2 + y^2 - 3a^2 = 0$$

in P_0, concorrono in un medesimo punto posto sulla retta $x = 3a - m$. Ciò dà un modo semplicissimo di tracciare le tangenti alla curva.

Inoltre i cerchi circoscritti ai triangoli AP_1P_2, BP_1R_2 sono uguali ed hanno i centri pure su cerchi uguali al cerchio $x^2 + y^2 - 3a^2 = 0$.

Finalmente la superficie compresa nei due cappii in cui è divisa la parte reale della curva ha per misura totale

$$a^2[4\sqrt{3} + 3\pi].$$

506. *Sono dati in un piano due cerchi* K^2, C^2 *ed* AB *sono i termini del diametro di* K^2 *sulla linea dei centri; da un punto variabile* P *di* C^2 *si conducono la perpendicolare* p *ad* |AB| *e la tangente* |Pω| *a* K^2. *Determinare il luogo dei punti d'intersezione di* p *con le rette* |ωA|, |ωB|, *che uniscono il punto di contatto* ω *con* A *e* B.

V. Retali.

Risoluzione del comandante E.-N. Barisien di Costantinopoli.

Sieno l'equazioni dei circoli K^2 e C^2 e delle rette Pω e p

$$(K^2) \qquad x^2 + y^2 - R^2 = 0, \tag{1}$$
$$(C^2) \qquad (x - a)^2 + y^2 - R'^2 = 0, \tag{2}$$
$$(P\varphi) \qquad x\cos\varphi + y \operatorname{sen}\varphi - R = 0, \tag{3}$$
$$(p) \qquad x = X, \tag{4}$$

essendo φ l'angolo del diametro di K^2, che passa per ω, col diametro AB. Conoscendo le coordinate di A (R, 0) e di ω (R cos φ, R sen φ), si deduce che l'equazione della retta (Aω) è

$$(A\omega) \qquad X \operatorname{sen}\varphi + y(1 - \cos\varphi) = R \operatorname{sen}\varphi. \tag{5}$$

Si avrà il luogo del punto d'incontro di (Aω) con p, eliminando x, y e φ fra le ultime quattro equazioni. Facendo $x = X$ nelle (3) e (5), queste equazioni diventano

$$X\cos\varphi + Y \operatorname{sen}\varphi = R$$
$$Y\cos\varphi - (X - R)\operatorname{sen}\varphi = Y.$$

L'eliminazione di φ fra queste due ultime equazioni dà

$$[XY - YR]^2 + [Yy + R(X - R)]^2 = [Yy + X(X - R)]^2,$$

ossia

$$(X - R)^2 [X^2 - Y^2 - R^2 + 2Yy] = 0. \qquad (6)$$

La retta $X - R = 0$ è evidentemente una soluzione estranea. Facendo $x = X$ nella (2) si ha

$$y = \sqrt{R^2 - (X - a)^2}.$$

L'equazione del luogo del punto d'incontro delle rette $(A\omega)$, p è dunque

$$X^2 - Y^2 - R^2 + 2Y\sqrt{R^2 - (X - a)^2}$$

ovvero

$$(X^2 - Y^2 - R^2)^2 + 4Y^2[(X - a)^2 - R^2] = 0. \qquad (7)$$

Facendo lo stesso calcolo per il luogo del punto d'incontro di $(B\omega)$ con p, si trova la stessa *quartica* (7). È una curva formata da due ovali.

Osservazione I. — Sia $(P\omega')$ la seconda tangente a K^2 uscente da P. Si vede geometricamente che le rette (ωA), $(B\omega')$ concorrono in Q su p, e che le rette (ωB), $(\omega' A)$ concorrono in Q' su p, poichè i quattro punti A, B, Q e Q' formano un *gruppo ortocentrico*. Ad ogni punto P di C^2, corrispondono dunque i due Q e Q' del luogo cercato. Siccome questo è evidentemente simmetrico rispetto alla retta dei centri, ne risulta che su di ogni retta P, si trovano quattro punti del luogo. Il luogo è dunque, *a priori* una quartica.

Osservazione II. — Se si rimpiazza il circolo C^2 con una retta, basta rimpiazzare y con una funzione lineare di X ($y = mx + p$) nell'equazione (6). Il luogo sarà quindi l'iperbole equilatera

$$(X^2 - Y^2 - R^2) + 2Y(mX + p) = 0.$$

In una forma più generale, se la curva percorsa da P ha per equazione

$$y = F(x),$$

il luogo analogo a quello dell'enunciato sarà la curva

$$X^2 - Y^2 - R^2 + 2Y \,.\, F(X) = 0.$$

507. *Siano* G *e* g *polo e polare rispetto ad una conica immaginaria* ω. *Dato un punto* P *del piano di* ω, *sia* P' *il punto della retta* GP *che è reciproco di* P *rispetto ad* ω. *Trovare la condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva* ρ *del piano di* ω, *sia il luogo di* P' *quando* P *descriva una retta* r.

G. Marletta.

Risoluzione del prof. V. Retali.

Sia K^2 la conica reale coniugata ad ω rispetto al punto G (e all'asse g): le polari p_1 e p' di P rispetto a K^2 e ad ω si segano sopra g e sono separate armonicamente mediante G e g. (*) I punti P_1 e P' ordinatamente reciproci di P rispetto a K^2 ed ω, e allineati con G, si corrispondono dunque nella omologia armonica avente G per centro e g per asse d'omologia; se P descrive una retta r, il luogo di P_1 è (teorema notissimo) la conica R^2 corrispondente ad r nella inversione di Hirst avente G per polo e K^2 per conica dei punti uniti, dunque il luogo di P' è la conica omologica armonica di R^2, G centro e g asse d'omologia; passa per G, per i due punti imaginari conjugati (r, ω) e pei due ove K^2 è segata dalla retta ch'è separata armonicamente da r mediante G e g.

509. *Dimostrare che*

$$\int_0^a \frac{x \sqrt[4]{x} \, . \, dx}{\sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{x}}} = \frac{35 \pi a^2}{64}$$

E. N. Barisien.

Risoluzione del prof. V. Retali e del sig. V. Golisciani, studente della R. U. di Napoli.

Se poniamo

$$y = \frac{x \sqrt[4]{x}}{\sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{x}}}$$

si ha

(1) $$a y^4 = x (x^2 + y^2)^2 :$$

l'integrale definito proposto rappresenta dunque l'area A compresa fra la curva (1) l'asse della x e l'assintoto reale d'inflessione, che è $x = a$; per determinare quest'area pongo $y = xt = x \operatorname{tg}\theta$: le equazioni parametriche della quintica razionale (1) sono dunque

(2) $$x = \frac{a t^4}{(1 + t^2)^2}, \quad y = \frac{a t^5}{(1 + t^2)^2},$$

e abbiamo successivamente:

$$dx = \frac{4 a t^3}{(1 + t^2)^3} \cdot dt$$

$$\mathrm{A} = \int_0^a y dx = 4 a^2 \int_0^\infty \frac{t^8}{(1 + t^2)^5} \cdot dt = 4 a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^8 \theta \, d\theta ;$$

osservando ora che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}\theta)^{2n} d\theta = \frac{\binom{2n}{n} \pi}{2^{2n+1}} .$$

(*) Retali, "Sulle coniche coniugate", teor. XIII (*Mem. della R. Acc. delle Scienze di Bologna*, T. VI_4, pag. 104; anno 1884, Idem, "Osservazioni analitico-geometriche ecc.", (*ibid.* T. VII_4, pag. 12, anno 1886). In queste due mie note si trovano, con altri, quasi tutti i resultati ottenuti dal signor G. Marletta nella sua elegante nota "Sulle polarità piane", inserita recentemente in questo *Periodico* (Anno XV, pag. 144-150). Le quattro polarità piane considerate dal signor Marletta sono identiche al sistema di quattro *coniche armoniche* studiato ripetutamente da Steiner, Cremona, Schröter, Rosanes, Ruffini, Battaglini, D'Ovidio, Siacci, Veronese, Chr. Wiener e da me.

abbiamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^8\theta\, d\theta = \frac{\binom{8}{4}\pi}{2^9} = \frac{70\pi}{2.256}$$

e finalmente

$$\mathrm{A} = \frac{35\pi}{256} \cdot 4a^2 = \frac{35\pi a^2}{64}.$$

510. *Sia* A *un punto d'incontro d'una parabola colla sua sviluppata. Il rapporto del raggio di curvatura della parabola e della sua sviluppata in questo punto è* $\sqrt{6}$.

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. V. Retali.

Dalle equazioni $y^2 = 2px$ e $27py^2 = 8(x-p)^3$, della parabola e della sua sviluppata, abbiamo

$$4x^3 - 12px^2 - 15p^2x - 4p^3 = 0,$$

che può scriversi $(x=4p).(2x+p)^2 = 0$. Le coordinate dei due punti *reali* d'incontro delle due curve sono dunque

$$x = 4p,\ y = \pm 2p\sqrt{2},$$

e quelle dei punti imaginari coniugati comuni

$$x = -\frac{p}{2},\ y = \pm pi.$$

E ora ponendo nella solita formola $\rho = (1+y'^2)^{\frac{3}{2}} : y''$, per x' e y'' i loro valori troviamo per espressioni dei raggi di curvatura della parabola e della sviluppata in un punto (al finito) di ascissa x rispettivamente

$$\rho_1 = \frac{(2x+p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}},\quad \rho_2 = \frac{2(2x+p)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{x-p}}{3p\sqrt{2}}$$

e da queste

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = 3\sqrt{\frac{p}{2(x-p)}},$$

che esprime un teorema più generale di quello enunciato nella quistione.

Per $x = 4p$ si trova $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{2}.\sqrt{6}$ e per $x = -\frac{p}{2}$ abbiamo $\frac{\rho_1}{\rho_2} = i\sqrt{3}$.

511. *Essendo data la cubica* $y^2 = \frac{x^3}{k}$, *si consideri il punto* A *della curva tale che l'ordinata* AA' *sia eguale all'ascissa* OA'. *Sieno* B *il centro di curvatura relativo ad* A *e* B *la proiezione di* B *sull'asse* x.

1°. *Se* U *designa l'area della cubica compresa fra l'arco* OA, *l'asse delle* x *e l'ordinata* AA', *e se* U' *rappresenta l'area della sua sviluppata compresa fra l'arco* OB, *l'asse* x *e l'ordinata* BB', *si ha*

$$\frac{U'}{U} = \frac{2768}{63}.$$

2°. *Se* S' *ed* S *indicano gli archi* OB *ed* OA, *si ha*

$$\frac{S}{S'} = \frac{2\,(13\sqrt{13} - 8)}{117\,\sqrt{13}}.$$

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. V. Retali.

Dalla $y^2 = \frac{x^3}{k}$ abbiamo, derivando due volte,

$$y' = \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{2k^{\frac{1}{2}}},\ y'' = \frac{3}{4k^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{1}{2}}}$$

e le coordinate (ξ, η) del centro di curvatura nel punto (x, y) sono

$$\xi = x - y'\,\frac{1 + y'^2}{y''} = -\,\frac{x(9x + 2k)}{2k}$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = \frac{4(3x + k)\sqrt{x}}{3\sqrt{k}},$$

dalle quali, ponendo $x = k$, troviamo per le coordinate del punto B, centro di curvatura relativo ad A (k, k),

$$\xi_0 = -\,\frac{11k}{2},\ \eta_0 = \frac{16k}{3};$$

ma l'arco $OB = S'$ della sviluppata essendo uguale al raggio di curvatura $\overline{AB}$, abbiamo subito

$$S' = \overline{AB} = \sqrt{\left(k + \frac{11k}{2}\right)^2 + \left(k - \frac{16k}{3}\right)^2} = \frac{k}{6}\,.\,13\sqrt{13}.$$

Calcoliamo ora l'arco S:

$$S = \int_0^k \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_0^k \sqrt{\left(1 + \frac{9x}{4k}\right)}\,dx$$

e, posto $4k + 9x = z$,

$$S = \frac{1}{18\sqrt{k}} \int_{4k}^{13k} \sqrt{z}\,.\,dz = \frac{k}{27}(13\sqrt{13} - 8)$$

dunque

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{13\sqrt{13} - 8}{27}\right)\cdot\frac{6}{13\sqrt{13}} = \frac{2(13\sqrt{13} - 8)}{117\sqrt{13}}.$$

L'area AOA' è espressa da

$$U = \int_0^k y\,dx = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^k x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2k^2}{5};$$

il calcolo di U' è meno breve ma pur facilissimo: abbiamo

$$U' = \int_0^{\frac{11k}{2}} \eta\,.\,d\xi = \frac{4}{3\sqrt{k}} \int_0^k (3x + k)\sqrt{x}.\,\left(1 + \frac{9x}{k}\right)dx$$

e successivamente

$$U' = \frac{16}{\sqrt{k}} \int_0^k x^{\frac{3}{2}}\, dx + \frac{36}{k^{\frac{3}{2}}} \int_0^k x^{\frac{5}{2}}\, dx + \frac{4k}{3\sqrt{k}} \int_0^k x^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$U' = \frac{32k^2}{5} + \frac{72k^2}{7} + \frac{8k^2}{9} = \frac{5536k^2}{5\,.\,63},$$

dunque

$$\frac{U'}{U} = \frac{2768}{63}.$$

512. *Dimostrare che la retta avente per equazione*

$$x(1+t^2)^2 - 2ty = at^2(t^2-1)$$

inviluppa una cubica, allorchè t *varia.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. V. Retali.

Derivando rispetto a t la equazione data abbiamo

$$2t(1+t^2)\,.\,x - y = at(2t^2-1)$$

e risolvendo rispetto ad $x\,.\,y$ troviamo per le coordinate del punto di contatto della retta col suo inviluppo

$$x = \frac{at^2}{1+t^2}, \quad y = at;$$

che sono le equazioni parametriche della *cubica d'Agnesi*. Infatti eliminando t si ha subito $a^2x = (a-x)\,y^2$.

513. *Da un punto* P *della curva* d'Agnesi $\left(\textit{la cui equazione è } y^2 = \frac{a^2x}{a-x}\right)$ *si possono condurre sette normali alla curva. Dimostrare che:*

1°. *La somma delle distanze dei piedi di queste sette normali dell'asse di simmetria della curva è in un rapporto costante col loro prodotto;*

2°. *il luogo del punto* P *tale che la somma delle inverse delle distanze dei piedi delle normali dall'asse suddetto sia costante, è una retta.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. V. Retali.

Le equazioni parametriche dell'*Agnesiana* sono (v. risoluz. della quistione 512)

$$x = \frac{at^2}{1+t^2}, \quad y = at$$

e quella della tangente alla curva nel punto t è

$$x(1+t^2)^2 - 2ty = at^2(t^2-1);$$

la equazione della normale nel punto t è dunque

$$2t(1+t^2)\,x + (1+t^2)^3\,y = at(1+t^2)^2 + 2at^3$$

ossia, sviluppando e ordinando rispetto a t,

$$-at^7 + yt^6 - 3at^5 + 3yt^4 + (2x - 5a)t^3 + 3yt^2 + 2xt + y = 0;$$

il rapporto della somma al prodotto delle radici dell'ultima equazione è dunque 1, e la somma delle inverse delle radici è espresso da $-\frac{2x}{y}$; se ora osserviamo che il parametro t è proporzionale all'ordinata del piede della normale troviamo subito che il rapporto indicato nel teorema 1° è $1 : a^6$ e che il luogo cui si accenna nel teorema 2° è la retta per l'origine

$$ky + 2ax = 0$$

dove k è la costante.

514. *Essendo* S, *la proiezione del centro di una iperbole equilatera* $xy = k^2$ *sulla tangente in un punto* M *e* S' *il simmetrico di* S *rispetto ad* M, *si dimostri:*

1° *che l'equazione del luogo di* S' *riferita agli assintoti è*

$$x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) = 2k;$$

2° *che l'area racchiusa fra gli assintoti e la curva è* $U = 6k^2$.

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. V. Retali e del sig. V. Golisciani, studente della R. U. di Napoli.

Sieno A e B i due punti ove la tangente in M sega rispettivamente gli assi Ox, Oy: posto $MO = \rho$, $\widehat{MOA} = \theta$ abbiamo $AM = MB = \rho$ e $\widehat{BAO} = \theta$. Le coordinate rettangolari X, Y di M sono

$$X = k\sqrt{\cot\theta}, \quad y = k\sqrt{\operatorname{tg}\theta},$$

e quelle di S

$$x' = OS\cos(90^\circ - \theta) = k\sqrt{2\operatorname{sen} 2\theta}\,.\operatorname{sen}\theta = 2k\operatorname{sen}\theta\sqrt{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$
$$y' = OS\operatorname{sen}(90^\circ - \theta) = k\sqrt{2\operatorname{sen} 2\theta}\,.\cos\theta = 2k\cos\theta\sqrt{\operatorname{sen}\theta\cos\theta};$$

le coordinate (x, y) di S' son dunque

$$x = 2X - x' = 2k\sqrt{\cos\theta}\,.\frac{\cos^2\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}} = 2k\cos^3\theta : \sqrt{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$
$$y = 2Y - y' = 2k\sqrt{\operatorname{sen}\theta}\,.\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\sqrt{\cos\theta}} = 2k\operatorname{sen}^3\theta : \sqrt{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}:$$

queste sono le equazioni parametriche del luogo di S'; per eliminare θ, moltiplicando e dividendo membro a membro si ha

$$xy = 4k^2\,.\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$$
$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}^3\theta$$

e dalla seconda di queste ultime,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{2}{3}} = y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos\theta = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

e finalmente

$$xy = 4k^2 \frac{(xy)^{\frac{2}{3}}}{\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right)^2},$$

$$(xy)^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^2 = 4k^2.$$

Per trovare l'area compresa fra le curve e gli assi positivi conviene servirsi delle equazioni parametriche: abbiamo

$$\frac{1}{2}\,U = \int_0^x y dx,$$

$$y = 2k \operatorname{sen}^{\frac{5}{2}}\theta \cos^{-\frac{1}{2}}\theta$$

$$dx = 2k\left(-\frac{5}{2}\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta \cos^{\frac{3}{2}}\theta - \frac{1}{2}\cos^{\frac{3}{2}}\theta \operatorname{sen}^{-\frac{3}{2}}\theta\right) d\theta$$

$$\frac{1}{2}\,U = 10k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3\theta \cos\theta \, d\theta + 2k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta \cos^3\theta \, d\theta$$

e siccome $\int \operatorname{sen}^3\theta \cos\theta \, d\theta = \frac{1}{4} \, . \operatorname{sen}^4\theta$, $\int \operatorname{sen}\theta \cos^3\theta \, d\theta = -\frac{1}{4}\cos^4\theta$,

$$\frac{1}{2}\,U = 10k^2\left(\frac{1}{4}\right) + 2k^2\left(\frac{1}{4}\right) = 3k^2.$$

515. *Sia dato un pentagono piano 12345, si conducano le diagonali 13 e 14 e 25, le due prime sieno tagliate dalla terza respettivamente in 4′ e 3′, si trovino i due punti che dividono armonicamente i segmenti 24′ e 53′ e si congiungano con 1, si ripete la stessa costruzione portando da ciascuno degli altri quattro vertici del pentagono. I dieci punti così ottenuti appartengono ad una stessa conica toccata dalle dieci rette.*

D. Valeri

Risoluzione del prof. V. Retali.

Consideriamo la conica, reale e immaginaria di prima specie, coniugata al triangolo 153′ e rispetto alla quale il punto 3 è polo della retta |42|: i due punti 4 e 2 intersezioni della retta |42| con le |13′|, |53′| sono respettivamente i poli rispetto a K^2 delle rette |35|, |31| le quali uniscono 3 con i punti 5 ed 1. La conica indicata nell'enunciato è dunque quella in rispetto alla quale ogni vertice del pentagono piano 14523 è polo del lato opposto. (Cfr. v. Staudt, *Geometrie der Lage*, p. 133, § 238.)

516. *Sia dato il triangolo* ABC *e sieno* A_1, B_1, C_1, *ed* H *i piedi e il punto d'incontro delle altezze. Sui lati* AB *ed* AC *si trovino le due coppie di punti (reali se l'angolo* A *è acuto, immaginari se ottuso) che sono equidistanti da* A *e che dividono armonicamente i segmenti* BC_1 *e* CB_1 *: sulle altezze* BB_1 *e* CC_1 *si trovino le due coppie di punti equidistanti respettivamente da* B_1 *e* C_1 *e che dividono armo-*

nicamente i segmenti BH *e* CH. *Gli otto punti così ottenuti sono in un cerchio di centro* A *respettivamente al quale i poli delle altezze* BB_1 *e* CC_1 *sono respettivamente* C *e* B.

D. Valeri.

Risoluzione del prof. V. Retali.

Il centro del cerchio conjugato rispetto a un triangolo dato è l'ortocentro del triangolo: dunque il cerchio A^2 conjugato rispetto al triangolo BHC ha A per centro e passa per gli otto punti indicati nell'enunciato del teorema che è così dimostrato.

Osservazione. — Si hanno così quattro cerchi A^2, B^2, C^2, H^2, *tre dei quali sono reali e l'altro* (relativo a quello dei punti A, B, C, H che è interno al triangolo formato dagli altri tre) *immaginario di prima specie. Ognuno dei quattro cerchi sega ortogonalmente gli altri tre* (è l'Jacobiano del sistema formato dagli altri tre), ha il centro in uno dei quattro punti A, B, C, H ed è conjugato al triangolo formato dagli altri tre: *due cerchi qualunque della quaterna si segano in due punti reciproci rispetto ad ognuno degli altri due. Se i tre cerchi reali sono per es.* A^2, B^2, C^2, se cioè il triangolo ABC è acutangolo, *le corde di questi cerchi parallele respettivamente ai lati* BC, CA, AB *sono eguali.* Proponiamo al lettore la dimostrazione di questi teoremi; la quaterna di cerchi ora considerata è importante anche perchè identica a quella dei cerchi focali di una quartica bicircolare e di una cubica ciclica. Cfr. " Sur le double contact etc. „ § 8; *Mem. de la Soc. royale des Sc. de Liége*, t. $XVIII_2$ e *Periodico di Matematica*, t. XIII, pag. 109.

517. *Costruite ancora le due prime coppie di punti come nell'esercizio precedente e determinate inoltre sulle altezze* BB_1 *e* CC_1 *le coppie di punti equidistanti respettivamente da* B *e da* C *e che dividono armonicamente i segmenti* B_1H, *e* C_1H *si hanno otto punti che sono in un'iperbole equilatera di centro* A *rispetto alla quale i poli delle altezze* BB_1 *e* CC_1 *sono respettivamente* C_1 *e* B_1.

D. Valeri.

Risoluzione del prof. V. Retali.

Consideriamo la conica H_a^2 di centro A e conjugata al triangolo B_1C_1H; poichè B e C_1 sono reciproci rispetto ad H_a^2 questa passa pei due punti ove il cerchio A^2 (vedi la risoluzione della quistione precedente) è segato da |AB|, e analogamente si vede che H_a^2 passa per i due punti comuni ad A^2 e alla retta |AC|.

Poichè la retta $|CC_1|$ e la retta all'infinito sono respettivamente polari di B_1 ed A rispetto ad H_a^2, il polo di |AC| sarà il punto all'infinito di $|CC_1|$ e questa retta sega H_a^2 nei punti doppi della involuzione

$$(C_1, H ; C, \infty);$$

e analogamente si vede che H_a^2 sega la retta $|BB_1|$ nei punti doppi della involuzione

$$(B_1, H ; B, \infty).$$

La H_a^2 passa dunque per gli otto punti indicati nell'enunciato; per dimostrare poi che H_a^2 è equilatera osservo che, condotte pel centro A le rette $|AC_0|$, $|AB_0|$ respettivamente parallele a $|CC_1|$, $|BB_1|$, sono $|AC|, |AC_0|$ e $|AB|, |AB_0|$ due coppie di diametri conjugati, ma gli angoli CAC_0, BAB_0 hanno le medesime bisettrici, dunque gli assintoti di H_a^2 sono rettangolari.

