

APPLICAZIONE DI UN CONCETTO NUOVO

all'analisi indeterminata aritmetica e algebrica di 2° grado
con una nota sull'equazione di Pell

Il concetto al quale si allude nel titolo del presente lavoro è il medesimo che informa la mia nota: di un gruppo continuo di trasformazioni decomponibili finitamente (*) e l'altra: la radice quadrata di un intero e un certo gruppo di trasformazioni; (**) esso del resto verrà ripreso e ampiamente dichiarato in questo scritto, il cui fine è di mettere in luce quanto asserisco nella seconda delle citate mie note: che cioè quel concetto ha notabili applicazioni nella teorica delle forme quadratiche.

Il problema principale dell'analisi indeterminata di 2° grado (rappresentazione di un numero mediante una forma quadratica di due variabili intere) fu da lungo tempo risoluto, e con differenti metodi. (***) Peraltro tali metodi cessano di essere applicabili quando alla condizione di *numero intero* si sostituisce quella di *polinomio intero* rispetto a una lettera. Tanto è vero che, mentre l'equazione Pelliana

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

è sempre risolubile quando D è un numero intero e positivo, altrettanto non può dirsi quando D è un polinomio. E ammessa anche per

(*) *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, febb. 1903.

(**) *Periodico di matematica*, vol. XVIII, fasc. V, 1903.

(***) Una breve ed elementare risoluzione del problema si legge nel vol. XI di questo periodico, dove stabilisco i limiti da assegnare alle variabili contenute nelle formole che convertono una forma quadratica in sè stessa, se si vuole che le dette formole diano tutte le soluzioni del problema. La soluzione generale si fa così dipendere da un numero finito di soluzioni particolari.

dato la risolubilità dell'equazione di Pell, a chi volesse trattare il problema algebrico, rimarrebbe pur sempre da supplire al difetto di alcuni concetti che, ovvj nel campo dei numeri, perdono o mutano significato, se riferiti a polinomj. Gli è perciò che un modo di trattazione comune ai due casi, aritmetico e algebrico, non fu ch'io sappia escogitato finora; d'onde avviene che, mentre lo studio del caso aritmetico ben poco lascia più a desiderare, del caso algebrico quasi nulla si conosce. Ma se alle relazioni intuitive di grandezza fra numeri interi altre se ne sostituiscano operative o algoritmiche, e come tali significative nel più vasto campo de' polinomj; se per esempio alla comune idea di maggioranza o minoranza sottentri il concetto di maggiore o minor numero di operazioni occorrenti per ottenere questo o quell'effetto, ben potrà seguirne il desiderabile parallelismo tra i due casi, e per il modo di trattazione e per le conseguenze.

A questo disegno risponde appunto il concetto d'indice o numero massimo di fattori ne' quali è decomponibile un binomio irrazionale, dato sotto certe condizioni.

Considerando l'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N,$$

alla risoluzione della quale si riduce sostanzialmente il problema su menzionato, ne ho distinto le soluzioni a seconda dei loro indici, che sono quelli dei relativi binomj irrazionali. Ho inoltre premesso che le soluzioni d'indice dato, o non superiore a un limite dato, si possono riguardare come note, in quanto la loro ricerca dipende da operazioni certe e in numero finito. Ammessa quindi la possibilità dell'equazione di Pell, ho potuto dimostrare che *tutte le soluzioni dell'equazione dipendono da quelle il cui indice non supera la metà dell'indice di una soluzione qualunque dell'equazione Pelliana*, e stabilire al tempo stesso la formola di tale dipendenza. Il problema è così risoluto; perchè le soluzioni particolari d'indice non superiore alla detta metà si possono sempre trovare, come fu premesso.

La distinzione tra soluzioni *ellittiche* e *iperboliche*, le prime d'indice nullo e le seconde d'indice differente da zero, mi diede altresì occasione a segnalare il teorema: *tutte soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$ si possono esprimere mediante le soluzioni ellittiche di un sistema di equazioni della stessa sua forma: il numero di tali equazioni è inoltre fisso e indipendente da N.*

Sorvolando sul resto, come si conviene in un cenno sommario circa il contenuto del lavoro, aggiungerò che esso è diviso in due capitoli, il primo de' quali è dedicato al caso aritmetico e il secondo al caso algebrico. Al lettore non isfuggerà la quasi perfetta identità tra i modi di trattazione dell'un caso e dell'altro.

CAPITOLO PRIMO

(Caso aritmetico)

1. Siano: D un numero intero e positivo; ω la parte intera della sua radice quadrata; r il resto dell'estrazione di tale radice.

Un binomio della forma $E + F\sqrt{D}$, dove E ed F indicano due numeri razionali e positivi, si dirà *iperbolico*, se la parte intera del quoziente $E:F$ non sarà minore di ω nè maggiore di $\omega + 1$. Quando ciò non accade, il binomio si dirà *ellittico*. La ragione di queste denominazioni sta in ciò, che quando di un binomio ellittico si conosce il *determinante*

$$E^2 - DF^2 = N,$$

si possono assegnare senz'altro due limitazioni pei valori della E e della F ; mentre nessuna limitazione per la E e per la F può seguire dalla semplice conoscenza del determinante di un binomio iperbolico. Infatti, se N è positivo, si ha sempre: $E > \omega F$; talchè il carattere ellittico di un binomio a determinante positivo sarà definito dall'unica disuguaglianza: $E > (\omega + 1)F$, da cui, e dall'equazione $E^2 - DF^2 = N$:

$$F < \sqrt{\frac{N}{2\omega + 1 - r}}, \quad E < (\omega + 1) \sqrt{\frac{N}{2\omega + 1 - r}}.$$

Se invece N è negativo, $E < (\omega + 1)F$; e il carattere ellittico si tradurrà nell'unica disuguaglianza: $E < \omega F$, dalla quale:

$$F < \sqrt{\frac{-N}{r}}; \quad E < \omega \sqrt{\frac{-N}{r}}.$$

Deduzioni di egual natura non sarebbero possibili per binomj iperbolici di noto determinante.

Un binomio iperbolico od ellittico non muta specie se si moltiplica per un fattore razionale qualsiasi, perchè tale moltiplicazione non altera il rapporto $E:F$.

Due binomj con eguale *rapporto caratteristico* $E:F$ si stimeranno equivalenti. Posto $E:F = \mu$, a tutti i binomj il cui rapporto caratteristico è μ corrisponde un'unica sostituzione

$$\left(z, \frac{\mu z + D}{z + \mu} \right)$$

sulla variabile z . Il rapporto caratteristico μ è il *parametro*, al variar del quale si passa da una sostituzione a un'altra, e nel medesimo tempo da uno ad altro sistema di binomj equivalenti.

Un binomio $E + F\sqrt{D}$ ne ammette infiniti equivalenti $e + f\sqrt{D}$, ne' quali e ed f sono numeri interi.

I binomj iperbolici formano un gruppo, vale a dire: il prodotto di due binomj iperbolici è un binomio iperbolico. Lo stesso è a dirsi delle corrispondenti sostituzioni, il gruppo delle quali è inoltre isomorfo al gruppo dei binomj. Per la dimostrazione si vedano le già citate mie note, dove è altresì dimostrato il teorema: *la decomposizione di un binomio iperbolico in fattori (binomj iperbolici) ha sempre un termine; e di più si stabilisce la regola per conoscere il massimo numero di fattori iperbolici in cui un dato binomio è decomponibile. Le possibili applicazioni dell'uno e dell'altra si vuole qui appresso brevemente indicare.*

2. Il ricordato teorema della decomponibilità finita rende intanto ammissibile la **definizione**: **Indice** di un binomio iperbolico è il massimo numero di fattori iperbolici ne' quali esso è decomponibile. Ai binomj ellittici si attribuirà (per convenzione) l'indice zero.

La regola per determinare l'indice di un binomio, stabilita nella mia nota ai Lincei, è la seguente:

Se $r \geq \omega$, l'indice del binomio $E + F\sqrt{D}$ è il minimo valore che bisogna dare all'esponente k affinché il prodotto

$$(E + F\sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^k$$

non abbia carattere iperbolico. Se invece $r \leq \omega$, esso è il minimo valore che bisogna dare a k affinché non sia iperbolico il prodotto

$$(E + F\sqrt{D})(\omega + 1 - \sqrt{D})^k.$$

Infatti queste regole, ivi dimostrate pei binomj iperbolici, non cessano evidentemente di sussistere pei binomj ellittici o d'indice zero.

Se dunque $E + F\sqrt{D}$ è un binomio iperbolico d'indice k , l'una o l'altra delle espressioni

$$\begin{aligned} (E + F\sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^{k-1} \\ (E + F\sqrt{D})(\omega + 1 - \sqrt{D})^{k-1}, \end{aligned}$$

ridotta a forma di binomio irrazionale, apparterrà al gruppo dei binomj iperbolici; ma uscirà dal gruppo stesso, tostochè l'esponente $k-1$ si muterà in k . Dico ora che all'uscita diverrà ellittica; che cioè, se

$$(E + F\sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^k = E_0 + F_0\sqrt{D}$$

(mi limito al caso $r > \omega$; analoga dimostrazione varrebbe per gli altri), quest'ultimo sarà un binomio ellittico.

Basterà provare che tanto E_0 quanto F_0 sono numeri positivi. E poichè nell'ultima eguaglianza il primo membro è positivo, basterà dimostrare che è positivo il rapporto $E_0:F_0$. Or bene: se si pone

$$(E + F\sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^{k-1} = E' + F'\sqrt{D}$$

(e con $E' + F' \sqrt{D}$ sarà da intendere un binomio iperbolico) si avrà:

$$(E' + F' \sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega) = E_0 + F_0 \sqrt{D};$$

d'onde:

$$\frac{E_0}{F_0} = \frac{DF' - \omega E'}{E' - \omega F'}.$$

Il denominatore di quest'ultima frazione è positivo, perchè il binomio $E' + F' \sqrt{D}$ è iperbolico; positivo è pure il suo numeratore, per essere

$$\frac{E'}{F'} \leq \omega + 1 < \frac{D}{\omega};$$

dunque il binomio $E_0 + F_0 \sqrt{D}$ è ellittico, come dovevasi dimostrare.

Portando l'esponente di $\sqrt{D} - \omega$ o quello di $\omega + 1 - \sqrt{D}$ oltre il valore k , dopochè l'espressione

$$(E + F \sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^k$$

o l'altra

$$(E + F \sqrt{D})(\omega + 1 - \sqrt{D})^k$$

avranno prodotto il binomio ellittico $E_0 + F_0 \sqrt{D}$, non si potrà mai più rientrare nel gruppo iperbolico; infatti, supponendo per esempio che il prodotto

$$(E + F \sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^{k+k'}$$

producesse il binomio iperbolico $E'' + F'' \sqrt{D}$, dovrebbe aversi:

$$(E_0 + F_0 \sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^{k'} = E'' + F'' \sqrt{D};$$

d'onde:

$$E_0 + F_0 \sqrt{D} = \left(\frac{\sqrt{D} + \omega}{r} \right)^{k'} (E'' + F'' \sqrt{D}).$$

Ciò è impossibile perchè, essendo iperbolico il fattore

$$\frac{\sqrt{D} + \omega}{r},$$

il secondo membro è composto di fattori iperbolici, epperò iperbolico.

COROLLARIO. - Qualunque sia il binomio $E + F \sqrt{D}$, si ha sempre, indicando con $E_0 + F_0 \sqrt{D}$ un binomio ellittico:

$$\begin{aligned} (E + F \sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^{\text{ind.}(E+F\sqrt{D})} &= E_0 + F_0 \sqrt{D}, & (\text{se } r \geq \omega); \\ (E + F \sqrt{D})(\omega + 1 - \sqrt{D})^{\text{ind.}(E+F\sqrt{D})} &= E_0 + F_0 \sqrt{D}, & (\text{se } r \leq \omega). \end{aligned}$$

3. Sia da risolvere l'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N$$

in numeri interi e positivi. Una soluzione (x, y) si dirà ellittica o iperbolica secondochè il corrispondente binomio $x + y \sqrt{D}$ sarà ellittico

od iperbolico. Indice di una soluzione si dirà quello del corrispondente binomio: $x + y\sqrt{D}$.

Le soluzioni ellittiche dell'equazione possono considerarsi come note. Perchè le limitazioni della x e della y di una soluzione ellittica permettono di determinare queste incognite mediante un numero finito di tentativi.

PROBLEMA. - Trovare tutte le soluzioni d'indice dato.

Sia δ quest'indice, e si consideri la formola

$$(x + y\sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^\delta = x_0 + y_0\sqrt{D}, \quad (\text{se } r \geq \omega);$$

oppure la formola

$$(x + y\sqrt{D})(\omega + 1 - \sqrt{D})^\delta = x_0 + y_0\sqrt{D}, \quad (\text{se } r \leq \omega).$$

In entrambe $x_0 + y_0\sqrt{D}$ indica un binomio ellittico; epperò (x_0, y_0) è da considerare come nota, quale soluzione ellittica dell'una o dell'altra delle equazioni

$$\begin{aligned} x^2 - Dy^2 &= N(-r)^\delta \\ x^2 - Dy^2 &= N(2\omega + 1 - r)^\delta. \end{aligned}$$

Il problema è dunque risoluto, e i valori di x e di y si otterranno mediante l'una o l'altra delle uguaglianze:

$$\begin{aligned} x + y\sqrt{D} &= (x_0 + y_0\sqrt{D}) \left(\frac{\sqrt{D} + \omega}{r} \right)^\delta \\ x + y\sqrt{D} &= (x_0 + y_0\sqrt{D}) \left(\frac{\omega + 1 + \sqrt{D}}{2\omega + 1 - r} \right)^\delta, \end{aligned}$$

nei secondi membri delle quali tutto è noto.

OSSERVAZIONE. - Non a tutte le (x_0, y_0) , soluzioni dell'equazione

$$x^2 - Dx^2 = N(-r)^\delta$$

o dell'altra

$$x^2 - Dy^2 = N(2\omega + 1 - r)^\delta,$$

corrisponde una soluzione del problema; potendo darsi che la x e la y ricavate da taluna delle (x_0, y_0) non vengano intere. E però certo che il metodo indicato dà tutte le soluzioni d'indice δ , quando ve ne sono.

4. Risolto così il problema di trovare tutte le soluzioni d'indice dato (e conseguentemente anche quelle d'indice non superiore a un limite dato), passo a stabilire per l'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N$$

una nuova e generale formola di risoluzione, che, avendo fondamento nel concetto d'indice, si potrà in appresso estendere al caso in cui D ed N sono polinomi.

Sia (x, y) una soluzione dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N$$

e sia (α, β) una soluzione qualsiasi dell'equazione Pelliana

$$x^2 - Dy^2 = 1.$$

Se (x, y) è ellittica o d'indice zero, essa soddisferà evidentemente la condizione

$$\text{ind. } (x + y\sqrt{D}) < \frac{\text{ind. } (\alpha + \beta\sqrt{D})}{2}. (*)$$

Vediamo che cosa avverrà se (x, y) è iperbolica. In questo caso si consideri il prodotto

$$(x + y\sqrt{D})(\alpha - \beta\sqrt{D})^z = u + v\sqrt{D}.$$

Mostrerò anzitutto che, dando a z i progressivi valori: 1, 2, ..., si capiterà in un primo valore m al quale corrisponderà un rapporto $u : v$ negativo e con la parte intera eguale a $(-\omega)$. Infatti, sommando e sottraendo la precedente eguaglianza e la sua coniugata

$$(x - y\sqrt{D})(\alpha + \beta\sqrt{D})^z = u - v\sqrt{D},$$

ricavando poscia il valore di $u : v$, viene:

$$u : v = \sqrt{D} \frac{\frac{x + y\sqrt{D}}{x - y\sqrt{D}} \left(\frac{\alpha - \beta\sqrt{D}}{\alpha + \beta\sqrt{D}} \right)^z + 1}{\frac{x + y\sqrt{D}}{x - y\sqrt{D}} \left(\frac{\alpha - \beta\sqrt{D}}{\alpha + \beta\sqrt{D}} \right)^z - 1}.$$

Col tendere di z all'infinito, questo secondo membro ha per limite

$$(-\sqrt{D}),$$

perchè il quoziente

$$\alpha - \beta\sqrt{D} : \alpha + \beta\sqrt{D}$$

è minore di 1; si avrà dunque:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{u}{v} = -\sqrt{D}.$$

Vi sarà perciò un primo valore di z pel quale la parte intera di $u : v$ sarà eguale alla parte intera di $(-\sqrt{D})$, cioè a $(-\omega)$. Se m è quel valore di z , si ponga:

$$(A) \quad (x + y\sqrt{D})(\alpha - \beta\sqrt{D})^{m-1} = p + q\sqrt{D}.$$

(*) Si noti che, se (α, β) non è la soluzione evidente (1, 0) dell'equazione Pelliana, il suo indice sarà differente da zero. Chè altrimenti: $\alpha > (\omega + 1)\beta$, o conseguentemente: $(2\omega + 1 - r)\beta^2 < 1$, il che è impossibile.

La parte intera di $p:q$ non sarà $(-\omega)$; sarà bensì $(-\omega)$ la parte intera del rapporto $u:v$ nel binomio

$$u + v\sqrt{D} = (p + q\sqrt{D})(\alpha - \beta\sqrt{D}).$$

Premesso ciò, se il binomio *positivo* $p + q\sqrt{D}$ non è iperbolico, indicando, con \bar{p} , \bar{q} , i moduli o valori assoluti di p e di q , il binomio

$$\bar{p} + \bar{q}\sqrt{D}$$

sarà ellittico. Infatti il suo rapporto caratteristico, non potendo differire da $p:q$ se non pel segno, non avrà certamente la parte intera eguale ad ω ; chè altrimenti la parte intera di $p:q$ sarebbe $(-\omega)$ oppure ω . Ma delle due conseguenze la prima è inammissibile pel già detto; e la seconda perchè si è supposto che $p + q\sqrt{D}$ non sia iperbolico: si avrà dunque, se $p + q\sqrt{D}$ non è iperbolico:

$$\pm (x + y\sqrt{D}) = (\alpha + \beta\sqrt{D})^{m-1} (\bar{p} \pm \bar{q}\sqrt{D}),$$

con $\bar{p} + \bar{q}\sqrt{D}$ ellittico, e conseguentemente:

$$\text{ind.}(\bar{p} + \bar{q}\sqrt{D}) < \frac{\text{ind.}(\alpha + \beta\sqrt{D})}{2}.$$

Che se $p + q\sqrt{D}$ è iperbolico, si ponga:

$$(p + q\sqrt{D})(\alpha - \beta\sqrt{D}) = u + v\sqrt{D} = p_1 - q_1\sqrt{D}.$$

La parte intera di $p_1:q_1$ sarà ω , perchè quella di $u:v$ era $(-\omega)$; i binomj

$$p + q\sqrt{D}, \quad \pm (p_1 + q_1\sqrt{D})$$

saranno perciò iperbolici, e di più:

$$\alpha + \beta\sqrt{D} = \rho (p + q\sqrt{D})(p_1 + q_1\sqrt{D}),$$

dove ρ indica un certo fattore razionale. L'indice del binomio $\alpha + \beta\sqrt{D}$ (massimo numero possibile di fattori iperbolici del binomio stesso) non può essere minore della somma degl'indici dei due fattori irrazionali che compariscono nel 2° membro della precedente eguaglianza; d'onde le relazioni:

$$\begin{aligned} \text{ind.}(\alpha + \beta\sqrt{D}) &\geq 2 \text{ind.}(p + q\sqrt{D}); \\ \text{ind.}(\alpha + \beta\sqrt{D}) &\geq 2 \text{ind.}(\pm (p_1 + q_1\sqrt{D})); \end{aligned}$$

valevole la prima, se

$$\text{ind.}(p + q\sqrt{D}) \leq \text{ind.}(\pm (p_1 + q_1\sqrt{D}));$$

e la seconda, se

$$\text{ind.}(\pm (p_1 + q_1\sqrt{D})) \leq \text{ind.}(p + q\sqrt{D}).$$

Nella prima ipotesi, la (A) produce:

$$(x + y\sqrt{D}) = (\alpha + \beta\sqrt{D})^{m-1} (p + q\sqrt{D}).$$

Nella seconda ipotesi, ponendo in luogo di $p + q\sqrt{D}$ l'equivalente prodotto

$$(x + \beta\sqrt{D})(p_1 - q_1\sqrt{D}),$$

viene:

$$x + y\sqrt{D} = (\alpha + \beta\sqrt{D})^m (p_1 - q_1\sqrt{D})$$

o anche:

$$\pm (x + y\sqrt{D}) = (\alpha + \beta\sqrt{D})^m (\bar{p}_1 - \bar{q}_1\sqrt{D}).$$

Riepilogando le deduzioni relative ai differenti casi, si può dunque enunciare il teorema: *Se (α, β) è una soluzione qualunque dell'equazione di Pell, tutte le soluzioni dell'equazione*

$$x^2 - Dy^2 = N$$

sono date dalla formola

$$(B) \quad x + y\sqrt{D} = (\alpha + \beta\sqrt{D})^k (x' \pm y'\sqrt{D}), \quad (*)$$

il secondo membro della quale va esteso solamente a quelle soluzioni particolari (x', y') il cui **indice** non supera la metà dell'indice della soluzione dell'equazione Pelliana.

E poichè le soluzioni d'indice non superiore a un limite dato si sanno trovare, l'equazione $x^2 - Dy^2 = N$ è risolta.

5. Si noti il teorema: *Tutte le soluzioni dell'equazione*

$$x^2 - Dy^2 = N$$

sono esprimibili mediante una soluzione qualunque dell'equazione Pelliana e mediante le soluzioni **ellittiche** di un sistema finito di equazioni note, il numero delle quali è fisso e indipendente da N .

Dicasi infatti η la parte intera del quoziente

$$\frac{\text{ind. } (x + \beta\sqrt{D})}{2}.$$

Si rammenti inoltre che una soluzione (x', y') , se d'indice i , è data dalla formola

$$x' + y'\sqrt{D} = \left(\frac{\sqrt{D} + \omega}{r}\right)^i (x_0 + y_0\sqrt{D})$$

o dall'altra

$$x' + y'\sqrt{D} = \left(\frac{\omega + 1 - \sqrt{D}}{2\omega + 1 - r}\right)^i (x_0 + y_0\sqrt{D}),$$

dove per (x_0, y_0) è da intendere una soluzione ellittica dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N(-r)^i$$

o dell'altra

$$x^2 - Dy^2 = N(2\omega + 1 - r)^i.$$

(*) Si è soppresso il doppio segno al 1° membro, perchè inutile.

Sostituendo nella (B) e rammentando che η è il limite superiore per l'indice delle (x', y') che ivi compariscono, si ottiene:

$$x + y\sqrt{D} = (z + \beta\sqrt{D})^k \left(\frac{\pm\sqrt{D} + \omega}{r} \right)^i (x_0 \pm y_0\sqrt{D}),$$

per il caso: $r \geq \omega$, e

$$x + y\sqrt{D} = (z + \beta\sqrt{D})^k \left(\frac{\omega + 1 \mp \sqrt{D}}{2\omega + 1 \mp r} \right)^i (x_0 \pm y_0\sqrt{D}),$$

per il caso: $r \leq \omega$. E l'una o l'altra di queste formole, da estendersi a tutti i valori: $0, 1, 2, \dots, \eta$ della i , e per ciascun valore di i a tutti i possibili valori: $0, 1, 2, \dots$ di k , darà tutte le soluzioni dell'equazione proposta, quali soluzioni si vedono così espresse per mezzo della soluzione Pelliana (α, β) e delle soluzioni *ellittiche* dell'equazioni del sistema

$$\begin{aligned} x^2 - Dy^2 &= N \\ x^2 - Dy^2 &= -Nr \\ x^2 - Dy^2 &= Nr^2 \\ \dots & \\ x^2 - Dy^2 &= (-1)^\eta Nr^\eta, \end{aligned}$$

oppure dell'altro:

$$\begin{aligned} x^2 - Dy^2 &= N \\ x^2 - Dy^2 &= N(2\omega + 1 - r) \\ x^2 - Dy^2 &= N(2\omega + 1 - r)^2 \\ \dots & \\ x^2 - Dy^2 &= N(2\omega + 1 - r)^\eta. \end{aligned}$$

In ambedue il numero delle equazioni è $\eta + 1$, epperò indipendente da N .

A ciascuno dei precedenti due sistemi darò il nome di *sistema risolvante*, in quanto dalle sue soluzioni ellittiche, epperò note, dipende la risoluzione dell'equazione proposta.

6. ESEMPIO. - Per risolvere l'equazione

$$x^2 - 46y^2 = N$$

($\omega = 6, r = 10; r > \omega$), si cercherà anzitutto l'indice di una soluzione dell'equazione $x^2 - 46y^2 = 1$, per esempio l'indice della soluzione minima (24335, 3588), e ciò si farà mediante l'algoritmo:

$$\begin{aligned} (24335 + 3588\sqrt{46})(\sqrt{46} - 6) &= 19038 + 2807\sqrt{46} \\ (19038 + 2807\sqrt{46})(\sqrt{46} - 6) &= 14894 + 2196\sqrt{46} (*) \\ (7447 + 1048\sqrt{46})(\sqrt{46} - 6) &= 5826 + 859\sqrt{46} \\ (5826 + 859\sqrt{46})(\sqrt{46} - 6) &= 4558 + 263\sqrt{46} \\ (2279 + 336\sqrt{46})(\sqrt{46} - 6) &= 1782 + 263\sqrt{46} \\ (1782 + 263\sqrt{46})(\sqrt{46} - 6) &= 1406 + 204\sqrt{46} \\ (703 + 102\sqrt{46})(\sqrt{46} - 6) &= 474 + 91\sqrt{46}. \end{aligned}$$

(*) Si è semplificato per 2 il rapporto 14804 : 2196, come è lecito evidentemente.

Quest'ultimo binomio è ellittico: perciò 7 è l'indice cercato, e inoltre: $\eta=3$. Il sistema risolvante è dunque composto delle 4 equazioni:

$$\begin{aligned} x^2 - 46 y^2 &= N \\ x^2 - 46 y^2 &= -10 N \\ x^2 - 46 y^2 &= 100 N \\ x^2 - 46 y^2 &= -1000 N. \end{aligned}$$

Le soluzioni ellittiche di ciascuna sono poi limitate dalla condizione $x > 7y$ o dall'altra: $x < 6y$, secondo che il 2° membro è positivo o negativo. Talchè, se N è positivo, i limiti per la y delle soluzioni ellittiche delle 4 consecutive equazioni saranno ordinatamente:

$$\sqrt{\frac{N}{3}} \quad \sqrt{N} \quad 10 \sqrt{\frac{N}{3}} \quad 10 \sqrt{N},$$

e saranno invece

$$\sqrt{\frac{-N}{10}} \quad \sqrt{\frac{-10 N}{3}} \quad \sqrt{-10 N} \quad 10 \sqrt{\frac{-10 N}{3}},$$

se N è negativo.

7. Il maggiore o minor numero di calcoli occorrenti per trovare le soluzioni ellittiche delle $\eta + 1$ equazioni del sistema risolvante non avrebbe grande importanza per lo scopo del presente capitolo, che è di preparare la via alla trattazione del caso algebrico: solo importa che il numero di que' calcoli sia finito, com'è difatti. Non sarà tuttavia qui inutile una breve digressione che valga a mettere in chiaro il valore pratico dell'esposta risoluzione.

Quando l'indice della soluzione Pelliana è grande, tale è altresì il numero delle equazioni del sistema risolvante. E allora i limiti delle y_0 , crescendo notabilmente di valore ad ogni passaggio da un'equazione alla susseguente del sistema stesso, potrebbero divenire tanto grandi, da rendere non consigliabili i numerosi tentativi che occorrerebbero per la ricerca delle y_0 . Voglio ora mostrare come si possono assegnare alla y_0 delle nuove limitazioni superiori a contrasto con le prime, che cioè impiccoliscono all'ingrandire di quelle, e come ciò semplifichi la ricerca di talune soluzioni ellittiche del sistema risolvante, che sono le sole veramente indispensabili per la risoluzione dell'equazione proposta.

Dissi già che, posta la condizione

$$\text{ind. } (x' + y' \sqrt{D}) \leq \eta,$$

tutte le soluzioni (x, y) dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$ sono contenute nella formola

$$x + y \sqrt{D} = (\alpha + \beta \sqrt{D})^k (x' \pm y' \sqrt{D}).$$

Ma dal mio opuscolo "dell'analisi indeterminata di 2° grado", (*) si apprende che la formola stessa darebbe tutte le soluzioni, e cia-

(*) *Periodico di matematica*, anno VI, fasc. VI; anno VII, fasc. I e seg.

scena una volta sola, anche quando (x', y') fosse invece soggetta alla condizione:

$$x' + y' \sqrt{D} \leq \sqrt{N}(\alpha + \beta \sqrt{D}).$$

Gli è che la prima condizione è conseguenza di questa (v. la nota a pag. 14); talchè nessuna soluzione si potrà perdere qualora per le (x', y') si ritengano ad un tempo ambedue le condizioni:

$$\begin{aligned} \text{ind. } (x' + y' \sqrt{D}) &\leq r, \\ x' + y' \sqrt{D} &\leq \sqrt{N}(\alpha + \beta \sqrt{D}). \end{aligned}$$

Stabilendo di ciò fare, e supponendo dapprima $r > \omega$, si ripigli la formola

$$(x' + y' \sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^i = x_0 + y_0 \sqrt{D},$$

nella quale $i \leq \eta$ è l'indice del binomio $x' + y' \sqrt{D}$ e (x_0, y_0) soluzione ellittica dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N(-r)^i.$$

Se il secondo membro di questa è positivo, il carattere ellittico del binomio $x_0 + y_0 \sqrt{D}$ sarà espresso dalla disuguaglianza: $x_0 > (\omega + 1)y_0$; da cui:

$$x_0 + y_0 \sqrt{D} > y_0(\omega + 1 + \sqrt{D}).$$

Conseguentemente:

$$(x' + y' \sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^i > y_0(\omega + 1 + \sqrt{D}),$$

che, combinata con

$$\sqrt{N}(\alpha + \beta \sqrt{D}) \geq x' + y' \sqrt{D},$$

produce:

$$\begin{aligned} y_0 &< \frac{\sqrt{N}(\alpha + \beta \sqrt{D})}{\omega + 1 + \sqrt{D}} (\sqrt{D} - \omega)^i < \\ &< \sqrt{N} \frac{\sqrt{2\alpha} (\sqrt{D} - \omega)^{i-1}}{\omega + 1 + \sqrt{D}}. \end{aligned}$$

D'altra parte:

$$y_0 < \sqrt{N} \sqrt{\frac{r^i}{2\omega + 1 - r}},$$

e ciò a cagione del carattere ellittico di y_0 ; dunque y_0 dev'essere minore di ambedue le limitazioni:

$$\sqrt{N} \sqrt{\frac{r^i}{2\omega + 1 - r}} \quad ; \quad \sqrt{N} \frac{\sqrt{2\alpha} (\sqrt{D} - \omega)^{i-1}}{\omega + 1 + \sqrt{D}}.$$

Alla stessa conclusione si giunge quando il secondo membro dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N(-r)^i$$

è negativo; ed ecco in qual modo: Poichè

$$(x' + y' \sqrt{D}) (\sqrt{D} - \omega)^i = x_0 + y_0 \sqrt{D},$$

e inoltre i è l'indice del binomio $x' + y' \sqrt{D}$, è evidente che $x_0 + y_0 \sqrt{D}$ dovrà considerarsi come prodotto di un binomio iperbolico $X + Y \sqrt{D}$ a determinante positivo pel fattore $\sqrt{D} - \omega$; che cioè:

$$x_0 + y_0 \sqrt{D} = (X + Y \sqrt{D}) (\sqrt{D} - \omega),$$

e insieme:

$$\frac{X}{Y} = \frac{Dy_0 + \omega x_0}{x_0 + \omega y_0} \leq \omega + 1;$$

dalla quale:

$$x_0 \geq (r - \omega) y_0$$

e conseguentemente:

$$x_0 + y_0 \sqrt{D} \geq (r - \omega + \sqrt{D}) y_0.$$

Perciò, seguitando come sopra:

$$y_0 < \sqrt{N} \frac{\sqrt{2\alpha} (\sqrt{D} - \omega)^i}{r - \omega + \sqrt{D}} = \sqrt{N} \frac{\sqrt{2\alpha} (\sqrt{D} - \omega)^{i-1}}{\omega + 1 + \sqrt{D}}.$$

Il carattere ellittico di y_0 , espresso dalla disuguaglianza: $x_0 < \omega y_0$, darà inoltre:

$$y_0 < \sqrt{N} \sqrt{r^{i-1}} < \sqrt{N} \sqrt{\frac{r^i}{2\omega + 1 - r}}.$$

Osservando le due limitazioni superiori ottenute per y_0 , che sono:

$$\sqrt{N} \sqrt{\frac{r^i}{2\omega + 1 - r}} \quad \text{e} \quad \sqrt{N} \frac{\sqrt{2\alpha} (\sqrt{D} - \omega)^{i-1}}{\omega + 1 + \sqrt{D}},$$

si vede che l'accrescimento di i (corrispondente al passaggio da una equazione del sistema risolvete ad altra più inoltrata) produce in esse effetti contrarj, in quanto fa crescere la prima limitazione e nel medesimo tempo diminuire la seconda. Ne avviene che per valori di i non molto grandi la limitazione ascendente (che ne' calcoli è la più incomoda) prevarrà sulla discendente, e divenuta per tal modo inutile, si potrà abbandonare. Rimarrà l'altra, che però diviene sempre meno elevata ed incomoda a mano a mano che i calcoli progrediscono.

Riflessioni consimili si adattano al caso: $r \leq \omega$. Partendo dalla formola

$$(x' + y' \sqrt{D}) (\omega + 1 - \sqrt{D})^i = x_0 + y_0 \sqrt{D},$$

e ragionando come pel caso: $r < \omega$, si otterrebbero per y_0 le limitazioni:

$$\sqrt{N} \sqrt{\frac{(2\omega + 1 - r)^i}{r}}; \quad \sqrt{N} \frac{\sqrt{2\alpha} (\omega + 1 - \sqrt{D})^{i-1}}{\sqrt{D} + \omega},$$

come il lettore può facilmente ritrovare.

NOTA

Per dimostrare che la condizione

$$\text{ind. } (x' + y' \sqrt{D}) \leq \eta$$

è conseguenza dell'altra

$$x' + y' \sqrt{D} \leq \sqrt{N} (\alpha + \beta \sqrt{D}),$$

si può far ricorso al seguente principio di facile verificaione: di due binomj $x + y \sqrt{D}$ con egual determinante *positivo*, maggiore è quello che ha minor rapporto caratteristico; di due binomj con egual determinante *negativo*, maggiore è quello che ha maggior rapporto caratteristico; e reciprocamente.

Sia pertanto $r \geq \omega$, e supponendo

$$x' + y' \sqrt{D} \leq \sqrt{N} (\alpha + \beta \sqrt{D}),$$

si dica i l'indice del binomio $x' + y' \sqrt{D}$. Considerando le due espressioni

$$(x' + y' \sqrt{D})^2 (\sqrt{D} - \omega)^{2i-1}; \quad \bar{N} r^{i-1} (\omega + \sqrt{D}),$$

si noti anzitutto che esse sono entrambe iperboliche. Per la seconda ciò è evidente; in quanto alla prima, basta osservare che, essendo i l'indice del binomio $x' + y' \sqrt{D}$, quello del suo quadrato sarà almeno $2i$.

