4. Con questo metodo il numero apparisce come rappresentante le grandezze e serve immediatamente al loro studio. Le definizioni dei concetti e delle operazioni relative ai numeri devono quindi discendere dalle corrispondenti per le grandezze. Saranno quindi uguali i numeri che rappresentano grandezze uguali, sarà maggiore il numero che rappresenta la grandezza maggiore, un numero sarà somma di più altri se rappresenta la grandezza somma delle grandezze rappresentate da questi altri numeri, ecc. In tal modo i concetti di uguaglianza, di disuguaglianza e le operazioni sui numeri godranno le proprietà stesse che godono le corrispondenti per le grandezze. E siccome cogli ordinari concetti di uguaglianza e di disuguaglianza, di maggiore e di minore, ecc. per le grandezze che più comunemente si sogliono studiare si ha che, indicando con A, B, C,.... grandezze omogenee, se $A = B$, $B = C$ anche $A = C$, se $A > B$, $B > C$ anche $A > C$, e $A + B = B + A$ ecc., sarà corrispondentemente per i numeri a, b, c,.... che rappresentano quelle grandezze, che $a = c$ se $a = b$, $b = c$; $a > c$, se $a > b$, $b > c$; e $a + b = b + a$ ecc. Queste proprietà dei numeri sono quindi veri e propri teoremi.

Il concetto di numero dipende così dal concetto di grandezza; ma il vedere come il numero, introdotto che sia, possiede esso stesso le proprietà delle grandezze, fa nascere l'idea che il numero possa introdursi anche come ente che esista da sè, in seguito a considerazioni di altro genere.

Serve a questo il secondo dei metodi cui abbiamo accennato nel § 1, col quale, sotto altri punti di vista, si studiano enti ideali puramente aritmetici, cui pure si dà il nome di numeri.

5. In questo secondo metodo (*) i numeri non hanno nessun significato concreto, ma un puro significato analitico: essi non sono che gli elementi di operazioni analitiche. Le

(*) Cfr. *Stolz*, *Hankel* ll. cc. Come il precedente, così non intendo sviluppare completamente neppure questo metodo, rimandando, per l'esatta trattazione, alle opere citate.

loro proprietà dipenderanno quindi non dal significato assoluto delle operazioni, ma dalle proprietà di queste: per cui, nelle successive generalizzazioni del concetto di numero, cercando sempre che i nuovi numeri che s'introducono comprendano gli antichi, non si dovrà aver cura che sia tale o tal'altro il significato dell' operazione, ma che questa, cioè il suo simbolo, nel quale essa consiste, goda la proprietà che godeva per i numeri precedenti: e così le definizioni delle operazioni saranno definizioni puramente simboliche e di forma. In altre parole, per definire le operazioni se ne daranno le proprietà caratteristiche, cioè quelle sole da cui discendono per dimostrazione le altre di cui vogliamo che esse godano, e quelle serviranno a *indicare* un nuovo numero che noi intenderemo venga definito come loro risultato.

Il numero è in questo metodo un segno e null'altro, o, se si vuole, un ente astratto non definito in sè ma solo per alcune proprietà che lo legano ad altri della medesima specie, le quali sono le proprietà formali ora accennate.

6. Partiamo da un ente astratto, che s'indica con 1 (o anche, può dirsi, che è il segno 1): e immaginando di poterne supporre tanti quanti se ne vuole da dirsi uguali ad esso, si consideri insieme ad un altro suo uguale, indicando con + l'operazione del considerarli insieme: sarà $1+1$ il simbolo di quest'operazione, o, se si vuole, l'operazione stessa. Diremo che essa ha per risultato un nuovo ente da dirsi differente dai precedenti, e da indicarsi con 2. Questo ente si definisce disuguale dal precedente, perchè, sebbene le parole uguale e disuguale possiamo usarle in quali casi vogliamo purchè una escluda l'altra, pure è conveniente indicare con esse due concetti tali che le formule che ne derivano esprimano le proprietà che ordinariamente si sogliono ritenere annesse al concetto di uguaglianza. Ordinariamente ci facciamo questo concetto dell' uguaglianza: che due cose uguali ad una terza lo sono fra loro, che la somma è differente da una sua parte ecc: onde, sebbene liberi di non ammet-

tere tali proprietà nei nostri enti, sarà utile farlo perchè essi non solo riescano enti a sè, ma siano poi applicabili agli oggetti che si sogliono studiare. Onde, poichè l'operazione $1+1$ è caso particolare di quella che dopo diremo addizione, e quindi sarà 2 da dirsi somma di 1 ed 1, è conveniente chiamare 2 disuguale da 1. (*) L'operazione $2+1$ diremo che ha per risultato un nuovo ente, il 3, l'operazione $3+1$ il 4 ecc., ciascuno dei nuovi enti dovendosi dire disuguale dai precedenti. Così si generano infiniti enti che si dicono *numeri interi* o *naturali*.

Per *addizione* di due numeri interi intenderemo un'operazione commutativa ed associativa, ossia, se essa s'indica col segno $+$, tale che sodisfi le condizioni:

$$a+b=b+a\,; \quad (a+b)+c=a+(b+c).$$

Si prova che basta porre la sola condizione

$$a+(b+1)=(a+b)+1,$$

la quale non è che un caso particolare delle precedenti; giacchè da essa discendono le altre, e risulta da essa sola determinato il numero che devesi necessariamente far corrispondere come risultato (somma) all'operazione $a+1$.

Per *moltiplicazione* di due numeri interi s'intende un'operazione commutativa, associativa, distributiva rispetto all'addizione e a modulo 1; tale cioè che, se s'indica col segno. sia

$$a.b=b.a\,; \ (a.b).c=a.(b.c)\,; \ a.(b+c)=a.b+a.c$$

$$a.1=a$$

Anche qui si prova che, per definirla, bastano le due sole condizioni:

$$a.1=a, \ a.(b+1)=a.b+a,$$

giacchè se sono soddisfatte esse vengono soddisfatte le altre

(*) Questi ragionamenti sembrano forse strani se non si pensa che qui i numeri sono puri enti astratti, puri enti di ragionamento, senza nessun fondamento nella realtà, e legati a questa dal solo nome di numeri. Se si desse loro un nome differente, il che farebbe dimenticare che in seguito si vogliono applicare alla realtà, lo strano di quei ragionamenti sparirebbe immediatamente.

e vi è sempre un numero ed uno solo che possa corrispondere come risultato (prodotto) alla moltiplicazione $a.b$; talchè quelle due condizioni individuano completamente l'operazione.

Le due operazioni precedenti sono sempre possibili qualunque siano, i numeri impiegati; ma le loro operazioni inverse, quelle cioè che corrispondono alla determinazione del numero x che sodisfa ad una delle due relazioni

$$a + x = b\ , \quad a.x = b$$

non sempre sono possibili.

L'impossibilità della sottrazione indicata da $b - a$ nel caso che b preceda a nella serie dei numeri naturali porta ad introdurre un nuovo ente aritmetico da dirsi differente da tutti i precedenti per ragioni simili a quelle già accennate; esso ha per iscopo di rendere sempre possibile la sottrazione, o, ciò che in questo caso ha esattamente lo stesso significato, a far sì che il simbolo $b - a$ (che, per non contradire alle leggi caratteristiche dell' uguaglianza, non può dirsi uguale a nessuno dei numeri naturali) possa indicarsi con un segno unico, il quale, secondo l' attuale punto di vista, avrà valore di numero e potrà dirsi risultato della sottrazione precedente. Questo ente, affinchè l'addizione anche per i nuovi enti goda la stessa proprietà di cui godeva al caso in cui $b - a$ è un numero naturale, sarà formalmente *definito* dalla relazione:

$$(b - a) + a = b$$

e sarà un *numero negativo* o lo *zero*.

Del pari la divisione $x = \frac{a}{b}$ è impossibile se a non è multiplo di b: onde, per renderla possibile, cioè perchè il simbolo $\frac{a}{b}$ si possa esso pure dire uguale ad un numero, bisogna introdurre nuovi numeri, che sono i *numeri frazionari*, e che vengono con definizione formale definiti da

$$\frac{a}{b} \cdot b = a$$

Le operazioni fra questi enti si definiscono chiedendo che per esse siano soddisfatte le proprietà formali già riscontrate per le operazioni che hanno ugual nome (e che quindi si indicano con ugual simbolo), fra i numeri già esistenti. Anche qui si prova che basta ammettere dei casi particolari di quelle condizioni, perchè vengano allora necessariamente verificate tutte, e le operazioni abbiano ciascuna il suo risultato. Per esempio, per i numeri negativi corrispondenti ai simboli $b - a$ basta ammettere per l'addizione la condizione

$$(b - a) + (b' - a') = (b + b') - (a + a');$$

e per la moltiplicazione, se si ponga

$$b - a = -(a - b),$$

basta ammettere le altre (che sono caso particolare della proprietà distributiva)

$$(-a).b = -(a.b); \quad a.(-b) = -(a.b); \quad (-a)(-b) = a.b$$

Per i numeri frazionari basta ammettere per l'addizione la relazione (che è un caso particolare delle proprietà distributiva)

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right).(b.d) = a.d + c.b$$

e per la moltiplicazione la proprietà, che pur si verifica nel caso che $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ siano i simboli di numeri interi,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{a.a'}{b.b'}$$

I nuovi numeri, che tutti in complesso insieme agli antichi si dicono *razionali*, godono quindi tutte le proprietà degli antichi.

7. Se volessimo ritenere come sole operazioni dell'Aritmetica le prime quattro fondamentali, non resterebbe ora

che l'unica impossibilità $\frac{m}{0}$. Ma se fra le operazioni vogliamo inclusa anche l'elevazione a potenza, e quindi le due sue inverse, allora anche coi nuovi numeri restano delle operazioni impossibili e quindi dei simboli privi di significato, cioè intanto i simboli $\sqrt[n]{a}$ di estrazione di radice di grado n^a da numeri a che non sono potenze n^e esatte di nessuno dei numeri già esistenti.

Potremmo introdurre ancora nuovi enti, sottoponendoli alle consuete condizioni che si sono prese fino qui come caratteristiche per le varie operazioni. Ma giunti a questo punto possiamo domandarci se questo sia il modo realmente più opportuno per proseguire ad introdurre nuovi enti. Essi servono infatti a togliere l'impossibilità della risoluzione dell'equazione

$$x^n = a$$

dove a è un numero razionale; ma il fatto che, come si dimostra nella teoria delle equazioni, anche coi nuovi enti non si giunge a dare la risoluzione in generale delle equazioni

$$(1) \quad a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

dove $a_0, a_1, \dots a_n$ sono numeri razionali, mostra che per render completa questa risoluzione sarebbero necessari ancora nuovi enti diversi dai precedenti. Talchè con questa via non si vedrebbe con sicurezza fino a qual punto si dovrebbe proseguire questo processo, e le questioni dell'algebra non potrebbero trattarsi in modo completo e sicuro, nel dubbio che ad ogni istante la natura di un nuovo problema conducesse a qualche impossibilità, a togliere la quale sarebbero necessari ancora nuovi numeri. Si aggiunga che si dimostra che p. es: tutti gli enti che si possono introdurre per render possibile la soluzione della (1) non sono ancora sufficienti per la completa misura delle grandezze (*),

(*) Questo discende subito dalle considerazioni di *Liouville* e di *Cantor*. — V.: Cantor, « Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen » Borchardt Journal, Bd. 77.

alle quali è utile che sia applicabile il concetto di numero; per cui, proseguendo con questo processo, mentre potremmo arrestarci quando vorremmo dal punto di vista puramente analitico, almeno dichiarando impossibili certe operazioni, non sapremmo con certezza se i numeri fino a quel punto introdotti sarebbero sufficienti quando volessimo applicarli alla misura delle grandezze.

8. Si vede quindi come non sia opportuno seguire questa via, e come convenga invece ricorrere a nuovi numeri, i quali, sebbene possano poi servire a togliere quelle impossibilità, non siano nonostante introdotti come enti destinati *immediatamente* a quello scopo, cioè a rappresentare risultati di operazioni.

I nuovi enti, che sono i numeri irrazionali, si possono introdurre: o come enti destinati a colmare le lacune che interrompono la continuità nella serie dei numeri razionali (Dedekind), o come enti che devono rappresentare il limite di una serie convergente di numeri razionali (Cantor), o come enti formati da infiniti numeri razionali che se ne dicono le parti, e di cui essi si dicono somma (Weierstrass). Secondo il Dedekind (*) si spartiscono tutti i numeri razionali in due gruppi, essendo tutti i numeri del primo gruppo minori di tutti quelli del secondo gruppo, e si mostra come per infinite divisioni in gruppi non c'è un numero che eseguisca quelle divisioni in modo da essere il massimo del primo gruppo o il minimo del secondo — d'onde l'opportunità dei nuovi enti che servano a colmare quelle lacune. Il Cantor (**) invece prende una serie di numeri razionali a_1, a_2, .. a_n,... tale che per ogni numero arbitra-

(*) Cfr. principalmente — *Dedekind*-Stetigkeit und irrationale Zahlen — e poi — *Dini* — Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali. — *Garbieri* e *Capelli*. — Corso di analisi algebrica. — *Frattini* — Sui numeri irrazionali — e altri.

(**) Cfr. *Cantor*. — (Mathematische Annalen, Bd V, e Acta Mathematica Bd 2.) — *Heine* (Borchardt Journal, Bd. 74). — *Grandi* — Dei numeri irrazionali (Cronache del R. Liceo di Pistoia).

rio σ vi sia un numero n_1 in modo che per ogni $n \geqq n_1$ sia $a_{n+h} - a_n < \sigma$ (in valore assoluto) qualunque sia h, e dice in ogni caso che quella serie ha un limite: e se non esiste un numero razionale che ne sia limite, crea a questo scopo il numero irrazionale. Invece il Weierstrass (*) prende argomento alla introduzione dei numeri irrazionali dalla considerazione di infiniti elementi (chiamando elementi il numero 1 e le frazioni $\frac{1}{n}$ per qualunque valore di n). Quando si ha un algoritmo qualunque che permetta di calcolare successivi numeri razionali in modo da potere assegnare a quali elementi esso conduce e quante volte ci dà lo stesso elemento (escludendo il caso in cui un medesimo elemento comparisca un numero infinito di volte) egli dice che si ha un numero: il quale è finito se si possa trovare un numero razionale maggiore di qualunque sua parte integrante. Seguendo p. es. le regole che l'Aritmetica insegna per trasformare in decimale la frazione $\frac{3}{7}$, o per estrarre con approssimazione di $\frac{1}{10^n}$, con n grande a piacere, la radice da 2, siccome si può determinare quanti decimi, quanti centesimi, quanti millesimi ecc. così si hanno, cioè quante volte si trovano gli elementi $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ ecc., e siccome non si trovano altri elementi che questi, e ciascuno un numero finito di volte (< 10), nell'uno e nell'altro caso egli dice che si ha un numero. Se un numero che così si ottenga è tale che nessun numero razionale gli è uguale (uguale nel senso che una parte qualunque dell'uno è parte integrante anche dell'altro e viceversa) lo dice numero irrazionale.

Anche per questi nuovi enti, con qualunque genere di

(*) Cfr. *Pincherle*. — Saggio di una introduzione alla teoria, ecc., (Giornale di Matematiche, Vol. 18) e *Gazzaniga*. Lezioni (autografate) sulla teoria dei numeri.

considerazioni siano introdotti, si definiscono le reciproche relazioni e le operazioni in modo da soddisfare alle consuete condizioni caratteristiche ed allora si vede che con essi vengono tolte alcune delle impossibilità notate. Ma ne restano ancora altre, quella p. es. espressa dall'equazione

$$x^2 = - a^2$$

la quale si toglie coll'introduzione di altri enti, che sono i numeri immaginari; e con questi, definendo in modo formale l'addizione e la moltiplicazione fra essi e coi numeri reali, si perviene a nuovi enti, i numeri complessi a due dimensioni, i quali, dovendo soddisfare alle solite condizioni formali, vengono definiti in modo che con essi è tolta ogni impossibilità.

Rinunziando poi a qualcuna delle condizioni ritenute fino a questo punto come caratteristiche, o sostituendovene altre, ci si può spingere più oltre ancora e pervenire a numeri più generali.

9. Abbiamo così esposto due metodi coi quali si giunge all'introduzione di enti, a cui in ambedue i casi si è assegnato il medesimo nome di *numeri*. Ma possiamo chiederci se questo si può fare, identificando così gli enti introdotti col primo metodo, con quelli introdotti col secondo metodo; ossia se si può ciascuno dei primi *definire* uguale a uno dei secondi.

Se fra gli enti creati nel primo modo, ricorrendo cioè alle grandezze, si definiscono le consuete operazioni, si vede che queste vengono a soddisfare alle proprietà che si sono poste come caratteristiche per le operazioni che nel secondo metodo si sono chiamate con identico nome, e che esse, secondochè sono fatte su numeri interi, negativi, irrazionali, ecc. danno risultati conformi a quelli che darebbero gli enti delle categorie corrispondenti nel secondo metodo. E reciprocamente i numeri del secondo metodo, in virtù delle leggi che presiedono alle loro operazioni, sono suscettibili di essere applicati alle grandezze e conducono ad altre grandezze di cui perciò sono i rappresentanti. Di qui l' opportunità di non tener distinte le due categorie di enti, e di identificarle fra loro.

I *medesimi* numeri sono così introdotti in due modi differenti, i quali del resto sono ugualmente rigorosi.

10. La differenza sostanziale fra i due metodi sta in questo: che mentre nel primo le proprietà dei numeri discendono come conseguenza dalle definizioni date per essi dipendentemente dal fatto che essi *rappresentano* grandezze, nel secondo le definizioni sono *conseguenze* necessarie di quelle proprietà che noi *vogliamo* siano verificate, perchè ammettiamo *per nostro arbitrio* quelle fondamentali da cui esse dipendono. Nel primo metodo le operazioni fra i numeri rappresentano un significato effettivo il quale conduce alle loro proprietà: nel secondo queste proprietà sono stabilite a priori, e servono invece come definizione delle operazioni.

Ne viene che, volendosi servire del primo metodo, si deve incominciare col dare in modo preciso le definizioni dei concetti di uguale, maggiore, minore, somma per la classe o per le classi di grandezze da cui si parte, verificando che soddisfano alle condizioni che generalmente (in modo esplicito o sottinteso) si sogliono richiedere in quei concetti stessi, p. es. che da $A = B$, $B = C$ segue $A = C$, che la somma è commutativa ecc.; queste definizioni si trasporteranno poi ai numeri corrispondenti, e ne discenderanno come conseguenze necessarie le analoghe proprietà per i numeri.

Se si ricorre al secondo metodo, bisogna invece incominciare col dare, in modo che è perfettamente arbitrario, le definizioni dei concetti di uguale, maggiore, minore, di somma ecc. per i numeri; ma, tenendo conto che dei numeri dovremo farne una classe che poi corrisponda alle ordinarie classi di grandezze, sarà conveniente *preparare* il numero a questo scopo, e procurare quindi che nelle diverse forme successive sotto cui viene a generalizzarsi, goda esso e le sue operazioni di quelle proprietà di cui godono le ordinarie categorie di oggetti, quando si studiano in quanto sono grandezze. S'intende che queste proprietà non importa ammetterle *tutte* a priori: basta chiedere quelle sole da cui con dimostrazione discendono le altre. E s'intende pure come sia possibile e rigoroso lo studiare col secondo metodo numeri che sodisfino alle condizioni formali che più ci piacciono, purchè non siano contradittorie.

11. Paragoniamo ora l'importanza e la convenienza dei due metodi esposti.

Il primo, che è metodo più geometrico e sintetico, reso semplice dal limitarsi a poche classi di grandezze agevoli a concepirsi, quali le ordinarie classi discrete e le continue geometriche, è certamente più intuitivo e si presta più ad esser compreso ed appreso, a causa dell'applicazione continua che se ne fa nell'uso comune; ma fa dipendere il numero da considerazioni che limitano ulteriori estensioni, a meno che non si studino anche classi di grandezze di cui non si ha immagine concreta, e che a null'altro si possono assomigliare che a quelle dei numeri introdotti col metodo analitico.

Questo secondo metodo invece è più scientifico ed opera su enti che non dipendono da altri, ma solo da considerazioni relative allo studio dell'ente stesso, aprendo così nuovi ~~nuovi~~ campi e nuove vie all'Analisi. Seguendo questo secondo metodo l'Algebra acquista una importanza molto superiore a quella che ha se si considera come sola scienza del numero: essa diviene la scienza delle proprietà formali e dà quindi risultati applicabili non solo ai numeri, ma anche agli altri enti che godono proprietà formali simili. « Non dobbiamo (scrive Hoüel) rappresentarci l'algebra come » operante solo su quantità numeriche, e impotente a trat- » tare le grandezze concrete senza passare per l'intermezzo » dei numeri. Una formula algebrica può indicare immedia- » tamente una costruzione geometrica o un movimento mec- » canico, senza che sia necessario in nessun modo di pen-

» sare alla valutazione aritmetica dei dati del problema. Così
» se si definisce l'operazione della moltiplicazione geometrica
» come la costruzione di un rettangolo, l'uguaglianza

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

» esprime l'equivalenza fra una certa area e la somma di
» più altre, astrazion fatta da ogni valutazione numerica
» di queste aree ». (*)

Il metodo analitico è quindi scientificamente più potente ed indipendente. Non bisogna peraltro nascondere come in esso l'introduzione del numero irrazionale dia luogo a qualche osservazione. Intanto, come si è visto (§ 7), occorre per esso abbandonare la via seguita nell'introdurre i numeri razionali, il che crea una certa difformità che nuoce all'unità del metodo. Ma di più, trattando il numero irrazionale coi metodi del Dedekind e del Cantor, sebbene il concetto sia indipendente da quello di grandezza, pure mi sembra che solo in essa si trovi la ragione della sua introduzione, e che esso sia, per dir così, modellato su quello della grandezza continua. Nell'uno e nell'altro dei due metodi si riconosce lo scopo che la categoria dei numeri reali divenga continua, cioè non dissimile da quella dei segmenti e da altre. Anche nel metodo del Weierstrass mi sembra che si possa ritrovare il concetto di limite, il quale ha la sua origine nella grandezza: giacchè il numero appare come la somma di tutti i suoi elementi, e di più si dice maggiore di ogni sua parte integrante e minore di ogni numero di cui qualche parte integrante non sia contenuta in esso: per cui tal metodo può paragonarsi a quello del Cantor.

Per spogliare questi processi del loro aspetto non del tutto analitico, non basta, come talvolta si fa, partire dal notare impossibile una certa operazione, p: es: l'estrazione di radice, e mostrare come essa dia origine ad una scomposizione dei numeri razionali in due gruppi senza che esista un numero che li separa, o a una serie convergente di nu-

(*) *Hoüel.* — Théorie des quantités complexes.

meri razionali che non ha limite, o a un numero infinito ma definito di elementi che non dà un numero razionale, secondochè vogliamo rispettivamente servirci dei processi di Dedekind, di Cantor, o di Weierstrass, e notare il bisogno di nuovi numeri, che sono irrazionali; giacchè non ci si arresta qui, ma, generalizzando, si introducono numeri anche per completare *tutte* le lacune esistenti nella categoria dei numeri razionali, o per dare un limite a *tutte* le serie convergenti, o un significato a *tutti* i gruppi finiti di infiniti elementi, anche se non provengono da un' operazione impossibile. Il *perchè* di questa generalizzazione, non richiesta immediatamente da nessuna operazione, mi sembra che si trovi solo nell' utilità del fatto che in seguito il numero possa applicarsi alle grandezze.

Tutto ciò costituisce un difetto del metodo analitico. Hankel (*) giudicando non adattato ad una scienza formale l'introdurre l'irrazionale col concetto di limite del razionale, giacchè questo nasconde l' idea di grandezza estensiva, e stimando di poco valore qualunque sforzo destinato a liberare l' irrazionale dal concetto di grandezza, ritiene che il concetto d' irrazionale si debba introdurre soltanto dopo avere, mediante la misura, dato un significato attuale ai numeri. Ma nonostante tale osservazione io giudico che non si debbano trascurare quei processi, giacchè non dipendono *direttamente* dalle grandezze: e, in un metodo pienamente analitico, è arbitraria la scelta delle definizioni, purchè queste sodisfino alle condizioni caratteristiche stabilite (come infatti si dimostra nei casi in questione). Il metodo analitico, anche condotto con quei processi, non cessa di essere importante e di avere un forte interesse scientifico.