QUISTIONI PROPOSTE

518. Se P_1, P_2, P_3 sono le proiezioni di P sui lati del triangolo ACB, determinare il luogo di P tale che le rette AP_1, BP_2, CP_3 siano concorrenti.

519. Determinare sull'asse della strofoide retta tre punti A, B, C tali che, per ogni punto P della curva, abbia luogo la relazione

$$\overline{PB}^2 = PA\,.\,PC.$$

A. Barozzini.

520. La curva rappresentata dall'equazione

$$(x^2+2y^2)^4(x^2+y^2)=a^4x^6$$

ha la stessa area della lemmiscate di Bernouilli

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$$

521. Si considerino le due curve, di cui le equazioni polari sono

$$r=a\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}, \qquad r=a\tan\theta,$$

e che rappresentano una *cissoide retta* ed una *cappa*. L'area limitata fra queste due curve, che sono asintotiche, è equivalente a quella del cerchio generatore della cissoide.

522. Dimostrare che:

1° se si prolungano i raggi vettori focali d'un ellisse, di assi $2a$ e $2b$, della lunghezza $\sqrt{b}\,(\sqrt{b}-\sqrt{b})$, il luogo degli estremi di questi raggi vettori è una curva, di cui l'area è doppia di quella dell'ellisse;

2° se si diminuiscono i raggi vettori focali della lunghezza $2b$, la curva luogo degli estremi di questi raggi accorciati ha area uguale a quella dell'ellisse.

523. La tangente e la normale in un punto M d'un ellisse incontrino in T ed N l'asse maggiore, e siano T′ ed N′ i simmetrici di T ed N rispetto al centro dell'ellisse. Quando M percorre l'ellisse:

1° la retta MN′ è normale ad un elisse fissa;

2° il luogo del punto di mezzo del segmento MN′ è un ellisse;

3° il luogo del punto di mezzo del segmento MT′ è una curva, tale che l'area compresa fra essa ed i suoi assintoti è finita ed equivalente ad un quarto dell'aria dell'ellisse data.

524. La podaria di una cardioide rispetto al suo vertice è una sestica binodale, di cui l'area S ed il perimetro p sono

$$S=\frac{27\pi a^2}{32}\ , \quad p=6a+a\sqrt{3}\,.\,L(\sqrt{3}+2)=8{,}756\ldots a$$

essendo a la distanza fra il punto di regresso ed il vortice della cardioide.

E.-N. Barisien.

BIBLIOGRAFIA

F. ENRIQUES. — *Questioni riguardanti la Geometria elementare.* Bologna, Zanichelli, 1900.

L'idea di questa raccolta, è stata suggerita al chiarissimo prof. Enriques della Università di Bologna, come dichiara egli stesso nella prefazione, dalla raccolta di conferenze pubblicate dal Klein in occasione dell'Esposizione di Chicago.

E l'idea è veramente ottima. In quattordici articoli sono trattate da vari autori quasi tutte le quistioni più importanti, che interessano la geometria elementare, in guisa che ogni insegnante di scuole secondarie trova in questo libro il mezzo di mettersi al corrente di quanto interessa il suo insegnamento. — Ci proponiamo di analizzare più ampiamente in seguito almeno i più importanti fra i suddetti articoli, per ora ci limitiamo a dare l'elenco dei medesimi.

ARTICOLO I. — *Enriques,* Sulla importanza scientifica e didattica delle quistioni che si riferiscono ai principi della geometria.

ARTICOLO II. — *Amaldi,* Sui concetti di retta e di piano.

ARTICOLO III. — *Guarducci,* Della congruenza e del movimento.

ARTICOLO IV. — *Vitali,* Sulle applicazioni del postulato della continuità nella geometria elementare.

ARTICOLO V. — *Amaldi,* Sulla teoria dell'equivalenza.

ARTICOLO VI. — *Bonola,* Sulla teoria delle parallele e sulle geometrie non euclidee.

ARTICOLO VII. — *Baroni,* Sui metodi elementari per la risoluzione dei problemi geometrici.

ARTICOLO VIII. — *Daniele,* Sulla risoluzione dei problemi geometrici col compasso.

ARTICOLO IX. — *Giacomini,* Sulla risoluzione dei problemi geometrici cogli istrumenti elementari.

ARTICOLO X. — *Castelnuovo,* Sulla risolubilità dei problemi geometrici cogli istrumenti elementari.

ARTICOLO XI. — *Enriques,* Sulle equazioni algebriche risolubili per radicali quadratici e sulla costruibilità dei poligoni regolari.

ARTICOLO XII. — *Daniele,* Sulle costruzioni dell'ettadecagono regolare.

ARTICOLO XIII. — *Conti,* Problemi di terzo grado: Duplicazione del cubo. Trisezione dell'angolo.

ARTICOLO XIV. — *Calò,* Sui problemi triscendenti e in particolare sulla quadratura del circolo.

*DA GIORNALI E RIVISTE

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino.

Vol. XXXV, disp. 1-6. — *C. Rosati,* Sulla superficie di Veronese e di Steiner. — *B. Levi,* Sulla trasformazione dell'intorno di un punto per una corrispondenza irrazionale fra due spazi. — *D. De Francesco,* Sul moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante. — *E. Almansi,* Sulla torsione dei cilindri cavi a spessore piccolissimo. — *M. Lerch,* Nouvelle formule pour la differentiation d'une certaine classe de séries trigonométriques. — *V. Volterra,* Sugli

N. B. — Gli articoli segnati con asterisco sono inviati dal Comitato di redazione dell'Associazione MATHESIS.

integrali lineari dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti. — *F. Giudice*, Sulla metrica degli spazi a curvatura costante. — *E. Boggio*, Sull'equilibrio delle membrane elastiche piane.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere.

Serie II, vol. XXXIII, fasc. 4-6. — *G. Celoria e C. Somigliana*, Eugenio Beltrami: cenni commemorativi. — *E. Pascal*, Sulle equazioni ai differenziali totali di ordine qualunque.

Rendiconti delle sessioni della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna.

Nuova serie, vol. IV, fasc. 1°. — *F. P. Ruffini*, Linee radicali e punti radicali.

Memorie della pontificia Accademia dei nuovi Lincei.

Vol. XVI. — *P. T. Pepin*, Étude historique sur la théorie des residus quadratiques.

Annali di Matematica pura ed applicata.

Serie III, tomo IV, fasc. 1° e 2°. — *Bianchi*, Sulla deformazione dei paraboloidi di rotazione negli spazi di curvatura costante. — *Tanturri*, Ricerche sugli spazi plurisecanti di una curva algebrica. — *Calò*, Risoluzione di alcuni problemi sull'applicabilità delle superficie. — *Armanini*, Sulla superficie di minima resistenza. — *Dini*, Eugenio Beltrami (Cenno necrologico ed elenco dei suoi lavori).

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

Vol. XIV (1900), fasc. 1° e 2°. — *Appel*, Sur l'integration des équatiens du movement d'un corps pesant de révolution roulant par une arête circulaire sur un plan horizontal: cas particulier du cerceau. — *Korteweg*, Extrait d'une lettre à M. Appell. — *Pizzetti*, Sulla correzione da fare alle latitudini osservate per tener conto dell'altezza dei punti di stazione sul livello del mare. — *Ciani*, Un teorema sopra il covariante S della quartica piana. — *Petrovitch*, Sur l'expression du terme général des séries de Taylor représentant des combinaisons rationelles de la fonction exponentielle. — *id.*, Sur une classe d'equations différentielles du premier ordre. — *De Franchis*, Le superficie irrazionali di 4° ordine di genere gometrico-superficiale nullo. — *Gerbaldi*, Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane. (Parte seconda).

Il Pitagora, diretto da *G. Fazzari*.

Anno VI (1900), fasc. 7-8. — *R. Bettazzi*, I numeri limiti (continuaz. e fine). — *E. Trevisan*, Sul problema dei ponti di Königsberg: risoluzione del problema generalizzato. — *D. Gambioli*, Nota su alcune questioni di massimo e minimo (continuazione). — *C. Burali-Forti*, Questione di logica matematica. — Platone. — *D. Gambioli*, Esercizi sul trapezio isoscele circoscritto. — Dimostrazione geometrica della formula: tang $^1/_2$ (A — B) : tang $^1/_2$ (A — B) = $(a-b):(a+b)$. — *A. Bassi*, Appunti sulla sfera. — Progressione logaritmica. — Questioni.

Fasc. 9. — *C. Burali-Forti*, Sui simboli di logica matematica: nota 3ª. — Temi per concorso. — Relazione intorno ai lavori del concorso sui simboli di logica matematica. — Questioni.

Il Bollettino di matematiche e di scienze fisiche e naturali, diretto da *A. Conti*.

Num. 11. — *Bettazzi*, Grandezza, quantità e numero. — *Neri*, Mezzi di comunicazione e di trasporto. — *Buzzi*, La genesi del Calcolo Numerale attraverso l'evoluzione (contin.). — *Scoto*, Rivista Storica (contin.). — Rivista bibliografica.

Num. 12. — *Ciamberlini*, I giri viziosi nelle risoluzioni dei problemi numerici. — *Neri*, Mezzi di comunicazione e di trasporto (continuaz. e fine). — *Marangoni*, Lunghezza, area, volume. — *id.*, La nomenclatura per le quattro operazioni. — *Del Chicca*, Sull'insegnamento delle nozioni varie nelle Scuole Elementari (continuaz.). — Rivista bibliografica.

Num. 13-14. — Concorsi a premio. — *Bustelli*, Il postulato del movimento. — *Griffini*, I pesci luminosi dei nostri mari. — *Buzzi*, La genesi ecc. (continuaz.). — *Ciamberlini*, Esercizi di calcolo mentale per la 4ª e 5ª classe elementare. — *id.*, Didattica. — Rivista bibliografica. — Cronaca: Adunanza di professori di matematica tenuta in Bologna. — A proposito della prova scritta di matematica.

The Mathematical Gazette.

Vol. I, num. 21 (Maggio 1900). — *R. W. Genese*, Sul modo di insegnare le potenze con esponente qualunque; esame del modo migliore di dare la definizione di tali potenze nell'insegnamento secondario. — Rivista bibliografica. — *Percy J. Heawood*, Sulla proposizione fondamentale collegata all'annullarsi di un determinante: breve dimostrazione del teorema che la condizione acciocchè *n* equazioni lineari ad *n* incognite, omogenee, abbiano soluzioni diverse da zero è l'annullarsi del determinante dei coefficienti. — Problemi e soluzioni.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften.

Anno V (1899), fasc. 4°. — Oltre ad articoli riguardanti le scienze naturali troviamo: *F. Pietzker*, Sistemi e metodi nell'insegnamento delle scienze esatte (continuazione e fine). — Recensione sulle opere: 1°. Primo periodo dell'insegnamento geometrico in Quarta (Ostern, 1896). 2°. Il secondo anno dell'insegnamento geometrico nel Ginnasio (Ostern, 1897) di *Schulte, Ernest W. G.* e su tre opere didattiche di *E. Schultz*, dedicate alle scuole operaie.

Fasc. 5° (1899). — *L. Kiepert*, Sulla matematica delle assicurazioni. (Fatta una breve storia dello sviluppo dell'idea dell'assicurazione, di cui trovansi tracce già presso gli antichi Greci e Romani, l'A. discute sui metodi che riguardano il calcolo dei premi). — *B. Habenicht*, Semplificazioni all'insegnamento geometrico, specialmente del primo anno. (Il metodo che l'A. sviluppa è fondato sulle seguenti norme: 1° di non servirsi di figure, bensì di modelli di carta, latta, fil di ferro, 2° di non stabilire mai una defininizione se non dopo aver fatto acquistare all'alunno un'esatta conoscenza dell'oggetto che si vuol definire, 3° di dedurre le proprietà degli enti da osservazioni empiriche e dalla considerazione di casi particolari, poichè " longum iter per praecepta et demonstrationes, breve per exempla ,). — *A. Richter*, La nautica in relazione all'insegnamento trigonometrico [L'A. si propone di provare con alcuni esempi l'utilità di trattare, nell'insegnamento trigonometrico, problemi che si riferiscono alla nautica]. — Recensione dell'opera: *Erler*, Gli elementi delle coniche trattati sinteticamente, 5ª ediz. Teubner, Leipzig, 1898.

Fasc. 6° (1899). — *L. Kiepert*, Sulla matematica delle assicurazioni (cont. e fine). — *B. Schmidt*, Analogie fra i più importanti concetti e leggi della idrodinamica e della teoria dell'elettricità. — *B. Habenicht*, Semplificazioni ecc. (continuazione e fine). — Lavori del congresso dei Direttori dello Schlewig-Holstein sull'impartizione dell'insegnamento della matematica. — *K. A. Mayer*, Nuovo compasso parabolico. — Recensioni delle opere: *H. v. Helmholtz*, Lezioni di fisica teoretica, Vol. V. Lezioni sulla teoria elettromagnetica della luce. Hamburg e Leipzig, 1897. — *Fenkner, Dr. Hugo*, Manuale di geometria per l'insegnamento matematico negli Istituti superiori. Prima parte: Geometria piana. 3ª ediz. migliorata. Otto Salle, Berlin, 1897. — *Ganter, Dr. H. e Rudio, Dr. F.* Gli elementi della geometria analitica a uso degli Istituti superiori con numerosi esercizi. Prima parte: La geom. anal. del piano. 3ª ediz. migliorata. B. G. Teubner, Leipzig, 1897.

Giornale di Matematiche.

Maggio-Giugno (1899). — *Alcide da Porto*, Sulla generazione, per stelle reciproche, delle quadriche ad un numero qualunque di dimensioni (continuaz. e fine). — *Arturo d'Alessandro*, Sui Gruppi Hamiltoniani. (L'A. dopo aver riassunta una memoria di *Dedekind* (Ueber Gruppen, deren sämmtliche Theiler Normaltheiler sind Math. Ann. Bd. 48) dà delle nuove relazioni ed inoltre una semplice formola per calcolare il numero dei Gruppi Quaternioni contenuti nei Gruppi Hamiltoniani). —

Filippo de Astis, Un sistema di tre forme quadratiche binarie. (L'A., seguendo un procedimento già tenuto in una sua Nota pubblicata nel vol. XXXVI dello stesso Giornale, tratta la seguente questione: Date tre forme quadratiche binarie, vedere se esiste una sostituzione lineare tale che le forme trasformate risultino le derivate parziali seconde di una stessa forma biquadratica). — *Francesco Stasi*, Sui sistemi di due quartiche binarie derivabili da una medesima quintica. (Vien trattata in altra forma ed approfondita maggiormente una questione trattata dal *Salmon* nel § 225 delle Leçons d'Algèbre supérieure). — *L. Sinigallia*, Sulle superficie di area minima applicabili su se stesse (continuazione e fine). — *Franz Meyer*, Rapporto sullo stato presente della teoria degli invarianti (continuazione). Luglio-Agosto (1899). — *Franz-Meyer*, Rapporto ecc. (continuaz. e fine). — *G. Pirondini*, Simmetria ortogonale rispetto ad una linea qualunque (continuazione).

Settembre-Ottobre (1899). — *G. Pirondini*, Simmetria ecc. (continuaz. e fine.) — *Francesco Caldarera*, La meccanica in coordinate tetraedriche e triangolari. Novembre-Dicembre (1899). — *F. Caldarera*, La meccanica ecc. (continuaz. e fine). — *Alfredo Bassi*, Studio sulle funzioni di genere qualunque ecc. (continuaz. e fine). — *Guglielmo Giordano*, Sulle condizioni per l'esprimibilità della forma F (x^3, y^2) per mezzo di un quadrato esatto. — *V. Alberti*, Sulla funzion vettoriale di primo grado $\varphi\rho$.

*PUBBLICAZIONI MATEMATICHE ITALIANE RECENTI

A. Camosci (Romano Fiaschi, Ispettore scolastico) L'insegnamento dell'Aritmetica nelle scuole elementari, appunti e note per i maestri. Torino, Paravia, 1899.

S. Pincherle, Gli Elementi dell'Aritmetica ad uso delle scuole secondarie. Nona edizione. Bologna, Zanichelli, 1900. L. 2.

F. Viola, La Planimetria indipendente dal concetto di misura. Padova, Prosperini, 1899.

S. Vecchi, Sulla figura completa determinata da un numero qualunque di punti o da un numero qualunque di tangenti di una conica e sulle loro correlative nello spazio. Parma, Rossi-Ubaldi, 1899.

P. Fulcheris, Elementi di Geometria ad uso delle Scuole tecniche e normali. 17ª edizione. Torino, Paravia, 1900. L. 2.

C. Mandoli, Trattato di Algebra elementare ad uso dei licei. Seconda edizione. Napoli, Trani, 1900. L. 3,50.

F. Levi, Problemi elementari relativi ad alcuni casi di equivalenza di figure piane. Lodi, Dall'Avo, 1899. L. 0,50.

O. Müller, Tavole di logaritmi con cinque decimali. Sesta edizione aumentata delle tavole dei logaritmi di addizione e sottrazione per cura di *M. Rajna*. Milano, Manuali Hoepli, 1900.

E. Giorli, L'Aritmetica e la Geometria dell'operaio. Milano, Manuali Hoepli, 1900.

G. M. Testi, Nozioni di Geometria ad uso più specialmente delle allieve dei corsi complementari. Quarta edizione. Livorno, Giusti, 1900. L. 1.

A. W. Grube, Manuale per l'insegnamento del calcolo nelle scuole elementari secondo i principii del metodo inventivo. — Versione dal tedesco del prof. *A. Ambrosini*, coll'aggiunta di alcune lezioni pratiche di *A. C. Okler*. Torino, Paravia, 1900. L. 4.

S. Miele, Problema sulla costruzione d'un segmento circolare di data area. Firenze, Niccolai, 1900.

F. Enriques, Questioni riguardanti la Geometria elementare. Bologna, Zanichelli, 1900. L. 12.

PER EUGENIO BELTRAMI.

La facoltà di matematiche dell' Università di Roma si è costituita in comitato per onorare la memoria dell' illustre estinto, ed ha giustamente pensato che il monumento più duraturo, che si potesse immaginare è quello che egli si è costruito da sè stesso. — Il Comitato ha aperto quindi una sottoscrizione fra tutti i cultori della matematica allo scopo di pubblicare la raccolta completa delle opere di Eugenio Beltrami.

I sottoscrittori per almeno 50 lire riceveranno una copia delle opere complete di E. Beltrami.

CONCORSI A PREMIO

DEL R. ISTIT. VENETO DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI. — *Premio di fondazione Querini Stampalia.* - Concorso per l'anno 1902.

TEMA. — *I caratteri projettivi delle superficie algebriche a due dimensioni dello spazio ad n dimensioni.*

Tali caratteri e le loro relazioni numeriche sono già conosciuti per le curve algebriche anche di uno spazio ad n dimensioni. Sono pure stati studiati quelli delle superficie dello spazio ordinario ed alcuni delle superficie degli spazi superiori. Il tema propone la stessa ricerca generale per le superficie a due dimensioni dello spazio (lineare) ad n dimensioni.

Negli ultimi anni si è svolta la geometria sopra una superficie algebrica generale, per merito particolarmente di geometri italiani e francesi, tenendo conto dei caratteri della superficie che rimangono invariati per trasformazioni birazionali.

Geometricamente è pure importante di conoscere i caratteri che rimangono invariati per trasformazioni projettive, le relazioni fra loro, e come queste si modifichino col modificarsi di alcuni di essi.

Potranno anche essere premiate ricerche importanti che non risolvano completamente il tema. — Il concorso rimarrà aperto fino al 31 Dicembre 1902. — Il premio è di L. 3000.

Discipline relative a questo concorso. — Nazionali e stranieri, eccettuati i membri effettivi del Reale Istituto Veneto, sono ammessi al concorso. Le Memorie potranno essere scritte nelle lingue italiana, francese, tedesca ed inglese. Tutte poi dovranno essere presentate, franche di porto, alla Segreteria dell' Istituto medesimo.

Secondo l'uso, esse porteranno un'epigrafe, ripetuta sopra un viglietto suggellato, contenente il nome, cognome e domicilio dell'autore. Verrà aperto il solo viglietto della Memoria premiata: e tutti i manoscritti rimarranno nell'archivio del R. Istituto a guarentigia dei proferiti giudizi, con la sola facoltà agli autori di farne trarre copia autentica dalla Cancelleria dell' Istituto, a loro spese. Il risultato dei concorsi si proclama nell'annua pubblica solenne adunanza dell' Istituto.

La proprietà delle Memorie premiate resta agli autori, che sono obbligati a pubblicarle entro il termine di un anno, dietro accordo colla Segreteria dell' Istituto per il formato ed il caratteri della stampa, e per la successiva obbligatoria consegna di 50 esemplari delle medesime. Nella stampa del lavoro premiato. l'autore ha l'obbligo di premettere la intiera relazione della Giunta esaminatrice del R. Istituto. Il danaro del premio non potrà conseguirsi, se non dopo aver soddisfatto a queste prescrizioni.

L' Istituto, si mantiene il diritto di fare imprimere a proprie spese, quel numero qualunque di copie, che reputasse conveniente.

Avvertenza. — Ogni premiato dovrà pagare sotto forma di trattenuta sul premio aggiudicatogli, l'importo della tassa governativa di Ricchezza Mobile (93,15 per mille).

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 31 Luglio 1900.

Al momento in cui il *Periodico* stava per essere stampato, una funerea notizia ha immerso nel lutto tutta l'Italia.

UMBERTO I

il Re mite e generoso, il figlio del Re galantuomo, il discendente di una stirpe d'eroi, il gentile cavaliere della patria e della carità, ha esalato la sua grande anima sotto i colpi di un vile assassino.

La morte, che egli aveva sfidata imperterrito, e che non aveva osato colpirlo sul campo cruento di Custoza, presso ai letti dei colerosi di Busca e di Napoli, tra le rovine di Casamicciola e nelle inondazioni del Veneto, la morte che egli aveva sognato sul campo della gloria, per la grandezza della sua patria diletta, lo ha sorpreso a tradimento al terzo attentato, come un volgare tiranno: lui, il più liberale dei Re.

Tutta la parte sana della Nazione, ossia la gran maggioranza di essa, che a lui guardava come ad un faro, che nella unione indissolubile della Monarchia, eletta dai plebisciti, col popolo vedeva la grandezza d'Italia, rimane sbigottita e commossa dinanzi alla grande sventura, e si domanda con terrore, se la stella che presiede ai destini d'Italia, che dal campo fatale di Novara la guidò trionfante al Campidoglio, si sia offuscata; ma le parole che il morto Re rivolse al paese, appena assunto alla suprema dignità regale, e che pochi giorni fa, quasi presago della sua prossima fine, ripetè come suo testamento " *il Re è morto ma le istituzioni non muoiono* „ si levano come promessa e speranza.

Non può ammettersi che l'opera grande del risorgimento e dell'unità d'Italia, opera di migliaia di martiri e d'eroi, opera di geni, che il destino creò per la fortuna della patria, sia messa a repentaglio per l'insano furore di un pazzo malvagio, e per l'infamia dei pochi malfattori che lo hanno pervertito, e gli hanno armato la mano.

Il sangue gentile di Savoia, iniquamente sparso, ricada, più che sul volgare assassino, su coloro che l'hanno spinto al delitto, su coloro che facendo balenare dinanzi agli occhi delle plebi incoscienti ideali utopistici, le hanno corrotte ed hanno scatenata la bufera. Come olocausto pacificatore, valga a rendere a tutti il senso della rettitudine, della verità e della giustizia; ed allora nel gelido avello le ossa del Re martire esulteranno per l'estremo servigio reso alla patria.

