# SULLA DEFINIZIONE STAUDTIANA DELL'OMOGRAFIA

## tra forme semplici reali

§ 1. Una famosa definizione di G. C. von Staudt [1] — più tardi accolta da vari autori, e ormai riprodotta in ogni corso di Geometria Proiettiva — stabilisce che i termini "projettività", "omografia", o (come anche si disse) "corrispondenza armonica" tra due forme fondamentali di 1ª specie $r$ ed $r'$ siano sinonimi di "trasformazione univoca e reciproca di $r$ in $r'$, che a ciascun gruppo armonico (dell'una o dell'altra forma) coordina un gruppo armonico". Ebbi altra volta occasione di segnalare [2] che c'è del superfluo e del sovrabbondante in ciascuna delle assunzioni, che la corrispondenza debba essere univoca *in ambo i sensi*, e convertire *qualunque* gruppo armonico in un gruppo armonico: cioè qualche cosa che, date le ordinarie premesse della Geometria projettiva, è conseguenza del resto. Qui mi propongo di giustificare codesta asserzione, dimostrando che, una volta concessi i postulati I-XVII della memoria testè citata e un certo principio XVIII' (vedi il seg. § 3) che in ordine ai fini della Geometria Projettiva di 1° e 2° grado può far le veci del postulato di R. Dedekind, la *reciprocità* o *invertibilità* della supposta trasformazione di $r$ in $r'$, e la sua *costanza nel riprodurre i gruppi armonici*, son conseguenze di altre condizioni un po' più generali e men restrittive. Queste sono:

**I** Che la rappresentazione onde si parla *subordini a ciascun elemento di* r *un solo elemento di* r' (sia dunque una $r'fr$ nell'accezion più generica),

**II** e a qualsivoglia coppia di elementi *distinti l'uno dall'altro*, in $r$ una coppia di elementi eziandio *non coincidenti fra loro* in $r'$.

**III** Che esistano in $r$ due elementi diversi fra loro e tali, che *ciascun gruppo armonico, il quale contenga l'uno o l'altro di quelli, si rappresenti per un gruppo armonico.*

---

(1) *Die Geometrie der Lage.* Nürnberg, Fr. Korn, 1847, n. 103.

(2) *I principî della Geometria di Posizione composti in sistema logico deduttivo.* Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino, v. XLVIII₂ (1898), § 10, in nota.

Che ogni trasformazione isomorfa di $r$ in $r'$ (vale a dire soggetta alle condizioni **I** e **II**) la quale non abbia virtù di alterare le relazioni armoniche, debba esser necessariamente conversiva o reciproca, si può anche desumere dall'argomentazione algebrica di G. Darboux (¹) per cui si conferma il teorema fondamentale di Staudt, premessa la continuità della retta, che qui non occorre. Anzi (corollario non segnalato dall'illustre A.) codesto ragionamento prova senz'altro la verità delle nostre asserzioni; perchè se ne deduce eziandio, che le proprietà significate in **I**, **II** e **III** sono per sè sufficienti a definire l'omografia tra forme semplici reali. E invero la dimostrazione di G. Darboux riposa sostanzialmente nel fatto che i gruppi armonici:

$$(x_1,\ x_3,\ x_2,\ \infty) \qquad \text{con} \qquad x_1 + x_3 = 2x_2$$

ed

$$(x_1,\ 1,\ x_3,\ -x_3) \qquad \text{con} \qquad x_1 = x_3^2$$

i quali tutti contengono l'uno o l'altro dei punti $\infty$ e 1, debbono rappresentarsi per gruppi armonici. Ma nondimeno riuscirà forse gradito ai cultori della pura geometria di Posizione il veder confermata la cosa per tutt'altra via, coi più semplici mezzi di cui si fa bello il metodo Staudtiano, e senza mai richiamarsi alla continuità della retta nel senso di R. Dedekind e G. Cantor.

Osservate, che le condizioni **I** e **III** involgerebber senz'altro la **II**, quando per " gruppo armonico di punti " s'intendesse soltanto la figura costituita in due punti diagonali d'un quadrangolo, e nelle tracce della lor congiungente sui lati che passano dal terzo punto diagonale. (²) Ma qui si preferisce allargare il significato di gruppo armonico, sì da comprendervi ancora ogni quaterna di punti, dove i primi tre punti, o gli ultimi tre, coincidano. Sotto il regime di codesta definizione si potrebbe non di meno sostituire alla condizione **II** quest'altra: che " nessun punto di $r'$ rappresenti infiniti punti di $r$ (diversi fra loro) "; giusta il teorema seguente, che non dimostriamo:

" Se una retta $r$ si trasforma univocamente in un'altra $r'$ per modo, che tutti i gruppi armonici, i quali contengono un certo punto di $r$ si rappresentino in gruppi armonici, e che nessun punto di $r'$ rispecchi infiniti punti di $r$ (tutti diversi fra loro), la trasformazione è necessariamente isomorfa ".

In tutto ciò che segue poniamo che $\varphi$ sia rappresentazione d'una retta $r$ sopra un'altra $r'$, soddisfacente alle condizioni **I**, **II**, **III**; e con $x'$ indichiamo l'immagine del punto $x$, qual ch'esso sia ($x' \equiv \varphi x$). L'ipotesi è dunque che $\varphi$ sia trasformazione isomorfa di $r$ in $r'$ (condizioni **I** e **II**), e che sulla retta $r$ esistan due punti non coincidenti, sian per es. $a$ e $c$, tali che ciascun gruppo armonico in $r$, il

(¹) *Sur le théorème fondamentale de la Géométrie Projective.* Mathem. Annal., XVII, pag. 55.

(²) Staudt, loc. cit., n. 93.

quale contenga $a$ o $c$, sia trasformato da $\varphi$ in un gruppo armonico. Essendo inoltre $e$, $f$, $g$ punti allineati e distinti, il simbolo "$(efg)$" starà per "segmento projettivo terminato in $e$ e $g$, e contenente $f$".

Per legittimare in ogni parte le poche illazioni che seguono, giusta le norme deduttive più rigorose, converrà ch'io mi appelli alla memoria su "*I principî della Geometria di Posizione* etc.", dianzi citata: mi sia concesso di richiamarla col segno $\theta$.

§ 2. Teorema I. — *Dati* r, r′, $\varphi$ *come sopra* (§ 1), *se* b *e* d *siano punti di* r *i quali separino l'uno dall'altro i punti* a *e* c *implicati dalla condizione* **III**, *le loro immagini* $b' \equiv \varphi b$ *e* $d' \equiv \varphi d$ *saranno alla lor volta separate per mezzo dei punti* $a' \equiv \varphi a$ *e* $c' \equiv \varphi c$.

L'ipotesi involge ($\theta$, P. 20 § 5) che i punti $a$ e $b$ non siano separati l'un l'altro per mezzo dei punti $c$ e $d$, nè i punti $a$ e $d$ per mezzo dei punti $b$ e $c$: onde esiston per certo ($\theta$, P. 1 § 5) due punti $x$ ed $y$ coniugati armonicamente fra loro tanto rispetto ad $a$ e $b$, quanto rispetto a $c$ e $d$; e due punti $u$ e $v$ separati armonicamente fra loro così dai punti $a$ e $d$, come dai punti $c$ e $b$. Dunque esiston due punti $x'$ ed $y'$ armonici ad ambo le coppie $(a', b')$ e $(c', d')$; però che, in grazia della condizione **III**, dovranno essere armoniche le due quaterne di punti $\varphi(a, b, x, y)$ e $\varphi(c, d, x, y)$; come esistono ancora, e per lo stesso motivo, due punti $u'$ e $v'$ armonici ad ambo le coppie $(a', d')$ e $(c', b')$. Dunque, ciascuno degli $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ essendo diverso dagli altri, grazie alla condizione **II**, bisognerà che i punti $a'$ e $c'$ separino i punti $b'$ e $d'$ ($\theta$, P. 21 § 5).

Teorema II. — *Sotto le stesse ipotesi intorno ad* r, r′, $\varphi$, a *e* c, *se* b *e* d *siano punti di* r *non separati l'un l'altro per mezzo dei punti* a *e* c, *nemmeno potranno separarsi a vicenda le coppie* (b′, e′) *ed* (a′, c′).

Insomma dall'esser $b$ un punto diverso da ognuno degli $a$ e $c$, ma come questi giacente sopra la retta $r$, si deduce che il segmento proiettivo $(abc)$ deve aver per immagine sull'altra retta una classe di punti tutta contenuta dal segmento proiettivo $(a'b'c')$.

Si può conceder che i punti $b$ ed $e$ sian diversi fra loro e dai punti $a$ e $c$. Tolgasi in $r$ un punto $d$, separato dal punto $b$ per mezzo di $a$ e $c$; tale ad es. l'armonico di $b$ rispetto ad $a$ e $c$ ($\theta$, P. 23 § 5). Allora i punti $c$ e $d$ non potranno separare i punti $a$ ed $e$ ($\theta$, P. 13 § 5); nè i punti $a$ e $d$ separare i punti $c$ ed $e$. Esisterà dunque (condizione **III** ecc.) una coppia armonica ad ambo le coppie $(c', d')$ e $(a', e')$, come pure una coppia armonica ad ambo le coppie $(a', d')$ e $(c', e')$; ond'è forza che si separino fra loro le coppie $(a', c')$ e $(d', e')$ ($\theta$, P. 21 § 5) i quattro punti essendo al tutto distinti (condizione **II**). Dunque $e'$ non appartiene al segmento $(a'd'c')$, e per conseguenza $e'$ appartiene al segmento $(a'b'c')$ ($\theta$, P. 13 § 6) c. v. d.

Teorema III. — *Preso a piacere in* r *un punto* b *diverso da* a *e da* c, *la figura* $\varphi$(acb), *cioè l'immagine del segmento proiettivo* (acb), *sarà contenuta per intero dal segmento proiettivo* (a′c′b′).

Invero, se il punto $x$ appartenga al segmento $(acb)$, vi saranno due punti distinti ed armonici ad ambo le coppie $(a, b)$ e $(c, x)$ ($\theta$, P. 1 § 5); dunque (**III**) il simile accade circa le coppie $(a', b')$ e $(c', x')$: dunque $x'$ appartiene al segmento $(a'c'b')$.

Teorema IV. — *Premessa ancora l'ipotesi del teor. III, se la trasformazione* $\varphi$ (§ 1) *rappresenta in sè stesso ognuno dei punti* a, c *e* b, (*onde* $r' = r$), *dovrà eziandio convertire in sè stesso ciascuno dei punti:*

$$\beta_1 \equiv \mathbf{Arm}\,(a, b, c),\ \beta_2 \equiv \mathbf{Arm}\,(a, \beta_1, c), \ldots, \beta_i \equiv \mathbf{Arm}\,(a, \beta_{i-1}, c);$$
$$\beta_{i,2} \equiv \mathbf{Arm}\,(c, \beta_i, a),\ \ \beta_{i,3} \equiv \mathbf{Arm}\,(c, \beta_{i,2}, \beta_i),$$
$$\beta_{i,4} \equiv \mathbf{Arm}\,(c, \beta_{i,3}, \beta_{i,2}), \ldots, \beta_{i,l} \equiv (c, \beta_{i,l-1}, \beta_{i,l-2});$$

*quali che siano i numeri interi positivi* i *ed* l (*sempre che* $i > 1$ *ed* $l > 3$).

Grazie alla condizione **III** ed al fatto, che il quarto armonico dopo tre punti collineari e non coincidenti fra loro è un punto determinato univocamente da quelli ($\theta$, P. 12, 13, 16 § 4) sarà senza fallo tautologo il punto $\beta_1$, diverso da $a$ e da $c$ ($\theta$, P. 7 § 4); quindi tautologo il punto $\beta_2$; anzi tautologo il punto $\beta_i$, purchè sia tale il punto $\beta_{i-1}$. Dunque tautologo il punto $\beta_i$ qualunque sia l'indice $i$. Per egual modo la trasformazione $\varphi$ dovrà tener fermo ogni punto $\beta_{i,2}$, $\beta_{i,3}$, $\beta_{i,4}$ (tutti e tre diversi da $c$); ed anche il punto $\beta_{i,l}$ — dato che $\varphi$ rappresenti in sè stesso ciascuno dei punti $\beta_{i,l-1}$, $\beta_{i,l-2}$, e che questi non si confondano in $c$ — però che il punto $\beta_{i,l}$ comparisce in un gruppo armonico dopo i tre punti tautologhi $c$, $\beta_{i,l-1}$, $\beta_{i,l-2}$: ecc.

§ 3. Teorema V. — *Qualsivoglia trasformazione* $\varphi$ *soggetta alle condizioni* **I**, **II** e **III** (§ 1) *purchè non alteri i punti* a *e* c *contemplati dalla* **III** (*onde* $r' = r$), *e che lasci fermo anche un punto* b *della retta diverso da* a *e da* c, *dovrà convertire qualunque punto di* r *in sè stesso.*

Regge in ogni parte anche qui la dimostrazione recata nel Saggio “*Circa il teorema fondamentale di Staudt e i principî della Geometria Proiettiva*„. (Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, v. XXXIX, 1904, § 2) la quale riposa sul seguente principio (che non involge continuità nel senso di R. Dedekind e G. Cantor):

“ Essendo $a$, $b$, $c$ punti collineari e distinti fra loro; $p$ e $p'$ due punti a piacere nel segmento proiettivo $(abc)$, purchè non coincidenti; se si costruiscon gli armonici:

$$\beta_1 \equiv \mathbf{Arm}\,(a, b, c),\ \beta_2 \equiv \mathbf{Arm}\,(a, \beta_1, c), \ldots, \beta_j \equiv \mathbf{Arm}\,(a, \beta_{j-1}, c),$$

si deve giungere a un punto, sia p. es. $\beta_i$, tale che nella serie armonica:

$$\beta_{i,1} \equiv \beta_i,\ \beta_{i,2} \equiv \mathbf{Arm}\,(c, \beta_i, a),\ \beta_{i,3} \equiv \mathbf{Arm}\,(c, \beta_{i,2}, \beta_i),\ \beta_{i,4} \equiv \mathbf{Arm}\,(c, \beta_{i,3}, \beta_{i,2}), \ldots$$

vi sia qualche punto $\beta_{i,l} \equiv \mathbf{Arm}\,(c, \beta_{i,l-1}, \beta_{i,l-2})$ esterno al segmento proiettivo $(pap')$ „.

Basterà dimostrare ($\theta$, P. 23 § 5, P. 13 § 6, ecc.) che ciascun punto del segmento ($abc$) corrisponde a sè stesso. Poniamo che esista un punto $p$ di ($abc$), diverso dal corrispondente $p'$. Grazie al teor. II, il punto $p'$ dovrà giacer similmente in ($abc$); dunque o $p'$ appartiene al segmento ($acp$), o $p$ al segmento ($acp'$) ($\theta$, P. 5 § 6). In ambo i casi fra $p$ e $p'$, cioè fuor del segmento ($pap'$) e dei punti $p$ e $p'$, dovrà cader senza fallo un punto tautologo $\beta$, grazie al principio suddetto e al teor. IV (viste anche le $\theta$, P. 1, 11, 5, § 6). Ora, dato che il punto $p'$ stia nel segmento ($acp$), ne viene ($\theta$, P. 11, 2, § 6) che $\beta$ appartiene al segmento ($acp$) senza appartenere al segmento ($acp'$) contro il teor. III (dove si legga $p$ e $p'$ invece di $b$ e $b'$). Nel medesimo assurdo si cade, ove $p$ stia nel segmento ($acp'$); però che allora il punto tautologo $\beta$ giacerà nel segmento ($cap$) senza giacere in ($cap'$), contro $\begin{pmatrix} c, a \\ a, c \end{pmatrix}$ teor. III: ved. $\theta$, P. 7, 31, 28 § 5, e P. 11, 2 § 6.

TEOREMA VI. — *Qualsivoglia rappresentazione $\varphi$ soddisfacente alle condizioni* **I**, **II** *e* **III** *è una corrispondenza invertibile tra le due rette* r *ed* r'; *e a ciascun gruppo armonico dell'una o dell'altra retta coordina un gruppo armonico.*

Tolgasi in $r$ un punto $b$ a piacere, purchè diverso da $a$ e $c$: e sia poscia $\psi$ una proiezione univoca di $r$ in $r'$, che trasferisca ordinatamente i punti $a$, $b$, $c$ nei punti $\varphi a$, $\varphi b$, $\varphi c$ ($\theta$, § 4). Questa sarà, com'è noto, trasformazione armonica e conversiva o reciproca d'$r$ in $r'$; e la sua inversa $\psi^{-1}$ eziandio conversiva ed armonica. Ora il prodotto di $\varphi$ per l'inversa di $\psi$ ne porge una rappresentazione (di $r$ sopra sè stessa), la quale possiede i caratteri **I**, **II** e **III**, e tien fermo individualmente ciascuno dei punti $a$, $b$, $c$. Dunque, teor. V) $\psi^{-1}\varphi = 1$, e per conseguenza $\varphi = \psi$: cioè le trasformazioni $\varphi$ e $\psi$ non si distinguon fra loro, c. v. d. (1)

MARIO PIERI
(*Catania*).

(1) La dimostrazione del teor. V si regge tutta sul teor. IV e sul fatto (significato dai teor. II e III) che i punti del segmento proiettivo ($abc$) terminato in $c$, o del segmento proiettivo ($acb$) contenente $c$, si trasformano in punti di un certo segmento ($a'b'c'$) o ($a'c'b'$). Ora il teor. IV sussisterebbe quand'anche invece della condizione **III** si avesse quest'altra più generale:

III' „Ch'esista in $r$ un punto $c$ tale, che ciascun gruppo armonico il quale contenga $c$ si rappresenti per un gruppo armonico „.

Sarà dunque vero altresì che: „Qualsivoglia rappresentazione di $r$ in $r'$, pur che soddisfi alle condizioni **I**, **II** e **III'** e che ad ogni segmento, il quale contenga $c$ o sia terminato in $c$, subordini punti di un'altro segmento, è una corrispondenza omografica „. E di qui per es. ne viene che: „Ogni trasformazione continua di $r$ in $r'$ soddisfacente alle condizioni **I**, **II** e **III'** è sempre un'omografia „; la qual cosa potrebbe eziandio confermarsi seguendo il DARBOUX, nella mem. cit.

# SULLA DETERMINAZIONE DEGLI ASSINTOTI DELLE CURVE ALGEBRICHE

Nella maggior parte dei trattati di calcolo si trovano esposte le regole generali per trovare gli assintoti, delle curve, ma sono appena accennate le regole particolari per trovare gli assintoti delle curve algebriche.

Per lo più si osserva semplicemente che, data l'equazione in coordinate cartesiane di una curva algebrica di ordine $n$ l'equazione che si ottiene eguagliando a zero la somma dei termini di grado $n$ rappresenta $n$ rette parallele agli assintoti. Qualcuno, come per es. il Vivanti nel suo ottimo trattato, aggiunge che essendo

$$f(x, y) = \sum_0^n u_i(x, y) = 0$$

l'equazione della curva, ove $u_i(x, y)$ rappresenta una funzione omogenea di $x$, $y$ di grado $i$, l'equazione

$$X \frac{\partial u_n}{\partial x} + Y \frac{\partial u_n}{\partial y} + u_{n-1} = 0,$$

nella quale ad $\frac{y}{x}$ si sostituisca una radice della $u_n = 0$, rappresenta un assintoto.

Ma questa equazione diventa indeterminata, se $\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u_n}{\partial y} = u_{n-1} = 0$; e, per quanto so, non è stata mai fatta una discussione compiuta della importante questione. Tale discussione, assai semplice e naturale, mi propongo di esporre nella presente nota per uso degli studenti.

* * *

1. Consideriamo una curva algebrica di ordine $n$ rappresentata in coordinate omogenee dall'equazione

$$f(x_1 x_2 x_3) = u_n(x_1 x_2) + x_3 u_{n-1}(x_1 x_2) + x_3^2 u_{n-2}(x_1 x_2) + \dots$$
$$\dots + x_3^s u_{n-s}(x_1 x_2) + \dots + x_3^n = 0, \qquad (1)$$

dove $u_i(x_1 x_2)$ è funzione omogenea di grado $i$ delle $x_1, x_2$, e proponiamoci la ricerca dei punti d'incontro di essa dalla retta $x_3 = 0$ e delle tangenti alla curva in questi punti.

I punti d'incontro della curva colla retta $x_3 = 0$ sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\left.\begin{aligned} f(x_1 x_2 x_3) = 0 \\ x_3 = 0 \end{aligned}\right\},$$

che per la (1) equivale all'altro

$$\left.\begin{matrix} u_n(x_1\, x_2) = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix}\right\}. \tag{2}$$

La prima di queste equazioni ha $n$ radici rispetto al rapporto $\frac{x_2}{x_1}$, e quindi si hanno $n$ punti d'incontro reali o complessi, distinti o coincidenti.

Esaminiamo i vari casi che possono presentarsi:

1°. *Sia* $\alpha = \frac{x_2}{x_1}$ *una radice semplice dell'equazione* $u_n(x_1, x_2) = 0$.

Si ha allora un punto d'incontro ordinario di $x_3 = 0$ colla curva, ed è noto che la tangente in esso è rappresentata dall'equazione

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0.$$

Siccome

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} + x_3^2 \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x_1} + \ldots + x_3^{n-1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{\partial u_n}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2} + x_3^2 \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x_2} + \ldots + x_3^{n-1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} &= u_{n-1} + 2x_3 u_{n-2} + 3x_3^2 u_{n-3} + \ldots + nx^{n-1} u_0 \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

e per il punto considerato, essendo $x_3 = 0$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial u_n}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial u_n}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3} = u_{n-1}(x_1\, x_2),$$

l'equazione precedente diviene

$$X_1 \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_n}{\partial x_2} + X_3 u_{n-1} = 0. \tag{4}$$

2°. *Sia* $\alpha = \frac{x_2}{x_1}$ *una radice doppia dell'equazione* $u_n(x_1\, x_2) = 0$.

