SULLE PRINCIPALI

operazioni dell'analisi combinatoria formale e su alcune loro applicazioni relative allo sviluppo rapido dei determinanti e degli iperdeterminanti.

Sommario. — Introduzione — Formazione rapida delle permutazioni di n cose diverse — Formazione rapida delle combinazioni e disposizioni semplici m ad m — Formazione rapida e rappresentazione delle permutazioni di n cose non tutte differenti — Sviluppo rapido dei determinanti — Formazione ed enumerazione delle combinazioni a due dimensioni di mn elementi dati — Nozioni sugli iperdeterminati; metodo per svilupparli e per determinare il numero dei loro termini.

INTRODUZIONE.

L'analisi combinatoria si occupa di questioni che possono ridursi a tre tipi principali. Dati alcuni oggetti possiamo infatti proporci: 1° di stabilire norme secondo le quali si possano in tutti i modi possibili aggruppare gli oggetti dati in modo che per ciascun gruppo siano soddisfatte determinate condizioni; 2° di determinare quanti sono i possibili gruppi, soddisfacenti a determinate condizioni, senza formarli; 3° di stabilire relazioni di dipendenza tra simboli, ognuno dei quali rappresenti il numero dei gruppi di data specie formati con dati oggetti. Per es. quando si stabiliscono le norme per formare le permutazioni, combinazioni m ad m ecc. di n cose diverse, si risolve una questione della 1ª specie; quando si prova che il numero delle permutazioni di n cose diverse è $n!$ si risolve una questione della 2ª specie; quando infine si prova che il numero delle disposizioni m ad m di n cose diverse è uguale al prodotto del numero delle combinazioni m ad m di tali cose, per il numero delle permutazioni di m cose, si tratta una questione della 3ª specie.

Segue da ciò che l'analisi combinatoria può dividersi in due parti; la 1ª tratta questioni della 1ª specie e potrebbe chiamarsi analisi combinatoria formale; la seconda tratta questioni della 2ª e 3ª specie e potrebbe chiamarsi analisi combinatoria quantitativa.

Chiunque apra un trattato di algebra cosidetta complementare, si accorgerà che nella trattazione di questioni riguardanti l'analisi combinatoria, si dà in generale poca importanza alla parte formale: esse sono considerate esclusivamente o quasi dal punto di vista quantitativo. Uno degli scopi che mi sono proposto colla pubblicazione della presente nota, è di mostrare quanto possa essere utile un largo sviluppo dell'analisi combinatoria formale. Ho limitato a tal uopo le mie considerazioni agli aggruppamenti più comuni, quali le permutazioni, combinazioni ecc., con particolare riguardo ai metodi per formare rapidamente le permutazioni di n cose diverse.

I concetti di permutazione, inversione di due elementi di una permutazione, classe e segno di una permutazione, sono famigliari a chi conosce appena i principî dell'algebra complementare; di essi si fa uso frequente per es. nella teoria dei determinanti: anzi occorre averli presenti, per ben comprendere la definizione stessa di determinante. La questione dello sviluppo rapido di un determinante, cioè della scritturazione rapida ed immediata dei suoi termini, senza ricorrere ai soliti sviluppi per mezzo di determinanti d'ordine inferiore, si attacca, attesa la definizione stessa di determinante, a quella della formazione rapida delle permutazioni di n cose differenti. Malgrado lo sviluppo già considerevole della teoria dei determinanti, una soluzione ben soddisfacente di tale questione, non si ha, per quanto io conósca, ancora. (*) In questa nota me ne occupo lungamente, esponendola quale applicazione della parte formale della teoria delle permutazioni di n cose diverse. L'indirizzo che ho seguito è, a parer mio, l'unico veramente razionale che conduca ad una buona soluzione.

Nella seconda parte del lavoro, premesse le necessarie definizioni, espongo la parte formale della teoria delle combinazioni a due dimensioni di mn elementi dati, e ne faccio l'applicazione allo sviluppo rapido degli iperdeterminanti a due dimensioni. Ho trattato della formazione delle combinazioni a due dimensioni e dello sviluppo degli iperdeterminanti rettangolari in alcuni miei precedenti lavori: (**) in questo espongo alcuni nuovi metodi, i quali dal punto di vista pratico sono di gran lunga preferibili a quelli indicati nei suddetti lavori e credo che, tenuto conto della natura alquanto complessa di simili questioni, il lettore li troverà assai semplici.

Il concetto di combinazione a più dimensioni e quello correlativo di iperdeterminante non sono certamente troppo noti (***) e trattandone in questo lavoro ho voluto illustrarli largamente per mostrare in qual senso ritengo utile e razionale una generalizzazione dell'ordinaria analisi combinatoria elementare.

Relativamente alle combinazioni a due dimensioni di mn elementi dati, ho anche trattato il problema della determinazione del loro nu-

(*) Nel libro *I determinanti* del prof. E. Pascal (Manuale Hoepli) sono citati al § 9 i principali lavori che trattano dello sviluppo rapido dei determinanti.

(**) Saranno citati in seguito.

(***) Da poco tempo mi occupo nei miei lavori di tali enti che, per quanto sappia, sono stati studiati per la 1ª volta da me.

mero, senza formarle. A tale problema, come pure a quello equivalente della determinazione del numero dei termini di un iperdeterminante rettangolare, ho soltanto accennato nei miei lavori precedenti; in questo dimostro e confermo con esempi, come l'effettiva determinazione del numero delle combinazioni a due dimensioni si può far dipendere da poche e notevoli proprietà di un opportuno simbolo che lo rappresenta.

§ 1. Metodi per formare rapidamente le permutazioni di n cose diverse.

Metodo I. — Supponiamo che le n cose siano i numeri $1, 2 \ldots n$, e per maggior semplicità sia dapprima $n = 4$. Si devono adunque formare le permutazioni dei numeri 1, 2, 3, 4. Si cominci a scriverne una qualunque, ad es. (1, 2, 3, 4). (*) Scambiando in essa il 1° elemento con ciascuno di quelli che lo seguono si ottengono le tre permutazioni (2 1 3 4), (3 2 1 4), (4 2 3 1). Da ciascuna delle quattro permutazioni già formate se ne possono dedurre altre due, tenendo fisso il 1° elemento e scambiando il 2° con ciascuno di quelli che lo seguono. In tal modo dalla

(1 2 3 4)	si deducono le	(1 3 2 4), (1 4 3 2)
(2 1 3 4)	»	(2 3 1 4), (2 4 3 1)
(3 2 1 4)	»	(3 1 2 4), (3 4 1 2)
(4 2 3 1)	»	(4 3 2 1), (4 1 3 2).

Si sono adunque già formate $4 + 4 . 2 = 12$ permutazioni. Da ciascuna di esse se ne può dedurre un'altra tenendo fissi i primi due elementi e scambiando il 3° col 4° (cioè con l'unico elemento che lo segue). Si hanno così altre 12 permutazioni, le quali assieme alle 12 già ottenute costituiscono un gruppo di 24 permutazioni tutte differenti. Sono adunque queste tutte le 4! permutazioni degli elementi 1, 2, 3, 4.

In generale per formare tutte le permutazioni di n elementi differenti si scrive una qualunque di esse e da essa si derivano altre $n - 1$ permutazioni scambiando il 1° elemento con ciascuno di quelli che lo seguono; da ognuna delle n permutazioni già formate si derivano altre $n - 2$ permutazioni, tenendo fisso il 1° elemento e scambiando il 2° con ciascuno di quelli che lo seguono. Si hanno così $n(n-2)$ permutazioni che assieme alle n precedenti, costituiscono un gruppo di $n + n(n-2) = n(n-1)$ permutazioni. Da ognuna di queste si derivano $n - 3$ permutazioni tenendo fissi i primi due elementi e scambiando il 3° con ciascuno di quelli che lo seguono; si hanno così

(*) Scriveremo sempre una permutazione chiudendo fra le parentesi ( ) i suoi elementi che supporremo contati da sinistra a destra.

altre $n(n-1)(n-3)$ permutazioni, le quali assieme alle $n(n-1)$ precedenti, costituiscono un gruppo di $n(n-1)(n-2)$ permutazioni. E così si continua fino ad aver ottenuto $n(n-1)(n-2)\ldots 4.3$ permutazioni; in ciascuna di queste si scambierà allora il penultimo elemento con l'ultimo e si avranno altre $n(n-1)\ldots 4.3$ permutazioni, le quali, assieme alle $n(n-1)\ldots 4.3$ precedenti, costituiscono il gruppo di tutte le $n(n-1)\ldots 4.3.2 = n!$ permutazioni degli elementi dati.

È noto che una permutazione si dice di classe pari o dispari, secondochè il numero delle inversioni in essa contenute è pari e dispari. (*) Si considera poi quale segno di una permutazione il $+$ od il $-$ secondochè essa è di classe pari o dispari; perciò, se ν è il numero delle inversioni contenute in una permutazione, il suo segno sarà quello di $(-1)^{\nu}$.

Se interessasse non soltanto formare le permutazioni di n elementi differenti, ma determinare ancora il segno di ciascuna, si comincierà a determinare quello della 1ª permutazione scritta, contando le inversioni in essa contenute. Il segno delle permutazioni rimanenti si determinerà allora, senza contare le inversioni contenute in ciascuna di esse, ricordando che se da una permutazione si passa ad un'altra collo scambio di due elementi, questa è di segno contrario a quello della precedente. Dovendo formare le permutazioni dei numeri $1, 2, \ldots n$ si può assumere come permutazione principale la $(1\,2\ldots n)$, la quale, non contenendo alcuna inversione, ha il segno $+$.

Metodo II. — Cominciamo da un caso particolare. Si debbano ad es. formare le permutazioni dei numeri 1, 2, 3, 4. Scritta una di esse, ad es. la (1 2 3 4), possiamo subito ottenerne un'altra, eseguendo sulla 1ª una sostituzione circolare; (*) otteniamo adunque la (2 3 4 1). Da questa mediante sostituzione circolare si deduce la (3 4 1 2) e da questa la (4 1 2 3).

Si sono così già formate quattro permutazioni. Nella 1ª di esse, la (1 2 3 4), teniamo fisso il 1º elemento ed eseguiamo sui rimanenti una sostituzione circolare; otteniamo la (1 3 4 2), dalla quale con operazione analoga si deduce la (1 4 2 3). E similmente dalla

(2 3 4 1)	si deducono le	(2 4 1 3), (2 1 3 4)
(3 4 1 2)	"	(3 1 2 4), (3 2 4 1)
(4 1 2 3)	"	(4 2 3 1), (4 3 1 2).

(*) Essendo $a_1, a_2 \ldots a_n$, n elementi diversi ed essendo $(a_1 a_2 \ldots a_n)$ una loro permutazione della principale, si dice che nella permutazione $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)$, due elementi a_i ed a_j fanno inversione se essendo a_i a destra (sinistra) di a_j nella $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)$, lo stesso a_i è a sinistra (destra) di a_j nella $(a_1 a_2 \ldots a_n)$; in altre parole due elementi della $(\alpha_1\ldots\alpha_n)$ fanno inversione quando non sono disposti, l'uno rispetto all'altro, come nella permutazione principale. Se gli elementi sono numeri, si può assumere come permutazione principale quella nella quale sono disposti in ordine crescente, ed allora essendo r_1 ed r_2 due elementi di un'altra permutazione si dirà che r_1 fa inversione con r_2 se $r_1 > r_2$ e se r_1 è a sinistra di r_2.

(**) Si dice che si esegue una sostituzione circolare su n elementi $a_1, a_2, \ldots a_n$ quando si scambia ciascuno con quello che lo segue e l'ultimo col 1º, dimodochè il risultato di una sostituzione circolare eseguita su una permutazione $(a_1 a_2 \ldots a_n)$ è la permutazione $(a_2 a_3 \ldots a_n a_1)$.

Si sono così già ottenute 12 permutazioni. Nella 1ª di esse, la (1234), teniamo fissi i primi due elementi, ed eseguiamo una sostituzione circolare sui rimanenti (cioè scambiamo gli elementi 3° e 4°). Otteniamo la (1 2 4 3) e similmente, con analoga operazione, da ciascuna delle rimanenti undici permutazioni possiamo dedurne un'altra, dimodochè abbiamo altre 12 permutazioni, le quali assieme alle 12 già formate, costituiscono il gruppo di tutte le permutazioni dei numeri 1, 2, 3, 4.

In generale per formare tutte le permutazioni di n elementi diversi, se ne forma una qualunque e si eseguiscono $n-1$ sostituzioni circolari, la 1ª sulla permutazione scritta, e ciascuna delle altre sulla permutazione ottenuta eseguendo la precedente. Da ognuna delle n permutazioni già formate si deducono altre $n-2$ permutazioni, tenendo fisso il 1° elemento ed eseguendo $n-2$ sostituzioni circolari sugli elementi rimanenti, ciascuna sostituzione dovendo eseguirsi sulla permutazione ottenuta eseguendo le sostituzione precedente. Si hanno così $n(n-2)$ permutazioni, le quali, assieme alle n precedentemente formate, costituiscono un gruppo di $n+n(n-2)=n(n-1)$ permutazioni. Da ognuna di queste si derivano altre $n-3$ permutazioni tenendo fissi i primi due elementi, ed eseguendo $n-3$ sostituzioni circolari sugli elementi rimanenti, ciascuna sostituzione dovendo eseguirsi sul risultato della sostituzione precedente. Si hanno così altre $n(n-1)(n-3)$ permutazioni, le quali assieme alle $n(n-1)$ precedentemente formate, costituiscono un gruppo di $n(n-1)(n-3)+$ $+n(n-1)=n(n-1)(n-2)$ permutazioni. E così si continua fino ad aver ottenuto un gruppo di $n(n-1)(n-2)\ldots 4\,.\,3$ permutazioni. Da ognuna di queste se ne dedurrà allora un'altra, tenendo fissi i primi $n-2$ elementi, ed eseguendo sui rimanenti una sostituzione circolare (cioè scambiando gli ultimi due elementi). Così si avranno altre $n(n-1)\ldots 4\,.\,3$ permutazioni, le quali assieme alle $n(n-1)\ldots 4\,.\,3$ precedenti costituiscono il complesso di tutte le $n(n-1)\ldots 4\,.\,3\,.\,2.=n!$ permutazioni degli elementi dati.

Volendo formare col metodo suddetto le permutazioni di n cose $a_1 a_2 \ldots a_n$ e determinare inoltre il segno di ciascuna, basterà tener conto di quanto segue. Sia $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p\ldots\alpha_n)$ una di esse. Eseguendo una sostituzione circolare sugli elementi $\alpha_p, \ldots \alpha_n$, si ottiene la permutazione $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}\alpha_{p+1}\ldots\alpha_n\alpha_p)$. Ora si sa che una sostituzione circolare fra m elementi equivale alla successione di $m-1$ trasposizioni; pertanto la suddetta sostituzione circolare eseguita sugli elementi $\alpha_p \ldots \alpha_n$, i quali sono in numero di $n-p+1$, equivale ad $n-p+1-1$ ossia ad $n-p$ trasposizioni. Perciò se $n-p$ è pari, la permutazione $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{p-1}\alpha_{p+1}\ldots\alpha_n\alpha_p)$ è dello stesso segno della $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)$; altrimenti è di segno contrario. Pertanto se n è pari (dispari), le permutazioni $\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\alpha_{p+1}\ldots\alpha_n\alpha_p)$ ed $(\alpha_1\ldots\alpha_n)$ hanno o non hanno lo stesso segno secondochè p è pari (dispari) o dispari (pari). Pensiamo ora al processo dianzi indicato per ottenere dalla $(\alpha_1\ldots\alpha_n)$

tutte le permutazioni rimanenti. Il segno di essa si potrà subito determinare contando il numero delle inversioni formate dai suoi elementi. Sia dapprima n pari. Le $n-1$ permutazioni ottenute eseguendo nel modo noto $n-1$ sostituzioni circolari, hanno tutte segno contrario a quello della $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$. Le $n-2$ permutazioni ottenute da ciascuna delle n permutazioni già formate, eseguendo nel modo noto $n-2$ sostituzioni circolari, hanno invece lo stesso segno della permutazione dalla quale si deducono; le $n-3$ permutazioni ottenute da ciascuna delle $n(n-1)$ già formate con $n-3$ sostituzioni circolari eseguite nel modo noto, hanno segno contrario a quello della permutazione dalla quale si deducono ecc.... Il contrario accade se n è dispari.

Notazioni e simboli. — Dati n elementi $a_1 a_2, \ldots a_n$ differenti, indicheremo con θ_{nn} l'operazione che consiste nello scrivere una qualunque permutazione di essi. Essendo $(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p \ldots \alpha_q \ldots \alpha_n)$ una permutazione degli elementi $a_1, \ldots a_n$, indicheremo con σ_{pq} l'operazione che consiste nello scambiare in essa gli elementi che occupano i posti p^{mo} e q^{mo} e diremo che la permutazione $(\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}, (\alpha_q)_p, \alpha_{p+1}, \ldots \ldots \alpha_{q-1}, (\alpha_p)_q, \alpha_{q+1}, \ldots \alpha_n)$ è il risultato dell'operazione σ_{pq} eseguita sulla $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$. Per es. eseguendo l'operazione σ_{23} sulla $(2\,1\,5\,4\,6\,4)$, vale a dire scambiando gli elementi che occupano i posti 2° e 3°, si ha per risultato la $(2\,6\,5\,4\,1\,3)$.

È chiaro che le operazioni σ_{pq} e σ_{qp} sono equivalenti, giacchè eseguendole su una stessa permutazione si ottengono risultati identici.

Indicheremo con $\sigma_{pq} \cdot \sigma_{rs} \cdot \sigma_{uv} \ldots$ l'operazione che consiste nello scambiare gli elementi p^{mo} e q^{mo} nella $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$; poi nella permutazione ottenuta quelli aventi i posti r^{mo} e s^{mo}; poi nell'ultima permutazione ottenuta quelli aventi i posti u^{mo} e v^{mo} ecc. L'operazione $\sigma_{pq}\sigma_{rs}\sigma_{uv} \ldots$ si dirà prodotto delle $\sigma_{pq}, \sigma_{rs}, \sigma_{uv} \ldots$ e si dirà risultato della $\sigma_{pq}\sigma_{rs}\sigma_{uv} \ldots$ eseguita sulla $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ il complesso delle permutazioni ottenute eseguendo σ_{pq} su $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$, σ_{rs} sul risultato di σ_{pq}, σ_{uv} sul risultato di σ_{rs} ecc. Per es. il risultato dell'operazione $\sigma_{12}\sigma_{24}\sigma_{35}$ eseguita sulla permutazione $(2\,1\,5\,3\,4)$ è il complesso delle permutazioni $(1\,2\,5\,3\,4)$, $(1\,3\,5\,2\,4)$, $(1\,3\,4\,2\,5)$.

Il simbolo σ_{qq} rappresenta lo scambio di un elemento con sè stesso; quindi se esso compare, qual fattore, in un prodotto di σ, si può sopprimere.

Eseguire un'operazione su un gruppo di permutazioni significherà eseguirla su ciascuna permutazione del gruppo.

Scrivendo il segno $=$ tra i simboli di due operazioni da eseguirsi su una stessa permutazione o su uno stesso gruppo di permutazioni allo scopo di ottenere altre permutazioni, intenderemo di affermare che tutte le permutazioni ottenute quali risultato della 1ª operazione, si possono ottenere quali risultato della 2ª e viceversa. E le suddette due operazioni si diranno equivalenti rispetto alla permutazione (od al gruppo di permutazioni) sulle quali devono eseguirsi.

Indicheremo il prodotto $\sigma_{q,q+1}\sigma_{q,q+2}\ldots\sigma_{q,r}$, $(r>q)$, con τ_{qr} e scriveremo $\tau_{qr}\tau_{qr}\ldots\tau_{qr}$, od anche convenzionalmente τ_{qr}^{h}, invece del prodotto $\sigma_{q,q+1}\ldots\sigma_{qr}\sigma_{q,q+1},\ldots\sigma_{qr}\sigma_{q,q+1},\ldots\sigma_{qr}$ i cui fattori si ottengono scrivendo di seguito h volte quelli del prodotto $\sigma_{q,q+1}\sigma_{q,q+2}\ldots\sigma_{q,r}$. Adunque τ_{qr} e τ_{qr}^{h} sono due operazioni definite dalle eguaglianze:

$$\tau_{qr}=\sigma_{q,q+1}\sigma_{q,q+2},\ldots\ldots\sigma_{q,r}$$

$$\tau_{qr}^{h}=\underbrace{\tau_{qr}\tau_{qr}\ldots\tau_{qr}}_{h}=\underbrace{\sigma_{q,q+1}\ldots\sigma_{qr}}_{1}\ldots\underbrace{\sigma_{q,q+1}\sigma_{q,r}}_{h},$$

Si ha pertanto $\tau_{12}=\sigma_{12}$.

Metodo III. — Cominciamo da alcuni casi particolari. Le permutazioni dei due elementi 1.2 sono le (1 2), (2 1); la 2ª di esse si ottiene dalla 1ª eseguendo su questa l'operazione $\tau_{12}=\sigma_{12}$. Volendo formare le permutazioni degli elementi 1, 2, 3, cominciamo a scriverne una per es. la (1 2 3). Eseguendo su di essa l'operazione $\tau_{13}=\sigma_{12}\sigma_{13}$ otteniamo le permutazioni (2 1 3), dedotta dalla (1 2 3) colla σ_{12}, e (3 1 2) dedotta dalla (2 1 3) mediante la σ_{13}. Da tale (3 1 2), ossia dall'ultima permutazione ottenuta, possiamo dedurne altre due eseguendo su essa ancora la τ_{13} e queste sono le (1 3 2) e (2 3 1). Se infine sulla (2 3 1) si esegue la σ_{12} si ha la (3 2 1). Si sono adunque formate le permutazioni (1 2 3), (2 1 3), (3 1 2), (1 3 2), (2 3 1), (3 2 1), che sono tutte le permutazioni degli elementi 1, 2, 3. Di queste le ultime cinque si possono considerare come dedotte dalla (1 2 3) mediante l'operazione $\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}$ (giacchè la 1ª di esse si deduce dalla (1 2 3), e ciascuna delle altre dalla precedente. Indicando adunque con ε_{20} l'operazione che permette di dedurre da una permutazione di due elementi per es. 1, 2, tutte le altre, e con ε_{30} quella che permette di dedurre da una permutazione di tre elementi, per es. 1, 2, 3, tutte le altre, si ha:

$$\varepsilon_{20}=\tau_{12}=\sigma_{12}$$

$$\varepsilon_{30}=\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}=\tau_{13}\tau_{13}\sigma_{12}=\tau^{2}_{13}\,\tau_{12}.$$

Analogamente per formare tutte le permutazioni di quattro elementi differenti, per es. 1, 2, 3, 4, basta scriverne una; poi eseguire su di essa l'operazione

$$\varepsilon_{40}=\tau^{3}_{14}\tau_{13}$$

ossia

$$\varepsilon_{40}=\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{14}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{14}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{14}\sigma_{12}\sigma_{13}$$

indi su ciascuna delle permutazioni già formate (sono dodici) eseguire l'operazione che indicheremo con ε_{42} (il lettore comprenderà in seguito il perchè).

$$\varepsilon_{42}=\tau_{34}=\sigma_{34}.$$

Ed invero eseguendo la ε_{40} ad es. sulla (1 2 3 4) si hanno le undici permutazioni (2 1 3 4), (3 1 2 4), (4 1 2 3), (1 4 2 3), (2 4 1 3), (3 4 1 2), (4 3 1 2), (1 3 4 2), (2 3 4 1), (3 2 4 1), (4 2 3 1). Se ora si esegue su tutte le permutazioni già formate la τ_{34} (cioè si scambiano gli ultimi due elementi) si ottengono le permutazioni (1 2 4 3), (3 1 4 2), (4 1 3 2), (1 4 3 2), (2 4 3 1), (3 4 2 1), (4 3 2 1), (1 3 2 4), (2 3 1 4), (2 3 1 4), (4 2 1 3), le quali assieme alle 12 già ottenute costituiscono il complesso di tutte le 4! permutazioni degli elementi 1, 2, 3, 4.

Siano ora dati cinque elementi differenti, ad es. 1, 2, 3, 4, 5. Si eseguisca su una loro permutazione qualunque, ad es. sulla (1 2 3 4 5) l'operazione

$$\varepsilon_{50} = \tau^{4}_{15}\tau_{14}$$

ottenendo così altre 19 permutazioni; poi sulle 20 permutazioni già formate si eseguisca un'operazione ε_{52}, definita dall'eguaglianza

$$\varepsilon_{52} = \tau^{2}_{35}\tau_{34}$$

ottenendo così altre 100 permutazioni. Il lettore potrà verificare che le 120 permutazioni formate sono tutte differenti; esse sono le 5! permutazioni degli elementi 1, 2, 3, 4, 5.

Ed ancora volendo formare le permutazioni di sei elementi diversi, se ne scriverà una qualsiasi; poi si eseguirà su esse l'operazione

$$\varepsilon_{60} = \tau^{5}_{16}\tau_{15}$$

ottenendo così una 1ª serie di permutazioni (nella quale è compresa la permutazione scritta per la prima). Su ognuna delle permutazioni della 1ª serie si eseguirà l'operazione ε_{62} definita dall'uguaglianza.

$$\varepsilon_{62} = \tau^{3}_{36}\tau_{35}$$

ottenendo così una seconda serie di permutazioni; infine su ciascuna permutazione delle prime due serie (cioè su tutte le permutazioni già formate) si eseguirà l'operazione

$$\varepsilon_{64} = \tau_{56} = \sigma_{56}$$

ottenendo così una terza serie di permutazioni.

Le permutazioni delle tre serie sono tutte le permutazioni dei sei elementi dati.

Ed ora si vogliano formare le permutazioni di n elementi differenti. Si consideri un'operazione ε_{np} definita dall'uguaglianza:

$$\varepsilon_{np} = \tau^{n-p-1}_{p+1,n}\tau_{p+1,n-1}$$

e si ritenga $\tau_{\lambda\lambda} = 1$, qualunque sia l'intero λ, anche nullo.

Dimodochè è in particolare:

$$\varepsilon_{n0} = \tau^{n-1}_{1,n} \cdot \tau_{1,n-1}$$

$$\varepsilon_{n,n-2} = \tau_{n-1,n}\,\tau_{n-1,n-1} = \tau_{n-1,n}\,.$$

Ne risulta che essendo i ed j numeri interi non tutti e due nulli ed $j > i$ l'espressione di ε_{nj} si deduce da quelle di ε_{ni} aumentando il primo indice delle τ della differenza $j-i$ e diminuendo l'esponente del 1º fattore (la prima τ) pure di $j-i$.

Dalla definizione dell'operazione ε_{np} risulta che: eseguire l'operazione ε_{np} su una permutazione di n elementi, $(n \geq p)$, significa scambiare $n-(p+1)$ volte di seguito l'elemento avente il posto $(p+1)^{mo}$ con ciascuno di quelli che lo seguono e poi ancora l'elemento avente il posto $(p+1)^{mo}$ con quelli che occupano i posti $(p+2)^{mo}, \ldots (n-1)^{mo}$ ciascuno di tali scambi dovendo eseguirsi sul risultato dello scambio precedente.

Infatti l'espressione della ε_{np} mediante operazioni σ è la seguente:

$$\varepsilon_{np} = \underbrace{\sigma_{p+1,\,p+2}\sigma_{p+1,\,p+3} \cdots \sigma_{p+1,\,n}}_{1} \cdots \underbrace{\sigma_{p+1,\,p+2}\sigma_{p+1,\,p+3} \cdots \sigma_{p+1,\,n}}_{n-(p+1)} \sigma_{p+1,\,p+2} \cdots \sigma_{p+1,\,n-1}$$

Sia dapprima n pari e si formi una qualunque permutazione degli n elementi dati. Per dedurre da questa tutte le rimanenti basterà formare $\frac{n}{2}$ serie di permutazioni: la 1ª serie comprende la permutazione già formata e quelle che si ottengono eseguendo su essa l'operazione

$$\varepsilon_{n,0} = \tau_{1,n}^{n-1} \cdot \tau_{1,n-1}.$$

La 2ª serie si ottiene eseguendo su ciascuna permutazione della 1ª serie l'operazione

$$\varepsilon_{n,2} = \tau_{3,n}^{n-1} \tau_{3,n-1}$$

la 3ª eseguendo su ciascuna permutazione della serie 1ª e 2ª l'operazione

$$\varepsilon_{n,4} = \tau_{5,n}^{n-5} \tau_{5,n-1}$$

... la $\left(\frac{n}{2}-1\right)^{ma}$ serie eseguendo sulle permutazioni di tutte le serie precedenti l'operazione

$$\varepsilon_{n,n-4} = \tau_{n-3,n}^{3} \tau_{n-3,n-1}$$

l'ultima, cioè la $\left(\frac{n}{2}\right)^{ma}$ serie, eseguendo su ciascuna permutazione delle serie precedenti l'operazione

$$\varepsilon_{n,n-2} = \tau_{n-1,n} = \sigma_{n-1,n}.$$

Se n è dispari, le serie da costrurre sono $\frac{n-1}{2}$; la 1ª serie comprende la 1ª permutazione scritta e quelle ottenute eseguendo su essa l'operazione

$$\varepsilon_{n,0} = \tau_{1,n}^{n-1} \tau_{1,n-1}$$

la 2ª serie si ottiene eseguendo su ciascuna permutazione della 1ª serie l'operazione

$$\varepsilon_{n,2} = \tau_{3,n}^{n-3} \tau_{3,n-1}$$

... la penultima serie ossia la $\left(\frac{n-3}{2}\right)^{ma}$ serie, si ottiene eseguendo sulle permutazioni di tutte le serie precedenti l'operazione

$$\varepsilon_{n,n-5} = \tau^{4}_{n-4,n}\, \tau_{n-4,n-1}$$

e l'ultima, ossia la $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{ma}$ si ottiene eseguendo sulla permutazione tutte le serie precedenti l'operazione

$$\varepsilon_{n,n-3} = \tau^{2}_{n-2,n}\, \tau_{n-2,n-1}.$$

Si ricordi adunque che le permutazioni di una stessa serie si ottengono sempre eseguendo una certa operazione sulle permutazioni di *tutte* le serie precedenti.

Adunque: per formare le permutazioni di n elementi diversi basta scriverne una qualunque (iniziale) ed eseguire successivamente le operazioni $\varepsilon_{n,0}$; $\varepsilon_{n,2}$; $\varepsilon_{n,4}$; ... $\varepsilon_{n,n-2}$ se n è pari, ed $\varepsilon_{n,0}$; $\varepsilon_{n,2}$; $\varepsilon_{n,4}$; ... $\varepsilon_{n,n-3}$ se n è dispari, avvertendo di eseguire la $\varepsilon_{n,0}$ sulla permutazione iniziale e ciascuna delle $\varepsilon_{n,2}$; $\varepsilon_{n,4}$; ... sulla permutazione iniziale e su quelle ottenute eseguendo le ε precedenti.

È ovvio convincersi che le permutazioni così ottenute sono $n!$ Infatti eseguendo l'operazione τ_{qr} su una permutazione di n elementi $(q, r \geq n)$, si hanno $r-q$ permutazioni, giacchè τ_{qr} è il prodotto di $r-q$ scambi. Perciò dicendo ν_{mp} il numero delle permutazioni ottenute eseguendo l'operazione ε_{mp} su una permutazione di n elementi, $(m, p \geq n)$, si avrà:

$$\nu_{mp} = \{m-(p+1)\}.\{m-(p+1)\} + \{m-(p+2)\}$$

ossia

$$\nu_{mp} = \{m-(p+1)\}^2 + \{m-(p+2)\}.$$

Intendiamo ora con $\nu_{n0}, \nu_{n2}, \nu_{n4}\ldots$ il numero delle permutazioni ottenuto da una data di n elementi, eseguendo su essa rispettivamente le operazioni $\varepsilon_{n0}, \varepsilon_{n2}, \varepsilon_{n4}\ldots$ e supponiamo dapprima n pari. Eseguendo la ε_{n0} su una permutazione se ne ricavano altre ν_{n0}, le quali assieme alla data costituiscono una prima serie di $\nu_{n0}+1$ permutazioni. Eseguendo su ciascuna di queste la ε_{n2} si ha una seconda serie di $(\nu_{n0}+1)\,\nu_{n2}$ permutazioni le quali assieme alla $\nu_{n0}+1$ precedenti costituiscono un complesso di

$$(\nu_{n0}+1)\,\nu_{n2} + (\nu_{n0}+1) = (\nu_{n0}+1)\,(\nu_{n2}+1)$$

permutazioni. Eseguendo su ciascuna di esse la ε_{n4} si ha una terza serie di $\nu_{n4}\,(\nu_{n0}+1)\,(\nu_{n2}+1)$ permutazioni, le quali assieme alle $(\nu_{n0}+1)\,(\nu_{n2}+1)$ costituiscono un complesso di

$$\nu_{n4}\,(\nu_{n0}+1)\,(\nu_{n2}+1) + (\nu_{n0}+1)\,(\nu_{n2}+1) = (\nu_{n0}+1)\,(\nu_{n2}+1)\,(\nu_{n4}+1)$$

permutazioni... Così continuando si conclude che il numero delle permutazioni della serie $1^a, 2^a \dots \left(\frac{n}{2}\right)^{ma}$ è:

$$P_n = (\nu_{n0}+1)(\nu_{n2}+1)\dots(\nu_{n,n-4}+1)(\nu_{n,n-2}+1).$$

Ora si ha:

$$\begin{aligned}
\nu_{n0}+1 &= (n-1)^2+(n-2)+1 = n(n-1)\\
\nu_{n2}+1 &= (n-3)^2+(n-4)+1 = (n-2)(n-3)\\
&\vdots\\
\nu_{n,n-4}+1 &= 9+2+1 \qquad = 4.3\\
\nu_{n,n-2}+1 &= 1+1 \qquad\quad = 2-1
\end{aligned}$$

e pertanto

$$Pn = n(n-1)(n-2)\dots4.3.2.1-n!$$

Similmente, se n è dispari, si prova che $P_n = n!$

È quindi fuor di dubbio che col metodo esposto si ottengono tutte le permutazioni di n elementi diversi.

Laddove interessasse determinare il segno di ciascuna di esse basterebbe pensare che: eseguendo una delle operazioni ε su una data permutazione, le permutazioni ottenute hanno alternativamente il segno $+$ e $-$ e la 1^a di esse ha segno contrario a quella della permutazione sulla quale si esegue la suddetta ε. Infatti ciascuna ε è un prodotto di scambi (operazioni σ), ciascuno dei quali deve eseguirsi sul risultato ottenuto eseguendo lo scambio precedente.

Metodo IV. — È meno semplice dei precedenti, ma non meno importante.

L'operazione che consiste nello scambiare i primi due elementi di una permutazione $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ è la σ_{12}; la indicheremo anche con ω_2 e pertanto $\omega_2 = \sigma_{12}$; adunque il risultato della ω_2 eseguita sulla $(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n)$ è la $[(\alpha_2)_1(\alpha_1)_2\alpha_3\alpha_n]$.

Dati n elementi $a_1, \dots a_n$, l'operazione che consiste nello scrivere una permutazione qualunque di essi, per es. la $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ si indicherà con θ_{n0} e la $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ si dirà risultato della θ_{n0} eseguita cogli elementi $a_1 \dots a_n$. Tale $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$, considerata quale risultato della θ_{n0} eseguita cogli elementi $a_1 \dots a_n$, si dirà **permutazione principale**.

Si debbano dapprima formare le permutazioni di due elementi, per es. dei numeri 1, 2. Esse sono le (1 2), (2 1); una di esse si ottiene eseguendo la θ_{20} cogli elementi 1, 2, e l'altra eseguendo l'operazione ω_2 sul risultato dello θ_{20}. Sicchè, indicando con ω'_2 l'operazione che permette di formare tutte le permutazioni di due elementi, si ha:

$$\omega'_2 = \theta_{20}\,\omega_2.$$

Dovendo formare le permutazioni di tre elementi per es. dei numeri 1, 2, 3, eseguiamo con essi la θ_{30}, cioè scriviamo la permutazione principale. Sia essa ad es. la (1 2 3). Eseguendo su questa la ω_2 si ha la (2 1 3). Indichiamo ora con θ_{31} l'operazione che consiste nello scambiare in una delle permutazioni già formate, cioè le (1 2 3), (2 1 2) il 3º elemento con uno di quelli che in tali permutazioni non hanno ancora occupato il 3º posto (sono gli elementi 1 e 2). La θ_{31} può adunque essere eseguita in quattro modi, scambiando nella (1 2 3) o nella (2 1 3) il 3º elemento con uno di quelli che lo precedono. Noi la eseguiremo scambiando nella (2 1 3) gli elementi 3 ed 1 che sono consecutivi, dimodochè il risultato della θ_{31} eseguita sulla (2 1 3) è la (2 3 1). Eseguendo su questa la ω_2 si ha la (3 2 1). Indichiamo con θ_{32} l'operazione che consiste nello scambiare in una qualunque delle quattro permutazioni già formate il 3º elemento con uno di quelli che in nessuna di esse hanno ancora occupato il 3º posto (soltanto l'elemento 2 si trova in tali condizioni). Anche tale operazione si può eseguire in più di un modo e precisamente in quattro modi, giacchè in ciascuna delle permutazioni già formate si può scambiare l'ultimo elemento con l'elemento 2. Noi la eseguiremo scambiando gli elementi 3º e 2º nella (3 2 1), (sono elementi consecutivi) dimodochè il risultato della θ_{32} eseguita sulla (3 2 1) è la (3 1 2). Eseguendo la ω_2 sul risultato della θ_{32} si ha la (1 3 2). Si sono così ottenute le sei permutazioni degli elementi 1, 2, 3, nell'ordine: (1 2 3), (2 1 3), (2 3 1), (3 2 1), (3 1 2), (1 3 2). Di queste le prime due terminano coll'elemento 3, le due seguenti coll'elemento 1, e le ultime due coll'elemento 2.

Convenendo che il segno $+$ scritto tra i simboli di due operazioni indichi soltanto che quella rappresentata dal simbolo scritto a destra debba eseguirsi dopo quella rappresentata dal simbolo scritto a sinistra, ed indicando con ω'_3 l'operazione che permette di formare le permutazioni di tre elementi differenti, nel modo dianzi descritto, possiamo scrivere

$$\omega'_3 = \theta_{30}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 \ldots \qquad (1)$$

La ω_2 consiste nello scambio dei primi due elementi, e deve sempre eseguirsi sul risultato delle θ immediatamente a sinistra; ciascuna θ consiste nello scambiare in una delle permutazioni già formate il 3º elemento con uno di quelli che non hanno ancora occupato in esse il 3º posto; fa eccezione la θ_{30} la quale consiste nello scrivere una permutazione qualunque degli elementi dati.

La permutazione risultato della θ_{30} si dirà permutazione iniziale relativa, rispetto alle operazioni θ_{31}, θ_{32} (il lettore comprenderà in seguito il perchè di tale denominazione). Possiamo pertanto dire che le θ_{31} e θ_{32} devono eseguirsi sulla permutazione iniziale ad esse relativa, oppure su una di quelle ottenute dopo di essa.

Eseguire un'operazione ω_3 definita dall'uguaglianza

$$\omega_3 = \omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 \ldots \qquad (1')$$

su una permutazione $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ di tre elementi, significa eseguire le ω_2 sulla $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$, poi la θ_{31}, poi la ω_2 sul risultato della θ_{31} ecc... assumendo come permutazione iniziale relativa alle θ_{31}, θ_{32}, la permutazione data $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$. In altri termini per eseguire la ω_3 sulla $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ basta eseguire le operazioni che compongono la ω'_3 e che sono posteriori a θ_{30}, essendo ω'_3 l'operazione definita dalla (1) da eseguirsi cogli elementi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Eseguire la ω_3 su una permutazione $(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n)$ di n elementi, significa eseguirla sulla $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$, e scrivere accanto agli elementi delle cinque permutazioni ottenute gli elementi $\alpha_4, \alpha_5 \ldots \alpha_n$. Il risultato della ω_3 eseguito sulla $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ è adunque un gruppo di cinque permutazioni, le quali terminano tutte cogli elementi $\alpha_4, \ldots \alpha_n$. Indipendentemente dall'ordine, esse sono le seguenti:

$$(\alpha_2\alpha_1\alpha_3\alpha_4 \ldots \alpha_n), (\alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha_4 \ldots \alpha_n), (\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_4 \ldots \alpha_n), (\alpha_3\alpha_1\alpha_2\alpha_4 \ldots \alpha_n), (\alpha_1\alpha_3\alpha_2\alpha_4 \ldots \alpha_n).$$

Notiamo ancora che nel caso speciale della formazione delle permutazioni degli elementi 1, 2, 3 noi abbiamo eseguito le θ_{31} e θ_{32} in modo da operare soltanto scambi tra due elementi consecutivi. Eseguendo ciascuna delle operazioni ω e θ (esclusa la θ_{30}) sul risultato precedente, si ha un criterio (non unico) per comporre la ω'_3 di scambi da eseguirsi tra due elementi consecutivi. Infatti l'operazione ω'_3 eseguita per formare le permutazioni degli elementi 1, 2, 3 è la

$$\omega'_3 = \theta_{30}\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}.$$

Ogni espressione della ω'_3 composta di soli scambi tra elementi consecutivi si dirà *forma singolare* della ω'_3. Adunque per ridurre la ω'_3 a forma singolare basta disporre opportunamente delle θ_{31} e θ_{32}.

Prima di trattare il caso generale, esamineremo ancora quello particolare della formazione delle permutazioni di quattro elementi ad es. dei numeri 1, 2, 3, 4. Cominciamo a formarne una qualunque (principale), ad es. la (1 2 3 4), eseguendo la θ_{40} cogli elementi 1, 2, 3, 4. Eseguendo la ω_3 sulla (1 2 3 4) otteniamo cinque permutazioni che terminano coll'elemento quattro e che indipendentemente dall'ordine sono le: (2 1 3 4), (2 3 1 4), (3 2 1 4), (3 1 2 4), (1 3 2 4). Indichiamo con θ_{41} l'operazione che consiste nello scambiare in una delle sei permutazioni già formate, il 4° elemento con uno di quelli che non hanno occupato in esse, il 4° posto (sono gli elementi 1, 2, 3 che precedono l'ultimo). Essa può eseguirsi in 6 . 3 = 18 modi, giacchè in ciascuna delle suddette sei permutazioni si può scambiare l'ultimo elemento con uno degli elementi 1, 2, 3. Noi la eseguiremo sulla (1 2 3 4), scambiando gli elementi 4° e 3°, dimodochè il risultato della θ_{41} è la (1 2 4 3). Eseguendo su questa la ω_3, si hanno, indipendentemente dall'ordine, le permutazioni (2 1 4 3), (2 4 1 3), (4 2 1 3), (4 1 2 3), (1 4 2 3), le quali assieme alla (1 2 4 3) sono tutte le permutazioni degli elementi 1, 2, 3, 4 che terminano coll'elemento 3. Sia θ_{42} l'operazione che consiste nello scambiare in una delle dodici permutazioni già formate il 4° elemento con uno di quelli che in nessuna di esse hanno occupato il 4° posto, cioè con uno degli elementi 1 e 2. Tale operazione si può eseguire in $12 . 2 = 24$ modi e noi la eseguiremo sulla (2 3 1 4) scambiando gli elementi 4° e 3°, dimodochè il risultato della θ_{42} è la (2 3 4 1). Eseguendo su questa l'operazione ω_3 si hanno indipendentemente dall'ordine le (3 2 4 1), (3 4 2 1), (4 3 2 1), (4 2 3 1), (2 4 3 1). Esse e la (2 3 4 1) sono quelle fra le permutazioni degli elementi 1, 2, 3, 4, che terminano coll'elemento 1. Sia infine θ_{43} l'operazione consistente nello scambiare in una delle diciotto permutazioni già formate, il 4° elemento con uno di quelli che in nessuna di esse hanno occupato il 4° posto (tale è il solo elemento 2). Tale operazione si può eseguire in diciotto modi diversi e noi la eseguiremo sulla (3 1 2 4) scambiando gli elementi 4° e 3°, dimodochè il risultato della θ_{42} è la (3 1 4 2). Ed ora, eseguendo sulla (3 1 4 2) l'operazione ω_3 otteniamo, indipendentemente dall'ordine, le permutazioni (1 3 4 2), (1 4 3 2), (4 1 3 2), (4 3 1 2), (3 4 1 2); esse e la (3 1 4 2) sono tutte le permutazioni degli elementi 1, 2, 3, 4 che terminano coll'elemento 2.

Le permutazioni formate sono $4! = 24$, ed altre evidentemente non possono formarsene.

Sempre convenendo che il segno + posto tra i simboli di due operazioni indichi che quella rappresentata dal simbolo posto a sinistra debba eseguirsi immediatamente prima di quella rappresentata dal simbolo posto a destra, e chiamando con ω'_4 l'operazione mediante la quale si formano col processo dianzi indicato le permutazioni di quattro elementi differenti, possiamo scrivere:

$$\omega'_4 = \theta_{40}\omega_3 + \theta_{41}\omega_3 + \theta_{42}\omega_3 + \theta_{43}\omega_3 \ldots \tag{2}$$

Nell'applicare la (2) occorre aver presente che ciascuna ω_3 va eseguita sul risultato della θ_4 immediatamente a sinistra e che ciascuna θ_4 va eseguita su una delle permutazioni precedentemente ottenute, tranne la θ_{40} che va eseguita sugli elementi dati.

Nell'eseguire le $\theta_{41}, \theta_{42}, \theta_{43}$ c'è dell'arbitrario, giacchè ogni θ_4 può eseguirsi in più di un modo. Noi abbiamo eseguita la θ_{41} sulla permutazione principale (1 2 3 4) e le θ_{42}, θ_{43} sulle (2 3 1 4) e (3 1 2 4) le quali sono due delle permutazioni ottenute dalla principale eseguendo su essa la ω_3 sotto forma singolare e precisamente eseguendo le operazioni θ_{31} e θ_{32} della ω_3. Come vedesi, ciascuna delle $\theta_{41}, \theta_{42}, \theta_{43}$ eseguite in tal modo, consta nello scambio di due elementi consecutivi (4° e 3°); dimodochè se nell'applicare la (2) supponiamo le ω_3 ridotte a forma singolare ed eseguiamo le $\theta_{41}, \theta_{42}, \theta_{43}$ rispettivamente sulla permutazione principale e sulle due che si ottengono eseguendo su essa le operazioni θ_{31} e θ_{32} di ω_3, possiamo dire che la ω'_4 consta di scambi fra elementi consecutivi. Una tal forma della ω'_4 si dirà *forma singolare*; pertanto per ridurre la ω'_4 a forma singolare, il che è possibile in più di un modo, basta mettere le ω_3 sotto forma singolare e disporre opportunamente delle θ_4.