Dette espressioni hanno inoltre lo stesso determinante negativo

$$-N^2 r^{2i-1};$$

dunque, poichè il rapporto caratteristico della 1^a è ω o maggiore di ω , mentre quello della 2^a è appunto ω , la 1^a espressione avrà maggior rapporto caratteristico e sarà quindi maggiore della 2^a, ossia:

$$(x' + y' \sqrt{D})^2 (\sqrt{D} - \omega)^{2i-1} \geq \bar{N} r^{i-1} (\omega + \sqrt{D}).$$

Ma per l'ipotesi:

$$\bar{N} (\alpha + \beta \sqrt{D}) \geq (x' + y' \sqrt{D})^2;$$

dunque:

$$(\alpha + \beta \sqrt{D}) (\sqrt{D} - \omega)^{2i-1} \geq r^{i-1} (\omega + \sqrt{D}).$$

Qui i membri hanno lo stesso determinante negativo: $-r^{2i-1}$; perciò il maggiore dei due avrà maggior rapporto caratteristico. Ma il rapporto caratteristico del 2^o membro è ω ; dunque il rapporto caratteristico del 1^o sarà maggiore di ω . Ciò prova che l'espressione

$$(\alpha + \beta \sqrt{D}) (\sqrt{D} - \omega)^{2i-1}$$

è iperbolica: si avrà dunque, rammentando la regola per la ricerca dell'indice, citata al n. 2:

$$\text{ind. } (\alpha + \beta \sqrt{D}) > 2i-1,$$

ovvero:

$$\text{ind. } (\alpha + \beta \sqrt{D}) \geq 2i;$$

d'onde:
$$i = \text{ind.}(x' + y' \sqrt{D}) \leq \frac{\text{ind}(x + y \sqrt{D})}{2}.$$

Analogo ragionamento per $r \leq \omega$. Basterà prender le mosse dalle due espressioni:

$$(x' + y' \sqrt{D})^2 (\omega + 1 - \sqrt{D})^{2i-1}; \bar{N} (2\omega + 1 - r)^{i-1} (\omega + 1 + \sqrt{D}).$$

(Continua)

G. FRATTINI.

SUL QUADRANGOLO SFERICO INSCRITTO

(Esercizi di Trigonometria sferica)

1. Sia ABCD un quadrangolo sferico convesso inscritto in un circolo minore di una sfera (*), e si indichino, rispettivamente,

con a, b, c, d le misure circolari degli archi di circolo massimo AB, BC, CD, DA (**).

con $(ab), (bc), (cd), (da)$ le misure degli angoli formati da questi archi,

con e, f le misure degli archi di circolo massimo BD, AC.

Si consideri inoltre il quadrilatero piano formato dalle corde degli archi precedenti, e, presa per unità il raggio della sfera, si indichino, rispettivamente,

con a_1, b_1, c_1, d_1 le misure delle corde AB, BC, CD, DA,

con $(a_1 b_1), (b_1 c_1), (c_1 d_1), (d_1 a_1)$ le misure degli angoli formati da queste corde,

con e_1, f_1 le misure delle corde BD e AC.

E si convenga anche, per brevità, che, quando il numero d'ordine di una formula è chiuso fra parentesi quadre, si debbano sottintendere anche le altre tre formule che si deducono da quella indicata con sostituzioni circolari fra a, b, c, d , fra $a_1, b_1, c_1, d_1, \dots$

2. Si osservi subito che si ha

$$[1] \quad a_1 = 2 \text{sen} \frac{1}{2} a, \quad (2) \quad e_1 = 2 \text{sen} \frac{1}{2} e, \quad (3) \quad f_1 = 2 \text{sen} \frac{1}{2} f,$$

$$\cos(a_1 b_1) = \text{sen} \frac{1}{2} a \text{sen} \frac{1}{2} b + \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos(ab), \quad [4]$$

$$\text{sen} \frac{1}{2} (ab) = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} (a - b) - \cos(a_1 b_1)}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}}, \quad [5]$$

$$\cos \frac{1}{2} (ab) = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} (a + b) + \cos(a_1 b_1)}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}}. \quad [6]$$

Infatti: le [1], (2), (3) sono evidenti; per dimostrare le [4] si potrebbe ricorrere a semplici considerazioni geometriche, ma basta anche osservare che

$$\cos(a_1 b_1) = \frac{a_1^2 + b_1^2 - f_1^2}{2 a_1 b_1} = \frac{\text{sen}^2 \frac{1}{2} a + \text{sen}^2 \frac{1}{2} b - \text{sen}^2 \frac{1}{2} f}{2 \text{sen} \frac{1}{2} a \text{sen} \frac{1}{2} b},$$

che

$$\cos(ab) = \frac{\cos f - \cos a \cos b}{\text{sen} a \text{sen} b} = \frac{\text{sen}^2 \frac{1}{2} a + \text{sen}^2 \frac{1}{2} b - \text{sen}^2 \frac{1}{2} f - 2 \text{sen}^2 \frac{1}{2} a \text{sen}^2 \frac{1}{2} b}{2 \text{sen} \frac{1}{2} a \text{sen} \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}$$

e sostituire; le [5] e le [6] poi si deducono immediatamente dalle [4].

(*) Si prega il lettore di fare la figura.

(**) Fra gli archi di circolo massimo che hanno per estremi due punti dati, come fra gli angoli formati da due archi di circolo massimo aventi un estremo comune, s'intenderà sempre di considerare quello che è minore di π .

3. Ciò posto, siccome nel quadrangolo piano ABCD si ha

$$\cos(a_1 b_1) = \frac{a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 - d_1^2}{2(a_1 b_1 + c_1 d_1)},$$

e quindi, per le [1],

$$\cos(a_1 b_1) = \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} b - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} d}{2(\operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b + \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \operatorname{sen} \frac{1}{2} d)},$$

da cui

$$\cos(a_1 b_1) = \frac{\cos \frac{1}{2} (c + d) \cos \frac{1}{2} (c - d) - \cos \frac{1}{2} (a + b) \cos \frac{1}{2} (a - b)}{2(\operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b + \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \operatorname{sen} \frac{1}{2} d)},$$

dalle [5] e dalle [6] si avrà facilmente

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} (ab) = \sqrt{\frac{[\cos \frac{1}{2} (a - b) + \cos \frac{1}{2} (c - d)] [\cos \frac{1}{2} (a - b) - \cos \frac{1}{2} (c + d)]}{4(\operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b + \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \operatorname{sen} \frac{1}{2} d) \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}},$$

$$\cos \frac{1}{2} (ab) = \sqrt{\frac{[\cos \frac{1}{2} (a + b) + \cos \frac{1}{2} (c + d)] [\cos \frac{1}{2} (c - d) - \cos \frac{1}{2} (a + b)]}{4(\operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b + \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \operatorname{sen} \frac{1}{2} d) \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}}.$$

E di qui, ponendo

$$(7) \quad a + b + c + d = 2s, \quad \text{da cui} \quad (8) \quad -a + b + c + d = 2(s - a),$$

e osservando che

$$\cos \frac{1}{2} (s - a - b) = \cos \frac{1}{2} (s - c - d), \quad (9)$$

si avrà

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} (ab) = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} (s - a - c) \cos \frac{1}{2} (s - a - d) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (s - a) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (s - b)}{(\operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b + \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \operatorname{sen} \frac{1}{2} d) \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}}, \quad (10)$$

$$\cos \frac{1}{2} (ab) = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2} (s - a - b) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (s - c) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (s - d)}{(\operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b + \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \operatorname{sen} \frac{1}{2} d) \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}}, \quad (11)$$

e quindi anche

$$\tan \frac{1}{2} (ab) = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} (s - a - c) \cos \frac{1}{2} (s - a - d) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (s - a) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (s - b)}{\cos \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2} (s - a - b) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (s - c) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (s - d)}}. \quad (12)$$

4. Dalle [9] e dalle [10], ponendo

$$n = 4 \sqrt{\cos \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2} (s - a - b) \cos \frac{1}{2} (s - a - c) \cos \frac{1}{2} (s - a - d) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (s - a) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (s - b) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (s - c) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (s - d)}, \quad (13)$$

si ricava facilmente

$$\operatorname{sen}(ab) = \frac{n}{2(\operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b + \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \operatorname{sen} \frac{1}{2} d) \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}, \quad (14)$$

da cui

$$\operatorname{sen}(ab) = \frac{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} d + \operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} c} = \operatorname{sen}(bc) \frac{\cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} a + \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \operatorname{sen} \frac{1}{2} d}, \quad (15)$$

ed anche

$$\operatorname{sen}(ab) \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b = \operatorname{sen}(cd) \cos \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} d. \quad (16)$$

5. Se si suppone $d = 0$, ognuna delle formule precedenti deve ridursi ad una formula relativa a un triangolo sferico qualunque, e si può facilmente vedere quali siano queste formule colle seguenti considerazioni.

Quando il punto D coincide col punto A, il quadrangolo sferico ABCD si riduce al triangolo sferico ABC; per cui, indicando con $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ s' le misure dei lati BC, CA, AB, degli angoli rispettivamente opposti e del semiperimetro, basterà, nelle formule precedenti, in luogo di

$$\begin{array}{l} a, \quad b, \quad c, \quad d \quad (ab), \quad (bc), \quad s, \\ \text{porre rispettivamente} \\ c', \quad a', \quad b' \quad 0 \quad \beta', \quad \gamma', \quad s'; \end{array}$$

resta quindi a vedersi soltanto che cosa si debba sostituire a (cd) e a (da) . Per ciò si immagini il circolo massimo tangente in A al circolo minore nel quale è inscritto il quadrangolo, e si indichi con AT_B un arco di questo circolo massimo che sia nella semisfera (determinata dal lato AC) nella quale si trova il vertice B, e con AT_C un arco dello stesso circolo che sia nell'altra semisfera; è chiaro intanto che gli angoli (cd) e (da) tenderanno, rispettivamente, agli angoli CAT_B e BAT_C . Ciò posto, se si indica con P il centro dell'accennato circolo circoscritto, si ha

$$CAT_B = CAP + \frac{\pi}{2}, \quad BAT_C = BAP + \frac{\pi}{2},$$

ma da un noto teorema di *Geom. Elem.* (*) si ha pure

$$2CAP = \alpha' + \gamma' - \beta', \quad 2BAP = \alpha' + \beta' - \gamma',$$

quindi sarà

$$CAT_B = \frac{\alpha' + \gamma' - \beta'}{2} + \frac{\pi}{2}, \quad BAT_C = \frac{\alpha' + \beta' - \gamma'}{2} + \frac{\pi}{2};$$

per cui, se si indica con ε' l'eccesso sferico del triangolo ABC, basterà, nella ipotesi considerata, in luogo di

$$(cd), \quad (da),$$

porre rispettivamente

$$\pi - \left(\beta' - \frac{\varepsilon'}{2} \right), \quad \pi - \left(\gamma' - \frac{\varepsilon'}{2} \right).$$

Facendo ora tutte queste sostituzioni, delle quattro formule rappresentate dalla [10], le prime due si riducono alle note formule che danno $\sin \frac{1}{2} \beta'$ e $\sin \frac{1}{2} \gamma'$ in funzione di a', b', c' e di $s' - a', s' - b', s' - c'$, e la terza e la quarta si riducono a

$$\cos \left(\frac{\beta'}{2} - \frac{\varepsilon'}{4} \right) = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} s' \cos \frac{1}{2} (s' - a') \sin \frac{1}{2} (s' - b') \sin \frac{1}{2} (s' - c')}{\sin \frac{1}{2} a' \cos \frac{1}{2} b' \sin \frac{1}{2} c'}}$$

$$\cos \left(\frac{\gamma'}{2} - \frac{\varepsilon'}{4} \right) = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} s' \cos \frac{1}{2} (s' - a') \cos \frac{1}{2} (s' - b') \sin \frac{1}{2} (s' - c')}{\sin \frac{1}{2} a' \sin \frac{1}{2} b' \cos \frac{1}{2} c'}}$$

formule pure note (**). Risultati analoghi si deducono dalle [11] e dalle [12].

Se poi si indica con n' il seno del triedro corrispondente al triangolo ABC, che si sa essere dato dalla eguaglianza

$$n' = \sqrt{\sin s' \sin (s' - a') \sin (s' - b') \sin (s' - c')},$$

si vede che n si riduce precisamente ad n' ; e quindi delle quattro formule rappresentate dalla [14] le prime due si riducono a formule note, e la terza e la quarta si riducono a

$$\sin \left(\beta' - \frac{\varepsilon'}{2} \right) = \frac{n'}{2 \sin \frac{1}{2} a' \cos \frac{1}{2} b' \sin \frac{1}{2} c'}, \quad \sin \left(\gamma' - \frac{\varepsilon'}{2} \right) = \frac{n'}{2 \sin \frac{1}{2} a' \sin \frac{1}{2} b' \cos \frac{1}{2} c'}$$

formule pure note e che si possono facilmente ricavare dalla formula del CAENOLI (***) che dà l'eccesso sferico in funzione di tre lati. E a formule note, o facili a dimostrarsi, si riducono tutte quelle che sono rappresentate dalla [15] e dalla [16]; in particolare: la prima del gruppo rappresentato dalla [15] si riduce alla nota proporzionalità fra i seni dei lati e i seni degli angoli opposti.

(*) V. BALTZER, *Die Elemente der Mathematik*. Leipzig, 1874. Vol. II, pag. 175.

(**) V. SERRET, *Traité de Trigonometrie*. Paris, 1888, pag. 160.

(***) V. CAENOLI, *Trigonometria piana e sferica*. Bologna 1804, pag. 306.

OSSERVAZIONE I. — Si noti che delle formole [10], [11] e [12] (a differenza di quanto avviene nel caso particolare del triangolo), le [12] soltanto sono logaritmiche.

OSSERVAZIONE II. — Da quanto si è dimostrato in principio del § risulta che l'angolo formato dall'arco tangente AT_B coll'arco AC è uguale al supplemento dell'angolo ABC , diminuito, quest'ultimo, della metà dell'eccesso sferico ε' del triangolo ABC ; nel caso del triangolo piano questo eccesso ε' è zero, e si ha uno dei teoremi fondamentali della *Geom. Elem.*

OSSERVAZIONE III. — Risulta pure (come poteva prevedersi) che per $d=0$, si ha

$$(cd) + (da) = \pi + \varepsilon'.$$

6. Si indichi con ε l'eccesso sferico del quadrangolo, ossia si ponga

$$(ab) + (bc) + (cd) + (da) - 2\pi = \varepsilon, \quad (17)$$

siccome dalla *Geom. Elem.* si sa che (*)

$$(ab) + (cd) = (bc) + (da), \quad (18)$$

sarà

$$(ab) + (cd) = (bc) + (da) = \pi + \frac{1}{2}\varepsilon, \quad (19)$$

da cui

$$\frac{\varepsilon}{4} = \frac{1}{2} [(ab) + (cd)] - \frac{\pi}{2}. \quad (20)$$

Ora, per mezzo della [10] e della [11] si ha facilmente

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2} [(ab) + (cd)] &= \frac{\cos \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2} (s-a-b) - \cos \frac{1}{2} (s-a-c) \cos \frac{1}{2} (s-a-d)}{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b + \sin \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} d} \times \\ &\quad \times \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (s-a) \sin \frac{1}{2} (s-b) \sin \frac{1}{2} (s-c) \sin \frac{1}{2} (s-d)}{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} d}}, \\ \sin \frac{1}{2} [(ab) + (cd)] &= \frac{\sin \frac{1}{2} (s-a) \sin \frac{1}{2} (s-b) + \sin \frac{1}{2} (s-c) \sin \frac{1}{2} (s-d)}{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b + \sin \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} d} \times \\ &\quad \times \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2} (s-a-b) \cos \frac{1}{2} (s-a-c) \cos \frac{1}{2} (s-a-d)}{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} d}}, \end{aligned}$$

quindi, essendo

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2} (s-a-b) - \cos \frac{1}{2} (s-a-c) \cos \frac{1}{2} (s-a-d) &= -\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b - \sin \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} d, \\ \sin \frac{1}{2} (s-a) \sin \frac{1}{2} (s-b) + \sin \frac{1}{2} (s-c) \sin \frac{1}{2} (s-d) &= +\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b + \sin \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} d, \end{aligned}$$

si avrà

$$\sin \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (s-a) \sin \frac{1}{2} (s-b) \sin \frac{1}{2} (s-c) \sin \frac{1}{2} (s-d)}{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} d}}, \quad (21)$$

$$\cos \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2} (s-a-b) \cos \frac{1}{2} (s-a-c) \cos \frac{1}{2} (s-a-d)}{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} d}}, \quad (22)$$

da cui anche

$$\tan \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (s-a) \sin \frac{1}{2} (s-b) \sin \frac{1}{2} (s-c) \sin \frac{1}{2} (s-d)}{\cos \frac{1}{2} s \cos \frac{1}{2} (s-a-b) \cos \frac{1}{2} (s-a-c) \cos \frac{1}{2} (s-a-d)}}. \quad (23)$$

Dalla (21) e dalla (22), ricordando la (13), si ha pure la formola notevole

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} d}. \quad (24)$$

(*) V. LAZZERI e BASSANI, *Elementi di Geometria*, Livorno 1891, pag. 219.

OSSERVAZIONE I. — Se si suppone $d = 0$, la (21) e la (22) si riducono a formule note (*); la (23) e la (24) diventano rispettivamente, la formula del L'HUI-
LIER (*) e la formula del CAENOLI, già citata.

OSSERVAZIONE II. — Nel caso del triangolo, quando si vogliono calcolare tutti e tre gli angoli dati i tre lati, esiste un metodo, basato sulla formula del L'HUI-
LIER, il quale cogli stessi quattro logaritmi dà il modo di calcolare tutti e quattro gli angoli

$$\frac{\varepsilon'}{4}, \quad \frac{\alpha'}{2} - \frac{\varepsilon'}{4}, \quad \frac{\beta'}{2} - \frac{\varepsilon'}{4}, \quad \frac{\gamma'}{2} - \frac{\varepsilon'}{4},$$

e questo procedimento è molto opportuno, perchè si presta alla verificaione

$$\frac{\varepsilon'}{4} + \left(\frac{\alpha'}{2} - \frac{\varepsilon'}{4}\right) + \left(\frac{\beta'}{2} - \frac{\varepsilon'}{4}\right) + \left(\frac{\gamma'}{2} - \frac{\varepsilon'}{4}\right) = \frac{\pi}{2},$$

analoga a quella che, nella stessa ipotesi si ha per un triangolo piano. Nel caso del quadrilatero si ha già una formula di verificaione nella (18), ma si può osservare che un vantaggio analogo a quello ora accennato offrono le quattro formule rappresentate dalla [12] assieme alla (23), perchè queste cinque formule permettono di calcolare tutte e cinque gli angoli

$$\frac{(ab)}{2}, \quad \frac{(bc)}{2}, \quad \frac{(cd)}{2}, \quad \frac{(da)}{2}, \quad \frac{\varepsilon}{4}$$

cogli stessi otto logaritmi, e questi cinque angoli, in forza della (18) e della (20), devono verificare la relazione

$$\frac{(ab)}{2} + \frac{(bc)}{2} + \frac{(cd)}{2} + \frac{(da)}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \pi.$$

OSSERVAZIONE III. — Se il quadrangolo, oltre essere inscrittibile, è anche circoscrittibile, essendo allora (**)

$$a + c = b + d,$$

dalla (23) si ricava

$$\operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\tan \frac{1}{2} a \tan \frac{1}{2} b \tan \frac{1}{2} c \tan \frac{1}{2} d}. \quad (25)$$

7. Si indichi con R la misura del raggio del circolo circoscritto al quadrilatero: se si considera il triangolo ABC, si ha, com'è noto (***)

$$\operatorname{ctn} R = \frac{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} f} \operatorname{sen} (ab):$$

è pure noto che nel quadrilatero piano ABCD si ha

$$f_1^2 = \frac{(a_1 d_1 + b_1 c_1)(a_1 c_1 + b_1 d_1)}{a_1 b_1 + c_1 d_1},$$

quindi, per le [17], per la (3) e per la prima della [14] si avrà facilmente

$$\tan R = \frac{2}{n} \sqrt{(\operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} b + \operatorname{sen} \frac{1}{2} c \operatorname{sen} \frac{1}{2} d)(\operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} c + \operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} d)(\operatorname{sen} \frac{1}{2} a \operatorname{sen} \frac{1}{2} d + \operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} c)}. \quad (26)$$

OSSERVAZIONE. — Ed anche questa formula, quando si supponga $d = 0$, si riduce ad una formula nota (****).

(*) V. SERRET, l. c. pagg. 159 e 160.

(**) V. LAZZERI e BASSANI, l. c. pag. 220.

(***) V. SERRET, l. c. pag. 162.

(****) V. BALTZER, l. c. pag. 323.

8. Dalle [10] e dalle [11], ricavando, col procedimento seguito nel § 6, i valori di

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} [(ab) \mp (bc)] \quad \text{e di} \quad \operatorname{cos} \frac{1}{2} [(ab) \pm (bc)]$$

e osservando che

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{1}{2}(s-a) \operatorname{cos} \frac{1}{2}(s-a-d) + \operatorname{sen} \frac{1}{2}(s-c) \operatorname{cos} \frac{1}{2}(s-a-b) &= \operatorname{sen} \frac{1}{2}b \operatorname{cos} \frac{1}{2}(c-a) + \operatorname{sen} \frac{1}{2}d, \\ \operatorname{sen} \frac{1}{2}(s-a) \operatorname{cos} \frac{1}{2}(s-a-d) - \operatorname{sen} \frac{1}{2}(s-c) \operatorname{cos} \frac{1}{2}(s-a-b) &= \operatorname{cos} \frac{1}{2}b \operatorname{sen} \frac{1}{2}(c-a), \\ \operatorname{cos} \frac{1}{2}s \operatorname{sen} \frac{1}{2}(s-d) - \operatorname{cos} \frac{1}{2}(s-a-c) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(s-b) &= \operatorname{sen} \frac{1}{2}b \operatorname{cos} \frac{1}{2}(c+a) - \operatorname{sen} \frac{1}{2}d, \\ \operatorname{cos} \frac{1}{2}s \operatorname{sen} \frac{1}{2}(s-d) + \operatorname{cos} \frac{1}{2}(s-a-c) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(s-b) &= \operatorname{cos} \frac{1}{2}b \operatorname{sen} \frac{1}{2}(c+a), \end{aligned}$$

si ricava

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} [(ab) + (bc)]}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} [(ad) + (dc)]} = \frac{\operatorname{cos} \frac{1}{2} d [\operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{cos} \frac{1}{2} (c-a) + \operatorname{sen} \frac{1}{2} d]}{\operatorname{cos} \frac{1}{2} b [\operatorname{sen} \frac{1}{2} d \operatorname{cos} \frac{1}{2} (c-a) + \operatorname{sen} \frac{1}{2} b]}, \quad [27]$$

$$\frac{\operatorname{cos} \frac{1}{2} [(ab) + (bc)]}{\operatorname{cos} \frac{1}{2} [(ad) + (dc)]} = \frac{\operatorname{cos} \frac{1}{2} d [\operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{cos} \frac{1}{2} (c+a) - \operatorname{sen} \frac{1}{2} d]}{\operatorname{cos} \frac{1}{2} b [\operatorname{sen} \frac{1}{2} d \operatorname{cos} \frac{1}{2} (c+a) - \operatorname{sen} \frac{1}{2} b]}, \quad [28]$$

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} [(ab) - (bc)]}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} [(ad) + (dc)]} = \frac{\operatorname{cos} \frac{1}{2} d \operatorname{sen} \frac{1}{2} (c-a)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} d \operatorname{cos} \frac{1}{2} (c-a) + \operatorname{sen} \frac{1}{2} b}, \quad [29]$$

$$\frac{\operatorname{cos} \frac{1}{2} [(ab) - (bc)]}{\operatorname{cos} \frac{1}{2} [(ad) + (dc)]} = \frac{\operatorname{cos} \frac{1}{2} d \operatorname{sen} \frac{1}{2} (c+a)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} d \operatorname{cos} \frac{1}{2} (c+a) + \operatorname{sen} \frac{1}{2} b}, \quad [30]$$

Supponendo $d=0$, queste formule si riducono alle formule di DELAMBRE; come quelle che si ricavano dividendo membro a membro e ordinatamente le [27] per le [28] e le [29] per le [30], si riducono a quelle di NEPERO. Esse possono servire ad estendere al quadrangolo sferico inscrittibile molte delle relazioni che si hanno fra gli elementi di un triangolo sferico qualunque, e quindi anche a risolvere, per il quadrangolo, alcuni problemi analoghi a quelli che si risolvono per il triangolo. Così, p. es., dati due lati b, d la somma $(ad) + (dc)$ dei due angoli adiacenti ad uno di essi e la differenza $(b-a)$ fra gli altri due lati, la prima delle [27] e la prima delle [29] servono a calcolare gli angoli (ab) e (bc) ; come nel caso di un triangolo, dato un lato a l'angolo opposto α' e la differenza $b'-c'$ degli altri due lati, le formule di DELAMBRE a cui si riducono le due precedenti, servono a calcolare gli angoli β' e γ' .

OSSERVAZIONE. — Della quattro formule rappresentate dalla [27], come delle quattro rappresentate dalla [28], le ultime due coincidono colle prime due.

9. Si indichi con O il punto d'intersezione dei due archi BD e AC , si ponga

$$OB = e, \quad OD = e'', \quad OA = f', \quad OC = f''$$

e si rappresentino, al solito, con (af) , (ae) , ... le misure degli angoli formati dagli archi le cui misure si sono indicate con a e con f , con a e con e , ...

Applicando le formule di DELAMBRE ai due triangoli BOC ed AOD , si ha

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} [(bf) - (eb)]}{\operatorname{cos} \frac{1}{2} (ef)} &= \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (e' - f'')}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} b}, & \frac{\operatorname{cos} \frac{1}{2} [(bf) - (eb)]}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (ef)} &= \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (e' + f'')}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} b}, \\ \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} [(df) - (ed)]}{\operatorname{cos} \frac{1}{2} (ef)} &= \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (e' - f')}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} d}, & \frac{\operatorname{cos} \frac{1}{2} [(df) - (ed)]}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (ef)} &= \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (e' + f')}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} d}, \end{aligned}$$

ma per il teorema di GEOM. Elem. ricordato al § 5 si ha

$$(ab) - (bf) + (fa) = (ae) - (ed) + (da),$$

da cui, facilmente,

$$(ab) - (bf) = (df) - (ed),$$

quindi sarà

$$(31) \quad \frac{\text{sen } \frac{1}{2}(f'' - e')}{\text{sen } \frac{1}{2}(e'' - f')} = \frac{\text{sen } \frac{1}{2} b}{\text{sen } \frac{1}{2} d}, \quad (32) \quad \frac{\text{sen } \frac{1}{2}(f'' + e')}{\text{sen } \frac{1}{2}(e'' + f')} = \frac{\text{sen } \frac{1}{2} b}{\text{sen } \frac{1}{2} d};$$

ed in modo analogo si otterrebbe

$$(33) \quad \frac{\text{sen } \frac{1}{2}(f' - e'')}{\text{sen } \frac{1}{2}(e' - f'')} = \frac{\text{sen } \frac{1}{2} a}{\text{sen } \frac{1}{2} c}, \quad (34) \quad \frac{\text{sen } \frac{1}{2}(f' + e'')}{\text{sen } \frac{1}{2}(e' + f'')} = \frac{\text{sen } \frac{1}{2} a}{\text{sen } \frac{1}{2} c}.$$

10. Dalle quattro formule precedenti si possono dedurre molte altre formule notevoli: se ne daranno qui tre esempi.

I. Dalla (31) e dalla (32) si ha

$$\text{sen } \frac{1}{2}(f'' - e') \text{sen } \frac{1}{2}(e'' + f') = \text{sen } \frac{1}{2}(e'' - f') \text{sen } \frac{1}{2}(f'' + e'),$$

da cui, con facili trasformazioni,

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(e' + e'')}{\cos \frac{1}{2}(f' + f'')} = \frac{\cos \frac{1}{2}(e' - e'')}{\cos \frac{1}{2}(f' - f'')}; \quad (35)$$

e allo stesso risultato si giungerebbe se si partisse dalla (33) e dalla (34). Da questa si deduce

$$\tan \frac{1}{2} e' \tan \frac{1}{2} e'' = \tan \frac{1}{2} f' \tan \frac{1}{2} f'', \quad (36)$$

relazione conosciuta (*) e della quale si può dare facilmente una dimostrazione diretta. E da quest'ultima si ricava anche l'altra

$$\frac{\text{sen } e' \text{sen } e''}{\cos^2 \frac{1}{2} e} = \frac{\text{sen } f' \text{sen } f''}{\cos^2 \frac{1}{2} f}, \quad (37)$$

che sarà utile in seguito.

II. Dalle stesse (31) e (32) moltiplicando membro a membro, e dalle (33) e (34) operando nello stesso modo, si ha rispettivamente

$$(38) \quad \frac{\cos e' - \cos f''}{\cos f' - \cos e''} = \frac{1 - \cos b}{1 - \cos d}, \quad (39) \quad \frac{\cos e' - \cos f'}{\cos f'' - \cos e''} = \frac{1 - \cos a}{1 - \cos c},$$

relazioni notevoli fra i quattro segmenti e' , e'' , f' , f'' e due lati opposti del quadrangolo.

III. Dalla (31) e dalla (32) si ha pure

$$(40) \quad \frac{\text{sen } \frac{1}{2} f'' \cos \frac{1}{2} e'}{\text{sen } \frac{1}{2} e'' \cos \frac{1}{2} f'} = \frac{\text{sen } \frac{1}{2} b}{\text{sen } \frac{1}{2} d}, \quad (41) \quad \frac{\text{sen } \frac{1}{2} e' \cos \frac{1}{2} f''}{\text{sen } \frac{1}{2} f' \cos \frac{1}{2} e''} = \frac{\text{sen } \frac{1}{2} b}{\text{sen } \frac{1}{2} d},$$

$$(42) \quad \frac{\text{sen } \frac{1}{2} f' \cos \frac{1}{2} e'}{\text{sen } \frac{1}{2} e'' \cos \frac{1}{2} f''} = \frac{\text{sen } \frac{1}{2} a}{\text{sen } \frac{1}{2} c}, \quad (43) \quad \frac{\text{sen } \frac{1}{2} e' \cos \frac{1}{2} f'}{\text{sen } \frac{1}{2} f'' \cos \frac{1}{2} e''} = \frac{\text{sen } \frac{1}{2} a}{\text{sen } \frac{1}{2} c},$$

da cui dividendo, membro a membro, la (42) per la (40), o la (43) per la (41), e moltiplicando invece la (41) per la (42) o la (40) per la (43), si ha rispettivamente

$$(44) \quad \frac{\text{sen } f'}{\text{sen } \frac{1}{2} a \text{sen } \frac{1}{2} d} = \frac{\text{sen } f''}{\text{sen } \frac{1}{2} b \text{sen } \frac{1}{2} c}, \quad (45) \quad \frac{\text{sen } e'}{\text{sen } \frac{1}{2} a \text{sen } \frac{1}{2} b} = \frac{\text{sen } e''}{\text{sen } \frac{1}{2} c \text{sen } \frac{1}{2} d}.$$

OSSERVAZIONE I. — Supposto che AC passi per il centro del circolo circoscritto, e che BD sia perpendicolare ad AC, nel triangolo ADC l'arco OD è l'arco perpen-

(*) V. CAGNOLI, l. c. pag. 314.

dicolare al lato AC abbassato dal vertice opposto, e la relazione (36) si riduce all'altra

$$\tan^2 \frac{1}{2} DO = \tan \frac{1}{2} AO \tan \frac{1}{2} OC.$$

Di qui un teorema che ne ha per corrispondente, nel piano, uno notissimo, giacchè un triangolo sferico, i cui tre vertici distano ugualmente dal punto di mezzo di uno dei lati (come il precedente triangolo ADC) ha per corrispondente, nel piano, un triangolo rettangolo. Altrettanto si dica di tutte le relazioni esistenti fra gli elementi del triangolo sferico considerato: così, p. es., se $A'B'C'$ è il triangolo e se il punto da cui equidistano i tre vertici è sul lato a' , si ha

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} a' = \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} b' + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c', \quad \cos^2 \frac{1}{2} a' = \operatorname{ctn} \beta' \operatorname{ctn} \gamma'.$$

alle quali, nel piano, corrispondono l'espressione analitica nel teorema di PITAGORA e la relazione fondamentale fra i due angoli acuti di un triangolo rettangolo.

OSSEVAZIONE II. — Il rapporto considerato nella (44) non è uguale al rapporto considerato nella (45), e questo risulta immediatamente dalla (37).

II. Di ognuna delle relazioni precedenti fra gli elementi di un quadrangolo sferico inscrittibile (*) si può trovare la relazione corrispondente fra i corrispondenti elementi di un quadrangolo piano pure inscrittibile, osservando principalmente che essendo allora $\varepsilon = 0$, la (19) si riduce a

$$(ab) + (cd) = (bc) + (da) = \pi,$$

come già si sapeva dalla *Geom. Elem.*

Notissime sono quelle che corrispondono alle [10], alle [11] e alle [12], e, siccome ε (§ 4) si riduce alla misura dell'area del quadrilatero, notissima è pure quella che corrisponde alla (26). Fra le corrispondenti a tutte le altre si possono notare le seguenti:

I. quelle che corrispondono alle [15] e che sono

$$\frac{ad + bc}{\operatorname{sen}(ab)} = \frac{ba + cd}{\operatorname{sen}(bc)}; \quad [15]$$

II. quelle che corrispondono alle [29] e alle [30] e che sono

$$[29] \quad \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} [(ab) - (bc)]}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} [(ab) + (bc)]} = \frac{c - a}{b + d}, \quad [30] \quad \frac{\cos \frac{1}{2} [(ab) - (bc)]}{\cos \frac{1}{2} [(ab) + (bc)]} = \frac{c + a}{b - d};$$

III. quella che corrisponde alla (36) e alla (37) e che è

$$e' e'' = f' f'' \quad (36')$$

espressione analitica di un noto teorema di *Geom. Elem.*;

IV. quelle che corrispondono alla (44) e alla (45) e che, per la [36]', si possono riunire nella seguente

$$\frac{e'}{ab} = \frac{e''}{cd} = \frac{f'}{ad} = \frac{f''}{bc},$$

espressione analitica di un teorema dovuto a CARNOT. (**)

(*) Le formole [10], [11], (21) e (22) non sono nuove, ma le crediamo poco note. Sono proposte come esercizi (non alcuni gravi errori di stampa non facili a rilevarsi) nelle *Leçons sur la théorie des fonctions circulaires...* del LE COINTRE, (Paris, 1858, pagg. 378 e 379), ma non abbiamo potuto risalire alle fonti, dal LE COINTRE stesso citate, per conoscere gli autori di queste formole e il procedimento da esse tenuto nel dimostrarle.

(**) V. CARNOT, *Géométrie de position*, Paris, an. XI, 1803, pag. 271.

OSSERVAZIONE. — Le relazioni che, nel quadrangolo piano, hanno per corrispondenti quello che danno il prodotto e il rapporto fra le misure delle diagonali (espressioni di due notissimi teoremi di TOLOMEO) non si sono riportate perchè si possono scrivere immediatamente.

12. Con metodo analogo si potrebbero trovare molte altre di quelle proprietà del quadrangolo sferico inscrittibile, le cui corrispondenti nel piano son note; si porrà termine a questi esercizi con un ultimo esempio.

Da un punto qualunque M del circolo circoscritto si conducano gli archi di circolo massimo perpendicolari ai quattro lati AB, BC, CD, DA del quadrilatero e si indichino con h_a, h_b, h_c, h_d , rispettivamente, le misure di questi archi, intendendo che se A_1, B_1, C_1, D_1 sono i punti diametralmente opposti ai vertici ABCD, questi quattro archi siano quelli i cui piedi sono, rispettivamente, nelle semicirconferenze $ABA_1, BCB_1, CDC_1, DAD_1$. Dal triangolo sferico AMB, per una nota formula, ricordata anche al § 7, si ha

$$\text{ctn}R = \text{sen}MAB \frac{\cos \frac{1}{2} MA \cos \frac{1}{2} AB}{\text{sen} \frac{1}{2} MB}$$

(dove per MA, MB si intendono gli archi di circolo massimo, minori di π , che hanno per estremi M ed A, M e B), e siccome

$$\text{sen} h_a = \text{sen} MA \text{sen} MAB,$$

si avrà anche

$$\text{sen} h_a = 2 \text{ctn} R \frac{\text{sen} \frac{1}{2} MA \text{sen} \frac{1}{2} MB}{\cos \frac{1}{2} a}. \quad [46]$$

Da questa formula e dalle tre sottintese si ricava facilmente

$$\frac{\text{sen} h_a \text{sen} h_c}{\text{sen} h_b \text{sen} h_d} = \frac{\cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} d}{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} c} \quad (47)$$

e questa ha per corrispondente nel piano l'espressione analitica del teorema: *il prodotto delle distanze di un punto qualunque di una circonferenza da due lati opposti di un quadrangolo inscritto è uguale al prodotto delle distanze di questo stesso punto dagli altri due lati.* (*)

OSSERVAZIONE. — Fra i casi particolari che si possono considerare v'è quello in cui B coincida con C e A con D: i circoli massimi cui appartengono gli archi AD e BC diventano allora i circoli massimi tangenti in A e in B al circolo circoscritto e la (47) diventa

$$\frac{\text{sen}^2 h_a}{\text{sen} h_b \text{sen} h_d} = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} a};$$

la cui corrispondente nel piano è l'espressione analitica del teorema: *la distanza di un punto qualunque di una circonferenza a una corda è media proporzionale fra le distanze dello stesso punto dalle tangenti condotte alle estremità della corda.*

(*) DESBOYES, *Questions de Géométrie élémentaire* (Paris, 1875, pag. 170).