G. LAZZERI.

RICERCHE

sopra una nuova espressione di π in funzione di soli numeri primi e sulla fattoriale di un numero

"Dicimus, fractionem illam $\frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times \text{ec.}}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times \text{ec.}}$ seu $\frac{9\times25\times49\times81 \text{ ec.}}{8\times24\times48\times80 \text{ ec.}}$ in infinitum continuatam, esse ipsissimum quaesitum numerum $\square$ praecise ad quem ita se habet 1, ut Circulus ad Quadratum Diametri".

WALLIS, a. 1655 t. 1. p. 469.

1. Fra le molte formule d'approssimazione pel valore di π che furono date nel periodo 1650-1770, a cui appartiene la nascita dell'Analisi moderna, ve n'è una, abbastanza notevole, dovuta al matematico inglese Gio. Wallis, che si distingue dalle altre pel fatto che, invece di essere sotto forma di serie, è sotto forma di prodotto infinito. Questa formula è la seguente:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdots \tag{1}$$

Orbene, partendo appunto da questa espressione, con opportune trasformazioni, si arriva ad esprimere π in funzione di soli fattori primi. Ed ecco la via da me seguìta:

2. Principiamo col moltiplicare i due membri della (1) per 2 ed avremo, aggruppando i termini due a due,

$$\frac{\pi}{2}=\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\right)\left(\frac{8}{7}\cdot\right)\cdots$$

che possiamo anche scrivere, arrestandoci al termine n^{esimo},

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n=\infty}\frac{2^2\,.\,4^2\,.\,6^2\,.\,8^2\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,(2n)^2}{3^2\,.\,5^2\,.\,7^2\,\ldots\ldots\,(2n-1)^2\,(2n+1)} \tag{2}$$

3. Cerchiamo ora un'espressione, la quale ci permetta di calcolare il valore di π per n fissata ad arbitrio, senza fare le successive moltiplicazioni, indicate dalla (2).

Abbiamo intanto pel numeratore, pei primi n fattori,

$$(1\,.\,2)^2.\,(2\,.\,2)^2.\,(3\,.\,2)^2\ldots\ldots(n\,.\,2)^2,$$

e, mettendo da tutti in evidenza 2^2.

$2^2 . 2^2 \ldots\ldots$ ripetuto n volte, ossia 2^{2n}, moltiplicato pel quadrato della fattoriale di n: dunque

$$2^2 . 4^2 . 6^2 \ldots . (2n)^2 = 2^{2n}(n!)^2. \tag{3}$$

Prendiamo ora a considerare il denominatore

$$3^2 . 5^2 . 7^2 \ldots\ldots (2n-1)^2 (2n+1):$$

esso è dato dal prodotto di due fattori: uno è il prodotto dei quadrati dei numeri dispari consecutivi, da 1 fino a $(2n-1)$; l'altro è $2n+1$: ossia è

$$\{1 . 3 . 5 . 7 \ldots\ldots (2n-1)\}^2 \; (2n+1) .$$

Ora evidentemente

$$\{1 . 3 . 5 . 7 \ldots\ldots (2n-1)\}^2 = \frac{\{1 . 2 . 3 . 4 \ldots . (2n-1)\}^2}{\{2 . 4 \ldots\ldots\ldots (2n-2)\}^2}$$

ossia

$$\frac{\{(2n-1)!\}^2}{\{2 . 4 \ldots\ldots (2n-2)\}^2} .$$

Ma dalla (3), sostituendo al posto di n, $(n-1)$, si ha

$$2^2 . 4^2 \ldots\ldots (2n-2)^2 = 2^{2(n-1)}\{(n-1)!\}^2 ,$$

quindi

$$\{1 . 3 . 5 \ldots . (2n-1)\}^2 = \frac{\{(2n-1)!\}^2}{2^{2(n-1)}\{(n-1)!\}^2} \tag{4}$$

Sarà dunque per le (3) e (4)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\dfrac{\{(2n-1)!\}^2 (2n+1)}{2^{2(n-1)}\{(n-1)!\}^2}} = \lim_{n=\infty} \frac{2^{2n} . 2^{2(n-1)}(n!)^2\{(n-1)!\}^2}{\{(2n-1)!\}^2 (2n+1)!}$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{2^{2(2n-1)}}{2n+1} \cdot \frac{(n!)^2\{(n-1)!\}^2}{\{(2n-1)!\}^2}$$

e dividendo numeratore e denominatore per $\{(n-1)!\}^2$

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2^{2(2n-1)}}{2n+1} \cdot \frac{(n!)^2}{n^2(n+1)^2 \ldots\ldots (2n-1)^2} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{2^{2n-1}\, n!}{n(n+1) \ldots\ldots\ldots (2n-1)} \right\}^2 =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{2^{2n-1}(n-1)!}{(n+1)(n+2) \ldots . (2n-1)} \right\}^2 .$$

Moltiplichiamo ora i due termini della frazione fra parentesi per $2n$: si ha

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{2^{2n}\, n!}{(n+1)\ldots\ldots 2n} \right\}^2.$$

Ma

$$(n+1)(n+2)\ldots\ldots 2n = \frac{2n\,!}{n\,!},$$

quindi

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{2^{2n}\, n!}{\frac{2n\,!}{n\,!}} \right\}^2 = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{2^{2n}\,(n\,!)^2}{2n\,!} \right\}^2,$$

da cui

$$\pi = \lim_{n=\infty} \frac{2^{4n+1}}{2n+1} \left\{ \frac{(n\,!)^2}{2n\,!} \right\}^2. \qquad (5)$$

4. A questo punto, prima di procedere oltre nelle nostre ricerche, è necessario fare alcune considerazioni

Sulla fattoriale di n.

5. La fattoriale di un numero è il prodotto del numero stesso e di tutti quelli che lo precedono. È naturale quindi che la via più semplice che si presenta alla mente per calcolare la fattoriale di un numero n, sia quella di moltiplicare per n la fattoriale del numero precedente $(n-1)$. Però, a bene osservare, si capisce facilmente che se questo mezzo può riuscire comodo e celere nel caso che il numero n sia piccolo; oppure che, pei calcoli che si devono fare, sia necessario trovare la fattoriale di tutti i numeri successivi da 2 fino all' $(n-1)$esimo, ciò nondimeno esso ha due difetti essenziali: il primo che, per la grandezza dei prodotti che, anche per fattoriali di numeri piccoli, si ottengono (*), le operazioni riescono oltremodo lunghe e laboriose, e quindi più numerose sono le cause d' errore: secondariamente poi, quando si vogliano le fattoriali di numeri isolati, senza tener conto di quelle dei precedenti, riesce inutile, per non dire dannoso, il lunghissimo calcolo che bisogna premettere. Mi sono quindi proposto, osservato che, nella fattoriale di un numero, compare il prodotto di tutti i numeri primi ad esso inferiori, di esprimere la fattoriale stessa mediante il prodotto di essi numeri primi, elevati ad opportune potenze.

(*) Ad esempio, la fattoriale di 25 è espressa da un numero di 26 cifre.

6. E, principiando dal 2, osserviamo che, in una successione di n numeri consecutivi, ce ne sono $\frac{n}{2}$ multipli del 2, intendendo che, se n è dispari, si debba prendere per $\frac{n}{2}$ la parte intera del quoziente: in ambedue i casi di n pari e dispari, possiamo rappresentare con

$$E\,\frac{n}{2}$$

il numero dei multipli di 2 contenuti in n, introducendo il simbolo di Legendre indicante numero intero.

Mettendo allora in evidenza 2 da ognuno di questi $E\,\frac{n}{2}$ fattori, si ha

$$2^{E\frac{n}{2}};$$

rimangono poi le potenze di 2, le quali si seguono di 4 in 4: da queste alla lor volta mettendo in evidenza 2, avremo

$$2^{E\frac{n}{4}},$$

e così successivamente, finchè si arrivi ad un esponente

$$E\,\frac{n}{P_2}=1\,.$$

Possiamo dunque concludere che, nella fattoriale di n, il 2 compare all'esponente

$$E\,\frac{n}{2}+E\,\frac{n}{4}+E\,\frac{n}{8}+\ldots.+E\,\frac{n}{P_2},$$

indicando con P_2 la massima potenza del 2 contenuta in n.

Del pari, consideriamo che in n numeri consecutivi ce ne sono $E\,\frac{n}{3}$ multipli del 3: levati questi, e messo così in evidenza

$$3^{E\frac{n}{3}},$$

rimangono sempre le potenze del 3, che si seguono di 9 in 9 e che ci dànno

$$3^{E\frac{n}{9}}$$

e così di seguito, fino a

$$3^{E\frac{n}{P_3}},$$

dove

$$E\,\frac{n}{P_3}=1\,.$$

Avremo dunque che il 3 compare nella fattoriale di n all'esponente

$$E\,\frac{n}{3}+E\,\frac{n}{9}\ldots.+E\,\frac{n}{P_3}\,.$$

Analogamente per il 5, che ci dà l'esponente

$$\mathrm{E}\frac{n}{5}+\mathrm{E}\frac{n}{25}+\ldots+\mathrm{E}\frac{n}{\mathrm{P}_5},$$

e per gli altri numeri primi successivi, fino al massimo contenuto in n, che indicheremo con p e che ha per esponente

$$\mathrm{E}\frac{n}{p}+\mathrm{E}\frac{n}{p^2}+\ldots+\mathrm{E}\frac{n}{\mathrm{P}_p}\cdot$$

Avremo dunque, riassumendo

$$n\,!=2^{\mathrm{E}\frac{n}{2}+\mathrm{E}\frac{n}{4}+\ldots+\mathrm{E}\frac{n}{\mathrm{P}_2}}\,.\,3^{\mathrm{E}\frac{n}{3}+\mathrm{E}\frac{n}{9}+\ldots+\mathrm{E}\frac{n}{\mathrm{P}_3}}\ldots p^{\mathrm{E}\frac{n}{p}+\mathrm{E}\frac{n}{p_2}+\ldots+\mathrm{E}\frac{n}{\mathrm{P}_p}}$$

e, raccogliendo tutto in una sola espressione.

$$n\,!=\underset{p=2}{\overset{p=p}{\pi}}\,p^{\mathrm{E}\frac{n}{p}+\mathrm{E}\frac{n}{p_2}+\ldots+\mathrm{E}\frac{n}{\mathrm{P}_p}}, \tag{6}$$

dove, come abbiamo detto, P_p rappresenta la massima potenza del valore che si dà a p, minore od eguale ad n.

7. *Esempi.* — Supponiamo che si voglia trovare 10! Applicando la (6) abbiamo

$$10\,!=2^{5+2+1}\,.\,3^{3+1}\,.\,5^2\,.\,7=256\,.\,81\,.\,25\,.\,7=3.628.800.$$

Così, costruiamo 15! Sarà

$$15\,!=2^{7+3+1}\,.\,3^{5+1}\,.\,5^3\,.\,7^2\,.\,11\,.\,13=2048\,.\,729\,.\,125\,.\,49\,.\,11\,.\,13=$$
$$=1.307.674.368.000,$$

come si trova direttamente. (Cfr. le tavole in fine della memoria.)

8. Riprendiamo ora la formula (5) che ci dava il valore di π, e guardiamo come si trasforma mediante la (6).

Dalla (6), cambiando n in $2n$ si ha

$$2n\,!=2^{\mathrm{E}\frac{2n}{2}+\mathrm{E}\frac{2n}{4}+\ldots+\mathrm{E}\frac{2n}{\mathrm{P}_2}+\mathrm{E}\frac{2n}{2\mathrm{P}_2}\ldots}\ldots p^{\mathrm{E}\frac{2n}{p}+\ldots+\mathrm{E}\frac{2n}{\mathrm{P}_p}+\mathrm{E}\frac{2n}{p\mathrm{P}_p}}\,.\,p'^{\,\mathrm{E}\frac{2n}{p'}+\ldots+\mathrm{E}\frac{2n}{\mathrm{P}_{p'}}}$$
$$\ldots\mu^{\mathrm{E}\frac{2n}{\mu}+\ldots+\mathrm{E}\frac{2n}{\mathrm{P}_\mu}},$$

dove con p' indico il numero primo che immediatamente segue p, e e con μ il massimo numero primo $=$ o $<$ di n.

Dico però che " di tutti i termini seguenti ad $\mathrm{E}\frac{2n}{\mathrm{P}p}$ soltanto il primo, cioè

$$\mathrm{E}\frac{2n}{p\mathrm{P}_p},$$

può sussistere, ed in questo caso è sempre eguale ad 1: gli altri tutti sono sempre eguali allo zero ".

Vediamo dunque, prima di tutto, quando sussiste il termine

$$E\,\frac{2n}{p\,P_p}\,,$$

cioè, in altre parole, sotto quali condizioni si ha

$$E\,\frac{2n}{p\,P_p}=1 \quad \text{ossia}\ \frac{2n}{n\,P_p}=1:$$

dimostreremo poi che

$$E\,\frac{2n}{p^q\,P_p}=0$$

per qualunque valore di q diverso di da 1.

Intanto, se deve essere

$$\frac{2n}{p\,P_p}=1\,, \tag{α}$$

sarà pure

$$2n=pP_p \qquad \text{da cui } P_p=\frac{2n}{p} \ \text{ ed } n=\frac{p\,P_p}{2}\,,$$

quindi, perchè si verifichi la (α) deve essere

$$P_p \leqq \frac{2n}{p}:$$

nel caso poi che fosse

$$P_p > \frac{2n}{p}\,,$$

sarebbe

$$E\,\frac{2n}{pP_p}=0$$

e quindi, nel caso nostro, trascurabile. Osserviamo qui che, nel caso di $p=2$, si ha sempre

$$E\,\frac{2n}{2P_2}=1.$$

Devo ora dimostrare che non può essere

$$E\,\frac{2n}{p\,P_p}>1.$$

Per questo, supponiamo per un momento che si avesse

$$\frac{2n}{p\,P_p}=q\ (^*):$$

sarebbe allora

$$n=\frac{pq}{2}\,P_p$$

e P_p non sarebbe più la massima potenza di p contenuta in n.

(*) Si suppone $q \neq 1$.

Con un ragionamento analogo si dimostra che, per qualunque valore di q diverso da 1, si ha

$$\mathrm{E}\,\frac{2n}{p^q\,\mathrm{P}_p}=0\,.$$

Infatti, supponiamo che si avesse

$$\mathrm{E}\,\frac{2n}{p^q\,\mathrm{P}_p}=r$$

dove r è diverso da zero. Sarebbe allora

$$n=\frac{rp^q\,\mathrm{P}_p}{2}$$

ed n conterrebbe un'altra potenza di p maggiore di P_p, contrariamente all' ipotesi.

9. Premesso questo, possiamo scrivere

$$2n\,!=2^{\mathrm{E}\frac{2n}{2}+\dots+\mathrm{E}\frac{2n}{2^{\mathrm{P}_2}}}\,.\,3^{\mathrm{E}\frac{2n}{3}+\dots+\mathrm{E}\frac{2n}{3^{\mathrm{P}_3}}}\dots p^{\mathrm{E}\frac{2n}{p}+\dots+\mathrm{E}\frac{2n}{p^{\mathrm{P}_p}}}\,,$$

$$p'^{\,\mathrm{E}\frac{2n}{p'}+\dots+\mathrm{E}\frac{2n}{p'^{\mathrm{P}_{p'}}}}\dots\mu^{\mathrm{E}\frac{2n}{\mu}+\dots+\mathrm{E}\frac{2n}{\mu^{\mathrm{P}_\mu}}}\,.$$

Ebbene, io dico che gli esponenti dei numeri primi successivi a p, quando sussistono, sono sempre eguali all'unità „.

Prendiamo, p. es. a considerare l'esponente di p': esso è dato da

$$\mathrm{E}\,\frac{2n}{p'}+\mathrm{E}\,\frac{2n}{p'^2}+\dots+\mathrm{E}\,\frac{2n}{\mathrm{P}p'}\,,$$

dove è evidente che la parte intera più grande è quella del primo addendo. Orbene, se arrivo a dimostrare che questa non può essere maggiore di 1, resterà pure dimostrato che tutte le altre saranno eguali a zero, e che l'esponente di p' è 1.

Rammentiamo per questo che p' rappresenta il primo numero primo successivo ad n: abbiamo dunque

$$p'>n$$

quindi

$$2p'>2n$$

$$\frac{2n}{2p'}<1$$

$$\frac{2n}{p'}<2$$

e per conseguenza

$$\mathrm{E}\,\frac{2n}{p'}=1 \qquad\qquad \text{c. d. d.}$$

Analogamente per gli esponenti di tutti gli altri numeri primi maggiori di p'; quindi finalmente possiamo scrivere

$$2n\,! = 2^{E\frac{2n}{2}+\dots+E\frac{2n}{2P_2}} \,.\, 3^{E\frac{2n}{3}+\dots+E\frac{2n}{3P_3}} \dots p^{E\frac{2n}{p}+\dots+E\frac{2n}{pP_p}} \,.\, p' \dots \mu \quad (7)$$

10. D'altra parte, sempre per la (6), abbiamo

$$(n\,!)^2 = 2^{2E\frac{n}{2}+2E\frac{n}{4}+\dots+2E\frac{n}{P_2}} \dots p^{2E\frac{n}{p}+\dots+2E\frac{n}{P_p}},$$

quindi

$$\frac{(n\,!)^2}{2n\,!} = \frac{2^{2E\frac{n}{2}+\dots+2E\frac{n}{P_2}} \dots p^{2E\frac{n}{p}+\dots+2E\frac{n}{P_p}}}{2^{E\frac{2n}{2}+\dots+E\frac{2n}{P_2}+E\frac{2n}{2P_2}} \dots p^{E\frac{2n}{p}+\dots+E\frac{2n}{P_p}+E\frac{2n}{pP_p}} \,.\, p' \dots \mu}$$

che possiamo anche scrivere

$$\frac{(n\,!)^2}{2n\,!} = \frac{1}{2^{E\frac{2n}{2P_2}} \,.\, 3^{E\frac{2n}{3P_3}} \dots p^{E\frac{2n}{pP_p}} \,.\, p' \dots \mu} \times \frac{2^{2E\frac{n}{2}+\dots+2E\frac{n}{P_2}} \dots p^{2E\frac{n}{p}+\dots+2E\frac{n}{P_p}}}{2^{E\frac{2n}{2}+\dots+E\frac{2n}{P_2}} \dots p^{E\frac{2n}{p}+\dots+E\frac{2n}{P_p}}} \quad (8)$$

Ora il secondo di questi fattori possiamo metterlo sotto la forma

$$\frac{1}{2^{\left(E\frac{2n}{2}-2E\frac{n}{2}\right)+\dots+\left(E\frac{2n}{P_2}-2E\frac{n}{P_2}\right)} \dots p^{\left(E\frac{2n}{p}-2E\frac{n}{p}\right)+\dots+\left(E\frac{2n}{P_p}-2E\frac{n}{P_p}\right)}} \quad (9)$$

11. Vogliamo adesso considerare quali saranno i valori di queste singole differenze che compaiono all' esponente, dato il valore di n. È chiaro intanto che, qualunque sia il valore di n e di P_p, si potranno verificare due soli casi

$$E\frac{2n}{P_p} - 2E\frac{n}{P_p} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}. \quad (\alpha)$$

Guardiamo quando si verifica l' uno piuttosto che l'altro. Principiamo per questo dall'osservare che, dato un numero n a piacere, lo possiamo sempre mettere sotto la forma (dal momento che n deve essere maggiore di P_p, altrimenti la parte intera non sarebbe più 1)

$$kP_p + a, \quad (\beta)$$

dove k ed a sono numeri interi e positivi e di più

$$a < k.$$

Allora dico che " se si ha

$$a \geq \frac{P_p}{2}, \ (*)$$

(*) Qui possiamo mettere addirittura $\frac{P_p}{2}$ invece di $E\frac{P_p}{2}$, perchè, essendo, come abbiamo supposto, a intero, se deve essere maggiore di $\frac{P_p}{2}$, è naturale che, nel caso che questo contenga anche una parte frazionaria, sarà a fortiori

$$a > E\frac{P_p}{2}.$$

sarà

$$E\frac{2n}{P_p}-2E\frac{n}{P_p}=1;$$

se invece

$$a<\frac{P_p}{2}$$

sarà

$$E\frac{2n}{P_p}-2E\frac{n}{P_p}=0\,..$$

Infatti principiamo dal considerare

$$\frac{2n}{P_p},$$

ed al posto di n sostituiamo il suo valore dato dalla (β).

Si avrà

$$\frac{2n}{P_p}=\frac{2k\,P_p}{P_p}+\frac{2a}{P_p}=2k+\frac{2a}{P_p}\,.$$

Ora, essendo per ipotesi k intero, sarà tale anche $2k$: bisogna dunque per trovare $E\frac{2n}{P_p}$, considerare il secondo addendo $\frac{2a}{P_p}$. Ora qui si vede subito che, se $2a\geq P_p$ ossia $a\geq\frac{P_p}{2}$, è

$$E\frac{2a}{P_p}=1:$$

in questo caso dunque sarà

$$E\frac{2n}{P_p}=2k+1:$$

se invece $2a<P_p$ ossia $a<\frac{P_p}{2}$, sarà

$$E\frac{2a}{P_p}=0$$

e quindi

$$E\frac{2n}{P_p}=2k.$$

Passiamo ora a considerare

$$2E\frac{n}{P_p}\,.$$

Abbiamo intanto, colla stessa sostituzione di prima,

$$\frac{n}{P_p}=\frac{kP_p}{P_p}+\frac{a}{P_p}=k+\frac{a}{P_p}\,.$$

Ma k è intero: bisogna dunque cercare in quali casi $\frac{a}{P_p}$ è intero.

Si vede però subito che per $a > \frac{P_p}{2}$, si ha

$$E \frac{a}{P_p} = 0$$

e quindi

$$E \frac{n}{P_p} = k$$

e

$$2E \frac{n}{P_p} = 2k;$$

per $a < \frac{P_p}{2}$ si ha a fortiori

$$E \frac{a}{P_p} = 0,$$

onde, in ogni caso,

$$2E \frac{n}{P_p} = 2k.$$

Riassumendo, abbiamo

$$\text{per } a \geq \frac{P_p}{2} \left\{ \begin{aligned} E \frac{2n}{P_p} &= 2k + 1 \\ 2E \frac{n}{P_p} &= 2k, \end{aligned} \right.$$

quindi

$$E \frac{2n}{P_p} - 2E \frac{n}{P_p} = 1;$$

$$\text{per } a < \frac{P_p}{2} \left\{ \begin{aligned} E \frac{2n}{P_p} &= 2k \\ 2E \frac{n}{P_p} &= 2k \end{aligned} \right.$$

quindi

$$E \frac{2n}{P_p} - 2E \frac{n}{P_p} = 0$$

c. d. d.

Servendoci dunque di questo criterio, possiamo, dato n, trovare a priori gli esponenti dei singoli fattori che compaiono nel denominatore della (9).

12. Per fare un'applicazione di quanto abbiamo detto fin qui, supponiamo di dover calcolare

$$\frac{(10!)^2}{20!}$$

La formula (8) mediante la (9) ci dà

$$\frac{(n!)^2}{2n!}=\frac{1}{2^{E\frac{2n}{2P_2}}\,.\,3^{E\frac{2n}{3P_3}}\dots p^{E\frac{2n}{pP_p}}\,.\,p'\dots\mu}\times$$

$$\times\frac{1}{2^{\left(E\frac{2n}{2}-2E\frac{n}{2}\right)+\dots+\left(E\frac{2n}{P_2}-2E\frac{n}{P_2}\right)}\dots p^{\left(E\frac{2n}{p}-2E\frac{n}{p}\right)+\dots+\left(E\frac{2n}{P_p}-2E\frac{n}{P_p}\right)}}. \quad (10)$$

Nel caso nostro, ricordando che p' è il primo numero primo $>n$, e che μ è il più grande dei numeri primi $<2n$, il primo fattore sarà

$$\frac{1}{2\,.\,11\,.\,13\,.\,17\,.\,19},$$

giacchè per le osservazioni fatte al § 8, gli esponenti dei numeri primi 3, 5, 7 sono eguali allo zero.

