SULLE OPERAZIONI
FRA NUMERI DECIMALI APPROSSIMATI
e, in particolare,
sul calcolo delle parti proporzionali
nell'uso delle ordinarie tavole logaritmo-trigonometriche

(Continuazione, v. fasc. precedente)

CAPITOLO TERZO (*)

SUI CALCOLI NUMERICI RELATIVI ALLA INTERPOLAZIONE SEMPLICE.

§ 17. Si consideri una tavola numerica qualunque, la quale dia i valori di una funzione ad una variabile corrispondenti ai successivi valori della variabile stessa, crescenti (questi ultimi) in progressione aritmetica; e siano y_0 e y_1 i valori della funzione corrispondenti a due valori x_0 e x_1, prossimi e successivi, della variabile: se, per avere il valore y della funzione corrispondente a un valore x della variabile compreso fra x_0 e x_1, o, inversamente, per avere il valore x della variabile corrispondente a un valore y della funzione compreso fra y_0 e y_1, si ammette il principio delle parti proporzionali, si ha

$$(11) \quad y = y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0), \qquad (12) \quad x = x_0 + \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}(x_1 - x_0).$$

Ora, i valori x_0 e x_1 della variabile sono numeri esatti e altrettanto si suppone del valore x che comparisce nella (11), mentre i valori y_0 e y_1 forniti dalla tavola sono affetti dall'errore che deriva dall'arrotonda-

(*) In questo capitolo e nel successivo avremo frequentemente occasione di citare le seguenti nostre note:
1°. *Errori prodotti dalla interpolazione semplice nell'uso delle Tavole logaritmo-trigonometriche,* "Rivista Marittima" Luglio 1895;
2°. *Sulla ricerca del logaritmoseno e del logaritmotangente degli archi piccoli,* "La Corrispondenza" 1901, Fasc. V e VI e "Periodico di Matematica" 1901, Luglio-Decembre;
3°. *Sopra uno degli errori prodotti dalla interpolazione semplice,* "Periodico di Matematica", 1902, Luglio-Agosto;
quindi, per brevità, le indicheremo, rispettivamente, con [N_1], [N_2], [N_3].

mento dell'ultima cifra, e altrettanto si può supporre del valore y che comparisce nella (12). Ne viene che, se, per il calcolo del secondo membro della (11) e della (12), non si vuole nè avere delle cifre illusorie nè tralasciare delle cifre che si possano ritenere esatte, converrà applicare i procedimenti indicati nel primo capitolo. Ci proponiamo di far vedere come questa applicazione si possa fare nell'uso delle ordinarie tavole logaritmo-trigonometriche.

Per semplicità, porremo

$$x_1 - x_0 = \Delta x\,, \qquad x - x_0 = \delta x\,, \qquad y_1 - y_0 = \Delta y\,, \qquad y - y_0 = \delta y\,,$$

onde sarà

$$(11)' \qquad y = y_0 + \frac{\delta x}{\Delta x}\,\Delta y \qquad \text{e} \qquad (12)' \qquad x = x_0 + \frac{\delta y}{\Delta y}\,\Delta x\,;$$

e chiameremo Δx *passo della variabile* e Δy *differenza tavolare*, intendendo bene che questa differenza sia precisamente quella che si deduce dai valori arrotondati della tavola e non la differenza esatta fra i valori che assume la funzione corrispondentemente ai valori x_0 e x_1 della variabile.

Chiameremo inoltre *parte proporzionale della ricerca diretta* e *parte proporzionale della ricerca inversa* i secondi termini dei secondi membri della (11) e della (12).

Supporremo poi sempre che nelle differenze $y_1 - y_0$ e $y - y_0$, come nel calcolo della parte proporzionale della ricerca diretta, si consideri come cifra delle unità l'ultima cifra di y_0.

OSSERVAZIONE. — Senza entrare in particolari, accenneremo solo che, nel caso in cui y cali al crescere di x, se si vuole che la parte proporzionale della ricerca diretta sia sempre addittiva (il che è, generalmente, comodo, sia per brevità e sia per uniformità di calcolo), anzichè alla (11), si ricorre all'altra

$$(11)'' \qquad y = y_1 + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}(y_0 - y_1)\,.$$

§ 18. E sarà opportuno anche premettere le seguenti considerazioni, d'ordine generale, sulla divisione di δy per Δy, che occorre di fare per il calcolo della parte proporzionale della ricerca inversa.

Indicando δy con A e Δy con B, osserviamo prima di tutto che, per quanto s'è detto alla fine del § prec., A e B si possono sempre considerare come due numeri interi e che il primo è sempre minore del secondo.

Ciò posto, se A e B hanno lo stesso numero b di cifre (Es. I), essendo A' minore di B', si cade nell'ultimo dei quattro casi considerati nel § 10, e quindi, come si disse alla fine del § stesso, basta calcolare il quoziente con tante cifre quante ne ha A, ossia con b cifre; e siccome la prima cifra significativa del quoziente è certamente la cifra dei decimi (perchè, dalle ipotesi che A e B abbiano lo stesso numero di cifre e che A sia minore di B, deriva che A è compreso fra $0{,}1 \times$ B e B), si può anche dire che basta calcolare il quoziente con tante cifre decimali (a partire dalla virgola) quante ne ha B.

Se A ha $b-1$ cifre e B ne ha ancora b, può presentarsi tanto il caso in cui sia A′ maggiore di B′ (Es. II), quanto quello in cui sia A′ minore di B′ (Es. III). Il primo cade nel terzo dei quattro casi accennati, e quindi si calcola il quoziente con una cifra di più di quelle che ha A, ossia con b cifre; e la prima cifra del quoziente è anche ora la cifra dei decimi (perchè, anche ora, dalle ipotesi che A abbia una cifra di meno di B e che A′ sia maggiore di B′, deriva che A è compreso fra $0{,}1 \times$ B e B). Il secondo cade nel quarto dei quattro soliti casi, e quindi basta calcolare il quoziente con tante cifre quante ne ha A, ossia con $b-1$ cifre; e la prima cifra del quoziente è la cifra dei centesimi (perchè, ora, dalle ipotesi che A abbia una cifra di meno di B e che A′ sia minore di B′, deriva che A è compreso fra $0{,}01 \times$ B e $0{,}1 \times$ B). Si può dunque dire che, anche se A ha una cifra di meno di B, basta calcolare il quoziente con tante cifre decimali (a partire dalla virgola) quante ne ha B.

E siccome lo stesso ragionamento per il caso in cui A avesse due, tre, ... cifre di meno di B condurrebbe alle stesse conseguenze (Es. IV e V), si può concludere che *del quoziente di δy per Δy conviene calcolare tante cifre decimali (a partire dalla virgola) quante ne ha Δy.*

I)

$$\begin{array}{r|l} 412 & 425 \\ 3825 & 0{,}969 \\ \hline 295 & \\ 2550 & \\ \hline 400 & \\ 3825 & \\ \hline 175 & \end{array}$$

II)

$$\begin{array}{r|l} 45 & 425 \\ 425 & 0{,}105 \\ \hline 25 & \\ 2125 & \\ \hline 375 & \end{array}$$

III)

$$\begin{array}{r|l} 42 & 425 \\ 3825 & 0{,}099 \\ \hline 375 & \\ 3400 & \\ \hline 350 & \end{array}$$

IV)

$$\begin{array}{r|l} 5 & 425 \\ 425 & 0{,}012 \\ \hline 75 & \\ 425 & \\ \hline 325 & \end{array}$$

V)

$$\begin{array}{r|l} 4 & 425 \\ 3825 & 0{,}009 \\ \hline 175 & \end{array}$$

1. — Tavola dei logaritmi dei numeri.

§ **19.** Considereremo, di questa tavola, i due tipi più comuni: quello da 10000 a 100000 e a *sette* cifre decimali; e quello da 1000 a 10000 e a *cinque* cifre decimali.

In essi il passo Δx è sempre uguale all'unità, quindi il calcolo di y nella ricerca diretta (§ 17, (11′)) si riduce alla moltiplicazione del numero approssimato Δy per il numero esatto δx e all'addizione del prodotto approssimato così ottenuto col numero approssimato y_0.

Si voglia, p. es., il logaritmo del numero 45892,16865 da una tavola del primo tipo; essendo

$$y_0 = 4{,}6617370 \qquad \text{e} \qquad \Delta y = 94\,,$$

si avrà prima di tutto

$$\Delta y \times \delta x = 94 \times 0{,}16865 = 15{,}8\,,$$

$$\begin{array}{l} 94 \\ \ \ 0\,16865 \\ \hline \ \ 94 \\ \ \ 564 \\ \ \ \ 752 \\ \ \ \ \ 564 \\ \hline 15{,}8 \end{array}$$

che si ottiene eseguendo la moltiplicazione col procedimento indicato nella Oss. II al § 8, e poscia

$$y = 4{,}6617386,$$

che si ottiene eseguendo l'addizione col procedimento indicato nella Oss. II al § 4. Siccome però nell'eseguire l'addizione si trascura l'ultima cifra (8) del prodotto (15,8) precedentemente ottenuto, sarà più semplice calcolare questo prodotto con una cifra di meno, come qui accanto (considerando come ultima cifra del primo prodotto parziale la cifra delle unità e scrivendo quindi un prodotto parziale di meno). E, invece di eseguire a parte la moltiplicazione per poi aggiungere il prodotto a y_0, si potranno addirittura aggiungere ad y_0 i successivi prodotti parziali di quella moltiplicazione e dare al calcolo la forma qui accanto.

$$\begin{array}{r} 94 \\ 0{,}16865 \\ \hline 94 \\ 564 \\ 752 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} y = \mathrm{L}\,45892{,}16865 & (\Delta y = 94) \\ 45892 \ldots\ldots & 6617370 \\ 1 \ldots\ldots & 94 \\ 6 \ldots\ldots & 564 \\ 8 \ldots\ldots & 752 \\ \hline & y = 4{,}6617386 \end{array}$$

Volendo ricavare il logaritmo dello stesso numero da una tavola del secondo tipo, si procederebbe nello stesso modo, dando anche la stessa forma al calcolo (come qui accanto), e si troverebbe

$$y = 4{,}66174\,.$$

$$\begin{array}{lr} y = \mathrm{L}\,45892{,}16865 & (\Delta y = 9) \\ 4589 \ldots\ldots & 66172 \\ 2 \ldots\ldots & 18 \\ 1 \ldots\ldots & 09 \\ \hline & y = 4{,}66174 \end{array}$$

Per il calcolo della mantissa di y, nella ricerca diretta, si ha dunque la seguente

REGOLA. — *Si scrivano sotto alla mantissa di* y_0 *i successivi prodotti della differenza tavolare* Δy *per le cifre che* x *ha di più di* x_0, *spostando successivamente l'ultima cifra di un posto verso destra (a cominciare dal primo di questi prodotti), dando alla operazione la disposizione indicata nell'esempio e arrestando i prodotti stessi quando si vede che il prodotto seguente uscirebbe tutto dalla colonna successiva a quella in cui si trova l'ultima cifra della mantissa di* y_0; *nel fare poi l'addizione finale si trascurino tutte le cifre che escono dalla colonna della stessa ultima cifra.*

Le tavole dei logaritmi dei numeri contengono ordinariamente delle tavolette ausiliarie le quali danno 0,1, 0,2, 0,3, ... 0,9 di Δy, e quindi i prodotti parziali occorrenti si trascrivono immediatamente, senza bisogno di eseguirli (*).

§ 20. Il calcolo di x nella ricerca inversa (§ 17, (12)'), anche ora per essere il passo Δx eguale all'unità, si riduce alla divisione del numero approssimato δy per il numero, pure approssimato, Δy, che si eseguisce col criterio stabilito nel § 18, e alla addizione del quoziente così ottenuto col numero esatto x_0 (§ 4, Oss. III), che si eseguisce scrivendo di seguito ad x_0 tutte le cifre decimali (significative o no) del quoziente stesso. Si voglia, p. es., da una tavola del primo tipo ricavare il numero che ha per logaritmo 4,0093221: essendo

$$\begin{array}{r|l} 412 & 425 \\ 3825 & \overline{0{,}969} \\ \hline 295 & \\ 2550 & \\ \hline 400 & \\ 3825 & \\ \hline 175 & \end{array}$$

$$y_0 = 4{,}0092809\,, \qquad x_0 = 10216\,, \qquad \Delta y = 423\,,$$

si ha $$\frac{\delta y}{\Delta y} = \frac{412}{425} = 0{,}969\,,$$

poscia $$x = 10216{,}969\,.$$

E invece di eseguire a parte la divisione, si suol dare al calcolo la disposizione qui accanto.

$$\begin{array}{lr} \mathrm{L}x = 4{,}0093221 & (\Delta y = 425) \\ 2809 \ldots\ldots & 10216 \\ \hline 412 & \\ 3825 \ldots\ldots & 9 \\ \hline 295 & \\ 2550 \ldots\ldots & 6 \\ \hline 400 & \\ 3825 \ldots\ldots & 9 \\ \hline 175 & \\ & x = 10216{,}969 \end{array}$$

(*) La disposizione qui indicata per il calcolo di y è quella che è seguita da tutti, ed è quindi strano (come dicemmo in una nota al § 7) che la disposizione dei prodotti parzali indicata nel procedimento del § 7 appaia sempre come cosa nuova ai giovani uscenti dalle scuole secondarie.

Con una tavola del secondo tipo si procederebbe nello stesso modo.

Per il calcolo delle cifre successive a x_0, nella ricerca inversa, si ha dunque la seguente

Regola. — *Si faccia la differenza* δy, *e si calcoli il quoziente di questa differenza per la differenza tavolare* Δy *con tante cifre decimali (a partire dalla virgola) quante ne ha* Δy, *dando a questa divisione la disposizione indicata nell'esempio e avvertendo di aumentare di una unità l'ultima cifra, se si vede che la cifra seguente sarebbe uguale a 5 o maggiori di 5; poscia si trascrivano tutte queste cifre decimali (significative o no) di seguito a* x_0.

Avendo le tavolette ausiliarie accennate alla fine del § precedente, l'operazione è anche ora semplificata; anzi nella ricerca inversa la semplificazione è più notevole, perchè, avendo sott'occhio tutti i prodotti parziali, si hanno subito (senza tentativi) le successive cifre del quoziente; non solo, ma (invece di scrivere il prodotto corrispondente all'ultima cifra e poi fare la differenza, come si è fatto nell'esempio precedente, per vedere se la cifra seguente sarebbe o no inferiore a 5) si può (chè è lo stesso) pigliare addirittura la cifra corrispondente al prodotto parziale più vicino, tralasciando anche di scrivere questo prodotto. Così, nell'esempio qui accanto, dei due prodotti parziali 20,3 e 23,2, fra i quali è compreso 23 e che corrispondano rispettivamente alle cifre 7 e 8, il più vicino è il secondo; quindi l'ultima cifra del quoziente è un 8 e non un 7.

$$\begin{array}{lr}
Lx = 3{,}17184\ (\Delta y = 29) & \\
\qquad\qquad\ \ 73 \ \ldots\ldots & 1485 \\
\qquad\qquad\ \ \overline{11} & \\
\qquad\qquad\quad 87 \ldots\ldots & 3 \\
\qquad\qquad\quad \overline{23} \ldots\ldots & 8 \\
 & x = \overline{1485{,}38}
\end{array}$$

Osservazione I. — Per le ragioni dette nella Oss. III al § 8, se le ultime cifre della parte proporzionale della ricerca inversa sono degli zeri, questi non devono essere tralasciati. Così, essendo, per es., $Lx = 3{,}3722011$, il secondo resto parziale è nullo, ma Δy ha tre cifre, quindi si dovrà prendere $x = 2356{,}1400$; essendo $Lx = 4{,}7825371$, la mantissa si trova esattamente nella tavola, ma Δy ha due cifre, quindi si dovrà prendere $x = 60609{,}00$.

Osservazione II. — Quando, nel collocare la virgola nell'antilogaritmo, si vede che l'ultima cifra trovata risulta di ordine maggiore di zero, non si possono aggiungere degli zeri (§ 8, Oss. IV), ma bisogna o ricorrere alle convenzioni indicate, o (in pratica) cambiare unità. Così, se fosse, p. es. $Lx = 9{,}0093221$, si scriverebbe

$$x = 10216969_{00} \qquad \text{oppure} \qquad x = 10216969 \text{ centinaia};$$

e se, in pratica, x rappresentasse dei metri, si potrebbe scrivere

$$x = 1021696{,}9\ Km.$$

2. — Tavola dei logaritmi delle funzioni trigonometriche a *sette* cifre decimali

§ 21. È noto che nella ricerca del logaritmoseno e del logaritmotangente degli archi piccoli, come pure nelle corrispondenti ricerche inverse, il principio delle parti proporzionali non è più ammissibile, e che per riparare a questo inconveniente si ricorre a parecchi metodi differenti (*). Ne viene che le tavole dei logaritmi delle funzioni trigonometriche, oltre differire per il passo della variabile e per il numero delle cifre decimali che si considerano, differiscono anche per la diversità dei metodi che, per l'accennato scopo, si propongono.

Il tipo di tavole, a *sette* cifre, che qui considereremo, è quello che contiene: una tavola completa, in cui $\Delta x = 10''$; una tavola di logaritmiseni e di logaritmitangenti soltanto, da 0° a 5°, e in cui $\Delta x = 1''$; una tavola dei logaritmi rapporti S e T (compresa in quella dei logaritmi dei numeri), da 0° a $30'$ e in cui Δx è uguale a $10''$ o a $50''$, secondo che x è maggiore o minore di $16'40'' = 1000''$ (**).

Osservazione. — Per non entrare in particolari, il cui posto non sarebbe questo, ci occuperemo sempre del logseno e del logtangente di un arco acuto, soltanto.

§ **22.** La prima delle tre tavole accennate, quando occorra l'interpolazione, si userà solo per x maggiore di 5°, se si tratta di un logseno, e solo per x compreso fra 5° e 85°, se si tratta di un logtangente; e ciò perchè, altrimenti, l'errore prodotto dalla interpolazione potrebbe non essere trascurabile.

In essa Δx è uguale a $10''$ e le operazioni da farsi sono le stesse di quelle che si sono indicate nei §§ 19 e 20; basta solo osservare, in proposito, che la prima cifra di δx, invece di essere dell'ordine -1, è ora dell'ordine zero.

Si avranno dunque le stesse regole che si hanno per la tavola dei logaritmi dei numeri (§§ 19 e 20), colla sola modificazione che le cifre della parte proporzionale della ricerca inversa dovranno esser tante quante quelle di Δy, *compresa quella delle unità di secondo.*

(*) Questi metodi, che noi sappiamo, sono *otto*, e nella nostra [N_2] li studiammo minuziosamente tutti, per vedere quali siano da preferirsi.

Ci piace ricordare in proposito che in quello studio facemmo vedere come alcuni degli otto metodi accennati possano condurre ad errori maggiori di quelli che si avrebbero colla ordinaria interpolazione. Questo accade, per es., sia seguendo il metodo ideato dal Callet (*Tables portatives des logarithmes*, Ed. Firmin Didot, Parigi 1864, *Explication*, pag. 35) e insegnato dal Serret (*Traité de Trigonométrie*, Ed. Gautier-Villars, Parigi 1888, pag. 75), sia seguendo il metodo proposto dal Bremiker (*Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit sechs Decimalstellen*, Ed. Nicolaische, Berlino 1890, *Einleitung*, pag. XIII). E facemmo anche vedere come possano qualche volta dar luogo ad errori molto maggiori di una unità (dell'ultimo ordine), mentre furono immaginati per evitare un errore di una unità. Questo accade, p. es., seguendo il primo metodo proposto dall'Houel (*Tables des logarithmes a cinq décimales*, Ed. Gautier-Villars, Parigi 1877, pag. XV); così, seguendo questo metodo, si trova

$$\text{Lsen}\, 3'30'' = \bar{3},00817,$$

mentre che, a meno di una mezza unità del decimo ordine, si ha (veggasi il *Thesaurus logarithmorum* del Vega, dal quale intenderemo sempre ricavati i logaritmi a dieci cifre, che avremo occasione di considerare in seguito)

$$\text{Lsen}\, 3'30'' = \bar{3},0077940864\ ;$$

l'errore è dunque maggiore di 37 unità dell'ultimo ordine. E, anche se, invece di calcolare sen $3'30''$ con sei cifre (come fa l'autore in tutti i suoi esempi), si calcola con sette, si trova

$$\text{Lsen}\, 3'30'' = \bar{3},00796,$$

e l'errore è ancora maggiore di 16 unità.

(**) Come quelle del Vega, pubblicate dal Bremiker e tradotte in italiano dal Cremona (*Manuale logaritmico trigonometrico*, Ed. Weidmann, Berlino 1872). In queste, S e T sono dati fino a $2^\circ 46'30''$ (9990''), ma i valori oltre 30' non ci serviranno.

La tavola in discorso contiene generalmente le tavolette ausiliarie, che danno 0,1, 0,2, ... 0,9 di Δy, e quindi il calcolo è anche qui semplificato.

Veggansi i due esempi accanto. Nel primo (ricerca diretta) i prodotti parziali sono arrestati al quarto, perchè solo il quinto esce dalla colonna successiva a quella in cui si trova l'ultima cifra della mantissa. Nel secondo (ricerca inversa) si sono calcolate, per la parte proporzionale, 3 cifre (compresa quella delle unità di secondo), tante essendo quelle di Δy; e (supposto di avere le tavolette ausiliarie accennate) l'ultima si è aumentata di una unità, senza scrivere l'ultimo prodotto parziale, per quanto si disse alla fine del § 20.

$$
\begin{array}{lr}
\multicolumn{2}{l}{y = \mathrm{L\,sen}\,11^\circ 53' 55'', 1199 \;(\Delta y = 999)} \\
11^\circ 53' 50'' \ldots\ldots & \bar{1},3141976 \\
5'' \ldots\ldots & 4995 \\
1 \ldots\ldots & 999 \\
1 \ldots\ldots & 999 \\
9 \ldots\ldots & 8991 \\
\hline
& y = \bar{1},3142487
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr}
\multicolumn{2}{l}{\mathrm{L\,tan}\,x = \bar{1},9690893 \;(\Delta y = 422)} \\
0501 \ldots\ldots & 44^\circ 16' 40'' \\
392 & \\
3798 \ldots\ldots & 9 \\
122 & \\
844 \ldots\ldots & 2 \\
376 \ldots\ldots & 9 \\
\hline
& x = 44^\circ 16' 49'',29
\end{array}
$$

Osservazione I. — Analoga alla I del § 20: per cui, essendo, p. es.,

$$\mathrm{L\,tan}x = \bar{1},4531471\,, \qquad \text{si avrà} \qquad x = 15^\circ 50' 55'',00\,.$$

Osservazione II. — In questa tavola, per $y = \mathrm{Lsen}\,x$, può essere $\Delta y = 1$, e in tale caso non si hanno per x che le cifre di x_0, date dalla tavola stessa; non si può quindi considerare esatta la cifra delle unità di secondo, ed essendo per esempio

$$\mathrm{L\,tan}x = \bar{1},9999884\,,$$

si ha (§ 8, Oss. IV) $x = 89^\circ 34' 5_0''$.

§ **23.** Nella seconda delle tre tavole accennate (§ 21) si ha $\Delta x = 1''$, quindi le regole da applicarsi sono quelle dei §§ 19 e 20, senza nessuna modicazione. Questa tavola però, quando occorra l'interpolazione, si userà solo per x maggiore di $30'$; e ciò per la ragione accennata nel principio del § precedente.

Si noti che questa tavola non contiene, ordinariamente, le tavolette delle parti proporzionali, e neppure la differenza tavolare; quindi i calcoli per l'interpolazione devono esser fatti tutti.

$$
\begin{array}{lr}
\multicolumn{2}{l}{y = \mathrm{L\,sen}\,0^\circ 32' 13'' 56483 \;(\Delta y = 2246)} \\
0^\circ 32' 13'' \ldots\ldots & \bar{3},9718004 \\
5 \ldots\ldots & 11230 \\
6 \ldots\ldots & 13476 \\
4 \ldots\ldots & 8984 \\
8 \ldots\ldots & 17968 \\
\hline
& y = \bar{3},9719273
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr}
\multicolumn{2}{l}{\mathrm{L\,tan}\,x = \bar{2},7097643 \;(\Delta y = 412)} \\
420 \ldots\ldots & 2^\circ 56' 03'' \\
223 & \\
2060 \ldots\ldots & 5 \\
170 & \\
1648 \ldots\ldots & 4 \\
520 & \\
412 \ldots\ldots & 1 \\
\hline
& x = 2^\circ 56' 03'',541
\end{array}
$$

Veggansi, senz'altro, i due esempi qui accanto.

§ **24.** Resta a dirsi come si eseguisca l'interpolazione, quando, essendo l'arco minore di $30'$, si ricorre all'uso della tavola dei logaritmi rapporti S e T; nella quale, si rammenti, Δx è uguale a $10''$, o a $50''$, secondochè x è maggiore, o minore, di $16'40'' = 1000''$.

Si ricordi prima di tutto che questi numeri sono definiti dalle eguaglianze

$$S = L\,\frac{\operatorname{sen} x}{x''}, \qquad T = L\,\frac{\tan x}{x''}$$

(dove x'' indica l'arco espresso in secondi), e che il loro uso è basato sulle identità

$$L \operatorname{sen} x = L x'' + S, \qquad L \tan x = L x'' + T. \tag{13}$$

Ciò posto, è chiaro che per la ricerca diretta basta calcolare separatamente Lx'' ed S (o T): per il primo calcolo serve la regola del § 19; e per il secondo, se $\Delta x = 10''$, serve la stessa regola (§ 22), e se $\Delta x = 50''$, siccome (quando occorre l'interpolazione) Δy è uguale o a 1, o a 2, o a 3 al più, invece di eseguire prima la moltiplicazione di Δy per δx e poi la divisione del prodotto così ottenuto per $50''$, basterà, corrispondentemente, moltiplicare $\frac{1}{50} = 0{,}02$, $\frac{2}{50} = 0{,}04$, $\frac{3}{50} = 0{,}06$ per δx, e così si potrà anche qui applicare la solita regola (§ 19).

I)

$y = L \tan 0^\circ 28' 48'',93972$		
$L\,x'')$	$0^\circ 28' 48'',9$	3,2277699
$(\Delta y = 251)$	3	753
	9	2259
	7	1757
T)	$0^\circ 28' 40''$	$\bar{6}$,6855840
$(\Delta y = 2)$	8	16
	9	18
		$y = \bar{3}$,9233649

II)

$y = L \operatorname{sen} 0^\circ 22' 31'',29673$		
$L\,x'')$	$0^\circ 22' 31'',2$	3,1307196
$(\Delta y = 322)$	9	2898
	6	2254
	7	1932
S)	$0^\circ 22' 40''$	$\bar{6}$,6855717
$(\Delta y = 1)$	8	08
		$y = \bar{3}$,8163228

III)

$y = L \tan 0^\circ 13' 56'',37891$		
$L\,x'')$	$836'',37$	2,9223984
$(\Delta y = 52)$	8	416
	9	468
T)	$0^\circ 13' 20''$	$\bar{6}$,6855770
$(\Delta y = 3)$	$30''$	18
	$6''$	36
		$y = \bar{3}$,8079802

Però è bene non eseguire separatamente la somma che dà Lx'', poi quella che dà S (o T), indi quella che dà $Lx'' + S$ (o $Lx'' + T$), ma eseguirne una sola; come nei tre esempî accanto. Così, non solo si abbrevia l'operazione, ma si raggiunge anche una maggiore approssimazione nel risultato; e la ragione ne è evidente.

A proposito poi del II esempio, si noti che S cala al crescere di x (mentre T cresce), e che quindi, per aver la parte proporzionale sempre additiva, invece di prendere y_0, si è preso y_1 (§ 17, Oss.)

Per la ricerca inversa si cerchi prima nella tavola in cui $\Delta x = 1''$ il valore più vicino, per eccesso o per difetto, al dato logseno (o logtangente); si ha così il numero arrotondato dei secondi contenuti nell'arco incognito; dopo di ciò:

1° si calcoli il valore di S (o di T) corrispondente a quel numero di secondi, e l'interpolazione, se occorre è semplicissima, perchè si riduce ad aggiungere alla mantissa di S (o di T) letta nella tavola, o l'unico prodotto parziale corrispondente alle unità dello stesso numero se $\Delta x = 10''$, o i due prodotti parziali corrispondenti alle decine e alle unità di secondi se $\Delta x = 50''$;

2° si sottragga il valore di S (o di T) così ottenuto dal valore dato;

3° siccome la differenza che così si trova è *prossimamente* (perchè nel calcolo di S, o di T, si trascurano le frazioni di secondo) eguale a Lx'', si calcoli x'' colla solita regola (§ 20).

Si veggano i tre esempi accanto, nei quali si sono sempre messi i calcoli di S o di T solo per chiarezza, chè, se $\Delta x = 10''$, questi si fanno a mente, come a mente si calcolano i loro complementi a 0 (ossia i cologaritmi) da aggiungere al valore dato.

I)

$$\begin{array}{lrrr}
 & \mathrm{L}\tan x = & \bar{3},9233649 & \\
 & -\,\mathrm{T} = & 5,3144149 & \\
 & \mathrm{L}\,x'' = & 3,2377798 & \\
 & & 699.\ .\ .1728 & 9 \\
(\Delta y = 251) & & 99 & \\
 & & 753\ .\ . & 8 \\
 & & 237 & \\
 & & 2259.\ . & 9 \\
 & & 111.\ . & 4 \\
 & x'' = & 1351'',9394 & \\
 & x = & 0^{0}28'48'',9394 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrr}
\mathrm{L}\tan 0^{0}28'49'' = & & \bar{3},9233800 \\
\mathrm{T}).\ .\ 0^{0}28'40''\ .\ . & & \bar{6},6855849 \\
(\Delta y = 2) & 9''\ .\ . & 18 \\
 & \mathrm{T} = & \bar{6},6855851
\end{array}$$

II)

$$\begin{array}{lrrr}
 & \mathrm{L}\,\mathrm{sen}\,x = & \bar{3},8163228 & \\
 & -\,\mathrm{S} = & 5,3144282 & \\
 & \mathrm{L}\,x'' = & 3,1307510 & \\
 & & 7196.\ .\ .1351 & 2 \\
(\Delta y = 322) & & 314 & \\
 & & 2898\ .\ . & 9 \\
 & & 242 & \\
 & & 2254.\ . & 7 \\
 & & 166.\ . & 5 \\
 & x'' = & 1351'',2975 & \\
 & x = & 0^{0}22'31'',2975 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrr}
\mathrm{L}\,\mathrm{sen}\,0^{0}22'31'' = & & \bar{3},8162271 \\
\mathrm{S}).\ .\ 0^{0}22'40''\ .\ . & & \bar{6},6855747 \\
(\Delta y = 1) & 9''\ .\ . & 9 \\
 & \mathrm{S} = & \bar{6},6855718
\end{array}$$

III)

$$\begin{array}{lrrr}
 & \mathrm{L}\tan x = & \bar{3},6079802 & \\
 & -\,\mathrm{T} = & 5,3144228 & \\
 & \mathrm{L}\,x'' = & 2,9224030 & \\
 & & 3984.\ .\ .\ 836 & 37 \\
(\Delta y = 52) & & 46 & \\
 & & 416\ .\ . & 8 \\
 & & 44\ .\ . & 9 \\
 & x'' = & 836'',3789 & \\
 & x = & 0^{0}13'56'',3789 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrr}
\mathrm{L}\tan 0^{0}13'56'' = & & \bar{3},6077835 \\
\mathrm{T}).\ .\ 0^{0}13'20''\ .\ . & & \bar{6},6855770 \\
(\Delta y = 3) & 30''\ .\ . & 18 \\
 & 6''\ .\ . & 36 \\
 & \mathrm{T} = & \bar{6},6855772
\end{array}$$

3. — Tavola dei logaritmi delle funzioni trigonometriche a *cinque* cifre decimali.

§ 25. Il tipo di tavola, a *cinque* cifre, che qui considereremo, è quello che contiene una tavola completa in cui $\Delta x = 1'$; e una tavola di logseni e logtangenti soltanto, da 0^{0} a 3^{0}, e in cui $\Delta x = 1''$ (*).

§ 26. La prima delle due tavole accennate, quando occorra l'interpolazione, si userà solo per x maggiore di 3^{0}, se si tratta di un

(*) Come quelle dell'ALBRECHT: — *Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit fünf Decimalstellen.* Ed. Stankiewicz, Berlino 1884. — Nella tavola dei logaritmi dei numeri di questa raccolta sono anche dati i logaritmi rapporti S e T da 0^{0} a $2^{0}46'40''$ ($=10000''$); ma, come vedremo, se ne può fare a meno.

logseno, e solo per x compreso fra 3° e 87° se si tratta di un logtangente; e ciò per la solita ragione.

In essa $\Delta x = 1'$, e siccome le frazioni di primo sono, generalmente, espresse in secondi, converrà per la interpolazione considerare $\Delta x = 60''$: ne viene che i relativi calcoli delle parti proporzionali [§ 17, (11)' e (12)'], non essendo più Δx eguale a 1 o a 10, sono meno semplici che in tutti i casi fin qui considerati.

Il calcolo della parte proporzionale della ricerca diretta si può eseguire in tre modi diversi, che, mettendo fra parentesi l'operazione dalla quale si comincia, si possono rappresentare così:

$$\text{(I)}\quad \frac{(\delta x \times \Delta y)}{\Delta x}\ ,\quad \text{(II)}\quad \left(\frac{\delta x}{\Delta x}\right)\times \Delta y\ ,\quad \text{(III)}\quad \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\times \delta x\ :$$

quale di questi tre modi è il preferibile? Supponendo che non si abbia nessuna tavoletta ausiliaria, il preferibile è il primo, il quale consiste nella moltiplicazione del numero approssimato Δy per il numero esatto δx (§ 8, Oss. II), e poi nella divisione del prodotto approssimato, così ottenuto, per il numero esatto $\Delta x = 60''$, divisione semplicissima, perchè, prescindendo dalla virgola, il divisore è 6. E siccome il quoziente va aggiunto a y_0, basta (§ 4, Oss. II) che esso sia arrestato alla cifra delle unità; e perciò basta nel primo prodotto parziale della moltiplicazione, di Δy per δx, considerare come cifra delle unità la cifra delle decine. Veggansi i quattro esempî accanto.

Ed è facile vedere che gli altri due modi richiedono dei calcoli o dei criterî (per eseguire opportunamente le due operazioni) meno semplici.

I)
$\Delta y = 236$
$\delta x = 43'',3785$
944
70 | 8
7 | 08
1 | 652
| 1888
1024 : 6 = 171

II)
$\Delta y = 92$
$\delta x = 38'',276$
276
73 | 6
1 | 84
| 644
352 : 6 = 59

III)
$\Delta y = 48$
$\delta x = 0'',765$
3 | 36
| 285
4 : 6 = 1

IV)
$\Delta y = 7$
$\delta x = 30'',94$
21
| 63
22 : 6 = 4

Per il calcolo della mantissa di y, nella ricerca diretta, si ha dunque la seguente

Regola. — *Si moltiplichi* Δy *per* δx, *prendendo sempre per moltiplicando* Δy *ed applicando il solito procedimento* (§ 7), *nella ipotesi però che si consideri come ultima cifra del primo prodotto parziale la cifra delle decine del prodotto stesso; si divida il prodotto per 6, arrestando il quoziente alle unità; e si aggiunga il quoziente così ottenuto alla mantissa di* y_0.

Veggansi, anche per la disposizione del calcolo, i due esempî accanto.

$y = \text{L sen } 7°52'38'',276 \quad (\Delta y = 92)$
$7°52' \ldots\ldots\ldots\ldots \ \bar{1},13630$
$38'',276 \ldots\ldots \ 59$
$y = \bar{1},13689$

92
38'',276
276
73 | 6
1 | 84
| 644
352 : 6

$y = \text{L tan } 3°04'43'',3785 \quad (\Delta y = 236)$
$3°04' \ldots\ldots\ldots\ldots \ \bar{2},72896$
$43'',3785 \ldots\ldots \ 171$
$y = \bar{2},73067$

236
43'',3785
944
70 | 8
7 | 08
1 | 852
| 1888
1024 : 6

§ 27. Anche il calcolo della parte proporzionale della ricerca inversa si può eseguire in tre modi diversi, che si possono rappresentare così:

$$\text{(I)}\quad \frac{(\delta y \times \Delta x)}{\Delta y}\ ,\quad \text{(II)}\quad \left(\frac{\delta y}{\Delta y}\right)\times \Delta x\ ,\quad \text{(III)}\quad \delta y : \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\ ;$$

e anche qui, supponendo sempre di non avere nessuna tavoletta ausiliaria, il modo preferibile è il primo. Il quale consiste nella moltiplicazione del numero approssimato δy per il numero esatto $\Delta x = 60''$ (§ 8, Oss. II), moltiplicazione semplicissima, perchè, prescindendo dalla virgola, il moltiplicatore è 6, e nella divisione del prodotto approssimato così ottenuto per il numero pure approssimato Δy. E siccome il prodotto di δy per Δx è affetto da un errore il cui limite superiore inabbassabile è $60''$ (perchè, in causa dell'arrotondamento di y_0 e di y (§ 2, III), δy è affetto da un errore il cui limite superiore inabbassabile è l'unità), se Δy ha 3, 2, 1 cifre, ossia se è rispettivamente compreso fra 100 e 241 (perchè da 3° in poi Δy è al più 241), fra 10 e 100, fra 2 e 10 (perchè per $\Delta y = 1$ l'interpolazione non occorre), gli estremi superiori esclusi solo negli ultimi due casi, il quoziente ottenuto coi procedimenti ordinari, anche supposto Δy esatto, è affetto da un errore il cui limite superiore inabbassabile è rispettivamente compreso fra $0'',24$ e $0'',6$, fra $0''6$ e $6''$, fra $6''$ e $30''$; se quindi non si vogliono cifre illusorie, basterà arrestare il quoziente ai decimi, alle unità e alle decine di secondi rispettivamente. Veggansi i quattro esempi accanto, dai quali, confrontandoli coi corrispondenti esempi del § prec., si può dedurre che una ulteriore cifra del quoziente può essere illusoria, anche tenendo conto del solo arrotondamento di y.

I)

$\delta y = 171, \quad \Delta y = 236$

$$\begin{array}{r|l} 10260'' & 236 \\ \cline{2-2} 944 & 43'',4 \\ \hline 82 & \\ 708 & \\ \hline 112 & \\ 944 & \\ \hline 176 & \end{array}$$

II)

$\delta y = 59, \quad \Delta y = 92$

$$\begin{array}{r|l} 3540'' & 92 \\ \cline{2-2} 276 & 38'' \\ \hline 78 & \\ 736 & \\ \hline 44 & \end{array}$$

III)

$\delta y = 1, \quad \Delta y = 48$

$$\begin{array}{r|l} 60'' & 48 \\ \cline{2-2} 48 & 1'' \\ \hline 12 & \end{array}$$

IV)

$\delta y = 4, \quad \Delta y = 7$

$$\begin{array}{r|l} 240'' & 7 \\ \cline{2-2} 21 & 36'' \\ \hline 3 & \end{array}$$

E anche qui è facile vedere che gli altri due modi richiedono dei calcoli o dei criteri meno semplici.

Per il calcolo delle cifre successive a x_0, nella ricerca inversa, si ha dunque la seguente

Regola. — *Si faccia la differenza* δy *e si moltiplichi questa differenza per* $60''$ *(nel modo ordinario), poi si divida questo prodotto per* Δy, *arrestando la divisione alla cifra delle decine di secondi, delle unità di secondo, dei decimi di secondo, secondochè* Δy *ha rispettivamente una, due, tre cifre; il quoziente così trovato si scriva, senz'altro, di seguito a* x_0.

$$\begin{array}{lr} \mathrm{L\ sen}\ x = \bar{1},13689\ (\Delta y = 92) & \\ \phantom{\mathrm{L\ sen}\ x = \bar{1},13}30 \ldots\ldots & 7^\circ 52' \\ \phantom{\mathrm{L\ sen}\ x = \bar{1},13}59 \ldots\ldots & 38'' \\ \hline & x = 7^\circ 52' 38'' \end{array} \qquad \begin{array}{l} 59 \times 60 = \\ = \begin{array}{r|l} 3540 & 92 \\ \cline{2-2} 276 & 38 \\ \hline 78 & \\ 736 & \\ \hline 44 & \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \mathrm{L\ tan}\ x = \bar{2},73067\ (\Delta y = 236) & \\ \phantom{\mathrm{L\ tan}\ x = \bar{2},7}2896 \ldots\ldots & 3^\circ 04' \\ \phantom{\mathrm{L\ tan}\ x = \bar{2},7}171 \ldots\ldots & 43'',4 \\ \hline & x = 3^\circ 04' 48'',4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 171 \times 60 = \\ = \begin{array}{r|l} 10260 & 336 \\ \cline{2-2} 944 & 43,4 \\ \hline 82 & \\ 708 & \\ \hline 112 & \\ 944 & \\ \hline 176 & \end{array} \end{array}$$

Veggansi, anche per la disposizione del calcolo, i due esempi accanto.

Osservazioni. — Analoghe alla I e alla II del § 22.