(*Continua*). R. Bettazzi.

(*) *Hankel*, l. c. §. 12.

IL TEOREMA DI FERMAT
E ALCUNE SEMPLICI SUE CONSEGUENZE

Notissimo è il Teorema di Fermat relativo alla Teorica dei numeri, che si enuncia nel modo seguente:

Se m *è un numero primo, l'uno o l'altro dei numeri* a, $a^{m-1} - 1$ *è divisibile per* m.

Di questo importante teorema si hanno diverse dimostrazioni. Scopo della presente Nota è di darne una abbastanza semplice e alquanto diversa da quelle che io conosco, come pure di fare alcune osservazioni che con esso hanno una certa attinenza.

1. — Evidentemente per giungere alla dimostrazione del teorema di Fermat basta provare che:

Se m *è un numero primo l'espressione* $a^m - a$ *è sempre divisibile per* m.

Se a è divisibile per m la verità del teorema è manifesta. Consideriamo adunque il caso in cui m numero primo non divide a. L'espressione $a^m - a$ può scriversi nel seguente modo:

$$a^m - a = \{ (a-1) + 1 \}^m - 1 - (a-1)$$

Ora sviluppando la potenza m^{ma} indicata superiormente si osservi che essendo i coefficienti binomiali numeri interi della forma:

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,(m-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,r}$$

con $r < m$, i numeri $2, 3, \ldots r$ sono primi con m; e perciò l'espressione

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,(m-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,r}$$

è nel nostro caso un numero intero: i coeficienti poi del primo e dell'ultimo termine dello sviluppo sono eguali alla unità. Si potrà quindi scrivere, indicando con H_1 un certo numero intero,

$$a^m - a = H_1 m + (a-1)^m - (a-1)$$

Facendo le stesse osservazioni per la espressione $(a-1)^m - (a-1)$ si ottiene analogamente:

$$(a-1)^m - (a-1) = H_2 m + (a-2)^m - (a-2).$$

Laonde:

$$a^m - a = H_1 m + H_2 m + (a-2)^m - (a-2).$$

E continuando nello stesso modo si troverà:

$$a^m - a - H_1 m = H_2 m + , .. + H_h m + (a-h)^m - (a-h)$$

Ora col prendere h in modo che $a-h$ sia un multiplo di m, il che può sempre farsi, la espressione $(a-h)^m - (a-h)$ è manifestamente divisibile per m. E siccome allora tutte le parti che costituiscono $a^m - a$ sono divisibili per m, anche l'espressione $a^m - a$ sarà divisibile per m, appunto come volevasi provare.

Avendosi:

$$a^m - a = a\,(a^{m-1} - 1)$$

ed essendo m un numero primo che divide $a^m - a$, se m non divide a dividerà $a^{m-1} - 1$ e viceversa. In ogni caso per altro m non può dividere ambedue quei fattori; perchè se m divide a divide anche a^{m-1}, e perciò non può dividere $a^{m-1} - 1$. Se poi m divide $a^{m-1} - 1$ non divide a^{m-1}: e se un numero non divide la potenza, a maggior ragione non può dividere la base.

2. *Quali si siano i numeri* a *ed* m, *se* m *divide* a − 1 *la somma delle potenze di* a *i cui esponenti vanno da zero ad* m − 1 *è divisibile per* m.

Infatti chiamisi, per brevità, S quella somma, e pongasi

$$a - 1 = hm;$$

allora si avrà

$$a = hm + 1$$

e perciò:

$$S = (hm + 1)^{m-1} + (hm + 1)^{m-2} + \ldots + (hm + 1) + 1.$$

Ora sviluppando le potenze indicate e raccogliendo in un sol termine tutti quelli che sono multipli di m si avrà:

$$S = Hm + (m - 1) + 1 = (H + 1)m$$

che è un multiplo di m come volevasi provare.

Poichè si ha:

$$a^m - 1 = (a - 1) S$$

si può concludere che: *se* m *divide* a − 1, *il numero* $a^m - 1$ *è divisibile almeno per* m^2.

3. *Se* m *è un numero primo che non divide* a − 1, *il numero* $a^m - 1$ *non è divisibile per* m.

Infatti abbiamo:

$$a^m - a = (a^m - 1) - (a - 1)$$

e per il teorema di Fermat l'espressione $a^m - a$ è divisibile per m; quindi se m non divide $a - 1$ non dividerà neppure $a^m - 1$.

L'eguaglianza superiore ci fa anche concludere che se $a^m - 1$ è divisibile per m numero primo, anche $a - 1$ sarà divisibile per m. Da ciò e da quanto è stato dimostrato al N. 2. risulta;

Se m *è un numero primo o l'espressione* $a^m - 1$ *non è divisibile per* m, *oppure essa è divisibile per* m^2.

4. *Se* m *è un numero superiore al* 2 *e divide* a − 1, *la somma* S *delle potenze di* a *i cui esponenti vanno da zero ad* m − 1 *non è divisibile, oltre che per* m, *per alcuna altra potenza di* m.

Infatti l'espressione di detta somma che in tale ipotesi è:

$$S = (hm + 1)^{m-1} + (hm + 1)^{m-2} + \ldots + (hm + 1) + 1,$$

raggruppando in un solo termine quelli che sono in ogni caso divisibili per m^2, e indicando questo termine con Km^2, può scriversi nel seguente modo:

$$S = Km^2 + \{(m-1) + (m-2) + \ldots + 2 + 1\} hm + m,$$

ossia:

$$S = Km^2 + m \left\{ \frac{m(m-1)}{2} h + 1 \right\}.$$

Da ciò si vede che, affinchè S sia divisibile per m^2, deve essere $\frac{m(m-1)}{2} h + 1$ un multiplo di m. Ora dico che ciò non avviene. Infatti, indicando con k un numero intero, pongasi, se è possibile:

$$\frac{m(m-1)}{2} h + 1 = km$$

e si distinguano i casi di m dispari e di m pari.

Nel primo caso $\frac{m(m-1)}{2}$ è un multiplo di m; e quindi l' eguaglianza superiore ci farebbe concludere che l' unità è divisibile per m il che non può essere.

Nel secondo caso $\frac{m(m-1)}{2}$ non è un multiplo di m, ma di $\frac{m}{2}$; e siccome manifestamente anche km è multiplo di $\frac{m}{2}$, anche la unità dovrebbe essere divisibile per $\frac{m}{2}$ il che non è.

Dunque in ambedue i casi l'espressione

$$\frac{m(m-1)}{2} h + 1$$

non è un multiplo di m; e quindi S non è divisibile per m^2 ed a maggior ragione per nessuna potenza di m il cui esponente sia superiore al 2.

Nel caso in cui m è uguale al 2 il teorema non ha luogo. Infatti l'eguaglianza superiore si riduce all'altra:

$$h + 1 = 2k$$

la quale è verificata tutte le volte che h è un numero dispari.

5. *Se il numero* $a - 1$ *è divisibile per* m *numero primo diverso dal* 2, *ed* $a^m - 1$ *è divisibile per* m^r (*con* r *maggiore o eguale a* 2), $a - 1$ *dovrà esser un multiplo di* m^{r-1}.

Infatti avendosi:

$$a^m - 1 = (a - 1)\, S$$

ed essendo, per il Teorema precedente, S divisibile per m e non per altra potenza di m, si potrà porre:

$$S = mQ,$$

ove Q è primo con m: e si avrà:

$$\frac{a^m - a}{m} = (a - 1).\, Q.$$

Ora il prodotto $(a - 1)$. Q è divisibile per m^{r-1}, e siccome Q ed m^{r-1} sono primi fra loro, dovrà m^{r-1} dividere il numero $a - 1$ il che volevasi provare.

Il Teorema sussiste anche nel caso in cui m invece di essere primo assolutamente, è primo col numero Q.

6. *Se* m *è un numero primo uno ed uno solo dei tre numeri* a, $a - 1$, $a^{m-2} + a^{m-3} + \ldots + a + 1$ *è divisibile per* m.

Infatti abbiamo:

$$a^m - a = a\,(a - 1)\,(a^{m-2} + a^{m-3} + \ldots + a + 1) = a(a - 1)\,(S - a^{m-1})$$

e per il teorema di Fermat essendo $a^m - a$ divisibile per m numero primo, uno intanto dei fattori che costituiscono $a^m - a$ è divisibile per m. Di più se m divide a non può manifestamente dividere gli altri due fattori. Se poi m divide $a - 1$ non può in primo luogo dividere a; inoltre poichè per il Teorema del N. 2 in tal caso m divide la somma che abbiamo indicata con S e non a^{m-1}, $S - a^{m-1}$ non sarà divisibile per m. Se infine m divide $S - a^{m-1}$ non può dividere nè a nè $a - 1$, perchè ove dividesse uno di quei fattori abbiamo visto che non potrebbe dividere $S - a^{m-1}$.

Più generalmente possiamo anche dire:

Se l'espressione $a^m - a$, *ove* m *è un numero primo, è divisibile per* m^r *tale deve essere uno dei numeri* a, $a - 1$, $S - a^{m-1}$.

Infatti si ha:

$$a^m - a = a\,(a^{m-1} - 1)$$

e supposto che m divida a, non divide $a^{m-1} - 1$. E perchè m è un numero primo, saranno $a^{m-1} - 1$ ed m^r numeri primi fra loro. Dunque in questo caso m^r divide a.

Se poi m non divide a, dovrà dividere, per il teorema precedente, uno solo dei fattori $a - 1$, $S - a^{m-1}$; e perciò quel fattore che è divisibile per m è anche divisibile per m^r.

7. *Se il numero primo* m *non divide alcuno dei tre numeri consecutivi* $a - 1$, a, $a + 1$, *la somma delle potenze di* a *i cui esponenti sono i numeri pari da* 0 *ad* $m - 3$ *è divisibile per* m.

Osserviamo anzi tutto che per m eguale a 3, o anche a 2, le condizioni del teorema non possono esser tutte quante verificate. Considereremo adunque il caso in cui m è un numero primo superiore al 3. Ora siccome si ha:

$$a^m - a = a\,(a^{m-1} - 1),$$

ed $m - 1$ è un numero pari, l'espressione $a^{m-1} - 1$ è divisibile per $a^2 - 1$, ed il quoziente è la somma:

$$a^{m-3} + a^{m-5} + \ldots + a^2 + 1,$$

quindi se il numero primo m non divide nè a nè $a^2 - 1 = (a - 1)\,(a + 1)$, dovrà dividere quella somma.

Ferme restando le condizioni del precedente teorema si ha pure che la somma:

$$a^{m-2} + a^{m-4} + \ldots + a^3 + a$$

la quale può anche scriversi :

$$a(a^{m-3} + a^{m-5} + \ldots + a^2 + 1)$$

è divisibile per m.

8. *Se* m *è un numero primo diverso dal* 2 *e dal* 3, *la espressione* $a^m - a$ *è sempre divisibile per* 6m.

Infatti potendosi in tal caso scrivere :

$$a^m - a = a\,(a-1)\,\,(a+1)\,\,(a^{m-3} + a^{m-5} + \ldots + a^2 + 1)$$

ed essendo i numeri $a-1$, a, $a+1$ consecutivi uno di essi è divisibile per 3, ed uno almeno per 2. Di più essendo l'espressione $a^m - a$ divisibile per m, finchè m è diverso da 2 o da 3, possiamo concludere che quella espressione è divisibile per $2.3.m = 6.m$ come volevasi provare.

Si può in ultimo osservare che ove a sia un numero dispari i tre fattori $a-1$, $a+1$, $a^{m-3} + a^{m-5} + \ldots a^2 + 1$, sono divisibili ner 2 ; quindi in tal caso la espressione $a^m - a$ è divisibile per $2^3.3m = 24m$. Dunque potremo anche dire :

Se m *è un numero primo superiore al* 3 *ed* a *un numero dispari, l'espressione* $a^m - a$ *è divisibile per* 24m.

Arcireale, Ottobre 1886.

LABINDO GIANNI.

DIMOSTRAZIONI DI TEOREMI ENUNCIATI a PAG. 59 e 71.

Se si costruiscono sui tre lati di un triangolo ABC *o esternamente o dalla banda in cui è il triangolo, tre poligoni regolari di egual numero di lati, le rette* AA_1, BB_1, CC_1 *congiungenti i vertici* A, B, C *coi vertici* A_1, B_1, C_1, *dei poligoni opposti rispettivamente ai lati* BC, CA, AB *o coi punti medi dei lati opposti a* BC, CA, AB, *passano per uno stesso punto.*

D. BESSO.

Dimostrazione del Prof. *F. Panizza.*

I triangoli BA_1C, CB_1A, AC_1B, sono in ogni caso isosceli coi vertici in A_1, B_1, e C_1, e gli angoli in A_1, B_1, C_1, sono eguali (per le proprietà dei poligoni regolari) quindi essi sono simili.

Allora i due triangoli ACA_1, BCB_1 avendo un angolo eguale ad un angolo ($ACA_1 = BCB_1$) e i lati intorno a questi angoli inversamente proporzionali sono equivalenti; quindi si ha la prima delle seguenti tre eguaglianze e in modo analogo le altre due:

(1) $\Delta ACA_1 = \Delta BCB_1$, $\Delta BAB_1 = \Delta CAC_1$, $\Delta CBC_1 = \Delta ABA_1$.

Inoltre, indicando con M, N, P le intersezioni di AA_1, BB_1, CC_1 rispettivamente coi lati BC, CA, AB, si hanno le eguaglianze

$$\frac{\Delta ABA_1}{\Delta ACA_1} = \frac{BM}{MC},\quad \frac{\Delta BCB_1}{\Delta BAB_1} = \frac{CN}{NA},\quad \frac{\Delta C_1AC}{\Delta C_1BC} = \frac{AP}{PB},$$

che moltiplicate membro a membro danno

$$\frac{\Delta ABA_1 . \Delta BCB_1 . \Delta C_1AC}{\Delta ACA_1 . \Delta BAB_1 . \Delta C_1BC} = \frac{BM . CN . AP}{MC . NA . PB}$$

ma il primo membro per le (1) è eguale all'unità quindi

$$\frac{BM . CN . AP}{MC . NA . PB} = 1$$

e perciò le rette AA_1, BB_1, CC_1 si incontrano in un punto.

I Signori *J. Beyens* e *G. Riboni* hanno inviato dimostrazioni consimili. Il Prof. *G. Riboni* osserva che il teorema può enunciarsi nel seguente modo:

Se i punti medii dei lati di un triangolo si muovono sulle rispettive perpendicolari ai lati con velocità proporzionali ai lati stessi, in ogni istante le congiungenti questi punti coi vertici opposti concorrono in uno stesso punto; e aggiunge:

Coll'allontanarsi indefinitamente dei tre punti A_1, B_1, C_1 le tre rette AA_1, BB_1, CC_1 dalla posizione iniziale di mediane vanno avvicinandosi alle altezze del triangolo, e si confonderanno con queste quando i punti stessi siano a distanza infinita.

Il luogo dei punti d'incontro delle AA_1, BB_1, CC_1 *è la conica determinata dai vertici* A, B, C *del triangolo e dai punti* G, H *d'incontro delle mediane e delle altezze.*

Infatti è evidente che il luogo passa per G ed H. Inoltre, indicando con M_1, M_2, M_3 i punti medii dei lati BC, CA, AB, è chiaro che le punteggiate $M_1A_1 \ldots$, $M_2B_1 \ldots$ sono simili, e perciò projettive, e in conseguenza sono projettivi i fasci che le projettano dai punti fissi A, B; dunque il luogo dei punti d'incontro dei raggi corrispondenti è una conica passante per A e B. La stessa cosa si può ripetere per le punteggiate $M_2B_1 \ldots$, $M_3C_1 \ldots$ projettate dai punti fissi B e C; perciò il luogo dei punti d'incontro dei raggi corrispondenti dei due fasci così ottenuti è una conica passante per B, C. E pel teorema dimostrato i due luoghi devono coincidere.

Se i seni dei diedri d'un tetraedro sono proporzionali alle lunghezze dei rispettivi spigoli, quel tetraedro è a facce eguali; e reciprocamente.

G. Giuliani.

Dimostrazione del prof. *M. Misani.* *)

Sia SABC un tetraedro e si ponga (V. in questo perio-

*) Altre dimostrazioni sono state inviate dai Signori *F. Panizza, G. Riboni, J. Beyrns.*

dico, pag. 1, anno I) $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$, $BC=a_1$, $CA=b_1$, $AB=c_1$; area $ABC=S_0$, area $SBC=S_1$, area $SCA=S_2$, area $SAB=S_3$; diedro $SA=A$, diedro $SB=B$, diedro $SC=C$, diedro $BC=A_1$, diedro $CA=B_1$, diedro $AB=C_1$.

Se D è la proiezione ortogonale del vertice S sulla faccia opposta ABC ed E quella di D sullo spigolo BC, l'angolo SED sarà la sezione retta del diedro BC. Chiamando ora con V il volume del tetraedro avremo

$$V=\tfrac{1}{3}S_0.SD,$$

ma dal triangolo rettangolo SDE si ha $SD=SE\,\mathrm{sen}A_1$, e siccome SE, altezza della faccia SBC, vale il doppio dell'area S_1 di questa divisa per la base a_1, così

$$SD=\frac{2S_1}{a_1}$$

e

$$V=\frac{2}{3}S_0S_1\frac{\mathrm{sen}A_1}{a_1}.$$

Analogamente si avrà

$$V=\frac{2}{3}S_0S_2\frac{\mathrm{sen}B_1}{b_1},$$

la quale confrontata colla precedente, avuto riguardo che per ipotesi si ha $\frac{\mathrm{sen}A_1}{a_1}=\frac{\mathrm{sen}B_1}{b_1}$, dà

$$S_1=S_2$$

e nello stesso modo si dimostra essere

$$S_0=S_1=S_2=S_3.$$

Le faccie dunque del tetraedro dato sono equivalenti, ma se soddisfano a questa condizione devono essere eguali (V. la dimostrazione di questa proprietà a pag. 4 del fasc. 1°, anno 1° di questo periodico) e quindi il teorema è dimostrato.

Reciprocamente se $S_0=S_1=S_2=S_3$, dalla eguagliazna

$V = \frac{2}{3} S_0 S_1 \frac{\operatorname{sen} A_1}{a_1} = \frac{2}{3} S_0 S_2 \frac{\operatorname{sen} B_1}{b_1} =$ *ecc.*, si ricava subito

$$\frac{\operatorname{sen} A_1}{a_1} = \frac{\operatorname{sen} B_1}{b_1} \text{ etc.} \qquad \text{c.d.d.}$$

TEOREMI PROPOSTI

Due triangoli $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ sieno inscritti in un triangolo ABC in modo che le rette AA_1, BB_1, CC_1 passino per uno stesso punto e che anche le rette AA_2, BB_2, CC_2 passino per uno stesso punto: se le rette A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1 incontrano rispettivamente le rette A_2B_2, A_2C_2, B_2C_2 in tre punti formanti un triangolo, questo triangolo è circoscritto al triangolo ABC.

Sieno AB, CD due diametri fra loro perpendicolari di una circonferenza, M un punto qualunque di questa curva, N il punto comune alle rette AM e CD, P il piede della perpendicolare condotta da M sulla tangente in A alla circonferenza e Q il punto comune alle rette AB, PN: la retta QM è tangente alla circonferenza.

F. Nicoli.

Se gli spigoli d'un tetraedro equifacciale sono veduti sotto gli angoli α, β, γ dal centro della sfera ad esso circoscritta, e s'indicano rispettivamente con D e V il diametro di questa sfera ed il volume del tetraedro, si ha la relazione

$$V = \frac{D^3}{3} \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}.$$

J. Beyens.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Elementi di geometria euclidea esposti con nuovo metodo da Angelo Andriani, *Prof. di Matematica nel R. Liceo di Reggio-Calabria. Napoli, B. Pellerano* 1887, p. XVI–369.

Questo libro è un trattato di geometria destinato alle nostre Scuole Liceali. Volendo analizzarlo tutto completamente bisognerebbe discutere se sia legittimo il porre in testa a un opera un titolo di cui il lettore non si renderà mai ragione – perchè l'a. non fa mai nota l'esistenza di una geometria *non-euclidea* – e se non si faccia offesa alla verità chiamando « nuovo metodo » un sistema di esposizione in cui la massima novità è, se non ci inganniamo, l'abbandono sistematico dell'antica divisione fra geometria piana e geometria solida, il quale, tentato in Germania dal Frischauf, fu attuato in modo oltre ogni dire felice dal Prof. De Paolis. Ma non intendendo arrestarci a osservazioni così minute, faremo cenno dei cambiamenti che il Prof. Andriani tentò d'introdurre nell'insegnamento della geometria.

Queste innovazioni sono, a nostro avviso, prodotte dal desiderio che ha l'a. di far servire negli elementi della scienza dell'estensione quei concetti di cui è nota la fecondità nelle parti superiori di essa. Tale desiderio appare a prima vista ragionevolissimo. Se non che quando si cerca il modo di soddisfarlo si scorge che molte di quelle idee, se servono assai bene in questioni elevate, non arrecano alcun vantaggio in altre più umili. P. e. il concetto di generazione del nostro spazio non solo mediante punti, ma anche mediante linee e superficie è di grande importanza nella moderna geometria chè esso può considerarsi come origine della geometria a n dimensioni; ma sarà esso capito dai principianti e quale utilità ne potrà trarre l'insegnante? Così la legge di dualità (*)

(*) Sembra che di questa l'a. non abbia un'idea ben chiara; chè quanto egli dice nel n. 25 non è certo capace di far capire la legge di dualità a chi già non la conosca e di fargli intendere come questa si atteggi diversamente secondo che si consideri la geometria del piano, quella della stella o quella dello spazio.

non è applicabile che rarissimamente nella geometria elementare di cui quasi tutti i teoremi sono metrici, onde è dubbio se metta conto parlarne. Infine (per non moltiplicare eccessivamente gli esempii) niuno più di chi scrive è convinto dell'importanza che ha la nozione di elementi all'infinito che Desargues introdusse nella geometria; tuttavia egli crede di dover protestare energicamente contro una teoria delle parallele fondata su di essa, teoria che manca di base rigorosa poggiando su convenzioni che il Prof. Andriani crede o vuol far credere verità indiscutibili. Se egli mediterà sulle belle 7r *Volesungen uber neuere Geometrie* del Pasch si persuaderà che alla nozione di elementi all'infinito si arriva appunto studiando la teoria euclidea delle parallele e che è vano il tentare di percorrere questa via in ordine inverso.

Potendo applicare solo raramente la legge di dualità, l'a. ne cercò un'altra che gli permettesse di accoppiare delle proposizioni di geometria del piano e dello spazio e introdusse il concetto (certamente assai vago) di proposizioni analoghe (cfr. p. 142). Questo modo di ordinare la materia non è senza inconvenienti, chè il desiderio di trovare l'analoga di ogni proposizione conduce assai spesso l'a. ad esporre delle definizioni e dei teoremi che hanno poco interesse. Per es. accanto al rombo egli introduce il romboedro (n. 236), accanto al trapezio il trapezoide (n. 240), a lato delle proposizioni sui triangoli altrettante sulle superficie prismatiche triangolari (n. 146), vicino a quelle sui parallelogrammi altrettante sui parallelepipedi (n. 222 e seg.); e queste citazioni si potrebbero moltiplicare, chè volendo portare degli esempi non si ha che l'imbarazzo della scelta. — L'eccessiva diffusione dell'a. su certi argomenti l'obbligò a restringersi eccessivamente su altri; sicchè su certe questioni capitali (p. e. il calcolo di π, la teoria dei poliedri, ecc.) non si trovano negli *Elementi di Geometria euclidea* tutti quei particolari che si potrebbero ragionevolmente desiderare.

Queste indicazioni saranno, a nostro credere, sufficienti a porre in grado il lettore di giudicare della materia contenuta nel libro di cui parliamo e del modo con cui è trattata.

Quanto al modo in cui l'a. l'ha distribuita non possiamo tributargli gran lode: infatti a stento si potranno rintracciare le nozioni di cui si può per avventura aver bisogno in un libro in cui i casi di eguaglianza di due poligoni piani stanno in una sezione intitolata « angoloidi supplementari »!