SU DI UNA CLASSE DI POLINOMI

I polinomi, di cui noi vogliamo qui studiare le proprietà principali, soddisfano alla formola di ricorrenza

$$\text{Posto } f'_i = i(i-1)f_{i-1} - if'_{i-1} \quad (i > 1). \quad (1)$$

$$f_i(x) = \sum_{h=0}^i (-1)^h a_{i,h} x^{i-h}$$

essi riescono completamente determinati quando si fissano i valori dei termini

$$a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{i,i}, \dots \quad (2)$$

e il coefficiente $a_{1,0}$ di $f_1(x) = a_{1,0}x - a_{1,1}$.

Per valori speciali delle $a_{i,i}$, si ottengono i polinomi, che incontrammo ne *La determinazione assintotica dell' n^{esimo} numero primo*. (*) Senza assegnare valori particolari alle (2), noi daremo l'espressione generale di questi polinomi, e ne trarremo alcune notevoli proprietà; poi, esponendo alcuni algoritmi coi quali si ottengono polinomi, soddisfacenti alla (1), mostreremo la genesi di quelli incontrati nella citata questione e daremo l'equazione differenziale cui soddisfa formalmente la loro funzione generatrice. Noteremo infine una proprietà dei polinomi generali (1), che riesce utilissima nello sviluppo assintotico dell' n^{esimo} numero primo di una progressione aritmetica.

1. Noi supporremo $a_{1,0} = 1$ e non faremo alcuna ipotesi sulle costanti (2). Ciò posto, dalla (1) facilmente si trae la seguente relazione di ricorrenza tra i coefficienti del polinomio $f_i(x)$ e quelli del polinomio precedente:

$$a_{i,h} = \frac{i(i-1)}{i-h} a_{i-1,h} + ia_{i-1,h-1} \quad (i > 1, i \neq h). \quad (3)$$

2. Per ricavare da questa l'espressione generale del coefficiente $a_{i,h}$, poniamo

$$a_{i,h} = \frac{i!(i-1)!}{(i-h)!} \alpha_{i,h}. \quad (4)$$

La (3) si semplifica nella

$$\alpha_{i,h} = \alpha_{i-1,h} + \frac{1}{i-1} \alpha_{i-1,h-1}, \quad (5)$$

da cui subito si trae

$$\alpha_{i,h} = \frac{1}{h} \alpha_{h,h-1} + \frac{1}{h+1} \alpha_{h+1,h-1} + \dots + \frac{1}{i-1} \alpha_{i-1,h-1} + \alpha_{h,h}.$$

(*) Rendiconto della R. Accademia di scienze fisiche e matematiche di Napoli, 1902.

Si ottiene così

$$\alpha_{i,0} = 1, \quad \alpha_{i,1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{i-1} + \alpha_{1,1},$$

$$\alpha_{i,2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \frac{1}{i-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{i-1}\right) +$$

$$+ \alpha_{1,1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{i-1}\right) + \alpha_{2,2}$$

e in generale, indicando con $H_{s+1,i-1}^{(h-s)}$ la somma degli inversi dei prodotti ad $h-s$ ad $h-s$ dei numeri $s+1, s+2, \dots, i-1$

$$\alpha_{i,h} = H_{1,i-1}^{(h)} + \alpha_{1,1} H_{2,i-1}^{(h-1)} + \alpha_{2,2} H_{3,i-1}^{(h-2)} + \dots + \alpha_{h-1,h-1} H_{h,i-1}^{(1)} + \alpha_{h,h}. \quad (6)$$

D'altra parte

$$\frac{(i-1)!}{s!} H_{s+1,i-1}^{(h-s)}$$

è un numero intero ed uguaglia la somma dei prodotti ad $i-1-h$ ad $i-1-h$ dei numeri $s+1, s+2, \dots, i-1$. Posto dunque per brevità

$$\frac{(i-1)!}{s!} H_{s+1,i-1}^{(h-s)} = [s+1, i-1]^{i-1-h}$$

la (6), in virtù della (4) fornisce

$$a_{i,h} = \frac{i!}{(i-h)!} \left\{ [1, i-1]^{i-1-h} + \frac{a_{1,1}}{0!} [2, i-1]^{i-1-h} + \dots + \frac{a_{h,h}}{(h-1)!} [h+1, i-1]^{i-1-h} \right\}. \quad (7)$$

Se $a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{h,h} \dots$ sono interi, da questa subito rilevasi che per

$$i > h > 0, a_{i,h} \text{ è divisibile } \binom{i}{h} h = i \binom{i-1}{h-1} = \binom{i}{h-1} (i-h+1).$$

Facendo uso delle note proprietà

$$\sum_{h=s}^{i-1} [s+1, i-1]^{i-1-h} = \frac{i!}{(s+1)!} \cdot \sum_{h=s}^{i-1} (-1)^h [s+1, i-1]^{i-1-h} = (-1)^s \frac{(i-2)!}{(s-1)!}$$

si ricavano dalla (7) le relazioni

$$\sum_{h=0}^{i-1} (i-h)! a_{i,h} = i! i! \left(\frac{1}{1!} + \frac{a_{1,1}}{0! 2!} + \frac{a_{2,2}}{1! 3!} + \dots + \frac{a_{i-1,i-1}}{(i-2)! i!} \right) \quad (8)$$

$$\sum_{h=0}^{i-1} (-1)^h (i-h)! a_{i,h} = (-1)^i i! (i-2)! \left(\frac{a_{1,1}}{0! 0!} - \frac{a_{2,2}}{1! 1!} + \dots + \frac{a_{i-1,i-1}}{(i-2)! (i-2)!} \right). \quad (8')$$

3. Dalla (7) possiamo ricavare una prima espressione del polinomio $f_i(x)$. Invero, moltiplichiamola per $(-1)^h x^{i-h}$ e sommiamo da $h=0$ ad $h=i$, si ottiene

$$f_i(x) = \varphi_{i,0}(x) - \frac{a_{1,1}}{0!} \varphi_{i,1}(x) + \frac{a_{2,2}}{1!} \varphi_{i,2}(x) - \dots$$

$$+ (-1)^{i-1} \frac{a_{i-1,i-1}}{(i-2)!} \varphi_{i,i-1}(x) + (-1)^i \frac{a_{i,i}}{(i-1)!} \varphi_{i,i}(x) \quad (9)$$

avendo posto, per $h < 1$,

$$\varphi_{i,h} = \frac{i!}{(i-h)!} [h+1, i-1]^{i-h} x^{i-h} - \frac{i!}{(i-h-1)!} [h+1, i-1]^{i-h-1} x^{i-h-1} + \dots \\ \dots + (-1)^{i-h-1} \frac{i!}{1!} x$$

e per $h = i$

$$\varphi_{i,i} = (i-1)!$$

4. Particolare importanza ha la funzione

$$\varphi_{i,0}(x) = [1, i-1]^{i-1} x^i - i[1, i-1]^{i-2} x^{i-1} + i(i-1)[1, i-1]^{i-3} x^{i-2} - \dots \pm i(i-1)\dots 3.2x \quad (10)$$

corrispondente ai valori tutti nulli delle $\alpha_{i,i}$, poichè mostreremo che $\varphi_{i,h}$ si può esprimere mediante $\varphi_{i,0}$ e le sue derivate. Infatti dalla relazione evidente

$$[h+1, i-1]^r = \frac{1}{h} [h, i-1]^{r+1} - \frac{1}{h} [h+1, i-1]^{r+1}$$

si trae

$$\varphi_{i,h} = \frac{1}{h} \varphi'_{i,h} + \frac{1}{h} \varphi'_{i,h-1} \quad (11)$$

da cui subito

$$\varphi_{i,h} = \frac{1}{h} \varphi'_{i,h-1} + \frac{1}{h^2} \varphi''_{i,h-1} + \frac{1}{h^3} \varphi'''_{i,h-1} + \dots + \frac{1}{h^{i-h+1}} \varphi_{i,h-1}^{(i-h+1)} \quad (12)$$

Potremo dunque porre

$$\varphi_{i,h} = \lambda_h^{(h)} \varphi_{i,0} + \lambda_h^{(h+1)} \varphi_{i,1} + \dots + \lambda_h^{(i)} \varphi_{i,0}^{(i)} \quad (13)$$

Per il calcolo delle λ basterà osservare che esse, in virtù della (11) soddisfano alla formula di ricorrenza

$$\lambda_h^{(s)} = \frac{1}{h} (\lambda_h^{(s-1)} + \lambda_{h-1}^{(s-1)}) \quad (14)$$

Si ottiene così

$$\lambda_h^{(h)} = \frac{1}{h!}, \quad \lambda_h^{(h+1)} = \frac{1}{h!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{h} \right), \\ \lambda_h^{(h+2)} = \\ = \frac{1}{h!} \left[\frac{1}{h} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{h} \right) + \frac{1}{h-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{h-1} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + 1 \right] \quad (15)$$

In generale si ha con facili considerazioni

$$\lambda_h^{(s)} = \frac{1}{h!} \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{h} \right)^{s-h}$$

dove il secondo fattore sta a indicare la funzione simmetrica completa $(s-h)^{\text{esima}}$ dei numeri $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{h}$.

(*) CESÀRO, *Analisi algebrica*, p. 399 e d).

5. Dopo ciò è facile rinvenire come la funzione $f_1(x)$ più generale si esprima quale combinazione lineare della funzione fondamentale $\varphi_{i,0}$ o delle sue derivate. Basterà porre

$$l_s = \frac{a_{s,s}}{(s-1)!} \lambda_s^{(s)} - \frac{a_{s-1,s-1}}{(s-2)!} \lambda_{s-1}^{(s)} + \dots + (-s)^{s-1} \frac{a_{1,1}}{0!} \lambda_1^{(s)}, \quad (16)$$

e si avrà

$$f_i = \varphi_{i,0} - l_1 \varphi'_{i,0} + l_2 \varphi''_{i,0} - \dots + (-1)^i l_i \varphi^{(i)}_{i,0}, \quad (17)$$

ovvero simbolicamente, posto $l_s = \frac{L_s}{s!}$,

$$f_i(x) = \varphi_{i,0}(x - L). \quad (L_0 = 1) \quad (17)^{bis}$$

6. La forma (17), sotto la quale può mettersi il polinomio f_i , ha importanza nello studio delle sue radici. Dimostriamo innanzi tutto la seguente proprietà della funzione fondamentale $\varphi_{i,0}$.

Le radici di $\varphi_{i,0}$ sono tutte reali, distinte e positive.

Questo teorema risulta immediatamente da un fecondo teorema algebrico, che è utile richiamare nei suoi dettagli:

Se la funzione algebrica di grado i ha tutte le radici reali, e k è un numero reale, anche $f(x) + kf'(x)$ ha tutte le radici reali. Inoltre, se r sono le radici distinte di $f(x)$, $f(x) + kf'(x)$ ammette oltre le $i - r$ radici comuni a $f(x)$ e $f'(x)$, altre r radici distinte: una superiore o inferiore a tutte le radici di $f(x) = 0$, secondo che k è negativo o positivo, e ciascuna delle rimanenti $r - 1$ compresa tra due radici consecutive di $f(x)$. ()*

Questo teorema subito si generalizza, osservando che se $f(x)$ ha tutte le radici reali e k_1 e k_2 sono due numeri reali anche

$$f + k_1 f' + k_2 (f' + k_1 f'') = f + (k_1 + k_2) f' + k_1 k_2 f''$$

ha tutte le radici reali, e le radici r -uple ($r > 1$) di essa sono le radici $(r + 2)$ -uple di $f(x)$. Per conseguenza:

Se $f(x)$ ha tutte le radici reali, anche $a_0 f + a_1 f' + \dots + a_p f^{(p)}$ ha tutte le radici reali, purchè altrettanto si possa dire di $a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \dots + a_p$. Inoltre le radici r -uple ($r > 1$) di $a_0 f + a_1 f' + \dots + a_p f^{(p)}$ sono le $(r + p)$ -uple di f .

In particolare $a_0 f + a_1 f' + a_2 f'' + \dots + a_{i-1} f^{(i-1)}$ ha tutte le radici reali e distinte.

Ciò posto, se si fa $f(x) = x^i$, la (10) potrà scriversi:

$$\varphi_{i,0} = [1, i - 1]^{i-1} f - [1, i - 1]^{i-2} f' + \dots \pm f^{(i-1)}, \quad (10)^{bis}$$

e poichè

$$[1, i - 1]^{i-1} x^{i-1} - [1, i - 1]^{i-2} x^{i-2} + \dots \pm 1 = (x - 1)(2x - 1) \dots (i - 1)x - 1$$

ha tutte le radici reali, si può concludere che $\varphi_{i,0}$ ha tutte le radici reali e distinte. Soppressa la radice $x = 0$, il polinomio che si ottiene di grado $i - 1$ ha $i - 1$ variazioni e però altrettante radici positive.

Poichè inoltre

$$\varphi_{i,0}(x) = i(i - 1) \int_0^x \varphi_{i-1,0}(x) dx - i \varphi_{i-1,0}(x)$$

e $\int_0^x \varphi_{i-1}(x) dx$ ha, tranne la radice doppia $x=0$, le radici reali distinte, come risulta integrando la (10)^{bis}, si può concludere che $\varphi_{i,0}(x)$ oltre alla radice $x=0$, ammette $i-1$ radici, di cui una superiore a tutte le radici di $\int_0^x \varphi_{i,1}(x) dx$, e ciascuna delle altre compresa tra due radici consecutive di $\int_0^x \varphi_{i,0}(x) dx$.

In generale poi, avuto riguardo alla (17), si può affermare che $f_i(x)$ ha tutte le radici reali, se altrettanto si può dire per

$$l_0 x^i - l_1 x^{i-1} + l_2 x^{i-2} - \dots \pm l_i.$$

7. La funzione fondamentale $\varphi_{i,0}$ si può mettere sotto una forma notevole. Facciamo $x = \log z$, e calcoliamo la derivata i -esima rispetto a z di $(\log z)^{i+1}$. Facendo uso di note formule (*) si ha

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} z^i \frac{d^i (\log z)^{i+1}}{dz^i} &= (\log z)^i \frac{i!}{1!} S \frac{1}{r} - i (\log z)^{i-1} \frac{i!}{2!} S \frac{1}{r} + \dots \\ &\dots + (-1)^{i-1} i(i-1) \dots z (\log z) \frac{i!}{i!} S \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

D'altra parte (**)

$$\frac{i!}{h!} S \frac{1}{r} = [1, i-1]^{i-h};$$

e però la precedente può scriversi

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} z^i \frac{d^i (\log z)^{i+1}}{dz^i} &= [1, i-1]^{i-1} (\log z)^i - i [1, i-1]^{i-1} (\log z)^{i-1} + \dots \\ &\dots + (-1)^{i-1} i(i-1) \dots 3 \cdot 3 \log z. \end{aligned}$$

E finalmente, per la (10)

$$\varphi_{i,1}(\log z) = \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} z^i \frac{d^i}{dz^i} (\log z)^{i+1}, \quad (18)$$

una formula, che richiama quella di Rodrigues (o di Ivory) della teoria dei polinomi di Legendre.

8. Questa formula gode della seguente proprietà elegante:

Per derivare s volte $\varphi_{i,1}(\log z)$ rispetto a $\log z$, basta derivare s volte $(\log z)^{i+1}$ rispetto a $\log z$ sotto il segno $\frac{d^i}{dz^i}$.

Se poniamo cioè $y = x^{i+1}$, si ha

$$\varphi_{i,0}^{(s)} = \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} z^i \frac{d^i y^{(s)}}{dz^i}. \quad (19)$$

Questa relazione è vera per $s=0$, ammettiamola vera per $s-1$, e dimostriamo che è vera per s . Da

$$\varphi_{i,0}^{(s-1)} = \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} z^i \frac{d^i y^{(s-1)}}{dz^i},$$

(*) CESÀRO, *Analisi algebrica*, p. 496.

(**) CESÀRO, *Dérivées des fonctions de fonctions*; "Nouvelles Annales de Math.", 3^e s., t. IV (1885).

derivando rispetto a $x = \log z$, si ottiene

$$\varphi_{i,0}^{(s)} = i, \varphi_{i,0}^{(s-1)} + \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} z^{i+1} \frac{d^{i+1}}{dz^{i+1}} [(i+1)i(i-1)\dots(i+3-s)(\log z)^{i+2-s}].$$

Cambiando i in $i-1$, e moltiplicando per i , si ha

$$i(i-1)\varphi_{i-1,0}^{(s-1)} - i\varphi_{i-1,0}^{(s)} = \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} z^i \frac{d^i}{dz^i} [(i+1)i(i-1)\dots(i+2-s)(\log z)^{i+1-s}],$$

ossia

$$i(i-1)\varphi_{i-1,0}^{(s-1)} - i\varphi_{i-1,0}^{(s)} = \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} z^i \frac{d^i y^{(s)}}{dz^i}.$$

Ma d'altra parte $\varphi_{i,0}^{(s-1)}$ soddisfa alla formula di ricorrenza (1), dunque il primo membro è nient'altro che $\varphi_{i,0}^{(s)}$, e però la (19) è vera qualunque sia s .

9. Dopo ciò possiamo mettere sotto altra forma il polinomio $f_i(x)$. Basterà moltiplicare la (19) per $(-1)^{i-s}$, e sommare rispetto a s da 0 a i , si ottiene

$$f_i(\log z) = \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} z^i \frac{d^i}{dz^i} (y - l_1 y' + l_2 y'' - \dots + (-1)^i l_i y^{(i)}), \quad (20)$$

o, se si vuole, simbolicamente

$$f_i(\log z) = \frac{(-1)^{i+1}}{i+1} z^i \frac{d^i}{dz^i} (\log z - L)^{i+1} \quad (20)^{bis}$$

e per derivare rispetto a $\log z$ il primo membro basta derivare rispetto a $\log z$ il polinomio che sta sotto il segno $\frac{d^i}{dz^i}$.

10. Come applicazione della formula (18), proponiamoci il calcolo dell'integrale definito

$$\int_0^1 z^n \varphi_{i,0}(\log z) dz \quad (n > -1).$$

Nella nota formula

$$\int u^{(m)} v dx = u^{(m-1)} v - u^{(m-2)} v' + \dots + (-1)^{m-1} u v^{(m-1)} + (-1)^m \int u v^{(m)} dx$$

si faccia

$$u = (\log z)^{i+1}, \quad v = z^{i+n}, \quad m = i$$

e si integri fra 0 e 1.

La parte integrata è nulla* per $z = 1$, e tende a zero a destra di zero, quindi si ha (*)

$$\begin{aligned} \int_0^1 z^n z^i \frac{d^i}{dz^i} (\log z)^{i+1} &= (-1)^i (i+n)(i+n-1)\dots(n+1) \int_0^1 z^n (\log z)^{i+1} dz = \\ &= (-1)^i (i+n)(i+n-1)\dots(n+1) \frac{(-1)^{i+1} (i+1)!}{(n+1)^{i+2}}. \end{aligned} \quad (21)$$

(*) CEBÀRO, *Calcolo inf.*, p. 458, g).

Moltiplicando per $\frac{(-1)^{i+1}}{i+1}$, con riguardo alla (19), si ha

$$\int_0^1 z^n \varphi_{i,0}(\log z) dz = \frac{i!(i+1)!}{n!(n+1)}. \quad (22)$$

In particolare si ha per $n=0$

$$\int_0^1 \varphi_{i,0}(\log z) dz = (-1)^i i! i!. \quad (23)$$

II. Esponiamo ora alcuni procedimenti coi quali si ottengono polinomi soddisfacenti alla formula di ricorrenza (1).

Sviluppamo l'espressione

$$\log \left(1 + \frac{z-a_0}{z} + \frac{f_1(x)}{1!z^2} - \frac{f_2(x)}{2!z^3} + \dots + (-1)^{i-1} \frac{f_{i-1}(x)}{i!z^{i+1}} \right), \quad (24)$$

applicando la formula

$$\log(1+X) = \frac{X}{1} - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \dots + (-1)^i \frac{X^{i+1}}{i+1} + R,$$

e poi raggruppiamo i termini aventi nei denominatori le stesse potenze di z sino alla potenza z^{i+1} . Avremo

$$\begin{aligned} \log \left(1 + \frac{z-a_0}{z} + \frac{f_1(x)}{1!z^2} - \dots + (-1)^i \frac{f_i(x)}{i!z^{i+1}} \right) = \\ = \frac{g_1(x)}{1!z} - \frac{g_2(x)}{2!z^2} + \dots + (-1)^i \frac{g_i(x)}{i!z^i} + \Phi. \end{aligned} \quad (25)$$

Se le funzioni f_k soddisfano alla (1), può dimostrarsi senza pena che anche i polinomi g_k godranno della stessa proprietà. Le costanti $b_{i,i}$ corrispondenti a questi polinomi si possono ottenere *isobaricamente* con la formula

$$b_{i,i} = i! \sum_{k=1}^i \frac{1}{k} \sum_r^{i-k} \frac{a_r}{r!}, \quad (26)$$

ovvero per *ricorrenza* con la formula simbolica

$$b_{i+1,i+1} = i a_i + (a + \beta)^i \quad (27)$$

essendo $\beta_r = r b_{r,r}$ per $r > 0$, e $\beta_0 = 1$.

12. Derivando rispetto a z la funzione

$$e^z (\log z - a_0) + e^z \sum_{k=1}^i (-1)^{k-1} \frac{f_k(\log z)}{k! z^k},$$

si ottiene

$$e^z (\log z - a_0) + e^z \frac{f_1+1}{z} + e^z \sum_{k=2}^i \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{f_k k - f'_{k-1} + k(k-1)f_{k-1}}{z^k},$$

posto

$$G_1 = f_1 + 1, \quad G_k = f_k - k f'_{k-1} + k(k-1)f_{k-1} \quad (\text{per } k > 1)$$

si ha per la (1)

$$G_k = f_k + f'_k \quad (28)$$

e quindi anche i polinomi G_k verificano la (1).

Le costanti $b'_{i,i}$, che loro corrispondono, si ottengono dalle $a_{i,i}$ con la formula

$$b'_{i,i} = a_{i,i} - a_{i,i-1} \quad (29)$$

che si deduce dalla (28).

13. In generale i polinomi g_k e G_k dei §§ 11, 12 non sono identici; perchè ciò avvenga, bisogna assegnare alle $a_{i,i}$ valori tali che si abbia $a_{i,i} = b'_{i,i}$. Si ottiene allora

$$a_{1,1} = 2, \quad a_{2,2} = 11, \quad a_{3,3} = 131, \quad a_{4,4} = 2666, \dots$$

e i polinomi $f_1, f_2, \dots, f_i, \dots$ corrispondenti sono quelli che capitano nella determinazione assintotica dell' n^{esimo} numero primo.

Consideriamo la *generatrice* di questi numeri a_i .

$$e^{ax} = a_0 + \frac{a_1 x}{1!} + \frac{a_2 x^2}{2!} + \frac{a_3 x^3}{3!} + \dots \quad (30)$$

Per la (25) si ha la eguaglianza simbolica

$$-\log(1 - xe^{ax}) = e^{bx}. \quad (31)$$

D'altra parte per la (29) e la (7)

$$b_i = a_i - a_{i,i-1} = a_i - i! \left(a_0 + \frac{a_1}{0!} + \frac{a_2}{1!} + \dots + \frac{a_{i-1}}{(i-2)!} \right);$$

e però

$$e^{bx} = a_0 + \frac{a_1 x}{1!} + \frac{a_2 x^2}{2!} + \dots - a_0(1 + x + x^2 + \dots) - \frac{a_1}{1!}(x^2 + x^3 + \dots) - \frac{a_2}{1!}(x^3 + \dots) + \dots,$$

ossia

$$e^{bx} = e^{ax} - a_0 \frac{x}{1-x} - \frac{a_1 x^2}{1-x} - \frac{a_2 x^3}{1! 1-x} - \dots = e^{ax} - a_0 \frac{x}{1-x} \left(1 + x \frac{de^{ax}}{dx} \right).$$

Paragonando questa con la (31), e posto $e^{ax} = y$, si ottiene

$$\log(1 - xy) = a_0 - y + \frac{x}{1-x} (1 - xy). \quad (32)$$

Per $a_0 = 1$, i valori $y'_0, y''_0, y'''_0, \dots$, che da questa successivamente si ottengono per $x=0$, altro non sono che le costanti $a_{1,1} = 2, a_{2,2} = 11, a_{3,3} = 131, \dots$ notate dianzi.

Per $a_0 = 1 - \log \log n$, la $y_0^{(i)}$ ricavata dalla (32) è identica al polinomio $(-1)^i f_i(\log \log n)$ della questione citata. Per convincersi di questo basterà cambiare in (30) a_0 in $1 - \log \log n$, a_k in

$$(-1)^k f_k(\log \log n), \quad b_k \text{ in } (-1)^k g_k(\log \log n)$$

e ripetere il ragionamento, che condurrà alla medesima (32).

14. Terminiamo con una proprietà notevole goduta dai polinomi $f_1, f_2 \dots f_i$, qualunque essi siano, purchè soddisfacenti alla (1).

Nell'espressione

$$\Psi(z) = \log z + \frac{f_1(\log z)}{1!z} - \frac{f_2(\log z)}{2!z^2} + \dots + (-1)^{i-1} \frac{f_i(\log z)}{i!z^i}$$

si cambi z in $z + \mu$, e si sviluppi secondo le potenze di $\frac{1}{z}$; si ha

$$\begin{aligned} \Psi(z + \mu) = \log z + \frac{F_1(\log z, \mu)}{1!z} - \frac{F_2(\log z, \mu)}{2!z^2} + \dots \\ \dots + (-1)^{i-1} \frac{F_i(\log z, \mu)}{i!z^i} + \tau_{i-1}. \end{aligned} \quad (33)$$

Dimostriamo che i polinomi F_i verificano la formula di ricorrenza (1), e poi che si ha

$$F_i(\log z, \mu) = f_i(\log z + \mu).$$

È chiaro che $F_i(\log z, \mu)$ si ottiene come somma dei coefficienti di $\frac{(-1)^{i-1}}{i!z^i}$ che provengono dallo sviluppo di

$$\log(z + \mu) = \log z + \log\left(1 + \frac{\mu}{z}\right) = \log z + \frac{\mu}{z} - \frac{\mu^2}{2z^2} + \frac{\mu^3}{3z^3} - \dots$$

e da quello di

$$\begin{aligned} f_k(\log(z + \mu)) = f_k(\log z) + \left(\frac{\mu}{z} - \frac{\mu^2}{2z^2} + \dots\right) f_k'(\log z) + \\ + \frac{1}{2!} \left(\frac{\mu}{z} - \frac{\mu^2}{2z^2} + \dots\right)^2 f_k''(\log z) + \dots \end{aligned}$$

moltiplicato per

$$\frac{1}{(z + \mu)^k} = \frac{1}{z^k} \left(1 - \frac{\mu}{z} + \frac{\mu^2}{z^2} - \dots\right)^k$$

per tutti i valori di k da 1 a i . È dunque

$$F_i(\log z, \mu) = (i-1)! \mu^i + \sum_{k=1}^i \sum_{s=0}^k C_{k,s}^{(i)} f_k^{(s)} \quad (34)$$

essendo $C_{k,s}^{(i)}$ una costante.

Derivando la (33) rispetto a $\log(z + \mu)$, con facili trasformazioni, si ha

$$\sum_{k=1}^i (-1)^{k-1} \frac{f_k'[\log(z + \mu)]}{k!(z + \mu)^k} = \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^i (-1)^{k-1} \frac{\bar{F}_k(\log z, \mu)}{k!z^k} + \tau_{i-1},$$

avendo posto

$$\bar{F}_k = k(k-1)F_{k-1} - kF_{k-1}'. \quad (k > 1) \quad (35)$$

Ragionando su \bar{F}_i come sulla F_i e si giungerà alla seguente eguaglianza

$$\bar{F}_i = \sum_{k=1}^i \sum_{s=0}^k C_{k,s}^{(i)} f_k^{(s+1)},$$

e per la (34)

$$\bar{F}_i = F_i.$$

Quindi in virtù di (35)

$$F'_i = i(i-1)F_{i-1} - iF'_{i-1}.$$

Ponendo poi

$$F_i = \sum_{h=0}^i (-1)^h [a_{i,h}^{(0)} - a_{i,h}^{(1)}\mu + a_{i,h}^{(2)}\mu^2 - \dots + (-1)^h a_{i,h}^{(h)}\mu^h] (\log z)^{i-h}$$

facilmente si dimostra la relazione

$$a_{i,h}^{(s)} = \frac{i(i-1)}{i-h} a_{i-1,h}^{(s)} + i a_{i-1,h-1}^{(s)} \quad (i > 1, i \neq h)$$

da cui si deduce l'altra

$$a_{i,h}^{(s)} = \binom{i-h+s}{s} a_{i,h-s}^{(s)}$$

in virtù della quale si può scrivere, ponendo $x = \log z$,

$$F_i = f_i(x) + \frac{\mu}{1!} f'_i(x) + \frac{\mu^2}{2!} f''_i(x) + \dots + \frac{\mu^i}{i!} f_i^{(i)}(x) = f_i(x + \mu).$$

Nella memoria citata, alla quale rimandiamo per maggiori dettagli, abbiamo utilizzato questa proprietà.

Notiamo intanto che, dopo quanto si è dimostrato, la proprietà cui ivi si giunge:

Lo sviluppo assintotico di $\frac{1}{\varphi(M)} P_{M,n}$ sino agli infiniti dell'ordine $\frac{n}{(\log n)^r}$, si ottiene da quello di p_n cambiando $\log \log n$ in $\log \log n^{\varphi(M)}$, si è resa indipendente dalla proposizione enunciata ivi al n. 15. ()*

MICHELE CIPOLLA.

NUOVE CONSIDERAZIONI SOPRA LE PERMUTAZIONI

1. Con n elementi distinti $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ si possono formare $n!$ permutazioni diverse. Indichiamo con $A_{n,r}$ il numero di quelle che presentano il medesimo numero r d'inversioni rispetto alla permutazione principale. Fissato n , è determinato anche il massimo valore che può assumere r , giacché il massimo numero d'inversioni che può presentare una permutazione

(*) Prendo qui l'occasione di far notare che i risultati da me ottenuti nella citata memoria riguardo allo sviluppo assintotico di $p_{M,n}$ suppongono tacitamente che il logaritmo integrale di n diviso per $\varphi(M)$ esprima la totalità dei numeri primi non superiori ad n d'una progressione di ragione M , fino agli infiniti dell'ordine $\frac{n}{(\log n)^r}$, comunque sia grande, purchè finito, l'intero r . Questa proprietà è stata soltanto ora rigorosamente dimostrata dal sig. E. Landau, il quale ha avuto la compiacenza di farmene comunicazione. (Sitz. der K. Akademie der W. in Wien, 1903.)

tazione di n elementi distinti è, come è noto, uguale a $\frac{n(n-1)}{2}$. Fra le $n!$ permutazioni considerate, solo una (la diretta o principale) presenta zero inversioni, e solo una (l'inversa) ne presenta $\frac{n(n-1)}{2}$, talchè possiamo scrivere

$$A_{n,0} = 1 \quad , \quad A_{n, \frac{n(n-1)}{2}} = 1.$$

Agli n elementi dati associamo un nuovo elemento, a_{n+1} , distinto dai precedenti, e formiamo con questi $n+1$ elementi tutte le $(n+1)!$ permutazioni. Il numero di quelle permutazioni, che in questo nuovo sistema presentano r inversioni sarà indicata con $A_{n+1,r}$. Per esprimere il valore di $A_{n+1,r}$ mediante i numeri $A_{n,r}$ relativi al vecchio sistema, osserviamo che le permutazioni, le quali nel nuovo sistema presentano r inversioni, si possono ottenere da quelle permutazioni del vecchio sistema che presentano non più di r inversioni, assegnando all'elemento a_{n+1} un posto conveniente senza alterare l'ordine degli altri elementi.

Infatti se una permutazione del vecchio sistema presenta $s \leq r$ inversioni, ponendo l'elemento a_{n+1} alla sinistra dell' $(r-s)^{\text{mo}}$ elemento (contando da destra) della data permutazione, otterremo una permutazione degli $n+1$ elementi, nella quale si troveranno le s inversioni che possedeva la permutazione considerata più le $r-s$ inversioni che l'elemento aggiunto fa cogli $r-s$ elementi che lo seguono; questa permutazione presenta quindi r inversioni. (*)

Da quanto precede si deduce che una permutazione, la quale nel vecchio sistema presenta $s \leq r$ inversioni, fornirà una permutazione con r inversioni del nuovo sistema, purchè sia $r-s \leq n$, ossia $s \geq r-n$.

Sicchè tutte le permutazioni che nel vecchio sistema presentano s inversioni, forniranno altrettante permutazioni del nuovo sistema con r inversioni, se s è compreso nell'intervallo $(r-n, r)$ non esclusi gli estremi, e quindi si ricava

$$(1) \quad A_{n+1,r} = \sum_0^n A_{n,r-s} = \sum_0^n A_{n,r-n+s},$$

per qualunque valore di r , purchè si convenga di porre $A_{n,h} = 0$, quando il secondo indice risulta negativo, oppure maggiore di $\frac{n(n-1)}{2}$.

Avremo dunque in particolare:

$$\begin{aligned} A_{n+1,0} &= 1, \\ A_{n+1,1} &= 1 + A_{n,1}, \\ A_{n+1,2} &= 1 + A_{n,1} + A_{n,2} \\ &\dots \dots \dots \\ A_{n+1,n} &= 1 + A_{n,1} + A_{n,2} + \dots + A_{n,n}, \\ A_{n+1,n+1} &= A_{n,1} + A_{n,2} + \dots + A_{n,n} + A_{n,n+1}, \text{ ecc.} \end{aligned}$$

2. Chiameremo n^{mo} sistema di permutazioni l'insieme delle $n!$ permutazioni che si ottengono con n elementi distinti, e coefficienti fattoriali i numeri $1, A_{n,1}, A_{n,2}, \dots$.

La (1) permette di determinare i coefficienti fattoriali dell' $(n+1)^{\text{mo}}$ sistema di permutazioni, mediante quelli dell' n^{mo} sistema. Applicando la

(*) Se è $r = s$, l'elemento a_{n+1} va situato al primo posto a destra della permutazione considerata.

detta formula ai successivi sistemi di permutazioni, ed osservando che il 1° sistema contiene una sola permutazione, possiamo formare il seguente quadro dei coefficienti fattoriali.

1°.	1														
2°.	1	1													
3°.	1	2	2	1											
4°.	1	3	5	6	5	3	1								
5°.	1	4	9	15	20	22	20	15	9	4	1				
6°.	1	5	14	29	49	71	90	101	101	90	71	49	29	14	5

Il quadro può esser prolungato quanto si vuole, mediante la regola seguente:

Immaginando scritti degli zeri alla sinistra ed alla destra di ciascuna orizzontale, si ottiene un termine dell' n^{ma} orizzontale addizionando n termini successivi dell'orizzontale precedente, contando questi n termini da quello che occupa il medesimo posto e procedendo verso sinistra.