§ **28.** Nella tavola come quella che stiamo considerando si trovano spesso delle tavolette ausiliarie, che facilitano i calcoli di interpolazione; e la facilitazione è molto più sensibile di quella che si ottiene colle tavolette accennate nei §§ 19, 20 e 22. Queste tavolette però sono di diversi tipi, e noi considereremo quelle che si trovano nelle tavole dell'ALBRECHT (*), e che danno i prodotti di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ per 1, 2, ... 9, 10, 20, 30, 40, 50; veggansi i due esempi accanto. Evidentemente, servendosi di queste tavolette, i calcoli delle parti proporzionali, della ricerca diretta e della ricerca inversa rispettivamente, si eseguiscono nel terzo dei modi indicati in principio dei §§ 26 e 27, e si possono seguire le solite regole e le solite disposizioni dei §§ 19 e 20. Una sola avvertenza è necessaria, e bisogna tenerla ben presente: la cifra delle unità del prodotto parziale corrispondente alle decine di secondi e la cifra delle unità del prodotto parziale corrispondente alle unità di secondo devono essere scritte *tutt' e due* sotto l'ultima cifra della mantissa di y_0, e quindi il secondo prodotto parziale (questo solo) non va spostato (come al solito) di un posto verso destra (**). E anche per il numero delle cifre della parte proporzionale della ricerca inversa la regola è la stessa, purchè, come risulta dalla regola del § prec., si consideri come prima cifra di questa parte proporzionale quella delle decine di secondi.

92	
1	1,5
2	3,1
3	4,6
4	6,1
5	7,7
6	9,2
7	11,7
8	12,3
9	13,8
10	15,3
20	30,7
30	46,0
40	61,3
50	76,7

236	
1	3,9
2	7,9
3	11,8
4	15,7
5	19,7
6	23,6
7	27,5
8	31,5
9	35,4
10	39,3
20	78,7
30	118,0
40	157,3
50	196,7

Veggansi i due esempi accanto, che sono di quelli già svolti nei §§ prec., senza tavolette; da essi quindi si può rilevare l'utilità delle tavolette stesse.

OSSERVAZIONE. — I prodotti parziali forniti dalle tavolette in questione non sono in generale esatti, perchè, in generale, il quoziente di Δy per 60 non finisce esattamente nè alla prima nè alla seconda cifra decimale; ma l'errore che così si commette si ritiene trascurabile, e che così sia lo dimostreremo nel capitolo seguente.

L tan = $3^\circ 04' 43'',3785$ ($\Delta y = 236$)

$3^\circ 04'$	$\bar{2},72896$
$40''$	1573
$3''$	118
3.	118
7.	275
	$y = \bar{2},73067$

L sen $x = \bar{1},13689$ ($\Delta y = 92$)

30.	$7^\circ 52'$
59	
460	3
130	8
	$x = 7^\circ 52' 38''$

§ **29.** Nella seconda delle tavole accennate (§ 25) si ha $\Delta x = 1''$, quindi basta ripetere quanto si disse al § 23. Questa tavola però, sempre per la solita ragione, si userà solo per x maggiore di $3'$.

Ed è anche inutile dare degli esempi numerici, chè di differente da quelli del § citato, non ci sarebbe che il numero delle cifre della mantissa.

§ **30.** Resta a vedere come si possa procedere, per la interpolazione, quando x è minore di $3'$.

(*) Già citate, al § 25.

(**) L'esperienza di parecchi anni ci ha dimostrato che questa avvertenza molto frequentemente sfugge ai calcolatori; dando così luogo ad errori spesso non trascurabili. In un'altra nota, di prossima pubblicazione (*Studio comparativo sulla disposizione e sull'uso delle ordinarie tavole logaritmo-trigonometriche*), faremo vedere come si possa riparare a questo inconveniente e raggiungere, nello stesso tempo, qualche altro vantaggio.

In tal caso ammetteremo che il seno e la tangente di un arco siano uguali alla misura (riferita al raggio) dell'arco stesso; ammetteremo cioè che si abbia

$$\text{(14)} \qquad \mathrm{L\,sen}x = \mathrm{L}x \qquad \text{e} \qquad \mathrm{L\,tan}x = \mathrm{L}x\,,$$

ossia, per maggior facilità di calcolo,

$$\text{(14)}' \qquad \mathrm{L\,sen}x = \mathrm{L}x'' - \mathrm{LR}'' \qquad \text{e} \qquad \mathrm{L\,tan}x = \mathrm{L}x'' - \mathrm{LR}''\,,$$

(indicando con R″ *il raggio in secondi*, ossia il quoziente di 648000 per π); e così, per la ricerca diretta e inversa del logseno e del logtangente di un arco minore di 3′, saremo ricondotti alla tavola dei logaritmi dei numeri.

$y = \mathrm{L\,sen}\ 0°01'12'',37572$		
$\mathrm{L}x''$)	$72'',37$	$1,85956$
($\Delta y = 6$)	5 . . .	30
	7 . . .	42
$-\mathrm{LR}''$		$\bar{6},685575$
		$y = \bar{4},54517$

Non occorre quindi nessuna regola nuova, perchè serviranno quelle dei §§ 19 e 20; e in quanto al logaritmo di R″, che del resto si trova sempre già calcolato nelle ordinarie raccolte di tavole (fra le costanti usuali), rammenteremo che è dato da

$$\mathrm{LR}'' = 5{,}314425133176459\ldots$$

$\mathrm{L\,tan}\,x$	$\bar{4},18727$	
$+\mathrm{LR}''$	$5,31443$	
$\mathrm{L}x''$)	$1,50170$	
($\Delta y = 13$)	61 . . .	31,74
	9	
	78 . .	6
	12 . .	9
		$x'' = 31'',7469$

Osserveremo soltanto che nella ricerca diretta converrà, per maggior approssimazione, prendere la mantissa di LR″ con una cifra di più.

CAPITOLO QUARTO.

STUDIO DEGLI ERRORI PRODOTTI DAI PROCEDIMENTI INDICATI NEL CAPITOLO PRECEDENTE.

1. — Errori prodotti dal calcolo numerico.

§ 31. Nel capitolo secondo abbiamo studiato l'errore m prodotto dalla applicazione dei procedimenti indicati nel capitolo primo, e l'errore l che necessariamente affretterebbe il risultato, quando si eseguissero le operazioni nel modo ordinario; abbiamo poscia confrontati fra loro i limiti di questi errori, e abbiamo così veduti nuovamente giustificati i nostri procedimenti. Ci proponiamo di fare uno studio analogo per il caso particolare considerato nel capitolo precedente, e perciò indicheremo:

con m l'errore complessivo che si commette calcolando y coi procedimenti indicati, e con l l'errore, pure complessivo, che si commetterebbe calcolando lo stesso valore y nei modi ordinarî;

con m' ed l' gli errori analoghi per il calcolo di x;

con μ, λ, μ' e λ' i massimi, o dei limiti superiori inabbassabili, di m, l, m' ed l'.

§ 32. Nel caso in cui il calcolo di y e di x consista solo nel calcolo dei secondi membri della (11)' e della (12)' (e questo comprende tutti i casi considerati nel capitolo precedente, meno, soltanto, quelli dei §§ 24 e 30), i valori di λ e di λ' furono già da noi studiati, e basterà, in proposito, ricordare quanto segue.

L'errore l non dipende nè dal passo Δx, nè dalla forma della funzione y, ed ha sempre per massimo una unità, ossia ([N₃], § 3) si ha sempre

$$\lambda = 1; \tag{15}$$

e siccome questa è una unità dell'ultimo ordine, esso dipende evidentemente dal numero delle cifre decimali che si considerano, e impiccolisce al crescere di questo numero.

L'errore l' invece dipende sia dal passo Δx, sia dalla forma della funzione y, e il suo limite superiore inabbassabile è sempre dato da ([N₃], § 6)

$$\lambda' = \frac{1}{\Delta y} \times \Delta x; \tag{16}$$

e siccome Δy è espressa in unità dell'ultimo ordine, anch'esso dipende dal numero delle cifre decimali che si considerano e impiccolisce al crescere di questo numero (*).

Osservazione I. — Si noti che nella moltiplicazione di Δy per δx (che occorre per il calcolo della parte proporzionale della ricerca diretta) l'ipotesi che si fece nel § 15 per avere per λ il valore più piccolo qui è sempre soddisfatta, perchè il moltiplicatore δx si suppone esatto.

Si noti pure che nella divisione di δy per Δy (che occorre per il calcolo della parte proporzionale della ricerca inversa) l'ipotesi che per questo caso si fece nel § 16, che cioè il divisore sia esatto, è precisamente fra quelle che conducono al massimo valore di l' ([N₃], § 5).

Osservazione II. — A proposito dell'errore l è notevole che, se, invece di usare la differenza tavolare quale precisamente risulta dalle tavole (ossia dai valori arrotondati di y_0 e y_1), si usa una differenza più approssimata (dedotta, p. es., da un'altra tavola avente un maggior numero di cifre decimali (**)), l'errore stesso invece di diminuire, può anche crescere. Anzi, come si è osservato nella osservazione precedente, fra le condizioni che rendono massimo l c'è appunto quella che l'errore di Δy sia nullo. E di questo apparente paradosso demmo anche un esempio numerico ([N₃], § 3, Oss.).

Osservazione III. — E, a proposito dell'errore l', si rammenti che λ' è stato dedotto nella ipotesi che il valore dato per y sia affetto solo dall'errore di arrotondamento, chè, se questo valore (che, generalmente, è il risultato di un calcolo) fosse affetto anche da un altro

(*) A questo risultato si giunge, generalmente, o supponendo δy e Δy errati di mezza unità, o y_0 e y_1 esatti ([N₃], § 7), tutte ipotesi evidentemente inammissibili; mentre invece, come noi dimostrammo, vi si giunge anche supponendo errati al più di mezza unità y_0, y_1 ed y, che è appunto l'ipotesi che abbiamo sempre fatta.

(**) Come nelle tavole trigonometriche del notissimo *Manuale logaritmico-trigonometrico* del Köhler (Ed. Tauchnitz, Lipsia 1873). Veggasi in proposito tutto il § 10 della [N₂].

errore t, avente per massimo o per limite superiore inabbassabile θ, invece della (2) si avrebbe ([N_3], § 6)

$$\lambda' = \frac{1+\theta}{\Delta y} \times \Delta x. \tag{17}$$

Si noti però che, affinchè il ragionamento che ha condotto a questa formula sussista, bisogna che $0{,}5+\theta$ (che è l'errore che affetta y) non sia maggiore di Δy e bisogna anche che non sia mai, contemporaneamente, y minore e $y+(0{,}5+\theta)$ maggiore di y_0. E questo, in seguito accadrà sempre, perchè $0{,}5+\theta$ avrà per limite superiore 1,5; e quindi non potrà questo errore essere maggiore di Δy, perchè, se occorre l'interpolazione, Δy è almeno eguale a 2; nè potrà essere contemporaneamente y minore e $y+(0{,}5+\theta)$ maggiore di y_0, perchè, se ciò fosse, $0{,}5+\theta$ dovrebbe essere eguale a 2 almeno.

§ **33.** Passiamo agli errori m ed m' nei casi considerati nel § prec., escluso quello in cui sia $\Delta x = 1'$ (§§ 26, 27 e 28).

Se $\Delta x = 1$ (§ 19), o $\Delta x = 1''$ (§§ 23 e 29), l'errore m si riduce solo a quella parte, che, nella moltiplicazione di Δy per δx, deriva dal tralasciare i prodotti parziali indicati (§ 15); perchè quella che deriva dal trascurare nel risultato le cifre decimali è già compresa in l ([N_2], § 3), e l'errore dell'addizione finale (§ 4, Oss. II) si riduce a zero avendo già i due addendi lo stesso numero di cifre. Sarà dunque

$$\mu = 0{,}2. \tag{18}$$

Se poi $\Delta x = 10''$ (§ 22), nel prodotto di Δy per δx non si considera come ultima cifra del primo prodotto parziale la cifra delle unità, ma la cifra delle decine; quindi il limite dell'errore che deriva dai prodotti parziali tralasciati è 2. Ma (come risulta dalla (11')) questo errore va diviso per $\Delta x = 10''$, quindi anche ora si ha la (18).

Confrontando la (18) colla (15) e ricordando quanto si è detto al § 10, si ha così, immediatamente, la giustificazione del procedimento indicato per la ricerca diretta, quando sia Δx eguale a 1, o a 1'', o a 10''.

§ **34.** In quanto all'errore m', si cominci coll'osservare che, se b è il numero delle cifre di Δy, si ha intanto

$$10^{b-1} \leqq \Delta y < 10^b,$$

da cui, per la (16),

$$\Delta x \,.\, 10^{-b} < \lambda' \leqq \Delta x \,.\, 10^{-b+1}.$$

Ora, se Δx è eguale a 1, o a 1'', si ha evidentemente

$$\mu' = 0{,}5 \times 10^{-b},$$

quindi è certamente μ' minore di λ', mentre non è μ' minore di $\lambda' : 10$ (§ 11); se poi Δx è uguale a 10'', tanto λ' che μ' vanno moltiplicati per 10 quindi la conclusione è la stessa.

Anche il procedimento indicato per la ricerca inversa, in tutti i casi indicati, è dunque giustificato.

Osservazione. — L'uso delle tavole ausiliarie in tutti i casi ora considerati non porta nessuna modificazione a quanto precede, perchè abbiamo supposto che queste tavole diano precisamente 0,1, 0,2, ... 0,9 di Δy.

§ 35. Veniamo ora al caso in cui sia $\Delta x = 1'$ (§§ 26 e 27).

Applicando la regola del § 26, l'errore m è, evidentemente, eguale al quoziente per 6 della somma dei prodotti parziali tralasciati (quando si consideri per cifra delle unità la cifra delle decine del primo prodotto parziale), ma questa somma ha per limite superiore inabbassabile 0,2 (per la (18)), quindi sarà

$$\mu = 0{,}1 : 3. \tag{19}$$

È dunque, certamente, μ minore di λ (per la (15)); anzi, essendo anche minore di $\lambda : 10$ (non però di $\lambda : 100$) l'ultima cifra del prodotto si deve ritenere illusoria. Non conviene però calcolare quel prodotto con una cifra di meno, perchè il piccolo vantaggio, che così si avrebbe, scomparirebbe davanti alla minor semplicità della regola che bisognerebbe stabilire per la divisione per 6 (chè la cifra delle unità del quoziente non corrisponderebbe più all'ultima cifra della mantissa già presa).

Nella ricerca inversa, dalla regola stabilita (§ 27) risulta che si ha

$$\mu' = 0'',05\,, \qquad \mu' = 0'',5\,, \qquad \mu' = 5'', \tag{20}$$

quando, corrispondentemente, Δy ha tre, due, una cifra, ossia quando (come nel § stesso si osservò)

$$0'',24 < \lambda' \leqslant 0'',6\,, \qquad 0'',6 \leqslant \lambda' \leqslant 6''\,, \qquad 6'' \leqslant \lambda' \leqslant 30''\,; \tag{21}$$

e in ciascuno di questi casi si ha certamente μ' minore di λ', mentre non è necessariamente μ' minore di $\lambda' : 10$.

§ 36. Quando però si usino le tavolette ausiliarie indicate nel § 28, ciascuno degli errori m ed m' consta di due parti: una dovuta ai prodotti parziali tralasciati, e alle cifre tralasciate nel quoziente, e che indicheremo con r ed r'; l'altra dovuta alle cifre decimali tralasciate in ciascuno dei prodotti parziali e che indicheremo con s ed s'.

Ciò posto, si cominci dall'osservare che nella ricerca diretta i prodotti parziali che si prendono non possono essere più di quattro, perchè tutti questi prodotti, escluso il primo soltanto (che corrisponde alle decine di secondi), hanno due cifre al più (precisamente: il massimo valore di questi prodotti è 36, perchè Δy è al più 240 e $\frac{9}{60} \times 240 = 36$), per cui il quarto ha certo la sua prima cifra fuori della colonna in cui si trova l'ultima cifra di y_0, e quindi il quinto la ha fuori della colonna successiva. Ne viene di conseguenza che s non supera certamente la somma

$$0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}005 + 0{,}0005 = 0{,}1055.$$

Ma, nel nostro caso, questo limite si può abbassare. Infatti, essendo Δy intero, la parte decimale del prodotto parziale corrispondente alle decine di secondi non può essere che

$$\tfrac{1}{6}=0{,}1666...,\quad \tfrac{2}{6}=0{,}3333...,\quad \tfrac{3}{6}=0{,}5000...,\quad \tfrac{4}{6}=0{,}6666...,\quad \tfrac{5}{6}=0{,}8333...;$$

per cui, arrestando il quoziente alla cifra dei decimi, non si può commettere che un errore eguale

$$\text{o a } +0{,}0333\ldots,\qquad \text{o a } -0{,}0333\ldots;$$

la parte decimale del prodotto parziale corrispondente alle unità di secondo non può essere che

$$0{,}0166\ldots,\quad 0{,}0333\ldots,\quad 0{,}0500\ldots,\quad 0{,}0666\ldots,\quad 0{,}0833\ldots;$$

per cui, arrestando il quoziente alla cifra dei decimi, non si può commettere che un errore eguale

$$\text{o a } +0{,}0333\ldots,\qquad \text{o a } -0{,}0333\ldots,\qquad \text{o a } +0{,}0500\ldots.$$

Dunque l'errore s, se è per eccesso, ha per massimo (s'intende sempre in valore assoluto)

$$0{,}0333\ldots+0{,}05+0{,}005+0{,}0005=0{,}088833\ldots;$$

se è per difetto ha invece per massimo

$$0{,}0333\ldots+0{,}0333\ldots+0{,}00333\ldots+0{,}000333\ldots=0{,}07033\ldots.$$

Così, essendo $\Delta y=241$ (veggasi la tavoletta accanto), per

$$\delta x=43'',33 \qquad \text{e} \qquad \delta x=52'',22,$$

la parte proporzionale corrispondente alla ricerca diretta è, rispettivamente,

$$174{,}131 \qquad \text{e} \qquad 209{,}68,$$

mentre col calcolo diretto si ha

$$174{,}042166\ldots \qquad \text{e} \qquad 209{,}75033\ldots,$$

e quindi gli errori sono, rispettivamente,

$$-0{,}088833\ldots \qquad\qquad +0{,}070333\ldots.$$

	241
1	4,0
2	8,0
3	12,1
4	16,1
5	20,1
6	24,1
7	28,1
8	32,1
9	36,2
10	40,2
20	80,3
30	120,5
40	160,7
50	200,8

Si noti però che se l'ultimo prodotto parziale che si piglia, invece di corrispondere ai centesimi di secondo, corrispondesse ai decimi, alle unità, alle decine di secondi, il massimo per eccesso si ridurrebbe rispettivamente a

$$0{,}08833\ldots,\quad 0{,}08383\ldots,\quad 0{,}03333\ldots,$$

e il massimo per difetto a

$$0{,}07000\ldots,\quad 0{,}06066\ldots,\quad 0{,}03333\ldots.$$

In quanto all'errore r, che è sempre per difetto, sappiamo già che esso, in generale, ha per limite superiore 0,2, ma nel nostro caso particolare anche questo limite può essere alquanto abbassato. Infatti, per il ragionamento fatto nella Oss. II al § 15, r sarebbe massimo quando, prescindendo per ora dalle virgole, le cifre corrispondenti ai prodotti parziali tralasciati fossero 1, 9, 9, ... e il quoziente $\Delta y : 60$ fosse prossimo a 1. Ora, si osservi che il valore di questo quoziente più vicino a 1 è dato da $59 : 60 = 0{,}9833\ldots$ (perchè, se la differenza Δy è di tre cifre, essa è al più eguale a 241, e quindi il valore di $\Delta y : 60$ più vicino a 10 è dato da $241 : 60 = 4{,}166\ldots$, e se la differenza stessa è di una cifra sola, il valore di $\Delta y : 60$ più vicino a 0,1 è data da $9 : 60 = 0{,}0833\ldots$); ma per l'arrotondamento dei prodotti parziali dati dalle tavolette, il prodotto corrispondente a **1** per Δy eguale a 59, 58 e 57 è 1 e non 0,9, quindi questo prodotto non si trascura ed è solo per $\Delta y = 56$ che quel prodotto resta, per la prima volta, 0,9. E allora si ha

$$56 : 6 = 9{,}383\ldots, \qquad (56 : 6) \times 9 = 8{,}4,$$

quindi r è al più eguale a

$$0{,}09833\ldots + 0{,}084 + 0{,}0084 + \ldots = 0{,}18666\ldots$$

Si avrà dunque un limite superiore di m, sommando questo massimo di r (che è sempre per difetto) col massimo valore di s quando è per difetto: così si trova

$$0{,}07033\ldots + 0{,}18666\ldots = 0{,}257,$$

ed è questo certamente un limite superiore di m. Ma questo limite è ancora abbassabile? Parrebbe di sì, perchè per $\Delta y = 56$ i prodotti parziali che si pigliano, perchè r abbia il valore massimo, sono *due* e quindi il limite di s è $0{,}0666\ldots$ e non $0{,}07033\ldots$, e allora per $s + r$ si ha

$$0{,}0666\ldots + 0{,}1866\ldots = 0{,}2533\ldots.$$

Così, per $\delta y = 47{,}1999$, essendo $\Delta y = 56$, colla tavoletta si ha 43,8, e senza tavoletta si ha 44,05324, e quindi l'errore è precisamente 0,253.... Ma, se, al crescere di Δy, r cala, s cresce (perchè i prodotti parziali, che si pigliano, possono diventare tre o quattro), e quindi non si può, senz'altro, dare una risposta affermativa. Possiamo però concludere che, essendo μ un limite superiore inabbassabile di $r + s$, si ha certamente

$$0{,}253 < \mu < 0{,}257. \tag{22}$$

Anche servendosi delle tavolette ausiliarie, è dunque μ minore di λ e maggiore di $\lambda : 10$.

§ **37.** Nella ricerca inversa, i prodotti parziali a cui si ricorre non possono essere più di tre, e siccome gli errori di questi prodotti influiscono sul quoziente come se, invece di affettare i prodotti stessi, affettassero il dividendo, si può dire che l'errore s' ha per limite superiore inabbassabile

$$\frac{0{,}087333\ldots}{\Delta y} \times 60'' = \frac{5'',3}{\Delta y}, \quad \text{o} \quad \frac{0{,}07}{\Delta y} \times 60'' = \frac{4'',2}{\Delta y},$$

secondo che è per difetto, o per eccesso (perchè i prodotti parziali vanno sottratti).

In quanto all'errore r', che può essere per eccesso o per difetto, sappiamo che esso ha per massimo nel primo caso, per limite superiore inabbassabile nel secondo,

$$0'',05\ ,\qquad 0''5\ ,\qquad 5''\ ,$$

secondo che Δy è di tre, due, una cifre.

Si avrà dunque un limite superiore di m' sommando questo massimo, o questo limite superiore, di r' col maggiore dei due limiti trovasi per s', e quindi per

$$100 \leqslant \Delta y \leqslant 241\ ,\qquad 10 \leqslant \Delta y \leqslant 100\ ,\qquad 2 \leqslant \Delta y \leqslant 10\ ,$$

si avrà rispettivamente

$$(24)\qquad 0'',071 \leqslant \mu' < 0'',103\ ,\quad 0'',553 \leqslant \mu' < \leqslant 1'',030\ ,\quad 5'',53 \leqslant \mu' \leqslant 7'',65.$$

Ed ora, confrontando queste limitazioni colle corrispondenti (21), si vede che,

se Δy ha tre cifre, μ' è *sempre* minore di λ', senza essere necessariamente minore di $\lambda' : 10$;

se Δy ha due cifre (nel quale caso l'ultima cifra di r è quella delle unità di secondo), μ' è certamente minore di $1'',030$, mentre λ' è compreso fra $0'',6$ e $6''$.

se Δy ha una cifra (nel qual caso l'ultima cifra di x è quella delle decine di secondo), μ' è certamente minore di $7'',65$, mentre λ' è compreso fra $6''$ e $30''$.

Anche in questo caso dunque (§ 11) l'indicato procedimento è giustificato.

Osservazione. — A scanso di equivoci, ricordiamo che (dipendentemente dal modo col quale sono state calcolate) l'uso delle tavolette ausiliarie può dar luogo a tre errori differenti. Uno si presenta in alcune tavole (*) nelle quali, invece di avere una tavoletta per ogni diversa differenza tavolare, se ne ha una per la differenza media fra 10, o fra 15, di queste differenze, e di questo errore parleremo più avanti. Un altro si presenta in quelle tavole, e sono molte (**), nelle quali si trascura la cifra dei decimi nei successivi prodotti parziali, e di questo errore è molto facile trovare un limite superiore inabbassabile. Un altro, finalmente, è quello che abbiamo studiato qui, indicandolo con s e con s'.

I primi due errori sono, evidentemente, evitabili e nei tipi di tavole da noi considerati non si presentano; mentre il terzo è inevitabile, e perciò ne abbiamo qui cercati dei limiti inabbassabili.

§ 38. Consideriamo ora il caso in cui si usino i logaritmi rapporti S e T (§ 24).

Nella ricerca diretta, l'errore l consta di due parti, che derivano dalla interpolazione nel calcolo di Lx'' e nel calcolo di S (o di T), e ciascuna di queste due parti avrebbe per massimo l'unità (§ 32). Sic-

(*) Veggansi, p. es., le tavole del Callet, già citate.
(**) Veggansi, p. es., le tavole del Köhler, quelle del Callet e quelle dell'Houel, tutte già citate.

come però, per il procedimento indicato nel § 24, le cifre che vengono dopo la settima si trascurano una volta sola, questo massimo si riduce di una mezza unità ([N_2], § 3), e si ha

$$\lambda = 1{,}5. \tag{24}$$

Anche l'errore m consta, corrispondentemente, di due parti, e ciascuna di queste due parti ha per limite superiore 0,2 (§ 33); ma nel nostro caso quella dovuta al calcolo di S (o di T) si può abbassare. Infatti (supponendo x minore di 30′) δx si moltiplica per un numero che è al più eguale a 6 (§ 24); quindi l'errore in questione ha per limite superiore inabbassabile 0,12. Più precisamente: questo limite è 0,1 se il moltiplicando è 1, o 2, o 5, è invece 0,12 se il moltiplicando è 3, o 4, o 6 (e a questo risultato si giunge facilmente con un ragionamento analogo a quello fatto nella Oss. II al § 15, e nel § 36; così: moltiplicando 2 per δx, il primo prodotto parziale che si trascura è, al più, 0,08, gli altri sono al più, 0,018, 0,0018, ... e la loro somma ha per limite superiore inabbassabile 0,1; moltiplicando invece 6 per δx, i prodotti stessi sono, al più, 0,06, 0,054, 0,0054 ... e la loro somma ha per limite superiore inabbassabile 0,12). Sarà dunque

$$\mu' = 0{,}32; \tag{25}$$

e questo valore confrontato col valore di λ, dato dalla (24), giustifica, nel solito modo, il procedimento indicato.

Nella ricerca inversa, il valore che si ottiene per S (o per T) è necessariamente affetto da un errore l il cui limite superiore inabbassabile è 1 (§ 32); per cui il valore di Lx'', oltre che dall'errore di arrotondamento, sarà affetto anche da questo errore, e quindi si avrà (§ 32, Oss. III)

$$\lambda' = \frac{2}{\Delta y}. \tag{26}$$

In quanto all'errore dovuto al procedimento stabilito, si osservi che nella interpolazione che occorre per il calcolo di S (o di T),

se $\Delta x = 10''$, non si trascura nessun prodotto parziale;

se $\Delta x = 50''$, si può tutt'al più trascurare il prodotto parziale corrispondente alle unità di secondo, ma, se ciò accade, quel prodotto è di una sola cifra e questa non va sommata con nessuna cifra del prodotto precedente (che è di due cifre) quindi l'errore, che così si può commettere, rientra in l'.

L'errore m' si riduce dunque solo a quello che si commette nella ricerca inversa di Lx''. E allora, moltiplicando per 2 i limiti di λ' dati nel § 34 (onde avere (per la 26) i limiti del massimo errore l', che si può avere in questo caso), si vede che si può ripetere lo stesso ragionamento e arrivare alla stessa conclusione.

§ 39. Resta, finalmente, da esaminare il caso considerato nel § 30.

Nella ricerca diretta, l'errore l deriva solo dalla interpolazione nel calcolo di Lx'' ed ha per massimo una unità (§ 32). L'errore m invece consta di due parti: quella che deriva dai prodotti tralasciati e che ha per limite superiore inabbassabile 0,2 (§ 33), e quella che deriva dalle cifre tralasciate in LR″ e che è eguale a 0,0132..., si avrà quindi

(27) $$0{,}243 < \mu < 0{,}214.$$

Sarà dunque, anche ora, μ minore di λ senza essere μ minore di $\lambda : 10$ (§ 11).

Nella ricerca inversa, il valore di Lx'', oltre che dall'errore del suo arrotondamento, è affetto anche dall'errore prodotto dall'arrotondamento di LR″, e quest'ultimo è eguale a 0,4866...; sarà quindi (§ 32, Oss. III)

(28) $$\frac{1{,}486}{\Delta y} < \lambda' < \frac{1{,}487}{\Delta y}.$$

E allora, moltiplicando per 1,486 e per 1,487, rispettivamente, i limiti di λ' dati nel § 34 (onde avere, per la (28), i limiti del massimo errore l' che si può avere in questo caso) e osservando che l'errore m' deriva solo dall'applicare il solito criterio nella ricerca inversa di Lx'' (§ 20), si vede che, anche qui, si può ripetere lo stesso ragionamento e arrivare alla stessa conclusione.

(Continua) G. Pesci.

SUL CALCOLO DELLE DIFFERENZE FINITE

(Continuazione e fine v. fasc. precedente)

12. Tale formola, per (4), può scriversi:

$$\Delta^m [\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = \sum_{r=0}^{m} (m)_r \Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)\Delta^r\varphi_2(x_{m-r}),$$

e coincide con la formola di Leibniz. Essa può estendersi ad un numero qualunque di funzioni.

Si ha:

$$\Delta^m [\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = \sum_{r=0}^{m} (m)_r \Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)\Delta^r\varphi_2(x_{m-r}),$$

e sostituendo α_1 ad r, può scriversi:

$$\Delta^m [\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = \Sigma\, (m)_{\alpha_1} \Delta^{m-\alpha_1}\varphi_1(x_0)\Delta^{\alpha_1}\varphi_2(x_{m-\alpha_1}),$$

potendo attribuire ad α_1 tutti valori, interi e positivi, da 0 ad m ed ottenendo così $m+1$ termini.

Sostituendo a $\varphi_2(x_0)$ il prodotto $\varphi_2(x_0)\varphi_3(x_0)$, si ha:

$$\Delta^m [\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)\varphi_3(x_0)] = \sum_{r=0}^{m} (m)_r \Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)\Delta^r[\varphi_2(x_{m-r})\varphi_3(x_{m-r})] =$$

$$= \sum_{r=0}^{m} (m)_r \Delta^{m-r}\varphi_1(x_0) \sum_{s=0}^{r} (r)_s \Delta^{r-s}\varphi_2(x_{m-r})\Delta^s\varphi_3(x_{m-r+r-s}),$$

e sostituendo α_1 ad r e α_2 ad s, può scriversi:

$$\Delta^m [\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)\varphi_3(x_0)] =$$
$$= \Sigma\, (m)_{\alpha_1} \Delta^{m-\alpha_1} \varphi_1(x_0) \,.\, (\alpha_1)_{\alpha_2} \Delta^{\alpha_1-\alpha_2} \varphi_2(x_{m-\alpha_1}) \Delta^{\alpha_2} \varphi_3(x_{m-\alpha_2}) ,$$

potendo attribuire ad α_1 tutti i valori, interi e positivi, da 0 ad m e ad α_2 tutti i valori, interi e positivi, da 0 ad α_1 ed ottenendo così $\binom{m+2}{2}$ termini,

Così procedendo è facile stabilire la formola generale e dimostrarla col metodo di conclusione da n ad $n+1$.

Perciò, siano n aggregati finiti, ciascuno di $m+1$ elementi:

$$\begin{array}{l} a_0 ,\ a_1 , \ldots , a_i , \ldots , a_m , \\ b_0 ,\ b_1 , \ldots , b_i , \ldots , b_m , \\ c_0 ,\ c_1 , \ldots , c_i , \ldots , c_m , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_0 ,\ l_1 , \ldots , l_i , \ldots , l_m , \end{array}$$

e si formi il prodotto:

$$a_i b_i c_i \ldots l_i \ (i = 0, 1, \ldots , m),$$

sarà:

$$\Delta^m [a_0 b_0 \ldots k_0 l_0] = \Sigma \frac{m!}{(m-\alpha_1)!(\alpha_1-\alpha_2)!\ldots(\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1})!\alpha_{n-1}!} \Delta^{m-\alpha_1} a_0 \,\Delta^{\alpha_1-\alpha_2} b_{m-\alpha_1} \ldots$$
$$\ldots \Delta^{\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1}} k_{m-\alpha_{n-2}} \,\Delta^{\alpha_{n-1}} l_{m-\alpha_{n-1}} , \qquad (13)$$

potendo attribuire ad α_1 tutt'i valori, interi e positivi, da 0 ad m, ad α_2 tutt'i valori, interi e positivi, da 0 ad α_1 e così via via ad α_{n-1} tutt'i valori, interi e positivi. da 0 ad α_{n-2} ed ottenendo in tutto $\binom{m+n-1}{n-1}$ termini ed essendo in ogni termine la somma degli indici delle Δ uguale ad m.

Si può osservare che in tale espressione entrano in forma simmetrica tutt'i termini dei triangoli delle differenze di

$$b_0 , c_0 , \ldots , k_0$$

ed i termini della diagonale discendente, verso destra di a_0 e della diagonale ascendente, verso sinistra, di l_0.

Se poi per mezzo della interpolazione si determinano le n funzioni:

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots , \varphi_n(x) ,$$

che pel valore x_i della variabile, assumono rispettivamente i valori:

$$a_i , b_i , \ldots , l_i ,$$

la formola (13) si scrive:

$$\Delta^m [\varphi_1(x_0) \ldots \varphi_n(x_0)] =$$
$$= \Sigma \frac{m!}{(m-\alpha_1)!\,(\alpha_1-\alpha_2)!\ldots(\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1})!\,\alpha_{n-1}!} \Delta^{m-\alpha_1} \varphi_1(x_0) \Delta^{\alpha_1-\alpha_2} \varphi_2(x_{m-\alpha_1}) \ldots$$
$$\ldots \Delta^{\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1}} \varphi_{n-1}(x_{m-\alpha_{n-2}}) \,\Delta^{\alpha_{n-1}} \varphi_n(x_{m-\alpha_{n-1}}) ,$$

e siccome essa, nella sua costituzione, dipende solamente dal numero delle funzioni e dalla classe delle differenze, così scelto un intervallo costante h, si ha:

$$\Delta^m [\varphi_1(x) \dots \varphi_n(x)] =$$
$$= \Sigma \frac{m!}{(m-\alpha_1)!(\alpha_1-\alpha_2)! \dots (\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1})!\alpha_{n-1}!} \Delta^{m-\alpha_1}\varphi_1(x)\Delta^{\alpha_1-\alpha_2}\varphi_2(x+(m-\alpha_1)h)\dots$$
$$\dots \Delta^{\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1}}\varphi_{n-1}(x+(m-\alpha_{n-2})h)\,\Delta^{\alpha_{n-1}}\varphi_n(x+(m-\alpha_{n-1})h),$$

qualunque siano le funzioni di x; e sotto quest'ultima forma basta ammettere $n=2$ e quindi che l'ultimo α sia α_1 per ricavarne la nota formola di Leibniz per la differenza m-esima del prodotto di due funzioni.

13. Sostituendo in (10) invece di $\varphi_2(x_0)$ il prodotto $\varphi_2(x_0)\varphi_3(x_0)$, la differenza m-esima del prodotto di tre funzioni sarà:

$$\Delta^m [\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)\varphi_3(x_0)] = \sum_{r=0}^{m-1} \{(m-1)_r \Delta^r\varphi_1(x_{m-r})\Delta^{m-r}[\varphi_2(x_0)\varphi_3(x_0)] +$$
$$+ (m-1)_r \Delta^r [\varphi_2(x_{m-r-1})\varphi_3(x_{m-r-1})]\,\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)\}$$

e come da (10) si ricavano

$$2m = 2 + 2(m-1)_1$$

termini, ciascuno prodotto di due differenze tali che la somma degl'indici è costantemente m, così da questa si ricavano

$$2(m+1)_2+1+2(m)_2 = 2m^2+1 = 3+2\,.\,3(m-1)_1+2^2(m-1)_2$$

termini, ciascuno prodotto di tre differenze tali che la somma degli indici è costantemente m.

In generale la differenza m-esima del prodotto di n funzioni è:

$$\Delta^m [\varphi_1(x_0) \dots \varphi_n(x_0)] = \sum_{r=0}^{m-1} \{(m-1)_r\Delta^r\varphi_1(x_{m-r})\Delta^{m-r}[\varphi_2(x_0) \dots \varphi_n(x_0)] +$$
$$+ (m-1)_r\Delta^r [\varphi_2(x_{m-r-1}) \dots \varphi_n(x_{m-r-1})]\,\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)\}$$

e sviluppando, ciascuno dei termini sarà un prodotto di n differenze tali che la somma degli indici sia costantemente m.

Indagando sul numero dei termini d'un tale sviluppo si trova che esso è il termine m-esimo d'una progressione aritmetica d'ordine $n-1$ e precisamente

$$N = 2^0(m-1)_0(n)_1+2^1(m-1)_1(n)_2+\dots+2^{n-1}(m-1)_{n-1}(n)_n. \quad (14)$$

Applicazioni ed esercizi.

14. Si convenga di attribuire ad x tutti e solamente i valori, essenzialmente interi, della serie naturale dei numeri d'ordine

$$-\infty\dots, -1, 0, 1, \dots\infty;$$

se

$$\Delta^m \varphi(x) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i (m)_i \Delta^0 \varphi(x+m-i)$$

è costante, cioè indipendente dal valore particolare che si attribuisce ad x, allora $\varphi(x)$ è una progressione aritmetica d'ordine m.

In generale una progressione aritmetica d'ordine m è funzione della variabile x e di $m+1$ costanti arbitrarie. Così date $m+1$ quantità affatto indipendenti l'una dall'altra (1):

$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_i,\ \ldots,\ a_m,$$

si può costruire il triangolo delle differenze di a_0, e assunte le $m+1$ quantità come termini consecutivi d'una progressione aritmetica d'ordine m, si può costruirla effettivamente sia a destra di a_m che a sinistra di a_0, insieme con tutte le progressioni aritmetiche d'ordine inferiore, che da essa derivano, riguardando come primi termini i termini della serie delle differenze di a_0, e si hanno le seguenti sei formole in cui r può assumere tutti i valori, interi e positivi, da o ad m.

$$\Delta^r a_{m-r+p} = \sum_{i=1}^{m-r} (m-r+p)_i \Delta^{r+i} a_0, \tag{15}$$

$$\Delta^r a_{-p} \quad = \sum_{i=0}^{m-r} (-1)^i (p-1+i)_i \Delta^{r+i} a_0, \tag{16}$$

$$\Delta^r a_{m-r+p} = \sum_{i=0}^{m-r} (p-1+i)_i \Delta^{r+i} a_{m-r-i}, \tag{17}$$

$$\Delta^r a_{-p} \quad = \sum_{i=0}^{m-r} (-1)^i (m-r+p)_i \Delta^{r+i} a_{m-r-i}, \tag{18}$$

$$\Delta^r a_{m-r+p} = \sum_{i=0}^{m-r} (-1)^i (m-r+p)_{m-r-i} (p-1+i)_i \Delta^r a_{m-r-i}, \tag{19}$$

$$\Delta^r a_{-p} \quad = \sum_{i=0}^{m-r} (-1)^i (m-r+p)_{m-r-i} (p-1+i)_i \Delta^r a_i. \tag{20}$$

La formola (15) si potrebbe riferire alla formola d'interpolazione di Newton e la formola (19) a quella di Lagrangia, e tutt'e sei si deducono senza difficoltà dalle tre formole fondamentali (3), (4) e (5).

15. Siano

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),$$

n progressioni aritmetiche d'ordine rispettivamente

$$m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n;$$

dalla relazione:

$$\Delta^r[\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)] = \Delta^{r-1}[\varphi_1(x+1)+\ldots+\varphi_n(x+1)] -$$
$$- \Delta^{r-1}[\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)] = \Delta^r\varphi_1(x)+\Delta^r\varphi_2(x)+\ldots+\Delta^r\varphi_n(x),$$

che si ottiene facilmente partendo da $r=1$, si deduce che la progressione somma d'un qualsivoglia numero di progressioni aritmetiche, avrà la stessa differenza costante e sarà dello stesso ordine della progressione d'ordine maggiore, e se tutte sono dello stesso ordine, cioè se $m_1 = m_2 = \ldots = m_n$ la differenza costante della somma sarà la somma delle differenze costanti.

16. Se le n progressioni aritmetiche si moltiplicano fra di loro, l'ordine e la differenza costante della progressione prodotto saranno dati dalla formola

$$\Delta^{m_1+\ldots+m_n}[\varphi_1(x)\ldots\varphi_n(x)] = \frac{(m_1+\ldots+m_n)!}{m_1!\ldots m_n!}\Delta^{m_1}\varphi_1(x)\ldots\Delta^{m_n}\varphi_n(x). \quad (21)$$

Infatti ponendo in (10) m_1+m_2 invece di m si ha

$$\Delta^{m_1+m_2}[\varphi_1(x)\varphi_2(x)] = \sum_{r=0}^{m_1+m_2-1}(m_1+m_2-1)_r\Delta^r\varphi_1(x+m_1+m_2-r)\Delta^{m_1+m_2-r}\varphi_2(x)+$$
$$+\sum_{r=0}^{m_1+m_2-1}(m_1+m_2-1)_r\Delta^r\varphi_2(x+m_1+m_2-r-1)\Delta^{m_1+m_2-r}\varphi_1(x),$$

riferendola in generale al punto x.