La (2) sostituendo ad ω_3 l'espressione data dalla (1'), diventa:

$$\omega'_4 = \theta_{40}\omega_2 + \theta_{31}\,\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \theta_{41}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \theta_{42}\omega_2 + \\ + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \theta_{43}\omega_2 + \theta_{31}\,\omega_2 + \theta_{42}\omega_2 \ldots \qquad (3)$$

Diremo che la permutazione principale è iniziale relativa delle (od alle o rispetto alle) operazioni $\theta_{41}, \theta_{42}, \theta_{43}$, e che la permutazione ottenuta quale risultato di una θ_4 è iniziale relativa delle operazioni θ_{31} e θ_{32} a destra di essa θ_4 ed a sinistra della θ_4 seguente (se c'è). Per es. la permutazione resultato della θ_{42} è iniziale relativa delle θ_{31} e θ_{32} comprese tra θ_{42} e θ_{43}.

Pertanto nell'applicare la (3) devesi osservare che: 1º ciascuna ω_2 deve eseguirsi sul risultato della θ immediatamente a sinistra: 2º che ciascuna θ_i, $(i = 4, 3)$, deve eseguirsi sulla permutazione iniziale ad essa relativa o su una delle permutazioni ottenute dopo di essa (dopo tale permutazione relativa) e che in ogni caso rappresenta lo scambio dell'elemento i^{mo} con uno di quelli che lo precedono, e che nella permutazione iniziale relativa ed in quelle formate posteriormente ad essa, non hanno ancora occupato l'i^{mo} posto.

Eseguire un'operazione ω_4 definita dall'uguaglianza:

$$\omega_4 = \omega_3 + \theta_{41}\omega_3 + \theta_{42}\omega_3 + \theta_{42}\omega_4$$

oppure

$$\omega_4 = \omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \theta_{41}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \theta_{42}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \\ + \theta_{32}\omega_2 + \theta_{43}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2$$

su una permutazione di quattro elementi $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$, significa eseguire la ω_3 sulla $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$, poi la θ_{41}, poi la ω_3 sul risultato della θ_{41} ecc... considerando come permutazione iniziale relativa delle $\theta_{41}, \theta_{42}, \theta_{43}$ la $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$ e come permutazione iniziale relativa delle θ_{31} e θ_{32} di una data ω_3, la permutazione ottenuta quale risultato della θ_4 che le sta a sinistra od, in assenza di essa, la $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$; pertanto il risultato della ω_3 è, indipendentemente dall'ordine, un gruppo di 23 permutazioni, le quali sono tutte le permutazioni degli elementi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, tranne la $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$. In altri termini possiamo dire che eseguire la ω_4 sulla $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$, significa fare in essa le operazioni che si fanno posteriormente alla θ_{40} nell'eseguire la ω'_4 sugli elementi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (considerando come risultato della θ_{40} la $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$.

Eseguire la ω_4 su una permutazione $(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n)$ di $n > 4$ elementi, significa eseguirla sulla $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$ e poi scrivere gli elementi $\alpha_5, \alpha_6 \ldots \alpha_n$ a destra di quelli di ciascuna delle 23 permutazioni ottenute, pertanto il risultato della ω_4 eseguita sulla $(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n)$ è un gruppo di 23 permutazioni le quali terminano tutte cogli elementi $\alpha_5, \alpha_6 \ldots \alpha_n$.

Passiamo ora al caso generale. Indichiamo con ω_i un'operazione la quale ci permetta di dedurre da una permutazione $(\alpha_1 \ldots, \alpha_i)$ di i elementi diversi, tutte le rimanenti $i! - 1$. Diremo che si esegue la ω_i sulla permutazione $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ di $n > i$ elementi, quando si scrivono gli elementi $\alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n$ di seguito a quelli di ciascuna delle permutazioni ottenute eseguendo la ω_i sulla $(\alpha_1 \ldots \alpha_i)$, dimodochè il risultato della ω_i eseguita sulla $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ è un gruppo di $i! - 1$ permutazioni aventi comuni gli elementi finali $\alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n$.

Consideriamo l'operazione ω'_n definita dall'uguaglianza

$$\omega'_n = \theta_{n0}\omega_{n-1} + \theta_{n1}\omega_{n-1} + \ldots + \theta_{ni}\omega_{n-1} + \ldots + \theta_{n,n-1}\omega_{n-1} \ldots \qquad (4)$$

dove θ_{n0} è un'operazione che consiste nello scrivere una permutazione qualunque $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ di n elementi dati, ω_{n-1} è un'operazione che ci permette di dedurre da una permutazione di $n-1$ elementi tutte le rimanenti e che deve eseguirsi sul risultato della θ_n immediatamente a sinistra e $\theta_{n1}, \theta_{n2}, \ldots$ sono operazioni delle quali ognuna può eseguirsi sul risultato della θ_{n0} (permutazione principale) e su una delle permutazioni già formate (cioè formate prima di eseguire la θ_n che si considera) e consiste nello scambio dell'ultimo elemento con uno di quelli che nelle permutazioni già formate non hanno ancora occupato l'ultimo posto.

Immaginiamo ora di eseguire la ω'_n. Dopo aver eseguito la ω_{n-1} seguente θ_{n0}, avremo ottenuto tutte le permutazioni degli n elementi dati $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, le quali terminano ad es. con un certo elemento β_1; eseguita la ω_{n-1} seguente θ_{n1}, avremo ottenute tutte le permutazioni che terminano con un certo elemento β_2 ecc..., eseguita la ω_{n-1} seguente $\theta_{n,n-1}$, avremo ottenuto tutte le permutazioni che terminano con un certo elemento β_n. Gli elementi $\beta_1 \ldots \beta_n$ sono, salvo l'ordine, gli stessi $\alpha_1, \ldots \alpha_n$; adunque la ω'_n è un'operazione che ci permette di formare tutte le permutazioni degli elementi $\alpha_1, \ldots \alpha_n$.

Sostituendo ad n i numeri $n-1, n-2 \ldots$ si hanno dalla (4) le espressioni di $\omega'_{n-1}, \omega'_{n-2}, \ldots \omega'_4, \omega'_3$. Correlativamente a tali operazioni possiamo definirne altrettante $\omega_{n-1}, \omega_{n-2}, \ldots \omega_4, \omega_3$, stabilendo che eseguire l'operazione

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \theta_{i1}\omega_{i-1} + \theta_{i2}\omega_{i-1} + \ldots \theta_{i,i-1}\omega_{i-1} \ldots \qquad (5)$$

su una permutazione $(\alpha_1, \ldots \alpha_i)$ di i elementi, significhi operare sugli elementi di essa come si opera su quelli della permutazione ottenuta quale risultato della θ_{i0}, di guisa che il risultato della ω_i è un complesso di $i! - 1$ permutazioni, cioè il complesso di tutte le permutazioni degli elementi $\alpha_1, \ldots \alpha_i$, tranne la $(\alpha_1, \ldots \alpha_i)$; 2° eseguire la ω_i su una permutazione $(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ di $n > i$ elementi, significhi scrivere gli elementi $\alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n$ di seguito a quelli di ognuna delle permutazioni ottenute eseguendo la ω_i sulla $(\alpha_1 \ldots \alpha_i)$, dimodochè il risultato di tale ω_i eseguito sulla $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ è un complesso di $i! - 1$ permutazioni aventi comuni gli elementi finali $\alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n$.

Se ora nella (4) sostituiamo alle ω_{n-1} le loro espressioni mediante le ω_{n-2}, poi nella relazione ottenuta sostituiamo alle ω_{n-2} le loro espressioni mediante le ω_{n-3} ecc... infine alle ω_3 le loro espressioni mediante le ω_2, abbiamo:

$$\begin{aligned}\omega'_n = {} & \theta_{n0}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \theta_{41}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \theta_{42}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \\ & + \theta_{43}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \theta_{51}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \theta_{41}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \\ & + \theta_{42}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \theta_{43}\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 + \theta_{52}\omega_2 + \ldots + \theta_{41}\omega_2 + \\ & + \ldots + \theta_{42}\omega_2 + \ldots + \theta_{43}\omega_2 + \ldots + \theta_{53}\omega_2 + \ldots + \theta_{54}\omega_2 + \ldots + \theta_{61}\omega_2 + \ldots + \theta_{51}\omega_2 \\ & + \ldots + \theta_{52}\omega_2 + \ldots + \theta_{53}\omega_2 + \ldots + \theta_{54}\omega_2 + \ldots + \theta_{62}\omega_2 + \ldots + \theta_{63}\omega_2 + \ldots + \theta_{64}\omega_2 \\ & + \ldots + \theta_{65}\omega_2 + \ldots + \theta_{71}\omega_2 + \ldots + \theta_{72}\omega_2 + \ldots + \theta_{73}\omega_2 + \ldots + \theta_{74}\omega_2 + \ldots + \theta_{75}\omega_2 \\ & + \ldots + \theta_{76}\omega_2 + \ldots + \theta_{81}\omega_2 + \ldots + \theta_{87}\omega_2 + \ldots\ldots + \theta_{n-1,1}\,\omega_2 + \ldots + \theta_{n-1,n-2}\,\omega_2 \\ & + \ldots + \theta_{n1}\omega_2 + \ldots + \theta_{n,n-1}\,\omega_2 + \theta_{32}\omega_2 \qquad \ldots\ldots (6)\end{aligned}$$

dove nel 2° membro tra θ_{ih} e θ_{ik} $(i = 3, 4, \ldots n;\ h, k = 1, 2, \ldots, i-1)$ deve supporsi scritto quanto precede θ_{i1}, tranne θ_{n0}. Per descrivere facilmente la ω'_n chiameremo permutazione iniziale relativa alle operazioni $\theta_{i1}, \theta_{i2}, \ldots \theta_{i,i-1}, (i = 3, \ldots n)$, la permutazione principale, cioè il risultato della θ_{n0}, se percorrendo il 2° membro da destra a sinistra a partire dalla θ_i considerata non si incontra alcuna $\theta_{i+1,1}$; se invece si incontra una o più $\theta_{i+1,1}$, chiameremo permutazione iniziale relativa alla θ_i considerata il risultato della $\theta_{i+1,1}$ che le è più vicina a sinistra.

La descrizione della ω'_n è quindi la seguente:

1° L'operazione θ_{n0} consiste nello scrivere una qualunque permutazione degli n elementi dati;

2° ω_2 è un'operazione che consiste nello scambio dei primi due elementi di una permutazione e deve eseguirsi sul risultato della θ che le sta immediatamente a sinistra;

3° θ_{ij} è un'operazione che deve eseguirsi sulla permutazione iniziale ad essa relativa o su una delle permutazioni ottenute posteriormente (cioè ottenute dopo la suddetta iniziale relativa e prima di eseguire essa θ_{ij}) e consiste nello scambiare l'elemento i^{mo} con uno di quelli che lo precedono e che nella permutazione iniziale relativa alla θ_{ij} ed in quelle ottenute posteriormente ad essa, non hanno ancora occupato l'ultimo posto:

Esaminando il 2° membro della (6) si vede che:

1° ogniqualvolta si esegue l'operazione θ_{ij} $(i \geq 3)$, su una permutazione A già formata, bisogna eseguire sul risultato di tale θ_{ij} quelle stesse operazioni che si sono fatte sulla permutazione principale e su quelle da essa dedotte prima di eseguire la θ_{i1} che è destra di θ_{n0} e che si trova più vicina ad essa (vale a dire prima di eseguire per la 1ª volta la θ_{i1});

2° tutte le permutazioni ottenute prima di eseguire per la prima volta la θ_{i1}, ($i \geq 3$), hanno comuni gli ultimi $n-i$ elementi;

3° ogniqualvolta si esegue una θ_{ij} su una permutazione, le operazioni posteriori ad essa ed anteriori alla $\theta_{i,j+1}$ più vicina ed a destra di θ_{ij}, hanno per scopo di permutare in $(i-1)!-1$ modi i primi $i-1$ elementi della permutazione ottenuta quale risultato della θ_{ij}.

Le permutazioni ottenute eseguendo la ω'_n sono evidentemente tutte differenti; è anche facile convincersi che sono $n!$. Infatti esse sono tante quante sono complessivamente le θ ed ω_2 contenute nel 2° membro della (6), giacchè a ciascuna θ ed ω_2 corrisponde una di tali permutazioni, la quale ne è il risultato. Sia ν_i il numero dei simboli θ ed ω_2 che compaiono nell'espressione di ω'_i. Sarà ν_i-1 il numero di quelli che compaiono nell'espressione di ω_i. Allora supponendo nella (4) sostituite alle ω_{n-1} le loro espressioni mediante le ω_2, compariranno nel 2° membro $n(\nu_{n-1}-1)+n=n\nu_{n-1}$ simboli. Si ha quindi

$$\nu_n = n\nu_{n-1}.$$

Ma è pure

$$n! = n(n-1)!$$

quindi:

$$\nu_n = n!$$

Consideriamo ancora la (4). Sostituendo ad ω_{n-1} seguente θ_{n0} la sua espressione mediante ω_{n-2}, (si ricava dalla (5) supponendo $i=n-1$), essa diventa:

$$\omega'_n = (\theta_{n0}\omega_{n-2} + \theta_{n-1,1}\,\omega_{n-2} + \ldots + \theta_{n-1,n-2}\,\omega_{n-2}) + \theta_{n1}\omega_{n-1} + \ldots + \theta_{n,n-1}\,\omega_{n-1}$$

Ora le permutazioni ottenute eseguendo le $\theta_{n0}, \theta_{n-1,1}, \ldots \theta_{n-1,n-2}$ hanno tutte in comune l'ultimo elemento, ed in esse tutti gli elementi, all'infuori di quest'ultimo, compaiono al penultimo posto, uno per ciascuna permutazione. Supponiamo che la θ_{n1} sia eseguita sulla permutazione principale (la sua iniziale relativa) e le $\theta_{n2}, \theta_{n3}, \ldots \theta_{n,n-1}$ rispettivamente sui risultati delle $\theta_{n-1,1}, \theta_{n-1,2} \ldots \theta_{n-1,n-2}$. Poichè ciascuna θ_{ij} consiste nello scambio dell'ultimo elemento con uno di quelli che nelle permutazioni già formate non hanno ancora occupato l'ultimo posto, per eseguire le $\theta_{n1}, \theta_{n2}, \ldots \theta_{n,n-1}$ occorre scambiare gli ultimi due elementi nelle permutazioni ottenute mediante $\theta_{n0}, \theta_{n-1,1}, \ldots \theta_{n-1,n-2}$. Eseguendo le $\theta_{n1}, \ldots \theta_{n,n-1}$ in siffatto modo e supponendo che ciascuna ω_{n-1} consti di scambi tra due elementi consecutivi, si vede che anche la ω'_n consterà (tranne la θ_{n0}) di scambi tra elementi consecutivi, sarà cioè ridotta *a forma singolare.*

Ciò che si è detto per ω'_n si può ripetere per ω'_{n-1}. Supponendo che le ω_{n-2} dalle quali dipende una ω'_{n-1} constino di soli scambi tra elementi consecutivi, e disponendo opportunamente delle θ_{n-2} in essa contenute, potremo ridurla a forma singolare. Così continuando si conclude che:

Affinchè la ω'_n consti, tranne l'operazione θ_{n0}, di scambi tra elementi consecutivi è sufficiente 1° che qualunque sia θ_{ij}, $(i > 3)$, l'operazione $\omega_2 + \theta_{31}\omega_2 + \theta_{32}\omega_2$ seguente essa θ_{ij} si componga degli scambi degli elementi 1° e 2°, 2° e 3°, 1° e 2°, 2° e 3°, 1° e 2°, dei quali il 1° va eseguito sul risultato della θ_{ij} e ciascuno dei rimanenti sul risultato del precedente; 2° che la θ_{ij}, qualunque sia $i > 3$, consista nello scambio degli elementi che occupano i posti i^{mo} ed $(i-1)^{mo}$ e debba eseguirsi sulla sua permutazione iniziale relativa se $j = 1$ e sulla $\theta_{i-1,j-1}$ immediatamente a destra della θ colla quale si è ottenuta essa permutazione iniziale relativa, se $j \neq 1$.

Sviluppo della ω'_n in prodotto continuo. — Consideriamo ancora la (6) ed una delle θ_{ij} del 2° membro. Tra le permutazioni sulle quali essa può eseguirsi, si trova sempre quella ottenuta quale risultato della ω_2 immediatamente a sinistra. Immaginando ora che ciascuna θ_{ij} sia eseguita sul risultato della ω_2 che le sta immediatamente a sinistra, il 2° membro della (6) conterrà operazioni (tranne la θ_{n0}) tali che ciascuna dovrà eseguirsi sul risultato della precedente. Possiamo pertanto mettere la ω'_n sotto forma di prodotto continuo, scrivendo

$$\omega'_n = \theta_{n0}\omega_2\theta_{31}\omega_2\theta_{32}\omega_2\theta_{41}\omega_2\theta_{31}\omega_2\theta_{32}\omega_2\theta_{42}\omega_2 \dots \theta_{n,n-1}\omega_2 \dots \theta_{12}\omega_2 \qquad (6')$$

convenendo che θ_{ij} rappresenti (tranne θ_{n0}) un'operazione da eseguirsi sul risultato della ω_2 immediatamente a sinistra e che consiste nello scambio dell'elemento i^{mo} con uno di quelli che nella permutazione iniziale ad essa relativa occupano i primi i posti e che nè in essa, nè in quelle ottenute posteriormente ad essa, hanno ancora occupato l'i^{mo} posto.

Notiamo in particolare i seguenti sviluppi di ω'_4 ed ω'_5 in prodotto continuo, utilissimi per la formazione delle permutazioni di 4 e 5 elementi.

$$\omega'_4 = \theta_{40}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}\sigma_{14}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}\sigma_{24}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}\sigma_{34}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}$$

$$\omega'_5 = \theta_{50}\omega_4\sigma_{15}\omega_4\sigma_{15}\omega_4\sigma_{15}\omega_4\sigma_{15}\omega_4$$

dove si è posto

$$\omega_4 = k\,\sigma_{14}\,k\,\sigma_{24}\,k\,\sigma_{24}\,k$$

ed è

$$k = \sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{12}.$$

Segno delle permutazioni. — Il 4° metodo per formare le permutazioni di n elementi differenti ci permette di determinare con facilità il segno di ciascuna. Infatti si determini dapprima il segno della permutazione principale, sia esso ad es. il segno $+$; la 2ª permutazione avrà il segno $-$, la 3ª se dedotta dalla 1ª avrà segno $-$, se dalla 2ª avrà segno $+$. In generale il segno di una permutazione è il segno contrario a quello della permutazione dalla quale si ottiene mediante lo scambio di due elementi. Se la ω'_n è sviluppata in prodotto continuo, allora ciascun scambio deve eseguirsi sul risultato dello scambio precedente, quindi il segno della 1ª permutazione scritta, sarà pure quello delle permutazioni 3ª, 5ª, 7ma e c... mentre le permutazioni 2ª, 4ª, 6ª,... avranno segno contrario.

§ 2. Formazione rapida delle combinazioni e disposizioni semplici m ad m di n cose.

Ci occorrerà in seguito di saper formare con prontezza le combinazioni n ad n di m cose diverse ($n \leq m$). Il metodo che esponiamo è di molta importanza pratica.

Si debbano ad es. formare le combinazioni tre a tre dei cinque numeri 1, 2, 3, 4, 5. Disponiamoli in un ordine qualunque per esempio 3, 4, 2, 1, 5; otteniamo così una successione di elementi che diremo *fondamentale*. Coi primi tre di essi formiamo una prima combinazione la (3 4 2), che diremo iniziale. Le altre si deducono da essa nel seguente modo. Sostituendo all'ultimo elemento ciascuno di quelli che lo seguono nella successione fondamentale, abbiamo le combinazioni (3 4 1), (3 4 5). Da ciascuna di queste possiamo ottenerne una o più sostituendo al penultimo elemento, cioè il 2º, ciascuno di quelli elementi che nella successione fondamentale sono compresi per posizione tra esso ed il 3º elemento della combinazione che si considera. E così tra gli elementi 4 ed 1 della (3 4 1) è compreso nella successione fondamentale il solo elemento 2, dimodochè dalla (3 4 1) si può derivare soltanto la (3 2 1); invece tra gli elementi 4 e 5 della (3 4 5) sono compresi nella successione fondamentale gli elementi 2, 1, dimodochè dalla (3 4 5) si deriveranno le (3 2 5), (3 1 5). Da ciascuna delle combinazioni (3 2 1), (3 2 5), (3 1 5) deriviamone una o più sostituendo al 1º elemento, uno ad uno, quelli che nella successione fondamentale, sono compresi tra esso ed il 2º della combinazione considerata. E così dalla (3 2 1) si deriverà soltanto la (4 2 1), giacchè tra gli elementi 3 e 2 di essa è compreso nella successione fondamentale solamente l'elemento 4; similmente dalla (3 2 5) si deriva soltanto la (4 2 5), e dalla (3 1 5) si derivano le (4 1 5), (2 1 5). Abbiamo quindi formate le combinazioni (3 4 2) (3 4 1) (3 4 5) (3 2 1) (3 2 5) (3 1 5) (4 2 1) (4 2 5) (4 1 5) (2 1 5), le quali evidentemente sono tutte le combinazioni tre a tre degli elementi dati.

Se gli elementi dati sono n, la norma da seguirsi per formarne le combinazioni m ad m è la seguente:

Si scrive la successione fondamentale disponendo gli elementi dati in un ordine qualunque; poscia si assume quale combinazione iniziale quella che contiene i primi m *elementi della successione fondamentale. Da tale combinazione si deduce una prima serie di combinazioni, sostituendo all'*m^{mo} *elemento, uno ad uno, quelli che nella successione fondamentale lo seguono. Dalle combinazioni della 1ª serie si deducono quelle di una 2ª serie sostituendo in ciascuna all'*$(\mathrm{m}-1)^{\mathrm{mo}}$ *elemento, uno ad uno, quelli che nella successione fondamentale sono compresi tra esso e l'*n^{mo} *della combinazione considerata. Dalle combinazioni della 2ª serie si deducono quelle di una terza serie sostituendo in ciascuna all'*$(\mathrm{m}-2)^{\mathrm{mo}}$ *elemento, uno ad uno, quelli che nella successione fondamentale sono compresi tra esso e l'*$(\mathrm{m}-1)^{\mathrm{mo}}$ *della combinazione considerata.... E così si continua fino a costrurre l'*m^{ma} *serie di combinazioni. In generale, ottenuta la serie* i^{ma}, *si costruisce la serie* $(i+1)^{\mathrm{ma}}$ *sostituendo in ciascuna combinazione della serie* i^{ma}, *all'elemento* $(\mathrm{m}-\mathrm{i}+1)^{\mathrm{mo}}$, *uno ad uno, quelli che nella successione fondamentale sono compresi tra esso e l'*$(\mathrm{m}-\mathrm{i}+2)^{\mathrm{mo}}$ *della combinazione considerata.*

Per es. le combinazioni tre a tre degli elementi 1, 2, 3, 4, 5, 6 assumendo la 1, 2, 3, 4, 5, 6, quale successione fondamentale sono:

(1 2 3)	combinazione iniziale		
(1 2 4), (1 2 5), (1 2 6)	dedotte dalla	(1 2 3)	I serie
(1 3 4)	"	(1 2 4)	II serie
(1 3 5), (1 4 5)	"	(1 2 5)	
(1 3 6), (1 4 6), (1 5 6)	"	(1 2 6)	
(2 3 4)	"	(1 3 4)	III serie
(2 3 5)	"	(1 3 5)	
(2 4 5), (3 4 5)	"	(1 4 5)	
(2 3 6)	"	(1 3 6)	
(2 4 6), (3 4 6)	"	(1 4 6)	
(2 5 6), (3 5 6), (4 5 6)	"	(1 5 6)	

In tutto $\binom{6}{3} = 20$ combinazioni.

Si può provare che il numero delle combinazioni ottenute col metodo dianzi indicato e $\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}$. Infatti abbiamo dapprima una combinazione iniziale dalla quale si deducono $n-m$ combinazioni appartenenti alla 1ª serie. Dalla prima combinazione della 1ª serie se ne deduce una della 2ª serie, dalla 2ª se ne deducono due, dalla terza tre ecc. dalla $(n-m)^{\mathrm{ma}}$, $n-m$; il numero delle combinazioni della 3ª serie è dunque $1+2+\ldots+(n-m)$. Similmente provasi che le combinazioni della 3ª serie sono in numero di $1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+[1+2+\ldots+(n-m)]$ ecc.... In generale ponendo

$$F_{n-m,0}=1$$

$$F_{n-m,1}=n-m$$

$$F_{n-m,2}=F_{1,1}+F_{2,1}+\ldots+F_{n-m,1}=1+2+\ldots+(n-m)$$

$$\vdots$$

$$F_{n-m,q}=F_{1,q-1}+F_{2,q-1}+\ldots+F_{n-m,q-1}$$

si ha che il numero delle combinazioni della serie q^{ma} è $F_{n-m,q}$. Il numero F_{pq} suolsi chiamare (*) p^{mo} numero figurato d'ordine q. Si sa che:

$$F_{p,q}=F_{p,q-1}+F_{p-1,q}$$

e pertanto

$$F_{p,q}=F_{p-1,q}+F_{p-1,q-1}+\ldots+F_{p-1,1}+F_{p,0} \tag{1}$$

essendo $F_{p,0}=1$. Si sa inoltre che

$$\binom{n}{m}=F_{n-m+1,m}.$$

Supponendo adunque nella (1) $q=m$; $p=n-m+1$, si ha:

$$F_{n-m+1,m}=F_{n-m,m}+F_{n-m,m-1}+\ldots+F_{n-m,1}+1$$

ossia

$$F_{n-m+1,m}=\binom{n}{m}$$

è il numero delle combinazioni appartenenti alle serie m^{ma}, $(m-1)^{ma}$... 2ª, 1ª, oltre la combinazione iniziale.

Disposizioni. — Dopo quanto abbiamo detto la formazione rapida delle disposizioni m ad m di n cose diverse non offre difficoltà. Formate le combinazioni m ad m, formeremo cogli elementi di ciascuna tutte le permutazioni possibili seguendo uno dei metodi indicati. Queste saranno tutte le disposizioni m ad m delle n cose date.

(*) LUCAS, *Théorie des nombres*, Paris 1891, pag. 56 e seg. Ivi però è rappresentato col simbolo F_p^q.

§ 3. Formazione rapida e rappresentazione delle permutazioni di n elementi non tutti differenti.

Dei metodi indicati per formare rapidamente le permutazioni di n elementi differenti, soltanto il 4° si può applicare alla formazione delle permutazioni di n elementi non tutti differenti. Basta adunque scrivere una di tali permutazioni ed eseguire su essa e su quelle che da essa si deducono le operazioni che abbiamo rappresentato coi simboli θ_y ed ω_2. nell'ordine indicato nel 2° membro della (6, § 1°). Bisogna però in ogni caso avere l'avvertenza di considerare quale risultato dello scambio di due elementi uguali di una permutazione, la permutazione stessa.

Se vogliamo ad es. formare le permutazioni degli elementi 1, 1, 2, 3, 3. Una di esse (principale) è la (1 1 2 3 3), dalla quale, scambiando i primi due elementi, si ha la permutazione stessa. Scambiando il 3° elemento con uno di quelli che lo precedono, per es. con quello che si trova alla sua sinistra si ha la (1 2 1 3 3), dalla quale, scambiando i primi due elementi si ha la (2 1 1 3 3). Così ci accorgiamo che al 3° posto sono già comparsi gli elementi 2 (una volta) ed 1 (2 volte), cioè ciascuno degli elementi differenti che occupano i primi tre posti nella permutazione principale. Possiamo anche dire che le permutazioni formate hanno comuni gli ultimi due elementi ed in esse i primi tre elementi sono stati permutati in tutti i modi possibili. Scambiando in una delle permutazioni ottenute, per es. l'ultima, il 4° elemento con uno di quelli che sono da esso differenti e che lo precedono, per es. con quello che gli sta a sinistra, si ha la (2 1 3 1 3) e permutando in essa i primi tre elementi in tutti i modi possibili si hanno le (1 2 3 1 3), (1 3 2 1 3), (3 1 2 1 3), (3 2 1 1 3), (2 3 1 1 3). Scambiando in una delle permutazioni ottenute, per es. la (3 1 2 1 3) il 4° elemento, con uno di quelli che sono differenti da esso, che lo precedono e che nelle permutazioni formate non hanno ancora occupato il quarto posto, per es. col 3° elemento, si ha la (3 1 1 2 3): dalla quale, permutando in tutti modi possibili i primi tre elementi, si hanno le (1 3 1 2 3), (1 1 3 2 3). Così si sono già formate tutte le permutazioni che hanno comuni l'ultimo elemento che è un 3. ed in esse i primi quattro elementi sono permutati in tutti i modi possibili. Continuiamo adunque scambiando in una delle permutazioni ottenute, per es. l'ultima, il 5° elemento con uno di quelli che lo precedono e sono da esso differenti per es. col 4°; avremo la (1 1 3 3 2) dalla quale, permutando in tutti i modi possibili i primi quattro elementi, otteniamo le (13132), (31132), (31312), (13312), (33112). In una di tutte le permutazioni già formate, per es. l'ultima, scambiamo il 5° elemento con uno di quelli ad esso non uguali e che non hanno ancora occupato il 5^0 posto, per es. col 4^0; otteniamo la (3 3 1 2 1), dalla quale, permutando in tutti i modi possibili i primi quattro elementi, si hanno le (3 1 3 2 1), (1 3 3 2 1), (1 3 2 3 1), (3 1 2 3 1), (3 2 1 3 1), (2 3 1 3 1), (2 1 3 3 1), (1 2 3 3 1), (3 2 3 1 1), (3 3 2 1 1), (2 3 3 1 1). Le permutazioni formate sono evidentemente tutte le permutazioni degli elementi dati. Si sa poi che il numero N delle permutazioni di n elementi tra i quali β_1 uguali tra loro, β_2 pure uguali, ... β_r pure uguali, $(\beta_1 + \ldots \beta_r = n)$, è

$$N = \frac{n}{\beta_1! \, \beta_2! \ldots \beta_r!}.$$

Segno delle permutazioni di n numeri non tutti differenti. — Se gli n elementi dati sono n numeri si può assumere quale permutazione principale quella nella quale sono disposti in ordine crescente. Se ad es. tra gli n numeri dati ve ne sono v_1 uguali ad **1**, v_2 uguali a $2, \ldots v_r$ uguali ad r, si può assumere come permutazione principale la $(11 \ldots 122 \ldots 2 \ldots rr \ldots r)$. Essendo allora ε_1 ed ε_2 due elementi differenti di un'altra permutazione si dirà che essi fanno inversione se $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ e se ε_1 si trova a sinistra di ε_2; quindi il numero delle inversioni contenute nella permutazione principale, cioè formate da due elementi qualunque differenti di essa, è zero. Al solito si dirà che una permutazione è di classe pari o dispari, oppure che ad essa compete il segno + od il segno —, secondochè il numero delle inversioni in essa contenute è pari o dispari. Riguardando lo zero come numero pari si attribuirà alla permutazione principale il segno +. È poi evidente che se in una permutazione si scambiano due elementi differenti e consecutivi si ottiene una permutazione che ha un'inversione di più o di meno della precedente; pertanto le due permutazioni sono di segno contrario.

In una permutazione i cui elementi sono numeri non tutti diversi, mettiamo in evidenza due elementi u e v ed indichiamo con A il gruppo degli elementi precedenti u, con B quello degli elementi seguenti v e supponiamo v a destra di u. Siano poi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ gli elementi posti tra u e v. Scriveremo tal permutazione nel seguente modo: $(Au\alpha_1 \ldots \alpha_\nu vB)$.

Consideriamo i seguenti scambi di due elementi: 1^0 di u con α_1, 2^0 di u con α_2..; ν^{mo} di u con α_ν, $(\nu+1)^{mo}$ di u con v; $(\nu+2)^{mo}$, di v con α_ν, $(\nu+3)^{mo}$ di v con $\alpha_{\nu-1}, \ldots (2\nu+1)^{mo}$ di v con α_1, ed eseguiamo il 1^0 sulla permutazione suddetta e ciascuno degli altri sul risultato dello scambio precedente. La permutazione ottenuta eseguendo l'ultimo scambio è la $(Av\alpha_1 \ldots \alpha_\nu uB)$ che si può derivare dalla data scambiando gli elementi u e v; noi invece per ottenerla abbiamo operato $2\nu + 1$ scambi tra elementi consecutivi. Sia η_u ed η_v il numero degli elementi rispettivamente uguali ad u e v contenuti nella successione $\alpha_1, \dots \alpha_r$. Nel passare da una permutazione alla successiva, eseguendo i suddetti scambi, si ha un cambiamento di segno soltanto quando gli elementi scambiati sono differenti; pertanto il numero totale dei cambiamenti di segno sarà $2_r + 1 - \eta_u - \eta_v$, che è pari o dispari secondochè lo è $\eta_u + \eta_v + 1$. Pertanto la permutazione $(Av\alpha_1 \dots \alpha_r uB)$ avrà o non avrà lo stesso segno della $(Au\alpha_1 \dots \alpha r B)$ secondochè $\eta_u + \eta_v + 1$ è pari o dispari, ossia secondochè $\eta_u + \eta_v$ è dispari o pari (si considera pari anche lo zero).

Adunque: *se in una permutazione di elementi (numeri) non tutti diversi si scambiano due elementi differenti la nuova permutazione ottenuta ha segno uguale o contrario a quello della data secondochè il numero degli elementi compresi (per posizione) tra quelli scambiati ed uguali all'uno od all'altro di essi è dispari o pari.*

Es. nella permutazione (2 3 4 5 2 3 1 3 5 2) sono contenute 19 inversioni, quindi ad essa compete il segno —; nella (2 5 4 5 2 3 1 3 3 2), ottenuta dalla prima scambiando gli elementi 2° e 9°, sono contenute 25 inversioni e quindi il segno di essa è —. Gli elementi che nella permutazione data sono compresi tra il 2° ed il 9° (i quali sono un 3 ed un 5) sono 4, 5, 2, 3, 1, 3. Tra questi ve ne sono due uguali a 3 ed uno uguale a 5; quindi il numero di quelli uguali a 3 od a 5 è tre; tal numero è dispari, quindi senza contare le inversioni contenute nella 2ª permutazione potevamo essere sicuri che essa avrebbe avuto segno uguale a quello della data.

Riguardo al segno delle permutazioni di n numeri non tutti differenti, osserviamo che la permutazione principale ha il segno + e che per ciascuna delle altre si può determinare facilmente il segno, giacchè ognuna di esse si deduce da una permutazione di segno noto mediante lo scambio di due elementi differenti. Osserviamo ancora che nel formare le suddette permutazioni, c'è una certa libertà nello scegliere la permutazione sulla quale si deve eseguire ciascun scambio ed approfittando di tale libertà potremo, mediante una scelta opportuna, operare soltanto scambi tra due elementi consecutivi (le permutazioni degli elementi 1, 1, 2, 3, 3 dell'es. dianzi trattato, si sono appunto formate operando solamente scambi tra due elementi consecutivi). Procedendo in tal modo otteniamo permutazioni tali che ciascuna è di segno contrario a quella dalla quale è stata dedotta.

Figurazione delle permutazioni di n elementi non tutti diversi. — È noto (*) come le permutazioni di n elementi diversi possono essere figurate mediante gruppi di n caselle scelte in una matrice quadrata di lato n, per modo che di quelle di ciascun gruppo una ed una sola appartenga a ciascuna orizzontale e verticale della matrice. Anche le permutazioni di elementi non tutti differenti possono essere figu-

(*) Cfr. LUCAS, *op. cit.*, pag. 65 e seg.

rate mediante gruppi di elementi scelti opportunamente in una matrice rettangolare.

Si considerino ad es. le permutazioni dei nove elementi $b\,c\,d\,h\,d\,c\,d\,h\,h$ tra i quali quelli differenti sono: l'elemento b preso una volta, l'elemento c preso due volte, l'elemento d preso tre volte e l'elemento h preso tre volte. Formata la matrice

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} & a_{39} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} & a_{49} \end{vmatrix}$$

di dimensioni $\longrightarrow 9$ e $\updownarrow 4$ (nella quale cioè ogni orizzontale contiene 9 elementi ed ogni verticale 4) si chiami con G un gruppo di elementi scelti in essa in modo che: ogni verticale della matrice ne contenga uno e le orizzontali 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, ne contengano rispettivamente 1. 2, 3, 3 (tali sono i numeri che indicano quante volte gli elementi differenti b, c, d, h della successione $b, c, d, h, d, c, d, h, h$ sono contenuti in essa. Sia ad es. $G = (a_{11}\,a_{24}\,a_{26}\,a_{32}\,a_{38}\,a_{39}\,a_{43}\,a_{45}\,a_{47})$.

A tal gruppo possiamo far corrispondere una permutazione dei nove elementi dati convenendo che ad ogni a_{ij} corrisponda l'elemento b, o c, o d, od h secondochè $i = 1, 2, 3, 4$ (cioè si fa corrispondere ad a_{ij} quello degli elementi b, c, d, h che nella successione data è preso i volte) ed assegnando a tal elemento il posto j^{mo}. La permutazione corrispondente al gruppo G considerato è la $(b\,d\,h\,c\,h\,c\,h\,d\,d)$. Viceversa data una permutazione dei suddetti elementi per es. la $(c\,h\,c\,h\,d\,b\,d\,h\,d)$ sostituiamo a ciascun elemento di essa l'elemento a_{ij} ritenendo $i = 1, 2, 3, 4$ secondochè l'elemento sostituito è b, c, d, h ed assumendo per j il valore $1, 2, 3, \ldots$ secondochè l'elemento sostituito occupa il posto 1°, 2°, 3°, ... Avremo il gruppo di elementi $(a_{21}\,a_{42}\,a_{23}\,a_{44}\,a_{35}\,a_{16}\,a_{37}\,a_{48}\,a_{39})$, che evidentemente è uno dei possibili gruppi G. Pertanto ad ogni gruppo G di elementi scelti nella matrice suddetta corrisponde una permutazione dei nove elementi dati e viceversa, ad ogni permutazione un gruppo; quindi i gruppi G si possono assumere quali gruppi figurativi delle permutazioni degli elementi dati. In generale se gli elementi dati sono n e tra questi ve ne sono h_1 uguali tra loro, h_2 pure uguali tra loro, $\ldots h_r$ uguali tra loro, $(h_1 + h_2 + \ldots \ldots + h_r) = n$, si possono figurare le permutazioni di tali elementi mediante gruppi di elementi a_{ij} scelti in una matrice rettangolare di dimensioni $\longrightarrow n$ ed $\updownarrow r$, cioè di n verticali ed r orizzontali, in modo che ogni verticale della matrice ne contenga uno solo e le orizzontali 1ª, 2ª, ... r^{ma} ne contengano rispettivamente $h_1, h_2, \ldots h_r$. Vedremo in seguito che la figurazione delle permutazioni di elementi non tutti diversi è un caso particolare della figurazione di speciali aggruppamenti di elementi dati, dei quali ci occuperemo tra breve.

§ 4. Metodi per sviluppare rapidamente i determinanti.

I metodi dianzi esposti per formare rapidamente le permutazioni di n elementi diversi, possono tutti applicarsi allo sviluppo rapido dei determinanti. Però, dal punto di vista pratico, è preferibile l'applicazione dei primi tre.

Sia dapprima

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

il determinante da svilupparsi. La notissima definizione di determinante si compendia nell'uguaglianza

$$\Delta = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn}$$

cioè il valore Δ del determinante si ottiene sommando algebricamente il prodotto $a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn}$ e quelli che da esso si ottengono tenendo fissi i primi (secondi) indici della a e permutando in tutti i modi possibili i secondi (primi), assumendo poi per segno di ciascun prodotto quello della permutazione dei secondi (primi) indici. Se $(\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_n)$ è adunque una permutazione degli elementi $1, 2, \dots n$ sarà $a_{1,\alpha_1}\, a_{2,\alpha_2} \dots a_{n,\alpha_n}$ un termine del determinante e ad esso competerà il segno di $(\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_n)$. Per scrivere i termini del determinante basterà adunque scrivere le permutazioni dei numeri $1, 2, \dots n$, seguendo uno dei tre primi metodi (è convenientissimo il 1°) e poi a sinistra degli elementi 1°, 2°, ... di ciascuna scrivere i segni $a_1\, a_2 \dots a_n$ disponendoli rispetto agli elementi di ciascuna permutazione come sono disposti nel prodotto $a_{1,\alpha_1} \dots a_{n,\alpha_n}$ rispetto ad $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$. Il segno di ciascun termine si determinerà poi colla massima facilità, giacchè corrispondentemente a ciascuna permutazione $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ si può subito scrivere il relativo segno.

Consideriamo ora il caso nel quale gli elementi di un determinante sono numeri non rappresentati coi segni $a_{11}, \dots a_{nn}$, ma con altri segni qualsiasi. Ad es. si debba sviluppare il determinante

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Premettiamo anzitutto un'osservazione. Sia $\pm\, a_{1,\alpha_1}\, a_{2,\alpha_2} \dots a_{n,\alpha_n}$ un termine del suddetto determinante Δ. Se nella permutazione $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ dei secondi indici delle a si scambiano due elementi α_i, α_j si ha una permutazione di segno contrario a quello della $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$. Essa è la

$(\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}\ \alpha_j\ \alpha_{i+1} \ldots \alpha_{j-1}\ \alpha_i\ \alpha_{j+1} \ldots \alpha_n)$ e le corrisponde il termine $\pm\, a_{1,\alpha_1} \ldots a_{i,\alpha_j} \ldots a_{j,\alpha_i} \ldots a_{n,\alpha_n}$ di Δ.

$$\Delta = \left| \begin{array}{ccccccc}
a_{11} & \ldots & a_{1\alpha_i} & \ldots & a_{1\alpha_j} & \ldots & a_{1n} \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
a_{i1} & \ldots & a_{i\alpha_i} & \text{———} & a_{i\alpha_j} & \ldots & a_{in} \\
\vdots & & | & \times & | & & \vdots \\
a_{j1} & \ldots & a_{j\alpha_i} & \text{———} & a_{j\alpha_j} & \ldots & a_{jn} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \ldots & a_{n,\alpha_i} & \ldots & a_{n,\alpha_j} & \ldots & a_{nn}
\end{array} \right|$$

Si osservi che il termine $\pm\, a_{1,\alpha_1} \ldots a_{i,\alpha_j} \ldots a_{j,\alpha_i} \ldots a_{n,\alpha_n}$ si deduce dal termine $\pm\, a_{1,\alpha_1} a_{2,\alpha_2} \ldots a_{n,\alpha_n}$ sostituendo ai fattori a_{i,α_i}, a_{j,α_j}, collegati nella figura soprastante colla freccia $\searrow$, rispettivamente i fattori a_{j,α_i}, a_{i,α_j} collegati colla freccia $\swarrow$, e cambiando il segno. Se gli elementi di Δ sono numeri, una simile sostituzione si fa colla massima facilità; basta sostituire a due elementi, due altri i quali, coi primi sono ai vertici di uno stesso rettangolo. Per es. si vede subito che agli elementi 2 e -2 rispettivamente delle orizzontali 2ª e 4ª di δ, dovrebbero sostituirsi gli elementi 3 ed 1 delle orizzontali 4ª e 2ª. Gli elementi a_{j,α_i}, a_{i,α_j} si diranno coniugati degli elementi a_{i,α_i}, a_{j,α_j} e precisamente a_{j,α_i}, sarà coniugato di a_{i,α_i} ed a_{i,α_j} di a_{j,α_j}; due fattori coniugati appartengono adunque ad una stessa verticale di Δ e precisamente due elementi di Δ (appartenuti a linee differenti) ed i loro coniugati sono ai vertici di uno stesso rettangolo. Considereremo l'operazione che consiste nel sostituire a due fattori di un termine di δ aventi i posti i^{mo} ed j^{mo} i fattori coniugati, come correlativa di quella che consiste nello scambiare in una permutazione di n cose gli elementi aventi i posti i^{mo} ed j^{mo}.

Dei metodi esaminati relativamente alla formazione rapida delle permutazioni di n numeri $1, 2, \ldots n$ (sono anche questi n cose diverse), il 1° ed il 3° sono particolarmente importanti per l'applicazione che se ne può fare allo sviluppo rapido dei determinanti. Mostriamo ad es. come si possano scrivere rapidamente i termini di δ applicando il 1° metodo. Si cominci a scriverne uno, per esempio il principale $+2.2.3.(-2).3$.

Scritta la permutazione (1 2 3 4 5) degli elementi 1, 2, 3, 4, 5, sappiamo già che per formare le rimanenti seguendo il 1° metodo, si comincia a dedurne altre quattro scambiando in essa gli elementi 1° e 2°, 1° e 3°, 1° e 4°, 1° e 5°. Eseguendo sul termine $+2.2.3.(-2).3$ di δ le operazioni correlative dei suddetti scambi abbiamo altri quattro termini di δ. Adunque ai fattori 1° e 2°, che sono 2 e 2 sostituiremo i fattori coniugati che sono 3 ed 1 ed avremo il termine $-3.1.3.(-2).3$. Similmente sostituendo ai fattori 1° e 3°, 1° e 4°, 1° e 5°, i fattori coniugati abbiamo i termini $-2.2(-1)(-2).3$; $-(-1).2.3.3.3$; $-2.2.3.(-2).3$.