Sono evidenti le seguenti proprietà:

1°. La somma dei coefficienti fattoriali dell' n^{ma} sistema di permutazioni è uguale a $n!$

2°. I termini d'una stessa verticale del quadro esprimono i numeri delle permutazioni che nei vari sistemi presentano il medesimo numero d'inversioni.

3°. In ogni orizzontale del quadro i termini ugualmente distanti dagli estremi sono uguali.

4°. Il numero dei termini dell' n^{ma} orizzontale è $\frac{n(n-1)}{2} + 1$.

3. Al concetto di coefficiente fattoriale ora stabilito possiamo sostituirne un altro di carattere puramente algebrico.

Infatti, applicando la (1), otteniamo successivamente

$$A_{n+1,r} = \sum_{s_n=0}^n A_{n,r-s_n},$$

$$A_{n,r-s_n} = \sum_{s_{n-1}=0}^{n-1} A_{n-1,r-(s_n+s_{n-1})},$$

.

$$A_{2,r-(s_n+s_{n-1}+\dots+s_2)} = \sum_{s_1=0}^1 A_{1,r-(s_n+s_{n-1}+\dots+s_1)};$$

e quindi

$$A_{n+1,r} = \sum_{s_n=0}^n \sum_{s_{n-1}=0}^{n-1} \dots \sum_{s_1=0}^1 A_{1,r-(s_n+s_{n-1}+\dots+s_1)}.$$

Osservando che $A_{1,h}$ è nullo per tutti i valori non nulli di h , mentre è uguale ad 1 per $h=0$, possiamo concludere che $A_{n+1,r}$ esprime il numero delle soluzioni intere e positive dell'equazione

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n = r$$

colla condizione che sia $s_h \leq h$.

Siamo così pervenuti al seguente teorema:

Dati n elementi distinti, il numero delle permutazioni di essi che presentano r inversioni, rispetto alla permutazione principale, è uguale al numero delle soluzioni intere e positive del sistema misto

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = r, \quad x_h \leq h.$$

Mediante il calcolo diretto, e nell'ipotesi che sia $n \geq r$, troviamo successivamente:

$$\begin{aligned} A_{n,0} &= 1, \\ A_{n,1} &= n - 1, \\ A_{n,2} &= \frac{(n-2)(n+1)}{2}, \\ A_{n,3} &= \frac{n(n^2-7)}{6}, \\ A_{n,4} &= \frac{n(n+1)(n^2+n-14)}{24}, \\ A_{n,5} &= \frac{(n-1)(n+6)(n^3-9n-20)}{120}, \\ &\dots \end{aligned}$$

ma la ricerca va rapidamente complicandosi per i valori superiori di r .

4. Ai medesimi risultati possiamo arrivare anche nel modo seguente. Dalla (1) otteniamo

$$A_{n+1,r} - A_{n,r} = \sum_0^{n-1} A_{n,r-n+s},$$

ossia

$$(2) \quad \Delta A_{n,r} = \sum_0^{n-1} A_{n,r-n+s},$$

indicando con $\Delta A_{n,r}$ la differenza (prima) di $A_{n,r}$ presa rispetto ad n . Supposte quindi note le $A_{n,h}$ relative ai valori di h inferiori ad r , la (2) dimostra che $A_{n,r}$ è l'integrale indefinito alle differenze della somma

$$1 + A_{n,1} + \dots + A_{n,r-1}.$$

Il valore della costante che entra in tale integrale si determinerà assegnando ad n un valore particolare ($\geq r$), corrispondentemente al quale si conosca il valore di $A_{n,r}$.

Facendo $r=1$, la (2) diventa

$$\Delta A_{n,1} = A_{n,0} = 1;$$

quindi, ponendo $A_{n,1} = c_{1,0} + c_{1,1}n$, avremo

$$\Delta A_{n,0} = c_{1,1} = 1.$$

Si avrà dunque

$$A_{n,1} = c_{1,0} + n;$$

ma per $n=2$, abbiamo $A_{2,1} = 1$, quindi sarà $c_{1,0} + 2 = 1$, ossia

$$c_{1,0} = -1.$$

Resulta pertanto

$$A_{n,1} = n - 1.$$

Analogamente, avendosi

$$\Delta A_{n,2} = A_{n,0} + A_{n,1} = 1 + n - 1 = n,$$

e ponendo

$$A_{n,2} = c_{2,0} + c_{2,1}n + c_{2,2}n^2,$$

abbiamo

$$\Delta A_{n,2} = (c_{2,1} + c_{2,2}) + 2c_{2,2}n = n;$$

sarà quindi

$$2c_{2,2} = 1 \quad , \quad c_{2,1} + c_{2,2} = 0,$$

ossia

$$c_{2,2} = \frac{1}{2}, \quad c_{2,1} = -\frac{1}{2}.$$

Otteniamo perciò

$$A_{n,2} = c_{2,0} - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2.$$

Osservando poi che $A_{3,2} = A_{3,1} = 2$, ricaviamo

$$c_{2,0} = -1,$$

e quindi risulta

$$A_{n,2} = -1 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{(n-2)(n+1)}{2}.$$

Ecc. ecc.

5. Chiameremo *polinomio fattoriale* il polinomio di grado $\varepsilon_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

$$(3) \quad F_n(x) = x^{\varepsilon_n} + A_{n,1}x^{\varepsilon_n-1} + A_{n,2}x^{\varepsilon_n-2} + \dots + A_{\varepsilon_n-1}x + 1,$$

i cui coefficienti sono i successivi coefficienti fattoriali dell' n^{mo} sistema di permutazioni.

Osserviamo che, essendo

$$F_2(x) = x + 1, \quad F_3(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1,$$

possiamo scrivere

$$F_3(x) = (x^2 + x + 1)F_2(x).$$

Ammettiamo che sia

$$(4) \quad F_n(x) = (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)F_{n-1}(x),$$

e consideriamo il prodotto

$$(x^n + x^{n-1} + \dots + 1)F_n(x).$$

Se sviluppiamo questo prodotto, dopo aver sostituito ad $F_n(x)$ la sua espressione data dalla (3), otteniamo il polinomio

$$x^{\varepsilon_n+n} + M_1x^{\varepsilon_n+n-1} + \dots + M_r x^{\varepsilon_n+n-r} + \dots + 1,$$

in cui è

$$M_r = A_{n,r} + A_{n,r-1} + \dots + A_{n,r-n} = \sum_0^n A_{n,r-s},$$

ossia, per la (1),

$$M_r = A_{n+1,r};$$

inoltre abbiamo

$$\varepsilon_n + n = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{(n+1)n}{2} = \varepsilon_{n+1},$$

quindi quel prodotto è uguale al polinomio fattoriale $F_{n+1}(x)$ e la (4) è perciò vera in generale.

Attribuendo nella (4) ad n successivamente i valori $3, 4, \dots, n$, e moltiplicando membro a membro le uguaglianze risultanti, dopo semplicissime riduzioni e ricordando che $F_2(x) = x + 1$, otteniamo

$$F_n(x) = (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)(x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + 1) \dots (x + 1),$$

la quale dimostra che: *Le radici del polinomio fattoriale $F_n(x)$ sono uguali alle radici, diverse dall'unità, delle equazioni binomie*

$$x^n - 1 = 0, \quad x^{n-1} - 1 = 0, \quad \dots, \quad x^2 - 1 = 0.$$

Indichiamo con θ una radice ν^{ma} ($\nu \leq n$) primitiva dell'unità. Poichè θ è radice del polinomio $F_n(x)$, abbiamo

$$\theta^{\varepsilon_n} + A_{n,1} \theta^{\varepsilon_n-1} + \dots + A_{n,\varepsilon_n-1} \theta + 1 = 0,$$

od anche, essendo $A_{n,r} = A_{n,\varepsilon_n-r}$,

$$1 + A_{n,1} \theta + A_{n,2} \theta^2 + \dots + A_{n,\varepsilon_n-1} \theta^{\varepsilon_n-1} + \theta^{\varepsilon_n} = 0;$$

ricordando poi che, se $h \equiv k \pmod{\nu}$, è $\theta^h = \theta^k$, dalla precedente otteniamo

$$(5) \quad N_0 + N_1 \theta + N_2 \theta^2 + \dots + N_{\nu-1} \theta^{\nu-1} = 0,$$

dove abbiamo posto

$$N_r = A_{n,r} + A_{n,r+\nu} + A_{n,r+2\nu} + \dots$$

L'equazione (5) è soddisfatta da tutte le radici ν^{ma} primitive di 1, ed è facile convincersi che anche tutte le altre radici ν^{ma} di 1, diverse dall'unità, la soddisfanno ugualmente; quindi essa ammette tutte le radici dell'equazione

$$x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + \dots + x + 1 = 0.$$

Da ciò deduciamo che i coefficienti $N_0, N_1, \dots, N_{\nu-1}$ della (5) sono uguali, e siccome la loro somma è uguale a $n!$, ciascuno di essi è uguale a $\frac{n!}{\nu}$.

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema:

La somma dei coefficienti fattoriali dell' n^{mo} sistema di permutazioni, i cui secondi indici sono congrui rispetto ad un modulo ν , non superiore ad n , è costante ed uguale a $\frac{n!}{\nu}$.

Se conveniamo di porre in una classe tutte quelle permutazioni i numeri delle inversioni delle quali appartengono ad una stessa classe di numeri congrui rispetto al modulo ν , le $n!$ permutazioni di n elementi distinti possono dunque venir distribuite in ν classi, contenenti ciascuna $\frac{n!}{\nu}$ permutazioni.

Quindi due permutazioni, appartenenti ad una stessa classe, rispetto al modulo ν , si possono dedurre l'una dall'altra mediante una sostituzione che introduce o toglie un numero d'inversioni multiplo di ν .

Dott. LUIGI CARLINI.

SUL PRIMO TEOREMA DI ROSANES

Il primo teorema di Rosanes (Giornale di Crelle, Vol. 75) si suole dimostrare col calcolo simbolico come lo dimostrò la prima volta l'A. Esso si può però dimostrare in modo semplice anche per via diretta, come noi vogliamo ora mostrare.

Detto teorema si può enunciare così:

Condizione necessaria e sufficiente perchè date due forme dello stesso ordine n a fattori lineari distinti, ciascuna di esse sia esprimibile colle ennesime potenze dei fattori lineari dell'altra, è che si annulli l'invariante bilineare delle due forme. (*)

Sieno le due forme

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots + a_n x_2^n$$

$$\varphi = b_0 x_1^n + \binom{n}{1} b_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots + b_n x_2^n = p_1^{(1)} p_1^{(2)} p_1^{(3)} \dots p_1^{(n)},$$

dove in generale

$$p_1^{(r)} = p_1^{(r)} x_1 + p_2^{(r)} x_2.$$

Supponiamo che sia

$$f = A_1 p_1^{(1)n} + A_2 p_1^{(2)n} + \dots + A_n p_1^{(n)n}$$

dove A_1, A_2, \dots, A_n sono costanti. Dovrà essere

$$[1] \quad \begin{cases} a_0 = \sum_{r=1}^n A_r p_1^{(r)n} \\ a_1 = \sum_{r=1}^n A_r p_1^{(r)n-1} p_2^{(r)} \\ \dots \\ a_n = \sum_{r=1}^n A_r p_1^{(r)n} \end{cases}$$

Consideriamo l'invariante bilineare

$$I = a_0 b_n - \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \dots + (-1)^i \binom{n}{i} a_i b_{n-i} + \dots + a_n b_0;$$

per le [1] si avrà

$$I = b_n \sum_{r=1}^n A_r p_1^{(r)n} - \binom{n}{1} b_{n-1} \sum_{r=1}^n A_r p_1^{(r)n-1} p_2^{(r)} + \dots + (-1)^n b_0 \sum_{r=1}^n A_r p_1^{(r)n};$$

e raccogliendo opportunamente

$$I = \sum_{r=1}^n A_r \left[b_n p_1^{(r)n} - \binom{n}{1} b_{n-1} p_1^{(r)n-1} p_2^{(r)} + \dots + (-1)^n b_0 p_2^{(r)n} \right]$$

ma, essendo $p_1^{(1)}, p_1^{(2)} \dots p_1^{(n)}$ i fattori lineari di φ , si avrà

$$b_n p_1^{(r)n} - \binom{n}{1} b_{n-1} p_1^{(r)n-1} p_2^{(r)} + \dots + (-1)^n b_0 p_2^{(r)n} = 0,$$

dove $r = 1, 2, 3, \dots, n$, onde

$$I = 0$$

e così resta dimostrata la prima parte del teorema.

Veniamo alla seconda parte. Supponiamo che sieno date le due forme

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots + a_n x_2^n$$

$$\varphi = b_0 x_1^n + \binom{n}{1} b_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots + b_n x_2^n = p_1^{(1)} p_1^{(2)} \dots p_1^{(n)},$$

e sia

$$I = 0;$$

dico che la f si può esprimere linearmente colle ennesime potenze dei fattori lineari di φ .

(*) Tale invariante si chiama l'armonizzante delle due forme; quando esso è eguale a zero, le due forme si dicono coniugate od apolari od armoniche.

Cominciamo, per dimostrare ciò, col togliere l'omogeneità ponendo

$$\frac{x_1}{x_2} = x \quad \frac{p_2^{(r)}}{p_1^{(r)}} = p^{(r)}$$

si avrà

$$\varphi = P (x + p^{(1)}) (x + p^{(2)}) \dots (x + p^{(n)}),$$

essendo

$$P = p_1^{(1)} p_1^{(2)} \dots p_1^{(n)} x_2^n;$$

ed avremo pure

$$f = x_2^n (a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \dots + a_n).$$

Poniamo

$$f_1 = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \dots + a_n.$$

Affinchè sia

$$[2] \quad f_1 = m_1 (x + p^{(1)})^n + m_2 (x + p^{(2)})^n + \dots + m_n (x + p^{(n)})^n,$$

dove le m_r sono costanti, occorre che sia

$$[3] \quad \begin{cases} a_0 = m_1 + m_2 + \dots + m_n \\ a_1 = m_1 p^{(1)} + m_2 p^{(2)} + \dots + m_n p_n \\ \dots \\ a_i = m_1 p^{(1)^i} + m_2 p^{(2)^i} + \dots + m_n p_n^i \\ \dots \\ a_n = m_1 p^{(1)^n} + m_2 p^{(2)^n} + \dots + m_n p_n^n \end{cases}$$

e perchè queste sussistano in sistema il determinante dei coefficienti e dei termini noti deve esser zero cioè:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ p^{(1)} & p^{(2)} & \dots & p^{(n)} & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p^{(1)^i} & p^{(2)^i} & \dots & p^{(n)^i} & a_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p^{(1)^n} & p^{(2)^n} & \dots & p^{(n)^n} & a_n \end{vmatrix} = 0.$$

Ma questo determinante contiene, come dimostreremo tosto, per fattore 1, e quindi è nullo, cioè le (3) sussistono in sistema e si possono determinare tali valori per le m che la (2) sia soddisfatta, e quindi sia

$$f = x_2^n (m_1 (x + p^{(1)})^n + \dots + m_n (x + p^{(n)})^n),$$

da cui si ricava

$$f = A_1 p_1^{(1)n} + A_2 p_1^{(2)n} + \dots + A_n p_1^{(n)n},$$

dove si è posto

$$A_r = \frac{m_r}{p_1^{(r)n}} \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

cioè resta dimostrato il teorema.

Rimane solo da verificare che D contiene come fattore 1. Consideriamo perciò il coefficiente di a_i in D cioè $D_{i+1, n+1}$:

$$D_{i+1, n+1} = (-1)^{n+i+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ p^{(1)} & p^{(2)} & \dots & p^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p^{(1)^{i-1}} & p^{(2)^{i-1}} & \dots & p^{(n)^{i-1}} \\ p^{(1)^{i+1}} & p^{(2)^{i+1}} & \dots & p^{(n)^{i+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p^{(1)^n} & p^{(2)^n} & \dots & p^{(n)^n} \end{vmatrix}$$

Essendo

$$\begin{cases} b_0 (-p^{(1)})^n + \binom{n}{1} b_1 (-p^{(1)})^{n-1} + \dots + b_n = 0 \\ b_0 (-p^{(2)})^n + \binom{n}{1} b_1 (-p^{(2)})^{n-1} + \dots + b_n = 0 \\ \dots \\ b_0 (-p^{(n)})^n + \binom{n}{1} b_1 (-p^{(n)})^{n-1} + \dots + b_n = 0; \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} p^{(1)n} = \frac{b_1}{b_0} \binom{n}{1} p^{(1)n-1} + (-1) \binom{n}{1} \frac{b_2}{b_0} p^{(1)n-2} + \dots \\ \dots + (-1)^{n-i-1} \binom{n}{i} \frac{b_{n-1}}{b_0} p^{(1)^i} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{b_n}{b_0} \\ p^{(2)n} = \frac{b_1}{b_0} \binom{n}{1} p^{(2)n-1} + (-1) \binom{n}{2} \frac{b_2}{b_0} p^{(2)n-2} + \dots \\ \dots + (-1)^{n-i-1} \binom{n}{i} \frac{b_{n-1}}{b_0} p^{(2)^i} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{b_n}{b_0} \\ \dots \\ p^{(n)n} = \frac{b_1}{b_0} \binom{n}{1} p^{(n)n-1} + (-1) \binom{n}{2} \frac{b_2}{b_0} p^{(n)n-2} + \dots \\ \dots + (-1)^{n-i-1} \binom{n}{i} \frac{b_{n-1}}{b_0} p^{(n)^i} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{b_n}{b_0}; \end{cases}$$

si ha

$$\begin{aligned} D^{i+1, n+1} &= (-1)^{n+1} (-1)^{n-i-1} \binom{n}{i} \frac{b_{n-i}}{b_0} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p^{(1)} & p^{(2)} & p^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ p^{(1)^{i-1}} & p^{(2)^{i-1}} & \dots p^{(n)^{i-1}} \\ p^{(1)^{i+1}} & p^{(2)^{i+1}} & \dots p^{(n)^{i+1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ p^{(1)^{n-1}} & p^{(2)^{n-1}} & \dots p^{(n)^{n-1}} \\ p^{(1)^i} & p^{(2)^i} & \dots p^{(n)^i} \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \frac{b_{n-i}}{b_0} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p^{(1)} & p^{(2)} & p^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ p^{(1)^{n-1}} & p^{(2)^{n-1}} & \dots p^{(n)^{n-1}} \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

e quindi

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p^{(1)} & p^{(2)} & \dots p^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ p^{(1)^{n-1}} & p^{(2)^{n-1}} & \dots p^{(n)^{n-1}} \end{vmatrix} \frac{1}{b_0} \left\{ (-1)^n a_0 b_n + (-1)^{n-1} \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 \right\}.$$

Ma la quantità fra parentesi non è altro che 1, quindi $D=0$, e la dimostrazione resta così completata.

Nel sistema (3) una delle equazioni è conseguenza delle altre, cioè il sistema di valori delle m che soddisfa ad n di esse, soddisfa anche alla rimanente. Per avere quindi tali valori basterà considerare le prime n equazioni del sistema (3) risolverle rispetto alle m_1, m_2, \dots, m_n .

cioè

$$f(x_1 + x_2 - x_1) = f(x_1) + (x_2 - x_1) f'(x_1) + \frac{(x_2 - x_1)^2}{2!} f''(x_1) + \dots$$

$$\dots + \frac{(x_2 - x_1)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_1) + \frac{(x_2 - x_1)^n}{n!} f^{(n)}(x_1)$$

$$f(x_2 + (x_1 - x_2)) = f(x_2) + (x_1 - x_2) f'(x_2) + \frac{(x_1 - x_2)^2}{2!} f''(x_2) + \dots$$

$$\dots + \frac{(x_1 - x_2)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_2) + \frac{(x_1 - x_2)^n}{n!} f^{(n)}(x_2)$$

$$\dots$$

$$f(x_n + (x_1 - x_n)) = f(x_n) + (x_1 - x_n) f'(x_n) + \frac{(x_1 - x_n)^2}{2!} f''(x_n) + \dots$$

$$\dots + \frac{(x_1 - x_n)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_n) + \frac{(x_1 - x_n)^n}{n!} f^{(n)}(x_n)$$

dalle quali si deducono le seguenti

$$- f(x_1) = \frac{x_2 - x_1}{2!} f''(x_1) + \dots + \frac{(x_2 - x_1)^{n-2}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_1) + \frac{(x_2 - x_1)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(x_1)$$

$$- f(x_2) = \frac{x_3 - x_2}{2!} f''(x_2) + \dots + \frac{(x_3 - x_2)^{n-2}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_2) + \frac{(x_3 - x_2)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(x_2)$$

$$\dots$$

$$- f(x_n) = \frac{x_1 - x_n}{2!} f''(x_n) + \dots + \frac{(x_1 - x_n)^{n-2}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_n) + \frac{(x_1 - x_n)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(x_n)$$

Moltiplicando membro a membro quest'eguaglianze, si ha

$$f'(x_1) f'(x_2) \dots f'(x_n) =$$

$$= (-1)^n \left[\frac{x_1 - x_n}{2!} f''(x_n) + \dots + \frac{(x_1 - x_n)^{n-2}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_n) + \frac{(x_1 - x_n)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(x_n) \right] \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n-1} \left[\frac{x_{i+1} - x_i}{2!} f''(x_i) + \dots + \frac{(x_{i+1} - x_i)^{n-2}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(x_i) \right]$$

questa relazione indica che: « Il discriminante della $f(x)$ si può anche esprimere mediante i valori che le derivate $2^a, 3^a, \dots, n^a$ prendono negli zeri della $f(x)$ moltiplicati rispettivamente per potenze della forma $(x_i - x_j)^i$ per $i=1, 2, \dots, n-1$.

3. Dalla (4) si deduce:

a) Che il prodotto $f'(x_1) f'(x_2) \dots f'(x_n)$, essendo una funzione pari, non si altera allorchè ad x_1, x_2, \dots, x_n si sostituiscono le radici della trasformata in $-x$.

b) I valori della derivata di $f(x)$ negli zeri della funzione non possono essere tutti numeri primi tra loro due a due.

c) La $f'(x)$ acquista negli zeri della funzione un numero pari di valori negativi se il grado n della funzione è della forma $4K$ ovvero $4K + 1$, ne acquista un numero impari se è della forma $4K - 1$ o $4K - 2$.

4. La (4), che esprime il discriminante della $f(x)$ mediante il prodotto

$$f'(x_1) f'(x_2) \dots f'(x_n)$$

offre il mezzo di poter determinare il segno che assume $f'(x)$ negli zeri estremi x_1, x_n della funzione $f(x)$.

Disposte a tal modo le radici della $f(x)$ in ordine crescente, che supponiamo sia $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$, esisteranno, pel teorema di Rolle, tra esse $n - 1$ radici reali e distinte che ammette la $f'(x)$ eguagliata a zero, che come abbiamo supposto sono

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-2}, \xi_{n-1}.$$

che supponiamo anche disposte in ordine crescente, e giacchè tra due radici consecutive della $f(x) = 0$ se ne troverà una sola della $f'(x) = 0$ avremo

$$x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < \dots < x_{n-1} < \xi_{n-1} < x_n.$$

quindi la $f'(x)$ dovrà cambiar di segno allorchè, x , variando, passa dal valore x_i a quello x_{i+1} , quindi la successione

$$f'(x_1), f'(x_2), \dots, f'(x_n) \tag{A}$$

presenterà $n - 1$ variazioni di segno.

Distingueremo quattro casi:

a) Se il grado n di $f(x)$ è della forma $4k$ il discriminante è positivo, vi saranno nella successione (A) un numero pari di valori negativi, la $f'(x)$ negli zeri estremi x_1, x_n assume valori di segno opposto dovendo la (A) presentare $4k - 2$ variazioni di segno, sarà

$$\frac{f'(x_1)}{f'(x_{4k})} < 0.$$

Per precisare il segno di $f'(x_1)$ e di $f'(x_{4k})$ basterà osservare la prima e l' n^{ma} delle (4) o delle (5), osservando per es. le (5) si trova che la prima contiene $4k - 1$ fattori negativi, mentre i fattori della n^{ma} sono tutti positivi, sarà quindi

$$f'(x_1) < 0, \quad f'(x_{4k}) > 0.$$

La curva rappresentata da $y = f'(x)$ dopo avere incontrato l'asse delle x in $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{4k-1}$ giace tutta da parte opposta all'asse delle x .

b) Se $n = 4k + 1$, il discriminante sarà positivo, il primo membro delle (4) ammetterà un numero pari di valori negativi, e dovendo la successione (A) avere $4k$ variazioni di segno la derivata $f'(x)$ in x_1 ed x_{4k+1} assume due valori positivi

$$f'(x_1) > 0, \quad f'(x_{4k+1}) > 0.$$

La curva rappresentata dall'equazione $y = f'(x)$ dopo d'aver incontrato l'asse delle x in $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{4k}$ giace tutta da una banda dell'asse delle x e nel semipiano in cui trovansi le y positive.

c) Se $n = 4k - 1$, il discriminante sarà negativo, il primo membro della (4) ammetterà un numero impari di valori negativi, e dovendo la successione (A) avere $4k - 2$ variazioni di segno sarà

$$f'(x_1) > 0, \quad f'(x_{4k-1}) > 0.$$

La curva $y = f'(x)$ dopo d'aver incontrato l'asse delle x in $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{4k-2}$, giace tutta nel semipiano in cui trovansi le y positive.

d) Se $n = 4k - 2$, il discriminante sarà negativo, il primo membro della (4) ammetterà un numero impari di fattori negativi, e dovendo avere la successione (A) $4k - 3$ variazioni di segno, saranno $f'(x_1)$ ed $f'(x_{4k-2})$ di segno opposto, cioè:

$$\frac{f'(x_1)}{f'(x_{4k-2})} < 0.$$

Per precisare il segno basterà osservare la 1^a e l' n^{ma} delle (3) o delle (5) e si troverà:

$$f'(1) < 0, \quad f'(x_{4k-2}) > 0.$$

La curva rappresentata da $y = f'(x)$ giace da parte opposta dell'asse delle x dopo averlo incontrato in $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{4k-3}$.

5. Per studiare i valori della $f(x)$ negli zeri estremi della sua derivata $f'(x)$, basterà ricordare la (9) che esprime il discriminante mediante il prodotto.

$$f(\xi_1) f(\xi_2) \dots f(\xi_{n-1}).$$

Osserveremo che essendo comprese tra le radici $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ della $f'(x) = 0$, $n-2$ radici x_2, x_3, \dots, x_{n-1} della $f(x) = 0$, la $f(x)$ dovrà cambiar di segno allorché x varia da ξ_i a ξ_{i+1} , cioè la $f(\xi_i)$ sarà di segno opposto a $f(\xi_{i-1})$, onde la successione

$$f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_{n-1}) \quad (B)$$

presenterà $n-2$ variazioni di segno.

Distingueremo anche qui 4 casi

a) $n = 4k$: Il discriminante sarà positivo, il prodotto $f(\xi_1) f(\xi_2) \dots f(\xi_{n-1})$ avrà un numero pari di fattori negativi, e dovendo la successione (B) avere $4k-2$ variazioni di segno sarà

$$f(\xi_1) < 0, \quad f(\xi_{4k-1}) < 0.$$

La curva, $y = f(x)$ dopo avere incontrato l'asse delle x in x_1, x_2, \dots, x_{4k} , giace nel semipiano ove si trovano le y positive.

b) $n = 4k + 1$: Il discriminante sarà positivo, il prodotto

$$f(\xi_1) f(\xi_2) \dots f(\xi_{4k})$$

avrà un numero pari di fattori negativi, la successione (B) dovendo presentare $(4k-1)$ variazioni di segno, prenderà negli estremi valori di segno opposto, cioè

$$\frac{f(\xi_{4k})}{f(\xi_1)} < 0.$$

Per precisare il segno bisognerà ricordare la 1^a e l' $(n-1)^{\text{ma}}$ dello (7) e si troverà

$$f(\xi_1) > 0, \quad f(\xi_{4k}) < 0.$$

La curva $y = f(x)$ incontrerà l'asse delle x nei punti x_1, x_2, x_{4k+1} e si estenderà nelle due parti di piano opposte rispetto all'asse delle x .

c) $n = 4k - 1$. Il discriminante sarà negativo, il prodotto

$$f(\xi_1) f(\xi_2) \dots f(\xi_{4k-2})$$

avrà un numero impari di fattori negativi, la successione (B) avrà $4k-3$ variazioni di segno, sarà perciò $\frac{f(\xi_1)}{f(\xi_{4k-2})} < 0$, osservando la 1^a e l' $(n-1)^{\text{ma}}$ delle (7) si troverà

$$f(\xi_1) > 0, \quad f(\xi_{4k-2}) < 0.$$

La curva $y = f(x)$ dopo avere incontrato l'asse delle x nei punti $x_1, x_2, \dots, x_{4k-1}$ si estenderà nelle due parti di piano opposte rispetto all'asse delle x .

d) $n = 4k - 2$. Il discriminante sarà negativo il prodotto

$$f(\xi_1) f(\xi_2) \dots f(\xi_{4k-3})$$

avrà un numero impari di fattori negativi, la successione (B) dovendo presentare $4(k-1)$ variazioni di segno, la $f(x)$ negli estremi prenderà segno negativo

$$f(\xi_1) < 0, \quad f(\xi_{4k-3}) < 0.$$

La curva $y = f(x)$ dopo incontrato l'asse delle x nei punti

$$x_1, x_2 \dots x_{4k-2}$$

si estende nei due semipiani determinati dall'asse delle x .

Da quanto abbiamo detto si deduce che basta conoscere la forma di n per decidere dei segni che prende la $f(x)$ negli zeri estremi della sua derivata e viceversa.

Riassumiamo i risultati nel seguente prospetto

n	Δ	$f'(x)$	$f(x)$
$4k$	$\Delta > 0$	$f'(x_1) < 0, \quad f'(x_{4k}) > 0$	$f(\xi_1) < 0, \quad f(\xi_{4k-1}) < 0$
$4k+1$	$\Delta > 0$	$f'(x_1) > 0, \quad f'(x_{4k+1}) > 0$	$f(\xi_1) > 0, \quad f(\xi_{4k}) < 0$
$4k-1$	$\Delta < 0$	$f'(x_1) > 0, \quad f'(x_{4k-1}) > 0$	$f(\xi_1) > 0, \quad f(\xi_{4k-2}) < 0$
$4k-2$	$\Delta < 0$	$f'(x_1) < 0, \quad f'(x_{4k-2}) > 0$	$f(\xi_1) < 0, \quad f(\xi_{4k-3}) < 0$

onde possiamo dire

1°. La $f(x)$ nello zero estremo a destra di $f'(x)$ prende valore negativo, ed $f'(x)$ nello zero estremo a destra di $f(x)$ assume segno positivo.

2°. Se la funzione $f(x)$ è di grado pari, negli zeri estremi della $f'(x)$ prende valori negativi, mentre se è di grado impari prende valori di segno opposto.

3°. La $f'(x)$ prende negli zeri estremi della $f(x)$ due valori di segno opposto se $f(x)$ è di grado pari, mentre assume valori positivi se è di grado impari.

VINCENZO CORRENTI.

SULL' IACOBIANO DI UN SISTEMA DI FORME

In questa breve nota diamo una dimostrazione semplice e metodica del seguente teorema.

L'Iacobiano di un sistema di m forme algebriche

$$f_1, f_2, f_3 \dots f_m \tag{1}$$

dipendenti da m variabili $x_1, x_2, x_3 \dots x_m$ è eguale al prodotto

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \dots \frac{\partial F_m}{\partial x_m},$$

essendo F_2 l'espressione in cui si converte f_2 rimpiazzando la x_1 col suo valore in funzione di f_1 e di $x_2, x_3 \dots x_m$, F_3 l'espressione che si ottiene mettendo in f_3 al posto di x_1 il valore testè ottenuto e al posto di x_2 il suo valore in funzione di f_1, f_2 e di $x_3 \dots x_m$ e così di seguito fino ad F_m .

della diagonale principale, essendo gli elementi di questa

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F_m}{\partial x_m},$$

e, quindi, si avrà

$$J = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \quad \text{c, v. d.}$$

A. BOZAL Y OBEJERO.

SU ALCUNI DETERMINANTI CIRCOLANTI ORLATI

Consideriamo il circolante di elementi $a_1 a_2 \dots a_n$, quello di elementi $b_1 b_2 \dots b_n$; un altro di elementi $\underbrace{c \ 0 \dots 0}_{1 \ 2 \dots n}$ ed un ultimo di elementi $\underbrace{d \ 0 \dots 0}_{1 \ 2 \dots n}$; orliamo il primo circolante con gli altri formando il determinante

$$D = \begin{vmatrix} c \ 0 \dots 0 & d \ 0 \dots 0 \\ 0 \ 0 \dots c & 0 \ 0 \dots d \\ \dots & \dots \\ 0 \ c \dots 0 & 0 \ d \dots 0 \\ b_1 \ b_2 \dots b_n & a_1 \ a_2 \dots a_n \\ b_2 \ b_3 \dots b_1 & a_2 \ a_3 \dots a_1 \\ \dots & \dots \\ b_n \ b_1 \dots b_{n-1} & a_n \ a_1 \dots a_{n-1} \end{vmatrix},$$

il quale, a meno del fattore $(-1)^{\binom{n-1}{2}}$, equivale a

$$D_1 = \begin{vmatrix} c \ 0 \dots 0 & d \ 0 \dots 0 \\ 0 \ c \dots 0 & 0 \ d \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 \ 0 \dots c & 0 \ 0 \dots d \\ b_1 \ b_2 \dots b_n & a_1 \ a_2 \dots a_n \\ b_2 \ b_3 \dots b_1 & a_2 \ a_3 \dots a_1 \\ \dots & \dots \\ b_n \ b_1 \dots b_{n-1} & a_n \ a_1 \dots a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Se dalle colonne $(n+1)^{\text{esima}}$, $(n+2)^{\text{esima}}$... $2n^{\text{esima}}$ di D_1 si sottraggono rispettivamente le colonne 1^{a} , 2^{a} ... n^{esima} moltiplicate per $\frac{d}{c}$, si ha:

$$D_1 = \begin{vmatrix} c \ 0 \ 0 \dots 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ 0 \ c \ 0 \dots 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \ 0 \ 0 \dots c & 0 & 0 & \dots 0 \\ b_1 \ b_2 \ b_3 \dots b_n & a_1 - b_1 \frac{d}{c} & a_2 - b_2 \frac{d}{c} \dots a_n - b_n \frac{d}{c} \\ b_2 \ b_3 \ b_4 \dots b_1 & a_2 - b_2 \frac{d}{c} & a_3 - b_3 \frac{d}{c} \dots a_1 - b_1 \frac{d}{c} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n \ b_1 \ b_2 \dots b_{n-1} & a_n - b_n \frac{d}{c} & a_1 - b_1 \frac{d}{c} \dots a_{n-1} - b_{n-1} \frac{d}{c} \end{vmatrix};$$

ossia:

$$D_1 = c^n \begin{vmatrix} a_1 - b_1 \frac{d}{c}, & a_2 - b_2 \frac{d}{c} & \dots & a_n - b_n \frac{d}{c} \\ a_2 - b_2 \frac{d}{c}, & a_3 - b_3 \frac{d}{c} & \dots & a_1 - b_1 \frac{d}{c} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n - b_n \frac{d}{c}, & a_1 - b_1 \frac{d}{c} & \dots & a_{n-1} - b_{n-1} \frac{d}{c} \end{vmatrix};$$

e quindi:

$$(-1)^{\binom{n-1}{2}} D = \begin{vmatrix} a_1 c - b_1 d & a_2 c - b_2 d & \dots & a_n c - b_n d \\ a_2 c - b_2 d & a_3 c - b_3 d & \dots & a_1 c - b_1 d \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n c - b_n d & a_1 c - b_1 d & \dots & a_{n-1} c - b_{n-1} d \end{vmatrix}$$

Dunque: Un determinante formato orlando un circolante di elementi $a_1 \dots a_n$ con un circolante di elementi b_1, b_2, \dots, b_n , uno di elementi d, o, \dots, o ed uno di elementi c, o, \dots, o , in modo che quest'ultimo formi l'incrociamiento ai due precedenti, equivale a meno del fattore $(-1)^{\binom{n-1}{2}}$, al circolante di elementi $a_1 c - b_1 d, a_2 c - b_2 d, \dots, a_n c - b_n d$.