Finalmente, il modo di esposizione è degno della più alta disapprovazione. Chè, non solo i precetti della grammatica e della sintassi sono lasciati in non cale dall'a., ma egli usa molte espressioni inesatte, confonde spesso definizioni con postulati, e usa concetti e proposizioni di cui non ha ancor parlato. Fra i numerosi esempi che potremmo citare a riprova di queste asserzioni, scegliamo a caso i seguenti:

« Si dicono *adiacenti* due segmenti che hanno il termine generatore di comune e sono di direzione opposta, p. 7. » (E se, essendo della stessa direzione, il termine dell'uno coincidesse coll' origine dell'altro?)

« Fra due rette sghembe vi è una sola distanza perchè uno solo è il segmento perpendicolare compreso fra le due rette sghembe » p. 90 (Sembra che quest' ultima asserzione sia ritenuta dall' a. come un assioma perchè non ci fu possibile trovarne la dimostrazione).

L'a. con ragione ha seguìto l'uso di annettere alla sua opera una numerosa collezione di esempi: se ognuno di essi si possa risolvere con le nozioni che lo precedono, altri giudichi. A torto invece nel disegnare certe figure di geometria solida (p. e. 27ª, 31ª, 46ª, 48ª, ecc.) egli dimenticò di tracciare sempre punteggiate le parti invisibili oppure applicò inesattamente questa regola: quindi dubitiamo che certi suoi disegni aiuteranno molto chi studia ad imaginare le figure obbiettive.

Genova, 24 Aprile 1887.

Gino Loria.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des Mathématiques publié par *Gustav Eneström.* Stockholm, 1887; N. 2.

Giornale di Matematiche pubblicato per cura del professore *G. Battaglini.* Volume XXV. Maggio e Giugno 1887. Napoli, Benedetto Pellerano, editore.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *J. Bourget,* Recteur de l'Academie de Clermont, *de Longchamps,* Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy.* Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe. 2e série. Onzième année. N. 5, 6, 7. Paris, 1887.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par *H. Vuibert.* 11e Année. N. 16, 17, 18, 19. Paris. M. Nony, 17. Rue des Écoles, 1887.

Iornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo *D.r F. Gomes Teixeira.* Professor na Escola Polytechnica do Porto. Vol. VII, n. 5, Coimbra, 1886.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome septième. Mai e Juin 1887.

Rivista didascalica. Organo della società didascalica italiana. — Anno I, fasc. 1, Roma, 1887.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati.* Anno XIX. N. 7 e 8. Firenze, 1887.

BIANCHI, L. — Sopra i sistemi doppiamente infiniti di raggi (Congruenze) Atti R. Acc. Lincei. 1887.

BONGIOVANNI, G. — Sul moto verticale di un grave e di due gravi. — G. B. Paravia e C. 1887.

ERRERA, A. — Contribuzione allo studio della scienza della popolazione. Napoli, 1886.

GARBIERI, G. — Sulla eliminazione delle funzioni arbitrarie. Atti del R. Ist. Ven. 1887.

GIUDICE, F. — Sulle equazioni irreducibili di grado primo risolubili per radicali. — Un teorema sulle sostituzioni. Rend. Circ. mat. Palermo, 1887.

GIULIANI, G. — Sulle funzioni di n variabili che soddisfano all' $\frac{d^2f}{dx_1^2}+\frac{d^2f}{dx_2^2}+\ldots+\frac{d^2f}{dx_n^2}=0$. Gior. Battaglini. 1887.

IUNG, G. — Sui sistemi lineari di curve algebriche di genere qualunque. — Sulle trasformazioni piane multiple di ordine minimo. Rendiconti R. Ist. lomb. 1887.

LORIA, G. — La definizione di spazio a n dimensioni e l'ipotesi di continuità del nostro spazio secondo le ricerche di Giorgio Cantor. Gior. Battaglini, 1887.

DE LONGCHAMPS, G. — Une conique remarquable du plan d'un triangle. — Les points d'inflexion dans les cubiques circulaires unicursales droites (1886.)

MICHELANGELI, N. — Sopra alcune proprietà delle frazioni continue a quozienti complessi. Napoli, 1887.

PESCI, G. — Una formula relativa alle funzioni simmetriche. Rend. R. Acc. Bologna, 1887.

PINCHERLE, S. — Sull' inversione degli integrali definiti. Rend. R. Ist. lomb. 1887.

PORENA, F. — La collezione di carte nautiche di F. Fischer. Roma, 1887.

RÉMONT, A. — Résumé de Géometrie analytique à deux et à troix dimensions. Deuxième édition. Paris, Librairie Nony & C.ie, 1887.

ROZZOLINI, G. — Epicicloide ed ipocicloide piane. Napoli. Pellerano, 1880.

VOLTERRA, V. — Sulle equazioni differenziali lineari. Rend. R. Accademia Lincei, 1877.

TIVOLI, D. — L'aria in rapporto all'igiene ed alla ginnastica. Bologna, 1887.

SUL CONCETTO DI NUMERO

II.

12. Vediamo ora a quali concetti deve informarsi l'insegnante, introducendo il numero nei corsi di Algebra.

Noto intanto che nell' insegnamento, il quale prende le sue mosse dall' aritmetica pratica, si suole, e giustamente, incominciare col metodo sintetico per introdurre i soli numeri che si adoperano nell' aritmetica elementare, i numeri razionali positivi. L'introduzione dei numeri irrazionali e dei negativi, che hanno importanza più astratta, si suol fare più tardi insieme all'insegnamento dell'algebra propriamente detta; ma talora si ricorre per essi al metodo analitico. Le considerazioni sulla misura delle grandezze geometriche (*) servono poi a mostrare come esso si poteva introdurre anche col primo metodo. Questa difformità di metodi (giustificata in parte dalla differenza di cognizioni e di sviluppo d'intelligenza nelle due epoche in cui si studiano i numeri razionali e gli altri numeri) non mi sembra da lodarsi: e tanto meno poi se si seguitano a introdurre i numeri negativi col primo metodo e gli irrazionali col secondo, o viceversa.

Giudico necessario il seguire un metodo uniforme: e quindi, giunti a dovere introdurre il numero negativo e l'irrazionale, trovo opportuno il riprendere in generale il concetto di numero fino dal numero intero, col metodo che si vorrà poi seguire per gli altri numeri.

13. Stabilito che si debba introdurre il numero con metodo uniforme, quale dei due converrà scegliere nell'insegnamento?

(*) Mi permetto qui di esprimere un'opinione: ed è che, giunti nell'insegnamento ad avere esaurito quanto riguarda le grandezze geometriche, si possa utilmente *accennare* qual'è il concetto generale di grandezza, mostrando che per esso valgono i medesimi teoremi avuti per le grandezze geometriche, e che esso include anche quello di numero.

Distinguiamo anzitutto due stadii nell'insegnamento: quello in cui esso è destinato a fornire cognizioni indispensabili nella pratica (pur preparando a cultura più seria) e quello in cui queste cognizioni si sviluppano e completano da un punto di vista educativo più elevato. Nel primo insegnamento della matematica ci si limita ai numeri razionali positivi, giacchè negli ordinari usi della vita compariscono necessari solo questi, non vedendosi, per l'inesattezza dei nostri sensi e delle nostre misure, il bisogno dei numeri irrazionali, e ai numeri negativi supplendosi agevolmente con frasi. Il metodo viene spontaneamente indicato dallo scopo di questo insegnamento, e non può essere che il metodo sintetico.

Nel secondo stadio si unisce allo studio dell'aritmetica quello della geometria: ed allora il tentativo di ricondurre tutte le grandezze a grandezze discrete, cioè la misura, mostra l'insufficienza dei numeri razionali per rappresentare le grandezze geometriche: e facili considerazioni di meccanica provano l'utilità d'introdurre nel segmento il concetto di direzione, e quindi l'insufficienza dei numeri positivi. Di qui la necessità di nuovi enti. D'altra parte l'algebra, dovendo evitare di trovarsi di fronte a simboli che non vogliono dir nulla perchè accennano ad operazioni che non hanno risultato, deve togliere qualunque impossibilità di operazioni. Di qui pure la necessità di nuovi enti che con opportune definizioni di operazioni diano un significato a quei simboli.

Si hanno quindi anche nell'insegnamento elementare due serie di enti da introdurre, per i primi dei quali si presenta spontaneo il metodo sintetico, mentre per i secondi si richiede l'analitico. Essendo, per il § 9, identiche le due serie di enti, ci si può limitare ad una sola delle due introduzioni.

In questa introduzione quale metodo dovremo scegliere? Il metodo analitico è più scientifico e più generale dell'altro. Ma il suo grado maggiore d'astrazione credo lo renda meno proficuo nell'insegnamento, il quale in generale ha bisogno di appoggiarsi a qualcosa di concreto. Di più per introdurre il numero irrazionale s'è già visto che bisogna interrompere il metodo seguito per introdurre i numeri razionali, affine di avere un concetto più vasto che esaurisca le questioni della misura, onde bisogna ricorrere a metodi non più esclusivamente analitici e che risentono più o meno l'influenza del concetto di grandezza, nel quale soltanto trovano il *perchè* della loro origine. Quindi, data questa necessità e data l'utilità dell'immagine reale che accompagni il concetto di numero, stimo preferibile nell'insegnamento elementare il metodo sintetico, quando sia esattamente sviluppato.

Completata l'introduzione del concetto di numero nell'insegnamento elementare, credo peraltro sia opera feconda, almeno per chi si avvii a studi ulteriori, il tornare a introdurre il numero con metodo puramente analitico e formale, spingendolo fino al grado massimo di generalità di cui è suscettibile analiticamente: con che si mostrerà come l'algebra non dipenda direttamente dalle grandezze e di più come il suo procedere per proprietà puramente formali la inalzi a scienza più vasta, interpretabile anche su enti che non siano i numeri.

14. Ecco ora come credo conveniente che si sviluppi il metodo sintetico, quando all'incominciare lo studio dell'algebra, si riprenda a trattare il numero in modo uniforme affinchè si abbiano concetti generali, e si conservi insieme una certa analogia con quello che si fa nei fondamenti della Geometria (*)

Gli enti della natura e quelli ideati in modo astratto dalla nostra mente, oltre le proprietà che servono a caratterizzarli uno ad uno e a definirli in sè, altre ne hanno in generale dipendenti da relazioni di quantità con altri oggetti omogenei, che ci permettono di poterli considerare come tutti generati da un solo oggetto della loro specie a cui si

(*) Cfr. il mio articolo « I postulati e gli enti geometrici » nel « Periodico di Matematica. — Anno I° »

pone speciale attenzione. Come in Geometria per studiare l'estensione dei corpi s'introducono dei corpi ideali ai quali si attribuiscono solo le proprietà che servono nel miglior modo possibile a rappresentare quella reale dell'estensione, così in aritmetica per studiare il modo con cui un oggetto di una data categoria è formato rispetto ad un'altro fisso della stessa categoria (unità) ed alle sue parti, s'introduce per ogni oggetto di quella categoria un ente ideale, cui si attribuiscono le proprietà che meglio giovino a rappresentare quelle che risultano dal confronto dell'oggetto colla sua unità. Questo ente è il *numero*. Il suo modo d'introduzione è perfettamente identico a quello che si segue per le figure in Geometria, e che devesi seguire in qualunque scienza esatta che studi i fatti della realtà.

Le proprietà che si attribuiscono al numero non sono necessarie logicamente, essendo il numero un ente ideale; esse potrebbero esser prese in modo arbitrario, purchè non fossero contradittorie (*); ma si prendono in modo che quell'ente abbia un riscontro nella pratica e precisamente rappresenti più che sia possibile gli oggetti nelle loro relazioni di quantità ora accennate.

Per indicare questo ente si sogliono usare delle lettere, come in geometria per indicare le figure: e questo fa sì che potremo avere formule geometriche identiche a formule algebriche (anche indipendentemente dal concetto di misura), quando certe operazioni su enti geometrici e certe altre sui numeri godano proprietà formali simili (**). La geometria si serve più spesso dei disegni, i quali rappresentano gli oggetti che hanno servito a destare in noi l'idea delle figure genmetriche: per l'aritmetica non si fa altrettanto, essendo incomoda e spesso impossibile la rappresentazione degli oggetti che hanno destato in noi l'idea dei diversi numeri. A dire il vero, i

(*) Cfr. il mio articolo ora citato.

(**) P. es. $A + B = B + A$ è formula vera tanto se A e B indicano numeri, che se indicano segmenti, o angoli ecc.

numeri interi ed i numeri frazionari se sono scritti in qualche sistema di numerazione, hanno in sè qualcosa che serve a richiamare la grandezza che essi rappresentano: ma il simbolo generale del numero non è destinato a riprodurre, per dir così, graficamente l'oggetto che questo rappresenta. Del resto ciò costituisce un vantaggio, tenendoci nel ragionamento lontani dal servirci degli oggetti reali originari, di cui, senza accorgersene, si fa spesso erroneamente uso in Geometria. (*)

15. L'ente numero è stato introdotto mediante il

Postulato. — « Per ogni oggetto di certe categorie esi» ste un ente (ideale) che lo rappresenta e che si dice » numero ».

Ora dobbiamo attribuirgli proprietà che lo rendano somigliante agli oggetti considerati in ordine alla quantità, cioè considerati quando si suole attribuir loro il nome di grandezze. Lo studio degli oggetti in quanto sono grandezze si fa col loro reciproco confronto, che è fondato principalmente sui concetti di uguale e disuguale, di maggiore e di minore, di somma e di differenza. Questi si riscontrano in tutte le categorie di oggetti che si studiano come grandezze e vi si riscontrano dotati costantemente di certe proprietà che, sebbene non intrinsecamente necessarie a quei concetti, pure sono verificate per tutte le principali grandezze. — Perciò quelle proprietà si sono ormai dette le proprietà caratteristiche di quei concetti, e un concetto qualunque si identifica a quello quando ne gode; tanto che, per non lasciare indeterminato il concetto di grandezza e perchè sotto di esso si possano aggruppare altre categorie di oggetti oltre quelle che già si designano con quel nome, ormai la definizione di grandezza si dà così: Una classe di oggetti (reali o ideali) si dice classe di *grandezze* se si possono definire per essi dei concetti di uguaglianza e disugua-

(*) Anche la geometria potrebbe svolgersi senza disegni e colle sole lettere, e riuscirebbe in generale più libera da asserzioni che spesso sfuggono inavvedutamente.

glianza, di maggiore e di minore e di somma, in modo che questi concetti soddisfino alle loro condizioni caratteristiche: e che, presi due qualunque di quegli oggetti essi siano necessariamente uguali o disuguali: e la loro somma esista sempre nella classe ».

Quelle condizioni caratteristiche sono le seguenti, supposto che A, B, C, ... indichino oggetti di quella classe, e i segni $+$, $=$, $>$, $<$ abbiano gli ordinari significati e $\neq$ indichi disuguaglianza:

Se $A = B$, sia $B = A$

se $A = B$, $B = C$ sia $A = C$

(condizioni caratteristiche dell'uguaglianza);

sia $A + B = B + A$ e $(A + B) + C = A + (B + C)$;

se $B = C$, sia $A + B = A + C$, e $B + A = C + A$;

se $B \neq C$ sia $A + B \neq A + C$ e $B + A \neq C + A$

(condizioni caratteristiche della somma) (*)

se $A > B$ sia $B < A$,

se $A > B$ e $A' = A$ e $B' = B$, sia $A' > B$, e $A > B'$;

se $A = B$, $B > C$ sia $A > C$:

se $A > B$, $B > C$, sia $A > C$

se $A > B$, sia $A + C > B + C$

(condizioni caratteristiche dei concetti di maggiore e di minore, da cui discendono tutte le altre che si hanno ordinariamente come fondamentali).

I numeri dovendosi introdurre per rappresentare completamente gli oggetti in quanto sono grandezze, ne viene che dovremo dire che due numeri a e b sono *uguali*, o a è *maggiore* di b, o a è minore di b (rispettivamente $a = b$, $a > b$, $a < b$) secondochè le grandezze A e B che essi rappresentano siano uguali, o $A > B$, o $A < B$. E se due grandezze A e B hanno per somma una grandezza C, ne viene che dovremo dire che il numero c che rappresenta C è la *somma*

(*) Di queste basta ammetterne alcune: le altre ne sono conseguenze. — Cfr. Hankel, l. c.

dei due numeri a e b che rappresentano A e B ($a+b=c$). Così restano definiti i concetti fondamentali dei numeri in generale, di qualunque genere sia la classe per rappresentare la quale s'introducono.

Questo metodo ci permette, se si voglia, anche di fare a meno della definizione ed introduzione individuale del numero, dicendo semplicemente che il fatto che due grandezze A e B sono uguali o disuguali si esprime colle frasi rispettive « esse hanno uguale o disugual numero »: e il fatto che la grandezza C è la somma delle grandezze A e B coll'altra « il numero di C è la somma dei numeri di A e di B » ecc. Ma l'introduzione del numero come ente a sè mentre non altera la sostanza del metodo, giova alla chiarezza, permettendo di fissare la mente sopra un ente che è ideale, è vero, ma riceve la sua individualità dalla grandezza che rappresenta.

Il concetto generale di numero è così pienamente determinato. Ma l'utilità sua non si manifesta altro che se si cerca che una classe unica di numeri serva per tutte le grandezze, e due numeri a e b di fronte a tutte le classi rispetto a cui s'introducono debbano dirsi sempre uguali, o sempre disuguali, o sempre $a>b$, o sempre $a<b$: e se $c=a+b$ quando a, b, c rappresentano grandezze di una classe, sia $c=a+b$ anche quando rappresentano grandezze di un'altra classe ecc. Ne viene quindi che lo sviluppo del concetto di numero dev'essere regolato studiando successivamente le varie classi di grandezze cui esso si possa riferire, secondo il diverso modo con cui esse sono costituite.

16. Le classi di grandezze più importanti in pratica (e le sole cui convenga porre speciale attenzione nell'insegnamento elementare) sono quelle degli aggregati di oggetti uguali, quelle di tali oggetti e di loro parti aliquote, e le grandezze geometriche insieme a quelle di cui si acquista un concetto più chiaro quando si riferiscono alle geometriche (tempi, pesi, forze, ecc.) — Esse seguano il processo naturale d'introduzione dei numeri.

Dalle prime, introducendoli coi processi gia stabiliti (§ 3) vengono i numeri razionali. Essi non sono sufficienti per la Geometria, trovandosi delle classi, p. es. quella di tutti i segmenti, i cui enti non si possono tutti ridurre ad essere aggregati di segmenti uguali ad uno fisso e di sue parti. Di più l'operazione estrazione di radice è in generale impossibile con essi soli in Algebra. Tutto ciò dipende da deficenza di numeri e quindi dalla ristrettezza delle classi fino a quel punto studiate o dall'aspetto sotto cui si sono esaminate. Si cercano quindi delle classi che, pure essendo suscettibili di contenere in sè le precedenti, presentino nuove grandezze che conducano a nuovi numeri, i quali tolgano le lacune accennate. Si vede che le classi di grandezze geometriche sono in queste condizioni; ed esse non solo, ma tutte quelle classi in cui essendo possibile prendere le summultiple secondo qualunque numero di una qualunque delle loro grandezze, vale per dimostrazione o si ammette per postulato la proprietà detta della continuità. (*) Anche per queste classi s'introducono numeri col metodo generale (§§ 14, 15). Poi si osserva che in esse presa una grandezza vi sono tutte le sue multiple, le sue summultiple e la somma delle une e delle altre, e se tutte queste grandezze si togliessero dalla classe totale e si studiassero da sè, per esse basterebbero i numeri razionali. I numeri che spettano a quelle grandezze nella classe generale potremo chiamarli ancora razionali e identificarli (cioè dirli uguali) a quelli già introdotti: laonde, siccome le grandezze che oltre a quelle restano nella classe a causa della continuità ammessa, si prova che sono grandezze che segnano la divisione in due gruppi di tutte quelle razionali — o anche grandezze che risultano limiti di serie convergenti di grandezze razionali — oppure anche grandezze che si possono considerare individuate dalla somma di infinite grandezze razionali — così ne viene che i numeri della classe che non sono razionali, cioè i numeri

(*) Cfr. *Dedekind*, *Stolz*. ll. cc.

rrazionali, risultano come nuovi enti che riempiono le lacune :he esistono nella classe dei numeri razionali (Dedekind) — e :he sono limiti di serie convergenti (Cantor) — e anche che pos- ono ritenersi individuati da un numero infinito di numeri azionali. (Weierstrass) (*)

Le definizioni di numeri uguali, maggiori, minori, di omma, ecc. si danno nel modo generale accennato, e si vede acilmente come si possano allora trasformare in definizioni ledotte dal considerare solo i numeri razionali. P. es. po- remo allora dire che se a e b sono due numeri irrazionali, $a > b$ quando qualcuno dei numeri razionali del primo gruppo ra quelli che, secondo il Dedekind, definiscono a, è maggiore li qualcuno del secondo gruppo di quelli che definiscono b ecc.

Con questa definizione si mostra che l'estrazione di ra- lice è sempre possibile coi numeri avuti fin qui.

Anche i nuovi numeri, se sono sufficienti per certe con- iderazioni geometriche, non lo sono per certe altre e molto neno per la Meccanica, dove è necessario il concetto di lirezione. Di più in Algebra è talora impossibile la sottra- ione. Allora si cercano nuove classi (p. es. quelle dei seg- nenti considerati su di una retta in grandezza e direzione) :he comprendano le antiche: e s'introducono i corrispondenti iumeri, i quali includeranno come caso particolare i prece- lenti. E per essi definendo nel modo consueto l'eguaglianza, a somma ecc. si vede che essi rendono possibile la sottra- :ione in aritmetica.

Il fecondo concetto dell' equipollenza di segmenti mo- trando utile il tener conto della direzione anche in tutti

(*) Generalmente nei trattati che vogliono introdurre l'irrazionale anali- icamente si sogliono dare queste seconde definizioni puramente numeriche :he ho dedotto come conseguenze; le definizioni poi dei concetti di ugua- glianza e di operazioni sono date in modo esatto col generalizzare quelle proprietà che nei concetti corrispondenti si riscontrano per i numeri razio- nali. Ma mentre la ragione di questa uguaglianza e di queste operazioni così lefinite si trova nell'indole del metodo analitico, il perchè dell'*introduzione* lel nuovo ente, l'irrazionale, non si trova che in un tacito riferimento alla grandezza come ho già notato altrove.

i segmenti del piano, prova l'insufficienza anche dei numeri precedenti (reali). D'altra parte i nuovi numeri, i negativi, hanno creato una nuova impossibilità, quella di certe altre estrazioni di radice. La classe di tutti i segmenti del piano, in cui per uguaglianza s'intenda ora l'equipollenza, è una classe più ampia che comprende le precedenti: ed introducendo per essa i numeri, che sono i numeri complessi, questi comprenderanno in sè i numeri reali: e definendo anche per essi i concetti di relazione e di operazione, si vede tolta anche l'impossibilità notata nell'algebra.

A questo punto si suol terminare l'introduzione dei numeri nell'insegnamento elementare, non essendovi, almeno colle ordinarie operazioni, altre impossibilità ed essendo sufficientemente ampio il numero delle classi di grandezze che coi numeri precedenti si studiano. Ma si potrebbero costruire anche classi più estese e introdurre i corrispondenti numeri per i quali peraltro si dimostra che bisogna rinunciare a qualcuna delle più fondamentali leggi caratteristiche. Del resto a questo punto è forse più utile spingersi innanzi col metodo analitico.

17. Col metodo sintetico che ora brevemente abbiamo esposto, l'introduzione del concetto di numero dev'esser fatta precedere da quella delle corrispondenti classi di grandezze e dallo studio delle loro proprietà. Queste proprietà delle classi sono talora veri teoremi, dipendenti dalla loro definizione, e talora sono postulati — come ne dà esempio la continuità nella classe dei segmenti. Da esse discendono le corrispondenti per i numeri per il modo stesso con cui i numeri sono introdotti. Così, p. es. se A, B, C sono grandezze di quelle da dirsi positive, essendo $A + B + C > A + B$, ne viene che il numero d di $A + B + C$ deve dirsi maggiore di quello e di $A + B$. E se a, b, c indicano i numeri rispettivi di A, B, C, essendo per definizione $d = a + b + c$, ed $e = a + b$, ne viene che dovremo scrivere $a + b + c > a + b$, che è una proprietà dei numeri ecc.