Praticamente c'è però un inconveniente il quale proviene dal fatto che non sempre in un sol modo, con due elementi di un determinante si può formare una coppia i cui elementi abbiano valori determinati. Per esempio la coppia (3, 3) si può formare con due elementi di δ in più di un modo, ad es. cogli elementi 1° e 5° della 1ª orizzontale; 1° della 2ª, e 3° della 3ª; 2° della 4ª e 5° della 5ª ecc.... Ora quando ad es. dal termine principale $+2.2.3.(-2).3$ se ne dovesse dedurre un altro, sostituendo agli elementi 3° e 5° i loro coniugati, bisognerebbe dapprima cercare in δ tali elementi (3 e 3), ed attesa la pluralità delle coppie i cui elementi sono 3 e 3, c'è pericolo di non scegliere la coppia che occorre (la quale nel nostro caso comprende gli elementi 3° della 3ª orizzontale e 2° della 4ª). Tal pericolo può soltanto evitarsi con una faticosa attenzione la quale pregiudica la rapidità ed il buon esito dello sviluppo del determinante δ. Pensiamo però che esso cesserebbe di esistere quando tutti gli elementi di δ fossero differenti, cioè fossero numeri a ciascuno dei quali corrispondesse un segno differente.

Orbene se percorrendo successivamente le orizzontali 1°, 2°, ... di δ da sinistra a destra, noi troviamo parecchi elementi uguali, muniamo il 1° di essi dell'indice 1, il 2° incontrato dell'indice 2, ecc.... e ricordiamoci, quando vediamo scritti ad es. i segni 3_2, -2_2 ecc. ... che essi rappresentano i numeri $3, -2, \ldots$

Vediamo allora che in

$$\delta = \begin{vmatrix} 2_1 & 1_1 & -1_1 & 3_1 & 3_2 \\ 3_3 & 2_2 & -1_2 & 1_2 & 4_1 \\ 2_3 & 0_1 & 3_4 & -1_3 & 2_4 \\ -1_4 & 3_5 & 1_3 & -2_1 & 4_1 \\ 2_5 & -1_5 & 5_1 & 2_6 & 3_6 \end{vmatrix}$$

due elementi qualunque differiscono per il valore, oppure, avendo lo stesso valore differiscono per l'indice; in ogni caso, due elementi qualunque differiscono almeno nella forma, vale a dire i loro segni rappresentativi sono differenti. Allora due qualunque delle coppie formate scegliendo due elementi di δ, differiscono almeno per un elemento, e dovendo cercarne una i cui elementi siano fattori di un dato termine di δ, possiamo trovarla subito pensando che *il 1°, 2°, 3°, ... fattore di un termine di δ, devono cercarsi rispettivamente nella 1ª, 2ª, 3ª, ... orizzontale.* Per es. si trova subito la coppia $(2_2, -2_1)$ del termine principale $+2_1.2_2.3_4.(-2_1).3_6$. Sostituendo in esso ai fattori 1° e 2° i loro coniugati si ha il termine $-3_3.1_1.3_4.(-2).3_6$; sostituendo invece ai fattori 1° e 3° i loro coniugati si ha il termine $-2_3.2_2.(-1_1)$.

$.(-2_1).3_6$. ecc.... si deducono quindi dal termine principale altri quattro termini di δ sostituendo ai fattori 1° e 2°, 1° e 3°, 1° e 4°, 1° e 5°, i loro coniugati. E ricordiamoci bene che se da un termine di δ se ne deduce un altro sostituendo a due fattori del 1° i loro coniugati, i segni dei due termini *sono contrari*.

Consideriamo ancora la permutazione (1 2 3 4 5) e le quattro ottenute scambiando in essa gli elementi 1° e 2°, 1° e 3°. 1° e 4°, 1° e 5°. Per avere le rimanenti permutazioni, seguendo il 1° metodo sappiamo che occorre scambiare in ognuna delle cinque permutazioni già formate il 2° elemento con ciascuno di quelli che lo seguono (3° 4° e 5°). Ora se noi in ciascuno dei cinque termini di δ corrispondenti alle suddette cinque permutazioni (il 1° di tali cinque termini è il principale), eseguiamo le operazioni correlative dei suddetti scambi, cioè ai fattori 2° e 3°, 2° e 4°, 2° e 5°, sostituiamo i loro coniugati, otteniamo da ognuno di essi altri tre termini di δ. Abbiamo in tutto 15 termini che assieme ai cinque già formati costituiscono un gruppo di 20 termini. Se in ognuno di essi sostituiamo ai fattori 3° e 4°, 3° e 5° i loro coniugati abbiamo altri 40 termini, e se infine in ognuno dei 60 termini già formati sostituiamo ai fattori 4° e 5° i loro coniugati abbiamo altri 60 termini di δ. Ormai è chiaro che:

Scritto un termine di un determinante d'ordine n *(per es. il termine principale) si possono ottenere tutti i termini rimanenti eseguendo su esso e su quelli che da esso si deducono, le operazioni correlative di quelle che si eseguiscono sulla permutazione* (1 2 ... n) *e su quelle che da essa si deducono, per avere tutte le permutazioni dei numeri* 1, 2, ... n, *seguendo il 1°, od il 3°, od il 4°, dei metodi già esposti.*

L'operazione correlativa dello scambio degli elementi di una permutazione aventi i posti i^{mo} ed j^{mo} consiste nel sostituire ai fattori aventi i posti i^{mo} ed j^{mo} del prodotto corrispondente a tale permutazione (il qual prodotto è un termine del determinante) i fattori coniugati, che trovansi subito nel determinante dato. Alla permutazione $(1\,2\ldots n)$ corrisponde il termine del determinante formato moltiplicando gli elementi della diagonale principale $\searrow$, ed ha il segno $+$; a due permutazioni, delle quali la 2ª sia dedotta dalla 1ª mediante lo scambio di due elementi, corrispondono termini del determinante aventi segno contrario, ed il 2° di essi si deduce dal 1° eseguendo su questo l'operazione correlativa del suddetto scambio.

Ancora una osservazione. Non occorre affatto per scrivere tutti i termini del determinante dato, di scrivere prima le permutazioni dei numeri $1, 2, \ldots n$, ma soltanto di eseguire le operazioni correlative di quelle che si eseguirebbero se si volessero formare tali permutazioni. Quello che dunque importa conoscere, come appunto noi conosciamo, è l'ordine di successione di tali operazioni.

ALBA, luglio 1902.

(continua) DOTT. NICOLÒ TRAVERSO.

DI UN CERTO ALGORITMO

per lo sviluppo della radice quadrata di un numero intero in frazione continua

Ebbi già occasione di segnalare in questo periodico (Tomo XVII, sett.-ott. 1901), un singolare algoritmo per lo sviluppo della radice quadrata di un numero intero e positivo in frazione continua, e di farne l'applicazione alla dimostrazione di un teorema notabile. Promisi altresì di tornare sull'argomento per giustificare il detto algoritmo, che esposi allora senza dimostrazione; questo è lo scopò della presente nota.

Detta ω la radice quadrata a meno di un'unità di un numero intero e positivo D, l'algoritmo consiste nel formare le potenze consecutive di $\frac{\omega z+D}{z+\omega}$, considerata come indicante una sostituzione lineare sulla lettera z, e formarle nel modo che indicai con l'esempio numerico: $D=19$, $\omega=4$. In questo caso la sostituzione sopra z diviene

$$\frac{4z+19}{z+4}=4+\frac{1}{\frac{z+4}{3}}.$$

Ponendo nel 2° membro di questa eguaglianza $\frac{4z+19}{z+4}$ in luogo di z, si ottiene il quadrato operativo della sostituzione, che è

$$\left(\frac{4z+19}{z+4}\right)_2=4+\frac{1}{\frac{8z+35}{3z+12}}.$$

Separando dalla frazione $\frac{8z+35}{3z+12}$ la parte intera del quoziente della divisione del 1° termine del numeratore pel 1° termine del denominatore, detto quadrato prende la forma

$$\left(\frac{4z+19}{z+4}\right)_2=4+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{3z+12}{2z+11}}}.$$

Si ponga $\frac{4z+19}{z+4}$ invece di z nel 2° membro di questa eguaglianza, e si avrà

$$\left(\frac{4z+19}{z+4}\right)_3=4+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{24z+105}{19z+82}}}.$$

Ovvero, separando dalla frazione $\frac{24z+105}{19z+82}$ la parte intera del quoziente dei termini in z,

$$\left(\frac{4z+19}{z+4}\right)_3 = 4 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{19z+82}{5z+23}}}}.$$

E via dicendo. — I numeri interi e positivi ottenuti come quozienti delle consecutive divisioni, sono i quozienti incompleti consecutivi dell'ordinario sviluppo di $\sqrt{19}$ in frazione continua. E lo stesso avviene applicando un consimile algoritmo alla radice di D, qualora D rappresenti un numero intero e positivo qualsivoglia. — Infatti, supponiamo che ciò si verifichi fino ad una certa potenza della sostituzione lineare

$$\frac{\omega z + D}{z+\omega}$$

e sia la potenza n^{ma}; talchè si abbia

$$\left(\frac{\omega z + D}{z+\omega}\right)_n = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\cfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}}}} \tag{1}$$

dove $a_1, a_2, \ldots a_n$ rappresentano i primi n quozienti incompleti di $\sqrt{D}$. Supponiamo anzi che α, β, γ, δ siano quattro numeri positivi, non escludendo che taluno di essi possa essere zero; ma avvertendo che in ogni caso il determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ dovrà essere positivo ed eguale alla potenza ennesima di $D - \omega^2$, cioè del resto della radice quadrata di D. (*) Supponiamo finalmente (perchè sarà necessario in seguito) che si verifichi la diseguaglianza

$$\delta > \gamma\omega.$$

Dimostreremo che le stesse circostanze si ripetono per la potenza $(n+1)^{ma}$ della sostituzione principale $\frac{\omega z + D}{z+\omega}$. E poichè per $n=1$ le dette circostanze si verificano, come si vede dall'eguaglianza

$$\left(\frac{\omega z + D}{z+\omega}\right)_1 = \omega + \cfrac{1}{\cfrac{z+\omega}{r}}$$

(*) Il lettore se ne persuaderà facilmente ripensando all'esposto algoritmo, e ricordando il noto teorema che: *il determinante del prodotto di due sostituzioni lineari è il prodotto dei determinanti dei fattori.*

nella quale r rappresenta il resto della radice quadrata di D, si concluderà per induzione che esse si verificano qualunque sia n.

Per formare la potenza $(n+1)^{ma}$ della sostituzione $\frac{\omega z + D}{z+\omega}$, si muti z in $\frac{\omega z + D}{z+\omega}$ nel 2° membro della (1), e si avrà

$$\left(\frac{\omega z + D}{z+\omega}\right)_{n+1} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{E + \cfrac{1}{\cfrac{\alpha' z + \beta'}{\gamma' z + \delta'}}}}}$$

dove E indica la parte intera del quoziente

$$\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

e $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$, hanno i seguenti valori:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \alpha' &= \gamma\omega + \delta \\ \beta' &= \gamma D + \delta\omega \\ \gamma' &= \alpha\omega + \beta - (\gamma\omega + \delta)\,E \\ \delta' &= \alpha D + \beta\omega - (\gamma D + \delta\omega)\,E. \end{aligned}$$

Sarà da dimostrare: 1° che α', β', γ' e δ' sono positivi; 2° che E uguaglia il quoziente incompleto $(n+1)^{mo}$ dell'ordinario sviluppo di $\sqrt{D}$ in frazione continua; 3° che $\delta' > \gamma'\omega$.

In quanto alla positività di α', β', γ' e δ', essa è evidente per α', β' e γ', come apparisce dalle (1). Che poi anche δ' è positivo, risulta dall'osservare che il determinante $\alpha'\delta' - \beta'\gamma'$ è positivo ed eguale ad r^{n+1}, epperò δ' non può essere negativa.

Passiamo alla E, parte intera del quoziente

$$\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

e paragoniamola col quoziente incompleto $(n+1)^{mo}$ dello sviluppo di $\sqrt{D}$ in frazione continua. A tal fine facciamo nella (1) $z = \sqrt{D}$, ed avremo

$$\sqrt{D} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\cfrac{\alpha\sqrt{D} + \beta}{\gamma\sqrt{D} + \delta}}}}.$$

Il quoziente completo $(n+1)^{mo}$ relativo a $\sqrt{D}$ è dunque

$$\frac{\alpha\sqrt{D} + \beta}{\gamma\sqrt{D} + \delta}.$$

D'altra parte è noto che il detto quoziente è pure della forma

$$\frac{m+\sqrt{D}}{n}$$

dove m ed n sono numeri interi e positivi. (*) Si avrà dunque

$$\frac{\alpha\sqrt{D}+\beta}{\gamma\sqrt{D}+\delta}=\frac{m+\sqrt{D}}{n}$$

d'onde

$$\alpha n-\gamma m=\delta$$
$$\beta n-\delta m=\gamma D.$$

Moltiplicando la prima di queste eguaglianze per ω e aggiungendola alla seconda:

$$n(\alpha\omega+\beta)-m(\gamma\omega+\delta)=\delta\omega+\gamma D=\omega(\gamma\omega+\delta)+\gamma r;$$

e da questa:

$$\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}=\frac{m+\omega}{n}+\frac{\gamma r}{n(\gamma\omega+\delta)}.$$

Ora, poichè il quoziente incompleto $(n+1)^{mo}$ relativo a $\sqrt{D}$ non è se non la parte intera di $\frac{m+\sqrt{D}}{n}$, eguale a quella di $\frac{m+\omega}{n}$, sarà dimostrato che esso è anche la parte intera di $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$, ove si giunga a stabilire che $\frac{m+\omega}{n}$ ed $\frac{m+\omega}{n}+\frac{\gamma r}{n(\gamma\omega+\delta)}$ hanno la stessa parte intera. E ciò sarà evidente qualora si dimostri che il massimo numero di ennesimi contenuti nella somma

$$\frac{m+\omega}{n}+\frac{\gamma r}{n(\gamma\omega+\delta)}$$

è $m+\omega$, che cioè la frazione $\frac{\gamma r}{n(\gamma\omega+\delta)}$ non monta a $\frac{1}{n}$. (**)

Ma la disuguaglianza

$$\frac{\gamma r}{n(\gamma\omega+\delta)}<\frac{1}{n}$$

si riduce all'altra

$$\gamma r<\gamma\omega+\delta,$$

per dimostrare la quale osserveremo che, essendo

$$r\leq 2\omega,$$

per una nota proprietà del resto dell'estrazione di radice quadrata,

(*) LEGENDRE. *Théorie des nombres.* T. I, § 5.

(**) Di questo mezzo per verificare che due espressioni hanno la stessa parte intera si servì pure il prof. *L. Bosi* per la risoluzione della questione a premio da me proposta in questo periodico (t. XVII, sett.-ott. 1901). — Si veda la mia relazione nel fascicolo di marzo-aprile 1902. — Il premio toccò in sorte al dott. *Paolo Cattaneo.*

si ha pure: $\gamma r \leq 2\gamma\omega$. E poichè si è supposto $\gamma\omega < \delta$ (salvo a dimostrare che anche $\gamma'\omega < \delta'$), sommando le ultime due disuguaglianze membro a membro, si ha per l'appunto

$$\gamma r < \gamma\omega + \delta.$$

Resta a dimostrare che $\gamma'\omega < \delta'$, che cioè

$$\omega[\alpha\omega + \beta - (\gamma\omega + \delta)E] < \alpha D + \beta\omega - (\gamma D + \delta\omega)E.$$

Posto $\omega^2 + r$ invece di D e fatte alcune riduzioni, questa disuguaglianza si riduce all'altra

$$\alpha > \gamma E$$

per dimostrare la quale basterà mettere invece di E la quantità non minore $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$, e verificare che si ha pure:

$$\alpha > \gamma \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}.$$

Ora quest'ultima disuguaglianza si riduce all'altra

$$\alpha\delta - \beta\gamma > 0$$

che è vera, perchè $\alpha\delta - \beta\gamma = r^n$.

G. Frattini.

SOPRA UNO DEGLI ERRORI PRODOTTI DALLA INTERPOLAZIONE SEMPLICE

§ 1. — Si consideri una tavola numerica qualunque, la quale dia i valori di una funzione corrispondenti ai successivi valori di una variabile crescenti in progressione aritmetica (come la tavola dei logaritmi dei numeri, la tavola dei logaritmi delle funzioni circolari, la tavola dei valori naturali delle stesse funzioni,...); e siano y_0 e y_1 i valori della funzione corrispondenti a due valori successivi x_0 e x_1 della variabile. Quando, per avere il valora y della funzione corrispondente a un valore x della variabile compreso fra x_0 e x_1, o, inversamente, per avere il valore x della variabile corrispondente a un valore y della funzione compreso fra y_0 e y_1, si ammette il *principio delle parti proporzionali*, ossia si ammette che sia

$$(1) \quad y = y_0 + (x - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad (2) \quad x = x_0 + (y - y_0)\frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0},$$

è noto che y e x risultano, generalmente, affetti da due errori: uno che deriva dal principio ammesso, il quale è vero solo quando la funzione sia razionale, intera e di primo grado; l'altro che deriva dall'essere i valori y_0 e y_1, dati dalla tavola, approssimati a meno di una mezza unità dell'ultimo ordine e dal supporre che y si calcoli, o sia dato, collo stesso numero di cifre di y_0 e di y_1.

La ricerca di un limite per il primo errore (che indicheremo con g) esce generalmente dal campo delle *Matematiche elementari* (*); ma per il secondo (che indicheremo con l) si può facilmente trovare un limite con considerazioni elementari; e, per l'importanza pratica dell'argomento, crediamo utile esporre qui alcuni risultati, che ci sembrano notevoli e che coordinano e completano quanto altra volta (**) scrivemmo in proposito.

§ 2. — Stabiliamo prima di tutto

che y_0 ed y_1 siano i valori dati dalla tavola e che n sia il numero delle loro cifre decimali;

che a_0 ed a_1 siano gli errori di y_0 e di y_1 dovuti alle cifre trascurate (ovvero che $y_0 + a_0$ e $y_1 + a_1$ siano i valori esatti di y_0 e di y_1);

che, nella ricerca inversa, anche y sia dato con n cifre decimali;

che a sia l'errore di y dovuto alle cifre trascurate, e che, quando y sia il risultato di un calcolo numerico, b sia l'errore dovuto agli errori da cui possono essere affetti i numeri sui quali si è operato.

Ricordiamo inoltre che l'ultima cifra (l'n^{ma}) s'intende sempre aumentata di 1 se quella che seguiva era uguale o superiore a 5, e che quindi, prendendo quest'ultima cifra per cifra delle unità, il valore assoluto dell'errore dovuto alle cifre trascurate ha per massimo 0,5, se quest'errore è per eccesso, ed è invece minore di 0,5, ma può differire da 0,5 meno di una quantità piccola finchè si vuole, se quest'errore è per difetto. Così, dei due numeri esatti 37,500 e 42,499, trascurando tutte le cifre decimali, si ha rispettivamente 38 e 42, e quindi l'accennato errore è uguale a $-0{,}500$ nel primo caso, a $+0{,}499$ nel secondo.

E supponiamo finalmente che (come generalmente accade) al crescere della variabilità da x_0 a x_1 la funzione cresca sempre o cali sempre, e che quindi le tre differenze $y - y_0$, $y_1 - y$ e $y_1 - y_0$ abbiano tutte lo stesso segno.

§ 3. — Ciò posto, siano l_d ed l_i i valori di l nella ricerca diretta e nella ricerca inversa rispettivamente, e siano λ_d e λ_i i corrispondenti valori assoluti.

In quanto ad l_d nulla abbiamo da aggiungere a quanto già dicemmo(***); ricorderemo solo che non è esatto il dire che λ_d è sempre minore di 1,

(*) Uno studio completo ne facemmo noi stessi nella nota " Errori prodotti dalla interpolazione semplice nell'uso delle tavole logaritmo-trigonometriche " (*Rivista Marittima*, Luglio 1895), e nell'altra " Sulla ricerca del logaritmoseno e del logaritmotangente degli archi piccoli " (*Corrispondenza*, An. II, fasc. V, VI e VII; e *Periodico di Matematica*, Luglio-Decembre 1901).

(**) Veggasi l' "*Appendice*" al nostro *Trattato di Trigonometria* (Ed. Giusti, Livorno, 1895).

(***) V. il § 22 dell' "*Appendice*" citata.

giacchè, come già facemmo vedere con un esempio (*), λ_d può anche essere eguale a 1.

Passiamo dunque ad l_i.

Osservazione. — È notevole che, se la differenza $y_1 - y_0$, invece di dedurla direttamente dalla tavola, si calcola con altro procedimento, il quale conduca ad avere la differenza stessa *con approssimazione maggiore* (**), *l'errore* l_d, invece di diminuire, *può* anche *crescere*.

Supponiamo, p. es., che per $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ nella tavola si abbia $y_0 = 2,33$ e $y_1 = 2,49$, e che si voglia il valore y corrispondente a $x = 1,9$: dalla (1), essendo $y_1 - y_0 = 0,16$, avremo immediatamente

$$y = 2,33 + 0,9 \times 0,16 = 2,47.$$

Supponiamo ora che i valori *esatti* di y_0 e di y_1 siano 2,3250 e 2,4899 (dai quali si siano ricavati quelli dati dalla tavola trascurando le ultime due cifre) e che nel calcolo precedente, invece di usare la differenza approssimata 0,16, si usi la differenza *esatta* 0,1649, che si deduce da questi due valori; avremo allora

$$y = 2,33 + 0,9 \times 0,1649 = 2,48.$$

Ma il valore *esatto* di y (prescindendo dall'errore g) è, evidentemente, dato da

$$y = 2,3250 + 0,9 \times 0,1649 = 2,47341,$$

quindi, usando la differenza approssimata si commette un errore eguale a $+0,00341$, usando invece la differenza esatta si commette un errore eguale a $-0,00659$, che è maggiore, in valore assoluto, del precedente. E si noti che la conclusione non cambia se nel calcolo di y si evita l'errore a (non trascurando cioè nessuna cifra decimale), perchè, invece dei due valori 2,47 e 2,48 si avrebbe 2,474 e 2,47841 e i due errori corrispondenti sarebbero $-0,00059$ e $-0,00500$.

Questo apparente paradosso che si spiega facilmente esaminando la formula dà l_d.

§ 4. — Dietro tutte le notazioni stabilite e prescindendo, per ora, dall'errore b, dalla (2) si ha immediatamente

$$l_i = \left\{ \frac{(y + a) - (y_0 + a_0)}{(y_1 + a_1) - (y_0 + a_0)} - \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \right\} (x_1 - x_0),$$

e quindi

$$(3) \qquad l_i = \frac{a\,(y_1 - y_0) - a_1\,(y - y_0) - a_0\,(y_1 - y)}{(y_1 - y_0)\left\{(y_1 + a_1) - (y_0 + a_0)\right\}}\,(x_1 - x).$$

(*) V. il § 3 della nota citata "Sulla ricerca del logaritmoseno... ".

(**) Questo avviene, p. es., nella tavola trigonometrica del Köhler, dove, invece della differenza per 1', si dà la differenza per 1", calcolata con una o due cifre decimali, sopra una differenza per 10", intermedia e dedotta da una tavola a 10 cifre decimali (come noi stessi trovammo, procedendo per tentativi; v. il § 10 della nota citata "Sulla ricerca del logaritmoseno... ").

Ci proponiamo di trovare un limite superiore del secondo membro, supponendo dapprima che le differenze $y-y_0$, y_1-y, y_1-y_0 siano positive.

§ 5. — Osserviamo prima di tutto che ciascuna delle due differenze $y-y_0$ e y_1-y deve supporsi uguale a 1 almeno (perchè, altrimenti, l'interpolazione non occorrerebbe) e che quindi la differenza tavolare y_1-y_0 deve supporsi uguale a 2 almeno. Osserviamo inoltre che le differenze $a-a_0$, a_1-a, a_1-a_0, per quanto s'è detto nel § 2, possono differire dall'unità di una quantità piccola finchè si vuole, ma non possono nè superarla nè uguagliarla. Osserviamo finalmente come di qui intanto derivi che il denominatore del secondo membro della (3) è sempre positivo.

Ed ora, al crescere di a, supposto a_0 ed a_1 qualunque ma fissi, il valore di l_1 cresce sempre (perchè il denominatore è positivo); quindi l_1 avrà il suo minimo valore eguale a quello che si ottiene facendo $a=-0,5$, e il suo massimo potrà differire meno di una quantità piccola finchè si vuole dal valore che si ottiene facendo $a=+0,5$.

Al crescere di a_1 invece, supposto a ed a_0 qualunque ma fissi, l_1 cala; a meno che, comparendo a_1 tanto al numeratore che al denominatore della frazione che figura nel secondo membro della (3), la frazione stessa non sia indipendente da a_1. Ma è facile vedere che, indicando con ε_1 un accrescimento qualunque attribuito ad a_1, affinchè si avesse

$$\frac{a(y_1-y_0)-a_1(y-y_0)-a_0(y_1-y)}{(y_1+a_1)-(y_0+a_0)}=\frac{a(y_1-y_0)-(a_1+\varepsilon_1)(y-y_0)-a_0(y_1-y)}{(y_1+a_1+\varepsilon_1)-(y_0+a_0)},$$

dovrebbe essere

$$y-y_0=a_0-a,$$

e questo è impossibile perchè, come si è osservato, $y-y_0$ è almeno eguale a 1, mentre a_0-a è sempre inferiore a 1. Dunque l_1, supposti a ed a_0 qualunque ma fissi, avrà il suo massimo valore eguale a quello che si ottiene facendo $a_1=-0,5$ e il suo minimo potrà differire di una quantità piccola finchè si vuole del valore che si ottiene facendo $a_1=+0,5$.

Vediamo finalmente come varia l_1 al crescere di a_0: in questo caso, supposti, al solito, a ed a_1 qualunque ma fissi, tanto il numeratore quanto il denominatore della frazione decrescono, ma è facile vedere che decresce anche la frazione stessa. Infatti, indicando con ε_0 un accrescimento qualunque, ma positivo, attribuito ad a_0, si avrà sempre

$$\frac{a(y_1-y_0)-a_1(y-y_0)-a_0(y_1-y)}{(y_1+a_1)-(y_0+a_0)}>\frac{a(y_1-y_0)-a_1(y-y_0)-(a_0+\varepsilon_0)(y_1-y)}{(y_1+a_1)-(y_0+a_0+\varepsilon_0)},$$

perchè questa diseguaglianza equivale all'altra

$$y_1-y>a-a_1,$$

e questa è sempre verificata, perchè, come si è osservato, y_1-y è almeno eguale ad 1 mentre $a - a_1$ è sempre minore di 1. Quindi, come nel caso precedente, supposto a ed a_1 qualunque ma fissi, l_1 avrà il suo massimo valore eguale a quello che si ottiene facendo $a_0 = -0,5$ e il suo minimo potrà differire di una quantità piccola finchè si vuole dal valore che si ottiene facendo $a_0 = +0,5$.

§ 6. — Da quanto precede risulta che l_1 sarà sempre minore del valore che si ottiene dal secondo membro della (1) ponendo $a = +0,5$, $a_1 = -0,5$, $a_0 = -0,5$, e sarà sempre maggiore del valore che si ottiene dalla frazione stessa ponendo $a = -0,5$, $a_1 = +0,5$, $a_1 = +0,5$, potendo però differire dall'uno e dall'altro valore di una quantità piccola finchè si vuole.

Ma, ponendo $a_1 = a_0$, la (3) si riduce a

$$l_1 = \frac{a + a_0}{y_1 - y_0}(x_1 - x_0), \tag{4}$$

quindi si conclude che

$$\lambda_1 < \frac{1}{y_1 - y_0}(x_1 - x_0), \tag{5}$$

e che questo limite è inabbassabile.

Abbiamo supposto che tutt'e tre differenze $y - y_0$, $y_1 - y$, $y_1 - y_0$ siano positive, ma ora è facile vedere che i risultati precedenti non cambiano se tutt'e tre queste differenze sono negative, perchè nella frazione che figura nel secondo membro della (3) cambiano segno i coefficienti di a, a_1 e a_0, ma cambia segno anche il denominatore; dunque la (5) è sempre vera.

Esempio. — Sia

$$\begin{array}{lll} x_0 = 1 \;, & y_0 = 2,33 \;, & a_0 = -0,00500 \\ & y = 4,39 \;, & a = +0,00499 \\ x_1 = 2 \;, & y_1 = 6,46 \;, & a_1 = -0,00500 \,; \end{array}$$

dalla (2) si avrà subito

$$x = 1 + \frac{2,06}{4,13} = 1,498789\ldots$$

mentre coi valori esatti di y_0, y, y_1 si avrebbe

$$x = 1 + \frac{2,06999}{4,13000} = 1,501208\ldots.$$

onde

$$l_1 = 0,00241\ldots.$$

E la (5) dà appunto

$$\lambda_1 < \frac{1}{413} \quad \text{ossia} \quad \lambda_1 < 0,00242\ldots.$$

OSSERVAZIONE I. — Se oltre che dell'errore a si tiene conto anche dell'errore b (§ 2), invece della (5) si ha evidentemente

$$\lambda_1 < \frac{1+b}{y_1 - y_0}(x_1 - x_0). \tag{6}$$

OSSERVAZIONE II. — Nell'esempio precedente si è calcolato il valore di x con un numero di cifre esagerato, per meglio confermare i risultati precedenti: ma, per non avere una approssimazione illusoria, bastava fermarsi alla terza cifra decimale (*).

§ 7. — All'errore l_0 neppur si accenna negli ordinari trattati di *Trigonometria*, mentre invece l'errore l_1 è spesso preso in considerazione per giustificare la preferenza che, nella ricerca inversa, si stabilisce doversi dare al logaritmo della tangente, rispetto al logaritmo del seno o del coseno.

Il SERRET (**) suppone $a + b < 1$ e trascura *esplicitamente* gli errori a_0 ed a_1, e allora dalla (3) si ha immediatamente

$$\lambda_1 < \frac{1}{y_1 - y_0}(x_1 - x_0).$$

La stessa ipotesi e la stessa conclusione si trova in tutti i trattati, nei quali, per l'accennata ragione, si considera l_1 (REBIÈRE, F. J., BRIOT et BOQUET, PICHOT, VACQUANT,....).

Fanno eccezione, che noi sappiamo, solo il DE COMBEROUSSE (***) e il BESSO (****). Il primo, riportando un ragionamento fatto dal VIEILLE (*****), arriva pure alla (5), ma supponendo $a - a_0$ e $a_1 - a_0$ minori, in valore assoluto, di 0,5, ipotesi evidentemente inammissibile, potendo invece tanto $a - a_0$ che $a_1 - a_0$ differire da 1 meno di una quantità piccola finchè si vuole. Il BESSO partendo dalla (3) invece che alla (5) arriva, nelle nostre ipotesi, all'altra

$$\lambda_1 < \frac{1+b}{y_1 - y_0 - 1},$$

risultato al quale, con un ragionamento più breve, noi pure giungemmo (v*) e che dà un limite superiore maggiore di quello dato dalla (6).

E accenneremo finalmente anche a quanto trovasi nella pregievole introduzione dell'HOUEL alle bellissime tavole dello SCHRÖN (v**). Ivi, invece della (3), si ammette che sia

$$l_1 = \frac{1}{y_1 - y_0}\left\{a - a_0\left(1 - \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}\right) - a_1\frac{y - y_0}{y_1 - y_0}\right\}, \tag{7}$$

(*) V. il § 17 dell'"*Appendice*" citata.

(**) *Traité de Trigonométrie.* (Ed. Gautier-Villars, Parigi, 1888, pag. 78.)

(***) *Cours de Mathématiques.* (Ed. Gauthier-Villars, Parigi, 1893, t. II, pag. 649.)

(****) *Elementi di Trigonometria piana.* (Ed. Loescher, 1880, pag. 106.)

(*****) *Théorie générale des approximations numérique.* (Ed. Mallet-Bachelier, Paris, 1854, pag. 36.)

(v*) V. il § 22 dell'"*Appendice*" più volte citata.

(v**) *Tables de logarithmes.* (Ed. Gauthier-Villars, 1894, pag. IX.)

e allora si arriva immediatamente alla (5); ma la conclusione non è rigorosa, essendo la (7) vera solo approssimativamente.

Concludendo: la (6) è vera tenendo conto di tutti gli errori a, a_0 ed a_1 e il limite che essa fornisce è *inabbassabile;* e noi crediamo questo risultato nuovo e (specialmente pei casi in cui la differenza tavolare y_1-y_0 è piccola) praticamente importante.

G. Pesci.

Sulla minima distanza di due iperspazi

È noto che date due rette sghembe dello spazio ordinario, esiste sempre un segmento compreso tra esse, e uno solo, che è perpendicolare ad ambedue e minore di tutti gli altri: nella presente nota è mio proposito far vedere geometricamente, (*) che il teorema vale anche se alle due rette dello spazio ordinario si sostituiscono due spazi *duali* S_k, S_{n-k-1} dello spazio a n dimensioni S_n. La dimostrazione di questo teorema non differisce gran che da quello che si dà per le rette sghembe dell'S_3; è utile per questo, a fine di non complicarla troppo, premettere alcuni teoremi generali. Essi sono una naturale estensione di altri, noti nella geometria dello spazio ordinario, e quindi credo opportuno ometterne le rispettive dimostrazioni.

α) 1. Se un S_1 è perpendicolare a due spazi S_k ed S_{n-k-1} in un S_0 che essi abbiano a comune, è pure perpendicolare all'S_{n-1} che essi individuano:

2. se un S_1 è perpendicolare a un S_{n-1}, è pure perpendicolare a tutti gli spazi di dimensione inferiore contenuti in S_{n-1} e passanti pel piede di S_1.

β) 1. Dato un S_k e un S_{k-l} ($l \leq k$) giacente o no in S_k si può sempre condurre per S_{k-l} un S_{n-1} perpendicolare ad S_k;

2. se S_{k-l} non giace in S_k, l'S_{k-l} sezione di S_k con S_{n-1}, si dice *proiezione* di S_{k-l} su S_k, ed è il luogo geometrico dei piedi degli S_1 perpendicolari, calati dai singoli punti di S_{k-l} su S_k.

γ) Se da un S_0 si cala l'S_1 perpendicolare a un S_{n-1}, il segmento che congiunge S_0 col piede di questa perpendicolare è la più corta distanza di questo S_0 dall'S_{n-1}.

δ) Per un S_0 si può sempre condurre un S'_k parallelo ad un S_k dato.

ε) Se un S_k è parallelo a un S'_k di S_{n-1} o è parallelo a questo S_{n-1} o giace in esso.

ι) Se un S_k è parallelo a un S_{n-1}, ogni S_{k+1}, per S_k e per un punto di S_{n-1} sega S_{n-1} in un S'_k parallelo ad S_k.

(*) Per quanto riguarda la trattazione analitica del problema vedi per esempio il Jordan, *Essai sur la géométrie à n dimensions.* Bull., Soc., Math., de France, III.

$\varkappa$) 1. Se due S_k S'_k sono paralleli e il primo ha a comune con un S_h un S_{h+k-n} $(h+k \geq n)$, anche il secondo avrà a comune con S_k un S'_{h+k-n}:

2. se S_h è inoltre perpendicolare ad S_k, è perpendicolare anche ad S'_k.

λ) Due spazi S_k S'_k paralleli a un terzo S''_k sono paralleli fra di loro.

μ) Un S_h e un S_k paralleli, sono ovunque alla medesima distanza.

Ciò premesso, passiamo alla dimostrazione del teorema.

Siano in S_n due spazi S_k ed S_{n-k-1} indipendenti, che non abbiano cioè alcun punto in comune. Si prenda in S_{n-k-1} un punto e per esso si conduca l'S'_k parallelo ad S_k [δ]. Questo S'_k unitamente all'S_{n-k-1}. determina un S_{n-1} parallelo all'S_k [ε]. Per S_k si conduca [β, 1.] l'S_{k+1} perpendicolare all'S_{n-1}; esso incontrerà detto S_{n-1} in un S''_k [ι]. Essendo paralleli S'_k ed S''_k [λ], S''_k ed S_{n-k-1} hanno un punto comune [$\varkappa$, 1.]. Sia A questo punto: per A conduciamo l'S_1 perpendicolare [β, 1.] ad S_{n-1}; esso risulta perpendicolare a S''_k [α. 2.] e quindi incontra S_k perpendicolarmente [$\varkappa$, 2.] in un punto B. Abbiamo così trovato un segmento AB perpendicolare ai due spazi S_k S_{n-k-1}. Dico che di tali segmenti non esiste che questo: infatti ogni altro che godesse di tale proprietà, essendo perpendicolare all'S_k intersezione di S_{n-1} coll'S_{k+1} contenente l'S_k dato e questo segmento [ι] [$\varkappa$, 2.], lo sarebbe pure ad S_{n-1} [α, 1.] e quindi giacerebbe in S_{k+1} [β, 2.]: dovendo poi incontrare S_{n-k-1} non potrebbe essere distinto da AB. Adesso non ci resta che far vedere che AB è la minima distanza dei due iperspazi dati, cioè che è il più breve fra gli ∞^{n-1} segmenti che congiungono un punto qualunque di S_k con un altro pure qualunque di S_{n-k-1}. E invero, se B_1 e A_2 sono punti di S_k e di S_{n-k-1} rispettivamente, e distinti da B e da A, detto A_1 il piede della perpendicolare calata da B_1 su S_{n-1} [β, 2] sarà A_1 B_1 minore di A_2 B_1 [γ]; ma A_1 B_1 è uguale ad AB, [μ], dunque AB è minore di A_2 B_1. Il teorema è così dimostrato.

Nell'S_4 avremo da considerare la minima distanza tra un S_1 e un S_2, nell'S_5 quella fra un S_1 e un S_3 e quella tra due S_2. In generale nell'S_n avremo da considerare $\dfrac{n-2}{2}$ minime distanze se n è pari, ed $\dfrac{n-1}{2}$ se n è dispari, non occupandoci di quello tra un S_0 e un S_{n-1}, ciò che è già contenuto nei teoremi [β, 1.], fatto $k=l=n-1$, e [γ].

È chiaro che se si dovesse trovare la minima distanza in S_n di due iperspazi S_h ed S_k tali che fosse $h+k$ minore di $n-1$, basterebbe prendere per spazio ambiente l'S_{h+k+1} da essi individuato e ripetere il ragionamento precedente ponendo $h+k+1$ al posto di n. Il caso di $h+k$ maggiore di $n-1$ non offre alcun interesse per noi, avendo allora i due spazi S_h ed S_k almeno un S_0 a comune.

Pisa, maggio 1902.

ENRICO PICCIOLI.

GENERALIZZAZIONI

riguardanti la Divisibilità dei numeri e la Teoria delle frazioni decimali periodiche

---

I.

Divisibilità.

1. Un notevole criterio di Divisibilità dovuto al Ch.^{mo} prof. G. Loria si può ennunciare nel seguente modo: (*)

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un intero N *scritto nel sistema di numerazione decimale sia divisibile per un intero* a *primo con* 10, *è che sia divisibile per* a *la somma dei numeri ottenuti separando, finchè è possibile, le cifre di* N *in tanti gruppi di* m *cifre ciascuno cominciando da destra,* m *essendo un intero che verifica la congruenza* $10^m \equiv 1$ (mod a). Il numero m, per il teorema di Fermat generalizzato, esiste e perciò il criterio è generale.

Questo criterio si può estendere facilmente ai numeri rappresentati in un sistema di base qualunque g, mediante le osservazioni seguenti, dalle quali appare come esso dipenda *solamente* dallo stesso teorema di Fermat generalizzato. Infatti supposto l'intero positivo N scritto nel sistema di numerazione a base g, si potrà porre ed in un sol modo,

$$N = a_0 + g \cdot a_1 + g^2 \cdot a_2 + \ldots g^k \cdot a_k$$

dove le a_r, cifre del numero, sono minori di g ed a_k è diverso da zero. Indicato con λ un intero indeterminato, si aggruppino i termini del secondo membro a λ a λ cominciando da a_0; se poi si pone

$$N_{\rho,\lambda} = a_{\rho\lambda} + a_{\rho\lambda+1} \cdot g + a_{\rho\lambda+2} \cdot g^2 + \ldots + a_{\rho\lambda+\lambda-1} \cdot g^{\lambda-1} \quad (\rho = 0, 1, 2 \ldots)$$

si ha:

$$N = N_{0,\lambda} + g^\lambda \cdot N_{1,\lambda} + g^{2\lambda} \cdot N_{2,\lambda} + \ldots \tag{1}$$

Ora detto a un intero positivo primo con g, si può assegnare all'indeterminata λ un valore m per il quale si abbia $g^m \equiv 1$ (mod a); ne segue

$$g^{2m} \equiv 1, \; g^{3m} \equiv 1, \ldots \quad (\text{mod } a)$$

e dalla **(1)**, dopo avervi sostituito m a λ, si ricaverà la congruenza

$$N \equiv N_{0,m} + N_{1,m} + N_{2,m} + \ldots \quad (\text{mod. } a);$$

(*) LORIA, *Carattere di Divisibilità per un numero intero qualunque.* („Rendiconti della R. Acc. dei Lincei" 1901 e „Il Bollettino di Matem." diretto dal Dott. Alberto Conti, gennaio-febbraio 1902.)

ma i termini del secondo membro non sono altro che i numeri ottenuti separando le cifre di N in gruppi di m cifre ciascuno cominciando da destra, quindi l'ultima congruenza esprime il criterio enunciato esteso alla base g, come ci eravamo proposti.

2. *Può* accadere che esista un esponente ω per cui si abbia $g^{\omega} \equiv -1 \pmod{a}$; in tale ipotesi si deduce

$$g^{2\omega} \equiv 1, \; g^{3\omega} \equiv -1, \; g^{4\omega} \equiv 1, \ldots \pmod{a},$$

e quindi se torniamo a considerare l'uguaglianza (1) e si muta l'indeterminata λ in ω, si ricaverà subito

$$N \equiv N_{0,\omega} - N_{1,\omega} + N_{2,\omega} - N_{3,\omega} + \ldots \pmod{a}$$

onde *il numero* N *sarà divisibile per* a *quando, e solo quando, è divisibile per* a *la* somma alternata *dei numeri ottenuti separando le cifre di* N *in gruppi di* ω *cifre cominciando da destra.* (*)

Osservazione. — Se a è un numero primo e g è non residuo quadratico di a si ha, come è notissimo, $g^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \pmod{a}$, quindi $\omega \overline{\overline{<}} \frac{a-1}{2}$; onde il precedente criterio è applicabile a tutti i numeri primi di cui g è non residuo quadratico.

3. Teorema di Plateau generalizzato. — *Ogni numero* a *primo colla base* g *di un sistema di numerazione, ammette nel sistema stesso un multiplo della forma* 111 . . . 1. (**)

Infatti discende dall'ipotesi che i due numeri g, $(g-1)a$ sono primi tra loro; quindi si potrà determinare un esponente m che renda $g^m - 1$ divisibile per il prodotto $(g-1)a$. Ma poichè

$$g^m - 1 = (g-1)(g^{m-1} + g^{m-2} + \ldots + 1),$$

il fattore che è nella seconda parentesi dovrà essere divisibile per a; ora tale fattore è appunto un numero di m cifre uguali ad 1 *nel sistema di base* g, quindi il teorema è dimostrato.

4. Sia $\div\!\!\div a_1 : a_2 : a_3 \ldots : a_n : \ldots$ una progressione geometrica illimitata a termini interi e positivi. Se q è il quoziente costante si ha $a_n = a_1 q^{n-1}$, e poichè a_n è intero per qualunque valore di n, anche q è *necessariamente* un numero intero. Ciò posto se indichiamo con a un intero positivo primo con q e con s_n la la somma dei primi n termini della progressione dico che *si potrà assegnare ad* n *un valore tale che* s_n *risulti multiplo di* a. Indichiamo infatti con d il massimo comune divisore dei numeri a, a_1: affinchè si verifichi quanto abbiamo affermato è necessario e sufficiente che $1 + q + \ldots + q^{n-1}$ sia divisibile per $\frac{a}{d}$ ovvero (moltiplicando i due termini del quoziente per $q-1$) che $q^n - 1$

(*) V. Loria, l. c.
(**) V. Loria, l. c.

sia divisibile per $(q-1)\frac{a}{d}$. Ma, a causa dell'ipotesi è sempre possibile determinare n in modo che si abbia

$$q^n \equiv 1 \left[\bmod (q-1)\frac{a}{d}\right],$$

onde il teorema è dimostrato.

Se n è la soluzione minima di quest'ultima congruenza sono multipli di a i numeri s_n, s_{2n}, ... $s_{\nu n}$ ... e nessun altro tra i numeri s_x.

5. Aggiungeremo ora alcune considerazioni riguardanti la determinazione del minimo valore dell'esponente che verifica le congruenze $g^x \equiv \pm 1 \pmod a$, g ed a essendo due numeri dati primi fra di loro.

a) Se m è il minimo intero per cui $g^m \equiv 1 \pmod a$, i primi m termini della successione

$$g, g^2, \ldots g^m, \quad g^{m+1}, \quad g^{m+2}, \ldots$$

dànno rispetto ad a resti diversi da zero, diversi tra loro e l'ultimo dà resto 1; tali resti si riproducono poi periodicamente. Se ora indichiamo con r_0 un numero positivo qualunque *primo con* a *e minore di esso* anche i primi m tra i prodotti

$$r_0 g, \quad r_0 g^2, \ldots r_0 g^m, \quad r_0 g^{m+1}, \ldots$$

daranno rispetto ad a, resti differenti da zero, e tra loro, e l'ultimo darà resto r_0; pertanto indicando con $r_1\, r_2 \ldots r_m\, (= r_0)$ tali resti, avremo le congruenze

$$r_0 g \equiv r_1, \quad r_0 g^2 \equiv r_2, \ldots r_0 g^m \equiv r_0 \pmod a$$

se ne deduce

$$r_0 g \equiv r_1, \quad r_1 g \equiv r_2, \ldots r_{m-1} g \equiv r_0 \pmod a$$

e quindi potremo porre le uguaglianze

$$r_0 g = ac_1 + r_1, \quad r_1 g = ac_2 + r_2, \ldots r_{m-1} g = ac_m + r_0 \qquad (1')$$

dove, poichè $r_0 < a$, i quozienti interi c risultano minori di g. Concludendo la determinazione di m può farsi in pratica così: *Si divida* $r_0 g$ *per* a *e sia* r_1 *il resto; si divida* $r_1 g$ *per* a *e sia* r_2 *il resto*, ecc.; *così si prosegua finchè non si incontra una divisione che dà il resto* r_0, *ciò che deve necessariamente accadere; il numero delle divisioni eseguite è il valore cercato di* m.

b) Con questo procedimento si calcola anche, quando esiste, il *minimo intero* ω che verifica la congruenza $g^\omega \equiv -1 \pmod a$. Infatti supposto che ω esista si ha anche $g^\omega \equiv a-1 \pmod a$, e quindi tra i resti delle m potenze

$$g, \ g^2, \ldots, g^m$$

si incontra il resto $a-1$; ne segue che ω non può superare m, ma siccome nella ipotesi di $\omega=m$ si ha simultaneamente $g^{\omega}\equiv 1$, $g^{\omega}\equiv -1$ (mod. a) e quindi $a=2$, (*) così, *escluso* quest'ultimo caso, sarà $\omega<m$. Ciò posto da $g^{\omega}\equiv -1$ (mod. a) si deduce

$$r_0 g^{\omega}\equiv a-r_0 \pmod a;$$

ma poichè si ha anche per quanto precede,

$$r_{\omega-1}\,g\equiv r_0 g^{\omega}\equiv r_{\omega} \pmod a,$$

si dedurrà

$$r_{\omega}=a-r_0$$

e quindi *tra gli* m *resti differenti dell'algoritmo* (1') *l'* ω^{esimo} *è appunto* $a-r_0$.