APPLICAZIONI.

a) Facciamo $d = x$ e, per semplicità, $c = 1$; consideriamo allora l'equazione

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & o & \dots & o & x & o & \dots & o \\ o & o & \dots & 1 & o & o & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ o & 1 & \dots & o & o & x & \dots & o \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_2 & b_3 & \dots & b_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & b_1 & \dots & b_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

In virtù del teorema precedente e di una notissima proprietà dei circolanti, il primo membro equivale, a meno del segno, a

$$\prod_{i=1}^n \{ (a_1 - b_1 x) + \alpha_i (a_2 - b_2 x) + \dots + \alpha_i^{n-1} (a_n - b_n x) \}$$

dove α_i è una delle radici di $x^n - 1 = 0$. L'equazione $f(x) = 0$ è dunque riducibile nel campo di razionalità di a_i, b_i, α_i , ed ha per radici

$$\alpha_i = \frac{a_1 + a_2 \alpha_i + \dots + a_n \alpha_i^{n-1}}{b_1 + b_2 \alpha_i + \dots + b_n \alpha_i^{n-1}} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

b) Facciamo ora inoltre $b_1 = x, b_2 = b_3 = \dots, b_n = 0$; in questo caso, senza alterazione di segno, possiamo scrivere il determinante orlato così:

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} 1 & o & \dots & o & x & o & \dots & o \\ o & o & \dots & 1 & o & x & \dots & o \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ o & 1 & \dots & o & o & o & \dots & x \\ x & o & \dots & o & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ o & x & \dots & o & a_2 & a_3 & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ o & o & \dots & x & a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

E l'equazione $\varphi(x) = 0$ ha per radici

$$x_i = \pm \sqrt{a_1 + a_2 \alpha_i + \dots + a_n \alpha_i^{n-1}} \quad (i=1, 2 \dots n).$$

c) Ritornando al caso a) supponiamo $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$, ma $(1 \ 2 \dots n) \neq 0$. Allora il circolante di elementi $1 - b_1 x, \dots, 1 - b_n x$ si riduce, sviluppato, semplicemente a $(-1)^n x^n (1 \ 2 \dots n) + (-1)^{n-1} x^{n-1} \Sigma (1 \ 2 \dots i' \dots n)$; la equazione $f(x) = 0$ ha dunque, in questo caso, $n - 1$ radici nulle, e l'altra è data da

$$x = \frac{\Sigma (1 \ 2 \dots i' \dots n)}{(1 \ 2 \dots n)}$$

d) Restando ancora nelle ipotesi del caso a) supponiamo $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$, ma $\Sigma (1' \ 2' \dots i' \dots n') \neq 0$.

In questo caso il circolante di elementi $a_1 - x, \dots, a_n - x$ si riduce, sviluppato, semplicemente ad $(1' \ 2' \dots n') - x (1' \ 2' \dots i' \dots n')$; la equazione $f(x) = 0$ ha dunque, in questo caso, $n - 1$ radici infinite e l'altra è data da

$$x = \frac{(1' \ 2' \dots n')}{\Sigma (1' \ 2' \dots i' \dots n')}$$

e) Finalmente particularizziamo il caso b) supponendo $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$, allora la somma $a_1 + a_2 \alpha_i + \dots + a_n \alpha_i^{n-1}$ è nulla sempre, eccetto il caso $\alpha_i = 1$; l'equazione $\varphi(x) = 0$ ha dunque in questo caso $2(n - 1)$ radici nulle e le altre due son date da $x \pm \sqrt{n}$.

R. OCCHIPINTI.

QUISTIONI PROPOSTE

642. Sia c^1 un cerchio fisso e c'^2 un altro che rotoli sopra quello. Da un punto fisso A di c^1 si conducano le tangenti AM e AN a c'^2 ; il luogo dei punti di contatto M ed N è una *sestica tricircolare*. Si studino i punti singolari di tale curva.

L'involuppo della retta MN è una *ellisse*. Quale relazione deve legare i raggi dei due cerchi affinchè l'ellisse degeneri?

643. Sia c^1 un cerchio fisso di centro C e c'^2 uno di raggio variabile e di centro C', e sia P un punto d'intersezione dei due cerchi; il luogo delle ulteriori intersezioni tanto dei raggi CP con c'^2 , quanto delle tangenti in P a c^1 con c'^2 , sono *conchiglie di Pascal*, simmetriche l'una dell'altra. In particolare se la distanza dei centri CC' è metà del raggio di c^1 si hanno due *cardioidi*.

644. Si considerino tutte le coniche simili γ^2 , aventi un fuoco F sopra un dato cerchio c^1 di centro C e di raggio r e aventi per direttrice corrispondente una data retta d; si dimostri che:

a) L'involuppo di tali coniche è, in generale, una coppia di coniche simili alle γ^2 . (*)

b) Il luogo dei centri delle γ^2 (quando queste sono coniche centrali) è, in generale, un'ellisse.

c) Il luogo dei vertici delle γ^2 è composto di due coniche, di cui una è sempre una ellisse, e l'altra è ellisse se le γ^2 son dotate di

(*) V. il n. 42 dei miei *Esercizi di Geometria Analitica*, pubblicati nel v. XVI di questo periodico. (G. C.-L.)

centro, e si scinde invece in una coppia di rette parallele o coincidenti se le γ^2 sono parabole.

d) Il luogo dei secondi fuochi delle γ^2 (nel caso in cui queste sieno coniche centrali) è una ellisse.

e) Il luogo delle intersezioni delle γ^2 con le tangenti in F a c^2 è, in generale, una conica simile alle γ^2 . Trovare la condizione che deve essere soddisfatta, affinché tale conica degeneri, e dimostrare che nel caso in cui le γ^2 sono parabole, tale condizione esprime che d passa per C.

f) Il luogo delle intersezioni delle γ^2 coi raggi CF coincide con l'involuppo delle γ^2 (vedi a).

g) Il luogo delle intersezioni delle γ^2 con le parallele condotte da F a d è composto di due ellissi; queste sono concentriche in C quando d passa per C.

Si esaminino in tutta questa questione i seguenti casi particolari:

1. Se le γ^2 sono parabole.

2. Se d è tangente a C^2 .

3. Se d passa per C.

4. Se, indicando con k la distanza di C da d e con e l'eccentricità delle γ^2 , è $e = \frac{r}{k}$.

G. CARDOSO-LAYNES.

645. Sopra una retta (o una curva qualunque di genere zero) si hanno due gruppi armonici di punti $A_1 B_1 C_1 D_1$ e $A_2 B_2 C_2 D_2$ ($A_1 C_1$ separati da $B_1 D_1$, $A_2 C_2$ da $B_2 D_2$); la involuzione definita dalle due coppie di punti coniugati $A_1 C_1$, $A_2 C_2$, che denotiamo con $(A_1 C_1; A_2 C_2)$, e la involuzione $(B_1 D_1; B_2 D_2)$ hanno una coppia comune, che indicheremo con $A_3 C_3$; le due involuzioni $(A_1 C_1; B_2 D_2)$ e $(A_2 C_2; B_1 D_1)$ hanno una coppia comune che indichiamo con $B_3 D_3$: dimostrare che il gruppo $A_3 B_3 C_3 D_3$ è armonico.

V. RETALI.

BIBLIOGRAFIA

CARRARA. — *I tre problemi classici degli antichi in relazione ai recenti risultati della scienza. Studio storico-critico.* — Problema secondo. *La duplicatura del cubo* (Estratto dalla "Rivista di Fisica mat. e Scienze nat. ").

Nel n. 3 anno XVIII di questo Periodico abbiamo reso conto della prima parte di questa interessante pubblicazione relativa al primo problema, cioè la *quadratura del circolo*.

In questa seconda parte, l'egregio A. dopo avere brevemente e lucidamente mostrata l'impossibilità di risolvere il celebre problema di Delo, adoperando solamente la riga ed il compasso, fa la storia del problema medesimo, cominciando dalle varie leggende sull'origine di esso, ed osservando giustamente che anche senza ricorrere ad origini favolose, molti ritengono che tale problema non fosse che un passo naturale conseguente a quello della duplicazione del quadrato.

Nei primi cinque capitoli, dopo avere accennato che Ippocrate ridusse il problema della duplicazione del cubo all'altro della ricerca di due medie geometriche, l'A. espone le varie risoluzioni proposte da Archita, Platone, Menecmo, Eratostene, Apollonio, Erone, Nicomede, Diocle, ed altri antichi geometri coll'aiuto di curve diverse dal circolo, o di strumenti meccanici, secondo le memorie lasciate princi-

palmente da Pappo nelle sue preziose *Collezioni*; e fa pure cenno dei pochi matematici, successivi a Pappo e anteriori a Cartesio, che si occuparono della quistione.

Il capitolo VI è destinato a trattare dell'influenza decisiva che sullo studio del problema ebbe la scoperta della geometria analitica.

Il cap. VII contiene la storia del problema da Cartesio ad oggi ed il cap. VIII tratta di alcune soluzioni approssimate, che possono avere qualche utilità dal punto di vista pratico, e che per la massima parte sono state trovate da ricercatori indotti, e che credevano con esse di avere risoluto *esattamente* il problema.

L'opera è scritta con la chiarezza e precisione, consuete all'egregio A. e costituisce una lettura piacevole ed utile. K.

LUIGI CREMONA

Il 10 del corrente mese di giugno si spense in Roma di male cardiaco il **Prof. Sen. Luigi Cremona**.

La sua morte è lutto della patria, che perde in lui una delle sue glorie più fulgide e più pure, un carattere integro e diritto, una mente superiore, che con eguale abilità si adattava allo studio delle più ardue ed astratte quistioni matematiche, come a quello delle quistioni politiche e sociali; è lutto della scienza matematica universale, nella quale ha lasciato tracce imperiture, nella quale insieme al Betti, al Brioschi, al Beltrami, che lo hanno di poco preceduto nella tomba ha occupato durante la seconda metà dello scorso secolo una delle posizioni più eminenti, onorando il nome d'Italia; è lutto delle scuole tutte italiane, delle quali nei suoi alti e molteplici uffici curava tanto bene gl'interessi.

Luigi Cremona nacque il 7 dicembre 1830 a Pavia, ed ivi compì con somma lode gli studi liceali ed universitari, avendo a compagni Benedetto e Giovanni Cairoli. Nel 1848, lasciata la scuola, si arruolò fra i volontari, e per 18 mesi prese parte alle guerre dell'indipendenza sul Piave, a Treviso e poi a Venezia fino alla capitolazione avvenuta nell'agosto 1849.

Tornato a Pavia, continuò gli studi sotto la guida dell'illustre Brioschi, e conseguì la laurea e il diploma di abilitazione all'insegnamento nelle scuole secondarie.

Fu per alcuni mesi *tirocinante* e libero conferenziere nel liceo di Pavia; poi professore del Ginnasio di Cremona, e finalmente all'Università di Bologna per disposizione del Brioschi. Da Bologna passò al Politecnico di Milano, e finalmente nel 1873 fu chiamato a Roma dal ministro Scialoja per riordinare la scuola degl'ingegneri e la facoltà di matematiche.

Da quasi 30 anni egli insegnava matematiche superiori in quella Università e dirigeva la scuola degl'ingegneri, alla quale aveva data una vita novella e rigogliosa, circondato dalla stima ed ammirazione dei colleghi, dalla venerazione degli studenti; e la facoltà matematica stava decretando solenni onoranze al restauratore e riordinatore benemerito dei severi studi dell'ingegneria in Italia, quando la morte lo rapiva.

Non ci proponiamo qui di analizzare l'opera magistrale del Cremona, ma non possiamo tacere come sia stato grandissimo merito di lui l'aver messo in onore in Italia gli studi di geometria pura, che prima erano stati assolutamente trascurati, e di essere stato il fondatore di una scuola geometrica Italiana, che vanta ormai numerosi

e valentissimi cultori. Colle sue ricerche egli ha largamente mietuto in un campo quasi vergine ed ha dischiusa la via in un terreno poco esplorato ad altri valenti ricercatori.

Fra le sue più importanti opere scientifiche non si può tacere dei lavori che si connettono al tentativo di costruire una teoria proiettiva delle linee e superficie algebriche, fra le quali notevolissima la *memoria sulle superficie del terz'ordine* che ebbe il premio Steiner; e quelle relative alle *trasformazioni birazionali*, che da lui furono dette *cremoniane*, e che sono state la prima origine di tante ricerche importantissime, ed hanno contribuito a gettare nuova luce sulla teoria delle curve e superficie.

È pure interessante ricordare come egli dedicò molta parte della sua attività alla didattica, quasi volendo dimostrare che gli studi più elevati non potevano fargli dimenticare il primo e modesto suo insegnamento nel Ginnasio e Liceo; e la caratteristica del suo insegnamento fu sempre la cura minuziosa e delicata per i principi fondamentali della sua scienza.

Prova della sua attività in questo campo sono: 1° la traduzione degli ottimi *Elementi di matematica* di R. Baltzer pubblicata dal 1866 al 1868; 2° gli *Elementi di geometria proiettiva* ad uso degli Istituti tecnici del regno d'Italia pubblicati nel 1873, quando egli era professore di geometria superiore al R. Istituto tecnico superiore di Milano; 3° gli *Elementi di calcolo grafico* ad uso degli Istituti tecnici, pubblicati nel 1874. La prima di queste opere destinata alle scuole secondarie del regno d'Italia, non è giunta, almeno crediamo, alla 2ª edizione, ma ha infuso una vita nuova all'insegnamento elementare, e ad essa hanno attinto quanti si son dedicati a migliorare l'insegnamento secondario, che era caduto assai in basso.

Le altre due, che pure non sono giunte alla 2ª edizione, e che si riferiscono a materie che hanno fatto per pochissimo tempo parte dell'insegnamento tecnico, hanno largamente contribuito ad introdurre l'insegnamento importantissimo della geometria proiettiva nel 1° biennio dell'Università, e quello così utile della statica grafica nel 1° anno di applicazione per gli ingegneri.

Nel campo della statica grafica ricordiamo l'interessantissimo opuscolo *Le figure reciproche nella statica grafica* (Milano, Bernardoni, 1872), di cui il Migotti fece una traduzione tedesca a Vienna, nel quale si dà il metodo semplice e pratico oggi in uso per calcolare graficamente colla massima rapidità gli sforzi a cui sono sottoposte le varie parti di una travatura.

Il Cremona ebbe tutti gli onori che si dovevano ai suoi altissimi meriti. Fece parte di quasi tutte le società ed Accademie scientifiche italiane e straniere, e fra queste citiamo la Società reale di Londra poichè ben raramente questa società conferisce un tale onore a stranieri. Dal 16 marzo 1879 faceva parte del Senato, e ne fu a lungo anche Vice-Presidente; fu anche ministro della pubblica istruzione, ma disgraziatamente solo per pochi giorni, dal 1 al 29 giugno 1898. La lunga pratica della scuola fatta nell'insegnamento, nel consiglio superiore dell'istruzione, nella direzione della scuola degli ingegneri, indicavano il Cremona come uno degli uomini politici più adatti a reggere l'alto ufficio di Ministro, la pubblica opinione prevedeva che avrebbe saputo fare molto bene alla scuola, all'istruzione e all'educazione del popolo, correggendo tante cose; e forse per queste ragioni fu ministro solo per pochi giorni.

Ecco un elenco delle principali pubblicazioni disseminate nei periodici scientifici e negli atti di alcune Accademie.

Annali di scienze matematiche-fisiche pubblicati a Roma da B. Tortolini:

1. Sulle tangenti sfero-conjugate. 6^o vol. 1855.
2. Intorno ad un teorema di Abel. 7^o vol. 1856.
3. Sulle linee del terz'ordine a doppia curvatura. 2^a serie, 1^o e 2^o vol. 1858-59.
4. Intorno alla superficie della seconda classe inscritta in una stessa superficie sviluppabile della quarta classe. 2^o vol. 1859.
5. Intorno alle coniche inscritte in una stessa superficie sviluppabile del quart'ordine (e terza classe) id. id.
6. Sopra un problema generale di geometria. 3^o vol. 1860.
7. Intorno ad una proprietà delle superficie curve, che comprende in sè come caso particolare il teorema di Dupin sulle tangenti conjugate. Id. id.
8. Sulle coniche e sulle superficie di second'ordine congiunte. Id. id.
9. Intorno alla curva gobba del quart'ordine per la quale passa una sola superficie di secondo grado. 4^o vol. 1861.
10. Sopra alcune questioni nella teoria delle curve piane. 6^o vol. 1864.

Annali di matematiche diretti da Brioschi e Cremona (2^a Serie):

11. Rappresentazione di una classe di superficie gobbe sopra un piano e determinazione delle loro curve assintotiche. 1 vol. 1867-68.

Nouvelles Annales de Mathématiques par MM. Terquem et Gerono:

12. Sur les coniques sphériques. 19^{me} vol. 1860.
13. Propriété de la cubique gauche. Id. id.
14. Mémoire de Géométrie pure sur les cubiques gauches. 2^{me} série, 1 vol. 1862.
15. Démonstration géométrique de deux théorèmes relatif à la surface d'égale pente circonscrite à une conique. 4^{me} vol. 1865.

Atti del R. Istituto Lombardo di Scienze, lettere ed arti di Milano:

16. Sulle superficie gobbe del terz'ordine. 3^o vol. 1860.

Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna:

17. Introduzione ad una teoria geometrica dalle curve piane. 12^o vol. 1861. (*)
18. Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. 2^a serie, 2^o vol. 1862.
19. Nuove ricerche di geometria pura sulle cubiche gobbe ed in ispecie sulla parabola gobba. 3^o vol. 1863.
20. Preliminari ad una teoria geometrica dalle superficie. 6^o vol. 1866. (**)
21. Sulle trasformazioni delle figure piane. 2^a serie, 5^o vol. 1866.
22. Sulle superficie gobbe di quarto grado. 8^o vol. 1868.
23. Sugli integrali a differenziale algebrica. 10^o vol. 1870.
24. Sulle linee di curvatura delle superficie di secondo grado. 3^a serie, 1^o vol. 1871.
25. Sulla trasformazione razionale di 2^o grado nello spazio, la cui inversa è di 4^o grado. Id. id. id.
26. Rappresentazione piana di alcune figure algebriche dotate di curve cuspidali. 2 vol. 1872.

Rendiconto delle Sessioni dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna:

27. Intorno alla trasformazione geometrica di una figura piana in un'altra pur piana, sotto la condizione che ad una retta qualunque di ciascuna delle due figure corrisponda nell'altra una sola retta. 1861-62.
28. Sur les transformations géométriques des figures planes. 1873.

Journal für die reine und angewandte Mathematik:

29. Sur quelques propriétés des lignes gauches de troisième ordre et classe. 58^o vol. 1861.

(*) Il Curtze ne fece nel 1865 una edizione tedesca a Greiswald, che fu più tardi ristampata dal Calvary a Berlino e tradotta in lingua boema a Praga nel 1873 dal Weyr.

(**) Il Curtze ne fece una traduzione tedesca (Berlino, Calvary, 1870) aggiungendovi la *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre*, inserita nel vol. 68 del "Giornale di Crella".

30. Note sur les cubiques gauches. 60° vol. 1862.
 31. Sur les surface gauches du 3^{me} degré. Id. id.
 32. Sur les hyperboloïdes de rotation qui passent par une cubique gauche donnée. 63° vol. 1864.
 33. Sur la surface du quatrième ordre qui a la propriété d'être coupée suivant deux coniques par chacun de ses plans tangents. Id. id.
 34. Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. Id. Id.
 35. Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre. 68° vol. 1868.

Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris:

36. Courbes gauches décrites sur la surface d'un hyperboloïde à une nappe. 52° vol. 1861.
 37. Sur les surfaces développables du cinquième ordre. 54° vol. 1862.
 38. Sur les nombres de coniques qui satisfont à des conditions doubles. 59° vol. 1864.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università Italiane pubblicato a Napoli dai sigg. Battaglini, Janni e Trudi:

39. Sulla teoria delle coniche. 1° vol. 1863.
 40. Un teorema sulle cubiche gobbe. Id. id.
 41. Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. Id. id.
 42. Area d'un segmento di sezione conica. Id. id.
 43. Sulla proiezione iperboloidica di una cubica gobba. 2° vol. 1864.
 44. Sulla teoria delle coniche. Id. id.
 45. Considerazioni sulle curve piane del terz'ordine. Id. id.
 46. Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. 3° vol. 1865.
 47. Commemorazione di Eugenio Beltrami. 37° vol. 1900.

Reports of the British Association for the Advancement of Science:

48. On the geometrical transformation of plane curves. 34° vol. 1884.

The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics:

49. On the fourteen-points conic. 3° vol.
 50. On normal to conics, a new treatment of the subject. Id. id.

Matematische Annalen pubblicati a Leipzig dai sigg. A. Clebsch e E. Neumann.

51. Ueber die Abbildung algebraischer Flächen. 4° vol. 1871.
 52. Observations géométriques à propos de la note de M. Brioschi: Sur les tangentes doubles d'une courbe du 4° ordre avec un point double. Id. id.

Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e lettere:

53. Rappresentazione della superficie di Steiner e delle superficie gobbe di terzo grado sopra un piano. 4° vol. 1867.
 54. Un teorema intorno alle forme quadratiche non omogenee fra due variabili. Id. id.
 55. Sopra ad una certa famiglia di superficie gobbe.
 56. Sopra ad una certa curva di quart'ordine.
 57. Sull'opera del prof. Casorati: *Teoria delle funzioni delle variabili complesse*. 2° serie 1° vol. 1868.
 58. Sulla trasformazione delle curve iperellittiche. 2° vol. 1869.
 59. Intorno al numero dei moduli delle equazioni e delle curve algebriche di un dato genere in collaborazione col sig. Casorati. Id. id.
 60. Sulle ventisette rette di una superficie del terzo ordine. 3° vol. 1870.
 61. Sulla superficie di quart'ordine, dotata di una conica doppia. 4° vol., 1871.
 62. Sulle trasformazioni razionali nello spazio. Id. id. (*)

Collectanea Mathematica in memoriam Dominici Chelini. Hoepli, 1881:

63. Sopra una certa superficie del 4° ordine.

(*) Quest'ultima memoria fu riprodotta da Weyr nel "Ziva" di Praga e dal Dewulf nel "Bulletin de Sciences mathématiques et astronomiques", diretto da Darboux a Parigi.

APPLICAZIONE DI UN CONCETTO NUOVO

all'analisi indeterminata aritmetica e algebrica di 2° grado
con una nota sull'equazione di Pell.

(Contin. e fine, v. fasc. prec.)

CAPITOLO SECONDO

(Caso algebrico)

1. Sia D un polinomio intero rispetto ad una lettera a . Il polinomio sia inoltre di grado pari (questa condizione è necessaria se, come in appresso supporremo, l'equazione $x^2 - Dy^2 = 1$, per x ed y interi rispetto ad a , dev'essere possibile). Si ponga, come sempre è lecito:

$$D = \omega^2 + r,$$

dove ω ed r indicano polinomj ordinati per le potenze discendenti di a , e di cui il primo supera il secondo in grado. Supponendo che il segno di ω sia stato fissato una volta per sempre, si dirà che ω è la parte intera ed r il resto della radice quadrata di D .

Un binomio della forma $E + F\sqrt{D}$, dove E ed F indicano due funzioni razionali di a , si dirà *iperbolico*, se la parte intera del quoziente $E:F$ sarà eguale ad ω , parte intera di \sqrt{D} . Ciò non avvenendo, il binomio si dirà *ellittico*. La ragione di queste denominazioni si chiarirà in appresso.

Un binomio iperbolico o ellittico non muta specie se si moltiplica per un fattore qualsiasi razionale in a , perchè tale moltiplicazione non altera il rapporto $E:F$.

Due binomj con eguale rapporto caratteristico $E:F$ si stimeranno equivalenti. Posto $E:F = \mu$, a tutti i binomj il cui rapporto caratteristico è μ , corrisponde un'unica sostituzione

$$\left(z, \frac{\mu z + D}{z + \mu} \right)$$

sulla variabile z .

Un binomio $E + F\sqrt{D}$ ne ammette infiniti equivalenti $e + f\sqrt{D}$, nei quali e ed f sono interi rispetto ad a .

I binomj iperbolici formano un gruppo, cioè: il prodotto di due binomj iperbolici è iperbolico. Siano infatti $E + F\sqrt{D}$, $E' + F'\sqrt{D}$ due binomj iperbolici. Se ne faccia il prodotto, dopo averli scritti sotto la forma:

$$\varepsilon (e + f\sqrt{D}), \varepsilon' (e' + f'\sqrt{D}),$$

($\varepsilon, \varepsilon'$ razionali; e, f, e', f' interi rispetto ad a). Si ottiene:

$$\varepsilon \varepsilon' [e \varepsilon' + Dff' + (ef' + e'f) \sqrt{D}],$$

dove

$$\frac{e\varepsilon' + Dff'}{ef' + e'f}$$

è il rapporto caratteristico. Posto:

$$e = f\omega + \lambda \quad ; \quad e' = f'\omega + \lambda',$$

(e per λ e λ' saranno da intendere due polinomj interi di grado ordinatamente inferiore ai gradi di f e di f'), il precedente rapporto si potrà scrivere:

$$\omega + \frac{rff' + \lambda\lambda'}{2\omega ff' + f\lambda' + f'\lambda}.$$

La parte intera di questa espressione è ω , essendo facile ravvisare che il numeratore della frazione è di grado minore del grado del denominatore; il prodotto in esame è dunque iperbolico.

Tra le sostituzioni

$$\left(z, \frac{\mu z + D}{z + \mu} \right)$$

le iperboliche, quelle cioè che corrispondono a binomj iperbolici, formano un gruppo Γ' , isomorfo al gruppo dei binomj stessi. Difatti il prodotto

$$\left(z, \frac{\mu z + D}{z + \mu} \right) \left(z, \frac{\mu' z + D}{z + \mu'} \right) = \left(z, \frac{\frac{\mu\mu' + D}{\mu + \mu'} z + D}{z + \frac{\mu\mu' + D}{\mu + \mu'}} \right)$$

ha per suo parametro

$$\frac{\mu\mu' + D}{\mu + \mu'},$$

che è appunto il rapporto caratteristico del prodotto

$$(E + F\sqrt{D})(E' + F'\sqrt{D}).$$

2. TEOREMA. - Detto π_n il prodotto di n sostituzioni del gruppo Γ' , e detti a_1, a_2, \dots, a_n i primi n quozienti incompleti dell'ordinario sviluppo di \sqrt{D} in frazione continua, (*) sussiste un'identità della forma:

$$(C) \quad \pi_n = \left(a_1, a_2, \dots, a_n, \frac{Pz + Q}{Rz + S} \right),$$

(*) Per ordinario sviluppo di \sqrt{D} in frazione continua intendasi quello (convergente o no) che si ottiene valutando ω come parte intera della radice e applicando il noto algoritmo per lo sviluppo della radice di un numero intero e positivo. Esempio:

$$\begin{aligned} \sqrt{(a^2 + 1)^2 + a} &= (a^2 + 1) + \frac{1}{x} \\ x &= \frac{\sqrt{(a^2 + 1)^2 + a} + (a^2 + 1)}{a} = 2a + \frac{1}{y} \\ y &= \frac{\sqrt{(a^2 + 1)^2 + a} + (a^2 - 1)}{2a + 1} = \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{8} \right) + \frac{1}{x}; \text{ ecc.} \end{aligned}$$

nella quale P, Q, R, S indicano polinomj interi in a , di cui il primo ha grado non minore del grado del terzo.

Dimostrerò il teorema per induzione, e a tal fine proverò che, se esso vale per π_n , prodotto di n sostituzioni del gruppo Γ' , vale anche per π_{n+1} . Verificato poi che per $n=1$ il teorema sussiste, esso rimarrà dimostrato per n qualunque.

Supposta pertanto vera la (C), vi si operi sulla z una sostituzione iperbolica qualunque

$$\frac{\mu z + D}{z + \mu},$$

ridotta alla forma

$$\frac{pz + Dq}{qz + p}$$

(p e q interi rispetto ad a). Il primo membro si muterà in π_{n+1} , e si avrà quindi:

$$\pi_{n+1} = \left(a_1, a_2, \dots, a_n, \frac{z(pP + qQ) + pQ + DqP}{z(pR + qS) + pS + DqR} \right). \quad (D)$$

Per trasformare questo 2° membro, si ponga nella (C): $z = \sqrt{D}$; verrà:

$$\sqrt{D} = \left(a_1, a_2, \dots, a_n, \frac{P\sqrt{D} + Q}{R\sqrt{D} + S} \right),$$

d'onde si vede che

$$\frac{P\sqrt{D} + Q}{R\sqrt{D} + S}$$

è il quoziente completo $(n+1)^{\text{mo}}$ dell'ordinario sviluppo di \sqrt{D} in frazione continua. Ma è noto che il detto quoziente è pure della forma

$$\frac{\gamma + \sqrt{D}}{\theta},$$

dove γ e θ sono interi; perciò:

$$\frac{P\sqrt{D} + Q}{R\sqrt{D} + S} = \frac{\gamma + \sqrt{D}}{\theta},$$

eguaglianza che si risolve nelle due:

$$\begin{aligned} P\theta - R\gamma &= S; \\ Q\theta - S\gamma &= RD. \end{aligned}$$

Dalle quali facilmente:

$$\begin{aligned} \frac{pP + qQ}{pR + qS} &= \frac{\gamma}{\theta} + \frac{pS + DqR}{\theta(pR + qS)} = \frac{\gamma + \omega}{\theta} + \frac{pS + DqR - \omega(pR + qS)}{\theta(pR + qS)} = \\ &= \frac{\gamma + \omega}{\theta} + \frac{(p - q\omega)(S - R\omega) + rqR}{\theta(pR + qS)}. \end{aligned}$$

Il quoziente incompleto a_{n+1} è la parte intera di $\frac{\gamma + \omega}{\theta}$. Si avrà perciò:

$$\frac{\gamma + \omega}{\theta} = a_{n+1} + \frac{\sigma}{\theta},$$

dove per σ si dovrà intendere un polinomio di grado inferiore al grado di θ (salvo il caso che θ sia indipendente da a , epperò $\sigma = 0$). Sostituendo:

$$\frac{pP + qQ}{pR + qS} = a_{n+1} + \frac{(p - q\omega)(S - R\omega) + \sigma(pR + qS) + rqr}{\theta(pR + qS)}.$$

Dimostrerò ora che nell'ultima frazione il grado del numeratore è minore del grado del denominatore; così sarà provato che la parte intera del quoziente

$$\frac{pP + qQ}{pR + qS}$$

è a_{n+1} .

Nella detta frazione, fermo lasciando il denominatore, invece di $p - q\omega$, si scriva q , che ha maggior grado, perchè la parte intera di $p:q$ è ω . Se dopo il mutamento non si faranno riduzioni, il massimo esponente di a nel numeratore potrà crescere, ma non diminuire. Eseguendo, la frazione diverrà:

$$\frac{qS(1 + \sigma) + R(p\sigma + qr - q\omega)}{\theta(pR + qS)}.$$

Nel nuovo numeratore, invece del binomio $qr - q\omega$, si scriva p , che è di ugual grado. La frazione diverrà ancora, senza riduzione alcuna:

$$\frac{(pR + qS)(1 + \sigma)}{\theta(pR + qS)}.$$

E poichè in questa il grado del numeratore è evidentemente minore del grado del denominatore (salvo sempre il caso che θ sia indipendente da a), si conclude che lo stesso accadeva nella frazione originaria.

Dimostrato in tal modo che la parte intera di

$$\frac{pP + qQ}{pR + qS}$$

è a_{n+1} , si torni alla (D). Il quoziente dei due termini in z nella frazione che vi comparisce è a_{n+1} ; si avrà perciò con la divisione:

$$\frac{z(pP + qQ) + pQ + DqP}{z(pR + qS) + pS + DqR} = \left(a_{n+1}, \frac{P'z + Q'}{R'z + S'} \right),$$

dove il grado di R' è minore del grado di P' , come grado del resto rispetto al divisore. Sostituendo, si otterrà per π_{n+1} l'identità da dimostrare.

Rimane a provare che per $n = 1$ l'identità è vera. Ma ciò è evidente. Considerando infatti una sostituzione iperbolica qualunque:

$$\frac{p_1z + Dq_1}{q_1z + p_1},$$

mediante la solita divisione dei termini in z se ne trae:

$$\frac{p_1 z + Dq_1}{q_1 z + p_1} = \left(\omega, \frac{q_1 z + p_1}{q' z + p'} \right) = \left(a_1, \frac{q_1 z + p_1}{q' z + p'} \right),$$

nella quale ultima il grado di q' (resto) è minore del grado di q_1 (divisore).

OSSERVAZIONE. - Se θ è indipendente da a , l'esposta dimostrazione non esclude che tra a_{n+1} e la parte intera di

$$\frac{pP + qQ}{pR + qS}$$

possa esservi differenza; ma prova al tempo stesso che tale differenza, quando esistesse, sarebbe un numero indipendente da a . E allora nell'eguaglianza

$$\frac{z(pP + qQ) + pQ + DqP}{z(pR + qS) + pS + DqR} = \left(a_{n+1}, \frac{P'z + Q'}{R'z + S'} \right)$$

P' ed R' sarebbero di egual grado, secondo nell'enunciazione del teorema fu preveduto.

3. COROLLARIO I. - *Il parametro o rapporto caratteristico del prodotto di n sostituzioni del gruppo Γ' e il radicale \sqrt{D} , sviluppati in frazione continua, hanno comuni i primi n quozienti incompleti (salvo negli estremi la possibile differenza di una costante additiva).*

Se infatti nella (C) si pone $z = \infty$, dopo avere eseguito le moltiplicazioni operative indicate nel 1° membro, questo si riduce al rapporto caratteristico del prodotto κ_n , mentre il 2° membro diviene:

$$\left(a_1, a_2, \dots, a_n, \frac{P}{R} \right).$$

Pertanto, se il grado di P è maggiore del grado di R , l'enunciata proposizione è evidente. Se poi il grado di P è uguale al grado di R , il quoziente incompleto n^{mo} relativo al rapporto caratteristico si otterrà dividendo il 1° termine di R pel 1° termine di P e aggiungendo ad a_n la costante che ne viene. E allora lo sviluppo di \sqrt{D} e quello del rapporto caratteristico avranno comuni i primi $n-1$ quozienti incompleti, ed eguali altresì i susseguenti, salvo una costante additiva.

COROLLARIO II. - *Il rapporto caratteristico del prodotto di n binomj iperbolici e il radicale \sqrt{D} , sviluppati in frazione continua, hanno comuni i primi n quozienti (salvo negli estremi la possibile differenza di una costante additiva).*

È una conseguenza del corollario precedente e dell'isomorfismo tra il gruppo Γ' e quello dei binomj iperbolici.

ESEMPI. - Sia: $D = (a^2 + 1)^2 + a$, epperò

$$\sqrt{D} = \left(a^2 + 1, 2a, \frac{a}{2} - \frac{1}{8}, \dots \right).$$

Il rapporto caratteristico relativo al prodotto dei binomj iperbolici

$$\begin{aligned} & a^2 + 1 + \sqrt{D} \\ & a^4 + a - 1 + (a^2 - 1)\sqrt{D} \\ & a^6 + a - 1 + a\sqrt{D} \end{aligned}$$

è

$$\frac{4a^9 + 8a^7 + 3a^6 + 2a^4 - 9a^3 + a^2 - 4a + 2}{4a^7 + 4a^5 + a^4 - 4a^3 + a^2 - 5a + 2},$$

e il suo sviluppo in frazione continua comincia appunto con i quozienti incompleti: $a^2 + 1$, $2a$, $\frac{a}{2} - \frac{1}{8}$, come è facile verificare.