Ora avuto riguardo al secondo fattore di ciascuno di questi due sviluppi è facile concludere che $\Delta^{m_1+m_2-r}\varphi_2(x)$ è sempre nullo per $m_1-r>0$ e $\Delta^{m_1+m_2-r}\varphi_1(x)$ è sempre nullo per $m_2-r>0$, e avuto riguardo al primo fattore si conclude ugualmente che

$$\Delta^r\varphi_1(x+m_1+m_2-r)$$

è sempre nullo per $r>m_1$ e $\Delta^r\varphi_2(x+m_1+m_2-r-1)$ è sempre nullo per $r>m_2$; e siccome la somma degl' indici delle Δ è costantemente m_1+m_2, così segue che si annullano tutti i termini, salvo il termine

$$(m_1+m_2-1)_{m_1}\Delta^{m_1}\varphi_1(x+m_2)\Delta^{m_2}\varphi_2(x)$$

del primo sviluppo ed il termine

$$(m_1+m_2-1)_{m_2}\Delta^{m_2}\varphi_2(x+m_1-1)\Delta^{m_1}\varphi_1(x)$$

del secondo, e quindi

$$\Delta^{m_1+m_2}[\varphi_1(x)\varphi_2(x)] = (m_1+m_2-1)_{m_1}\Delta^{m_1}\varphi_1(x+m_2)\Delta^{m_2}\varphi_2(x)+$$
$$+(m_1+m_2-1)_{m_2}\Delta^{m_2}\varphi_2(x+m_1-1)\Delta^{m_1}\varphi_1(x),$$

e riducendo:

$$\Delta^{m_1+m_2}[\varphi_1(x)\varphi_2(x)] = \frac{(m_1+m_2)!}{m_1!\ m_2!}\Delta^{m_1}\varphi_1(x)\Delta^{m_2}\varphi_2(x).$$

Così pure, sostituendo nell'espressione della differenza m-esima del prodotto di tre funzioni, $m_1+m_2+m_3$ invece di m e ragionando analogamente, si conclude che si annullano tutti i termini, salvo il termine

$$(m_1+m_2+m_3-1)_{m_1}\Delta^{m_1}\varphi_1(x+m_2+m_3)\Delta^{m_2+m_3}[\varphi_2(x)\varphi_3(x)]$$

del primo sviluppo ed il termine

$$(m_1+m_2+m_3-1)_{m_2+m_3}\Delta^{m_2+m_3}[\varphi_2(x+m_1-1)\varphi_3(x+m_1-1)]\Delta^{m_1}\varphi_1(x)$$

del secondo, e quindi:

$$\Delta^{m_1+m_2+m_3}[\varphi_1(x)\varphi_2(x)\varphi_3(x)]=(m_1+m_2+m_3)_{m_1}\Delta^{m_1}\varphi_1(x)\Delta^{m_2+m_3}[\varphi_2(x)\varphi_3(\varphi)],$$

e pel risultato già ottenuto, sostituendo e riducendo

$$\Delta^{m_1+m_2+m_3}[\varphi_1(x)\varphi_2(x)\varphi_3(x)]=\frac{(m_1+m_2+m_3)!}{m_1!\ m_2!\ m_3!}\Delta^{m_1}\varphi_1(x)\Delta^{m_2}\varphi_2(x)\Delta^{m_3}\varphi_3(x).$$

Ammesso perciò

$$\Delta^{m_2+\ldots+m_n}[\varphi_2(x)\ldots\varphi_n(x)]=\frac{(m_2+\ldots+m_n)!}{m_2!\ldots m_n!}\Delta^{m_2}\varphi_2(x)\ldots\Delta^{m_n}\varphi_n(x),$$

si sostituisca $m_1+m_2+\ldots+m_n$ invece di m nell'espressione della differenza m-esima del prodotto di n funzioni, e si conclude che si annullano tutti i termini, salvo il termine

$$(m_1+\ldots+m_n-1)_{m_1}\Delta^{m_1}\varphi_1(x+m_2+\ldots+m_n)\Delta^{m_2+\ldots+m_n}[\varphi_2(x)\ldots\varphi_n(x)]$$

del primo sviluppo ed il termine

$$(m_1+\ldots+m_n-1)_{m_2+\ldots+m_n}\Delta^{m_2+\ldots+m_n}[\varphi_2(x+m_1-1)\ldots\varphi_n(x+m_1-1)]\Delta^{m_1}\varphi_1(x)$$

del secondo, ed essendo per definizione

$$\Delta^{m_1}\varphi_1(x+m_2+\ldots+m_n)=\Delta^{m_1}\varphi_1(x)$$
$$\Delta^{m_1+\ldots+m_n}[\varphi_2(x+m_1-1)\ldots\varphi_n(x+m_1-1)]=\Delta^{m_2+\ldots+m_n}[\varphi_2(x)\ldots\varphi_n(x)],$$

si ha

$$\Delta^{m_1+\ldots+m_n}[\varphi_1(x)\ldots\varphi_n(x)]=(m_1+\ldots+m_n)_{m_1}\Delta^{m_1}\varphi_1(x)\Delta^{m_2+\ldots+m_n}[\varphi_2(x)\ldots\varphi_n(x)],$$

e sostituendo e riducendo si ottiene la formola (21).

La stessa formola si può ottenere direttamente dalla formola (13). Infatti:

$$\Delta^m[\varphi_1(x)\ldots\varphi_n(x)]=\Sigma\frac{m!}{(m-\alpha_1)!\,(\alpha_1-\alpha_2)!\ldots(\alpha_{n-2}-\alpha_{n-1})!\,\alpha_{n-1}!}\cdot$$
$$\cdot\,\Delta^{m-\alpha_1}\varphi_1(x)\Delta^{\alpha_1-\alpha_2}\varphi_2[x+(m-\alpha_1)h]\ldots\Delta^{\alpha_{n-1}}\varphi_n[x+(m-\alpha_{n-1})h],$$

in cui si vede che il denominatore del coefficiente è il prodotto dei fattoriali degl'indici delle Δ, e sostituendo $m_1+\ldots+m_n$ invece di m, per essere, per ipotesi, $\varphi_i(x)$ una progressione aritmetica d'ordine m_i, è necessario che, perchè il fattore

$$\Delta^{\alpha_{i-1}-\alpha_i}\varphi_i[x+(m_1+\ldots+m_n-\alpha_{i-1})h]$$

non si annulli, si abbia sempre

$$\alpha_{i-1}-\alpha_i\leq m_i\,,$$

e riguardando al modo della variazione di tutte le α, si conchiude che dev'essere

$$\alpha_{i-1} - \alpha_i = m_i\,;$$

ovvero, si deve avere contemporaneamente, per l'ipotesi fatta:

$$\begin{aligned} m_1 + \ldots + m_n - \alpha_1 &\leq m_1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 &\leq m_2 \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots \\ \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} &\leq m_{n-1} \\ \alpha_{n-1} &\leq m_n\,, \end{aligned}$$

e la somma dei primi dev'essere sempre

$$m_1 + \ldots + m_n\,,$$

e perciò sarà:

$$\begin{aligned} m_1 + \ldots + m_n - \alpha_1 &= m_1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 &= m_2 \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots \\ \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} &= m_{n-1} \\ \alpha_{n-1} &= m_n\,, \end{aligned}$$

e quindi sostituendo si ha la formola (21).

Se

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n\,,$$

dalla stessa formola si ottiene l'ordine e la differenza costante della potenza n-esima d'una progressione aritmetica d'ordine m, cioè:

$$\Delta^{mn}[\varphi(x)]^n = \frac{(mn)!}{(m!)^n}[\Delta^m\varphi(x)]^n\,. \tag{22}$$

17. Escludendo che la differenza costante sia nulla, i più semplici valori che possono attribuirsi alle $m+1$ quantità affetto indipendenti l'una dall'altra (in un ordine però prestabilito) e che sono necessarie e sufficienti a determinare un'unica progressione d'ordine m insieme con le m progressioni che ne derivano, sono dati dalle due relazioni:

$$\begin{gathered} a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0 \\ a_m = 1\,, \end{gathered}$$

le quali determinano e definiscono i numeri figurati d'ordine m.

Assumendo come primo termine $\Delta^r a_0$, dalle formole (15) e (16) si deduce:

$$\Delta^r a_{m-r+p} = \binom{m-r+p}{m-r}$$

$$\Delta^r a_{-p-1} = (-1)^{m-r}\binom{m-r+p}{m-r}$$

e quindi

$$\Delta^r a_{m-r+p} = (-1)^{m-r}\Delta^r a_{-p-1}\,.$$

Il simbolo $\binom{n}{m}$ definito dalla relazione

$$\binom{n}{m}=\frac{(n)(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m},$$

in cui m è un intero positivo ed n un intero positivo o negativo, è sufficiente a rappresentare tutt'i numeri figurati, ammettendosi per convenzione

$$\binom{n}{0}=1.$$

La serie completa dei numeri figurati d'ordine $m-r$ è dunque:

$$\ldots,\binom{-p-1}{m-r},\ldots,\binom{-1}{m-r},\binom{0}{m-r},\ldots$$
$$\ldots,\binom{m-r-1}{m-r},\binom{m-r}{m-r},\ldots,\binom{m-r+p}{m-r},\ldots$$

e si può dire che rispetto ai termini del periodó centrale, tutti e solamente nulli:

$$\binom{0}{m-r},\ldots,\binom{m-r-1}{m-r},$$

i numeri figurati si sviluppano simmetricamente verso le due direzioni opposte, essendo uguali e dello stesso segno od uguali e di segno contrario, secondo che $m-r$ è pari o dispari.

Supponendo adesso che le $\varphi(x)$ siano numeri figurati, le formole (21) e (22) diventano:

$$\Delta^{m_1+\ldots+m_n}\left\{\binom{x}{m_1}\ldots\binom{x}{m_n}\right\}=\frac{(m_1+\ldots+m_n)!}{m_1!\ldots m_n!} \tag{23}$$

e

$$\Delta^{mn}\left\{\binom{x}{m}\right\}^n=\frac{(mn)!}{(m!)^n}=\binom{m}{m}\binom{2m}{m}\ldots\binom{nm}{m}, \tag{24}$$

e se si esprime la differenza costante data da (23) in funzione dei termini della progressione prodotto delle n serie di numeri figurati, si ha la relazione, qualunque intero sia x positivo o negativo

$$\frac{(m_1+\ldots+m_n)!}{m_1!\ldots m_n!}=\sum_{i=0}^{m_1+\ldots+m_n}(-1)^i(m_1+\ldots+m_n)_{m_1+\ldots+m_n-i}\binom{x-i}{m_1}\ldots\binom{x-i}{m_n} \tag{25}$$

18. È evidente che qualunque sia n, le prime m differenze di $\left\{\binom{0}{m}\right\}^n$ sono tutte nulle; se $n=2$ le altre $m+1$ saranno:

$$\binom{m}{0}\binom{m}{0},\ \binom{m}{1}\binom{m+1}{1},\ldots,\binom{m}{m}\binom{2m}{m},$$

cosicchè

$$\left\{\binom{x}{m}\right\}^2=\binom{x}{m}\binom{m}{0}\binom{m}{0}+\binom{x}{m+1}\binom{m+1}{1}\binom{m}{1}+\ldots+\binom{x}{2m}\binom{2m}{m}\binom{m}{m}. \quad (26)$$

Infatti l'espressione del termine di posto $x+1$ in funzione delle differenze del termine di posto $x-m+1$, è

$$\binom{x}{m}=\sum_{i=0}^{m}\binom{x-m}{i}\binom{m}{i},$$

e quindi:

$$\left\{\binom{x}{m}\right\}^2=\binom{x}{m}\sum_{i=0}^{m}\binom{x-m}{i}\binom{m}{i}=\sum_{i=0}^{m}\binom{x}{m}\binom{x-m}{i}\binom{m}{i}$$

che può scriversi:

$$\left\{\binom{x}{m}\right\}^2=\sum_{i=0}^{m}\binom{x}{m+i}\binom{m+i}{i}\binom{m}{i},$$

che è precisamente la formola (26).

Come conseguenza

$$\sum_{x=0}^{x}\left\{\binom{x}{m}\right\}^2=\sum_{i=0}^{m}\binom{x+1}{m+1+i}\binom{m+i}{i}\binom{m}{i}. \quad (27)$$

19. Se nella formola (24) si fa $m=1$, si ha il risultato noto:

$$\Delta^n x^n = n\,!$$

e quindi

$$\Delta^m x^n = 0\,, \qquad \text{per} \qquad m > n\,.$$

Si ha:

$$\Delta^m x^n = (m+x)\,\Delta^m x^{n-1} + m\,\Delta^{m-1}x^{n-1}\,. \quad (28)$$

Infatti, per la formola (5)

$$(m+x)\Delta^m x^{n-1} = (-1)^0(m+x)(m)_0(x+m)^{n-1}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^i(m+x)(m)_i(x+m-i)^{n-1}+\ldots+(-1)^m(m+x)(m)_m x^{n-1},$$
$$m\Delta^{m-1}x^{n-1} = (-1)^0(m)(m-1)_0(x+m-1)^{n-1}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{i-1}(m)(m-1)_{i-1}(x+m-i)^{n-1}+\ldots+(-1)^{m-1}(m)(m-1)_{m-1}x^{n-1},$$

e sommando il termine $i+1$ del primo sviluppo col termine i del secondo, si ha

$$(-1)^i(m+x)(m)_i(x+m-i)^{n-1}+(-1)^{i-1}(m)(m-1)_{i-1}(x+m-i)^{n-1}=$$
$$=(-1)^i(x+m-i)^{n-1}\left[(m+x)(m)_i-(m)(m-1)_{i-1}\right]=$$
$$=(-1)^i(x+m-i)^{n-1}\left[(m+x)(m)_i-i\,.\,\frac{m}{i}\,(m-1)_{i-1}\right]=$$
$$=(-1)^i(x+m-i)^{n-1}\left[(m+x-i)(m)_i\right]=$$
$$=(-1)^i(m)_i(x+m-i)^n,$$

che per la stessa formola (5) è il termine generale dello sviluppo di $\Delta^m x^n$.

Per $x=0$ si ha una nota formola.

20. Ponendo $m+n$ invece di n, $\Delta^m x^{m+n}$ è divisibile per $m!$ ed il quoziente si può trasformare in un polinomio intero di grado n e si trova

$$\begin{aligned}\frac{\Delta^m x^{m+n}}{m!} = &\binom{m+n}{n} x^n + \\ &+\binom{m+n}{n+1}\binom{n+1}{2} x^{n-1} + \\ &+\binom{m+n}{n+1}\binom{n+1}{3}\frac{3m+1}{4} x^{n-2} + \\ &+\binom{m+n}{n+1}\binom{n+1}{4}\binom{m+1}{2} x^{n-3} + \\ &+\binom{m+n}{n+1}\binom{n+1}{5}\frac{15m^3+30m^2+5m-2}{48} x^{n-4} + \\ &+\binom{m+n}{n+1}\binom{n+1}{6}\binom{m+1}{2}\frac{3m^2+7m-2}{8} x^{n-5} + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,\end{aligned} \tag{29}$$

da cui per $x=0$, si deduce:

$$\frac{\Delta^m 0^m}{m!} = 1,$$

$$\frac{\Delta^m 0^{m+1}}{m!} = \binom{m+1}{2},$$

$$\frac{\Delta^m 0^{m+2}}{m!} = \binom{m+2}{3}\frac{3m+1}{4},$$

$$\frac{\Delta^m 0^{m+3}}{m!} = \binom{m+3}{4}\binom{m+1}{2},$$

$$\frac{\Delta^m 0^{m+4}}{m!} = \binom{m+4}{5}\frac{15m^3+30m^2+5m-2}{48},$$

$$\frac{\Delta^m 0^{m+5}}{m!} = \binom{m+5}{6}\binom{m+1}{2}\frac{3m^2+7m-2}{8},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

VITO MELFI MOLÈ.

LA TRASFORMAZIONE PER RAGGI VETTORI RECIPROCI
e le proprietà metriche delle figure

1. Sieno P_1 e P_2 due punti qualunque di un piano e P'_1, P'_2 i punti del piano stesso che loro corrispondono nella trasformazione per raggi vettori reciproci, avente per polo un certo punto O, supponendo, per semplicità, il modulo d'inversione uguale ad 1.

Poichè si ha: (*)

$$\overline{OP_1} \,.\, \overline{OP'_1} = \overline{OP_2} \,.\, \overline{OP'_2}$$

i triangoli OP_1P_2 e $OP'_2P'_1$ sono simili e quindi è

$$|\overline{OP_1}| : |\overline{P_1P_2}| = |\overline{OP'_2}| : |\overline{P'_2P'_1}|, \qquad \text{da cui:} \qquad |\overline{P_1P_2}| = \frac{|\overline{P'_2P'_1}| \,.\, |\overline{OP_1}|}{|\overline{OP_2'}|},$$

ossia

$$|\overline{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}| = \frac{|\overline{\mathbf{P}'_2\mathbf{P}'_1}|}{|\overline{\mathbf{OP}'_1}| \,.\, |\overline{\mathbf{OP}'_2}|}. \tag{1}$$

Abbiamo tacitamente supposto che P_1 e P_2 fossero punti diversi da O; nel caso invece in cui uno di questi punti, per es. P_2, coincidesse con O, allora è chiaro che, invece della (1), sussisterebbe l'altra:

$$|\overline{\mathbf{OP}_1}| = \frac{1}{|\overline{\mathbf{OP}'_1}|}. \tag{2}$$

Le (1) (2), che dànno la distanza di due punti in funzione di quella dei punti corrispondenti nella trasformazione per raggi vettori reciproci e dei raggi vettori relativi a questi ultimi, permettono che da certe proprietà metriche di una data figura se ne deducano altre per la figura trasformata. Appunto è di questa applicazione delle formule (1) (2), sopra stabilite, che voglio occuparmi in questa noticina; (**) nei §§ 2-4 riunisco quelle applicazioni che si riferiscono alla Geometria elementare; nei §§ seguenti quelle che riguardano le proprietà focali di alcune curve algebriche.

***

2. È noto come nella trasformazione per raggi vettori reciproci ad una retta non passante per il polo corrisponda una circonferenza che contiene il polo.

Premesso ciò, mostriamo come dalla relazione

$$|\overline{P_1P_2}| + |\overline{P_2P_3}| = |\overline{P_1P_3}|, \tag{3}$$

(*) In tutta questa noticina il simbolo $\overline{AB}$ indicherà la *misura* del segmento AB e con $|\overline{AB}|$ indicheremo il valore assoluto di tale misura.

(**) L'idea mi è stata suggerita dalla dimostrazione del teor. di Tolomeo usata dal BALTZER nei suoi *Elementi di Matematica* (trad. CREMONA), Parte IV, § 14, e da un accenno alla presente teoria che si trova in SALMON (trad. CHEMIN), *Courbes planes*, § 281.

la quale sussiste se P_1, P_2, P_3 sono tre punti di una retta r che si succedono nell'ordine scritto, (*) si possa dedurre per la (1) il teorema di Tolomeo, trasformando la r per raggi vettori reciproci, preso per polo un punto qualunque esterno ad essa.

Ed infatti notiamo anzitutto che se P_1, P_2, P_3 si succedono nell'ordine scritto su la retta a cui appartengono, anche O, P'_1, P'_2, P'_3 si succederanno in quest'ordine su la circonferenza trasformata della r.

Applicando la (1) alla (3), si ha

$$\frac{|\overline{P'_3P'_1}|}{|\overline{OP'_3}|\,.\,|\overline{OP'_1}|}=\frac{|\overline{P'_2P'_1}|}{|\overline{OP'_2}|\,.\,|\overline{OP'_1}|}+\frac{|\overline{P'_3P'_2}|}{|\overline{OP'_3}|\,.\,|\overline{OP'_2}|},$$

cioè:

$$|\overline{P'_3P'_1}|\,.\,|\overline{OP'_2}|=|\overline{P'_2P'_1}|\,.\,|\overline{OP'_3}|+|\overline{P'_3P'_2}|\,.\,|\overline{OP'_1}| \tag{4}$$

che esprime appunto il teorema di Tolomeo.

Più in generale, dalla relazione

$$|\overline{P_1P_n}|=|\overline{P_1P_2}|+|\overline{P_2P_3}|+\ldots+|\overline{P_{n-1}P_n}|,$$

che lega le distanze di n punti collineari disposti sulla retta nell'ordine $P_1, P_2, P_3 \ldots P_{n-1}, P_n$, si ha, per la (1), l'altra

$$\frac{|\overline{P'_nP'_1}|}{|\overline{OP'_n}|\,.\,|\overline{OP'_1}|}=\frac{|\overline{P'_2P'_1}|}{|\overline{OP'_2}|\,.\,|\overline{OP'_1}|}+\frac{|\overline{P'_3P'_2}|}{|\overline{OP'_3}|\,.\,|\overline{OP'_2}|}+\ldots+\frac{|\overline{P'_nP'_{n-1}}|}{|\overline{OP'_n}|\,.\,|\overline{OP'_{n-1}}|}, \tag{5}$$

che lega le distanze di $n+1$ punti conciclici O, $P'_1, P'_2 \ldots P'_n$, che si succedono su la circonferenza nell'ordine scritto.

La (5) può considerarsi come una generalizzazione del teorema di Tolomeo (4) ai poligoni, di più di quattro lati, iscritti in un circolo.

In particolare se ABCDE è un pentagono iscritto in un circolo, si ha per la (5):

$$\frac{|\overline{EB}|}{|\overline{AE}|\,.\,|\overline{AB}|}=\frac{|\overline{CB}|}{|\overline{AC}|\,.\,|\overline{AB}|}+\frac{|\overline{DC}|}{|\overline{AD}|\,.\,|\overline{AC}|}+\frac{|\overline{ED}|}{|\overline{AE}|\,.\,|\overline{AD}|},\ (^{**})$$

ossia:

$$|\overline{AC}|.|\overline{AD}|.|\overline{EB}|=|\overline{AD}|.|\overline{AE}|.|\overline{CB}|+|\overline{AB}|.|\overline{AE}|.|\overline{DC}|+|\overline{AB}|.|\overline{AC}|.|\overline{ED}|. \tag{5'}$$

Per il pentagono regolare, dalla (5'), si ha la relazione

$$d^3=3l^2d+l^3$$

che lega le misure l e d rispettivamente del lato e della diagonale.

(*) V. nota (*), pag. precedente.

(**) Cfr. *Supplemento al Periodico di Matematica*, Anno VII, fasc. VI; quist. 591.

3. Mostriamo ora come, per le (1) (2), dal teorema di Stewart si possa dedurre quello di Legendre.

Essendo ABC un triangolo qualunque ed M un punto del lato BC, si ha

$$|\overline{AB}|^2 . |\overline{MC}| + |\overline{AC}|^2 . |\overline{MB}| = |\overline{BC}| . (|\overline{AM}|^2 + |\overline{BM}| . |\overline{MC}|) . \qquad (6)$$

(*teor. di Stewart*).

Applicando alla (6) le formule (1) (2), quando s' immagini di trasformare la figura per raggi vettori reciproci, prendendo per polo il punto A, avremo:

$$\frac{1}{|\overline{A B'}|^2} \cdot \frac{|\overline{C'M'}|}{|\overline{AC'}| . |\overline{AM'}|} + \frac{1}{|\overline{AC'}|^2} \cdot \frac{|\overline{B'M'}|}{|\overline{AB'}| . |\overline{AM'}|} =$$

$$= \frac{|\overline{C'B'}|}{|\overline{AC'}| . |\overline{AB'}|} \cdot \left(\frac{1}{|\overline{AM'}|} + \frac{|\overline{M'B'}| . |\overline{C'M'}|}{|\overline{AM'}|^2 . |\overline{AB'}| . |\overline{AC'}|} \right)$$

cioè:

$$|\overline{AM'}| . (|\overline{C'M'}| . |\overline{AC'}| + |\overline{B'M'}| . |\overline{AB'}|) = |\overline{C'B'}| . (|\overline{AB'}| . |\overline{AC'}| + |\overline{M'B'}| . |\overline{M'C'}|) .$$

E siccome, per l'osservazione già fatta, A, B', M', C' sono punti conciclici, ed anzi, vertici di un quadrilatero, non intrecciato, inscritto in un circolo, AB', B'M', M'C' e C'A sono lati di questo quadrilatero e AM' e C'B' ne sono le diagonali.

Ponendo, per semplicità:

$$|\overline{AB'}| = a , \ |\overline{B'M'}| = b , \ |\overline{M'C'}| = c , \ |\overline{C'A'}| = d , \ |\overline{B'C'}| = e , \ |\overline{AM'}| = f ,$$

la precedente relazione diviene:

$$f(cd + ab) = e\,(ad + bc) ,$$

ossia

$$\frac{ab + cd}{ad + bc} = \frac{e}{f} ,$$

che esprime appunto il teorema di Legendre.

4. Si consideri una trasversale di un triangolo $P_1P_2P_3$, la quale incontri i lati P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2, o i loro prolungamenti, rispettivamente in M_1, M_2 ed M_3; è nota la relazione

$$\frac{\overline{P_2M_1}}{\overline{M_1P_3}} \cdot \frac{\overline{P_3M_2}}{\overline{M_2P_1}} \cdot \frac{\overline{P_1M_3}}{\overline{M_3P_2}} = -1 \quad (7)$$

(*teor. di Menelao.*)

4.bis Sia S un punto qualunque del piano di un triangolo $P_1P_2P_3$ e indichiamo rispettivamente con Q_1, Q_2, Q_3 le intersezioni delle coppie di rette (SP_1, P_2P_3), (SP_2, P_3P_1), (SP_3, P_1P_2); è nota la relazione

$$\frac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{Q_1P_3}} \cdot \frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{Q_2P_1}} \cdot \frac{\overline{P_1Q_3}}{\overline{Q_3P_2}} = 1 \quad (7^{bis})$$

(*teor. di Ceva.*)

Applicando a questa la (1), se il polo O dell'inversione è un punto qualunque del piano del triangolo, diverso però dai punti $P_1, P_2, \ldots M_3$, e se indichiamo con $P'_1, P'_2 \ldots M'_3$ i punti corrispondenti ai primi, avremo, dopo eseguite le semplificazioni:

$$\frac{\overline{M'_1P'_2}}{\overline{P'_3M'_1}} \cdot \frac{\overline{M'_2P'_3}}{\overline{P'_1M'_2}} \cdot \frac{\overline{M'_3P'_1}}{\overline{P'_2M'_3}} = -1,$$

che al pari della (7), può mettersi sotto la forma:

$$\overline{P'_1M'_3} \cdot \overline{P'_2M'_1} \cdot \overline{P'_3M'_2} = \\ = \overline{P'_1M'_2} \cdot \overline{P'_2M'_3} \cdot \overline{P'_3M'_1}. \quad (8)$$

Siccome, essendo (P_2, P_3, M_1), (P_3, P_1, M_2), (P_1, P_2, M_3), (M_1, M_2, M_3) gruppi di punti collineari, (O, P'_2, P'_3, M'_1), (O, P'_3, P'_1, M'_2), (O, P'_1, P'_2, M'_3), (O, M'_1, M'_2, M'_3) debbono essere gruppi di punti conciclici, la (8) esprime il teorema:

Se c_1, c_2, c_3 sono tre circonferenze passanti per uno stesso punto (O) *e con P'_1, P'_2, P'_3 si indicano rispettivamente le ulteriori intersezioni di (c_2, c_3), (c_3, c_1), (c_1, c_2), e se una quarta circonferenza c, pure passante per O, incontra ulteriormente le altre tre nei punti M'_1, M'_2, M'_3 rispettivamente, fra le distanze dei suddetti punti esiste la relazione* (8).

Applicando a questa la (1), se il polo O dell'inversione è un punto qualunque del piano del triangolo, diverso però dai punti S, $P_1, P_2, \ldots Q_3$, e se indichiamo con $S', P'_1, P'_2, \ldots Q'_3$ i punti corrispondenti ai primi, avremo, dopo eseguite le semplificazioni:

$$\frac{\overline{Q'_1P'_2}}{\overline{P'_3Q'_1}} \cdot \frac{\overline{Q'_2P'_3}}{\overline{P'_1Q'_2}} \cdot \frac{\overline{Q'_3P'_1}}{\overline{P'_2Q'_3}} = 1,$$

che, al pari della (7^{bis}), può mettersi sotto la forma:

$$\overline{P'_1Q'_3} \cdot \overline{P'_2Q'_1} \cdot \overline{P'_3Q'_2} = \\ = \overline{Q'_1P'_3} \cdot \overline{Q'_2P'_1} \cdot \overline{Q'_3P'_2}. \quad (8^{bis})$$

Siccome, essendo (P_2, P_3, Q_1), (P_3, P_1, Q_2), (P_1, P_2, Q_3), (P_1, Q_1, S), (P_2, Q_2, S), (P_3, Q_3, S) gruppi di punti collineari, (O, P'_2, P'_3, Q'_1), $(O, P'_3, P'_1, Q'_2) \ldots (O, P'_3, Q'_3, S)$ debbono essere gruppi di punti conciclici, la (8^{bis}) esprime il teorema:

Se c_1, c_2, c_3 sono tre circonferenze passanti per uno stesso punto O e con P'_1, P'_2, P'_3 si indicano le ulteriori intersezioni di (c_2, c_3), (c_3, c_1), (c_1, c_2), e se poi si costruiscono le circonferenze $c'_1 \equiv (O, S, P'_1)$, $c'_2 \equiv (O, S, P'_2)$, $c'_3 \equiv (O, S, P'_3)$, essendo S un punto qualunque del piano, diverso da $O, P'_1 \ldots$, e con Q'_1, Q'_2, Q'_3 si indicano le ulteriori intersezioni di (c_1, c'_1), (c_2, c'_2), (c_3, c'_3), fra le distanze dei suddetti punti sussiste la relazione (8^{bis}).

Nei casi particolari, per ora esclusi, i teoremi vengono modificati, come facilmente si può vedere; per es. dal teorema di Ceva, se per polo dell'inversione si sceglie il punto S, si ha il teorema:

Se c_1, c_2, c_3 sono tre circonferenze passanti per uno stesso punto O e con P'_1, P'_2, P'_3 si indicano le ulteriori intersezioni di (c_2, c_3), (c_3, c_1), (c_1, c_2), con Q'_1, Q'_2, Q'_3 le intersezioni delle rette OP'_1, OP'_2, OP'_3 rispettivamente con le circonferenze c_1, c_2, c_3, fra le distanze dei suddetti punti sussiste la relazione (8^{bis}).

Per amore di brevità ometto gli altri teoremi che, analogamente all'ultimo enunciato, si potrebbero dedurre dai teoremi di Menelao e di Ceva, prendendo per polo della trasformazione uno dei punti particolari, esclusi prima.

***

5. Consideriamo una curva piana, rappresentata, in coordinate rettangolari, dalla equazione

$$f(x, y) = 0 . \tag{9}$$

Supposto che il polo sia $O \equiv (m, n)$, e supposto anche che il modulo dell'inversione sia l'unità, è noto che per ottenere l'equazione

$$\varphi(x', y') = 0 \tag{10}$$

della trasformata per raggi vettori reciproci della (9), occorre servirsi delle formule:

$$x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2} + m , \qquad y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2} + n . \tag{11}$$

Per le formule (1) (2) del § 1, da alcune proprietà metriche che sussistono per la curva rappresentata dalla (9), potremo trovarne altre che valgano per quella rappresentata dalla (10). È di ciò appunto che trattano i §§ seguenti, nei quali, dalle note proprietà focali delle coniche, vengono dedotte altre proprietà relative a cubiche o quartiche particolari.

6. Applichiamo ciò che è stato detto nel § precedente al caso della iperbole; supponiamo cioè che la (9) sia l'equazione

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 .$$

Mediante le (11), troviamo facilmente per la trasformata l'equazione

$$(x'^2 + y'^2)(b^2m^2 - a^2n^2 - a^2b^2) + 2(x'^2 + y'^2)(b^2mx' - a^2ny') + \\ + (b^2x'^2 - a^2y'^2) = 0 , \tag{12}$$

la quale, in generale, rappresenta una quartica bicircolare con un nodo nell'origine.

Se il polo (m, n) dell'inversione è un punto qualunque dell'iperbole, allora, essendo

$$b^2m^2 - a^2n^2 - a^2b^2 = 0 ,$$

la (12) si riduce a rappresentare una cubica e precisamente una strofoide. (Se il polo è un vertice dell'iperbole, la strofoide è retta; negli altri casi è obliqua.)

Se (m, n) è invece un punto che non appartiene all'iperbole, essendo

$$b^2m^2 - a^2n^2 - a^2b^2 \neq 0 ,$$

potremo porre:

$$\frac{b^2 m}{b^2 m^2 - a^2 n^2 - a^2 b^2} = \mathrm{A}\,; \qquad \frac{a^2 n}{b^2 m^2 - a^2 n^2 - a^2 b^2} = \mathrm{B}\,;$$

$$\frac{\mathrm{A}}{m} = \mathrm{C}\,; \qquad \frac{\mathrm{B}}{n} = \mathrm{D}$$

e la (12) quindi prende la forma:

$$(x'^2 + y'^2)^2 + 2(x'^2 + y'^2)(\mathrm{A}x' - \mathrm{B}y') + (\mathrm{C}x'^2 - \mathrm{D}y'^2 = 0\,.$$

7. Ciò premesso, consideriamo la nota relazione

$$|\overline{\mathrm{PF}_1}| - |\overline{\mathrm{PF}_2}| = \pm\, 2a\,, \tag{13}$$

che esprime la proprietà caratteristica principale dell'iperbole, cioè, che " la differenza fra le distanze (considerate in valore assoluto) che un punto qualunque della curva ha dai due fuochi è costante ed eguale all'asse reale ".

Applichiamo alla (13) la (1), prendendo per polo dell'inversione un punto qualunque O del piano dell'iperbole, diverso da F_1 e F_2.

Indicando con le stesse lettere munite di apici i punti corrispondenti nell'inversione, avremo:

$$\frac{|\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{P}'}|}{|\overline{\mathrm{OP}'}| \,.\, |\overline{\mathrm{OF}'_1}|} - \frac{|\overline{\mathrm{F}'_2\mathrm{P}'}|}{|\overline{\mathrm{OP}'_1}| \,.\, |\overline{\mathrm{OF}'_2}|} = \pm\, 2a\,. \text{ (*)} \tag{14}$$

E poichè si ha:

$$\overline{\mathrm{OF}_1} = \pm\sqrt{(m+ae)^2 + n^2} = \sigma_1\,, \qquad \overline{\mathrm{OF}_2} = \pm\sqrt{(m-ae)^2 + n^2} = \sigma_2\,,$$

sarà

$$|\overline{\mathrm{OF}'_1}| = \frac{1}{\sigma_1}\,; \qquad |\overline{\mathrm{OF}'_2}| = \frac{1}{\sigma_2}\,.$$

Ponendo

$$\left.\begin{array}{l} |\overline{\mathrm{F}'_1\mathrm{P}'}| = \rho'_1\,, \quad |\overline{\mathrm{F}'_2\mathrm{P}'}| = \rho'_2\,, \quad |\overline{\mathrm{OP}'}| = \rho'\,, \end{array}\right\} \tag{15}$$

la (14) diviene

$$\sigma_1\rho'_1 - \sigma_2\rho'_2 = \pm\, 2a\,\rho'\,. \tag{16}$$

Riguardo al doppio segno è bene notare che, per la (13), dovremo scegliere il superiore o l'inferiore, secondo che P appartiene al ramo dell'iperbole che ha F_2 come punto interno o a quello invece che ha come punto interno F_1.

La (16) esprime una proprietà metrica delle curve inverse di iperbole, proprietà metrica che lega le distanze di un punto qualunque della curva da tre punti speciali *(fuochi)* (**) F'_1, F'_2, O del piano della curva stessa.

(*) Come nella (13) anche in questa relazione intendiamo col simbolo $|\overline{\mathrm{AB}}|$ indicare la misura del segmento AB, considerata però in valore assoluto.

(**) V. Salmon (trad. Chemin), *Courbes planes*, IV, 138 e VI, 354.

Applichiamo i resultati ottenuti ad alcuni casi particolari.

a) Supponiamo

$$m = n = 0,$$

cioè supponiamo che il polo dell'inversione sia il centro C della iperbole: in tal caso la (12) si riduce alla equazione

$$(x'^2 + y'^2) = \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}. \tag{17}$$

Si ha poi:

$$\overline{\mathrm{CF}}_1 = ae, \qquad \overline{\mathrm{CF}}_2 = -ae$$

$$\overline{\mathrm{CF}'}_1 = \frac{1}{ae}, \qquad \overline{\mathrm{CF}'}_2 = -\frac{1}{ae}$$

e quindi la (16) diviene:

$$ae\,\rho'_1 - ae\,\rho'_2 = \pm 2a\,\rho',$$

cioè

$$\rho'_1 - \rho'_2 = \pm \frac{2}{e}\,\rho', \tag{18}$$

dunque: ***In una curva inversa d'iperbole, essendo polo dell'inversione il centro dell'iperbole stessa, la differenza (in valore assoluto) fra le distanze di un punto qualunque*** P' ***della curva da due punti fissi*** F'_1, F'_2 (fuochi) ***è proporzionale alla distanza del punto*** P' ***dal punto medio*** C' ***del segmento*** $F'_1\,F'_2$; ***il rapporto è*** $\frac{2}{e}$.

Se è $e = \sqrt{2}$, cioè se l'iperbole è equilatera, l'inversa, come si vede dalla (17), che diviene

$$(x'^2 + y'^2)^2 = \frac{1}{a^2}(x'^2 - y'^2), \tag{19}$$

è una lemniscata di Bernoulli, e la (18) dà per questa curva:

$$\rho'_1 - \rho'_2 = \pm \sqrt{2}\,.\,\rho',$$

la quale eguaglianza esprime una nota proprietà della lemniscata, (*) che è un caso particolare del teorema sopra enunciato.

Se è $e = 2$, la (18) diviene:

$$\rho'_1 - \rho'_2 = \pm \rho',$$

quindi può dirsi che: *l'inversa, rispetto al centro, di una iperbole la cui eccentricità è 2, ha la proprietà che in ogni suo punto ha dai punti* F'_1, F'_2, C' *(essendo* C' *medio del segmento* $F'_1\,F'_2$*) distanze tali che la terza è uguale alla differenza delle prime due.*

(*) Il luogo del vertice di un triangolo di cui la base rimane fissa e gli altri due lati b, c e la mediana m verificano la relazione $b - c = m\sqrt{2}$ è una lemniscata di Bernoulli (cfr. per esempio BRIOT et BOUQUET, *Leçons de géometrie analytique*, éd. revue par APPEL, Paris, Delagrave, 1897, p. 31, ex. 9.

Per tale proprietà la curva in questione la direi *lemniscata differenziale.* La sua equazione, come si vede facilmente dalla (17) è

$$(x'^2 + y'^2)^2 = \frac{1}{a^2}(x'^2 - \tfrac{1}{3}y'^2).$$

La proprietà trovata per la lemniscata differenziale è caratteristica. Infatti, se deve essere soddisfatta la (19), cioè $|\overline{P'F'_1}| - |\overline{P'F'_2}| = |\overline{P'C'}|$, essendo P' un punto qualunque della curva e F'_1, F'_2, C' tre punti collineari, fra cui C' è medio del segmento determinato dagli altri due, ponendo $\overline{F'_1C'} = \overline{C'F'_2} = \delta$, se è $P' \equiv (x, y)$, abbiamo:

$$\sqrt{(x-\delta)^2 + y^2} - \sqrt{(x+\delta)^2 + y^2} = \pm\sqrt{x^2 + y^2},$$

da cui

$$(x^2 + y^2)^2 = 4\delta^2(x^2 - \tfrac{1}{3}y^2),$$

che rappresenta una lemniscata differenziale.

Questa curva può definirsi quindi come *luogo del vertice di un triangolo, di cui è fisso il lato opposto e la mediana relativa a questo eguaglia la differenza degli altri due lati.* (V. una mia questione pubblicata in *Mathesis.*) (*)

b) Se prendiamo invece per polo dell'inversione uno dei vertici dell'iperbole, per es. $A \equiv (a, 0)$, cioè se è $m = a$, $n = 0$, la (12) diviene:

$$x'(x'^2 + y'^2) + \frac{1}{2a}x'^2 - \frac{a}{2b^2}y'^2 = 0, \tag{20}$$

che rappresenta una concoide slusiana, dotata di nodo (in A).

Si ha poi:

$$\left.\begin{aligned} \overline{AF}_1 &= a(e-1); & \overline{AF}_2 &= -a(e+1) \\ \overline{AF'}_1 &= \frac{1}{a(e-1)}; & \overline{AF'}_2 &= -\frac{1}{a(e+1)} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

e quindi la (16) diviene:

$$a(e-1)\rho'_1 - a(e+1)\rho'_2 = \pm 2a\rho',$$

cioè

$$(e-1)\rho'_1 - (e+1)\rho'_2 = \pm 2\rho'. \tag{22}$$

In quanto al doppio segno va notato che, siccome al ramo dell'iperbole che ha F_2 come punto interno corrisponde nell'inversione la *foglia* della concoide nodata, per i punti della foglia stessa dovremo scegliere il segno superiore, mentre per gli altri punti della curva dovremo scegliere l'inferiore.

Nel caso in cui l'iperbole data sia equilatera, cioè se è $e = \sqrt{2}$, la trasformata è una strofoide retta, giacchè la (20) diviene:

$$x'(x'^2 + y'^2) + \frac{1}{2a}(x'^2 - y'^2) = 0. \tag{23}$$

La (22) poi prende la forma

$$(\sqrt{2} - 1)\rho'_1 - (\sqrt{2} + 1)\rho'_2 = \pm 2\rho'. \tag{24}$$

(*) MATHESIS. *Recueil mathématique*, publié par M.M. Mansion & Neuberg, 2me Série, T. X, 1900, p. 104, e 3me Série, T. I. 1901, pag. 59.

Poichè per le (15) è

$$\rho'_1 = |\overline{F'_1P'}|, \qquad \rho'_2 = |\overline{F'_2P'}|, \qquad \rho' = |\overline{AP'}|,$$

la (24) ci esprime la seguente proprietà:

Sull'asse di una strofoide retta esistono due punti F'_1, F'_2, *tali che per un punto* P' *qualunque della strofoide si ha,* indicando con A il nodo,

$$(\sqrt{2}-1) . |\overline{F'_1P'}| - (\sqrt{2}+1) |\overline{F'_2P'}| = \pm 2 |\overline{AP'}|, \tag{25}$$

dando al doppio segno il significato sopra attribuitogli.