Passiamo ora al secondo fattore: i numeri primi comparenti al denominatore saranno

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,$$

giacchè p ci indica il massimo numero primo $<n$.

Quanto agli esponenti, facciamo le seguenti considerazioni: intanto

$$P_2=8$$
$$P_3=9$$
$$P_5=5$$
$$P_7=7:$$

avremo poi per l'esponente di 2

$$\left(E\frac{20}{2}-2E\frac{10}{2}\right)+\left(E\frac{20}{4}-2E\frac{10}{4}\right)+\left(E\frac{20}{8}-2E\frac{20}{8}\right);$$

ma il primo di questi addendi, essendo

$$10=5.2+0$$

e quindi

$$a<\frac{2}{2},$$

è eguale a zero; il secondo, essendo

$$10=2.4+2$$

e quindi

$$a=\frac{4}{2},$$

è eguale ad 1; il terzo, essendo

$$10=1.8+2$$

e quindi

$$a<\frac{8}{2},$$

è eguale a zero; dunque si ha

$$2^{0+1+0}=2.$$

Analogamente, l'esponente di 3 sarebbe

$$\left(\mathrm{E}\frac{20}{3} - 2\mathrm{E}\frac{10}{3}\right) - \left(\mathrm{E}\frac{20}{9} - 2\mathrm{E}\frac{10}{9}\right);$$

ed applicando la stesso criterio

$$10 = 3.3 + 1$$

quindi $a < \frac{3}{2}$, ed il primo addendo $= 0$;

$$10 = 1.9 + 1$$
$$a < \frac{9}{2}$$

e il secondo addendo $= 0$; quindi si ha

$$3^{0+0} = 1.$$

Passiamo finalmente al 5: abbiamo

$$5^{\left(\mathrm{E}\frac{20}{5} - 2\mathrm{E}\frac{10}{5}\right)}$$
$$10 = 2.5 + 0$$

dunque $a < \frac{5}{2}$ e l'esponente $= 0$.

In conclusione, il secondo fattore è dato da

$$\frac{1}{2};$$

quindi

$$\frac{(10!)^2}{20!} = \frac{1}{2^2 . 11 . 13 . 17 . 19} = \frac{1}{184 . 756}.$$

Cerchiamo quello che si avrebbe col metodo diretto. Applicando la (6), si ha

$$10! = 2^{\mathrm{E}\frac{10}{2} + \mathrm{E}\frac{10}{4} + \mathrm{E}\frac{10}{8}} . 3^{\mathrm{E}\frac{10}{3} + \mathrm{E}\frac{10}{9}} . 5^{\mathrm{E}\frac{10}{5}} . 7 = 2^8 . 3^4 . 5^2 . 7.$$

donde

$$(10!)^2 = 2^{16} . 3^8 . 5^4 . 7^2.$$

Abbiamo poi, sempre per la (6)

$$20! = 2^{\mathrm{E}\frac{20}{2} + \mathrm{E}\frac{20}{4} + \mathrm{E}\frac{20}{8} + \mathrm{E}\frac{20}{16}} . 3^{\mathrm{E}\frac{20}{3} + \mathrm{E}\frac{20}{9}} . 5^{\mathrm{E}\frac{20}{5}} . 7^{\mathrm{E}\frac{20}{7}} . 11 . 13 . 17 . 19 =$$
$$= 2^{18} . 3^8 . 5^4 . 7^2 . 11 . 13 . 17 . 19;$$

dunque

$$\frac{(10!)^2}{20!} = \frac{2^{16} . 3^8 . 5^4 . 7^2}{2^{18} . 3^8 . 5^4 . 7^2 . 11 . 13 . 17 . 19} = \frac{1}{2^2 . 11 . 13 . 17 . 19} = \frac{1}{184 . 756},$$

come avevamo trovato con l'altro metodo.

Altro esempio. — Supponiamo che sia $n=13$, e si voglia calcolare

$$\frac{(n!)^2}{2n!}=\frac{(13!)^2}{26!}:$$

applicando la (10) si ha

$$\frac{(13!)^2}{26!}=\frac{1}{2.17.19.23}\times\frac{1}{2^2.5.7}=\frac{1}{2^3.5.7.17.19.23},$$

mentre direttamente

$$\frac{(13!)^2}{26!}=\frac{2^{20}.3^{10}.5^4.7^2.11^2.13^2}{2^{23}.3^{10}.5^5.7^3.11^2.17.19.23}=\frac{1}{2^3.5.7.17.19.23}.$$

13. Trovata l'espressione (10) per $\frac{(n!)^2}{2n!}$, poniamo per semplicità

$$\left(E\frac{2n}{2}-2E\frac{n}{2}\right)+\left(E\frac{2n}{4}-2E\frac{n}{4}\right)+\ldots+\left(E\frac{2n}{P_2}-2E\frac{n}{P_2}\right)+E\frac{2n}{2P_2}=A_2$$

$$\left(E\frac{2n}{3}-2E\frac{n}{3}\right)+\left(E\frac{2n}{9}-2E\frac{n}{9}\right)+\ldots+\left(E\frac{2n}{P_3}-2E\frac{n}{P_3}\right)+E\frac{2n}{3P_3}=A_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(E\frac{2n}{p}-2E\frac{n}{p}\right)+\left(E\frac{n}{p^2}-2E\frac{n}{p^2}\right)+\ldots+\left(E\frac{2n}{P_p}-2E\frac{n}{P_p}\right)+E\frac{2n}{pP_p}=A_p$$

e, per omogeneità, diamo ai numeri primi consecutivi a p gli esponenti

$$A_{p'}\ldots\ldots A_{\mu},$$

ricordando però sempre che questi, per quanto abbiamo visto, sono eguali all'unità. Allora la (10) prende la forma

$$\frac{(n!)^2}{2n!}=\frac{1}{2^{A_2}.3^{A_3}\ldots p^{A_p}.p'^{A_{p'}}\ldots\mu^{A_\mu}}. \qquad (11)$$

Sostituiamo ora questo valore nell'espressione (5) trovata per π: avremo

$$\pi=\lim_{n=\infty}\frac{2^{4n+1}}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{2A_2}.3^{2A_3}\ldots p^{2A_p}.p'^{2A_{p'}}\ldots\mu^{2A_\mu}}$$

e dividendo numeratore e denominatore per 2^{4n+1}

$$\pi=\lim_{n=\infty}\frac{1}{(2n+1).2^{2A_2-(4n+1)}.3^{2A_3}\ldots p^{2A_p}.p'^{2A_{p'}}\ldots\mu^{2A_\mu}}. \qquad (12)$$

14. Ci rimane adesso da fare un ultimo passo per avere l'espressione di π in funzione di soli fattori primi, che ci eravamo proposti di trovare fin da principio. Osserviamo, prima di tutto, che nel caso in cui $2n+1$ fosse numero primo, la (12) sarebbe appunto la formola cercata: noi però faremo delle considerazioni generali, comprendenti insieme i due casi.

Scomponiamo per questo $2n+1$ in fattori primi: avremo

$$2n+1 = 2^{Q_2} . 3^{Q_3} \dots p^{Q_p} . p'^{Q_{p'}} . \mu^{Q_\mu} . \mu':$$

osserviamo qui che, dal momento che $2n+1$ è un numero dispari, deve essere sempre $Q_2 = 0$; di più per ragioni, analoghe a quelle già dette più avanti, gli esponenti dei numeri primi successivi a p non possono essere maggiori di 1; finalmente μ' non esisterà che quando $2n+1$ sarà numero primo, ed in questo caso, sarà ad esso eguale. Possiamo dunque, mantenendo però per simmetria tutti gli esponenti, scrivere

$$\pi = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2^{Q_2} . 3^{Q_3} \dots \mu^{Q_\mu} . \mu' . 2^{2A_2-(4n+1)} . 3^{2A_3} \dots \mu^{2A_\mu}} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{1}{2^{2A_2+Q_2-(4n+1)} . 3^{2A_3+Q_3} \dots \mu^{2A_\mu+Q_\mu} . \mu'}$$

e ponendo per semplicità

$$\begin{aligned} 2A_2 + Q_2 &= a_2 \\ 2A_3 + Q_3 &= a_3 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ 2A^\mu + Q_\mu &= a_\mu, \end{aligned}$$

avremo

$$\pi = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2^{a_2-(4n+1)} . 3^{a_3} \dots \mu^{a_\mu} . \mu'}, \tag{13}$$

che, raccogliendo sotto il simbolo di prodotto, possiamo scrivere più semplicemente

$$\pi = \lim_{n=\infty} 2^{4n+1} \frac{1}{\mu'} \prod_{\nu=2}^{\nu=\mu} \frac{1}{p^{a_\nu}}. \tag{14}$$

Questa è appunto la formula che si cercava.

15. Trovata l'espressione di π in funzione di soli fattori primi, mi propongo di cercare quale approssimazione ottengo, arrestandomi ad un dato termine, cioè prendendo per n un certo valore. Si presentano qui a priori due questioni:

1. trovare l'approssimazione del valore di π corrispondente ad un dato valore di n.

2. trovare il valore di n corrispondente ad una data approssimazione.

Consideriamo la prima questione:

Nel principio delle nostre ricerche, considerando l'espressione di Wallis, l'abbiamo posta sotto la forma

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7}\right) \left(\frac{8}{7} \cdot \quad\right) \dots\dots,$$

che è facile vedere ci dà il valore di π per difetto. Preso p. es. $n=3$, si ha

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\right) \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7}\right) = \frac{2304}{1575}$$

da cui

$$\pi = \frac{4608}{1575} = 2,98:$$

ebbene, rappresenterò con A il valore di π dato da questa forma dell'espressione del Wallis.

Ma possiamo porre l'espressione di Wallis anche sotto la forma

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2\,.\,4}{3\,.\,3} \cdot \frac{4\,.\,6}{5\,.\,5} \cdot \frac{6\,.\,8}{7\,.\,7} \cdots\cdot$$

che ci dà il valore di π per eccesso.

Per es., sempre per $n = 3$, abbiamo

$$\frac{\pi}{4} = \frac{9.216}{11.025}$$

da cui

$$\pi = \frac{36.864}{11.025} = 3,34\,.$$

Rappresentiamo con B il valore di π dato da questa seconda forma: avremo allora

$$A < \pi < B\,,$$

e la differenza tra il valore esatto di π ed A sarà minore di

$$B - A\,.$$

Ora abbiamo

$$A = \frac{2^2.\,4^2.\,6^2.\,8^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2n)^2}{3^2.\,5^2.\,7^2 \ldots (2n-1)^2(2n+1)}$$

$$B = \frac{2^2.\,4^2.\,6^2 \ldots\ldots (2n)^2\,(2n+2)}{3^2.\,5^2.\,7^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2n+1)^2}\,,$$

quindi

$$B = A\,\frac{2n+2}{2n+1}\,.$$

Sarà allora

$$B - A = A\,\frac{2n+2}{2n+1} - A = \frac{A\,(2n+2) - A\,(2n+1)}{2n+1} = \frac{A}{2n+1}.$$

Abbiamo dunque che la differenza tra il valore esatto e il valore trovato di π è minore di

$$\frac{A}{2n+1}\,.$$

Dato allora n, si può facilmente calcolare l'approssimazione che per esso si ottiene, bastando trovare A e dividerlo per $2n+1$.

Così la prima questione è risolta.

Passiamo alla seconda: ci proponiamo, data un'approssimazione arbitraria, di trovare il valore di n che ad essa corrisponde. Anche per questo giova ricordare che

$$\pi - A < \frac{A}{2n+1}\,.$$

Supponiamo p. es. di aver già trovato che il valore di π a meno di $\frac{1}{10}$ è 3, 1, e di volerne trovare il valore a meno di $\frac{1}{100}$. Sarà dunque sufficiente che sia

$$\frac{A}{2n+1} < \frac{1}{100} . \tag{α}$$

Ora sappiamo già che la prima cifra decimale di π è 1; la seconda, nella ipotesi a noi più sfavorevole, può essere 9. ed è evidente che, supponendola eguale a 9, sarà, in ogni caso, soddisfatta la (α). In questa ipotesi abbiamo

$$\frac{3.19}{2n+1} < \frac{1}{100} .$$

ossia

$$319 < 2n + 1$$

$$\frac{319-1}{2} < n ,$$

cioè per avere la seconda cifra decimale, ossia un' approssimazione $< \frac{1}{100}$, bisogna prendere

$$n > 159 .$$

Analogamente, se volessi la terza cifra decimale, cioè l'approssimazione di $\frac{1}{1.000}$, potrei porre, supposto di aver trovata la seconda cifra eguale a 4,

$$\frac{3,149}{2n+1} < \frac{1}{1.000} ,$$

donde

$$3149 < 2n + 1$$

$$3148 < 2n$$

$$1574 < n :$$

in generale dunque, volendo l'approssimazione di $\frac{1}{\delta}$, per δ potenza del 10 grande ad arbitrio, dovremo prendere (indicando con $A_{\frac{\delta}{10}}$ il valore di π coll'approssimazione di $\frac{1}{\frac{\delta}{10}} = \frac{10}{\delta}$)

$$n > \frac{A_{\frac{\delta}{10}} . \delta + 8}{2} . \tag{15}$$

Con questa formula siamo certi che, per n ad essa soddisfacente, avremo dalla (14) il valore di π a meno di $\frac{1}{\delta}$.

16. Supponiamo di volere il valore di π a meno di un' unità: dovrà essere

$$n > \frac{3 . 8}{2}$$

cioè

$$n > 5$$

ossia, al minimo,

$$n = 6.$$

Difatti la (14) per $n=6$ ci dà

$$\pi = \frac{1}{2^{4-25} . 3^2 . 7^2 . 11^2 . 13} = \frac{2^{21}}{693.693} = \frac{2.097.152}{693.693} = 3,0.$$

Cerchiamo ora il valore di π a meno di $\frac{1}{10}$: per la (15) si ha che n deve essere maggiore di $\frac{3 . 10 + 8}{2} = 19$, cioè almeno

$$n = 20.$$

Allora dalla (13) si ha

$$\pi = \frac{1}{2^{a_2-81} . 3^{a_3} . 5^{a_5} . 7^{a_7} . 11^{a_{11}} . 13^{a_{13}} . 17^{a_{17}} . 19^{a_{19}} . 23^2 . 29^2 . 31^2 . 37^2 . 41}$$

essendo, per $n = 20$

$$\begin{aligned} p &= 19 \\ p' &= 23 \\ \mu &= 37 \\ \mu' &= 41. \end{aligned}$$

Cerchiamo gli esponenti dei singoli fattori primi: abbiamo

$$\begin{aligned} a_2 &= 2A_2 = 4 \text{ essendo} \\ A_2 &= 1 + 1; \\ a_3 &= 2A_3 = 4 \\ A_3 &= 1 + 1; \\ a_5 &= 2A_5 = 2 \\ A_5 &= 1; \\ a_7 &= 2A_7 = 2 \\ A_7 &= 1; \\ a_{11} &= 2A_{11} = 2 \\ A_{11} &= 1; \\ a_{13} &= 2A_{13} = 2 \\ A_{13} &= 1; \\ a_{17} &= 2A_{17} = 0 \\ A_{17} &= 0; \\ a_{19} &= 2A_{19} = 0 \\ A_{19} &= 0; \end{aligned}$$

quindi

$$\pi = \frac{2^{77}}{3^4 . 5^2 . 7^2 . 11^2 . 13^2 . 23^2 . 29^2 . 31^2 . 37^2 . 41} = 3,12 \text{ circa},$$

cioè coll'approssimazione a meno di $\frac{1}{10}$, come ci eravamo proposti.

TAVOLE NUMERICHE.

Tavola I. **Potenze del 2.**

x	2^x
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1.024
11	2.048
12	4.096
13	8.192
14	16.384
15	32.768
16	65.536
17	131.072
18	262.144
19	524.288
20	1.048.576
21	2.097.152
22	4.194.304
23	8.388.608
24	16.777.216
25	33.554.432
26	67.108.864
27	134.217.728
28	268.435.456
29	536.870.912
30	1.073.741.824
31	2.147.483.648
32	4.294.967.296
33	8.589.934.592
34	17.179.869.184
35	34.359.738.368
36	68.719.476.736
37	137.438.953.472
38	274.877.906.944
39	549.755.813.888
40	1.099.511.627.776
41	2.199.023.255.552
42	4.398.046.511.104
43	8.796.093.022.208
44	17.592.186.044.416
45	35.184.372.088.832
46	70.368.744.177.664
47	140.737.488.355.328
48	281.474.976.710.656
49	562.949.953.421.312
50	1.125.899.906.842.624

Tavola I. *(Segue)* **Potenze del 2.**

x	2^x
51	2.251.799.813.685.248
52	4.503.599.627.370.496
53	9.007.199.254.740.992
54	18.014.398.509.481.984
55	36.028.797.018.963.968
56	72.057.594.037.927.936
57	144.115.188.075.855.872
58	288.230.376.151.711.744
59	576.460.752.303.423.488
60	1.152.921.504.606.846.976
61	2.305.843.009.213.693.952
62	4.611.686.018.427.387.904
63	9.223.372.036.854.775.808
64	18.446.744.073.709.551.616
65	36.893.488.147.419.103.232
66	73.786.976.294.838.206.464
67	147.573.952.589.676.412.928
68	295.147.905.179.352.825.856
69	590.295.810.358.705.651.712
70	1.180.591.620.717.411.303.424
71	2.361.183.241.434.822.606.848
72	4.722.366.482.869.645.213.696
73	9.444.732.965.739.290.427.392
74	18.889.465.931.478.580.854.784
75	37.778.931.862.957.161.709.568
76	75.557.863.725.914.323.419.136
77	151.115.727.451.828.646.838.272
78	302.231.454.903.657.293.676.544
79	604.462.909.807.314.587.353.088
80	1.208.925.819.614.629.174.706.176
81	2.417.851.639.229.258.349.412.352
82	4.835.703.278.458.516.698.824.704
83	9.671.406.556.917.033.397.649.408
84	19.342.813.113.834.066.795.298.816
85	38.685.626.227.668.133.590.597.632
86	77.371.252.455.336.267.181.195.264
87	154.742.504.910.672.534.362.390.528
88	309.485.009.821.345.068.724.781.056
89	618.970.019.642.690.137.449.562.112
90	1.237.940.039.285.380.274.899.124.224
91	2.475.880.078.570.760.549.798.248.448
92	4.951.760.157.141.521.099.596.496.896
93	9.903.520.314.283.042.199.192.993.792
94	19.807.040.628.566.084.398.385.987.584
95	39.614.081.257.132.168.796.771.975.168
96	79.228.162.514.264.337.593.543.950.336
97	158.456.325.028.528.675.187.087.900.672
98	316.912.650.057.057.350.374.175.801.344
99	633.825.300.114.114.700.748.351.602.688
100	1.267.650.600.228.229.401.496.703.205.376

Tavola II. **Potenze del 3.**

x	3^x
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243
6	729
7	2 187
8	6.561
9	19.683
10	59.049
11	177.147
12	531.441
13	1.594.323
14	4.782.969
15	14.348.907
16	43.046.721
17	129.140.163
18	387.420.489
19	1.162.261.467
20	3.486.784.401
21	10.460.353.203
22	31.381.059.609
23	94.143.178.827
24	282.429.536.481
25	847.288.609.443
26	2.541.865.828.329
27	7.625.597.484.987
28	22.876.792.454.961
29	68.630.377.364.883
30	205.891.132.094.649
31	617.673.396.283.947
32	1.853.020.188.851.841
33	5.559.060.566.555.523
34	16.677.181.699.666.569
35	50.031.545.098.999.707
36	150.094.635.296.999.121
37	450.283.905.890.997.363
38	1.350.851.717.672.992.089
39	4.052.555.153.018.976.267
40	12.157.665.459.056.928.801
41	36.472.996.377.170.786.403
42	109.418.989.131.512.359.209
43	328.256.967.394.537.077.627
44	984.770.902.183.611.232.881
45	2.954.312.706.550.833.698.643
46	8.862.938.119.652.501.095.929
47	26.588.814.358.957.503.287.787
48	79.766.443.076.872.509.863.361
49	239.299.329.230.617.529.590.083
50	717.897.987.691.852.588.770.249

Tavola III. **Potenze del 5.**

x	5^x
1	5
2	25
3	125
4	625
5	3.125
6	15.625
7	78.125
8	390.625
9	1.953.125
10	9.765.625
11	48.828.125
12	244.140.625
13	1.220.703.125
14	6.103.515.625
15	30.517.578.125
16	152.587.890.625
17	762.939.453.125
18	3.814.697.265.625
19	19.073.486.328.125
20	95.367.431.640.625
21	476.837.158.203.125
22	2.384.185.791.015.625
23	11.920.928.955.078.125
24	59.604.644.775.390.625
25	298.023.223.876.953.125
26	1.490.116.119.384.765.625
27	7.450.580.596.923.828.125
28	37.252.902.984.619.140.625
29	186.264.514.923.095.703.125
30	931.322.574.615.478.515.625
31	4.656.612.873.077.392.578.125
32	23.283.064.365.386.962.890.625
33	116.415.321.826.934.814.453.125
34	582.076.609.134.674.072.265.625
35	2.910.383.045.673.370.361.328.125
36	14.551.915.228.366.851.806.640.625
37	72.759.576.141.834.259.033.203.125
38	363.797.880.709.171.295.166.015.625
39	1.818.989.403.545.856.475.830.078.125
40	9.094.947.017.729.282.379.150.390.625
41	45.474.735.088.646.411.895.751.953.125
42	227.373.675.443.232.059.478.759.765.625
43	1.136.868.377.216.160.297.393.798.828.125
44	5.684.341.886.080.801.486.968.994.140.625
45	28.421.709.430.404.007.434.844.970.703.125
46	142.108.547.152.020.037.174.224.853.515.625
47	710.542.735.760.100.185.871.124.267.578.125
48	3.552.713.678.800.500.929.355.621.337.890.625
49	17.763.568.394.002.504.646.778.106.689.453.125
50	88.817.841.970.012.523.233.890.533.447.265.625

TAVOLA IV. **Potenze del 7.**

x	7^x
1	7
2	49
3	343
4	2.401
5	16.807
6	117.649
7	823.543
8	5.764.801
9	40.353.607
10	282.475.249
11	1.977.326.743
12	13.841.287.201
13	96.889.010.407
14	678.223.072.849
15	4.747.561.509.943
16	33.232.930.569.601
17	232.630.513.987.207
18	1.628.413.597.910.449
19	11.398.895.185.373.143
20	79.792.266.297.612.001
21	558.545.864.083.284.007
22	3.909.821.048.582.988.049
23	27.368.747.340.080.916.343
24	191.581.231.380.566.414.401
25	1.341.068.619.663.964.900.807
26	9.387.480.337.647.754.305.649
27	65.712.362.363.534.280.139.543
28	459.986.536.544.739.960.976.801
29	3.219.905.755.813.179.726.837.607
30	22.539.340.290.692.258.087.863.249
31	157.775.382.034.845.806.615.042.743
32	1.104.427.674.243.920.646.305.299.201
33	7.730.993.719.707.444.524.137.094.407
34	54.116.956.037.952.111.668.959.660.849
35	378.818.692.265.664.781.682.717.625.943
36	2.651.730.845.859.653.471.779.023.381.601
37	18.562.115.921.017.574.302.453.163.671.207
38	129.934.811.447.123.020.117.172.145.698.449
39	909.543.680.129.861.140.820.205.019.889.143
40	6.366.805.760.909.027.985.741.435.139.224.001
41	44.567.640.326.363.195.900.190.045.974.568.007
42	311.973.482.284.542.371.301.330.321.821.976.049
43	2.183.814.375.991.796.599.109.312.252.753.832.343
44	15.286.700.631.942.576.193.765.185.769.276.826.401
45	107.006.904.423.598.033.356.356.300.384.937.784.807
46	749.048.330.965.186.233.494.494.102.694.564.493.649
47	5.243.338.316.756.303.634.461.458.718.861.951.455.543
48	36.703.368.217.294.125.441.230.211.032.033.660.188.801
49	256.923.577.521.058.878.088.611.477.224.235.621.321.607
50	1.798.465.042.647.412.146.620.280.340.569.649.349.251.249

TAVOLA V. **Fattoriali.**

n	$n!$
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5.040
8	40.320
9	362.880
10	3.628.800
11	39.916.800
12	479.001.600
13	6.227.020.800
14	87.178.291.200
15	1.307.674.368.000
16	20.922.789.888.000
17	355.687.427.996.000
18	6.402.373.703.928.000
19	121.645.130.374.632.000
20	2.432.902.607.492.640.000
21	51.090.954.757.345.440.000
22	1.124.001.004.661.599.680.000
23	25.852.023.107.216.792.640.000
24	620.448.554.573.203.023.360.000
25	15.511.213.864.330.075.584.000.000

Massa, gennaio 1900.