Dovrà essere

$$u_n(x_1\, x_2) = 0, \qquad \frac{\partial u_n}{\partial x_2} = 0,$$

e quindi anche per la relazione

$$x_1 \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u_n}{\partial x_2} = n u_n$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial u_n}{\partial x_2} = 0.$$

Possono allora presentarsi due casi:

*a)* Se $u_{n-1} \neq 0$, essendo anche $\frac{\partial f}{\partial x_3} \neq 0$, il punto non è multiplo per la curva, l'equazione (4) si riduce a

$$X_3 = 0,$$

cioè la $x_3$ è tangente in quel punto alla curva.

*b)* Se anche $u_{n-1}=0$, allora la (4) è indeterminata, cioè ogni retta taglia la curva due volte in quel punto che è doppio, come risulta dal fatto che in questo punto si ha per le (3)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{\partial f}{\partial x_3}=0.$$

L'equazione complessiva delle tangenti in un punto doppio è simbolicamente

$$\left(X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+X_3\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2=0.$$

Dalle (3) si ricava

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}&=\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1^2}+x_3\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x_1^2}+\dots\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}&=\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_2^2}+x_3\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x_2^2}+\dots\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}&=\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1\partial x_2}+x_3\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x_1\partial x_2}+\dots\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}&=2u_{n-2}+3\,.\,2x_3u_{n-3}+\dots\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}&=\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1}+2\,x_3\frac{\partial u_{n-2}}{\partial x_1}+\dots\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}&=\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}+2\,x_3\frac{\partial u_{n-2}}{\partial x_2}+\dots,
\end{aligned}$$

ed a causa delle ipotesi fatte si ha per il punto considerato

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1}=\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1^2},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_2^2},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}=2\,u_{n-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1\partial x_2},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}=\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}=\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}.$$

Perciò l'equazione complessiva delle tangenti è

$$X_1^2\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1^2}+2X_1X_2\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1\partial x_2}+X_2^2\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_2^2}+2X_1X_3\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1}+$$
$$+2X_2X_3\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}+2u_{n-2}X_3^2=0. \qquad (5)$$

Se

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_2^2}=0,$$

la (5) diviene

$$2X_3\left\{X_1\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}+u_{n-2}\right\}=0,$$

cioè una delle tangenti è $x_3=0$ l'altra è la retta

$$X_1\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}+X_2\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}+X_3u_{n-2}=0;$$

e se anche

$$\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1}=\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}=0,$$

questa seconda retta coincide pure con la $x_3=0$, cioè il punto considerato è di regresso e la $x_3$ è la tangente di esso.

Se infine anche $u_{n-2}=0$, la (5) diviene indeterminata; e ciò è naturale, perchè allora le sei derivate di 2° ordine di $f$ sono tutte nulle e il punto considerato è per lo meno triplo.

**2.** *Più generalmente sia* $\alpha=\frac{x_2}{x_1}$ *una radice multipla di ordine* $p>2$ *della equazione* $u_n(x_1\,x_2)$. Si trova come nel 2° caso che devono essere nulle tutte le derivate di $u_n$ di ordine inferiore a $p$, ma non tutte quelle di ordine $p$ devono essere nulle.

Possono allora presentarsi diversi casi.

*a)* Nel punto P sia $u_{n-1}\neq 0$. Poichè $\frac{\partial f}{\partial x_3}=u_{n-1}$ è diversa da zero, risulta che P è un punto semplice della curva

In tal caso la retta $x_3=0$ ha un contatto di ordine $p-1$ colla curva in P e non esistono altre tangenti distinte da $x_3$.

*b)* Supponiamo che (essendo $q\leqslant p$)

$$\begin{array}{llr}
u_n & \text{sia nullo con tutte le sue derivate di ordine inferiore a} & q \\
u_{n-1} & \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} & q-1 \\
u_{n-2} & \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} & q-2 \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
u_{n-q-2} & \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} & 2 \\
u_{n-q-1} & \text{sia nullo} &
\end{array}$$

ma fra le derivate di $u_n$ di ordine $q$

$$\begin{array}{lll}
\text{''} & u_{n-1} \quad \text{''} & q-1 \\
\text{''} & u_{n-2} \quad \text{''} & q-2 \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\text{''} & u_{n-q-1} \quad \text{''} & 1
\end{array}$$

e la funzione $\quad u_{n-q}$

qualcuna non sia nulla.

Si noti che si ha

$$\frac{\partial^{h+k}f}{\partial^h x_1\partial^k x_2}=\frac{\partial^{h+k}u_n}{\partial^h x_1\partial^k x_2}+x_3\frac{\partial^{h+k}u_{n-1}}{\partial^h x_1\partial^k x_2}+\ldots$$
$$\ldots+x_3^s\frac{\partial^{h+k}u_{n-s}}{\partial^h x_1\,\partial^k x_2}+x_3^{s+1}\frac{\partial^{h+k}u_{n-s-1}}{\partial^h x_1\partial^k x_2}+\ldots,$$

e quindi

$$\frac{\partial^{h+k+s}f}{\partial^h x_1\partial^k x_2\partial^s x_3}=\underline{|s}\,\frac{\partial^{h+k}u_{n-s}}{\partial^h x_1\,\partial^k x_2}+\frac{\underline{|s+1}}{\underline{|1}}\,x_3\,\frac{\partial^{h+k}u_{n-s-1}}{\partial^h x_1\partial^k x_2},$$

e per $x_3=0$

$$\frac{\partial^{h+k}f}{\partial^h x_1\,\partial^k x_2}=\frac{\partial^{h+k}u_n}{\partial x_1^h\,\partial x_2^k},\qquad \frac{\partial^{h+k+s}f}{\partial x_1^h\partial x_2^k\partial x_3^s}=\underline{|s}\,\frac{\partial^{h+k}u_{n-s}}{\partial x_1^h\,\partial x_2^k}.$$

Dalle ipotesi fatte risulta che sono nulle nel punto considerato tutte le derivate di $f$ di ordine $<q$ ma non tutte quelle di ordine $q$, cioè il punto è multiplo di ordine $q$.

L'equazione complessiva delle tangenti in quel punto è, come è noto, simbolicamente

$$\left(X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^q = 0,$$

ossia, sempre simbolicamente

$$\left(X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^q + \binom{q}{1}\left(X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^{q-1} \frac{\partial f}{\partial x_3} X_3 +$$
$$+ \binom{q}{2}\left(X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^{q-2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} X_3^2 + \ldots = 0,$$

ossia per le eguaglianze precedenti

$$\left(X_1 \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_n}{\partial x_2}\right)^q + \underline{|1}\binom{q}{1}\left(X_1 \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}\right)^{q-1} X_3 +$$
$$+ \underline{|2}\binom{q}{2}\left(X_1 \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x_2}\right)^{q-2} X_3^2 +$$
$$+ \underline{|s}\binom{q}{s}\left(X_1 \frac{\partial u_{n-s}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_{n-s}}{\partial x_2}\right)^{q-s} X_3^s \ldots = 0,$$

ossia

$$\left(X_1 \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_n}{\partial x_2}\right)^q + q\left(X_1 \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}\right)^{q-1} X_3 +$$
$$+ q(q-1)\left(X_1 \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x_2}\right)^{q-2} X_3^2 + \ldots$$
$$\ldots + q(q-1)\ldots(q-s+1)\left(X_1 \frac{\partial u_{n-s}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_{n-s}}{\partial x_2}\right)^{q-s} X_3^s + \ldots$$
$$\ldots + \underline{|q} u_{n-q} x_3^q = 0. \qquad (6)$$

Se $q = p$ il primo termine della (6) per ipotesi non è identicamente nullo e la (6) rappresenta $p$ rette, nessuna delle quali coincide con $x_3$.

Se $q < p$, il primo termine si annulla, perchè per ipotesi P corrisponde ad una radice multipla di indice $p$ della $u_n(x_1\, x_2) = 0$. Supponendo per generalità che il primo termine della sviluppata che non si annulla sia l'$(s+1)^{\text{esima}}$, delle $q$ rette rappresentate dalla (6), $s$ coincidono con la $x_3$ e le altre sono rappresentate dall'equazione

$$q(q-1)\ldots(q-s+1)\left(X_1 \frac{\partial u_{n-s}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_{n-s}}{\partial x_2}\right)^{q-s} +$$
$$q(q-1)\ldots(q-s)\left(X_1 \frac{\partial u_{n-s-1}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_{n-s-1}}{\partial x_2}\right)^{q-s-1} X_3 + \ldots \underline{|q}.u_{n-q} X_3^{q-s} = 0. \quad (7)$$

***

Si supponga ora che la retta $x_3 = 0$ del triangolo fondamentale sia la retta all'infinito, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ sieno gli assi delle $x$ e delle $y$ di un sistema cartesiano ed il punto unità sia quello che ha le coordinate 1, 1 rispetto a questi assi. Allora è noto che le coordinate cartesiane $x$, $y$ sono legate alle coordinate omogenee dalle relazioni $\frac{x_2}{x_1}=x$, $\frac{x_3}{x_1}=y$. Il sistema $u_n(x_1 x_2)=0$, $x_3=0$ dà i punti all'infinito della curva, e le equazioni o (4) o (6) o (7) rappresentano gli assintoti nei vari casi.

Infine se dividiamo l'equazione $f(x_1 x_2 x_3)=0$ della curva per $x_3^n$, essa diventa dalla forma

$$F(x\,y)=V_n(x\,y)+V_{n-1}(x\,y)+V_{n-2}(x\,y)+\ldots+V_0$$

dove $V_s(x\,y)=u_s(x_1\,x_2)\frac{1}{x_3^s}$ è una funzione omogenea di $x$, $y$.

Possiamo allora enunciare le seguenti regole che sono conseguenze immediate delle considerazioni precedenti.

1ª. Ogni assintoto deve essere parallelo ad una delle $n$ rette rappresentate dalla equazione

$$V_n(x,\ y)=0,$$

ossia ha per coefficiente angolare una delle radici dell'equazione

$$W_n(\alpha)=0, \tag{8}$$

avendo posto

$$W_s(\alpha)=\frac{1}{x_3^s}V_s(x\,y)=V_s(1,\alpha)=u_s(1,\alpha)=0.$$

2ª. Per ogni radice semplice $\alpha_i$ dell'equazione (8) esiste un solo assintoto rappresentato dall'equazione

$$X\frac{\partial u_n}{\partial x}+Y\frac{\partial u_n}{\partial y}+u_{n-1}=0,$$

nella quale ad $\frac{y}{x}$ si sostituisca $\alpha_i$.

3ª. Se $\alpha_i$ è una radice multipla di ordine $p$ della (8), cioè annulla anche le sue prime $p-1$ derivate rispetto ad $\alpha$, ma non la $p$-esima, occorre esaminare i valori di

$$W_{n-1}(\alpha_i)\ldots W_0(\alpha_i)$$

e delle loro derivate.

Se

$$\left.\begin{array}{c} W_n(\alpha_i)=W'_n(\alpha_i)\ldots=W_n^{(p-1)}(\alpha_i)=0 \\ W_{n-1}(\alpha_i)=W'_{n-1}(\alpha_i)\ldots=W^{(p-2)}(\alpha_i)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ W_{n-p-1}=0 \end{array}\right\}, \tag{9}$$

esistono $p$ assintoti di coefficiente angolare $\alpha_i$, e la loro equazione complessiva è

$$\left(X\frac{\partial u_n}{\partial x}+Y\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^p+p\left(X\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}+Y\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right)^{p-1}+\ldots+\underline{|p}\,u_{n-p}=0 \tag{10}$$

ove al posto di $\frac{y}{x}$ si ponga $\alpha_i$.

Se non tutte l'equazioni suddette (9) sono verificate e $n-q$ $(q<p)$ è il grado massimo di quelle fra le funzioni $W_s^{(r)}$ che non si annullano per $\alpha_i$, ed inoltre fra le funzioni

$$W_{n-1}^{(q-1)}(\alpha_i) \qquad W_{n-2}^{(q-2)}(\alpha_i)\ldots W_{n-s}^{(q-s)}(\alpha_i)\ldots W_{n-q}(\alpha),$$

tutte di ordine $q$, la prima che non si annulla per il valore $\alpha_i$ è $W_{n-s}^{(q-s)}(\alpha)$, esistono $q-s$ assintoti di cofficiente angolare $\alpha_i$ rappresentati dalla equazione

$$q(q-1)\ldots(q-s+1)\left(x\frac{\partial u_{n-s}}{\partial x}+y\frac{\partial u_{n-s}}{\partial y}\right)^{q-s}+$$
$$+\,q(q-1)\ldots(q-s)\left(x\frac{\partial u_{n-s-1}}{\partial x}+y\frac{\partial u_{n-s-1}}{\partial y}\right)^{q-s-1}+\ldots+\underline{|q}\,u_{n-q}=0. \qquad (11)$$

***

Esempio I. — Cerchiamo gli assintoti della *kreuzcurva* rappresentata dall'equazione.

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1$$

ossia

$$f(x\,y)=x^2y^2-(b^2x^2+a^2y^2)=0.$$

In questo caso si ha

$$V_4=x^2y^2 \qquad V_3=0$$
$$V_2=-(b^2x^2+a^2y^2) \qquad V_1=V_0=0.$$

L'equazione $V_4=0$ ha per soluzioni $x=0$ e $y=0$, ambedue radici doppie. Si ha poi

$$\frac{\partial V_4}{\partial x}=2xy^2 \qquad \frac{\partial V_4}{\partial y}=2x^2y$$
$$\frac{\partial^2 V_4}{\partial x^2}=2y^2 \qquad \frac{\partial^2 V_4}{\partial x\partial y}=4xy \qquad \frac{\partial^2 V_4}{\partial y^2}=2x^2.$$

Per $\frac{y}{x}=0$, $V_4$ si annulla con le sue derivate prime e seconde eccetto

$$\frac{\partial^2 V_4}{\partial y^2}=2x^2, \qquad \text{e} \qquad V_2=-b^2x^2.$$

Dunque $n=4$, $p=2$, $q=p=2$, ed occorre applicare la (10) che dà come equazione degli assintoti corrispondenti

$$2\,Y^2x^2-2\,b^2x^2=0$$
$$Y^2=b^2$$
$$Y=\pm\,b.$$

Analogamente per la radice $\frac{x}{y}=0$ si trovano gli assintoti

$$x=\pm\,a.$$

I punti all'$\infty$ di questi assintoti sono due punti doppi.

Esempio II. — Cerchiamo gli assintoti della curva rappresentata dall'equazione

$$\frac{a^3}{x^3}+\frac{b^3}{y^3}=1.$$

Si ha, riducendo a forma intera,

$$f(x\,y)=x^3y^3-(a^3y^3+b^3x^3)=0,$$

e quindi

$$V_6=x^3y^3, \qquad V_5=V_4=0$$

$$V_3=-(a^3y^3+b^3x^3), \qquad V_2=V_1=V_0=0.$$

Radici di $V_6=0$ sono $x=0$, $y=0$, ambedue triple. Si ha poi

$$\frac{\partial V_6}{\partial x}=3x^2y^3 \qquad \frac{\partial V_6}{\partial y}=3x^3y^2$$

$$\frac{\partial^2 V_6}{\partial x^2}=6xy^3 \qquad \frac{\partial^2 V_6}{\partial x.\partial y}=9x^2y^2 \qquad \frac{\partial^2 V_6}{\partial y^2}=6x^3y$$

$$\frac{\partial^3 V_6}{\partial x^3}=6y^3 \qquad \frac{\partial^3 V_6}{\partial x^2\partial y}=18xy^2 \qquad \frac{\partial^3 V_6}{\partial x\partial y^2}=18x^2y \qquad \frac{\partial^3 V_6}{\partial y^3}=6x^3.$$

Per $\frac{y}{x}=0$ si annullano tutte le espressioni precedenti, eccettuate

$$\frac{\partial^3 V_6}{\partial y^3}=6x^3, \qquad V_3=-b^3x^3,$$

e l'equazione (10) diventa

$$6Y^3x^3-\underline{|3}\,b^3x^3=0,$$

ossia

$$Y^3-b^3=0$$

cioè esistono due assintoti immaginari, rappresentati dall'equazione

$$Y^2+bY+b^2=0$$

ed uno reale $Y=b$.

Analogamente si trovano due assintoti imaginari $X^2+aX+a^2$ ed uno reale $X=a$.

G. Lazzeri.

---

# INTORNO ALLE DIFFERENZE DI $0^q$ E ALLE IDENTITÀ ARITMETICHE

1. Noi vogliamo qui applicare allo studio delle funzioni numeriche alcune proprietà delle differenze di $0^q$.

È noto che, se $q$ è un numero intero positivo, la successione

$$0^q,\quad 1^q,\quad 2^q,\quad 3^q,\ldots,n^q,\ldots$$

costituisce una progressione aritmetica d'ordine $q$; indicandone pertanto, e com'è solito, con $\Delta^r 0^q$ la differenza $r^{\text{ima}}$, si ha [1]

$$\Delta^r 0^q=r^q-\binom{q}{1}(r-1)^{q-1}+\binom{q}{2}(r-2)^{q-2}-\ldots+(-1)^q. \qquad (1)$$

[1] Si vegga per es. Cesàro, *Analisi algebrica*, p. 461.

Per $r=q$ è

$$\Delta^q 0^q = q!\,, \tag{2}$$

e per $r>q$ è

$$\Delta^r 0^q = 0\,. \tag{3}$$

Fra le proprietà delle differenze di $0^n$ noi dobbiamo per il nostro scopo segnalare la seguente. Se con $[1,\ q]^r$ si indica la somma dei prodotti ad $r$ ad $r$ dei numeri $1, 2, \ldots q$ si ha, per $r<q$,

$$[1,\ q]^{q-r}\Delta^r 0^r - [1,\ q]^{q-r-1}\Delta^r 0^{q-1} + \ldots + (-1)^{q-r}\Delta^r 0^q = 0\,. \tag{4}$$

Per dimostrare questa proprietà osserviamo che se nell'identità

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-q) = x^q - [1,\ q]^1 x^{q-1} + [1,\ q]^2 x^{q-2} - \ldots + (-1)^q$$

si pone $r$ al posto di $x$, si trae, per $r \leqq q$,

$$r^q - [1,\ q]^1 r^{q-1} + [1,\ q]^2 r^{q-2} - \ldots + (-1)^q = 0\,, \tag{5}$$

e per $r>q$

$$r^q - [1,\ q]^1 r^{q-1} + [1,\ q]^2 r^{q-2} - \ldots + (-1)^q = (r-1)(r-2)\ldots(r-q)\,. \tag{6}$$

Ora se moltiplichiamo ambo i membri di

$$\Delta^r 0^{q-s} = r^{q-s} - \binom{q-s}{1}(r-1)^{q-s-1} + \binom{q-s}{2}(r-2)^{q-s-2} - \ldots + (-1)^{q-s}$$

per $(-1)^s\,[1,\ q]^s$, e sommiamo per $s=0, 1, \ldots, q$, si ottiene, in virtù di (5), per $r<q$, la formola (4).

**2.** Premesso ciò, indichiamo con $k(n)$ il numero dei fattori primi diversi di $n$ $[k(1)=0]$, e con $\mu(n)$ la funzione di *Möbius*, nulla se $n$ è divisibile per un quadrato ed uguale a $(-1)^{k(n)}$ se $n$ è costituito da fattori primi tutti differenti.

Si ponga poi

$$\mu_r(n) = k^r(n)\,\mu(n)\,. \tag{7}$$

*L'integrale numerico* di $\mu_r(n)$, cioè la somma dei valori che prende $\mu_r(x)$, quando $x$ percorre la successione dei divisori di $n$, è, con una notazione già adottata dal *Cesàro*, e da altri,

$$\int \mu_r(n) = \mu_r(1) - \Sigma\mu_r(a) + \Sigma\mu_r(ab) - \Sigma\mu_r(abc) + \ldots,$$

$a, b, c, \ldots$ essendo i fattori primi diversi di $n$, e, per $r>0$, in virtù di (7),

$$\int \mu_r(n) = (-1)^{k(n)}\left\{k^r(n) - \binom{k(n)}{1}[k(n)-1]^{r-1} + \right.$$
$$\left. + \binom{k(n)}{2}[k(n)-2]^{r-2} - \ldots\right\},$$

e in virtù di (1),

$$\int \mu_r(n) = (-1)^{k(n)}\Delta^{k(n)}0^r. \tag{8}$$

In particolare, *se* n *è costituito da più di* r *fattori primi diversi*, è

$$\int \mu_r(n) = 0\,.$$

È questa un'estensione di una nota proprietà della funzione di *Möbius*.