Facilmente possono ottenersi le coordinate di F'_1 e F'_2 (considerando A come origine); per le (21) si ha infatti:

$$\overline{AF'_1} = \frac{1}{a(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{a}; \qquad \overline{AF'_2} = -\frac{1}{a(\sqrt{2}+1)} = -\frac{\sqrt{2}-1}{a}.$$

Indicando con α la distanza del vertice della strofoide dal nodo *(parametro)*, cioè ponendo (23) $\alpha = \frac{1}{2a}$, le precedenti divengono:

$$\overline{AF'_1} = 2\alpha(\sqrt{2}+1), \qquad \overline{AF'_2} = -2a(\sqrt{2}-1). \tag{26}$$

La proprietà trovata è caratteristica per la strofoide. Infatti avendo sopra una retta (asse x) tre punti: $A \equiv [0, 0]$, $F'_1 \equiv [2\alpha(\sqrt{2}+1), 0]$, $F'_2 \equiv [-2\alpha(\sqrt{2}-1), 0]$, e supponendo gli assi x, y rettangolari, cerchiamo il luogo dei punti P' che sodisfano la (25); avremo:

$$(\sqrt{2}-1)\sqrt{[x-2\alpha(1+\sqrt{2})]^2+y^2} - (\sqrt{2}+1)\sqrt{[x+2\alpha(\sqrt{2}-1)]^2+y^2} = \pm 2\sqrt{x^2+y^2}.$$

e successivamente:

$$\begin{aligned}
&(3-2\sqrt{2}) . [x^2+y^2-4\alpha x(1+\sqrt{2})+4\alpha^2(3+2\sqrt{2})] + \\
&+(3+2\sqrt{2}) . [x^2+y^2-4\alpha x(\sqrt{2}-1)+4\alpha^2(3-2\sqrt{2})] - \\
&-2\sqrt{[x^2+y^2-4\alpha x(1+\sqrt{2})+4\alpha^2(3+2\sqrt{2})] . [x^2+y^2+4\alpha x(\sqrt{2}-1)+4\alpha^2(3-2\sqrt{2})]} = \\
&\qquad = 4(x^2+y^2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&3(x^2+y^2-4\alpha x+12\alpha^2) + 2\sqrt{2}\,(4\alpha x\sqrt{2}-8\alpha^2\sqrt{2}) - \\
&-\sqrt{(x^2+y^2-4\alpha x+12\alpha^2)^2-(4\alpha x\sqrt{2}-8\alpha^2\sqrt{2})^2} = 2(x^2+y^2);
\end{aligned}$$

$$x^2+y^2+4\alpha x+4\alpha^2 = \sqrt{(x^2+y^2-4\alpha x+12\alpha^2)^2-32\alpha^2(x-2\alpha)^2};$$

$$(x^2+y^2+4\alpha x+4\alpha^2)^2-(x^2+y^2-4\alpha x+12\alpha^2)^2 = -32\alpha^2(x-2\alpha)^2;$$

$$(x^2+y^2+8\alpha^2)(x-\alpha) = -2\alpha(x-2\alpha)^2$$

e finalmente:

$$x(x^2+y^2)+\alpha(x^2-y^2) = 0$$

che rappresenta una strofoide retta.

*

Trattiamo ora il caso particolare, che finora abbiamo escluso; supponiamo cioè che il polo dell'inversione sia uno dei fuochi dell'iperbole, per es. $F_1 \equiv (ae, 0)$.

In tal caso la (12) diviene

$$b^4(x'^2+y'^2)^2 + 2aeb^2x'(x'^2+y'^2) + b^2x'^2 - a^2y'^2 = 0,$$

ossia:

$$\left(x'^2+y'^2+\frac{aex'}{b^2}\right)^2 = \frac{a^2}{b^4}(x'^2+y'^2)$$

e ponendo

$$\frac{a}{b^2} = \alpha, \qquad \frac{ae}{b^2} = \beta, \tag{27}$$

la precedente diviene

$$(x'^2 + y'^2 + \beta x)^2 = \alpha^2 (x'^2 + y'^2),$$

che rappresenta una conchiglia di Pascal. Considerandola come concoide di cerchio, β è il diametro del cerchio direttore ed α è il segmento addizionale.

Siccome per le (27) si ha

$$\frac{\beta}{\alpha} = e > 1, \quad \text{cioè} \quad \beta > \alpha,$$

la Conchiglia di Pascal è nodata, come già avevamo osservato dalla (12) ed il nodo è in F_1.

Dalla solita relazione (13) si ha in questo caso:

$$\frac{1}{|\overline{P'F_1}|} - \frac{|\overline{F'_2P'}|}{|\overline{F'_2F_1}| \cdot |\overline{P'F_1}|} = \pm 2a,$$

ossia:

$$|\overline{F'_2F'}| - |\overline{P'F'_2}| = \pm 2a\, |\overline{F'_2F_1}| \cdot |\overline{P'F_1}| \tag{28}$$

e poichè, avendo:

$$\overline{F_2F_1} = 2ae, \quad \text{sarà} \quad \overline{F'_2F_1} = \frac{1}{2ae} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\beta}, \tag{29}$$

la (28) diverrà:

$$\pm \frac{1}{e} \cdot |\overline{P'F_1}| + |\overline{P'F'_2}| = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\beta},$$

ossia:

$$\pm \alpha \cdot |\overline{P'F_1}| + \beta \cdot |\overline{P'F'_2}| = \tfrac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2),$$

e ponendo

$$|\overline{P'F_1}| = \rho'_1, \quad |\overline{P'F'_2}| = \rho'_2,$$

si ha:

$$\pm \alpha\rho'_1 + \beta\rho'_2 = \tfrac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2). \tag{30}$$

In quanto al doppio segno si deve considerare (13) il superiore o l'inferiore, secondo che P' appartiene o no alla *foglia* della conchiglia.

Questa relazione esprime la seguente proprietà della conchiglia nodata:

Sull'asse di una conchiglia di Pascal nodata esiste un punto F'_2, *tale che, essendo* F_1 *il nodo, P' un punto qualunque della conchiglia,* α *e* β *rispettivamente le misure del segmento addizionale e del diametro del circolo direttore, si abbia la* (30), *scegliendo il segno* (+) *se P' appartiene alla foglia ed il segno* (—) *nel caso contrario.*

Per le (29) si ha subito l'ascissa di F'_2, considerando F_1 come origine; si ha cioè

$$\overline{F_1F'_2} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\beta}. \tag{31}$$

I punti F_1 e F'_2 sono *fuochi* della conchiglia.

Questa proprietà è caratteristica per la conchiglia nodata. — Si voglia infatti cercare il luogo geometrico dei punti P′ che soddisfano alla (30), essendo F_1, F_2 due punti tali che la loro distanza sia uguale a $\left|\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\beta}\right|$ cioè a $\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\beta}$. Considerando come asse x la retta $\overrightarrow{F_2F_1}$ e come asse y la perpendicolare a questa, condotta per F_1, ponendo per semplicità

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\beta}=c, \tag{32}$$

avremo:

$$\pm\,\alpha\sqrt{x^2+y^2}+\beta\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\tfrac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)$$

e successivamente:

$$[\alpha^2(x^2+y^2)+\beta^2(x^2+y^2-2cx)]^2=4\alpha^2\beta^2(x^2+y^2)(x^2+y^2-2cx+c^2);$$

$$(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)^2+4c^2\beta^4x^2-4\beta^2cx(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)-$$
$$-4\alpha^2\beta^2(x^2+y^2)^2+8c\alpha^2\beta^2x(x^2+y^2)=4\alpha^2\beta^2c^2(x^2+y^2);$$

$$(x^2+y^2)^2(\alpha^2-\beta^2)^2-4\beta^2cx(x^2+y^2)(\alpha^2+\beta^2)+4\beta^4c^2x^2=4\alpha^2\beta^2c^2(x^2+y^2);$$

e tenendo conto della (32), sopprimendo il fattore comune $(\alpha^2-\beta^2)^2$:

$$(x^2+y^2)^2+2\beta x+\beta^2x^2=\alpha^2(x^2+y^2),$$

cioè:

$$(x^2+y^2+\beta x)^2=\alpha^2(x^2+y^2).$$

c. d. d.

(Continua)

Monza, maggio 1904.

G. Cardoso-Laynes.

RETTE BISETTRICI E PIANI BISETTORI

Nota di Geometria descrittiva

Se, come sembra razionale, *fondamentali* sono da chiamarsi quei problemi che non sono corollari di altri, e da cui, per converso, derivano le soluzioni di questioni importanti, quell'epiteto sembra di pieno diritto appartenere ai problemi che hanno per fine la costruzione delle rette bisettrici degli angoli di due date rette e dei piani bisettori dei diedri formati da due dati piani: infatti, risoluti che siano, innumerevoli questioni relative a triangoli, tetraedri, ecc. non offrono più alcun ostacolo teorico o pratico. La ragione per la quale, ciò non ostante, quei problemi, negli ordinari trattati di Geometria descrittiva, non sono annoverati fra i fondamentali devesi, a parere mio, ricercarsi nel costume generale di risolverli ricorrendo a ribaltamenti. Ora tale procedura (prescindendo anche dal fatto che maschera il vero carattere di quei problemi) sembra consigliabile evitare, perchè, guardando al fondo delle cose, è facile persuadersi come *ai ribaltamenti spetti l'ufficio di ausiliari indispensabili* **soltanto** *in quelle questioni ove tra le cose date o le domandate si trovino grandezze* *geometriche* (angoli, segmenti, diedri, ecc.). (*) Che in particolare: ribaltamenti possono evitarsi nella trattazione delle enunciate questioni, pur senza ricorrere in eccessive complicazioni, risulterà dalle linee seguenti, ove di esse sono esposte soluzioni dirette fondate sopra le osservazioni seguenti: I. Le bisettrici degli angoli di due rette r, s (segantisi in un punto A e situate in un piano α) sono gli elementi comuni alla involuzione circolare C esistente nel fascio (A, α) ed all'involuzione I avente r, s per raggi doppi. — II. I piani bisettori dei diedri formati da due piani σ, τ (segantisi nella retta a) sono gli elementi comuni alla involuzione circolare C esistente nel fascio di piani di asse a ed all'involuzione I avente σ e τ per piani doppi.

Nell'esporre le soluzioni dei detti problemi adopereremo il metodo di Monge; ma l'intelligente lettore non tarderà a riconoscere come lo scheletro di esse rimanga intatto usando la proiezione centrale.

I. Supponiamo anzitutto (fig. 1) che le rette date (r, s) non abbiano alcuna speciale relazione di posizione con gli elementi di riferimento.

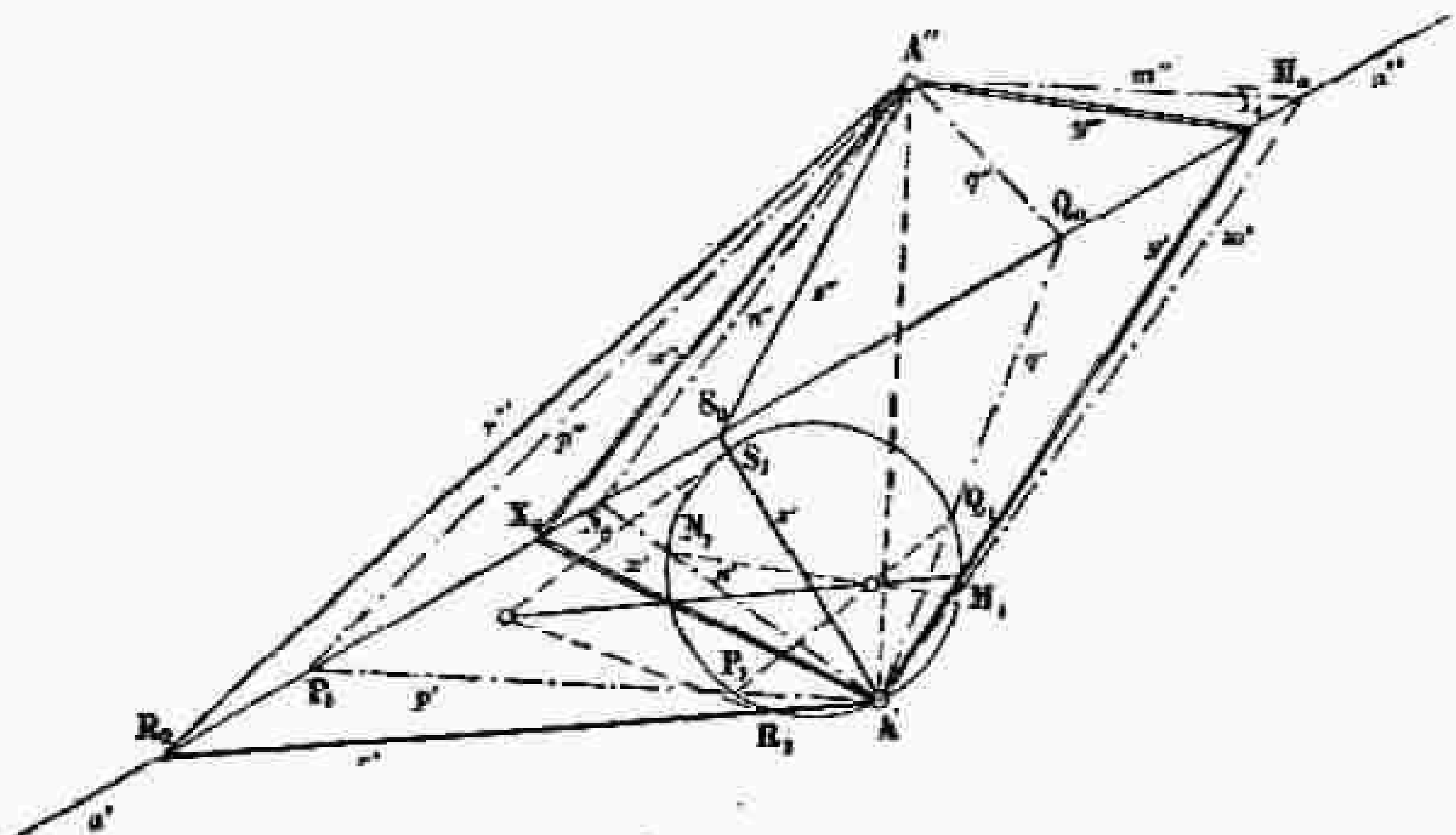


Fig. 1.

Le due proiezioni di una figura situata nel piano α, sono affini; l'asse d'affinità è la retta $a' \equiv a''$ che unisce il punto $R_0 \equiv r'r''$ al punto $S_0 \equiv s's''$; allora le due proiezioni di uno stesso raggio del fascio (A, α) sono rette che si tagliano sopra tale asse. Nell'anzidetto fascio esiste un raggio m parallelo al piano orizzontale; la sua proiezione verticale è la parallela m'' condotto da A'' alla linea di terra: m' se ne deduce in conseguenza, ricorrendo all'asse di affinità già tracciato. In quel fascio esiste un raggio n perpendicolare ad m; siccome l'angolo retto mn ha un lato (m) orizzontale così la sua proiezione orizzontale è un altro angolo retto; n' e quindi la perpendicolare condotta da A' a m'; n'' se ne deduce. In modo perfettamente analogo si costruiscano le proiezioni dei lati di quell'angolo retto pq del fascio (A, α) di cui un lato p è parallelo al piano verticale.

(*) Ad es. il problema: "rappresentare il cerchio K di cui si conosce il piano $\tau \equiv [t_1, t_2]$, il centro $O \equiv (O', O'')$ ed il raggio r", che si suole ordinariamente risolvere ricorrendo a ribaltamenti, può sciogliersi più direttamente così. Si consideri nel piano τ l'orizzontale $p \equiv (p', p'')$ passante per O e la retta q condotta da O perpendicolarmente a p; p' e q' saranno (in direzione) le proiezioni orizzontali degli assi della elisse K' proiezione di K sul piano orizzontale π_1. La lunghezza dell'asse p' sarà $2r$ e quella dell'asse q' sarà $2r \cos(\tau, \pi_1)$; onde K' è pienamente individuata. K'' si determinerà similmente, oppure ricorrendo all'affinità che esiste fra K' e K''.

Ora l'involuzione circolare C si proietta evidentemente nella involuzione (ellittica) C' determinata dalla coppia m', n'; p', q'; e l'invozione I si proietta nell'involuzione (iperbolica) I' di cui r', s' sono i raggi doppi. Quindi i raggi comuni alle due involuzioni C' e I' sono le proiezioni orizzontali delle bisettrici x, y cercate; x'' e y'' ne seguono tosto; ed il problema è risoluto.

Notisi che in questa soluzione non si fece alcun uso della linea di terra (la quale non venne neppure segnata sulla figura).

Se una delle date rette trovasi in un piano perpendicolare alla linea di terra (ed è quindi individuata da due suoi punti), del punto A si può trovare la rappresentazione e dal piano α l'asse d'affinità; fatto ciò, il resto della soluzione non soffre alterazione alcuna. Che se poi entrambe le date rette si trovassero in un piano perpendicolare alle linee di terra, per risolvere la questione non v'ha di meglio del ricorrere ad un piano di profilo, anzi di assumere come tale il piano delle due rette.

Osservazione. — In modo del tutto analogo può risolversi la questione che segue, di cui quello che precede è un evidente caso speciale: " Una conica Γ è individuata dal suo piano $\tau \equiv [t_1, t_2]$ e dalle proiezioni orizzontali (o verticali) di cinque suoi punti; determinare le proiezioni de' suoi assi ". Infatti tali assi sono i raggi comuni a due involuzioni; cioè: all'involuzione I, formata dai diametri coniugati di Γ, ed all'involuzione circolare C attorno al centro O di tale curva. Ora la proiezione orizzontale di I, essendo la involuzione dei diametri coniugati di Γ', può costruirsi con un noto procedimento, mentre per ottenere C' serve la costruzione superiormente esposta; i raggi comuni a queste due involuzioni sono le prime proiezioni degli assi domandati; le seconde ne conseguono tosto.

2. I piani dati siano (fig. 2) in posizione generale rispetto ai piani di riferimento; siano s_1, s_2 le tracce del primo, t_1, t_2 quelle del se-

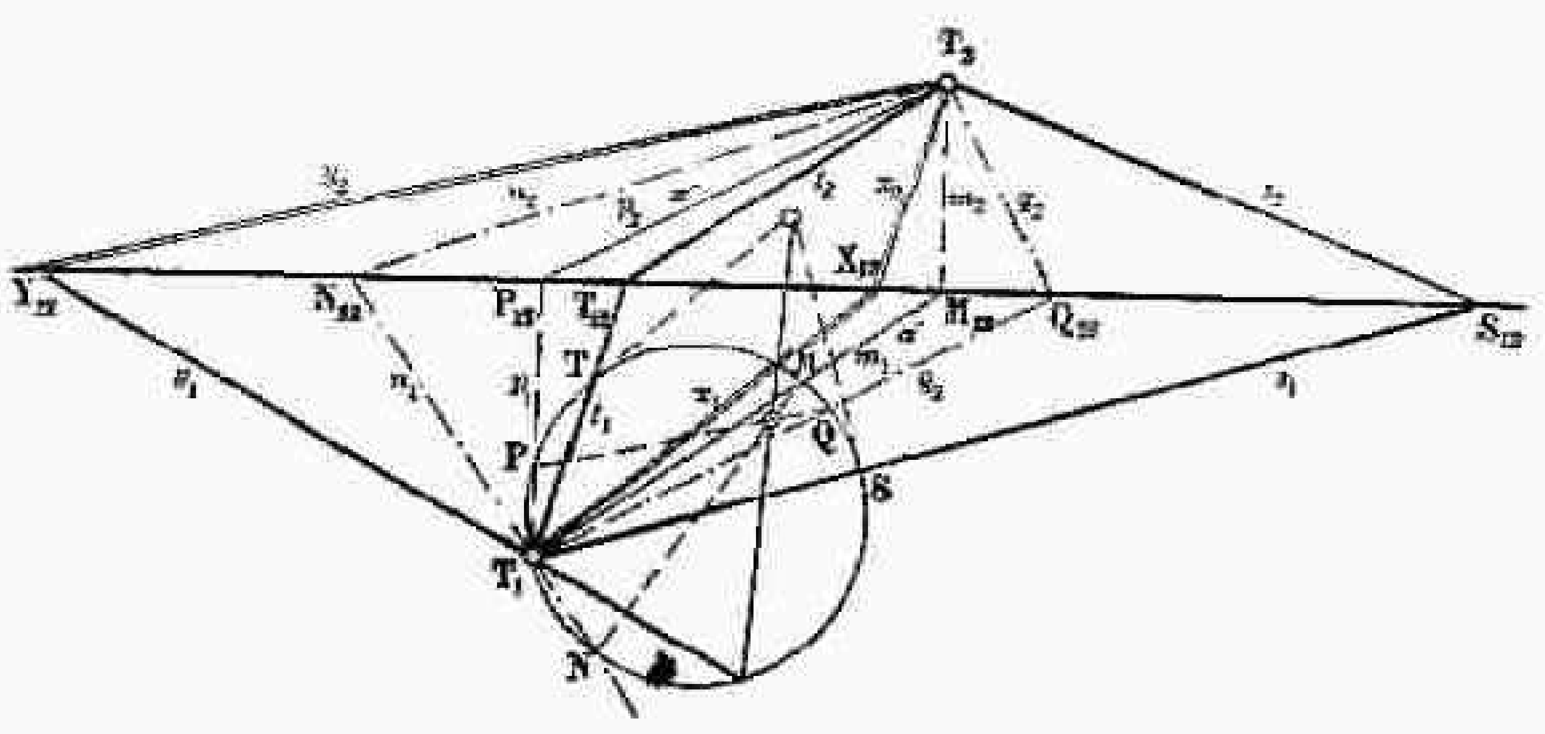


Fig. 2.

condo; costruiamo anzitutto le tracce T_1, T_2 e le proiezioni a', a'' della retta a in cui essi si tagliano. La retta a è asse di un fascio di piani nel quale esiste una involuzione circolare C, la quale è segata dai piani fondamentali secondo due involuzioni (ellittiche) C_1 e C_2, che ci proponiamo di individuare.

Consideriamo a tale scopo il piano $\mu \equiv (m_1, m_2)$ proiettante la retta a sopra il piano orizzontale: m_1 coincide con a' e m_2 è perpendicolare alla linea di terra; consideriamo pure il piano $\nu \equiv (n_1, n_2)$ passante per a e perpendicolare a μ; n_1 è la perpendicolare condotta da T_1 a m_1, n_2 ne consegue; m_1, n_1 è evidentemente una coppia della involuzione C_1, mentre m_2, n_2 lo è della C_2. Un'altra coppia p_1, q_1 della C_1 si ottiene similmente considerando il piano che proietta la retta a sul piano verticale e quello condotto per a perpendicolarmente ad esso.

Cerchiamo ora i raggi comuni alla involuzione (ellittica) C_1 $(m_1, n_1; p_1, q_1)$ ed a quella (iperbolica) avente s_1, t_1 per raggi doppi; daranno essi le tracce orizzontali x_1, y_1 dei due piani richiesti; quelle verticali ne conseguono subito.

Nel caso in cui uno dei piani dati passi per la linea di terra (e sia quindi determinato mediante un punto) trovata la intersezione dei piani stessi, il resto della soluzione precedente è ancora applicabile nella sua sostanza.

E se poi entrambi i piani dati contenessero la linea di terra, per determinare i piani bisettori dei diedri che essi formano l'artificio migliore consiste nell'usare un piano di profilo.

Genova, 23 giugno 1904.

GINO LORIA.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 657, 668 E 672

657. 1°. *Le tre iperboli circoscritte a un triangolo, tangenti nei vertici di questo alle simediane corrispondenti e aventi per centri i punti medi dei lati opposti, hanno per assintoti le rette di Wallace relative ai punti medi degli archi che gli stessi lati determinano sul circolo circoscritto.*

2°. *I piedi delle ceviane dei punti appartenenti a ciascuna delle tre iperboli sono in circoli che passano per il centro della curva.*

G. BIASI.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

1°. Sia ABC il triangolo dato, A′ il punto medio di BC, AK la simediana condotta per A, γ_a l'iperbole equilatera di centro A′ e circoscritta ad ABC, $\overline{AA_1}$ un diametro di γ_a. Abbiamo:

$$\widehat{BAK} = \widehat{A_1AC} = \widehat{AA_1B},$$

dunque $\widehat{BAK}$ e $\widehat{BA_1A}$ sono inversamente uguali e quindi, AK è tangente a γ_a. (*) Inoltre gli assintoti di γ_a sono paralleli alle bisettrici dell'angolo $\widehat{BAC}$ e dell'angolo ad esso conseguente. Siano M, N i punti d'incontro degli assintoti con AC; R, S gli estremi del diametro (normale a BC) del circolo circoscritto ad ABC. Essendo A′M parallela ad AS avremo:

$$\widehat{A'MC} = \widehat{SAC} = \widehat{SRC} = \widehat{A'RC}$$

(*) Si fa uso del teorema: *Se dagli estremi di un diametro di un'iperbole equilatera si proiettano i punti dell'iperbole stessa si ottengono due fasci di raggi inversamente uguali.*

quindi i punti C, A', M, R sono sul cerchio di diametro CR; allora $\widehat{RMC}$ è retto ossia la A'M è la retta di Wallace di R. Analogamente la A'N e la retta di Wallace di S. È evidente che esiste una sola conica circoscritta ad ABC, tangente ad AK e di centro A', si conclude quindi che questa conica dovrà essere la γ_a.

2°. Sia P un punto di γ_a e P_a, P_b, P_c i piedi delle ceviane relative a P; sia $H \equiv (BC, P_bP_c)$. Gli angoli $\widehat{ABP}$ ed $\widehat{ACP}$ sono inversamente uguali, quindi i punti B, C, P_b, C_r sono su uno stesso cerchio, e allora si ha:

$$HP_b \,.\, HP_c = HB \,.\, HC\,; \tag{1}$$

inoltre $(HP_aBC) = -1$, cioè:

$$HB \,.\, CP_a + HC \,.\, BP_a = 0\,. \tag{2}$$

$$2\,HA' \,.\, HP_a = HP_a\,(HB + HC) = HB\,(HP_a - HC) + HC\,(HP_a - HB) +$$
$$+ 2\,HB \,.\, HC = HB \,.\, CP_a + HC \,.\, BP_a + 2\,HB \,.\, HC\,,$$

e per le (2), (1) si ha:

$$HP_b \,.\, HP_c = HA' \,.\, HP_a$$

cioè i punti P_a, P_b, P_c, A' sono di uno stesso cerchio.

668. *Esistono sei coniche (tre ellissi e tre iperboli) concentriche a due a due (un'ellisse con un'iperbole), circoscritte a un triangolo ABC e tali che se le ceviane di un loro punto incontrano i lati corrispondenti in D, E, F e il circolo DEF taglia per la seconda volta gli stessi lati in D', E', F', le rette AD', BE', CF' s'incontrano in un punto della stessa conica. I centri delle sei coniche sono i punti medi dei lati del triangolo e ciascuna conica contiene due punti del gruppo di Gergonne; le sei coniche s'incontrano per conseguenza a tre a tre in questi quattro punti.*

Le sei coniche sono rispettivamente tangenti nei vertici del triangolo alle bisettrici degli angoli interni ed esterni, le quali bisettrici sono i luoghi dei centri dei circoli che passano per i piedi delle ceviane dei punti appartenenti alle coniche ad esse tangenti.

G. Biasi.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

Siano S_0, S_1, S_2, S_3 i punti di Gergonne di ABC; A', B', C' i punti medi dei lati, A_1 il simmetrico di A rispetto ad A'. Sia:

$$H_i = (AB, CS_i)\,. \qquad K_i = (AC, BS_i)\,,$$

con $i = (0, 1, 2, 3)$; avremo:

$$AH_i = AK_i\,. \tag{1}$$

I punti $ABCA_1S_0S_1$, $ABCA_1S_2S_3$ *sono su due coniche* γ_{01}, γ_{23} *concentriche in* A'.

Infatti segando i fasci $B\,(AS_0S_1A_1)$, $C\,(AS_0S_1A_1)$ rispettivamente con AC ed AB si ottengono le punteggiate $(AK_0K_1\,\infty)$, $(AH_0H_1\,\infty)$, le quali, per la (1), sono proiettive. Analogamente segando con AC e AB rispettivamente i fasci $B\,(AS_0S_3A_1)$, $C\,(AS_2S_3A_1)$ si ottengono due punteggiate che per la (1) sono proiettive. Si hanno poi altre quattro coniche γ_{02}, γ_{13}; γ_{03}, γ_{12} concentriche, le prime due in B' e le ultime due in C'. Sia P un punto qualunque di γ_{01} o di γ_{23} e $H = (AB, CP)$, $K = (AC, BP)$.

Si ha: $$\overline{AH} = \overline{AK}\,.$$

Infatti segando i due fasci proiettivi $B\,(AS_0PA_1)$, $C\,(AS_0PA_1)$ rispettivamente con AC, AB otteniamo le punteggiate

$$(AK_0K\,\infty) = (AH_0H\,\infty)$$

e quindi per la (1) si deduce che $\overline{AH} = \overline{AK}$.

Se il punto P appartiene invece alla conica γ_{23} allora basta scambiare nella precedente dimostrazione 0 con 2 o con 3. Viceversa: *Se si ha* $\overline{AH} = \overline{AK}$ *il punto* P *appartiene a* γ_{01} *o a* γ_{23}.

Siano D, E, F i piedi delle ceviane di un punto qualunque di una delle coniche γ_{01}, γ_{23}; avremo per quanto s'è visto precedentemente $AE = AF$ quindi il luogo del centro del cerchio DEF è rispettivamente la bisettrice interna o esterna di $B\widehat{A}C$. Se D', E', F' sono i punti d'incontro del cerchio DEF coi lati di ABC avremo: $\overline{AE'} = \overline{AF'}$, e per quanto s'è visto sopra, il punto (BE', CF') apparterrà a γ_{01} o a γ_{23}. Inoltre le tre ceviane AD', BE', CF' passano per uno stesso punto. Infatti dal noto teorema di Carnot: *Se una conica sega i lati* BC, CA, AB *d'un triangolo in* D, D'; E, E'; F, F'; *si ha:*

$$\frac{BD \cdot CE \cdot AF}{CD \cdot AE \cdot CF} = \frac{CD' \cdot AE' \cdot BF'}{BD' \cdot CE' \cdot AF'},$$

si deduce che, se le ceviane AD, BE, CF passano per uno stesso punto, il primo membro della relazione di Carnot diventa uguale all'unità negativa, e quindi anche AD', BE' CF' passano per uno stesso punto. Quando la conica è un cerchio allora rientriamo appunto nel nostro problema. Per il caso del cerchio la relazione di Carnot si ricava molto facilmente moltiplicando membro a membro le tre uguaglianze:

$$\frac{AF}{AE} = \frac{AE'}{AF'}, \quad \frac{BD}{BF} = \frac{BF'}{BD'}, \quad \frac{CE'}{CD'} = \frac{CD'}{CE'}.$$

Le bisettrici, interna ed esterna, di $B\widehat{A}C$ *sono rispettivamente tangenti a* γ_{01}, γ_{23}, *cioè queste due coniche si segano ortogonalmente in* A.

Infatti sia P' un punto qualunque (diverso da A) di una delle due bisettrici e $H' = (AB, CP')$, $K' = (AC, BP')$; avremo: $AH' \neq AK'$. (*) Dunque per quanto già sappiamo P' non può essere sulla conica corrispondente alla bisettrice considerata, la quale sarà quindi tangente in A alla conica suddetta.

Le dimostrazioni fatte valgono naturalmente anche per le coniche γ_{02}, γ_{13}; γ_{03}, γ_{12}.

672. *Se* M *è un punto di uno degli assintoti di una iperbole di centro* O *e della quale i fuochi sono* F, F' *ed* a, b *sono le lunghezze de' suoi semiassi, dimostrare la relazione*

$$(\overline{MF}^2 + \overline{MF'}^2 - 4a^2)^2 - 4\,(\overline{MF}^2 \cdot \overline{MF'}^2 - 4a^2b^2) = 0.$$

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

L'espressione data possiamo anche scriverla così

$$(\overline{MF}^2 - \overline{MF'}^2)^2 - 8a^2\,(\overline{MF}^2 + \overline{MF'}) + 16a^2\,(a^2 + b^2). \tag{1}$$

Abbiamo poi

$$\overline{MF}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OF}^2 - 2\,\overline{OM}\,.\,\overline{OF}\cos M\widehat{O}F = \overline{OM}^2 + a^2 + b^2 - 2a\,.\,\overline{OM}, \tag{2}$$

$$\overline{MF'}^2 = \overline{OM}^2 + a^2 + b^2 + 2a\,.\,\overline{OM}. \tag{3}$$

Sostituendo con le (2), (3) nella (1) essa si annulla.

(*) Se P' fosse sulla bisettrice interna e se AH' fosse uguale ad AK', si dedurrebbe facilmente $AB = AC$ il che in generale non è. Se P' fosse poi sulla bisettrice esterna e se $AH' = AK'$, si avrebbe la relazione assurda $B\widehat{A}C < P'\widehat{H'}A = P'\widehat{K'}A < B\widehat{A}C$.

QUISTIONI PROPOSTE

677. Sia M un punto variabile sopra una ellisse che ha per fuochi F, F'. Il luogo dei centri di similitudine del circolo inscritto nel triangolo MFF' e di un circolo fisso si compone di due coniche.

678. Essendo M un punto variabile sopra una ellisse di fuoco F, si consideri il circolo *c* avente M per centro ed avente per raggio $n \cdot MF$, ed un circolo *c'* di centro C e raggio R.

a) Il luogo dei centri di similitudine dei due circoli *c*, *c'* si compone di due coniche.

b) Se il raggio R resta fisso, si trovi quale deve essere il luogo del centro C affinchè ciascuna di queste coniche sia: 1° un circolo; 2° una parabola; 3° una iperbole equilatera; 4° una coppia di rette.

679. Si consideri un raggio fisso OA ed un raggio mobile OM di un circolo. Trovare il luogo dei vertici della iperbole che passa per A ed M ed ha per assintoti le perpendicolari condotte ad OA od OM per i loro punti di mezzo.

680. Siano A, B, C, D quattro punti conciclici di una iperbole equilatera. La retta di Simson del punto D rispetto al triangolo ABC passa per il centro della iperbole.

681. Per due punti P e Q di un piano si conducano le corde PAB, QCD di una conica parallele ad una direzione variabile. Trovare l'inviluppo della iperbole equilatera e quello della parabola individuata dai quattro punti A, B, C, D.

E.-N. Barisien.

BIBLIOGRAFIA

S. Catania. — *Aritmetica razionale* per le scuole secondarie superiori. Catania, N. Giannelli editore, 1904. Pag. v-184 (L. 1,60).

Nel fascicolo marzo-aprile 1903 discorrendo sull'*Aritmetica generale ed Algebra elementare* di G. Peano (Torino, Paravia, 1902) auguravo che la bontà di questo trattato — vinte le difficoltà che opponevano il simbolismo logico-matematico e l'eccessiva condensazione del testo — inducesse qualche volenteroso docente a sperimentarlo per sè e per la scuola. Un tal desiderio è oggi realizzato in gran parte, mercè l'operetta, che l'egregio prof. S. Catania ha testè pubblicata, e sulla quale mi permetto di richiamar l'attenzione dei nostri colleghi.

Il prof. Catania ha estratto dal libro del prof. Peano (il quale di buon grado assentiva ed incoraggiava) le parti meno elevate dell'aritmetica — quelle insomma, che più interessano la scuola media — e le ha riprodotte fedelmente con la scrittura ordinaria (salvo qualche leggera e inevitabile modificazione) studiandosi di conservare al possibile il loro nativo sapore. N'è uscito un trattatello, che nella forma, e un po' anche nella materia, si distingue dagli altri libri d'aritmetica; ed è atto a fornire una giusta idea dei vantaggi, anche didattici e pratici, che si potrebbe ritrarre da un uso discreto dei principî e dei metodi che informano la Logica algebrica.

Ho per fermo che questi Elementi non si troveranno di più difficil lettura, o di struttura men semplice, di fronte ai libri di testo comunemente adottati nelle nostre scuole medie. Altri ne parlerà con maggior diffusione; io qui mi ristringo a questo brevissimo cenno: lieto di poter senza scrupolo raccomandare un lavoro, che potrà far del bene all'insegnamento.

M. Pieri.

Scentia. N. 22. — J. W. Gibbs. *Diagrammes et surfaces thérmodinamiques*. Paris, Naud, 1903.

Questo volumetto del Gibbs, tradotto in francese dal Roy, è una sostanziale e concisa esposizione dei metodi usati dall'Autore, per rappresentare con diagrammi i fenomeni termodinamici.

Al diagramma classico di Clapeyron, egli aggiunge due diagrammi nuovi, il diagramma entropico che si indirizza all'entropia ed alla tensione corrispondente, la temperatura ed un secondo nuovo diagramma, che assume per coordinate il volume e l'entropia. Il diagramma volume-entropia è la prefazione necessaria allo studio della superficie volume-entropia-energia.

È noto che alcune di queste idee hanno ancora tra noi valorosi sostenitori; uno di questi fu il compianto prof. Bertoldo, che ne sviluppò buona parte nel suo opuscolo *I diagrammi entropici delle motrici a vapore*. Tra i viventi debbono essere ricordati il prof. Garuffa e il prof. Rossi.

Ritornando al volume del Gibbs, diremo che questo, dopo una introduzione di Bruhnes ed una Notizia biografica e bibliografica su W. Gibby, è diviso in due parti.

Nella prima " Metodi grafici nella termodinamica dei fluidi " parla delle proprietà dei diagrammi e stabilisce il paragone del diagramma entropia-temperatura col diagramma ordinario; quindi definisce il diagramma volume-entropia.

Nella seconda " Metodo di rappresentazione geometrica delle proprietà termodinamiche dei corpi con superficie " dà il mezzo di rappresentare il volume, l'entropia, l'energia, la pressione e la temperatura; quindi passa a stabilire le proprietà della superficie, relative alla stabilità dell'equilibrio termodinamico; e dopo avere discorso delle proprietà essenziali della superficie termodinamica per le sostanze che si presentano negli stati solido, liquido, gassoso, chiude questa rassegna con alcuni problemi relativi alla superficie di energia dissipata.

Il Bruhnes terminando la sua introduzione, dice: Saremo felici se questo libro renderà più accessibile al lettore lo studio delle rappresentazioni geometriche in termodinamica. — In tutti i casi, vi sarà profitto nel rileggere e meditare gli scritti di uno dei rari pensatori della nostra epoca, non lasciando sterile ciò che si potrebbe chiamare il lavoro puramente scolastico del commentatore, nel senso di avere probabilità di scoprire del nuovo col solo studio di meglio penetrare il suo pensiero.

F. Lenzi.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 26 agosto 1904

SULLE OPERAZIONI

FRA NUMERI DECIMALI APPROSSIMATI

e, in particolare, sul calcolo delle parti proporzionali nell'uso delle ordinarie tavole logaritmo-trigonometriche

(Continuazione e fine v. fasc. precedente)

---

2. — Errori prodotti dal principio delle parti proporzionali.

§ 40. Abbiamo trascurato fin qui l'errore prodotto dall'ammettere il principio delle parti proporzionali e (nei §§ 24 e 30) anche altri errori dei quali parleremo fra poco; ma tutti questi errori si aggiungono agli errori l ed l' (§ 31), e quindi può sorgere il dubbio che in qualche caso essi possano esser tali da rendere illusorie alcune delle cifre ottenute colle regole indicate. E vedremo che per le ordinarie tavole dei logaritmi delle funzioni trigonometriche questo dubbio è giustificatissimo.

Ci proponiamo di dimostrare che per i tipi di tavole da noi considerate nel capitolo terzo (e dentro i limiti da noi stabiliti per x_0), tale dubbio non sussiste (*); e perciò cercheremo prima dei limiti superiori per tutti gli errori ora accennati, e poi, confrontandoli coi limiti superiori inabbassabili dei corrispondenti errori l ed l', faremo vedere che i primi sono sempre molto minori dei secondi e che, nel caso più sfavorevole, i primi sono certamente minori di tre decimi dei corrispondenti secondi.

§ 41. Indicando con g_L e con g'_L gli errori prodotti dall'ammettere il principio delle parti proporzionali, nella ricerca diretta e nella ricerca inversa rispettivamente, quando sia

$$y = \mathrm{L}x,$$

abbiamo visto ([N_1], § 4) che il primo è sempre per difetto, che il

(*) Questi tipi differiscono alquanto da quelli che indicammo nella conclusione della [N_2]. A queste modificazioni siamo stati condotti sia dallo studio che ora qui riportiamo e nel quale si considera anche la ricerca inversa (mentre nella [N_2] si considerò solo la ricerca diretta), sia dall'altro studio, cui accennammo in una nota al § 28 e che pubblicheremo prossimamente.

secondo è sempre per eccesso, e che, in valore assoluto, sono sempre rispettivamente minori

$$\text{di} \quad \frac{M\overline{\Delta y}^2}{8} \times \frac{1}{x_0^2} \quad \text{e di} \quad \frac{\overline{\Delta x}^2}{8} \times \frac{x_1}{x_0^2},$$

dove M è il modulo dei logaritmi volgari. Abbiamo pure visto che ambedue questi limiti calano al crescere di x_0 (per il primo ciò è evidente). Come abbiamo anche visto che per $\delta x : \Delta x = 0,5$ gli errori stessi, sempre in valore assoluto, sono, rispettivamente, maggiori

$$\text{di} \quad \frac{M\overline{\Delta x}^2}{8} \times \frac{1}{x_1^2} \quad \text{e di} \quad \frac{\overline{\Delta x}^2}{8} \times \frac{x_0}{x_1^2};$$

per cui indicando con γ_L e con γ'_L (in val. ass.) dei limiti superiori inabbassabili di g_L e di g'_L, per x compreso fra x_0 ed $x_1 = x + \Delta x_0$, sarà certamente

$$\frac{M\overline{\Delta x}^2}{8} \times \frac{1}{x_1^2} < \gamma_L < \frac{M\overline{\Delta x}^2}{8} \times \frac{1}{x_0^2}, \tag{29}$$

$$\frac{\overline{\Delta x}^2}{8} \times \frac{x_0}{x_1^2} < \gamma'_L < \frac{\overline{\Delta x}^2}{8} \times \frac{x_1}{x_0^2}. \tag{30}$$

§ 42. Dalla (29), ricordando che

$$M = 0,43429\ 44819\ 03251\ldots$$

e intendendo sempre di considerare come cifra delle unità di g_L l'ultima cifra della mantissa di y_0, si ha (qualunque sia x e per tutt'e due i tipi di tavole considerati nei §§ 19 e 20)

$$0,000054 < \gamma_L < 0,005429;$$

che si ottiene ponendo $x_0 = 10000$ (o $x_0 = 1000$) nel limite superiore, e $x_0 = 99999$ e quindi $x_1 = 100000$ (o $x_0 = 9999$ e quindi $x_1 = 10000$) nel limite inferiore; mentre è sempre $\lambda = 1$ (§ 32).