Reciprocamente se tra gli m resti delle (1) se ne incontra uno $r_{\omega}=$ $=a-r_0$ avendosi anche

$$r_0 g^{\omega}\equiv r_{\omega-1}\,g\equiv r_{\omega} \pmod a,$$

si dedurrà

$$r_0 g^{\omega}\equiv a-r_0 \pmod a,$$

ossia

$$g^{\omega}\equiv -1 \pmod a,$$

e quindi *esiste* ω. Riassumendo si ha:

Teorema. — *Se* g, a *sono due numeri primi tra loro, la condizione necessaria e sufficiente affinchè la congruenza* $g^{x}\equiv -1$ (mod a) *sia possibile è che una delle* m *divisioni* (1') *dia il resto* $a-r_0$: *quando ciò si verifica, l'indice* ω *di quel resto (cioè il numero delle divisioni eseguite) è il minimo valore dell'esponente per cui* $g^{\omega}\equiv -1$ (mod a).

Da questo teorema, ricordando che r_0 è uno qualunque tra i $\varphi(a)$ numeri minori di a e primi con esso, si deduce:

Corollario. — Se r_0, r'_0 sono due numeri dati minori di a e primi con esso, e se il resto ω^{mo} dell'algoritmo (1') (corrispondente ad r_0) è $a-r_0$, anche il resto ω^{mo} dell'algoritmo,

$$r'_0 g=ac'_1+r'_1,\quad r'g=ac'_2+r'_2,\ \ldots,$$

corrispondente ad r'_0, sarà $a-r'_0$.

Osservazione. — Nella ipotesi che sia possibile la congruenza $g^{x}\equiv$ -1 (mod a), torniamo a considerare i numeri ω, m, già definiti; avendosi $g^{\omega}\equiv -1$ (mod a), sarà $g^{2\omega}\equiv 1$ (mod a), quindi 2ω è multiplo di m; ma è, per quanto precede, $\omega<m$ quindi si concluderà che *se esiste* ω *sarà* $m=2\omega$.

(*) Siccome in questo caso g è dispari, perchè primo con 2, sarà $\omega=m=1$.

II.

Periodiche semplici.

6. Prenderemo ora a trattare la generalizzazione delle frazioni decimali periodiche e delle loro proprietà più notevoli.

Sia $\frac{r_0}{a}$ una frazione *irriducibile* che, senza limitare la generalità, possiamo supporre propria, e g un intero qualunque maggiore di 1; supposto dapprima *g primo con a* si considerino le uguaglianze

$$(A) \qquad r_0 g = ac_1 + r_1,\ r_1 g = ac_2 + r_2, \ldots\ r_{n-1} g = ac_n + r_n, \ldots$$

dedotte dalle successive divisioni dei prodotti $r_{s-1} g$ per a, $(s = 1, 2, \ldots \infty)$ lasciandone *illimitato* il numero. Se m è l'esponente al quale *appartiene* (*) g rispetto al modulo a, i resti $r_1, r_2, \ldots, r_{m-1}, r_m$ sono differenti da zero e tra loro: inoltre, come abbiamo veduto, r_m è uguale ad r_0.

Ne segue che il gruppo degli m numero $c_1, c_2, \ldots c_m$, si riproduce periodicamente: dimostreremo che il *periodo* $(c_1 c_2 \ldots c_m)$ è *irriducibile*, vale a dire che se è $\alpha < m$ non può esistere un altro periodo $(c_1 c_2 \ldots c_\alpha)$.

Infatti se $c_1 c_2 \ldots c_\alpha$ fosse un periodo si avrebbe

$$c_1 = c_{\alpha+1} = c_{2\alpha+1} = \ldots$$
$$c_2 = c_{\alpha+2} = c_{2\alpha+2} = \ldots$$

e le relazioni (A) si potranno scrivere manifestamente nel modo seguente:

$$\begin{array}{lll}
r_0\, g = ac_1 + r_1 & r_1 g \ = ac_2 + r_2 & \ldots\ r_{\alpha-1} g = ac_\alpha + r_\alpha \\
r_\alpha\, g = ac_1 + r_{\alpha+1} & r_{\alpha+1} g = ac_2 + r_{\alpha+2} & \ldots\ r_{2\alpha-1} g = ac_\alpha + r_{2\alpha} \\
r_{2\alpha} g = ac_1 + r_{2\alpha+1} & r_{2\alpha+1} g = ac_2 + r_{2\alpha+2} & \ldots\ r_{3\alpha-1} g = ac_\alpha + r_{3\alpha} \\
\ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Essendo r_0 diverso da r_α suppongasi $r_0 < r_\alpha$. Confrontando ciascuna delle relazioni della prima linea colla corrispondente nella seconda, si deduce successivamente $r_1 < r_{\alpha+1}$, $r_2 < r_{\alpha+2} \ldots$ e finalmente $r_\alpha < r_{2\alpha}$. Nello stesso modo, confrontando le relazioni della seconda e terza linea si giunge alla relazione $r_{2\alpha} < r_{3\alpha}$ e così seguitando si concluderà

$$r_0 < r_\alpha < r_{2\alpha} < r_{3\alpha} < \ldots;$$

ossia i resti $r_0, r_\alpha, r_{2\alpha}, \ldots$ di cui il numero è illimitato, formano una successione indefinitamente crescente ciò che è assurdo. Dal supporre invece $r_0 > r_\alpha$ si trae in modo analogo che la successione degli stessi resti è indefinitamente decresente, che è pure assurdo; resta dunque stabilito che il periodo dei quozienti $c_1 c_2 \ldots$ consta *necessariamente* di m

(*) Così come è noto si suole indicare il minimo esponente per cui $g^m \equiv 1$ (mod a).

termini come quello dei resti. Ciò posto dalle prime n relazioni (A) dopo averle divise rispettivamente per $ag, ag^2 \dots ag^n$ si ricava

$$\frac{r_0}{a} = \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \dots + \frac{c_n}{g^n} + \frac{r_n}{a} \cdot \frac{1}{g^n},$$

e poichè $\frac{r_n}{a} < 1$ ed n è arbitrario, avremo anche

$$\frac{r_0}{a} - \sum_1^n \frac{c_n}{g^n} < \frac{1}{g^n}, \quad \frac{r_0}{a} = \sum_1^\infty \frac{c_n}{g^n}.$$

Diremo la serie del secondo membro *periodica semplice* di *base* g (*) *generata* dalla frazione $\frac{r_0}{a}$; la somma dei suoi primi n termini è dunque approssimato ad $\frac{r_0}{a}$ a meno $\frac{1}{g^n}$ per difetto. Ricordando poi che m è un divisore di $\varphi(a)$ potremo concludere inoltre che *il numero dei termini periodici è un divisore di* $\varphi(a)$ *e precisamente l'esponente al quale appartiene* g *rispetto al modulo* a: tale numero è costante *per tutte le frazioni irriducibili di denominatore* a.

7. Per esprimere $\frac{r_0}{a}$ in funzione di g e dei termini periodici si moltiplichino le prime m delle (A) rispettivamente per $g^{m-1}, g^{m-2}, \dots 1$; addizionando le relazioni ottenute si deduce

$$\frac{r_0}{a} = \frac{c_1 g^{m-1} + c_2 g^{m-2} + \dots + c_m}{g^m - 1}.$$

Poichè sostituendo $g-1$ agli m numeri c il secondo membro diviene 1 mentre il primo è minore di 1, si concluderà che gli m termini periodici $c_1 c_2 \dots c_m$ non possono essere *tutti* uguali a $g-1$.

8. Supponiamo ora data una periodica semplice

$$\frac{d_1}{g} + \frac{d_2}{g^2} + \dots + \frac{d_\mu}{g_\mu} + \dots$$

nella quale i termini periodici $d_1 d_2 \dots d_\mu$ sono minori di g ed uno *almeno* è minore di $g-1$ si vedrà, reciprocamente che essa ammette la generatrice

$$\frac{d_1 g^{\mu-1} + d_2 g^{\mu-2} + \dots + d_\mu}{g^\mu - 1}.$$

Infatti questa frazione è minore di 1 ed ha il denominatore primo con g; inoltre applicando ad essa, e anche alla frazione irriducibile equivalente, il procedimento (A) si genera appunto la periodica data: quindi *ogni periodica semplice ammette una generatrice irriducibile che ha il denominatore primo con* g.

(*) Intendendo g come base di un sistema di numerazione, i numeri c_n sono di una cifra e la frazione $\frac{r_0}{a}$ ha per rappresentazione $0, c_1 c_2 \dots$

PROPRIETÀ DEL NUMERO DEI TERMINI PERIODICI E SUA DETERMINAZIONE.

9. Per indicare che tutte le frazioni irriducibili di denominatore N (N primo con g) generano periodi di K termini diremo anche per brevità, che *il denominatore* N *genera* K. Ciò premesso indicando ancora con a un numero primo con g, supponiamo che si abbia $a = b \cdot c \cdot d \ldots$ ed i fattori b, c, d *primi tra loro due a due; allora se* a, b, c, d ... *generano rispettivamente* m, m_1, m_2, ... *sarà* m *il minimo multiplo comune ai numeri* m_1, m_2, m_3 ... (*)

Infatti avendosi per ipotesi

$$g^{m_1} \equiv 1 \pmod{b}, \quad g^{m_2} \equiv 1 \pmod{c}, \ldots\ldots$$

ogni multiplo comune agli esponenti $m_1, m_2, m_3 \ldots$ e nessun altro numero, è un valore dell'esponente che verifica la congruenza

$$g^x \equiv 1 \pmod{b \cdot c \cdot d \ldots} \text{ ossia } \pmod{a}$$

perciò m è il minimo multiplo comune di $m_1, m_2, \ldots$ come abbiamo affermato.

I numeri $b, c, d, \ldots$ si possono supporre in particolare potenze di fattori primi distinti del denominatore a, quindi la determinazione del numero dei termini periodici generati da un denominatore qualunque è ricondotta al caso in cui il denominatore è una potenza p^α ($\alpha \geqq 1$) di un numero primo p non contenuto in g. In tale ipotesi rispetto a p si ha:

Lemma. — *Se* p^α *genera* m *e* $\mathrm{p}^{\alpha+1}$ *un numero* n *differente da* m, *sarà* n = mp.

Essendo infatti

$$g^m \equiv 1 \pmod{p^\alpha}, \quad g^n \equiv 1 \pmod{p^{\alpha+1}} \text{ e perciò } \pmod{p^\alpha},$$

sarà $n = m\lambda$ con λ *maggiore* di 1. Ma

$$g^{m\lambda} - 1 = (g^m - 1)(g^{m(\lambda-1)} + g^{m(\lambda-2)} + \ldots + 1)$$

e poichè il primo membro di questa uguaglianza è divisibile per $p^{\alpha+1}$, mentre p^α è la *massima* potenza di p che divide il primo fattore del secondo membro, sarà la somma entro l'ultima parentesi divisibile per p: ma avendosi per x qualunque $g^{mx} \equiv 1 \pmod{p}$, ponendo $x = 0, 1, \ldots, \lambda-1$ e sommando si trae che la predetta somma dà rispetto a p il resto di λ, e perciò il minimo valore di λ che la rende divisibile per p, (essendo diverso da zero) è appunto p come si doveva dimostrare.

Indichiamo ora con ν il numero dei termini periodici generati del denominatore primo p (rispetto a g). Ciò significa che si ha

$$g^\nu \equiv 1 \pmod{p};$$

(*) V. Bertrand, *Aritmetica* (Traduzione di Giovanni Novi). — Bettini, "Sul numero delle cifre del periodo nelle frazioni decimali periodiche„ (*Periodico* Anno XII.) — Lugli, "Sulle frazioni decimali periodiche„ (*Periodico*, Anno II.)

ma indicando con h un numero maggiore di 1, *può* accadere che si abbia anche

$$g^{\nu} \equiv 1 \pmod{p^{h}},$$

ed allora se p^h è la massima potenza di p per cui ha luogo l'ultima congruenza, i denominatori $p, p^2, \ldots p^h$ genereranno tutti ν termini periodici, mentre p^{h+1} ne genererà νp. Ciò posto si ha:

Teorema. — *Se i denominatori* $p, p^2 \ldots p^h$ *generano, rispetto alla base* g, *il medesimo numero* ν *e* p^{h+1} *un numero differente*, p^{h+t} *genererà* νp^t, *eccettuato il caso in cui si ha simultaneamente* $p=2$ e $h=1$.

Dimostrazione. — Dall'ipotesi e dal lemma discende che p^h, p^{h+1}, generano rispettivamente ν, νp: il teorema sussiste dunque, pei denominatori p^h, p^{h+1}. Per stabilirlo in generale proveremo che sussiste per p^{h+t+1} supposto che sia vero per p^{h+t-1}, p^{h+t}, essendo t uguale o maggiore di 1; e poichè così si viene a supporre che p^{h+t} genera νp^t, basterà, per il lemma premesso, provare che p^{h+t+1} genera un numero differente, ossia che la differenza

$$g^{\nu p^t} - 1$$

non è divisibile per p^{h+t+1}. Ma siccome si ha

$$g^{\nu p^t} - 1 = (g^{\nu p^{t-1}} - 1)\,(g^{\nu p^{t-1}(p-1)} + g^{\nu p^{t-1}(p-2)} + \ldots + 1),$$

ed il primo fattore del secondo membro è divisibile per p^{h+t-1}, ma *non* per una potenza di p di maggior grado, si dovrà dimostrare che *la somma entro l'ultima parentesi non è divisibile per* p^2. A tal fine consideriamo le $p-1$ differenze

$$\Delta_s = g^{\nu p^{t-1}(p-s)} - 1 \quad , \quad s = 1, 2, \ldots, p-1;$$

a causa dell'ipotesi esse sono divisibili per p^{h+t-1} ma non per p^{h+t}, per ciò posto

$$\Delta_s = p^{h+t}\, Q_s + R_s \quad \text{con } R_s < p^{h+t},$$

i $p-1$ resti R_s saranno diversi da zero e multipli di p^{h+t-1}; inoltre tali resti sono tutti differenti poichè, indicati con u, s, $(u > s)$ due numeri inferiori a p, si ha:

$$\Delta_s - \Delta_u = g^{\nu p^{t-1}(p-u)}\,[g^{\nu p^{t-1}(u-s)} - 1],$$

e siccome (per le ipotesi) il primo fattore del secondo membro non contiene p, ed il secondo fattore non è divisibile per p^{h+t} perchè l'esponente di g è minore di νp^t, la differenza $\Delta_s - \Delta_u$ non è divisibile per p^{h+t}. Si deduce che i $p-1$ resti R_s dovranno coincidere, prescindendo dall'ordine, coi numeri

$$p^{h+t-1}, \; 2p^{h+t-1}, \ldots (p-1)\,p^{h+t-1}.$$

Ma avendosi

$$\sum_1^{p-1} \Delta_s \equiv \sum_1^{p-1} R_s \pmod{p^{h+t}},$$

si dedurrà

$$g^{\nu p^{t-1}(p-1)} + g^{\nu p^{t-1}(p-2)} + \ldots + 1 \equiv \frac{p^{h+t}(p-1)}{2} + p \pmod{p^{h+t}},$$

ed anche, poichè h, t non sono minori di 1,

$$g^{\nu p^{t-1}(p-1)} + g^{\nu p^{t-1}(p-2)} + \ldots + 1 \equiv \frac{p^{h+t}(p-1)}{2} + p \pmod{p^2}.$$

Ora se il numero primo p è dispari il numero $\frac{p^{h+t}(p-1)}{2}$ è multiplo di p^2 qualunque sia h; se $p=2$ sussiste la stessa conclusione purchè sia $h>1$, non potendosi escludere, per ipotesi, che sia $t=1$; dunque il primo membro dell'ultima congruenza diviso per p^2 dà il resto p, escluso il solo caso espresso nell'enunciato del teorema: ciò prova quanto si voleva.

10. Quando p è un numero primo dispari, il teorema precedente determina in tutti i casi il numero dei termini periodici generati da una potenza qualunque di p: ma resta da completare l'argomento quando $p=2$. Intanto pel teorema stesso sappiamo che qualunque sia il numero primo p ($p=2$ incluso), se p^h genera ν e p^{h+1} un numero differente di termini, p^{h+t} ne genera νp^t quando è $h>1$. Ciò premesso supponiamo $p=2$; poichè g è primo con p, sarà g un numero dispari e perciò di una delle due forme $4n+1$, $4n+3$:

1°. Sia $g=4n+1$, allora si potrà porre $g=2^h n'+1$ con $h>1$ ed *n' dispari*, onde

$$g \equiv 1 \pmod{2^h} \text{ ma } non \pmod{2^{h+1}};$$

ne segue che i denominatori $2, 2^2, \ldots, 2^h$ generano un periodo di 1 termine e 2^{h+t} un periodo di 2^t termini per quanto abbiamo premesso; quindi detto λ un intero indeterminato non minore di h e mutato $h+t$ in λ si potrà concludere: *Se* g *è della forma* $4n+1$, *il denominatore* 2^λ *genera* $2^{\lambda-h}$ *termini periodici, essendo* h *l'esponente della massima potenza di* 2 *contenuta in* $g-1$.

2°. Sia $g=4n+3$; sarà $g \equiv 1 \pmod 2$ ma *non* $\pmod{2^2}$; (tale ipotesi rispetto a g corrisponde dunque al caso *escluso* nel teorema del paragrafo precedente); ma è

$$g^2 - 1 = 8(2n^2 + 3n + 1)$$

quindi detta h' la massima potenza di 2 contenuta in g^2-1, sarà h' non inferiore a 3 e

$$g^2 \equiv 1 \pmod{2^{h'}} \text{ ma } non \pmod{2^{h'+1}};$$

perciò il denominatore 2 genera 1 termine, $2^2, 2^3, \ldots 2^{h'}$ ne generano 2, e $2^{h'+t}$ ne genererà $2 \cdot 2^t = 2^{t+1}$ (giacchè $h' \geq 3 > 1$). Se quindi denotiamo ancora con λ una indeterminata non inferiore ad h', mutato $h'+t$ in λ si concluderà: *Se* g *è della forma* $4n+3$ *il denominatore* 2^λ *gene-*

rerà $2^{\lambda-h'+1}$ *termini periodici, essendo* h' *l'esponente della massima potenza di* 2 *contenuta in* g^2-1.

Casi particolari notevoli. — *a)* Il primo dei due ultimi teoremi è applicabile supponendo $g=4(2n+1)+1=8n+5$; ma essendo allora $g-1=2^2(2n+1)$, è $h=2$ e $2^{\lambda-h}=2^{\lambda-2}$ per qualunque valore di n; onde 2^λ genera $2^{\lambda-2}$ termini periodici rispetto a tutte le basi della forma $8n+5$.

b) Il teorema ultimo è poi applicabile prendendo $g=8n-3$; ed essendo allora $g^2-1=2^3(8n^2+6n+1)$ si ha per qualunque n, $h'=3$ quindi $2^{\lambda-h'+1}=2^{\lambda-2}$, perciò 2^λ genera $2^{\lambda-2}$ rispetto a tutte le basi della forma $8n+3$. Riassumendo si ha:

Le frazioni irriducibili di denominatore 2^λ, *dove* λ *è un intero maggiore di* 2, *generano costantemente* $2^{\lambda-2}$ *termini periodici rispetto a tutte le basi delle forme* $8n+5$, $8n+3$.

11. Tornando ora a considerare il denominatore primo dispari p, si possono ricercare le basi rispetto alle quali esso genera un numero *prestabilito* ν di termini periodici. A tal fine, supposto come è *necessario* che ν sia un divisore di $\varphi(p)=p-1$, osserviamo che le basi cercate debbono *appartenere* all'esponente ν (§ 6); ma è noto che se ν è un divisore arbitrario di $p-1$ esistono $\varphi(\nu)$ numeri incongrui (mod p) che appartengono a ν, quindi potremo concludere: *se* ν *è un divisore qualunque di* $p-1$ *esistono* $\varphi(\nu)$ *basi incongre* (mod p) *tali che il periodo generato dal denominatore primo* p *consta di* ν *termini.*

Per avere un sistema di tali basi incongrue, supposta nota una qualunque che diremo g, basta fare le $\varphi(\nu)$ potenze g^α dove α assume i $\varphi(\nu)$ valori inferiori a ν e primi con esso, od anche prendere i loro minimi resti positivi rispetto a p. Se $g_1, g_2, \ldots g_\varphi$ sono tali resti le $\varphi(\nu)$ progressioni aritmetiche illimitate

$$g_n,\ g_n+p,\ g_n+2p,\ \ldots \quad (n=1,2,\ldots,\varphi(\nu))$$

conterranno *tutte* le basi cercate.

Supponendo in particolare $\nu=p-1$, si trae che esistono $\varphi(p-1)$ basi incongrue rispetto al modulo p per le quali le periodiche semplici generate dalle frazioni di denominatore p, hanno un periodo di $p-1$ termini. Tali basi sono le *radici primitive* del numero primo p.

PROPRIETÀ DEI TERMINI PERIODICI.

12. Riprendiamo a considerare i due numeri a e g primi tra loro, e sia $\frac{r_0}{a}$ una frazione propria irriducibile di denominatore a. Sviluppando $\frac{r_0}{a}$ in serie periodica semplice rispetto a g si ha come abbiamo veduto

$$\frac{r_0}{a}=\frac{c_1}{g}+\frac{c_2}{g^2}+\ldots\ldots$$

ove i termini periodici, il cui numero diremo ancora m, sono determinati mediante l'algoritmo

$$r_0 g = ac_1 + r_1, \; r_1 g = ac_2 + r_2, \ldots r^{m-1} g = ac_m + r_m, \qquad (2)$$

essendo $r_m = r_0$. Supponiamo che tra gli $m-1$ resti differenti $r_1, r_2, \ldots r_{m-1}$ vi sia uno r_ω uguale ad $a - r_0$. Dal teorema del n. 5 si deduce allora che ω è il minimo esponente per cui $g^\omega \equiv -1 \pmod{a}$, e quindi, per l'osservazione che segue lo stesso teorema, il numero m è *pari* e si ha precisamente $m = 2\omega$. Ciò posto se si sottraggono le prime ω delle (2) dalla identità $ag = ag$ si ricavano le ω relazioni:

$$\begin{gathered}(a-r_0)g = a(g-c_1-1)+(a-r_1),\; (a-r_1)g = a(g-c_2-1)+(a-r_2), \ldots \\ \ldots, (a-r_{\omega-1})g = a(g-c_\omega-1)+(a-r_\omega);\end{gathered} \qquad (3)$$

ma le (2) considerate dalla $(\omega+1)^{\text{esima}}$ alla m^{esima} sono

$$r_\omega g = ac_{\omega+1} + r_{\omega+1}, \; r_{\omega+1} g = ac_{\omega+2} + r_{\omega+2}, \ldots, r_{m-1} g = ac_m + r_m, \qquad (4)$$

e poichè è per ipotesi $r_\omega = a - r_0$, dalla prima di queste confrontata colla prima delle (3) si trae, identificando quozienti interi e resti,

$$c_{\omega+1} = g - c_1 - 1, \qquad r_{\omega+1} = a - r_1;$$

ne segue confrontando ordinatamente le (3) e (4)

$$\begin{array}{ll} c_{\omega+2} = g - c_2 - 1, & r_{\omega+2} = a - r_2 \\ c_{\omega+3} = g - c_3 - 1, & r_{\omega+3} = a - r_3 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ c_m \;= g - c_\omega - 1, & r_m \;= a - r_\omega \end{array}$$

ossia

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_{\omega+1} = c_2 + c_{\omega+2} = \ldots = c_\omega + c_m = g - 1 \\ r_1 + r_{\omega+1} = r_2 + r_{\omega+2} = \ldots = r_\omega + r_m = a \end{array}\right\} \qquad (\mathrm{II})$$

e poichè dal corollario del n. 5 discende inoltre che se $\frac{r'_0}{a}$ è un'altra frazione propria irriducibile di denominatore a il resto ω^{mo} dell'algoritmo ad essa corrispondente sarà $a - r'_0$, avremo concludendo:

Se il resto ω^{mo} dell'algoritmo (2) corrispondente ad una frazione irriducibile $\frac{r_0}{a}$ è $a - r_0$, sarà 2ω il numero dei termini periodici; i termini che occupano lo stesso posto in ciascun mezzo periodo avranno costantemente per somma $g - 1$, ed i corrispondenti resti avranno per somma a: tali proprietà si verificheranno inoltre per tutte le frazioni irriducibili di denominatore a. (*)

(*) Cfr. MURER, " Sulle frazioni periodiche ". Proprietà dei gruppi in cui si può scomporre il periodo e dei relativi resti. (*Periodico*, A. XII.)

13. Reciprocamente si ha:

Se una frazione irriducibile $\frac{r_0}{a}$ *genera, rispetto a* g *un numero pari* 2ω *di termini periodici, e se inoltre la somma di due termini che occupano lo stesso posto in ogni semiperiodo è costantemente uguale a* $g-1$ *il resto* ω^{mo} *dell'algoritmo* (2) *sarà* $a - r_0$.

Infatti, essendo per ipotesi nelle (2) $m = 2\omega$, ed inoltre

$$g - 1 = c_1 + c_{\omega+1} = c_2 + c_{\omega+2} = \ldots = c_\omega + c_m,$$

le stesse uguaglianze (2) divengono

$$r_0 g = ac_1 + r_1, \quad r_1 g = ac_2 + r_2, \ldots, \; r_{\omega-1} g = ac_\omega + r_\omega,$$
$$r_\omega g = a(g - 1 - c_1) + r_{\omega+1}, \quad r_{\omega+1} g = a(g - 1 - c_2) + r_{\omega+2}, \ldots,$$
$$r_{2\omega-1} g = a(g - 1 - c_\omega) + r_0.$$

Sommando ogni relazione della prima linea colla corrispondente nella seconda si trae

$$g(r_0 + r_\omega - a) = r_1 + r_{\omega+1} - a, \; g(r_1 + r_{\omega+1} - a) = r_2 + r_{\omega+2} - a, \ldots,$$
$$g(r_{\omega+1} + r_{2\omega-1} - a) = r_0 + r_\omega - a,$$

e quindi, moltiplicando membro a membro, sarà

$$g^\omega (r_0 + r_\omega - a)(r_1 + r_{\omega+1} - a) \ldots (r_{\omega-1} + r_{2\omega-1} - a) =$$
$$= (r_1 + r_{\omega+1} - a)(r_2 + r_{\omega+2} - a) \ldots (r_0 + r_\omega - a).$$

I fattori del secondo membro sono tutti anche nel primo ove si ha di più il fattore g^ω che è maggiore di **1**; è perciò necessario che almeno uno di quei fattori sia nullo e quindi, a causa delle uguaglianze precedenti, saranno nulli anche tutti gli altri: in particolare sarà

$$r_0 + r_\omega - a = 0 \quad \text{ossia} \quad r_\omega = a - r_0$$

come devevasi dimostrare.

14. Per il teorema del n. 5 la relazione $r_\omega = a - r_0$ ha luogo quando è $g^\omega \equiv -\mathbf{1} \pmod{a}$, ed allora soltanto; quindi dagli ultimi teoremi si dedurrà anche che rispetto alla base g, *generano un numero pari di termini periodici colle proprietà vedute* (II) *tutte e sole quelle frazioni il cui denominatore* a *è un divisore della forma* $g^x + 1$, 2 *escluso*: in particolare tutte quelle frazioni aventi per denominatore un numero primo p di cui g è *non residuo quadratico*, giacchè è allora $g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -\mathbf{1} \pmod{p}$ e quindi esiste un intero ω non maggiore di $\frac{p-1}{2}$ per cui si ha

$$g^\omega \equiv -\mathbf{1} \pmod{p}. \; (*)$$

(*) Cfr. BETTINI, l. c.

III.

Periodiche miste.

15. Supponiamo ora che il denominatore a della frazione propria *irriducibile* $\frac{r_0}{a}$, contenga qualche fattore primo di g ed uno o più altri non contenuti in g; i prodotti

$$r_0 g, \quad r_0 g^2, \ldots r_0 g^n, \ldots$$

non saranno divisibili per a e perciò i rispettivi resti $r_1, r_2 \ldots r_n, \ldots$ saranno tutti diversi da zero. Cominciamo a far vedere che sono tutti differenti da r_0. A tal fine si osservi che se per qualche valore di n fosse $r_n = r_0$, si avrebbe

$$r_0 g^n \equiv r_0 \pmod{a},$$

onde $g^n - 1$ sarebbe divisibile per a, e quindi conterrebbe in particolare quei fattori primi che sono comuni ad a e g, ciò che è assurdo essendo $g^n - 1$ e g primi tra loro.

Ciò premesso consideriamo le congruenze

$$r_0 g \equiv r_1, \quad r_0 g^2 \equiv r_2, \ldots r_0 g^s \equiv r_s, \ldots \pmod{a};$$

poichè se ne deduce

$$r_0 g \equiv r_1, \quad r_1 g \equiv r_2, \ldots, r_{s-1} g \equiv r_s, \ldots \pmod{a},$$

indicando con $c_1, c_2, \ldots, c_s, \ldots$ i quozienti (interi) delle divisioni per a dei prodotti che sono al primo membro, si avranno le uguaglianze (in numero illimitato)

$$r_0 g = ac_1 + r_1, \; r_1 g = ac_2 + r_2, \ldots r_{s-1} g = ac_s + r_s, \ldots \tag{5}$$

ove i numeri c risultano minori di g; se r_s è il *primo* resto che si ripete ed $r_{s+\mu}$ il primo tra i successivi che lo ugnaglia, i primi $s+\mu-1$ resti $r_1, r_2, \ldots, r_{s+\mu-1}$ sono tutti differenti, inoltre i μ resti $r_s, r_{s+1}, \ldots r_{s+\mu-1}$, ed i μ quozienti $c_{s+1}, c_{s+2}, \ldots, c_{s+\mu}$ si riproducono periodicamente. Dunque esiste un periodo di μ termini, di cui il primo termine c_{s+1} ha l'indice *maggiore* di 1. Ciò stabilito, dimostriamo che *non esiste tra gli* $s+\mu$ *numeri* $c_1, c_2, \ldots, c_{s+\mu}$ *nessun altro periodo*. Infatti sia se è possibile $c_\alpha, c_{\alpha+1}, \ldots, c_{\alpha+\lambda}$, dove $\alpha+\lambda$ non supera $s+\mu$, un periodo *differente* da quello già trovato e sia dapprima $\alpha > 1$. Se è $\alpha+\lambda < s+\mu$ i due resti $r_{\alpha-1}, r_{\alpha+\lambda}$ sono differenti perchè hanno entrambi un indice minore di $s+\mu$; se è invece $\alpha+\lambda = s+\mu$, il resto $r_{\alpha+\lambda} (= r_{s+\mu})$ ugnaglia $r_{\alpha-1}$ *soltanto* quando è $\alpha - 1 = s$ ossia $\alpha = s+1$ ciò che è da escludere perchè i periodi $(c_\alpha \ldots c_{\alpha+\lambda})$, $(c_{s+1} \ldots c_{s+\mu})$ sono differenti per ipotesi. Quando si supponga invece $\alpha = 1$, tutti i resti sono diversi da r_0, e si ha ancora $r_{\alpha+\lambda}$ differente da $r_{\alpha-1}$; dunque i due resti $r_{\alpha-1}$, $r_{\alpha+\lambda}$ sono in ogni caso differenti. Ma avendosi per ipotesi

$$\begin{aligned} c_\alpha &= c_{\alpha+\lambda+1} = c_{\alpha+2\lambda+3} = \dots \\ c_{\alpha+1} &= c_{\alpha+\lambda+2} = c_{\alpha+2\lambda+2} = \dots \end{aligned}$$

le (5) considerate dalla $(\alpha)^{\text{esima}}$ in poi si potranno disporre come segue

$$\begin{gathered} r_{\alpha-1}g = ac_\alpha + r_\alpha, r_\alpha g = ac_{\alpha+1} + r_{\alpha+1}, \dots, r_{\alpha+\lambda-1}g = ac_{\alpha+\lambda} + r_{\alpha+\lambda} \\ r_{\alpha+\lambda}g = ac_\alpha + r_{\alpha+\lambda+1}, r_{\alpha+\lambda+1}g = ac_{\alpha+1} + r_{\alpha+\lambda+2} \dots, r_{\alpha+2\lambda} = ac_{\alpha+\lambda} + r_{\alpha+2\lambda+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered}$$

ed essendo come abbiamo visto $r_{\alpha-1}$ *diverso* da $r_{\alpha+\lambda}$ si dedurrà, con un ragionamento identico a quello del n. 6, che la successione illimitata di resti

$$r_{\alpha-1}, r_{\alpha+\lambda}, r_{\alpha+2\lambda+1}, \dots, r_{\alpha+n\lambda+(n-1)}, \dots$$

è indefinitamente crescente o decrescente, il che è assurdo.

Ciò prova quanto abbiamo affermato. In particolare si deduce che la successione dei quozienti considerata da c_{s+1} in poi non contiene alcun periodo con un numero di termini minore di μ: d'altra parte nemmeno sulla successione *illimitata* $c_1, c_2, c_3, \dots$ può esistere un periodo $c_\beta\, c_{\beta+1}, \dots c_{\beta+r}$ di cui il primo indice β sia minore di $s+1$. Infatti in tale ipotesi si ha $\beta - 1 < s$, quindi $r_{\beta-1}$, essendo tra quei resti che non si riproducono od eguale ad r_0, è differente da $r_{\beta+r}$, onde con un ragionamento identico a quello già fatto si giungerebbe al risultato assurdo di una successione illimitata di resti indefinitamente crescente o decrescente. Riassumendo possiamo concludere che se s, $s+\mu$ sono gli indici dei primi due resti uguali nelle (5), il *periodo* (periodo *irriducibile*) *è necessariamente* formato dai μ termini $c_{s+1}, c_{s+2}, \dots c_{s+\mu}$: il gruppo $c_1 c_2 \dots c_s$ è *l'antiperiodo.*

16. Indicando con n un intero qualunque si ricava subito dalle (5)

$$\frac{r_0}{a} = \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + \dots + \frac{c_n}{g^n} + \frac{r_n}{a} \cdot \frac{1}{g^n}$$

e quindi

$$\frac{r_0}{a} - \sum_1^n \frac{c_n}{g^n} < \frac{1}{g^n}, \quad \frac{r_0}{a} = \sum_1^\infty \frac{c_n}{g^n}.$$

La serie $\sum_1^\infty \frac{c_n}{g^n}$ è la *periodica mista* di base g, generata mediante le (5) dalla frazione irriducibile $\frac{r_0}{a}$, quando il denominatore ha fattori primi di g ed altri non contenuti in g.

17. *Determinazione dei numeri* s, μ.

1°. Per determinare il numero s dei termini antiperiodici riprendiamo a considerare le relazioni:

$$r_0 g = ac_1 + r_1;\ r_1 g = ac_2 + r_2, \dots r_{s-1}\, g = ac_s + r_s,\ r_s g = ac_{s+1} + r_{s+1}, \dots.$$

Risulta da queste, e da quanto precede, che anche le $s-1$ frazioni $\frac{r_1}{a}$, $\frac{r_2}{a}$, ... $\frac{r_{s-1}}{a}$ generano rispettivamente delle periodiche miste aventi per antiperiodi $(c_2 c_3 \dots c_s)$, $(c_3 c_4 \dots c_s)$ ..., ed il periodo comune $c_{s+1}, \dots c_{s+\mu}$ della frazione $\frac{r_0}{a}$, mentre $\frac{r_s}{a}$ genera una periodica semplice del medesimo periodo.

Ne segue che $\frac{r_s}{a}$ è la *prima* tra le frazioni $\frac{r_1}{a}$, $\frac{r_2}{a}$, ... $\frac{r_n}{a}$, ... che ridotta ai minimi termini avrà il denominatore primo con g; e quindi se si indica con δ_n il massimo divisore comune ai numeri r_n, a il valore cercato di s sarà il *minimo* valore di n che rende $a : \delta_n$ primo con g (n. 8). Ma poichè è $r_0 g^n \equiv r_n \pmod a$ il numero δ_n è pure massimo divisore comune dei due numeri $r_0 g^n$, a ed anche dei numeri g^n, a, essendo a primo con r_0.

Ora conviene esprimere δ_n per mezzo dei fattori primi comuni ai numeri g, a. A tal fine pongasi

$$a = X_1^h X_2^l \dots A_1^f . A_2^t \dots$$
$$g = Y_1^p Y_2^q \dots A_1^\varphi A_2^\tau \dots$$

dove X, Y, A sono fattori *primi* tutti *differenti* ed A_1, A_2 ... sono quelli comuni. Poichè è

$$g^n = Y_1^{pn} Y_2^{qn} \dots A_1^{\varphi n} . A_2^{\tau n} \dots ,$$

e δ_n è un prodotto di potenze di soli fattori A, il quoziente $a : \delta_n$ sarà primo con g *solamente* quando n è tale che si abbia

$$\delta_n = A_1^f . A_2^t \dots$$

ossia per tutti i valori di n che rendono gli esponenti φn, τn, ... rispettivamente *non minori* di f, t, ... E poichè il valore di s è il minimo di tali valori di n, potremo concludere:

Teorema. — *Se* a, g *sono decomposti in fattori primi, ed i termini delle coppie* (f, φ), (t, τ), ... *indicano rispettivamente gli esponenti* (massimi) *di ciascun fattore primo comune, il numero* s *dei termini antiperiodici della frazione irriducibile* $\frac{r_0}{a}$, *rispetto a* g, *sarà il minimo tra i valori di* n *che soddisfano simultaneamente le relazioni:*

$$\varphi n \geqq f, \quad \tau n \geqq t, \dots$$

Esso è indipendente dal numeratore r_0, *e dai fattori primi del denominatore* a *che non appartengono alla base* g.

Se in particolare si suppone

$$\varphi = \tau = \dots = \dots = 1$$

il numero s dei termini antiperiodici e il minimo valore di n per cui si ha ad un tempo

$$n \geqq f, \quad n \geqq t, \ldots$$

e perciò è uguale al maggiore degli esponenti f, t, ... Quindi

Se i fattori primi comuni al denominatore a *ed alla base* g *sono contenuti in* g *alla prima potenza, il numero dei termini antiperiodici è il massimo tra gli esponenti che quei fattori primi hanno nel denominatore* a.

2°. Da quanto abbiamo esposto risulta che il periodo della frazione $\frac{r_0}{a}$ è quello di $\frac{r_s}{a}$, e che il massimo divisore comune ai numeri

$$r_s, \; a \quad \text{è} \quad \delta_s = A_1{}^{t} A_2{}^{t} \ldots ;$$

pertanto si dedurrà

$$\frac{r_s}{a} = \frac{r_s : \delta_s}{X_1{}^{h} X^{l}{}_2 \ldots} ;$$

quindi si può concludere:

Il numero dei termini periodici della periodica mista generata dalla frazione $\frac{r_0}{a}$, *è uguale a quello delle frazioni irriducibili aventi per denominatore il prodotto di tutti i fattori primi uguali e disuguali di* a, *non contenuti in* g.

Spezia, 12 giugno 1902.

ALBERTO TAGIURI.

PICCOLE NOTE

1. — Sopra un teorema della teoria dei limiti.

Uno dei più importanti teoremi di questa teoria è, com'è noto, il seguente:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una successione y *di infiniti numeri reali tenda ad un limite determinato e finito, è che, scelto un numero* σ *positivo e piccolo a piacere, possa determinarsi un elemento* y_0 *della successione, tale che per due elementi qualunque* y', y'' *della successione, successivi ad* y_0, *si abbia*

$$|y' - y''| < \sigma. \tag{1}$$

Comunico in quel che segue una dimostrazione di questo teorema, che per la sua brevità e semplicità, mi sembra degna di nota.

Che la condizione è necessaria, si riconosce immediatamente: per dimostrare che è sufficiente, dividiamo tutti i numeri reali in due classi A, A' colla legge seguente: un numero α si porrà nella *prima* classe A, quando, scelto nella successione un elemento *qualunque* y_1, vi è sempre *qualche* elemento della successione, successivo ad y_1, maggiore od uguale ad α: se invece *tutti* gli elementi successivi ad un *conveniente* elemento y_1 sono minori di α, questo si porrà nella *seconda* classe A'. Non tutti i numeri reali, si osservi, possono prender posto nella classe A; scelto infatti un numero σ a piacere, e detto y_0 l'elemento corrispondente nell'enunciato del teorema, in forza della (1), nella quale si faccia $y' = y_0 + \sigma$ è della seconda classe A'. Le due classi A, A', si riconosce subito esser contigue: definiscono dunque un numero reale $\alpha = (A, A')$. Dico che si ha:

$$\alpha = \lim y. \tag{2}$$

Sia infatti σ un numero positivo piccolo a piacere, e si determini y_0 in guisa che valga la (1): poichè inoltre i due numeri $\alpha - \sigma$, $\alpha + \sigma$ sono l'uno di A, l'altro di A', potrà trovarsi un *conveniente* elemento y' successivo ad y_0, tale che si abbia per esso

$$\alpha - \sigma \leq y' < \alpha + \sigma,$$

e quindi anche

$$|y' - \alpha| \leq \sigma. \tag{3}$$

Sia ora y un elemento qualunque successivo ad y_0, si avrà:

$$y - \alpha = (y - y') + (y' - \alpha),$$

e quindi anche

$$|y - \alpha| \leq |y - y'| + |y' - \alpha|,$$

cioè per le (1) e (3)

$$|y - \alpha| < 2\sigma,$$

donde si ha poi la (2). Il teorema enunciato è così dimostrato.

Onorato Niccoletti.

II. — Sovra una formula del Cauchy.

La formula del Kronecker nel caso di due variabili.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(c)} \frac{F_1 dF_2 - F_2 dF_1}{F_1^2 + F_2^2} = \sum_{(x_i, y_i)} (\text{sign D. 1}), \tag{1}$$

ove con D si indica il determinante funzionale delle F, con sign. D il segno di D nei punti (x_i, y_i) radici comuni alle equazioni $F_1 = 0, F_2 = 0$, e la sommatoria è estesa ai punti-radice contenuti in c, dà, com'è noto, l'eccesso del numero delle radici delle equazioni $F_1 = 0, F_2 = 0$, contenute in c, per le quali D è positivo, sul numero delle radici per le quali D è negativo. Quando F_1, F_2 sono le parti di una funzione di variabile complessa

$$f(z) = F_1 + iF_2,$$

la (1) dà il numero esatto delle radici della equazione

$$f(z) = 0$$

contenute in c.

Il Cauchy aveva già ottenuta tale determinazione nel suo teorema dei residui

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{f'}{f}\, dz = \Sigma m = M - N \tag{2}$$

indicando con M il numero degli *zeri*, e con N il numero dei poli di $f(z)$ contenuti in c, essendo ciascun *zero* e ciascun *polo* contato con il suo ordine di molteplicità.

Ora la formula del Kronecker, quando F_1, F_2 sieno le parti di una funzione di variabile complessa, si può dedurre immediatamente dalla formula del Cauchy, trasformando l'integrale di variabile complessa in un integrale curvilineo. Basta in fatto osservare che è in generale:

$$\int_{(c)} w(z)\, dz = \int_{(c)} (u + iv)(dx + idy) = \int_{(c)} u dx - v dy + i\int_{(c)} v dx + u dy.$$

Nel nostro caso è $w'(z) = \frac{f'}{f}$, ed

$$\frac{f'}{f} = \frac{F_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} + F_2 \frac{\partial F_2}{\partial x}}{F_1^2 + F_2^2} + i \frac{F_1 \frac{\partial F_2}{\partial x} - F_2 \frac{\partial F_1}{\partial x}}{F_1^2 + F_2^2};$$

per modo che è:

$$\left.\begin{aligned} \int_{(c)} \frac{f'}{f} dz = & \int_{(c)} \frac{F_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} + F_2 \frac{\partial F_2}{\partial x}}{F_1^2 + F_2^2} dx - \frac{F_1 \frac{\partial F_2}{\partial x} - F_2 \frac{\partial F_1}{\partial x}}{F_1^2 + F_2^2} dy \\ & + i \int_{(c)} \frac{F_1 \frac{\partial F_2}{\partial x} - F_2 \frac{\partial F_1}{\partial x}}{F_1^2 + F_2^2} dx + \frac{F_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} + F_2 \frac{\partial F_2}{\partial x}}{F_1^2 + F_2^2} dy. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Ora il primo dei due integrali curvilinei che sono nel secondo membro della (3), si può porre sotto la forma

$$\int_{(c)} \frac{F_1 dF_1 + F_2 dF_2}{F_1^2 + F_2^2} = \frac{1}{2} \int_{(c)} \frac{d(F_1^2 + F_2^2)}{F_1^2 + F_2^2};$$

e ponendo

$$F_1^2 + F_2^2 = \theta,$$

assume la forma

$$\frac{1}{2} \int_{(c)} \frac{d\theta}{\theta};$$

e poichè

$$\int \frac{d\theta}{\theta} = \log (F_1^2 + F_2^2) + \text{const.},$$

integrando lungo il contorno chiuso c, il logaritmo aritmetico riprende lo stesso valore ai due limiti, ed è perciò

$$\int_{(c)} \frac{d\theta}{\theta} = 0.$$

Il secondo dei due integrali curvilinei che sono nel secondo membro della (3), si può agevolmente porre sotto la forma

$$\int_{(c)} \frac{F_1 dF_1 - F_2 dF_2}{F_1^2 + F_2^2} \text{ ricordando le note relazioni } \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y}, \ \frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Si conclude adunque che l'integrale del Kronecker, nel caso che F_1, F_2 sieno le parti di una funzione di variabile complessa, non è altro che l'integrale del Cauchy sotto altra forma; e così trasformato dà luogo alla domanda: „quale significato avrà tale integrale, quando le F_1, F_2 sieno funzioni qualunque delle variabili reali x, y purchè uniformi nella regione considerata? „

A tale domanda hanno già risposto il Kronecker e il Picard, partendo da punti di vista diversi (Monastberichte der Berliner Akademie, März 1869; *Traité d'Analyse* par É. Picard, T. I, pag. 98-99); in questa nota a me interessava soltanto di rilevare due fatti:

1° che la formula del Kronecker, quando F_1, F_2 sono le parti di una funzione di variabile complessa, si deduce immediatamente dalla formula del Cauchy; quindi non rappresenta (o contiene) un nuovo procedimento per la determinazione del numero delle radici della equazione $f(z) = 0$.