**3.** Ora se $f(n)$, $g(n)$ sono due funzioni numeriche, si ha, com'è facile dimostrare,

$$\Sigma f(d) \int g\left(\frac{n}{d}\right) = \Sigma g(d) \int f\left(\frac{n}{d}\right), \tag{9}$$

essendo le somme estese a tutti i divisori $d$ di $n$. Se in questa si pone $g(n) = \mu_r(n)$, in virtù di (8), si ottiene

$$\Sigma f\left(\frac{n}{d}\right)(-1)^{k(d)}\Delta^{k(d)}0^r = \Sigma \mu_r(d) \int f\left(\frac{n}{d}\right),$$

e quindi, indicando con $\delta_i$ un divisore di $n$, che è costituito da potenze di $i$ fattori primi diversi ($\delta_0 = 1$), con $a_1, a_2, \ldots, a_{k(n)}$ i fattori primi differenti di $n$, e denotando con $F(n)$ l'integrale numerico di $f(n)$, si ha

$$\Delta^1 0^r \Sigma f\left(\frac{n}{\delta_1}\right) - \Delta^2 0^r \Sigma f\left(\frac{n}{\delta_2}\right) + \Delta^3 0^r \Sigma f\left(\frac{n}{\delta_3}\right) - \ldots =$$
$$= 1^r \Sigma F\left(\frac{n}{a_1}\right) - 2^r \Sigma F\left(\frac{n}{a_1 a_2}\right) + 3^r \Sigma F\left(\frac{n}{a_1 a_2 a_3}\right) - \ldots. \tag{10}$$

**4.** Questa formola fornisce innumerevoli identità aritmetiche e algebriche.

Per es., supponiamo che sia $f(n) = 1$, ed $n$ costituito da fattori primi tutti differenti, e sia $m$ il loro numero; sarà $F(n) = 2^m$ e la (10) darà

$$\binom{m}{1}\Delta^1 0^r - \binom{m}{2}\Delta^2 0^r + \binom{m}{3}\Delta^3 0^r - \ldots =$$
$$= 1^r \binom{m}{1} 2^{m-1} - 2^r \binom{m}{2} 2^{m-2} + 3^r \binom{m}{3} 2^{m-3} - \ldots$$

Per ottenere la (1) basta supporre ancora che $m$ sia costituito da fattori primi tutti differenti e in numero di $m$, e la funzione $f(n)$ abbia il valore 1 per $n = 1$, e 0 per $n > 1$. Questa funzione è l'integrale numerico di $\mu(n)$, la (10) quindi, per $f(n) = \mu(n)$, e sempre nell'ipotesi che $n$ sia costituito da fattori primi tutti differenti e in numero di $m$, fornisce

$$\binom{m}{1}\Delta^1 0^r + \binom{m}{2}\Delta^2 0^r + \ldots + \binom{m}{r}\Delta^r 0^r = m^r.$$

Da questa si trae, com'è noto, la formola

$$1^r + 2^r + \ldots + (p-1)^r = \binom{p}{2}\Delta^1 0^r + \binom{p}{3}\Delta^2 0^r + \ldots + \binom{p}{r+1}\Delta^r 0^r. \tag{11}$$

**5.** Vogliamo ora dalla (10) dedurre l'espressione di $\Sigma f\left(\frac{n}{\delta_r}\right)$ mediante i valori dell'integrale numerico di $f(n)$.

Se nella (10) si muta $r$ successivamente in 1, 2, ..., $r$, si ottiene un sistema di $r$ equazioni lineari nelle somme $\Sigma f\left(\frac{n}{\delta_i}\right)$ $(i=1,2,\ldots,r)$, per risolvere il quale basterà moltiplicare la prima equazione per $[1, r]^r$, la seconda per $-[1, r]^{r-1}$, la terza per $[1, r]^{r-2}$, ... l'$s^{esima}$ per $[-1]^{s-1}[1, r]^{r-s}$, ecc.; dopo ciò sommando e tenendo presenti le identità (4), (5), (6), si ottiene

$$\Sigma f\left(\frac{n}{\delta_r}\right)=\Sigma \mathrm{F}\left(\frac{n}{a_1 a_2 \ldots a_r}\right)-\binom{r+1}{1} \Sigma \mathrm{F}\left(\frac{n}{a_1 a_2 \ldots a_{r-1}}\right)+$$
$$+\binom{r+2}{2} \Sigma \mathrm{F}\left(\frac{n}{a_1 a_2 \ldots a_{r-2}}\right)-\ldots \quad (12)$$

Questa formola, per $r=0$, dà *la derivata numerica* di $\mathrm{F}(n)$, cioè la funzione che ha per integrale numerico $\mathrm{F}(n)$ (¹)

$$f(n)=\partial \mathrm{F}(n)=\mathrm{F}(n)-\Sigma \mathrm{F}\left(\frac{n}{a}\right)+\Sigma \mathrm{F}\left(\frac{n}{ab}\right)-\ldots \quad (13)$$

La (11) fornisce in particolare se per $f(n)$ si pone la funzione $\varphi(n)$, che rappresenta la totalità dei numeri non superiori ad $n$ e primi con $n$, per cui è $\int \varphi(n)=n$:

$$\Sigma \varphi\left(\frac{n}{\delta_r}\right)=\Sigma \frac{n}{a_1 a_2 \ldots a_r}-\binom{r+1}{1} \Sigma \frac{n}{a_1 a_2 \ldots a_{r-1}}+$$
$$+\binom{r+2}{2} \Sigma \frac{n}{a_1 a_2 \ldots a_{r-2}}-\ldots, \quad (14)$$

e se si fa $f(n)=\mu(n)$, si ottiene

$$\Sigma \mu\left(\frac{n}{\delta_r}\right)=(-1)^r\binom{k(n)}{r} \mu(n), \quad (15)$$

ecc. ecc.

Supponiamo che la funzione $f(n)$ sia *composta*, cioè per ogni coppia di numeri (interi) $m$, $m'$ si abbia

$$f(m) f(m')=f(mm'),$$

allora, se nella (10) si pone

$$\frac{1}{f(n)}=\psi(n),$$

sarà $\psi(n)$ una funzione composta, e se $\Psi(n)$ è il suo integrale numerico si avrà

$$\mathrm{F}(n)=\frac{\Psi(n)}{\psi(n)},$$

e la (12) dà

$$\Sigma \psi(\delta_r)=\Sigma \Psi\left(\frac{n}{a_1 a_2 \ldots a_r}\right) \psi(a_1 a_2 \ldots a_r)-$$
$$-\binom{r+1}{1} \Sigma \Psi\left(\frac{n}{a_1 a_2 \ldots a_{r-1}}\right) \psi(a_1 a_2 \ldots a_r)+$$
$$+\binom{r+2}{2} \Sigma \Psi\left(\frac{n}{a_1 a_2 \ldots a_{r-2}}\right) \psi(a_1 a_2 \ldots a_{r-2})-\ldots. \quad (16)$$

(¹) Dedekind, *J. f. Math.*, 54, 1857, p. 1; Liouville, *J. de Math.*, (2), 2, 1857, p. 110.

Si ottiene così una espressione della somma dei valori che assume la funzione composta $\psi(x)$ per tutti i divisori di $n$ formati con potenze di $r$ fattori primi differenti.

Il numero $N_r(n)$ di questi divisori si ottiene facendo in (16) $\psi(x)=1$:

$$N_r(n)=\Sigma\nu\left(\frac{n}{a_1\,a_2\ldots a_r}\right)-\binom{r+1}{1}\Sigma\,\nu\left(\frac{n}{a_1\,a_2\ldots a_{r+1}}\right)+\ldots$$

e la loro somma $S_r(n)$ per $\psi(x)=x$:

$$S_r(n)=\Sigma\,\sigma\left(\frac{n}{a_1\,a_2\ldots a_r}\right)a_1\,a_2\ldots a_r-\binom{r+1}{1}\Sigma\,\sigma\left(\frac{n}{a_1\,a_2\ldots a_{r+1}}\right)a_1\,a_2\ldots a_{r+1}+\ldots$$

$\nu(n)$, $\sigma(n)$ rappresentando rispettivamente la totalità e la somma dei divisori di $n$.

**6.** Or si potrebbe domandare quale sia l'espressione di $\Sigma f(\delta_r)$ nel caso che $f(n)$ non sia una funzione composta. Per rispondere a tale questione, osserviamo dapprima che, se si indica con $f(d,n)$ la somma dei valori che prende $f(x)$ per i divisori di $n$ che sono multipli di $d$, e $g(n)$ è una funzione numerica qualunque, si ha, come è facile dimostrare,

$$\Sigma f(d,n)\,g(d)=\Sigma f(d)\int g(d)\,, \tag{17}$$

essendo le somme estese ai divisori $d$ di $n$.

Indicando quindi con $\omega_r(n)$ una funzione numerica che è uguale a 1 se $n$ è costituito da potenze di $r$ fattori primi diversi, e 0 in ogni altro caso, si ha evidentemente

$$\Sigma f(\delta_r)=\Sigma f(d)\,\omega_r(d)\,.$$

Per applicare la (17) poniamo

$$\int g(n)=\omega_r(n)\,,$$

donde, per la (13),

$$g(n)=\partial\,\omega_r(n)=\Sigma\,\omega_r(d)\,\mu\left(\frac{n}{d}\right)=\Sigma\mu\left(\frac{n}{\delta_r}\right)$$

e infine, per la (15),

$$g(n)=(-1)^r\binom{k(n)}{r}\mu(n)\,.$$

La (17) quindi fornisce la formola

$$\Sigma f(\delta_r)=\Sigma f(a_1\,a_2\ldots a_r,\,n)-\binom{r+1}{1}\Sigma f(a_1\,a_2\ldots a_{r+1},\,n)+\binom{r+2}{2}\Sigma f(a_1\,a_2\ldots a_{r+2},\,n)-\ldots,$$

fonte, anch'essa, di innumerevoli identità aritmetiche.

MICHELE CIPOLLA
(*Corleone*).

# UN TEOREMA SUL "MODULO PRINCIPALE" DI UNA FUNZIONE

**1.** Un pregevole lavoro di Nekrassoff sulla serie di Lagrange,[1] mi ha suggerito un teorema sul *modulo principale* di una funzione. teorema, che non mi sembra privo di un certo interesse.

Premettiamo le seguenti considerazioni:

Sia $\psi(z)$ una funzione della variabile complessa $z = re^{i\varphi}$, finita, continua e monodroma per tutti i valori di $z$ pei quali è soddisfatta la limitazione:

$$k < r < k_1. \tag{1}$$

Se R è il modulo di $\psi(z)$, finchè è soddisfatta la (1), R sarà una funzione finita e continua di $\varphi$ e, col variare di $\varphi$ da 0 a $2\pi$, attraverserà certi massimi ciascuno dei quali è una funzione di $r$.

Indichiamo con:

$$\mathrm{M}_1(r),\quad \mathrm{M}_2(r),\quad \mathrm{M}_3(r),\ldots \tag{2}$$

questi massimi; chiameremo *massimo principale* il massimo dei numeri (1),[2] cioè quel numero $\mathrm{M}(r)$ che, per ogni valore di $r$, soddisfa simultaneamente le relazioni:

$$\mathrm{M}(r) \geqq \mathrm{M}_1(r), \qquad \mathrm{M}(r) \geqq \mathrm{M}_2(r), \ldots$$

in una almeno delle quali, deve valere il segno di eguaglianza.

Avremo intanto, in generale:

$$\mathrm{M}_n(r) = \mathrm{R}(r, \varphi_n)$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

dove $\varphi_n$ è una radice dell'equazione:

$$\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \varphi} = 0. \tag{3}$$

Col variare di $r$, uno dei massimi della successione (1) può diventare un minimo e viceversa; e così anche può sparire o comparire quando, col variare di $r$, una radice reale della (3) diventa complessa e viceversa. Da ciò segue, che il numero dei massimi della successione (2) non è costante pei diversi valori di $r$.

La funzione $\mathrm{M}(r)$ può altresì, cambiar forma col variare di $r$, nel senso che, per valori diversi di $r$, può essere rappresentata da funzioni diverse della successione (2).

---

(1) *Math. Ann.* Band. 31; pag. 337.

(2) Certamente esistente per le limitazioni fatte sulla funzione $\psi(z)$.

**2.** Si dimostra (¹) che, tra $k$ e $k_1$, la funzione $M(r)$ non può aver massimi e può avere, al più, un minimo.

Se esiste, indichiamolo con $\mu$ e indichiamo con $\rho$ il valore di $r$ per il quale la funzione $M(r)$ assume il valore $\mu$; diremo che $\mu$ è il *modulo principale* della funzione $\psi(z)$.

Se il modulo principale è un valore che $|\psi(z)|$ assume per un valore $\zeta$ di $z$ ($|\zeta| = \rho$), radice dell'equazione

$$\psi'(z) = 0 \tag{4}$$

cioè, se la (4) ha una radice $\zeta$ che soddisfa le condizioni:

$$\mu = |\psi(\zeta)|, \qquad \rho = |\zeta| \tag{5}$$

diremo che $\mu$ è un *modulo principale critico*; nel caso contrario, cioè, se la (5) non ha punte radici che soddisfino le (5) diremo che $\mu$ è un *modulo principale non critico.*

**3.** Poichè è utile, in molte questioni, sapere se il *modulo principale* di una funzione sia o no *critico*, vogliamo ora stabilire un teorema che ce ne dia la condizione necessaria e sufficente.

Facciamo, all'uopo, le seguenti considerazioni:

Il valore $\mu$ del *modulo principale* della funzione $\psi(z)$, sarà, per quello che abbiamo detto al n. 2, assunto dalla funzione $M(r)$ in un unico punto $\rho$. Sarà dunque:

$$\mu = M(\rho).$$

Indichiamo con:

$$\overline{M_1(r)}, \qquad \overline{M_2(r)}, \ldots \tag{6}$$

quelli, fra i numeri della successione (2), che per $r = \rho$ hanno il valore $\mu$, per cui:

$$\overline{M_1(\rho)} = \overline{M_2(\rho)} = \ldots = \mu.$$

Essi corrisponderanno a certe radici

$$\varphi_1(r), \qquad \varphi_2(r), \ldots$$

dell'equazione (3); indichiamo con:

$$\varphi_1, \ \ \varphi_2, \ \ \varphi_3, \ldots$$

i valori di queste radici per $r = \rho$. Allora:

$$z_1 = \rho e^{i\varphi_1}, \qquad z_2 = \rho e^{i\varphi_2}, \ldots$$

sono tutti e soli valori di $z$ di modulo $\rho$ pei quali:

$$\mu = |\psi(z)|.$$

---

(¹) NEKRASSOFF, *Math. Ann.* B. 31; pag. 337.

Supporremo che si abbia:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2} \neq 0$$

nel punto $(\rho, \varphi_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$; così dalla teoria delle funzioni implicite sappiamo, che l'equazione (3), essendo per il valore $r = \rho$ soddisfatta da un valore $\varphi_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ di $\varphi$, definisce completamente una funzione $\varphi$ di $r$ finita e continua nel punto $r = \rho$ (ove essa assume il valore $\varphi_i$) insieme alla derivata.

Ciò premesso, è facile decidere se il *modulo principale* è *critico*.

Affinchè sia:

$$\psi'(\rho, e^{i\omega}) = 0$$

bisogna e basta che risulti:

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0$$

calcolando le derivate per $r = \rho$ e $\varphi = \omega$. (1)

Ora, in virtù delle ipotesi fatte, si ha:

$$(7) \qquad \left(\frac{\partial R}{\partial \varphi}\right)_{\substack{r=\rho \\ \varphi=\varphi_i}} = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots).$$

D'altra parte, in virtù della definizione dei numeri della successione (6), si ha:

$$(8) \qquad M'_i(r) = \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\partial R}{\partial \varphi} \frac{d\varphi_i(r)}{dr} \; (i = 1, 2, \ldots)$$

dove, nelle derivate $\dfrac{\partial R}{dr}$ e $\dfrac{\partial R}{\partial \varphi}$ bisogna porre:

$$\varphi = \varphi_i(r).$$

(1) Posto:

$$\psi(z) = Re^{i\Phi}$$

si ha infatti:

$$\psi'(z)\frac{z}{r} = e^{i\Phi}\left(\frac{\partial R}{\partial r} + iR\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right); \qquad \psi'(z)\,zi = e^{i\Phi}\left(\frac{\partial R}{\partial \varphi} + iR\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right)$$

e dal confronto di queste equazioni:

$$\frac{\partial R}{\partial \varphi} = -rR\frac{\partial \Phi}{\partial r}; \qquad r\frac{\partial R}{\partial r} = R\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}.$$

La condizione è adunque sufficiente. Ed è anche necessaria perchè, se $\psi'(z) = 0$, dalle equazioni:

$$\frac{\partial R}{\partial r} + iR\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial R}{\partial \varphi} + iR\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0$$

si ricava:

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0.$$

Facciamo nella (8), $r = \rho$; per la (6), si ha:

$$\overline{M'_i(\rho)} = \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)_{\substack{r=\rho \\ \varphi=\varphi_i}}. \tag{9}$$

Se supponiamo che $\mu$ sia *critico*, dovrà esser nulla almeno una delle quantità:

$$\psi'(z_1), \quad \psi'(z_2)$$

poniamo $\psi'(z_j)$. Allora, in virtù delle osservazioni fatte, e per la (9), risulta:

$$M'_j(\rho) = 0. \tag{10}$$

Inversamente, supposta verificata la (10), dalle (8) e (7) risulta:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)_{\rho,\varphi_j} = \left(\frac{\partial R}{\partial \varphi}\right)_{\rho,\varphi_j} = 0$$

cioè:

$$\psi'(z_j) = 0.$$

Si avrà dunque:

$$\mu = |\psi(z_j)|, \qquad |z_j| = \rho, \qquad \psi'(z_j) = 0$$

e il minimo $\mu$ è *critico*.

Possiamo dunque enunciare il

TEOREMA. — *Siano*:

$$\overline{M_1(r)}, \quad \overline{M_2(r)}, \quad \overline{M_3(r)}, \ldots \tag{11}$$

*i numeri della successione* (2) *che per* $r = \rho$ *hanno il valore del* **modulo principale** $\mu$ *e siano*:

$$\varphi_1(r), \quad \varphi_2(r), \quad \varphi_3(r), \ldots$$

*le radici dell'equazione* (3) *cui essi corrispondono; se*:

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \ldots$$

*sono i valori di queste radici per* $r = \rho$ *e se*:

$$\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2}\right)_{\substack{r=\rho \\ \varphi=\varphi_i}} \neq 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots)$$

*condizione necessaria e sufficiente affinchè il* **modulo principale** *della funzione* $\psi(z)$ *sia* **critico** *è, che fra i numeri* (11) *ve ne sia almeno uno la cui derivata rispetto a* $r$, *si annulli per* $r = \rho$.

**4.** Se interpretiamo $r$ e $m$ come coordinate cartesiane ortogonali di un punto del piano, pel punto $(r = \rho, m = \mu)$ passerà, in generale, la curva:

$$(m = M_i(r)$$

e la condizione necessaria e sufficiente affinchè $\mu$ sia *critico* è che tra queste curve ve ne sia almeno una che tocchi la retta $m = \mu$.

**5.** Si osservi in particolare, che se la serie (11) contiene un solo elemento, la condizione necessaria e sufficiente affinchè $\mu$ sia *critico* è $M'(\rho) = 0$. Ma il teorema superiore ci rivela la possibilità di avere un minimo *critico* senza che sia $M'(\rho) = 0$. Se, infatti si ha:

$$M(r) = M_1(r) \qquad \text{per } r < \rho$$
$$M(r) = M_2(r) \qquad \text{per } r > \rho$$

se la serie (11) contiene almeno un terzo elemento $\overline{M_3(r)}$ in modo che si abbia:

$$M'_1(\rho) \neq 0, \qquad M'_2(\rho) \neq 0, \qquad M'_3(\rho) = 0,$$

il *modulo principale* $\mu$ sarà *critico* senza che si annulli la derivata, rispetto a $r$, di $M(r)$, per $r = \rho$.

Prof. Guido Sadun.
(Cagli)

---

## EQUAZIONI LE CUI RADICI FORMANO UNA PROGRESSIONE GEOMETRICA

**1.** Il sig. Occhipinti in una recente *Nota* (1) si è proposto di cercare un criterio per decidere quando è che un'equazione intera del grado $n$

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (1)$$

ha le radici del tipo

$$x_s = r\rho^{s-1} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2)$$

e poi di risolverla, esprimendo $r$ e $\rho$ mediante i coefficienti.

L'A. enuncia il teorema: *la risoluzione di un'equazione che ammette le radici in progressione geometrica si riduce alla risoluzione di una equazione del 3° grado.*

Ora è lecito di dubitare della sua validità, perchè da esso seguirebbe in particolare, ed in contraddizione con un classico teorema di Gauss, che *l'equazione binomia* $x^n - 1 = 0$ *si può risolvere algebricamente mediante una equazione del 3° grado.*

L'A. nell'enunciare il teorema non ha tenuto conto che nella sua risolvente del 3° grado

$$\rho^2 + \frac{a_1^2 a_n^{\frac{2}{n}} - 2a_2^2 - (a_1^2 - a_2)^2}{a_2}\rho^2 + \frac{a_2^2 - a_1^2 a_n^{\frac{2}{n}} + 2(a_1^2 - a_2)^2}{a_1^2 - a_2}\rho - 1 = 0 \qquad (3)$$

(1) Anno XX, fasc. IV (1905) del *Periodico*.

e nell'altra

$$r = -a_n^{\frac{1}{n}} : \rho^{\frac{n-1}{2}} \tag{4}$$

che, conosciuto $\rho$, dà $r$, vi è il simbolo $a_n^{\frac{1}{n}}$, e che perciò *alla risoluzione della* (3) *bisogna premettere quella dell'equazione binomia* $x^n - a_n = 0$.

Ma con questa correzione quel teorema perde ogni interesse, anzi le formole (3) e (4), anzichè risolvere la quistione, non fanno che complicarla, trasformandola in un'altra di Algebra Superiore, mentre che, come proverò, la risoluzione di un'equazione le cui radici formano una progressione geometrica si riduce a quella di una semplicissima equazione del 2° grado, tranne che per tipi speciali di equazioni.

Ad ogni modo le (3) e (4) son sempre insufficienti pel calcolo di $\rho$ ed $r$. Infatti la (3) non rappresenta un'equazione sola ma $n$, essendo appunto $n$ i valori di $a_n^{\frac{1}{n}}$; e la (4) per ogni valor di $\rho$ ne dà 2 per $r$; dunque le (3) e (4) dànno $6n$ coppie di valori per $\rho$ e $r$. Ed evidentemente son troppe per essere accettabili tutte.

Dunque la quistione è ben lungi dall'essere risoluta e merita di esser ripresa *ab ovo*.