Dalla (30), intendendo sempre di considerare come cifra delle unità di g'_L l'ultima cifra del numero x_0, per il primo tipo,

se $10000 \leqslant x_0 \leqslant 43454$, si ha $0,0000028 < \gamma'_L < 0,0000126$,
» $43455 \leqslant x_0 \leqslant 99999$, » $0,0000012 < \gamma'_L < 0,0000029$;

mentre, corrispondentemente,

si ha $100 \geqslant \Delta y \leqslant 435$, da cui $0,0022 < \lambda' \leqslant 0,0100$,
» $43 \leqslant \Delta y \leqslant 100$, » $0,0100 \leqslant \lambda' < 0,0233$.

E per il secondo tipo,

se $1000 \leqslant x_0 \leqslant 4362$, si ha $0,000028 < \gamma'_L < 0,000126$,
» $4363 \leqslant x_0 \leqslant 9999$, » $0,000012 < \gamma'_L < 0,000029$;

mentre, corrispondentemente,

si ha $10 \leqslant \Delta y \leqslant 44$, da cui $0,022 < \lambda' \leqslant 0,100$,
» $4 \leqslant \Delta y \leqslant 10$, » $0,10 \leqslant \lambda' \leqslant 0,25$.

Ed ora, confrontando il limite superiore di γ_L con λ e i vari limiti superiori così trovati per γ'_L coi corrispondenti limiti inferiori di λ', si vede che i primi sono sempre minori di un centesimo dei corrispondenti secondi.

Osservazione I. — I limiti di g_L e di g'_L sommati coi corrispondenti limiti di l e di l' danno dei limiti, superiori e inferiori, per gli errori complessivi $g_L + l$ e $g'_L + l'$ che si commettono colla interpolazione semplice; e la conoscenza di questi limiti è, evidentemente, utilissima per chi usa una determinata tavola, ed è poi indispensabile per chi deve stabilire il tipo di tavole adatte ad una determinata specie di calcoli. È anzi questa una delle ragioni per le quali degli errori g_L e g'_L abbiamo dato anche dei limiti inferiori, mentre qui bastava dare dei limiti superiori. Questa osservazione, in seguito, sarà sottintesa.

Osservazione II. — La conoscenza dei limiti degli errori complessivi ora accennati può servire a giustificare direttamente (indipendentemente cioè da quanto si è detto nei §§ 33 e 34) le regole del precedente capitolo. Così, considerando, p. es., il caso della ricerca inversa nella tavola del primo tipo (e nello stesso modo si ragionerebbe per gli altri casi):

per $10000 \leqslant x_0 \leqslant 43454$, Δy ha sempre tre cifre, quindi

$$\mu' = 0{,}0005,$$

ma si ha

$$0{,}0022 < \lambda' + \gamma'_L < 0{,}0101,$$

quindi μ' è certamente minore di $\lambda' + \gamma'_L$ e non è necessariamente minore di un decimo di questa somma (§ 11);

per $43455 \leqslant 99999$, Δy ha generalmente due cifre (potendo, al più, essere eguale a 100), quindi, generalmente,

$$\mu' = 0{,}005,$$

ma si ha

$$0{,}0100 < \lambda' + \gamma'_L < 0{,}0234,$$

quindi, anche ora, μ' è certamente minore di $\lambda' + \gamma'_L$ e non è necessariamente minore di un decimo di questa somma.

Osservazione III. — Il limite superiore indicato per g'_L cala al crescere di x_0, mentre quello di l' cresce; bastava quindi calcolare le limitazioni precedenti solo per il minimo valore di x_0 (10000, o 1000); abbiamo però creduto opportuno di esaminare separatamente i valori di x_0 pei quali è diverso il numero delle cifre di Δy, sia per rendere possibile l'esame cui si è accennato nella Oss. prec.; sia per seguire un metodo uniforme per tutti casi (chè questa separazione in qualche altro caso è, come vedremo, necessaria); sia perchè questi risultati, facendo conoscere con maggiori particolari l'approssimazione che si raggiunge, possono (come vedremo) essere utilissimi ad altre ricerche in proposito.

Osservazione IV. — Dalle limitazioni (29) e (30) del § 41 si può dedurre che i limiti superiori da noi indicati, per g_L e g'_L *non potranno mai subire un abbassamento sensibile qualunque altra via si segua per la loro ricerca.* Così, p. es., per $x_0 = 1000$ si ha

$$0{,}0054 < \gamma_L < 0{,}0055, \qquad 0{,}00012 < \gamma'_L < 0{,}00013;$$

ora, sapendosi che

$$L\,1000 = 3{,}0000000000, \quad L\,1000{,}5 = 3{,}0002170930, \quad L\,1001 = 3{,}0004340775,$$

se si calcola il logaritmo di 1000,5 colla interpolazione semplice si ha

$$3{,}0002170388 \quad \text{e quindi} \quad g_L = +\,0{,}0054\ldots;$$

e se, viceversa, si calcola l'antilogaritmo di 3,0002170930 si ha

$$1000{,}50012\ldots \quad \text{e quindi} \quad g'_L = -\,0{,}00012\ldots;$$

e sulle cifre qui conservate per questi errori, gli errori l, m, l', m' non hanno, evidentemente, nessuna influenza.

Osservazione V. — Da tutte le considerazioni fatte risulta chiaramente che non si possono giustificare quei criteri che stabiliscono di prendere sempre uno stesso determinato numero di prodotti parziali nella ricerca diretta, e uno stesso determinato numero di cifre per la parte proporzionale della ricerca inversa. Così, p. es., se per una tavola del primo tipo si stabilisse, nella ricerca diretta, di prendere sempre *tre* prodotti parziali, se ne potrebbe prendere uno inutile se Δy fosse di *due* cifre; mentre (solo per questo) si potrebbe commettere un errore che ha per limite superiore inabbassabile 0,435 se Δy fosse di *tre* cifre.

Osservazione VI. — I due tipi di tavole, da noi considerati, comprendono quasi tutte le ordinarie tavole dei logaritmi dei numeri; fra le poche che fanno eccezione e che sono in uso abbastanza frequente citeremo quelle che si dicono ordinariamente *Tavole del Lalande a sette decimali* (*), che sono una estensione fatta dal Marie delle tavole del Lalande a cinque decimali (**). Esse però, essendo estese fino a 10000 soltanto, hanno il difetto che, almeno in principio, γ_L è maggiore di 0,5 (come facilmente risulta dalla (29) del § 41); e inoltre richiedono, per la interpolazione, un laborioso calcolo per il quale neppure si hanno tavolette ausiliarie. L'estensione del Marie ci pare quindi poco opportuna, e meno opportuno ancora ci pare l'aver dato a quelle tavole il nome del Lalande, perchè questi, colle sue piccole tavole, volle proprio dare il modo di evitare l'uso di *sette* cifre decimali (***).

§ 43. Indicando con g_{Ls} e con g'_{Ls} gli errori accennati, quando sia

$$y = L\,\text{sen}\,x,$$

abbiamo visto ([N₁], § 8) che il primo è sempre per difetto, che il secondo è sempre per eccesso e che, in valore assoluto, sono sempre, rispettivamente, minori

$$\text{di} \quad \frac{M\overline{\Delta x}^2}{8} \times \frac{1}{\text{sen}^2 x_0} \qquad \text{e} \quad \text{di} \quad \frac{\Delta x\,(\Delta x)''}{8} \times \frac{\tan x_1}{\text{sen}^2 x_0},$$

(*) *Tables de Logarithmes, par Jérome de Lalande; étendues a sept décimales, par* F. C. M. Marie. Ed. Gauthier Villars, Parigi 1890.

(**) *Tables de Logarithmes pour le nombre et pour le sinus, par* Jérome de Lalande. Ed. Firmin Didot, Parigi, 1805.

(***) "...les astronomes, les navigateurs, les militaires, les géographes, les arpenteurs, les architectes, ont un besoin continuel de petites tables, bien plus rarement des grandes... J'ai calculé quelques centaines d'éclipses, et je n'y ai presque jamais employé d'autres tables que celles que je publie.... (l. c., Preface, pagg. 6 e 7).

dove con $(\Delta x)''$ s'intende il passo espresso in secondi. Di questi due limiti il primo evidentemente cala al crescere di x_0; e in quanto al secondo, abbiamo visto che esso cala per x_0 crescente fino a $45^\circ - \Delta x$, che prende il suo valor minimo fra $45^\circ - \Delta x$ e 45° e che poi cresce per x_0 crescente da 45° a $90^\circ - \Delta x$; e abbiamo pure osservato che dei due valori che esso piglia per $x_0 = \alpha$ e per $x_0 = 90^\circ - \Delta x - \alpha$ (essendo α un angolo qualunque minore di 45°) il maggiore è il primo. Come abbiamo anche visto che per $\delta x : \Delta x = 0{,}5$ gli errori stessi, sempre in valore assoluto, sono rispettivamente maggiori

$$\text{di} \quad \frac{M\overline{\Delta x}^2}{8} \times \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x_1} \qquad \text{e} \quad \text{di} \quad \frac{\Delta x\,(\Delta x)''}{8} \times \frac{\tan x_0}{\operatorname{sen}^2 x_1};$$

per cui, indicando con γ_{Ls} e con γ'_{Ls} (in val. ass.) dei limiti superiori inabbassabili di g_{Ls} e di g'_{Ls}, per x compreso fra x_0 e $x_1 = x_0 + \Delta x$, sarà certamente

$$(31) \qquad \frac{M\overline{\Delta x}^2}{8} \times \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x_1} < \gamma_{Ls} < \frac{M\overline{\Delta x}^2}{8} \times \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x_0},$$

$$(32) \qquad \frac{\Delta x\,(\Delta x)''}{8} \times \frac{\tan x_0}{\operatorname{sen}^2 x_1} < \gamma'_{Ls} < \frac{\Delta x\,(\Delta x)''}{8} \times \frac{\tan x_1}{\operatorname{sen}^2 x_0}.$$

Sia invece

$$y = \mathrm{L} \tan x;$$

si osservi, prima di tutto, che, avendo due archi complementari i loro logtangenti eguali e di segno contrario, basterà far variare x_0 da 0° a $45^\circ - \Delta x$. Attribuendo poi a g_{Lt} e a g'_{Lt} i soliti significati, abbiamo visto ([N₁], § 9) che da 0° a 45° il primo è per difetto e il secondo è per eccesso (da 45° a 90°, evidentemente accade il contrario), e che in valore assoluto sono sempre minori

$$\text{di} \quad \frac{M\overline{\Delta x}^2}{2} \frac{\operatorname{ctn} 2x_0}{\operatorname{sen} 2x_0} \qquad \text{e} \quad \text{di} \quad \frac{\Delta x\,(\Delta x)''}{4} \frac{\operatorname{ctn} 2x_0}{\operatorname{sen} 2x_0} \operatorname{sen} 2x_1.$$

Abbiamo pure visto che ambedue questi limiti calano al crescere di x_0 da 0 a $45^\circ - \Delta x$; come abbiamo anche visto che, nella solita ipotesi di $\delta x : \Delta x = 0{,}5$, essi sono rispettivamente maggiori

$$\text{di} \quad \frac{M\overline{\Delta x}^2}{2} \frac{\operatorname{ctn} 2x_1}{\operatorname{sen} 2x_1} \qquad \text{e} \quad \text{di} \quad \frac{\Delta x\,(\Delta x)''}{4} \frac{\operatorname{ctn} 2x_1}{\operatorname{sen} 2x_1} \operatorname{sen} 2x_0.$$

Per cui, attribuendo a γ_{Lt} e a γ'_{Lt} i soliti significati, per x compreso fra x_0 e $x_1 = x_0 + \Delta x$, sarà certamente

$$(33) \qquad \frac{M\overline{\Delta x}^2}{2} \times \frac{\operatorname{ctn} 2x_1}{\operatorname{sen} 2x_1} < \gamma_{Lt} < \frac{M\overline{\Delta x}^2}{2} \times \frac{\operatorname{ctn} 2x_0}{\operatorname{sen} 2x_0},$$

$$(34) \qquad \frac{\Delta x\,(\Delta x)''}{4} \frac{\operatorname{ctn} 2x_1}{\operatorname{sen} 2x_1} \operatorname{sen} 2x_0 < \gamma'_{Lt} < \frac{\Delta x\,(\Delta x)''}{4} \times \frac{\operatorname{ctn} 2x_0}{\operatorname{sen} 2x_0} \operatorname{sen} 2x_1.$$

§ **44.** Applichiamo ora i risultati precedenti alle quattro tavole studiate nei §§ 22, 23, 26 e 29, tenendo presente che, nella ricerca inversa, per Δy minore di 2 l'interpolazione non occorre.

I) Tavola in cui $\Delta x = 10''$ ed $n = 7$, (§ 22).
Quando $y = \mathrm{L}\,\mathrm{sen}\,x$, nella ricerca diretta,

se $5^\circ \leqslant x_0$, si ha $\quad 0{,}0012 < \gamma_{\mathrm{L}s} < 0{,}1678, \quad$ mentre $\lambda = 1$;

e nella ricerca inversa,

se $5^\circ 00' 00'' \leqslant x_0 \leqslant 11^\circ 53' 40''$ si ha $\quad 0'',00030 < \gamma'_{\mathrm{L}s} < 0'',00070$,
„ $11^\circ 53' 50'' \leqslant x_0 \leqslant 64^\circ 36' 40''$ „ $\quad 0'',00012 < \gamma'_{\mathrm{L}s} < 0'',00031$,
„ $64^\circ 36' 50'' \leqslant x_0 \leqslant 17^\circ 18' 50''$ „ $\quad 0'',00015 < \gamma'_{\mathrm{L}s} < 0'',00130$,
„ $87^\circ 19' 00'' \leqslant x_0 \leqslant 89^\circ 42' 10''$ „ $\quad 0'',00117 < \gamma'_{\mathrm{L}s} < 0'',01180$;

mentre, corrispondentemente,

si ha $1000 \leqslant \Delta y \leqslant 2460$, da cui $\quad 0'',0042 < \lambda' \leqslant 0'',0100$,
„ $100 \leqslant \Delta y \leqslant 1000$, „ $\quad 0'',01 \leqslant \lambda' \leqslant 0'',10$,
„ $10 \leqslant \Delta y \leqslant 100$, „ $\quad 0'',1 \leqslant \lambda' \leqslant 1'',0$,
„ $2 \leqslant \Delta y \leqslant 10$, „ $\quad 1'' \leqslant \lambda' \leqslant 5''$.

Quando invece $y = \mathrm{L}\tan x$, nella ricerca diretta,

se $5^\circ \leqslant 84^\circ 59' 50''$, si ha $\quad 0{,}0000 < \gamma_{\mathrm{L}t} < 0{,}1667, \quad$ mentre $\lambda = 1$;

e nella ricerca inversa,

se $5^\circ 00' 00'' \leqslant x_0 \leqslant 12^\circ 47' 20''$, si ha $\quad 0'',00026 < \gamma'_{\mathrm{L}t} < 0'',00069$,
„ $12^\circ 47' 30'' \leqslant x_0 \leqslant 44^\circ 59' 50''$, „ $\quad 0'',00000 \leqslant \gamma'_{\mathrm{L}t} < 0'',00026$;

mentre, corrispondentemente,

si ha $1000 \leqslant \Delta y \leqslant 2424$, da cui $\quad 0'',0041 < \lambda' \leqslant 0'',0100$,
„ $421 \leqslant \Delta y \leqslant 1000$, „ $\quad 0'',010 \leqslant \lambda' < 0'',024$.

II) Tavola in cui $\Delta x = 1''$ ed $n = 7$ (§ 23).
Quando $y = \mathrm{L}\,\mathrm{sen}\,x$, nella ricerca diretta,

se $0^\circ 30' 00'' \leqslant x_0$, si ha $\quad 0{,}0016 < \gamma_{\mathrm{L}s} < 0{,}1676, \quad$ mentre $\lambda = 1$;

e nella ricerca inversa,

se $0^\circ 30' 00'' \leqslant x_0 \leqslant 1^\circ 12' 25''$, si ha $\quad 0'',000028 < \gamma'_{\mathrm{L}s} < 0'',000070$,
„ $1^\circ 12' 26'' \leqslant x_0 \leqslant 4^\circ 50' 59''$, „ $\quad 0'',000006 < \gamma'_{\mathrm{L}s} < 0'',000029$;

mentre, corrispondentemente,

si ha $1000 \leqslant \Delta y \leqslant 2412$, da cui $\quad 0'',0004 < \lambda' \leqslant 0'',0010$,
„ $241 \leqslant \Delta y \leqslant 1000$, „ $\quad 0'',0010 \leqslant \lambda' < 0'',0042$.

Quando $y = \mathrm{L}\tan x$, si hanno tutte le stesse limitazioni, colla sola differenza che il limite inferiore della seconda limitazione di Δy è 243, invece di 241, ma il corrispondente limite superiore di λ' (perchè fermato alla quarta cifra decimale) non cambia.

III) Tavola in cui $\Delta x = 1'$ ed $n = 5$ (§§ 26, 27, 28).
Quando $y = \mathrm{L}\,\mathrm{sen}\,x$, nella ricerca diretta

se $3^\circ 00' \leqslant x_0$, si ha $\quad 0{,}0004 < \gamma_{\mathrm{L}s} < 0{,}1678, \quad$ mentre $\lambda = 1$;

e nella ricerca inversa,

se $3^\circ 00' \leqslant x_0 \leqslant 7^\circ 12'$ si ha $\quad 0'',017 < \gamma'_{\mathrm{L}s} < 0'',042$,
„ $7^\circ 13' \leqslant x_0 \leqslant 51^\circ 43'$ „ $\quad 0'',004 < \gamma'_{\mathrm{L}s} < 0'',018$,
„ $51^\circ 54' \leqslant x_0 \leqslant 85^\circ 13'$ „ $\quad 0'',004 < \gamma'_{\mathrm{L}s} < 0'',027$

mentre, corrispondentemente,

si ha $100 \leqslant \Delta y \leqslant 240$, da cui $0'',25 \leqslant \lambda' \leqslant 0'',60$,
„ $10 \leqslant \Delta y \leqslant 100$, „ $0'',6 \leqslant \lambda' \leqslant 6'',0$
„ $2 \leqslant \Delta y \leqslant 10$, „ $6'' \leqslant \lambda' \leqslant 30''$.

Quando, invece, $y = \mathrm{L} \tan x$, nella ricerca diretta,

se $3^\circ 00' \leqslant x_0 \leqslant 86^\circ 59'$, si ha $0,0000 < \gamma_{\mathrm{Lt}} < 0,1673$, mentre $\lambda' = 1$;

e nella ricerca inversa,

se $3^\circ 00' \leqslant x_0 \leqslant 7^\circ 20'$, si ha $0'',016 < \gamma'_{\mathrm{Lt}} < 0'',042$,
„ $7^\circ 21' \leqslant x_0 \leqslant 44^\circ 59'$ „ $0'',000 < \gamma'_{\mathrm{Lt}} < 0'',017$;

mentre, corrispondentemente,

si ha $100 \leqslant \Delta y \leqslant 241$, da cui $0'',24 < \lambda' \leqslant 0'',60$,
„ $25 \leqslant \Delta y \leqslant 100$, „ $0'',60 \leqslant \lambda' \leqslant 2'',40$.

IV) Tavola in cui $\Delta x = 1''$ ed $n = 5$ (§ 29).
Quando $y = \mathrm{L} \operatorname{sen} x$, nella ricerca diretta

se $0^\circ 03' 00'' \leqslant x_0$, si ha $0,00004 < \gamma_{\mathrm{Ls}} < 0,16756$, mentre $\lambda = 1$;

e nella ricerca inversa,

se $0^\circ 03' 00'' \leqslant x_0 \leqslant 0^\circ 07' 16''$, si ha $0'',00028 < \gamma'_{\mathrm{Ls}} < 0'',00070$,
„ $0^\circ 07' 17'' \leqslant x_0 \leqslant 1^\circ 12' 47''$, „ $0'',00002 < \gamma'_{\mathrm{Ls}} < 0'',00029$,
„ $1^\circ 12' 48'' \leqslant x_0 \leqslant 2^\circ 59' 59''$, „ $0'',00001 < \gamma'_{\mathrm{Ls}} < 0'',00003$;

mentre, corrispondentemente,

si ha $100 \leqslant \Delta y \leqslant 240$, da cui $0'',004 \leqslant \lambda' \leqslant 0'',010$,
„ $10 \leqslant \Delta y \leqslant 100$, „ $0'',01 \leqslant \lambda' \leqslant 0'',10$,
„ $4 \leqslant \Delta y \leqslant 10$, „ $0'',10 \leqslant \lambda' \leqslant 0''25$.

Quando $y = \mathrm{L} \tan x$, si hanno tutte le stesse limitazioni, colla sola differenza che il limite superiore della seconda limitazione di x_0 è $1^\circ 12' 58''$ invece di $1^\circ 12' 47''$, e (per conseguenza) il limite superiore della terza limitazione è $1^\circ 12' 59''$, invece di $1^\circ 12' 48''$.

Ed ora, confrontando i limiti superiori di γ_{Ls} e γ_{Lt} con λ e i varî limiti superiori trovati per γ'_{Ls} e γ'_{Lt} coi corrispondenti limiti inferiori di λ', si vede

che nella ricerca diretta il primo (quello di γ_{Ls}, o quello di γ_{Lt}), è in *tutti* i casi, minore di 2 decimi del secondo;

e che nella ricerca inversa il primo è certamente minore di 2 decimi del secondo per la prima limitazione (rispetto a x_0) di ciascuno dei sei gruppi considerati e di un decimo solo, per tutte le altre. Così, per es., per $n = 7$, $\Delta x = 10''$ e

$$5^\circ 00' 00'' \leqslant x_0 \leqslant 11^\circ 53' 40'',$$

si ha, in valore assoluto,

$$\gamma_{\mathrm{Ls}} < 0'',00070 < 0,0042 \times 0,2 < \lambda' \times 0,2\,.$$

Osservazione I. — Analoga alla Oss. II del § 42. Così, p. es., nel caso della ricerca inversa di logseno, nelle tavole considerate nel § 22 (dove $n=7$ e $\Delta x=10''$), si vede che, corrispondentemente alle quattro limitazioni stabilite per x_0, si ha

$$\mu'=0'',0005, \quad \mu'=0'',005, \quad \mu'=0'',05, \quad \mu'=0'',5;$$

e questi valori, confrontati con quelli che (sempre corrispondentemente) si ottengono per i limiti di $\gamma_{L_s}+\lambda'$, giustificano, nel solito modo, il nostro procedimento.

Osservazione II. — Alle conclusioni precedenti non si giungerebbe sempre se si usassero le tavole da noi considerate fra limiti diversi da quelli da noi stabiliti, o se si considerassero altre tavole.

Così, p. es., per la ricerca inversa relativa ad archi molto piccoli, l'Albrecht (l. c., *Einleitung*, pag. XI) dice che l'uso dei logaritmi rapporti S e T (poichè, per la ricerca diretta, a questi egli ricorre nel caso indicato, e non all'artifizio del § 30) non è di nessun reale vantaggio e che conviene meglio servirsi della tavola con $\Delta x=1''$. Orbene, per $x_0=42''$ e trattandosi di un logseno, si ha $\Delta y=1022$, onde $\mu'=0'',00005$; mentre invece dalla (32) del § 43 si deduce che g'_{L_s} può essere maggiore di $0'',0028$; si avrebbe dunque, col solito procedimento, *una* cifra certamente illusoria.

Adoperando poi nello stesso caso la tavola del Bruhns (*) si avrebbe $\Delta y=102191$, onde $\mu'=0000005$; e così, per quanto si è osservato ora, si avrebbero *tre* cifre certamente illusorie. E si noti bene che il Bruhns stesso, anche in questi casi, dà le tavolette ausiliarie per le interpolazioni; nè può obbiettarsi che queste si debbano usare solo per la ricerca diretta, perchè per $x_0=42''$ si ha certamente (come si deduce dalla (31) del § 43) g_{L_s} maggiore di 293 unità.

E così è giustificato il dubbio a cui si accenna nel § 40.

Osservazione III. — Nel caso di logseno, per x maggiore di $45°$ i limiti dell'errore g'_{L_s} crescono e crescono anche quelli di l'; quindi in questo caso è necessaria la separazione accennata nella Oss. III al § 42.

Osservazione IV. — Se $n=7$ e $\Delta x=10''$ (§ 22), si vede che, supponendo x compreso fra $5°$ e $85°$, nella ricerca inversa di logtangente la somma $g'_{L_t}+\lambda'$ è al più compresa fra $0'',0100$ e $0'',0233$; mentre che nella ricerca inversa di logseno, anche limitando x ad essere minore di $64°36'50''$, la stessa somma è compresa fra $0''01012$ e $0'',10031$. Se invece $n=5$ e $\Delta x=1'$ (§ 29), si vede che quella somma è compresa fra $0'',600$ e $2'',417$ per il logtangente, mentre che per il logseno, anche limitando x ad essere minore di $51°43'$, è compresa fra $0'',604$ e $30'',027$. Aggiungasi che, quando x supera $64°36'50''$ nel primo caso, e $51°43'$ nel secondo (essendo allora Δy minore di 2), la somma stessa può, rispettivamente, superare $10''$ e $1'$; e questo è chiaro.

È perciò che, come si dice in quasi tutti i trattati di *Trigonometria*, è sempre preferibile far in modo che le ricerche inverse siano per tangente anzichè per seno.

(*) *Nuovo manuale logaritmico.* Ed. Tauchnitz, Lipsia, 1889, pag. 188.

Osservazione V. — Anche dalle limitazioni (31), (32), (33) e (34) si può dedurre che i limiti superiori da noi indicati per g_{Ls}, g_{Lt}, g'_{Ls}, e g'_{Lt} *non potranno mai subire un abbassamento sensibile, qualunque altra via si segua per la loro ricerca.* Così, per $x_0 = 3°$ ed $n = 5$ e $\Delta x = 1'$ (§ 29), si ha

$$0{,}166 < \gamma_{Ls} < 0{,}168 \qquad 0'',041 < \gamma'_{Ls} < 0'',042$$

e le stesse limitazioni si hanno per γ_{Lt} e γ'_{Lt} rispettivamente; ora sapendosi che

$$\begin{array}{ll} \text{L sen } 3°09'00'' = \bar{2},7188001636, & \text{L tan } 3°00'00'' = \bar{2},7193957573, \\ \text{L sen } 3°00'00'' = \bar{2},7200037606, & \text{L tan } 3°00'30'' = \bar{2},7205026693, \\ \text{L sen } 3°01'00'' = \bar{2},7212040219, & \text{L tan } 3°01'00'' = \bar{2},7218062548, \end{array}$$

se si calcolano il logseno e il logtangente di 3°00'30" colla interpolazione semplice, si ha rispettivamente

$$\bar{2},7200020927 \qquad \text{e} \qquad \bar{2},7206010061$$

e quindi

$$g_{Ls} = g_{Lt} = +0{,}166\ldots;$$

e se, viceversa, si calcola (sempre colla interpolazione semplice) l'arco che ha per logseno e per logtangente, rispettivamente,

$$\bar{2},7200037606 \qquad \text{e} \qquad \bar{2},7206026693$$

si ha

$$3°00'30'',0415\ldots \qquad 3°00'30'',0414\ldots$$

e quindi

$$g'_{Ls} = g'_{Lt} = -0'',041\ldots$$

e, anche sulle cifre qui conservate per questi errori, gli errori l, m ed l', m' non hanno, evidentemente, nessuna influenza.

Osservazione VI. — Se, invece di avere delle tavolette calcolate per ogni differenza tavolare, si avessero delle tavolette per le differenze medie fra 10 differenze nei logaritmi dei numeri, e fra 15 differenze nei logaritmi trigonometrici, tutti gli errori g_L, g'_L, g_{Ls}, g'_{Ls} g_{Lt}, g'_{Lt} evidentemente aumenterebbero. Così nel caso delle tavole del Caillet, abbiamo dimostrato che i primi due vengono moltiplicati per 36 e gli altri quattro per 56 ([N₁], § 5, Oss. II e § 10, Oss. II). Aggiungasi che, in tale ipotesi, aumentano anche i limiti superiori degli errori l ed l' (*).

§ **45.** Consideriamo ora il caso in cui si ricorra ai logaritmi rapporti S e T (§ 24).

Nella ricerca diretta l'errore, che è dovuto al metodo indicato e che indicheremo con r_S ed r_T, consta di due errori:

1° quello dovuto all'ammettere il principio delle parti proporzionali nel calcolo di Lx'';

2° quello dovuto alla stessa causa nel calcolo di S o di T.

Il primo è l'errore g_L già studiato nel § 41; resta quindi a studiarsi il secondo, che indicheremo con g_S e g_T.

(*) V. *Appendice* citata (§ 27 e seguenti).

Perciò ricordiamo ([N_3], § 39) che g_S e g_T sono, rispettivamente, per difetto e per eccesso, e che in valore assoluto sono, sempre rispettivamente, minori

$$\text{di}\quad \frac{M\overline{\Delta x}^2}{8}\times\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x_1}-\frac{1}{x_1^2}\right)\quad \text{e}\quad \text{di}\quad \frac{M\overline{\Delta x}^2}{2}\left(\frac{1}{(2x_1)^2}-\frac{\operatorname{ctn} 2x_1}{\operatorname{sen} 2x_1}\right).$$

Ricordiamo pure che ambedue questi limiti sono sempre positivi, e che ambedue crescono al crescere di x_1. Per cui, attribuendo a γ_S e γ_T i soliti significati, avremo, come al solito,

$$(35)\qquad \frac{M\overline{\Delta x}^2}{8}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x_0}-\frac{1}{x_0^2}\right)<\gamma_S<\frac{M\overline{\Delta x}^2}{8}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x_1}-\frac{1}{x_1^2}\right),$$

$$(36)\qquad \frac{M\overline{\Delta x}^2}{2}\left(\frac{1}{(2x_0)^2}-\frac{\operatorname{ctn} 2x_0}{\operatorname{sen} 2x_0}\right)<\gamma_T<\frac{M\overline{\Delta x}^2}{2}\left(\frac{1}{(2x_1)^2}-\frac{\operatorname{ctn} 2x_1}{\operatorname{sen} 2x_1}\right).$$

Siccome però, nel nostro caso, x_0 è molto piccolo (minore di 30′) e x_1-x_0 è eguale a 10″ o a 50″ (§ 24), conviene trasformare le limitazioni precedenti in altre più adatte al calcolo numerico. Per ciò cominciamo dall'osservare che

$$(37)\quad \lim_{x=0}\left\{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{x^2}\right\}=\frac{1}{3},\qquad (38)\quad \lim_{x=0}\left\{\frac{1}{x^2}-\frac{\operatorname{ctn} x}{\operatorname{sen} x}\right\}=\frac{1}{6},$$

come si può vedere applicando, quattro volte di seguito, la regola dell'Hospital. Ricordiamo poscia che, indicando con a la misura circolare di un arco compreso fra 0 e $\frac{1}{2}\pi$, si ha

$$(39)\qquad 1-\frac{a^2}{2!}+\frac{a^4}{4!}-\frac{a^6}{6!}<\cos a<1-\frac{a^2}{2!}+\frac{a^4}{4!},$$

$$(40)\qquad a^2-\frac{a^4}{3}<\operatorname{sen}^2 a<a^2-\frac{a^4}{3}+\frac{2a^6}{45};$$

da cui, con facili trasformazioni,

$$(41)\qquad \frac{1}{\operatorname{sen}^2 a}-\frac{1}{a^2}<\frac{1}{3-a^2},$$

$$(42)\qquad \frac{1}{(2a)^2}-\frac{\operatorname{ctn} 2a}{\operatorname{sen} 2a}<\frac{1}{2}\times\frac{15+a^2+2a^4}{45-60a^2+32a^4}.$$

Sarà dunque

$$(43)\qquad \frac{M\overline{\Delta x}^2}{24}<\gamma_S<\frac{M\overline{\Delta x}^2}{8}\times\frac{1}{3-x_1^2},$$

$$(44)\qquad \frac{M\overline{\Delta x}^2}{12}<\gamma_T<\frac{M\overline{\Delta x}^2}{4}\times\frac{15+x_1^2+2x_1^4}{45-60x_1^2+32x_1^4}.$$

§ 46. Ed ora, per avere i limiti cercati di r_S e di r_T, basta osservare che, per quanto s'è detto nel § prec., si ha

$$r_S=g_S+g_L,\qquad r_T=g_T+g_L.$$

Nelle nostre ipotesi (§ 24), dalla (43) e dalla (44), se $16'40''<x<30'$, nel quale caso $\Delta x=10''$, si ha

$$0{,}0004253<\gamma_S<0{,}0004254,\qquad 0{,}0008506<\gamma_T<0{,}0008508,$$

e se $x < 16'40''$, nel quale caso $\Delta x = 50''$, si ha

$$0{,}0106331 < \gamma_s < 0{,}0106333, \qquad 0{,}0212663 < \gamma_T < 0{,}0212671;$$

mentre dalla (29), nel primo caso, essendo x'' compreso fra 1000″ e 1800″, si ha

$$0{,}0016755 < \gamma_L < 0{,}0054287,$$

e nel secondo caso, essendo x'' compreso fra 0 e 1000″, si ha

$$0{,}0000542 < \gamma_L < 0{,}0054287.$$

Ma gli errori g_L e g_S sono ambedue per difetto, mentre l'errore g_T è per eccesso: quindi, indicando con ρ_S e ρ_T dei limiti superiori inabbassabili di r_S ed r_T, ρ_S sarà eguale a $\gamma_S + \gamma_L$, mentre ρ_T, essendo γ_L maggiore o minore di γ_T secondo che x'' è maggiore o minore di 1000″ (come risulta dalle precedenti limitazioni), sarà rispettivamente eguale a γ_L o a γ_T. Si avrà dunque

$$0{,}0021008 < \rho_S < 0{,}0058541, \qquad 0{,}0016755 < \rho_T < 0{,}0054287$$

per $16'40'' < x < 30'$, e

$$0{,}0106874 < \rho_S < 0{,}0160620, \qquad 0{,}0212663 < \rho_T < 0{,}0212671$$

per $x < 16'40''$.

Ed ora, confrontando i limiti superiori di ρ_S e di ρ_T col valore di λ dato dalla (24), si conclude che i primi sono sempre minori di 2 centesimi del secondo (§ 40).

Osservazione I. — Dai valori numerici trovati nel nostro caso per le limitazioni di γ_S e di γ_T si deduce, al solito (§ 42, Oss. IV, § 44, Oss. V), che i limiti superiori da noi indicati per g_S e g_T *non potranno mai subire un abbassamento sensibile, qualunque altra via si segua per la loro ricerca.*

Osservazione II. — Vogliamo mostrare con un esempio, come per gli errori considerati possa essere utile anche la conoscenza degli indicati limiti inferiori (§ 42, Oss. I).

Il Callet (*) dà i logaritmi rapporti S e T fino a 3° e con $\Delta x = 60''$: ebbene, per x maggiore di 2°46′40″ (= 10000″) e $\Delta x = 1''$, dalle (31) e (33) si ha (considerando come cifra delle unità la ottava cifra decimale, perchè da 1000 in poi le mantisse dei logaritmi dei numeri sono date con otto cifre)

$$\gamma_{L_s} < 0{,}054, \qquad \gamma_{L_t} < 0{,}054;$$

mentre che per x maggiore di 2°46′40′ e $\Delta x = 60'$, dalla (35) e (36) si ha

$$\gamma_S > 0{,}152, \qquad \gamma_T > 0{,}306.$$

Quindi il limite superiore (non abbassabile, sensibilmente) dell'errore che si può commettere coll'uso dei logaritmi rapporti nella ricerca diretta, è certamente maggiore del limite superiore dell'errore che

(*) Già citato in una nota al § 21; però il metodo cui ivi accennammo, non è quello che prendiamo in considerazione ora. ([N°2], §§ 33 e 41.)

si può commettere usando l'ordinaria tavola di secondo in secondo. E si noti bene che, oltre l'aver trascurato l'errore g_L, non si è tenuto conto del fatto che λ nel primo caso è eguale a 1,2 (§ 38) mentre nel secondo è eguale a 1 soltanto (§ 32).

§ **47.** Nella ricerca inversa l'errore che è dovuto al metodo indicato (§ 24) e che indicheremo con r'_S ed r'_T, consta di tre errori:

1° quello dovuto all'ammettere il principio delle parti proporzionali nel calcolo di S, o di T;

2° quello dovuto al trascurare, nel calcolo ora accennato, le frazioni di secondo (chè non si conoscono);

3° quello dovuto all'ammettere il solito principio nella ricerca inversa di Lx''.

Il primo deriva dagli errori g_S e g_T già studiati nel § 45, e il terzo è l'errore g'_L studiato nel § 41; restano quindi a studiarsi gli errori dai quali deriva il secondo e che indicheremo con d_S e d_T.

Osserviamo prima di tutto che, indicando con ΔS e ΔT gli aumenti che subiscono S e T quando l'arco cresce da x_0 a $x_1 = x_0 + \Delta x$, e con δ_S e δ_T i massimi, o dei limiti superiori inabbassabili, dei valori assoluti di d_S e di d_T, siccome questi errori possono essere tanto per eccesso che per difetto, δ_S e δ_T saranno rispettivamente eguali alla metà dei valori assoluti di ΔS e di ΔT. Ora, le prime due derivate di S sono

$$M\left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}\right) \qquad \text{ed} \qquad L\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right),$$

e, nel nostro caso, sono ambedue negative; quindi, al crescere di x, S cala e la sua derivata prima cresce, in valore assoluto; sarà dunque

$$(45) \qquad M\Delta x\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{\tan x_0}\right) < \Delta S < M\Delta x\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{\tan x_1}\right).$$

Analogamente: le prime due derivate di T sono

$$2M\left(\frac{1}{\operatorname{sen} 2x} - \frac{1}{2x}\right) \qquad \text{e} \qquad 4M\left(\frac{1}{(2x)^2} - \frac{\operatorname{ctn} 2x}{\operatorname{sen} 2x}\right),$$

e, nel nostro caso, sono ambedue positive; quindi, al crescere di x, T cresce e cresce pure la derivata prima, sarà dunque

$$(46) \qquad 2M\Delta x\left(\frac{1}{\operatorname{sen} 2x_0} - \frac{1}{2x_0}\right) < \Delta T < 2M\Delta x\left(\frac{1}{\operatorname{sen} 2x_1} - \frac{1}{2x_1}\right).$$

Anche qui però conviene trasformare queste limitazioni in altre più adatte al calcolo numerico. Per ciò cominciamo dall'osservare che

$$(47) \quad \lim_{x=0}\left\{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x}\right\} = \frac{1}{3}, \qquad (48) \quad \lim_{x=0}\left\{\frac{1}{x \operatorname{sen} x} - \frac{1}{x^2}\right\} = \frac{1}{6},$$

come si può vedere applicando tre volte di seguito la regola dell'HOSPITAL. Ricordiamo poscia che, oltre le (39) e (40), si ha anche

$$(49) \qquad a - \frac{a^3}{3!} < \operatorname{sen} a < a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!},$$

e con facili trasformazioni si avrà

$$(50)\quad \frac{1}{a}-\frac{1}{\tan a}<\frac{40a+a^3}{120-2a^2}, \qquad (51)\quad \frac{1}{\operatorname{sen}2a}-\frac{1}{2a}<\frac{a}{3-2a^2}.$$

Sarà dunque

$$(52)\quad \frac{M\Delta x}{6}\times x_0<\delta_S<\frac{M\Delta x}{2}\times\frac{40x_1+x_1^3}{120-2x_1^2},$$

$$(53)\quad \frac{M\Delta x}{3}\times x_0<\delta_T<M\Delta x\times\frac{x_1}{3-2x_1^2}.$$

§ **48.** Ed ora, per avere dei limiti per r'_S ed r'_T, bisogna osservare che ambedue gli errori d_S e g_S, come ambedue gli errori d_T e g_T, affettano Lx'', per cui (§ 32, Oss. III), essi produrranno in x'' un errore rispettivamente eguale a $(d_S+g_S):\Delta y$ e a $(d_T+g_T):\Delta y$; a ciascuno di questi ultimi si aggiunge poi l'errore g'_L, per cui sarà

$$r'_S=\frac{d_S+g_S}{\Delta y}+g'_L, \qquad r'_T=\frac{d_T+g_T}{\Delta y}+g'_L.$$

Nelle nostre ipotesi, considerando dapprima il caso in cui x'' sia compreso fra 16'40'' e 30', dalle (52), (53) si ha

$$0{,}0170130<\delta_S<0{,}0306258, \qquad 0{,}0340261<\delta_T<0{,}0612502,$$

da cui, essendo

$$241\leqslant\Delta y\leqslant 435$$

(perchè x'' è compreso fra 1000'' e 1800''), si ricava

$$0{,}0000391<\frac{\delta_S}{\Delta y}<0{,}0001271, \qquad 0{,}0000782<\frac{\delta_T}{\Delta y}<0{,}0002542.$$

Inoltre colle prime limitazioni trovate nel § 46 per γ_S e γ_T (essendo ora $\Delta x=10''$) si ha

$$0{,}0000009<\frac{\gamma_S}{\Delta y}<0{,}0000018, \qquad 0{,}0000019<\frac{\gamma_T}{\Delta y}<0{,}0000036;$$

e finalmente (sempre per i limiti fra i quali ora si suppone compreso x'') dalla (39) si ha

$$0{,}0000069<\gamma'_L<0{,}0000126.$$

Ma ciascuno degli errori d_S e d_T può essere tanto per eccesso che per difetto, gli errori g_S e g_T sono rispettivamente per difetto e per eccesso, l'errore g'_L è sempre per eccesso; quindi, indicando, al solito, con ρ'_S e ρ'_T dei limiti superiori inabbassabili di r'_S ed r'_T, ρ'_T sarà eguale a $(\gamma_T+\delta_T):\Delta y+\gamma'_L$, mentre che ρ'_S, essendo nelle nostre ipotesi $\delta_S:\Delta y+\gamma'_S$ maggiore di $\gamma_S:\Delta y+\delta_S$ (come risulta dalle precedenti limitazioni), sarà eguale al primo di questi valori. Si conclude che per x'' compreso fra 16'40'' e 30', si ha

$$0{,}0000442<\rho'_S<0{,}0001388, \qquad 0{,}0000870<\rho'_T<0{,}0002704.$$

Mentre che dalla (26), sempre tenendo conto dei limiti fra i quali ora si suppone compreso x'', si ha

$$0{,}0045977<\lambda'<0{,}0082988;$$

quindi i limiti superiori trovati per ρ'_S e ρ'_T sono certamente minori di 6 centesimi del limite inferiore di λ' (§ 40).