2° conseguentemente: la determinazione contenuta nella formula del Kronecker nel caso di due variabili, si può considerare come il risultato di uno studio più completo dell'integrale del Cauchy posto sotto la seconda forma.

C. Marenghi.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 598, 599, 600, 604 E 605

598. *Trovare la somma delle serie*

$$\sum_1^\infty (-1)^n \frac{|2n}{2^{2n}(|n)^2}\cos n\theta, \qquad \sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^{r-1}\frac{9r^2+3r+4}{(3r-1)3r(3r+1)(3r+2)}.$$

GREENSTREET.

Risoluzione della sig.^{a} Gabrielina Longobardi di Napoli.

1°. Sia

$$S_1=\sum_1^\infty (-1)^n \frac{|2n}{2^{2n}(|n)^2}\cos n\theta.$$

Essendo

$$\frac{|2n}{2^{2n}(|n)^2}=\frac{1.2.3\ldots(2n-1)2n}{1.2\ldots n\times 1.2\ldots n\times 2^{2n}}=$$

$$=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)\times 2.4.6\ldots 2n}{2.4.6\ldots 2n\times 2.4.6\ldots 2n}=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6.2n}$$

si ha

$$S_1=\sum_1^\infty(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\cos n\theta=\sum_1^\infty(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\cdot\frac{e^{n\theta i}+e^{-n\theta i}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_1^\infty(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}(e^{\theta i})^n+\sum_1^\infty(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}(e^{-\theta i})^n\right\}.$$

Ponendo

$$e^{\theta i}=x \qquad ; \qquad e^{-\theta i}=y$$

si ha

$$S_1=\frac{1}{2}\left\{\sum_1^\infty(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}x^n+\sum_1^\infty(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}y^n\right\}$$

e quindi

$$S_1=\frac{1}{2}\left\{(1+x)^{-\frac{1}{2}}+(1+y)^{-\frac{1}{2}}-2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(1+e^{\theta i})^{-\frac{1}{2}}+(1+e^{-\theta i})^{-\frac{1}{2}}\right\}-1$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[e^{\frac{\theta i}{2}}\left(e^{-\frac{\theta i}{2}}+e^{\frac{\theta i}{2}}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}+\left[e^{-\frac{\theta i}{2}}\left(e^{\frac{\theta i}{2}}+e^{-\frac{\theta i}{2}}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}-1$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}2\cos\frac{\theta}{4}\right\}-1$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{4}}{\sqrt{2\cos\frac{\theta}{2}}}-1$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}-1$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\sec\frac{\theta}{2}+1}-1.$$

2°. Sia

$$S_2 = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{9r^2 + 3r + 4}{(3r-1)\,3r\,(3r+1)\,(3r+2)}.$$

Un termine del precedente sommatorio è, in valore assoluto

$$\frac{9r^2 + 3r + 4}{(3r-1)\,3r\,(3r+1)\,(3r+2)} = \frac{1}{3r-1} - \frac{2}{3r} + \frac{2}{3r+1} - \frac{1}{3r+2}$$

e si ha quindi

$$S_2 = \sum_1^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{1}{3r-1} - \sum_1^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{1}{3r+2} + 2 \left\{ \sum_1^{\infty} (1-)^{r-1} \frac{1}{3r+1} - \sum_1^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{1}{3r} \right\}$$

ed essendo

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{1}{3r-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \dots$$

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{1}{3r+2} = \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \dots$$

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{1}{3r+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \dots$$

$$\sum_1^{\infty} (-2)^{r-1} \frac{1}{3r} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{12} + \dots$$

si ha

$$S_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \dots\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{11} - \dots\right) +$$
$$+ 2\left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} \dots\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{12} + \dots\right)\right]$$

ossia

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \dots\right) \\ &= \frac{3}{2} - 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right) \\ &= \frac{3}{2} - 2\log 2 \\ &= \frac{3}{2} - \log 4. \end{aligned}$$

599. *Sia* F *il fuoco,* V *il vertice di una parabola,* P, Q *due punti della medesima tali che le corde* VP, PQ *facciano angoli eguali con la tangente in* P. *Dimostrare che*

$$\frac{VP}{PQ} = \frac{\overline{FV}^2}{\overline{FP}^2}.$$

GREENSTREET

1ª Risoluzione della sig.ª Longobardi di Napoli.

Sia P (x_1, y_1) un punto della parabola

$$(1) \qquad y^2 = 2px.$$

L'equazione della tangente in P alla parabola è

$$(2) \qquad yy_1 = p(x + x_1),$$

e quella della retta per l'origine perpendicolare a questa è

(3) $$y = -\frac{y_1}{p} x,$$

La (3) incontra la (2) nel punto $\left(-\frac{px_1}{p+2x_1}, \frac{x_1 y_1}{p+2x_1}\right)$. La retta per P inclinata alla (2), come la PV passa dunque pel punto $\left(-\frac{y_1^2}{p+2x_1}, \frac{2x_1 y_1}{p+2x_1}\right)$, e quindi la sua equazione è

$$y - y_1 = \frac{2p^2}{y_1 (3p + 2x_1)} (x - x_1).$$

La precedente incontra la (1), oltre che in P, anche nel punto Q le cui coordinate x, y sono date da

$$x - x_1 = \frac{2(p - my_1)}{m^2} \quad , \quad y - y_1 = \frac{2(p - my_1)}{m},$$

essendo

$$m = \frac{2p^2}{y_1 (3p + 2x_1)}.$$

Da ciò che precede si ha

$$PV = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$PQ = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \frac{2(p - my_1)}{m^2} \sqrt{1 + m^2} = \frac{(p + 2x_1)^2}{p^2} \sqrt{x_1^2 + y_1^2},$$

donde

(4) $$\frac{PV}{PQ} = \frac{p^2}{(p + 2x_1)^2}.$$

Si ha inoltre

$$FV = \frac{p}{2},$$

$$FP = \frac{p}{2} + x_1 = \frac{p + 2x_1}{2},$$

donde

(5) $$\frac{FV}{FP} = \frac{p}{p + 2x_1}.$$

E dalle (4) e (5) si ha

$$\frac{PV}{PQ} = \frac{\overline{FV}^2}{\overline{FP}^2}.$$

2ª Risoluzione del sig. Occhipinti, R. U. di Palermo.

Conducasi da P e Q le perpendicolari $PR = b$, $QT = b'$ all'asse della parabola fino ad incontrarlo in R e T; da P la PU parallela all'asse stesso fino all'incontro della QT in U e da F la perpendicolare FS alla VP fino all'incontro in S. Posto $VF = \frac{p}{2}$ si ha: $VR = \frac{b^2}{2p}$, $VP = \frac{b\sqrt{b^2 + 4p^2}}{2p}$, $\overline{VF}^2 = \frac{p^2}{4}$, $\overline{FP}^2 = \frac{(b^2 + p^2)^2}{4p^2}$; si tratta dunque di dimostrare che $PQ = \frac{2p^5}{b(b^2 + p^2)^2 \sqrt{b^2 + 4p^2}}$.

Ora gli angoli VPF, QPU risultando eguali, i triangoli FPS, PQU sono simili; si ha quindi la proporzionalità tra i lati, cioè:

$$\frac{b^2+p^2}{2p\,.\,PQ}=\frac{FS}{b'-b}=\frac{VP-VS}{VT-VR};\ \text{inoltre: } VT=\frac{b'^2}{2p};\ VS=VF\cos\widehat{SVF};$$

$$FS=VF\,\text{sen}\,\widehat{SVF},\ \text{cioè: } VS=\frac{p}{2}\cos\widehat{SVF};$$

$$FS=\frac{p}{2}\,\text{sen}\,\widehat{SVF}\ \text{e, pel triangolo PVR:}$$

$$\text{sen}\,\widehat{SVF}=\frac{2p}{\sqrt{b^2+4p^2}},\ \cos\widehat{SVF}=\frac{b}{\sqrt{b^2+4p^2}},\ \text{dunque:}$$

$$VS=\frac{bp}{2\sqrt{b^2+4p^2}},\ FS=\frac{p^2}{\sqrt{b^2+4p^2}};$$

sostituendo risulta:

$$\frac{b^2+p^2}{2p\,.\,PQ}=\frac{p^2}{(b'-b)\sqrt{b^2+4p^2}}=\frac{b^3+3p^2b}{(b'^2-b^2)\sqrt{b^2+4p^2}}.$$

Eliminando b' fra queste due equazioni, si trova subito:

$$PQ=\frac{b\,(b^2+p^2)^2\sqrt{b^2+4p^2}}{2p^5}.$$

c. v. d.

600. *Nello sviluppo di* $(a_1+a_2+\ldots+a_m)^n$, *dove* n *è numero positivo e intero, quanti termini esistono con coefficienti eguali tra loro e maggiori di tutti gli altri?*

GREENSTREET.

Risoluzione del sig. Occhipinti R. U. di Palermo.

Il termine generale dello sviluppo è $\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_m!}\,a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_m^{\alpha_m}$, dove $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=n$. Quindi, se $n\leq m$ si otterrà evidentemente il massimo valore del coefficiente generale prendendo n delle α uguali all'unità e le altre uguali a zero; con ciò il termine generale dello sviluppo assume la forma $n!\,a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_n}$ dove $i_1 i_2\ldots i_n$ è una qualunque delle $\binom{m}{n}$ combinazioni semplici degli indici $1, 2, \ldots m$ ad n ad n.

Dunque, fintantochè n non supera m, il numero dei termini dello sviluppo, con coefficienti eguali fra loro e maggiori di tutti gli altri, è $\binom{m}{n}$, e tutti hanno per coefficiente $n!$ Ora supponiamo che sia $n>m$ ed in primo luogo che sia

$$n=km=k(m-1)+k$$

con k intero; in questo caso il massimo valore del coefficiente generale ha luogo evidentemente quando le $m\alpha$ sono tutte eguali a k; con ciò il termine generale dello sviluppo assume la forma: $\frac{n!}{k!\,k!\ldots k!}\,a_1^k a_2^k\ldots a_m^k$ donde segue che, quando $n=k(m-1)+k$, il numero dei termini dello sviluppo, con coefficienti eguali fra loro e maggiori di tutti gli altri, è: $\binom{m}{m}=1$ e questo termine ha per coefficiente

$$\frac{n!}{k!\,k!\ldots k!}.$$

Supponiamo infine che sia $n = h(m-1) + r$ con h, r interi; in questo caso il massimo valore del coefficiente generale non può aver luogo che quando $m-1$ delle α sono tutte eguali ad h e l'altra eguale ad r; con ciò il termine generale dello sviluppo assume la forma: $\frac{n!}{h!\,h!\ldots h!\,.\,r!} a_{i_1}^h a_{i_2}^h \ldots a_{i_{m-1}}^h a_{i_m}^r$, dove $i_1 i_2 \ldots i_m$ è una qualunque permutazione degli indici $1, 2, \ldots m$. Ne segue che, quando $n = h(m-1) + r$, il numero dei termini dello sviluppo, con coefficienti eguali fra loro e maggiori di tutti gli altri, è m e tutti hanno per coefficiente $\frac{n!}{h!\,h!\ldots h!\,r!}$

Altra risoluzione della sig.ª Longobardi di Napoli.

604. *Due parabole hanno il vertice in comune e gli assi ad angolo retto. Mostrare che la polare reciproca dell'una rispetto all'altra è un'iperbole rettangolare che ha gli assi delle parabole per assintoti.*

CERRUTI.

Risoluzione del sig. Maimeri R. U. di Pavia.

Alla tangente nel vertice ad una parabola corrisponde nella polarità rispetto all'altra il punto all'infinito dell'asse della prima; alla retta all'infinito corrisponde nella medesima polarità il punto all'infinito dell'asse della seconda. Alle due punteggiate projettive descritte da una tangente variabile alla prima parabola sulla tangente nel vertice e sulla retta all'infinito, corrispondono nella polarità considerata, due fasci improprii projettivi di raggi i cui centri sono i punti all'infinito degli assi delle due parabole. Alla retta all'infinito comune a questi due fasci projettivi considerata come appartenente all'uno od all'altro fascio, corrisponde nell'altro fascio l'uno o l'altro degli assi delle due parabole. E poichè questi sono ortogonali, la polare reciproca ecc. ecc.

Altre risoluzioni del sig. Occhipinti e della sig.ª Longobardi.

605. *Nello stesso piano sono date la conica* $F(x, y) = 0$, *e l'ellisse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. *Dai punti della prima si conducono le tangenti alla seconda. Inviluppo delle corde di contatto.*

CERRUTI.

Risoluzione del sig A. M. — Siano

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{1}$$
$$A_{11}u^2 + 2A_{12}uv + A_{22}v^2 + 2A_{13}u + 2A_{23}v + A_{33} = 0 \tag{2}$$

l'equazioni della conica data Γ, in coordinate cartesiane e plückeriane, essendo A_{ik} il minore complemento di a_{ik} nel discriminante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

L'inviluppo richiesto è la polare reciproca della conica Γ rispetto all'ellisse C rappresentata dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Chiamando u, v le coordinate della polare di un punto (x, y) rispetto a C si ha

$$\begin{cases} u = -\dfrac{x}{a^2} \\ v = -\dfrac{y}{b^2} \end{cases} \quad \text{ossia} \quad (4) \begin{cases} x = -a^2 u \\ y = -b^2 v. \end{cases}$$

L'equazione dell'inviluppo richiesto in coordinate plückeriane si ottiene dunque eliminando x, y fra le (1), (4), cioè è

$$a_{11}a^4u^2 + 2a_{12}a^2b^2uv + a_{22}b^4v^2 - 2a_{13}a^2u - 2a_{23}b^2v + a_{33} = 0;$$

e quindi in coordinate cartesiane

$$\begin{vmatrix} a_{11}a^4 & a_{12}a^2b^2 & -a_{13}a^2 & x \\ a_{21}a^2b^2 & a_{22}b^4 & -a_{23}b^2 & y \\ -a_{31}a^2 & -a_{32}b^2 & a_{33} & 1 \\ x & y & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \frac{x}{a^2} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \frac{y}{b^2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & -1 \\ \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$\frac{A_{11}}{a^4}x^2 + 2\frac{A_{12}}{a^2b^2}xy + \frac{A_{22}}{b^4}y^2 - 2\frac{A_{13}}{a^2}x - 2\frac{A_{23}}{b^2}y + A_{33} = 0.$$

Altre risoluzioni dei sigg. Alasia, Occhipinti e della sig.ª Longobardi.

NOTA. — Quando il fascicolo precedente era già stampato pervennero alla direzione le risoluzioni delle quistioni 601, 602, 603 inviate dalla sig.ª **Longobardi** e dal sig. **Bianca**.

QUISTIONI PROPOSTE

700. Trovare la relazione che deve esistere tra i coefficienti del polinomio

$$f(x) = a_1x^m + a_2x^{m-1} + \ldots + a_mx + a_{m+1}$$

perchè sia divisibile per $x^2 - \alpha^2$. CANDIDO.

701. Dimostrare che le aree delle linee descritte dal centro e da un fuoco di un'ellisse che sdrucciola sopra una retta fissa, che cioè si muove nel proprio piano toccando una retta fissa in un punto fisso, sono espresse da

$$\frac{\pi}{2}(a-b)^2 \quad ; \quad 2a\pi(a-b)$$

essendo a il semiasse focale e b l'altro.

702. Data un'ellisse ed un punto P nel suo piano, si considerino le coppie di diametri i cui coefficienti angolari hanno un prodotto costante k, e si proiettino gli estremi di ciascun diametro di una coppia sull'altro. Studiare la curva luogo di tali proiezioni e determinare:

1° i luoghi dei punti medi delle corde dal centro O dell'ellisse e dal punto P;

2° i luoghi dei coniugati armonici di O e P rispetto agli estremi delle stesse corde.

Esaminare il caso in cui i due diametri di una coppia siano coniugati o associati ($k=\frac{b}{a}$, essendo a il semiasse focale, b l'altro).

Osservazione. — Nel caso che l'ellisse sia un cerchio, la curva in parola è la proiezione ortogonale della linea d'ombra propria di un'elicoide gobba sopra un piano normale al suo asse.

G. Longobardi.

703. Sia MN una corda normale in M ad una parabola p, inclinata di 45° sull'asse di questa, e sia c il circolo tangente esternamente a p in M di raggio $\frac{MN}{4}$. Si dimostri:

1° che una delle tangenti comuni a p e c è parallela ad MN;

2° che la distanza della tangente in M dal punto d'incontro delle altre due tangenti comuni a p e c è $\frac{3MN}{4}$;

3° che il segmento staccato sulla tangente in M dalle due tangenti suddette è eguale a MN.

704. Si consideri il sistema di circoli tangenti in un punto fisso M ad una parabola data. Il luogo del punto d'incontro delle tangenti comuni alla parabola e ad uno di tali circoli (distinte dalla tangente in M), è una parabola.

705. Due parabole hanno lo stesso vertice O ed i loro assi sono ortogonali. Trovare le coordinate del secondo punto d'incontro O', l'angolo delle parabole in O' e l'area della porzione di piano limitata fra gli archi OO' delle due parabole.

Facendo variare il parametro di una delle due parabole, si trovi per quale valore di esso l'angolo delle parabole in O' sia massimo.

E.-N. Barisien.

BIBLIOGRAFIA

Scentia. *Série Physico-Mathématique.* Paris, C. Naud.

N. 14. I. Macé de Lépinay. — *Frange d'interferenza e loro applicazioni metrologiche*, Febbraio 1902.

Lo scopo dell'Autore con questa pubblicazione è di mettere in evidenza la grande importanza che le frange d'interferenza possono avere nelle misure di alta precisione, e perciò si occupa dei metodi ottici interferenziali e delle loro applicazioni alle misure di lunghezza.

Premesso come un raggio di luce possa essere considerato quale un micrometro naturale della più grande precisione, fa sentire come un sistema di unità fondato sul metodo ottico, in cui, cioè, l'unità di lunghezza sia la lunghezza di un'onda luminosa, l'unità di massa quella di un cubo d'acqua colle dimensioni di una lunghezza d'onda e l'unità di tempo la durata di una vibrazione, possa veramente essere considerato un sistema assoluto, poichè è indipendente da ogni campione materiale, può essere riprodotto in ogni laboratorio, è assolutamente invariabile, col vantaggio altresì che, essendo l'errore relativo nelle misure in ragione inversa della grandezza del campione usato, la lunghezza d'onda luminosa è piccolissima e può essere aggiunta a se stessa indefinitamente senza errore. Soggiunge tosto come l'unità di lunghezza finora sia la sola bene stabilita per tale via; come l'unità di massa sia in via di determinazione, e come l'unità di tempo richiegga ancora una misura più precisa della velocità della luce.

Ciò posto, si propone di esporre le ricerche ed i metodi per misurare le lunghezze in lunghezza d'onda ed esprimerle in frazione del metro, non che riferire l'applicazione di tale misura alla determinazione del chilogrammo.

Per questo, dopo aver indicato in che consiste il fenomeno dell'interferenza luminosa, accenna ai metodi di produrlo cogli specchi di Fresnel, colle lamine sottili e colle lamine debolmente argentate, esaminandone i pregi e difetti e descrivendo i principali rifrattometri interferenziali che possono essere usati nelle misure di precisione. A questo proposito discute gli apparecchi che permettono l'uso di una sorgente luminosa estesa in tutte le direzioni, i quali danno origine a frange localizzate, e gli altri che richiedono finestre strette orientate e danno frange visibili ad ogni distanza, citando infine alcune disposizioni che portano all'uno ed all'altro risultato. Fa poi notare come per avere frange perfettamente nette occorra luce omogenea e limitata da fenditure opportunamente orientate: che, se l'una o l'altra condizione è difettosa, le frange danno alternative di comparsa e scomparsa, e mostra come il fatto dipenda dalla larghezza delle frange e della sorgente e come esso trovi un'applicazione alla misura dei diametri apparenti degli astri. Aggiunge come i vapori metallici sotto debole pressione resi incandescenti con scariche ad alto potenziale dieno le radiazioni più omogenee e come la più semplice sembri quella rossa del cadmio.

Nella seconda parte della monografia l'Autore fa notare l'influenza della temperatura e della pressione sulle misure e si occupa della determinazione di un ordine di interferenza, tanto nella parte frazionaria che intera, riferendo e discutendo i metodi per la 1ª e 2ª operazione. Mostra come la 1ª determinazione sia semplice, mentre la seconda incontri gravi difficoltà, essendovi però sempre la possibilità di migliorare i dati primitivi a seconda del bisogno.

Nella terza parte, dopo aver premesso come i metodi sperimentali più recenti, seguiti per le misure metrologiche, si riducano tutti a misure di lunghezza, nota come sia necessario conoscere i valori assoluti dei campioni ottici, cioè la lunghezza d'onda, e riferisce i vari metodi che permisero di misurare delle grandi lunghezze in frazione di lunghezze d'onda. Così, per es., Michelson e Benoit coll'esattezza di un milionesimo ragguagliarono al metro tipo la lunghezza d'onda nell'aria (a 760 mm. di pressione ed a 15° del termometro in vetro duro) del raggio rosso, verde e bleu del cadmio e trovarono

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ m.} = 1553163,5\,R & R = 0'',64384722 \\ \phantom{1 \text{ m.} =} 1966249,7\,V & V = 0\ .50858240 \\ \phantom{1 \text{ m.} =} 2083372,1\,B & B = 0\ .47999107. \end{array}$$

Accenna poi alle misure ottiche di lunghezza fra due linee o tratti e fra due superfici parallele, ricordando pel 1° caso il processo generale di Benoit e pel 2° caso i tre metodi delle Frange di Talbot, delle frange delle lamine argentate e dell'apparecchio di Michelson. Riferisce infine l'applicazione alla determinazione della massa del decimetro cubo di acqua distillata, priva d'aria, a 4°, mettendo in evidenza mediante i risultati numerici delle ricerche di vari sperimentatori che, sebbene sieno necessarie ancora altre ricerche, i progressi raggiunti negli ultimi anni a tale riguardo sono grandissimi.

Anche da questi cenni sommari si può facilmente intendere quanto sia interessante e di attualità la monografia in considerazione.

RODOLFO BETTAZZI. — *Aritmetica Razionale ad uso dei Ginnasi*. Torino, tip. Salesiana, 1902.

L'egregio Autore svolge nella parte prima, da pag. 5 a pag. 70, il programma della IV classe ginnasiale; nella parte seconda, da pag. 71 a pag. 128, il programma della V classe ginnasiale; e nell'Appendice, da pag. 129 a pag. 153, è esposto il legame esistente fra le grandezze ed i numeri.

Facendo uso abbondante delle idee contenute nel formulario di Matematica del prof. Peano, l'Autore la rompe coraggiosamente coi metodi tradizionali, e dà alla luce un libro veramente nuovo ed originale. La materia è svolta con rigoroso ordine logico; brevi ed esatte le dimostrazioni. Non si fanno convenzioni tacite, nè si ammettono tacitamente proposizioni che si suppongono note all'allievo; ed ove la dimostrazione sarebbe inopportuna o superiore all'intelligenza dell'allievo, la proposizione viene semplicemente enunciata sotto forma di *proposizione principale*.

Le proprietà formali delle quattro operazioni sui numeri interi e sui numeri razionali sono analizzate con somma cura. Di ciascuna operazione se ne studiano prima le proprietà formali indipendenti da qualsiasi sistema di numerazione; poi se ne fa l'applicazione al sistema decimale. Seguono infine alcune brevi, ma utili norme di calcolo mentale.

Assai interessante è l'appendice. Essa è divisa in tre capi. Il Capo I intitolato *la grandezza ed i numeri*, è suddiviso nei seguenti paragrafi: I gruppi finiti. — Confronto dei gruppi. — Composizione dei gruppi. — Le classi discrete di grandezze ed i numeri interi. — Le classi frazionabili di grandezze ed i numeri razionali. — Legame fra la teoria delle grandezze e quella dei numeri.

Il Capo II ha per titolo *la misura*, ed è suddiviso nei seguenti paragrafi: La misura nelle classi discrete. — La misura nelle classi frazionabili. — I cosidetti numeri complessi. — Il sistema metrico decimale.

Il capo III, intitolato *i problemi sulle grandezze*, si suddivide nei seguenti paragrafi: La risoluzione numerica dei problemi sulle grandezze. — Dipendenza fra operazioni su grandezze ed operazioni su numeri. — Proporzionalità.

Da vari anni si va studiando fra i professori di Matematica il modo di migliorare i metodi d'insegnamento, e di introdurre nell'insegnamento secondario il frutto delle moderne ricerche scientifiche fatte sui fondamenti della Matematica. Per ciò che riguarda l'Aritmetica Ragionata, credo che la via giusta sia quella tracciata con questo libro dal prof. Bettazzi; e gli Insegnanti che amano il miglioramento della scuola non mancheranno certo di fare buona accoglienza a questa opera scritta con rigore scientifico, e con metodo veramente moderno.

Marco Nassò.

RICCARDO FELICI

il 20 luglio scorso, dopo breve malattia, si spengeva a S. Alessio presso Lucca. Era nato a Parma l'11 giugno 1819; e dopo aver percorso gli studî, che a quei tempi corrispondevano ai secondarii, per prepararsi alla celebre Scuola Politecnica di Parigi, capitò a Pisa dove fu trattenuto, per fortuna della scienza, dalle lezioni e dall'affetto del Mossotti e del Matteucci. Di quest'ultimo divenne poi l'aiuto (1846), e il successore (1859) nella cattedra di fisica dell'Università di Pisa; alla quale appartenne fino al 1893, e gli allievi suoi si chiamarono Bartoli, Donati, Poloni, Röiti, Villari, . . .

In Italia, mezzo secolo fa, i fisici sperimentali curavano poco l'aiuto ed il controllo che può dare l'analisi matematica, largamente e convenientemente applicata, allo studio dei fenomeni. È forse il merito principale del Felici quello di essere stato uno dei primi fra noi, se non il primo, a coordinare la ricerca sperimentale cogli svolgimenti e le teorie matematiche, sia che si trattasse di esprimere nel linguaggio del geometra i fenomeni fisici più semplici, una volta stabiliti, e di verificare le conseguenze che il calcolo sa dedurre dalla formola fondamentale; sia che premessa una ipotesi e la sua trattazione matematica, l'esperienza possa esser chiamata a decidere della sua attendibilità.

Questa tendenza del suo spirito a collegare costantemente in una unione feconda e sicura i due metodi di ricerca, si rivela già in una modesta noticina pubblicata colle sue sole iniziali nell'anno V del *Nuovo Cimento* (1847) " *Sulla teoria del circuito galvanico* „ : in essa tratta alla maniera del Kirchhoff la propagazione della corrente elettrica in una sfera omogenea e ne fa l'applicazione alla terra. (*)

In quel lavoro egli insiste sull'utilità, in fisica sperimentale, " di prima discutere analiticamente una ipotesi, per indi procedere con buon ordine alla scoperta della verità „ ; pur notando, con fine acume critico, le difficoltà che talvolta s'incontrano ; come, in quel caso speciale, nel voler trasportare pari pari i concetti del Fourier, dalla propagazione del calore allo studio della propagazione della corrente elettrica.

Ma dove il Felici dimostrò, una volta di più, tutta l'importanza del metodo analitico-sperimentale, fu nelle tre memorie " *Sulla teoria matematica dell'induzione elettrodinamica* „ pubblicate in sunto negli *Annali di Tortolini* del 1851 e negli *Annales de Chimie et de Physique* del 1852, ed in esteso negli *Annali delle Università Toscane* 1854 e segg. " Dare le formole per una teoria matematica delle correnti d'induzione elettro-dinamica ed elettro-magnetica è lo scopo di questo lavoro, fidato unicamente a dati dell'esperienza, e col metodo che servì all'Ampère per scoprire la formola fondamentale che esprime le leggi secondo le quali due elementi filiformi si attirano o si respingono (**) „.

Le ricerche di F. E. Neumann (***) e di W. Weber sul medesimo soggetto e le formole a cui essi furono condotti, partono da ipotesi assai complicate e sono puramente matematiche.

Il Weber ammette che, mentre nello stato di riposo l'azione fra due molecole elettriche sia quella indicata dalla formola di Coulomb, nello stato di moto essa varii di valore colla velocità e coll'accelerazione relativa, secondo una formola assai complicata e non prevedibile *a priori*, per quanto connessa a quella di Ampère. Ed il Neumann suppone, che la forza elettro motrice indotta sia proporzionale alla componente di quella elettrodinamica, che esisterebbe se l'elemento indotto fosse percorso da una corrente elettrica, nella direzione della velocità dell'elemento medesimo. Inoltre, in quella memoria si ammette possibile in ogni istante l'applicazione della legge di Ohm alla corrente indotta, e non si considerano, quindi, le correnti indotte dalla scarica di un condensatore; come anche si limita il problema al caso di un circuito indotto filiforme, e si tralasciano le variazioni di forma e la reazione della corrente indotta sul circuito induttore.

Le insuperabili esperienze del Felici, pur fatte *con quattro soldi e otto* come egli stesso ebbe a scrivermi, permettono invece di giungere ad una formola che esprime la forza elettro-motrice indotta, assolutamente indipendente da ogni ipotesi, e che contiene come casi particolari quelle dei due fisici tedeschi. Gli svolgimenti matematici che seguono da quella semplicissima formola, applicata poi dallo stesso Felici al caso della induzione leid-elettrica, magneto-elettrica, unipo-

(*) Ricerche analoghe erano pubblicate quasi contemporaneamente dallo Smaasen negli Annali di Poggendorff.

(**) Il metodo sperimentale del Felici è largamente riassunto nel *Cours de Physique* del Jamin, ed un largo cenno è pur dato nel classico trattato del Maxwell. Le memorie originali furono, in occasione degli onori che la Società Italiana di Fisica rese al suo Presidente Onorario nel 1899, tradotte in tedesco dal Dr. Bernardo Dessau, e ripubblicate nella *Collezione dei classici delle scienze esatte* iniziata dall'Ostwald e continuata dal prof. A. von Oettingen sotto il titolo: *Ueber die mathematische Theorie der electro dynamischen Induction* (Leipzig, W. Engelmann, 1899).

(***) *Rech. sur la th. de l'induction;* memoria letta all'Accad. delle Scienze di Berlino il 27 ottobre 1845, e tradotta da A. Bravais nel *Journal de Liouville* 1848, pag. 113.

lare etc., rimarranno adunque, qualunque siano le idee che avranno predominio sulla scienza. La formola generale, poi, a cui egli giunge è quella stessa adottata dall'Helmholtz.

Ma il Felici non si limitò alla ricerca di fatti quantitativi. Nei suoi interessanti studi sui coibenti dimostrò con esperienze rigorose, che la polarizzazione dei dielettrici è un fenomeno a cui prende parte la massa intera della sostanza e scompare in un tempo inferiore ad $^1/_{1000}$ di secondo. Al quale ultimo proposito è utile ricordare il suo delicatissimo *interruttore*, che permette di valutare fino al ventimillesimo di secondo.

Non è qui il caso di dare una analisi completa del lavoro scientifico di Riccardo Felici. Molto egli fece, e molto più avrebbe pubblicato, (*) se il desiderio di non dare che esperienze inattaccabili, e per conseguenza lo scrupolo della ricerca portato fino all'esagerazione, non lo avessero trattenuto. Questa smania di una rigidità matematica lo turbava anche nelle semplici esperienze da lezione; ed è la vera caratteristica dell'uomo, che al modo brillante ma effimero di coltivare la scienza, preferisce l'indagine severa e profonda, per quanto laboriosa e lunga sempre, ed arida talvolta.

È pur doveroso ricordare, fra i meriti non ultimi del Felici, l'aver mantenuto in vita, con lungo amore e con non lieve sacrifizio morale e materiale, il *Nuovo Cimento;* il giornale fondato da Matteucci e da Piria, che per lunghissimi anni, e nei tempi nostri più tristi, fu l'unica rivista di scienze fisiche che possedesse l'Italia. In essa, oltre i lavori originali che permisero ai migliori fra noi di farsi noti in Italia e fuori, si pubblicavano le traduzioni delle principali memorie straniere, i sunti degli studii che si facevano all'estero: la maggior parte di questi e di quelle erano dovuti all'assiduo e modesto lavoro del Direttore.

Assorto nei suoi studi prediletti la politica non lo attirava, al contrario del suo maestro, il Matteucci. Pure nei tempi del nostro risorgimento politico non rimase inattivo. Col battaglione universitario si trovò a Curtatone, e prese larga parte ai moti che prepararono il '48 ed a quelli che vennero dopo. A lui è dovuto il delicato specillo, col quale fu rintracciata la palla che ferì Garibaldi ad Aspromonte.

Membro effettivo dell'Accademia dei Lincei, ed onorario della Società Reale di Londra, Presidente Onorario della Società Italiana di Fisica, Cavaliere dell'Ordine del Merito Civile di Savoia, se onori maggiori non ebbe, fu perchè nè li cercò, nè li desiderò mai. Semplice nei modi la sua modestia era grandissima, sì che il desiderio di non apparire sembrava quasi un'affettazione.

Diamo in fondo a questo breve articolo l'elenco dei lavori del Felici che ci è stato possibile di rintracciare, ma che speriamo completo. In ognuno di quelli tu trovi la chiarezza e la precisione che si riscontrano in special modo nelle memorie del Poinsot, al cui spirito egli tanto si avvicinava.

R. Pitoni.

1844. Alcune osservazioni intorno alle ricerche del sig. Dutrochet sulla forza epipolica *(Il Cimento,* pag. 134).

1847. Sul circuito galvanico *(N. Cimento).*

1850. Sulla propagazione della corrente elettrica nell'interno di una sfera. *(Annali di Tortolini,* pag. 312).

1851. Memoria sulle polarità galvaniche secondarie e sull'influenza del calore nella

(*) È da sperare che si ritrovino, nelle sue carte, le traccie dei suoi ultimi studi ed esperienze.

propagazione della corrente elettrica nei liquidi (*Annali delle Università toscane*, tomo II, pag. 173).

Vi si stabilisce che la polarizzazione aumenta rapidamente coll'intensità della corrente primaria e tende verso un massimo. Si studia poi la conducibilità dell'acqua da — 3° a + 100° determinando un'anomalia a + 4°, come confermano ricerche recenti. Si dà una formula che esprime il variare della polarizzazione colla temperatura.

— Saggio di una spiegazione dei fenomeni d'induzione elettro-dinamica (*Annali di Tortolini*, pag. 65, 306, 361, 503).

1852. Mém. sur l'induction électro-dynamique (*Annales de Chimie et de Phys.*).

1853. Note sur les phén. d'induction (*Ibid*).

— Saggio di un'applicazione del calcolo alle correnti indotte dal magnetismo in movimento (*Annali di Tortolini*, pag. 173).

— Sopra i fenomeni d'induzione della bottiglia di Leida (*Ibid*, pag. 237).

1854. Sulla teoria matematica delle correnti indotte in un corpo di forma qualunque (*Ibid*, pag. 35).

— Sulla propagazione della corrente in una sfera (*Annali di Tortolini*).

— Sulla teoria mat. dell'induzione elettrodinamica (memoria negli *Annali delle Univ. Toscane*).

— Terza memoria sull'induzione. (*Annali delle Univ. Toscane*).

1855. Sur les cour. ind. par la rot. d'un conducteur autour d'un aimant (*Annales de Ch. et de Phys.*).

1857. Mémoire sur la loi de Lenz (*Ibid*).

— Exp. sur un cas d'induction où serait nulle l'action électro-dyn. exercée par l'aimant inducteur si le circuit était traversé par un courant (*Ibid*).

1859. Sur la cause des cour. que l'on obtient dans un circuit dont les bouts immobiles s'appuient sur un conducteur tournant autour de l'axe d'un aimant cylindrique (*Ibid*).

1862-63. Esperienze sulla velocità della scarica e sulla durata della scintilla (*Idem*).

1866. Nuova esperienza sopra la velocità della elettricità e sulla durata della scintilla (*Annali Univ. Tosc.* tomo 8°).

Si riprendono i resultati esposti in una nota pubblicata nel *Nuovo Cimento*, 1865; si studiano le influenze sulla durata della scintilla, e si stabilisce per la velocità della elettricità un limite di 260000 chilom. al secondo, in un filo di rame nudo e isolato nell'aria.

1866. Sopra alcune esperienze di elettricità (*N. Cimento*).

1867. Esp. per determinare la legge di oscillazione di un corpo elastico (*Annali Univ. Toscane*).

1871-72. Sulle azioni elettriche dei corpi non conduttori soggetti all'influenza di un corpo elettrizzato (*N. Cimento*).

1873. Esper. sul tempo impiegato da un coibente per ritornare allo stato naturale (*Ibid*).

— Esp. sulla forza elettro-motrice indotta da un solenoide chiuso (*Ibid*).

1874. Sopra un nuovo interruttore e sul suo uso in alcune esperienze d'induzione (*Ibid*).

— Modificazioni all'interruttore galvanico (*Ibid*).

1875. Exposé de quelques exp. qui interessent la théorie de l'Induction (*Journal de Physique* de d'Almeida). Si citano alcune esperienze che non sembrano d'accordo col principio di Neumann).

1876. Sull'az. esercitata da un dielettrico in moto sopra un corpo elettrizzato (*N. Cimento*).

— Notizie sulla vita e sugli scritti di Carlo Matteucci (*Memoria della Società dei XL*).

1882. Sopra un'esperienza di Ampère (*N. Cimento* e *Jour. de Phis.*, 1883).

1884. Appunti per lezioni di fisica sperimentale. Pisa, Pieraccini.

1888. Sul potenziale di un conduttore in movimento sotto la influenza di un magnete (*N. Cimento*).

GIULIO LAZZERI — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 19 agosto 1902.

SULLE PRINCIPALI

operazioni dell'analisi combinatoria formale e su alcune loro applicazioni relative allo sviluppo rapido dei determinanti e degli iperdeterminanti.

(Continuaz., v. fasc. precedente)

---

§ 5. — Formazione ed enumerazione delle combinazioni a due dimensioni di mn elementi dati.

In una mia nota (*) ho definite le combinazioni a due dimensioni di mn elementi dati ed ho descritto un metodo per formarle senza omissione e ripetizione. In un altro lavoro (**) ho definito gli iperdeterminanti e ne ho dimostrate alcune proprietà elementari, esponendo anche un metodo per svilupparli. Descriverò ora un nuovo metodo per la formazione rapida delle combinazioni a due dimensioni e per lo sviluppo degli iperdeterminanti rettangolari; esso ha, su quelli descritti nelle note suddette, il vantaggio di essere più rapido, più sicuro e quindi più pratico. Intanto, per risparmiare al lettore la fatica di consultare i lavori citati, esporrò quanto parmi indispensabile riguardo al concetto di combinazione a due dimensioni ed, a suo tempo, riguardo a quello di iperdeterminante a due dimensioni.

Consideriamo la seguente matrice rettangolare

$$\Delta \equiv \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

di dimensioni $\longrightarrow n$ ed $\updownarrow m$ (***), nella quale sono distribuiti per orizzontali e verticali mn elementi $a_{11} \dots a_{mn}$. Siano dati $m+n$ numeri positivi interi non nulli $v_1, v_2, \dots v_n, r_1, \dots r_m$ tali che $v_1 + \dots + v_n = r_1 + \dots + r_m$; $v_i \leq m$; $r_j \leq n$. Sia k il valor comune delle somme $v_1 + \dots + v_n$, $r_1 + \dots + r_m$ ed

$$a_{\eta_1 v_1} \, a_{\eta_2 v_2} \dots a_{\eta_k v_k} \dots \tag{1}$$

(*) *Periodico di Matematica*, tomo XV, sett.-ott. " Sopra un metodo per formare alcune combinazioni di elementi a più indici, dette combinazioni ad 1, 2, 3 ... dimensioni.

(**) *Giornale di Matematiche di Battaglini*, vol. XXXIX, luglio-agosto. " Su una generalizzazione della teoria dei determinanti ".

(***) La dimensione $\longrightarrow$ è il numero degli elementi contenuti in ciascuna orizzontale e la dimensione $\updownarrow$ è il numero degli elementi contenuti in ciascuna verticale una successione di k elementi scelti nella matrice Δ per modo che $v_1, v_2, \dots v_n$ di essi appartengano rispettivamente alla $1^a, 2^a, \dots n^{ma}$ verticale ed $r_1, r_2, \dots r_m$ di essi, rispettivamente alla $1^a, 2^a, \dots m^{ma}$ orizzontale. È chiaro che $\eta_{j1}, \eta_{j2}, \dots \eta_{jk}$ è una successione di indici contenente r_1 volte l'indice 1, r_2 l'indice $2, \dots r_m$ l'indice m, e $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_k$ è una successione di indici, contenente v_1 volte l'indice 1, r_2 volte l'indice $2, \dots v_n$ volte l'indice n. Orbene dicesi combinazione a due dimensioni di mn elementi $a_{11} \dots a_{1n}, a_{21} \dots a_{2n}, a_{m1} \dots a_{mn}$ una successione di k elementi, scelti tra i dati in modo che r_j di essi abbiano il primo indice uguale ad j, $(j = 1, \dots m)$, e v_i di essi $(i = 1, 2, \dots n)$. abbiano il secondo indice uguale ad i, colle condizioni $r_1 + \dots + r_m = = v_1 + \dots + v_n$; $r_j \leq n$; $v_i \leq m$.

I numeri m ed n diconsi le dimensioni della combinazione: i numeri $r_1, \dots r_m$ si dicono $1^o, \dots m^{mo}$ coefficiente relativo alla dimensione m ed i numeri $v_1, \dots v_n$ si dicono $1^o, \dots n^{mo}$ coefficiente relativo alla dimensione n. È chiaro che ad ogni combinazione a due dimensioni degli elementi $a_{11} \dots, a_{mn}$ corrisponde un gruppo figurativo di elementi scelti nella matrice Δ in modo che r_j di essi appartengano alla orizzontale j^{ma} e v_i alla verticale i^{ma}. Viceversa ad ogni tale gruppo di elementi scelti in Δ corrisponde una combinazione a due dimensioni della a. Perciò, ed anche perchè la matrice Δ è rettangolare, le suddette combinazioni si dicono anche combinazioni rettangolari degli elementi $a_{11} \dots a_{mn}$.

Vedremo in seguito se e come, dati i numeri $m, n, r_1, \dots r_m, v_1, \dots v_n$, si possa formare almeno una delle combinazioni a due dimensioni delle $a_{11} \dots a_{mn}$.

Osserviamo ora che siffatte combinazioni possono anche formarsi con oggetti appartenenti ad una data collezione. Dagli esempi che porteremo apparirà chiaro il significato concreto del concetto di combinazione a due dimensioni.

Esempio 1^o. — Sia $\longrightarrow n = 4$, $\updownarrow m = 3$; $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$; $v_1 = 1$, $v_2 = 2$, $v_3 = 1$, $v_4 = 2$. Supponiamo che la collezione di dimensioni 4 e 3 comprenda i seguenti dodici oggetti: 1^o quattro cerchi rispettivamente colorati in bianco, nero, rosso, verde; 2^o quattro rettangoli rispettivamente colorati in bianco, nero, rosso, verde; 3^o quattro triangoli anch'essi rispettivamente colorati in bianco, nero, rosso, verde. Possiamo proporci di formare tutti i gruppi di $K = 6$ oggetti, talmente che ogni gruppo contenga r_1 cerchi, r_2 rettangoli, r_3 triangoli, colla condizione che fra i sei oggetti suddetti ve ne siano v_1 colorati in bianco, v_2 colorati in nero, v_3 colorati in rosso e v_4 colorati in verde.

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{cccc} \text{bianco} & \text{nero} & \text{rosso} & \text{verde} \end{array} & \\ \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right\| & \begin{array}{l} \text{cerchi} \\ \text{rettangoli} \\ \text{triangoli} \end{array} \end{array}$$

Disponiamo i suddetti oggetti su orizzontali e verticali, in modo che tutti quelli della stessa specie siano su una stessa orizzontale, e tutti quelli dello stesso colore su una stessa verticale. Rappresentandoli coi segni $a_{11} \ldots, a_{34}$, avremo una matrice nella quale ad es. a_{23} rappresenta il rettangolo colorato in rosso, a_{33} il triangolo colorato in verde ecc....; così è manifesto che per saper formare i suddetti gruppi di oggetti, basta saper formare le combinazioni a due dimensioni degli elementi letterali $a_{11}, \ldots a_{34}$, assumendo per coefficienti della dimensione $\updownarrow$ 3 i numeri $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$ e per coefficienti della dimensione $\longrightarrow$ 4 i numeri $v_1 = 1$, $v_2 = 2$, $v_3 = 1$, $v_4 = 2$.

Esempio 2°. — La collezione di oggetti consta di tutti cerchi; quattro di essi sono per metà colorati in bianco, quattro per metà colorati in nero e quattro per metà colorati in rosso; inoltre tre di essi hanno la rimanente metà bianca, tre la hanno nera, tre rossa e tre verde. Si vogliono formare i gruppi di 6 cerchi, talmente che ogni gruppo contenga r_1 cerchi colorati per metà in bianco, r_2 colorati per metà in nero ed r_3 colorati per metà in rosso; inoltre v_1 di essi devono avere la rimanente metà bianca, v_2 nera, v_3 rossa e v_4 verde. Basta indicare i suddetti oggetti con $a_{11} \ldots a_{34}$ e formare la matrice

$$\begin{array}{c|cccc|l} & \text{bianco} & \text{nero} & \text{rosso} & \text{verde} & \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \text{bianco} \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \text{nero} \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \text{rosso} \end{array}$$

nella quale ad es. a_{23} rappresenta il cerchio colorato per metà in rosso e per metà in nero ecc....