**2.** Cercherò anzitutto un criterio per discernere le equazioni a radici in progressione geometrica.

Per le note relazioni di *Girard* tra i coefficienti e le radici di un'equazione, si ha

$$-a_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r\,\frac{1-\rho^n}{1-\rho}, \tag{5}$$

$$(-1)^n a_n = x_1 x_2 \ldots x_n = r^n \rho^{\frac{n(n-1)}{2}}, \tag{6}$$

$$(-1)^{n-1} a_{n-1} = x_1 x_2 \ldots x_n \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) = r^{n-1}\,\frac{1-\rho^n}{1-\rho}\,\rho^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \tag{7}$$

poi, quadrando la (5),

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + 2a_2 = a_1^2$$

ossia

$$r^2\,\frac{1-\rho^{2n}}{1-\rho^2} + 2a_2 = a_1^2 \tag{8}$$

da cui

$$a_2 = r^2 \rho\,\frac{(1-\rho^{n-1})(1-\rho^n)}{(1-\rho)^2(1+\rho)}. \tag{8)'$$

**3.** Supponiamo anzitutto $a_{n-1} \neq 0$, cioè che non sia $r = 0$ o $\rho = 0$ o $\rho$ radice $n^{ma}$ dell'unità; allora sarà pure $a_1 \neq 0$ e $a_n \neq 0$ e si avrà

$$\frac{a_1 a_n}{a_{n-1}} = r^2 \rho^{n-1} \tag{9}$$

ossia

$$\frac{a_1 a_n}{a_{n-1}} = x_s x_{n-s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

*Questa relazione dà il prodotto delle due radici estreme della progressione e di due radici equidistanti dalle estreme, e per n dispari dà come radice dell'equazione uno dei due valori di* $\sqrt{\frac{a_1 a_n}{a_{n-1}}}$.

La (9) è dunque necessaria affinchè le radici formino una progressione geometrica. Essa esprime che, se nell'equazione si cambia $x$ in $\frac{a_1 a_n}{a_{n-1} x}$, l'equazione trasformata

$$\sum_{s=0}^{n} a_s \left(\frac{a_1 a_n}{a_{n-1} x}\right)^{n-s} = 0 \qquad \text{o} \qquad \sum_{s=0}^{n} a_{n-s} \left(\frac{a_1 a_n}{a_{n-1}}\right)^s x^{n-s} = 0,$$

ove $a_0 = 1$, deve avere le stesse radici; e però dev' essere

$$a_s a^s_{n-1} = a_1^s a_{n-s} a_n^{s-1} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n;\ a_0 = 1).$$

Queste relazioni son necessarie, ma non sono indipendenti. Infatti per $s = n$ dànno

$$a^n_{n-1} = a_1^n a_n^{n-2} \tag{11}$$

e, delle rimanenti, due che corrispondono a valori di $s$ complementari rispetto ad $n$ (cioè $s$ ed $n - s$), moltiplicate tra loro dànno la (11); poi per $s = 1$ si ha un' identità; dunque basta dare ad $s$ i valori $2, 3, \ldots, k, n$ ove $k = \left[\frac{n}{2}\right]$ $\left(\text{massimo intero contenuto in } \frac{n}{2}\right)$.

Posto

$$y_s = x_s \sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_1 a_n}} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

si ha per la (10)

$$y_s \cdot y_{n-s} = x_s x_{n-s} \frac{a_{n-1}}{a_1 a_n} = 1;$$

dunque, eseguendo sulla (1) la trasformazione

$$x = y \sqrt{\frac{a_1 a_n}{a_{n-1}}}, \tag{12}$$

si avrà un' equazione autoreciproca $\varphi(y) = 0$, la quale, quando $n$ è dispari, avrà per radice 1 o $-1$, secondo che il valore scelto nella (12) pel radicale è ugnale o è opposto al valore che, come sappiamo, è radice della (1).

Se (1) ha le radici del tipo (2), sarà verificata la (9), e però $\varphi(y) = 0$ avrà radici del tipo

$$y_s = r\rho^{s-1} \cdot \frac{1}{r} \rho^{\frac{1-n}{2}} = \rho^{s - \frac{n+1}{2}} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{13}$$

Viceversa se $\varphi(y) = 0$ ha le radici di questo tipo, per la (12) la (1) avrà le radici in progressione geometrica.

Affinchè poi $\varphi(y) = 0$ abbia le radici del tipo (13) è necessario e sufficiente che le equazioni

$$\varphi\left(y^{s - \frac{n+1}{2}}\right) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

abbiano tutte una stessa radice in comune; anzi, essendo $\varphi(y)=0$ autoreciproca, basta prendere $s=k+1,\ k+2,\dots,n$ se $n=2k$, e $s=k+2,\ k+3,\dots,n$ se $n=2k+1$, e nel primo caso si può ad $y$ sostituire $y^2$, per evitare esponenti fratti.

Raccogliendo, si ha il

Teorema. — *Affinchè l'equazione* (1), *in cui* $a_{n-1} \neq 0$, *abbia le radici in progressione geometrica è necessario e sufficiente:*

1° *che sia* $a_1 \neq 0$ *e* $a_n \neq 0$;

2° *che sia*

$$a_s a^s_{n-1} = a_1^s a_{n-s} a_n^{s-1} \qquad \left(s=2,\ 3,\dots,k,\ n;\ k=\left[\frac{n}{2}\right]\right);$$

3° *che, detta* $\varphi(y)=0$ *l'equazione che si deduce dalla* (1) *con la trasformazione*

$$x=y\sqrt{\frac{a_1 a_n}{a_{n-1}}},$$

*le equazioni*

$$\begin{array}{lll} \varphi(y)=0, & \varphi(y^3)=0,\dots,\varphi(y^{2k-1})=0 & \text{se } n=2k \\ \varphi(y)=0, & \varphi(y^2)=0,\dots,\varphi(y^k)=0, & \text{se } n=2k+1 \end{array}$$

*abbiano una stessa radice in comune.*

Scolio. — Quando $n=2k+1$ si può a $\varphi(y)$ sostituire $\dfrac{\varphi(y)}{y-1}$ o $\dfrac{\varphi(y)}{y+1}$, secondochè $\varphi(y)=0$ ammette per radice 1 o $-1$.

In pratica l'applicazione della terza parte di questo criterio offre gravi difficoltà. Così per un'equazione appena del 4° grado, richiede la formazione del risultante delle equazioni $\varphi(y)=0$, $\varphi(y^3)=0$ dei gradi 4 e 12 rispettivamente.

Darò a questa terza parte un'altra forma molto più utile in pratica, almeno per le equazioni di grado non troppo alto.

L'equazione autoreciproca $\varphi(y)=0$, privata della radice 1 o $-1$ se $n=2k+1$, sarà del tipo

$$b_0(y^{2k}+1)+b_1(y^{2k-1}+y)+\dots+b_{k-1}(y^{k+1}+y^{k-1})+b_k y^k=0 \qquad (14)$$

o

$$b_0\left(y^k+\frac{1}{y^k}\right)+b_1\left(y^{k-1}+\frac{1}{y^{k-1}}\right)+\dots+b_{k-1}\left(y+\frac{1}{y}\right)+b_k=0.$$

Posto

$$y+\frac{1}{y}=z,$$

è noto che le somme

$$y^2+\frac{1}{y^2},\quad y^3+\frac{1}{y^3},\dots,y^k+\frac{1}{y^k}$$

si esprimono come funzioni intere dei gradi $2, 3,\dots,k$ in $z$ mediante la relazione ricorrente

$$y^s+\frac{1}{y^s}=\left(y^{s-1}+\frac{1}{y^{s-1}}\right)z-\left(y^{s-2}+\frac{1}{y^{s-2}}\right) \qquad (s=2,\ 3,\dots)$$

e che l'equazione (14) si trasforma in un'altra $\psi(z)=0$ di grado $k$. Ora se le radici della (14) sono del tipo

$$\left.\begin{array}{ll} y^{-k},\ y^{1-k},\dots,y^{-1},\ y,\ y^2,\dots,y^k & \text{se } n=2k+1 \\ y^{1-2k},\ y^{3-2k},\dots,y^{-1},\ y,\ y^3,\dots,y^{2k-1} & \text{se } n=2k \end{array}\right\} \tag{15}$$

come esige il criterio precedente, le radici di $\psi(z)=0$ saranno appunto le somme

$$z_1=y+\frac{1}{y},\quad z_2=y^2+\frac{1}{y^2},\dots,z_k=y^k+\frac{1}{y^k}\quad \text{se } n=2k+1$$

$$z_1=y+\frac{1}{y},\quad z_3=y^3+\frac{1}{y^3},\dots,z_{2k-1}=y^{2k-1}+\frac{1}{y^{2k-1}}\quad \text{se } n=2k$$

e però saranno esprimibili tutte mediante la prima $z_1$ con la relazione ricorrente

$$z_s=z_{s-1}z_1-z_{s-2}\qquad (s=2,3,\dots;\ z_0=2). \tag{16}$$

Viceversa: se le radici $z_1\, z_2,\dots,z_k$ se $n=2k$, o $z_1\, z_3,\dots,z_{2k-1}$ se $n=2k-1$, di $\psi(z)=0$ sono tutte esprimibili come funzioni intere di $z_1$ mediante la (16), dette $y_s\varphi\frac{1}{y_s}$ le radici di $\varphi(y)=0$ che corrispondono a $z_s$, si ha

$$y_s+\frac{1}{y_s}=\left(y_{s-1}+\frac{1}{y_{s-1}}\right)\left(y_1+\frac{1}{y_1}\right)-\left(y_{s-2}+\frac{1}{y_{s-2}}\right)\quad (y_0=1)\,;$$

in particolare

$$y_2+\frac{1}{y_2}=\left(y_1+\frac{1}{y_1}\right)\left(y_1+\frac{1}{y_1}\right)-2=y_1^2+\frac{1}{y_1^2}$$

ed è poi facile vedere col *metodo di induzione completa da* s *a* s+1 che in generale

$$y_s+\frac{1}{y_s}=y_1^s+\frac{1}{y_1^s}$$

ossia

$$(y_s-y_1^s)(y_sy_1^s-1)=0,$$

da cui $y_s=y_1^s$ o $y_s=y_1^{-s}$ e però la (14) ha le radici del tipo (15), come esige il criterio.

Dunque la terza condizione del teorema precedente può essere sostituita dall'altra: *che detta* $z_1$ *una certa radice dell'equazione* $\psi(z)=0$ *di grado* k, *a cui si abbassa* $\varphi(y)=0$ *con la trasformazione* $y+\frac{1}{y}=z$, *le altre radici sieno* $z_2\, z_3\dots z_k$ *se* $n=2k+1$, o $z_3\, z_5\dots z_{2k-1}$ *se* $n=2k$ *essendo in generale* $z_s$ *quella funzione razionale intera di grado* s *in* $z_1$ *che si deduce dalla relazione ricorrente*

$$z_s=z_{s-1}\,z_1-z_{s-2}\qquad (z_0=2).$$

**4.** Supponiamo $a_{n-1}=0$.

Per la (7) sarà $r=0$ o $\rho=0$ o $1+\rho+\dots+\rho^{n-1}=0$.

Per essere $r=0$, ossia $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, la (1) deve ridursi a $x^n=0$ e per essere $\rho=0$, ossia $x_1=r$, $x_2=\ldots=x_n=0$, la (1) deve ridursi a $x^n-rx^{n-1}=0$ e quindi a $x^n+a_1x^{n-1}=0$, essendo $-a_1=x_1+\ldots+x_n=r$.

Che se poi $1+\rho+\ldots+\rho^{n-1}=0$, cioè se $\rho$ è una radice $n^{ma}$ dell'unità, detto $s$ l'*esponente cui essa appartiene* (divisore di $n$) cioè supposto $\rho$ radice primitiva dell'equazione $x^s-1=0$, sarà evidentemente

$$f(x)=(x^s-r)^{\frac{n}{s}}=x^n-\frac{n}{s}r^sx^{n-s}+\ldots$$

quindi

$$a_s=-\frac{n}{s}r^s,$$

da cui

$$r^s=-\frac{s}{n}a_s,$$

e però

$$f(x)=\left(x^s+\frac{s}{n}a_s\right)^{\frac{n}{s}}.$$

Si ha così il

Teorema. — *Affinchè l'equazione* (1), *in cui* $a_{n-1}=0$, *abbia le radici in progressione geometrica è necessario e sufficiente che sia* $f(x)=x^n$ *o* $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}$, *o che, detto* $a_s$ *il primo coefficiente che non è nullo, sia* $s$ *un divisore di* $n$ *maggiore di* 1 *e sia*

$$f(x)=\left(x^s+\frac{s}{n}a_s\right)^{\frac{n}{s}}.$$

**5.** Applichiamo questi risultati alle equazioni del 3° 4° e 5° grado. Sia

$$f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0. \qquad (17)$$

Se $a_2 \neq 0$, pel teorema del § 3 dev'essere anche $a_1 \neq 0$, $a_3 \neq 0$ ed $a_3a_2^3=a_1^3a_3^2$ ossia $a_2^3=a_1^3a_3$. Se poi $a_2=0$, pel teorema del § 4, dev'essere o $f(x)=x^3$ o $f(x)=x^3+a_1x^2$ o $f(x)=x^3+a_3$; ma applicando illecitamente la $a_2^3=a_1^3a_3$ a questo caso, si ha $a_3=0$ o $a_1=0$ e si trovano appunto i tipi precedenti, dunque quella condizione è necessaria e sufficiente anche nel caso $a_2=0$.

Dunque: *la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione generale* (17) *del* 3° *grado abbia le radici in progressione geometrica è*

$$a_2^3=a_1^3a_3.$$

Corollario. — *L'equazione* $x^3+px+q=0$ *non può avere le radici in progressione geometrica, a meno che non si riduca a* $x^3=0$.

**6.** Sia

$$f(x)=x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0. \qquad (18)$$

Se $a_3 \neq 0$, la prima condizione del teorema del § 3 impone che sia

$$a_1 \neq 0 \qquad \text{e} \qquad a_4 \neq 0 \qquad (19)$$

e la seconda che sia

$$a_2 a_3^2 = a_1^2 a_2 a_4 \quad \text{e} \quad a_3^4 = a_1^4 a_4^2. \tag{20}$$

Supposto che queste condizioni si verifichino, eseguendo sulle (18) la trasformazione $x = \alpha y$, ove $\alpha = \sqrt{\frac{a_1 a_4}{a_3}}$, l'equazione trasformata

$$\varphi(y) = \alpha^4 y^4 + a_1 \alpha^3 y^3 + a_2 \alpha^2 y^2 + a_3 \alpha y + a_4 = 0$$

sarà autoreciproca e si potrà scrivere

$$\varphi(y) = a_4 (y^4 + 1) + a_3 \alpha (y^3 + y) + a_2 \alpha^2 y^2 = 0;$$

dividendola per $y^2$ e ponendo $y + \frac{1}{y} = z$, essa si riduce a

$$\psi(z) = a_3 a_4 z^2 + a_3^2 \alpha z + (a_1 a_2 - 2a_3) a_4 = 0,$$

chè $\alpha^2 = \frac{a_1 a_4}{a_3}$. Dette $z_1$ e $z_3$ le radici di questa equazione dev'essere $z_3 = z_1^3 - 3z_1$, ossia $z_1 + z_3 = z_1^3 - 2z_1$; ma $z_1 + z_3 = -\frac{a_3 \alpha}{a_4}$, dunque

$$a_4 z_1^3 - 2a_4 z_1 + a_3 \alpha = 0.$$

Sottraendo questa moltiplicata per $a_4$, da $z_1 \psi(z_1) = 0$, si ha

$$a_3^2 \alpha z_1^2 + a_1 a_2 a_4 z_1 - a_3^2 \alpha = 0$$

e sottraendo questa moltiplicata per $a_4$ da $\alpha a_3 \psi(z_1) = 0$, risulta

$$a_1 a_4 (a_3^2 - a_2 a_4) z_1 + a_3 a_4 \alpha (a_1 a_2 - a_3) = 0;$$

ricavando da questa il valore di $z_1$ e sostituendolo nella precedente si ha, dopo facili sviluppi e riduzioni,

$$-a_1 a_3^5 + a_3^4 a_4 + a_1 a_2 a_3^3 a_4 - 2a_1 a_2^2 a_3 a_4^2 + a_1^2 a_2^3 a_4^2 = 0. \tag{21}$$

Dunque se $a_3 \neq 0$, le (19), (20) e (21) sono condizioni necessarie e sufficienti; ma possono semplificarsi. La 1ª delle (20) si scinde in due

$$a_2 = 0 \quad \text{o} \quad a_3^2 = a_1^2 a_4.$$

Se $a_2 = 0$ la (21) dà $-a_1 a_3^5 + a_3^4 a_4 = 0$ ossia $a_4 = a_1 a_3$, per cui la 2ª delle (20) diventa $a_3^4 = a_1^6 a_3$ ossia $a_3 = \pm a_1^3$, e però

$$f(x) = x^4 + a_1 x^3 \pm a_1^3 x \pm a_1^4 = (x^3 \pm a_1^3)(x + a_1). \tag{22}$$

Se $a_3^2 = a_1^2 a_4$, la 2ª delle (20) resta soddisfatta e la (21) ponendovi $a_4 = \frac{a_3^2}{a_1^2}$ diventa

$$-a_1^4 a_3 + a_1^2 a_2 a_3 + a_2^2 a_1 + a_2^3 a_1 - 2a_2^2 a_3 = 0.$$

Queste condizioni illecitamente applicate quando $a_2 = 0$ conducono alla (22).

Infine, se $a_3 = 0$, pel teorema del § 4 si ha che

$$f(x) = x^4 + a_1 x^3 \quad \text{o} \quad f(x) = (x^2 + \tfrac{1}{2} a_2)^2 \quad \text{o} \quad f(x) = x^4 + a_4.$$

Raccogliendo si ha il teorema: *Affinchè l'equazione generale* (18) *del* 4° *grado abbia le radici in progressione geometrica è necessario e sufficiente che sia*

$$f(x)=x^4+a_1x^3, \quad \text{o} \quad f(x)=(x^2+\tfrac{1}{2}a_2)^2 \quad \text{o} \quad f(x)=x^4+a_4$$

*o che sia*

$$\left.\begin{array}{c} a_3 \neq 0, \qquad a_4a_1^2=a_3^2 \\ -a_1^4a_3+a_1^3a_2a_3+a_3^2a_1+a_3^3a_1-2a_2^2a_3=0 \end{array}\right\}.$$

**7.** Sia

$$f(x)=x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5=0. \tag{23}$$

Se $a_4 \neq 0$, il teorema del § 3 impone anzitutto che sia

$$\begin{array}{ccc} a_1 \neq 0 & \text{e} & a_5 \neq 0 \\ a_2a_4^2=a_1^2a_3a_5 & \text{e} & a_4^5=a_1^5a_5^3 \end{array} \tag{24}$$

ma le prime due sono una conseguenza della 4ª e però inutili. Supposto verificate le (24), eseguendo sulla (23) la trasformazione $x=\alpha y$, ove $\alpha=\sqrt{\frac{a_1a_5}{a_4}}$, l'equazione trasformata

$$\varphi(y)=\alpha^5x^5+a_1\alpha^4y^4+a_2\alpha^3y^3+a_3\alpha^2y^2+a_4\alpha y+a_5=0$$

sarà autoreciproca e ammetterà per radice 1, se conveniamo di prendere per $\alpha$ quel valore di $\sqrt{\frac{a_1a_5}{a_4}}$ che dev'essere radice della (23) e però si potrà scrivere

$$\varphi(y)=a_5(y^5-1)+\alpha a_4(y^4-y)+\alpha^2a_3(y^3-y^2)=0,$$

che divisa per $y-1$ diventa

$$a_5(y^4+1)+(a_5+\alpha a_4)(y^3+y)+(a_5+\alpha a_4+\alpha^2a_3)\,y^2=0\,;$$

questa, divisa per $y^2$, si riduce a

$$\psi(z)=a_5z^2+(a_5+\alpha a_4)\,z+(\alpha^2a_3+\alpha a_4-a_5)=0,$$

ove si è posto $y+\frac{1}{y}=z$.

Dette $z_1$ e $z_2$ le sue radici, dev'essere $z_2=z_1^2-2$ ossia $z_1+z_2=$ $=z_1^2+z_1-2$; ma $z_1+z_2=-\frac{a_5+\alpha a_4}{a_5}$, dunque

$$a_5z_1^2+a_5z_1+(\alpha a_4-a_5)=0.$$

Sottraendo da $\psi(z_1)=0$, risulta $\alpha a_4z_1+\alpha^2a_3=0$; ricavando il valore di $z_1$, e sostituendolo nell'equazione precedente, si ha facilmente

$$(a_1a_3^2a_5-a_4^3)\,a_5=(a_3a_5-a_4^2)\,a_4^2\alpha\,;$$

quadrando e tenendo presente che $\alpha^2=\frac{a_1a_5}{a_4}$, si ha infine

$$(a_1a_3^2a_5-a_4^3)^2\,a_5=(a_3a_4-a_4^2)^2\,a_4^3a_1\,.$$

Se poi $a_4 = 0$, il teorema del § 4 dà o $f(x) = x^5$, o $f(x) = x^5 + a_1 x^4$ o $f(x) = x^5 + a_5$.

Dunque: *affinchè l'equazione generale* (23) *del* 5° *grado abbia le radici in progressione geometrica è necessario e sufficiente che sia*

$$f(x) = x^5 + a_1 x^4 \qquad \text{o} \qquad f(x) = x^5 + a_5$$

*oppure*

$$\left.\begin{array}{c} a_4 \neq 0,\ a_3 a_4^2 = a_1^2 a_3 a_5,\ a_4^5 = a_1^5 a_5^3 \\ (a^1 a_3^2 a_5 - a_4^3)^2 a_5 = (a_3 a_5 - a_4^3)^2 a_4^3 a_1 \end{array}\right\}.$$

**8.** Ora passiamo a risolvere l'equazione (1) nell'ipotesi che essa abbia le radici che formino una progressione geometrica, cioè che sieno verificate le condizioni enunciate nel teorema del § 3 o del § 4. Basterà calcolare $r$ e $\rho$.

Supponiamo anzitutto $a_{n-1} \neq 0$, allora per la (7) sarà

$$r \neq 0, \qquad \rho \neq 0, \qquad \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} \neq 0$$

e quindi anche $a_1 \neq 0$ per la (5).