Sia invece:

$$D = (a^2 + 1)^2 - 2; \sqrt{D} = (a^2 + 1, -a^2 - 1, \dots).$$

Il rapporto caratteristico del prodotto

$$[a^4 + a - 1 + (a^2 - 1)\sqrt{D}] [a^6 + a - 1 + a\sqrt{D}],$$

è

$$\frac{2a^7 + 2a^5 - 4a^3 + a^2 - a + 1}{2a^5 - 2a + 1}.$$

Sviluppandolo in frazione continua si trova che il primo quoziente incompleto è $a^2 + 1$, come quello di \sqrt{D} ; ma che il secondo è $-a^2 - \frac{1}{2}$ e differisce dal secondo quoziente incompleto di \sqrt{D} della costante $\frac{1}{2}$.

COROLLARIO III. - *Comunque una sostituzione iperbolica o un binomio iperbolico si decompongano in fattori (sostituzioni o binomj iperbolici), il numero dei fattori sarà limitato.*

Perchè, se la decomposizione si potesse prolungare all'infinito, il rapporto caratteristico della sostituzione o del binomio avrebbe comuni con \sqrt{D} infiniti quozienti incompleti. Ma ciò è impossibile, perchè il rapporto caratteristico è razionale, epperò si sviluppa in frazione continua limitata; mentre per contrario lo sviluppo di \sqrt{D} è infinito.

4. DEFINIZIONE. - *Si dirà indice di un binomio iperbolico il massimo numero di fattori iperbolici ne' quali esso è decomponibile. Ai binomj ellittici si attribuirà, per convenzione, l'indice zero.*

Per determinare l'indice del binomio $E + F\sqrt{D}$, se ne svilupperà il rapporto caratteristico $E:F$ in frazione continua. Il numero v dei primi quozienti incompleti che lo sviluppo avrà comuni con \sqrt{D} darà un limite superiore dell'indice. Sarà poi facile verificare nei singoli casi particolari se quel limite può essere raggiunto o no. Se per esempio si trovasse che il prodotto

$$(E + F\sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^{v-1}$$

è iperbolico, l'indice del binomio sarebbe v per l'appunto. Infatti dall'eguaglianza

$$(E + F\sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^{v-1} = H + K\sqrt{D}$$

si trae:

$$E + F \sqrt{D} = \left(\frac{\sqrt{D} + \omega}{r} \right)^{v-1} (H + K \sqrt{D}).$$

Se dunque $H + K \sqrt{D}$ è iperbolico, $E + F \sqrt{D}$ si scompone effettivamente in v fattori iperbolici, perchè

$$\frac{\sqrt{D} + \omega}{r}$$

è certamente tale. Così, se

$$\begin{aligned} D &= (a^2 + 1)^2 + a; \quad \omega = a^2 + 1; \\ E &= 2a^7 + 4a^5 + 2a^4 + a^3 + a^2 - a - 1; \\ F &= 2a^5 + 2a^3 + a^2 - a, \end{aligned}$$

si trova dapprima 2, come limite superiore dell'indice. (*) E poichè

$$(E + F \sqrt{D}) (\sqrt{D} - \omega) = (a^6 + a^4 + a^3 + 1) + (a^4 - 1) \sqrt{D},$$

dove il 2° membro è iperbolico, si conclude che il cercato indice è per l'appunto 2.

5. Sia l'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N$$

(D ed N interi in a), da risolvere in polinomj interi. Si supponga che in D e in N i coefficienti siano reali; che il coefficiente del primo termine di D sia positivo; inoltre si disponga del segno di ω per modo da averne positivo il coefficiente del primo termine. Finalmente, poichè i segni x e di y non hanno importanza nella questione, essi s'intenderanno regolati in maniera che i primi termini di x e di y abbiano egual segno, talchè niuna elisione sarà possibile in $x + \omega y$ fra i termini di massimo grado. Si dirà inoltre che una soluzione (x, y) è d'indice 0, 1, 2, ..., quando il corrispondente binomio $x + y \sqrt{D}$ è d'indice 0, 1, 2, ... Le soluzioni d'indice zero si diranno ellittiche; iperboliche le altre.

A un binomio $x + y \sqrt{D}$ a segni di x e di y non regolati, corrisponde sempre una soluzione: ma, regolati i segni, tale soluzione potrà essere (x, y) , oppure $(x, -y)$ o $(-x, y)$. In questo secondo caso, ove cioè occorresse mutar segno ad una delle incognite, ad un binomio iperbolico corrisponderebbe per esempio una soluzione ellittica; bisogna perciò ben distinguere tra binomio $x + y \sqrt{D}$ e la soluzione che se ne deriva.

Per grado di una soluzione s'intenderà il grado del relativo valore di y ; esso determina evidentemente un limite superiore pel grado della x . Le soluzioni di cui si conosce il grado o un suo limite superiore si sanno trovare. Basterà per trovarle mettere la y e la x (delle quali

(*) Il rapporto $E:F$ e il radicale \sqrt{D} hanno infatti comuni i primi due quozienti incompleti. Fatta astrazione da una costante additiva, essi avrebbero comune anche il terzo: ma nel caso presente l'indice del binomio non può essere 3, com'è facile vedere.

si conosce il grado o un suo limite superiore) sotto forma di polinomi a coefficienti indeterminati. La ricerca di questi dipenderà poi dalla risoluzione di un sistema di equazioni numeriche. Lo stesso accade per le soluzioni d'indice non superiore a un limite dato, come passo a dimostrare, premettendo a tal fine il teorema:

Affinchè una soluzione (x, y) sia ellittica, è necessaria e sufficiente la condizione:

Pongasi infatti: $\text{grado } \omega y^2 \leq \text{grado } N.$

$$x - \omega y = y_1.$$

Se (x, y) è iperbolica, il grado di y_1 è minore del grado di y , e ciò per definizione: se dunque (x, y) è ellittica, si avrà:

$$\text{grado } y_1 \geq \text{grado } y.$$

Si consideri in tal caso l'eguaglianza

$$(x + \omega y) y_1 = N + ry^2.$$

Riguardando il modo come sono regolati i segni di x e di y , è chiaro che il primo membro non soffre elisioni fra i termini di massimo grado; chè altrimenti simili elisioni sarebbero possibili in $x + \omega y$, il che fu escluso. Ciò premesso, poichè il grado del termine $\omega y y_1$ supera quello di ry^2 (e i due membri debbono avere egual grado) se ne inferisce che il grado di N deve prevalere su quello di ry^2 , epperò:

$$\text{grado } (x + \omega y) y_1 = \text{grado } N.$$

Ma

$$\text{grado } (x + \omega y) y_1 \geq \text{grado } \omega y y_1 \geq \text{grado } \omega y^2;$$

dunque, se (x, y) è ellittica:

$$\text{grado } \omega y^2 \leq \text{grado } N.$$

Dico ora che, se (x, y) è iperbolica (epperò il grado di y_1 minore del grado di y), dovrà essere

$$\text{grado } \omega y^2 > \text{grado } N.$$

Ripresa infatti l'eguaglianza

$$(x + \omega y) y_1 = N + ry^2,$$

si distinguano i due casi:

$$\text{grado } ry^2 \geq \text{grado } N; \text{ grado } ry^2 < \text{grado } N.$$

Nel primo:

$$\text{grado } \omega y^2 > \text{grado } N,$$

e la tesi è dimostrata. Nel secondo:

$$\text{grado } (x + \omega y) y_1 = \text{grado } N,$$

o anche:

$$\text{grado } (y_1 + 2\omega y) y_1 = \text{grado } N.$$

D'onde, considerando che nel primo membro il grado del 2° termine prevale:

$$\text{grado } \omega y y_1 = \text{grado } N$$

e conseguentemente:

$$\text{grado } \omega y^2 > \text{grado } N.$$

COROLLARIO. - *Le soluzioni ellittiche si possono riguardare come note. Infatti la condizione*

$$\text{grado } \omega y^2 \leq \text{grado } N$$

fissa il limite superiore del grado che può e deve avere la y di una soluzione ellittica. Conosciuto il limite superiore del grado, si troveranno le soluzioni come sopra fu detto.

6. PROBLEMA. - *Trovare tutte le soluzioni d'indice non superiore a un limite dato.*

Sia δ questo limite. Fu già visto come si trovino le soluzioni ellittiche o d'indice zero. Sia dunque (x, y) una soluzione iperbolica, d'indice non maggiore di δ . Percorrendo la serie

$$(x+y\sqrt{D}), (x+y\sqrt{D})(\sqrt{D}-\omega), (x+y\sqrt{D})(\sqrt{D}-\omega)^2, \dots, (x+y\sqrt{D})(\sqrt{D}-\omega)^\delta,$$

che comincia da un binomio iperbolico, si dovrà, dopo alcuni termini iperbolici, trovarne in essa un primo ellittico:

$$(x+y\sqrt{D})(\sqrt{D}-\omega)^{\delta_1}.$$

Se così non fosse, significando con $H+K\sqrt{D}$ un binomio iperbolico, si avrebbe, per tutti i valori di δ_1 da 1 a δ inclusivamente:

$$(x+y\sqrt{D})(\sqrt{D}-\omega)^{\delta_1} = H+K\sqrt{D},$$

ovvero

$$x+y\sqrt{D} = \left(\frac{\sqrt{D}+\omega}{r}\right)^{\delta_1} (H+K\sqrt{D});$$

e il binomio $x+y\sqrt{D}$ sarebbe decomponibile in $\delta+1$ fattori iperbolici almeno, contro l'ipotesi. Sempre indicando con $H+K\sqrt{D}$ un binomio ellittico e con δ_1 un intero non superiore a δ , sussisterà dunque l'eguaglianza:

$$(x+y\sqrt{D})(\sqrt{D}-\omega)^{\delta_1} = H+K\sqrt{D}.$$

E qui due casi potranno darsi: 1° che (H, K) sia soluzione, e naturalmente dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N(-r)^{\delta_1},$$

che cioè H e K , quali conseguono dal calcolo dell'espressione

$$(x+y\sqrt{D})(\sqrt{D}-\omega)^{\delta_1},$$

rispondano alla convenzione fatta circa il segno relativo dei valori delle incognite; e in tal caso, sostituendo ad (H, K) la notazione (x_0, y_0) altrove usata per le soluzioni ellittiche, si avrà:

$$x + y \sqrt{D} = \left(\frac{\sqrt{D} + \omega}{r} \right)^{\delta_1} (x_0 + y_0 \sqrt{D}).$$

2°. Può invece accadere che la detta convenzione non sia osservata dalla coppia (H, K) . Ma poichè dalla coppia $(H, -K)$ sarà osservata certamente, ove si dimostri che la *soluzione* $(H, -K)$ è ellittica, e per indicarla si usi la solita notazione (x_0, y_0) , rimarrà provato che in questo secondo caso:

$$x + y \sqrt{D} = \left(\frac{\sqrt{D} + \omega}{r} \right)^{\delta_1} (x_0 - y_0 \sqrt{D}),$$

e quindi in ogni caso:

$$x + y \sqrt{D} = \left(\frac{\sqrt{D} + \omega}{r} \right)^{\delta_1} (x_0 \pm y_0 \sqrt{D}).$$

Per mettere in chiaro la natura ellittica di $(H, -K)$, basterà verificare che è soddisfatta la condizione:

$$\text{grado } \omega (-K)^2 \leq \text{grado } N (-r)^{\delta_1}.$$

A tal fine, rammentando il significato di δ_1 , si rifletta che il binomio

$$H' + K' \sqrt{D} = (x + y \sqrt{D}) (\sqrt{D} - \omega)^{\delta_1 - 1}$$

è iperbolico. Si consideri inoltre l'eguaglianza

$$H' + K' \sqrt{D} = (H + K \sqrt{D}) \left(\frac{\sqrt{D} + \omega}{r} \right),$$

da cui si trae:

$$\frac{H'}{K'} = \omega + \frac{Kr}{H + K\omega}.$$

Dovendo la parte intera di $H' : K'$ essere ω , il grado del denominatore della frazione

$$\frac{Kr}{H + K\omega}$$

dovrà superare quello del numeratore; cioè

$$\text{grado } (H + K\omega) > \text{grado } Kr.$$

Ma poichè, per l'ammessa ipotesi, il binomio $H - K\omega$ non soffre elisioni fra i termini di massimo grado, si ha pure:

$$\text{grado } (H - K\omega) \geq \text{grado } K\omega;$$

perciò:

$$\text{grado } (H + K\omega) (H - K\omega) > \text{grado } K^2 \omega.$$

Ora:

$$(H + K\omega) (H - K\omega) = N (-r)^{\delta_1} + K^2 r;$$

d'onde e dalla precedente disuguaglianza si deduce:

$$\text{grado } N(-r)^{\delta_1} > \text{grado } K^2 r \omega,$$

e conseguentemente:

$$\text{grado } K^2 \omega < \text{grado } N(-r)^{\delta_1},$$

come bisognava dimostrare. Dunque: *Se l'esponente δ_1 prende tutti i valori da 0 a δ inclusivamente, e se (x_0, y_0) è soluzione ellittica dell'equazione*

$$x^2 - Dy^2 = N(-r)^{\delta_1},$$

le soluzioni d'indice non superiore a δ , relative all'equazione $x^2 - Dy^2 = N$, si otterranno dalla formola:

$$x + y \sqrt{D} = \left(\frac{\sqrt{D} + \omega}{r} \right)^{\delta_1} (x_0 \pm y_0 \sqrt{D}).$$

NOTA. - L'ultima formola dà bensì tutte le soluzioni d'indice non superiore a δ , ma non è provato che dia quelle soltanto. Così pure non è da credere che la x e la y corrispondenti a una (x_0, y_0) qualsiasi verranno intere (v. anche l'osservazione al n. 3. del precedente capitolo).

7. Si ammetta ora la possibilità dell'equazione di Pell:

$$x^2 - Dy^2 = 1;$$

e dico *si ammetta*, perchè tale equazione, sempre possibile quando D è un numero intero e positivo, potrebbe non esserlo quando D è polinomio. Aggiungasi che non si conosce in questo caso criterio alcuno di sicura riuscita per giudicare della possibilità dell'equazione. È bensì noto che $\sqrt{D} - \omega$ dev'essere sviluppabile in frazione continua periodica secondo un noto algoritmo del prof. Pincherle; (*) un altro criterio di possibilità meno restrittivo viene anche dato in appendice del presente scritto: peraltro siffatti criteri, fondati sulla periodicità, cadono a vuoto quando il periodo nè si manifesta nè si può escludere *a priori* al prolungarsi dei calcoli.

Se non che pel fine del presente scritto basta sapere che $\sqrt{D} - \omega$ è sviluppabile in frazione continua periodica: tale frazione, per un noto teorema del Pincherle, è poi convergente per tutti i valori di a abbastanza grandi. Supponendo possibile l'equazione di Pell sussisterà dunque un'eguaglianza della forma:

$$\sqrt{D} - \omega = \frac{1}{\varphi_1 + \frac{1}{\varphi_2 + \dots}}$$

il secondo membro della quale, convergente per valori molto grandi

(*) E. BORTOLOTTI, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1895.

di a , è privo di parte intera. Chè altrimenti il suo limite per $a = \infty$ sarebbe differente da zero; mentre il limite di

$$\sqrt{D} - \omega = \frac{r}{\sqrt{D} + \omega},$$

per $a = \infty$, è zero evidentemente.

Ciò premesso, sia (α, β) una soluzione dell'equazione Pelliana. Nell'eguaglianza

$$\alpha^2 - (\omega^2 + r)\beta^2 = 1$$

i termini del 1° membro affetti dalla massima potenza di a si dovranno elidere; i primi termini di α e di $\beta\omega$ saranno perciò eguali; osservando quindi le eguaglianze:

$$\alpha + \beta\sqrt{D} = \alpha + \beta\omega + \frac{\beta r}{\varphi_1 + \dots}$$

$$\alpha - \beta\sqrt{D} = \alpha - \beta\omega - \frac{\beta r}{\varphi_1 + \dots},$$

si vedrà chiaramente che, almeno per valori di a molto grandi:

$$\text{mod. } (\alpha - \beta\sqrt{D}) < \text{mod. } (\alpha + \beta\sqrt{D}),$$

ossia:

$$\text{mod. } \left(\frac{\alpha - \beta\sqrt{D}}{\alpha + \beta\sqrt{D}} \right) < 1.$$

Detta pertanto (x, y) una soluzione dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N$$

e posto come al n. 4 del precedente capitolo:

$$(x + y\sqrt{D})(x - y\sqrt{D})^2 = u + v\sqrt{D},$$

nello stesso modo ivi tenuto si dimostrerebbe che

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{u}{v} = -\sqrt{D} = -\omega - \frac{1}{\varphi_1 + \dots},$$

almeno per a sufficientemente grande. Estraendo da $\frac{u}{v}$ la parte intera I e scrivendo:

$$\frac{u}{v} = I + \frac{U}{V},$$

(e per U si dovrà intendere un polinomio minore di V in grado), si avrà dunque, per $z = \infty$:

$$I + \frac{U}{V} = -\omega - \frac{1}{\varphi_1 + \dots}.$$

Ciò prova che vi sarà un valore dell'esponente z tanto grande, che

per esso e pei valori maggiori si abbia: $I = -\omega$. Se infatti per z comunque grande tra I e $(-\omega)$ esistesse una differenza (polinomio intero in a), si potrebbe regolare la grandezza di a per modo che il limite di quella differenza per $z = \infty$ fosse differente da zero. Ma ciò è assurdo. Infatti, per z infinito:

$$I + \omega = -\frac{U}{V} - \frac{1}{\varphi_1 + \dots};$$

espressione quest'ultima che per a grandissimo tende a zero, qualunque sia z . Da ciò si conclude che, per z sufficientemente grande, la parte intera del quoziente $u:v$ sarà $(-\omega)$, come nel caso aritmetico considerato al n. 4 del precedente capitolo.

ESEMPIO. - L'equazione sia:

$$x^2 - (a^2 + 4)y^2 = a,$$

e inoltre

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{2} + 1; & y &= \frac{1}{2}; \\ z &= \frac{a^2}{2} + 1; & \beta &= \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Posto:

$$\left(\frac{a}{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4}\right) \left(\frac{a^2}{2} + 1 - \frac{a}{2}\sqrt{a^2 + 4}\right)^2 = u + v\sqrt{a^2 + 4},$$

si avrà:

$$u = \frac{a^4}{2} - \frac{a^3}{2} + 2a^2 - \frac{3a}{2} + 1; \quad v = -\frac{a^3}{2} + \frac{a^2}{2} - a + \frac{1}{2};$$

e si trova che la parte intera del rapporto $u:v$ è $(-\omega)$; nel caso presente $(-a)$.

8. La proprietà testè dimostrata e l'altra: che l'equazione Pelliana non può ammettere soluzioni ellittiche o d'indice zero (*), ne pongono in grado di applicare per filo e per segno al presente caso algebrico la dimostrazione che, pel caso aritmetico, si legge al n. 4 del 1° capitolo, concludendo come ivi: *Se (x, y) è una soluzione qualunque dell'equazione di Pell, tutte le soluzioni dell'equazione*

$$x^2 - Dy^2 = N$$

sono date dalla formula

$$x + y\sqrt{D} = (\alpha + \beta\sqrt{D})^k (x' \pm y'\sqrt{D}),$$

il secondo membro della quale va esteso solamente a quelle soluzioni particolari (x', y') il cui **indice** non supera la metà dell'indice della soluzione dell'equazione Pelliana.

(*) Perché (α, β) fosse ellittica, occorrerebbe la condizione:

$$\text{grado } \omega\beta^2 = 0;$$

dalla quale si deduce che β ed ω , e conseguentemente anche r ed a , sarebbero indipendenti da a .

Le soluzioni d'indice non superiore a un dato limite si sanno trovare: l'equazione $x^2 - Dy^2 = N$ è dunque risolta.

9. Anche pel caso algebrico vale il teorema: *Tutte le soluzioni dell'equazione*

$$x^2 - Dy^2 = N$$

sono esprimibili mediante una soluzione qualunque dell'equazione Pelliana e mediante le soluzioni ellittiche di un sistema finito di equazioni note, il numero delle quali è fisso e indipendente da N .

Dicasi infatti η la parte intera del quoziente

$$\frac{\text{ind}(x + \beta\sqrt{D})}{2},$$

e si rammenti che le soluzioni (x', y') d'indice non superiore a η sono date dalla formola:

$$x' + y'\sqrt{D} = \left(\frac{\sqrt{D} + \omega}{r}\right)^i (x_0 \pm y_0\sqrt{D}),$$

da estendere a tutti i valori dell'esponente i da 0 a η inclusivamente, e per ciascun valore di i , a tutte le soluzioni ellittiche dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N (-r)^i.$$

Conseguentemente: (*)

$$x + y\sqrt{D} = (x + \beta\sqrt{D})^k \left(\frac{\pm\sqrt{D} + \omega}{r}\right)^i (x_0 \pm y_0\sqrt{D}),$$

formola che fa dipendere tutte le soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$ dalla soluzione Pelliana (α, β) e dalle soluzioni ellittiche del sistema

$$\begin{array}{l} x^2 - Dy^2 = N \\ x^2 - Dy^2 = -Nr \\ x^2 - Dy^2 = Nr^2 \\ \dots \\ x^2 - Dy^2 = N(-r)^\eta. \end{array}$$

In esso (sistema risolvante come nel caso aritmetico) il numero delle equazioni è $\eta + 1$, epperò fisso e indipendente da N .

Per tal modo, mercè il concetto d'indice, trattazione e regole abbracciano egualmente il caso aritmetico e il caso algebrico, conforme si annunziò al principio del lavoro.

(*) Circa i doppi segni è da notare che le scelte possibili sono quattro, mentre nel caso aritmetico erano due soltanto.

Nota sull'equazione di Pell

Affinchè l'equazione

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

sia risolvibile in numeri interi quando D è un intero positivo, o in polinomj interi, quando D è un polinomio intero di grado pari per rispetto ad una lettera a , è necessario e sufficiente che \sqrt{D} sia sviluppabile in frazione continua periodica semplice secondo un qualche algoritmo; (*) che cioè sussista un'identità della forma

$$\sqrt{D} = (a_1, a_2, \dots, a_n, c + \sqrt{D}),$$

dove a_1, a_2, \dots, a_n, c indicano numeri interi (positivi o negativi) se D è numero, e polinomj interi, se D è polinomio.

1. La condizione è sufficiente. - Sia infatti

$$\sqrt{D} = (a_1, a_2, \dots, a_n, c + \sqrt{D}).$$

Indicando con $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots$ le ridotte consecutive della frazione continua

$$(a_1, a_2, a_3, \dots),$$

l'identità precedente si potrà scrivere:

$$\sqrt{D} = \frac{(c + \sqrt{D}) p_n + p_{n-1}}{(c + \sqrt{D}) q_n + q_{n-1}},$$

eguaglianza che si risolve nelle due:

$$\begin{aligned} cq_n + q_{n-1} &= p_n \\ cp_n + p_{n-1} &= Dq_n \end{aligned}$$

d'onde, eliminando c :

$$p_n^2 - Dq_n^2 = \pm 1.$$

Se vale il segno superiore, il teorema è dimostrato: se no, ponendo

$$\begin{aligned} x &= 2p_n^2 + 1 \\ y &= 2p_n q_n, \end{aligned}$$

si soddisferà, come è noto, l'equazione

$$x^2 - Dy^2 = 1.$$

2. La condizione è necessaria. Si supponga infatti che l'equazione

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

sia soddisfatta da $x = \alpha, y = \beta$, talchè si abbia:

$$\alpha^2 - D\beta^2 = 1.$$

(*) Nel caso speciale in cui l'algoritmo è quello del Pincherle, il teorema fu già dato dalla signora Bortolotti, sabbene con dimostrazione molto diversa dalla presente. Notissimo è poi il caso in cui D , nonchè i quozienti incompleti, sono numeri interi e positivi: su esso poggia la famosa dimostrazione lagrangiana della possibilità dell'equazione di Pell.

Certamente α e β (numeri o polinomi) saranno primi tra loro. Perciò, se si sviluppa il quoziente $\alpha : \beta$ in frazione continua dividendo α per β , β per il resto, il 1° resto pel 2° resto ecc., non solo lo sviluppo sarà limitato; ma l'ultima sua ridotta sarà $\alpha : \beta$, tanto per rispetto al valore come per rispetto ai termini. Indicando con $p : q$ la penultima ridotta e con n il numero delle ridotte, si avrà quindi:

$$\alpha q - \beta p = (-1)^n.$$

Qui sono da distinguere i due casi: n pari; n dispari. Se n è pari:

$$\alpha^2 - D\beta^2 = \alpha q - \beta p = 1,$$

d'onde:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{D\beta - p}{\alpha - q}.$$

Detto pertanto c' un fattore di proporzionalità, necessariamente intero per essere α e β primi fra loro, si può scrivere:

$$\begin{aligned} D\beta - p &= c'\alpha \\ \alpha - q &= c'\beta, \end{aligned}$$

eguaglianze che si compendiano nell'unica:

$$\sqrt{D} = \frac{(c' + \sqrt{D})\alpha + p}{(c' + \sqrt{D})\beta + q},$$

o anche (detti a'_1, a'_2, a'_3, \dots i quozienti incompleti dello sviluppo di $\alpha : \beta$ in frazione continua):

$$\sqrt{D} = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n, c' + \sqrt{D}).$$

Dunque \sqrt{D} si sviluppa in frazione continua periodica semplice.

Se poi n è dispari e conseguentemente

$$\alpha^2 - D\beta^2 = 1, \quad \alpha q - \beta p = -1,$$

si avrà per confronto:

$$\alpha^2 - D\beta^2 = \beta p - \alpha q$$

ovvero:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{D\beta + p}{\alpha + q}.$$

Epperò, detto c'' un fattore intero di proporzionalità:

$$\begin{aligned} D\beta + p &= c''\alpha \\ \alpha + q &= c''\beta, \end{aligned}$$

od anche:

$$\sqrt{D} = \frac{(-c'' - \sqrt{D})\alpha + p}{(-c'' - \sqrt{D})\beta + q},$$

eguaglianza che si può mettere sotto la forma:

$$\sqrt{D} = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n, -c'' - \sqrt{D}).$$

Sostituendo in quest'ultima a $(-\sqrt{D})$ il valore

$$-\sqrt{D} = (-a'_1, -a'_2, \dots, -a'_n, c'' + \sqrt{D}),$$

si avrà finalmente:

$$\sqrt{D} = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n, -c'' - a'_1, -a'_2, \dots, -a'_n, c'' + \sqrt{D}).$$

Anche in questo caso \sqrt{D} si sviluppa in frazione continua periodica semplice. Così il teorema è dimostrato per tutti i casi.

COROLLARIO. — Se il radicale \sqrt{D} si sviluppa in frazione continua periodica semplice in un certo modo, e se il penultimo termine del periodo è l'unità, il radicale stesso si svilupperà in frazione continua periodica semplice anche in un secondo modo, differente dal primo.

Sia infatti

$$\sqrt{D} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 1, c + \sqrt{D}),$$

e si ponga:

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 1) = \frac{u}{v}.$$

Se n è pari, sarà, come già si vide:

$$u^2 - Dv^2 = 1.$$

Ma si noti che, sviluppando $u:v$ in frazione continua, non si tornerà alla forma

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 1)$$

con un numero pari di quozienti incompleti: si troverà invece

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, 1 + a_{n-1}),$$

dove il numero dei quozienti incompleti è dispari. Talechè, indicando con $p:q$ la penultima ridotta di questa frazione continua (l'ultima è $u:v$), dovrà aversi:

$$uq - vp = -1 = Dv^2 - u^2.$$

Chiamato pertanto k un fattore intero di proporzionalità, si avrà consecutivamente:

$$\begin{aligned} Dv + p &= ku \\ u + q &= kv; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{D} &= \frac{(-k - \sqrt{D})u + p}{(-k - \sqrt{D})v + q} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, 1 + a_{n-1}, -k - \sqrt{D}) = \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, 1 + a_{n-1}, -k - a_1, -a_2, \dots, k + \sqrt{D}), \end{aligned}$$

che rappresenta un secondo modo di sviluppo di \sqrt{D} in frazione continua periodica semplice.

Alla stessa conclusione e con ragionamento consimile si giunge, qualora nella formola

$$\sqrt{D} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 1, c + \sqrt{D})$$

n si supponga dispari, e conseguentemente: $u^2 - Dv^2 = -1$.

Esempio. — Posto:

$$D = 25x^2 - 14x + 2,$$

è facile verificare che

$$\sqrt{D} = (5x - 2, 1, 1, 1, 1, 5x - 2 + \sqrt{D}).$$

Qui il periodo è

$$(1, 1, 1, 1, 10x - 4),$$

col penultimo termine eguale all'unità. Perciò si ha pure:

$$\sqrt{D} = (5x - 2, 1, 1, 2, -10x + 3, -1, -1, -2, 5x - 1 + \sqrt{D}),$$

come è facile dedurre col ragionamento fatto sopra, oppure verificare direttamente. (*)

G. FRATTINI.

(*) V. pure un mio articolo nel *Pitagora*, anno IX, n. 1 e 2.

UN NUOVO SISTEMA DI DEFINIZIONI

PER LA

GEOMETRIA EUCLIDEA ⁽¹⁾

§ 1. — Studi precedenti.

Il significato di taluni *simboli* che si incontrano in *Geometria* deve essere presupposto, anche dopo aver presupposto quello dei simboli che appartengono alla *Logica pura*. ⁽²⁾

Poichè vi è qualche *arbitrarietà* nella scelta dei simboli non definiti, è necessario enunciare il sistema prescelto. ⁽³⁾

Citeremo soltanto tre geometri che si sono preoccupati di tale questione, riducendo successivamente il numero dei simboli non definiti mediante i quali (e mediante i simboli che appartengono alla *Logica pura*) si possono definire tutti gli altri simboli. ⁽⁴⁾

(1) Questa memoria fu comunicata dall'A. al "II Congresso internazionale di matematica", a Parigi, il 9 agosto 1900, e fu inserita integralmente nei *Rendiconti* di tale congresso (Paris, Gauthier-Villars, 1902). Tuttavia, per darle maggior diffusione fra i nostri colleghi, la riproduciamo qui, nella traduzione fornitaci dall'A. (*Nota del D.*)

(2) Quasi sempre si identifica una cosa col suo nome (si dice, per es.: Parigi è una città, e non Parigi è il nome di una città), un'idea col simbolo (parola o frase, segno o gruppo di segni) che la rappresenta, un fatto con la proposizione che lo enuncia: ecco perchè si può limitarsi a parlare di simboli e di proposizioni. Poichè, in *Geometria*, definire un simbolo significa esprimerlo mediante altri già considerati e dimostrare una proposizione significa dedurla da altre già enunciate, l'impossibilità di definire tutti i simboli e di dimostrare tutte le proposizioni è conseguenza immediata del significato attribuito alle parole *definire* e *dimostrare*.

Dicendo che sarebbe impossibile definire i simboli dei quali si fa uso in *Geometria* mediante quelli che appartengono alla *Logica pura*, affermiamo che la *Geometria* è una teoria deduttiva particolare e non un ramo della *Logica pura*: nel quale asserto tutti convengono senza discutere, benchè tale affermazione non possa venir giustificata e non abbia neppure un significato preciso se non si prestabiliscono i limiti della *Logica pura*, il che noi abbiamo procurato di fare in altro studio: *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une Introduction logique à une théorie déductive quelconque* (Bibliothèque du Congrès international de Philosophie, Paris, Armand Colin, 1900, pag. 309-365).

(3) La libertà relativa nella scelta di cui parliamo è sufficientemente dimostrata da questo studio stesso.

(4) Non è inutile far notare che si può ripetere, a proposito delle proposizioni e delle dimostrazioni, tutto quanto abbiamo enunciato relativamente ai simboli ed alle definizioni. [Infatti: fra le proposizioni (definizioni eccettuate) che si incontrano in *Geometria* ve n'hanno necessariamente che non sono dimostrate, anche dopo aver presupposto quelle che appartengono alla *logica pura* (assiomi). Poichè vi è qualche arbitrarietà nella loro scelta, bisogna enunciare il sistema prescelto di proposizioni non dimostrate (postulati) mediante i quali (e mediante gli assiomi e le definizioni) si possono dimostrare tutte le altre proposizioni.]

Malgrado l'evidente analogia del loro ufficio, la preoccupazione della scelta dei postulati è molto antica, mentre quella della scelta dei simboli non definiti è modernissima. Senza darne una dimostrazione storica, che ci pare superflua, ne diamo una filologica, meno banale di quel che possa sembrare: mentre alla frase *proposizione non dimostrata* può sostituirsi la parola *postulato*, non si è attribuito ancora ad un'unica parola il significato della frase *simbolo non definito*, perchè questa frase è stata sì poco adoperata sin qui che non si è trovato necessario abbreviarla.

Dapprima il PASCH, che nel 1882 ⁽¹⁾ riuscì a definire tutti gli altri simboli mediante i quattro seguenti:

- 1) punto, 2) segmento (di retta), ⁽²⁾ 3) piano, ⁽³⁾ 4) è sovrapponibile a.

Poi il PEANO, che nel 1889 ⁽⁴⁾ riuscì a definire piano mediante punto e segmento, e che nel 1894 ⁽⁵⁾ sostituì nel sistema di simboli non definiti è sovrapponibile a con movimento, ⁽⁶⁾ riducendo questo sistema ai simboli:

- 1) punto, 2) segmento, 3) movimento.

Infine il PIERI, che nel 1899 ⁽⁷⁾ è riuscito a definire segmento, mediante punto e movimento.

Per conseguenza, tutti i simboli che si incontrano nella Geometria euclidea possono venir definiti mediante due soli di essi, cioè

- 1) punto, 2) movimento. ⁽⁸⁾

§ 2. — Questione.

Si può chiedere: Per quanto semplice sia il sistema di simboli non definiti scelto dal Pieri, non si potrebbe trovarne uno ancor più semplice?

Anzitutto convien precisare questa domanda, togliendo alla semplicità cui si allude ogni carattere di relatività e di soggettività.

Ciascun movimento, secondo il Peano e il Pieri, è una funzione che trasforma in un particolar modo i punti in punti.

Ora, poichè: 1° i punti distinti sono innumerevoli, 2° vi è un movimento, almeno, che trasforma un punto dato in altro punto dato, 3° due movimenti che

⁽¹⁾ *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Teubner, Leipzig.

⁽²⁾ Alla parola *segmento* convien dare il suo significato *elementare* e non *proiettivo*; due punti distinti sono dunque estremi d'un solo segmento. Se a e b sono punti distinti, invece della figura continua "segmento ab ", si può considerare dapprima, quale simbolo non definito, la *relazione fra tre punti* " x è un punto situato tra a e b ", la quale consente di enunciare questa definizione: "segmento ab " significa "figura cui appartengono a , b e tutti i punti x situati tra a e b ".

⁽³⁾ Anzi, soltanto *parte finita di piano*.

⁽⁴⁾ *I principii di geometria logicamente esposti*. Bocca, Torino.

⁽⁵⁾ *Sui fondamenti della geometria*. (Revue de Mathématiques. Turin.)

⁽⁶⁾ In un movimento di una figura, invece delle sue innumerevoli posizioni successive, se ne considerano soltanto la posizione iniziale e la finale. Se a è un punto (o una figura) e se m è un movimento, si rappresenta con ma ciò che diviene il punto (o la figura) a dopo il movimento m . In tal modo si viene a considerare ciascun movimento quale segno particolare di funzione che trasforma i punti in punti.

Il legame logico tra il quarto simbolo non definito di Pasch e il terzo di Peano si rende allora evidente: ciascuno si può definire mediante l'altro, con l'aiuto del primo soltanto. Infatti, supposto noto il simbolo è sovrapponibile a: " m è un movimento" significa " m è un segno di funzione che trasforma ogni figura in una figura che è sovrapponibile alla figura data"; e, reciprocamente, supposto noto il simbolo movimento: se a e b sono figure, allora " a è sovrapponibile a b " significa "esiste almeno un movimento m per cui ma coincide con b ".

⁽⁷⁾ *Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo* (Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino).