Ma non è da credere che per dimostrare tutte le proprietà dei numeri occorra sempre dimostrare prima la corrispondente per le grandezze. Tutte le proprietà delle grandezze discendono da poche fondamentali e caratteristiche le quali devono verificarsi direttamente. Ne viene che del pari tutte la proprietà dei numeri discenderanno da quelle che corrispondono a quelle fondamentali accennate ora. E siccome per dedurre dalle proprietà caratteristiche le altre per le grandezze non occorre aver ricorso alle grandezze in sè ma solo al fatto che sono verificate quelle proprietà fondamentali, che pure lo sono per i numeri, così ne viene che collo stesso ragionamento si potranno dedurre da quelle fondamentali per i numeri tutte le altre. E questo è l'oggetto del calcolo letterale.

Si ha quindi che per i numeri devono essere stabilite alcune proprietà fondamentali (il minor numero possibile) deducendole dal fatto che i numeri corrispondono, secondo le definizioni, alle grandezze – proprietà che sia impossibile dedurre a priori senza ricorrere alle grandezze stesse; tutte le altre si hanno con dimostrazione indipendente affatto dalle grandezze. – Quelle proprietà primordiali caratteristiche anche per il numero (che già sono state accennate al § 15), sono quelle che si attribuiscono per nostro arbitrio al numero quando s'introduca col metodo analitico e costituiscono allora per il numero dei veri postulati.

Le proprietà che così con dimostrazione si trovano per i numeri ne rappresentano altrettante per le grandezze: onde il concetto di numero, che nasce dalla grandezza e ne presuppone l'esistenza, serve poi a conoscere più intimamente la grandezza stessa. Di qui l'utilità dell'applicazione dell'algebra alla geometria.

Il numero può quindi servire alla risoluzione di problemi su grandezze, trasformando questi in problemi relativi ai numeri corrispondenti e cercando infine la grandezza cui corrisponde il numero risultato. Se questo non ha grandezza corrispondente nella classe (come p. es. se la classe è formata di soli aggregati di unità, e risulta un numero frazionario) il problema è impossibile. Ma può domandarsi se quando un problema si riferisce ad una classe che non comporta che numeri speciali, p. es. i positivi, e risolvendolo coll'algebra si trova per risultato un numero di quella categoria speciale, nel caso nostro un numero positivo, si dovrà dichiarare il problema possibile e risoluto, anche se nel corso della soluzione si sono adoperati numeri cui non corrispondono grandezze, cioè nel caso citato, numeri negativi. La questione non è oziosa, non avendo significato i numeri e le loro operazioni se non in quanto quelli rappresentano grandezze. Ma si può osservare che in tal caso potremo sempre supporre di avere idealmente completato la classe con grandezze ideali sino a renderla tale che in esse si trovino grandezze corrispondenti ai numeri di tutte le categorie impiegate — attribuendo loro le proprietà necessarie perchè, insieme con quelle esistenti, diano una delle ordinarie classi. Allora per la nuova classe quella soluzione potrà interpretarsi, ed il risultato sarà esatto e possibile: e siccome appartiene alle grandezze antiche, così potremo tornare a sopprimere quelle ideali aggiunte: con che non alterandosi nè i dati, nè il risultato, si conclude che questo effettivamente risolve il problema anche avendo adoperato numeri non compatibili colla classe da cui si parte.

18. Introdotto che sia il numero si *riconosce* che anche la classe dei numeri è una di quelle classi di oggetti (grandezze) per rappresentare le quali esso si è introdotto, giacchè ne gode le proprietà caratteristiche (Cfr. § 15): talchè, oltre esser *rappresentante* di grandezza, il numero è grandezza esso pure: esso è la grandezza più semplice che serve a studiare le altre. Ma, almeno introducendolo col metodo sintetico, del quale appunto si occupano queste poche considerazioni, è inesatto assumerlo come grandezza prima di averne dimostrato quelle proprietà: tanto più è inesatto l'as-

sumerlo come tale per dimostrare quelle proprietà stesse. Non è neppur rigoroso l'ammettere quelle proprietà come evidenti per il numero, come talora suol farsi; giacchè mentre col metodo analitico sono arbitrarie, col metodo sintetico sono da dimostrarsi — e quindi nè nell'un caso nè nell'altro sono evidenti. Talora quelle proprietà caratteristiche (dalle quali si fanno poi discendere quelle fondamentali per il numero) si prendono come assiomi per le grandezze; ma questo modo pure, sebbene meno inesatto che il precedente, è tutt'altro che rigoroso. Infatti p. es. o le proprietà che, se $A, B, C, \dots$ sono grandezze di una certa classe, da $A = B$, $B = C$ risulta $A = C$, da $A > B$, $B > C$ risulta $A > C$, che $A + B = B + A$, che $A + (B + C) = (A + B) + C$ ecc. servono a definire in modo formale i concetti di uguaglianza, di somma, ecc. (Cfr. l'equivalenza delle superficie e dei solidi) ed allora costituiscono delle vere definizioni, e come tali, sono *arbitrarie*, e non evidenti; oppure i concetti di uguale, maggiore, minore, somma si ritengono definiti precedentemente a sè (Cfr. i segmenti in geometria) ed allora sono quelli veri *teoremi da dimostrare*.

Generalmente accade questa inesattezza perchè non ci si occupa troppo di definire con precisione i concetti di uguale, maggiore; minore e di somma, credendo che per essi bastino i concetti che ci si formano coll'uso di quelle parole nella vita comune: poichè allora, notando che in pratica quelle proprietà si verificano, si giudicano necessarie ed evidenti. Ma se questo basta nella vita comune, non è sufficiente per lo studio delle grandezze — onde la necessità di dare in modo preciso quelle definizioni.

Per le grandezze geometriche il difetto lamentato (da cui non è immune lo stesso Euclide) va ora scomparendo: e nei trattati più recenti è ben definita l'uguaglianza, la disuguaglianza, la somma, ecc. e quelle proprietà sono dimostrate come veri teoremi. Ma nei trattati di Aritmetica, dove le classi cui si riferiscono i numeri sono dapprima quelle formate da aggregati di oggetti uguali, si sogliono spesso quelle proprietà ammettere come assiomi. Invece esse si devono e si possono dimostrare, sol che si abbia cura di ben definire l'uguaglianza, la disuguaglianza e la somma di quelle grandezze che risultano da aggregati di oggetti considerati uguali, e che diremo grandezze *discrete* (meglio grandezze di classi discrete).

19. A questo scopo si dovrebbero, nello studio dell'Aritmetica fare le osservazioni seguenti. (*)

Diciamo *unità* ciascun oggetto che comparisce a costituire la grandezza discreta. Due grandezze discrete omogenee A e B si diranno *uguali* quando si possa a ciascuna unità della prima collegarne una distinta della seconda ed una sola, e viceversa — dimodochè le unità delle due grandezze si possano completamente unire due a due. Se si possa far corrispondere ogni unità di A ad una distinta e ad una sola in B e ne avanzino in B, talchè viceversa non tutte quelle di B possano farsi corrispondere a differenti unità di A, diremo A *minore* di B e B *maggiore* di A.

Prese due grandezze omogenee discrete A e B, e stabilita così in un certo modo la corrispondenza, avviene necessariamente uno dei tre casi accennati, cioè che sia A o uguale, o maggiore, o minore di B. Dico che avverrà sempre il medesimo caso comunque si stabilisca la corrispondenza precedente.

Si dicano per brevità *associate* due unità, una di A e una di B, che si fanno corrispondere fra loro: le unità di A si suppongano disposte in ordine qualunque, e quelle di B in modo che sia prima l'associata della prima di A, seconda l'associata della seconda, ecc. saltando quelle di A che non hanno associate in B, o ponendo in fondo quelle di B che non hanno associata in A (l'un caso esclude l'altro per il modo completo con cui si suppone di stabilir la corrispondenza)- Supponiamo ora di stabilire in un altro modo la cor-

(*) *Stolz*, l. c. — *Schröder*. — Lehrbuch der Aritmetik und Algebra.

rispondenza, disponendo poi le unità in ogni grandezza nel modo anzidetto, talchè le unità associate occupino posti corrispondenti. Indichiamo con (α), (β) e rispettivamente (α'), (β') le due successioni delle unità in A e B nel primo e nel secondo caso. Se dimostreremo che le successioni (α) ed (α') si possono far corrispondere completamente unità ad unità, e così (β) a (β'), sarà provato che nelle stesse relazioni in cui sta A a B quando siamo nel caso (α), (β) sta pure quando la corrispondenza è quella di (α') a (β'). — Ora, siccome la successione (α') si ottiene da (α) permutando le sue unità, ed una permutazione qualunque è il risultato di più scambi successivi di due sole unità, così basta dimostrare che alla successione (α) corrisponde pienamente unità per unità quella che se ne ottiene scambiando fra di loro due sole unità. Questo è evidente: perchè se la succesione (α) si rappresenta con

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ l,\ m,\ n,\ \ldots\ r,\ s,\ t,\ \ldots\ z$$

e

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ l,\ s,\ n,\ \ldots\ r,\ m,\ t,\ z$$

è quella che si ottiene scambiando fra di loro m ed s, le unità invariate di posto corrispondono a sè stesse, m corrisponde ad s ed s ad m e la corrispondenza è completa.

È così dimostrato che la corrispondenza di A a B non può avvenire che in un modo solo, e che quindi l'essere $A = B$, $A > B$, $A < B$ rappresenta qualcosa di assoluto. Stabilito così questo carattere, ed osservato che esso non si altera al cambiarsi del modo di corrispondenza, si *dimostra* immediatamente con processi simili ai precedenti, che se $A = B$ è $B = A$, se $A = C$, $B = C$ è $A = B$; se $A > B$, $B = C$ è $A > C$ ecc. insomma tutti quei teoremi che si sogliono dare per assiomi.

Si definirà poi *somma* delle grandezze discrete A, B, C, ... L una grandezza M tale che ogni unità di A si possa far corrispondere ad una differente di M, ognuna di B ad una differente di M, diversa da quelle che corrispondono ad A, ognuna di C ad una differente di M, diversa da quelle che corrispondono ad A e a B ecc., senza che in M ne avanzi nessuna. Allora, come nel modo precedente, si vedrà che se stabilendo in un certo modo la corrispondenza, le unità di M si esauriscono e bastano, si esauriranno bastando anche comunque si stabilisca: onde il concetto di somma è perfettamente definito e indica qualcosa di assoluto. Allora se $A+B=C$, si vede che anche $B+A$ corrisponderà a C, giacchè da $A+B$ a $B+A$ si passa con scambi successivi e si possono ripetere le considerazioni precedenti. Quindi $A+B=B+A$. — E analogamente si prova che $(A+B)+C=A+(B+C)$ ecc.

Come si vede, enunciate con precisione le definizioni, le proprietà in questione sono veri teoremi: e, benchè di dimostrazione facile, non possono dirsi assiomi nel senso rigoroso della parola.

20. Possiamo farci la domanda se i numeri reali e complessi ordinari siano sufficienti — almeno per le più comuni classi di grandezze. Nelle grandezze geometriche, p. es. considerate indipendentemente dal concetto di direzione, i numeri reali sono sufficienti usandoli con tutte le loro definizioni e i loro postulati ordinari; ma dipendentemente da questi potrebbero divenire insufficienti. Se p. es. per le grandezze geometriche si abbandonasse il postulato d'Archimede, cioè quello che date due grandezze A e B si può prendere di ciascuna di esse una multipla tale che superi l'altra (che, come postulato, è arbitrario) allora è facile mostrare (*) che i soli numeri reali non sono sufficienti, e occorrono nuovi numeri. Così i numeri reali e anche i nuovi numeri a cui ora ho accennato non bastano se si modifica la definizione d'uguaglianza. Se p. es. l'uguaglianza dei segmenti è l'equipollenza nel piano, allora sono necessari anche gli ordinari numeri complessi: se l'uguaglianza è l'equipollenza nello spazio, neanche questi sono sufficienti ed occorrerebbero i numeri complessi a tre dimensioni, ecc.

(*) Ciò discende da alcuni studi che sto facendo sulle grandezze.

Nell'Algebra elementare ci si deve limitare ai numeri che appariscono necessari coi postulati che si sogliono introdurre per le principali grandezze affine di renderli utili in pratica — e a quelli necessari per rendere possibili tutte le operazioni algebriche con un metodo uniforme di calcolo che si eseguisca colle ordinarie regole. Queste vengono in parte a mancare per i numeri a più di due dimensioni. L'algebra elementare deve quindi limitarsi agli ordinari numeri reali e agli ordinari complessi.

Gli altri numeri hanno importanza più analitica, e dovrebbero studiarsi solo in una seconda trattazione del numero col metodo analitico, che ho già detto essere utile si faccia seguire allo studio dell'algebra elementare fatto col numero introdotto col metodo sintetico.

Pisa, Aprile 1887.

R. Bettazzi.

UN TEOREMA SUL TRIANGOLO

Nel 1° fascicolo dell'anno corrente di questo periodico, a pag. 24 il Sig. Prof. G. Riboni dimostra la proposizione seguente:

« Se le coppie di punti A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sono situate » rispettivamente sulle tre rette BC, CA, AB così chè le rette » AA_1, BB_1, CC_1 concorrano in uno stesso punto, e che anche le rette AA_2, BB_2, CC_2 concorrano in uno stesso punto, » e si indichino rispettivamente con α, β, γ i punti di incontro » di AA_1 con B_2C_2, di BB_1 con C_2A_2 e di CC_1 con A_2B_2, le » tre rette $A_2\alpha$, $B_2\beta$, $C_2\gamma$ concorreranno pure in uno stesso » punto ». (Teorema (3) proposto dal Sig. Prof. Besso nel 3° fascicolo dell'anno I° (1886), pag. 99),

ed aggiunge che indicando con α', β', γ' rispettivamente i punti d'incontro di AA_2 con B_1C_1, di BB_2 con C_1A_1 e di CC_2 con A_1B_1, si dimostrerebbe analogamente che le rette $A_1\alpha'$, $B_1\beta'$, $C_1\gamma'$ concorrono anch'esse in uno stesso punto.

Ora io dimostrerò che questo secondo punto coincide col primo, e che per esso passano anche altre rette determinate dai punti dati.

1. Indichiamo con P_1 il punto comune alle AA_1, BB_1, CC_1, e con P_2 quello comune alle AA_2, BB_2, CC_2, e sia α_1 il punto comune alle AA_1, B_1C_1 (*). Si avrà

$$(\alpha_1 B_1 C_1 \alpha') = (A_1 CBA_2)$$

e quindi anche

$$(\alpha_1 B_1 C_1 \alpha') = (A_2 BCA_1);$$

per cui nei fasci di centri P_1, P_2 i raggi

$$P_1\alpha_1,\ P_1B_1,\ P_1C_1,\ P_1\alpha'$$

corrispondono respettivamente ai raggi

$$P_2A_2,\ P_2B,\ P_2C,\ P_2A_1$$

ossia i raggi

$$AA_1,\ BB_1,\ CC_1,\ P_1\alpha'$$

ai raggi

$$AA_2,\ BB_2,\ CC_2,\ P_2A_1.$$

Le coppie di punti

$$\binom{BB_1}{CC_2}\binom{BB_2}{CC_1},\ \binom{CC_1}{AA_2}\binom{CC_2}{AA_1},\ \binom{AA_1}{BB_2}\binom{AA_2}{BB_1},\ \binom{AA_1}{P_2A_1}\binom{AA_2}{P_1\alpha'} \text{(*)}$$

saranno dunque allineate con uno stesso punto O.

Il raggio AA_2 coincide con $A\alpha'$, onde il secondo punto dell'ultima coppia non è altro che α', mentre il primo è evidentemente A_1. Perciò la retta $A_1\alpha'$ passa per il punto comune alle congiungenti delle prime tre coppie di punti.

È chiaro che si può fare la dimostrazione analoga per

(*) Il lettore è pregato di fare la figura.

(*) Adopero qui la notazione $\binom{MN}{PQ}$ per indicare il punto comune alle rette MN e PQ.

ciascuna delle rette $B_1\beta'$, $C_1\gamma'$ e $A_2\alpha$, $B_2\beta$, $C_2\gamma$. Si può quindi enunciare il teorema:

Le 9 rette

$$\begin{pmatrix}BB_1\\CC_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}BB_2\\CC_1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}CC_1\\AA_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}CC_2\\AA_1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}AA_1\\BB_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}AA_2\\BB_1\end{pmatrix}$$

$$A_1\alpha',\qquad B_1\beta',\qquad C_1\gamma'$$

$$A_2\alpha,\qquad B_2\beta,\qquad C_2\gamma$$

passano per uno stesso punto O.

2. Scolio. — Nella dimostrazione precedente non abbiamo considerato che le coppie di cui avevamo bisogno, ma è evidente che per la medesima ragione passano per O anche le rette

$$\begin{pmatrix}BB_1\\P_2A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}BB_2\\P_1\alpha'\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}CC_1\\P_2A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}CC_2\\P_1\alpha'\end{pmatrix};$$

così pure dalle dimostrazioni analoghe che, come ho osservato di sopra, si potrebbero fare per le rette $B_1\beta'$, $C_1\gamma'$ e $A_2\alpha$, $B_2\beta$, $C_2\gamma$ si ricaverebbe che per O passano pure le rette

$$\begin{pmatrix}CC_1\\P_2B_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}CC_2\\P_2\beta'\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}AA_1\\P_2B_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}AA_2\\P_1\beta'\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}AA_1\\P_2C_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}AA_2\\P_1\gamma'\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}BB_1\\P_2C_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}BB_2\\P_1\gamma'\end{pmatrix}$$

e le rette

$$\begin{pmatrix}BB_2\\P_1A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}BB_1\\P_2\alpha''\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}CC_2\\P_1A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}CC_1\\P_2\alpha''\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}CC_2\\P_1B_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}CC_1\\P_2\beta''\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}AA_2\\P_1B_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}AA_1\\P_2\beta''\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}AA_2\\P_1C_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}AA_1\\P_2\gamma''\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}BB_2\\P_1C_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}BB_1\\P_2\gamma''\end{pmatrix}.$$

Così per O *passano, oltre le 9 rette considerate di sopra, altre 12 rette determinate anch'esse per mezzo dei punti dati.*

3. *Altre proprietà della medesima figura.*

Siano A_0, B_0, C_0 le intersezioni di B_1C_1, B_2C_2; C_1A_1, C_2A_2; A_1B_1, A_2B_2.

Indichiamo con C'_1, C'_2 le intersezioni di AB con A_1B_1, A_2B_2. I gruppi $ABC_1C'_1$, $ABC_2C'_2$ sono armonici, perciò le due forme

$$A_1 . (ABC_1C'_1)\ ,\quad A_2 . (ABC_2C'_2)$$

sono projettive, ed avendo i raggi uniti A_1B, A_2B saranno prospettive. *Ne segue che i punti* B_0, C_0 *sono allineati con* A. *Similmente si vedrebbe che i punti* C_0, A_0 *sono allineati con* B, *ed* A_0, B_0 *con* C.

Considerando le due forme di tre elementi

$$BC_1C_2\ ,\quad CB_1B_2$$

e applicando un notissimo ed elementare teorema di Geometria projettiva (V. Cremona, Geom. projettiva, p. 45, § 68 a sinistra) si vede che i tre punti

$$\begin{pmatrix} B_1C_2 \\ B_2C_1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} BB_1 \\ CC_1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} BB_2 \\ CC_2 \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} B_1C_2 \\ B_2C_1 \end{pmatrix},\qquad P_1\ ,\qquad P_2$$

sono in linea retta.

Dimostrazioni analoghe si potrebbero evidentemente fare per ciascuno degli altri punti analoghi a $\begin{pmatrix} B_1C_2 \\ B_2C_1 \end{pmatrix}$. Onde si avrà che *i tre punti*

$$\begin{pmatrix} B_1C_2 \\ B_2C_1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} C_1A_2 \\ C_2A_1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} A_1B_2 \\ A_2B_1 \end{pmatrix}$$

sono sulla retta P_1P_2.

Pesaro, 15 Maggio 1887.

S. Rindi
prof. nel R. Liceo Mamiani.

NOTA SU ALCUNI TRIANGOLI DIPENDENTI DA UN TRIANGOLO ACUTANGOLO DATO

Sia ABC un triangolo acutangolo dato; a, b, c le misure dei lati opposti ad A, B, C; S l'area; su ciascuno dei lati ed esternamente al triangolo si costruisca un arco di circolo capace di 60°

Indichiamo con O O_1 O_2 i centri di questi archi corrispondenti ai lati a, b, c, e con r r_1 r_2 i rispettivi raggi, avremo

$$r = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad r_1 = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad r_2 = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Il triangolo O_1AO_2 ci dà

$$O_1O_2^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(A + 60^\circ)$$

$$= r_1^2 + r_2^2 - r_1r_2 (\cos A - \sqrt{3}\,\mathrm{sen}A).$$

$$O_1O_2^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{bc}{3} (\cos A - \sqrt{3}\,\mathrm{sen}A).$$

ossia

$$(1) \qquad 6.\, O_1O_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 4.S.\sqrt{3}.$$

Questa formola simmetrica rispetto ai lati a, b, c del triangolo ABC dimostra, come già è noto, che il triangolo OO_1O_2 è equilatero.

Insieme a questo triangolo consideriamo anche quello determinato dai 3 punti di mezzo M, M_1, M_2 degli archi capaci di 120°, che si segano in un punto, e che completano i circoli; il triangolo M_1AM_2 in cui $M_1AM_2 = A - 60°$, $M_1A = r_1$ $M_2A = r_2$ ci dà

$$M_1M_2^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3}\cos(A - 60^\circ)$$

ossia

$$3M_1M_2^2 = b^2 + c^2 - bc\cos A - bc\,\mathrm{sen}A.\sqrt{3}.$$

Facendo la sostituzione già adoperata per cosA e per bc senA, si ottiene

$$(2)\qquad 6M_1M_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4S.\sqrt{3}$$

la quale formola, simmetrica rispetto ai lati a, b, c, ci mostra che anche il triangolo MM_1M_2 è equilatero. La (1) e la (2) sommate membro a membro e sottratte ci danno

$$(3)\qquad 3(O_1O_2^2 + M_1M_2^2) = a^2 + b^2 + c^2.$$

$$(4)\qquad 3(O_1O_2^2 - M_1M_2^2) = 4S.\sqrt{3}.$$

e queste formole danno una rappresentazione geometrica della somma dei quadrati dei lati di un triangolo acutangolo e della sua area.

Ma di quest' ultima si può avere una espressione molto più semplice; infatti se si moltiplicano ambo i membri della (4) per $\frac{\sqrt{3}}{2}$, si ottiene

$$(5)\qquad S' - S'_1 = S.$$

dove S' e S'_1 significano le aree dei triangoli OO_1O_2, MM_1M_2, e però il triangolo dato è equivalente alla differenza dei due triangoli equilateri considerati.

2. Le formole stabilite possono tornar utili nello studio delle relazioni esistenti fra i triangoli equilateri circoscritti al dato e il triangolo dato, come si può argomentare da questo breve cenno.

Se TT_1 è una retta passante per A e terminata agli archi descritti su b e c capaci di 60°, ed ω l'angolo che AT fa con AB, si avrà

$$TA = 2r_2\,\mathrm{sen}(\omega + 60^\circ),\quad AT_1 = 2r_1\,\mathrm{sen}(\omega + A - 60^\circ)$$

epperciò

$$TT_1 = \text{sen}\omega \left\{ \frac{c}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{3}}(\cos A + \sqrt{3}.\text{sen}A) \right\} + \cos\omega \left\{ c + \frac{b}{\sqrt{3}}(\text{sen}A - \sqrt{3}.\cos A) \right\}$$

Se indichiamo con l_ω l_0 $l_{\frac{\pi}{2}}$ le lunghezze delle trasversali corrispondenti agli angoli ω, 0, $\frac{\pi}{2}$, avremo

$$(6) \qquad l_\omega = l_0 \cos\omega + l_{\frac{\pi}{2}}.\ \text{sen}\omega \qquad (^*)$$

e quindi anche

$$(7) \qquad l_{\omega+\frac{\pi}{2}} = \cos\omega . l_{\frac{\pi}{2}} - \text{sen}\omega .\ l_0 .$$

La (6) e la (7) quadrate e sommate danno

$$(8) \qquad l^2_{\ \omega} + l^2_{\ \omega+\frac{\pi}{2}} = l_0^2 + l_{\frac{\pi}{2}}^2$$

dalla quale, indicando con S_ω l'area del triangolo equilatero corrispondente alla direzione ω, risulta

$$(9) \qquad S_\omega + S_{\omega+\frac{\pi}{2}} = S_0 + S_{\frac{\pi}{2}} .$$

I valori delle costanti del secondo membro nelle formole (8), (9) si ottengono facilmente quadrando e sommando i valori di

$$l_0 = c + \frac{b}{\sqrt{3}} \text{sen}A - b \cos A$$

$$l_{\frac{\pi}{2}} = \frac{c}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{3}} \cos A + b\ \text{sen}A ,$$

così si ottiene

$$l_0^2 + l_{\frac{\pi}{2}}^2 = \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{3} + \frac{8S}{\sqrt{3}}$$

e in conseguenza

$$S_0 + S_{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2.\sqrt{3}} + 2S.$$

(*) Affinchè la trasversale l_0 esista, è necessario che l'angolo in A super 60°; ma questo non nuoce alla generalità perchè, essendo il triangolo acutangolo, uno certamente dei suoi angoli avrà tale proprietà.