Essendo $a_{n-1} \neq 0$, regge la (9), quindi la (5), moltiplicata per $r$, diventa

$$-a_1 r = \frac{1}{1 - \rho}\left(r^2 - \rho \frac{a_1 a_n}{a_{n-1}}\right)$$

ossia

$$a_{n-1} r^2 + a_1 a_{n-1} (1 - \rho) r - a_1 a_n \rho = 0. \tag{25}$$

La (8), per la (5) può scriversi

$$2a_2 - a_1^2 = a_1 r \frac{1 + \rho^n}{1 + \rho};$$

questa moltiplicata per $r$ diventa, per la (9),

$$(2a_2 - a_1^2) r = \frac{a_1}{1 + \rho}\left(r^2 + \rho \frac{a_1 a_n}{a_{n-1}}\right)$$

ossia

$$a_1 a_{n-1} r^2 - a_{n-1} (2a_2 - a_1^2)(1 + \rho) r + a_1^2 a_n \rho = 0. \tag{26}$$

Combinando per sottrazione la (26) e la (25) moltiplicata per $a_1$, si ha

$$a_{n-1} r [a_2 + (a_2 - a_1^2) \rho] - a_1^2 a_n \rho = 0, \tag{27}$$

invece, cambiandole per addizione e dividendo il risultato per $a_{n-1} r$ si ha

$$a_1 r - a_2 \rho + a_1^2 - a_2 = 0. \tag{28}$$

Ricavando $r$ da questa equazione e sostituendolo nella (27) si ha un'equazione di 2° grado in $\rho$; quindi il

Teorema. — *Se l'equazione* (1) *del grado* n *ha le radici che formano una progressione geometrica ed* $a_2 \neq 0$ *e* $a_2 - a_1^2 \neq 0$, *la ragione* $\rho$ *della progressione è una qualunque delle radici dell'equazione.*

$$\rho^2 + \left[2 + \frac{a_1^3 (a_{n-1} a_1 - a_n)}{a_2 (a_2 - a_1^2) a_{n-1}}\right] \rho + 1 = 0$$

*ed il primo termine* r *è*

$$r = \frac{a_2}{a_1}(1-\rho) - a_1 \,. \text{ [1]}$$

**9.** Esaminiamo i due casi esclusi, cioè $a_2 = 0$ o $a_2 - a_1^2 = 0$, ma supponendo sempre $a_{n-1} \neq 0$.

Se $a_2 = 0$, segue dalla (8)′ che dev'essere necessariamente

$$1 - \rho^{n-1} = 0$$

perchè negli altri casi in cui si annulla $a_2$ si annulla anche $a_{n-1}$.

Allora $\rho$ sarà una radice $(n-1)^{ma}$ dell'unità, quindi detto $s$ l'esponente (divisore di $n-1$) cui essa appartiene, sarà evidentemente

$$f(x) = (x^s - r^s)^{\frac{n-1}{s}}(x-r) = x^n - rx^{n-1} - \frac{n-1}{s} r^s x^{n-s} + \ldots;$$

e paragonando con la (1) ne segue che $r = -a_1$ e che dev'essere $s > 2$, (dovendo essere $a_2 = 0$) e che $s$ è l'indice del primo coefficiente che segue $a_2$ e che non è nullo. Si ha così il

Teorema. — *Se l'equazione* (1) *del grado* n *ha le radici che formano una progressione geometrica ed è* $\mathrm{a}_{n-1} \neq 0$ *e* $\mathrm{a}_2 = 0$, *il primo termine* r *della progressione è il coefficiente* $\mathrm{a}_1$ *del* 2° *termine cambiato di segno e la ragione* $\rho$ *è una qualunque radice primitiva dell'unità appartenente all'indice* s *del primo coefficiente che segue* $\mathrm{a}_1$ *e che non è nullo.*

Supponiamo ora $a_{n-1} \neq 0$ e $a_2 - a_1^2 = 0$. Segue subito che dev'essere $1 - \rho^{n+1} = 0$, ossia che $\rho^n$ è una radice $(n+1)^{ma}$ dell'unità, perchè dalle (5) e (8)′ si ha facilmente

$$a_1^2 - a_2 = r^2 \frac{(1-\rho^n)(1-\rho^{n+1})}{(1-\rho)^2(1+\rho)}.$$

Detto $s$ l'esponente (divisore di $n+1$) cui $\rho$ appartiene, è facile convincersi che sarà

$$f(x) = (x^s - r^s)^{\frac{n+1}{s}} : (x - x_n) \quad . \text{ ove } \quad x_n = r\rho^n$$

ossia

$$f(x) = x^n + x_n x^{n-1} + x_n^2 x^{n-2} + \ldots + x_n^{s-1} x^{n+1-s} + \left(x_n^s - \frac{n+1}{s} r^s\right) x^{n-s} + \ldots$$

Paragonando con la (1), segue che $x_n = a_1$ e che effettivamente $a_2 - a_1^2 = 0$ purchè non sia $s = 2$, chè in tal caso invece

$$a_2 - a_1^2 = -\frac{n+1}{2} r^2 \neq 0.$$

Osservando che $a_2 = a_1^2$, $a_3 = a_1^3, \ldots, a_{s-1} = a_1^s$, $a_s = a_1^s - \frac{n+1}{s} r^s$, possiamo enunciare il

Teorema. — *Se l'equazione* (1) *del grado* n *ha le radici che formano una progressione geometrica ed è* $\mathrm{a}_{n-1} \neq 0$ *e* $\mathrm{a}_2 - \mathrm{a}_1^2 = 0$, *l'ultimo termine* $\mathrm{x}_n$ *è eguale al coefficiente* $\mathrm{a}_1$ *del* 2° *termine e la ragione* $\rho$ *è una*

---

[1] Nell'enunciato ho tralasciato la condizione $a_{n-1} \neq 0$, perchè essa resta assorbita dall'altra $a_2 \neq 0$, come risulta dal paragone delle (7) e (8)′.

*qualunque radice primitiva dell'unità appartenente all'indice* s *del primo coefficiente* $a_s$ *che non è potenza* $s^{ma}$ *di* $a_1$.

**10.** Infine dal teorema del § 4 segue subito il

TEOREMA. — *Se l'equazione* (1) *del grado* n *ha le radici che formano una progressione geometrica ed è* $a_{n-1}=0$: 1° *o* $f(x)=x^n$ *e le sue radici son tutte nulle;* 2° *o* $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}$, *e le sue radici sono*

$$x_1=-a_1, \qquad x_2=\ldots=x_n=0;$$

3° *o* $f(x)=\left(x^s+\frac{s}{n}a_s\right)^{\frac{n}{s}}$ *con* s *divisore di* n *e maggiore di* 1, *e le sue radici sono le radici* $s^{me}$ *di* $-\frac{s}{n}a_s$, *ove* $a_s$ *è il primo coefficiente di* $f(x)$ *che non è nullo, ripetute* $\frac{n}{s}$ *volte.*

Dott. GUSTAVO SANNIA
(*Torino*.

# SULLA DEFINIZIONE DI AREA DI UNA SUPERFICIE CURVA

**1.** Nella prefazione del suo Corso d'Analisi *Jordan* cita come uno dei punti del Calcolo che ancora sono oscuri la definizione di area di una superficie curva.

Mentre per la lunghezza di un arco di curva piana o storta, si è data già una soddisfacente definizione, dalla quale, e questo è un risultato importante, si è potuto risalire a stabilire a quali condizioni devono soddisfare le funzioni rappresentative di quelle curve acciò esse siano rettificabili, delle definizioni di area di una superficie curva, parecchie sono state riconosciute errate, altre non sono, dal punto di vista logico, immuni da qualche difetto, da nessuna poi delle proposte si è potuto ricavare l'analoga determinazione delle condizioni necessarie e sufficienti cui debbono soddisfare le funzioni che analiticamente rappresentano le superfici, acciò queste ammettano area determinata, se esplicitamente nella definizione non è indicato che essa vale solo per classi particolari di superfici.

È noto infatti che, definendo la lunghezza di un arco di curva come il limite cui tende la lunghezza di una poligonale inscritta, al decrescere indefinito ed arbitrario dei lati, e chiamando rettificabile una curva di cui l'arco ha una lunghezza determinata, funzione continua di un parametro *t*, *Jordan* (1) ha dedotto che le funzioni di *t* con cui sono date le coordinate di un punto corrente della curva, debbono essere continue ed a variazione limitata, acciò la curva stessa sia rettificabile. È da osservare, a questo proposito, che le

(1) JORDAN, *Cours d'Analyse*. Vol. I, pag. 105.

condizioni trovate da *Jordan* sono, in sostanza, a parte la denominazione, quelle già date da *Scheeffer*. [1]

Ma se si rappresenta una superficie mediante tre equazioni

$$x = \varphi_1(u, v), \qquad y = \varphi_2(u, v), \qquad z = \varphi_3(u, v),$$

ove $u$ e $v$ sono due parametri variabili in un certo campo — metodo il più generale di rappresentazione — e si definisce l'area in uno dei tanti modi proposti, non ancora, come dicevamo, si sono trovate le condizioni cui devono soddisfare le $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, acciò la superficie abbia area determinata.

Non ho creduto frattanto del tutto inutile il passare in rassegna parecchie delle definizioni proposte per l'area delle superfici curve, allo scopo di seguire l'evoluzione dei concetti che hanno ispirato le definizioni stesse.

**2.** I Geometri greci, limitandosi allo studio dell'area di alcune superfici del 2° ordine, il cilindro, il cono, la sfera, non diedero una definizione generale di area. *Archimede* [2] enunciò il seguente postulato relativo alle superfici concave: « Se di due superfici concave rispetto ad uno stesso piano e terminate entrambe su di esso, l'una comprende l'altra la compresa ha area minore della comprendente ». Ne discende che l'area di una superficie curva concava è maggiore di quella di qualunque superficie poliedrica concava inscritta e minore di quella di qualunque superficie poliedrica concava circoscritta. Per le superfici accennate *Archimede* dimostrò la coincidenza del limite superiore delle aree delle inscritte col limite inferiore delle aree delle circoscritte, ed il limite comune assunse come area delle superfici.

Si potrebbe, in generale, dimostrare che le aree delle superfici poliedriche concave inscritte e quelle delle superfici poliedriche concave circoscritte ad una superficie curva pure concava, all'impiccolire indefinito delle faccie, costituiscono due classi di numeri contigue: allora il numero da esse definito si può assumere come area della superficie curva.

Ma questo modo di definire l'area non vale più manifestamente per le superfici concavo-convesse, perchè per esse non si può ammettere il postulato enunciato da Archimede.

**3.** Nei trattati di Calcolo che precedono l'ultima metà del secolo scorso, non si premette mai alle considerazioni che riflettono l'area di una superficie curva alcuna definizione. Ciò sarebbe necessario dal punto di vista logico; poichè infatti non si può pensare a dar metodi per calcolare l'area di una superficie, se non si precisa, in precedenza, che cosa s'intenda per l'area stessa.

Non avendo premessa questa definizione, il dire, o peggio, il voler dimostrare, come alcuni annalisti facevano, che una porzione infinitesima $\omega$ di superficie ed una porzione $\omega'$ di piano tangente in un punto di $\omega$, proiezione di $\omega$ stessa secondo una direzione qualunque, differiscono per infinitesimi di ordine superiore, è manifestamente inesatto, perchè non si possono fra loro confrontare superficie curve e piane, neanche nelle parti infinitesime.

*Cousin*, [3] chiamato elemento di una superficie $z = f(x, y)$ il quadrilatero curvilineo staccato nella superficie stessa dal prisma che ha per base un rettangolo coi lati paralleli agli assi $x$ e $y$ e di dimensioni $dx$, $dy$, dice che,

---

(1) SCHEEFFER, *Acta Mathematica*, V.
(2) ARCHIMEDE, *Della sfera e del cilindro*. Libro I.
(3) COUSIN, *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral*. Paris, 1796, vol. I; § 353.

essendo il coseno dell'angolo che la normale alla superficie fa coll'asse $z$ misurato da

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2},$$

è facile vedere che il rapporto dell'elemento di superficie al rettangolo $dxdy$ è

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2},$$

e perciò l'elemento stesso è uguale a

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

e l'area della superficie a

$$\int\int\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

*Lagrange* (¹) comincia col dire che rappresentando con $F(x, y)$ l'area della superficie $z=f(x, y)$,

$$F(x+h,\ y+k)-F(x+h,\ y)-F(x,\ y+k)+F(x,\ y)$$

misura l'area della porzione di superficie che intercetta il prisma retto avente per base sul piano $z=0$ il rettangolo i cui vertici sono i punti

$$(x,\ y),\quad (x+h,\ y),\quad (x,\ y+k),\quad (x+h,\ y+k). \tag{1}$$

Un significato preciso di ciò che intende *Lagrange* ponendo l'area di una superficie curva uguale ad una funzione di $x$ e $y$, $F(x, y)$, si ha mediante quest'osservazione. Data una superficie $z=f(x, y)$, riferita ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, essendo $f$ funzione ad un valore, sia C la proiezione della superficie sul piano $z=0$. Ad ogni punto $(x, y)$ di questa si può coordinare, in virtù di una qualunque convenzione, una delle quattro parti di C in cui due piani condotti pel punto parallelamente ai piani $xz$, $yz$ la dividono, e quindi una determinata parte di superficie, quella che ha per proiezione la parte detta di C. Allora, *data una qualunque definizione di area* si può indicare con $F(x, y)$ l'area della parte di superficie coordinata al punto $(x, y)$ ed *in questo senso*, può dirsi l'area della superficie funzione di $x$ e $y$.

*Lagrange* dice senz'altro di rappresentare con $F(x, y)$ la misura della superficie: credo tuttavia che il significato che a ciò si deve annettere non possa essere che quello ora riferito.

È ora evidente che

$$\Omega(x, y, h, k)=F(x+h,\ y+k)-F(x+h,\ y)-F(x, y+k)+F(x, y)$$

misura l'area del quadrilatero curvilineo $\omega$ tagliato sulla superficie dal prisma retto avente per base il rettangolo i cui vertici sono i punti (1).

Lo stesso prisma stacca sui quattro piani tangenti alla superficie nei punti che sono proiettati nei punti (1), quattro quadrilateri le cui aree sono ordinatamente

$$hk\,\varphi(x,\ y),\quad hk\varphi(x+h,\ y),\quad hk\varphi(x,\ y+k),\quad hk\varphi(x+h,\ y+k) \tag{2}$$

avendo posto

$$\varphi(x,\ y)=\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

---

(¹) LAGRANGE, *Théorie des fonctions analytiques*, Paris, 1813, § 79 e sgg.

Ora — dice *Lagrange* — come la lunghezza di un arco di curva tutto concavo o convesso rispetto all'asse $x$ è compresa fra le lunghezze dei due segmenti di tangenti condotte per gli estremi dell'arco ed intercetti dalle ordinate agli estremi stessi, così l'area $\Omega(x, y, h, k)$ è compresa, per quanto piccoli si facciano $h$ e $k$, fra la massima e la minima delle aree dei quattro quadrilateri (2).

Ora può scriversi

$$hk\varphi(x+h,\ y) = hk\varphi(x,\ y) + h^2k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{\substack{x+\theta h\\ y}}$$

$$hk\varphi(x,\ y+k) = hk\varphi(x,\ y) + hk^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{\substack{x\\ y+\theta' k}}$$

$$hk\varphi(x+h,\ y+k) = hk\varphi(x,\ y) + h^2k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{\substack{x+\theta'' h\\ y+\theta'' k}} + hk^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{\substack{x+\theta'' h\\ y+\theta'' k}}$$

$$\Omega(x,\ y,\ h,\ k) = hk\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)_{\substack{x\\ y}} + \frac{h^3}{3!}\left\{\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)_{\substack{x+\lambda h\\ y+\lambda k}} - \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)_{\substack{x+\lambda' h\\ y}}\right\} +$$
$$+ \frac{k^3}{3!}\left\{\left(\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\right)_{\substack{x+\lambda h\\ y+\lambda k}} - \left(\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\right)_{\substack{x\\ y+\lambda'' k}}\right\} + \frac{h^2k}{2}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial y\,\partial x^2}\right)_{\substack{x+\lambda h\\ y+\lambda k}} + \frac{hk^2}{2}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial y^2\partial x}\right)_{\substack{x+\lambda h\\ y+\lambda k}}$$

con $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$, $\theta$, $\theta'$, $\theta''$ compresi fra 0 ed 1.

E poichè la differenza fra due qualsiansi delle quattro quantità (2) è infinitesima del 3º ordine, considerati $h$ e $k$ come infinitesimi unità, la differenza fra $\Omega(x, y, h, k)$ ed una qualunque delle stesse (2), dovrà essere rispetto ad $h$ e $k$ infinitesima pure del 3º ordine; perciò dovrà essere nullo il termine, infinitesimo del 2º ordine, che in tutte e quattro le differenze compare

$$hk\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} - \varphi(x, y)\right),$$

ossia dovrà essere

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \varphi(x, y),$$

da cui

$$F(x,\ y) = \int\int\varphi(x, y)\,dxdy,$$

la doppia integrazione estesa a quella parte di C che è coordinata al punto $(x, y)$.

*Lacroix* [1] procede in altro modo. Egli dice, conservando i simboli già introdotti, che potendosi scrivere

$$\Omega(x,\ y,\ h,\ k) = hk\left\{\frac{1}{h}\left(\frac{F(x+h,\ y+k) - F(x+h,\ y)}{k} - \frac{F(x,\ y+k) - F(x,\ y)}{k}\right)\right\}$$

il rapporto fra l'area del pezzo di superficie staccato dal noto prisma e la sua proiezione sul piano $z=0$ di area $hk$, tende, al tendere a zero di $h$ e $k$ a $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$.

Si consideri allora il quadrilatero $\omega'$ che lo stesso prisma stacca dal piano tangente nel vertice del quadrilatero curvilineo $\omega$ di coordinate $x$, $y$, $f(x, y)$: la sua area è

$$hk\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

[1] Lacroix, *Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral*. Paris, 1837.

Poichè ciascuna retta pel vertice di $\omega$, che è punto di contatto e giacente sul piano ivi tangente alla superficie, è tangente ad una curva tracciata sulla superficie, e poichè il segmento di detta tangente compreso in $\omega'$ ha coll'arco di curva, a cui è tangente, compreso in $\omega$, un rapporto che all'impiccolire indefinito di $h$ e $k$ tende ad 1, ne consegue, dice *Lacroix*, che altrettanto può dirsi del rapporto $\frac{\omega}{\omega'}$.

Deriva allora

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

e quindi

$$F(x, y) = \int\int \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx dy$$

la doppia integrazione estesa come dianzi.

L'asserzione di *Lagrange* che l'area $\Omega(x, y, h, k)$ sia compresa fra la massima e la minima delle aree dei quadrilateri (2) è manifestamente inesatta: basterebbe, a provarlo, osservare che, se essa fosse giusta, il quadrilatero curvilineo della sfera $x^2+y^2+z^2=r^2$ che si proietta ortogonalmente sul piano $xy$ nel quadrilatero di vertici $(h, h)$, $(h, -h)$, $(-h, h)$, $(-h, -h)$ avrebbe un'area uguale a quella del quadrilatero piano tangente in un vertice qualunque del quadrilatero curvilineo, e che viene proiettato sul quadrato stesso.

Del pari, non è una dimostrazione l'osservazione che *Lacroix* fa per stabilire che il quadrilatero curvilineo $\omega$ e la sua proiezione $\omega'$ sul piano tangente in un vertice di quello, hanno un rapporto che tende ad 1.

Ma se anche si ammette che l'elemento infinitesimo di superficie curva abbia colla sua proiezione sul piano tangente in un punto dell'elemento stesso un rapporto tendente ad 1, mentre resta giustificato che il rapporto fra l'elemento stesso e la sua proiezione sul piano $z=0$ sia

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

tutte le volte che si tratti di una superficie $z=f(x, y)$ che ha un piano tangente determinato in tutti i punti (o generalmente), non si giustifica per niente che il rapporto in parola debba essere $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$.

Infatti, per venire a questa conclusione, è necessario ammettere la derivabilità della $F(x, y)$: ora, che la funzione F stessa, debba essere, qualunque sia la definizione che di area si voglia dare, una funzione continua, è naturale ammettere; che essa sia derivabile, come la considerano *Lagrange* e *Lacroix* non c'è ragione alcuna di presupporlo.

Fallisce con ciò il tentativo di definire *a posteriori* la $F(x, y)$, cioè l'area della superficie curva; ma non va dimenticato che al tempo di quei Matematici si credeva erroneamente che ogni funzione continua fosse derivabile.

**4.** In qualche trattato di Calcolo posteriore si comincia a dare una definizione di area, definizione analoga a quella da noi richiamata in principio per la lunghezza di un arco di curva.

Data una porzione di superficie curva, limitata da un contorno C, *Serret* (1) definisce come area di questa superficie il limite cui tende l'area di una superfice poliedrica inscritta, formata di faccie triangolari e limitata da un

(1) SERRET, *Cours de Calcul différentiel et intégral.*

contorno poligonale che abbia per limite il contorno C, all'impiccolire indefinito delle faccie.

*Serret* ed i molti altri che ne accettarono la definizione, [1] basandosi sopra l'erronea asserzione che il piano per tre punti della superficie tenda, all'avvicinarsi indefinito di 2 punti al terzo, ed in qualunque modo questi punti si avvicinino, al piano tangente alla superficie in quest'ultimo, credevano poter dimostrare che il limite della superficie poliedrica era indipendente dalla legge secondo cui la superficie poliedrica è formata e secondo cui tendono a zero le sue faccie.

Senonchè *Schwarz* [2] e *Peano* [3] dimostrarono con un esempio, che qui riprodurremo, come un tal limite dipenda invece dal modo con cui si fanno tendere a zero le faccie della superficie poliedrica.