Esempio 3°. — Si hanno dodici segni $A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4C_1C_2C_3C_4$; Si vogliono formare tutti i gruppi di sei segni per modo che ogni gruppo contenga r_1 delle A, r_2 delle B, r_3 delle C; inoltre tra le lettere di uno stesso gruppo, ve ne devono essere, v_1, v_2, v_3, v_4 aventi rispettivamente l'indice 1, 2, 3, 4. Basta indicare i suddetti segni con $a_{11} \ldots a_{34}$ e formare la matrice

$$\begin{array}{c|cccc|l} \text{indici} & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \text{A} \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \text{B} \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \text{C} \end{array}$$

ecc.... Come caso particolare A, B, C possono rappresentare avvenimenti ciascuno dei quali sia accaduto quattro volte negli istanti t_1, t_2, t_3, t_4. E così ad es. A_3 rappresenterebbe l'avvenimento A accaduto nell'istante t_3 ecc....

Esempio 4°. — Si hanno quattro triangoli equilateri rispettivamente di lato a, b, c, d; quattro cerchi rispettivamente di raggio a, b, c, d;

quattro quadrati rispettivamente di lato a, b, c, d. Si vogliono formare i gruppi di sei fra tali figure per modo che ogni gruppo contenga r_1 triangoli equilateri, r_2 cerchi, r_3 quadrati; inoltre fra tali figure ve ne devono essere v_1, v_2, v_3, v_4 aventi il lato od il raggio rispettivamente uguale ad a, b, c, d. Basta formare la matrice

$$\begin{array}{lccccl} \text{raggio o lato} & a & b & c & d & \\ & \left\| \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix} \right. & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix} & \left. \begin{matrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{matrix} \right\| & \begin{matrix} \text{triangoli equilateri} \\ \text{cerchi} \\ \text{quadrati} \end{matrix} \end{array}$$

ecc....

Da quanto è stato detto risulta che se con a_{ij} si indica un elemento (un oggetto od un fatto) di una collezione, gli indici i ed j hanno per ufficio di indicare che tal oggetto o tal fatto gode di due proprietà distinte; alla 1ª si accenna apponendo alla lettera a l'indice i (1° indice), alla 2ª apponendo l'indice j (2° indice).

Torniamo ora alla teoria generale delle combinazioni a due dimensioni. Consideriamo le successioni di indici

$$\eta_1\ \eta_2 \ldots\ldots\ \eta_k \tag{2}$$
$$\theta_1\ \theta_2 \ldots\ldots\ \theta_k \tag{3}$$

che diremo 1ª e 2ª permutazione annessa o relativa alla combinazione $a_{\eta_1\theta_1} \ldots a_{\eta_k\theta_k}$ e riguardiamo come corrispondenti η_i e θ_i.

Conveniamo di ritenere che due elementi diversi della (2) o della (3) facciamo inversione quando il maggiore è a sinistra del minore, ed indichiamo con α il numero delle inversioni fatte da due elementi qualunque della (2), non corrispondenti ad elementi uguali della (3), e con β il numero delle inversioni fatte da due elementi qualunque della (3), non corrispondenti ad elementi uguali della (2). Diremo che la combinazione (1) è di classe pari o dispari, oppure che ad essa compete il segno $+$ od il segno $-$, secondochè il numero $\alpha + \beta$ è pari o dispari. Pertanto il segno di siffatta combinazione è quello di $(-1)^{\alpha+\beta}$.

Il segno di una combinazione non dipende dal modo col quale si succedono gli elementi ad essa appartenenti, ma è lo stesso comunque questi siano disposti. Invero siano $a_{\eta_i\theta_i}, a_{\eta_{i+1}\theta_{i+1}}$ due elementi consecutivi della combinazione $a_{\eta_1\theta_1} \ldots a_{\eta_k\theta_k}$.

Possono darsi i casi seguenti: 1° $\eta_i = \eta_{i+1}$; $\theta_i = \theta_{i+1}$; 2° $\eta_i = \eta_{i+1}$; $\theta_i \neq \theta_{i+1}$; 3° $\eta_i \neq \eta_{i+1}$; $\theta_i = \theta_{i+1}$; 4° $\eta_i \neq \eta_{i+1}$; $\theta_i \neq \theta_{i+1}$.

Consideriamo le successioni

$$\begin{matrix} \eta_1 \ldots \eta_{i+1}\, \eta_i \ldots \eta_k \\ \theta_1 \ldots \theta_{i+1}\, \theta_i \ldots \theta_k \end{matrix} \tag{4}$$

ottenute dalla (2) e (3) scambiando η_i con η_{i+1} e θ_i con θ_{i+1}, e supponiamo che in esse siano contenute rispettivamente α' e β' inversioni, formate in ciascuna da due elementi diversi non corrispondenti ad elementi uguali dell'altra.

Nel 1°, 2° e 3° caso è $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$; nel 4° caso si ha $\alpha' = \alpha \pm 1$; $\beta' = \beta \pm 1$ quindi od $\alpha' + \beta' = \alpha + \beta$ oppure $\alpha' + \beta' = \alpha + \beta \pm 2$. Perciò i segni di $(-1)^{\alpha+\beta}$ e $(-1)^{\alpha'+\beta'}$ sono identici. Ora il segno di $(-1)^{\alpha'+\beta'}$ è quello della combinazione $a_{\eta_1\theta_1} \dots a_{\eta_{i+1}\theta_{i+1}} a_{\eta_i\theta_i} \dots a_{\eta_k\theta_k}$, la quale si ottiene dalla data scambiando gli elementi consecutivi $a_{\eta_i\theta_i}$, $a_{\eta_{i+1}\theta_{i+1}}$. Poichè lo scambio di due elementi consecutivi della combinazione $a_{\eta_1\theta_1} \dots a_{\eta_k\theta_k}$ non fa cambiare il segno di essa, possiamo concludere che anche cambiando comunque l'ordine dei suoi elementi il seguo rimane inalterato.

Ciò posto, poichè $\eta_1 \dots \eta_k$ è una permutazione contenente r_1 volte l'indice $1, \dots r_m$ l'indice m, potremo sempre supporre la combinazione (1) ridotta alla forma

$$a_{1,s_1}\, a_{1,s_2} \dots a_{1,s_{r_1}}\, a_{2,s_{r_1+1}} \dots a_{2,s_{r_1+r_2}} \dots\dots\dots a_{m,s_k}$$

di modochè percorrendo da sinistra a destra la permutazione dei primi indici della a, incontreremo prima r_1 volte l'indice $1, \dots$ infine r_m volte l'indice m. Sarà allora $s_1, s_2, \dots s_k$, la 2ª permutazione ed evidentemente: 1° conterrà v_1 volte l'indice 1, v_2 volte l'indice $2, \dots v_n$ volte l'indice n; 2° due s appartenenti a due delle a aventi lo stesso primo indice, saranno differenti: così ad es. saranno differenti $s_1, s_2, \dots s_{r_1}$; $s_{r_1+1}, \dots, s_{r_1+r_2}$; ecc. ... 3° sarà $k = \Sigma v = \Sigma r$ ed inoltre $r_i \leq n$, $(i = 1, \dots m)$, $v_j \leq m$, $(j = 1, \dots n)$. Nella 1ª permutazione relativa alla (4) non è contenuta evidentemente alcuna inversione, vale a dire relativamente alla (4) si ha $\alpha = 0$. Quanto alle inversioni contenute nella $s_1 \dots s_k$, notiamo che $s_1 \dots s_{r_1}$ non fanno inversione tra loro, giacchè corrispondono ad elementi uguali (tutti uguali ad 1) della 1ª permutazione; similmente non fanno inversione tra loro gli elementi $s_{r_1+1}, \dots s_{r_1+r_2}$ ecc. ... di modochè, relativamente alla (4), il numero β è il numero delle inversioni che ciascuno degli elementi appartenenti ad una delle successioni

$$s_1, \dots s_{r_1};\ s_{r_1+1} \dots s_{r_1+r_2};\ \dots\dots;\ s_{r_1+\dots+r_{m-1}+1} \dots s_k$$

fa cogli elementi delle successioni che la seguono. Ne risulta che comunque si permutino nella combinazione (4) gli elementi $a_{1,s_1} \dots a_{1,s_{r_1}}$ e fra loro e così pure gli elementi $a_{2,s_{r_1+1}} \dots a_{2,s_{r_1+r_2}}$ pure tra loro ecc., il numero β, e quindi il segno della combinazione, il quale è quello di $(-1)^{\beta}$, non mutano. Risulta pure che, per saper formare tutte le combinazioni del tipo (4), basta saper formare tutte le permutazioni $s_1, \dots s_k$, tali che le s appartenenti a ciascuna di esse verifichino le condizioni suddette.

Notiamo ancora che essendo $\theta_1 \dots \theta_k$ una successione di indici contenente v_1 volte l'indice $1, \dots v_n$ volte l'indice n, potremo sempre disporre gli elementi della combinazione (1) per modo che essa acquisti la forma

$$a_{\rho_1,1}\ldots a_{\rho_{v_1},1}\; a_{\rho_{v_1+1},2}\ldots a_{\rho_{v_1+v_2},2}\ldots\ldots a_{\rho_k,n} \qquad (5)$$

La seconda permutazione relativa alla (5) conterrà v_1 volte l'indice $1, \ldots v_n$ volte l'indice n; inoltre tra gli elementi $\rho_1, \ldots \rho_k$ della prima permutazione, ve ne saranno r_1 uguali ad $1, \ldots r_m$ uguali a m; saranno poi differenti due ρ appartenenti a due a aventi lo stesso secondo indice e si avrà: $\Sigma v = \Sigma r = k$; $r_i \leq m$; $v_i \leq n$.

Per saper formare tutte le combinazioni della a, basta adunque saper formare tutte le successioni delle $\rho_1, \ldots \rho_k$ soddisfacenti alle suddette condizioni. Essendo poi δ il numero delle inversioni che ciascuno degli elementi delle successioni

$$\rho_1\ldots\rho_{v_1};\ \rho_{v_1+1}\ldots\rho_{v_1+v_2};\ \ldots\ldots\ \rho_{v_1+\ldots+v_{n-1}+1}\ldots\rho_k$$

fa con quelli delle successioni che seguono quella alla quale esso appartiene, sarà $(-1)^\delta$ il segno della combinazione (5).

In seguito scriveremo la permutazione $s_1 \ldots s_k$ nel seguente modo:

$$|\, s_1\ldots s_{r_1} \,|\, s_{r_1+1}\ldots s_{r_1+r_2} \,|\, \ldots \,|\, s_{r_1+\ldots+r_{m-1}+1}\ldots s_k \,| \qquad (6)$$

chiudendo tra due | | i secondi indici della a che nella (4) hanno lo stesso primo indice. Così la permutazione delle s resta decomposta in gruppi parziali; il primo gruppo comprende le $s_1, \ldots s_{r_1}$, il secondo gruppo comprende le $s_{r_1+1}, \ldots s_{r_1+r_2}$ ecc.; in generale il gruppo i^{mo} comprende i secondi indici delle a che hanno il primo indice uguale ad i. Scriveremo la 1^a permutazione relativa alla (4)

$$|\, \underbrace{1\,1\ldots 1}_{r_1} \,|\, \underbrace{2\,2\ldots 2}_{r_2} \,|\, \ldots \,|\, \underbrace{m\,m\ldots m}_{r_m} \,| \qquad (7)$$

decomponendola in gruppi, dei quali l'i^{mo} comprende tutti gli elementi uguali ad i. Considereremo corrispondenti i gruppi i^{mo} della (6) ed i^{mo} della (7), e scrivendo contemporaneamente la 1^a e 2^a permutazione relative ad una combinazione delle a, scriveremo i gruppi corrispondenti in colonna, come qui appresso:

$$\begin{array}{l} |\, 1\,1\ldots\ 1 \,|\, 2\ldots\quad 2 \,|\, \ldots \,|\, m\ldots m \,| \\ |\, s_1\ s_2\ldots s_{r_1} \,|\, s_{r_1+1}\ldots s_{r_1+r_2} \,|\, \ldots \,|\, s_k\ldots \quad | \end{array} \qquad (8)$$

Poichè il segno di una combinazione non cambia cambiando comunque l'ordine degli elementi che le appartengono, si possono disporre comunque gli elementi della 1^a e 2^a permutazione ad essa relativa, purchè però si mantengano sempre sovrapposti due elementi corrispondenti.

Consideriamo ora la matrice

$$\Delta' \equiv \left\| \begin{matrix} (a_{1n})_{11} & (a_{2n})_{12} & \dots & \dots & \dots & (a_{mn})_{1m} \\ & & & \vdots & & \\ \dots & \dots & \dots & (a_{ij})_{n-j+1,i} & \dots & \dots \\ & & & \vdots & & \\ (a_{12})_{n-1,1} & (a_{22})_{n-1,2} & \dots & \vdots & \dots & (a_{m2})_{n-1,m} \\ (a_{11})_{n1} & (a_{21})_{n2} & \dots & \vdots & \dots & (a_{m1})_{nm} \end{matrix} \right\|$$

di dimensioni $\longrightarrow n' = m$ ed $\updownarrow m' = n$, la quale si ottiene ruotando la matrice Δ di un angolo retto nel senso indicato dalla freccia $\curvearrowright$. L'elemento a_{ij} di Δ occuperà in Δ' il posto di coordinate $n - j + 1$, ed i; perciò lo abbiamo indicato con $(a_{ij})_{n-j+1,i}$. Assumiamo quali coefficienti relativi alla dimensione $\longrightarrow n'$ di Δ' i numeri $r_1, \dots r_m$, già assunti quali coefficienti della dimensione $\updownarrow m$ di Δ, e similmente assumiamo come coefficienti relativi alla dimensione $\updownarrow m'$ di Δ' i numeri $c_1 \dots c_n$, già coefficienti della dimensione $\longrightarrow n$ di Δ. È chiaro che se

$$\begin{matrix} | 1 \;\; 1 \dots 1 \; | \dots | \; m \dots m \; | \\ | s_1 \;\; s_2 \dots s_{r_1} | \dots | \dots s_k \; | \end{matrix} \tag{9}$$

sono la 1ª e 2ª permutazione di una combinazione relativa alla matrice Δ, saranno

$$\begin{matrix} | s_1 \dots s_{r_1} | \dots | \dots s_k | \\ | 1 \dots 1 | \dots | m \dots m | \end{matrix} \tag{10}$$

ancora 1ª e 2ª permutazione di una combinazione relativa alla matrice Δ'. Adunque la 1ª e 2ª permutazione di una combinazione relativa a Δ si possono assumere quali 2ª e 1ª permutazione di una combinazione relativa a Δ' e viceversa. Ne segue che per formare le combinazioni relative ad una delle matrici Δ e Δ' basta formare quelle relative all'altra e scambiare in ognuna di esse gli indici delle a che le appartengono. Come dalla matrice Δ si passa alla Δ' mediante rotazione $\curvearrowright$ di 90°, così dalla Δ' si ottiene la Δ mediante rotazione $\curvearrowleft$ di 90°. e l'elemento che occupa in Δ' il posto di coordinate i, j occuperà in Δ quello di coordinate $j, m' - i + 1$. Notiamo ancora che se da una combinazione relativa a Δ si passa ad una relativa a Δ' scambiando gli indici di ciascuna delle a, i segni delle due combinazioni coincidono, giacchè se per una di esse è $\alpha = 0$, $\beta = \lambda$ sarà per l'altra $\alpha = \lambda$, $\beta = 0$ ed il segno di ambedue sarà quello di $(-1)^{\lambda}$.

Le combinazioni relative a Δ diventano combinazioni relative a Δ' mediante rotazione $\curvearrowright$ di 90°; si noti però che se le (9) sono le permutazioni 1ª e 2ª di una combinazione relativa a Δ quelle della combinazione relativa a Δ' ottenuta dalla precedente mediante rotazione $\curvearrowleft$ di 90°, non sono le (10), bensì le

$$\begin{array}{l}| n - s_1 + 1, \ldots n - s_{r_1} + 1 | \ldots . | \ldots . . , n - s_k + 1 | \\ | 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 | \ldots . | \ldots\ldots\ldots\ldots m |\end{array}$$

Similmente se le (9) sono due permutazioni 1ª e 2ª di una combinazione relativa a Δ', quelle della combinazione relativa a Δ ottenuta dalla precedente mediante rotazione $\curvearrowright$ di 90°, non sono le (10), bensì le:

$$\begin{array}{l}| 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 | \ldots . | \ldots\ldots\ldots\ldots m | \\ | m' - s_1 + 1 \ldots . . m' - s_{r_1} + 1 | \ldots . | \ldots . , m' - s_k + 1 | .\end{array}$$

Siano ancora

$$\begin{array}{l}| 1 \ldots . 1 | \ldots . | i \ldots i | j \ldots j | \ldots . | m \ldots m | \\ | s_2 \ldots s_{r_1} | \ldots . | \ldots u \ldots | \ldots v \ldots | \ldots . | \ldots . . s_k |\end{array}$$

le permutazioni annesse ad una combinazione relativa alla matrice Δ; nella 2ª di esse abbiamo messo in evidenza due elementi, che abbiamo indicati con u, v, rispettivamente appartenenti ai gruppi i^{mo} ed j^{mo}. Riguardo a tali elementi supporremo che siano disuguali, e che in tali gruppi i^{mo} ed j^{mo} nessun altro elemento sia uguale ad u oppure a v.

Possiamo scrivere le due permutazioni nel seguente modo:

$$\begin{array}{ll}|1 \ldots 1| \ldots\ldots\ldots |i \ldots i| \ldots\ldots\ldots |j \ldots j| \ldots\ldots\ldots |m \ldots m| \ldots & (11) \\ | \quad A_1 \quad |A_2| \ldots |A_{i-1}|u, A_i|A_{i+1}| \ldots |A_{j-1}|A_j, v|A_{j+1}| \ldots |A_{m-1}| \quad A_m \quad | \ldots & (11')\end{array}$$

indicando con $A_1, \ldots A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots A_m$ i gruppi 1°, $(i-1)^{mo}$, $(i+1)^{mo}, \ldots (j-1)^{mo}, \ldots (j+1)^{mo}, \ldots m^{mo}$ della 2ª permutazione, e con A_i il gruppo degli elementi del gruppo i^{mo} diversi da u e con A_j il gruppo degli elementi del gruppo j^{mo} diversi da v.

Consideriamo le permutazioni

$$\begin{array}{ll}|1 \ldots 1| \ldots\ldots\ldots |i \ldots i| \ldots\ldots\ldots |j \ldots j| \ldots\ldots\ldots |m \ldots m| \ldots & (12) \\ | \quad A_1 \quad |A_2| \ldots |A_{i-1}|v, A_i|A_{i+1}| \ldots |A_{j-1}|A_j, u|A_{j+1}| \ldots |A_{m-1}| \quad A_m \quad | \ldots & (12')\end{array}$$

delle quali la 2ª si ottiene dalla (11') scambiando gli elementi u e v. Evidentemente esse sono 1ª e 2ª permutazione di una certa combinazione relativa a Δ.

Sia λ il numero degli elementi di A_i ed A_j compresi tra u e v e cioè, se ad es. $u > v$, maggiori di u e minori di v; sia γ_{iu} ed γ_{iv} il numero degli elementi rispettivamente uguali ad u e v appartenenti ai gruppi $A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots A_{j-1}$. Vogliamo dimostrare l'importante

Teorema. — *La combinazione alla quale sono annesse le permutazioni* (11) *ed* (11') *e quella alla quale sono annesse le permutazioni* (12) *e* (12') *hanno o non hanno lo stesso segno, secondochè la somma* $\lambda + \eta_u + \eta_v$ *è dispari o pari.* (*)

Infatti indichiamo con (A_pA_q) il numero delle permutazioni che gli elementi di A_p fanno con quelli di A_q, $(q > p)$, con (u, A_p) il numero di quelle che u fa cogli elementi di A_p, cioè il numero degli elementi di A_p minori di u e con (A_p, u) il numero di quelle che gli elementi di A_p fanno con u, cioè il numero degli elementi di A_p maggiori di u. Sia β il numero di inversioni contenute nella (11') formate da due elementi non corrispondenti ad elementi uguali della (11) e β' il numero delle inversioni contenute nella (12') formate da due elementi non corrispondenti ad elementi uguali della (12). Il segno $\equiv$ posto tra due espressioni numeriche intere significhi che sono ambedue pari od ambedue dispari. Sarà:

$$\begin{aligned}\beta = \sum_1^{m-1}{}_p \left\{(A_pA_{p+1}) + \ldots + (A_pA_m)\right\} + \\ + \left\{(A_1u)+\ldots+(A_{i-1},u)\right\}+\left\{(uA_{i+1})+\ldots+(uA_{j-1})+(uA_j)\right\}+\left\{(uA_{j+1})+\ldots+(uA_m)\right\}+(uv)+ \\ + \left\{(A_1v)+\ldots+(A_{i-1},v)\right\}+\left\{(A_iv)+(A_{i+1}v)+\ldots+(A_{j-1}v)\right\}+\left\{(vA_{j+1})+\ldots+(vA_m)\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta' = \sum_1^{m-1}{}_p \left\{(A_pA_{p+1}) + \ldots + (A_pA_m)\right\} + \\ + \left\{(A_1v)+\ldots+(A_{i-1},v)\right\}+\left\{(vA_{i+1})+\ldots+(vA_{j-1})+(vA_j)\right\}+\left\{(vA_{j+1})+\ldots+(vA_m)\right\}+(vu)+ \\ + \left\{(A_1u)+\ldots+(A_{i-1}u)\right\}+\left\{(A_iu)+(A_{i+1},u)+\ldots+(A_{j-1},u)\right\}+\left\{(uA_{j+1})+\ldots+uA_m)\right\}.\end{aligned}$$

Si noti che se u fa inversione con v si ha $(uv) = 1$ e quindi $(vu) = 0$: se u non fa inversione con v si ha $(uv) = 0$ ed $(vu) = 1$. Pertanto

$$\begin{aligned}\beta - \beta' = \left\{(uA_{i+1}) + \ldots + (uA_j)\right\} + \left\{(A_iv) + \ldots + (A_{j-1}v)\right\} - \\ - \left\{(vA_{i+1}) + \ldots + (vA_j)\right\} - \left\{(A_iu) + \ldots + (A_{j-1}u)\right\} \pm 1.\end{aligned}$$

Indichiamo con P il gruppo degli elementi contenente quelli dei gruppi A_{i+1}, $A_{i+2} \ldots$, A_{j-1}, A_j, con Q quello contenente gli elementi dei gruppi A_i, $A_{i+1}, \ldots A_{j-2}$, A_{j-1} con R quello contenente gli elementi dei gruppi A_i, A_j e con S quello contenente gli elementi dei gruppi A_{i+1}, $A_{i+2}, \ldots A_{j-2}$, A_{j-1}.

L'ultima relazione ottenuta si può scrivere:

$$\beta - \beta' = (uP) + (Qv) - (vP) - (Qu) \pm 1 \tag{13}$$

giacchè il numero delle inversioni che u fa cogli elementi di $A_{i+1}, \ldots A_j$ è pure il numero delle inversioni che u fa cogli elementi di P ecc.

(*) Si può anche enunciare così: il numero delle inversioni contenute nella (11'), e formate da due elementi non corrispondenti ad elementi uguali della (11), ha o non ha la stessa parità del numero delle inversioni contenute nella (12'), formate da 2 elementi con corrispondenti ad elementi uguali della (12), secondochè $\lambda + \eta_u + \eta_v$ è dispari o pari.

Indichiamo con η_u, η_v il numero degli elementi rispettivamente uguali ad u e v contenuti in S; sia poi q il numero totale degli elementi contenuti in Q. Si ha:

$$(Qv) + (vQ) = q - \eta_v.$$

Infatti, sommando il numero delle inversioni che gli elementi di Q fanno con v, con quello delle inversioni che v fa cogli elementi di Q, si ottiene il numero totale degli elementi di q diminuito del numero degli elementi di Q uguali a v, coi quali v non fa inversione. Poichè nessun elemento di A_i è uguale a v per ipotesi, e poichè i gruppi S e Q differiscono soltanto per gli elementi di A_i, ne viene che gli elementi di Q uguali a v sono anche gli elementi di S uguali a v, epperò il loro numero è η_v. Similmente si ha:

$$(Qu) + (uQ) = q - \eta_u.$$

Adunque:

$$(Qv) = q - \eta_v - (vQ)$$
$$(Qu) = q - \eta_u - (uQ).$$

Sostituendo nella (13) a (Qv) e (Qu) le espressioni trovate, avremo:

$$\beta - \beta' = (uP) + q - \eta_v - (vQ) - (vP) - q + \eta_u + (uQ) \pm 1$$

e ricordando il significato del segno $\equiv$

$$\beta + \beta' \equiv (uP) + (uQ) + (vP) + (vQ) + \eta_u + \eta_v + 1.$$

Ora si ha:

$$(uP)+(uQ)=\{(uA_{i+1})+(uA_{i+2})+...+(uA_j)\}+\{(uA_i)+(uA_{i+1})+...+(uA_{j-1})$$

od anche:

$$(uP) + (uQ) = 2\,(uA_{i+1}) + \ldots + 2\,(uA_{j-1}) + (uA_i) + (uA_j)$$

ossia

$$(uP) + (uQ) = 2\,(uS) + (uA_i) + (uA_j)$$

e similmente

$$(vP) + (vQ) = 2\,(vS) + (vA_i) + (vA_j)$$

e pertanto

$$\beta + \beta' \equiv 2\,(uS) + u(A_i) + (uA_j) + 2\,(vS) + (vA_i) + (vA_j) + \eta_u + \eta_v + 1$$

ed ancora

$$\beta + \beta' \equiv (uA_i) + (uA_j) + (vA_i) + (vA_j) + \eta_u + \eta_v + 1$$

ossia

$$\beta + \beta' \equiv (uR) + (vR) + \eta_u + \eta_v + 1.$$

Sia ora ad es. $u < v$. Essendo λ il numero degli elementi di R (cioè di A_i ed A_j) compresi tra u e v (ossia maggiori di u e minori di v), ed essendo λ' il numero degli elementi di B maggiore di v e quindi anche di u, sarà:

$$(u\mathrm{R}) = \lambda + \lambda'; \qquad (v\mathrm{R}) = \lambda'$$

perciò

$$(u\mathrm{R}) + (v\mathrm{R}) = 2\lambda' + \lambda$$

e quindi:

$$\beta + \beta' \equiv 2\lambda' + \lambda + \eta_u + \eta_v + 1$$

ossia

$$\beta + \beta' \equiv \lambda + \eta_u + \eta_v + 1.$$

Alla stessa conclusione si arriva se $u > v$. Pertanto la somma $\beta + \beta'$ è pari o dispari secondochè $\lambda + \eta_u + \eta_v + 1$ è pari o dispari, vale a dire secondochè $\lambda + \eta_u + \eta_v$ è dispari o pari. Quindi: β e β' sono ambedue pari od ambedue dispari se $\lambda + \eta_u + \eta_v$ è dispari; β e β' sono l'uno pari e l'altro dispari se $\lambda\eta_u + \eta_v$ è pari. Ora i segni delle combinazioni alle quali sono annesse le (11') e (12') quali seconde permutazioni, sono rispettivamente quelli di $(-1)^{\beta}$ e $(-1)^{\beta'}$; pertanto essi coincidono o sono disuguali secondochè $\lambda + \eta_u + \eta_v$ è dispari o pari. Vedremo in seguito l'importanza di questa conclusione.

Esempio. — Supponiamo che la (11') sia la

$$|\,321\,|\,25\,|\,623\,|\,4123\,|\,312\,|\,53\,| \tag{14}$$

scambiando gli elementi 5 ed 1 rispettivamente del 2° e 5° gruppo si ha la

$$|\,321\,|\,21\,|\,623\,|\,4123\,|\,352\,|\,53\,|. \tag{14'}$$

Le inversioni contenute nella (14) sono quelle che gli elementi di ciascun gruppo formano con quelli dei gruppi che lo seguono (e mai con quelli dello stesso gruppo); esse sono quarantadue; η_1 è il numero degli elementi uguali ad 1 contenuti in S ossia nel gruppo (6, 2, 3, 4, 1, 2, 3); pertanto $\eta_1 = 1$; invece $\eta_5 = 0$, giacchè l'elemento 5 non è contenuto alcuna volta in S; λ è il numero degli elementi comprese tra 1 e 5 (ossia maggiori di 1 e minori di 5) contenuti nel gruppo R, ossia nel gruppo (2 3 2) che comprende tutti gli elementi del 2° e 5° gruppo della (14), eccettuati gli elementi scambiati 1 e 5. Si ha pertanto $\lambda = 3$, giacchè tutti gli elementi di R sono compresi tra 1 e 5. Adunque

$$\lambda + \eta_1 + \eta_5 = 3 + 1 + 0 = 4.$$

Pertanto la (14') avrà segno contrario a quello della (14). Infatti il numero delle inversioni in essa contenute è dispari od uguale a ventisette.

Casi particolari. — Sono interessanti due casi particolari del teorema precedente.

1°. Se $j = i + 1$ i gruppi $|\, u A_i \,|$ ed $|\, A_j v \,|$ sono consecutivi: in tal caso il gruppo S non esiste e si ha $\tau_{ju} + \tau_{iv} = 0$; $\beta + \beta' \equiv \lambda + 1$.

Pertanto " *se gli elementi scambiati nella* (11') *per aver la* (12') *appartengono a gruppi consecutivi, le combinazioni aventi le* (11') *e* (12') *quali seconde permutazioni sono o non sono dello stesso segno secondochè* λ *è dispari o pari* ".

2°. Se A_i ed A_j mancano, cioè se u è l'unico elemento del gruppo i^{mo} della (11') e v del gruppo j^{mo} della (12'), allora $\lambda = 0$. Se oltre a ciò i gruppi i^{mo} ed j^{mo} rispettivamente contenenti il solo elemento u ed il solo elemento v, sono consecutivi si ha $\lambda = \tau_{ju} = \tau_{iv} = 0$ e $\beta + \beta' \equiv 1$, ossia $\beta + \beta'$ è dispari.

Pertanto: " *se due gruppi della* 2ª *permutazione relativa ad una data combinazione sono consecutivi e ciascuno contiene un solo elemento, la combinazione cui è annessa quale seconda permutazione quella ottenuta dalla permutazione suddetta mediante lo scambio dei due gruppi considerati, ha segno contrario a quello della combinazione data* ".

Si è già detto, parlando delle permutazioni di n numeri non tutti differenti, che una di esse si considera come avente il segno + od il segno — secondochè il numero β delle inversioni in essa contenute. e formate da due elementi tali che il maggiore sia a sinistra del minore, è pari o dispari. Scambiando in una di tali permutazioni due elementi u e v non consecutivi se ne ottiene un'altra contenente ad esempio β' inversioni. Per quanto si è detto la somma $\beta + \beta'$ è pari o dispari, e quindi le due permutazioni hanno o non hanno lo stesso segno, secondochè la somma $\tau_{ju} + \tau_{iv}$ degli elementi che occupano un posto intermedio ai posti occupati da u e v e che sono uguali ad u od a v, è dispari o pari. Ciò è anche stato dimostrato a parte, parlando del segno delle permutazioni di n numeri non tutti differenti.

Vediamo ora se e come nelle ipotesi $\Sigma r = \Sigma r$; $r_i \leq n$; $r_j \leq m$ si possa formare almeno una combinazione delle $a_{11}, \ldots a_{mn}$, ossia una permutazione del tipo (6), nella quale le s soddisfano alle condizioni già note.

Consideriamo il seguente quadro Q_0 di numeri

$$\begin{array}{ccccc}
\overbrace{}^{r_1} & \overbrace{}^{r_2} & & \overbrace{}^{r_n} \\
1 & 2 & \cdots\cdots & n \\
1 & 2 & & n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & 2 & & n \\
1 & & &
\end{array}$$

contenente in una prima verticale r_1 numeri uguali ad 1. nella 2ª r_2 uguali a $2, \ldots$ nell'ultima r_n uguali ad n. La verticale i^{ma} contiene adunque r_i numeri e diremo che r_i è il suo grado. Formiamo in un modo qualsiasi un gruppo γ_1 di r_1 numeri appartenenti a verticali diverse e scelte tra quelle di grado più elevato (tali cioè che nessun'altra delle rimanenti sia di grado più elevato di quello di una qualunque delle r_1 verticali suddette). Sopprimendo in Q_0 gli elementi di γ_1, rimarrà un altro quadro Q_1, il quale può anche contenere meno di n verticali, il che succede quando qualche verticale di Q_0 contenga un solo elemento e questo sia stato scelto a far parte del gruppo γ_2. Fra tutti i quadri che si possono dedurre da Q_0 sopprimendo r_1 elementi appartenenti a verticali diverse, quelli ottenuti scegliendo tali verticali nel modo indicato, godono evidentemente della proprietà di contenere il massimo numero possibile di verticali. Operiamo ora su Q_1 come abbiamo operato su Q_0, cioè scegliamo r_2 elementi appartenenti a verticali diverse, scelte tra quelle di grado più elevato ecc.... Supponiamo che continuando in tal modo si siano potuti formare i gruppi $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$, contenenti rispettivamente $r_1, r_2, \ldots r_m$ elementi, tali che quelli di ciascun gruppo sono tutti diversi. Poichè in Q_0 sono contenuti $v_1 + \ldots + v_n = r_1 + \ldots + r_m$ numeri, è chiaro che ciascuno degli elementi di Q_0 fa parte di uno dei gruppi $\gamma_1, \ldots \gamma_m$. Ora può darsi che formato il gruppo γ_i, non si possa più formare il gruppo successivo γ_{i+1}, il che succede quando il quadro Q_i, ottenuto da Q_{i-1} sopprimendo in questo gli elementi di γ_i, non contiene r_{i+1} verticali almeno, cioè tante quante ne occorrono per formare il gruppo γ_{i+1} di r_{i+1} elementi. Se è possibile formare almeno in un modo i gruppi $\gamma_1, \ldots \gamma_m$, allora noi possiamo considerarli come $1^o, 2^o, \ldots m^{mo}$, gruppo di una permutazione del tipo (6), giacchè in tali gruppi l'elemento i compare appunto v_i volte ed inoltre gli elementi di ciascun gruppo sono tutti differenti. Se dunque sono $\lambda_1, \ldots \lambda_{r_1}$ gli elementi di $\gamma_1, \ldots \lambda_{r_1+\ldots+r_{m-1}}, \ldots \lambda_k$ quelli di γ_m, sarà

$$|\lambda_1, \ldots \lambda_{r_1}|, \ldots\ldots\ldots |\lambda_{r_1+\ldots+r_{m-1}+1}, \ldots \lambda_k|$$

una delle possibili permutazioni del tipo (6), e sarà

$$a_{1,\lambda_1} a_{1,\lambda_2} \ldots a_{1,\lambda_{r_1}} \ldots\ldots\ldots a_{m,\lambda_k}$$

una delle combinazioni a due dimensioni delle $a_{11}, \ldots a_{mn}$.

Se invece non è possibile formare almeno in un modo i gruppi $\gamma_1, \ldots \gamma_m$, si conclude che non esiste alcuna delle combinazioni delle $a_{11}, \ldots a_{mn}$.

Un altro processo più rapido e più elegante per giudicare se (soltanto se e non se o come) è possibile formare almeno una combinazione delle a sarà esposto in seguito trattando delle proprietà di un simbolo che rappresenta il numero di tali combinazioni. Vedremo infatti a quali condizioni dovranno soddisfare le r e le v affinchè il valore di tal simbolo, di sua natura intero e positivo, risulti maggiore di zero.

Illustriamo ora quanto abbiamo detto con un esempio. Sia la matrice

$$\left\| \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array} \right\|$$

di dimensioni $\longleftrightarrow n=5$ ed $\updownarrow m=3$ e supponiamo $v_1=2, v_2=1, v_3=1, v_4=2, v_5=2$; $r_1=1, r_2=3, r_3=4$. Ordinando le verticali di Q_0 rispetto al loro grado si ha il quadro

$$\begin{array}{ccccc} \overbrace{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}^{v_1} & \overbrace{\begin{matrix}4\\4\end{matrix}}^{v_4} & \overbrace{\begin{matrix}5\\5\end{matrix}}^{v_5} & \overbrace{\begin{matrix}2\\ \end{matrix}}^{v_2} & \overbrace{\begin{matrix}3\\ \end{matrix}}^{v_3} \end{array}$$

Il gruppo γ_1 contiene $r_1=1$ elemento che deve essere scelto nelle verticali di grado più elevato; possiamo sceglierlo in una delle verticali 1ª, 2ª, 3ª, che sono dello stesso grado; scegliendolo nella 1ª, abbiamo il gruppo γ_1 contenente il solo elemento 1, e sopprimendo tal elemento in Q_0, rimane il quadro Q_1

$$\begin{array}{ccccc} \overbrace{\begin{matrix}1\\ \end{matrix}}^{v_1-1} & \overbrace{\begin{matrix}4\\4\end{matrix}}^{v_4} & \overbrace{\begin{matrix}5\\5\end{matrix}}^{v_5} & \overbrace{\begin{matrix}2\\ \end{matrix}}^{v_2} & \overbrace{\begin{matrix}3\\ \end{matrix}}^{v_3} \end{array}$$

Per formare il gruppo γ_2 dobbiamo scegliere in Q_1, $r_2=3$ elementi nelle verticali di grado più elevato; ne sceglieremo adunque uno nella 2ª, uno nella 3ª ed uno nella 1ª, o 4ª, o 5ª, ad es. nella 1ª.

Adunque il gruppo γ_2 contiene gli elementi 4, 5, 1 e sopprimendo in Q_1 tali elementi, si ottiene il quadro Q_2

$$\overbrace{4}^{v_4-1}\quad \overbrace{5}^{v_5-1}\quad \overbrace{2}^{v_2}\quad \overbrace{3}^{v_3}$$

contenente soltanto quattro verticali. Per formare il gruppo γ_3 bisogna scegliere in Q_2, $r_3=4$ elementi, appartenenti alle verticali di grado più elevato; poichè Q_2 contiene soltanto quattro verticali, ciascuna di un sol elemento, il gruppo γ_3 conterrà tutti gli elementi di Q_2, cioè 4, 5, 2, 3.

Formati i gruppi $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, potremo comporre la permutazione

$$|\overbrace{1}^{\gamma_1}|\overbrace{4\,5\,1}^{\gamma_2}|\overbrace{4\,5\,2\,3}^{\gamma_3}|$$

alla quale corrisponde la combinazione $a_{11}a_{24}a_{25}a_{21}a_{34}a_{35}a_{32}a_{33}$ delle $a_{11}..a_{35}$.

I gruppi γ_r si possono formare nell'ordine $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, in generale in più di un modo, ma anche formandoli in tutti i modi possibili, non possiamo in generale costrurre tutte le combinazioni delle $a_{11}, \ldots a_{35}$. Per es. il gruppo γ_1 si può formare in tre modi, scegliendo quale unico elemento ad esso appartenente uno degli elementi 1, 4, 5. Formato il gruppo γ_1, il gruppo γ_2 può formarsi in due modi; per es. se γ_1 contiene l'elemento 1, γ_2 può contenere gli elementi 4, 5, 2 oppure 4, 5, 3, formati i gruppi γ_1 e γ_2 il gruppo γ_3 può formarsi in un sol modo Pertanto le permutazioni [del tipo (6)], che si possono ottenere formando i gruppi $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ in tutti i modi possibili sono le sei seguenti:

$$
\begin{array}{l}
|1|452|1453| \\
|1|453|1452| \\
|4|152|1453| \\
|4|153|1452| \\
|5|142|1453| \\
|5|143|1452|
\end{array}
$$

ma esse non sono le sole possibili; un'altra ad es. è la seguente:

$$|2|451|1453|$$

Trovando il caso generale, osserviamo ancora, riguardo alla formazione dei gruppi $\gamma_1, \ldots \gamma_m$, che volendo constatare la possibilità di formarli almeno in un modo, non è necessario formare per il primo il gruppo γ_1, dopo questi il gruppo γ_2 ecc...: si può ad es. formare dapprima il gruppo γ_i di r_i elementi scelti in Q_0 nelle verticali di grado più elevato, poi il gruppo γ_j di r_j elementi ecc.. Per es. nel caso particolare dianzi esaminato si può formare dapprima il gruppo $\gamma_2 \equiv 1, 4, 5$ poi $\gamma_1 = 2$, infine $\gamma_3 \equiv 1, 4, 5, 3$ ecc... Sempre in ogni caso, se la formazione dei gruppi $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots$ è possibile, si ha una successione di indici atta ad essere considerata quale seconda permutazione di una combinazione a due dimensioni delle a_{11}, a_{mn}. Se esiste una di siffatte combinazioni, è sempre possibile ottenere almeno in un modo i gruppi $\gamma_1, \ldots \gamma_m$, in un ordine prestabilito: il contrario accade se non esiste alcuna combinazione delle a.'

In una mia nota " *Sopra un metodo per formare alcune combinazioni di elementi a più indici*..." già citato, ho indicato un metodo per la formazione delle combinazioni a due dimensioni di mn elementi dati. Esaminandolo se ne può dedurre un criterio per giudicare dell'esistenza di una almeno delle combinazioni delle $a_{11}, \ldots a_{mn}$, e, se ne esistono, formarne almeno una. Esso però, come mostrerò tra breve, differisce soltanto formalmente da quello che ho dianzi indicato.

Sia S la successione delle v

$$S \equiv v_1, v_2, \ldots v_n.$$

Indichiamo con S_n una seconda successione dedotta dalla S diminuendo di un'unità r_1 numeri. Le S_n saranno un numero di $\binom{n}{r_1}$.

Da ciascuna S_{r_1} deduciamo tutte le possibili successioni $S_{r_1r_2}$, diminuendo di una unità r_2 numeri scelti tra quelli che sono diversi da zero. Otterremo un certo numero di $S_{r_1r_2}$; da ognuna di queste deduciamo tutte le possibili $S_{r_1r_2r_3}$ diminuendo di un'unità r_3 numeri diversi da zero e così continuiamo fino ad ottenere le $S_{r_1\ldots r_m}$. Ora osserviamo che esistono certamente delle S_{r_1}. perchè la S contiene $n \geq r_1$ numeri diversi da zero; però può non esistere alcuna $S_{r_1r_2}$, il che accade quando nessuna S_{r_1} contenga almeno r_2 numeri diversi di zero ecc...; può non esistere alcuna $S_{r_1\ldots r_m}$, il che accade quando nessuna $S_{r_1,\ldots r_{m-1}}$ contenga almeno r_m numeri diversi da zero. Quando poi esiste una $S_{r_1,\ldots r_m}$, essa è composta di tutti zero. Infatti corrispondentemente ad una $S_{r_1\ldots r_m}$. esiste un gruppo di successioni $S, S_{r_1}, S_{r_1r_2}, \ldots S_{r_1,\ldots r_{m-1}}, S_{r_1\ldots r_m}$, tale che ciascuna si è dedotta dalla precedente e l'ultima di esse è la $S_{r_1\ldots r_m}$ in questione. Ora le unità sottratte complessivamente dagli elementi di tali $S, S_{r_1}, \ldots S_{r_1\ldots r_{m-1}}$ per ottenere la $S_{r_1\ldots r_m}$ sono $r_1 + \ldots + r_m$. cioè quante ne contiene la S stessa; perciò la $S_{r_1\ldots r_m}$ non può contenere che soli zero. Supponiamo ora che esista una $S_{r_1\ldots r_m}$. Essa si sarà ottenuta da una $S_{r_1,\ldots r_{m-1}}$ diminuendo di un'unità r_m numeri aventi i posti $\alpha_1, \ldots \alpha_{r_m}$; la $S_{r_1\ldots r_{m-1}}$ suddetta si sarà ottenuta da una $S_{r_1\ldots r_{m-2}}$ diminuendo un'unità r_{m-1} numeri aventi i posti $\beta_1, \ldots \beta_{r_{m-1}}$ ecc. ...; la S_{r_1} si sarà dedotta dalla S diminuendo di un'unità r_1 numeri aventi i posti $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{r_1}$.