MARIO LAZZARINI.

Uno sguardo alle curve algebriche in base alla gonalità

Conferenza letta in francese dall'A. nel Congresso internazionale dei Matematici

il 9 agosto alle ore 2 pom.

SOMMARIO. — § 1. Che cosa è la gonalità della curva. — § 2. Metodi e nomenclatura per lo studio della gonalità. — § 3. Risultati generici relativi alle curve algebriche. — § 4. Risultati relativi alle curve di data gonalità. — § 5. Proprietà delle curve k-gonali dotate di curve aggiunte C^{m-k-1}. — § 6. Curve k-gonali senza punti fissi per le C^{m-k-1}. — § 7. Curve k-gonali con punti fissi per le C^{m-k-1}. — Bibliografia.

§ 1. — Che cosa è la gonalità della curva.

1. Seguendo i concetti di Riemann, " la gonalità è il più piccolo " numero di punti della superficie di Riemann di genere p, pei quali " una funzione razionale della superficie diviene infinita di primo " ordine ". (*Oeuvres mathématiques*, pagg. 115-116.) Sulla importanza di questo numero si sono espressi i signori Appel e Goursat dicendo: " Pour une courbe donnée le nombre des pôles d'une fonction rationnelle (tous ces pôles étant supposés du premier ordre) ne peut pas " descendre au-dessous d'un certain minimum. Ce nombre minimum, " qui se conserve évidemment dans toute transformation birationnelle, paraît devoir jouer un rôle important dans la théorie des " courbes algébriques ". (*Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, pagg. 385-386.)

2. Secondo le idee di Weierstrass, non esistono funzioni razionali della curva algebrica (*Gebilde*) di genere p che hanno come punto infinito unico, di multiplicità $\leq p$, un punto arbitrariamente scelto su questa curva; e, dato un punto particolare della curva, se si cercano le funzioni razionali della curva, dei gradi $1, 2, 3, 4, \ldots$ che ammettono questo punto come punto infinito unico, vi sono precisamente p numeri che non si possono ritrovare come gradi di funzioni aventi il punto di cui si tratta come punto infinito unico. Per ogni punto della curva vi è un grado minimo per le funzioni razionali che hanno questo punto come punto infinito unico. *Il più piccolo fra questi gradi minimi, allorchè il punto varia sulla curva, è la gonalità di questa.*

3. Secondo il modo di vedere della *Geometria su di una curva algebrica,* l'ordine delle serie lineari complete o parziali (*Vollschaar* o *Theilschaar*) semplicemente infinite, segate sulla curva da fasci di varietà, e quindi da fasci di curve aggiunte, se la curva è piana, non può discendere al di sotto di un certo minimo. *Il minimo ordine delle serie lineari* ∞^1, *che esistono su una curva* C_p^m *di ordine* m, *di genere* p, *indica la gonalità della curva.*

Noi rappresentiamo con k questa gonalità; essa è un numero che può variare da 1 a ∞. Le curve di gonalità 1 sono le *curve unicursali* o *razionali;* le curve di gonalità 2 sono le *curve iperellittiche,* comprese le *ellittiche.*

§ 2. — Metodi e nomenclatura per lo studio delle gonalità.

4. Dal punto di vista analitico la ricerca della gonalità della curva si riduce alla ricerca delle *funzioni speciali* delle superficie di Riemann, qualora si faccia astrazione dalle superficie di genere zero e dalle superficie ellittiche. A questo proposito il Klein dice:

" La esposizione e la ricerca delle funzioni speciali appartenenti " ad una superficie F è una delle più interessanti ma anche delle più " difficili parti della teoria delle superficie di Riemann e finora in " nessun modo si è potuto raggiungere una soddisfacente risolu- " zione „.[1] (Klein-Fricke, *Elliptischen Modulfunctionen,* Bd. I, pagina 555). Perciò conveniva tentare la risoluzione del problema col metodo algebrico-geometrico: ma, pure con questo metodo, la ricerca presentava grandi difficoltà; poichè, quando si passava dalle curve iperellittiche alle curve di gonalità maggiore, i teoremi che si trovavano erano sempre ritenuti di dubbia fede, perchè mancanti di una completa generalità per rispetto al genere.

5. Noi abbiamo tentata questa via e siamo riusciti a fare qualche passo, ed a sbarazzarci il cammino dalle grandi difficoltà che il soggetto presentava, e ciò semplicissimamente, pensando, in opposizione a ciò che i signori Brill e Nöther avevano affermato nella loro classica fondamentale Memoria " Sulla teoria della Geometria su una curva algebrica „ (*Math. Ann.*, VII), che dovesse essere di capitale importanza lo studiare in modo diretto le curve aggiunte alla curva C_p^m di un ordine $< m-3$, e sopratutto le curve aggiunte che hanno il minimo ordine compatibile con l'ordine, e col genere della curva data. Son queste le curve che noi abbiamo chiamate *curve aggiunte minime.* Intuitivamente ci convicemmo che queste curve dovessero funzionare,

---

[1] Die Aufstellung und Untersuchung der zu einer Fläche F gehörenden Specialfunctionen gehört zu den interessantesten, aber auch schwierigsten Theilen der Riemann'schen Theorie und ist bislang keineswegs einer abgeschlossenen Lösung zugänglich gewesen.

per le curve di gonalità >2, come le curve aggiunte dell'ordine $m-3$ funzionano nelle curve iperellittiche, e non c' ingannammo: poichè tutte le nostre ricerche hanno confermato e dimostrato questo fatto essenziale della teoria. Questo metodo di ricerca ci ha obbligato ad adottare una nomenclatura più minuziosa di quella che si usava prima; quindi riservammo il nome di *serie speciali* alle sole serie lineari segate dalle curve aggiunte di ordine $m-3$ e non da curve aggiunte di ordine minore; e abbiam dette *serie specializzate una volta* quelle che sono segate da curve aggiunte di ordine $m-4$ e non da curve aggiunte di ordine minore; *serie specializzate due volte* quelle segate da curve aggiunte di ordine $m-5$, ecc. Ed inoltre chiamammo

1ª serie canonica quella che è segata da tutte le curve agg. di ord. $m-3$,
2ª serie canonica " " " " " $m-4$,
. . . .
. . . .
$(\alpha+1)^{ma}$ *serie canonica* " " " " $m-3-\alpha$.

6. La più grande difficoltà consisteva nel determinare la dimensione effettiva delle serie canoniche successive alla prima; e a questa difficoltà era legata un'altra, che, tentata da Küpper, era stata giudicata da questi ben difficile a superarsi (*Bibl.*, 1). Ecco di che si tratta. Essendo data una curva C^m, di ordine m, una curva aggiunta di ordine $m-3-\alpha$ deve avere in ogni punto s-uplo di C^m un punto $(s-1)$-uplo, e, quindi, deve soddisfare a $\frac{1}{2}\Sigma s(s-1)$ condizioni lineari, che intanto possono non essere tutte linearmente indipendenti per le curve aggiunte d'ordine $m-3-\alpha$, se $\alpha>0$. Se si suppone che ρ_α di queste condizioni dipendono linearmente dalle altre si dice che ρ_α è la *sovrabbondanza* del sistema di curve aggiunte di ordine $m-3-\alpha$. La difficoltà consisteva nella ricerca di un *limite superiore* di ρ_α. Un'altra difficoltà consisteva nella necessità di rischiarare in qualche modo la funzione e di conoscere il numero dei punti fissi che i sistemi delle curve aggiunte di ordine $<m-3$ possono avere sulla C^m_p, fuori dei punti multipli; punti fissi che mancano completamente, come si sa, per le curve aggiunte di ordine $\geq m-3$.

§ 3. — Risultati generici relativi alle curve algebriche.

7. Distingueremo i resultati ottenuti colle nostre ricerche in due categorie; cioè in *risultati generici* e *risultati relativi ad una gonalità determinata.* In quanto ai risultati generici, il primo che siamo pervenuti a stabilire, considerando la $(\alpha+1)^{ma}$ serie canonica, è stato il limite superiore di ρ_α, risultato di cui si dubitò dapprima, ma che si è finito per ammettere.

Trovammo che (*Bibl.*, 4):

$$\rho_\alpha \leq \tfrac{1}{2}\alpha(m-3-\alpha). \tag{1}$$

8. Un altro risultato è la forma che prende il teorema di Riemann e Roch esteso alle curve aggiunte di ordine $m-3-\alpha$. Eccolo (*Bibl.*, 5):

Se per un gruppo G_{n_α} *d'una curva* C_p^m *passano* ∞^{r_α} *curve aggiunte di ordine* $m-3-\alpha$, *il gruppo appartiene a una serie lineare completa* $g_{n_\alpha}^{r_\alpha}$, *di cui la dimensione* r_α *non può essere inferiore a* $n_\alpha + r'_\alpha - p + 1 + \frac{1}{2}\alpha(\alpha+3) + \rho_\alpha$, *di modo che si deve avere.*

$$r_\alpha \geq (n_\alpha + r'_\alpha) - (p-1) + \frac{\alpha(\alpha+3)}{2} + \rho_\alpha. \tag{2}$$

Questo teorema può enunciarsi anche nel seguente modo: *La dimensione della serie lineare completa* $g_{n'_\alpha}^{r'_\alpha}$ *residua della* $g_{n_\alpha}^{r_\alpha}$ rispetto *alla serie canonica* $g_{N_\alpha}^{R_\alpha}$ *segata dalle curve aggiunte di ordine* $m-3-\alpha$, e

$$r'_\alpha \leq (p-1) - (n_\alpha - r_\alpha) - \frac{\alpha(\alpha+3)}{2} - \rho_\alpha.$$

Or, se noi facciamo l'interpretazione analitica di questo teorema, considerando che un polinomio aggiunto dell'ordine $m-3-\alpha$ è *una funzione speciale* della superficie di Riemann di genere p, e che il numero r'_α rappresenta il numero dei parametri *non omogenei*, che entrano linearmente nella funzione di cui si tratta, che ha per poli di 1° ordine gli n_α punti, noi perveniamo al teorema seguente:

Dati n *punti tali che essi appartengano a* $\tau = r' + 1$ *curve aggiunte linearmente indipendenti, dell'ordine* $m-3-\alpha$, *la funzione algebrica più generale, avente per poli questi* n *punti o una parte di essi, conterrà almeno*

$$n + \tau - p + 1 + \frac{\alpha(\alpha+3)}{2} + \rho_\alpha$$

costanti arbitrarie omogenee.

9. Un altro risultato dapprima creduto dubbio, in seguito riconosciuto esatto, è quello che dà il minimo genere delle curve di ordine m, dotate di curve aggiunte di ordine $m-3-\alpha$. Questo minimo è

$$p = \tfrac{1}{2}\alpha m + 1. \tag{3}$$

10. Un risultato di cui l'esattezza è stata assodata mediante una polemica avuta con i signori Bertini e Burkhardt, è la estensione del *teorema di reciprocità* di Nöther alle curve aggiunte di ordine $m-3-\alpha$.

Fu assodato che: *gli ordini e le dimensioni di due serie, residue fra loro rispetto alla serie canonica* $g^{R_\alpha}_{N_\alpha}$, *segate dalle curve aggiunte di ordine* $m-3-\alpha$, *sono legati dalle relazioni*

$$(4)\qquad n_\alpha+n'_\alpha=N_\alpha\ ,\ \ [2(r_\alpha-r'_\alpha)-(n_\alpha-n'_\alpha)]\leq 2(\bar\rho_\alpha-\rho_\alpha),$$

ove $\bar\rho_\alpha$ rappresenta il più alto valore che ρ_α possa raggiungere.

11. Inoltre abbiamo trovato che la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza delle curve aggiunte $C^{m-3-\alpha}$ è

$$(5)\qquad p\leq \tfrac{1}{2}\alpha m+1+(\bar\rho_\alpha-\rho_\alpha),$$

purchè si ammetta anche il caso limite, cioè che in una curva senza punti multipli ogni punto possa essere considerato come una curva aggiunta di ordine 0, la qualcosa ha la sua ragione di essere (*Bibl.*, 12).

12. Ed infine abbiam trovato che *la formola, conosciuta, del più alto genere di una curva* C^m *appartenente ad uno spazio a* d *dimensioni prende le forme seguenti, secondo che* m *è congruo a* 1, *a* 2 *o a* 0, *a* 3 *o a* $d-2$, *a* 4 *o a* $d-3$,... *per rispetto al modulo* $d-1$:

per d *pari*,

$$p=\frac{(m-1)(m-d)}{2(d-1)},\ \frac{(m-2)(m-d+1)}{2(d-1)},\dots,\ \frac{\left(m-\frac{d}{2}\right)\left(m-\frac{d}{2}-1\right)}{2(d-1)};$$

per d *dispari*,

$$p=\frac{(m-1)(m-d)}{2(d-1)},\ \frac{m-2)(m-d+1)}{2(d-1)},\dots,\ \frac{\left(m-\frac{d+1}{2}\right)^2}{2(d-1)}.$$

§ 4. — **Risultati relativi alle curve di data gonalità.**

13. Per esporre con chiarezza le proprietà delle curve algebriche relative alla gonalità, segnaleremo innanzi tutto quelle che sono comuni a tutte le curve di gonalità k, e poi esporremo le proprietà delle curve aventi la stessa gonalità, ma che soddisfano pure a qualche altra condizione.

Bisogna prima di tutto notare che sulle superficie di Riemann a moduli generali e di gonalità k, Riemann ha trovato che: " *lorsque les* " *valeurs de ramifications de la surface ne satisfont pas à des équations* " *de condition, il faut que l'on ait* (*Oeuvres math.*, p. 116) $k\geq\frac{1}{2}p+1$ ".

Noi abbiam trovato che si deve avere pure (*Bibl.*, 6) $k\leq\dfrac{p+3}{2}$, d'onde segue che: *Le superficie di Riemann, a moduli generali, sulle* *quali le funzioni razionali ammettono* k *per minimo numero di poli di primo ordine sono quelle de' generi*

$$2k-3 \quad , \quad 2k-2.$$

Questo teorema può esser tradotto e completato nel seguente:

Fra tutte le curve di gonalità k, *soltanto quelle dei generi* $2k-3$, $2k-2$ POSSONO *essere a moduli generali; e fra queste, quelle di cui il genere è* $2k-3$ *ammette una semplice infinità di* g_k^1, *mentre che le altre ne hanno* $\frac{(2k-2)!}{k!\,(k-1)!}$.

Per tutti gli altri generi le curve ammettono moduli particolari; ma ciò non impedisce che le curve k-gonali dei generi $2k-3$, $2k-2$ possano avere moduli particolari. È assodato (*Bibl.*, 19) che ciò non avviene per le curve iperellittiche dei generi 1 e 2, nè per le curve trigonali dei generi 3 e 4; ma ciò comincia a verificarsi per le curve tetragonali. Si trova infatti fra queste curve la C_6^7 (di 7° ordine, di generi 6) che ha moduli particolari ed ammette una semplice infinità di g_4^1 se essa è dotata di 3 punti tripli; ma, se essa ha 2 punti tripli e 3 punti doppi arbitrari, essa ha moduli generali e non ammette che 5 g_4^1. La prima di queste curve è una trasformata quadratica della curva di 5° ordine senza punti doppi; l'altra è trasformata quadratica della C_6^6, del 6° ordine con 4 punti doppi.

14. Ecco gli altri risultati, che si riferiscono alle proprietà generiche delle curve algebriche di gonalità data k.

1°. *Se una curva* k*-gonale* C_p^m *ammette almeno* $k-\alpha$ *curve aggiunte dell'ordine* $m-3-\alpha$, *linearmente indipendenti, le curve* $C^{m-3-\alpha}$, *che passano per* $k-\alpha-1$ *punti di un gruppo di una* g_k^1, *passano per tutti gli altri punti del gruppo; esse segano una* $g_{N_\alpha-k}^{R_\alpha+\alpha+1-k}$, *e quindi le curve aggiunte* $C^{m-3-\alpha}$ *che passano per un gruppo di questa serie possono servire a segare la* g_k^1. (*Bibl.*, 8 e 15).

In particolare: *nella stessa ipotesi, ogni gruppo della serie* g_k^1 *vale* $k-2$ *condizioni per ogni* C^{m-4} *aggiunta, vale* $k-3$ *condizioni per ogni* C^{m-5} *aggiunta,..., e vale una sola condizione per ogni curva aggiunta dell'ordine* $m-k-1$.

2°. *Le curve* k*-gonali dell'ordine* m *non possono avere curve aggiunte di ordine minore di* $m-k-1$. *Da ciò si deduce che:*

a) *Il più alto genere che possono raggiungere le curve* k*-gonali d'un ordine dato* m *è*

$$p=(k-1)m-\tfrac{1}{2}(k-1)(k+2). \tag{6}$$

b) *Se il numero dei punti doppi di una curva piana semplice, dell'ordine* m, *è minore di* $\frac{1}{2}(m-k)(m-k-1)$, *la gonalità della curva sorpassa* k.

3°. *Sulle curve* k-*gonali, singolari nel loro genere, non possono esistere serie irrazionali involutorie, semplicemente infinite, dell'ordine* k *e di genere* $\pi < \frac{p-(k-1)^2}{k}$ (*Bibl.*, 3).

4°. *Le curve* k-*gonali, di cui il genere sorpassa* $(k-1)^2$, *devono necessariamente avere una sola* g_k^1 (*Bibl.*, 15 e 3).

5°. *Le curve* k-*gonali, a moduli particolari di cui il genere supera* $2k-2$, *ma non* $(k-1)^2$, *possono anche avere una sola* g_k^1.

§ 5. — Proprietà delle curve k-gonali dotate di curve aggiunte C^{m-k-1}.

15. Limitandoci, pel momento, a esaminare le curve k-gonali dotate di curve aggiunte del più piccolo ordine compatibile con la gonalità, troviamo in primo luogo che queste curve hanno un carattere fondamentale rimarchevolissimo, che apporta una folla di proprietà semplici ed interessanti. Il carattere di cui si parla consiste in ciò che *ogni gruppo di ciascuna* g_k^1, *esistente sulla curva, ha i suoi punti in linea retta* (*Bibl.*, 6).

Come abbiamo visto sopra, ciascuno di questi gruppi equivale una sola condizione per ogni curva aggiunta C^{m-k-1} che passa per esso, donde segue che:

Se vi è una infinità di queste curve aggiunte C^{m-k-1}, *ogni* g_k^1 *è segata da un fascio di curve* C^{m-k-1}. *Se, al contrario, non vi è che una sola curva aggiunta* C^{m-k-1}, *ogni* g_k^1, *che esiste sulla curva data, è segata da un fascio di curve aggiunte dell'ordine* m — k.

16. *Il genere più basso che può raggiungere una curva* k-*gonale, dotata di curve aggiunte minime, è*

$$p = \tfrac{1}{2}(k-2)m + 1. \tag{7}$$

Le curve k-*gonali, di cui il genere soddisfa alle limitazioni seguenti*

$$\tfrac{1}{2}(k-2)m + 1 + (\delta_{k-2} - \rho_{k-2}) \leq p \leq (k-1)m - \tfrac{1}{2}(k-1)(k+2), \tag{8}$$

hanno certamente per diritto i punti di ogni gruppo di ciascuna g_k^1.

17. *L'inviluppo delle rette che sostengono ogni gruppo di una* g_k^1 *sulla curva* k-*gonale è della classe* (*Bibl.*, 7)

$$s = 1 + \frac{2(\theta - \xi)}{k(k-1)}, \tag{9}$$

dove θ rappresenta l'eccesso del genere massimo delle curve k-*gonali sul genere* p *della curva data, e ξ è il numero delle coppie di punti comuni alla g_k^1 e ad ogni g_m^1 segata sulla curva da un fascio di rette il cui centro sia esterno alla curva, cioè è il numero delle coppie di punti dei gruppi della g_k^1 assorbiti nei punti multipli della C_μ^m.*

Da ciò si deduce che:

Il numero θ è sempre eguale a ξ aumentato di un multiplo di $\frac{1}{2}k(k-1)$, cioè (*Bibl.*, 6 e 19)

$$\theta = \xi + \tfrac{1}{2}k(k-1)t \leq \tfrac{1}{2}(m-k-1)k. \tag{10}$$

§ 6. — Curve k-gonali senza punti fissi per le C^{m-k-1}.

18. Dopo aver stabilite queste proprietà comuni a tutte le curve k-gonali, dotate di curve aggiunte minime, non pareva facile di procedere innanzi, e per superare le difficoltà che si presentavano avemmo dapprima l'idea di considerare, fra queste curve, soltanto le curve di gonalità k, che non hanno punti fissi nella $(k-1)^{ma}$ serie canonica segata dalle curve aggiunte C^{m-k-1}.

Ecco le proprietà principali che abbiamo potuto scovrire:

1°. *La serie canonica segata su queste curve dalle curve aggiunte C^{m-k-1}, allorchè la dimensione del sistema di queste curve è > 1, è una serie g_{kR}^R, sempre composta mediante la g_k^1, R essendo la dimensione del sistema delle curve aggiunte dell'ordine $m-k-1$; di modo che la $(k-1)^{ma}$ serie canonica si comporta per queste curve come la serie canonica segata dalle curve aggiunte C^{m-3} si comporta per le curve iperellittiche.*

2°. *Tutte le curve aggiunte C^{m-k-1}, che passano per i gruppi di una g_k^1 allineati con un punto fisso del piano della curva, passano anch'esse per questo punto* (*Bibl.*, 9 e 15).

19. Per poter fare uno studio presso a poco completo di questa categoria di curve, abbiam trovato utile di suddividerla in famiglie, adottando come carattere differenziale un carattere proiettivo, che abbiam chiamato *specie* della curva. Il numero che indica la specie della curva è uguale alla *classe* dell'inviluppo delle rette che sostengono tutti i gruppi di ogni g_k^1. Questa divisione in famiglie è stata per noi di grande utilità come mezzo di ricerca, ma essa non avrà bisogno forse di essere mantenuta, quando si potrà pervenire direttamente ai risultati ottenuti. Essa ci è apparsa massimamente utile nello studio e nella ricerca di curve di dato genere e di data gonalità aventi solo punti doppi.