Si consideri un cilindro circolare riferito ad un sistema cartesiano ortogonale di assi, in guisa che l'asse del cilindro coincida coll'asse $z$. Se $r$ è il raggio del cilindro, le sue equazioni parametriche sono

$$x = r\cos u \qquad y = r\,\mathrm{sen}\, u \qquad z = v$$

ed $u$ varierà da 0 a $2\pi$; $v$ da 0 ad $h$, considerando la porzione di cilindro compreso fra i piani $z = 0$ e $z = h$.

Imaginiamo i $2n+1$ circoli sezioni del cilindro con altrettanti piani $z = \frac{hs}{2n}$ $(s = 0, 1, \ldots, 2n)$ e sopra i circoli il cui numero d'ordine è pari, cioè sopra quelli che corrispondono ai piani $z = \frac{sh}{n}$ $(s = 0, 1, \ldots, n)$ si segnino gli $m$ punti che corrispondono ai valori di $u = \frac{2r\pi}{m}$ $(r = 0, 1, \ldots, m-1)$ e sopra gli altri circoli si segnino gli $m$ punti che corrispondono ai valori di $u = \frac{(2r+1)\pi}{m}$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$.

Ogni punto di ciascun circolo si congiunga colla coppia di punti posti sul circolo seguente e ad esso punto più prossimi e si uniscano ancora insieme questi due punti.

Si viene in questo modo ad inscrivere nel cilindro una superficie poliedrica di $4mn$ faccie triangolari isosceli uguali, ognuna delle quali ha due vertici su uno stesso cerchio, ed ha l'area

$$r\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{m}\sqrt{4r^2\,\mathrm{sen}^4\frac{\pi}{2m} + \frac{h^2}{4n^2}}\,.$$

Epperò l'area totale della superficie poliedrica sarà

$$\beta(m,\ n) = 2mr\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{m}\sqrt{r^2n^2\left(2\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2m}\right)^4 + h^2}.$$

L'impiccolimento indefinito delle faccie si ottiene facendo crescere indefinitamente $m$ ed $n$; ora se il rapporto $\frac{n}{m}$ si mantiene uguale ad un numero $k$, cioè si ha $n = mk$ si ha manifestamente

$$\lim_{m=\infty}\beta(m,\ n) = 2\pi rh$$

che è la *nota* area del cilindro.

---

(1) Per citarne qualcuno: Dini e Duhamel.

(2) SCHWARZ, *Sur une définition erronée de l'aire d'une surface courbe*, Gesammelte Abhandlungen. Berlin, 1891.

(3) PEANO, *Lezioni di Calcolo dell'anno 1882*, litografate. Vedi ancora il *Formulaire* dello stesso.

Se invece $m$ ed $n$ si fanno crescere in guisa che sia $\frac{n}{m^2} = k$, è

$$\lim_{m=\infty} \beta(m, n) = 2\pi r \sqrt{r^2 k^2 \pi^4 + h^2},$$

che può assumere qualunque valore al variare di $k$.

Infine se $m$ ed $n$ crescono in guisa che $\frac{n}{m^\lambda} = k$, con $\lambda > 2$, si ha evidentemente

$$\lim_{m=\infty} \beta(m, n) = \infty.$$

È facile poi vedere quale sia nei vari casi la posizione limite del piano della faccia generica, al suo impiccolire indefinito.

Il coseno dell'angolo $\xi$ formato dalla normale ad una faccia colla normale al cilindro in un vertice della faccia stessa è

$$\cos\xi = \frac{h\cos\frac{\pi}{m}}{\sqrt{r^2 n^2 \left(2\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2m}\right)^4 + h^2}}.$$

Ora se $n = km$

$$\lim_{m=\infty} \cos\xi = 1 \qquad \text{onde} \qquad \lim\xi = 0;$$

se $n = km^2$

$$\lim_{m=\infty} \cos\xi = \frac{h}{\sqrt{r^2 k^2 \pi^4 + h^2}} < 1,$$

onde

$$\lim\xi \neq 0 \text{ e dipendente da } k;$$

e se infine $n = km^\lambda$ con $\lambda > 2$

$$\lim_{m=\infty} \cos\xi = 0 \qquad \text{onde} \qquad \lim\xi = \frac{\pi}{2}.$$

Con ciò si vede che solo nel caso che l'impiccolimento delle faccie avvenga in modo che sia $n = km$ il piano delle faccie stesse tende al piano tangente al cilindro; negli altri casi tende a posizioni diverse, anzi nell'ultimo caso alla posizione di un piano per la normale alla superficie.

Queste osservazioni di *Schwarz* e di *Peano* determinarono due indirizzi diversi nel porre la definizione di area: o abbandonare, senz'altro, le superficie poliedriche inscritte, oppure conservarle, aggiungendo qualche condizione restrittiva all'impiccolire delle faccie, in guisa da assicurare che il limite delle superficie poliedriche, se esiste, è indipendente, tranne che per le poste condizioni, dalla legge di formazione delle superficie poliedriche stesse.

Il voler mantenere la considerazione delle superficie inscritte era suggerito dall'analogia colla definizione di lunghezza di un arco di curva, analogia che doveva, però, sacrificare uno dei caratteri più desiderabili in una definizione: la non introduzione di elementi estranei all'ente da definirsi, quali, in sostanza, vengono ad essere le restrizioni che si debbono porre.

**5.** Prima di passare in rassegna le nuove definizioni date in seguito alle considerazioni di *Peano* e di *Schwarz*, facciamo ancora qualche osservazione sopra definizioni precedenti.

*Duhamel* [1] dà una definizione analoga a quella del *Serret*, e crede di

[1] DUHAMEL, *Éléments de Calcul infinitésimal*. Paris, 1853, vol. I.

poter dimostrare che il limite dell'area di una qualunque superficie poliedrica inscritta è indipendente dalla legge di formazione delle faccie e della loro tendenza a zero, supponendo che le faccie tendano a divenire infinitamente piccole in tutti i sensi. Egli poi dice che nella ricerca di questo limite si può sostituire alla superficie inscritta una superficie poliedrica circoscritta ottenuta nel modo seguente. Divisa la superficie in quadrilateri curvilinei $\omega_s$ mediante due serie di piani paralleli ad una direzione, secondo la quale ogni retta incontra la superficie in un sol punto, si mandi per un punto qualunque di $\omega_s$ il piano tangente e su di esso si consideri quella parte $\gamma_s$ intercetta dai 4 punti che deteterminano $\omega_s$: l'insieme dei quadrilateri piani $\gamma_s$ è la superficie circoscritta (discontinua, il limite della quale, all'impiccolire indefinito dei $\gamma_s$, coincide — dice *Duhamel* — con quello dell'area di una qualunque superficie poliedrica inscritta.

È questa asserzione che è inesatta, giacchè mentre si può provare che il limite dell'area della superficie circoscritta, se esiste, è indipendente dalla legge di decrescenza delle faccie, altrettanto, come già sappiamo, non può dirsi dell'area della superficie inscritta. È da notarsi però che, quantunque errata, quest'osservazione contiene l'essenza della definizione data più tardi da *Hermite*.

Lo *Sturm* (1) chiama area di una superficie curva il limite dell'area di una superficie poliedrica composta di faccie piane che, impiccolendo tutte indefinitamente, tendano a divenire tangenti alla superficie considerata, supponendo d'altra parte, che il contorno della superficie poliedrica tenda al contorno della superficie curva.

La definizione di *Sturm* — il quale forse aveva intravvisto che il piano per tre punti di una superficie non tende necessariamente al piano tangente, all'avvicinarsi indefinito dei tre punti — non presenta manifestamente il difetto delle precedenti. Soddisfacendo la superficie poliedrica alla posta condizione, il limite della sua area è indipendente da ogni legge di impiccolimento delle faccie che non contraddica alla stessa condizione. Tuttavia se non si dànno esplicitamente dei criteri per riconoscere quando è che una superficie poliedrica inscritta è tale che le sue faccie, impiccolendo, tendono a divenire tangenti, la definizione non si presta alla determinazione effettiva dell'area.

**6.** *Harnack*, (2) nella sua traduzione del Calcolo del *Serret*, impone la condizione che gli angoli di ciascuna faccia triangolare della superficie poliedrica non tendano nè a zero nè a $\pi$. Con ciò si ottiene che il piano di ciascuna faccia tende al piano tangente: ma *Peano* (3) osserva che questa definizione, cioè la solita di *Serret* coll'aggiunta della detta condizione, non risulta soddisfacente, in quantochè, se si suppone che una superficie sia tale che da ciascuna retta parallela ad una direzione fissa venga incontrata in un sol punto, non risulta come conseguenza che ogni superficie poliedrica inscritta non possa essere incontrata da una parallela a quella direzione in più d'un punto. Si osservi poi, che il calcolo dell'area di una superficie che da ciascuna parallela all'asse $z$, è incontrata in un sol punto, si fonda sul fatto che le faccie

(1) STURM, *Cours d'Analyse de l'École polythecnique*. Paris. 1857. vol. I.

(2) HARNACK, *Lehrbuch der Differential-und Integralrechnung*. Vol. II. 1885.

(3) PEANO, *Sulla definizione dell'area di una superficie*. " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei - 1890 ".

triangolari della superficie poliedrica vengono proiettate, parallelamente all'asse $z$, in tanti triangoli che compongono, senza sovrapporsi, un poligono avente per limite la porzione di piano limitata dalla proiezione del contorno della superficie.

È allora manifesto che essendo infirmata l'esattezza di questa asserzione, la definizione dianzi accennata non può essere accettabile.

Una definizione che conserva essa pure la considerazione delle superficie poliedriche inscritte è quella proposta dal *Maggi*, [1] definizione che, com'è in essa esplicitamente detto, non vale che per una classe determinata di superficie. Ricercando una condizione sufficiente perchè collo svanire del raggio di un cerchio capace di contenere le singole faccie di una superficie poliedrica inscritta in una superficie curva, svanisca uniformemente l'angolo formato dalla perpendicolare al piano colla normale alla superficie in un punto qualunque del pezzo di superficie sottesa alla faccia, *Maggi* mostra che se la superficie è dotata in ogni punto di normale variabile da punto a punto con continuità, è possibile iscrivere sempre una successione infinita di superfici poliedriche, corrispondenti a due successioni correlative di angoli e di cerchi, ambedue infinitamente decrescenti; in tal modo che, purchè le faccie di una superficie poliedrica capiscano in un cerchio l'angolo formato dalla perpendicolare al piano delle singole faccie colla normale alla superficie in un punto qualsivoglia del seguente sotteso, riesca minore dell'angolo relativo.

Da ciò risulta giustificata la seguente definizione: Area di una superficie curva dotata in ogni punto di normale, variabile da punto a punto con continuità, è il limite dell'area di una superficie poliedrica inscritta, collo svanire del raggio di un cerchio capace di contenere le singole faccie, sotto la condizione che, insieme con questo raggio svanisca uniformemente l'angolo formato dalla perpendicolare al piano di ogni faccia colla normale alla superficie in un punto qualsivoglia del segmento sotteso.

*Maggi* trova una condizione cui devono soddisfare le faccie, condizione che equivale ad imporre che esse siano infinitesime dello stesso ordine col quadrato del raggio del cerchio capace di contenerle, e quindi anche col loro lato maggiore. Ma perchè ciò sia, bisogna che i lati siano tutti infinitesimi dello stesso ordine e quindi che gli angoli non tendano nè a 0 nè a $\pi$, che è la condizione imposta da *Harnack*.

**7.** Ed ora veniamo alle definizioni che non partono dalla considerazione di superficie inscritte. cominciando da quella di *Hermite*. [2]

Sia data una superficie $z = f(x,y)$ e di essa se ne consideri una porzione $\Gamma$ tale che ogni ordinata sia incontrata in un sol punto, ed abbia in ogni punto un piano tangente non perpendicolare al piano $z = 0$. Sia C la proiezione di $\Gamma$ nel piano $xy$, si divida C in parti arbitrarie $\omega_s$, e, prendendo le linee che le determinano per direttrici, si mandino delle superfici cilindriche colle generatrici parallele all'asse $z$. La superficie verrà divisa in parti $\sigma_s$: si mandi poi per un punto arbitrario di ciascuna $\sigma_s$ il piano tangente e se ne consideri la porzione $\tau_s$ che è limitata dalla superficie cilindrica che determina la $\sigma_s$ stessa.

Si è in tal modo circoscritta alla porzione $\Gamma$ di superficie considerata una superficie T discontinua composta di pezzi piani $\tau_s$.

---

(1) MAGGI, *Sull'area delle superficie curve.* " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei - 1896 ".
(2) HERMITE, *Cours professé à la Faculté de Sciences*, Paris, 1887.

Il limite, se esiste, dell'area di T all'impiccolire indefinito delle parti $\omega$, (in guisa da tendere a zero la massima corda) è l'area del pezzo $\Gamma$ di superficie.

La definizione di *Hermite* fu adottata da tutti i trattatisti contemporanei: (1) tuttavia *Maggi* e *Peano* osservano che in questa definizione entrando esplicitamente la direzione degli assi, si introduce un elemento estraneo alla superficie, ciò che sarebbe bene evitare.

Ciò è perfettamente giusto, quantunque si possa tosto dimostrare come il limite delle aree analoghe a T sia lo stesso qualunque sia la direzione degli assi coordinati. Del resto, come già abbiamo osservato, di qualche elemento estraneo non può fare a meno neanche la definizione proposta dallo stesso *Maggi*.

È da osservare che i Matematici ricordati da principio consideravano, in sostanza, anch'essi l'area della superficie come il limite dell'area delle superficie circoscritte: cosicchè, si può dire, la definizione di *Hermite* è una traduzione rigorosamente enunciata dei concetti di quelli.

*Jordan* (2) non riproduce la definizione di *Hermite*, ma considerando solamente superficie a piano tangente variabile da punto a punto con continuità, postula una proprietà per gli elementi infinitesimi di superficie. Questo postulato equivale ad una definizione; anzi, si può dire, è un surrogato della definizione di *Hermite* per le superfici da lui considerate.

Si abbia infatti una superficie le cui equazioni parametriche siano

$$x = \varphi_1(u, v), \qquad y = \varphi_2(u, v), \qquad z = \varphi_3(u, v),$$

ove le $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ ammettano, in un campo E di valori per $u, v$, derivate parziali continue che simultaneamente non annullino i tre Jacobiani

$$A = \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\frac{\partial \varphi_3}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}$$

$$B = \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\partial \varphi_3}{\partial v}$$

$$C = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\frac{\partial \varphi_1}{\partial v},$$

e di più siano tali da non assumere per coppie diverse di valori $u, v$ uguali terne di valori per $x, y, z$.

Se $x, y, z$ è un punto della superficie corrispondente alla coppia di valori $u, v$ dei parametri, X, Y, Z un altro punto corrispondente a $u + du$, $v + dv$, e se ad ogni punto X, Y, Z si associa il punto

$$\xi = x + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} dv$$

$$\eta = y + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} dv$$

$$\zeta = z + \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} dv,$$

si vede facilmente che mentre $u, v$ prendono tutti i valori contenuti in un

(1) Per citarne qualcuno: Picard, Pascal, D'Arcais, Cesàro, Vivanti, ecc.

(2) JORDAN, l. c., vol. I, pag. 146 e segg.

quadrato infinitesimo $Q_k$, il punto X, Y, Z descrive sulla superficie un quadrilatero $S_k$ ed il punto $\xi, \eta, \zeta$ un quadrilatero piano $T_k$ di misura

$$Q_k \sqrt{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2},$$

essendo $A_k$, $B_k$, $C_k$ i valori di A, B, C in un vertice di $Q_k$.

Perchè $Q_k$ è infinitesimo e per la continuità delle $\varphi$, ogni punto X, Y, Z resta infinitamente vicino a $\xi, \eta, \zeta$ di guisa che infinitamente vicini saranno l'elemento di superficie $S_k$ ed il quadrilatero piano $T_k$: si è pertanto condotti ad ammettere che l'area $S_k$ sia diversa da $T_k$ per infinitesimi di ordine superiore.

Allora alla somma delle $S_k$ si può sostituire il limite della somma dei $T_k$ per tutti i $Q_k$ in cui si divide il campo E; e questo limite sarà l'area della porzione di superficie che si ottiene facendo percorrere ad $u, v$ tutto il campo E.

Nelle ipotesi poste da *Jordan* il limite della somma dei $T_k$ esiste certamente e poichè l'insieme dei $T_k$ forma la superficie discontinua T considerata da *Hermite*, si vede chiaramente che la definizione di area data da *Jordan* non è che quella di *Hermite* applicata alle superficie a piano tangente variabile da punto a punto con continuità.

**8.** Una definizione che fa a meno di ogni elemento estraneo alla superficie è quella proposta da *Peano.* [1]

Se è data una superficie, si scomponga in parti e dopo averle trasportate comunque nello spazio, si proiettino queste ortogonalmente su d'uno stesso piano. La somma delle aree di queste proiezioni sarà un'area piana, la quale varia col variare del modo di divisione della superficie in parti o col variare del modo con cui si dispongono queste parti. Il limite superiore dei valori di quest'area piana si dice area della superficie data.

A questa definizione *Peano* ha dato, nella memoria già citata, un'altra forma, mediante l'introduzione dei *bivettori*.

Chiamata bivettore una linea piana chiusa, quando si consideri oltre all'area da essa limitata (grandezza del bivettore) anche la giacitura del piano a cui essa appartiene, si può dimostrare che, data una linea chiusa non piana $l$, si può sempre determinare un bivettore $l'$, in guisa che proiettando su un piano arbitrario $l$ e $l'$ secondo una direzione arbitraria, le aree limitate dalle loro proiezioni risultino sempre uguali.

Si può allora chiamare bivettore ogni linea chiusa piana o no: per grandezza e giacitura di un bivettore non piano $l$, si intende la grandezza e giacitura del bivettore piano equipollente $l'$.

Divisa una superficie in parti, si diranno bivettori delle parti stesse i bivettori formati dai loro contorni: allora la definizione data dianzi si può enunciare: « Area di una porzione di superficie è il limite superiore della somma delle grandezze dei bivettori delle sue parti ».

**9.** Le definizioni date fin qui per l'area di una superficie hanno tutte un carattere comune che è ben facile rilevare.

La determinazione dell'area di una qualunque figura piana rettilinea è possibile mercè la teoria dell'equivalenza dei poligoni, che trae origine dal concetto semplice di congruenza: la teoria dell'equivalenza associata al concetto di limite rende possibile la misura dell'area di una qualunque figura piana, potendosi considerare come il limite dell'area di figure poligonali.

(1) PEANO, *Applicazioni geometriche del Calcolo infinitesimale.* 1887.

Venendo a considerare superficie non piane, non si può pensare ad una teoria dell'equivalenza analoga a quella per le figure piane, perchè non esistono, in generale, sulle superficie curve parti congruenti.

Ed ecco tutte le definizioni che abbiamo riportate ispirate al concetto di considerare l'area di una superficie curva come il limite delle aree di superficie piane.

Ma recentemente è stata data dal *Minkowski* (1) una definizione che astrae completamente dai concetti precedenti, sibbene dipende dal concetto più semplice di volume.

Sia F una superficie; in ciascun punto di essa come centro si pensi costruita una sfera di raggio $r$. Tutti i punti dello spazio interni alle sfere o sulle loro superficie costituiscono il luogo dei punti che hanno dalla F una distanza minore od uguale ad $r$. Sia $V(r)$ il volume di questo campo; il limite, se esiste, di $\frac{V(r)}{2r}$ al tendere a zero di $r$, è l'area della superficie F.

Si può notare che l'idea ispiratrice della definizione di *Minkowski* si trova già in una nota pubblicata da *Borchardt* nel 1854. (2) In essa proponendosi di calcolare l'area di una superficie chiusa F mediante un integrale triplo esteso a tutti gli elementi del volume racchiuso dalla superficie F, osserva che l'area di una superficie può essere considerata come il limite verso cui tende il rapporto di cui il numeratore è il volume compreso fra la superficie ed una superficie parallela, ed il denominatore la distanza delle due superfici.

Molto opportunamente *Minkowski* evita la considerazione di superficie parallele per non dover ammettere per le superfici di cui si vuol definire l'area, l'esistenza della normale determinata in tutti i suoi punti.

Questa definizione, che asseconda il concetto intuitivo che si ha di superficie come lamina di spessore evanescente, appare perfettamente rigorosa: ma se in una definizione di area si deve tener anche conto della possibilità dell'effettiva sua valutazione seguendo, naturalmente, i concetti enunciati nella definizione stessa, questa di *Minkowski* appare quella che a ciò meno si presta. (3)

FILIPPO SIBIRANI
(*Bologna*).

---

(1) MINKOWSKI, *Ueber die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen*. Jahresbericht der Deutschen Matematiker Vereinigung.

(2) BORCHARDT, *Werke*, pag. 67.

(3) Minkowski dà una definizione analoga per le lunghezze di una linea. Sia C una curva piana o storta e in ogni punto di essa come centro si costruisca una sfera di raggio $r$. L'insieme dei punti interni alle sfere o sulle loro superficie costituisce il luogo dei punti che hanno dalla linea una distanza minore od uguale ad $r$. Sia $V(r)$ il volume di questo campo; il limite, se esiste, di $\frac{V(r)}{\pi r^2}$ al tendere a zero di $r$, è la lunghezza della linea C.

# CORRISPONDENZA

S. Stefano Magra, agosto 1905

*Caro Lazzeri,*

Nella terza edizione dell'Algebra elementare, che Ella ha certamente ricevuta, mi è sfuggita un'inesattezza in un punto abbastanza importante.

Vi ha richiamato sopra la mia attenzione, il mio amico prof. Grandi.

**1.** A pag. 287 è detto che se la successione

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \ldots \tag{1}$$

è costantemente decrescente, le successioni

$$\left.\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3, \ldots \\ b_1, & b_2, & b_3, \ldots \end{matrix}\right\} \tag{2}$$

dei valori approssimati per difetto i primi, per eccesso i secondi a meno rispettivamente di

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \ldots$$

resultano crescente l'una, decrescente l'altra.