Ma dalla (3) si ottiene $2.(S' + S'_1) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2.\sqrt{3}}$, quindi il valore della costante $S_0 + S_{\frac{\pi}{2}} = 2(S' + S'_1 + S) = 4S' = S_M$, dove S_M rappresenta il massimo dei triangoli equilateri circoscritti, che, come è noto, ha i lati paralleli a quelli del triangolo OO_1O_2.

FRANCESCO PANIZZA.

DIMOSTRAZIONI DEI TEOREMI PROPOSTI A PAG. 124.

Due triangoli $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ *sieno inscritti in un triangolo* ABC *in modo che le rette* AA_1, BB_1, CC_1 *passino per uno stesso punto e che anche le rette* AA_2, BB_2, CC_2 *passino per uno stesso punto: se le rette* A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1 *incontrano rispettivamente le rette* A_2B_2, A_2C_2, B_2C_2 *in tre punti formanti un triangolo, questo triangolo è circoscritto al triangolo* ABC.

F. NICOLI.

Dimostrazione del Prof. *G. Riboni.* (*)

Siano α, β, γ rispettivamente i punti comuni delle B_1C_1 e B_2C_2, C_1A_1 e C_2A_2, A_1B_1 e A_2B_2 si tratta di dimostrare che i vertici A, B, C del triangolo dato si trovano sui lati $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ del triangolo $\alpha\beta\gamma$ o sul prolungamento di questi lati.

Indichiamo con O_1 e O_2 i punti comuni alle AA_1, BB_1, CC_1 ed AA_2, BB_2, CC_2 e con E ed F i punti d'incontro delle B_1C_1 e B_2C_2 prolungate, col prolungamento della BC. Dal quadrilatero completo $AC_2O_2B_2$ si ha che il gruppo BA_2CF è armonico. Chiamisi ora α_1 il punto d'incontro della $B\gamma$ colla C_2B_2. Proiettando da B_2 il gruppo armonico predetto sulla $B\alpha_1$ si ha il gruppo $B\gamma M\alpha_1$: pure armonico. Si consideri ora il quadrilatero completo $AC_1O_1B_1$ da cui si ha che il gruppo BA_1CE è armonico; proiettando questo gruppo da B_1 sulla $B\alpha_1$ si ha che i tre punti BA_1C sono proiettati in $B\gamma M$, e poichè il gruppo $B\gamma M\alpha_1$ è armonico necessariamente, E

(*) Un'altra dimostrazione venne inviata dal Sig. prof. Eugenio Frattini.

viene proiettato in α_1, ossia α_1 è il punto di concorso delle C_1B_1, C_2B_2, sicchè α_1 coincide con α. In altre parole il punto α si trova sulla retta $B\gamma$. — Similmente si dimostrerebbe che β e γ sono allineati con A, ed α e β con C.

Resta altresì dimostrato che due vertici del triangolo $\alpha\beta\gamma$, insieme al vertice del triangolo ABC situato sulla retta dei vertici stessi, e il punto d'incontro col lato opposto a questo (come $\alpha M\gamma B$) formano un gruppo armonico (*).

Sieno AB, CD *due diametri fra loro perpendicolari di una circonferenza*, M *un punto qualunque di questa curva*, N *il punto comune alle rette* AM *e* CD, P *il piede della perpendicolare condotta da* M *sulla tangente in* A *alla circonferenza e* Q *il punto comune alle rette* AB, PN: *la retta* QM *è tangente alla circonferenza.*

F. Nicoli.

Dimostrazione del Prof. *L. Bosi* (**)

I punti M ed A possono trovarsi dalla stessa parte del diametro CD o da parti opposte di esso. In ambedue i casi indichiamo con O il centro del cerchio, con Y il punto d'incontro delle PM, CD e tiriamo OM.

Poichè le parallele PM, AQ sono segate dalle PQ, MA, YO che concorrono in un punto N, si avrà la proporzione $OQ : OA = YP : YM$; ma $YP = OA = OM$, onde si può scrivere $OQ : OM = OM : YM$. I triangoli QMO, OYM avendo gli angoli QOM, OMY eguali e compresi da lati proporzionali sono simili: quindi l'angolo QMO è uguale all'angolo OYM e perciò retto. La QM è dunque tangente alla circonferenza.

Si può dimostrare inversamente che se l'angolo QMO è retto, il punto M giace sulla circonferenza.

Si tiri da M la perpendicolare ad AB fino ad incontrare AB in X. Si avrà, come sopra, la proporzione $OQ : OA = YP : YM$, che, per essere $YP = OA$, si può scrivere:

$$OQ : OA = OA : YM. \qquad (1)$$

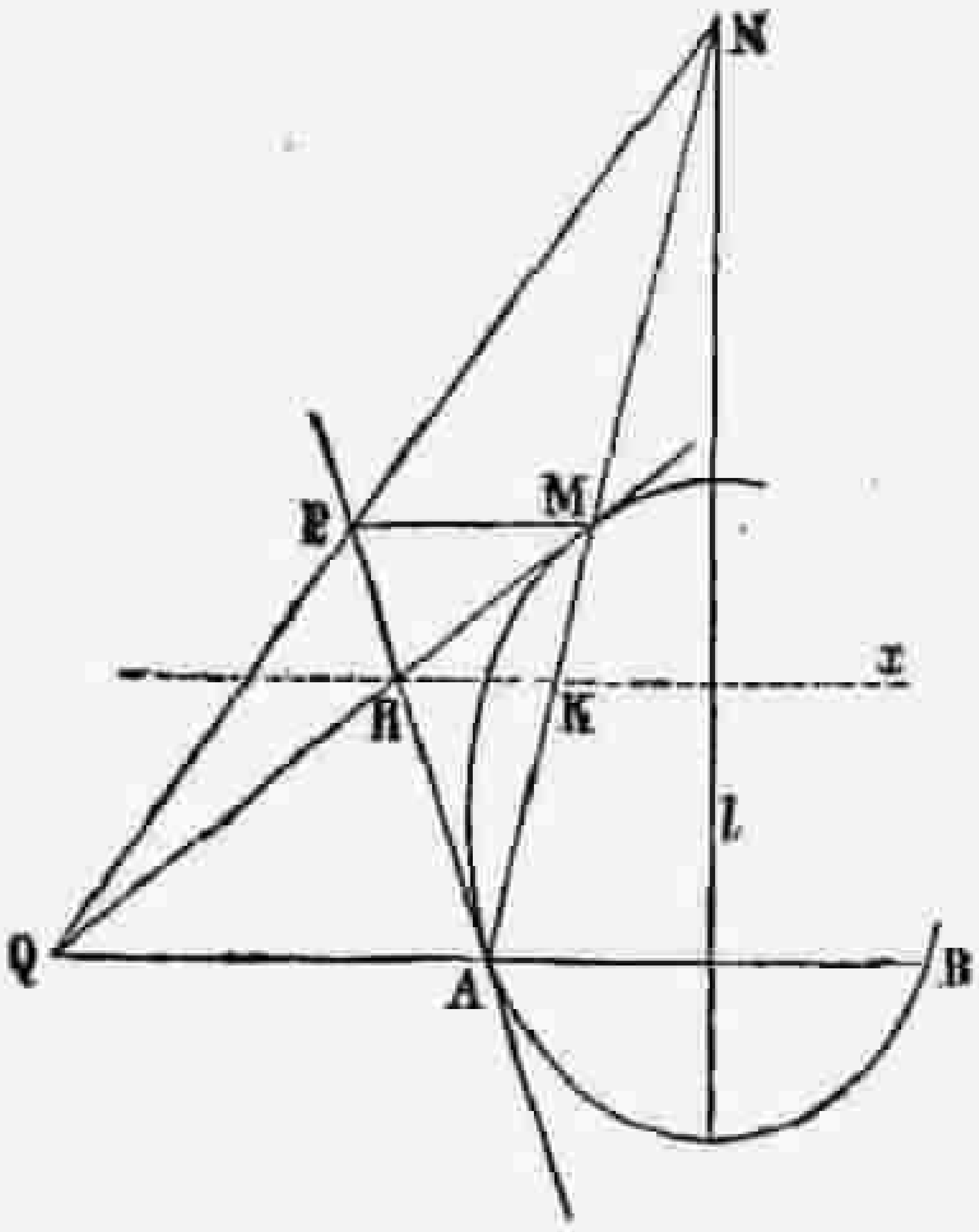
(*) Si può anche osservare che condotte le $A\alpha$, $B\beta$ finchè s'incontrino in δ, risulta un quadrilatero completo $\alpha\gamma\beta\delta$ del quale il triangolo ABC è il triangolo diagonale (A. L.).

(**) Dimostrazioni elementari di questo teorema furono inviate anche dai Signori *J. Beyens*, *F. Panizza*, *G. Riboni*, *G. Russo*, *R. Badia*, *E. Frattini*.

Inoltre dal triangolo rettangolo QMO abbiamo OQ: OM=OM: OX: ossia OQ : OM = OM : YM. Da quest' ultima proporzione e dalla (1) risulta che OM = OA, cioè che il punto M è sulla circonferenza c.d.d.

Questo teorema del resto non è che un caso particolare del seguente :

Sieno AB *una corda di una conica,* l *la direzione del suo diametro coniugato,* M *un punto qualunque della curva,* N *il punto comune alle rette* AM *e* l, P *il punto d'intersezione della parallela ad* AB *condotta da* M *con la tangente in* A *alla conica ,* Q *il punto comune alle rette* AB *e* PN: *la retta* MQ *è tangente alla conica.*



Dal punto d'incontro H delle PA, MQ si tiri la retta x parallela ad AB, che incontri in K la AM. La polare del punto A è la tangente AP; quella di N dev'essere parallela ad AB, poichè N si trova sul diametro coniugato ad AB, e inoltre deve passare per K (poichè dalla considerazione del quadrangolo completo che ha per vertici P, H, Q è il punto all'infinito comune alle parallele QB, PM risulta che K è coniugato armonico di N rispetto ai punti A ed M): la polare di N è dunque la x.

Il punto H, intersezione delle AP ed x polari dei punti A ed N rispettivamente, è il polo della retta AN. Per esso deve passare la tangente in M , la quale per conseguenza è la MQ. c. d. d.

Supponendo che la conica sia una circonferenza e la corda AB un diametro si ha il teorema proposto.

Se gli spigoli di un tetraedro equifaciale sono veduti sotto gli angoli α, β, γ, *dal centro della sfera ad esso circoscritta e si indicano rispettivamente con* D *e con* V *il diametro di questa sfera ed il volume del tetraedro, si ha la relazione*

$$V = \frac{D^3}{3} \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}.$$

J. BEYENS.

Dimostrazione del prof. *F. Panizza* (*)

Sia il tetraedro SABC; per ipotesi si ha

$$AB = SC = a, \quad BC = SA = b, \quad AC = SB = c.$$

O il centro della sfera circoscritta, si abbassino da O le rpendicolari OM, ON, OP sui lati AB, BC, CA; i punti N, P saranno rispettivamente i punti medi dei lati AB, , CA e si avrà per ipotesi

$$A\widehat{O}B = \alpha, \quad B\widehat{O}C = \beta, \quad A\widehat{O}C = \gamma.$$

i triangoli AOM, BON, AOP si ha, chiamando R il raggio la sfera circoscritta:

$$OM = R \cos\frac{\alpha}{2}, \; ON = R \cos\frac{\beta}{2}, \; OP = R \cos\frac{\gamma}{2}$$

Ora è noto (vedi Baltzer-Stereometria) che le congiungenti punti medi degli spigoli opposti di un tetraedro concorno nel baricentro del tetraedro, e che, quando questo è a cce eguali, il baricentro coincide col centro della sfera circoscritta e con quello della sfera inscritta (vedi in questo Periodico la Nota del Besso sul tetraedro a facce eguali). Ne rilta che le rette MO, NO, PO profungate incontrano gli igoli opposti nei loro punti di mezzo, e che perciò i parallogrammi ottenuti congiungendo ordinatamente i punti di ezzo di due coppie di spigoli opposti, per ipotesi eguali loro, sono rombi, e quindi le diagonali si segano ad angolo to. Le tre rette OM, ON, OP sono quindi a due a due perdicolari fra loro, e però il volume del tetraedro avente per goli quelle tre rette e per base il triangolo MNP sarà to dalla formola

$$V_1 = \frac{1}{6}.\ OM.ON.OP = \frac{1}{6}\ R^3 \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}.$$

il tetraedro dato SABC ha la base ABC quadrupla della se MNP e le altezze corrispondenti a queste due basi sono re l'una quadrupla dell'altra, come facilmente si ricava

(*) Altre dimostrazioni vennero inviate dai Sig.i Prof.i *G. Riboni*, *E. attini*.

osservando che il segmento che congiunge un vertice del tetraedro col baricentro della faccia opposta è quadruplo di quello che congiunge il baricentro del tetraedro con quello della stessa faccia. Da ciò risulta

$$V = 16\, V_1 = \frac{1}{3}\, D^3 \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}\,.$$

Osservazione. – Dalle considerazioni fatte nella dimostrazione del teorema si ricava questo enunciato geometrico del teorema stesso:

Un tetraedro a faccie eguali è equivalente alla terza parte di un parallepipedo retto rettangolo avente per spigoli le congiungenti *i* punti medi degli spigoli opposti.

F. Panizza.

TEOREMI PROPOSTI

I punti d'incontro delle altezze di due triangoli omologici, aventi i lati corrispondenti perpendicolari fra loro, sono equidistanti dall'asse di omologia.

Se un triangolo ABC ruota intorno ad un punto O del suo piano, e sia $A'B'C'$ una qualunque delle posizioni che esso prende in questa rotazione; se inoltre *a*, *b*, *c* sono i punti d'incontro dei lati corrispondenti dei due triangoli ABC ed $A'B'C'$, si hanno le seguenti proprietà:

1.° Se il punto O è il centro del cerchio circoscritto al triangolo ABC, sarà anche il punto d' incontro delle altezze del triangolo *abc*.

2.° Se il punto O è il punto d'incontro delle altezze del triangolo ABC, sarà anche il centro del cerchio inscritto nel triangolo *abc*.

3.° Se il punto O è il centro del cerchio inscritto nel triangolo ABC, sarà anche il centro del cerchio circoscritto al triangolo *abc*.

4.° Se il punto O è situato sulla circonferenza circoscritta al triangolo ABC, i punti *a*, *b*, *c* saranno in linea retta, cioè i triangoli ABC e $A'B'C'$ saranno omologici.

A. Sauve.

I cerchi aventi per diametri le tre mediane d'un triangolo hanno a due a due per assi radicali le tre altezze.

S. Rindi.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

...tmetica commerciale e politica per Tito Martini *Pro-...essore ordinario nella R. Scuola superiore di Com-...ercio di Venezia* (Roma G. B. Paravia e Comp.).

Il libro del prof. T. Martini, che oggi in questa rasse- bibliografica segnaliamo ai lettori del *Periodico*, non ...à una recente pubblicazione, infatti la copia che abbia- sott'occhio fa parte di una seconda edizione e porta la ... del 1884, ma noi temiamo che, malgrado i miglioramenti ...autore introdotti nella seconda edizione, quest'opera non ...ancora abbastanza conosciuta ed apprezzata; sebbene ... la sua forma pratica e per la perfetta conformità in ...trovasi col programma di computisteria e ragioneria ... le sezioni di commercio e ragioneria degli istituti tecnici, ...a rendere utilissimi servigi nell'insegnamento.

Questo trattato è diviso in due parti: la prima concer-...te i sistemi monetari, le regole d'interesse semplice, la ...ia dei cambi, degli arbitraggi, le regole di ripartizione ... è intitolata aritmetica commerciale; la seconda, che ...ta delle annualità, degli interessi composti, degli am-...tamenti, delle rendite vitalizie e delle assicurazioni, è ...a chiamata dall' autore aritmetica politica, seguendo in ...l'esempio degli scrittori del secolo passato. Alcune tavole ...eriche completano in modo opportunissimo l'opera.

Numerosi sono gli esempi che servono a chiarire le ...icipali teorie ed utili sono le note bibliografiche, le quali ...sono, sia agli insegnanti, sia ai discepoli servire di guida ... estendere le loro cognizioni sopra speciali argomenti.

Qua e là abbiamo notato qualche cosa che ci è sem-...a non rigorosamente esatta. Così la irrazionalità dello ...ato all'indentro più che nel fatto di potere in certi casi ...durre a risultati assurdi, sta a parer nostro nell'obbligo ...pagare un interesse sopra una somma non riscossa. La ...ola congiunta, o del tre composta come da altri vien ...mata, non ci pare abbastanza chiaramente definita ed il capitolo che ne tratta ha, a differenza degli altri, più l'aspetto di un capitolo di aritmetica pratica che di aritmetica ragionata; la soppressione di ogni ragionamento nei vari esempi, se è vantaggiosa nel dare una maggiore speditezza al calcolo, nuoce alla chiarezza. E poichè crediamo che nella mente dei giovani si fissi meglio un ragionamento che una regola, così ci pare che convenga sempre nei libri di testo ripetere a sazietà i ragionamenti sui quali le regole si fondano. Nel capitolo quarto se si fossero invertiti alcuni paragrafi cominciando col dare i listini di qualche borsa, spiegandoli, e basando su di essi le osservazioni, la teoria sarebbe riescita più semplice. L'interesse composto valutato al n° 157 non si può propriamente considerare come continuo, ma bensì come discreto, nè la minor durata del periodo giustifica la distinzione dal punto di vista teorico.

Queste lievissime mende ed altre insignificanti sviste, che è inutile qui riportare, potranno con molta facilità essere tolte dagli insegnanti, i quali, siamo certi, ci saranno grati di aver loro fatto conoscere un libro, che essi possono tranquillamente adottare, sicuri di trovarvi razionalmente svolte tutte le teorie che fanno parte del loro insegnamento.

E. Padova.

J. A. Serret. – *Trattato di Trigonometria* – Versione italiana fatta sulla sesta edizione francese ed autorizzata dall'Autore con Aggiunte per cura di Luigi Fenoglio professore di matematica nel R. Istituto tecnico di Alessandria – Parte prima *Trigonometria piana e sferica* – G. B. Paravia & C. Torino – Roma – Milano – Firenze, 1880. – Prezzo Lire 3.

Non occorre rammentare i pregi di questa notissima opera del Serret, ora nuovamente tradotta dal Sig. prof. Fenoglio e corredata di aggiunte, colle quali il traduttore ha avuto lo scopo di renderla ancor più conforme ai bisogni dell'insegnamento nelle nostre scuole. E negli Istituti tecnici, sezione fisico–matematica, credo ch' essa possa con profitto venire adottata, quando l'insegnante abbia cura di analizzare, con appropriati esercizi elementari, le nozioni fondamentali, ed ommetta alcune parti di natura meno elementare e non

enziali allo scopo dell'insegnamento. E veramente le de-
izioni, che vi sono date, delle funzioni goniometriche, sono
ppuntabili; ma perchè esse sieno bene intese dai giova-
tti, pei quali lo studio della trigonometria è del tutto
ovo, occorre che siano accompagnate da alcune elementa-
sime questioni atte a porre bene in chiaro che i seni,
seni, ecc. sono numeri astratti indipendenti dalla lunghezza
l raggio. La quale osservazione non è forse del tutto su-
rflua per coloro che, essendo nuovi nella carriera dell'in-
gnamento, adottano questo libro nelle loro scuole. Altre
zioni sulla teoria generale delle funzioni goniometriche
no esposte in modo piuttosto elevato, e richiedono pure
a accurata analisi elementare; ed altre, potrebbero es-
re ommesse, in conformità al principio di insegnare *poco*
rchè più facilmente riesca di insegnare *bene*.

Mi permetto ancora un'osservazione che si riferisce alla
mostrazione del teorema espresso dalla disuguaglianza
$- \operatorname{sen} x < \frac{x^3}{6}$, nella quale dimostrazione è in difetto quel
gore che si ammira nel complesso dell'opera; poichè da
a disuguaglianza della forma $U_n < T_n$ in cui U_n e T_n
no funzioni di n che, per n tendente all'infinito, tendono
spettivamente ai limiti U e T, si conchiude $U < T$, men-
e a rigore si dovrebbe conchiudere $U \leqq T$; e ciò avverto
che perchè in altri libri, pure pregevolissimi, trovasi una
sì fatta argomentazione.

Fra le aggiunte del prof. Fenoglio mi piace specialmente
uella intitolata *Rappresentazione grafica delle variazioni
elle funzioni trigonometriche*. Tali rappresentazioni infatti
no molto efficaci per educare al concetto di funzione,
nto importante anche fuori del campo della matematica.
pure pregevole l'aggiunta sulle *Equazioni trigonometriche*
he contiene ampia materia per utili esercitazioni scolastiche.

D. Besso.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Giornale di Matematiche pubblicato per cura del professore *G. Battaglini.* Volume XXV. Luglio e Agosto 1887. Napoli, Benedetto Pellerano, editore.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *J. Bourget*, Recteur de l'Academie de Clermont, *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy*, Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe. 2e série. Onzième année. N. 8. Paris, 1887.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par *H. Vuibert.* 11e Année. N. 20. Paris, M. Nony, 17, Rue des Écoles, 1887.

Iornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo *D.r F. Gomes Teixeira.* Professor na Escola Polytechnica do Porto. Vol. VII, n. 6. Coimbra, 1886.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome septième, Juillet, Aout et Septembre 1887.

Rivista didascalica. Organo della società didascalica italiana. — Anno I, fasc. 4, Roma, 1887.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati.* Anno XIX. N. 9, 10, 11, 12. Firenze, 1887.

Bassani (A.) — Generalizzazione della formola di Lagrange. (Atti R. Ist. ven.) 1887.

Certo (L.) — Sui poligoni piani semplici. — Sulle forme di terzo grado generate da due forme elementari projettive di primo e di secondo grado di un piano o di una stella. — Sull'n-agono inscritto isoclino in un n-agono piano semplice dato, (1885—1887).

Del Re (A). — Sulle funzioni di forza. — Sulla congruenza (6, 2) delle rette che uniscono le coppie di punti omologhi di due quadriche che si corrispondono in una determinata omografia non assiale nè omologica dello spazio. — Su certi luoghi che s'incontrano nello studio di tre forme geometriche fondamentali di 2a specie proiettivamente riferite due a due. — Nuova costruzione della superficie del quint'ordine dotata di curva doppia del quint'ordine. — Alcune proprietà geometriche che potrebbero essere utili nella teoria dei sistemi di raggi luminosi. — Omografie che mutano in se stessa una certa curva gobba del 4° ordine e 2a specie e correlazioni che la mutano nella sviluppabile dei suoi piani osculatori. — Correlazioni che mutano la quartica gobba con due flessi nella sviluppabile dei suoi piani bitangenti. (1885—87).

Giuliani (G.) — Sopra alcune funzioni analoghe alle funzioni cilindriche. — Sopra certe funzioni analoghe alle sferiche (Gior. Battaglini 1887). — Sulla funzione potenziale della sfera in uno spazio di n dimensioni (Nuovo Cimento, 1887).

Guccia (G. B.) — Sui sistemi lineari di superficie algebriche dotati di singolarità base qualunque (1887).

Longchamps (G.) — Sur la rectification de quelques courbes remarquables (1887).

Neuberg (J.) e Tarry (G.) — Sur les polygones et les polyèdres harmoniques (1886).

Padova (E.) — Sulle espressioni invariabili. (Atti R. Accademia Lincei, 1887.)

Pannelli (M.) — Sulle trasformazioni multiple involutorie di due spazi. (Rendiconti R. Accademia fis. mat.) Napoli, 1887.