20. Limitandoci alle curve di 1ª e di 2ª specie abbiam potuto assegnare la loro costruzione effettiva mediante fasci di curve (*Bibl.*, 9); abbiam segnalata l'esistenza di una infinità di reti, e di sistemi tripli, quadrupli, ..., di curve di ordini m senza punti *multipli* che hanno delle reti a intersezioni variabili formate di gruppi di $m-1$ punti per diritto (*Bibl.*, 11); ed abbiam potuto stabilire che:

1°. *Nelle curve* k*-gonali di* 1ª *specie i valori di* $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{k-2}$ *sono tutti nulli.*

2°. *Nelle curve* k*-gonali di* 2ª *specie, che hanno una sola curva aggiunte dell'ordine* $m-k-1$, *cioè nelle curve* $C^{2k}_{(k-1)^2}$, *si ha*

$$(11)\quad \rho_0=0,\ \rho_1=1,\ \rho_2=3, \ldots,\ \rho_{k-4}=\binom{k-3}{2},\ \rho_{k-3}=\binom{k-2}{2},\ \rho_{k-2}=\binom{k-1}{2}.$$

3°. *Nelle curve* k*-gonali di* 1ª *specie la serie segata da tutte le coniche del piano è contenuta in una serie* g^{5}_{2k} *completa; la serie segata da tutte le cubiche del piano è contenuta in una serie completa* g^{15}_{6k}, ecc. ecc.

21. Per le curve di gonalità k e di specie $s \geq 1$ in generale, i risultati più essenziali riguardano la determinazione precisa delle dimensioni di alcune delle serie complete segate su queste curve dalle curve aggiunte e da curve non aggiunte. E fra tutti questi risultati si è giudicato molto difficile ed importante quello che concerne la dimensione della serie lineare completa, che contiene la serie segata sulle curve dalle rette del piano. Ecco i teoremi. (*Bibl.*, 15.)

1°. *La dimensione della serie lineare completa, che contiene la serie segata dalle rette del piano, è eguale alla specie della curva aumentata di un'unità.*

2°. *La sovrabbondanza* ρ_1 *del sistema delle curve aggiunte di ordine* $m-4$ *è* $s-1$.

3°. *La sovrabbondanza* ρ_{k-3} *del sistema delle curve aggiunte dell'ordine* $m-k$ *è* $\frac{1}{2}(s-1)(k-2)(k-3)$.

4°. *La sovrabbondanza* ρ_{k-2} *del sistema delle curve aggiunte dell'ordine* $m-k-1$ *è* $\frac{1}{2}(s-1)(k-1)(k-2)$.

5°. *La dimensione della* $(k-2)^{ma}$ *serie canonica, segata dalle curve aggiunte dell'ordine* $m-k$ *è* $2R+s+1$, *donde segue che la serie in questione è* $g^{2R+s+1}_{k(R+s)+R-(s-2)}$.

22. Dal primo dei teoremi che precedono si deduce che (*Bibl.*, 17):

Tutte le curve k*-gonali di* s^{ma} *specie sono le proiezioni di curve dello stesso ordine dello spazio di dimensione* $s+1$, *ma* NORMALI *per questo spazio; e queste curve normali appartengono a superficie rigate razionali dell'ordine* s, *di cui ciascuna generatrice le incontra* k *volte.*

§ 7. — Curve k-gonali con punti fissi per le C^{m-k-1}.

23. Ci resta a dire qualche parola sopra i risultati ottenuti intorno alle curve algebriche k-gonali, che hanno curve aggiunte minime dell'ordine $m-k-1$, e che presentano inoltre un certo numero σ di punti fissi per queste curve aggiunte, fuori dei punti multipli. Lo studio di questo argomento riguarda anche, per $\sigma=0$, tutte le curve considerate nel paragrafo precedente, di modo che torneremo a considerare ora tutte le curve k-gonali dotate di curve aggiunte C^{m-k-1}. Il genere di queste curve è dato dalla formola

$$(12) \qquad p=(k-1)m-\tfrac{1}{2}(k-1)(k+2)-\tfrac{1}{2}k(k-1)t-\xi-\tfrac{1}{2}(k-1)(2m-ks-2)-\xi$$

e in tal caso l'inviluppo delle rette, cui appartengono i gruppi di una g_k^1 è della classe

$$(13) \qquad s=t+1.$$

Noi conserveremo per queste curve la divisione in *ispecie;* ma non bisognerà dimenticare che, fra le curve di s^{ma} specie, si trovano ora, non solamente le curve già considerate innanzi ($\sigma=0$, $\xi=0$), ma anche tutte le altre per le quali σ e ξ non sono entrambi eguali a zero.

24. Il primo teorema che conviene citare è il seguente (*Bibl.*, 19).
Ogni curva k*-gonale, di cui l'inviluppo della* g_k^1 *è di classe* s, *si può trasformare birazionalmente in una curva* k*-gonale dello stesso ordine, dotata di un punto* (m — k)*-uplo, di* s — 1 *punti* k*-upli, e di altri punti multipli, di multiplicità inferiore a* k, *equivalenti a* ξ *punti doppi. Questa curva si può anche trasformare birazionalmente in una curva* k*-gonale di* 1ª *specie di un ordine inferiore* m' *dotata di un punto* (m' — k)*-uplo e di altri punti multipli di multiplicità inferiore a* k.

Grazie a questo teorema le proprietà invariantive delle curve k-gonali di assegnata specie possono essere ottenute tutte dalle sole curve k-gonali di 1ª specie C^m, che hanno un punto $(m-k)$-uplo e altri punti multipli di multiplicità inferiore a k.

25. Ecco quali sono i caratteri di queste curve.
Esse hanno $\theta=\xi$; il genere e l'ordine sono

$$p=\tfrac{1}{2}(k-1)(2m-k-2)-\theta \quad , \quad m \geq k+1+\frac{2\theta}{k};$$

il numero dei punti fissi è

$$\sigma=(k-2)\theta-k\rho_{k-2};$$

la dimensione e l'ordine della $(k-1)^{ma}$ serie canonica sono

$$R = m - k - 1 - (\theta - \rho_{k-2}) \quad , \quad N = kR + \sigma.$$

Il numero dei punti doppi arbitrarii sono $\theta - \rho_{k-2}$, e vi è tra θ e ρ_{k-2} la relazione seguente

$$\rho_{k-2} \leq \frac{k-2}{k}\theta ,$$

che ci fu comunicata da Küpper.

26. In particolare, per le curve iperellittiche, si trova (facendo $k=2$) $\sigma = -k\rho_0$; ma σ non può esser negativo, dunque $\sigma = 0$, ciò che dimostra (per la prima volta di una maniera diretta) che non possono esservi punti fissi nella serie canonica sulle curve iperellittiche.

27. I caratteri delle curve, di cui si è parlato nel n. 25, possono essere utilmente espressi in funzione della dimensione R del sistema delle curve aggiunte minime:

$$m = R + k + 1 + (\theta - \rho_{k-2}) \quad , \quad p = \tfrac{1}{2}(k-1)(2R+k) + (k-2)\theta - (k-1)\rho_{k-2}$$

e le curve hanno un punto $(m-k)$-uplo e altri punti multipli di multiplicità inferiore a k, equivalenti a θ punti doppi.

Le curve aggiunte minime si riducono al sistema di $R + (\theta - \rho_{k-2})$ rette, di cui $\theta - \rho_{k-2}$ sono fisse e determinano i σ punti fissi della curva.

28. Le curve per le quali si ha $\rho_{k-2} = 0$ hanno una importanza particolare; fra esse son comprese *tutte* le curve trigonali di 1ª specie. Per tali curve si hanno i seguenti teoremi:

1°. *Le curve* C_p^m *k-gonali di 1ª specie; che hanno* $\rho_{k-2} = 0$, *non hanno che soli punti doppi e un solo punto* $(m-k)$*-uplo, che non è in linea retta con due dei punti doppi.*

2°. *La serie segata su queste curve dalle rette del piano* è COMPLETA; donde segue *che le curve in questione sono tutte curve normali per il piano.*

Per mostrare l'importanza di questi due teoremi ci arresteremo ad osservare che, limitandoci al solo caso di $k=3$, si ritrova il teorema di Bobek: *Nelle curve trigonali il numero dei punti fissi* $\sigma = \theta$, la cui estensione al caso di k qualunque appariva estremamente difficile; e si arriva a stabilire la rappresentazione normale di tutte le curve trigonali, risultato che abbiamo avuto l'onore di comunicare all'Accademia delle Scienze di Parigi, e che si può riassumere nel seguente teorema:

3°. *Ogni curva trigonale (per conseguenza di genere* $p \geq 3$*) può essere rappresentata per mezzo di una curva normale del piano, dell'ordine*

$\frac{p}{2}+3$ o $\frac{p-1}{2}+3$, *secondo che* p *è pari o dispari. La curva normale deve avere un punto* $\frac{p}{2}$*-uplo e un solo punto doppio nel primo caso, e non deve avere, nell'altro caso, che un punto* $\frac{p-1}{2}$*-uplo* (*Bibl.*, 19).

Bibliografia.

1. KÜPPER KARL. — 1°. *Ueber die curve* C_p^m *von* n^{ter} *Ordung und dem Geschlecht* $p > 1$ *auf welchem die einfachen specialschaaren* g_2^1, g_3^1 *vorkommen;* Prag. Abh. (7) III, 1889.
2. BOBEK K. — *Ueber Dreischaarcurven;* Wien. Ber. Bd. 98 pp. 142-173, 1889.
3. AMODEO FEDERICO. — 1°. *Contribuzione alla teoria delle serie irrazionali involutorie giacenti sulle varietà algebriche ad una dimensione;* Ann. di Mat. (2), 20, Giugno 1892.
4. — — 2°. *Curve aggiunte minime;* Roma, Rend. Acc. Lincei, Vol. 2_1, pp. 450-467, 21 Maggio 1893.
5. — — 3°. *Serie residue nella serie canonica delle curve aggiunte di ordine* $m-3-\alpha$; Roma, Acc. Lincei. Vol. 2_1, pp. 528-532, 3 Giugno 1893.
6. — — 4°. *Curve* k-*gonali;* Ann. di Matem. (2) Vol. 21, pp. 221-236, Giugno 1893.
7. BERTINI EUGENIO. — *La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico;* Ann. di Matem. (2) Vol. 22, 1894.
8. KÜPPER K. — 2°. *Ueber* k-*gonale Curven* C_p^n n^{ter} *Ordnung von Geschlecht* $p>1$; Prag. Ber. k. böhm. Ges. d. Wiss., 14 Juni, 1895; Monatsh. f. Math. u. Phys. VIII. Iahrg.
9. AMODEO F. — 5°. *Curve* k-*gonali di 1ª e di 2ª specie;* Ann. di Matem. (2), 24, pp. 1-22 (Agosto 1895), 1896.
10. KÜPPER K. — 3°. *Ueber beziehungen zwischen Polygonalen und Raumcurven;* Prag., Ber. d. k. Ges. d. Wiss., 7 febbr. 1896.
11. AMODEO F. — 6°. *Sistemi lineari di curve algebriche di genere massimo ad intersezioni variabili collineari;* Napoli, Rend. Acc. d. Sc., 7 Marzo 1896.
12. — — 7°. *Curve aggiunte e serie specializzate;* Napoli, Rend. Acc. d. Sc., 28 Nov. 1896.
13. BURKHARDT H. — *Zur Theorie der linearen Schaaren von Punktaggregaten auf algebraischen Curven;* Göttingen, Nachr. d. k. Ges. d. Wiss., 21 Nov. 1896.
14. KÜPPER K. — 4°. *Die Ultraelliptischen Curven;* Prag. Ber. d. k. Ges. d. Wiss., 18 Dicembre 1896.
15. AMODEO F. — 8°. *Curve* k-*gonali di* s^{ma} *specie;* Napoli, Atti Acc. d. Sc. (2), Vol. 9, n. 4, 23 Ottobre 1897.
16. KÜPPER K. — 5°. *Curventheoretische;* Prag. Ber. d. k. böhm. Ges. d. Wiss., 14 gennaio 1898.
17. AMODEO F. — 9°. *Spazio normale e genere massimo delle curve di ordine* m, k-*gonali di specie* s; Napoli, Rend. Acc. d. Sc., 29 Ottobre 1898.
18. — — 10°. *Courbes normales trigonales du plan;* Paris, Comptes Rendu, 25 Giugno 1900.
19. — — 11°. *Curve di gonalità* k *con punti fissi nella* $(k-1)^{esima}$ *serie canonica e curve normali trigonali del piano;* Napoli, Rend. Acc. d. sc. (22 Aprile). 7 Luglio 1900.

Napoli, 19 luglio 1900.

FEDERICO AMODEO.

RELAZIONI FRA LE RADICI DELL' EQUAZIONE CUBICA

e quelle della sua derivata

Siano z_1, z_2, z_3 le radici dell'equazione cubica $f(z)=0$, e ζ_1, ζ_2, quelle dell'equazione derivata $f'(z)=0$. Ogni sostituzione lineare intera sulla variabile z trasforma evidentemente le due equazioni in modo che la seconda non cessa di essere l'equazione derivata della prima; e d'altra parte si sa che per tale sostituzione non variano gli angoli delle rette, nè i rapporti fra le distanze dei punti del piano. Ne segue che la sostituzione stessa lascia inalterate le posizioni dei punti ζ_1 e ζ_2 rispetto al triangolo $z_1z_2z_3$, e che qualunque relazione fra distanze deve, per la sua omogeneità, sussistere indipendentemente dalla posizione del triangolo nel piano. Di ciò vogliamo approfittare per situare il triangolo nella posizione più conveniente; e prima di tutto ne poniamo il baricentro z_0 nell'origine, in guisa cioè che si abbia $z_1+z_2+z_3=0$, e per conseguenza

$$z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2=-\frac{1}{2}(z_1^2+z_2^2+z_3^2).$$

Così l'equazione diventa

$$z^3-\frac{1}{2}(z_1^2+z_2^2+z_3^2)\,z-z_1z_2z_3=0,$$

e però le radici dell'equazione derivata sono

$$\zeta_1=\frac{1}{6}\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}, \quad \zeta_2=-\frac{1}{6}\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}, \tag{1}$$

sicchè i punti ζ_1 e ζ_2 sono simmetrici rispetto a z_0. Questa è, del resto, una proprietà che appartiene alle equazioni di qualsivoglia grado, nel senso che *il baricentro delle radici di* f'(z) *coincide sempre con quello delle radici di* f(z).

Ora, tornando al triangolo, una conveniente rotazione di tutta la figura intorno all'origine conduce i punti ζ_1 e ζ_2 sull'asse dei numeri reali, e tale posizione della figura è, per le (1), caratterizzata dal fatto che il numero

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(y_1^2+y_2^2+y_3^2)+2i(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)$$

deve risultare reale, non negativo, dimodochè

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=0; \tag{2}$$

ed inoltre, ponendo

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=6a^2, \qquad y_1^2+y_2^2+y_3^2=6b^2, \tag{3}$$

dev'essere $a^2 \geqq b^2$, e per consegnenza $\zeta = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$. Un calcolo facile mostra che la condizione (2), insieme all'altra $a^2 \geqq b^2$, assicura la scelta dell'asse dei numeri reali in guisa che la somma $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ si trova ridotta al suo *minimo* valore. Anche questa proprietà sussiste per le equazioni di grado qualunque n, perchè, se il coefficiente di z^{n-1} è nullo, e se quello di z^{n-2} è un numero reale non positivo, queste medesime circostanze si ripresentano nell'equazione derivata. Ne segue che *una stessa retta gode della proprietà che la somma dei quadrati delle sue distanze dalle radici di* f(z), *o pure da quelle di* f'(z), *è minima*. Evidentemente anche le radici delle successive derivate si vanno sempre più accostando alla medesima retta, senza che venga meno la proprietà enunciata, finchè si giunge alla derivata $(n-2)^{\text{esima}}$, le cui radici cadono necessariamente sulla retta, e bastano per determinarla.

Riprendiamo l'equazione di terzo grado, ed osserviamo che ζ_1 e ζ_2 sono i fuochi dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

D'altra parte, se si rappresenta con σ l'area del triangolo $z_1 z_2 z_3$, ossia

$$\sigma = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

basta elevare al quadrato questo determinante, e tener presenti le uguaglianze (2) e (3), per ottenere $\sigma = 3ab\sqrt{3}$. Intanto dalle uguaglianze

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \qquad x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0,$$

si deduce, ricordando la prima delle (3),

$$\frac{x_1}{y_2 - y_3} = \frac{x_2}{y_3 - y_1} = \frac{x_3}{y_1 - y_2} = \frac{3a^2}{\sigma} = \frac{a}{b\sqrt{3}};$$

quindi

$$\frac{x_1^2}{a^2} = \frac{(y_2 - y_3)^2}{3b^2} = \frac{2(y_2^2 + y_3^2) - y_1^2}{3b^2} = 4 - \frac{y_1^2}{b^2}.$$

Così vediamo che l'equazione (4) è soddisfatta nel punto $z'_1 = -\frac{1}{2} z_1$, che divide per metà il lato $z_2 z_3$. Similmente si vede che la (4) è soddisfatta negli analoghi punti z'_2 e z'_3, sugli altri lati. Siccome poi la corda $z'_2 z'_3$, parallela a $z_2 z_3$, è divisa per metà dal diametro $z_0 z'_1$, le direzioni di queste rette sono coniugate, e però in z'_1 l'ellisse tocca $z_2 z_3$. Altrettanto dicasi degli altri lati. È poi noto che questa ellisse, fra le infinite inscritte nel triangolo $z_1 z_2 z_3$, è quella che ha l'area più grande. Dunque *le radici di* f'(z) *sono i fuochi della massima ellisse inscritta nel triangolo, che ha per vertici le radici di* f(z). Questo non è che un caso particolare d'un bel teorema di Van den Berg. (*)

(*) *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1891, p. 290.

La distanza $r=\sqrt{a^2-b^2}$ si può facilmente esprimere mediante le distanze r_1, r_2, r_3 di z_0 ai vertici del triangolo. Infatti si ha

$$r^4=(a^2+b^2)^2-4a^2b^2=\frac{1}{36}(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2-\frac{4}{27}\sigma^2. \qquad (5)$$

D'altra parte, se z''_1 è il simmetrico di z_0 rispetto a z'_1, il triangolo $z_0z_2z''_1$, i cui lati hanno le lunghezze r_1, r_2, r_3, è equivalente al triangolo $z_0z_2z_3$, e però la sua area vale $\frac{1}{3}\sigma$. Ne segue, per una nota formola,

$$\sigma=\frac{3}{4}\sqrt{2r_2^2r_3^2+2r_3^2r_1^2+2r_1^2r_2^2-r_1^4-r_2^4-r_3^4};$$

poi la (5) dà

$$r^4=\frac{1}{9}(r_1^4+r_2^4+r_3^4-r_2^2r_3^2-r_3^2r_1^2-r_1^2r_2^2).$$

Supposto $r_1 \leqq r_2 \leqq r_3$, se si osserva che dev'essere $r_3 \leqq r_1+r_2 \leqq 2r_2$, la stessa (5), trascurandovi σ, dà $r \leqq r_2$. Dunque, se da z_0 come centro si descrive un circolo, lasciando fuori una sola radice di $f(z)$, fuori del circolo stesso non cadrà alcuna radice di $f'(z)$. Del resto non può caderne alcuna neppure fuori del triangolo, d'onde segue che, quando z_1, z_2, z_3 tendono a disporsi per dritto, altrettanto debbono fare ζ_1 e ζ_2. Intanto, poichè si tende anche ad avere $\sigma=0$, la (5) dà non solo $r \leqq r_2$, ma pure $r \geqq r_1$. In questa doppia limitazione sta la ragione dell'ordinario *teorema di Rolle*. Infatti, sulla retta, i varii punti si presentano nell'ordine $z_2z_1z_0z_3$; e poichè r è compreso fra r_1 ed $r_2 \leqq r_3$, una radice dell'equazione derivata deve cadere fra z_1 e z_3, l'altra fra i simmetrici di questi punti rispetto a z_0, e però sempre fra z_1 e z_3. Ed ora è naturale domandarsi se una spiegazione analoga si può dare del teorema di Rolle per un'equazione di grado n. Questa domanda noi rivolgiamo ai lettori del *Periodico*.

E. CESÀRO.

PICCOLE NOTE

1°. Osservazione sopra una formula utile in topografia e geodesia. — Il Chiar.mo Ing. A. CERRI, insegnante di geodesia nella R. Università di Pavia, in una pregevole sua memoria intitolata " Deviazione della stadia „ (inserita nel periodico *Il Politecnico*, Milano, 1894) ha considerato l'errore che solitamente si commette nella misura tacheometrica delle distanze, allorchè la stadia non uscendo dal piano verticale di collimazione, devia dalla posizione normale, stabilendo così l'espressione esatta di tale errore, tanto col *metodo* della *stadia verticale*, quanto coll'altro della *stadia perpendicolare* mettendo in evidenza, tanto l'influenza della *deviazione della stadia*, che quella della *inclinazione dell'asse di collimazione.*

Nel metodo della stadia verticale (più utile) il sig. Cerri, stabilisce per espressione rigorosamente esatta dell'errore v la formola:

$$v = \left(2E \operatorname{sen}^2 \frac{\varepsilon}{2} + E \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{tang} \varphi\right) \tan \varphi - 2T \operatorname{sen}^2 \frac{\varepsilon}{2}$$

ove ε è l'angolo di deviazione dalla verticale, φ l'elevazione dell'asse di collimazione sull'orizzonte ed E, T dati derivanti in base a letture fatte per la distanza orizzontale di due punti. (Vedi citata memoria.)

La formola (1) riceve una semplificazione notevole, quando si voglia per v un valore approssimato (che noi non addottiamo).

Considerando l'espressione esatta di v, vogliamo con semplici trasformazioni, metterla sotto altra forma nella quale per gli angoli φ ed ε non figuri che la sola funzione *seno*. Dalla (1) si ha:

$$v = 2E \operatorname{sen}^2 \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{tang}\varphi + E \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{tang}^2 \varphi - 2T \operatorname{sen}^2 \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= \frac{2E \operatorname{sen}^2 \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + E \operatorname{sen}\varepsilon \operatorname{sen}^2\varphi - 2T \operatorname{sen}^2 \frac{\varepsilon}{2} \cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} =$$

$$= \frac{2E . \operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2} . \operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + 2E \operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2} \cos \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{sen}^2\varphi - 2T \operatorname{sen}^2 \frac{\varepsilon}{2} (1 - \operatorname{sen}^2\varphi)}{1 - \operatorname{sen}^2\varphi} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2} \left\{ E\left(\operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + \cos \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{sen}^2\varphi\right) - T \operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2} (1 - \operatorname{sen}^2\varphi)\right\}}{1 - \operatorname{sen}^2\varphi} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2} \left\{ E \operatorname{sen}\varphi \left(\operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2} \cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi \cos \frac{\varepsilon}{2}\right) - T \operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2} (1 - \operatorname{sen}^2\varphi)\right\}}{1 - \operatorname{sen}^2\varphi} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2}}{1 - \operatorname{sen}^2\varphi} \left\{ E \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} - T \operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2}$$

che si può anche scrivere:

$$v = \operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \frac{2E \operatorname{sen}\varphi . \operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{(1 + \operatorname{sen}\varphi)(1 - \operatorname{sen}\varphi)} - T \right\}$$

formola che volevamo stabilire per v molto più comoda anche pel modo che contiene la T.

Stradella (Previano), 5 agosto 1900.