In forma così generale, ciò non è esatto; per es. $a_1$ che è approssimato a meno di $\varepsilon_1$ può bene esserlo anche a meno di $\varepsilon_2$, e allora potrebbe $a_2$ non essere maggiore di $a_1$.

Ma è facile vedere che in seno alle successioni

$$\left.\begin{matrix} a_1, & a_2, \ldots \\ b_1, & b_2, \ldots \end{matrix}\right\} \tag{2}$$

esistono sempre due successioni rispettivamente crescente l'una, decrescente l'altra.

Si fissi per es. nella prima delle (2) un termine qualsiasi $a_r$: vi può essere solo un numero finito di termini, i quali siano minori o uguali ad $a_r$, giacchè se ve ne fossero infiniti $a_{r_1}, a_{r_2}, \ldots$ questi, per dato, sarebbero approssimati ad $\alpha$ per meno di $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ rispettivamente, e così $a_r$ lo sarebbe pure a meno di ciascuno di questi $\varepsilon_{r_1}, \varepsilon_{r_2}, \ldots$ i quali convergono a zero: ma $a_r$ è un numero prefissato; dovrebbe dunque essere $a_r = \alpha$, il che non è se $\alpha$ è irrazionale.

Ciò premesso, fra i termini successivi ad $a_1$ nella prima delle (2), si trova sicuramente un termine $a_p > a_1$: tra quelli successivi ad $a_p$ similmente si trova, dopo un numero finito di termini, uno $a_q > a_p$ e così indefinitamente; con che rimane provata la esistenza di una successione

$$a_1, \quad a_p, \quad a_q, \ldots$$

che si può estrarre dalla

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots$$

e che è costantemente crescente.

Analogamente dalla

$$b_1, \quad b_2, \quad b_3, \ldots$$

si può estrarre una successione

$$b_1, \quad b_s, \quad b_t, \ldots$$

costantemente decrescente.

Queste due

$$a_1, \quad a_p, \quad a_q, \ldots$$
$$b_1, \quad b_2, \quad b_3, \ldots$$

sono le successioni convergenti ad $\alpha$, secondo le condizioni dette a pag. 288.

**2.** Se in posto dei numeri

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \ldots$$

si prendono ad esempio i numeri

$$\varepsilon, \quad \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad \tfrac{1}{4}\varepsilon, \ldots$$

allora le successioni approssimate

$$a_1, \quad a_2, \ldots$$
$$b_1, \quad b_2, \ldots$$

formate secondo il modo detto al n. 108, diventano le altre

$$\left.\begin{matrix} a+(n-1)\varepsilon, & a+(p-1)\frac{1}{2}\varepsilon, & a+(q-1)\frac{1}{4}\varepsilon, \ldots \\ a+n\varepsilon, & a+p\frac{1}{2}\varepsilon, & a+q\frac{1}{4}\varepsilon, \ldots \end{matrix}\right\} \qquad (3)$$

e queste sono, la prima costantemente crescente o almeno non decrescente, in quanto che possono esservi successivi termini eguali: la seconda costantemente decrescente, o almeno non crescente.

Se $\alpha$ è irrazionale, i termini che possono resultare eguali tra loro, sono sempre solo in numero finito: se invece $\alpha$ è razionale, nelle successioni costruite nel modo ora detto, potranno presentarsi infiniti termini eguali fra loro e così eguali ad $\alpha$ medesimo.

Se alle successioni soddisfacenti a queste condizioni si estende pure la denominazione di successioni convergenti, e nella teoria delle operazioni sui numeri irrazionali si fa uso di siffatte coppie di successioni, allora basterà sostituire (vedi pag. 292 e segnenti) le parole *non minore* alla parola *maggiore* e le parole *non maggiore* alla parola *minore*, nelle osservazioni relative al caso che $\alpha$ e $\alpha'$ siano razionali.

In un mio opuscolo *sui limiti e sui numeri irrazionali*, pubblicato nel 1877, è indicato un modo semplice di costruire successioni convergenti alla radice quadrata, cubica, ecc., di un numero che non è quadrato, cubo, ecc., rispettivamente di un numero razionale.

Se Elia crede di inserire nel prossimo numero del " Periodico „ l'osservazione qui esposta, mi farà cosa gradita.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Arzelà.

# QUISTIONI PROPOSTE

**699.** Sia M un punto variabile sopra un' ellisse di fuochi F ed F'. Il circolo di centro M e tangente all'asse maggiore incontra le rette MF e MF' in quattro punti.

Trovare l'area della curva luogo di questi quattro punti.

**700.** Da un punto P del piano di una parabola si conducano le tre normali, di cui i piedi siano A, B, C. Le tangenti in A, B, C s'incontrino nei punti $A_1$, $B_1$, $C_1$.

Dimostrare che:

1°. La retta congiungente P coll'ortocentro del triangolo $A_1 B_1 C_1$ è parallela alla congiungente l'ortocentro del triangolo A B C col circuncentro del triangolo $A_1 B_1 C_1$.

2°. I tre punti $A_1$, $B_1$, $C_1$ sono situati sopra un'iperbole equilatera avente per assintoti l'asse e la tangente nel vertice della parabola data. Questa iperbole non cambia, se P si sposta sopra una retta parallela all'asse della parabola.

**701.** Sia M un punto variabile sopra un'ellisse della quale F, F' sono i fuochi, A, A' gli estremi dell'asse maggiore. Dimostrare che le bisettrici degli angoli MFF', MF'A' incontrano MA sulle due direttrici rispettivamente.

**702.** Se M è un punto d'un'ellisse, della quale F, F' sono i fuochi, M' è il simmetrico di M rispetto all'asse minore, $F_1$ $F'_1$ sono i secondi punti d'incontro dell'ellisse colle rette MF, MF', dimostrare che la retta $F_1F_1$ e la tangente di M' s'incontrano sull'asse maggiore.

E.-N. Barisien.

**703.** (1) Sopra una retta $r$ sono dati due punti fissi $A_1$, $A_2$ ed un punto mobile M. Costruiti i circoli $c_1$, $c_2$ di diametri $A_1M$, $MA_2$ aventi per centri i punti $C_1$, $C_2$, si domanda:

1° il luogo dei punti d'incontro delle tangenti condotti da $A_1$ a $c_2$ con le tangenti condotte da $A_2$ a $c_1$;

2° il luogo dei punti d'incontro delle tangenti condotte da $C_1$ a $c_2$ colle tangenti condotte da $C_2$ a $c_1$:

3° il luogo dei punti d'incontro delle tangenti condotte da $A_1$ al circolo di centro $A_2$ e raggio $A_2M$ colle tangenti condotte da $A_2$ al circolo di centro $A_1$ e raggio $A_1M$.

Si faccia uno studio di queste curve. Fumagalli.

# BIBLIOGRAFIA

Lindelöf. — *Le Calcul des résidus et ses applications a la théorie des functions.* (Collection de monografies sur la théorie des functions publiée sus la direction de M. Emile Borel). Paris, Gauthier-Villars, 1905. VII — 144 pages,

Questo volume del sig. *Lindelöf* professore all'Università di Helsingfors è il nono della collezione di monografie sulla teoria delle funzioni, felicemente iniziata dal *Borel* nel 1905 e continuata dal Borel stesso, dal *Lebesgue*, dal *Baire* e da altri.

È noto che se $x = a$ è un punto singolare di una funzione variabile complessa olomorfa in un campo connesso C, *Cauchy*, al quale si devono i primi e classici studi sulla funzione di variabili complesse, chiamò *residuo della funzione* f(x) *relativo al punto singolare* x = a l'espressione

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)\,dz$$

essendo L un contorno chiuso semplice interno a C e inviluppante il punto $a$.

(1) Ripetiamo questa quistione pubblicata col numero 662 nel fasc. IV, anno XIX, della quale non ci sono pervenute risoluzioni soddisfacenti.

" I progressi (così scrive l'A. nella prefazione) realizzati da alcuni anni nella " teoria delle funzioni analitiche hanno fatto risaltare quanto siano sempre fecondi " ed efficaci i metodi ingegnosi creati da Cauchy, fra i quali conviene citare in " primo luogo il calcolo dei residui. Non è dunque senza interesse di tornare ora " su questo calcolo classico e di studiare sistematicamente la parte che ha nella " teoria delle funzioni propriamente dette. È ciò che abbiamo tentato di fare in " questo piccolo libro, allo scopo di facilitare in una certa misura l'accesso alle " parti moderne dell'analisi ".

Il libro si compone di cinque capitoli cioè:

I. — *Principi e teoremi fondamentali.*

II. — *Applicazioni diverse del calcolo dei residui.* — Funzioni simmetriche delle radici d'un'equazione — Sviluppo di funzioni implicite — Alcune applicazioni alle funzioni meromorfe — Calcolo di alcuni integrali definiti.

III. — *Formole sommatorie tratte dal calcolo dei residui.*

IV. — *Le funzioni* $\Gamma(x)$, $\zeta(x)$, $\zeta(s, w)$.

V. — *Applicazione al prolungamento analitico e allo studio assintotico delle funzioni definite da uno sviluppo di Taylor.*

## CASTELNUOVO. — *Lezioni di geometria analitica e proiettiva.* Volume II, Roma. Società editrice Dante Alighieri, 1905.

Nel fascicolo III, Anno XIX di questo *Periodico* è stato reso conto del I volume del corso di geometria analitica e proiettiva del prof. *Castelnuovo*, corso che viene ora condotto a compimento con questo II volume, testè pubblicato.

Il 1° volume era diviso in tre parti rispettivamente destinate allo studio delle forme di prima specie, delle forme di seconda specie, e delle coniche. Il 2° volume è diviso in due parti delle quali ecco il sommario:

PARTE IV. — *Geometria analitica dello spazio.*

I. Relazioni di posizione tra punti, rette, piani — II. Distanze, angoli, aree, volumi — III. Trasformazione delle coordinate. Coordinate omogenee di punti e piani. Coordinate proiettive — IV. Rappresentazione analitica delle superficie e delle linee nello spazio — Proiettività fra due spazi.

PARTE V. — *Superficie di second'ordine.*

I. Polarità definita dalla superficie — II. Rette di una quadrica. Generazione delle quadriche. Fasci e schiere di quadriche — III. Proprietà diametrali — IV. Equazioni ridotte delle quadriche — V. Sezioni circolari. Quadriche composte.

È superfluo il dire che in questo secondo volume è mantenuto il metodo adottato nel primo, cioè le considerazioni algebriche e geometriche sono armonicamente fuse fra loro ed adoperate a vicenda ora l'une ora l'altre, secondo che queste o quelle meglio si prestano allo studio delle singole quistioni. In abbondanti esercizi messi alla fine dei vari capitoli, sono molte teorie accessorie notevoli.

Insomma il 2° volume ha gli stessi pregi del 1°, e tutti e due costituiscono un'opera degna della fama dell'illustre autore.

## THOMSON. — *Elettricità e materia.* Traduzione con aggiunte di G. Faè. Manuali Hoepli, 1905.

Quest'aureo libretto raccoglie un corso di lezioni che *J. J. Thomson*, uno dei maggiori scienziati inglesi fece nel maggio 1903 alla Yale University nella città di New Haven per conto della fondazione *Silliman*.

Questa fondazione costituita da un capitale di ottantamila dollari, donato all'Yale College dai figli della sig.ra *Hepsa Ely Silliman*, ha per iscopo di stabilire un corso annuale di lezioni in memoria della predetta signora, " destinate ad " illustrare la presenza, sapienza e bontà di Dio, quali si manifestano nel mondo " morale ". Ogni corso annuale deve raccogliersi in volume, da formare parte d'una serie in memoria della sig.ra *Silliman*.

" Com'era credenza del testatore, ogni esposizione ordinata dei fatti della
" natura o della storia avrebbe contribuito allo scopo di questa fondazione con
" più efficacia di qualsiasi tentativo di esaltare i precetti della religione e della
" fede; e stabilì, per conseguenza, che dovessero venir escluse dal fine della fon-
" dazione stessa lezioni di teologia dogmatica o critica, e che gli argomenti
" dovessero scegliersi, piuttosto, nel campo delle scienze naturali e della storia,
" dando, in particolare, la preferenza all'astronomia, alla chimica, alla geologia ed
" all'anatomia „.

In base a questi concetti che dànno alla fondazione Silliman un carattere eminentemente utile e pratico, è stato molto opportunamente scelto come corso inaugurale questo dell'illustre Thomson. In esso è trattata particolarmente l'influenza dei recenti progressi della scienza elettrica sulle teorie riguardanti la costituzione della materia e della natura dell'elettricità: due questioni connesse probabilmente in modo tanto intimo che la soluzione dell'una aiuterà quella dell'altra. Un aspetto caratteristico — come dice il Thomson — delle recenti indagini elettriche, quali lo studio e la scoperta dei raggi catodici, dei raggi di Röntgen e delle sostanze radioattive, è la condizione affatto speciale in cui esse hanno posto il legame fra materia ed elettricità. Un esame dell'influenza del recente lavorio sull'anzidetta correlazione parve all'Autore dovesse riuscire opportuno, specialmente perchè il discutere in proposito suggerisce una moltitudine di problemi — splendido argomento per ulteriori investigazioni.

Il libro è in sei capitoli. Il primo è dedicato allo studio del campo elettrico, con particolare riguardo alle linee di forza del sommo Faraday. Nel secondo si tratta della massa elettrica e si introduce il nuovo concetto di massa d'etere coinvolta. Nel terzo degli effetti dovuti all'accelerazione dei tubi di Faraday, con speciale riguardo ai raggi di Röntgen e alle onde luminose. Il quarto riguarda l'importantissima teoria della struttura atomica dell'elettricità, corroborata da numerose indagini odierne. Il quinto ha per titolo la costituzione dell'atomo: e si discute l'origine e l'evoluzione degli elementi chimici. Il sesto, in fine, è un succoso riassunto dei fenomeni di radioattività, con acuto esame critico della teoria dei medesimi, in raffronto con quella corpuscolare della materia e dell'elettricità, concepita dall'Autore.

Ogni argomento è esposto in forma piana, spoglia del tecnicismo proprio delle Memorie accademiche, in guisa che può essere compreso da qualsiasi persona di media cultura. E il dott. Faè, in vista dell'importanza dell'argomento e del modo con cui è trattato, reputò utile — come osserva nella sua prefazione — divulgare cotesto libro, porgendolo anche in veste italiana. Il Faè non si è limitato alla semplice traduzione: seguendo con cura i progressi della scienza, ha corredato il libro di varie aggiunte, particolarmente intorno ai fenomeni di radioattività, i quali sono in via di rapida evoluzione. Egli ha registrato le recenti pubblicazioni apparse in argomento perfino durante la stampa e — con giusta misura — ha notato importanti lavori compiutisi anche in Italia, ponendo in appendice quanto non potè trovar luogo nel testo. Vi si troverà, ad esempio, una notevole comunicazione del Nasini sopra indagini ancora inedite, che l'illustre Chimico ha in corso, riguardanti la radioattività delle sorgenti e dei minerali italiani. Dal Traduttore furono pure aggiunti un sommario dei capitoli ed un indice alfabetico.

Riassumendo: è un libro di piccola mole, ma grande per densità di pensiero; e può affermarsi con sicurezza che il prof. Faè ha fatto molto bene a tradurlo e l'Hoepli ha fatto bene a pubblicarlo con la solita cura ed eleganza.

K.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 18 settembre 1905

## Fondamenti per la geometria dell'*n-edro* in uno spazio lineare con $n-1$ dimensioni

### § 1. — Teoremi fondamentali.

Dati in uno spazio lineare $S_{n-1}$ $n$ punti $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ *indipendenti*, tali cioè che $k$ qualunque di essi $(2 \leqslant k \leqslant n)$ non appartengono a un $S_{k-2}$, diremo *n-edro* la figura costituita da essi, dai segmenti $A_i A_k$ in numero di $\binom{n}{2}$, dai triangoli $A_i A_k A_h$ in numero di $\binom{n}{3}$, ecc. che si diranno gli *elementi dell'n-edro.* All'elemento individuato da $k+1$ fra i punti dati daremo il nome di *faccia a* k *dimensioni* quando $k$ sia compreso fra 2 e $n-2$ (i limiti inclusi) e quello di *faccia*, senza aggiungere altro, all'elemento costituito da $n-1$ punti: diremo *spigolo* l'elemento costituito da due soli punti. Due elementi individuati uno da $k+1$ vertici, l'altro dai rimanenti $n-k-1$ li diremo *opposti*: indicheremo costantemente con $a_h$ la misura della faccia opposta al vertice $A_h$. Due facce $a_h$ e $a_k$ hanno in comune una faccia a $n-3$ dimensioni che indicheremo o con la notazione $a_{hk}$ o mediante i vertici da cui essa è individuata, come meglio ci tornerà opportuno. Gli $S_{n-2}$ di esse facce hanno in comune un $S_{n-3}$ che diremo *costola* del diedro da esse compreso: indicheremo con $(a_h a_k)$ la misura dell'angolo rettilineo che si ottiene tagliando il detto diedro con un $S_2$ normale all'$S_{n-3}$ costola.

A fondamento delle nostre ricerche porremo il

Teorema I. — *Una faccia di un n-edro è uguale alla somma dei prodotti delle altre* n — 1 *per i coseni degli angoli che esse formano con la prima.*

Avremo così:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_2 \cos(a_2 a_1) + a_3 \cos(a_3 a_1) + \ldots + a_n \cos(a_n a_1) \\
a_2 &= a_3 \cos(a_3 a_2) + a_4 \cos(a_4 a_2) + \ldots + a_1 \cos(a_1 a_2) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_n &= a_1 \cos(a_1 a_n) + a_2 \cos(a_2 a_n) + \ldots + a_{n-1} \cos(a_{n-1} a_n).
\end{aligned}$$

Moltiplichiamo queste $n$ relazioni ordinatamente per $a_1\varepsilon_1, a_2\varepsilon_2, a_n\varepsilon_n$, dove con $\varepsilon_s$ in generale indichiamo l'unità positiva o negativa, e sommiamole membro a membro. Allora se $n$ è pari otterremo $\frac{n}{2}$ gruppi diversi di formule, corrispondentemente all'ipotesi che delle $\varepsilon$ una sola, o due,... o $\frac{n}{2}$ siano positive; se $n$ è dispari di questi gruppi ne otterremo invece $\frac{n-1}{2}$.

Se $p$ fra le $\varepsilon$ sono positive, sarà:

$$\sum_1^p a_k^2 - 2\sum_1^p a_i a_h \cos(a_i a_h) = \sum_{p+1}^n a_r^2 - 2\sum_{p+1}^n a_l a_m \cos(a_l a_m), \; (i \neq h, l \neq m) \quad \text{(T)}$$

il tipo di ogni formula del gruppo corrispondente, il quale consterà di $\binom{n}{p}$ di tali relazioni.

In particolare poi, per $p$ eguale ad uno avremo:

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_n^2 - 2a_3a_2\cos(a_3a_3)\ldots - 2a_{n-1}a_n\cos(a_{n-1}a_n)$$

cioè il

Teorema II. — *Il quadrato di una faccia di un n-edro è uguale alla somma dei quadrati delle rimanenti diminuita del doppio dei prodotti di esse due a due per i coseni degli angoli compresi.*

Questo resultato è l'estensione del *teorema di Carnot.* Ne segue il

Corollario. — *Se un angoloide di n-edro è* $(n-1)$— *rettangolo, il quadrato della faccia ad esso opposta è uguale alla somma dei quadrati delle altre facce.*

Questo resultato costituisce l'estensione del *teorema di Pitagora.*

## § 2. — I punti notevoli.

In questo paragrafo mostreremo l'esistenza dei punti notevoli nell'*n-edro*, faremo vedere cioè che diviso ciascuno spigolo secondo la legge rappresentata per lo spigolo $A_iA_h$ dalla relazione:

$$A_iP_{ih} : P_{ih}A_h = a_h^p : a_i^p \qquad (\alpha)$$

gli $S_{n-2}$ che proiettano i punti $P_{ih}$ così ottenuti dagli $S_{n-3}$ opposti passano per un medesimo punto. Esporremo per disteso la dimostrazione per il pentaedro di $S_4$ e da essa ci verrà additata la via da seguirsi nel caso generale.

Siano adunque $A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5$ i vertici del pentaedro e supponiamo soddisfatte le condizioni $(\alpha)$ che in questo caso sono in numero di dieci. Da queste segue che in una qualsivoglia $a_i$ delle facce del pentaedro gli $S_2$ che proiettano dagli spigoli i punti determinati dalle $(\alpha)$ sugli spigoli opposti concorrono in un punto $P_i$. Se noi riusciremo a dimostrare che le congiungenti $A_i\ P_i$, che sono in numero di cinque, passano per un medesimo punto, sarà dimostrata anche la nostra tesi.

A questo scopo formiamo il quadro:

$$\begin{array}{ccccc}
P_5 & P_4 & P_3 & P_2 & P_1 \\
\hline
A_1A_2P_{34} & A_1A_2P_{35} & A_1A_2P_{45} & A_1A_3P_{45} & A_2A_3P_{45} \\
A_2A_3P_{14} & A_1A_3P_{25} & A_1A_4P_{25} & A_1A_4P_{35} & A_2A_5P_{34} \\
A_3A_4P_{12} & A_1A_5P_{23} & A_1A_5P_{24} & A_1A_5P_{34} & A_2A_4P_{35} \\
A_4A_1P_{23} & A_2A_3P_{15} & A_2A_4P_{15} & A_3A_4P_{15} & A_3A_4P_{25} \\
A_4A_2P_{13} & A_2A_5P_{13} & A_2A_5P_{14} & A_3A_5P_{14} & A_3A_5P_{24} \\
A_1A_3P_{24} & A_3A_5P_{12} & A_4A_5P_{12} & A_4A_5P_{13} & A_4A_5P_{23}
\end{array} \qquad (A)$$

Da esso risulta che tre qualunque delle $A_iP_i$ giacciono in un $S_3$. In particolare le terne:

$$A_5P_5,\ A_4P_4,\ A_3P_3; \qquad A_5P_5,\ A_4P_4,\ A_2P_2$$

giacciono, l'una nell'$S_3$ individuato da $A_3$, $A_4$, $A_5$, $P_{12}$ e l'altra nell'$S_3$ individuato da $A_2$, $A_4$, $A_5$, $P_{13}$. Ora si vede subito che queste due $S_3$ non possono coincidere, chè altrimenti i vertici del pentaedro giacerebbero tutti in un $S_3$: avranno dunque un $S_2$ in comune, del quale faranno parte $A_5P_5$ e $A_4P_4$. Così resta provato che due qualunque delle $A_iP_i$ si incontrano, e poichè tutte non possono giacere nel medesimo $S_2$, passeranno per un medesimo punto, che sarà comune anche agli $S_3$ sopra notati.