Orbene se noi scegliamo nell'ultimo orizzontale della matrice

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{matrix}\right\|$$

le $a_{m,\alpha_1}, \ldots a_{m,\alpha_{r_m}}$, nella penultima le $a_{m-1,\beta_1} \ldots a_{m-1,\beta_{r_{m-1}}}$ ecc...., nella prima le $a_{1,\varepsilon_1} \ldots a_{1,\varepsilon_{r_1}}$, otteniamo una delle combinazioni delle $a_{11} \ldots a_{mn}$. Infatti essendo la $S_{r_1,\ldots r_m}$ composta di tutti zero, nelle $S_{r_1\ldots r_{m-1}}$, S_{r_1}, S dalle quali è stata dedotta, compariranno, ad es., all'i^{mo} posto, indipendentemente dall'ordine, i numeri $r_i, r_i - 1, r_i - 2, \ldots 1$ e quindi delle a scelte nella matrice suddetta ve ne saranno appunto r_i appartenente alla i^{ma} verticale; è poi evidente che quelle appartenenti ad una data orizzontale, per es. la j^{ma}, sono in numero di r_j. Ad ogni $S_{r_1\ldots r_m}$ corrisponde adunque una combinazione delle a e viceversa; epperò tante sono le $S_{r_1\ldots r_m}$ quante le combinazioni delle a. Risulta da quanto si è detto che: *condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una combinazione delle* $a_{11}, \ldots a_{mn}$ *è l'esistenza di una* $S_{r_1\ldots r_m}$. Un tal criterio è teoricamente semplice, ma è conveniente, dal punto di vista pratico, metterlo sotto un'altra forma. Abbiamo già osservato che nel dedurre le S_{r_1} dalla S, le $S_{r_1r_2}$ dalle S_{r_1} ecc... può darsi che non si arrivi ad una $S_{r_1, \dots r_m}$ Per es. non è possibile formare alcuna combinazione delle a appartenenti alla matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{Vmatrix}$$

di dimensioni $\longleftrightarrow n = 4$ ed $\updownarrow m = 3$ assumendo $r_1 = 1, r_2 = 4, r_3 = 3$; $v_1 = 3$, $v_2 = 3$, $v_3 = 1$, $v_4 = 1$ quantunque sia $r_1 + r_2 + r_3 = v_1 + v_2 +$ $+ v_3 + v_4$; $r_i \leq n$, $v_j \leq m$, giacchè dovendo ciascuna combinazione contenere gli elementi delle prime due verticali, conterrà due elementi almeno di ciascuna orizzontale, e non potrà quindi contenere un solo elemento della 1ª orizzontale. Non esiste adunque, relativamente a questo caso particolare alcuna $S_{r_1 \dots r_m}$. Nel caso generale deducendo da una S una S_{r_1}, questa una $S_{r_1 r_2}$, ecc... possiamo sempre far in modo che ciascuna successione ottenuta contenga il massimo numero possibile di elementi diversi da zero. Basta a tal uopo, quando si passa da una $S_{r_1 \dots r_i}$ ad una $S_{r_1 \dots r_{i+1}}$, diminuire di un'unità r_{i+1} numeri della $S_{r_1 \dots r_i, r_{i+1}}$ tali che nessuno dei rimanenti sia maggiore di alcuno di essi. Ora se procedendo con tale avvertenza, non riusciamo ad ottenere una $S_{r_1 \dots r_m}$, dobbiamo concludere che non esiste alcuna $S_{r_1, \dots r_m}$ e che è impossibile formare anche una sola combinazione delle $a_{11}, \dots a_{nm}$. Se ad es. si avesse $n = 5, m = 4$; $v_1 = 4$, $v_1 = 2$, $v_3 = 1$, $v_4 = 4$, $v_5 = 2$; $r_1 = 1$, $r_2 = 4$, $r_3 = 4$, $r_4 = 4$ sarebbe:

$$S \equiv 4, 2, 1, 4, 2.$$

Per dedurre dalla S una S_{r_1} avente il massimo numero possibile di elementi diversi da zero, basterà nella S diminuire di un'unità $r_1 = 1$ numero, tale che nessuno dei rimanenti lo superi, cioè il 1° od il 5°, ad es. il 1°. Si ha così una S_{r_1} e precisamente la $S_{r_1} \equiv 3, 2, 1, 4, 2$. Se da questa vogliamo dedurre una delle $S_{r_1 r_2}$ aventi il massimo numero possibile di elementi diversi da zero, dobbiamo diminuire di un'unità i numeri 1°, 2°, 4°, 5°, giacchè nessuno di essi è superato da alcuno dei rimanenti. Otteniamo così la $S_{r_1 r_2} \equiv 2, 1, 1, 3, 1$. Analogamente da tale $S_{r_1 r_2}$ deduciamo una $S_{r_1 r_2 r_3}$ avente il massimo numero di elementi diversi da zero, diminuendo di un'unità gli elementi 1°, 2°, 3°, 4° (oppure 1°, 3°, 4°, 5°; 1°, 2°, 4°, 5°); otteniamo la $S_{r_1 r_2 r_3} \equiv 1, 0, 0, 2, 1$ e poichè essa non contiene $r_4 = 4$ numeri diversi da zero, concludiamo che non esiste alcuna $S_{r_1 r_2 r_3 r_4}$.

Conosciamo adunque due criteri per formare, se esiste, almeno una combinazione a due dimensioni dalle $a_{11}, \dots a_{nm}$. È facile constatare che tali criteri non differiscono sostanzialmente tra loro. Infatti seguendo il primo si deve formare un gruppo γ_1 contenente certi elementi $\tau_1, \dots \tau_{r_1}$ scelti in Q_0 nel modo indicato. Seguendo il secondo si deve dapprima formare una S_{r_1} deducendola dalla S nel modo indicato. Ora si ha:

$$S \equiv v_1, \dots v_{\tau_1}, \dots v_{\tau_2}, \dots v_{\tau_{r_1}}, \dots v_n$$

dove $v_{\tau_1}, \dots v_{\tau_{r_1}}$ sono r_1 delle v, tali che niuna è superata da alcuna delle rimanenti. Possiamo assumere quale S_{r_1} la

$$S_{r_1} \equiv v_1, \dots, v_{\tau_1} - 1, \dots, v_{\tau_{r_1}} - 1, \dots, v_n$$

e quale gruppo γ_1 il gruppo

$$\gamma_1 \equiv \tau_1, \tau_2, \dots \tau_{r_1}$$

contenente r_1 numeri scelti sulle verticali $\tau_1^{ma}, \dots \tau_{r_1}^{ma}$ di Q_0 (la verticale i^{ma} è composta di soli i). Similmente alla $S_{r_1 r_2}$, dedotta dalla S_{r_1} precedente, si può far corrispondere un gruppo γ_2 di r_2 elementi ecc... si comprende che se è possibile formare almeno in un modo una $S_{r_1 \dots r_m}$, sarà pure possibile formare almeno in un modo i gruppi $\gamma_1 \dots \gamma_m$ e viceversa. I due criteri sono adunque equivalenti.

Formazione ed enumerazione delle combinazioni delle $a_{11} \dots a_{mn}$. — Vediamo ora con quale processo data una combinazione delle $a_{11} \dots a_{mn}$ si possano dedurre da essa tutte le rimanenti. Basterà evidentemente saper dedurre dalla permutazione

$$| \, s_1 \dots s_{r_1} \, | \dots\dots | \dots s_k \, |$$

dei secondi indici, relativa alla suddetta combinazione, tutte le permutazioni analoghe. Occupiamoci dapprima di un caso particolare; supponiamo cioè $r_1 = r_2 = \dots = r_m = 1$. Ogni combinazione delle a sarà del tipo

$$a_{1,s_1} a_{2,s_2} \dots\dots a_{m,s_m}$$

$s_1, s_2 \dots s_m$, essendo la seconda permutazione contenente v_1 volte l'indice 1, v_2 volte l'indice 2 ecc... Una delle possibili permutazioni $(s_1, \dots s_n)$ è la $(1\,1 \dots 1\,2\,2 \dots 2 \dots n n \dots n)$ contenente v_1 numeri uguali ad 1, seguiti da v_2 numeri uguali a 2 ecc... Le seconde permutazioni delle altre combinazioni sono pure permutazioni degli elementi $1, 1, \dots 1, 2, 2, \dots 2, \dots n, n, \dots n$, e noi già sappiamo come si deve procedere per formarle rapidamente. Siccome poi sappiamo pure determinare il segno di ciascuna permutazione, sapremo pure determinare il segno di ciascuna combinazione delle a, il quale non differisce da quello della 2^a permutazione ad essa relativa.

Esaminiamo ora il caso generale e supponiamo dapprima $m = 2$. Si vogliano ad es. formare le combinazioni relative alla matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \end{Vmatrix}$$

di dimensioni $\rightarrow 7$ e $\downarrow 2$, assumendo $r_1 = 4$; $r_2 = 5$; $v_1 = 2$, $v_2 = 1$. $v_3 = 1$, $v_4 = 2$, $v_5 = 1$, $v_6 = 1$, $v_7 = 1$. Cominciando a formare la seconda permutazione di una di esse, ad es. la

$$|1423|14567| \tag{15}$$

Nella 2ª permutazione delle altre combinazioni gli elementi 1 e 4 devono trovarsi sia nel 1º, sia nel 2º gruppo. Gli elementi che trovansi nella (15) una sola volta sono 2, 3, 5, 6, 7 e le loro combinazioni due a due sono (2, 3), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (5, 6), (5, 7), (6, 7). Nella (15) compare nel 1º gruppo la combinazione (2 3), perciò tutte le rimanenti seconde permutazioni si otterranno componendo il 1º gruppo cogli elementi 1, 4 e con quelli di una delle suddette combinazioni binarie ed il 2º cogli elementi 1 e 4 e con quelli fra gli elementi 2, 3, 5, 6, 7. che non appartengono al 1º. Tutte le seconde permutazioni delle a sono adunque le

$$\begin{matrix} |\,1\;4\;2\;3\,|\,1\;4\;5\;6\;7\,| \\ |\,1\;4\;2\;5\,|\,1\;4\;3\;6\;7\,| \\ |\,1\;4\;2\;6\,|\,1\;4\;3\;5\;7\,| \\ \vdots \\ |\,1\;4\;6\;7\,|\,1\;4\;2\;3\;5\,| \end{matrix} \tag{16}$$

e tutte le combinazioni delle a sono le:

$$\begin{matrix} a_{11}\; a_{14}\; a_{12}\; a_{13}\; a_{21}\; a_{24}\; a_{25}\; a_{26}\; a_{27} \\ a_{11}\; a_{14}\; a_{12}\; a_{15}\; a_{21}\; a_{24}\; a_{23}\; a_{26}\; a_{27} \\ \vdots \\ a_{11}\; a_{14}\; a_{16}\; a_{17}\; a_{21}\; a_{24}\; a_{22}\; a_{23}\; a_{25} \end{matrix}$$

Se interessasse determinare il segno di ciascuna delle (16), il quale è anche il segno della combinazione corrispondente, basterebbe dedurre da una di esse, per es. dalla 1ª $|1423|14567|$, le rimanenti nel seguente modo. Si considerino nella (15) gli elementi che fanno parte di uno solo dei due gruppi; essi sono 2 e 3 per il 1º gruppo, 5, 6, 7 per il 2º. Scambiando uno di tali elementi del 1º gruppo con uno di quelli del 2º, per es. il 3 col 5, si ha la

$$|1425|14367|$$

che è la 2ª della (16). Scambiando in una delle due permutazioni già formate uno degli elementi dal 1º gruppo diversi da 1 a 4 con uno di quelli del 2º pure diversi da 1 a 4, per es. scambiando nella 2ª gli elementi 5 del 1º gruppo e 6 del secondo, si ha la

$$1426|143567|$$

che è la 3ª delle (16). Similmente in una qualunque delle tre permutazioni già formate si potrà scambiare un elemento del 1° gruppo diverso da 1 e 4 con uno del 2° pure diverso da 1 e 4, e così via si continuerà, finchè saranno comparse nel 1° gruppo tutte le combinazioni binarie degli elementi 2, 3, 5, 6, 7, una per ciascuna permutazione. Ora il segno della 1ª permutazione scritta, ossia della | 1 4 2 3 | 1 4 5 6 7 | è —, giacchè in essa sono contenute tre inversioni; il segno delle rimanenti si ottiene facilmente, giacchè ognuna di esse si deduce da una di segno noto (la 2ª dalla 1ª, la 3ª dalla 2ª...) scambiando due elementi appartenenti a due gruppi consecutivi e tali che ciascuno di essi trovasi in un solo dei due gruppi; basterà applicare il criterio già esposto, che si compendia nel teorema dianzi dimostrato.

Nel caso generale essendo $\longrightarrow n$ e $\updownarrow 2$ le dimensioni della matrice data, siano $v_{\alpha_1}\, v_{\alpha_2} \dots v_{\alpha_p}$ le v uguali a due e $v_{\beta_1}\, v_{\beta_2} \dots v_{\beta_q}$ quelle uguali ad uno. Sarà $p+q=n$; $k=r_1+r_2=v_{\alpha_1}+\dots+v_{\alpha_p}+v_{\beta_1}+\dots+v_{\beta_q}=$ $=2p+q$. Le seconde permutazioni di tutte le combinazioni delle a si formeranno componendo il 1° gruppo con gli elementi $\alpha_1 \dots \alpha_p$ e con r_1-p degli elementi $\beta_1, \dots \beta_q$ scelti comunque, il 2° con gli elementi $\alpha_1, \dots \alpha_p$ e coi rimanenti r_2-p degli elementi $\beta_1, \dots \beta_q$ non appartenenti al 1° gruppo.

Se delle suddette permutazioni interessa determinare il segno, basta formarle come segue. Se ne scrive una qualunque, e se ne determina il segno contando il numero delle inversioni in essa contenute. Il 1° gruppo di essa conterrà gli elementi $\alpha_1, \dots \alpha_p$ ed r_1-p degli elementi $\beta_1, \dots \beta_q$, cioè quelli di una delle combinazioni r_1-p ad r_1-p delle $\beta_1, \dots \beta_q$; il 2° gruppo conterrà le $\alpha_1, \dots \alpha_p$ e quelle fra le $\beta_1, \dots \beta_q$ che non compaiono nel 1° gruppo. Dalla permutazione scritta si potrà dedurne un'altra scambiando uno degli r_1-p elementi del 1° gruppo non comuni al 2°, con uno degli r_2-p del 2° non comuni al 1°; il segno della nuova permutazione si dedurrà da quello della 1ª conformemente ai criteri già indicati. Così nel 1° gruppo saranno già comparse due delle combinazioni r_1-p ad r_1-p degli elementi $\beta_1, \dots \beta_q$; da una qualunque delle permutazioni già formate ne dedurremo ora un'altra scambiando uno degli elementi $\beta_1 \dots \beta_q$. del 1° gruppo con uno degli elementi $\beta_1, \dots \beta_q$ del 1° gruppo con uno degli elementi $\beta_1, \dots \beta_q$ del 2° ecc..., così continueremo finchè ci saremo accorti che nel 1° gruppo sono comparse tutte le combinazioni r_1-p ad r_1-p delle $\beta_1, \dots \beta_q$. Il segno di ciascuna permutazione si potrà determinare seguendo i criteri già indicati, giacchè essa si ottiene da una di segno noto scambiando due elementi appartenenti a due gruppi consecutivi, (il 1° ed il 2°), e tali che nessuno di essi è comune ai due gruppi.

Il numero della combinazioni delle $a_{11}, \dots a_{2n}$ si determina facilmente. Indichiamolo col simbolo $\begin{bmatrix} v_1, \dots v_n \\ r_1\, r_2 \end{bmatrix}$; $(r_1, r_2 \leq n$; $\Sigma v = r_1 + r_2$;

$v_i \leq 2$); Osserviamo anzitutto che il valore del simbolo $\begin{bmatrix} v_1, \dots v_n \\ r_1 r_2 \end{bmatrix}$ non dall'ordine di successione delle v. Riferiamoci ad es. alla matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \end{Vmatrix}$$

per la quale $r_1 = 4$, $r_2 = 5$, $v_1 = 2$, $v_2 = 1$. $v_3 = 1$, $v_4 = 2$. $v_5 = 1$, $v_6 = 1$, $v_7 = 1$. Supponiamo di assumere altri valori per $v_1, \dots v_n$ ed indichiamoli con $v'_1, \dots v'_n$. Sia $v'_1 = 1$, $v'_2 = 1$, $v'_3 = 2$, $v'_4 = 1$, $v'_5 = 2$, $v'_6 = 1$, $v'_7 = 1$; come si vede le v' non sono che le v prese in un altro ordine; quando la serie delle $v_1, \dots v_7$ è la serie dei numeri 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1 il numero delle combinazioni relative alla matrice suddetta è $\begin{bmatrix} 2\,1\,1\,2\,1\,1\,1 \\ 4\,5 \end{bmatrix}$; quando invece è la serie dei numeri $v'_1, \dots v'_7$ cioè 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1 il numero delle combinazioni è $\begin{bmatrix} 1\,1\,2\,1\,2\,1\,1 \\ 4\,5 \end{bmatrix}$. È facile vedere che tali numeri sono uguali. Infatti sia | 1 4 2 3 | 1 4 5 6 7 | la 2ª permutazione di una combinazione della 1ª specie; in essa sono ripetuti due volte gli elementi 1 e 4 e compaiono invece una sola volta gli elementi 2, 3, 5, 6, 7. Nella 2ª permutazione di una combinazione della 2ª specie sono invece ripetuti due volte gli elementi 3 e 5 e compaiono una sola volta gli elementi 1, 2, 4, 6, 7. Adunque se in ciascuna permutazione relativa ad una combinazione della 1ª specie sostituiamo l'elemento 3 all'elemento 1, e similmente 5 a 4, 1 a 3, 4 a 5, abbiamo la 2ª permutazione relativa ad una combinazione della 2ª specie e viceversa. Per es. la permutazione suddetta mediante le indicate sostituzioni diventa la | 3 5 2 1 | 3 5 4 6 7 |. Tanto sono adunque le combinazioni della 1ª specie quanto quelle della 2ª, epperò

$$\begin{bmatrix} 2\,1\,1\,2\,1\,1\,1 \\ 4\,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,1\,2\,1\,2\,1\,1 \\ 4\,5 \end{bmatrix}.$$

Il valore del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \dots v_n \\ r_1 r_2 \end{bmatrix}$ non dipende adunque dal modo di succedersi delle v, e si dimostrerebbe similmente ch'esso non dipende dall'ordine delle r. Potremo adunque supporlo ridotto alla forma

$$\begin{bmatrix} \overbrace{1 \dots 1}^{p_1} & \overbrace{2 \dots 2}^{p_2} \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix}$$

dove, $1 \dots 1, 2 \dots 2$ è, fatta astrazione dall'ordine di successione, la serie delle $v_1, \dots v_n$, contenente p_1 numeri uguali ad 1 e p_2 uguali a 2. Osserviamo ancora che se una delle v ad es. v_i è uguale a 2, si ha:

$$\begin{bmatrix} v_1 \dots v_{i-1}, 2, v_{i+1}, \dots v_n \\ r_1 r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \dots v_{i-1}, v_{i+1} \dots v_n \\ r_1 - 1, r_2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Infatti ciascuna delle combinazioni delle a, contiene gli elementi a_{1i} ed a_{2i}; quindi esse si possono formare associando tali elementi a quelli delle combinazioni relative ad una materia che si ottiene dalla $\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2n} \end{vmatrix}$, sopprimendo la verticale i^{ma}, ed assumendo quali coefficienti della dimensione $\longrightarrow n-1$ i numeri $r_1, \dots r_{i-1}, r_{i+1}, \dots r_n$ e quali coefficienti della dimensione $\updownarrow 2$ i numeri r_1-1, r_2-1. Per es. si ha:

$$\begin{bmatrix} 1111222 \\ 46 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 111122 \\ 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11112 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1111 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1112 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 111 \\ 03 \end{bmatrix}$$

si ha pertanto in generale:

$$\begin{bmatrix} v_1 \dots . v_n \\ r_1, r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \dots . 1}^{p_1} \overbrace{2 \dots . 2}^{p_2} \\ r_1, r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \dots . 1}^{p_1} \\ r_1 - p_2, r_2 - p_2 \end{bmatrix}$$

ovvero, indicando una successione di λ numeri uguali ad a con $a_{(\lambda)}$,

$$\begin{bmatrix} v_1 \dots v_n \\ r_1, r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(p_1)} \\ r_1 - p_2,\ r_2 - p_2 \end{bmatrix}.$$

Le differenze $r_1 - p_2$ ed $r_2 - p_2$ non sono mai negative, essendo $p_2 \leq r_1, r_2$. Il simbolo $\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} \\ r_1 - p_2,\ r_2 - p_2 \end{bmatrix}$ rappresenta il numero delle combinazioni relative ad una matrice di dimensioni $\longrightarrow p_1$ con coefficienti uguali ad 1, e $\updownarrow 2$ coi coefficienti $r_1 - p_2$, $r_2 - p_2$. Si ha, come è evidente, e come risulta dal processo esposto per la formazione delle combinazioni relative ad una matrice di dimensioni $\longrightarrow n$ e $\updownarrow 2$:

$$\begin{bmatrix} 1_{(p_1)}\ 2_{(p_2)} \\ r_1 \quad r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(p_1)} \\ r_1 - p_2,\ r_2 - p_2 \end{bmatrix} = \binom{p_1}{r_1 - p_2} = \binom{p_1}{r_2 - p_2}$$

Ad es. è:

$$\begin{bmatrix} 2\ 11\ 2\ 111 \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11111 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(5)} \\ 23 \end{bmatrix} = \binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$$

In tal caso è $p_1 = 5$; $p_2 = 2$; $r_1 = 4$; $r_2 = 5$.

Si ha in particolare

$$\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} \\ 0, p_1 \end{bmatrix} = \binom{p_1}{0} = \binom{p_1}{p_1} = 1.$$

Convenzionalmente scriveremo $\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} \\ . \; p_2 \end{bmatrix}$ invece di $\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} \\ 0, p_2 \end{bmatrix}$.

Se $p_2 = 0$, si ha:

$$\begin{bmatrix} v_1 \dots v_n \\ r_1 \, r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(p_1)} \\ r_1, \quad r_2 \end{bmatrix} = \binom{p_1}{r_1} = \binom{p_1}{r_2} = \frac{p_1!}{r_1!\,(p_1 - r_1)!} = \frac{p_1!}{r_1!\, r_2!}.$$

In tal caso è $p_1 = n - r_1 + r_2$ e $v_1 = v_2 = \dots = v_n = 1$. Il primo gruppo di ciascuna delle seconde permutazioni relative alle combinazioni delle a. è una delle combinazioni r_1 ad r_1 dei numeri $1, 2, \dots n$; il secondo gruppo contiene quelli di tali numeri che non appartengono al primo.

II caso: m = 3. In seguito, considerando la seconda permutazione di una combinazione delle $a_{11}, \dots a_{mn}$, quando diremo di scambiare un elemento di un gruppo con uno di un altro, *intenderemo sempre che lo scambio debba effettuarsi tra due elementi, tali che nessuno di essi sia comune ai due gruppi.* Chiameremo poi con O_2 l'operazione mediante la quale da una permutazione quale ad es. la | 1 4 2 3 | 1 4 5 6 7 | composta di due gruppi, si deducono le rimanenti, mediante scambi tra un elemento del 1° gruppo ed uno del 2°, e diremo che tali permutazioni sono il risultato della O_2 eseguita sulla | 1 4 2 3 | 1 4 5 6 7 |. Essendo | 1 4 2 3 | 1 4 5 6 7 | A_3 | una permutazione di tre gruppi, (l'ultimo è indicato con A_3), considereremo quale risultato della O_2 eseguita su di essa, il complesso delle permutazioni ottenute assumendo A_3 come terzo gruppo, ed assumendo come 1° e 2° gruppo rispettivamente il 1° e 2° gruppo delle permutazioni ottenute eseguendo O_2 sulla | 1 4 2 3 | 1 4 5 6 7 |. Adunque eseguendo la O_2 sulla | 1 4 2 3 | 1 4 5 6 7 | A_3 | si hanno le permutazioni | 1 4 2 5 | 1 4 3 6 7 | A_3 |; | 1 4 2 6 | 1 4 3 5 7 | A_3 |; . . . ecc.

Esaminiamo ora il caso $m = 3$. Si vogliano ad es. formare le combinazioni relative alla matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{Vmatrix}$$

di dimensioni $\rightarrow 5$ e $\downarrow 3$ assumendo $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2$; $v_1 = 2$, $v_2 = 1$, $v_3 = 2$, $v_4 = 1$, $v_5 = 1$ e quindi $K = \Sigma v = \Sigma r = 7$. La seconda permutazione di una di esse è la

$$| \; 13 \; | \; 214 \; | \; 53 \; | \tag{17}$$

Eseguendo su essa l'operazione O_2 si hanno le

| 12 | 314 | 53 |
| 14 | 213 | 53 |

Esse e la (17) sono tutte le seconde permutazioni aventi comune il 3° gruppo | 53 |. Gli elementi differenti dei tre gruppi della (17) sono 1, 2, 3, 4, 5, e le loro combinazioni binarie (due a due) sono (1 2) (1 3) (1 4) (1 5) (2 3) (2 4) (2 5) (3 4) (3 5) (4 5). Di esse, nelle permutazioni sinora ottenute, una sola trovasi nel 3° gruppo ed è la (5 3). In una di tali permutazioni scambiamo un elemento del 3° gruppo con uno di quelli dei gruppi 1° o 2°, in modo da far comparire al 3° gruppo un'altra delle suddette combinazioni binarie; (avvertendo al solito che nessuno degli elementi scambiati sia comune ai gruppi ai quali essi appartengono: per es. non si potrebbe scambiare nella | 13 | 214 | 53 | l'elemento 3 del 3° gruppo coll'elemento 1 del 1°, perchè esso elemento 3 è comune al 1° e 3° gruppo); procuriamo inoltre, se è possibile, di scambiare due elementi di due gruppi contigui, cioè del 3° e 2° gruppo. Scambiando ad es. nella | 13 | 214 | 53 | l'elemento 5 del 3° gruppo coll'elemento 2 del 2°, si ha la

| 13 | 514 | 23 |

dalla quale, mediante l'operazione O_2, si deducono le

| 15 | 314 | 23 |
| 14 | 513 | 23 |.

Esse e la | 13 | 514 | 23 | sono tutte le permutazioni aventi | 23 | quale terzo gruppo. E così abbiamo già formato sei permutazioni. In una qualunque di esse scambiamo un elemento del 3° gruppo con uno dei gruppi rimanenti, preferibilmente con uno del 2° gruppo che è contiguo al 3°, in modo da far comparire al 3° gruppo una delle suddette combinazioni binarie, diversa però dalle (5 3), (2 3). Scambiando ad es. nella 1ª, cioè la | 13 | 214 | 53 | l'elemento 5 del 3° gruppo coll'elemento 1 del 2° si ha la

| 13 | 254 | 13 |

dalla quale mediante l'operazione O_2 si deducono le

12	354	13
15	324	13
14	325	13
34	125	13
35	124	13
32	154	13
25	314	13
24	315	13
54	312	13

Si hanno così tutte le permutazioni aventi comuni il 3° gruppo |13|. Ed ora si continui nel processo ormai evidente; si ottengano cioè tutte le permutazioni nelle quali il 3° gruppo è una delle combinazioni binarie suddette, diversa però dalle (53), (23), (13). Per es. scambiando nella |13|214|53| gli elementi 4 e 5, rispettivamente del 1° e 3° gruppo, si ha la

|13|215|43|

e da questa, mediante la O_2 si hanno le

|12|315|43|
|15|213|43| .

Similmente scambiando in una delle permutazioni già formate, ad es. nella |13|214|53|, gli elementi 2 e 3 rispettivamente del 2° e 3° gruppo, si ha la

|13|314|52|

sulla quale non si può eseguire la O_2, non potendosi scambiare alcun elemento del 1° gruppo con alcuno del 2°, giacchè tutti gli elementi del 1° gruppo fanno parte del 2°. Scambiando ancora nella |13|214|53| gli elementi 4 e 3 rispettivamente del 2° e 3° gruppo, si ha la

|13|213|54|

sulla quale non si può eseguire la O_2, giacchè gli elementi del 1° gruppo sono pure elementi del 2°. Scambiando nella |13|214|53| gli elementi 1 e 3 rispettivamente del 2° e 3° gruppo, si ha la

|13|234|51|

dalla quale, mediante la O_2, si deducono le

|23|134|51|
|43|231|51|

si sono così già formate ventiquattro permutazioni, quelle cioè nelle quali il terzo gruppo è una delle combinazioni binarie (53), (23), (13), (43), (52), (54), (51). Possiamo ora ottenere le altre, nelle quali il 3° gruppo è una delle combinazioni binarie (21), (24), (14). E così ad esempio scambiando sulla |13|514|23| (la 4ª delle permutazioni già formate) gli elementi 1 e 3 rispettivamente del 2° e 3° gruppo, si ha la

|13|534|21|

e da questa, mediante la O_2, si hanno le

|53|134|21|
|43|531|21|

Scambiando ancora nella | 13 | 514 | 23 | gli elementi 4 e 3 rispettivamente dal 2° e 3° gruppo, si ha la

| 13 | 513 | 24 |

sulla quale non si può eseguire la O_2. Infine scambiando ad es. nella | 13 | 254 | 13 | (la 7ma delle permutazioni già formate) gli elementi 4 e 3 rispettivamente del 2° e 3° gruppo si ha la

| 13 | 253 | 14 |

dalla quale, mediante la O_2, si hanno le

| 23 | 153 | 14 |
| 53 | 213 | 14 |.

Si sono così ottenute trentuna seconde permutazioni delle combinazioni delle $a_{11} \ldots a_{35}$; nessun'altra è possibile all'infuori di esse.

Se occorresse determinare il segno di ciascuna permutazione, e quindi anche quello della combinazione ad essa corrispondente, si dovrebbe anzitutto determinare quello della 1ª permutazione formata, cioè la | 12 | 314 | 53 |. In essa sono contenute due inversioni, e perciò le compete il segno $+$; il segno delle rimanenti permutazioni si determinerà seguendo le norme dianzi indicate. Queste sono poi più facili ad applicarsi quando ciascuna delle permutazioni (la 1ª eccettuata) si ottiene da un'altra mediante lo scambio di due elementi appartenenti a gruppi consecutivi; perciò, nel formare le varie permutazioni, è conveniente, ma non necessario, se vuolsi determinare il segno di ciascuna, operare soltanto scambi tra elementi di due gruppi contigui. In tal modo abbiamo appunto operato nel formare le suddette trentuna permutazioni.

Si è visto testè, che fra le trentuna permutazioni formate, ce n'è almeno una nella quale il terzo gruppo è una qualunque della combinazioni binarie (12), (13) ... degli elementi 1, 2, 3, 4, 5. Ciò non succede, nel caso generale, quando una o più delle $v_1, v_2, \ldots v_n$ è uguale a tre. Per esempio volendo formare le seconde permutazioni delle combinazioni relative alla matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{matrix} \right\|$$

supponendo $r_1 = 1, r_2 = 3, r_3 = 3; v_1 = 2; v_2 = 3; v_3 = 1; v_4 = 1$, comincierà a scriverne una ad esempio la

| 2 | 231 | 412 |

Essendo $r_2 = 3$ ogni gruppo di una qualunque di tali permutazioni dovrà contenere l'elemento 2, e quindi delle quattro combinazioni ternarie degli elementi 1, 2, 3, 4, quelle che possono essere 3° gruppo di una permutazione sono le (123), (234), (214). Nella $|\,2\,|\,2\,3\,1\,|\,4\,1\,2\,|$ il 3° gruppo è rappresentato dalla (412). Da essa non si può dedurre alcun'altra permutazione avente comune il 3° gruppo, giacchè non si può eseguire su essa l'operazione O_2. Gli elementi del 3° gruppo non possono poi scambiarsi con quelli del 1°, e soltanto l'elemento 4 di esso può scambiarsi coll'elemento 3 del 2° gruppo. Eseguendo un tal scambio si ha la

$$|\,2\,|\,2\,4\,1\,|\,3\,1\,2\,|$$

sulla quale non si può eseguire la O_2. Le due permutazioni formate sono le sole possibili. Per altro esempio vedesi che dalla $|\,1\,3\,|\,3\,1\,4\,|\,2\,3\,|$ si possono dedurre soltanto le $|\,1\,3\,|\,3\,1\,2\,|\,4\,3\,|$; $|\,1\,3\,|\,3\,4\,2\,|\,1\,3\,|$; $|\,4\,3\,|\,3\,1\,2\,|\,1\,3\,|$; $|\,2\,3\,|\,3\,4\,1\,|\,1\,3\,|$. Le combinazioni binarie degli elementi 1, 2, 3, 4 sono sei, e quelle che possono costituire il 3° gruppo sono soltanto tre e precisamente quelle che contengono l'elemento 3.

Risulta da quanto è stato detto che per formare le seconde permutazioni di tutte le combinazioni relative ad una matrice di dimensioni $\longrightarrow n$ e $\downarrow 3$, basta: 1° scriverne una e badare se essa contiene elementi comuni ai tre gruppi; 2° formare quelle fra le combinazioni r_3 ad r_3 dei numeri $1, 2, 3 \ldots n$, che contengono tutti gli elementi comuni ai tre gruppi della permutazione già scritta, e nel caso che non esistano elementi comuni, formare le combinazioni r_3 ad r_3 dei numeri $1, \ldots n$; 3° eseguire l'operazione O_2 sulla 1ª permutazione formata; 4° scambiare in una delle permutazioni formate un elemento del 3° gruppo con uno dei gruppi rimanenti, in modo da ottenere una permutazione nella quale il 3° gruppo sia una delle suddette combinazioni r_3^nrie^ degli elementi $1 \ldots . n$; 5° eseguire la O_2 sulla permutazione ottenuta quale resultato del suddetto scambio ecc.... e così continuare, finchè non si è potuto accertare che mediante uno scambio da eseguirsi tra un elemento del 2° gruppo di una delle permutazioni formate ad uno dei gruppi rimanenti, è impossibile ottenere una permutazione nelle quali il 3° gruppo sia una delle combinazioni r_3^arie^ differente da quelle che hanno figurato, quali 3° gruppo, nelle permutazioni già formate.

Si osservi sempre che: ogniqualvolta si scambia un elemento del 3° gruppo con uno di quelli del 2° e del 1°, lo scambio può effettuarsi su una qualunque delle permutazioni già formate; 2° sulla permutazione ottenuta quale risultato di un dato scambio deve sempre eseguirsi la O_2; 3° l'ordine secondo il quale si può comporre il 3° gruppo cogli elementi di una delle suddette combinazioni r_3^arie^ è indifferente; 4° la permutazione che deve scriversi per la prima può essere una qualunque delle permutazioni possibili.

L'operazione mediante la quale da una permutazione a tre gruppi detta fondamentale si deducono le altre, seguendo la regola ora enunciata, si indicherà con O_2. Così si dirà ad es. che le seconde permutazioni delle combinazioni delle $a_{11} \ldots a_{35}$, (esempio citato testè), si sono ottenute dalla 1ª (fondamentale) | 12 | 314 | 52 | eseguendo su essa l'operazione O_2. Tale operazione è stata descritta or ora. Essa può anche eseguirsi se gli elementi differenti dei tre gruppi della permutazione fondamentale non sono numeri consecutivi; in ogni caso, se il 3º gruppo contiene i elementi, esso è sempre una delle combinazioni i^{arie} degli elementi diversi appartenenti alla permutazione fondamentale. Per es. se la permutazione fondamentale fosse la

| 3 | 16 | 13 |

gli elementi differenti di essa sarebbero 1, 3, 6 e le loro combinazioni due a due, (gli elementi del 3º gruppo sono appunto due), sarebbero (13), (16), (36). Una di esse, la (13), è terzo gruppo nella | 3 | 16 | 13 |, dalla quale, mediante la O_2 si deducono le

| 1 | 36 | 13 |
| 6 | 13 | 13 |

Scambiando nella | 3 | 16 | 13 | gli elementi 6 e 3 rispettivamente del 2º e 3º gruppo, si ha la

| 3 | 13 | 16 |

sulla quale non si può eseguire la O_2. Il terzo gruppo di essa è la combinazione binaria (16). Scambiando infine in una delle permutazioni già formate, ad es. nella | 1 | 36 | 13 |, gli elementi 6 ed 1 rispettivamente del 2º e 3º gruppo, si ha la

| 1 | 31 | 63 |

sulla quale non si può eseguire la O_2. In essa il 3º gruppo è la combinazione binaria (63). Adunque il risultato della O_3 eseguita sulla | 3 | 16 | 13 | è il complesso di altre quattro permutazioni.

È anche da notarsi che può esistere una permutazione a tre gruppi, dalla quale non si possa dedurre alcun'altra permutazione, per l'impossibilità di eseguire anche un sol scambio tra elementi di due gruppi differenti. Tali ad es. sono le permutazioni

| 21 | 1 | 321 |
| 54 | 4 | 854 |

Consideriamo ora una successione a quattro gruppi ad es. la

| 12 | 314 | 53 | A_4 |

nella quale il quarto gruppo è indicato con A_4. I primi tre gruppi di essa costituiscono la | 12 | 314 | 53 |, sulla quale dianzi abbiamo eseguita la O_3, deducendone altre trenta permutazioni. Orbene diremo risultato della O_3, eseguita sulla suddetta permutazione di quattro gruppi, il complesso delle permutazioni ottenute scrivendo il gruppo A_4 accanto a quelle ottenute eseguendo la O_3 sulla | 12 | 314 | 53 |. Esse adunque sono le

13	214	53	A_4
14	312	53	A_4
13	514	23	A_4
. . . .
. . . .

Occupiamoci ora della determinazione del numero delle combinazioni relative ad una matrice di dimensioni $\longleftrightarrow n$, (coefficienti $r_1, \ldots r_n$), e $\updownarrow 3$, (coeff. r_1, r_2, r_3). Indichiamolo col simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1 r_2 r_3 \end{bmatrix}$ ed osserviamo che se una delle v, ad es. v_i, è uguale a 3 si ha: (*)

$$\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_{i-1}, 3, v_{i+1}, \ldots v_n \\ r_1 r_2 r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \ldots v_{i-1}, v_{i+1} \ldots v_n \\ r_1 - 1, r_2 - 1, r_3 - 1 \end{bmatrix}.$$

Per es. è:

$$\begin{bmatrix} 112233 \\ 345 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11223 \\ 234 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1122 \\ 123 \end{bmatrix}.$$

Oltre a ciò il valore del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1 r_2 r_3 \end{bmatrix}$ è indipendente dall'ordine di successione delle v e delle r. Supponiamo che tra le r si trovino p_1 numeri uguali ad 1, p_2 uguali a 2 e p_3 uguali a 3. Sarà: $\Sigma v = r_1 + r_2 + r_3$ ossia $p_1 + 2p_2 + 3p_3 = r_1 + r_2 + r_3$; $p_1 + p_2 + p_3 = n$. Potremo sempre ridurre il simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1 r_2 r_3 \end{bmatrix}$ alla forma:

$$\begin{bmatrix} \overbrace{1 \ldots 1}^{p_1} \overbrace{2 \ldots 2}^{p_2} \overbrace{3 \ldots 3}^{p_3} \\ r_1 r_2 r_3 \end{bmatrix}$$

ovvero, giusta la convenzione di indicare la successione $\overbrace{a \ldots\ldots a}^{\lambda}$, di λ numeri uguali ad a, col segno $a_{(\lambda)}$,

$$\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} 2_{(p_2)} 3_{(p_3)} \\ r_1 r_2 r_3 \end{bmatrix}$$

(*) Tralascio la dimostrazione di questa ed altre proprietà del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1, r_2, r_3 \end{bmatrix}$; esse sono casi particolari di proprietà del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1 \ldots r_m \end{bmatrix}$ che saranno dimostrate in seguito.

Per la 1ª proprietà, testè enunciata, del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \dots v_n \\ r_1\, r_2\, r_3 \end{bmatrix}$ si ha:

$$\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} & 3_{(p_3)} \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} \\ r_1 - p_3, & r_2 - p_3, & r_3 - p_3 \end{bmatrix}$$

ed è $p_1 + 2p_2 = (r_1 - p_3) + (r_2 - p_3) + (r_3 - p_3)$.

Il numero delle combinazioni delle $a_{11} \dots a_{3n}$ è dunque uguale a quello delle combinazioni relative alla matrice

$$M \equiv \begin{Vmatrix} a_{11} \dots a_{1,p_1} \dots a_{1,n-p_3} \\ a_{21} \dots a_{2,p_1} \dots a_{2,n-p_3} \\ a_{31} \dots a_{3,p_1} \dots a_{3,n-p_3} \end{Vmatrix}$$

ove si assumano quali coefficienti della dimensione $\updownarrow 3$ i numeri $r_1 - p_3$, $r_2 - p_3$, $r_3 - p_3$ e quali coefficienti della dimensione $\longleftrightarrow n - p_3$ i numeri $\underbrace{1 \dots 1}_{p_1}\ \underbrace{2 \dots 2}_{p_2}$ (essendo $n = p_1 + p_2 + p_3$ è appunto $n - p_3 = = p_1 + p_2$).

Non è escluso che una delle differenze $r_1 - p_3$, $r_2 - p_3$, $r_3 - p_3$ sia nulla. Se è nulla ad es. la $r_1 - p_3$ si ha $r_1 = p_3$ e pertanto $p_1 + 2p_2 = = (r_2 - p_3) + (r_3 - p_3)$. In tal caso si ha:

$$\begin{bmatrix} v_1 \dots v_n \\ r_1\, r_2\, r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} \\ r_2 - p_3, & r_3 - p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(p_1)} \\ r_2 - p_2 - p_3, \ r_3 - p_2 - p_3 \end{bmatrix} = \frac{p_1!}{(r_2 - p_2 - p_3)!\,(r_3 - p_2 - p_3)!} \quad (*)$$

Due o più delle suddette differenze non possono essere contemporaneamente nulle; se ad es. fosse $r_1 - p_3 = 0$; $r_2 - p_3 = 0$, sarebbe $p_1 + 2p_2 = r_3 - p_3$ ossia $r_3 = p_1 + 2p_2 + p_3$, mentre invece il massimo valore di r_3 è $p_1 + p_2 + p_3 = n$.

Ciascuna della combinazioni relative alla suddetta matrice di dimensioni $\longleftrightarrow n - p_3$ ed $\updownarrow 3$ contiene $r_1 - p_3$ fra le $a_{11}, a_{12}, \dots a_{1,n-p_3}$, le quali si possono considerare come elementi di una delle $\binom{n - p_3}{r_1 - p_3}$ combinazioni $r_1 - p_3$ ad $r_1 - p_3$ di esse $a_{11}, \dots a_{1,n-p_3}$.

Le $a_{11} \dots a_{1,n-p_3}$ possono riunirsi in due gruppi; il 1º contenente le $a_{11} \dots a_{1,p_1}$; il 2º le $a_{1,p_1+1}, \dots a_{1,n-p_3}$. Ciascuna delle suddette combinazioni delle $a_{11}, \dots a_{1,n-p_3}$ conterrà ad es. π_1 della $a_{11} \dots a_{1,p_1}$ e π_2 delle $a_{1,p_1+1}, \dots a_{1,n-p_3}$ e sarà sempre $\pi_1 + \pi_2 = r_1 - p_3$.

D'altronde è nota la formola d'analisi combinatoria:

$$\binom{p_1 + p_2}{h} = \sum_{\pi_1 + \pi_2 = h} \binom{p_1}{\pi_1}\binom{p_2}{\pi_2}; \qquad \pi_1 \leq p_1; \quad \pi_2 \leq p_2 \qquad (18)$$

(*) Si è scritto convenzionalmente $\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} \\ r_2 - p_3, & r_3 - p_3 \end{bmatrix}$ invece di $\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} \\ 0, \ r_2 - p_3, & r_3 - p_3 \end{bmatrix}$.

nella quale il segno Σ deve intendersi esteso a tutti i sistemi di valori positivi interi anche nulli delle π_1, π_2. tali che $\pi_1 + \pi_2 = h$. e ritenendo $\binom{\lambda}{0} = 1$ anche se $\lambda = 0$. Supponendo $h = r_1 - p_3$, ogni termine del 2° membro della (18) rappresenta il numero dei modi secondo i quali si possono scegliere π_1 delle $a_{11}, \ldots, a_{1,p_1}$ e π_2 delle $a_{1,p_1+1} \ldots$ $\ldots a_{1,n-p_3}$, in modo da avere complessivamente $\pi_1 + \pi_2 = r_1 - p_3$ elementi. Ora ciascuna combinazione relativa alla matrice M contiene π_1 delle $a_{11} \ldots, a_{1,p_1}$ e π_2 delle $a_{1,p_1+1} \ldots a_{1,n-p_3}$; soppressi tali elementi, ne rimangono altri $r_2 - r_3 - 2p_3$, i quali costituiscono una combinazione relativa ad una matrice che si ottiene dalla M sopprimendo la 1ª orizzontale e le π_1 verticali alle quali appartengono quelle fra le $a_{11} \ldots, a_{1,p_1}$ che fanno parte della combinazione che si considera, ed assumendo quali coefficienti della dimensione $\updownarrow$ 2 i numeri $r_2 - p_3$, $r_3 - p_3$ e quali coefficienti della dimensione $\longleftrightarrow$ $n - p_3 - \pi_1$ i numeri $\underbrace{1 \ldots \ldots \ldots 1}_{p_1 - \pi_1 + \pi_2}, \underbrace{2 \ldots \ldots 2}_{p_2 - \pi_2}$.

Adunque le combinazioni relative alla matrice M, aventi comuni π_1 elementi scelti tra le $a_{11} \ldots, a_{1,p_1}$ e π_2 scelti tra le $a_{1,p_1+1}, \ldots a_{1,n-p_3}$, sono in numero di

$$\begin{bmatrix} 1_{(p_1-\pi_1+\pi_2)}\, 2_{(p_2-\pi_2)} \\ r_2 - p_2,\ r_3 - p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(p_1-\pi_1+\pi_2)} \\ (r_2 - p_3) - (p_2 - \pi_2),\ (r_3 - p_3) - (p_2 - \pi_2) \end{bmatrix}.$$

E si noti che essendo $p_1 + 2p_2 + 3p_3 = r_1 + r_2 + r_3$ e $\pi_1 + \pi_2 = r_1 - p_3$, si ha pure: $(p_1 - \pi_1 + \pi_2) + 2(p_2 - \pi_2) = (r_2 - p_3) + (r_3 - p_3)$ come deve essere.

Si ha pertanto la formola:

$$\begin{bmatrix} r_1 \ldots r_n \\ r_1\, r_2\, r_3 \end{bmatrix} = \sum_{\pi_1+\pi_2=r_1-p_3} \binom{p_1}{\pi_1}\binom{p_2}{\pi_2} \begin{bmatrix} 1_{(p_1-\pi_1+\pi_2)}\, 2_{(p_2-\pi_2)} \\ r_2 - p_3,\ r_3 - p_3 \end{bmatrix} = \tag{19}$$

$$= \sum_{\pi_1+\pi_2=r_1-p_3} \binom{p_1}{\pi_1}\binom{p_2}{\pi_2} \begin{bmatrix} 1_{(p_1-\pi_1+\pi_2)} \\ (r_2 - p_3) - (p_2 - \pi_2),\ (r_3 - p_3) - (p_2 - \pi_2) \end{bmatrix}$$

nella quale il segno Σ deve intendersi esteso a tutti i sistemi di valori positivi interi anche nulli delle π_1, π_2 tali che:

$\pi_1 \leq p_1$; $\pi_2 \leq p_2$; $\pi_1 + \pi_2 = r_1 - p_3$; $p_2 + p_3 - r_2 \leq \pi_2$; $p_3 + p_2 - r_3 \leq \pi_2$.

Imponendo a π_1 e π_2 tali condizioni, le differenze $(r_2 - p_3) - (p_2 - \pi_2)$ e $(r_3 - p_3) - (p_2 - \pi_2)$ sono certamente positive. Si può anche (ed è conveniente) assoggettare π_1 e π_2 alle sole condizioni

$$\pi_1 \leqq p_1;\ \pi_2 \leqq p_2;\ \pi_1 + \pi_2 = r_1 - p_3$$

convenendo di ritenere nullo ($=0$) ogni termine della forma $\begin{bmatrix} 1_{(\lambda)} \\ -h, h \end{bmatrix}$ oppure $\begin{bmatrix} 1_{(\lambda)} \\ h, -h \end{bmatrix}$, h essendo positivo e diverso da zero. La (19) sussiste pure cambiando nel 2° membro r_1 in r_2 e quindi r_2 in r_1 oppure r_1 in r_3 e quindi r_3 in r_1. Infatti le considerazioni fatte relativamente alla 1ª orizzontale della matrice M si possono fare relativamente a ciascuna delle orizzontali 2ª e 3ª.