Bisogna però ricordare che nei valori numerici di tutti questi limiti si considera come cifra delle unità l'ultima cifra di x_0, ossia la quinta cifra di x'' (§ 10), mentre nel caso ora considerato la parte intera di x'' ha quattro cifre sole, volendo quindi esprimere quei valori in secondi, si avrà

$$0'',00000442 < \rho'_S < 0'',00001388, \qquad 0'',00000870 < \rho'_T < 0'',00002704$$
$$0'',00045977 < \lambda' < 0'',00082988.$$

§ **49.** Consideriamo ora il caso in cui x'' sia compreso fra $0''$ e $1000''$.

I limiti di γ_S e di γ_T, essendo ora $\Delta x = 50''$, sono quelli dati dalle seconde limitazioni trovate per questi valori nel § 46; per cui, essendo ora

$$43 \leqslant \Delta y \leqslant 435,$$

si ha

$$0{,}0000244 < \frac{\gamma_S}{\Delta y} < 0{,}0002473, \qquad 0{,}0000488 < \frac{\gamma_T}{\Delta y} < 0{,}0004946.$$

E i limiti di γ'_L, essendo ora x'' compreso fra $0''$ e $1000''$, sono dati da (§ 41)

$$0{,}0000012 < \gamma'_L < 0{,}0000126.$$

Restano dunque a trovare solo i nuovi limiti di δ_S e di δ_T.

Per ciò si cominci dall'osservare che per x'' compreso fra $100''$ e $1000''$ si ha

$$0{,}0017013 < \delta_S < 0{,}0170132, \qquad 0{,}0034026 < \delta_T < 0{,}0340267;$$

e quindi

$$0{,}0000039 < \frac{\delta_S}{\Delta y} < 0{,}0003956, \qquad 0{,}0000078 < \frac{\delta_T}{\Delta y} < 0{,}0007913.$$

Volendo ora le stesse limitazioni per x'' compreso fra $10''$ e $100''$, fra $1''$ e $10''$, ... basterà dividere per 10, per 100, ... gli estremi di queste ultime due limitazioni. Infatti, per i limiti inferiori ciò risulta evidente dalle (52) e (53); e per i limiti superiori basta notare che i limiti superiori delle stesse (52) e (53) si possono mettere sotto le forme

$$\frac{M\Delta x}{2}\, x_1 \times \left(\frac{40 + x_1^2}{120 - 2x_1^2}\right) \qquad \text{e} \qquad M\Delta x\, x_1 \times \left(\frac{1}{3 - 2x_1^2}\right),$$

e che le funzioni fra parentesi calano al calare di x_1; per cui i limiti ottenuti nel modo ora indicato saranno a più forte ragione maggiori dei corrispondenti valori di δ_S e di δ_T.

Ed ora è facile, seguendo il procedimento del precedente §, vedere che si ha successivamente

per $100'' < x'' < 1000''$, $0{,}0000283 < \rho'_S < 0{,}0006429$, $0{,}0000578 < \rho'_T < 0{,}0012985$

„ $10'' < x'' < 100''$, $0{,}0000247 < \rho'_S < 0{,}0002869$, $0{,}0000507 < \rho'_T < 0{,}0005764$

„ $1'' < x'' < 10''$, $0{,}0000244 < \rho'_S < 0{,}0002583$, $0{,}0000500 < \rho'_T < 0{,}0005154$

. . . .

E, al limite, per x tendente a zero, siccome i limiti di δ_T e δ_T tendono a zero, e invece quelli di γ_S e γ_T restano sempre gli stessi, si ha

$$0{,}0000244 < \rho'_S < 0{,}0002473, \qquad 0{,}0000500 < \rho'_T < 0{,}0005072.$$

Mentre che dalla (26), in questo caso, si ha

$$0{,}0045977 < \lambda' < 0{,}0465117;$$

quindi i limiti superiori trovati per ρ'_S e ρ'_T sono certamente minori di 3 decimi del limite inferiore di λ' (§ 40).

Bisogna però ricordare, anche qui, che in tutti questi limiti si considera per cifra delle unità la quinta cifra di x'', e che quindi, volendo esprimere i limiti stessi in secondi, bisogna dividerli per 100, 1000, 10000, ...

Osservazione I. — Il metodo precedente per x minore di 2″ coincide, come vedremo, col metodo del § 30 (quando, s'intende, si considerino *sette* cifre decimali soltanto).

Osservazione II. — Analoga alla Oss. I del § 44. Così, p. es., se x è compreso fra 1″ e 10″, per la ricerca inversa di logseno si ha

$$0'',046221 \times 10^{-5} < \rho'_S + \lambda' < 0'',467630 \times 10^{-5}$$

mentre che, essendo la parte intera di x'' di una sola cifra, si ha

$$\mu' = 0'',05 \times 10^{-5};$$

quindi, generalmente, μ' sarà minore della somma $\rho'_S + \lambda'$, senza essere minore di un decimo della somma stessa (§ 11).

Osservazione III. — Analoga alla Oss. II del § 44. Così, p. es., nelle tavole dello Schrön (*) non si trova una tavola di logseni e logtangenti di 1″ in 1″; quindi, dovendosi (nella applicazione del metodo dei logaritmi rapporti) servire delle solite tavole di 10″ in 10″, i limiti di δ_S e di δ_T sono, circa, decupli di quelli suindicati. Inoltre il metodo stesso si estende fino ad $x = 3^0$ e in fondo ad ogni pagina è indicato l'approssimazione che si può raggiungere. Ora, per $x = 2^0 48'$ (= 10080″) e per un logtangente, l'approssimazione indicata è 0″,008, mentre si ha $\mu' = 0'',00005$ (perchè la parte intera di x'' è di cinque cifre, mentre che, essendo Δy di *tre* cifre e x_0 di *sei* l'arco cercato si ha con nove cifre); quindi, seguendo il procedimento indicato, si avrebbe certamente una cifra almeno illusoria. E si noti che nel limite indicato dalla tavola non si considera che l'errore d_T (come facilmente si verifica), e quindi non si tiene conto degli errori g_T e g'_L.

Osservazione IV. — Analoga alla Oss. III del § 44; perchè, da quanto precede, risulta che i limiti superiori di γ_S e γ_T e i limiti superiori e inferiori di δ_S e δ_T calano dividendo x'' per una potenza di 10; mentre quelli di γ'_L sono sempre gli stessi.

Osservazione V. — Per vedere anche qui che le nostre limitazioni (52) e (53) *non potranno mai subire un abbassamento sensibile, qualunque sia il metodo che si possa seguire per la loro ricerca*, si osservi che per $x_1 = 30'$ e $x_0 = 29'59''$ si ha

$$0{,}0306 < \delta_S < 0{,}0307, \qquad 0{,}0612 < \delta_T < 0{,}0613.$$

(*) *Tables de logarithmes*. Ed. Gauthier Villars, Parigi, 1894; p. 187.

OSSERVAZIONE VI. — Riprendendo il caso considerato nella Oss. II al § 46, cerchiamo dei limiti inferiori anche per ρ'_s e ρ'_T.

Considerando, anche ora, come cifra delle unità la ottava cifra decimale, si ha, come allora,

$$\gamma_s > 0{,}1531 \quad \text{e} \quad \gamma_T > 0{,}3062;$$

ma, nelle stesse ipotesi, si ha

$$\delta_s > 1{,}7013 \quad \text{e} \quad \delta_T > 3{,}4026,$$

e siccome

$$\Delta y \geqq 435,$$

si avrà

$$(\gamma_s + \delta_s) : \Delta y > 0{,}004263, \qquad (\gamma_T + \delta_T) : \Delta y > 0{,}008526.$$

Per cui, trascurando l'errore g_L ed osservando che la parte intera di x'' ha cinque cifre sole, si ha

$$\rho'_s > 0'',0004263, \qquad \rho'_T > 0'',0008526.$$

Mentre che dalla (32) e (34) per x maggiore di $2°46'40''$ si ha

$$\gamma'_{Ls} < 0'',0000126, \qquad \gamma'_{Lt} < 0'',0000125.$$

Anche nella ricerca inversa dunque il limite superiore dell'errore che si commette ricorrendo ai logaritmi rapporti è maggiore del limite superiore dell'errore che si commette usando la solita tavola di 1″ in 1″ (e, per quanto si è detto nella Oss. precedente e nella Oss. I al § 46, questi limiti sono inabbassabili); e si noti bene che non si è tenuto conto del fatto che il valore di λ' nel primo caso è doppio del valore di λ' nel secondo.

È quindi strano che la ragione, per la quale la tavola dei logaritmi dei numeri qualche volta è spinta fino a 10800, paia (*) solo quella di potere usare i logaritmi rapporti anche da $2°46'40''$ ($= 10000''$) a $3°$ ($= 10800''$).

§ 50. Non restano più da studiare che gli errori dovuti al metodo indicato nel § 30.

Nella ricerca diretta l'errore, che è dovuto a questo metodo e che indicheremo con r_s ed r_T, consta di due errori:

1° quello dovuto all'ammettere le (14);

2° quello dovuto all'ammettere il principio delle parti proporzionali nel calcolo di Lx''.

Il secondo è il solito errore g_L già studiato al § 41; resta quindi a studiarsi il primo che indicheremo con d_s e d_t.

Per ciò osserviamo che d_s e d_t sono rispettivamente per eccesso e per difetto e ricordiamo ([N₂], § 20) che per un determinato arco x essi, in valore assoluto, sono, sempre rispettivamente, minori

$$\text{di} \quad \frac{Mx^2}{2} \times \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) \quad \text{e di} \quad \frac{2}{M(2x)^2}\left(\frac{1}{(2x)^2} - \frac{\operatorname{ctn} 2x}{\operatorname{sen} 2x}\right).$$

(*) CAILLET, l. c. *Avertissement*, pag. v; — HOUEL, l. c. *Avertissement*, pag. v.

Ricordiamo inoltre che ambedue questi limiti sono sempre positivi e che ambedue crescono al crescere di x.

Da tutto questo e dalla (37) e (38) risulta che, indicando con δ_s e δ_t i valori assoluti di d_s e d_t, per un determinato arco x si ha

$$(54) \qquad \frac{Mx^2}{6} < \delta_s < \frac{Mx^2}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right),$$

$$(55) \qquad \frac{M(2x)^2}{12} < \delta_t < \frac{M(2x)^2}{2}\left(\frac{1}{(2x)^2} - \frac{\operatorname{ctn} 2x}{\operatorname{sen} 2x}\right).$$

Anche qui però conviene trasformare i limiti superiori in altri più adatti al calcolo; e perciò dalle (41) e (42) si ha senz'altro, per un determinato arco x,

$$(56) \qquad \frac{Mx^2}{6} < \delta_s < \frac{Mx^2}{2} \times \frac{1}{3 - x^2},$$

$$(57) \qquad \frac{Mx^2}{3} < \delta_t < Mx^2 \times \frac{15 + x^2 + 2x^4}{45 - 6x^2 + 32x^4}.$$

§ **51.** Ed ora per avere i limiti di r_s e di r_t basta osservare che, per quanto s'è detto nel § prec., si ha

$$r_s = d_s + g_L, \qquad r_t = d_t + g_L.$$

Nelle nostre ipotesi (§ 30), essendo x minore di 3', dalle (56) e (57) si ha

$$\delta_s < 0{,}0055123 \qquad \delta_t < 0{,}0110245,$$

e dalla (29) si ha

$$0{,}0000542 < \gamma_L < 0{,}0054287.$$

Ma gli errori g_L e d_t sono ambedue per difetto, mentre l'errore d_s è per eccesso; quindi, indicando con ρ_s e ρ_t dei limiti superiori inabbassabili di r_s ed r_t, ρ_t sarà eguale a $\delta_t + \gamma_L$, mentre ρ_s, essendo il limite superiore di γ_L minore del limite superiore di δ_s, sarà eguale a quest'ultimo. Si avrà dunque

$$\rho_s < 0{,}0055123, \qquad \rho_t < 0{,}0164532.$$

Ed ora, ricordando che in questo caso $\lambda = 1$ (§ 39), si conclude che il limite superiore dell'errore in questione è sempre minore di 2 centesimi di λ (§ 40).

Osservazione I. — Anche per le (56) e (57), si può arrivare alla solita conclusione (§ 42, Oss. IV; § 44, Oss. V; § 46, Oss. I; § 49, Oss. V). Così, per $x = 3'$ si ha

$$0{,}00551223 < \delta_s < 0{,}00551224, \qquad 0{,}01102446 < \delta_t < 0{,}01102448.$$

Osservazione II. — Dalle limitazioni trovate nella Oss. prec. si deduce che, se, invece di cinque cifre decimali, se ne volessero tenere sette, questo metodo non si potrebbe più seguire, perchè per x eguale a 3' si avrebbe già

$$\delta_s > 0{,}551, \qquad \delta_t > 1{,}102.$$

Osservazione III. — Si noti che δ_s e δ_t non rappresentano (in valore assoluto) dei limiti superiori inabbassabili dei corrispondenti errori (come accade per γ_L, γ'_L, γ_{Ls}, γ'_{Ls}, γ_{Lt}, γ'_{Lt}, γ_S, γ_T, δ_S, δ_T); ma rappresentano invece i valori assoluti degli errori stessi.

§ **52.** Nella ricerca inversa l'errore che è dovuto allo stesso metodo e che indicheremo con r'_s ed r'_t, consta pure di due errori:

1° quello dovuto all'ammettere il solito principio nella ricerca inversa di Lx'';

2° quello dovuto al supporre il seno e la tangente eguale all'arco. Il primo è il solito errore g'_L studiato nel § 41; resta quindi a studiare il secondo, che indicheremo con e_s ed e_t.

Per ciò osserviamo che e_s ed e_t sono rispettivamente per difetto e per eccesso; osserviamo poscia che dalla (39) e (49), indicando con ε_s ed ε_t i valori assoluti di e_s e di e_t, per un determinato arco x si ha

$$\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}<\varepsilon_s<\frac{x^3}{3!},$$

$$\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{4!}<\varepsilon_t<\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5!}\right):\left(1-\frac{x^2}{2!}\right);$$

da cui, intendendo che x'', ε_s ed ε_t rappresentino l'arco e i valori assoluti precedenti tutti espressi in secondi,

$$\text{(58)}\qquad \frac{x^2}{6}\left(1-\frac{x^2}{20}\right)x''<\varepsilon_s<\frac{x^2}{6}\,x''.$$

$$\text{(59)}\qquad \frac{x^2}{3}\left(1-\frac{x^2}{8}\right)x''<\varepsilon_t<\frac{x^2}{3}\left(\frac{40+x^2}{40-20x^2}\right)x''.$$

§ **53.** Ed ora, per avere i limiti cercati di r'_s e di r'_t, basta osservare che, per quanto s'è detto nel § prec., si ha

$$r'_s=g'_L+e_s,\qquad r'_t=g'_L+e_t.$$

Nelle nostre ipotesi, considerando dapprima il caso in cui x'' sia compreso fra 1'40" e 3', dalla (58) e (59) si ha

$$0'',0000039<\varepsilon_s<0'',0000229,\qquad 0'',0000078<\varepsilon_t<0'',0000457,$$

e dalla (30), essendo x'' compreso fra 100" e 180", si ha

$$0'',0000069<\gamma'_L<0'',0000126,$$

dove si è spostata la virgola di un posto a sinistra, perchè nei valori dati dalla (30) la cifra delle unità è l'ultima cifra di x_0, ossia (per il tipo di tavole che stiamo considerando) la quarta cifra di x'', mentre che, nel nostro caso, la parte intera di x'' non ha che tre cifre sole.

Ma gli errori g'_L ed e_t sono ambedue per eccesso, mentre l'errore e_s è per difetto; quindi, indicando con ρ'_s e ρ'_t dei limiti superiori inabbassabili di r'_s e di r'_t, ρ'_t, sarà eguale a $\gamma'_L+\varepsilon_t$; mentre che ρ'_s, essendo il limite superiore di ε_s maggiore del limite superiore di γ'_L, e il limite inferiore di ε_s minore del limite inferiore di γ'_L, sarà compreso fra il limite superiore di ε_s e il limite inferiore di γ'_L. Si avrà dunque

$$0'',0000069<\rho'_s<0'',0000229,\qquad 0'',000147<\rho'_t<0'',0000583.$$

Mentre che dalla (28), essendo

$$24 \leqslant \Delta y \leqslant 44$$

(perchè x'' è compreso fra 100″ e 180″), si ha

$$0'',0033772 < \lambda' < 0'',0061959,$$

dove, come si è fatto per i limiti di γ'_L, si è spostata la virgola di un posto verso sinistra.

§ **54.** Consideriamo ora il caso in cui x'' sia compreso fra 0″ e 100″. Se la parte intera di x'' avesse quattro cifre, ossia se la prima cifra di x'' fosse di ordine 3, si avrebbe sempre (§ 42),

$$0,00001250 < \gamma'_L < 0,00012513,$$

quindi, se la prima cifra di x'' è di ordine p si ha

$$0'',00001250 \times 10^{p-3} < \gamma'_L < 0'',00012513 \times 10^{p-3}.$$

In quanto ai limiti di ε_s e di δ_t, si può seguire una via analoga a quella del § 49. Per ciò si calcolino prima gli estremi delle limitazioni (58) e (59) per $x = 10''$ (gli estremi inferiori) e per $x = 100''$ (gli estremi superiori), poi si osservi che per x'' compreso fra 1″ e 10″, fra 0″,1 e 1″,... basta dividere gli estremi stessi per 10^3, per 10^6,... Infatti, al calare di x'', le quantità che compaiono fra parentesi nei due limiti inferiori della (58) e dalla (59) crescono, mentre quella che comparisce fra parentesi nel limite inferiore della (59) cala; per cui i limiti ottenuti nel modo ora indicato saranno a più forte ragione rispettivamente minori e maggiori dei corrispondenti valori di ε_s e di ε_t. Se quindi si attribuisce a p il significato precedente, si ha

$$0'',0000000039 \times 10^{3p-3} < \varepsilon_s < 0'',0000039175 \times 10^{3p-3},$$
$$0'',0000000078 \times 10^{3p-3} < \varepsilon_t < 0'',0000078349 \times 10^{3p-3}.$$

Ed ora, seguendo il procedimento del precedente §, si vede subito che

per $10'' < x'' < 100''$, si ha $0'',0000001250 < \rho'_s < 0'',0000039175$,
e $0'',0000001328 < \rho'_t < 0'',0000090862$,
e per $1'' < x'' < 10''$, si ha $0'',00000001250 < \rho'_s < 0'',00000012513$,
e $0'',00000001251 < \rho'_t < 0'',00000013297$.

E, al limite, per x'' tendente a zero, ε_s ed ε_t tendono a zero, e quindi ρ'_s e ρ'_t hanno gli stessi limiti di γ'_L.

Mentre che dalla (28), essendo ora

$$4 \leqslant \Delta y \leqslant 44,$$

si ha, attribuendo a p il significato precedente,

$$0'',033772 \times 10^{p-3} < \lambda' < 0'',371750 \times 10^{p-3};$$

per cui, confrontando i limiti superiori di ρ'_s e di ρ'_t col limite inferiore di λ', si vede che i primi sono sempre minori di 3 centesimi del secondo (§ 40).

Osservazione I. — Nel § 49 ci è parso più comodo e più sollecito considerare sempre come cifra delle unità la quarta cifra di x''; ma in quest'ultimo § abbiamo preferito esprimere tutti i limiti in frazioni decimali di secondo addirittura, perchè così ci è convenuto esprimere quelli di ε_s e di ε_t. Sarebbe però facile seguire un metodo uniforme per ambedue i casi.

Osservazione II. — Per dimostrare ora quanto si asserì nella Oss. I al § 59, si osservi che per x'' minore di $2''$ i logaritmi rapporti S e T, fino alla settima cifra decimale (arrotondata), sono precisamente eguali a $-$ LR″, e quindi le (13) coincidono colle (14)′.

Osservazione III. — Analoga alla Oss. II del § 42. Così, per x'' compreso fra $1'40''$ e $3''$ si ha

$$0'',00339 < \rho'_t + \lambda' < 0'',00626$$

e

$$\mu' = 0'',0005,$$

(perchè Δy ha due cifre e la parte intera di x'' ne ha tre); quindi μ' è certamente minore di $\rho'_t + \lambda'$, senza essere minore di un decimo della stessa somma (§ 11).

Osservazione IV. — Analoga alla Oss. III del § 42.

Osservazione V. — Anche per le (58) e (59) si può arrivare alla solita conclusione (§ 51, Oss. I). Così, per $x = 3'$ si ha

$$0'',0000228462 < \varepsilon_s < 0'',0000228463; \qquad 0'',0000456926 < \varepsilon_t < 0'',0000456927.$$

Osservazione VI. — Per ε_s ed ε_t si deve ripetere una osservazione analoga a quella fatta per δ_s e δ_t (§ 51, Oss. III).

CONCLUSIONE.

§ **55.** Lo studio della questione, che ci eravamo proposta (come cioè si debbano eseguire i calcoli numerici per la ordinaria interpolazione nelle tavole logaritmo-trigonometriche), ci ha condotti a considerazioni molto più estese di quelle che esso richiedeva, specialmente nei primi due capitoli e nella seconda parte del quarto. Crediamo però di non avere fatto cosa inutile.

L'argomento dei primi due capitoli ci pare di tale importanza pratica da dover costituire (opportunamente modificato) un nuovo capitolo della ordinaria *Aritmetica;* e questo perchè, essendo la teoria delle approssimazioni numeriche generalmente bandito dalle nostre scuole, non si ha nessun criterio ben definito per eseguire opportunamente le operazioni sui numeri che ordinariamente si presentano nelle applicazioni.

Inoltre, la seconda parte dell'ultimo capitolo (la quale potrebbe essere applicata a qualunque altro tipo di tavole logaritmo-trigonometriche si volesse considerare) completa le nostre ricerche in proposito; perchè nella nota [N_1] non considerammo tutti i metodi e ci riferimmo solo alle tavole del Caillet, e nella nota [N_2] ci occupammo solo della ricerca diretta. E anche l'importanza di questo studio ci pare sufficientemente dimostrata, non solo dalla applicazione che ha avuto alla nostra ricerca, ma per molte altre che se ne possono fare. Le osservazioni VI, del § 42, VI del § 44, II del § 46, VI del § 49 ne sono esempî notevoli; ma, esaminando i risultati ottenuti se ne possono aggiungere molte altre.

Così, per es., in un calcolo logaritmo-trigonometrico con cinque cifre decimali, quando si abbia una tavola di 1'' in 1'' per i primi tre gradi, non occorre affatto ricorrere ai logaritmi rapporti, che presentano sempre qualche difficoltà (per l'uso poco frequente che occorre di farne) e che, generalmente, richiedono uno spazio non trascurabile nelle tavole dei logaritmi dei numeri.

Come altro esempio: dalla Oss. II del § 49 risulta che in un calcolo logaritmo-trigonometrico con sette cifre decimali non si potrebbe per gli archi piccoli applicare il metodo del § 30. Ma da tutti i risultati ottenuti nei §§ 44, 45...49 si vede che quando si abbia una tavola di 1'' in 1'' per i primi cinque gradi, basta ricorrere ai logaritmi rapporti solo per archi minori di 30'.

Come ultimo esempio: i limiti inferiori degli errori d'interpolazione fanno vedere come errino tutti coloro, e sono molti, i quali asseriscono che per $\Delta x = 1''$ l'errore di interpolazione è trascurabile ([N_2], §§ 16, 17, 18, 19); e come nelle tavole si mettono spesso le colonne delle differenze tavolari anche dove l'interpolazione non si può fare ([N_3], §§ 8, 9, 10, 16...). Notevole fra questi il Bruhns (l. c.), il quale dà le tavolette delle parti proporzionali per x compreso fra 0' e 10', mentre per $x = 1'$ l'errore g_{L_a} può essere maggiore di 150 unità dell'ultimo ordine.

§ 56. Tutte le regole date nel terzo capitolo (e la cui ricerca, come abbiamo ora accennato, dette luogo a questo studio) si riducono, in sostanza, alle due, semplicissime, del § 42. E, per convincersi della loro opportunità, basta vedere l'incertezza e la varietà dei criteri che, in proposito, si trovano anche nei libri più noti e più pregevoli.

In una tavola di logaritmi di numeri a sette cifre, il Serret (*) dice che nella ricerca diretta basta, in generale, fermarsi al terzo prodotto parziale, mentre con questo criterio si può o tener conto di un prodotto inutile, o commetter un errore non trascurabile (§ 42, Oss. V); nella ricerca inversa poi stabilisce che (per la parte proporzionale) si debbano sempre prendere due cifre, mentre egli stesso (**) alle volte ne piglia *una* e alle volte *tre*. Il Todhunter (***) non stabilisce nessun criterio fisso, però essendo Δy di tre cifre, piglia per parte proporzionale ora *due*, ora *tre* cifre. Il Barbarin (****) poi, nello stesso caso, ne piglia indifferentemente o *una*, o *due*, o *tre*. E vogliamo anche citare il Goodwin (*****) il quale (in una tavola a *sei* cifre

(*) Serret, *Traité d'Arithmétique* (Ed. Gauthier-Villars, Parigi, 1875; pagg. 269, 270).

(**) Serret, *Traité de Trigonométrie* (Ed. Gauthier-Villars, Parigi, 1888; pagg. 115, 109).

(***) Todhunter, *Trigonometria piana*, versione del Prof. Vito (Ed. Pellerano, Napoli, 1875, pagg. 124, 126.

(****) Barbarin, *Recueil de calculs logarithmiques* (Ed. Nony, Parigi, 1893; pagg. 19, 38).

(*****) Goodwin, *Plane and spherical Trigonometry* (Ed. Longmans, Londra, 1891; pag. 74, 75). Libro di testo nella Scuola Navale di Greenwich.

decimali) in uno stesso esempio, essendo Δy di tre cifre, piglia *due* cifre quando fa il calcolo direttamente e ne piglia invece *tre* quando si serve delle tavolette ausiliarie calcolate sulla differenza media fra dieci differenze (§ 38, Oss.), mentre l'approssimazione che si può raggiungere in questo secondo modo è minore di quella che si può raggiungere nel primo (§ 44, Oss. VI).

Per la ricerca inversa, in una tavola di logaritmi trigonometrici a *sette* decimali e con $\Delta x = 10''$, il Serret (l. c.), il Briot (*), il De Comberousse (**), e molti altri stabiliscono di fermarsi, per tutte le funzioni, ai centesimi di secondo; e quelli che vogliono giustificare questo criterio si basano sul fatto che per il logaritmotangente l'errore totale di interpolazione ha per limite superiore 0'',03: ma come si può poi adottare lo stesso criterio per il logaritmoseno, quando a 87^0, p. es., l'errore stesso può superare 1''? Il Vacquant (***), invece, stabilisce di fermarsi sempre ai decimi di secondo. Lo Chauvenet (****) non stabilisce nessun criterio, ma nella ricerca inversa di logaritmo tangente e con Δy di tre cifre, si ferma ora alle unità, ora ai decimi, ora ai centesimi di secondo; e altrettanto si dica dell'F. J. (*****) e del Le Cointe (v*); il Casey (v**) poi, nella stessa ricerca e con Δy di quattro cifre si ferma ora alle unità, ora ai centesimi di secondo; e l'Heiss (v***) nella ricerca inversa di logaritmoseno si ferma ai decimi avendo Δy di *quattro* cifre, si ferma invece ai centesimi avendo Δy di *due* cifre.

E si potrebbero citare moltissimi altri esempi.

§ **57.** E l'utilità dei criteri da noi stabiliti e giustificati (e la cui necessità, se può non apparire necessario per la ricerca diretta, è però evidente per la ricerca inversa), oltre ad avere una utilità pratica (perchè sopprime nei calcoli in questione tuttociò che condurrebbe a una approssimazione illusoria), ha anche una utilità didattica non trascurabile.

Sappiamo per lunga esperienza, che, se parecchi allievi eseguiscono (indipendentemente l'uno dall'altro) un calcolo logaritmico non semplicissimo, i risultati raggiunti sono quasi tutti differenti: e ciò non perchè siano stati commessi dei veri errori di calcolo, ma perchè nelle successive interpolazioni si sono seguiti criteri differenti. Mentre l'uniformità di procedimento, oltre essere comodissima per l'insegnante (e ciò per ovvie ragioni) sarebbe utilissima anche per gli allievi, i quali potrebbero condurre i calcoli con maggior sicurezza e con più facile controllo.

(*) Briot et Bouquet, *Leçons de Trigonométrie* (Libr. Delagrave, Parigi, 1887; pagg. 65, 66).

(**) De Comberousse, *Cours de Mathématiques* (Ed. Gauthier-Villars, Parigi, 1893. Vol. II, pagg. 648, 651).

(***) Vacquant, *Cours de Trigonométrie* (Ed. Masson, Parigi, 1894; pag. 145).

(****) Chauvenet, *A Treatise on plane and spherical Trigonometry* (Ed. Lippincott, Filadelfia, 1891; pagg. 68, 70, 74).

(*****) F. J., *Compléments de Trigonométrie...* (Ed. Poussielgue, Parigi, 1886; pagg. 707, 709, 705).

(v*) Le Cointe, *Leçons sur la théorie des fonction circulaires ...* (Ed. Mallet, Parigi, 1858; pagg. 321, 323, 94).

(v**) Casey, *Treatise on spherical Trigonometry* (Ed. Hodges, Dublino, 1889; pagg. 51, 61).

(v***) Heiss, *Ebene und sphärische Trigonometrie...* (Ed. Du Mont, Colonia, 1888; pag. 129).

§ 58. E, prima di porre fine a queste nostre considerazioni, vogliamo anche accennare a una osservazione notevole, che si può fare a proposito delle ricerche inverse. Questa ricerca è sempre fatta sopra un logaritmo che risulta da un calcolo fra numeri approssimati, quindi l'errore dal quale può essere affetto il logaritmo stesso è, generalmente, maggiore di quello che deriva dal solo arrotondamento (§ 17); e può sorgere il dubbio che i procedimenti stabiliti conducano a delle cifre illusorie.

Lo studio di questa nuova questione esce dal campo delle *Matematiche elementari*, e spetta alle varie scienze alle quali le *Matematiche* sono applicate (*), e nelle quali, appunto, si stabilisce quale possa essere l'errore *probabile* di un risultato. Ci sia però permesso di esprimere, in proposito, questa nostra opinione; a noi pare che la ricerca dell'*error probabile* del risultato di un calcolo abbia importanza solo quando di questo risultato si abbiano molti valori indipendenti, dai quali poi si voglia dedurre il *valore medio* (come spesso accade in *Astronomia* e in *Geodesia*); ma che per un calcolo, del cui risultato si ha un valore solo, sia molto più importante l'avere, dell'errore in questione, *un limite superiore* (**), anzichè un *valore probabile*. Così, p. es., l'ufficiale di rotta sarà, senza dubbio, molto più tranquillo se saprà di aver commesso un errore *certamente* minore di 2', che se saprà che il suo errore *probabilmente* non sorpassa 1'.

§ 59. L'argomento del quale ci siamo occupati in questo lavoro e negli altri affini (come tutto ciò che riguarda i calcoli numerici e le relative approssimazioni) è molto trascurato dagli studiosi, e noi vorremmo pure che altri seguisse il nostro esempio (perfezionando e completando quel che noi abbiamo potuto fare); poichè, se in questi ultimi tempi si è tanto sottilizzato sul rigore delle *Matematiche pure*, perchè non occuparsi affatto delle applicazioni numeriche, le quali, in sostanza, devono poi costituire lo scopo ultimo delle *Matematiche* stesse?

Livorno, gennaio-luglio 1904.

G. PESCI.

(*) Veggasi, p. es., in proposito: STADTHAGEN, *Ueber die Genauigkeit logarithmischer Berechnung* (Ed. Dümmlers, Berlino, 1888); FULST, *Ueber die Berechnung nautisch-astronomischer Aufgaben...* (Annalen der Hydrographie, aprile 1895 e maggio 1896); KOHLSCHÜTTER, *Vierstellige oder fünfstellige Logarithmen für nautische Tafeln?* (Marine Rundschau, Decembro, 1902).

(**) E un esempio della ricerca di questo limite lo demmo nelle due note *Sul calcolo delle rette d'altezza secondo il metodo di Marcq Saint-Hilaire* (" Rivista Marittima ", gennaio 1902 e aprile 1904).

LA TRASFORMAZIONE PER RAGGI VETTORI RECIPROCI

e le proprietà metriche delle figure

(Continuaz. e fine v. fasc. prec.)

---

8. È noto che l'iperbole equilatera ha la proprietà che la distanza di ogni suo punto dal centro è media proporzionale fra le distanze che lo stesso punto ha dai fuochi, ossia, adottando le solite notazioni, per l'iperbole equilatera si ha la proprietà

$$|\overline{\mathbf{PF}}_1| \,.\, |\overline{\mathbf{PF}}_2| = |\overline{\mathbf{PC}}|^2, \tag{33}$$

cioè, ponendo,

$$|\overline{\mathrm{PF}}_1| = \rho_1 ; \qquad |\overline{\mathrm{PF}}_2| = \rho_2 ; \qquad |\overline{\mathrm{PC}}| = \rho_0$$

si ha

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = \rho_0^2. \tag{33 bis}$$

Applicando a questa la formula (1), supposto che il polo dell'inversione sia diverso da F_1, F_2 e C, avremo:

$$\frac{|\overline{\mathrm{P'F'}}_1|}{|\overline{\mathrm{OF'}}_1| \,.\, |\overline{\mathrm{OP'}}|} \cdot \frac{|\overline{\mathrm{P'F'}}_2|}{|\overline{\mathrm{OF'}}_2| \,.\, |\overline{\mathrm{OP'}}|} = \frac{|\overline{\mathrm{P'C'}}|^2}{|\overline{\mathrm{OC'}}|^2 \,.\, |\overline{\mathrm{OP'}}|^2},$$

ossia

$$|\overline{\mathrm{P'F'}}_1| \,.\, |\overline{\mathrm{P'F'}}_2| = k \,.\, |\overline{\mathrm{P'C'}}|^2, \tag{34}$$

dove, per semplicità, si è posto

$$k = \frac{|\overline{\mathrm{OF'}}_1| \,.\, |\overline{\mathrm{OF'}}_2|}{|\overline{\mathrm{OC'}}|^2}. \tag{35}$$

Ponendo

$$|\overline{\mathrm{P'F'}}_1| = \rho'_1 ; \qquad |\overline{\mathrm{P'F'}}_2| = \rho'_2 ; \qquad |\overline{\mathrm{P'C'}}| = \rho'_0$$

la (34) prende la forma

$$\rho'_1 \cdot \rho'_2 = k\rho_0'^2. \tag{34 bis}$$

Questa relazione esprime una proprietà metrica che può considerarsi come una generalizzazione di quella espressa dalla (33 bis) per l'iperbole equilatera, e che vale in generale per le inverse di questa curva; l'equazione di tali inverse è per la (12)

$$(x'^2+y'^2)^2(m^2-n^2-a^2)+2(x'^2+y'^2)(mx'-ny')+x'^2-y'^2=0. \tag{36}$$

Si noti poi che nella (34 bis) è $k=1$, cioè (35);

$$|\overline{\mathrm{OF'}}_1| \,.\, |\overline{\mathrm{OF'}}_2| = |\overline{\mathrm{OC'}}|^2,$$

quando il polo O è sulla iperbole, per la (33); cioè, come è noto, quando la trasformata è una strofoide (retta od obliqua).

Consideriamo il caso particolare in cui il pòlo sia il vertice $A \equiv (a, 0)$, cioè supponiamo $m = a$, $n = 0$, nel qual caso, come sappiamo, la trasformata è una strofoide retta.

La (36), ponendo $\frac{1}{2a} = \alpha$, diviene

$$x'(x'^2 + y'^2) + \alpha(x'^2 - y'^2) = 0.$$

Osserviamo che si ha

$$\overline{AF_1} = a(\sqrt{2} - 1), \quad \overline{AF_2} = -a(\sqrt{2} + 1), \quad \overline{AC} = -a$$

e perciò

$$\overline{AF'_1} = \frac{1}{a(\sqrt{2}-1)} = 2\alpha(\sqrt{2}+1);$$

$$\overline{AF'_2} = \frac{1}{-a(\sqrt{2}+1)} = -2\alpha(\sqrt{2}-1); \quad \overline{AC'} = \frac{1}{a} = -2\alpha, \qquad (37)$$

e quindi la (35) dà $k = 1$, come già avevamo trovato, e la (34 bis) diviene

$$\rho'_1 \cdot \rho'_2 = \rho_0'^2$$

che è la stessa relazione (33 bis) che vale per l'iperbole equilatera. (Però va notato che mentre per l'iperbole equilatera C è il punto medio del segmento F_1F_2, nel caso della strofoide invece ciò non sussiste.)

La proprietà dimostrata ora per la strofoide rètta può enunciarsi nel modo seguente: *Sull'asse di una strofoide retta esistono tre punti* F'_1, F'_2, C', *tali che la distanza di un punto qualunque* P' *della curva da* C' *è media proporzionale fra le distanze che lo stesso punto* P' *ha da* F'_1, F'_2. Confrontando la (37) con la (26), si vede che i punti F'_1 e F'_2 sono quelli stessi che soddisfano alla relazione (25), trovata nel § precedente.

In quanto a C' per la (37) si vede che questo punto è il simmetrico del nodo (A), rispetto al vertice della strofoide.

Inversamente si può dimostrare che: *Dati tre punti in linea retta* M, N *ed* R, *il luogo dei punti* P *per i quali si abbia*

$$|\overline{PM}| \cdot |\overline{PN}| = |\overline{PR}|^2,$$

se è una curva razionale, è una iperbole equilatera quando R *è il punto medio del segmento* MN, *è una strofoide retta in tutti gli altri casi; in altre parole, l'iperbole equilatera e la strofoide retta sono, fra le curve razionali, le sole che godono di questa proprietà.*

Si ha infatti, posto $M \equiv (m, 0)$, $N \equiv (n, 0)$, $R \equiv (r, 0)$, lasciando per ora l'origine indeterminata:

$$\sqrt{(x-m)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-n)^2 + y^2} = (x-r)^2 + y^2$$

e successivamente:

$$(x^2 + y^2 - 2mx + m^2)(x^2 + y^2 - 2nx + n^2) = (x^2 + y^2 - 2rx + r^2)^2;$$

$$2x(x^2 + y^2)(2r - m - n) + x^2(m^2 + n^2 + 4mn - 6r^2) + \\ + y^2(m^2 + n^2 - 2r^2) - 2x(mn^2 + m^2n - r^3) + m^2n^2 - r^4 = 0. \qquad (38)$$

Se la curva rappresentata dalla (38) deve essere razionale, o dovrà degenerare, oppure dovrà avere un punto doppio, e siccome, per la proprietà a cui deve soddisfare, la curva è certo simmetrica rispetto all'asse x, il punto doppio dovrà necessariamente trovarsi sopra quest'asse.

Nel primo caso, cioè se la (38) degenera, dovrà annullarsi il coefficiente del 1° termine, cioè sarà

$$m + n = 2r\,.$$

(Ciò significa che R è medio del segmento MN).

In tal caso la (38) diviene:

$$-(x^2 - y^2)\,.\,\frac{(m-n)^2}{2} - 2rx\,(mn - r^2) + m^2n^2 - r^4 = 0$$

che rappresenta un'iperbole equilatera.

Se invece la (38) non degenera, ma ha un punto doppio sull'asse x, siccome l'origine si è lasciata indeterminata, potremo disporre di m, n, r, in modo che l'origine sia nel nodo, dunque dovranno potersi annullare gli ultimi due termini della (38) e cioè dovrà essere:

$$mn\,(m+n) = r^3\,; \qquad m^2n^2 = r^4\,,$$

cioè

$$mn = \pm\, r^2\,; \qquad m + n = \pm\, 2r\,.$$

Scegliendo il segno superiore, la cubica degenera, ciò che ora si esclude; scegliendo l'inferiore, si hanno i valori di m, n dall'equazione

$$Z^2 + 2rZ - r^2 = 0\,,$$

si ha cioè per m, n i valori $-r\,(1 \pm \sqrt{2}\,)$.