G. Giovanetti.

2°. **Integrale d'una funzione particolare.** — In certe questioni di *fisica matematica*, occorre considerare l'integrale della funzione:

$$\left\{ \theta(1 + \theta)(\operatorname{sen} n\theta + \cos n\theta) \right\}$$

cioè:

$$\int \left\{ \theta(1 + \theta)(\operatorname{sen} n\theta + \cos n\theta \right\} d\theta,$$

ove n è un numero finito intero.

Ci proponiamo pertanto il calcolo di questo integrale riducendolo alla considerazione d'integrali più semplici a determinarsi.

Considerando che si ha:

$$\int\left\{\theta(1+\theta)(\operatorname{sen} n\theta+\cos n\theta)\right\}d\theta=\int\theta(\operatorname{sen} n\theta+\cos n\theta)d\theta+\int\theta^2(\operatorname{sen} n\theta+\cos n\theta)\,d\theta=$$
$$=\int\theta\operatorname{sen} n\theta\,d\theta+\int\theta\cos n\theta\,d\theta+\int\theta^2\operatorname{sen} n\theta\,d\theta+\int\theta^2\cos n\theta\,d\theta,$$

si potrà calcolare separatamente questi integrali.

Infatti a meno di costanti si ha applicando i noti metodi d'integrazione:

(1) $$\int\theta\operatorname{sen} n\theta\,d\theta=-\frac{\theta\cos n\theta}{n}+\frac{\operatorname{sen} n\theta}{n^2}$$

(2) $$\int\theta\cos n\theta\,d\theta=\frac{\theta\operatorname{sen} n\theta}{n}+\frac{\cos n\theta}{n^2}$$

(3) $$\int\theta^2\cos n\theta\,d\theta=\frac{\theta^2\operatorname{sen} n\theta}{n}+\frac{2\theta\cos n\theta}{n^2}-\frac{2\operatorname{sen} n\theta}{n^3}$$

(4) $$\int\theta^2\operatorname{sen} n\theta\,d\theta=-\frac{\theta^2\cos n\theta}{n}+\frac{2\theta\operatorname{sen} n\theta}{n^2}+\frac{2\cos n\theta}{n^3}.$$

Sommando membro a membro questi integrali si ha:

$$\int\left\{\theta(1+\theta)(\operatorname{sen} n\theta+\cos n\theta)\right\}d\theta=-\frac{\theta\cos n\theta}{n}+\frac{\operatorname{sen} n\theta}{n^2}+\frac{\theta\operatorname{sen} n\theta}{n}+\frac{\cos n\theta}{n^2}+$$
$$+\frac{\theta^2\operatorname{sen} n\theta}{n}+\frac{2\theta\cos n\theta}{n^2}-\frac{2\operatorname{sen} n\theta}{n^3}-\frac{\theta^2\cos n\theta}{n}+\frac{2\theta\operatorname{sen} n\theta}{n^2}+\frac{2\cos n\theta}{n^3}=$$
$$=\frac{1}{n}\left\{\theta(1+\theta)(\operatorname{sen} n\theta-\cos n\theta)\right\}+\frac{1}{n^2}\left\{(1+2\theta)(\operatorname{sen} n\theta+\cos n\theta)\right\}-\frac{1}{n^3}\left\{2(\operatorname{sen} n\theta-\cos n\theta)\right\}$$

espressione che rappresenta l'integrale che volevamo stabilire, ed ordinata secondo le potenze crescenti di $\frac{1}{n}$.

Stradella (Previano), 6 agosto 1900. G. GIOVANETTI.

3°. **Sulla quistione 524.** — Nello enunciato della quistione 524 (pag. 42) è detto che la pedale della cardioide rispetto al suo vertice è una sestica *binodale:* è facile però vedere che non è esatto; poichè la cardioide è del quart'ordine, della classe terza ed ha una cuspide in ognuno dei punti ciclici (oltre quella al finito) abbiamo, con le notazioni consuete,

$$m=4,\quad n=3,\quad f=4,\quad g'=1\ \text{(polo sulla curva)}$$
$$q=2,\quad g=f'=p'=q'=0$$

e per la pedale rispetto al vertice:

$$\mathrm{M}=6,\quad \mathrm{N}=5,\quad \mathrm{F}=6,\quad \mathrm{G}'=3,\quad \mathrm{P}=1,\quad \mathrm{Q}=4.$$

Questa pedale è dunque del sest'ordine e della classe quinta, ha nell'origine (cioè nel vertice della cardioide) un punto triplo con una coincidenza, equivalente a due punti doppi ordinari e una cuspide; in ognuno dei punti ciclici ha un punto triplo con due coincidenze, equivalenti insieme a due punti doppi e quattro cuspidi; il rimanente punto doppio è la proiezione del vertice sulla tangente doppia della cardioide. Abbiamo dunque

$$\delta = 5 \quad \text{punti doppi ordinari}$$
$$\varkappa = 5 \quad \text{cuspidi di prima specie}$$

e, come insegna la formula di Plücker,

$$N = M(M-1) - 2\delta - 3\varkappa = 6 \times 5 - 2 \times 5 - 3 \times 5.$$

Mendrisio (Svizzera), 7 agosto 1900.

V. Retali.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 508, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524

508. *Calcolare i seguenti integrali*

$$\int e^{\alpha x} \, tan^m \, \beta x \, . \, dx,$$
$$\int e^{\alpha x} \, cot^m \, \beta x \, . \, dx,$$
$$\int e^{\alpha x} \, tanh^m \, \beta x \, . \, dx,$$
$$\int e^{\alpha x} \, coth^m \, \beta x \, . \, dx.$$

G. L.

Risoluzione di G. L.

a) Si ponga per brevità

(1) $$I_m = \int e^{\alpha x} \tanh^m x \, dx.$$

Per mezzo di una integrazione per parti si trova

$$I_{m-1} = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \tanh^{m-1} x - \frac{m-1}{\alpha} \int e^{\alpha x} . \tanh^{m-2} x . \operatorname{sech}^2 x . dx$$

ovvero (essendo $\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$)

(2) $$\frac{\alpha}{m-1} I_{m-1} = \frac{e^{\alpha x}}{m-1} \tanh^{m-1} x - I_{m-2} + I_m.$$

Se ne deduce

(3) $$I_m = \frac{\alpha}{m-1} I_{m-1} + I_{m-2} - \frac{e^{\alpha x}}{m-1} \tanh^{m-1} x.$$

Applicando successivamente questa formola di riduzione, il calcolo di I_m si riduce a quella di

$$I_0 = \int e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$$

e di

$$I_1 = \int e^{\alpha x} \tanh x \, dx = \int e^{\alpha x} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx.$$

Ponendo $e^x = y$ si trova

$$I_1 = \int \frac{1-y^2}{1+y^2} y^{\alpha-1}\, dy;$$

integrale che per α intero o anche frazionario si determina facilmente;

b) Per calcolare,

$$I'_m = \int e^{\alpha x} \coth^m x\, dx = I_{-m}$$

possiamo valerci della stessa formola (2). Se in essa poniamo $m = -(n-2)$, si trova

$$\frac{\alpha}{-(n-1)} I_{-(n-1)} = \frac{e^{\alpha x}}{-(n-1)} \tanh^{-(n-1)} x - I_{-n} + I_{-(n-2)},$$

ossia

$$I'_n = \frac{\alpha}{n-1} I'_{n-1} + I'_{n-2} - \frac{e^{\alpha x}}{n-1} \coth^{n-1} x. \tag{4}$$

Per mezzo di questa formola il calcolo di I'_m si fa dipendere da quello di $I'_0 = I_0$ e di

$$I'_1 = \int e^{\alpha x} \coth x\, dx = \int e^{\alpha x} \frac{e^x + e^{-x}}{e^{\alpha x} - e^{-x}}\, dx,$$

che si calcola come I_1 per α intero o frazionario.

c) Per il calcolo di $\int e^{\alpha x} \tan x\, dx$ si trova una formola di riduzione analoga alla (2). Posta $T_m = \int e^{\alpha x} \tan^m x\, dx$, si trova con una integrazione per parti

$$T_{m-1} = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \tan^{m-1} x - \frac{m-1}{\alpha} \int e^{\alpha x} \tan^{m-2} x \sec^2 x\, dx,$$

da cui

$$\frac{\alpha}{m-1} T_{m-1} = \frac{e^{\alpha x}}{m-1} \tan^{m-1} x - T_{m-2} - T_m \tag{5}$$

$$T_m = -\frac{\alpha}{m-1} T_{m-1} - T_{m-2} + \frac{e^{\alpha x}}{m-1} \tan^{m-1} x. \tag{6}$$

Così il calcolo di T_m si può far difendere da quello di T_1 e T_0.

518. *Se* P_1, P_2, P_3 *sono le proiezioni di* P *sui lati del triangolo* ABC, *determinare il luogo di* P *tale che le rette* AP_1, BP_2, CP_3 *siano concorrenti.*

A. Barozzini.

Risoluzione del prof. Claudio Merizzi del R. Ginnasio di Ceva.

Presi come assi cartesiani il lato BC, e l'altezza relativa, sia h l'ordinata di A, siano a_1, a_2 le ascisse di C, B, e sia $P \equiv (\xi, \eta)$: affinchè le tre rette AP_1, BP_2, CP_3, siano concorrenti, dovrà essere pel teorema di Ceva

$$\overline{BP_1} \,.\, \overline{CP_2} \,.\, \overline{AP_3} = \overline{P_1C} \,.\, \overline{P_2A} \,.\, \overline{P_3B}.$$

Ora $\overline{BP_1} = \xi - a_2$, $\overline{P_1C} = a_1 - \xi$. Essendo poi

$$a_1 x - hy - a_1\xi + h\eta = 0$$

l'equazione della retta PP_2 (passante per P, e normale ad AC) sarà $\frac{a_1^2 - a_1\xi + h\eta}{\sqrt{a_1^2 + h^2}}$ la lunghezza $\overline{CP_2}$, e quindi $\sqrt{a_1^2 + h^2} - \frac{a_1^2 - a_1\xi + a\eta}{\sqrt{a_1^2 + h^2}}$ ossia $\frac{h^2 + a_1\xi - h\eta}{\sqrt{a_1^2 + h^2}}$ quella di $\overline{P_2A}$. Nello stesso modo si trova

$$\overline{AP_3} = \frac{h^2 + a_2\xi - h\eta}{\sqrt{a_2^2 + h^2}} \qquad \overline{P_3A} = \frac{a_2^2 - a_2\xi + h\eta}{\sqrt{a_2^2 + h^2}}.$$

Sostituendo questi valori nella (1) si trova l'equazione del luogo di P

$$(2)\quad (\xi-a_2)(a_1^2-a_1\xi-h\eta)(h^2+a_2\xi-h\eta)+(\xi-a_1)(h^2+a_1\xi-h\eta)(a_2^2-a_2\xi+h\eta)=0,$$

che è una cubica passante pei tre vertici e per l'ortocentro del triangolo.

Se il triangolo fosse isoscele, cioè $a_2=-a_1$ la (2) diverrebbe

$$\xi\left\{a_1^2\xi^2-h^2\eta^2+h\eta(h^2-a_1^2)-a_1^4\right\}=0.$$

che si spezza nelle due

$$\xi=0,\qquad a_1^2\xi^2-h^2\eta^2+h\eta(h^2-a_1^2)-a_1^4=0$$

cioè nella bisettrice dell'angolo A ed in una iperbole avente il centro nel punto $\equiv\left(0,\ \frac{h^2-a_1^2}{2h}\right)$ e l'asse delle η come asse, reale od immaginario, secondo che è $h^2(h^2-2a_1^2)\gtrless 3a^4$.

Tale iperbole, se il triangolo fosse anche rettangolo (cioè $a_2=-a_1=-h$), sarebbe equilatera ed avrebbe per centro il punto medio della ipotenusa e per vertici gli estremi di questa.

Se finalmente in triangolo fosse equilatero $\left(\text{cioè } a_2=-a_1=-h\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, la (2) diverrebbe

$$\xi(\xi+\sqrt{3}\eta-a)(\xi-\sqrt{3}\eta-a)=0,$$

cioè la cubica si spezzerebbe nelle tre bisettrici del triangolo.

Risoluzione del comandante E.-N. Barisien di Costantinopoli.

Con procedimento analogo al precedente il sig. Barisien trova l'equazione della curva in coordinate polari sotto la forma

$$r\cos\theta[a\cos B-2\cos(B+\theta)][b-r\cos(C-\theta)]=r\cos(C-\theta)(a-r\cos\theta)[b\cos A+r\cos(B+\theta)]$$

essendo C il polo e CB l'asse polare, e da questa deduce l'equazione in coordinate cartesiane. Egli fa inoltre le seguenti osservazioni:

1°. La curva passa per i centri dal circolo inscritto e del circolo circoscritto, per il punto di Lemoine, ecc.

2°. Il luogo del punto Q comune alle rette AP_1, BP_2, CP_3 è un'altra cubica che è circoscritta al triangolo ABC e passa per i punti notevoli del triangolo che che han la dipendenza richiesta fra P e Q. Così passa per il baricentro del triangolo (corrispondente al centro del circolo circoscritto) e per il punto di Gergonne (corrispondente al centro del circolo inscritto).

519. *Determinare sull'asse della strofoide retta tre punti* A, B, C *tali che, per ogni punto* P *della curva, abbia luogo la relazione*

$$\overline{PB}^2=PA\,.\,PC.$$

A. Barozzini.

Risoluzione del prof. C. Merizzi.

L'equazione della strofoide retta, riferita all'asse ed alla normale a questo nel nodo, può scriversi, indicando con a la distanza del nodo al vertice,

$$x(x^2+y^2)-ax^2+ay^2=0.$$

Sia $P\equiv(x,y)$ e siano u, v, w le ascisse dei tre punti da determinare, A, B, C.

Essendo

$$\overline{PA} = \sqrt{(x-u)^2 + y^2},\quad \overline{PB} = \sqrt{(x-v)^2 + y)^2},\quad \overline{PC} = \sqrt{(x-w) + y^2},$$

dovrà essere

$$(x-v)^2 + y^2 = \sqrt{(x-u)^2 + y^2} \,.\, \sqrt{(x-w)^2 + y^2};$$

donde quadrando, riducendo ed ordinando

$$x(x^2+y^2)(-4v+2u+2w) + x^2(6v^2-u^2-w^2-4uw) +$$
$$+ y^2(2v-u^2-w^2) + x(-4v^3+2uw^2+2u^2w) + (v^4-u^2w^2) = 0,$$

ossia

$$x(x^2+y^2) + \frac{6v^2-u^2-w^2-4uw}{-4v+2u+2w}x^2 + \frac{2v^2-u^2-w^2}{-4v+2u+2w}y^2 +$$
$$+ \frac{-4v^3+2uw^2+2u^2w}{-4v+2u+2w}x + \frac{v^4-u^2w^2}{-4v+2u+2w} = 0.$$

Dovendo questa equazione essere soddisfatta per tutti i valori di x, y che soddisfano all'equazione della strofoide, i termini simili delle due equazioni devono avere i coefficienti proporzionali, ossia deve essere:

(1) $\qquad 6v^2-u^2-w^2-4uw = -a(-4v+2u+2w)$

(2) $\qquad 2v^2-u^2-w^2 = a(-4v+2u+2w)$

(3) $\qquad -4v^3+2uw^2+2u^2w = 0$

(4) $\qquad v^4-u^2w^2 = 0.$

È facile vedere che la (4) è conseguenza delle altre tre: ora, sommando le (1), (2) membro a membro, abbiamo

(5) $\qquad 4v^2 = (u+w)^2$

che si scinde nelle due equazioni

(6) $\qquad 2v = +(u+w) \qquad\qquad$ (7) $\quad 2v = -(u+w)$

Ora è chiaro che il complesso dei due sistemi (2) (3) (6) e (2) (3) (7) cioè

$$\begin{cases} 2v^2-u^2-w^2 = a(-4v+2u+2w) \\ 2v^3 = uw(u+w) \\ 2v = u+w \end{cases} \qquad \begin{cases} 2v^2-u^2-w^2 = a(-4v+2u+2w) \\ 2v^3 = uw(u+w) \\ 2v = -(u+w), \end{cases}$$

sarà equivalente al sistema (1) (2) (3) (4).

Il primo di questi sistemi dedotti dà la soluzione $u = v = w = 0$ che è da trascurare: il secondo ci dà la soluzione $u = 2a(\sqrt{2}-1)$, $w = -2a(\sqrt{2}+1)$ e viceversa, $v = 2a$.

Osservazione. — Si deduce che la strofoide retta può anche considerarsi come luogo del punto P che gode la proprietà

$$\overline{PB}^2 = \overline{PA}\,.\,\overline{PC}$$

essendo A, B, C, tre punti di una retta situati alle distanze $2a(\sqrt{2}-1)$, $2a$, $-2a(\sqrt{2}+1)$ da un punto fisso O della stessa, e assumere questa proprietà per definizione della strofoide retta.

520. *La curva rappresentata dall'equazione*

$$(x^2 + 2y^2)^4 (x^2 + y^2) a^4 = x^6$$

ha la stessa area della lemmiscate di Bernoulli

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y)^2.$$

E.-N. BARISIEN.

Risoluzione dei proff. Merizzi e Retali.

L'equazione polare della prima curva è

$$\rho^2 = \frac{a^2 \cos^3 \theta}{(1 + \operatorname{sen}^2 \beta)^2}$$

la quarta parte della sua area è dunque

$$\frac{a^2}{2} \int^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 \theta}{(1 + \operatorname{sen}^2 \theta)^2} d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^1 \frac{1 - z^2}{(1 + z^2)^2} \cdot dz = \frac{a^2}{2} \left(\frac{z}{1 + z^2} \right)_0^1 = \frac{a^2}{4}$$

e il teorema è dimostrato, perchè è notissimo che l'area della lemmiscata

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta \qquad \text{è} \qquad a^2.$$

Altra risoluzione del prof. Barozzini.

521. *Si considerino le due curve, di cui le equazioni polari sono*

$$r = a \frac{sen^2 \theta}{cos \theta}, \qquad r = a \, tan \theta,$$

e che rappresentano una cissoide retta *ed una* cappa. *L'area limitata fra queste due curve, cha sono asintotiche, è equivalente a quella del cerchio generatore della cissoide.*

E.-B. BARISIEN.

Risoluzione dei proff. Barozzini e Merizzi.

Essendo le due curve simmetriche rispetto all'asse polare, l'area da esse limitata sarà espressa da

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^2 \operatorname{sen}^4 \theta}{2 \cos^2 \theta} - \frac{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2 \cos^2 \theta} \right) d\theta$$

ossia

$$a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta \, (\operatorname{sen}^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta} \, d\theta$$

che semplificato diventa

$$- a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta \,.$$

Abbiamo dunque

$$\text{Area} = - a^2 \left[\frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta - \theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \pi a^2. \qquad \text{c. d. d.}$$

522. *Dimostrare che:*

1°. *Se si prolungano i raggi vettori focali d'un ellisse di assi* 2a *e* 2b, *della lunghezza* $-b+\sqrt{b^2+2ab}$ *il luogo degli estremi di questi raggi vettori è una curva, di cui l'area è doppia di quella dell'ellisse.*

2°. *Se si diminuiscono i raggi vettori focali della lunghezza* 2b, *la curva luogo degli estremi di questi raggi vettori accorciati ha area uguale a quella dell'ellisse.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione e generalizzazione del prof. Barozzini.

L'equaz. dell'ellisse sia $r=\dfrac{b^2}{a(1-e\cos\theta)}$ e quella della concoide $r=\dfrac{b^2}{a(1-e\cos\theta)}+m$.

Si ha per area della concoide

$$A=(m^2+2bm+ab)\pi.$$

Se si vuole che il rapporto fra l'area della concoide e quella dell'ellisse sia λ, la m dovrà verificare l'equazione

$$m^2+2bm+ab=\lambda ab.$$

Se $\lambda=2$ si ha $\qquad m=-b\pm\sqrt{b^2+2ab}$.

Se $\lambda=1$ $\qquad m=0 \quad$ e $\quad m=-2b$.

Conviene però osservare in quest'ultimo caso che se $2b<a+c$ la curva ha un nodo il quale viene contato due volte nella misura dell'area della curva.

Altra risoluzione del prof. Merizzi.

523. *La tangente e la normale in un punto* M *d'un'ellisse incontrino in* T *ed* N *l'asse maggiore, e sieno* T' *e* N' *i simmetrici di* T *e* N *rispetto al centro dell'ellisse. Quando* M *percorre l'ellisse:*

1° *la retta* MN' *è normale ad una ellisse fissa;*

2° *il luogo del punto di mezzo del segmento* MN' *è un'ellisse;*

3° *il luogo del punto di mezzo del segmento* MT' *è una curva, tale che l'area compresa fra essa ed i suoi assintoti è finita ed equivalente ad un quarto dell'area dell'ellisse data.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione dei proff. Merizzi e Retali.

Supposto l'ellisse riferito agli assi, se (ξ,η) son le coordinate di M e T_0, N_0 i punti medi dei segmenti MT', MN', le ascisse di T ed N sono rispettivamente $\dfrac{a^2}{\xi}$, $e^2\xi$, quelle di T', N', $-\dfrac{a^2}{\xi}$, $-e^2\xi$, e le coordinate di T_0, N_0

$$x=(\xi^2-a^2):2\xi \quad , \quad y=\eta:2 \tag{1}$$

$$x=b^2\xi:2a^2 \quad , \quad y=\eta:2 \tag{2}$$

Ciò posto: 1° l'equazione della retta $|MN'|$ è

$$\eta\,.\,x-(1+e^2)\,\xi\,.\,y+e^2\xi\eta=0$$

e l'equazione tangenziale dell'inviluppo

$$a^2(1+e^2)^2\,.\,u^2+b^2v^2=a^2b^2e^4\,.\,u^2v^2$$

2° ponendo nella

$$b^2\xi^2+a^2\eta^2=a^2b^2 \tag{3}$$

i valori $\xi = 2a^2x : b^2$, $\eta = 2y$ ricavati dalle (2) troviamo per luogo del punto N_0 l'ellisse

$$4\,(a^2x^2 + b^2y^2) = b^4$$

Ponendo invece nella (3), $\xi = x \pm \sqrt{a^2 + x^2}$, $\eta = 2y$, ricavati dalle (1), si ha l'equazione del luogo di T_0,

$$4y^2\,(b^2x^2 + a^2y^2) = b^4x^2, \tag{4}$$

una quartica razionale somigliante nella forma a un *cappa*. L'origine è un tacnodo con l'asse delle y per tangente tacnodale; il punto all'infinito dell'asse delle x è un *punto doppio d'inflessione* e le tangenti in esso sono $2y = \pm b$; gli altri due punti all'infinito della quartica sono quelli stessi dell'ellisse data.

Il quarto dell'area compresa fra la quartica e i suoi asintoti reali è dunque

$$A = \int_0^{\frac{b}{2}} x dy = \frac{2a}{b}\int_0^{\frac{b}{2}} \frac{y^2dy}{\sqrt{b^2 - 4y^2}} = \frac{a}{b}\int_0^{\frac{b}{2}} \frac{y^2dy}{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2}}$$

e siccome il valore dell'ultimo integrale definito è $\frac{\pi}{4}\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\pi b^2}{16}$ abbiamo finalmente $4\,A = \frac{\pi}{4}\,ab$.

Altra risoluzione del prof. A. Barozzini.

524. *La podaria d'una cardioide rispetto al suo vertice è una sestica binodale, di cui l'area* S *ed il perimetro* p *sono*

$$S = \frac{27\pi a^2}{32}, \qquad p = 6a + a\sqrt{3}\,.\,L\,(\sqrt{3} + 2) = 8{,}756\ldots a$$

essendo a *la distanza fra il punto di regresso ed il vertice della cardioide.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. A. Barozzini di Treviso.

L'equazione polare della cardioide si può mettere sotto la forma $r = \frac{a}{2}(1 - \cos\theta)$.