Esaminiamo ora alcuni casi particolari.

1°. Se $p_3 = 0, p_1 \neq 0, p_2 \neq 0$, sarà $p_1 + 2p_2 = r_1 + r_2 + r_3$ e si avrà:

$$\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} 2_{(p_2)} \\ r_1\, r_2\, r_3 \end{bmatrix} = \sum_{\pi_1+\pi_2=r_1} \binom{p_1}{\pi_1}\binom{p_2}{\pi_2}\begin{bmatrix} 1_{(p_1-\pi_1+\pi_2)} \\ r_2 - p_2 + \pi_2,\ r_3 - p_2 + \pi_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{\pi_1+\pi_2=r_1} \binom{p_1}{\pi_1}\binom{p_2}{\pi_2}\binom{p_1-\pi_1+\pi_2}{r_2-p_2+\pi_2}.$$

2°. Se $p_3 = 0$, e $p_2 = 0$, è $r_1 + r_2 + r_3 = p_1$ e dovendo essere $\pi_1 \overline{<} p_1$; $\pi_2 \overline{<} p_2$, sarà $\pi_2 = 0$ e quindi il solo sistema di valori delle π_1 e π_2 tali che $\pi_1 + \pi_2 = r_1$, sarà il sistema $r_1, 0$; pertanto si ha dalla formola precedente:

$$\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} \\ r_1\, r_2\, r_3 \end{bmatrix} = \binom{p_1}{\pi_1}\begin{bmatrix} 1_{(p_1-r_1)} \\ r_2\ \ r_3 \end{bmatrix} = \binom{p_1}{\pi_1}\binom{p_1-r_1}{r_2} = \frac{p_1!}{r_1!\, r_2!\, r_3!}.$$

3°. Se $p_1 \neq 0$; $p_2 = 0$; $p_3 \neq 0$, è $p_1 + 3p_3 = r_1 + r_2 + r_3$, e dovendo essere $\pi_2 \overline{<} p_2$, sarà, $\pi_2 = 0$, quindi il solo sistema di valori di π_1 e π_2 tali che $\pi_1 + \pi_2 = r_1 - p_3$, è il sistema $r_1 - p_3, 0$. Si ha quindi dalla (19):

$$\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} 3_{(p_3)} \\ r_1\, r_2\, r_3 \end{bmatrix} = \binom{p_1}{r_1 - p_3}\begin{bmatrix} 1_{(p_1-r_1+p_3)} \\ r_2 - p_3,\ r_3 - p_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \binom{p_1}{r_1 - p_3}\binom{p_1 - r_1 + p_3}{r_2 - p_3} = \frac{p_1!}{(r_1-p_3)!\ (r_2-p_3)!\ (r_3-p_3)!}.$$

Si noti che essendo $r_1, r_2, r_3, \overline{>} p_3$, le differenze $r_1 - p_3$, $r_2 - p_3$, $r_3 - p_3$ non sono mai negative.

4°. Se $p_3 = 0, p_1 = 0, p_2 \neq 0$, sarà $2p_2 = r_1 + r_2 + r_3$, ed essendo $\pi_1 \overline{<} p_1$, sarà $\pi_1 = 0$; quindi il solo sistema di valori dalle π_1, π_2 tali che $\pi_1 + \pi_2 = r_1$, è il sistema $0, r_1$. Si avrà quindi dalla formola relativa al caso particolare indicato al n. 1:

$$\begin{bmatrix} 2_{(p_2)} \\ r_1\, r_2\, r_3 \end{bmatrix} = \binom{p_2}{r_1}\begin{bmatrix} 1_{(r_1)} \\ r_2 - p_2 + r_1,\ r_3 - p_2 + r_1 \end{bmatrix} = \frac{p_2!}{(p_2-r_1)!\,(p_2-r_2)!\,(p_2-r_3)!}$$

5°. Se $p_1 = 0$, $p_2 \neq 0$, $p_3 \neq 0$, sarà $2p_2 + 3p_3 = r_1 + r_2 + r_3$, e dovendo essere $\pi_1 \overline{<} p_1$, sarà $\pi_1 = 0$; perciò il solo sistema di valori delle π_1, π_2 tali che $\pi_1 + \pi_2 = r_1 - p_3$, sarà il sistema $0, r_1 - p_3$. Si avrà adunque dalla (19):

$$\begin{bmatrix} 2_{(p_2)} 3_{(p_3)} \\ r_1\, r_2\, r_3 \end{bmatrix} = \binom{p_2}{r_1 - p_3}\begin{bmatrix} 1_{(r_1-p_3)} \\ r_2 + r_1 - p_2 - 2p_3,\ r_3 + r_1 - p_2 - 2p_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \binom{p_2}{r_1 - p_3}\binom{r_1 - p_3}{r_2 + r_1 - p_2 - 2p_3}$$

Ora

$$\binom{p_2}{r_1 - p_3} = \frac{p_2!}{(r_1 - p_3)!\,(p_2 - r_1 + p_3)!}$$

e

$$\binom{r_1 - p_3}{r_2 + r_1 - p_2 - 2p_3} = \frac{(r_1 - p_3)!}{(r_2 + r_1 - p_2 - 2p_3)!\,\{(r_1 - p_3) - (r_2 + r_1 - p_2 - 2p_3)\}\,!}$$

e poichè:

$r_2 + r_1 - p_2 - 2p_3 = p_2 + p_3 - r_3$, (si deduce dalla $2p_2 + 3p_3 = r_1 = r_2 + + r_3$), è pure:

$$(r_1 - p_3) - (r_2 + r_1 + p_2 - 2p_3) = p_2 + p_3 - r_2;$$

pertanto:

$$\begin{bmatrix} 2_{(p_2)}\, 3_{(p_3)} \\ r_1\, r_2\, r_3 \end{bmatrix} = \frac{p_2!}{(p_2 + p_3 - r_1)!\,(p_2 + p_3 - r_2)!\,(p_2 + p_3 - r_3)!}.$$

6°. Se $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 \neq 0$, sarà $3p_3 = r_1 + r_2 + r_3$, e poichè r_1, r_2, r_3 non sono mai minori di p_3, sarà $r_1 = r_2 = r_3 = p_3 = n$.

In tal caso, dovendo essere $\pi_1 \overline{<} p_1$, $\pi_2 \overline{<} p_2$, sarà: $\pi_1 = 0$; $\pi_2 = 0$; si ha pertanto dalla (19):

$$\begin{bmatrix} 3_{(p_3)} \\ p_3\, p_3\, p_3 \end{bmatrix} = 1.$$

Esempio. — Sia da calcolarsi il numero delle combinazioni relative alla matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{11} \ldots\ldots\ldots a_{15} \\ a_{21} \ldots\ldots\ldots a_{25} \\ a_{31} \ldots\ldots\ldots a_{35} \end{Vmatrix}$$

assumendo $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2$; $v_1 = 2$, $v_2 = 1$, $v_3 = 2$, $v_4 = 1$, $v_5 = 1$ (ne abbiamo formato poc'anzi le seconde permutazioni).

Si ha in tal caso: $p_1 = 3$, $p_2 = 2$, $p_3 = 0$, ed i sistemi di valori delle π_1, π_2 tali che: $\pi_1 \leq p_1$, $\pi_2 \leq p_2$, $\pi_1 + \pi_2 = 2$ (2 è il valore di r_1) sono i tre seguenti: 0, 2; 1, 1; 2, 0. Adunque, applicando la formola (19) si trova:

$$\begin{bmatrix} 1\,1\,1\,2\,2 \\ 2\,3\,2 \end{bmatrix} = \binom{3}{0}\binom{2}{2}\begin{bmatrix} 1\,1\,1\,1\,1 \\ 3\,2 \end{bmatrix} + \binom{3}{1}\binom{2}{1}\begin{bmatrix} 1\,1\,1 \\ 2\,1 \end{bmatrix} + \binom{3}{2}\binom{2}{0}\begin{bmatrix} 1 \\ 1\,0 \end{bmatrix}.$$

Ma

$$\begin{bmatrix} 1\,1\,1\,1\,1 \\ 3\,2 \end{bmatrix} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$$

$$\begin{bmatrix} 1\,1\,1 \\ 2\,1 \end{bmatrix} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3 \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1\,0 \end{bmatrix} = \frac{1!}{1!} = 1.$$

Pertanto:

$$\begin{bmatrix} 1\,1\,1\,2\,2 \\ 2\,3\,2 \end{bmatrix} = 1\,.\,1\,.\,10 + 3\,.\,2\,.\,3 + 3\,.\,1\,.\,1 = 10 + 18 + 3 = \text{trentuno}.$$

III caso: m = 4. Si vogliono ad esempio formare le combinazioni relative alle matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{matrix} \right\|$$

di dimensioni $\rightarrow$ 5 e $\downarrow$ 4 assumendo $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2$, $r_4 = 4$; $v_1 = 3$, $v_2 = 2$, $v_3 = 3$, $v_4 = 2$, $v_5 = 1$. La seconda permutazione di una di esse è la

$$|\,1\,3\,|\,1\,2\,4\,|\,5\,3\,|\,1\,2\,3\,4\,|\,.$$

Eseguendo su questa l'operazione O_3, si hanno altre trenta permutazioni, le quali assieme alla $|\,1\,3\,|\,1\,2\,4\,|\,5\,3\,|\,1\,2\,3\,4\,|$ costituiscono il complesso delle seconde permutazioni aventi $|\,1\,2\,3\,4\,|$ per ultimo gruppo. Gli elementi della $|\,1\,3\,|\,1\,2\,4\,|\,5\,3\,|$, formata coi gruppi della permutazione suddetta, sono quelli della 1ª delle trentuna permutazioni formate studiando (quando si trattava il caso $m = 3$) le combinazioni relative alla matrice $\left\| \begin{matrix} a_{11} \ldots\ldots\ldots a_{15} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{31} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix} \right\|$, nell'ipotesi $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2$; $v_1 = 2$, $v_2 = 1$, $v_3 = 2$, $v_4 = 1$, $v_5 = 1$. Perciò, se accanto a tali permutazioni scriviamo il gruppo $|\,1\,2\,3\,4\,|$, noi otteniamo le suddette trentuna permutazioni di quattro gruppi. Esse adunque sono le:

$$\begin{array}{ll} 1^a & |\,1\,3\,|\,1\,2\,4\,|\,5\,3\,|\,1\,2\,3\,4\,| \\ 2^a & |\,1\,2\,|\,3\,1\,4\,|\,5\,3\,|\,1\,2\,3\,4\,| \\ 3^a & |\,1\,4\,|\,3\,1\,2\,|\,5\,3\,|\,1\,2\,3\,4\,| \\ 4^a & |\,1\,3\,|\,5\,1\,4\,|\,2\,3\,|\,1\,2\,3\,4\,| \\ \vdots & \qquad\quad \vdots \\ 31^{ma} & |\,5\,3\,|\,2\,1\,3\,|\,1\,4\,|\,1\,2\,3\,4\,|\,. \end{array}$$

Le combinazioni 4 a 4 (4 è il valore di r_4) dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, sono le (1 2 3 4), (1 2 3 5), (1 2 4 5), (1 3 4 5), (2 3 4 5); nelle permutazioni finora ottenute il quarto gruppo è rappresentato da una sola di esse, la (1 2 3 4). Scambiamo in una qualunque delle trentuna permutazioni formate un elemento del 4° gruppo con uno dei gruppi rimanenti, in modo da ottenere una permutazione nella quale il 4° gruppo sia un'altra delle suddette combinazioni quaternarie; per es., scambiando nella 1ª l'elemento 4 del quarto gruppo coll'elemento 5 del terzo, si ha la

$$|\,1\,3\,|\,1\,2\,4\,|\,4\,3\,|\,1\,2\,3\,5\,|$$

dalla quale, mediante l'operazione O_3, si possono dedurre tutte le altre permutazioni aventi comune con essa il quarto gruppo $|\,1\,2\,3\,5\,|$. Poichè la $|\,1\,3\,|\,1\,2\,4\,|\,4\,3\,|$ formata coi primi tre gruppi della $|\,1\,3\,|\,1\,2\,4\,|\,4\,3\,|\,1\,2\,3\,5\,|$ contiene $p_1 = 1$ elementi presi una volta, $p_2 = 3$ elementi presi due volte e $p_3 = 0$ elementi presi tre volte, e poichè i gruppi 1°, 2°, 3°, di essa contengono rispettivamente $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2$ elementi, il numero delle suddette permutazioni, aventi comune il quarto gruppo | 1 2 3 5 |, sarà, secondo le formole stabilite trattando il caso $m=3$:

$$\begin{bmatrix} 1222 \\ 232 \end{bmatrix} = \binom{1}{0}\binom{3}{2}\begin{bmatrix} 1112 \\ 32 \end{bmatrix} + \binom{1}{1}\binom{3}{1}\begin{bmatrix} 122 \\ 32 \end{bmatrix} = \text{dodici.}$$

E così possiamo dire d'aver già formate $31+12=43$ permutazioni. Si scambi ora in una qualunque di esse un elemento del 4° gruppo con uno dei gruppi rimanenti, in modo da ottenere una permutazione nella quale il 4° gruppo sia una delle suddette combinazioni quaternarie degli elementi 1, 2, 3, 4, 5, diversa però dalle (1 2 3 4), (1 2 3 5). Ad es. scambiando nella 4ª (la | 1 3 | 5 1 4 | 2 3 | 1 2 3 4 |) l'elemento 3 del 4° gruppo coll'elemento 5 del 2°, si ha la | 1 3 | 3 1 4 | 2 3 | 1 2 4 5 |, nella quale il 3° gruppo è la combinazione quaternaria (1 2 4 5). Tutte le rimanenti che hanno comune con essa il 4° gruppo, si ottengono eseguendo su di essa l'operazione O_3. Si continui nel processo, ormai evidente, formando le permutazioni nelle quali il 4° gruppo è una delle combinazioni quaternarie degli elementi 1, 2, 3, 4, 5, diversa però dalle (1 2 3 4), (1 2 3 5), (1 2 4 5). Si hanno così tutte le seconde permutazioni relative alle combinazioni delle $a_{11} \ldots . a_{45}$. Tra esse ve ne sono: trentuna nelle quali il 4° gruppo è | 1 2 3 4 |; dodici nelle quali è | 1 2 3 5 |; cinque nelle quali è | 1 2 4 5 |; dodici nelle quali è | 1 3 4 5 |; cinque nelle quali è | 2 3 4 5 |. Il numero di esse è adunque:

$$31+12+5+12+5 = \text{sessantacinque.}$$

Ciascuna delle combinazioni quaternarie degli elementi 1, 2, 3, 4, 5, ha figurato quale ultimo gruppo in una almeno delle suddette sessantacinque permutazioni. Ciò non succede, in generale, quando qualcuna delle v è uguale a 4. Se ad esempio fosse $v_2=4$, ciascun gruppo di una qualunque permutazione dovrebbe contenere l'elemento 2, e quindi l'ultimo gruppo sarebbe sempre una fra le combinazioni quaternarie suddette contenenti il 2, cioè una delle (1 2 3 4), (1 2 3 5), (1 2 4 5), (2 3 4 5). Se fosse $v_2=4$, $v_3=4$, l'ultimo gruppo sarebbe una delle combinazioni (1 2 3 4), (1 2 3 5), (2 3 4 5), contenenti gli elementi 2 e 3. Cio è evidente.

La forma generale di una permutazione a quattro gruppi è $|A_1|A_2|A_3|A_4|$ dove A_1, A_2, A_3, A_4 sono gruppi contenenti rispettivamente r_1, r_2, r_3, r_4 elementi qualunque, (non è necessario che gli elementi differenti della permutazione siano numeri consecutivi); tra gli elementi di tal permutazione ve ne saranno poi p_1, p_2, p_3, p_4 presi rispettivamente 1, 2, 3, 4 volte. Se gli elementi differenti sono i numeri $1, 2, \ldots n$, e l'elemento i è ripetuto v_i volte, sarà: $v_i \leq 4$: $r_j \leq n$; $\Sigma v = \Sigma r$. L'operazione mediante la quale da una permutazione a quattro gruppi si deducono le rimanenti, (vale a dire quelle che sono formate cogli stessi elementi), si indicherà con O_4. Eccone la descrizione: 1° si formano quelle fra le combinazioni r_4 ad r_4 degli elementi differenti della permutazione data, che contengono gli elementi (se ve ne sono) comuni a tutti i gruppi; se non vi sono elementi comuni a tutti i gruppi, si formano tutte le combinazioni r_4 ad r_4 degli elementi diversi della permutazione data; 2° si eseguisce su essa l'operazione O_3; 3° si scambia in una delle permutazioni formate un elemento del quarto gruppo con uno dei gruppi rimanenti, in modo da ottenere una permutazione nella quale il quarto gruppo sia un'altra delle combinazioni r_4 ad r_4 suddette; 4° si eseguisce sulla permutazione ottenuta l'operazione O_3 ecc.... e così si continua finchè non si è potuto accertare, che mediante uno scambio, da eseguirsi tra un elemento del quarto gruppo di una delle permutazioni formate ed uno dei gruppi rimanenti, è impossibile ottenere una permutazione, nella quale il 4° gruppo sia una delle combinazioni r_4^{arie} suddette, diverse da quelle che già hanno figurato quale quarto gruppo in una delle permutazioni formate.

Se gli elementi differenti della $|\,A_1\,|\,A_2\,|\,A_3\,|\,A_4\,|$ sono i numeri $1, 2, \ldots n$, si può determinare, se occorre, il segno di essa, il quale è quello di $(-1)^\beta$, β essendo il numero delle inversioni che gli elementi di ciascun gruppo fanno con quelli dei gruppi che esso ha a destra. Noto il segno della $|\,A_1\,|\,A_2\,|\,A_3\,|\,A_4\,|$, si potrà facilmente determinare quello delle permutazioni da essa dedotte, seguendo i criteri già noti; infatti ciascuna di esse a cominciare dalla 2ª, si deduce da una di segno noto mediante lo scambio di due elementi appartenenti a gruppi differenti. Giova anche osservare che più facilmente si potrà determinare, ove occorra, il segno delle permutazioni, se si sarà avuta l'avvertenza di dedurre possibilmente ciascuna di esse da un'altra mediante lo scambio di due elementi appartenenti a gruppi contigui.

Indichiamo ora col simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots . v_n \\ r_1\, r_2\, r_3\, r_4 \end{bmatrix}$ il numero delle combinazioni relative ad una matrice di dimensioni $\longleftrightarrow n$ (coi coefficienti $v_1, \ldots, v_n$) ed $\updownarrow 4$ (coi coefficienti r_1, r_2, r_3, r_4). Il valore di tal simbolo è indipendente dall'ordine della v e della r (*), dimodochè si può sempre supporlo ridotto alla forma

$$\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} & 3_{(p_3)} & 4_{(p_4)} \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{bmatrix}$$

giacchè tra le $v_1, \ldots v_n$ ve ne saranno p_1, p_2, p_3, p_4 rispettivamente uguali ad $1, 2, 3, 4$, (è sempre $v_i \leq 4$). Si ha poi

$$\begin{bmatrix} v_1 \ldots . v_n \\ r_1\, r_2\, r_3\, r_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} & 3_{(p_3)} & 4_{(p_4)} \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} & 3_{(p_3)} & \\ r_1 - p_4, & r_2 - p_4, & r_3 - p_4, & r_4 - p_4 \end{bmatrix} =$$

$$(20)^* \quad = \sum_{\pi_1+\pi_2+\pi_3=r_1-p_4} \binom{p_1}{\pi_1}\binom{p_2}{\pi_2}\binom{p_3}{\pi_3} \begin{bmatrix} 1_{(p_1-\pi_1+\pi_3)} & 2_{(p_2-\pi_2+\pi_3)} & 3_{(p_3-\pi_3)} \\ r_2 - p_4, & r_3 - p_4, & r_4 - p_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{\pi_1+\pi_2+\pi_3=r_1-p_4} \binom{p_1}{\pi_1}\binom{p_2}{\pi_2}\binom{p_3}{\pi_3} \begin{bmatrix} 1_{(p_1-\pi_1+\pi_3)} & 2_{(p_2-\pi_2+\pi_3)} & \\ (r_2-p_4)-(p_3-\pi_3), & (r_3-p_4)-(p_3-\pi_3), & (r_4-p_4)-(p_3-\pi_3) \end{bmatrix}$$

(*) Non dimostro questa ad altre proprietà del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots . v_n \\ r_1\, r_2\, r_3\, r_4 \end{bmatrix}$, essendo casi particolari di proprietà del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1 \ldots r_m \end{bmatrix}$ che sarà studiato accuratamente in seguito.

intendendo il segno Σ esteso a tutti i sistemi di valori positivi interi anche nulli, delle π_1, π_2, π_3, tali che:

$$\left.\begin{array}{c}\pi_1 \leq p_1; \quad \pi_2 \leq p_2; \quad \pi_3 \leq p_3; \quad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = r_1 - p_4 \\ (r_2 - \pi_4) - (p_3 - \pi_3) \geq 0; \quad (r_3 - \pi_4) - (p_3 - \pi_3) \geq 0; \quad (r_4 - p_4) - (p_3 - \pi_3) \geq 0\end{array}\right\}$$

I numeri π_1, π_2, π_3 possono anche assoggettarsi alle sole condizioni

$$\pi_1 \leq p_1; \quad \pi_2 \leq p_2; \quad \pi_3 \leq p_3; \quad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = r_1 - p_4$$

ritenendo però

$$\begin{bmatrix} 1_{(\mu)} & & 1_{(\nu)} \\ h & k & l \end{bmatrix} = 0$$

se uno (o più) dei numeri h, k, l è negativo.

La (20) sussiste pure se si cambia r_1 in r_2 ed r_2 in r_1, oppure r_1 in r_3 ed r_3 in r_1, oppure r_1 in r_4 ed r_4 in r_1.

Si hanno casi particolari che non esamineremo a parte, e che sono compresi nella (20), quando una o due o tre delle p_1, p_2, p_3, p_4 siano zero. In qualunque caso dev'essere: $\Sigma v = \Sigma r$ ossia $p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$. Inoltre $r_1 \geq p_4$; $r_i \leq n$; $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = n$.

Altri casi speciali si hanno quando una o due delle differenze $r_1 - p_4$, $r_2 - p_4$, $r_3 - p_4$, $r_4 - p_4$ fossero zero. Tre di esse non possono essere contemporaneamente zero; se fosse ad es. $r_1 - p_4 = 0$; $r_2 - p_4 = 0$; $r_3 - p_4 = 0$, sarebbe $p_1 + 2p_2 + 3p_3 + p_4 = r_4$, il che non può essere, giacchè il massimo valore di r_4 è $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = n$.

Se $r_1 - p_4 = 0$ si ha $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 0$ e quindi:

$$\begin{bmatrix} v_1 \dots v_n \\ r_1\, r_2\, r_3\, r_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} & 3_{(p_3)} \\ 0, & r_2 - p_4, & r_3 - p_4, & r_4 - p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} \\ r_2 - p_3 - p_4, & r_3 - p_3 - p_4, & r_4 - p_3 - p_4 \end{bmatrix}$$

E similmente

$$\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} & 3_{(p_3)} & \\ r_1 - p_4, & 0, & r_3 - p_4, & r_4 - p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} \\ r_1 - p_3 - p_4, & r_3 - p_3 - p_4, & r_4 - p_3 - p_4 \end{bmatrix}$$

ecc. ecc.

Se due delle differenze suddette sono nulle, ad es. se è $r_1 - p_4 = 0$, $r_2 - p_4 = 0$, si ha

$$\begin{bmatrix} & 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} & 3_{(p_3)} \\ 0, & 0, & r_3 - p_4, & r_4 - p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} \\ -p_3, & r_3 - p_3 - p_4, & r_4 - p_3 - p_4 \end{bmatrix} = 0$$

a meno che non sia $p_3 = 0$; quindi se due delle differenze $r_1 - p_4$, $r_2 - p_4$, $r_3 - p_4$, $r_4 - p_4$ sono nulle, e $p_3 = 0$, il valore del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \dots v_n \\ r_1\, r_2\, r_3\, r_4 \end{bmatrix}$ è zero.

Esempio. — Il numero delle combinazioni relative ad una matrice di dimensioni $\longleftrightarrow 5$, coi coefficienti $v_1 = 3$, $v_2 = 2$, $v_3 = 3$, $v_4 = 2$, $v_5 = 1$ e $\updownarrow 4$, coi coefficienti $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2$, $r_4 = 4$, (abbiamo già visto come si fa a formarne le seconde permutazioni che sono sessantacinque), è $\begin{bmatrix} 1_{(1)} & 2_{(2)} & 3_{(2)} & \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (*). Si ha infatti: $p_1=1$, $p_2=2$, $p_3=2$, $p_4=0$. I sistemi di valori delle π_1, π_2, π_3 tali che: $\pi_1 \leq 1$; $\pi_2 \leq 2$; $\pi_3 \leq 2$; $\pi_1+\pi_2+\pi_3=r_1-p_4=2$, sono i cinque seguenti:

	$p_1=1$	$p_2=2$	$p_3=2$
	$\pi_1 +$	$\pi_2 +$	$\pi_3 = 2$
1°	0	0	2
2°	0	1	1
3°	0	2	0
4°	1	0	1
5°	1	1	0

Pertanto, si ha per la (20):

$$\begin{bmatrix} 12233 \\ 2324 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(1)}2_{(2)}3_{(2)} \\ 2\,3\,2\,4 \end{bmatrix} = \binom{1}{0}\binom{2}{0}\binom{2}{2}\begin{bmatrix} 14 \\ 324 \end{bmatrix} + \binom{1}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\begin{bmatrix} 22 \\ 213 \end{bmatrix} +$$

$$+\binom{1}{0}\binom{2}{2}\binom{2}{0}\begin{bmatrix} 30 \\ 102 \end{bmatrix} + \binom{1}{1}\binom{2}{0}\binom{2}{1}\begin{bmatrix} 03 \\ 213 \end{bmatrix} + \binom{1}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{0}\begin{bmatrix} 11 \\ 102 \end{bmatrix}.$$

Applicando la (19) si trova:

$$\begin{bmatrix} 14 \\ 324 \end{bmatrix} = \text{ventidue}; \quad \begin{bmatrix} 22 \\ 213 \end{bmatrix} = \text{otto}; \quad \begin{bmatrix} 30 \\ 102 \end{bmatrix} = \text{tre}$$

$$\begin{bmatrix} 03 \\ 213 \end{bmatrix} = \text{tre}; \quad \begin{bmatrix} 11 \\ 102 \end{bmatrix} = \text{uno}$$

pertanto:

$$\begin{bmatrix} 1_{(1)} & 2_{(2)} & 3_{(2)} & \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 1.22 + 4.8 + 1.3 + 2.3 + 1.2 = \text{sessantacinque}.$$

Abbiamo testè imparato ad esprimere il simbolo $\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} & 3_{(p_3)} & 4_{p(4)} \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{bmatrix}$ mediante simboli del tipo $\begin{bmatrix} \lambda_1 \lambda_2 \\ \rho_1 \rho_2 \rho_3 \end{bmatrix}$. Procediamo ora alla ricerca di un'altra espressione dello stesso simbolo. Dividiamo le r_1, r_2, r_3, r_4 in due gruppi: il 1° contenga due qualunque di esse ad es. le r_1, r_2; il 2° le due rimanenti, cioè le r_3, r_4. Consideriamo le due matrici

$$\mu_1 \equiv \begin{Vmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \end{Vmatrix}$$

$$\mu_2 \equiv \begin{Vmatrix} a_{31}\, a_{32} \dots a_{3n} \\ a_{41}\, a_{42} \dots a_{4n} \end{Vmatrix}$$

(*) Scriviamo $\begin{bmatrix} 1_{(1)} & 2_{(2)} & 3_{(2)} & \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ invece di $\begin{bmatrix} 1_{(1)} & 2_{(2)} & 3_{(2)} & 4_{(0)} \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

ed assumiamo quali coefficienti della dimensione $\downarrow 2$ di μ_1 i numeri r_1, r_2, e quali coefficienti della dimensione $\rightarrow n$, n interi positivi anche nulli $h_1, \ldots h_n$, tali che: $h_i \leq 2$; $h_i \leq v_i$; $h_i \geq v_i - 2$; $\Sigma h = r_1 + r_2$ e tali inoltre che, dicendo $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ il numero di quelli rispettivamente uguali ad 1 e 2 ed η_1, η_2 il numero di quelle fra le differenze $v_1 - h_1$, $v_2 - h_2, \ldots v_n - h_n$ che sono rispettivamente uguali ad 1 e 2, sia: $\varepsilon_2 \leq r_1, r_2$; $\eta_2 \leq r_3, r_4$. Al solito supponiamo che tra le v ve ne siano p_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ uguali ad j. Sarà $\Sigma p = n$. Assumiamo quali coefficienti della dimensione $\downarrow 2$ della matrice μ_2 i numeri r_3, r_4, e quali coefficienti della dimensione $\rightarrow n$ i numeri $v_1 - h_1$, $v_2 - h_2 \ldots v_n - h_n$. Essendo $\Sigma v = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ e $\Sigma h = r_1 + r_2$ sarà $\Sigma(v - h) = r_3 + r_4$. Consideriamo la matrice

$$\mu \equiv \begin{Vmatrix} a_{11} \; a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \ldots a_{2n} \\ a_{31} \; a_{32} \ldots a_{3n} \\ a_{41} \; a_{42} \ldots a_{4n} \end{Vmatrix}$$

È chiaro che associando gli elementi di una combinazione relativa alla μ_1 con quelli di una relativa alla μ_2, si ha una combinazione relativa alla matrice μ, quando si assumano quali coefficienti della dimensione $\downarrow 4$ di essa i numeri r_1, r_2, r_3, r_4 e quali coefficienti della dimensione $\rightarrow n$ i numeri $v_1, \ldots v_n$. Si ha pertanto

$$\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} & 3_{(p_3)} & 4_{(p_4)} \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{bmatrix} = \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \begin{bmatrix} 1_{(\varepsilon_1)} & 2_{(\varepsilon_2)} \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{(\eta_1)} & 2_{(\eta_2)} \\ r_3 & r_4 \end{bmatrix} \tag{21}$$

intendendo il segno Σ esteso a tutti i sistemi di valori delle $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ed ai sistemi corrispondenti delle η_1, η_2 (noto un sistema di valori delle $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, il sistema corrispondente delle η_1, η_2 è perfettamente determinato; i sistemi di valori delle $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ si possono poi facilmente determinare; basta a tal uopo determinare i sistemi di valori delle $h_1, \ldots h_n$ soddisfacenti alle condizioni già enunciate; a ciascun sistema delle h corrisponde un sistema delle ε) (*). Uno stesso termine $\begin{bmatrix} 1_{(\varepsilon_1)} & 2_{(\varepsilon_2)} \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{(\eta_1)} & 2_{(\eta_2)} \\ r_3 & r_4 \end{bmatrix}$ comparirà in generale più di una volta, per es. $\lambda_{\varepsilon_1, \varepsilon_2; \eta_1, \eta_2}$ volte, dimodochè la (21) si può scrivere:

$$\begin{bmatrix} 1_{(p_1)} & 2_{(p_2)} & 3_{(p_3)} & 4_{(p_4)} \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{bmatrix} = \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \lambda_{\varepsilon_1, \varepsilon_2; \eta_1, \eta_2} \begin{bmatrix} 1_{(\varepsilon_1)} & 2_{(\varepsilon_2)} \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{(\eta_1)} & 2_{(\eta_2)} \\ r_3 & r_4 \end{bmatrix} \tag{21'}$$

intendendo il segno Σ esteso a tutti i gruppi delle coppie $(\varepsilon_1 \, \varepsilon_2)$, $(\eta_1 \, \eta_2)$ differenti per la coppia $(\varepsilon_1 \, \varepsilon_2)$ oppure per la coppia $\eta_1 \, \eta_2$. Si noti poi

(*) Gioverà pure notare, come mostreremo tra breve con un esempio, che a sistemi differenti di valori delle h può corrispondere lo stesso sistema di valori delle $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ o sistemi differenti di valori delle η_1, η_2.

che formati i sistemi di valori delle $h_1 \ldots h_n$ se ne deducono i sistemi di valori delle $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ ed i corrispondenti delle $\eta_1 \eta_2$; non vi è perciò difficoltà alcuna nel determinare per ogni gruppo $(\varepsilon_1 \varepsilon_2)$, $(\eta_1 \eta_2)$, il numero $\lambda_{\varepsilon_1 \varepsilon_2, \eta_1 \eta_2}$ corrispondente, che rappresenta quante volte esso gruppo trovasi ripetuto nella totalità dei gruppi.

Esempio. — Si vuol calcolare il valore del simbolo $\begin{bmatrix} 1_{(1)} & 2_{(2)} & 3_{(2)} & 4_{(0)} \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, che scriveremo anche $\begin{bmatrix} 1_{(1)} & 2_{(2)} & 3_{(2)} & \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Tal valore, come si è visto precedentemente, è sessantacinque. Esso è anche il numero delle combinazioni relative alla matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{11} \ldots\ldots a_{15} \\ \vdots \\ a_{41} \ldots\ldots a_{45} \end{Vmatrix}$$

assumendo quali coefficienti della dimensione $\longrightarrow 5$ i numeri $v_1 = 1$, $v_2 = 2$, $v_3 = 2$, $v_4 = 3$, $v_5 = 3$, e quali coefficienti della dimensione $\downarrow 4$; numeri $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2$, $r_4 = 4$. Si ha relativamente al suddetto simbolo: $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 2$, $p_4 = 0$; $\Sigma p = 5$: $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2$, $r_4 = 4$. I valori delle h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, devono soddisfare alle condizioni: $h_i \leq 2$, $\Sigma h = 5$, $h_1 \leq 1$, $h_2 \leq 2$, $h_3 \leq 2$, $h_4 \leq 3$, $h_5 \leq 3$; dovendo poi essere $h_i \geq v_i - 2$, i minimi valori di h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 sono rispettivamente $0, 0, 0, 1, 1$, e pertanto dev'essere: $2 \geq h_1 \geq 0$, $2 \geq h_2 \geq 0$, $2 \geq h_3 \geq 0$; $2 \geq h_4 \geq 1$; $2 \geq h_5 \geq 1$.

I possibili sistemi di valori delle $h_1, \ldots h_5$ soddisfacenti alle suddette condizioni si ottengono facilmente colle seguenti considerazioni. Si deve avere $\varepsilon_2 \leq r_1, r_2$; $\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 = r_1 + r_2 = 5$. Formiamo adunque i sistemi di valori positivi interi, anche nulli, delle $\varepsilon_1, \varepsilon_2$; tali che:

$\varepsilon_2 \leq r_1, r_2$ $\qquad\qquad$ $\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 = 5.$ $\qquad\qquad$ Essi sono:

1	2
3	1
5	0

Consideriamo il 1°; esso contiene i numeri 1 e 2. Ne segue che i sistemi di valori delle h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, al quale esso corrisponde, comprendono un numero uguale ad uno, due numeri uguali a due, ed i rimanenti numeri uguali a zero.

Non potendo h_4 ed h_5 essere zero, si avranno per h_4 ed h_5 i seguenti sistemi di valori: $h_4 = 1, h_5 = 2$; $h_4 = 2, h_5 = 1$; $h_4 = 2, h_5 = 2$. Consideriamo i tre numeri $1, 2, 2$. In corrispondenza al sistema di valori $h_4 = 1, h_5 = 2$, rimane di essi il 2, che può essere valore di h_2 ed h_3 ma non di h_1; idem per il sistema $h_4 = 2, h_5 = 1$; invece in corrispondenza al sistema $h_4=2, h_5=2$, dei numeri $1, 2, 2$ rimane l'1, che può essere valore di h_1, h_2, h_3.

Pertanto i sistemi di valori delle h corrispondenti al sistema di valori $\varepsilon_1=1, \varepsilon_2=2$, sono:

	$h_1 \leq 1$,	$h_2 \leq 2$,	$h_3 \leq 2$,	$h_4 \leq 2$,	$h_5 \leq 2$	
1°	0	0	2	1	2	$\varepsilon_1=1; \varepsilon_2=2$
2°	0	2	0	1	2	
3°	0	0	2	2	1	
4°	0	2	0	2	1	
5°	0	0	1	2	2	
6°	0	1	0	2	2	
7°	1	0	0	2	2	

Consideriamo il 2° sistema di valori delle $\varepsilon_1, \varepsilon_2$; $\varepsilon_1=3, \varepsilon_2=1$.

I sistemi di valori delle h ai quali esso corrisponde comprendono adunque tre numeri uguali ad 1, un numero uguale a 2, ed i rimanenti uguali a zero. I valori possibili di h_4 ed h_5 sono adunque: $h_4=1, h_5=1$; $h_4=1, h_5=2$; $h_4=2, h_5=1$.

Si considerino i numeri $1, 1, 1, 2$. Se $h_4=1, h_5=1$, restano a distribuirsi i numeri 1, 2, e di questi il 2 può essere valore soltanto di h_2 ed h_3; se $h_4=1, h_5=2$ restano a distribuirsi i numeri $1, 1$ che possono essere valori di due qualunque delle h_1, h_2, h_3; id. id. se $h_4=2, h_5=1$. Adunque i sistemi di valori delle h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, corrispondenti al sistema $\varepsilon_1=3, \varepsilon_2=1$, sono:

	$h_1 \leq 1$,	$h_2 \leq 2$,	$h_3 \leq 2$,	$h_4 \leq 2$,	$h_5 \leq 2$	
8°	0	1	2	1	1	$\varepsilon_1=3; \varepsilon_2=1.$
9°	1	0	2	1	1	
10°	0	2	1	1	1	
11°	1	2	0	1	1	
12°	0	1	1	1	2	
13°	1	0	1	1	2	
14°	1	1	0	1	2	
15°	0	1	1	2	1	
16°	1	0	1	2	1	
17°	1	1	0	2	1	

Al sistema di valori $\varepsilon_1=5, \varepsilon_2=0$ corrisponde, com'è facile constatare, un solo sistema di valori delle h, che è il seguente:

18°	1	1	1	1	1	$\varepsilon_1=5; \varepsilon_2=0.$

Sono adunque 18 i sistemi di valori delle $h_1, \ldots h_5$.

I sistemi corrispondenti di valori delle $v_1-h_1, v_2-h_2, v_3-h_3, v_4-h_4, v_5-h_5$ ossia $1-h_1, 2-h_2, 2-h_3, 3-h_4, 3-h_5$ sono:

	$1-h_1$,	$2-h_2$,	$2-h_3$,	$3-h_4$,	$3-h_5$	η_1	η_2
1°	1	2	0	2	1	2	2
2°	1	0	2	2	1	2	2
3°	1	2	0	1	2	2	2
4°	1	0	2	1	2	2	2
5°	1	2	1	1	1	4	1
6°	1	1	2	1	1	4	1
7°	0	2	2	1	1	2	2
8°	1	1	0	2	2	2	2
9°	0	2	0	2	2	0	3
10°	1	0	1	2	2	2	2
11°	0	0	2	2	2	0	3
12°	1	1	1	2	1	4	1
13°	0	2	1	2	1	2	2
14°	0	1	2	2	1	2	2
15°	1	1	1	1	2	4	1
16°	0	2	1	1	2	2	2
17°	0	1	2	1	2	2	2
18°	0	1	1	2	2	2	2

Per ciascun sistema abbiamo anche scritta la coppia corrispondente di valori delle η_1, η_2 (η_1 indica quanti numeri del sistema sono uguali ad 1, ed η_2 quanti sono uguali a 2).

Le coppie corrispondenti (i^{ma} ed i^{ma}), $\varepsilon_1, \varepsilon_2$; η_1, η_2 sono:

$1^a \ldots 7^{ma}$ $\Big\{ \overset{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{(12)} \overset{\eta_1 \eta_2}{(22)}$; (12)(22); (12)(22); (12)(22); (12)(41); (12)(41); (12)(22)

$8^a \ldots 17^{ma}$ $\Big\{$ (31)(22); (31)(03); (31)(22); (31)(03); (31)(41); (31)(22); (31)(22); (31)(41); (31)(22); (31)(22);

18^a $\{$ (50)(22)

Le coppie differenti sono:

(12)(22)	presa	5	volte, vale a dire	$\lambda_{12,22} = 5$
(12)(41)	"	2	"	$\lambda_{12,41} = 2$
(31)(22)	"	6	"	$\lambda_{31,22} = 6$
(31)(03)	"	2	"	$\lambda_{31,03} = 2$
(31)(41)	"	2	"	$\lambda_{31,41} = 2$
(50)(22)	"	1	"	$\lambda_{50,22} = 1$

Per ciascuna coppia dev'essere $\varepsilon_2 \leq r_1, r_2$; $\eta_2 \leq r_3, r_4$ ossia $\varepsilon_2 \leq 2, 3$; $\eta_2 \leq 2, 4$. La coppia (31)(03) non soddisfa a tali condizioni, perciò non *dobbiamo tenerne alcun conto*. Facendo la somma dei prodotti

$$\lambda_{\varepsilon_1\varepsilon_2, \eta_1\eta_2} \begin{bmatrix} 1_{(\varepsilon_1)} 2_{(\varepsilon_2)} \\ r_1 \quad r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{(\eta_1)} 2_{(\eta_2)} \\ r_3 \quad r_4 \end{bmatrix}$$

si ha

$$\begin{bmatrix} 1_{(1)} 2_{(2)} 3_{(2)} \\ 2\ 3\ 2\ 4 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1_{(1)} 2_{(2)} \\ 2\ \ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{(2)} 2_{(2)} \\ 2\ \ 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1_{(1)} 2_{(2)} \\ 2\ \ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{(4)} 2_{(1)} \\ 2\ \ 4 \end{bmatrix} +$$

$$+ 6 \begin{bmatrix} 1_{(3)} 2_{(1)} \\ 2\ \ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{(2)} 2_{(2)} \\ 2\ \ 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1_{(3)} 2_{(1)} \\ 2\ \ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{(4)} 2_{(1)} \\ 2\ \ 4 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1_{(5)} 2_{(0)} \\ 2\ \ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{(2)} 2_{(2)} \\ 2\ \ 4 \end{bmatrix}.$$

Ora applicando le formole dimostrate trattando il caso $m=2$, si ha:

$$\begin{bmatrix} 1_{(1)}\,2_{(2)} \\ 2\,3 \end{bmatrix}=1;\ \begin{bmatrix} 1_{(2)}\,2_{(2)} \\ 2\,4 \end{bmatrix}=2;\ \begin{bmatrix} 1_{(4)}\,2_{(1)} \\ 2\,4 \end{bmatrix}=4;$$

$$\begin{bmatrix} 1_{(3)}\,2_{(1)} \\ 2\,3 \end{bmatrix}=3\ \begin{bmatrix} 1_{(1)}\,2_{(2)} \\ 2\,4 \end{bmatrix}=1\ \begin{bmatrix} 1_{(5)}\,2_{(0)} \\ 2\,3 \end{bmatrix}=10.$$

E pertanto:

$$\begin{bmatrix} 1_{(1)}\,2_{(2)}\,3_{(2)} \\ 2\,3\,2\,4 \end{bmatrix}=5.1.1+2.1.4+6.3.1+2.3.4+1.10.1=$$
$$=5+8+18+24+10=\text{sessantacinque}.$$

Abbiamo detto di non tener conto della coppia (3 1) (0 3), non essendo verificate per essa le condizioni $\varepsilon_2 \overline{<} r_1, r_2;\ \eta_2 \overline{<} r_3, r_4$. Se ne avessimo tenuto conto il prodotto ad essa corrispondente sarebbe stato $2 . \begin{bmatrix} 1_{(3)}\,2_{(1)} \\ 2\,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_{(0)}\,2_{(3)} \\ 2\,4 \end{bmatrix}$.

Ora si ha:

$$\begin{bmatrix} 1_{(3)}\,2_{(1)} \\ 2\,3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1_{(3)} \\ 1\,2 \end{bmatrix}=3;\ \begin{bmatrix} 1_{(0)}\,2_{(3)} \\ 2\,4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1_{(0)}\,2_{(0)} \\ -1,1 \end{bmatrix}$$

dimodochè basta ritenere, come abbiamo osservato a suo tempo $\begin{bmatrix} 1_{(0)}\,2_{(0)} \\ -1,1 \end{bmatrix}=0$ per non alterare i resultati, anche tenendo conto della coppia (3 1), (0 3). Ritenendo adunque uguali a zero i simboli $\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$ nei quali vi sono delle r negative, le condizioni $\varepsilon_2 \overline{<} r_1, r_2;\ \eta_2 \overline{<} r_3, r_4$ si possono trascurare.

Evidentemente questo secondo metodo per calcolare il valore di $\begin{bmatrix} 1_{(p_1)}\,2_{(p_2)}\,3_{(p_3)}\,4_{(p_4)} \\ r_1\ \ r_2\ \ r_3\ \ r_4 \end{bmatrix}$ non è meno semplice del 1°.

Formazione delle combinazioni relative ad una matrice qualunque. — Passiamo ora a trattare il caso generale. Relativamente alla formazione delle combinazioni che si riferiscono ad una matrice di dimensione $\rightarrow n$ e $\downarrow 2, 3, 4$ abbiamo definite le operazioni corrispondenti O_2, O_3, O_4. Trattandosi delle combinazioni relative ad una matrice di dimensioni $\rightarrow n$ e $\downarrow 5, 6, \ldots$ si potrebbero definire altre operazioni corrispondenti O_5, $O_6 \ldots$ la cui descrizione, dopo gli esempi addotti, non offre difficoltà.

Consideriamo la O_{m-1}, ossia l'operazione colla quale dalla seconda permutazione di una combinazione relativa ad una matrice di dimensioni $\rightarrow n$ ad $\downarrow m-1$, si possono dedurre le seconde permutazioni delle combinazioni rimanenti. Diremo che esse sono il risultato della O_{m-1} eseguita sulla suddetta permutazione, ed essendo $|A_1|A_2|\ldots|A_{m-1}|A_m|$ una permutazione di m gruppi, diremo risultato della O_{m-1} eseguita su di essa, il complesso delle permutazioni formate scrivendo il gruppo