Ponendo per es.: $m = -r\,(1+\sqrt{2})$, $n = r\,(\sqrt{2}-1)$, la (38) diviene

$$x\,(x^2 + y^2) - \frac{r}{2}\,(x^2 - y^2) = 0$$

che rappresenta una strofoide retta.

Si confrontino questi ultimi resultati con quelli precedentemente ottenuti (37).

Si può dimostrare direttamente (*) che i punti F'_1, F'_2, C' (o M, N, R, come ora gli abbiamo chiamati) sono *fuochi* della strofoide, quantunque la dimostrazione non sarebbe necessaria.

Infatti (**) le coordinate dei fuochi di una curva rappresentata dall'equazione $f(x, y) = 0$, debbono soddirfare alle equazioni

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 2\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \cdot f \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot f, \end{cases}$$

che nel caso nostro, essendo

$$f(x,\ y) = x\,(x^2 + y^2) + \alpha\,(x^2 - y^2) = 0,$$

(*) Non occorrebbe perchè è noto che nella trasformazione per raggi vettori reciproci ad un fuoco di una curva C corrisponde un fuoco della curva trasformata C'. (SALMON, *o. c.* pag. 355.)

(**) SALMON, *o. c.* pag. 177.

divengono

$$(3x^2+y^2+2\alpha x)^2-4y^2(x-\alpha)^2=8(x+\alpha).f$$
$$2y(3x^2+y^2+2\alpha x)(x-\alpha)=4y.f.$$

La 2ª è soddisfatta per $y=0$; sostituendo nella 1ª si ha

$$x^2(3x+2\alpha)^2=8x^2(x+\alpha)^2$$

cioè

$$x^2(x^2-4\alpha x-4\alpha^2)=0$$

la quale ha per radici

$$x_1=x_2=0, \qquad x_3=2\alpha(1+\sqrt{2}), \qquad x_4=-2\alpha(\sqrt{2}-1)$$

e questi valori coincidono appunto con quelli trovati per le coordinate dei punti C', F'_1 F'_2.

Prima di lasciare questo argomento, cioè, di considerare i fuochi di una strofoide, voglio dimostrare che *il nodo* A *di una strofoide è il coniugato armonico del fuoco* C' *rispetto ai fuochi* F'_1, F'_2, ossia che si ha

$$(F'_1\,F'_2\,C'\,A)=-1.$$

Infatti si ha (37):

$$\frac{\overline{F'_1C'}}{\overline{F'_2C'}}=\frac{-2\alpha-2\alpha(\sqrt{2}+1)}{-2\alpha+2\alpha(\sqrt{2}-1)}=\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$$

ed inoltre (26)

$$\frac{\overline{F'_2A}}{\overline{F'_1A}}=\frac{-2\alpha(\sqrt{2}+1)}{2\alpha(\sqrt{2}-1)}=-\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=-(3+2\sqrt{2})$$

e quindi

$$\frac{\overline{F'_1C'}}{\overline{F'_2C'}}:\frac{\overline{F'_1A}}{\overline{F'_2A}}=-1.$$

Abbiamo escluso i casi particolari nei quali il polo dell' inversione fosse uno dei punti C, F_1 e F_2; trattiamo ora a parte questi casi.

Supponiamo dapprima che il polo sia il centro C dell' iperbole equilatera.

In tal caso, essendo $m=n=0$, la (36) diviene

$$(x'^2+y'^2)^2-\frac{1}{a^2}(x'^2-y'^2)=0 \tag{39}$$

che rappresenta una lemniscata di Bernoulli.

Applicando alla (33) le (1) (2) si ha

$$\frac{|\overline{P'F'_1}|}{|\overline{CP'}|.|\overline{CF'_1}|}\cdot\frac{|\overline{P'F'_2}|}{|\overline{CP'}|.|\overline{CF'_2}|}=\frac{1}{|\overline{CP'}|^2},$$

cioè

$$|\overline{P'F'_1}|.|\overline{P'F'_2}|=|\overline{CF'_1}|.|\overline{CF'_2}|. \tag{40}$$

Osservando che è

$$\overline{CF_1}=a\sqrt{2}, \qquad \overline{CF_2}=-a\sqrt{2},$$

si ottiene

$$\overline{CF'_1}=\frac{1}{a\sqrt{2}}, \qquad \overline{CF'_2}=-\frac{1}{a\sqrt{2}}$$

Ponendo

$$\rho'_1=|\overline{PF'_1}|, \qquad \rho'_2=|\overline{PF'_2}|, \qquad a\sqrt{2}=\frac{1}{c},$$

la (40) diviene

$$\rho'_1 \cdot \rho'_2=c^2 \tag{40 bis}$$

e la (39)

$$(x'^2+y'^2)^2-2c^2(x'^2-y'^2)=0.$$

I punti $F'_1\equiv(c,\ 0)$ e $F'_2\equiv(-c,\ 0)$ sono fuochi della lemniscata.

La (40 bis) esprime, come facilmente si vede, la notissima proprietà della lemniscata che cioè, il prodotto delle distanze focali è costante.

Supponiamo ora che il polo dell'inversione sia uno dei fuochi, per esempio F_1.

In tal caso si ha $m=a\sqrt{2}$, $n=0$ e quindi la (36) diviene

$$\left(x'^2+y'^2+\frac{\sqrt{2}}{a}x'\right)^2=\frac{1}{a^2}(x'^2+y'^2),$$

ossia, ponendo

$$\frac{\sqrt{2}}{a}=\beta, \tag{41}$$

$$(x'^2+y'^2+\beta x')^2=\frac{\beta^2}{2}(x'^2+y'^2), \tag{42}$$

che rappresenta una conchiglia di Pascal speciale, nella quale il segmento addizionale è uguale all'apotema del quadrato iscritto nel cerchio direttore. Il nodo coincide col fuoco F_1 della iperbole.

Applicando alla (33) le (1) (2) si ha

$$\frac{1}{|P'F_1|}\cdot\frac{|\overline{F'_2P'}|}{|\overline{F'_2F_1}|.\,|\overline{P'F_1}|}=\frac{|\overline{C'P'}|^2}{|\overline{C'F_1}|^2.\,|\overline{P'F_1}|^2}. \tag{43}$$

Poichè si ha

$$\left.\begin{array}{l}\overline{F_2F_1}=2a\sqrt{2}, \qquad \overline{CF_1}=a\sqrt{2}, \\ \text{sarà} \\ |\overline{F'_2F_1}|=\dfrac{1}{2a\sqrt{2}}, \qquad |\overline{C'F_1}|=\dfrac{1}{a\sqrt{2}}\end{array}\right\} \tag{44}$$

e quindi, ponendo

$$|\overline{F'_2P'}|=\rho'_2, \qquad |\overline{C'P'}|=\rho'_1,$$

la (43) diviene, tenendo conto della (41):

$$\frac{\rho_1'^2}{\rho'_2}=\beta. \tag{45}$$

La (45) esprime la seguente proprietà della speciale conchiglia rappresentata dalla (42):

Sull'asse di una conchiglia in cui il segmento addizionale sia eguale all'apotema del quadrato iscritto nel cerchio direttore esistono due punti

F'_2 e C' tali che la distanza di un punto qualunque della curva dal punto C' è media proporzionale fra la distanza dello stesso punto da F'_2 e il diametro del circolo direttore.

Per le (44), (41) si ha:

$$\overline{F_1F'_2} = -\frac{1}{2a\sqrt{2}} = -\frac{\beta}{4}; \qquad \overline{F_1C'} = -\frac{1}{a\sqrt{2}} = -\frac{\beta}{2}, \tag{46}$$

che sono le ascisse dei punti F'_2, C', considerando il nodo F'_1 come origine

La 1ª delle (46) coincide con la (31), quando in questa si faccia $\alpha = \frac{1}{2}\beta$.

I punti F'_2 e F'_1 sono fuochi della conchiglia, C' (46) è il simmetrico di F'_1 rispetto ad F'_2.

Si noti poi che la distanza dei punti F'_2 e C' è in valore assoluto $\frac{1}{4}\beta$.

La proprietà trovata è caratteristica: Cerchiamo infatti il luogo geometrico dei punti P' tali che, essendo F'_2 e C' due punti qualunque, si abbia

$$\frac{|\overline{P'C'^2}|}{|\overline{P'F'_2}|} = 4\,|\overline{F'_2C'}|,$$

cioè cerchiamo *il luogo dei vertici di un triangolo* $P'\,F_2\,C'$, *di cui uno dei lati sia fisso* (F'_2C') *e gli altri due sieno tali che il quadrato costruito su* $P'C'$ *sia quadruplo del rettangolo degli altri due lati.*

Prendendo per origine il simmetrico F_1 di C' rispetto a F'_2 e ponendo

$$\overline{F_1F_2} = \overline{F'_2C'} = k,$$

si ha

$$(x-2k)^2 + y^2 = 4k\sqrt{(x-k)^2+y^2},$$

cioè

$$(x^2+y^2-4kx)^2 = 8k^2(x^2+y^2)$$

e facendo $k = \frac{-\beta}{4}$ la precedente si riduce alla (42). c. d. d.

9. Consideriamo una ellisse rappresentata dalla equazione

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \tag{47}$$

Mediante le (11) troviamo facilmente l'equazione della trasformata per raggi vettori reciproci; per brevità fermiamoci a considerare soltanto due casi particolari e cioè quando si prende come polo il centro. o un fuoco. Nel 1° caso si ha $m = n = 0$; e quindi l'equazione della trasformata è:

$$(x'^2 + y'^2)^2 = \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}\ (*). \tag{48}$$

Indicando con F_1 e F_2 i fuochi dell'ellisse (47), è noto che sussiste la relazione

$$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a. \tag{49}$$

(*) Questa curva la cui equazione può scriversi $(x^2+y^2)^2 = \alpha^2x^2 + \beta^2y^2$, e che per la forma rammenta una particolare *cassiniana*, non ha ricevuto, almeno ch'io sappia, un nome particolare; essa può considerarsi anche come podaria di un'ellisse dal centro; la sua area è uguale alla media aritmetica delle aree dei cerchi descritti sugli assi di questa ellisse come diametri. LESCANES, (*Nouvelles Annales*, p. 486).

A questa applicando la (1), otterremo una relazione che esprimerà una proprietà della curva (48).

Si ha, cioè, indicando con O il centro dell'ellisse:

$$\frac{|\overline{\mathrm{P'F'_1}}|}{|\overline{\mathrm{OP'}}| \,.\, |\overline{\mathrm{OF'_1}}|} + \frac{|\overline{\mathrm{P_1F'_2}}|}{|\overline{\mathrm{OP'}}| \,.\, |\overline{\mathrm{OF'_2}}|} = 2a \tag{50}$$

e poichè si ha:

$$|\overline{\mathrm{OF_1}}| = |\overline{\mathrm{OF_2}}| = ae\,, \qquad \text{sarà} \qquad |\overline{\mathrm{OF'_1}}| = |\overline{\mathrm{OF'_2}}| = \frac{1}{ae}\,,$$

quindi, ponendo:

$$|\overline{\mathrm{P'F'_1}}| = \rho'_1\,, \qquad |\overline{\mathrm{P'F'_2}}| = \rho'_2\,, \qquad |\overline{\mathrm{OP'}}| = \rho'_0\,,$$

la (50) diverrà, ponendo $\frac{2}{e} = \mathrm{K}$,

$$\rho'_1 + \rho'_2 = \mathrm{K} \,.\, \rho'_0 \tag{50 bis}$$

(siccome è $e < 1$, sarà $\mathrm{K} > 2$).

La (50 bis) esprime la seguente proprietà: *Nel piano di una inversa di ellisse, essendo polo il centro, esistono tre punti in linea retta* $\mathrm{F'_1}$, $\mathrm{F'_2}$, O, *dei quali* O *è il punto medio del segmento* $\mathrm{F'_1F'_2}$, *tali che la somma delle distanze di un punto* P *qualunque della curva da* $\mathrm{F'_1}$ *ed* $\mathrm{F'_2}$, *sia proporzionale alla distanza di* P *da* O.

Questa proprietà è caratteristica. Infatti sieno $\mathrm{F'_1}$, $\mathrm{F'_2}$, O tre punti collineari e sia $\overline{\mathrm{F'_1O}} = \overline{\mathrm{OF'_2}} = d$; cerchiamo il luogo dei punti P', tali che sia

$$|\overline{\mathrm{P'F_1}}| + |\overline{\mathrm{P'F_2}}| = k \,.\, |\overline{\mathrm{PO}}| \,\cdot$$

Avremo, riferendoci ad un sistema di coordinate rettangolari di cui O sia l'origine e $\overline{\mathrm{F'_1F'_2}}$ l'asse x:

$$\sqrt{(x+d)^2+y^2} + \sqrt{(x-d)^2+y^2} = k\sqrt{x^2+y^2}$$

e successivamente:

$$[(x^2+y^2)(2-k^2)+2d^2]^2 = 4\,[(x^2+y^2+d^2)^2 - 4d^2x^2] = 0$$
$$k^2(k^2-4)(x^2+y^2)^2 - 4d^2x^2(k^2-4) - 4d^2k^2y^2 = 0$$
$$(x^2+y^2)^2 - \frac{4d^2}{k^2(k^2-4)}\,[x^2(k^2-4) + k^2y^2] = 0\,. \tag{51}$$

La (51) rappresenta una inversa di ellisse (dal centro), se è $k^2 < 4$, cioè se è $k > 2$ (k è positivo).

Ponendo:

$$\frac{k^2-4}{4d^2} = b^2\,, \qquad \frac{k^2}{4\,d^2} = a^2,$$

la (51) diviene

$$(x^2+y^2)^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

che è identica alla 48. c. d. d.

Che debba essere soddisfatta la condizione $k > 2$ è naturale, perchè (50 bis) ogni mediana m_a d'un triangolo è minore della semisomma dopo altri due lati.

Se invece il polo dell'inversione è uno dei fuochi, per es.: $F_1 \equiv (ae, 0)$, la equazione della trasformata dell'ellisse (47), per le (11), sarà:

$$b^2\left(\frac{x}{x^2+y^2}+ae\right)^2+\frac{a^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=a^2b^2$$

cioè

$$\left(x^2+y^2-\frac{ae}{b^2}x\right)^2=\frac{a^2}{b^2}(x^2+y^2)$$

e ponendo

$$\frac{ae}{b^2}=\beta \qquad \frac{a}{b^2}=\alpha\,, \tag{52}$$

la precedente diviene

$$(x^2+y^2-\beta x)^2=\alpha^2(x^2+y^2)\,,$$

che rappresenta una Conchiglia di Pascal. Poichè è $e<1$, sarà $\beta<\frac{a}{b^2}$, cioè $\beta<\alpha$, quindi la conchiglia ha un punto isolato in F'_1.

Dalla (49), applicando le (1) (2), si ha la relazione

$$\frac{1}{|P'F_1|}+\frac{|P'F'_2|}{|F_1P'|\,.\,|F_1F'_2|}=2a$$

e poichè è

$$\overline{F_1F'_2}=\frac{1}{2ae}\,, \tag{53}$$

ponendo

$$|PF_1|=\rho'_1 \qquad |P'F'_2|=\rho'_2\,,$$

la precedente diviene:

$$\frac{1}{2ae}+\rho^2=\frac{1}{e}\rho_1$$

e poichè è

$$\frac{1}{2ae}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\beta}\,, \tag{54}$$

si ha finalmente

$$\alpha\rho'_1-\beta\rho'_2=\tfrac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)\,. \tag{55}$$

Questa relazione esprime la seguente proprietà della *Conchiglia di Pascal acnodale:*

Sull'asse di una conchiglia di Pascal acnodale esistono due punti F_1 *e* F'_2 *tali che essendo* P' *un punto qualunque della curva,* α *e* β *rispettivamente le misure del segmento addizionale e del diametro del circolo direttore, si abbia la* (55).

L'ascissa di F'_2, se F_1 è l'origine, è (53) (54)

$$\overline{F_1F'_2}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\beta}\,.$$

I punti F_1, F'_2 sono fuochi della conchiglia.

Questa proprietà è caratteristica per la conchiglia acnodale. La dimostrazione può farsi analoga a quella in fine del § 7.

È noto che in un'ellisse, (47), essendo MN e PQ due diametri ortogonali, di cui le misure siano rispettivamente α e β, si ha

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}=\frac{a^2+b^2}{4a^2b^2}. \tag{56}$$

Applicando alla (56) la formula (1), supponendo di trasformare l'ellisse per raggi vettori reciproci, essendo polo il centro, si ha

$$\alpha=\frac{\alpha'}{|\overline{OM'}|\,.\,|\overline{ON'}|}=\frac{\alpha'}{(\frac{1}{2}\,\alpha')^2}=\frac{4}{\alpha'}$$

$$\beta=\frac{\beta'}{|\overline{OP'}|\,.\,|\overline{OQ'}|}=\frac{\beta'}{(\frac{1}{2}\,\beta')^2}=\frac{4}{\beta'}$$

e quindi dalla (56) si ha l'altra

$$\frac{\alpha'^2}{16}+\frac{\beta'^2}{16}=\frac{a^2+b^2}{4a^2b^2}$$

e ponendo $a=\frac{1}{a'}$, $b=\frac{1}{b'}$,

$$\alpha'^2+\beta'^2=4\,(a'^2+b'^2).$$

Cioè: *in una inversa centrale di ellisse è costante la somma dei quadrati di due diametri ortogonali.*

Di questa proprietà diamo anche una dimostrazione diretta.

Sia

$$(x^2+y^2)^2-(a^2x^2+b^2y^2)=0$$

l'equazione di una inversa centrale di ellisse.

Sia

$$y=mx$$

una retta passante per l'origine; essa incontrerà la curva in due punti le cui coordinate sono:

$$\frac{\pm\sqrt{a^2+b^2m}}{1+m^2},\qquad \frac{\pm\, m\sqrt{a^2+b^2m}}{1+m}.$$

Indicando con α la misura del diametro appartenente alla retta considerata si ha:

$$\alpha^2=\frac{4\,(a^2+b^2m^2)}{(1+m^2)^2}\,.\,(1+m^2)=\frac{4\,(a^2+b^2m^2)}{1+m^2} \tag{57}$$

Se β è la misura del diametro perpendicolare ad α, basterà nella relazione precedente sostituire ad m, $-\frac{1}{m}$, e quindi:

$$\beta^2=\frac{4\,(a^2m^2+b^2)}{1+m^2}. \tag{58}$$

Dalle (57) (58) si ha:

$$\alpha^2+\beta^2=4\,(a^2+b^2).$$ c. d. d.

Monza, maggio 1904.

G. CARDOSO-LAYNES.

DERIVATA DI ORDINE QUALUNQUE DI ALCUNE FUNZIONI

1. Sia data una funzione di funzione

$$y = y(u) \qquad \text{con} \qquad u = u(x);$$

la derivata di ordine p di y rispetto ad x è data dalla formula(*)

$$\frac{d^p y}{dx^p} = p\,! \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k\,!} \frac{d^k y}{du^k} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{k} \frac{1}{r\,!} \frac{d^r u}{dx^r} \tag{1}$$

ove rappresentiamo con

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{k} \varepsilon_r$$

la somma di tutti i prodotti analoghi a $\varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2} \varepsilon_{r_3} \ldots \varepsilon_{r_k}$ essendo $r_1, r_2, r_3, \ldots r_k$ numeri interi positivi uguali o disuguali, aventi per somma p.

La

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{k} \frac{1}{r\,!} \frac{d^r u}{dx^r}$$

è dunque una somma il cui termine generale è

$$\left(\frac{1}{1\,!} \frac{du}{dx}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{1}{2\,!} \frac{d^2 u}{dx^2}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{1}{3\,!} \frac{d^3 u}{dx^3}\right)^{\alpha_3} \cdots \left(\frac{1}{p\,!} \frac{d^p u}{dx^p}\right)^{\alpha_p},$$

ove $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_p$ è un sistema di soluzioni intere positive o nulle delle due equazioni

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_p = k$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + px_p = p,$$

e la somma è estesa a tutti i sistemi di soluzioni intere positive o nulle delle predette equazioni. (**)

Noi ci proponiamo di esprimere la

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{k} \frac{1}{r\,!} \frac{d^r u}{dx^r}$$

in funzione di p e k nei casi che u sia una funzione razionale intera del 2°, del 3° o del 4° grado.

Osservando che per una funzione razionale intera di grado n sono nulle tutte le derivate di ordine superiore all' n^o, se la u è una fun-

(*) CESÀRO, *Analisi algebrica:* Derivate successive delle funzioni di funzioni.

(**) Cfr. TEIXEIRA, *Sur les dérivées d'ordre quelconque.* " Giornale di Battaglini ", 1880.

zione razionale intera del 2°, 3° o 4° grado, i sistemi di equazioni da risolvere con numeri interi positivi o nulli sono rispettivamente

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 = k \\ x_1 + 2x_2 = p \end{array}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 = k \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = p \end{array}\right\} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = k \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = p \end{array}\right\}. \qquad (4)$$

2. È subito visto che condizione di possibilità per il sistema (2) è che sia $k \geqslant \mathrm{E}\left(\frac{p+1}{2}\right)$, indicando con $\mathrm{E}(x)$ il massimo intero contenuto in x.

Sotto questa condizione, le soluzioni del sistema (2) sono

$$\begin{array}{l} x_1 = 2k - p \\ x_2 = p - k\,. \end{array}$$

Perciò, quando u è una funzione razionale intera del 2° grado

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

la

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{k} \frac{1}{r\,!}\ \frac{d^r u}{dx^r}$$

si ridurrà a

$$\binom{k}{p-k}\left(\frac{1}{2\,!}\ \frac{d^2u}{dx^2}\right)^{p-k}\left(\frac{du}{dx}\right)^{2k-p},$$

cioè si avrà

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{k} \frac{1}{r!}\ \frac{d^r u}{dx^r} = \binom{k}{p-k}\alpha^{p-k}(2\alpha x + \beta)^{2k-p}. \qquad (5)$$

Allora la (1) diviene

$$\frac{d^p y}{dx^p} = p!\sum_{k=\mathrm{E}\left(\frac{p+1}{2}\right)}^{p}\binom{k}{p-k}\frac{1}{k!}\ \frac{d^k y}{du^k}\,\alpha^{p-k}\,(2\alpha x + \beta)^{2k-p} =$$

$$= \sum_{k=\mathrm{E}\left(\frac{p+1}{2}\right)}^{p} \frac{\mathrm{D}_{p,\,2(p-k)}}{\overline{p-k}\,!}\ \frac{d^k y}{du^k}\,\alpha^{p-k}\,(2\alpha x + \beta)^{2k-p}\,, \qquad (6)$$

denotando con $\mathrm{D}_{m,n}$ il prodotto

$$m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-n+1)\,.$$

La (6) ci dà la derivata di ordine qualunque di una funzione

$$y = y\,(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$$

qualora si conosca la derivata di ordine qualunque di $y = y(u)$ rispetto ad u.

In particolare, prendendo per $y = y(u)$ la $y = \frac{1}{u}$, poichè

$$\frac{d^k y}{du^k} = \frac{(-1)^k\,k\,!}{u^{k+1}}$$

si ha

$$\frac{d^p\left(\frac{1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\right)}{dx^p}=\sum_{k=E\left(\frac{p+1}{2}\right)}^{p}(-1)^k D_{k,p-k}\,.\,D_{p-k+1,k}\frac{\alpha^{p-k}(2\alpha x+\beta)^{2k-p}}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^{k+1}}.$$

Così, prendendo $y=\cos u$, poichè

$$\frac{d^k\cos u}{du^k}=\cos(u+k\tfrac{1}{2}\pi).$$

si ha

$$\frac{d^p(\cos(\alpha x^2+\beta x+\gamma))}{dx^p}=$$

$$=\sum_{k=E\left(\frac{p+1}{2}\right)}^{p}\frac{D_{p,2(p-k)}}{p-k\,!}\cos(\alpha x^2+\beta x+\gamma+k\tfrac{1}{2}\pi)\,\alpha^{p-k}(2\alpha x+\beta)^{2k-p}.$$

Se poi prendiamo $y=e^u$, si ha

$$\frac{d^p e^{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}{dx^p}=e^{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\sum_{k=E\left(\frac{p+1}{2}\right)}^{p}\frac{D_{p,2(p-k)}}{p-k\,!}\alpha^{p-k}(2\alpha x+\beta)^{2k-p}, \tag{7}$$

ed in particolare per $\alpha=1$, $\beta=\gamma=0$

$$\frac{d^p e^{x^2}}{dx^p}=e^{x^2}\sum_{k=E\left(\frac{p+1}{2}\right)}^{p}\frac{D_{p,2(p-k)}}{p-k\,!}(2x)^{2k-p}. \tag{7'}$$

Nella (7) la sommatoria può essere ordinata per le potenze di x; infatti se si pone

$$C_r=\sum_{k=E\left(\frac{p+1}{2}\right)}^{p}\frac{D_{p,2(p-k)}}{p-k\,!}2^r\binom{2k-p}{r}\alpha^{p-k+r}\beta^{2k-p-r},$$

si ha per p pari

$$\frac{d^p e^{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}{dx^p}=e^{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\sum_{r=0}^{p}C_r x^r,$$

e per p dispari

$$\frac{d^p e^{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}{dx^p}=e^{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\sum_{r=1}^{p}C_r x^r.$$

3. Venendo alla risoluzione del sistema (3), è manifesto che la condizione di possibilità è che sia $k\geqslant E\left(\frac{p+2}{3}\right)$.

Sottraendo poi dalla seconda la prima equazione si ha

$$x_2+2x_3=p-k$$

equazione soddisfatta in numeri interi e positivi (o nulli) da

$$x_2=p-k-2i$$
$$x_3=i \qquad i=0,1,2,\ldots E\left(\frac{p-k}{2}\right).$$

Sostituendo nella prima equazione del sistema (3) questi valori, si ha

$$x_1 = 2k + i - p$$

in cui però per i si devono prendere fra i suindicati numeri quelli per cui x_1 risulta positivo o nullo; e questi sono evidentemente

$$0,\ 1,\ 2, \ldots\ \mathrm{E}\left(\frac{p-k}{2}\right), \quad \text{se} \quad k > \mathrm{E}\left(\frac{p}{2}\right),$$

o

$$p-2k,\ p-2k+1, \ldots\ \mathrm{E}\left(\frac{p-k}{2}\right), \quad \text{se} \quad k \leqslant \mathrm{E}\left(\frac{p}{2}\right).$$

Dopo ciò è possibile dare a

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{k} \frac{1}{r!}\frac{d^r u}{dx^r}$$

la forma di una somma dipendente da un unico indice, qualora sia u una funzione razionale intera di 3° grado

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

Osservando infatti che

$$\frac{du}{dx} = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma,$$

$$\frac{1}{2!}\frac{d^2 u}{dx^2} = 3\alpha x + \beta,$$

$$\frac{1}{3!}\frac{d^3 u}{dx^3} = \alpha,$$

si ha

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{k} \frac{1}{r!}\frac{d^r u}{dx^r} = \sum_{i=\mathrm{I}_k}^{i=\mathrm{E}\left(\frac{p-k}{2}\right)} \frac{k!}{\overline{2k+i-p}!\ \overline{p-k-2i}!\ i!}(3\alpha x^2+2\beta x+\gamma)^{2k+i-p}(3\alpha x+\beta)^{p-k-2i}\alpha^i,$$

ove è

$$\mathrm{I}_k = \begin{cases} p-2k & \text{se} \quad k \leqslant \mathrm{E}\left(\frac{p}{2}\right) \\ 0 & \text{se} \quad k > \mathrm{E}\left(\frac{p}{2}\right). \end{cases}$$

La (1) quindi nel caso presente diviene

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \sum_{k=\mathrm{E}\left(\frac{p+2}{3}\right)}^{p} \frac{d^k y}{du^k} \sum_{i=\mathrm{I}_k}^{i=\mathrm{E}\left(\frac{p-k}{2}\right)} \frac{p!}{\overline{2k+i-p}!\ \overline{p-k-2i}!\ i!} \times$$

$$\times (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)^{2k+i-p}(3\alpha x + \beta)^{p-k-2i}\alpha^i.$$

Questa formula ci dà la derivata di ordine qualunque rispetto ad x di una funzione $y = y(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)$, quando si conosca la derivata di ordine qualunque di $y = y(u)$ rispetto ad u.

Come caso particolare, ponendo $y = e^u$ con $u = \alpha x^3$, si ha

$$\frac{d^p e^{\alpha x^3}}{dx^p} = e^{\alpha x^3} \sum_{k=\mathrm{E}\left(\frac{p+2}{3}\right)}^{p} \alpha^k x^{3k-p} \sum_{i=\mathrm{I}_k}^{i=\mathrm{E}\left(\frac{p-k}{2}\right)} \frac{p!\,3^{k-i}}{\overline{2k+i-p}!\ \overline{p-k-2i}!\ i!}.$$

4. Passiamo ora alla risoluzione del sistema (4), la possibilità del quale è espressa dalla condizione $k \geqslant \mathrm{E}\left(\frac{p+3}{4}\right)$. Sottraendo dalla seconda la prima equazione si ha

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = p - k,$$

equazione che è soddisfatta, come facilmente si vede, da

$$\begin{aligned} x_2 &= p - k - 2l - 3m \\ x_3 &= l \\ x_4 &= m \end{aligned}$$

con m variabile da 0 a $\mathrm{E}\left(\frac{p-k}{3}\right)$; e per ogni m, l variabile da 0 a $\mathrm{E}\left(\frac{p-k-3m}{2}\right)$. Sostituendo nella prima equazione di (4) questi valori, si ha

$$x_1 = 2k + l + 2m - p,$$

ove però per l ed m si devono prendere quelli, fra i suindicati numeri, per cui x_1 risulta positivo; cioè se $k < \mathrm{E}\left(\frac{p}{3}\right)$ dovrà essere $m \geqslant p - 3k$ ed $l \geqslant 4k - p$, mentre se $k \geqslant \mathrm{E}\left(\frac{p}{3}\right)$, potendo m prendere tutti i valori da 0 a $\mathrm{E}\left(\frac{p-k}{3}\right)$, dovrà essere $l \geqslant p - 2k$. Allora se è

$$u = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon,$$

poichè

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x + \delta, \\ \frac{1}{2!}\frac{d^2u}{dx^2} &= 6\alpha x^2 + 3\beta x + \gamma, \\ \frac{1}{3!}\frac{d^3u}{du^3} &= 4\alpha x + \beta, \\ \frac{1}{4!}\frac{d^4u}{dx^4} &= \alpha, \end{aligned}$$

sarà

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{k} \frac{1}{r!} = \sum_{m=M_k}^{\mathrm{E}\left(\frac{p-k}{3}\right)} \sum_{l=L_k}^{\mathrm{E}\left(\frac{p-k-3m}{2}\right)} \frac{k!}{\overline{2k+l+2m-p}!\,\overline{p-k-2l-3m}!\,l!\,m!} \times$$
$$\times (4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x + \delta)^{2k+l+2m-p} (6\alpha x^2 + 3\beta x + \gamma)^{p-k-2l-3m} (4\alpha x + \beta)^l \alpha^m,$$

ove è

$$\mathrm{M}_k = \begin{cases} p - 3k & \text{se} \quad k < \mathrm{E}\left(\frac{p}{3}\right) \\ 0 & \text{se} \quad k \geqslant \mathrm{E}\left(\frac{p}{3}\right), \end{cases}$$

e

$$\mathrm{L}_k = \begin{cases} 4k-p & \text{se} \quad k < \mathrm{E}\left(\frac{p}{3}\right) \\ p-2k & \text{se} \quad \mathrm{E}\left(\frac{p}{2}\right) > k \geqslant \mathrm{E}\left(\frac{p}{3}\right) \\ 0 & \text{se} \quad k \geqslant \mathrm{E}\left(\frac{p}{2}\right) ; \end{cases}$$

e quindi

$$\frac{d^p y}{d x^p} = \sum_{k=\mathrm{E}\left(\frac{p+3}{4}\right)}^{p} \frac{d^k y}{d u^k} \sum_{m=\mathrm{M}_k}^{\mathrm{E}\left(\frac{p-k}{3}\right)} \sum_{l=\mathrm{L}_k}^{\mathrm{E}\left(\frac{p-k-3m}{2}\right)} \frac{p!}{\overline{2k+l+2m-p}!\,\overline{p-k-2l-3m}!\,l!\,m!} \times$$

$$\times (4\alpha x^3+3\beta x^2+2\gamma x+\delta)^{2k+l+2m-p} (6\alpha x^2+3\beta x+\gamma)^{p-k-2l-3m} (4\alpha x+\beta)^l \alpha^m,$$

formula che dà la derivata d'ordine qualunque rispetto ad x di una funzione $y(\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon)$, quando si conoscano le derivate successive di $y(u)$ rispetto ad u.

Se in particolare si pone $\alpha=1$, $\beta=\gamma=\delta=\varepsilon=0$, si trae

$$\frac{d^p e^{x^4}}{dx^p} =$$

$$= e^{x^4} \sum_{k=\mathrm{E}\left(\frac{p+3}{4}\right)}^{p} x^{4k-p} \sum_{m=\mathrm{M}_k}^{\mathrm{E}\left(\frac{p-k}{3}\right)} \sum_{l=\mathrm{L}_k}^{\mathrm{E}\left(\frac{p-k-3m}{2}\right)} \frac{p!\,3^{p-k-2l-3m}\,2^{3k+2l+m-p}}{\overline{2k+l+2m-p}!\,\overline{p-k-2l-3m}!\,l!\,m!}. \tag{8}$$

5. Alla determinazione della derivata p-esima di e^{x^4} si può giungere per altra via, la quale ci porta a stabilire delle identità che altrimenti sarebbe difficile dimostrare.

Possiamo porre

$$y = e^{u^2} \qquad \text{con} \qquad u = x^2,$$

ed allora per la (6), in cui si faccia $\alpha=1$, $\beta=0$,

$$\frac{d^p y}{du^p} = \sum_{k=\mathrm{E}\left(\frac{p+1}{2}\right)}^{p} \frac{\mathrm{D}_{p,\,2(p-k)}}{\overline{p-k}!} \frac{d^k y}{du^k} (2x)^{2k-p}.$$

Ma per la (7')

$$\frac{d^k y}{du^k} = \frac{d^k e^{u^2}}{du^k} = e^{u^2} \sum_{s=\mathrm{E}\left(\frac{k+1}{2}\right)}^{k} \frac{\mathrm{D}_{k,\,2(k-s)}}{\overline{k-s}!} (2u)^{2s-k} = e^{x^4} \sum_{s=\mathrm{E}\left(\frac{k+1}{2}\right)}^{k} \frac{\mathrm{D}_{k,\,2(k-s)}}{\overline{k-s}!} (2x^2)^{2s-k}.$$

Quindi

$$\frac{d^p e^{x^4}}{dx^p} = e^{x^4} \sum_{k=\mathrm{E}\left(\frac{p+1}{2}\right)}^{p} \frac{\mathrm{D}_{p,\,2(p-k)}}{\overline{p-k}!} \sum_{s=\mathrm{E}\left(\frac{k+1}{2}\right)}^{k} \frac{\mathrm{D}_{k,\,2(k-s)}}{\overline{k-s}!} 2^{k+2s-p} x^{4s-p}.$$

Il polinomio che moltiplica e^{x^4} può ancora essere ordinato per le potenze discendenti della x; e, ponendo per brevità

$$\overset{n}{\underset{m}{\mathrm{G}}}(v,w) = \sum_{t=m}^{t=n} \frac{\mathrm{D}_{v,\,2t}}{t!} \cdot \frac{\mathrm{D}_{v-t,\,2(w-t)}}{\overline{w-t}!} 2^{2(v-w)-t},$$

si ha infatti

$$\frac{d^p e^{x^4}}{dx^p} = e^{x^4}\left\{ \sum_{h=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)} \overset{h}{\underset{0}{G}}(p,h)\, x^{3p-4h} + \sum_{h=E\left(\frac{p}{2}\right)+1}^{E\left(\frac{3p}{4}\right)} \overset{2h-P}{\underset{E\left(\frac{p}{2}\right)}{G}}(p,h)\, x^{3p-4h} \right\}, \tag{9}$$

ove $P = p+1$, se p è divisibile per 4, e $P = p$, se p non è divisibile per 4.

Confrontando le (8) e (9), si traggono le identità

$$\sum_{m=M_{p-h}}^{E\left(\frac{h}{3}\right)} \sum_{l=L_{p-h}}^{E\left(\frac{h-3m}{2}\right)} \frac{p!\, 3^{h-2l-3m}\, 2^{2p-3h+2l+m}}{\overline{p-2h+l+2m}!\, \overline{h-2l-3m}!\, l!\, m!} = \begin{cases} \overset{h}{\underset{0}{G}}(p,h) & \text{se } h \leqslant E\left(\dfrac{p}{2}\right) \\ \overset{2h-P}{\underset{E\left(\frac{p}{2}\right)}{G}}(p,h) & \text{se } h < E\left(\dfrac{p}{2}\right). \end{cases}$$

Bologna, luglio 1904.

FILIPPO SIBIRANI.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 658 E 665

658. *Luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da un punto fisso a tutti i circoli bitangenti a una conica.*

E.-N. BARISIEN.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

Sia data una conica γ e un circolo c di centro C bitangente in M, N alla γ; sia P il polo di MN rispetto a γ e a c. Siccome la PC passa per il punto di mezzo di MN, passerà anche per il centro O di γ, quindi le direzioni di PC ed MN sono coniugate rispetto a γ, e poichè PC ed MN sono tra loro perpendicolari, la PC dovrà essere un asse di γ, cioè *il centro di* c *deve appartenere ad uno degli assi di* γ.

Ciò posto distinguiamo i seguenti tre casi.

1°. γ *è ellisse*. Sia:

$$b^2X^2 + a^2Y^2 - a^2b^2 = 0 \tag{1}$$

l'equazione di γ; supporremo che C appartenga all'asse delle x; poniamo quindi $C \equiv (x, 0)$; sia inoltre $A \equiv (\alpha, \beta)$ un punto fisso. L'equazione di un cerchio di centro C è data da:

$$(X - x)^2 + Y^2 - R^2 = 0\,. \tag{2}$$

La condizione necessaria e sufficiente affinchè la (2) sia bitangente alla (1) è che sia nullo il discriminante dell'equazione in X che si ottiene eliminando la Y tra le (1), (2); si deve quindi avere:

$$a^2x^2 - (b^2 - a^2)(R^2 - b^2 - x^2) = 0, \qquad \text{da cui} \qquad R^2 = b^2\frac{b^2 - a^2 + x^2}{b^2 - a^2},$$

quindi la (2) diventa:

$$(b^2 - a^2)[(X - x)^2 + Y^2] - b^2(b^2 - a^2 + x^2) = 0. \tag{3}$$

La polare di A rispetto alla (3) ha per equazione:

$$(b^2 - a^2)[\alpha X + \beta Y - (X + \alpha)x + x^2] - b^2(b^2 - a^2 + x^2) = 0. \tag{4}$$

È evidente che la (4) incontrerà la (3) nei punti di contatto delle tangenti condotte dal punto A alla (3). Sottraendo la (4) dalla (3) risulta:

$$X^2 + Y^2 - \alpha X - \beta Y - (X - \alpha)x = 0, \tag{5}$$

ed eliminando la x tra le (3), (5), si ottiene la *quartica circolare*

$$(b^2-a^2)Y^2[(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2]-b^2[(b^2-a^2)(X-\alpha)^2+(X^2+Y^2-\alpha X-\beta Y)^2]=0, \tag{6}$$

la quale è il luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da A ai circoli bitangente a γ *aventi il centro sull'asse delle* x. Quando *il centro* C *giace sull'asse delle* y si ottiene l'equazione del luogo scambiando nella (6) X con Y, a con b, α con β.

La (6) ha evidentemente un punto doppio in A e un altro in $(\alpha, 0)$; inoltre essa passa per i fuochi di γ e per i punti di contatto delle tangenti condotte da A a γ.

2°. γ *è iperbole*. Per ottenere le equazioni del luogo basta cambiare segno a b^2 in quelle trovate nel caso precedente.

3°. γ *è parabola*. Sia:

$$Y^2 = 2pX \tag{7}$$

l'equazione di γ. La (2) è bitangente alla (7) quando

$$R^2 = 2px - p^2.$$

Allora la (2) diventa:

$$(X - x)^2 + Y^2 + p^2 - 2px = 0. \tag{8}$$

La polare di A rispetto alla (8) ha per equazione

$$\alpha X + \beta Y - x(X + \alpha) + x^2 + p^2 - 2px = 0. \tag{9}$$

Eliminando la x tra le (8), (9) si ottiene la quartica circolare

$$Y^2[(X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2] + p^2(X-\alpha)^2 - 2p(X-\alpha)(X^2 + Y^2 - \alpha X - \beta Y) = 0$$

passante pel fuoco di γ, ecc.

665. *Il luogo del punto di mezzo delle corde di una cardioide che sono viste sotto un angolo costante α dal punto di regresso è una quartica della quale si domanda l'equazione e l'area. Nel caso in cui l'angolo costante è retto la quartica suddetta diviene un circolo.*

E.-N. Barisien.