⁽⁸⁾ Pare che tutto quanto ho rammentato sinora non sia molto noto, perchè in parecchi lavori che si prefiggono di analizzare i principii della Geometria, si incontra un numero ben maggiore di simboli non definiti. Cito ad esempio: KILLING, *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*, 1898. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, 1900. EXRIQUES, *Questioni riguardanti la geometria elementare*, 1900. Con ciò, evidentemente, non si nega che quei lavori possano riuscire interessanti da altri punti di vista.

trasformano differentemente il medesimo punto sono distinti; si deduce che i movimenti distinti sono innumerevoli e, per conseguenza: *movimento è la classe cui appartengono innumerevoli funzioni determinate (movimenti), e ciascuna di queste funzioni è una relazione determinata fra innumerevoli oggetti (punti).*

Preciseremo dunque la nostra domanda così: *Dopo avere assunto quale primitivo il simbolo punto, non basterebbe assumere quale secondo simbolo primitivo una relazione particolare tra un numero finito di punti?*

Ci proponiamo di giustificare la *risposta affermativa* che riteniamo poter dare a questa domanda.

§ 3. — Introduzione.

I nostri simboli non definiti sono soltanto

- 1) punto 2) è sovrapponibile a,

con questa restrizione, per il *secondo*, che noi non lo definiamo soltanto nel caso in cui è adoperato *tra coppie di punti*.⁽¹⁾

Dopo il lavoro citato del Pieri (§ 1), la nostra affermazione (§ 2) sarà giustificata quando avremo *definito il movimento* mediante i nostri simboli non definiti, il che faremo nel § 4, lasciando da parte ogni preoccupazione didattica.⁽²⁾

Poichè qui non vogliamo occuparci dei *postulati*, supponiamo di averne costruito un *sistema* nel quale siano enunciate *talune proprietà* dei nostri simboli non definiti, sufficienti per *dedurre* tutte le *altre proprietà* di questi simboli e degli altri che, per loro mezzo, saranno definiti.⁽³⁾

Per brevità scriveremo: DEF., invece di *definizione*; figura, invece di *insieme di punti*; \equiv , invece di *è sovrapponibile a*; (a, b) invece di *coppia* i cui elementi sono ordinatamente a e b .

(1) Debbo avvertire che, all'insaputa l'uno dell'altro, il Pieri ed io abbiamo avuto contemporaneamente la medesima idea. Infatti, il Pieri, nel suo studio *Sur la Géométrie encicagée comme un système purement logique* (che è un riassunto dell'altro già citato e che fu comunicato al Congresso internazionale di filosofia dal Couturat, il 3 agosto 1900, quando la mia comunicazione attuale era già preparata ed annunciata), enuncia la possibilità di definire tutti gli altri simboli geometrici per mezzo dei due che ho assunto quali non definiti, aggiungendo però che la complicazione eccessiva, alla quale sembragli dare origine lo sviluppo di questo sistema, gli desta il desiderio di proseguire lo studio di tale questione, prima di annunciarne alcun risultato.

(2) È quasi superfluo osservare che enunciando senz'altro questa *definizione: movimento* significa "la classe cui appartiene ogni funzione m tale che: 1° se x è un punto, mx è pure un punto; 2° quali che siano i punti x ed y , la coppia (mx, my) è sovrapponibile alla coppia (x, y) ", si potrebbe dedurre che la *simmetria* rispetto ad un piano arbitrario è un *movimento*; e allora la parola *movimento* non avrebbe più il suo *significato abituale* [mentre l'ha conservato nel lavoro citato del Pieri, come pure nell'altro del Peano (§ 1)].

(3) È dunque bene inteso che, se qui mi occupo soltanto di *simboli non definiti* e di *definizioni*, non è perchè io ritenga di poter fare a meno di *postulati*. Ma la disinvoltura con la quale suppongo costruito un sistema di postulati, senza assumermi la briga di costruirlo realmente, può sembrare molto comoda e forse eccessiva. Spero tuttavia che la seguente osservazione semplicissima valga a giustificarmi. Se (dopo avere scelto un sistema di simboli non definiti e un sistema di postulati) si vuol cambiare il sistema di simboli non definiti, non è necessario cambiare il sistema di postulati, (tutt'al più si potrebbero trascrivere, agli antichi simboli non definiti sostituendo il loro significato espresso mediante i nuovi; ma sembra che nemmeno questo sia considerato necessario, poichè non si trova forse alcun libro di Geometria nel quale i postulati siano enunciati senza far uso esplicito di qualche simbolo definito). Dunque, purchè taluno abbia costruito un sistema accettabile di postulati per la Geometria euclidea, si potrà ricorrere a tale sistema, senza preoccuparsi della diversità dei sistemi di simboli non definiti.

§ 4. — Definizione di "movimento",

DEF. I. — Se a e b sono punti distinti, ⁽¹⁾

retta ab

significa: figura cui appartiene ogni punto x tale che non esiste alcun punto y , distinto da x , che verifichi simultaneamente le condizioni

$$(a, y) \equiv (a, x) \quad \text{e} \quad (b, y) \equiv (b, x).$$

DEF. II. — Quali che siano i punti a e b ,

centro di (a, b)

significa: punto x tale che

$$(a, x) \equiv (x, b)$$

e che non esiste alcun punto y , distinto da x , che verifichi simultaneamente le condizioni

$$(a, y) \equiv (a, x) \quad \text{e} \quad (b, y) \equiv (b, x). \quad (2)$$

DEF. III.

t è una traslazione

significa: quale che sia il punto x , anche tx è un punto; e, quali che siano i punti x ed y , il centro di (x, ty) (DEF. II) è pure il centro di (tx, y) .

DEF. IV. — Se a e b sono punti distinti,

r è una rotazione intorno ad (a, b) ,

significa:

- 1) quale che sia il punto x , anche rx è un punto;
- 2) quali che siano i punti x ed y $(rx, ry) \equiv (x, y)$;
- 3) ra ed rb coincidono rispettivamente con a e b ;
- 4) se un punto x , che non appartiene alla retta ab (DEF. I), coincide con rx , allora, se y è un punto qualunque, y coincide con ry . ⁽³⁾

DEF. V. — Se a è un punto,

r è una rotazione intorno ad a

(1) " x od y sono punti coincidenti," significa " x è un punto e y è lo stesso punto"; " x ed y sono punti distinti," significa " x è un punto ed y è un altro punto". Per conseguenza, benchè le parole *coincidenti* e *distinti* siano usate quasi esclusivamente in Geometria, le idee che rappresentano appartengono alla Logica pura, se ad essa appartengono quelle rappresentate dalle frasi *lo stesso* e *un altro*.

(2) Alla DEF. II si potrebbero sostituire le seguenti:

DEF. II'. — Quale che sia il punto a "centro di (a, a) " significa " a ";

DEF. II''. — Se a e b sono punti distinti "centro di (a, b) " significa: "punto x , dalla retta ab (DEF. I), tale che $(a, x) \equiv (x, b)$ ".

I postulati (§ 3) devono enunciare o permettere di dedurre, l'esistenza e l'unicità del punto x considerato nella DEF. II'' e devono pur consentire di dedurre la DEF. II' dalla DEF. II.

(3) Vediamo se un r che soddisfi alle condizioni enunciate in questa DEF. potrebbe non essere una rotazione intorno ad (a, b) , dando a questa frase il suo significato abituale. Dopo le condizioni 1) 2) 3), se r non fosse una rotazione intorno ad (a, b) , dovrebbe essere una simmetria rispetto ad un piano determinato, per esempio σ , al quale appartenerebbero i punti a e b ; ma allora, se x fosse un punto appartenente al piano σ e non alla retta ab , e se y fosse un punto non appartenente al piano σ , x coinciderebbe con rx , mentre y sarebbe distinto da ry , il che contraddirebbe alla condizione 4). Sicchè, mediante la DEF. IV, la frase definita " r è una rotazione intorno ad (a, b) " acquista esattamente il suo significato abituale.

significa: si possono determinare due punti b e c distinti da a , una rotazione r' intorno ad (a, b) (DEF. IV) e una rotazione r'' intorno ad (a, c) , per modo che, se x è un punto qualunque, rx coincida con $r''(r'x)$. (1)

DEF. VI.

m è un movimento

significa: si può determinare una traslazione t (DEF. III), un punto a e una rotazione r intorno ad a (DEF. V), per modo che, se x è un punto qualunque, mx coincida con $r(tx)$. (2)

§ 5. — Saggio di altre definizioni.

Ora che abbiamo esaurito il nostro compito (§ 4), lasciando da parte ogni preoccupazione *didattica* (§ 3), desideriamo mostrare la possibilità di adottare il nostro sistema di simboli non definiti (§ 3), anche nell'insegnamento elementare. Naturalmente converrà modificare un poco la definizione di movimento; (3) si potranno definire prima altri simboli e svilupparne la teoria mediante postulati (§ 3).

(1) Sia r una rotazione intorno ad a , nel significato abituale di questa frase, allora ra coincide con a . Se vi è un punto y distinto da a che coincide con ry , si verificheranno le condizioni enunciate nella DEF. V, identificando b con y , r' con r , c con un punto qualsiasi ed r'' con una trasformazione identica (cioè in questo caso, rotazione nulla o giro completo).

Se nessun punto y distinto da a coincide con ry , si potranno facilmente soddisfare le condizioni enunciate nella DEF. V, scegliendo b e r in modo che per un dato punto y , qualsiasi ma distinto da a , $r'y$ coincida con ry [per esempio, sia b il centro di (y, ry) e sia r' un mezzo giro intorno ad (a, b)], c con ry e scegliendo r'' in modo che per un dato punto z , qualsiasi ma non appartenente alla retta ay , $r''(r'z)$ coincida con rz [il che è sempre possibile; invero, qualunque sia il punto z , da quanto precede e da DEF. IV 2) 3) risulta che

$$(a, r'z) \equiv (a, z) \equiv (a, rz) \quad \text{e} \quad r'y, r'z \equiv (y, z) \equiv (ry, rz),$$

da cui, per quanto precede, si deduce che

$$(a, r'z) \equiv (a, rz) \quad \text{e} \quad (c, r'z) \equiv (c, rz);$$

in altri termini, il triangolo $a, c, r'z$ risulta ordinatamente sovrapponibile al triangolo a, c, rz ; è dunque possibile far ruotare il primo intorno ad (a, c) in modo che venga a coincidere col secondo; chiamando r'' tale rotazione, si avrà che $r''(r'z)$ coincide con rz .

Dopo ciò, poichè a, y, z non appartengono ad una stessa retta e poichè, per quanto precede, ra, ry, rz coincidono rispettivamente con $r''(r'a), r''(r'y), r''(r'z)$, se x è un punto qualunque allora rx coincide pure con $r''(r'x)$.

(2) Sia m un movimento, nel significato abituale di questa parola.

Se esiste un punto y che coincide con my , si verificheranno le condizioni enunciate nella DEFINIZIONE VI, identificando t con una trasformazione identica (cioè, in questo caso, traslazione nulla), a con y , r con m .

Se nessun punto y coincide con my , si potranno facilmente soddisfare le condizioni enunciate nella DEF. VI, scegliendo t in modo che, per un dato punto qualunque y , ty coincida con my , identificando a con my o scegliendo r in modo che, se w è un dato punto qualunque distinto da y e v è un dato punto qualunque non appartenente alla retta yw , allora $r(tw)$ e $r(tv)$ coincidano rispettivamente con mw ed mv .

[Dalla DEF. III e dai postulati (§ 3) si dedurrà che, se t è una traslazione qualunque e se x ed y sono punti qualunque,

$$(tx, ty) \equiv (x, y).$$

Nel caso nostro, poichè ty coincide con my che fu indicato con a , il triangolo y, u, v è ordinatamente sovrapponibile al triangolo a, tu, tv ; d'altra parte, il medesimo triangolo y, u, v dev'essere ordinatamente sovrapponibile al triangolo a, mu, mv ; i triangoli a, tu, tv ed a, mu, mv son dunque ordinatamente sovrapponibili ed esiste quindi una rotazione r intorno ad a per cui $r(tu)$ ed $r(tv)$ coincidono rispettivamente con mu ed mv].

Dopo ciò, poichè per ipotesi y, u, v non appartengono ad una medesima retta e poichè per quanto precede $r(ty), r(tu), r(tv)$ coincidono rispettivamente con my, mu, mv , se x è un punto qualunque, allora $r(tx)$ coincide con mx .

(3) Si potrà anche fare a meno completamente di questo simbolo, definendo la relazione è sovrapponibile a tra figure qualsiasi.

Daremo qui un piccolo saggio di queste definizioni.

DEF. I. — (La DEF. I del § 4).

DEF. II. — (La DEF. II' enunciata nella nota alla DEF. II del § 4).

In tutte le DEF. seguenti è sottinteso che a e b sono punti distinti.

DEF. III.

Superficie sferica che ha per centro a e che passa per b ,

significa: figura cui appartiene ogni punto x tale che

$$(a, x) \equiv (a, b).$$

DEF. IV.

Superficie sferica che ha per poli a e b ,

significa: superficie sferica che ha per centro il centro di (a, b) (DEF. II) e che passa per b (DEF. III).

DEF. V. — Se c e d sono punti distinti della retta ab (DEF. I),

$$(c, d) \text{ non intreccia } (a, b), \text{ (}^1\text{)}$$

significa: la superficie sferica che ha per poli a e b (DEF. IV) non ha alcun punto comune con la superficie sferica che ha per poli c e d .

DEF. VI.

c è un punto situato fra a e b ,

significa: se d è il centro di (a, b) (DEF. II), allora c coincide con d ovvero è un punto della retta ab (DEF. I) tale che (c, d) non intreccia (a, b) (DEF. V).

DEF. VII.

segmento ab

significa: figura cui appartengono a , b ed ogni punto situato fra a e b (DEF. VI).

DEF. VIII.

prolungamento di ab , (2)

significa: figura cui appartiene ogni punto x tale che b sia situato fra a ed x .

DEF. IX.

raggio ab , (3)

significa: figura cui appartiene ogni punto del segmento ab (DEF. VII) e del prolungamento di ab (DEF. VIII). (4)

DEF. X. — Se c e d sono punti distinti della retta ab (DEF. I),

d segue c come b segue a ,

significa: il prolungamento di ab (DEF. VIII) contiene il prolungamento di cd , o questo contiene quello.

(1) Per evitare ogni ambiguità, sostituisco *non intreccia* alla frase, abituale in Geometria proiettiva, *non separa*; poichè, se ad esempio i punti considerati si susseguono nell'ordine a, c, d, b , mi sembra che l'enunciato " (c, d) non intreccia (a, b) " sia più prossimo al linguaggio comune dell'altro " (c, d) non separa (a, b) ".

(2) Abbrevio così la frase troppo lunga "prolungamento del segmento ab dalla parte di b ".

(3) Abbrevio così la frase troppo lunga "raggio uscente da a e che passa per b ".

(4) Ovvero, riferendosi direttamente alla DEF. VI, "figura cui appartiene ciascun punto x tale che esiste almeno un punto y per cui b ed x risultan situati fra a ed y (Def. VI).

DEF. XI.

simmetrico di a rispetto a b significa: punto x tale che b sia il centro di (a, x) (DEF. II).

In tutte le DEF. seguenti, è sottinteso che c è un punto non appartenente alla retta ab (DEF. I).

DEF. XII.

 $(a, b) \perp (b, c)$,significa: b è un punto della superficie sferica che ha per poli a e c (DEF. IV).DEF. XIII. — Se d è un punto distinto da c , (c, d) è parallelo ad (a, b) significa: il simmetrico di a rispetto al centro di (bc) (DEF. II, XI) è un punto della retta cd (DEF. I).

DEF. XIV.

 x è un punto interno al triangolo abc ,significa: x è un punto distinto da a e vi è un punto del prolungamento di ax (DEF. VIII) che è situato fra b e c (DEF. VI).

DEF. XV.

 x è un punto interno all'angolo \widehat{abc} ,⁽¹⁾significa: x è un punto distinto da b e vi è un punto del raggio bx (DEF. IX) che è situato fra a e c (DEF. VI).

DEF. XVI.

piano abc ,significa: figura cui appartiene ogni punto x , tale che non esista alcun punto y , distinto da x , che verifichi simultaneamente le condizioni:

$$(a, y) \equiv (a, x), \quad (b, y) \equiv (b, x), \quad (c, y) \equiv (c, x).$$

Il saggio di DEF. che abbiamo dato ci sembra sufficiente a provare la possibilità di adottare il nostro metodo anche nell'insegnamento elementare.

Si noterà la perfetta analogia delle DEF. I e XVI delle due figure fondamentali *retta* e *piano*, e la possibilità di definire il *piano* immediatamente dopo la *retta* ⁽²⁾ o differire la DEF. di *piano*, come noi abbiamo fatto, per definire prima le relazioni di *perpendicolarità* e di *parallelismo* fra *coppie di punti* (o *rette*).

ALESSANDRO PADOA.

(1) Qui considero soltanto gli angoli convessi.

(2) Invece nella DEF. XVI sono usati soltanto i due simboli non definiti; ma l'ipotesi di tale DEF. (c non appartiene alla ab) presuppone la DEF. I.

SOPRA UNA TRASFORMAZIONE DELLE CURVE PIANE

Si consideri una curva piana c , e supponiamo che una sua tangente mobile incontri rispettivamente in A e B due rette ortogonali x e y del piano della c ; indichiamo con c' la curva luogo del punto medio del segmento AB .

Inversamente, se da ogni punto P' della curva c' si conduce una retta r tale che, incontrando x e y rispettivamente in due punti A e B , il segmento AB abbia il suo punto medio in P' , è chiaro che l'involuppo di tale retta r è la curva c .

Mi propongo di occuparmi della trasformazione (c, c') .

I. Se la curva c è rappresentata dalle equazioni parametriche

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t),$$

l'equazione della tangente mobile sarà

$$(y - f_2) f'_1 - (x - f_1) f'_2 = 0,$$

dove, per semplicità, si è posto

$$f'_1 = \frac{df_1}{dt}, \quad f'_2 = \frac{df_2}{dt}.$$

I punti A e B avranno perciò rispettivamente per coordinate

$$\left[0, \frac{1}{f'_1} (f_2 f'_1 - f_1 f'_2) \right]; \quad \left[\frac{1}{f'_2} (f_1 f'_2 - f_2 f'_1), 0 \right],$$

e quindi per il punto medio $P' \equiv (\xi, \eta)$ di AB avremo:

$$\xi = \frac{1}{2f'_2} (f_1 f'_2 - f_2 f'_1), \quad \eta = \frac{1}{2f'_1} (f_2 f'_1 - f_1 f'_2), \quad (1)$$

che sono le equazioni parametriche della curva c' .

ESEMPIO. — Sia c l'ellisse rappresentata dalle equazioni

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta.$$

Poichè in tal caso si ha $f_1(\theta) = a \cos \theta$, $f_2(\theta) = b \sin \theta$, $f'_1(\theta) = -a \sin \theta$, $f'_2(\theta) = b \cos \theta$, le (1) danno

$$\xi = \frac{a}{2 \cos \theta}, \quad \eta = \frac{b}{2 \sin \theta},$$

che sono le equazioni parametriche della curva c' .

Da queste, eliminando θ , si ha l'equazione cartesiana

$$\frac{a^2}{\xi^2} + \frac{b^2}{\eta^2} = 4,$$

che rappresenta una Kreuzkurva.

Se c è un circolo, c' è una Kreuzkurva equilatera.

2. Se la curva c , riferita a gli assi coordinati x, y , è rappresentata da una equazione esplicita

$$y = f(x),$$

poichè l'equazione della tangente in un punto $P \equiv (x_1, y_1)$ è

$$y - f_1 = f'_1(x - x_1),$$

dove, per semplicità, si è posto

$$f(x_1) = f_1; \quad \left[\frac{df(x)}{dx} \right]_{x=x_1} = f'_1,$$

si ha, conservando le notazioni del § precedente:

$$\xi = \frac{1}{2f'_1} (x_1 f'_1 - f_1), \quad \eta = \frac{1}{2} (f_1 - x_1 f'_1), \quad (2)$$

dalle quali, eliminando x_1 , si ha l'equazione della c' .

ESEMPLO. — Sia c la parabola cubica rappresentata dalla equazione

$$y = \frac{1}{a^2} x^3.$$

Facilmente si ha che le (2) in tal caso divengono

$$\xi = \frac{x_1}{3}; \quad \eta = -\frac{x_1^3}{a^2}$$

e quindi, eliminando x_1 fra queste, si ha

$$\eta = -\frac{27}{a^2} \xi^3$$

che rappresenta un'altra parabola cubica col flesso e la tangente stazionaria in comune con la data.

3. Se la curva c , sempre riferita a gli assi x, y , è rappresentata dall'equazione implicita

$$f(x, y) = 0, \quad (3)$$

l'equazione della tangente t a c in un punto $P \equiv (x_1, y_1)$ è

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_1 \cdot (x - x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_1 \cdot (y - y_1) = 0 \quad (4)$$

dove, per semplicità, si è posto

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_1, y=y_1} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x=x_1, y=y_1} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1.$$

Indicando, come già si è detto, con A e B le intersezioni della t con x e y , avremo:

$$A \equiv (x_0, 0), \quad B \equiv (0, y_0),$$

dove, a causa della (4), x_0 e y_0 hanno rispettivamente i valori:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \left[x_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 + y_1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 \right] : \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 \\ y_0 &= \left[x_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 + y_1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 \right] : \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

e quindi, indicando, al solito, con $P' \equiv (\xi, \eta)$ il punto medio del segmento AB, si ha:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \left[x_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 + y_1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 \right] : 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 \\ \eta &= \left[x_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 + y_1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 \right] : 2 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Eliminando x_1 e y_1 fra le (6) e la (3), dopo di aver sostituito in quest'ultima x_1 ed y_1 rispettivamente a x e y , si otterrà l'equazione (in ξ, η) della trasformata c' (luogo di P').

Nel caso in cui c sia una curva algebrica dell' n° ordine, rendendo omogenea la (3) col porre momentaneamente

$$x = X : Z; \quad y = Y : Z, \quad (7)$$

potremo applicare il teorema di Euler su le funzioni omogenee, e quindi si ha

$$X \frac{\partial f}{\partial X} + Y \frac{\partial f}{\partial Y} = n f - Z \frac{\partial f}{\partial Z}$$

e per $X = x_1, Y = y_1, Z = 1$, poichè è

$$f(x_1, y_1) = 0, \quad (3')$$

avremo

$$x_1 \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_{X=x_1} + y_1 \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)_{Y=y_1} = - \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)_{Z=1}$$

e perciò le (6) divengono:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= - \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)_{Z=1} : 2 \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_{X=x_1} \\ \eta &= - \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)_{Z=1} : 2 \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)_{Y=y_1} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Eliminando x_1 e y_1 fra le (8) e la (3'), si otterrà l'equazione (in ξ, η) della trasformata di c' (luogo di P').

4. Applichiamo ciò che è stato esposto nel § precedente al caso particolare in cui la curva data c sia una conica ($n = 2$).

Sia

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (9)$$

l'equazione cartesiana di tale curva, riferendoci a gli assi rettangolari x e y .

Rendendo omogenea la (9) con le posizioni (7), si ha per $X = x_1$, $Y = y_1$, $Z = 1$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_{X=x_1} = 2(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)_{Y=y_1} = 2(a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)_{Z=1} = 2(a_{13}x_1 + a_{23}y_1 + a_{33}), \end{cases}$$

e quindi le (8) divengono

$$\xi = -\frac{1}{2} \frac{a_{12}x_1 + a_{23}y_1 + a_{23}}{a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}}; \quad \eta = -\frac{1}{2} \frac{a_{12}x_1 + a_{23}y_1 + a_{23}}{a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}} \quad (10)$$

Dalle (10) si ricava

$$x_1 = \frac{A_{11}\eta + A_{12}\xi - 2A_{12}\xi\eta}{A_{12}\eta + A_{23}\xi - 2A_{23}\xi\eta}; \quad y_1 = \frac{A_{12}\eta + A_{23}\xi - 2A_{23}\xi\eta}{A_{12}\eta + A_{23}\xi - 2A_{23}\xi\eta} \quad (11)$$

dove A_{rs} indica l'elemento reciproco di a_{rs} nel determinante

$$\Delta = \Sigma(\pm a_{11} a_{22} a_{33}),$$

nel quale si suppone $a_{rs} = a_{sr}$.

Sostituendo con le (11) nella (3'), fatte le riduzioni e tralasciato un fattore Δ , si ha:

$$4A_{23}\xi^2\eta^2 - 4A_{23}\xi^2\eta - 4A_{12}\xi\eta^2 + 2A_{12}\xi\eta + A_{22}\xi^2 + A_{11}\eta^2 = 0, \quad (12)$$

che è l'equazione del luogo di P' , cioè della curva c' .

La trasformata di una conica centrale ($A_{23} \geq 0$) è dunque, in generale, una quartica; se invece la c è una parabola ($A_{23} = 0$), la trasformata è, in generale, una cubica.

In entrambi i casi la (12) ha un punto doppio nell'origine; questo punto è nodo, cuspidale o punto isolato, secondo che è

$$A_{11}A_{22} - A_{12}^2 \begin{cases} > 0, \\ = 0, \\ < 0, \end{cases}$$

cioè secondo che è tale Δa_{33} , ossia finalmente secondo che l'origine O delle coordinate (punto d'incontro delle rette ortogonali date x, y) è esterno alla conica o è su la conica o è interno a questa.

CASI PARTICOLARI. — a) Se è $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, cioè se la c è una conica col centro in O e le direzioni degli assi coincidono con x, y , la (12) diviene

$$4A_{33}\xi^2\eta^2 + A_{22}\xi^2 + A_{11}\eta^2 = 0,$$

e perciò se la c è l'ellisse (reale) rappresentata dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

la c' è la Kreuzcurva

$$4\xi^2\eta^2 - b^2\xi^2 - a^2\eta^2 = 0.$$

In particolare se la c è un circolo

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

la c' è una Kreuzcurva equilatera

$$4\xi^2\eta^2 - r^2(\xi^2 + \eta^2) = 0,$$

resultati questi che coincidono con quelli ottenuti al § 1.

Se la c è l'iperbole rappresentata dalla equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

la c' è la Kohlenspitzencurva

$$4\xi^2\eta^2 + b^2\xi^2 - a^2\eta^2 = 0,$$

resultati tutti questi prevedibili, tenendo conto delle ordinarie generazioni delle Kreuzcurve e delle Kohlenspitzencurve. (1)

b) Se è $A_{11} = A_{22} = 0$, cioè se gli assi x, y sono tangenti alla conica c , la c' si scinde negli assi ($\xi\eta = 0$), com'è naturale, e nella

$$2A_{33}\xi\eta + 2A_{23}\xi + 2A_{13}\eta - A_{12} = 0$$

che, per $A_{33} \geq 0$ e $A_{12} \geq 0$, rappresenta una iperbole.

In particolare se c è il circolo rappresentato dalla equazione

$$x^2 + y^2 - 2rx - 2ry + r^2 = 0,$$

la trasformata è (oltre a $\xi\eta = 0$), l'iperbole equilatera

$$2\xi\eta - 2r\xi - 2r\eta + r^2 = 0,$$

il cui centro (r, r) coincide con quello del circolo dato.

c) Se è $A_{11} = A_{22} = A_{33}$, cioè se la c è una parabola tangente agli assi x, y , si ha per la trasformata c' , oltre a $\xi\eta = 0$, la retta

$$2A_{23}\xi + 2A_{13}\eta + A_{12} = 0,$$

e quindi si ha il teorema: Se x e y sono due tangenti ortogonali di una parabola

(1) Cfr. BROCARD, *Notes de bibliographie des courbes géométriques*, Bar-le-duc, 1897-99 (autografia).

e t è una tangente mobile, se t incontra in A e B rispettivamente x e y , il luogo del punto medio di AB è una retta. Facilmente si potrebbe generalizzare questo teorema.

d) Se c è una iperbole equilatera che ha per assintoti x e y , cioè se è rappresentata dalla equazione

$$xy = k^2,$$

è $a_{11} = a_{22} = a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{12} = \frac{1}{2}$, $a_{33} = -k^2$, e quindi anche

$$A_{11} = A_{22} = A_{13} = A_{23} = 0, A_{12} = \frac{1}{2}k^2, A_{33} = -\frac{1}{2},$$

e perciò la trasformata c' è, oltre a $\xi\eta = 0$, che corrisponde agli assintoti,

$$\xi\eta = k^2,$$

cioè la c si trasforma in se stessa (anallagmatica); ciò è naturale quando si pensi alla nota proprietà dell'iperbole: "Ogni segmento di tangente compreso fra gli assintoti è diviso per metà dal punto di contatto".

e) Se la c è una parabola col vertice in O e tale che x, y sieno rispettivamente l'asse principale e la tangente al vertice, cioè se è rappresentata dalla equazione

$$y^2 = 2px,$$

la c' diviene

$$\eta^2 = -\frac{p}{4}\xi,$$

altra parabola con l'asse ed il vertice comune con la data.

f) Infine noteremo che se c è una parabola tangente ad uno degli assi o a tutti due (ed in quest'ultimo caso l'abbiamo già provato), la cubica trasformata si scinde, come si scinde pure in altri casi, ecc.

5. Occupiamoci ora della trasformazione inversa. Riferendoci sempre ai soliti assi $\xi = x$, $\eta = y$, sia $P' \equiv (\xi, \eta)$ un punto qualunque di una curva c' ; una retta passante per P' ha per equazione

$$y - \eta = \mu (x - \xi), \quad (13)$$

dove μ è un parametro variabile.

Se questa retta incontra gli assi in due punti A e B , in modo che P' sia medio di AB , dovrà essere

$$\mu = -\frac{\eta}{\xi},$$

com'è chiaro anche geometricamente, e quindi l'equazione (13) diviene in tal caso

$$x\eta + y\xi - 2\xi\eta = 0. \quad (14)$$

Per avere l'equazione della curva c , trasformata della c' , bisognerà trovar l'inviluppo della (14).

(1) Indichiamo per comodità con x, y le coordinate correnti, quantunque dovrebbero indicarsi con ξ, η .

6. Supponiamo dapprima che c' sia data dalle equazioni parametriche

$$\xi = \varphi_1(t), \quad \eta = \varphi_2(t); \quad (15)$$

la (14) diviene in tal caso

$$x\varphi_2 + y\varphi_1 - 2\varphi_1\varphi_2 = 0 \quad (16)$$

e, derivando rispetto a t :

$$x\varphi_2' + y\varphi_1' - 2\varphi_1'\varphi_2 - 2\varphi_1\varphi_2' = 0, \quad (17)$$

dove si è posto $\varphi_1' = \frac{d\varphi_1}{dt}$, $\varphi_2' = \frac{d\varphi_2}{dt}$.

Finalmente, combinando le (16), (17), si ha

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2\varphi_1^2 \cdot \varphi_2'}{\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2} \\ y &= \frac{2\varphi_2^2 \cdot \varphi_1'}{\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

che sono le equazioni parametriche della curva c , dalle quali, se vogliamo, può eliminarsi t , ottenendo l'equazione cartesiana.

ESEMPL. — 1°. Supponiamo che c' sia un circolo col centro in O , cioè supponiamo che le (15) divengano

$$\xi = r \cos \theta, \quad \eta = r \sin \theta;$$

allora, per le (18), le equazioni parametriche della trasformata sono:

$$x = 2r \cos^3 \theta, \quad y = 2r \sin^3 \theta,$$

ossia l'equazione cartesiana è

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (2r)^{\frac{2}{3}},$$

che rappresenta una ipocicloide tetracuspidè (astroide).

2°. Se c' è una cissoide di Diocle, rappresentata dalle equazioni

$$\xi = \frac{a}{1+t^2}, \quad \eta = \frac{a}{t(1+t^2)} = \frac{\xi}{t},$$

avremo

$$\bullet \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{-2at}{(1+t^2)^2}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{-a(1+3t^2)}{t^2(1+t^2)^2},$$

e quindi le (18) danno per la trasformata c :

$$x = \frac{2a(1+3t^2)}{1+t^2}, \quad y = \frac{-4at}{(1+t^2)^2},$$

da cui, eliminando t , si ha, dopo aver posto $x - 6a = X$, $4a = \alpha$:

$$X^2 + \alpha X^3 + \alpha^2 y^2 = 0,$$

che rappresenta una particolare quartica piriforme. (1)

(1) BROCARD, *op. cit.*, I, pag. 235.

7. Supponiamo che la curva c' sia data per mezzo di una equazione esplicita

$$\eta = \varphi(\xi). \quad (19)$$

In tal caso, derivando il 1° membro della (14) rispetto a ξ ed eguagliando a 0, si ha:

$$\frac{d\eta}{d\xi}(x - 2\xi) - 2\eta + y = 0. \quad (20)$$

Eliminando ξ e η fra le (14), (19), (20), si ha l'equazione della c .

ESEMPIO. — Supponiamo che la c' sia una retta rappresentata dalla equazione

$$\eta = m\xi + n. \quad (21)$$

Poichè si ha $\frac{d\eta}{d\xi} = m$, le (14), (20), tenuto conto della (21), divengono rispettivamente

$$\begin{aligned} (x - 2\xi)(m\xi + n) + y\xi &= 0 \\ m(x - 2\xi) - 2(m\xi + n) + y &= 0 \end{aligned}$$

dalle quali, eliminando ξ , si ha

$$(mx + y)^2 + 4n(mx - y + n) = 0,$$

che rappresenta una parabola tangente agli assi (cfr. § 4, es. c').

8. Supponiamo finalmente che la curva c' sia data per mezzo di una equazione implicita

$$\varphi(\xi, \eta) = 0; \quad (22)$$

dovremo allora eliminare ξ e η fra la (22), la (14) e la (20), che in tal caso, essendo

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} : \frac{\partial\varphi}{\partial\eta},$$

diviene

$$(x - 2\xi) \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - (y - 2\eta) \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0. \quad (20')$$

ESEMPIO. — Sia c' la parabola semi-cubica, rappresentata dalla equazione

$$\varphi = \eta^3 - a\xi^2 = 0.$$

Per avere l'equazione della trasformata c , poichè è

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = -2a\xi, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 3\eta^2,$$

dovremo eliminare ξ e η fra le equazioni

$$\begin{cases} x\eta + y\xi - 2\xi\eta = 0 \\ 2a\xi(x - 2\xi) + 3\eta^2(y - 2\eta) = 0 \\ \eta^3 - a\xi^2 = 0 \end{cases} \quad [14]$$

e tale resultante, oltre all'equazione complessiva degli assi, è

$$y^3 - \frac{27}{2}ax^2 = 0,$$

che rappresenta un'altra parabola semi-cubica con la cuspide e la tangente di regresso in comune con la data.

NOTE. — Abbiamo considerato tre procedimenti diversi anche perchè l'eliminazione in molti casi riesce difficile, o almeno assai laboriosa, e quindi, caso per caso, conviene di scegliere il metodo per il quale tale eliminazione sia facilitata.

Facilmente potrebbe generalizzarsi la trasformazione considerando due rette x, y , anzichè ortogonali, oblique fra loro.

Susa, 1903.

Dott. GIULIO CARDOSO-LAYNES.

IPERBOLE D'APOLLONIO GENERALIZZATA

1. Chiamerò *inclinate di un angolo α* ad una curva in un punto P le due rette condotte per P che formano un angolo α colla normale ordinaria in P.

Cerchiamo l'equazione delle due inclinate di un angolo α ad un'ellisse in un suo punto P.