Osservando che la tangente alla curva fa col raggio vettore al punto di contatto un angolo uguale a $\frac{\theta}{2}$, si possono dedurre per le coordinate di un punto della podaria i valori:

$$\begin{cases} x = -\frac{a}{4}\,[b\cos^3\theta + 3\cos^2\theta - b\cos\theta + 1], \\ y = -\frac{3a}{4}\,\mathrm{sen}\,\theta\,[2\cos^2\theta + \cos\theta - 1]. \end{cases}$$

Eliminando θ si ha per equazione della podaria:

$$27\,a^2y^2\,[y^2 + x^2 + ax] = [y^2 + (x + a)^2]^2\,[8y^2 + (x + a)\,(8x - a)],$$

sestica tricircolare, che ha un nodo in $y = 0, x = \frac{a}{8}$, e nel vertice della cardioide un punto triplo formato da un ramo della curva e da una cuspide.

L'area della curva è data da

$$S = \frac{1}{2}\int (xdy - ydx) = \frac{3a^2}{32}\int [15\cos^3\theta - \cos^2\theta - 11\cos\theta + 5]\,d\theta$$
$$= \frac{3a^2}{64}\,[10\,\mathrm{sen}\,\theta\cos^2\theta - \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta + 9\theta].$$

Integrando fra $-\pi$ e $+\pi$ si ha $\frac{27\pi a^2}{32}$ per area di tutta la curva, ma così il nodo interno è contato due volte. Integro fra $-\frac{\pi}{3}$ e $+\frac{\pi}{3}$ ed ho pel nodo interno $\frac{9\pi a^2}{32}$ quindi pel rimanente della curva pure $\frac{9\pi a^2}{32}$.

La lunghezza si ha da

$$p = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{3a}{4} \int d\theta \sqrt{(1 + \cos\theta)(5 - 3\cos\theta)};$$

o ponendo $\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = z$

$$p = a\sqrt{3} \int dz \sqrt{1 + z^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \left[z\sqrt{1 + z^2} + \log\left\{ z + \sqrt{1 + z^2} \right\} \right].$$

Prendendo l'integrale fra i limiti $\theta = \pm \pi$ ossia fra $z = -\sqrt{3}$ e $2 = \sqrt{3}$, si ha

$$p = 6a + a\sqrt{3} \log(2 + \sqrt{3}).$$

QUISTIONI PROPOSTE

525. Trovare un circolo per cui sia minima la somma dei quadrati delle distanze di quattro punti alle rispettive polari.

E. Cesàro.

526. Il circolo osculatore in un punto M variabile d'un'ellisse incontra l'ellisse in P. Trovare l'area della curva inviluppo della perpendicolare abbassata da M sulla tangente all'ellisse nel punto P.

527. Si trovi

1° il luogo dei centri dei circoli inscritti ed ex-inscritti a tutti i triangoli, che essendo inscritti in un circolo dato, hanno due loro lati paralleli a due direzioni date.

2° L' inviluppo del terzo lato di questi triangoli.

528. Sulla tangente in un punto M di una parabola di fuoco F si prendano due punti M', M" tali che sia MM'=MM"=MF. Il luogo di questi punti M', M" è una cubica. Si trovi l'area compresa fra questa curva e il suo asintoto.

529. Per ogni punto M di una ellisse si conduca una retta che faccia coll'ellisse un angolo costante α. Il circolo che ha il centro in M e che è tangente all'asse minore dell'ellisse incontra la retta suddetta in due punti P, Q. Il luogo di ciascuno di questi punti si compone di due curve chiuse equivalenti, e delle quali l'area resta costante qualunque sia l'angolo α.

530. Se si porta sopra ogni raggio vettore focale FM d'un'ellisse un segmento uguale ad un semidiametro coniugato a quello che passa per M, il luogo dell'estremo di questo segmento è una quartica di cui l'area è equivalente a quella dell'ellisse.

531. Dimostrare che

$$\int_{\frac{4}{\sqrt{15}}}^{\sqrt{3\sqrt[4]{3}}} \frac{(x-15)\,dx}{\sqrt{12x-(x^2-9)^2}}.$$

E.-N. BARISIEN.

532. Se y è una funzione della variabile x, ponendo $x=e^t$, ed assumendo t come nuova variabile indipendente, si ha, qualunque sia n,

$$x^n \cdot \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n y}{dt^n} - s_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + s_2 \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} - \ldots + (-1)^h s_h \frac{d^{n-h} y}{dt^{n-h}} + \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{dy}{dt},$$

dove s_h indica la somma dei $\binom{n-1}{h}$ prodotti dei numeri $1, 2, \ldots, n-1$, combinati h ad h in tutti i modi possibili.

M. CHINI.

BIBLIOGRAFIA

GIUSEPPE SCOTO. — *Elementi di geometria* per le scuole secondarie e più particolarmente ad uso delle scuole normali del Regno. Palermo, Sandron, 1900.

L'A. nella prefazione esponendo le sue idee riguardo allo scopo che deve avere lo studio della Matematica nella scuola Normale dice fra le altre cose che " dee " porre nella mente dei futuri maestri nozioni precise, idee chiare, concetti esatti " e completi „. Sembra dunque che l'A. creda che il suo libro abbia " nozioni pre- " cise, idee chiare, concetti esatti e completi. Ma ciò è proprio vero? — Spigolerò qua e là e lascerò poi giudice il lettore.

A pag. 10 si legge: " ... chiameremo linea sia il contorno tutto intero di una " porzione di superficie che una parte sola di esso contorno. Necessitando una " distinzione chiameremo *linea completa o chiusa* la prima, *segmento di linea l'altra.* Siccome non dà una definizione speciale per *linea aperta* e per conseguenza deve logicamente intendersi che chiami linea aperta ogni linea che non è chiusa, poichè a pag. 11 è detto che la retta è una linea aperta, segue che *la retta non è completa* ed inoltre che è *un segmento di linea!*

Completa e chiusa, almeno se non si vuol porre una contraddizione con i rispettivi significati che hanno queste parole nella lingua italiana, non possono esser sinonimi. Per es.: come chiamerebbe l'autore la *parte* di una curva (*boucle* dei francesi) che percorrerebbe un punto mobile partendosi da un nodo e ritornando in esso?

Altrettanto dicasi per le superficie per le quali l'A. fa le stesse distinzioni (pag. 10 e 18). A pag. 17 l'A. dà la definizione di spezzata e parla di linee senza avere ancora considerato il piano, e perciò s'intende che parli anche di linee *non piane;* allora non si spiega come possa dire: " ...rispetto ad una linea non retta " diremo *porzione piana intercetta* in essa quella che è limitata o dalla linea stessa " quando essa è chiusa, oppure dalla linea e dal segmento che ne unisce i termini " quando è aperta. Del resto anche fra le linee piane, secondo la riportata definizione quale sarebbe la *porzione piana intercetta* in una linea aperta indefinita? (per fissare le idee, si pensi per es.: ad una parabola cubica).

Lasciamo andare " i segmenti piani estesi indefinitamente in ogni direzione „ che figurano a pag. 18 e la dimostrazione dell'eguaglianza di angoli piatti (pag. 24) fatta precedere alla definizione di eguaglianza fra angoli (pag. 25), ma a proposito di eguaglianza e diseguaglianza di angoli è bene notare che a pag. 25 è detto: " dati due angoli, se si sovrappongono in maniera che due lati (e quindi i vertici) " coincidano, può darsi che gli altri due lati coincidano pure o che non abbiano " che la sola origine comune. Nel primo caso i due angoli sono eguali, nell'altro " non combaciano e diconsi diseguali „. Segue da ciò che se due angoli eguali si portano ad esser consecutivi, si viene a provare che essi sono diseguali.

Così potrei continuar di questo passo e citare frasi come la seguente:... " se " i due angoli non potranno entrare in uno stesso triangolo „ (pag. 45) e formole come questa:

$$\text{settore} = \frac{\text{arco} \times \text{raggio}}{2} \quad (\text{pag. } 143).$$

E dire che l'A. critica, con ragione, la scrittura $m.\,3 \times m.\,5 = m^2\,15!\ldots$; ma credo che basti.

Tuttavia, se il libro dello Scoto ha i suoi difetti, che principalmente trovansi nei concetti generali e particolarmente nelle definizioni, dall'altro lato, nel rimanente, dove non si discosta dagli ordinari trattati, ha il pregio di esser scritto in forma piana e in generale con assai chiarezza.

G. C.-L.

CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI A PARIGI

(6-12 AGOSTO 1900)

Il congresso si doveva inaugurare alle 14 del 6 agosto, ma, per una certa tinta di disordine che vi ha regnato uniformemente e che ha contribuito a renderlo più originale, fu inaugurato alle 9 del mattino, togliendo così l'opportunità a quelli che arrivarono a Parigi all'ultim'ora di ascoltare la conferenza del sig. Moritz Cantor, *Sur l'historiographie des mathématiques;* e la conferenza del sig. Vito Volterra intitolata: *Trois analistes italiens:* Betti, Brioschi, Casorati *et trois manières d'envisager les questions d'analyse - Leur influence.*

Gl'iscritti al congresso furono circa trecento, di cui cinquanta circa rappresentavano il sesso gentile; gl'intervenuti furono poco meno. Fra i congressisti italiani intervenuti notammo i signori Capelli, Maggi, Peano, Volterra e la sua signora, Fano, Levi-Civita, Amodeo e la sua signora, Boccardi, Contarino, Padoa, Poggi, Vacca e Vailati. Erano inscritti, ma non intervennero, Del Re, Guccia, Somigliana, Veronese e la sua signora. Vi erano delegati ufficiali dell'Austria, della Spagna, degli Stati Uniti, dell'Ungheria, del Giappone, del Mexico, dell'Università di Columbia, della facoltà di Scienze di Buenos-Ayres e dei Ministri della Marina, e delle Belle Arti della Francia. L'inaugurazione fu fatta al Palazzo dei Congressi nel recinto dell'Esposizione; le sedute si tennero alla Sorbona negli elegantissimi anfiteatri di Cauchy e di Leverrier. Fu nominato presidente d'onore Hermite, presidente effettivo Poincaré; presiedevano i lavori delle Sezioni; Hilbert per l'Aritmetica ed Algebra, Painlevé per l'Analisi, Darboux per la Geometria, Larmor per la Meccanica, Fisico-matematica e Meccanica Celeste, M. Cantor per la Bibliografia, Storia, Insegnamento e Metodo.

Non è possibile riferire tutte le comunicazioni fatte nelle diverse sezioni; esse sorpassano la quarantina; queste si potranno rilevare ed ammirare negli Atti del Congresso che ci auguriamo non tardino ad essere pubblicati. Alcune delle comunicazioni, per omissioni fattane nell'elenco dei lavori, furono annunziate con avvisi messi alle porte delle aule. Le comunicazioni dei matematici italiani furono, per ordine alfabetico degli autori, le seguenti:

Amodeo, *Coup d'œil sur les courbes algébriques au point de vue de la gonalité.*

Boccardi, *Sur le calcul des perturbations spéciales des planètes.*

Capelli, *Le operazioni iperaritmetiche e l'indirizzo combinatorio dell'aritmetica ordinaria.*

Padoa, *Un nouveau système irréductible des postulats pour l'algèbre.*

— *Un nouveau système de définitions pour la géométrie euclidienne.*

Peano, *Sur la logique mathématique.*

Il congresso si chiuse l'11 agosto con due conferenze; una di Mittag-Leffler "*Une page de la vie de Weierstrass*"; l'altra di Poincaré "*Du rôle de l'intuition et de la logique en Mathématique*".

Su proposta di Cantor fu votato che la futura sede del Congresso sarà Baden-Baden nel 1904; e su proposta di Volterra fu raccomandata per sede del Congresso del 1898 la città di Roma.

Le cortesie fatte ai congressisti furono: un *lunch* offerto dal Direttore della Scuola Normale; un ricevimento del pomeriggio fatto dal Presidente della Repubblica all'Eliseo; un ricevimento serale fatto dal Principe Rolando Bonaparte.

Il pretesto di un *déjeuner* riunì un'ultima volta tutti i congressisti, alle 11 1/2 del giorno 12, nella Sala dell'Athénè Saint Germain, ove tutti si augurarono colla massima cordialità di rivedersi il 1904. A.

ERRATA-CORRIGE del fasc. precedente.

A pag.	4, linea 8,	*invece di*	$(u_{n-k-2}u_{n-k-2}+\dots$	*leggi*	$(u_{n-k-2}a+\dots$
"	5, ult. linea in nota	"	U_{+n1}	"	U_{n+1}
"	7, in fondo,	"	$u^{\delta}{}_{-1}$	"	$u_{\delta-1}$
"	" l'ultima formola va denotata col numero (8)				
"	10, linea penultima	*invece di*	mentre sono fissi m, e ρ,	"	mentre sono fissi m, ρ e λ,
"	11, " "	"	$\frac{u_{m\rho}}{u}$	"	$\frac{u_{m\rho}}{u_{\lambda\rho}}$.

Giulio Lazzeri — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 25 Ottobre 1900.

SUCCESSIONI DI NUMERI INTERI POSITIVI

ciascuno dei quali è una funzione lineare dei due precedenti

Mi propongo di studiare in questa Nota quelle successioni di numeri interi positivi V_n i cui termini (per $n \geqq 3$) sono legati dalla relazione lineare $V_n = hV_{n-1} + lV_{n-2}$, dove h, l sono interi positivi comunque fissati, e V_1, V_2, termini *iniziali,* sono pure interi positivi fissati a piacere. Le ricerche di cui mi occupo sono fondate sopra una relazione tra i termini V_n di una qualunque delle dette successioni (successione V), e quelli v_n di quella speciale successione v, dedotta dalla V quando si supponga $V_1 = 1$, $V_2 = h$. Alcune successioni già studiate in un'altra Nota che ho pubblicato su questo *Periodico* (*) non sono che un caso particolarissimo delle V, v, e le loro proprietà si trovano qui, insieme ad altre ricerche, generalizzate od estese. (**) Le nuove ricerche si riferiscono alla successione v; esse hanno speciale attinenza coll'aritmetica ordinaria e mettono spesso in vista notevoli corrispondenze tra certe proprietà dei termini v_n, e quelle analoghe dei loro indici. — Sono comprese tra queste proprietà alcune relative ai termini v_p in cui p è un numero primo: sotto certe condizioni, uno qualunque di tali termini non ammette, *nella successione,* divisori diversi da sè stesso e dall'unità ed è perciò chiamato *primo nella successione;* i numeri primi nella successione presentano, come vedremo, alcune analogie coi numeri primi.

I.

1. Consideriamo la successione

$$V \equiv V_1, V_2, V_3, \dots V_n, \dots$$

già definita, e siano rispettivamente α, β i valori dei termini iniziali V_1, V_2. Essendo per l'ipotesi

$$V_{n+1} = hV_n + lV_{n-1}$$
$$V_{n+2} = hV_{n+1} + lV_n$$

(*) " Di alcune successioni ricorrenti ecc. ", Tomo XVI, luglio-agosto, 1900.
(**) Per $h = l = 1$ le V, v si riducono alle U, u della nota citata.

si deduce mediante sostituzione

$$V_{n+2} = (h^2 + l)\, V_n + hl V_{n-1}$$

Analogamente sostituendo questa espressione di V_{n+2} e la precedente di V_{n+1} nella relazione

$$V_{n+3} = h V_{n+2} + l V_{n+1}$$

si trova

$$V_{n+3} = [h(h^2 + l) + hl]\, V_n + l(h^2 + l)\, V_{n-1}$$

Ciò posto se si considera la successione

$$v \equiv v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots\ v_n,\ \ldots$$

definita da

$$v_1 = 1\,,\ v_2 = h\,,\ v_n = hv_{n-1} + lv_{n-2} \qquad (n \geqq 3)$$

sarà

$$v_3 = h^2 + l\,,\ v_4 = h(h^2 + l) + lh$$

pertanto risulterà ancora

$$V_{n+2} = v_3 V_n + l v_2 V_{n-1}$$
$$V_{n+3} = v_4 V_n + l v_3 V_{n-1}$$

Queste formole provano che per $s = 2$, $s = 3$ ha luogo la relazione

$$V_{n+s} = v_{s+1}\, V_n + l v_s\, V_{n-1}$$

Proveremo col metodo di induzione che è vera in generale. — Supposto infatti che sia

$$V_{n+(s-2)} = v_{s-1}\, V_n + l v_{s-2}\, V_{n-1}$$
$$V_{n+(s-1)} = v_s\, V_n + l v_{s-1}\, V_{n-1}$$

si moltiplichi la prima per l, e la seconda per h; sommando risulta

$$hV_{n+(s-1)} + lV_{n+(s-2)} = (hv_s + lv_{s-1})\, V_n + l(hv_{s-1} + lv_{s-2})\, V_{n-1}$$

che per la legge di ricorrenza stabilita nell'ipotesi diviene

(I) $$V_{n+s} = v_{s+1}\, V_n + l v_s\, V_{n-1}$$

come si voleva provare.

2. Dalla precedente relazione, che è quella cui accennavamo in principio, discende subito un'altra tra i soli termini della successione v. Infatti i termini iniziali α, β della V essendo arbitrari possiamo porre in particolare $\alpha = 1$, $\beta = h$; allora (poichè la legge di ricorrenza tra le v_n è la stessa che quella tra le V_n) le V_n si riducono alle v_n, e perciò la (I) con questo cangiamento diviene

(1) $$v_{n+s} = v_n\, v_{s+1} + l v_s\, v_{n-1}$$

Dalla stessa (I) poi si deduce ancora la espressione delle V_n in funzione delle v_n e, naturalmente, dei termini iniziali α, β. — Infatti scambiandovi tra loro s, n, ciò che è lecito perchè entrambi arbitrari, si ha

$$V_{n+s} = v_{n+1} V_s + l v_n V_{s-1}$$

e ponendo $s=2$, coll'osservare che è $V_2 = \beta$, $V_1 = \alpha$, si ha

$$V_{n+2} = \beta v_{n+1} + l\alpha v_n$$

ovvero, mutando n in $n-2$,

(2) $$V_n = \beta v_{n-1} + l\alpha v_{n-2}$$

3. Richiamo con qualche aggiunta alcune definizioni della mia Nota citata:

a) *Se in quattro termini* V_α, V_β, V_γ, V_δ $(\alpha < \beta < \gamma < \delta)$ *è* $\beta - \alpha = \delta - \gamma$ *si dirà che essi formano un gruppo simmetrico.*

b) *Due gruppi simmetrici*

$$V_\alpha, V_\beta, V_\gamma, V_\delta$$
$$V_{\alpha'}, V_{\beta'}, V_{\gamma'}, V_{\delta'}$$

si diranno equisimmetrici quando è $\beta - \alpha = \beta' - \alpha'$, $\gamma - \beta = \gamma' - \beta'$.

c) *Un gruppo di tre termini* V_α, V_β, V_γ *si dirà simmetrico quando* $\beta - \alpha = \gamma - \beta$.

d) *Due gruppi simmetrici*

$$V_\alpha, V_\beta, V_\gamma$$
$$V_{\alpha'}, V_{\beta'}, V_{\gamma'}$$

si diranno equisimmetrici se $\beta - \alpha = \beta' - \alpha'$.

Aumentando o diminuendo gli indici di un gruppo simmetrico di uno stesso numero y si ottiene manifestamente un secondo gruppo equisimmetrico al primo; se $y=1$ i due gruppi equisimmetrici si diranno *consecutivi.*

Dato un gruppo simmetrico

$$V_\alpha, V_\beta, V_\gamma, V_\delta$$

con $\alpha > 1$, sottraendo da ciascun indice $\alpha - 1$ si ottiene il gruppo equisimmetrico

$$V_1, V_{\beta-\alpha+1}, V_{\gamma-\alpha+1}, V_{\delta-\alpha+1}$$

Aumentando di 1 gli indici di questo gruppo, ripetendo sul gruppo ottenuto la stessa operazione e così di seguito si forma una successione di gruppi equisimmetrici a quello dato, nella quale ogni gruppo è *consecutivo* di quello che lo precede ed occupa un posto rappresentato dall'indice del suo primo termine. A tale successione che contiene manifestamente *tutti* i gruppi equisimmetrici al gruppo dato daremo il nome di *sistema ordinato* di gruppi equisimmetrici. Ogni coppia di interi positivi x, y (da considerarsi nell'ordine scritto) *individua* un sistema, cioè quello in cui x è la differenza tra gli indici medi ed y quella tra uno degli indici estremi ed il medio prossimo in uno qualunque dei suoi gruppi; e reciprocamente.

Osservazioni analoghe si possono ripetere per gruppi equisimmetrici di tre termini.

4. Rispetto ai gruppi equisimmetrici di quattro termini si ha:

Teorema. — *In ogni sistema ordinato di gruppi equisimmetrici formati da quattro termini, le differenze tra il prodotto dei termini medî e quello degli estremi in ciascun gruppo formano una progressione geometrica avente per quoziente il numero intero negativo* $-l$

a) Dimostriamo dapprima la proprietà per i gruppi della successione v; a tal uopo se nella (1) si muta n in $n-\rho$, s in $s+\rho$ e la relazione così ottenuta si sottrae dalla (1) stessa si ricava

$$v_{s+1}\, v_n - v_{s+\rho+1}\, v_{n-\rho} = -l(v_s\, v_{n-1} - v_{s+\rho}\, v_{n-\rho-1})$$

ovvero mutando s (che è arbitrario) in $s-1$

$$v_s\, v_n - v_{s+\rho}\, v_{n-\rho} = -l(v_{s-1}\, v_{n-1} - v_{s+\rho-1}\, v_{n-\rho-1}).$$

Ora il primo membro di questa relazione, e la quantità tra parentesi del secondo, sono rispettivamente (supposto $n < s$), differenze del prodotto dei medî e quello degli estremi nei due gruppi equisimmetrici consecutivi

$$\begin{array}{llll} v_{n-\rho} , & v_n , & v_s , & v_{s+\rho} \\ v_{n-\rho-1} , & v_{n-1} , & v_{s-1} , & v_{s+\rho-1} \end{array}$$

pertanto è provato quanto si voleva per la v.

Ma prima di passare alla dimostrazione del teorema in generale conviene trasformare l'ultima uguaglianza. Perciò, posto $s-n=\delta$, applichiamo l'uguaglianza stessa ai gruppi $(v_{n-\rho}, v_n, v_s, v_{s+\rho})(v_{n-\rho-1}$ $v_{n-1}, v_{s-1}, v_{s+\rho-1})(v_{n-\rho-2}, v_{n-2}, v_{s-2}, v_{s+\rho-2})\ldots(v_1, v_{\rho+1}, v_{\delta+\rho+1}, v_{\delta+2\rho+1})$ considerati due a due; si ricava poi moltiplicando tutte le relazioni ottenute

$$v_s\, v_n - v_{n-\rho}\, v_{s+\rho} = (-l)^{n-\rho-1}(v_{\rho+1}\, v_{\delta+\rho+1} - v_1\, v_{\delta+2\rho+1}).$$

ma è $v_1 = 1$ quindi

$$v_s\, v_n - v_{s+\rho}\, v_{n-\rho} = (-l)^{n-\rho-1}(v_{\rho+1}\, v_{\delta+\rho+1} - v_{\delta+2\rho+1})$$

E se ora nella (1) si pone in luogo di n, s, che sono a piacere, rispettivamente $\delta+\rho+1$, ρ, si ottiene

$$v_{\delta+2\rho+1} = v_{\rho+1}\, v_{\delta+\rho+1} + l v_\rho\, v_{\delta+\rho}$$

onde risulterà sostituendo

(3) $$v_s\, v_n - v_{s+\rho}\, v_{n-\rho} = (-l)^{n-\rho}\, v_\rho\, v_{\delta+\rho}$$