SULLE
FRAZIONI DECIMALI PERIODICHE

1. La condizione necessaria e sufficiente affinchè un nero formato da tutte cifre 9 sia divisibile per un altro nposto nella stessa guisa è che il dividendo contenga un nero di cifre multiplo del numero delle cifre del divisore. ero se questa condizione è soddisfatta, il dividendo uguarà il prodotto del divisore per un numero della forma ..0100.. 01......100...01 dove il numero dei zeri fra due e 1 consecutive sarà uguale al numero delle cifre del sore meno una. La condizione stessa è poi necessaria, chè quand'essa non è soddisfatta potendosi scomporre il dendo in due parti una multipla del divisore e l'altra ore del divisore stesso, la divisione darà necessariamente resto. Così ad es. avendosi i due numeri 99999999 e 999, il no potrà scriversi $= 99999900 + 99 = 999 \,.\, 100100 + 99$, il che tra come la divisione dell' uno per l'altro dia un resto è 99.

E poichè un numero formato da p cifre 9 può rappresarsi con $10^p - 1$, così segue il teorema:

Affinchè un numero della forma $10^p - 1$ *sia divisibile un altro* $10^q - 1$, *della stessa forma, è necessario e ciente che* p *sia multiplo di* q.

2. Teorema. *Se* p *è un numero primo diverso da* 2 $10^p - 1$ *è sempre divisibile per* p. (*)

3. Consideriamo ora la frazione *semplice* $\frac{1}{p}$, in cui p numero primo diverso da 2 e 5: è chiaro (2) che l'elianza

(*) Teorema di FERMAT in un caso particolare. Veggasi la dimostrazione e dà il BALTZER nei suoi *Elementi di matematica*, p.^{e} 2^a, pag. 56.

$$\frac{1}{p} = \frac{m}{10^{p-1}-1} = \frac{m}{99\ldots9}$$

potrà sempre soddisfarsi e dovrà aversi $mp = 99\ldots9$.

Nel caso in cui esista un'altra frazione $\frac{m_1}{99\ldots9}$, il cui denominatore abbia meno di $p-1$ cifre, ad es. $s-1$, equivalente alla $\frac{1}{p}$, avendosi in pari tempo $\frac{1}{p} = \frac{m}{10^{p-1}-1}$ e $\frac{1}{p} = \frac{m_1}{10^{s-1}-1}$, avverrà che tanto $10^{s-1}-1$ quanto $10^{p-1}-1$ saranno multipli di p: ora dico che se $10^{s-1}-1$ è il minore dei numeri formati da tutte cifre 9 e divisibili per p, si ha che $p-1$ è multiplo di $s-1$. Ed infatti quando ciò non fosse si potrebbe decomporre $10^{p-1}-1$, come già si fece al n.° 1, in due parti una multipla di $10^{s-1}-1$ e l'altra della stessa forma con un numero di cifre 9 minore di $s-1$ che dovrebbe essere divisibile per p, il che contradice all'ipotesi.

Ma se $10^{s-1}-1$ è il primo numero, formato da tutte cifre 9, multiplo di p, $s-1$ esprime chiaramente il numero delle cifre del periodo della frazione decimale periodica in cui si trasforma la frazione ordinaria $\frac{1}{p}$ (e viceversa), per cui si ha il teorema:

Convertendo in decimale una frazione ordinaria semplice $\frac{1}{\mathrm{p}}$, *il cui denominatore* p *è un numero primo, il periodo avrà o* $\mathrm{p}-1$ *cifre od un numero di cifre summultiplo di* $\mathrm{p}-1$.

Osservazione 1.ª — Avendosi la frazione $\frac{1}{p} = \frac{m_1}{10^{s-1}-1}$, con $10^{s-1}-1$ il minore dei numeri formati da tutte cifre 9 e divisibili per p, sarà m_1 il periodo della frazione decimale periodica risultante dalla conversione in decimali di $\frac{1}{p}$, e ha $10^{\delta-1} - 1 = 999...9 = m_1 p$ se p (che è un numero ermina per 1, 3, 7, 9, l'ultima cifra del periodo, m_1, sarà 9, 3, 7, 1 e il periodo stesso sarà multiplo neno che p non sia 0 3 o 9.

vazione 2.ª – L'ultima cifra del periodo di $\frac{1}{p}$ esta, quando si osservi che i prodotti di 0, 1, 2, 3, 4, 8, 9 per 1, 3, 7, 9 terminano con cifre che sono *ferenti*, sarà facile compiere questo periodo senza alla diretta divisione.

asi ad es. da determinare il periodo della frazione $\frac{1}{79}$.

no a tal nopo le due serie di numeri

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9
79,	158,	237,	316,	395,	474,	553,	632,	711

delle quali è formata da 0 e dai primi nove nu- la seconda è composta da 0 e dai multipli di 79 se- numeri stessi, quindi osservando che l'ultima cifra odo a destra dev'essere 1 si dispongano i termini e serie come qui appresso

79 1
632 8
316 4
632 8
553 7
158 2
158 2
632 8
395 5
474 6
158 2
79 1

cioè che ciascun prodotto sia avanzato di un posto verso sinistra e la loro somma sia un numero formato da tutte cifre 9. I moltiplicatori pei singoli prodotti parziali formeranno evidentemente la parte significativa del periodo. Sarà dunque $\frac{1}{79}=0,\left[0126582278481\right]$.

4. Allorchè nella conversione in decimale di una frazione ordinaria, dopo un certo numero di divisioni si perviene ad un resto d'una sola cifra, si può ricorrere al processo seguente per ottenere rapidamente il periodo.

Sia da ridurre in decimale la frazione $\frac{1}{23}$ e dopo aver trovato la parte 0,043478, del quoziente della divisione, si sia pervenuti al resto 6: si potrà scrivere $\frac{1}{23}=0{,}043478+\frac{1}{10^6}\cdot\frac{1}{23}\cdot 6=$

$$0{,}043478+\frac{1}{10^6}\cdot 0{,}043478.6+\frac{1}{10^{12}}\cdot\frac{1}{23}\cdot 6=\text{ecc.},$$

da cui si vede che per ottenere la parte decimale basta aggiungere a 0,043478 il prodotto di questo numero per 0,000006, poi il prodotto del prodotto ottenuto per 0,000006 e così via. L'operazione può disporsi come qui sotto:

$$\begin{array}{lr}
\frac{1}{23}=0,\ 043478 & =\ 043478\\
\qquad\qquad 260868 & =\ 043478\times 6\\
\qquad\qquad\qquad 1565208 & =\ 260868\times 6\\
\qquad\qquad\qquad\qquad 9391248 & =1565208\times 6\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 56347488 & =9391248\times 6\\
\hline
\end{array}$$

$$\frac{1}{23}=0,\left[0434782608695652173913\right]0434\ldots\ldots$$

5. Teorema. – *Se il numero delle cifre del periodo d'una frazione semplice, avente per denominatore un numero primo* p, *è pari ed* $=2t$, *il resto* t^{esimo} *risultante dalla divisione del numeratore pel denominatore uguaglia il denominatore diminuito dell'unità* e viceversa *se nella con-*

ione in decimale della frazione $\frac{1}{p}$, *si perviene dopo* t *di-*
mi al resto $p-1$, *le cifre del periodo saranno* $2t$.

Infatti essendo $2t$ il numero delle cifre del periodo, p un divisore di $10^{2t}-1$, ossia il quoziente $\frac{10^{2t}-1}{p}$ non alcun resto. Ora avendosi $10^{2t}-1=(10^t+1)(10^t-1)$ con-
ie che anche $\frac{(10^t+1)(10^t-1)}{p}$ sarà un numero intero, e
hè per ipotesi p è primo dovrà l'uno o l'altro dei fat- 10^t+1, 10^t-1 essere divisibile per p. Ciò posto, nella
zione di $\frac{1}{p}$ in decimali sia r_t il resto che si ottiene dopo determinato t cifre del quoziente: si potrà scrivere al- $10^t=\text{mul}.\,p+r_t$ con $r_t<p$, quindi $10^t+1=\text{mul}.\,p+(r_t+1)$ $^t-1=\text{mul}.\,p+(r_t-1)$. Segue adunque che almeno od 1 o r_t-1 sarà multiplo di p, e poichè non può esserlo 1, che è minore di p, lo sarà r_t+1, ed avendosi $r_t<p$
e $r_t+1=p$, quindi $r_t=p-1$.

Viceversa nella conversione di $\frac{1}{p}$ in decimali, dopo aver
ato t cifre del periodo, si giunga al resto $r_t=p-1$. In-
ndo con q il quoziente (considerato intero) ottenuto, si
à scrivere $\frac{10^t}{p}=q+(p-1).\frac{1}{p}$, dalla qual relazione risulta
se r_h è uno qualsiasi dei resti precedenti r_t, il resto
si avrà dopo aver ricavato $t+h$ cifre del quoziente sarà
$1)\,r_h$. Ora, per ipotesi, essendo r_h diverso da $p-1$ ed
re diverso da 1 (altrimenti il periodo sarebbe senz'altro
ato dalle prime h cifre del quoziente), r_h non potrà
e che i valori $2, 3, \ldots\, p-2$, e corrispondentemente r_{t+h}
lori $p-2$, $p-3$, ... 2, mentre il $2t^{esimo}$ resto sarà 1. La
one avrà quindi un periodo di $2t$ cifre.

Corollario I. Dal teorema precedente segue che qua-
ue sia r_h si ha sempre $r_h+r_{h+t}=p$, e da questa rela-
facendo $h=1, 2, \ldots\, t$, poi sommando:

$$(r_1 + r_2 + \ldots\ldots + r_t) + (r_{t+1} + r_{t+2} + \ldots\ldots + r_{2t}) = pt;$$

onde: *Se il denominatore d'una frazione semplice è un numero primo ed il numero delle cifre del periodo è pari (periodo dualistico), la somma di due resti separati l'uno dall'altro da tanti resti quant'è la metà meno una delle cifre del quoziente, uguaglia il denominatore della frazione e aggiungendo la somma della prima metà dei resti alla somma dell'altra metà, si ha per risultato il prodotto del denominatore della frazione pel numero delle cifre del semiperiodo.*

Corollario II. La relazione $\frac{10^t}{p} = q + (p-1)\frac{1}{p}$, dalla quale deducesi l'altra: $\frac{10^{2t}-1}{p} = q \cdot 10^t + \left[(10^t - 1) - q\right]$, mostra che dopo avere ottenuto le t prime cifre $q_1 q_2 \ldots q_t$ del quoziente, con che il resto è $p-1$, per avere le rimanenti cifre del periodo $q_{t+1}, q_{t+2}, \ldots q_{2t}$, basta formare il complemento a 9 di quelle ricavate innanzi, ossia *la somma delle cifre del periodo che occupano lo stesso rango nel rispettivo semiperiodo è costante ed uguale a* 9.

6. La proposizione precedente ha un valore pratico notabile in quanto consente in un caso frequente di completare rapidamente il periodo di una frazione assegnata. Così ad es: per la frazione $\frac{1}{137}$, intrapresa la divisione dell'unità e zeri per 137, si giunga, dopo avere ottenuto il quoziente 0,0072, ad un resto $136 = p - 1$: si dovrà concludere che il semiperiodo è già ottenuto, e per completare il periodo basterà formare i complementi a 9 delle singole cifre del semiperiodo incominciando dalla sinistra, si dovrà quindi avere $\frac{1}{137} = 0, [00729927]$.

7. Per trovare tutte le frazioni $\frac{1}{p}$ che ridotte in decimali periodiche originano un periodo *dualistico*, si può osser-

are che chiamando $2t$ il numero delle cifre del periodo, p dovrà ssere un divisore di $10^{2t} - 1$, ed avendosi $10^{2t} = (10^t + 1)(10^t - 1)$ i divisori di $10^t - 1$ dando luogo a periodi di t cifre, p on potrà essere che un divisore di $10^t + 1$. Per questa cerca converrà dunque trovare tutti i divisori di 101, 01, 10001, 100001, ... Detto poi d uno di questi di- isori e posto $p = \frac{10^t + 1}{d}$, potendosi allora scrivere:

$$\frac{1}{p} = \frac{d.(10^t - 1)}{10^{2t} - 1} = \frac{(d-1).10^t + \left[(10^t - 1) - (d-1)\right]}{10^{2t} - 1},$$

vede che le prime t cifre del numero $d - 1$ saranno le rime t cifre del periodo. Così ad es: avendosi $10^4 + 1 =$. 137 e 73 e 137 non essendo divisori di $10^3 + 1$, $10^2 + 1$ e $^1 + 1$ ed essendo gli unici divisori di $10^4 + 1$ perchè primi, onsegue che le due sole frazioni a periodo dualistico di 8 fre saranno $\frac{1}{73}$ e $\frac{1}{137}$ e il semiperiodo per la prima sarà 36 e per la seconda 0072, talchè si avrà immediatamente (6):

$\frac{1}{3} = 0, [01369863]$ e $\frac{1}{137} = 0, [00729927]$.

8. Teorema. *Se alla frazione* $\frac{1}{\mathrm{p}}$ *corrisponde, qualun- ue sia* p, *un periodo di* s *cifre ad ogni altra frazione ura irreducibile di ugual denominatore corrisponderà un eriodo dello stesso numero di cifre.*

Infatti poichè ad $\frac{1}{p}$ corrisponde un periodo di s cifre si vrà: $10^s - 1 =$ mul. p e indicando con s' il numero delle fre del periodo corrispondente ad $\frac{m}{p}$ dovrà aversi: $\frac{m}{p}$ $\frac{n}{10^{s'} - 1}$. Ora s' non può essere minore di s, perchè es- endo $\frac{m}{p}$ una frazione irreducibile, l'eguaglianza precedente mostra che $10^{s'}-1$ deve essere multiplo di p, onde non sarebbe più s il minor numero per cui 10^s-1 è multiplo di p. Così s' non può essere maggiore di s perchè posto $10^s-1=ph$ risulterebbe in ogni caso $\frac{mh}{ph}=\frac{mh}{10^s-1}$ da cui deducesi che il periodo non ha più di s cifre.

9. Teorema. *Se alla frazione* $\frac{1}{p}$, *in cui* p *è un numero primo, diverso da* 2 *e* 5, *corrisponde un periodo di* p − 1 *cifre, alla frazione pura* $\frac{n}{p}$ *corrisponderà un periodo formato dalle stesse cifre.*

Intanto pel teorema prec. alla frazione $\frac{n}{p}$ corrisponde un periodo di $p-1$ cifre come alla data $\frac{1}{p}$. Indicando con $[q_1\, q_2 \cdots q_{k-1}\, q_k\, q_{k+1} \cdots q_{p-1}]$ questo periodo e con r_1, r_2, ... r_{p-1}, r_k, r_{k+1}, ... r_{p-1} i resti successivi della divisione per p di 1.10, $r_1.10$, ... $r_{p-2}.10$ questi resti primieramente dovranno essere tutti disuguali. Ed invero quando fosse $r_h=r_k$ con $h<k<p$, avendosi $10^h=\text{mul}.p+r_h$ e $10^k=\text{mul}.\ p+r_k$, sottraendo si ricaverebbe $10^h(10^{k-h}-1)=\text{mul}.p$ e poichè p è primo con 10^h dovrebb' essere $10^{k-h}-1$ divisibile per p con $k-h<p-1$, e ad $\frac{1}{p}$ corrisponderebbe, contrariamente all'ipotesi, un periodo avente un numero di cifre $<p-1$. Segue da ciò che uno di questi resti, ad es. r_k, sarà necessariamente uguale ad n. Il periodo della frazione $\frac{n}{p}$ dovrà allora essere $[q_{k+1}\, q_{k+2} \cdots q_{p-1}\, q_1\, q_2 \cdots q_k]$.

Osservazione. Disponendo tutte le $p-1$ cifre del periodo di $\frac{1}{p}$, in un dato senso, secondo i punti di divisione in $p-1$ parti uguali d'una circonferenza, e formando quindi tutti i gruppi di $p-1$ cifre che possono ottenersi scrivendo le cifre disposte in giro lungo la circonferenza nel senso considerato, cominciando ciascuna volta da una cifra differente, è chiaro che si avranno tutti i periodi delle frazioni pure di denominatore p. Così avendosi $\frac{1}{7} = 0, [142857]$ i periodi di $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ sono a modo d'esempio

$$[2857|14],\ [42857|1],\ [57|1428],\ [7|14285],\ [857|142].$$

Questi periodi si diranno ottenuti per permutazioni circolari da quello della frazione primitiva.

10. Se una frazione pura $\frac{m}{p}$ ha per periodo $[q_1\, q_2 \ldots\, q_{k-1}\, q_k\, q_{k+1} \ldots q_s]$ e si ha $m' = m.\, 10^k + tp$, dove t indica un numero intero qualsiasi, segue $\frac{m'}{p} = t + \frac{m}{p}\, 10^k$, ossia il periodo della frazione $\frac{m'}{p}$ sarà: $[q_{k+1} \ldots q_s\, q_1\, q_2 \ldots q_k]$, formato cioè con quelle stesse cifre che compongono il periodo della frazione primitiva. Ad es. il periodo della frazione spuria $\frac{726}{13}$ è composto delle cifre stesse che formano quello della frazione pura $\frac{7}{13}$ avendosi $\frac{726}{13} = 2 + \frac{7}{13} . 10^2$, e poichè $\frac{7}{13} = 0, [538461]$, sarà $\frac{726}{13} = 55, [8461|53]$.

11. Nel caso in cui convertendo $\frac{1}{p}$ in decimali, la frazione periodica risultante abbia il suo periodo di un numero s di cifre minore di $p-1$, sarà (3) s divisore di $p-1$. Pongasi $p-1 = sh$. È facile vedere che in questo caso si ottengono h gruppi di s frazioni i cui periodi differiscono soltanto per permutazioni circolari delle cifre. Ed invero chiamando $1, r_2, r_3 \ldots r_s$ i resti della divisione di $1, 10, 10^2, \ldots 10^{s-1}$ per p, è chiaro che le s frazioni $\frac{r_2}{p}, \frac{r_3}{p}, \ldots \frac{r_s}{p}$ avranno i loro periodi formati da quelle stesse cifre che compongono

il periodo di $\frac{1}{p}$, salvo una permutazione circolare delle medesime. Per ottenere poi un altro gruppo di s frazioni col periodo diverso da quello delle precedenti, basterà scegliere un numero m diverso da $1, r_2, r_3 \dots r_s$ e $< p$ e procedere alla conversione della $\frac{m}{p}$ in decimali, notando i resti m, $r'_2, r'_3, \dots r'_s$ ottenuti nella ricerca del periodo. Le frazioni $\frac{r'_2}{p}, \frac{r'_3}{p}, \dots \frac{r'_s}{p}$ avranno il loro periodo formato con quelle stesse cifre che formano il periodo della $\frac{m}{p}$. Per i gruppi successivi si procederà poi analogamente.

Così ad es. avendosi $\frac{1}{13} = 0, [076923]$, le frazioni $\frac{1}{13}, \frac{2}{13}, \dots \frac{12}{13}$ potranno distribuirsi nei due gruppi seguenti:

$$\frac{1}{13} = 0, [076923]\,;\ \frac{10}{13} = 0, [76923|0]\,;\ \frac{9}{13} = 0, [6923|07]\,;\ \frac{12}{13} = 0, [923|076];$$

$$\frac{3}{13} = 0, [23|0769]\,;\ \frac{4}{13} = 0, [3|07692]$$

$$\frac{2}{13} = 0, [153846]\,;\ \frac{7}{13} = 0, [53846|1];\ \frac{5}{13} = 0, [3846|15]\,;\ \frac{11}{13} = 0, [846|153]\,;$$

$$\frac{6}{13} = 0, [46|1538],\ \frac{8}{13} = 0, [6|15384].$$

12. Teorema. — *Se il denominatore* p *d'una frazione semplice* $\frac{1}{\mathrm{p}}$ *è il prodotto di due numeri primi* p_1, p_2 *e i numeri delle cifre dei periodi delle tre frazioni* $\frac{1}{\mathrm{p}}, \frac{1}{\mathrm{p}_1}, \frac{1}{\mathrm{p}_2}$ *sono rispettivamente* s, s_1, s_2 *e* p_1 *è diverso da* p_2, s *è il minimo comune multiplo fra* s_1 *ed* s_2.

Avendosi per ipotesi $\frac{1}{p_1} = \frac{m_1}{10^{s_1} - 1}$, $\frac{1}{p_2} = \frac{m_2}{10^{s_2} - 1}$ segue che

$10^{s_1}-1$ sarà multiplo di p_1 e $10^{s_2}-1$ multiplo di p_2. Ora essendo $10^{s_1}-1$ la minor quantità della forma 10^h-1 divisibile per p_1 ogni altra quantità della stessa forma divisibile per p_1 dovrà evidentemente avere per esponente di 10 un numero multiplo di s_1, e analogamente ogni quantità della forma considerata multipla di p_2 dovrà avere l'esponente del 10 multiplo di s_2. Trovando il minimo comune multiplo s di s_1 ed s_2, si avrà che 10^s-1 è la minor quantità divisibile ad un tempo per i numeri primi p_1 e p_2 e per il loro prodotto p e per conseguenza il periodo della frazione $\frac{1}{p}$ avrà s cifre.

Così ad es. essendo $\frac{1}{13}=0,\,[076923]$ e $\frac{1}{73}=0\,,\,[01369863]$, ovvero $\frac{1}{13}=\frac{76923}{10^6-1}$ e $\frac{1}{73}=\frac{1369863}{10^8-1}$ ed essendo inoltre 24 il m. c. m. fra 6 ed 8, $\frac{1}{949}=\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{73}$ avrà il suo periodo di 24 cifre; e difatti si ha:

$$\frac{1}{949}=0,\,[001\cdot053\cdot740\cdot779\cdot768\cdot177\cdot028\cdot451].$$

Corollario I. — Poichè i valori massimi di s_1 ed s_2 sono rispettivamente p_1-1 e p_2-1, s non potrà mai superare $\frac{(p_1-1)\,(p_2-1)}{2}$.

Corollario II. — Quando si abbia $s_1=s_2$, sarà anche $s=s_1=s_2$ e per trovare il periodo di $\frac{1}{p}$, basterà o dividere per s_2 quello di $\frac{1}{p_1}$ o per s_1 quello di $\frac{1}{p_2}$ e le divisioni non potranno non compiersi esattamente.

Corollario III. — Quando il denominatore è il prodotto di più di due numeri primi differenti p_1, p_2, ... p_n e siano rispettivamente s_1, s_2, ... s_n le cifre che compongono i periodi delle frazioni $\frac{1}{p_1}$, $\frac{1}{p_2}$ . .... $\frac{1}{p_n}$, posto $p=p_1\cdot p_2\cdots p_n$ e detto s il numero delle cifre del periodo di $\frac{1}{p}$, si ha analogamente che s sarà il m. c. m. di $s_1, s_2, \dots s_n$ ed in ogni caso s non potrà superare la quantità

$$\frac{(p_1-1)(p_2-1)\dots\dots(p_n-1)}{2^{n-1}}.$$

13. Se il denominatore della frazione $\frac{1}{p}$ è il quadrato di un numero primo p_1 il ragionamento del n° prec. non è più applicabile, ma può avvenire che la conclusione a cui si è pervenuti seguiti a sussistere. Ciò si verificherà tutte le volte che $\frac{10^{s_1}-1}{p}$ è ancora un multiplo di p_1, s_1 rappresentando al solito il numero delle cifre del periodo di $\frac{1}{p_1}$, come accade ad es. per la frazione $\frac{1}{9}=\frac{1}{3.3}=0,[1]$. In ogni altro caso il periodo avrà $s_1 p_1$ cifre: ed invero osservando che qualunque sia il numero s delle cifre del periodo di $\frac{1}{p}$, dev'essere s multiplo di s_1; poichè il periodo di $\frac{1}{p_1}$ che chiameremo m_1 non è divisibile per p_1 ma dà un resto r, bisognerà assumere un numero formato da p_1 periodi m_1 prima di giungere al resto 0.

Questo ad es: ha luogo per la frazione

$$\frac{1}{121}=\frac{1}{11.11}=0,\ [0082644628099173553719]$$

il cui periodo come vedesi ha $22=2.11$ cifre, mentre il periodo di $\frac{1}{11}$, che è [09], ha 2 cifre.

Quando fosse $p=p_1^3$ e il periodo m_1 di p_1 non divisibile per p_1, il numero delle cifre del periodo di $\frac{1}{p}$ sarebbe analogamente $s_1p_1^2$ e così di seguito.