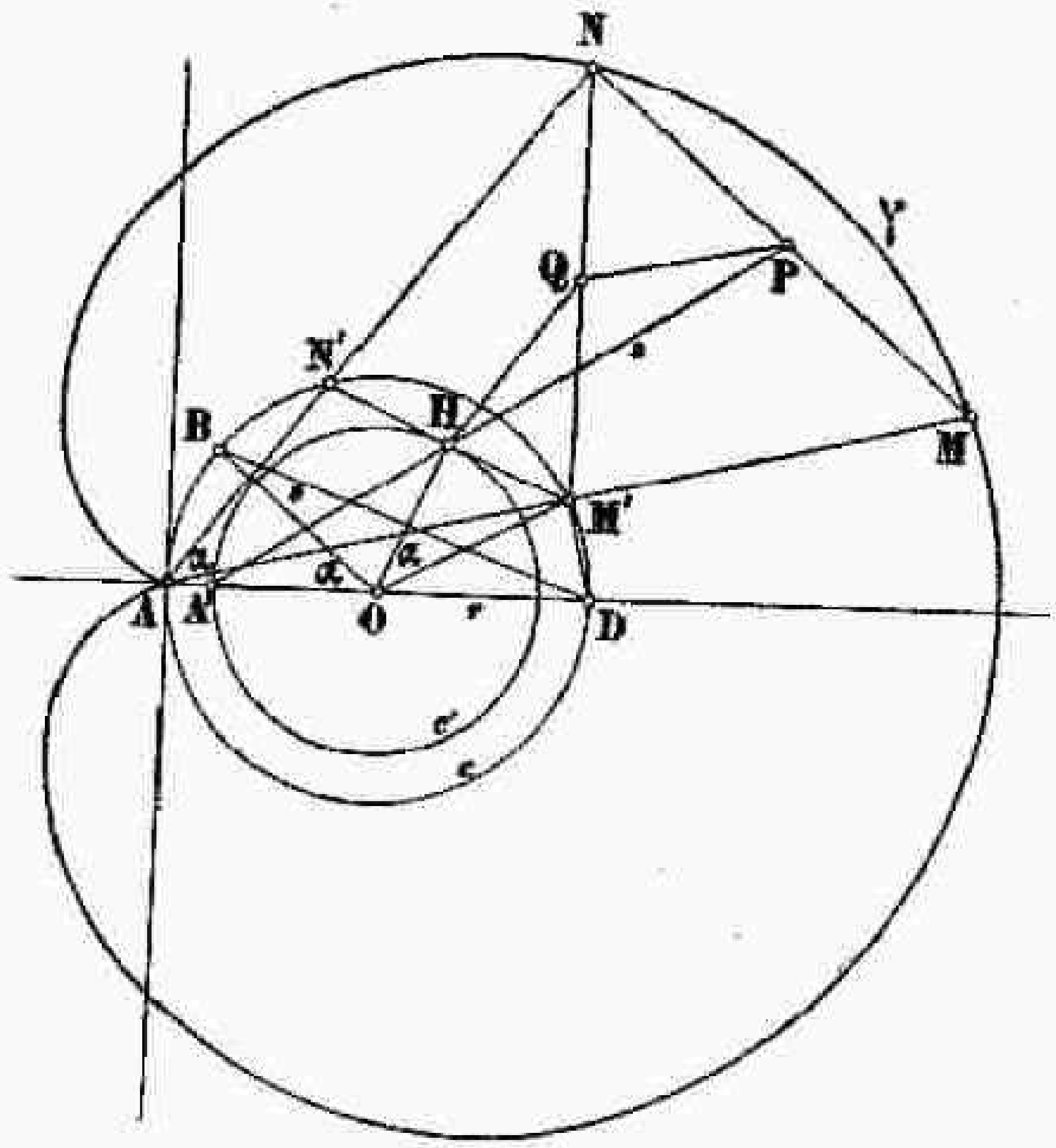
Risoluzioni del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

1ª. Geometrica. — Sieno: γ la cardioide data, A la sua cuspide, O ed r il centro e il raggio del cerchio c di cui la γ è concoide; D l'altro estremo del diametro di c passante per A; MN una corda di γ tale che sia $\widehat{MAN} = \alpha$; (*) P il punto di mezzo di MN; M', N' rispettivamente i punti in cui le rette AM, AN incontrano la c; B un punto di c tale che sia $\widehat{AOB} = \alpha$; A' la proiezione di B su AD; c' la circonferenza di centro O e raggio OA'.

Dimostreremo che *il luogo di P è una conchiglia di Pascal concoide di c′ rispetto al polo A′ ed al segmento addizionale* s = BD.

Sieno H e Q rispettivamente i punti medi di M′N′, M′N. I triangoli QPH, OBD sono uguali; infatti:

$$QP = \tfrac{1}{2}\,MM' = r = OB\,, \qquad QH = \tfrac{1}{2}\,NN' = r = OD\,;$$



inoltre, siccome le rette QP e QH sono rispettivamente parallele ad MM′ ed NN′, avremo anche:

$$\widehat{HQP} = \pi - \widehat{MAN} = \pi - \alpha = \widehat{BOD}\,.$$

Si deduce che

$$PH = BD = s\,. \qquad (1)$$

Si ha:

$$\widehat{M'OH} = \widehat{M'AN'} = \widehat{BOA'},$$

quindi i triangoli rettangoli M′OH, BOA′ sono uguali, ossia OH = OA′ e per ciò M′N′ è tangente a c' in H. Dimostriamo ora che la PH passa per A′. Si ha:

$$\widehat{PHM'} = \widehat{QHM'} - \widehat{QHP} = \widehat{NN'M'} - \widehat{QHP} = \widehat{ADM'} - \widehat{QHP} =$$

$$\widehat{ADM'} - \widehat{ODB} = \widehat{BDM'} = \tfrac{1}{2}\,\widehat{BOM'} = \tfrac{1}{2}\,\widehat{A'OH} = \widehat{A'HN'}\,;$$

da ciò si deduce che i punti A′, P, H sono in linea retta. Tenendo conto di questo ultimo risultato e della (1) si conclude che il luogo di P è proprio la *conchiglia di Pascal* suddetta.

Discussione. — Vediamo come varia il luogo Γ di P al variare di α da 0 a π. (*)

$\alpha = 0$. B ed A′ coincidono con A; $s = 2r$; c e c' coincidono. Si conclude che $\Gamma = \gamma$.

$\alpha = \frac{1}{2}\pi$. A′ coincide con O; c' si riduce al punto O; $s = r\sqrt{2}$. Γ diventa il cerchio di centro O e raggio $r\sqrt{2}$.

$\alpha = \frac{2}{3}\pi$. A′ è il punto medio di OD; s è uguale al diametro di c'; Γ è quindi una cardioide.

$\alpha = \pi$. B ed A′ coincidono con D; c e c' coincidono; $s = 0$; si ha quindi $\Gamma = c$.

(*) Basta considerare un α compreso tra 0 e π, perchè è evidente che due valori di α che diano per somma 2π generano uno stesso luogo.

$0<\alpha<\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{3}\pi<\alpha<\frac{2}{3}\pi$, $\frac{2}{3}\pi<\alpha<\pi$. Γ è sempre una conchiglia di Pascal; se d' è il diametro di c' si ha rispettivamente, $s \gtrless d'$ secondochè l'angolo α soddisfa le prime due disuguaglianze o la terza.

Equazione ed area di Γ. — L'equazione di Γ in coordinate polari, prendendo A' per polo ed A'D per asse polare, è

$$\rho = s + 2\,\overline{\mathrm{OA'}}\cos\varphi,$$

ossia

$$\rho = 2r\cos\tfrac{1}{2}\alpha + 2r\cos\alpha\cos\varphi. \tag{2}$$

In generale l'area della curva $\rho = a + b\cos\varphi$ è data da:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2\,d\varphi = \tfrac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}d\varphi + ab\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi + \tfrac{1}{2}b^2\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\pi\,(2a^2+b^2),$$

quindi l'area S di Γ sarà:

$$\mathrm{S} = \tfrac{1}{2}\pi\,(8r^2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha + 4r^2\cos^2\alpha) = 2\pi r^2(\cos^2\alpha + \cos\alpha + 1).$$

2ª. Analitica. — Scegliamo la AD per asse delle x e la normale ad AD in A per asse delle y. Sia:

$$\widehat{\mathrm{MAD}} = \lambda, \qquad \mathrm{P} \equiv (x, y).$$

Avremo:

$$\mathrm{AM} = 2r\,(1+\cos\lambda), \qquad \mathrm{AN} = 2r\,[1+\cos(\lambda+\alpha)];$$

$$\mathrm{M} \equiv (\mathrm{AM}\cos\lambda,\ \mathrm{AM}\,\mathrm{sen}\lambda), \qquad \mathrm{N} \equiv [\mathrm{AN}\cos(\lambda+\alpha),\ \mathrm{AN}\,\mathrm{sen}(\lambda+\alpha)];$$

$$x = \tfrac{1}{2}[\mathrm{AM}\cos\lambda + \mathrm{AN}\cos(\lambda+\alpha)] = r(1+\cos\lambda)\cos\lambda + r[1+\cos(\lambda+\alpha)]\cos(\lambda+\alpha),$$

$$y = \tfrac{1}{2}[\mathrm{AM}\,\mathrm{sen}\lambda + \mathrm{AN}\,\mathrm{sen}(\lambda+\alpha)] = r(1+\cos\lambda)\,\mathrm{sen}\lambda + r[1+\cos(\lambda+\alpha)]\,\mathrm{sen}(\lambda+\alpha).$$

Quindi:

$$\begin{cases} y\cos\lambda - x\,\mathrm{sen}\,\lambda = r\,[1+\cos(\lambda+\alpha)]\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ x\,\mathrm{sen}\,(\lambda+\alpha) - y\cos(\lambda+\alpha) = r\,(1+\cos\lambda)\,\mathrm{sen}\,\alpha, \end{cases}$$

cioè

$$\left.\begin{array}{c} (y - r\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha)\cos\lambda - (x - r\,\mathrm{sen}^2\alpha)\,\mathrm{sen}\lambda - r\,\mathrm{sen}\alpha = 0 \\ (y\cos\alpha - x\,\mathrm{sen}\alpha + r\,\mathrm{sen}\alpha)\cos\lambda - (y\,\mathrm{sen}\alpha + x\cos\alpha)\,\mathrm{sen}\lambda + r\,\mathrm{sen}\alpha = 0 \\ \cos^2\lambda + \mathrm{sen}^2\lambda = 1 \end{array}\right\}. \tag{A}$$

Eliminando $\cos\lambda$ e $\mathrm{sen}\lambda$ dal gruppo (A) si trova l'equazione del luogo di P. Essa è

$$r^2[(1+\cos\alpha)\,x + y\,\mathrm{sen}\alpha - r\,\mathrm{sen}^2\alpha]^2 +$$
$$+ r^2[(1+\cos\alpha)\,y - x\,\mathrm{sen}\alpha + r\,\mathrm{sen}\alpha\,(1-\cos\alpha)]^2 = (x^2+y^2-2\,rx + r^2\,\mathrm{sen}^2\alpha)^2,$$

ossia:

$$r^2\{(1+\cos\alpha)\,[x - r(1-\cos\alpha)] + y\,\mathrm{sen}\alpha\}^2 + r^2\{(1+\cos\alpha)\,y - [x - r(1-\cos\alpha)]\,\mathrm{sen}\alpha\}^2 =$$
$$= \{[x - r(1-\cos\alpha)]^2 + y^2 - 2r[x - r(1-\cos\alpha)]\cos\alpha\}^2;$$

eseguendo il trasporto di assi

$$x = \mathrm{X} + r\,(1-\cos\alpha), \qquad y = \mathrm{Y},$$

e semplificando, si ottiene

$$(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 - 2\,r\mathrm{X}\cos\alpha)^2 = 4r^2(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2)\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha. \tag{1}$$

Quest'equazione rappresenta evidentemente una conchiglia di Pascal.

Per $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ si hanno due cardioidi una delle quali (quella che corrisponde ad $\alpha = 0$) coincide con la data; per $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $\alpha = \pi$ si hanno due circonferenze.

Trasformata la (1) in coordinate polari si ottiene l'equazione (2) ottenuta colla dimostrazione precedente.

QUISTIONI PROPOSTE

682. Calcolare l'integrale

$$\int \sqrt{\sqrt{4x+a}-(2x-a)}\,dx\,.$$

683. Essendo ABC un triangolo isoscele dato ($AB=AC$), esiste un'iperbole, concentrica al circolo circoscritto ad ABC, che passa per B e C, per il centro dei circoli exiscritti contenuti negli angoli $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ e per il punto di Gergonne corrispondente a questi circoli exiscritti.

I vertici reali di questa iperbole sono situati sull'altezza corrispondente al lato BC, se $B > 60°$. Calcolare la lunghezza dell'asse di questa iperbole in funzione degli elementi del triangolo.

684. Il luogo dei centri delle coniche che passano per i fuochi di una ellisse e sono tangenti ad essa in un punto dato, è una ellisse.

685. Si considerino due circoli fissi c, c' di centri O, O', e un diametro AB di c. Essendo P la proiezione di un punto M di c sul diametro AB, si descriva il circolo γ che ha per centro M e per raggio la media geometrica fra il raggio del circolo c e la lunghezza OP (o MP). Dimostrare che l'asse radicale di γ e c' inviluppa una conica

686. Essendo O il vertice, a l'asse, d l'assintoto di una *versiera* (cubica di Agnesi), e T il punto di contatto di una delle tangenti condotte da O alla curva, dimostrare che la parallela ad a condotta per T divide l'area compresa per la curva e le rette a, d in due parti equivalenti.

Si cerchi anche di dividere in due parti equivalenti l'area suddetta per mezzo di una retta parallela a d.

687. Dimostrare che la retta avente per equazione

$$2\lambda(\lambda+\mu)\,x+(\lambda^2-\mu^2+2\lambda\mu+a^2)\,y-a\,(\lambda^2-\mu^2-2\lambda\mu)=0,$$

essendo i parametri di μ legati dalla relazione

$$\lambda^2+\mu^2=b^2,$$

inviluppa una conica. Quando a varia, questa conica inviluppa una quartica, e quando b varia questa quartica inviluppa tre rette (*).

E.-N. Barisien.

(*) Queste *tre rette* sono le assintote della quartica, che restano invariabili qualunque sia il valore di b; una delle assintote è doppia.

BIBLIOGRAFIA

Opere matematiche di Eugenio Beltrami. Tomo secondo, 1904.

Il secondo volume, testè pubblicato per cura della facoltà di scienze della R. Università di Roma, delle opere del Beltrami comprende le pubblicazioni dell'illustre scienziato che videro la luce dal 1867 al 1873 riferentisi principalmente alla geometria differenziale ed alla fisica matematica.

Ecco l'indice di questo volume:

27. — *Sulle proprietà generali delle superfici d'area minima.* (Memorie dell'Acc. di Bologna, 1867.)
28. *Sulla teoria generale delle superficie.* (Atti dell'Istituto Veneto, 1868.)
29. — *Intorno ad un nuovo elemento introdotto dal sig. Christoffel nella teoria delle superficie.* (Rendic. del R. Ist. Lomb., 1869.)
30. — *Sulla teorica generale dei parametri differenziali.* (Acc. di Bologna, 1868.)
31. — *Zur Theorie des Krummungsmasses.* (Math. Annalen, 1869.)
32. — *Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche.* (Acc. di Bologna, 1869.)
33. — *Alcune formule per la teoria elementare delle coniche.* (Giornale di Matematiche, 1871.)
34. — *Nota sulla teoria matematica dei solenoidi elettrodinamici.* (Nuovo Cimento 1871-72.)
35. — *Ricerche sulla cinematica dei fluidi.* (Acc. di Bologna, 1871-72-73-74.)
36. — *Intorno ad una trasformazione di Dirichlet.* (Giornale di Matematiche, 1872.)
37. — *Osservazioni sulla Nota del prof. L. Schlaefli alla memoria del sig. Beltrami "Sugli spazi di curvatura costante",* (Annali di matematiche, 1871-73.)
38. — *Sulla teoria analitica delle distanze.* (Ist. Lombardo, 1872.)
39. — *Teorema di geometria pseudo-sferica.* (Giornale di Matematica, 1872.)
40. — *Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudo-sferiche.* (Giornale di matematica, 1872.)
41. — *Del moto geometrico di un solido che ruzzola sopra un altro solido.* (Giornale di matematica, 1872.)
42. — *Di un sistema di formole per lo studio delle linee e delle superficie ortogonali.* (R. Ist. Lombardo, 1872.)
43. — *Sulle funzioni bilineari.* (Giornale di matematica, 1873.)
44. — *Sul potenziale mutuo di due sistemi rigidi, ed in particolare sul potenziale elementare elettrodinamico.* (Annali di matematica, 1873.)
45. — *Comunicazione di una lettera di* Lagrange *a* F. M. Zanotti. (Accademia di Bologna, 1873.)

Carrara. — *I tre problemi classici degli antichi in relazione ai recenti risultati della scienza.* Studio storico critico. *Problema 3º.* Trisezione dell'angolo. (Estratto dalla rivista di fisica matematica e scienze naturali.)

Abbiamo già reso conto ai lettori del Periodico delle prime due parti di questa interessante opera (Anno XVIII, pag. 198 e Anno XIX, pag. 52). Questa terza parte ha gli stessi pregi delle altre due: esattezza storica e scientifica, chiarezza e lucidità di esposizione, che ne rendono la lettura facile e dilettevole.

Si compone di tre parti. Nella prima *(Preliminari polemici)* si parla di alcuni fra gl'innumerevoli tentativi fatti in tutti i tempi per risolvere il problema colla riga e col compasso, tentativi assolutamente illogici e assurdi dopo che ne era stata dimostrata l'impossibilità. L'elenco come ben si capisce non è completo.

Segue l'enumerazione di varie soluzioni approssimate ed un cenno sulle dimostrazioni d'impossibilità esposte da Petersen, Klein, Capelli, Conti ed altri.

La seconda parte tratta delle risoluzioni ideate dagli antichi, riducendo il problema alle intersezioni di coniche o alla inserzione di due medie geometriche, o facendo uso di altre curve come la quadratrice e la concoide.

Nella terza parte, che tratta del problema nell'epoca moderna, è data anzitutto la dimostrazione dell'impossibilità di risolvere il problema colla riga e col compasso, poi le soluzioni di Cartesio e Wolf mediante un circolo ed una conica, quella di Newton, la risoluzione mediante la concoide di Pascal, e per mezzo di vari istrumenti ideati in epoche abbastanza recenti, ecc.

Rouse Ball. — *Breve compendio di storia delle matematiche.* Versione dall'inglese con note aggiunte e modificazioni dei dott.ri Dionisio Gambioli e Giulio Puliti riveduta e corretta dal prof. G. Loria. II volume. Bologna, Zanichelli, 1904.

Nel n. VI, anno XVIII (pag. 342) abbiamo annunziato la pubblicazione del I volume della traduzione di questa opera del sig. Rouse Ball, e dato un breve cenno del contenuto e dei pregi di esso.

Il II volume, recentemente pubblicato, comprende la storia delle matematiche cominciando dalla invenzione della geometria analitica fatta da Cartesio (1635) fino ai giorni nostri.

Il traduttore prof. Gambioli ha aggiunto la biografia di alcuni matematici stranieri, e dei più insigni matematici italiani moderni in due appendici che sono un necessario complemento ad una traduzione italiana dell'opera del Rouse Ball.

Ed ora ci permettiamo di notare alcune mende dell'opera che a nostro avviso, i traduttori avrebbero fatto bene a togliere.

Talvolta il libro si riduce ad un'arida enumerazione di matematici, mentre per un sunto sarebbe opportuno che fossero messi in vista pochi nomi, quelli di coloro che stanno come pietre miliari sul cammino della scienza, facendo risaltare l'opera di essi.

In qualche punto l'A. si perde in storielle di poca importanza come le disgrazie coniugali di Kepler (Vol. I, pag. 267) o il chiodo a cui Poisson giovinetto era attaccato da suo padre (Vol. II, pag. 186) e simili; e viceversa parlando di Mercator si dimentica di dire che egli ideò quella proiezione di cui si serve tutto il mondo, dice poche parole su Delambre, Torricelli, Ruffini e sopratutto riassume le quattro pagine che egli dedica a *Galileo* colle seguenti parole:

“ Io penso che l'opera di Galileo può riassumersi bene dicendo che le sue “ ricerche sulla meccanica meritano alta lode, ma sebbene a lui si debbano gran “ parte delle prove che posero la teoria copernicana sopra una base soddisfacente, “ non fece egli stesso alcun progresso speciale nelle teorie astronomiche ”.

E questo giudizio non può soddisfare nessuno, e tanto meno i compatriotti di colui che

... all'Angelo che tanta ala vi stese,
Sgombrò primo le vie del firmamento.

Infine crediamo che sarebbe stato molto utile (per non dire necessario) aggiungere un indice alfabetico dei nomi ricordati nell'opera e degli argomenti in essa trattati,

Opere matematiche di Francesco Brioschi. Tomo III.

È uscito il 3° volume di questa splendida raccolta. di cui già annunziammo l'inizio (v. Periodico anno XVII pag. 101, anno XVIII pag. 150). Contiene 11 note e memorie pubblicate dal 1887 al 1897 negli Annali di matematica, 25 pubblicate dal 1847 al 1894 nei Rediconti del R. Ist. Lombardo, 2 pubblicate nel 1855 nelle Memorie della Società italiana delle Scienze in Modena, 17 pubblicate dalla R. Acc. dei Lincei dal 1870 al 1886.

Queste memorie si riferiscono principalmente alla teoria delle forme algebriche, alle funzioni ellittiche ed iperellittiche alla risoluzione delle equazioni.

Vi sono pure le necrologie di Casorati, Betti, Colombani.

Loria. — *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. — Theorie und Geschichte.* — Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von *Fritz Schütte.* — Leipzig. Teuebner 1902.

La Regia Accademia delle scienze di Madrid propose un premio per un elenco di tutte le curve di qualsiasi specie, che hanno un nome speciale, con brevi notizie sulla loro forma, sulla loro equazione e sullo scopritore di esse. Il concorso scadeva il 31 dicembre 1894, ma fu prorogato al 31 dicembre 1897, non essendo giunte risposte. Intanto *Hâton de la Goupillière* proponeva una quistione simile nell'*Intermédiaire des mathématiciens* (Vol. I, p. 37, 1894). Il prof. Loria vinse il concorso con una memoria, che ha dato origine alla grande opera (un bel volume di circa 750 pagine) pubblicato in lingua tedesca dal Teubner.

Tutti coloro che si dedicano alle matematiche devono esser molto grati al chiarissimo professore per avere condotta a termine un'opera di questa natura, e all'Accademia di Madrid per averla provocata.

Infatti in tutti i rami delle matematiche, dai tempi più remoti fino ai giorni nostri, si trovano numerosissimi esempi di curve, ideate per risolvere i problemi classici dell'antichità od altri problemi interessanti, o per rappresentare leggi fisiche, meccaniche ed altre, e non era possibile, fino ad oggi, avere notizia di queste curve, altro che frugando pazientemente in giornali, riviste, Atti di Accademie scientifiche, libri antichi e rari.

Per raccogliere questo enorme materiale occorreva una erudizione profondissima e una pazienza da benedettino; per ordinarlo, classificarlo e ridurlo in volume relativamente piccolo occorreva un acume e un intuito matematico di primo ordine.

Nessuno, crediamo, poteva riunire queste qualità in grado più eminente del prof. Loria, ed il lavoro da lui compiuto darà modo agli studiosi di verificare senza alcuna fatica, se qualche curva che a loro capiti sott'occhio per una ragione qualsiasi, rientra o no fra quelle conosciute.

Libri di questa natura sono assai rari e si pubblicano soltanto a lunghi intervalli, perchè, nel campo scientifico i più preferiscono lanciarsi alla conquista dell'ignoto, alla ricerca delle regioni inesplorate; la vertigine delle altezze dà all'audace cercatore, come all'ardito alpinista una specie di ebbrezza, che manca quando si fanno ricerche pazienti, lunghe, spesso noiose entro i volumi polverosi delle biblioteche.

Ma, come per l'esploratore è necessario raccogliere l'insieme delle sue scoperte, come all'alpinista piace di tanto in tantò volgere lo sguardo indietro per misurare l'altezza a cui è giunto, così è della più alta importanza nel campo delle scienze, un istante di sosta per raccogliere quanto è stato fatto sopra un dato argomento dall'umanità tutta intera e misurarne l'importanza.

L'opera è divisa in sette parti come segue:

I. — *Luoghi piani e solidi.* (Rette, circoli, coniche) (3 capitoli).
II. — *Curve del terz'ordine* (14 capitoli).
III. — *Curve del quart'ordine* (16 capitoli).
IV. — *Curve algebriche speciali di ordine superiore al quarto* (6 capitoli).
V. — *Curve algebriche speciali d'ordine qualunque* (19 capitoli).
VI. — *Curve trascendenti* (25 capitoli).
VII. — *Curve dedotte da altre* (12 capitoli).

Come si vede da questo indice le curve sono classificate prendendo per base la loro rappresentazione analitica.

Invece nei numerosi capitoli, in cui si divide ciascuna parte, è adottato come criterio principale l'ordinamento storico e cronologico.

Un'analisi del libro, o richiederebbe uno spazio assai maggiore di quello di cui possiamo disporre, o si ridurrebbe ad un arido e insignificante elenco di nomi, per conseguenza crediamo più opportuno limitarci a segnalare ai nostri lettori la pregevole opera per invogliarli allo studio di essa.

I lettori di questa rivista hanno avuto un saggio dell'opera nei due articoli dell'egregio autore intitolati: *Osservazioni sopra le coordinate polari* (Vol. XV, p. 7) e *Le radiali di una curva algebrica* (Vol. XVII, p. 30) i cui concetti fondamentali sono riprodotti nel libro.

In un'opera di questa importanza e di questa mole non possono mancare le mende, e le omissioni. Ci auguriamo che l'edizione tedesca valga a preparare la via ad una edizione italiana.

Vogliamo pure sperare che l'illustre autore voglia compiere l'opera e rendere un altro segnalato servigio ai cultori delle discipline geometriche pubblicando un lavoro dello stesso genere sulle superficie.

K.

IL III CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI

(Heidelberg, 8-13 agosto 1904)

Quando, durante l'ultima adunanza generale di questo memorabile convegno di dotti, il prof. Schwarz, con parola calda e convinta, propose un voto di plauso a coloro che, con abnegazione superiore ad ogni elogio, quella riunione avevano sapientemente organizzata in tutti i suoi particolari più minuti, sì da ottenere un risultato pressochè perfetto, il concorde applauso, con cui l'assemblea accolse siffatta proposta, provò che egli erasi fatto interpetre di un sentimento che tutti condividevano. Tuttavia a un solo punto del piano generale del Congresso, secondo il convincimento universale, sarebbe stato necessario qualche ritocco, ed è nell'orario delle sedute, il quale rese impossibile il prendere parte od assistere ai lavori di più d'una sezione. Di tale piccolo nèo facciamo qui menzione, non per vano desiderio di critica e nemmeno per ammonire gli organizzatori dei congressi futuri, ma soltanto per rendere edotti i lettori del *Periodico* del perchè ci troviamo nell'assoluta impossibilità di esporre con profondità ed ampiezza quanto fecero i matematici nella loro terza generale riunione, nell'attesa degli Atti di essa, ci è forza restringerci ad una semplice cronaca degli avvenimenti!

Al III Congresso internazionale presero parte 310 matematici; e cioè: 155 *tedeschi*, 25 *francesi*, ed altrettanti *russi*, 24 *austro-ungheresi*, 12 *inglesi*, ed altrettanti *nord-americani*, 11 *italiani*, [cioè: Capelli (Napoli), Castelnuovo (Roma), Galvani (Bologna), Guccia (Palermo), Levi-Civita (Padova), Loria (Genova), Morera (Torino), Segre (Torino), Vacca (Genova), Vailati (Como) e Volterra (Roma)], 10 *danesi*, ed altrettanti *norvego-svedesi*, 9 *svizzeri*, 5 *olandesi*, 2 *belgi*, 2 *rumeni*, 2 *greci*, 1 *sud-americano*, 1 *spagnolo* ed 1 *giapponese;* finalmente 2 di residenza ignota ed 1 abitante di Sofia.

La concordia che permanente regnò fra tante persone, fu veramente mirabile, ed era oggetto di soddisfazione e curiosità il vedere, affratellati dalla ricerca del vero, rivali di ieri come nemici di oggi, concordia che nulla turbò e potè solo venire eclissata dalla signorile cordialità delle accoglienze preparate dai matematici tedeschi ai loro colleghi di fuori.

Il Congresso comprendeva sei sezioni, cioè: I *Aritmetica ed Algebra*, II *Analisi*, III *Geometria*, IV *Matematica applicata*, V *Storia*, VI *Pedagogia*. Queste ebbero per organizzatori rispettivamente: I Kneser e Lüroth; II Hilbert e Schwarz; III Brill, Meyer e Schur; IV Hauck, Klein e Runge; V Cantor e Stäckel; VI Schubert e Treutlein.

A presiedere le sedute delle varie sezioni furono per acclamazione chiamati: I Netto, Seliwanoff; II Hadamard, Levi-Civita, Lindelöf, Mittag-Läffler; III Geiser, Guichard, Morley, Segre, Zeuthen; IV Börrch, Finsterwalder, Hadamarr, Klein, Vleck, Volterra; V Braunmühl, Loria, Tannery, Zeuthen; VI Fehr, Greenhill, Gubler, Schotten.

Le comunicazioni fatte furono rispettivamente 13, 14, 21, 15, 10, 20, di cui *sette* da italiani, cioè: Capelli, nelle Sez. I e II; Levi-Civita, nella IV; Loria, nella V e VI; Vailati, nella V, e Volterra, nella IV. Non vanno poi dimenticate le conferenze generali, tenute dal Painlevé (in francese), dal Greenhill (in inglese), dal Segre (in italiano) e dal Wirtinger (in tedesco).

Nella seduta inaugurale il Königsberger commemorò degnamente Jacobi, mentre in altre sedute generali vennero presentati il I volume della grande *Enciclopedia* " delle quattro accademie „ nonchè il primo fascicolo della traduzione francese di essa, ed una storia della società matematica tedesca; vennero inoltre fatti voti per l'insegnamento della storia delle matematiche e perchè l'Istituzione Carnegie accordi i fondi necessari alla pubblicazione delle opere complete di Eulero.

Da ultimo va ricordato l'interessantissima esposizione di modelli ed apparati matematici, la quale, assieme alle conferenze illustrative, costituì una delle maggiori attrattive del Congresso

Nella seduta di chiusura il prof. Volterra, in nome dell'Accademia dei Lincei e del Circolo matematico di Palermo, propose l'Italia come sede del IV Congresso; l'entusiasmo col quale tale proposta venne accolta ed approvata, dimostrò, non solo il fascino che il bel paese esercita dovunque, ma anche l'alta stima e la profonda simpatia di cui godono all'estero i matematici Italiani; *a Roma, dunque, nella Primavera 1908!* erano le parole che echeggiavano nel momento doloroso della separazione. In quell'occasione verrà conferito per concorso un premio di L. 3000, al migliore lavoro sulla teoria delle curve algebriche, con un fondo posto generosamente a disposizione del Circolo matematico di Palermo, dal prof. Guccia (*).

(*) Il programma di tale concorso verrà presto pubblicato.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 14 ottobre 1904

TEORIA DEI NUMERI COMPLESSI AD N UNITÀ

INTRODUZIONE.

L'ampliamento di un campo numerico coll'introduzione di nuovi numeri deve essere in ogni caso suggerito dalla necessità di rendere sempre possibili talune operazioni sopra numeri del campo, ed è certo molto utile che la estensione sia fatta di guisa che le leggi formali delle operazioni restino nel nuovo campo, per quanto è possibile, conservate. È questo il principio detto da Hankel della *permanenza delle regole di calcolo* (¹).

Così dal campo dei numeri interi, con la scorta di questo principio, si arriva mediante successivi ampliamenti, al campo dei numeri razionali, e poi a quello dei numeri reali, nei quali campi le operazioni fondamentali (addizione, sottrazione, moltiplicazione, e divisione) sono sempre possibili e godono delle medesime leggi che valgono pei numeri interi.

L'impossibilità di estrarre la radice quadrata di un numero negativo condusse all'introduzione dei *numeri complessi*, che risultano associando all'unità reale 1 un'altra unità i definita dalla proprietà

$$i^2 = -1\,,$$

e anche in questo nuovo campo restano inalterate le leggi delle operazioni fondamentali.

Qui non è il caso di dire l'uso, veramente vasto e fecondo, che si fa e si è fatto dei numeri complessi dopo le ricerche celebri di Eulero e di Gauss, ma occorre piuttosto far notare che i numeri complessi ebbero originariamente accoglienza, perchè una folla di teoremi acquistava con essi una validità generale e una espressione più semplice. Cosicchè mentre si studiava la natura dei numeri complessi, doveva naturalmente sorgere l'idea di ricercare se il processo di estensione del campo numerico si chiudesse coi trovati numeri,

(¹) Per il senso esatto di questo principio si legga l'articolo di G. Peano, *Principio de Permanentia*, nella "Revue de Mathématique", tomo 8°, anno 1903.

ovvero se altri se ne potessero definire, i quali, mentre dessero luogo ad una aritmetica generale con regole tutto affatto analoghe alle ordinarie, soddisfacessero altresì al medesimo scopo di utile generalizzazione e di semplificazione.

E GAUSS stesso fece senza dubbio ricerche in questo senso, giacchè nel 1831 nella introduzione alla sua seconda memoria sui residui biquadratici, dopo di avere esposto il suo modo di concepire un numero complesso, così scriveva:

" L'Autore si è riservato di studiare in seguito completamente la questione che nella precedente memoria è soltanto accennata per incidenza, di trovare cioè le ragioni perchè le relazioni fra elementi, che rappresentano una varietà a più di due dimensioni, *non* possano fornire altre sorta di quantità *ammissibili* nell'aritmetica generale " [1].

GAUSS dunque era convinto della *impossibilità* di una tale estensione, e probabilmente perchè si era accorto che l'introduzione di numeri complessi a più di due unità non poteva farsi senza ledere qualcuna delle leggi formali delle operazioni fondamentali.

La questione doveva certamente risorgere dopo che HAMILTON, nel 1853 pubblicava la sua teoria dei *Quaternioni* [2], colla quale dava un importantissimo esempio di numeri complessi a 4 unità, non ammettenti però una moltiplicazione commutativa.

L'impossibilità dunque di definire una moltiplicazione che ammettesse tutte le leggi formali della moltiplicazione ordinaria cominciava a rendersi manifesta ai geometri. E così GRASSMANN nel 1862 [3], introducendo sotto il nome di *quantità estensive* numeri complessi generali, pensava di non fare nemmeno l'ipotesi che il prodotto di più numeri complessi di dato sistema appartenesse a questo stesso sistema, mentre d'altra parte WEIERSTRASS, occupandosi per la prima volta della questione nel semestre d'inverno 1861-62 [4], metteva in luce un fatto di grandissima importanza, che segnalò poi nel 1863 in una lezione all'Università di Berlino, che cioè in ogni sistema di numeri complessi a più di due unità, il quale ammette una moltiplicazione commutativa, esistono sempre numeri diversi da zero il cui prodotto sia uguale allo zero.

Questo teorema pubblicato da HANKEL nel 1867 [5], fu generalizzato da FROBENIUS nel 1878 [6], e da PEIRCE nel 1881 [7]; entrambi dimostrarono che, anche sacrificando la legge commutativa della moltiplicazione, tranne i quaternioni nessun altro sistema di numeri complessi

---

(1) GAUSS, *Theoria residuorum biquadraticorum*, II (1831). Werke 2, p. 178.

(2) W. R. HAMILTON, *Lectures on Quaternions*. Dublin, 1853.

(3) GRASSMANN, *Ausdehnungslehre*, 1862.

(4) Così si rileva da una lettera inviata a SCHWARZ [vedi nota (1) pag. seg.]. Cfr. anche *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Teil I. Band I. Heft 2, A. 4: *Theorie der gemeinen und höheren complexen Grössen*, von Study, p. 173.

(5) H. HANKEL, *Theorie der complexen Zahlensysteme*. Leipzig, 1867.

(6) FROBENIUS, *Journal für die r. u. a. Math.*, 84 (1878), p. 59.

(7) C. S. PEIRCE, *American Journal of Math.*, 4 (1881), p. 225.

a più di due unità poteva godere della proprietà che per l'annullamento di un prodotto sia necessario l'annullamento di uno dei fattori.

Questo fatto dimostrerebbe l'asserzione di GAUSS riportata dianzi dell'impossibilità di fondare un'aritmetica generale analoga all'ordinaria, se l'esistenza di numeri che rendono nullo un prodotto senza che nessuno di essi lo sia si ritenesse d'inciampo all'effettiva costruzione di una tale aritmetica.

Ma non è di questa opinione il WEIERSTRASS.

In una lunga lettera a SCHWARZ del 1883 (1) egli pone infatti la questione se l'esistenza di siffatti numeri, che chiama *divisori dello zero*, costituisse o no una sostanziale differenza tra l'aritmetica delle quantità formate da più di due unità e l'aritmetica ordinaria, e conclude che fra le due aritmetiche c'è anzi perfetta analogia, quando si faccia l'ulteriore ipotesi che una equazione algebrica allora *solo* possa ammettere infinite radici quando i suoi coefficienti si ottengano tutti da uno stesso divisore dello zero mediante moltiplicazione per quantità arbitrarie. Il sistema risulta allora costituito dalle quantità complesse della forma

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_m e_m ,$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sono numeri complessi ordinari, e le unità $e_1, e_2, \ldots, e_m$ sottoposte alle condizioni

$$e_r \cdot e_r = e_r , \qquad e_r \cdot e_s = 0 . \qquad (r \neq s,\ r, s = 1, 2, \ldots, m).$$

Se con

$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_m e_m$$

si indica un altro numero complesso appartenente a questo sistema, il prodotto ab risulta dato con legge semplicissima dall'uguaglianza

$$ab = \alpha_1 \beta_1 e_1 + \alpha_2 \beta_2 e_2 + \ldots + \alpha_m \beta_m e_m .$$

Le leggi della moltiplicazione sono evidentemente verificate, onde WEIERSTRASS conclude che è *possibile* l'introduzione di quantità complesse in un'aritmetica generale analoga all'ordinaria, ma la regola stessa colla quale si effettua la moltiplicazione dimostra chiaramente l'*inutilità* di questa introduzione: « l'aritmetica delle quantità complesse non può condurre ad alcun risultato che non possa derivarsi senz'altro dalla teoria delle quantità complesse ad una o a due unità ».

La lettera di WEIERSTRASS segna il punto di partenza di una serie di ricerche fatte da SCHWARZ, HÖLDER, PETERSEN e DEDEKIND (2). Anzi DEDEKIND arriva al sistema di WEIERSTRASS mettendosi sotto ipotesi

---

(1) *Göttingen Nachrichten*, 1884, p. 396. Vedi anche *Mathematische Werke* von KARL WEIERSTRASS: *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen*, Zweiter Band, pp. 311-332; e le osservazioni di H. A. SCHWARZ relative a questa lettera, Gött. Nachr. 1884, p. 516 e Math. Werke von K. WEIERSTRASS, II, pp. 332-339.

(2) H. A. SCHWARZ, *Gött Nachr.*, p. 516; O. HÖLDER, 1886, p. 241, J. PETERSEN, 1887, p. 489. DEDEKIND, 1885, p. 141 e 1887, p. 1.

un po' più generali, e confrontando le proprietà di questo sistema con le analoghe dei numeri algebrici, la cui natura è stata studiata da tempo, conclude che un sistema di numeri complessi che ammetta le leggi dell'aritmetica ordinaria non è nè impossibile, nè superfluo, ma sibbene *privo del carattere di novità.*

Tolti dunque questi sistemi, restano sistemi che presentano sostanziali differenze col sistema delle quantità complesse ordinarie, con tutto ciò essi non sono privi di interesse, e la concisione e la semplicità che il loro mezzo apporta in talune teorie ne consiglia lo studio. Si son fatte perciò delle ricerche per esaminarne la struttura e per classificarli specialmente col sussidio della teoria dei gruppi di trasformazione; queste ricerche si devono a Study (1), Lie (2), Scheffers (3), Frobenius (4), Hilbert (5), ed altri.

In Italia veruna pubblicazione è comparsa su questo argomento, cosicchè ho creduto opera non vana pubblicare una trattazione sistematica della teoria dei numeri complessi ad n unità, argomento sul quale ho riferito alla Scuola di Magistero annessa all'Università di Palermo, e che mi fu suggerito dal Ch.mo prof. Giovanni Maisano, che dirige le conferenze della classe di matematica.

Mi prefiggo di non uscire dai limiti della pura Analisi Algebrica, e in questa parte, nella quale, dopo la definizione dei numeri complessi col metodo di Hamilton, e i teoremi generali sui sistemi di numeri complessi che ammettono una moltiplicazione associativa e una divisione bilaterale passo alla dimostrazione del surricordato teorema di Frobenius sopra i quaternioni, io seguirò un lavoro del Grissemann (6), al quale è anche ispirato un capitolo della pregevole e recente opera dei proff. Stolz e Gmeiner, *Theoretische Arithmetik* (Leipzig, 1902), che mi è stata in questa parte guida ottima e sicura.

Corpi associativi - Corpi hankeliani.

§ 1. — Definizioni prelimimari - Operazioni fondamentali.

1. Definizione di numero complesso d'ordine n.

Definizione I. — Un sistema di n numeri reali $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ si dirà un *numero complesso d'ordine* n. Denotando con a questo numero complesso, si scriverà

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \tag{1}$$

(1) E. Study, *Gött Nachr.*, 1889, p. 237; 1898, p. 1.

(2) S. Lie, *Vorlesungen über endliche continuierliche Gruppen,* bearbeiten von G. Scheffers, Leipzig, 1893 (Kap. 21).

(3) G. Scheffers, *Math. Annalen*, 39 (1891), p. 293.

(4) Frobenius, *Berl. Ber.* 1896 p. 601.

(5) D. Hilbert, *Gött Nachr.*, 1896, p. 179. Si vegga anche L. Kronecker, *Berl. Ber.* 1888, I, pp. 429, 447, 557, 595; II, p. 983.

(6) F. Grissemann, *Monatshefte für Math. und Phys.* XI, Jahrg. p. 137-147.