Sia φ l'angolo eccentrico in P; $\theta, \theta', \theta''$, gli angoli della normale in P e delle normali inclinate di α in P coll'asse x ; N, N', N'' i punti d'incontro di queste con l'asse x . Si ha

$$\tan \theta = \frac{a \operatorname{sen} \varphi}{b \operatorname{cos} \varphi}. \quad (1)$$

L'equazione della PN' è

$$y - b \operatorname{sen} \varphi = (x - a \operatorname{cos} \varphi) \tan \theta'. \quad (2)$$

Essendo $\theta' = \theta + \alpha$ si ha

$$\tan \theta' = \tan (\theta + \alpha) = \frac{\tan \theta + \tan \alpha}{1 - \tan \theta \tan \alpha}, \quad (3)$$

ovvero per la (1)

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{\frac{a \operatorname{sen} \varphi}{b \operatorname{cos} \varphi} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{a \operatorname{sen} \varphi}{b \operatorname{cos} \varphi}} = \frac{a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} \alpha + b \operatorname{cos} \varphi \operatorname{sen} \alpha}{b \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} \alpha - a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \alpha}.$$

Per conseguenza l'equazione (2) diventa

$$y - b \operatorname{sen} \varphi = (x - a \operatorname{cos} \varphi) \left(\frac{a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} \alpha + b \operatorname{cos} \varphi \operatorname{sen} \alpha}{b \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} \alpha - a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \alpha} \right),$$

ovvero

$$x (a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} \alpha + b \operatorname{cos} \varphi \operatorname{sen} \alpha) - y (b \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} \alpha - a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \alpha) = c^2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} \alpha + ab \operatorname{sen} \alpha, \quad (4)$$

ovvero

$$(ax \operatorname{sen} \varphi - by \operatorname{cos} \varphi - c^2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} \varphi) \operatorname{cos} \alpha + (bx \operatorname{cos} \varphi + ay \operatorname{sen} \varphi - ab) \operatorname{sen} \alpha = 0. \quad (5)$$

Per la seconda retta PN'' si ha $\theta'' = \theta - \alpha$. Basta dunque cambiare α in $-\alpha$ nelle equazioni (4) e (5) per avere l'equazione della PN'' che è

$$x(a \operatorname{sen} \varphi \cos \alpha - b \cos \varphi \operatorname{sen} \alpha) - y(b \cos \varphi \cos \alpha + a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \alpha) = \\ = c^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \cos \alpha - ab \operatorname{sen} \alpha, \quad (6)$$

ovvero

$$(ax \operatorname{sen} \varphi - by \cos \varphi - c^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi) \cos \alpha - (bx \cos \varphi + ay \operatorname{sen} \varphi - ab) \operatorname{sen} \alpha = 0. \quad (7)$$

2. Consideriamo ora le *inclinate* che si possono condurre da un punto $M(x_0, y_0)$, e chiamiamo X, Y le coordinate del piede di una di esse.

Ponendo

$$\cos \varphi = \frac{X}{a}, \quad \operatorname{sen} \varphi = \frac{Y}{b}, \quad x = x_0, \quad y = y_0,$$

l'equazione (5) diventa

$$(c^2 XY + b^2 y_0 X - a^2 x_0 Y) \cos \alpha - (b^2 X x_0 + a^2 Y y_0 - a^2 b^2) \operatorname{sen} \alpha = 0, \quad (8)$$

ovvero

$$c^2 XY \cos \alpha - b^2 X(x_0 \operatorname{sen} \alpha - y_0 \cos \alpha) - a^2 Y(x_0 \cos \alpha + y_0 \operatorname{sen} \alpha) + a^2 b^2 \operatorname{sen} \alpha = 0, \quad (9)$$

e la (6) diventa

$$(c^2 XY + b^2 y_0 X - a^2 x_0 Y) \cos \alpha + (b^2 X x_0 + a^2 Y y_0 - a^2 b^2) \operatorname{sen} \alpha = 0, \quad (10)$$

ossia

$$c^2 XY \cos \alpha + b^2 X(x_0 \operatorname{sen} \alpha + y_0 \cos \alpha) - a^2 Y(x_0 \cos \alpha - y_0 \operatorname{sen} \alpha) - a^2 b^2 \operatorname{sen} \alpha = 0. \quad (11)$$

Per conseguenza esistono otto inclinate di un angolo α , i piedi delle quali sono le intersezioni della ellisse con le due iperboli (9) e (11), che possiamo chiamare *iperboli di Apollonio generalizzate*. Quando $\alpha = 0$, esse si riducono alla iperbole d'Apollonio relativa ad M , cioè

$$c^2 XY + b^2 y_0 X - a^2 x_0 Y = 0. \quad (12)$$

3. Ecco alcune proprietà e luoghi geometrici relativi a queste iperboli.

1°. *Qualunque sia l'angolo α , le due iperboli d'Apollonio generalizzate passano per due punti fissi.*

Infatti dall'equazioni (8), (10) si vede che le due curve passano per i punti comuni alle due linee

$$\begin{cases} c^2 X y + b^2 y_0 X - a^2 x_0 Y = 0, \\ b^2 X x_0 + a^2 Y y_0 - a^2 b^2 = 0, \end{cases}$$

cioè per i punti d'incontro della iperbole d'Apollonio di M colla polare di M rispetto all'ellisse data.

2°. Le coordinate del centro di ciascuna delle due iperboli (9), (11) sono rispettivamente

$$\begin{cases} X = \frac{a^2}{c^2 \cos \alpha} (x_0 \cos \alpha + y_0 \operatorname{sen} \alpha), \\ Y = \frac{b^2}{c^2 \cos \alpha} (x_0 \operatorname{sen} \alpha - y_0 \cos \alpha); \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} X' = \frac{a^2}{c^2 \cos \alpha} (x_0 \cos \alpha - y_0 \operatorname{sen} \alpha), \\ Y' = -\frac{b^2}{c^2 \cos \alpha} (x_0 \operatorname{sen} \alpha + y_0 \cos \alpha). \end{cases} \quad (14)$$

Se ne deduce

$$\frac{X^2}{a^4} + \frac{Y^2}{b^4} = \frac{X'^2}{a^4} = \frac{Y'^2}{b^4} = \frac{x_0^2 + y_0^2}{c^4 \cos^2 \alpha},$$

ovvero

$$\frac{X^2 - X'^2}{a^4} = \frac{Y'^2 - Y^2}{b^4}. \quad (15)$$

Il punto medio del segmento che ha per estremi questi centri ha per coordinate

$$A = \frac{X + X'}{2} = \frac{a^2 x_0}{c^2}, \quad B = \frac{Y + Y'}{2} = -\frac{b^2 y_0}{c^2}. \quad (16)$$

Se dunque il punto (x_0, y_0) descrive una curva, il punto (A, B) descrive una curva dello stesso ordine.

3°. *Luogo del centro delle iperboli d'Apollonio generalizzate al variare di α .*

L'equazioni (13) si possono scrivere

$$\begin{aligned} X - \frac{a^2 x_0}{c^2} &= \frac{a^2 y_0}{c^2} \operatorname{tg} \alpha, \\ Y + \frac{b^2 y_0}{c^2} &= \frac{b^2 x_0}{c^2} \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Eliminando $\operatorname{tg} \alpha$ fra queste, si ha

$$b^2 X x_0 - a^2 Y y_0 = \frac{a^2 b^2 (x_0^2 + y_0^2)}{c^2}; \quad (17)$$

il luogo dei centri è dunque una retta.

Se il punto (x_0, y_0) percorre il circolo $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, si ha $x_0^2 + y_0^2 = R^2$, e la retta (17) involupa l'ellisse

$$\frac{X^2}{a^4} + \frac{Y^2}{b^4} = \frac{R^2}{c^4}. \quad (18)$$

4°. Se il punto $M(x_0, y_0)$ percorre l'ellisse, si ha

$$x_0 = a \cos \psi, \quad y_0 = b \sin \psi,$$

e la (17) diviene

$$bX \cos \psi - aY \sin \psi = \frac{ab}{c^2} (a^3 \cos^3 \psi + b^3 \sin^3 \psi). \quad (19)$$

Per trovare l'involuppo di questa retta, prendiamo la derivata della (19) rispetto a ψ : si ha così

$$bX \sin \psi + aY \cos \psi = 2ab \sin \psi \cos \psi. \quad (20)$$

Risolvendo le (19) e (20) rispetto a X e Y , si ha

$$\begin{cases} X = \frac{a}{c^2} [(b^2 + 2c^2) \cos \psi - c^2 \cos^3 \psi] \\ Y = -\frac{b}{c^2} [(a^2 - 2c^2) \sin \psi + c^2 \sin^3 \psi]. \end{cases} \quad (21)$$

Si vede, sotto questa forma, anche senza fare l'eliminazione di ψ che le equazioni (21) rappresentano una curva unicursale di sesto grado.

Essa è una curva chiusa la cui area è

$$U = \frac{\pi ab}{8c^4} (a^4 + b^4 - 10a^2 b^2) = \frac{\pi ab}{8} - \frac{\pi a^3 b^3}{c^4}.$$

5°. Se il punto (x_0, y_0) percorre una retta il luogo dei punti fissi comuni a tutte le iperboli d'Apollonio generalizzate (1°) è una cubica.

Se il punto (x_0, y_0) percorre l'ellisse dato il luogo suddetto è una sestica.

6°. Gli involucri delle iperboli d'Apollonio generalizzate, quando il punto (x_0, y_0) percorre l'ellisse dato, l'angolo α restando costante, sono due quartiche.

Infatti $x_0 = a \cos \psi$, $y_0 = b \sin \psi$ nella (9), si ha

$$b(b^2 X \cos \alpha - a^2 Y \sin \alpha) \sin \psi - a(b^2 X \sin \alpha + a^2 Y \cos \alpha) \cos \psi + c^2 XY \cos \alpha + a^2 b^2 \sin \alpha = 0.$$

Per conseguenza, l'involucro indicato è la quartica

$$b^2(b^2 X \cos \alpha - a^2 Y \sin \alpha)^2 + a^2(b^2 X \sin \alpha + a^2 Y \cos \alpha)^2 = (c^2 XY \cos \alpha + a^2 b^2 \sin \alpha)^2. \quad (22)$$

Similmente si trova che l'involucro dell'iperbole (11) è la quartica

$$b^2(b^2 X \cos \alpha + a^2 Y \sin \alpha)^2 + a^2(b^2 X \sin \alpha - a^2 Y \cos \alpha)^2 = (c^2 XY \cos \alpha - a^2 b^2 \sin \alpha)^2. \quad (23)$$

Quando $\alpha = 0$, queste due (22) e (23) diventano le *kreuzcurve*.

$$b^6 X^2 + a^6 Y^2 = c^4 X^2 Y^2. \quad (24)$$

E.-N. BARISIEN.

PICCOLE NOTE

Sopra una speciale trasformazione quadratica del piano. — 1. Siano dati sopra un piano una retta r ed un punto O ; e, indicando con P un punto qualsiasi del piano, sia A l'intersezione della retta r colla retta OP . Facciamo corrispondere al punto P il punto P' in cui la parallela alla r passante per P incontra la perpendicolare alla r passante per A .

Prendiamo il punto O come origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali XOY rispetto al quale l'equazione della retta r sia: $x = 1$. Nel modo suaccennato si viene a stabilire fra due piani sovrapposti π e π' la trasformazione quadratica definita dalle formole: $x = x'$, $y = x'y'$; $x' = x$, $y' = \frac{y}{x}$.

È questa la trasformazione per la quale: al cerchio $(x-1)^2 + y^2 = 1$ del piano π corrisponde nel piano π' la *versiera di Agnesi* $x'y'^2 + x' = 2$; ed al cerchio $x'^2 + y'^2 = 1$ del piano π' corrisponde nel piano π la *lemniscata di Geronio* $x^4 = x^2 - y^2$.

In tale trasformazione vi sono però altre corrispondenze degne di nota.

2. Alle rette $y = mx + b$ del piano π corrispondono nel piano π' le iperbole equilatera $x'(y' - m) = b$ aventi per assintoti l'asse OY ed una parallela all'asse OX .

Alle rette $y' = mx' + b$ del piano π' corrispondono nel piano π le parabole $y = mx^2 + bx$ cioè $y + \frac{b^2}{4m} = m \left(x + \frac{b}{2m}\right)^2$ passanti per O ed aventi l'asse parallelo all'asse OY .

Siccome con tale trasformazione i punti dell'asse OX e della retta r sono punti fissi, così è chiaro che in ambo i casi la conica corrispondente ad una retta data passa per i punti d'intersezione di tal retta coll'asse OX e colla retta r .

3. Alla parabola $y'^2 = px'$ del piano π' corrisponde nel piano π la parabola semicubica $y^2 = px^3$; ed alla parabola $x'^2 = py'$ del piano π' corrisponde nel piano π la parabola cubica $x^3 = py$.

Alla parabola $y^2 = px$ ed all'iperbole equilatera $xy = p$ del piano π corrispondono nel piano π' rispettivamente le iperbole cubiche $x'y'^2 = p$ ed $x'^2y = p$, cioè la stessa curva ruotata di un angolo retto.

4. Al cerchio $x^2 + y^2 = a^2$ del piano π corrisponde nel piano π' la curva $x'^2y'^2 = a^2 - x'^2$.

Spostando tale curva parallelamente all'asse OX la sua equazione diventa $y'^2(x' - b)^2 = a^2 - (x' - b)^2$; e nel piano π le corrisponde la conoide di Nicomede $y^2(x - b)^2 = x^2\{a^2 - (x - b)^2\}$.

5. Al cerchio $(x + a)^2 + y^2 = a^2$ cioè $x^2 + y^2 + 2ax = 0$ del piano π corrisponde nel piano π' la curva $x'y'^2 + 2a + x' = 0$.

Spostando tale curva parallelamente all'asse OX la sua equazione diventa $y'^2(x' - b) + (2a - b) + x' = 0$ cioè $x'(1 + y'^2) + (2a - b) - by'^2 = 0$; e nel piano π le corrisponde la curva $x(x^2 + y^2) + (2a - b)x^2 - by^2 = 0$.

Tale curva è la strofoide retta $x(x^2 + y^2) + a(x^2 - y^2) = 0$, se $b = a$; è la cissoide di Diocle $x(x^2 + y^2) = 2ay^2$, se $b = 2a$; è la trisettrice di Maclaurin $x(x^2 + y^2) = \frac{a}{2}(y^2 - 3x)$, se $b = \frac{a}{2}$.

6. Da quanto precede si possono facilmente dedurre dei metodi per costruire per punti colla riga e col compasso le curve ivi nominate.

Sarei lieto se qualche altro lettore del "Periodico", ripigliasse lo studio di tale trasformazione che può forse offrire un certo interesse.

Padova

PAOLO CATTANEO.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 641, 643 E 644

641. Dimostrare che, se si indicano con $d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1i}$ tutti i divisori del numero intero i , con $\varphi(i)$ il numero dei numeri primi con i ed inferiori ad i , e con α_i una radice di $x^n - 1 = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) si ha:

$$(-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2} = \prod_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^{11} \varphi(d_{1i}) + \alpha_j \sum_{i=1}^{12} \varphi(d_{2i}) + \dots + \alpha_j^{n-1} \sum_{i=1}^{1n} \varphi(d_n) \right\}.$$

OCCHIPINTI.

Risoluzione del sig. Gandini, I. T. di Varese.

LEMMA I. — Se m ed n sono numeri primi tra loro si ha:

$$\varphi(mn) = \varphi(m) \varphi(n).$$

Siano $ab \dots l, a'b' \dots l'$ i fattori primi di m ed n . Avremo:

$$\varphi(m) = m \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{l}\right), \quad \varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{a'}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{l'}\right),$$

$$\varphi(mn) = mn \left(1 - \frac{1}{a}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{l}\right) \left(1 - \frac{1}{a'}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{l'}\right) = \varphi(m) \varphi(n) \quad \text{cdd.}$$

LEMMA II. — Se d assume successivamente i valori dei divisori di un numero n , si ha:

$$(1) \quad \Sigma \varphi(d) = n.$$

Supponiamo che la (1) sia vera. Essendo r un numero primo e primo con n , e p un intero qualunque, dimostreremo che $\Sigma \varphi(d') = nr^e$, dove d' assume successivamente tutti i valori dei divisori di nr^e . Infatti:

$$\Sigma \varphi(d') = \Sigma \varphi(d) + \Sigma \{ \varphi(dr) + \varphi(dr^2) + \dots + \varphi(dr^e) \}$$

e per il Lemma I

$$\begin{aligned} \Sigma' \varphi(d') &= n + \Sigma \varphi(d) \{ \varphi(r) + \varphi(r^2) + \dots + \varphi(r^e) \} \\ &= n \left\{ 1 + \varphi(r) + \dots + \varphi(r^e) \right\} = \\ &= n \left\{ 1 + r \left(1 - \frac{1}{r} \right) + r^2 \left(1 - \frac{1}{r} \right) + \dots + r^e \left(1 - \frac{1}{r} \right) \right\} = nr^e. \quad \text{cdd.} \end{aligned}$$

La (1) è vera per $n=1$, perciò vale per $n=r^2$ e quindi per $n=r^e r_1^{e_1}$, $n = \text{ecc.}$ dove r_1, \dots è un altro numero primo, cosicchè vale in generale per qualunque n . Si conclude che

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{\ln} \varphi(d_{ni}) = n.$$

Posto $f(\alpha_i) = 1 + 2\alpha_i + \dots + n\alpha_i^{n-1}$, abbiamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{i=1}^n f(\alpha_i) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2}$$

(vedi PASCAL, *I determinanti*, pag. 93 e 197); dunque

$$\begin{aligned} (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2} &= \prod_{i=1}^n f(\alpha_i) \text{ e per la (2)} \\ &= \prod_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^{\ln} \varphi(d_{1i}) + \alpha_j \sum_{i=1}^{\ln} \varphi(d_{2i}) + \dots + \alpha_j^{n-1} \sum_{i=1}^{\ln} \varphi(d_{ni}) \right\} \text{ cdd.} \end{aligned}$$

643. Sia c^2 un cerchio fisso di centro C e c'^2 uno di raggio variabile e di centro C' , e sia P un punto d'intersezione dei due cerchi; il luogo delle ulteriori intersezioni tanto dei raggi CP con c'^2 quanto delle tangenti in P a c^2 o con c'^2 , sono conchiglie di Pascal simmetriche l'una dell'altra. In particolare se la distanza dei centri CC' è metà del raggio di c^2 si hanno due cardioidi.

G. CARDOSO-LAYNES.

Risoluzione del sig. Com. E.-N. Barisien di Costantinopoli.

Sieno $cc' = d$, R e R' i raggi di c^2 e c'^2 , P' il secondo punto d'incontro di c'^2 con CP , Q quello di c' con la tangente in P a c^2 , ω l'angolo PCC' , $\rho = CP'$, I il punto di mezzo di PP' . Si ha $\rho = R + PP'$; ma

$$PI = \frac{1}{2} PP' = IC - R = d \cos \omega - R,$$

dunque

$$\rho = R + 2(d \cos \omega - R) = 2d \cos \omega - R.$$

Questa è l'equazione di una conchiglia di Pascal, che diviene una cardioidi se è $d = \frac{1}{2} R$.

Il punto Q è il simmetrico di P rispetto a C' , ed essendo $C'Q = CP'$, risulta che il luogo di Q è simmetrico del luogo precedente, rispetto al punto C' .

Altra risoluzione del sig. Gandini, I. T. di Varese.

644. Si considerino tutte le coniche simili γ^2 aventi un fuoco F sopra un dato cerchio c^2 di centro C e di raggio r e aventi per direttrice corrispondente una data retta d ; si dimostri che:

a) L'inviluppo di tali coniche è, in generale, una coppia di coniche simili alle γ^2 .

b) Il luogo dei centri delle γ^2 (quando queste sono coniche centrali) è, in generale, un'ellisse.

c) Il luogo dei vertici delle γ^2 è composto di due coniche, di cui una è sempre un'ellisse, e l'altra è ellisse se le γ^2 son dotate di centro, e si scinde invece in una coppia di rette parallele o coincidenti se le γ^2 sono parabole.

d) Il luogo dei secondi fuochi delle γ^2 (nel caso in cui queste siano coniche centrali) è un'ellisse.

e) Il luogo delle intersezioni delle γ^2 con le tangenti in F a c^2 è, in generale, una conica simile alle γ^2 . Trovare la condizione che deve essere soddisfatta, affinché tale conica degeneri, e dimostrare che nel caso che le γ^2 sono parabole, tale condizione esprime che la d passa per C .

f) Il luogo delle intersezioni della γ^2 coi raggi \overline{CF} coincide con l'inviluppo delle γ^2 (vedi a).

g) Il luogo delle intersezioni delle γ^2 con le parallele condotte da F a d è composto di due ellissi: queste sono concentriche in C quando d passa per C .

Si esaminino in tutta questa quistione i seguenti casi particolari:

1°. Se le γ^2 sono parabole.

2°. Se d è tangente a c^2 .

3°. Se d passa per C .

4°. Se indicando con k la distanza di c da d e con e l'eccentricità delle γ^2 , è $e = \frac{r}{k}$.

G. CARDOSO-LAYNES.

Risoluzione del sig. E.-N. Barisien.

Sieno

$$(1) \quad x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

$$(2) \quad x \cos \theta + y \sin \theta - a = 0$$

le equazioni del cerchio c^2 e della retta d .

Indichiamo con (α, β) il fuoco F di γ^2 e con e la sua eccentricità, che resta costante perchè le coniche γ^2 sono simili. L'equazione delle γ^2 è dunque

$$(3) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = e^2 (x \cos \theta + y \sin \theta - a)^2.$$

Ma è

$$(4) \quad \alpha^2 + \beta^2 = r^2,$$

e perciò la (3) diviene

$$(5) \quad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y - e^2 (x \cos \theta + y \sin \theta - a)^2 + r^2 = 0.$$

a) Per avere l'inviluppo delle coniche (5) formiamo l'equazione per mezzo dei rapporti delle derivate di (5) e (4) rispetto ad α e β , e si ha

$$(6) \quad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}.$$

Dalle (6), (4) si deduce

$$\alpha = \frac{rx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \beta = \frac{ry}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Questi valori, posti nella (5) danno:

$$x^2 + y^2 - 2r\sqrt{x^2 + y^2} + r^2 - e^2 (x \cos \theta + y \sin \theta - a)^2 = 0,$$

o

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - r)^2 - e^2(x \cos \theta + y \sin \theta - a)^2 = 0,$$

o finalmente

$$[\sqrt{x^2 + y^2} - r - e(x \cos \theta + y \sin \theta - a)] [\sqrt{x^2 + y^2} - r + e(x \cos \theta + y \sin \theta - a)] = 0;$$

e perciò si hanno per il luogo cercato le due coniche

$$(7) \quad x^2 + y^2 = e^2 \left(x \cos \theta + y \sin \theta - a + \frac{r}{e} \right)^2,$$

$$(8) \quad x^2 + y^2 = e^2 \left(x \cos \theta + y \sin \theta - a - \frac{r}{e} \right)^2,$$

che hanno la stessa eccentricità di γ^2 , sono similmente poste ed aventi tutte un fuoco in C.

b) Le equazioni che danno le coordinate del centro della (3) sono

$$(9) \quad x - \alpha - e^2 \cos \theta (x \cos \theta + y \sin \theta - a) = 0$$

$$(10) \quad y - \beta - e^2 \sin \theta (x \cos \theta + y \sin \theta - a) = 0.$$

L'eliminazione di α e β fra queste due equazioni e la (4) dà immediatamente

$$[x - e^2 \cos \theta (x \cos \theta + y \sin \theta - a)]^2 + [y - e^2 \sin \theta (x \cos \theta + y \sin \theta - a)]^2 = r,$$

ossia

$$(11) \quad [x(1 - e^2 \cos^2 \theta) - e^2 y \sin \theta \cos \theta + ae^2 \cos \theta]^2 + \\ + [e^2 x \sin \theta \cos \theta - y(1 - e^2 \sin^2 \theta) - ae^2 \sin \theta]^2 = r^2.$$

Questo rappresenta una ellisse.

c) Luogo dei vertici sull'asse focale delle γ^2 .

L'equazione di quest'asse è

$$(12) \quad (x - \alpha) \sin \theta - (y - \beta) \cos \theta = 0$$

Bisogna eliminare α e β fra le (3), (4) e (12).

Ma le (3), (12) danno

$$\frac{x - \alpha}{\cos \theta} = \frac{y - \beta}{\sin \theta} = \pm e(x \cos \theta + y \sin \theta - a);$$

da cui

$$\alpha = x \mp e \cos \theta (x \cos \theta + y \sin \theta - a)$$

$$\beta = y \mp e \sin \theta (x \cos \theta + y \sin \theta - a).$$

Il luogo si compone dunque delle due ellissi

$$[x \mp e \cos \theta (x \cos \theta + y \sin \theta - a)]^2 + [y \mp e \sin \theta (x \cos \theta + y \sin \theta - a)]^2 = r,$$

ossia

$$(13) \quad [x(1 \mp e \cos^2 \theta) \mp ey \sin \theta \cos \theta \pm ae \cos \theta]^2 + \\ + [\mp ex \sin \theta \cos \theta + y(1 \mp e \sin^2 \theta) \pm ae \sin \theta]^2 = r^2.$$

Se prendiamo il segno superiore con $e = 1$, si ha

$$[x \sin^2 \theta - y \sin \theta \cos \theta + a \cos \theta]^2 + [-x \sin \theta \cos \theta + y \cos^2 \theta + a \sin \theta]^2 = r^2$$

ossia

$$[(x \sin \theta - y \cos \theta) \sin \theta + a \cos \theta]^2 + [(x \sin \theta - y \cos \theta) \cos \theta - a \sin \theta]^2 = r^2$$

cioè

$$(x \sin \theta - y \cos \theta)^2 = r^2 - a^2$$

e perciò in tal caso una delle coniche (13) si riduce alla coppia di rette parallele

$$x \operatorname{sen} \theta - y \operatorname{cos} \theta = \pm \sqrt{r^2 - a^2},$$

che coincidono se è $a = r$, cioè se la retta d è tangente al cerchio c^2 .

d) Risolvendo le (9), (10) rispetto ad x e y si ottiene per le coordinate (X, Y) del centro di γ^2 :

$$(14) \quad X = \frac{1}{1 - e^2} [\alpha (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta) + e^2 \beta \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta - a e^2 \operatorname{cos} \theta],$$

$$(15) \quad Y = \frac{1}{1 - e^2} [\alpha e^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta + \beta (1 - e^2 \operatorname{cos}^2 \theta) - a e^2 \operatorname{sen} \theta].$$

Le coordinate dei secondi fuochi sono

$$x = 2X - a, \quad y = 2Y - \beta,$$

dunque x e y sono funzioni lineari di α e β e analogamente α e β sono funzioni lineari di x e y . Questi valori, sostituiti nella (4) mostrano che il luogo del secondo fuoco è una ellisse.

e) La tangente in F a c^2 ha per equazione

$$(16) \quad \alpha x + \beta y = r^2,$$

ossia

$$(17) \quad \alpha (x - a) + \beta (y - \beta) = 0.$$

Dalle (3), (17) si ha

$$\frac{x - a}{\beta} = \frac{y - \beta}{-\alpha} = \frac{e (x \operatorname{cos} \theta + y \operatorname{sen} \theta - a)}{r},$$

da cui

$$\begin{aligned} \alpha r + e \beta (x \operatorname{cos} \theta + y \operatorname{sen} \theta - a) &= r x, \\ \alpha e (x \operatorname{cos} \theta + y \operatorname{sen} \theta - a) - \beta r &= -r y. \end{aligned}$$

Addizionando membro a membro queste due ultime, dopo aver quadrato, si ha:

$$(\alpha^2 + \beta^2) r^2 + (\alpha^2 + \beta^2) e^2 (x \operatorname{cos} \theta + y \operatorname{sen} \theta - a)^2 = r^2 (x^2 + y^2),$$

ossia, poichè è $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$,

$$r^2 + e^2 (x \operatorname{cos} \theta + y \operatorname{sen} \theta - a)^2 = x^2 + y^2,$$

cioè

$$(18) \quad x^2 + y^2 - r^2 = e^2 (x \operatorname{cos} \theta + y \operatorname{sen} \theta - a)^2.$$

Questa rappresenta una conica simile alle γ^2 .

Se poniamo la (18) sotto la forma

$$(19) \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

si ha

$$\begin{aligned} A &= 1 - e^2 \operatorname{cos}^2 \theta, & B &= -e \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta, & C &= 1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta \\ D &= a e^2 \operatorname{cos} \theta, & E &= a e^2 \operatorname{sen} \theta, & F &= -(\alpha^2 e^2 + r^2). \end{aligned}$$

La condizione che deve essere soddisfatta affinchè la (19) degeneri è dunque

$$AE^2 + CD^2 - 2BDE + F(B^2 - AC) = 0,$$

cioè

$$(20) \quad e^2 (r^2 - a^2) = r^2$$

che è indipendente da θ .

Se γ^2 è una parabola è $e = 1$ e quindi $a = 0$; dunque in questo caso d passa per C .

f) Questa proposizione è evidente perchè l'equazione (6) è quella del raggio CF .

g) La corda focale principale di γ^2 , passante per F, ha per equazione

$$(21) \quad (x - \alpha) \cos \theta + (y - \beta) \sin \theta - a = 0;$$

bisogna eliminare α e β fra le (3), (4), (21). Ma dalle (3) (21) si ha

$$\frac{x - \alpha}{\sin \theta} = \frac{y - \beta}{-\cos \theta} = \pm e(x \cos \theta + y \sin \theta - a),$$

da cui

$$\begin{aligned} \alpha &= x \mp e \sin(x \cos \theta + y \sin \theta - a) \\ \beta &= y \pm e \cos(x \cos \theta + y \sin \theta - a); \end{aligned}$$

il luogo si compone dunque di due ellissi

$$(22) \quad [x(1 \mp e \sin \theta \cos \theta) \mp ey \sin^2 \theta \pm ae \sin \theta]^2 + \\ + [\pm ex \cos^2 \theta \pm y(1 \pm e \sin \theta \cos \theta) \mp ae \cos \theta]^2 = r^2.$$

Se d passa per C, si ha $a = 0$, e le due coniche hanno i loro centri in C.

CASI PARTICOLARI.

1. γ^2 è una parabola ($e = 1$).

a) L'involuppo delle γ^2 si compone di due parabole

$$x^2 + y^2 = (x \cos \theta + y \sin \theta - a \pm r)^2.$$

b) Il luogo va all'infinito.

c) Il luogo dei vertici si compone di un'ellisse e di una retta.

d) Il luogo va all'infinito.

e) Il luogo è la parabola $x^2 + y^2 - r^2 = (x \cos \theta + y \sin \theta - a)^2$.

g) Il luogo si compone di due ellissi.

2. d è tangente a c^2 ($a = r$).

a) Due coniche.

b) Ellisse.

c) Due ellissi.

d) Ellisse.

e) Conica.

g) Due ellissi.

3. d passa per C ($a = 0$).

a) Due coniche.

b) Ellisse di centro C.

c) Due ellissi di centro C.

d) Ellisse di centro C

e) Conica

g) Due ellissi di centro C.

4. Quando d $K = a$ e $e = \frac{r}{a}$.

a) L'involuppo delle γ^2 si compone di due rette $x^2 + y^2 = e^2(x \cos \theta + y \sin \theta)^2$ della conica $x^2 + y^2 = e^2(x \cos \theta + y \sin \theta - 2a)^2$.

b) Ellisse.

c) Due ellissi passanti per C.

d) Ellisse.

e) Conica passante per C.

g) Due ellissi passanti per C.

Altra risoluzione del sig. Gandini di Varese.

QUISTIONI PROPOSTE

646. Da un punto P del piano d'una ellisse di centro O si conducano le quattro normali all'ellisse nei punti A, B, C, D . Dimostrare che la retta che congiunge il centro I di OP col centro del circolo circoscritto al triangolo BCD è parallelo alla normale in A .

647. È dato un circolo c ed una ellisse e . Essendo F un fuoco di e ed M un punto variabile su di essa, si consideri il circolo c' che ha MF per diametro. Il luogo dei centri di similitudine dei circoli c e c' si compone di due coniche.

648. Si consideri il circolo c avente per centro un punto M variabile di una ellisse e passante per un fuoco F . Trovare:

1° il luogo dei centri di similitudine di questo circolo con ciascuno dei circoli direttori dell'ellisse;

2° l'involuppo dell'asse radicale del circolo c con ciascuno dei circoli direttori.

649. Essendo data una ellisse, si considerino i due punti P e Q , coniugati armonici di un punto M dell'ellisse e del centro di curvatura C relativo a M . Sia λ il rapporto $\frac{MP}{PC} = \frac{QM}{QC}$, P essendo situato fra M e C . Calcolare l'area di ciascuna delle curve luogo di P e Q , e dimostrare che se l'ellisse è tale che l'area della sua sviluppata sia 8 volte quella dell'ellisse, e si ha inoltre $\lambda = 2$, la differenza delle aree del luogo di P e Q è uguale all'area della sviluppata.

E.-N. BARISIEN.

650. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{x \operatorname{sen} \log x^k}.$$

F. SIBIRANI.

651. L'involuppo delle mediatrici delle corde focali di una conica è una quartica bicircolare cuspidata, se la conica è a centro, ed è invece una parabola semi-cubica, se la conica è una parabola.

G. CARDOSO-LAYNES.

BIBLIOGRAFIA

G. CANDIDO. — *La formula di Waring e sue notevoli applicazioni.*
[presso l'A., Galatina (Lecce). L. 2,25.

Un grave imbarazzo per gli studiosi che vogliono conoscere qualche speciale teorica matematica, è il doverne cercare lo sviluppo e le principali applicazioni in parecchi libri ed in memorie sparse pe' giornali scientifici. Ed ognuno sa perciò

come riescano vantaggiose quelle monografie che raccolgono e sviluppano quanto si è già pubblicato sopra un dato argomento, specialmente se alla competenza dell'autore ed alla sua facoltà di assimilazione si unisca un'esposizione facile, chiara, ordinata.

Di questi pregi mi sembra dotata la recente pubblicazione del Candido sulla formula di Waring, e perciò ho voluto richiamarvi l'attenzione degli studiosi e specialmente dei giovani.

Premesso un cenno sulla vita del Waring, l'A. in un primo capitolo stabilisce la nota formula con diversi metodi, ponendola anche sotto forma di determinante —; riporta la dimostrazione del Pellet per la formula più generale, e fa subito alcune applicazioni. Nel secondo capitolo deduce dalla formula di Waring il celebre teorema di Fermat e quello di Legendre sui numeri primi, e con considerazioni semplici ed eleganti ritrova importanti risultati dovuti a Cauchy ed a Catalan sulla divisibilità dell'espressione $(a + b)^n - a^n - b^n$.

Nel terzo capitolo sono ottenute le formule del seno e coseno degli archi multipli in funzione degli archi semplici e le potenze delle stesse funzioni; e nel quarto sono trattate l'equazione reciproca e la doppiamente reciproca con considerazioni che generalmente non si trovano nei trattati di algebra. Nel quinto è risolta con molta semplicità l'equazione di Moivre ed è discussa completamente. Importante è l'applicazione all'equazione di decimo grado di Jacobi e la trasformazione dell'espressione $\sqrt[m]{\sqrt{p} + \sqrt{q}} = \sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu}$. Anche il noto problema di Adriano Romano è ridotto ad essere un caso particolare dell'equazione di Moivre. Questo quinto capitolo è seguito da un'aggiunta notevole, perchè stabilisce le condizioni affinché si verifichino le eguaglianze del tipo: $\sqrt[k]{m + \sqrt{n}} + \sqrt[k]{m - \sqrt{n}} = p$. Infine nel sesto capitolo, con osservazioni che sarebbe inutile cercar nei trattati, è applicata allo studio di sistemi di equazioni, e specialmente del sistema $x^n + y^n = a$, $x + y = b$. Notevole in questo capitolo la ricerca della condizione affinché tale sistema possa essere risolto algebricamente. Ogni capitolo è seguito da molti esercizi in parte proposti dall'A., in parte tolti da speciali pubblicazioni. Accompanya anche ogni capitolo una completa bibliografia degli argomenti trattati.

E. NANNEI.

L. et P. TANNERY. — *Notions de mathématique et notions historiques*.
Paris, Delagrave, 1903.

Questo libro è destinato alle classi di filosofia ed a coloro che aspirano al certificato di scienze fisiche, chimiche e naturali di Francia.

Il programma della classe suddetta del 31 maggio 1902 è ispirata agli stessi concetti che indussero in Italia il Ministro della pubblica istruzione, a stabilire nelle nostre Università un corso di matematica per gli studenti di chimica.

Tale programma richiede una corsa rapida nel campo delle matematiche più elevate, senza fermarsi a studiarle profondamente. Si tratta insomma di sollevare soltanto un lembo del velo che nasconde la sfinge matematica senza rivelarne tutti i misteri, di dare una nozione sommaria dei vari metodi che hanno maggior importanza nel campo della matematica.

I consigli generali che seguono il programma indicato, contengono le parole seguenti: " Il professore non dimenticherà che gli allievi ai quali si dirige non hanno l'abitudine delle matematiche; eviterà dunque ogni teoria astratta; non metterà