Segue da ciò e da quanto si è detto al n.º 12, che aven-
losi $p=p^{\alpha}{}_1 p^{\beta}{}_2 p^{\gamma}{}_3 \ldots$, con p_1, p_2, $p_3 \ldots$ numeri primi diversi,
il numero s delle cifre del periodo di $\frac{1}{p}$ non potrà superare
in ogni caso la quantità:

$$_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\ldots p_1^{\alpha-1} p_2^{\beta-1} p_3^{\gamma-1}\ldots = p\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right)\ldots$$

Indicando ora con s_1 il numero delle cifre del periodo
li $\frac{1}{p_1}$ e con s' il numero delle cifre del periodo di $\frac{1}{p_1^{\alpha}}$, ab-
biamo, per quanto si è detto innanzi, che s' è uno dei nu-
neri s_1, $s_1 p_1$, $s_1 p_1^2, \ldots\ldots s_1 p_1^{\alpha-1}$ e poichè p_1-1 è un mul-
iplo di s_1 (3), avremo anche che $(p_1-1)\,p_1^{\alpha-1}$ sarà un mul-
iplo di s'. Analogamente rappresentando con s'' il numero
lelle cifre del periodo di $\frac{1}{p_2^{\beta}}$, si troverà che $(p_2-1)\,p_2^{\beta-1}$
lev'essere multiplo di s'' e così di seguito.

Ma poichè p_1^{α}, p_2^{β}, $p_3^{\gamma}, \ldots$ sono numeri primi fra loro,
potendosi provare analogamente a quanto fu fatto al n° 11
che s uguaglia il minimo comune multiplo di s', s'', $s''', \ldots$,
avremo infine che la quantità

$$p\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right)\ldots\ldots,$$

che s'indicherà con $\varphi(p)$ e la quale, com'è noto, rappresenta
quanti siano i numeri della serie $1, 2, 3, \ldots p$ primi con p,
sarà un multiplo di s.

Siamo così condotti alla conclusione che $10^{\varphi(p)}-1$ è in
ogni caso divisibile per p, il che corrisponde alla *genera-
lizzazione del teorema di* FERMAT.

14. A completare l'argomento che ci occupa sarebbe
utile la soluzione del problema: *Trovare le frazioni ordina-
rie semplici con denominatori primi che hanno* 1, 2, 3, 4, 5, 6,...
cifre nel loro periodo, almeno fino ad un certo limite. La

soluzione di un tale problema si riduce (3) alla ricerca dei divisori primi dei numeri 99, 999, 9999, ...

Consimile ricerca diviene in breve di estrema complicazione, però havvi una osservazione che può servire a semplificarla. Vogliansi ad es. determinare i divisori primi di $10^7 - 1 = 9999999$ o di 1111111. Detto d uno di questi divisori, poichè, pel teorema di FERMAT, si ha che $10^{d-1} - 1$ è divisibile per d e d'altra parte per ipotesi anche $10^7 - 1$ è pure divisibile per d, così sarà $d - 1 = \text{mul. } 7$. Nella ricerca dei divisori di 1111111 basta quindi limitarsi a quelli che diminuiti di una unità danno un numero multiplo di 7. I divisori da provare nella serie dei numeri primi saranno quindi: 29, 43, 71, 113, 127, 197, 211, 239, ...

Daremo quì una tabella della scomposizione in fattori primi dei primi 10 numeri della forma $10^t - 1$, ossia:

$$9 = 3^2\,; \quad 99 = 3^2.11\,; \quad 999 = 3^3.37\,; \quad 9999 = 3^2.11.101\,;$$

$$99999 = 3^2.41.271\,; \quad 999999 = 3^3.7.11.13.37\,;$$

$$9999999 = 3^2.239.4649\,; \quad 99999999 = 3^2.11.73.101.137\,;$$

$$999999999 = 3^4.37.333667\,; \quad 9999999999 = 3^2.11.41.271.9091.$$

Da questa tabella si deduce che le frazioni a denominatore primo di periodi ad una cifra sono: $\frac{1}{3}$, a due cifre $\frac{1}{11}$, a tre cifre $\frac{1}{37}$, a quattro cifre $\frac{1}{101}$, a cinque cifre $\frac{1}{41}$ e $\frac{1}{271}$, a sei cifre $\frac{1}{7}$ e $\frac{1}{13}$, a sette cifre $\frac{1}{239}$ e $\frac{1}{4649}$, ad otto cifre $\frac{1}{73}$ e $\frac{1}{137}$, a nove cifre $\frac{1}{333667}$, a dieci cifre $\frac{1}{41}$ e $\frac{1}{9091}$.

A LUGLI.

DIMOSTRAZIONE
DEL TEOREMA DI TOLEMEO
CON METODO INTUITIVO

Tenuto fermo il principio su cui ho fondato la dimostra-
ie di *alcuni teoremi sull'equivalenza stabiliti col me-*
) intuitivo (Vedi fascicolo I, Anno II di questo periodico)
iiò dimostrare facilmente collo stesso metodo il teorema
Tolemeo, cioè: *Se un quadrilatero è inscritto in un*
:hio, la somma dei rettangoli contenuti dai lati opposti
quivalente al rettangolo delle diagonali.

Sia DEFB (Fig. a pag. 176) il quadrilatero inscritto dato;
vuol provare che

$$DB . EF + DE . BF = DF . EB.$$

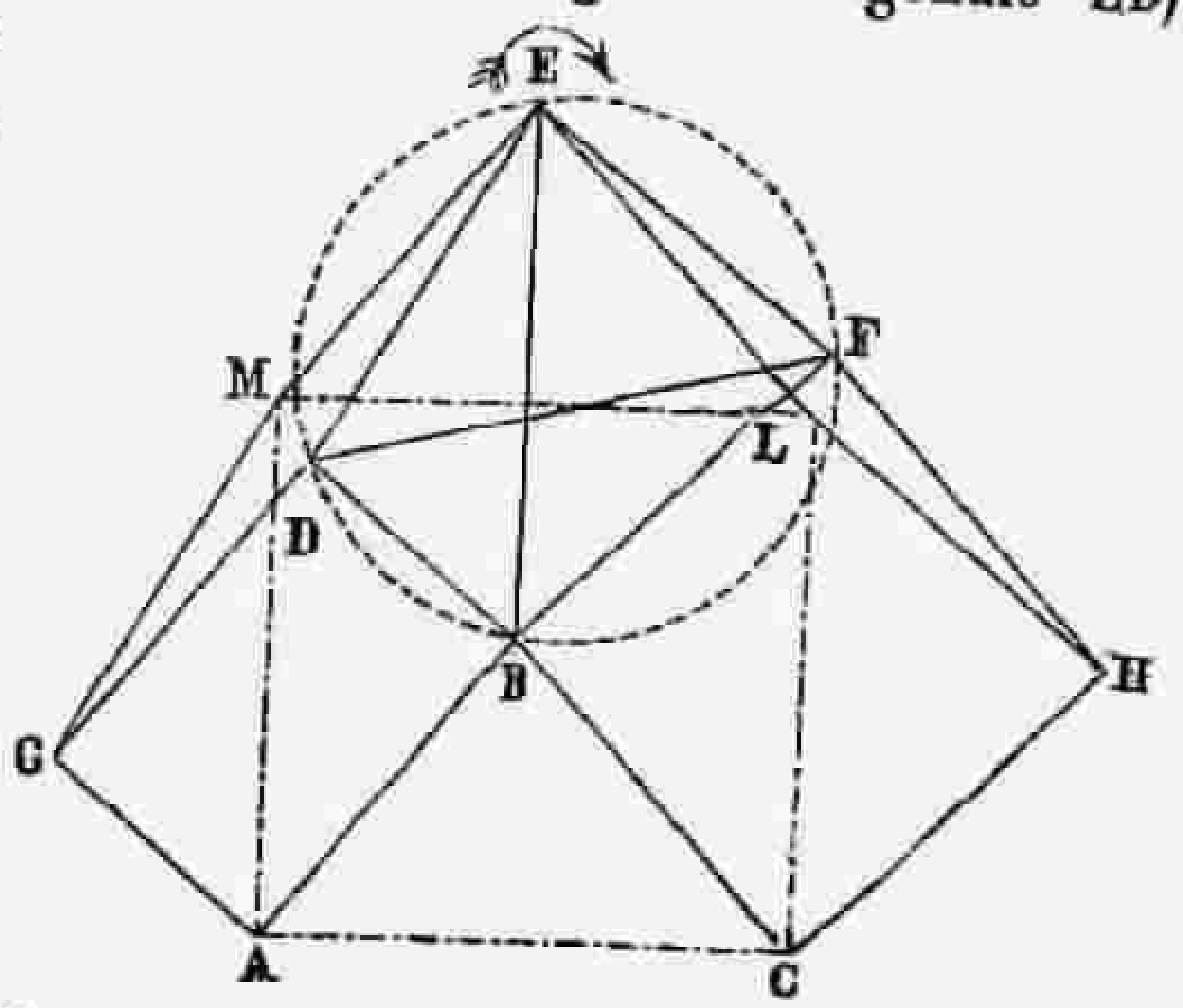
costruiscano sopra due lati adiacenti qualunque, per es.
ra DB e BF i rettangoli DBAG e BCHF, scritti nel primo
nbro dell'eguaglianza precedente; risulterà per ciò

$$BA = EF ; \ BC = DE$$

'angolo ABC = DEF.

Si riunisca poi A con C, e si compia il parallelogrammo
ЗM ; si riconosce facilmente che il triangolo ABC, è uguale
triangolo FED; inoltre la diagonale EB risulta perpendi-
ire alla direzione AC, poichè quando si prolungasse fino
incontrare in N il lato AC del triangolo BAC, gli angoli
:, NBA risulterebbero complementari, ma angDBE = DFE
AC, onde sarebbero tali anche gli angoli NBA, BAN.
fatto, si assuma per *quadro* la figura ACHFEMGA
quale essendo *preparato* per il primo membro dell'egua-
nza, avrà coperte le porzioni seguenti: il quadrilatero

EDBF (che supporremo tagliato lungo la diagonale EB); il triangolo ABC e il parallelogrammo EMGD.



Ecco ora le nuove posizioni che debbono assumere nel quadro queste figure, affinchè rimanga scoperta l'area scritta nel 2° membro dell'eguaglianza.

1° Si trasporti il triangolo EBD nella posizione MAG facendo muovere il lato DB parallelamente a sè stesso e scorrendo col vertice D lungo la DG.

2° Dopo avere rovesciato il piano del parallelogrammo MEDG, si faccia ruotare nella direzione della freccia intorno al vertice E, finchè il lato EM coincida con EF.

3° Si trasporti il triangolo EBF in LCH, facendo scorrere F lungo la FH, e la BF parallelamente a sè stessa.

4° Si trasporti il triangolo ABC in MEL, facendo scorrere il lato AC parallelamente a sè stesso mentre gli estremi A e C scorrono rispettivamente sopra AM e CL.

Dopo ciò l'area che rimane scoperta è il rettangolo MLCA, che è appunto quello costruito sulle due diagonali del dato quadrilatero: il teorema è adunque dimostrato.

Corollario I. — Se il quadrilatero fosse un rettangolo, il teorema di Tolemeo equivarrebbe a quello di Pitagora.

La figura 3, tav. 1ª, annessa al fasc. I, (della quale si considera solamente la parte ABQDNA) contiene la dimostrazione del teorema di Pitagora interpretata nel modo stesso di quella del teorema di Tolemeo. La sola differenza stà in ciò che il parallelogrammo, che comparirà nella dimostrazione del teorema di Tolemeo, si riduce, pel teorema di Pitagora, ad una linea retta.

Corollario II. — Il teorema di Tolemeo ci mostra che:

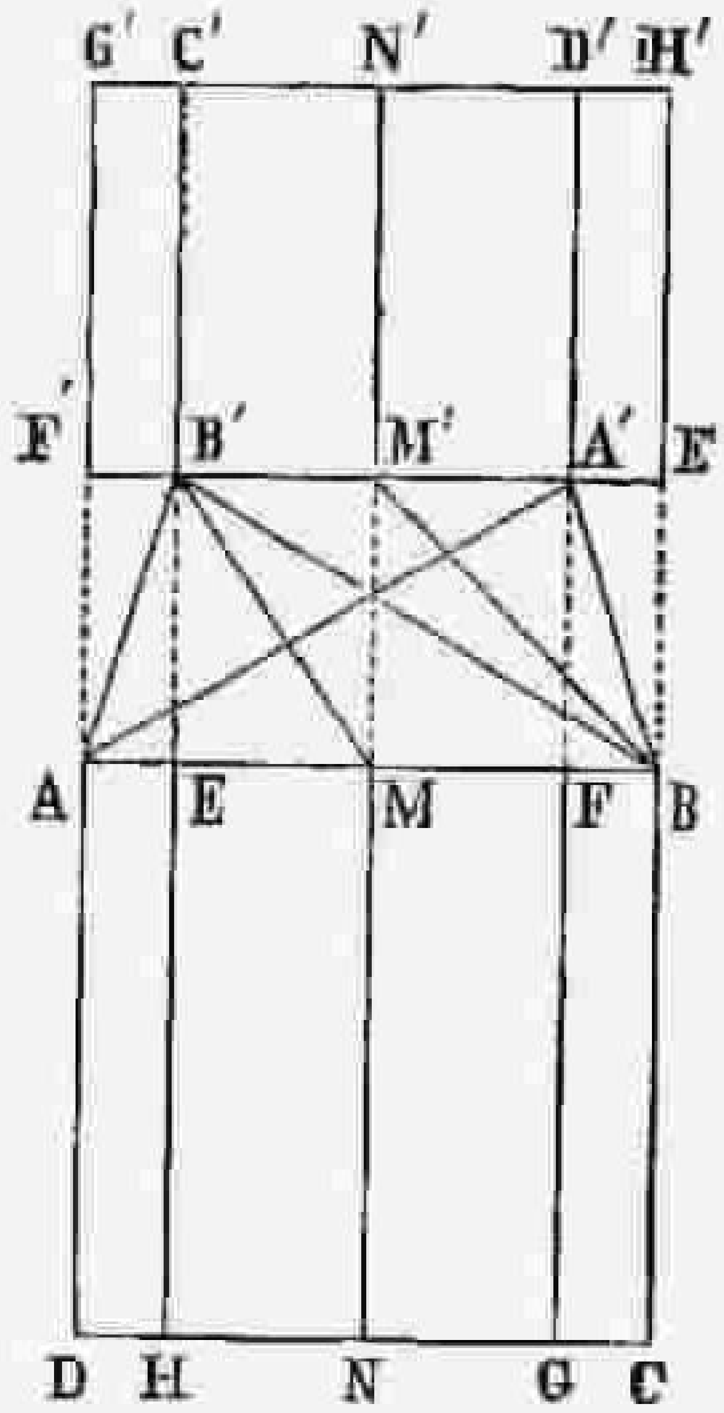
In un trapezio isoscele, il quadrato della diagonale è *uivalente al rettangolo delle due basi, aumentato del qua-* *rato costruito sopra uno dei lati eguali.* Ossia (Fig. seg.):

$$1) \qquad BB'^2 = B'A^2 + AB \cdot A'B'$$

anche

$$2) \qquad B'B^2 = BA'^2 + A'B' \cdot AB.$$

ostruendo sulle due basi AB e A'B' rispettivamente i qua- rati ABCD A'B'C'D' e prolungandone ufficientemente i lati, otterremo i ret- ngoli eguali EFGH, E'F'G'H'.



Dalla semplice ispezione della fi- ura si riconosce che questi rettangoli no quelli scritti nei secondi membri elle relazioni 1) e 2). E poichè il pri- o è equivalente al quadrato ABCD *iminuito* dei due rettangoli eguali EHD e FBCG, e il secondo è equi- lente al quadrato A'B'C'D' *aumen- to* dei due rettangoli eguali A'E'H'D', B'C'G', potremo dire che per i trian- li BB'A e B'BA', hanno luogo rispet- vamente le relazioni

$$3) \qquad BB'^2 = AB'^2 + AB^2 - 2AB \cdot AE$$

$$4) \qquad B'B^2 = A'B^2 + A'B'^2 + 2A'B' \cdot A'E'.$$

servando poi che AE e A'E' sono le proiezioni di AB' e B fatte rispettivamente su AB e A'B', le relazioni prece- nti dimostrano i noti teoremi:

Il quadrato costruito sopra un lato di un triangolo, posto ad un angolo acuto, è equivalente alla somma dei adrati costruiti sopra gli altri due lati, diminuita di e volte il rettangolo che ha per lati uno di questi ul- ni e le proiezioni dell' altro su di esso.

Il quadrato costruito sopra un lato di un triangolo, opposto ad un angolo ottuso, è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sopra gli altri due lati, aumentata di due volte il rettangolo che ha per lati uno di questi ultimi, e la proiezione dell' altro su di esso.

Corollario III. — Il teorema di Tolemeo, applicato al trapezio isoscele, può anche ennunciarsi nel modo seguente:

La differenza fra il quadrato della diagonale e il quadrato di uno dei lati eguali, è equivalente al rettangolo delle due basi.

Ma il rettangolo delle due basi EFGH, (E'F'G'H'), può riguardarsi anche come equivalente al doppio rettangolo EMNH, costruito sopra AB, (A'B') e sulla proiezione EM, (E'M') della retta B'M, (BM') che passa pel punto di mezzo M (M') della base.

E allora il teorema di sopra può enunciarsi, relativamente al triangolo ABB' (A'B'B), nel modo seguente: *La differenza dei quadrati di due lati di un triangolo qualunque, è equivalente al doppio rettangolo costruito sul terzo lato e sulla proiezione, su questo lato, della mediana ad esso relativa.*

Corollario IV. — Dalle relazioni 3) e 4) e dalla figura a pag. 177, si ricava che la somma dei quadrati dei quattro lati di un trapezio isoscele è equivalente al doppio quadrato della diagonale aumentato del doppio della differenza fra i due rettangoli AEHD e A'E'H'D'. Ma poichè questa doppia differenza è ugnale al quadruplo del quadrato costruito sopra AE, ossia sopra la semidifferenza delle due basi del trapezio, potremo dire (ricordando che la semidifferenza delle due basi di un trapezio è uguale alla retta che unisce i punti di mezzo delle diagonali) che: *La somma dei quadrati dei quattro lati di un trapezio isoscele è equivalente alla somma dei quadrati delle diagonali aumentata di 4 volte il quadrato della retta che unisce i punti di mezzo delle diagonali.*

Viareggio, 5 Aprile 1887.

ANGIOLO ANDREINI.

SU ALCUNI TEOREMI
RELATIVI ALLA DIVISIONE ALGEBRICA

La formà del resto della divisione per $x-a$ d'un polinomio P, che, come tutti quelli di cui si parlerà, dovrà intendersi razionale, intero e ordinato per le potenze decrescenti della x, deducesi come corollario dai seguenti teoremi sulla divisione algebrica.

Riteniamo come dimostrato che:

1.° Se P e D sono due polinomi, si possono trovare altri due polinomi Q ed R ordinati rapporto ad x come i precedenti e tali che sia:

$$P = DQ + R. \tag{1}$$

2.° Se si richiede che R sia di grado inferiore a D è impossibile che si abbia

$$P = DQ' + R'$$

con Q' ed R' differenti da Q ed R. (*)

(*) Non in tutti i trattati è data la dimostrazione di questo teorema che trovasi nell'Algebra del *Bertrand* (trad. del Prof. *Betti*) a pag. 163, n° 142. — È degno però d'esser notato che l'Autore non dimostra e neppure enuncia il teorema che « due polinomi di grado *differente* non possono essere *identici* », mentre sembra che da questo il precedente tragga la sua validità.

Il teorema ora enunciato si riduce facilmente all'altro: « un polinomio

$$a)\qquad f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

» non può annullarsi per *ogni* valore di x senza che sia:

$$a_0 = 0\,,\quad a_1 = 0\,,\ \dots\dots\ a_n = 0 \text{ »}$$

Eccone qui in succinto una dimostrazione. — Intanto l'equazione $f(x)=0$ dovendo avverarsi per $x=0$, ne risulta

$$a_n = 0$$

e

$$b)\qquad x(a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1}) = 0.$$

Questa, che è verificata all'evidenza da $x=0$, sarà soddisfatta qualunque sia x se, per ogni altro valore di x *differente da zero*, si avrà

$$c)\qquad a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1} = 0.$$

Indichino x_1 ed $x_1 + y$ ($y \gtreqless 0$) due di *questi* valori. Essendo

Ne viene di conseguenza che, dati P e D, *in qualunque modo* si riesca a stabilire la relazione (1) ed a riconoscere che R è di grado inferiore a D, si potrà sempre riguardare Q come quoziente ed R come il resto della divisione di P per D.

Ciò premesso, supponiamo che sia:

$$\text{(2)} \qquad P = P_1 P_2 P_3 \ldots\ldots P_m + a_n$$

ove le P_r sono polinomi ed a_n è una quantità indipendente da x. Diviso ciascun polinomio P_r per D si abbia:

$$P_1 = DQ_1 + R_1\,,\ P_2 = DQ_2 + R_2\,, \ldots\ldots P_m = DQ_m + R_m.$$

Sostituendo nella (2) avremo:

$$P = (DQ_1 + R_1)\,(DQ_2 + R_2) \ldots\ldots (DQ_m + R_m) + a_n =$$
$$= DK + R_1 R_2 \ldots\ldots R_m + a_n$$

e se R è il resto (di grado inferiore a D) della divisione di $R_1 R_2 \ldots\ldots R_m$ per D, vale a dire se:

$$R_1 R_2 \ldots R_m = Dq + R$$

$$a_0(x_1 + y)^{n-1} + a_1(x_1 + y)^{n-2} + \ldots + a_{n-2}(x_1 + y) + a_{n-1} =$$
$$= a_0 y^{n-1} + A_1 y^{n-2} + \ldots + A_{n-3} y^2 + A_{n-2} y + (a_0 x_1^{n-1} + a_1 x_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1})$$

e per ipotesi

$$a_0 x_1^{n-1} + a_1 x_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0\,,$$

si vede che la *c*) non può esser vera per $x \gtreqless 0$ se per $y \gtreqless 0$ non si abbia:

$$y(a_0 y^{n-2} + A_1 y^{n-3} + \ldots + A_{n-2}) = 0$$

ossia

$$d) \qquad a_0 y^{n-2} + A_1 y^{n-3} + \ldots\ldots + A_{n-2} = 0.$$

In modo affatto simile si prova che la *d*) sarà soddisfatta quando per $z \gtreqless 0$ sia:

$$e) \qquad a_0 z^{n-3} + B_1 z^{n-4} + \ldots\ldots + B_{n-3} = 0\,;$$

e così di seguito, finchè si giunge alla conclusione che dovrà essere,

$$a_0 = 0.$$

In conseguenza la *c*) prenderà la forma:

$$c') \qquad a_1 x^{n-2} + a_2 x^{n-3} + \ldots + a_{n-1} = 0$$

e con analoghe dimostrazioni si proverà successivamente che deve aversi

$$a_1 = 0\,,\ a_2 = 0\,, \ldots\ldots a_n = 0.$$

avremo anche

$$P = D(K + q) + R + a_n = DQ + (R + a_n)$$

e sarà dunque $R + a_n$ il resto e $Q = K + q$ il quoziente della divisione di P per D. Così, come nell'Aritmetica, « il resto » della divisione per D d'un prodotto di polinomi è uguale » al resto della divisione per D del prodotto dei resti, ecc. »

Sia ora:

$$m = 2, \quad P_1 = a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}, \quad P_2 = x$$

donde

$$P = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$
$$= P_1 x + a_n .$$

Se si prende

$$D = x - a$$

si trova

$$P_1 = (x - a) Q_1 + R_1 , \quad P_2 = (x - a) + a$$

ed essendo R_1 ed a indipendenti dalla x sarà

$$q = 0 , \quad R = R_1 a$$

ed

$$R + a_n = R_1 a + a_n .$$

Tale è il resto della divisione per $x - a$ del polinomio $P = P_1 x + a_n$. Ma esso è evidentemente formato col resto precedente R_1 e colla quantità a, appunto come P si compone del polinomio P_1 e della x, e poichè si verifica che per $n = 1$ il polinomio $a_0 x + a_1$ dà per resto $a_0 a + a_1$ si conclude in generale che « il resto della divisione di un polinomio » per $x - a$ è i risultato della sostituzione di a ad x in questo polinomio » ecc.

Non è qui il luogo di svolgere le note conseguenze di questo importante teorema, scopo di queste brevi osservazioni essendo stato soltanto il darne un'altra dimostrazione rigorosa che può sostituire quella censurata nelle pagine stesse di questo Periodico (Anno II, pag. 91).

Elcia Sadun.

UN PROBLEMA DI PROBABILITÀ

Da un'urna contenente i 90 *numeri* 1, 2, 3,...... 90, *se ne estraggono* 3 *a caso. Determinare la probabilità che i numeri estratti diano una somma non superiore a* 90.

Il numero dei casi possibili è quello delle combinazioni di 90 elementi diversi a 3 a 3; cioè

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 117480\,;$$

e il numero dei casi favorevoli è quello dei complessi ottenibili col prendere a 3 a 3 i 90 numeri dati ed in maniera che la somma degli elementi di ciascun complesso non sia maggiore di 90. E poichè il più gran numero che possa far parte di tali complessi è evidentemente l'87, è chiaro che il numero dei casi favorevoli eguaglia quello delle somme inferiori o uguali a 90, ottenibili col prendere 3 termini diversi dalla successione indefinita dei numeri naturali. Invece di applicarci direttamente alla ricerca di quest'ultimo numero, risolveremo ora il problema più generale:

Determinare il numero delle somme non superiori ad s, *ottenibili col prendere* r *termini differenti dalla successione indefinita* 1, 2, 3, ...

Rappresentiamo col simbolo $(r,\ s)$ il numero richiesto, e, immaginando le somme formate in guisa da essere gli addendi in ordine ascendente di grandezza, separiamole in classi nel modo seguente: nella 1ª classe siano comprese tutte le somme che cominciano con 1, nella 2ª classe tutte le somme che cominciano con 2, ... nella μ^a classe tutte le somme che cominciano con μ, ecc. Se dalle somme della $\mu.^a$ classe togliamo il primo termine μ, avremo tutte le somme non superiori ad $s - \mu$ ottenibili col prendere $r - 1$ termini diversi dalla successione

$$\mu + 1\,,\quad \mu - 2\,,\quad \mu + 3\,, \ldots\ldots\,;$$

e se in quest'ultime somme togliamo da ciascun termine μ

ità, avremo tutte le somme non superiori ad $s - \mu - \mu(r-1)$, ia ad $s - \mu r$, ottenibili col prendere $r-1$ termini diversi lla successione 1, 2, 3, ...,; il numero delle quali sarà ppresentato da $(r-1, s-\mu r)$. Tale è quindi il numero lle somme non superiori ad s che formano la μ.ª classe.

Il ragionamento che precede sussiste qualunque sia l'in-ro μ, purchè sia possibile formare con $r-1$ termini della ccessione 1, 2, 3... almeno una somma non superiore ad $-\mu r$; vale a dire purchè si abbia

$$s - \mu r \geqq 1 + 2 + \ldots + (r-1) = \frac{r(r-1)}{2};$$

n essendo possibile formare con $r-1$ termini della suc-ssione 1, 2, 3 .... una somma più piccola di $1+2+\ldots\ldots+(r-1)$. questa considerazione risulta che il più grande valore di μ, oè il numero delle classi, è uguale al più grande intero ntenuto in $\frac{s}{r} - \frac{r-1}{2}$. Indicando questo intero con $\mathrm{I}\left(\frac{s}{r} - \frac{r-1}{2}\right)$, considerando che col mutare in $(r-1, s-\mu r)$ la μ suc-essivamente in 1, 2, 3, ... $\mathrm{I}\left(\frac{s}{r} - \frac{r-1}{2}\right)$, si ottengono i nu-eri delle somme, non superiori ad s, contenute nella , 2ª, 3ª, ... $\mathrm{I}\left(\frac{s}{r} - \frac{r-1}{2}\right)^{a}$ classe rispettivamente, potremo abilire la relazione

$$(r, s) = \sum_{1}^{\mathrm{I}\left(\frac{s}{r} - \frac{r-1}{2}\right)}{}_{\mu} (r-1, s-\mu r) \ldots\ldots (1)$$

Siamo giunti così a scomporre il numero (r, s) in una omma di numeri della forma $(r-1, k)$; applicando la (1) a iascuno di questi il numero (r, s) verrà scomposto in una omma di numeri della forma $(r-2, k)$ ecc., sicchè appli-ando $r-1$ volte la (1) avremo da ultimo scomposto (r, s) in na somma di numeri della forma $(1, k)$, ciascuno dei quali guaglia evidentemente il rispettivo k. Così, dal lato teorico, l problema può ritenersi risolto.

Ed ora veniamo al nostro caso particolare nel quale $r = 3$, $s = 90$. Dalla (1) si ha

$$(3,\ 90) = \sum_{1}^{29}{}_{\mu}\ (2,\ 90 - 3\mu)\,,$$

$$(2,\ 90 - 3\mu) = \sum_{1}^{\mathrm{I}\left(\frac{89 - 3\mu}{2}\right)}{}_{\nu}\ (1,\ 90 - 3\mu - 2\nu);$$

si ha inoltre

$$\sum_{1}^{\mathrm{I}\left(\frac{89-3\mu}{2}\right)}{}_{\nu}\ (1,\ 90 - 3\mu - 2\nu) = \sum_{1}^{\mathrm{I}\left(\frac{89-3\mu}{2}\right)}{}_{\nu}\ (90 - 3\mu - 2\nu)$$

$$= \sum_{1}^{\mathrm{I}\left(\frac{89-3\mu}{2}\right)}{}_{\nu}\ (90 - 3\mu) - 2\sum_{1}^{\mathrm{I}\left(\frac{89-3\mu}{2}\right)}{}_{\nu}\ \nu$$

$$= (90 - 3\mu)\ \mathrm{I}\left(\frac{89-3\mu}{2}\right) - 2\,\frac{\left[\mathrm{I}\left(\frac{89 - 3\mu}{2}\right) + 1\right]\ \mathrm{I}\left(\frac{89 - 3\mu}{2}\right)}{2}$$

$$= \left[(89 - 3\mu - \mathrm{I}\left(\frac{89 - 3\mu}{2}\right)\right]\ \mathrm{I}\left(\frac{89 - 3\mu}{2}\right);$$

quindi

$$(3,\ 90) = \sum_{1}^{29}{}_{\mu}\left[89 - 3\mu - \mathrm{I}\left(\frac{89 - 3\mu}{2}\right)\right]\ \mathrm{I}\left(\frac{89 - 3\mu}{2}\right).$$

Per ridurre ulteriormente questa formola, osserviamo che se a è un intero positivo qualunque si ha sempre

$$a - \mathrm{I}\left(\frac{a}{2}\right) = \mathrm{I}\left(\frac{a + 1}{2}\right).$$

Ed invero se a è della forma $2n$ abbiamo

$$a - \mathrm{I}\left(\frac{a}{2}\right) = 2n - n = n = \mathrm{I}\left(\frac{2n + 1}{2}\right) = \mathrm{I}\left(\frac{a + 1}{2}\right);$$

e se a è della forma $2\eta + 1$

$$a - \mathrm{I}\left(\frac{a}{2}\right) = 2\eta + 1 - \eta = \eta + 1 = \mathrm{I}\left(\frac{2\eta + 2}{2}\right) = \mathrm{I}\left(\frac{a + 1}{2}\right).$$

Inoltre può dimostrarsi facilmente che

$$\mathrm{I}\left(\frac{a}{2}\right)\,\mathrm{I}\left(\frac{a+1}{2}\right) = \mathrm{I}\left(\frac{a^2}{4}\right)$$

distinguendo, come precedentemente il caso di a pari dal caso di a impari; si ha quindi

$$\mathrm{I}\left(\frac{a}{2}\right)\left[a - \mathrm{I}\left(\frac{a}{2}\right)\right] = \mathrm{I}\left(\frac{a^2}{4}\right).$$

Applicando questo risultato generale alla espressione di $(3,\ 90)$ si trova la formola più semplice

$$(3,\ 90) = \sum_{1}^{29}{}_{\mu}\ \mathrm{I}\left(\frac{(89 - 3\mu)^2}{4}\right),$$

che può calcolarsi nel seguente modo.

Alla μ che deve assumere i valori $1,\ 2, \ldots, 29$, si sostituiscano separatamente i numeri pari $2,\ 4, \ldots, 28$, e i numeri impari $1,\ 3, \ldots, 29$; si avrà così

$$(3,\ 90) = \sum_{1}^{14}{}_{\eta}\ \mathrm{I}\left(\frac{[89 - 3(2\eta)]^2}{4}\right) + \sum_{1}^{15}{}_{\eta}\ \mathrm{I}\left(\frac{[89 - 3(2\eta - 1)]^2}{4}\right)$$

$$= \sum_{1}^{14}{}_{\eta}\ \mathrm{I}\left(\frac{89^2}{4} - 3.89\eta + 9\eta^2\right) + \sum_{1}^{15}{}_{\eta}\ \mathrm{I}\left(\frac{92^2}{4} - 3.92\eta + 9\eta^2\right)$$

$$= \sum_{1}^{14}{}_{\eta}\ (1980 - 267\eta + 9\eta^2) + \sum_{1}^{14}{}_{\eta}\ (2116 - 276\eta + 9\eta^2)$$

$$+ 2116 - 276.15 + 9.15^2$$

$$= \sum_{1}^{14}{}_{\eta}\ (4096 - 543\eta + 18\eta^2) + 1$$

$$= \sum_{1}^{14}{}_{\eta}\, 4096 - 543 \sum_{1}^{14}{}_{\eta}\, \eta + 18 \sum_{1}^{14}{}_{\eta}\, \eta^2 + 1 = 18600.$$

Dalla successione indefinita dei numeri naturali, o, ciò che torna lo stesso, dalla successione dei primi 90 numeri naturali, possono dunque prendersi in 18600 modi diversi tre numeri differenti e tali che la loro somma non sia maggiore di 90. La probabilità richiesta è pertanto $\frac{18600}{117480} = \frac{155}{979}$; compresa cioè tra $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{7}$.

Indicando con $[r, s]$ il numero delle somme uguali ad s ottenibili col prendere r numeri diversi dalla successione indefinita dei numeri naturali, mediante considerazioni analoghe a quelle che abbiamo fatto intorno al numero (r, s), possiamo dimostrare che la (1) è vera anche pel numero $[r, s]$; vale a dire che

$$[r, s] = \sum_{1}^{\mathrm{I}\left(\frac{s}{r} - \frac{r-1}{2}\right)}{}_{\mu} [r - 1, \ s - \mu r].$$

Coll'applicazione successiva di questa formola sarà possibile decomporre $[r, s]$ in una somma di termini della forma $[1, k]$, ciascuno dei quali eguaglia evidentemente l'unità. Resta così risoluto direttamente il problema di determinare in quante maniere diverse un dato numero s può essere la somma di r differenti numeri della successione 1, 2, 3 ...... (V. EULERII – *Introductio ad Analisin Infinitorum*. – Cap. 16).

GIUSEPPE NONNI.

IMOSTRAZIONE DEL 1° e 3° DEI TEOREMI ENUNCIATI a PAG. 156. (*)

I punti d'incontro delle altezze di due triangoli omogici aventi i lati corrispondenti perpendicolari fra loro, no equidistanti dall'asse di omologia.

F. SAUVE.

Dimostrazione del Prof. *F. Viaggi*.

Siano ABC, A'B'C' i triangoli, H, H' i punti d'incontro elle loro altezze, A_1, B_1, C_1 le intersezioni dei lati corrisponenti e precisamente $AB.A'B' \equiv C_1$, $BC.B'C' \equiv A_1$, $CA.C'A' \equiv B_1$, uindi $A_1B_1C_1$ l'asse di omologia; sia O il centro d'omologia, ano a, b, c, a', b', c' i piedi delle perpendicolari condotte O sulle rette BC, CA, AB, B'C', C'A', A'B' e O_1, O_2, O_3, $'_1$, O'_2, O'_3 i punti simmetrici di O rispetto alle stesse rette.

Essendo nell'omologia individuata dai due triangoli a, b, c unti limiti della prima figura, essi sono allineati sulla retta mite della prima figura, e $a'b'c'$ è la retta limite della seonda; queste rette sono perciò parallele all'asse d'omologia l equidistanti dalla parallela che divide per metà la dianza tra il centro e l'asse d'omologia: di qui agevolmente deduce che le due terne di punti O_1, O_2, O_3 e O'_1, O'_2, O'_3 ono situate su due rette parallele all'asse di omologia e da sso equidistanti.

Essendo i quadrangoli OCab, OBac inscrittibili e le terne punti A, C, b; A, B, c; a, b, c per diritto, si hanno l'eaglianze d'angoli:

$$2OCA = 2OCb = 2Oab = 2Oac = 2OBc = 2OBA,$$

alle quali si deduce che $2OCA = 2OBA$, ossia che O è sulla rconferenza ABC; analogamente si dimostra che O trovasi ure sulla circonferenza A'B'C'.

Le circonferenze BCO_1, ACO_2, eguali ad ABC, passano er H (**); perciò tenendo calcolo che i quadrangoli OABC, $_1$HBC, O_2HAC sono inscrittibili, e ricordando le proprietà elle rette simmetriche rispetto ad un asse, si stabiliscono seguenti eguaglianze d'angoli:

$$2CHO_1 = 2CBO_1 = 2OBC = 2OAC = 2CAO_2 = 2CHO_2$$

(*) Per abbondanza di materia si rimanda al prossimo fascicolo la dimorazione del secondo dei teoremi alla stessa pagina.

(**) Cfr. *Baltzer*. Piani. § 6, 9 nota.

perciò $2CHO_1 = 2CHO_2$ e quindi H giace sulla retta $O_1O_2O_3$; analogamente H' giace sulla $O'_1O'_2O'_3$. E così resta dimostrato che H, H' sono equidistanti dall'asse di omologia (*).

I cerchi aventi per diametri le tre mediane di un triangolo hanno due a due per assi radicali le tre altezze.

S. Rindi.

Dimostrazione del Sig. *Ignacio Beyens* Capitano del Genio a Cadice (**).

Siano AA', BB', CC' le tre mediane del triangolo ABC; AM, BN, CP le tre altezze. I cerchi che hanno per diametri le mediane AA', BB' passeranno per M, N ed avranno per centri i punti medî O_1, O_2 di AA' e BB' e poichè si vede subito che la retta O_1O_2 è parallela ad AB, l'asse radicale di questi due cerchi, perpendicolare ad O_1O_2, sarà perpendicolare ad AB.

Ora i triangoli simili AMC, BNC danno AC: BC = CM: CN, da cui AC.CN = BC.CM od anche CB'.CN = CA'.CM; il punto C ha dunque la stessa *potenza* rispetto ai cerchi O_1, O_2 onde l'asse radicale passerà per C e coinciderà con l'altezza CP del triangolo ABC. In modo simile si dimostrerebbe che BN è l'asse radicale dei cerchi aventi per diametri AA', CC' ed ed AM quello dei cerchi aventi per diametri BB', CC'.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Cours de mathématiques spéciales, par G. de Longchamps, *professeur de mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, avec un supplément. vols.* 4. *Paris, librairie Ch. Delagrave,* 1885.

Vogliamo segnalare all'attenzione dei professori delle nostre scuole secondarie questo *corso* di matematica (***), quantunque

(*) Il Prof. *Viaggi* ha mandato anche un'altra dimostrazione di questo stesso teorema.

(**) Altre dimostrazioni pervennero dai Sig.ri Prof.ri *F. Viaggi, G. Russo, F. Panizza, G. Riboni.*

(***) Di esso si occupò già con parole di vivo encomio l'*Educational Times.*

ial campo elementare, pei suoi grandi pregi: partico-
ite pel rigore al quale è informato, per la chiarezza
sposizione e per contenere molte delle più recenti ri-
di analisi algebrica e geometrica.

intera opera, divisa in lezioni, consta di tre parti di
notevole e di un supplemento: la 1ª parte riguarda
bra, la 2ª la *geometria analitica a due dimensioni*, la
geometria analitica a tre dimensioni. Il supplemento,
mpleta le nozioni di calcolo infinitesimale che trovansi
parte 1ª, tratta delle serie, degli infinitesimi, contiene
e nozione sull'integrale definito, la determinazione di
quadrature e finalmente tratta brevemente delle diffe-
finite e dell'interpolazione.

autore poi, con grande opportunità, ha voluto con un
segno introdurre distinzione fra equazione ed identità,
ndo i due membri di quest'ultima non col ordinario
d'uguaglianza, ma con tre lineette orizzontali la me-
lle quali più breve e meno appariscente (per non ge-
confusione col segno di congruenza). Di tale distin-
non vi sarà certo alcuno che non riconosca l'impor-
specialmente didattica.

lettore troverà in questi volumi non solo le teoriche
compongonsi gli ordinarii libri di algebra complemen-
geometria analitica, ma potrà rintracciarvi non poche
già disseminate nei più riputati periodici di matema-
ubblicazioni accademiche, ecc., diversi teoremi poco
d ovunque poi un certo sapore d'originalità ed una
a ammirevole.

sì nel vol. 1° (algebra), troviamo, fra le altre, una
deduzione della formola di *Waring* per la somma delle
e p^{esime} delle radici d'una equazione di 2° grado, una
deduzione della serie che caratterizza il numero *e*,
no svolto, nella sezione che tratta dei determinanti,
ema di *Rouchè* e in principio della teoria delle equa-
dimostrazione di *Walecki* del teorema che ogni equa-
algebrica ha una radice, finalmente in questa teoria i
portanti metodi e teoremi che vi si riferiscono, ossia
che portano i nomi di *Eulero*, *Sylvester*, *Bezout*,
y, *Newton*, *Maclaurin*, *Lagrange*, *Rolle*, *Sturm*,
te, *D'Alembert*. Ne va tacciuto che l'autore ha ri-

corso frequentemente in questo volume a rappresentazioni geometriche per illustrare certe funzioni (esponenziale, logaritmica, derivata,....).

Nel 2° e 3° volume dedicato alla geometria analitica del piano e dello spazio vengono sviluppate oltre alle teorie ed ai metodi classici, anche le più moderne teorie geometriche; così nel vol. 2° trattasi dei fasci armonici, della potenza di un punto, degli assi radicali, delle polari, delle proprietà generali delle figure trasformate per omotetia, omografia ed omologia, inoltre relativamente alle coniche sono sviluppati i teoremi più celebri, ossia di *Cartesio*, *Maclaurin*, *Pappo*, *Chasles*, *Pascal*, *Brianchon*, *Newton*, *Carnot*, e vi è studiata la loro trasformazione omografica. Vogliamo poi fare particolare menzione del teorema di *Joachimstal*, svolto in questo volume, di cui si ha una generalizzazione simultaneamente trovata dal *Laguerre* e dal nostro autore.

In due lezioni della geometria del piano troviamo uno studio sommario di alcune curve celebri ossia la cissoide e la strofoide retta ed obliqua, la concoide di retta o concoide di Nicomede, la concoide di cerchio o lumaca di Pascal, l'ovale di Cassini, la lemniscata di Bernoulli, le ovali di Cartesio. Per ciascuna di esse dopo la definizione è ricavata l'equazione, insegnata la costruzione della curva e quella della tangente in un dato punto. Per alcune poi in altra lezione sono studiate diverse proprietà caratteristiche.

Ci piace anche avvertire il lettore che lo studio delle quadriche è condotto non soltanto sull'equazione generale, ma ben anche su quella ridotta, con molta eleganza e secondo le più recenti cognizioni sull'argomento.

Ogni lezione è seguita da numerosi esercizi, molti dei quali originali, molti ricavati dalle collezioni di pubblicazioni matematiche, col nome degli autori, e (si può ben dire) tutti singolarmente importanti.

Termina l'opera la raccolta dei temi di concorso, per le matematiche, alla Scuola Politecnica (dal 1837 al 1884), dei temi d'esami scritti dati alla Scuola Normale Superiore (dal 1870 al 1884), alla Scuola Centrale (dal 1880 al 1884) e dei temi per gli esami di aggregazione delle Scienze matematiche (dal 1859 al 1884).

A. Lugli

Frattini (G.) — Aritmetica pratica ad uso delle Scuole elementari — Roma, Eredi Botta, 1887 — p. IV, 76 — Cent. 75.

Anche questo piccolo libro del Prof. Frattini esce dal campo dell'insegnamento secondario essendo destinato, come dice il titolo, agli alunni delle Scuole elementari. Pur non ostante ne vogliamo parlare perchè ci allieta l'animo vedere come l' attività dei nostri professori delle Scuole secondarie cominci ad estendersi anche alle elementari, portando il contributo di studii superiori all'opera modesta ma difficoltosa e mportante dell'educazione infantile.

Questo lavoro del Prof. Frattini può considerarsi più che ıltro come un libricciuolo contenente la parte complementare legli studi elementari e non è altro che la IV parte di un')peretta le cui tre prime parti son destinate alle classi elementari, dalla 1ª alla 3.ª Esce dalla solita falsariga e deve ıver costato non piccola fatica all'A. Consta di tre capi che comprendono le più fondamentali cognizioni di geometria piana e solida, necessarie all' alunno che aspira alla licenza elementare, uno sviluppo notabile dell' algoritmo delle frazioni e la trattazione dei problemi semplici d' interesse, di partizione e di miscuglio col metodo di riduzione all' unità.

Sotto l'apparenza modesta d'un libro ispirato al metodo *ntuitivo*, l' A., specialmente a piè di pagina, aggiunge spesso uccinte ma buone dimostrazioni e in ciò ha ecceduto forse più del bisogno. Ma notevole più di tutto è l'intimo legame he l'A. ha saputo introdurre fra le concezioni geometriche le operazioni aritmetiche, facendo scaturire una genesi coretta e assai comprensiva di queste.

Ricca ed originale è la raccolta di esercizi proposti nel orso dell'operetta, taluni presentanti anche qualche difficoltà.

Noi più che fiducia nutriamo certezza che il libro di cui parola incontrerà la più favorevole accoglienza.

A. Lugli.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des Mathématiques publié par *Gustav Eneström*. Stockholm, 1887; N. 3.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *J. Bourget*, Recteur de l'Academie de Clermont, *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy*, Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe. 2e série. Onzième année. N. 9, 10. Paris, 1887.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par *H. Vuibert*. 12e Année. N. 1, 2, 3. Paris, M. Nony, 17 Rue des Écoles, 1887.

Iornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo *D.r F. Gomes Teixeira*. Professor na Escola Polytechnica do Porto. Vol. VIII, n. 1. Coimbra, 1887.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome septième, Octobre 1887.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Tomo 1º Palermo, 1887.

Rivista didascalica. Organo della società didascalica italiana. — Anno I, fasc. 5, 6, 7. Roma, 1887.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XIX. N. 13, 14, 15, 16, 17. Firenze, 1887.

AMANZIO (D.) — Trattato di aritmetica teorica. — Napoli, Aniello Eugenio, 1877.

BERTINI (E.) Costruzione delle omografie di uno spazio lineare qualunque. (Rend. Ist. lombardo, 1887). — Sulla scomposizione di certe omografie in omologie (Rend. Acc. delle scienze, Torino 1887).

BIANCHI (L.) — Sui sistemi doppiamente infinti di raggi (Annali di Matematica 1887).

CASTELNUOVO (G.) — Studio sulla omografia di seconda specie (Atti Ist. veneto 1887).

CELI (G.) — *Elementi di Agrimensura* compilati a seconda dei programmi governativi per le scuole pratiche di Agricoltura. Ditta G. B. Paravia e comp. 1887.

FAIFOFER (A.) — *Trattato di aritmetica pratica* ad uso del Ginnasio inferiore e delle Scuole tecniche (1º biennio); 8a edizione rifatta. Venezia, 1887.
—— *Trattato di geometria intuitiva* ad uso delle scuole tecniche e normali; 18a edizione rifatta. — Venezia, 1887.

FRATTINI (G.) — *Aritmetica pratica* ad uso delle scuole elementari del Regno. Parte IV. — Roma, Eredi Botta, 1887.

LORIA (G.) — Il passato e il presente delle principali teorie geometriche. Ermanno Loescher, 1877.

MARCOLONGO (R.) — Sull'analisi indeterminata di 2º grado. (Nota 1a). — Su di un teorema di algebra elementare (Giornale di Matematiche, Napoli, 1887).

PESCI (G.) — Sulle sfere circoscritte ai tetraedri formati da *n* piani. — Sulla deviazione meridionale dei gravi (Livorno 1887).

VIGARIÉ (E.) — Sur les points complémentaires (1887).

VOLTERRA (V.) — Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni (Rend. Acc. Lincei 1887). — Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari. — Parte prima. (Memorie della società italiana delle scienze detta dei XL. — Napoli, 1887).