Dietro l'esempio precedente ci riman facile dimostrare il teorema nel caso generale.

Supponiamo che, soddisfatte le condizioni ($\alpha$), il teorema valga per l'$(n-1)$-*edro* di $S_{n-2}$ e facciamo vedere che vale anche per l'$n$-*edro* di $S_{n-1}$. Osserviamo per ciò che in virtù dell'ipotesi noi potremo formare un quadro analogo al precedente:

$$\begin{array}{cccc}
P_n & P_{n-1} & \ldots & P_1 \\
\hline
A_1A_2\ldots A_{n-4}A_{n-3}P_{n-2\,.\,n-1} & A_1A_2\ldots A_{n-3}P_{n-2\,.\,n} & & A_nA_{n-1}\ldots P_{3\,.\,2} \\
A_1A_2\ldots A_{n-4}A_{n-2}P_{n-3\,.\,n-1} & A_1A_2\ldots A_{n-4}P_{n-3\,.\,n-2} & & A_nA_{n-2}\ldots P_{4\,.\,2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_{n-1}A_{n-2}\ldots A_3\ \ P_{12} & A_nA_{n-2}\ \ldots\ P_{12} & & A_2A_3\ \ldots\ P_{n-1\,.\,n}
\end{array} \qquad (B)$$

dove gli $S_{n-3}$ che figurano in ciascuna delle $n$ colonne sono in numero di $\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}$. Esso ci mostra che le congiungenti $A_iP_i$, in numero di $n$, giacciono $n-2$ a $n-2$ in un $S_{n-2}$. Presi allora a considerare $n-2$ gruppi, di cui ciascuno contenga $n-2$ fra le $A_iP_i$ e i corrispondenti $S_{n-2}$, sarà facile vedere che due qualunque delle $A_iP_i$ giacciono in un $S_2$ e concludere come per l'$S_4$. Il nostro asserto, valendo già il teorema per l'$S_4$, rimane così provato.

Al punto comune alle $A_iP_i$ e quindi anche agli $S_{n-2}$ che dagli $S_{n-3}$ proiettano i punti determinati delle ($\alpha$) sugli spigoli opposti, daremo il nome di *punto notevole di ordine* $p$ e le indicheremo con $K_p$. Sarebbe facile riconoscere che le distanze di $K_p$ dagli $S_{n-2}$ delle facce sono proporzionali alle potenze $(p-1)$-esime delle facce medesime: ciò che giustifica le denominazioni di *baricentro, centro della ipersfera iscritta, punto di Lemoine* attribuite ai punti $K_0$, $K_1$, $K_2$.

Alla sezione prodotta nell'*n-edro* da un $S_{n-2}$ determinato da $n-2$ vertici e da $K_p$, sezione che altro non sarà se non un $(n-1)$*-edro* dell'$S_{n-2}$ segante, daremo il nome di *sezione ceviana di ordine p*.

## § 3. — **Principio generale.**

Il metodo di cui abbiamo fatto uso sopra mette in luce un principio che ci sarà molto utile in seguito e che vogliamo perciò esporre e dilucidare con qualche esempio nel presente paragrafo.

Abbiamo dimostrato riguardo al tetraedro il seguente:

Principio. — *Detti* $A_i\,A_h\,A_k\,A_l$ *i vertici di un tetraedro, se si divide lo spigolo* $A_iA_h$, *e così gli altri cinque, con un punto* $P_{ih}$ *secondo la legge rappresentata dalla relazione:*

$$A_iP_{ih} : P_{ih}A_h = \varphi : \psi, \tag{$\beta$}$$

*dove* $\varphi$ *e* $\psi$ *sono note funzioni degli indici* i, h, k, l *o di parte di essi, le due condizioni:*

a) *che in ogni faccia risulti verificato il teorema di Ceva,*

b) *che scambiando fra loro nella* ($\beta$) *gli indici* i *e* h *e contemporaneamente* k *con* l, *la relazione non muti sostanzialmente,*

*sono necessarie e sufficienti perchè il piano che proietta* $P_{ih}$ *dallo spigolo opposto, e i cinque analoghi, passino per un medesimo punto.*

Senza stare a riportare qui la dimostrazione di questo principio ci limitiamo a osservare che la seconda condizione altro non esprime se non che i punti determinati dalle ($\beta$) sugli spigoli sono determinati *in modo unico*: dopo questo resterà facile riconoscere che le due condizioni sono necessarie e sufficienti perchè i sei piani suaccennati passino pel medesimo punto.

Vediamo piuttosto come dev'essere modificato questo principio per l'*n-edro* di $S_{n-1}$. Rammentiamo perciò che per poter dimostrare l'esistenza del punto $K_p$ ci è bastato, nel precedente paragrafo, di poter arrivare a formare il quadro (A) per il pentaedro di $S_4$ e il quadro (B) per l'*n-edro* di $S_{n-1}$. Ora, per il pentaedro, in virtù del suesposto principio esisteranno i punti $P_1, P_2, \ldots P_5$ e si potrà quindi scrivere il quadro (A) *allora* e *soltanto* quando la legge ($\beta$) sia tale che ne restino soddisfatte le due relative condizioni. In conseguenza, detti $A_i$, $A_h$, $A_k$, $A_l$, $A_r$, i vertici del pentaedro e

$$A_iP_{ih} : P_{ih}A_h = \varphi : \psi \tag{$\beta$}$$

la legge rappresentativa, dove $\varphi$ e $\psi$ sono note funzioni di tutti o parte degl'indici *i, h, k, l, r*, sarà necessario e sufficiente che scambiando $i$ con $h$ e contemporaneamente una prima volta $k$ con $l$, una seconda $l$ con $r$, una terza $k$ con $r$, le tre relazioni ottenute e quella di partenza siano *sostanzialmente* le stesse.

Per l'*n-edro* di $S_{n-1}$, senza riportare la dimostrazione, la quale sarebbe ovvia dopo quanto abbiamo detto per l'$S_4$, enuncieremo senz'altro il

Principio. — *Condizioni necessarie e sufficienti affinchè diviso con un punto* $P_{ih}$ *lo spigolo* $A_iA_h$ *mediante la legge*

$$A_iP_{ih} : P_{ih}A_h = \varphi : \psi, \tag{$\beta$}$$

*dove* $\varphi$ *e* $\psi$ *sono funzioni note di tutti o parte degl'indici* $1, 2, 3 \ldots n$, *e in modo analogo gli altri spigoli, gli* $S_{n-2}$ *che proiettano ciascuno di questi punti dall'*$S_{n-3}$ *opposto passino per un medesimo punto sono:*

1° *che in ogni faccia a due dimensioni sia verificato il teorema di Ceva;*

2° *che scambiando in* ($\beta$) i *con* h *e contemporaneamente due qualunque dei rimanenti indici in tutti i modi possibili, le relazioni che si ottengono via via, che saranno al massimo* $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$, *siano sostanzialmente uguali fra loro e a quella di partenza.*

Per dare qualche dilucidazione sul principio precedente cominciamo dal cercare le condizioni necessarie e sufficienti perchè le $n$ altezze di un *n-edro* passino per un medesimo punto.

Si abbassi da $A_n$ l'altezza $A_nP_n$ e da $P_n$ si conducano nell'$S_{n-2}$, individuato dalla faccia $a_n$, $P_nR$ perpendicolare all'$S_{n-3}$ intersezione di $a_n$ con $a_2$ e $P_nS$ perpendicolare all'$S_{n-3}$ intersezione di $a_n$ con $a_1$.

Avremo allora:

$$P_nR = A_nP_n \operatorname{cotg}(a_na_2), \qquad P_nS = A_nP_n \operatorname{cotg}(a_na_1),$$

da cui

$$P_nR : P_nS = \operatorname{cotg}(a_na_2) : \operatorname{cotg}(a_na_1). \tag{1}$$

Ma, detto $P_{12}$ il punto ove l'$S_{n-2}$ determinato da $P_n$ e dall'$S_{n-3}$ comune alle facce $a_2$ e $a_1$, è:

$$A_1P_{12} : P_{12}A_2 = P_nR \,.\, a_{n2} : P_nS \,.\, a_{n1}\,.$$

Da questa e dalla (1) si ricava allora:

$$A_1P_{12} : P_{12}A_2 = a_{n2} \operatorname{cotg}(a_na_2) : a_{n1} \operatorname{cotg}(a_na_1).$$

Questa è la legge di divisione per lo spigolo $A_1A_2$, dalla quale si passa subito alla legge generale:

$$A_iP_{ih} : P_{ih}A_h = a_{kh} \operatorname{cotg}(a_ka_h) : a_{ki} \operatorname{cotg}(a_ka_i) \qquad (k \neq i \neq h).$$

Essa ci mostra che in ogni faccia a due dimensioni è soddisfatto il teorema di Ceva.

Scambiando ora $i$ con $h$ e ponendo $l$ al posto $k\,(l \neq k)$, si otterrà:

$$A_hP_{ih} : P_{ih}A_i = a_{li} \operatorname{cotg}(a_la_i) : a_{lh} \operatorname{cotg}(a_la_h)$$

e moltiplicando questa e la precedente proporzione termine a termine:

$$a_{kh} \operatorname{cotg}(a_k a_h) \,.\, a_{li} \operatorname{cotg}(a_l a_i) = a_{ki} (\operatorname{cotg}(a_k a_l) \,.\, a_{lh} \operatorname{cotg}(a_l a_h). \quad (2)$$

Scambiando in quest'ultima $h$ con $l$ otteniamo:

$$a_{kl} \operatorname{cotg}(a_k a_l) \,.\, a_{hi} \operatorname{cotg}(a_h a_i) = a_{ki} \operatorname{cotg}(a_k a_i) \,.\, a_{hl} \operatorname{cotg}(a_l a_h) \quad (3)$$

e riunendo infine le (2), (3):

$$a_{hk} \,.\, a_{il} \operatorname{cotg}(a_h a_k) \,.\, \operatorname{cotg}(a_i a_l) = a_{ki} a_{hl} \operatorname{cotg}(a_k a_i) \,.\, \operatorname{cotg}(a_h a_l) = \\ = a_{kl} a_{ih} \operatorname{cotg}(a_k a_l) \operatorname{cotg}(a_i a_h). \quad (4).$$

Queste relazioni saranno tante quante le combinazioni di $n$ elementi presi quattro a quattro, cioè: $\binom{n}{4}$. Ciascuna di esse equivalendo a due condizioni distinte, quest'ultime saranno in numero di $2\binom{n}{4}$. Nel caso particolare di $n$ uguale a quattro ritroviamo le due condizioni che devono essere soddisfatte per l'esistenza dell'*ortocentro* nel tetraedro.

Passiamo ora a scrivere le condizioni necessarie e sufficienti perchè le congiungenti i vertici dell'*$n$-edro* con i punti di contatto delle facce opposte coll'ipersfera iscritta passino per un medesimo punto.

Da $K_1$ caliamo $K_1A'_n$ perpendicolarmente all'$S_{n-2}$ della faccia $a_n$ e $K_1A_{n2}$, $K_1A_{n1}$ perpendicolari agli $S_{n-3}$ di cui fan parte $a_{n2}$ e $a_{n1}$ rispettivamente. Avremo, indicando con $r$ la misura del raggio di detta ipersfera:

$$A'_n A_{n2} = r \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(a_n a_2), \qquad A'_n A_{n1} = r \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(a_n a_1),$$

e quindi

$$A'_n A_{n2} : A'_n A_{n1} = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(a_n a_2) : \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(a_n a_1). \quad (5)$$

E poichè detto $P_{12}$ il punto comune ad $A_1A_2$ e all'$S_{n-2}$ passante per $A'_n$ e per l'$S_{n-3}$ opposto ad $A_1A_2$, si ha:

$$A_1P_{12} : P_{12}A_2 = A'_n A_{n2} \,.\, a_{n2} : A'_n A_{n1} \,.\, a_{n1} \,.$$

moltiplicando termine a termine quest'ultima proporzione e la (5) ricaveremo:

$$A_1P_{12} : P_{12}A_2 = a_{n2} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(a_n a_2) : a_{n1} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(a_n a_1).$$

In generale la legge di divisione degli spigoli è rappresentata da:

$$A_iP_{ih} : P_{ih}A_h = a_{kh} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(a_k a_h) : a_{ki} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(a_k a_i) \quad (k \neq h \neq i)$$

dalla quale segue che in ogni faccia è verificato il teorema di Ceva. Scambiando in questa $i$ con $h$ e ponendo $l$ al posto di $k$, moltiplicando poi termine a termine questa e la precedente; indi nella relazione a cui in questo modo si perviene scambiando $l$ con $i$, si arriva alle:

$$a_{kl} a_{ih} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(a_k a_l) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(a_i a_h) = a_{ki} a_{lh} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(a_k a_i) \,.\, \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(a_l a_h) = \\ = a_{hk} a_{il} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(a_h a_k) \,.\, \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(a_i a_l) \quad (6)$$

che portano, come nel caso precedente, a $2\binom{n}{4}$ condizioni.

Da ultimo ci proponiamo di trovare le condizioni necessarie e sufficienti perchè le congiungenti i vertici con i punti notevoli $K_p$ delle facce opposte ($p \neq 0$) passino per un medesimo punto.

Scriveremo, considerando le spigolo $A_iA_h$ come facente parte dell' $(n-1)$*-edro* che si ottiene escludendo il vertice $A_k$.

$$A_iP_{ih} : P_{ih}A_h = a^p{}_{hk} : a^p{}_{ik} ;$$

e scambiando $h$ con $i$ e ponendo nel medesimo tempo $l$ al posto di $k$, cioè pensando $A_iA_h$ come facente parte dell' $(n-1)$*-edro* che si ottiene escludendo $A_l$:

$$A_hP_{ih} : P_{ih}A_i = a_{il}{}^p : a_{hl}{}^p .$$

Moltiplicando termine a termine le due proporzioni ottenute si trova:

$$a_{hk} \,.\, a_{il} = a_{hl} \,.\, a_{ik} \,.$$

Scambiando ora in quest'ultima $l$ con $i$ e riunendo in una sola la medesima e quella che se ne ottiene col detto scambio:

$$a_{hk} \,.\, a_{il} = a_{ki} \,.\, a_{hl} = a_{ih} \,.\, a_{kl} \,. \tag{7}$$

Siccome in ogni faccia a due dimensioni è soddisfatto il teorema di Ceva, le $2\binom{n}{4}$ condizioni a cui conducono le (7) sono necessarie e sufficienti per l'esistenza di un punto comune alle $n$ rette di cui sopra.

Il teorema che andiamo ad esporre nel paragrafo che segue ci permetterà di porre sotto una forma molto più semplice le condizioni testè trovate.

## § 4. — Il teorema dei seni.

Detto V il volume dell'*n-edro* e $p$ un coefficiente che dipende unicamente dal numero delle dimensioni dello spazio ambiente, è facile dimostrare la formula:

$$pV = \frac{a_i \,.\, a_h \,.\, \text{sen}\,(a_ia_h)}{a_{ih}} ,$$

la quale non è altro che l'estensione di quella che dà il volume del tetraedro in funzione di due facce, dell'angolo da esse compreso e dello spigolo comune. Applicando successivamente questo teorema formiamo il quadro:

$$pV = \frac{a_ia_h \text{ sen } (a_ia_h)}{a_{ih}} , \; pV = \frac{a_ia_l \text{ sen } (a_ia_l)}{a_{il}} , \; pV = \frac{a_ha_l \text{ sen } (a_ha_l)}{a_{hl}} ,$$

$$pV = \frac{a_ka_l \text{ sen } (a_ka_l)}{a_{kl}} , \; pV = \frac{a_ka_h \text{sen} (a_ka_h)}{a_{hk}} , \; pV = \frac{a_ia_k \text{ sen } (a_ia_k)}{a_{ik}}$$

dove, per fare il caso più generale, possiamo supporre diseguali i quattro indici $h, i, k, l$.

Moltiplicando membro a membro le prime due relazioni, poi le altre due e infine le terze ed uguagliando i prodotti ottenuti, resulta:

$$\frac{a_{ih}a_{kl}}{\operatorname{sen}(a_i a_h)\operatorname{sen}(a_k a_l)} = \frac{a_{il}a_{hk}}{\operatorname{sen}(a_i a_l)\operatorname{sen}(a_h a_k)} = \frac{a_{hl}a_{ik}}{\operatorname{sen}(a_h a_l)\operatorname{sen}(a_i a_k)}$$

cioè il *teorema dei seni esteso all'n-edro* Queste relazioni sono $\binom{n}{4}$.

In virtù di questo teorema le condizioni (4), (6), (7) del § 3 si possono esprimere più semplicemente così:

Condizione necessaria e sufficiente perchè le altezze di un *n-edro* passino per un medesimo punto è che siano soddisfatte le $\binom{n}{4}$ relazioni:

$$\cos(a_i a_h)\cos(a_k a_l) = \cos(a_i a_l)\cos(a_h a_k) = \cos(a_h a_l)\cos(a_i a_k).$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè le congiungenti i vertici con i punti di contatto delle facce opposte colla ipersfera iscritta passino per un punto è che sian soddisfatte le $\binom{n}{4}$ relazioni:

$$\cos\tfrac{1}{2}(a_i a_h)\cos\tfrac{1}{2}(a_k a_l) = \cos\tfrac{1}{2}(a_i a_l)\cos\tfrac{1}{2}(a_h a_k) = \cos(a_h a_l)\cos\tfrac{1}{2}(a_i a_k).$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè le congiungenti i vertici con i punti $K_p$ delle facce opposte ($p$ diverso da zero) passino per un punto è che siano soddisfatte le $\binom{n}{4}$ relazioni:

$$\operatorname{sen}(a_i a_h)\operatorname{sen}(a_k a_l) = \operatorname{sen}(a_i a_l)\operatorname{sen} a_h a_k) = \operatorname{sen}(a_h a_l)\operatorname{sen}(a_i a_k).$$

## § 5. — Il teorema di Stewart.

Ci proponiamo adesso di calcolare la misura della sezione prodotta nell'*n-edro* dall'$S_{n-2}$ passante per l'$S_{n-3}$ opposto allo spigolo $A_1A_2$ e pel punto $P_{12}$ di $A_1A_2$ tale che:

$$A_1P_{12} : P_{12}A_2 = r : s.$$

Cominciamo dal porre:

$$\begin{cases} A_1P_{12}A_3A_4 \;\ldots\; A_{n-1} = k_n \\ A_1P_{12}A_3A_4 \ldots A_{n-2}A_n = k_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1P_{12}A_4A_5 \;\ldots\; A_n = k_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_2P_{12}A_3A_4 \;\ldots\; A_{n-1} = l_n \\ A_2P_{12}A_2A_4 \ldots A_{n-2}A_n = l_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_2P_{12}A_4A_5 \;\ldots\; A_n = l_3 \end{cases}$$

e osserviamo che è:

$$\frac{k_3}{l_3} = \frac{k_4}{l_4} = \frac{k_5}{l_5} = \ldots = \frac{k_n}{l_n} = \frac{r}{s}.$$

Poichè si ha:

$$k_3 + l_3 = a_3,\quad k_4 + l_4 = a_4,\ \ldots k_n + l_n = a_n, \tag{8}$$

ricaviamo facilmente:

$$\begin{cases} k_3 = a_3 \dfrac{r}{r+s}, & k_4 = a_4 \dfrac{r}{r+s}, & \ldots k_n = a_n \dfrac{r}{r+s} \\ l_3 = a_3 \dfrac{s}{r+s}, & l_4 = a_4 \dfrac{s}{r+s}, & \ldots l_n = a_n \dfrac{s}{r+s}. \end{cases} \tag{9}$$

Aggiungiamo a queste le relazioni:

$$\begin{cases} \cos(k_p k_t) = \cos(a_p a_t) \qquad p \text{ e } t \text{ uguali a } 3, 4, \ldots, l_4 \\ \cos(l_p l_t) = \cos(a_p a_t) \cdot \end{cases} \tag{10}$$

e la:

$$\sum_3^n a_i a_h \cos(a_i a_h) = \sum_3^n a_m^2 - \left\{ a_1^2 + a_2^2 - 2 a_1 a_2 \cos(a_1 a_2) \right\}, \tag{11}$$

che si ottiene dalla (T) del § 1 facendovi $p$ eguale a 2, ed avremo gli elementi sufficienti per trovare la formula che cerchiamo.

Ciò posto applichiamo a ciascuna delle facce $a_1$ e $a_2$ dei due *n-edri* $A_1P_{12}A_3 \ldots A_n$ e $A_2P_{12}A_3 \ldots A_n$ il teorema di Carnot.

Avremo, indicando con $p_{12}$ la misura della sezione cercata, e avuto riguardo alle relazioni (10):

$$\begin{cases} a_1^2 = p_{12}^2 + \sum_3^n k_t^2 - 2 p_{12} \sum_3^n k_h \cos(p_{12} k_h) - \sum_3^n k_r k_s \cos(a_r a_s) \\ a_2^2 = p_{12}^2 + \sum_3^n l_t^4 - 2 p_{12} \sum_3^n l_h \cos(p_{12} l_h) - \sum_3^n l_r l_s \cos(a_r a_s). \end{cases}$$

Sommando queste due relazioni membro a membro, dopo averle moltiplicate rispettivamente per $l_3$ e $k_3$, osservando che i termini in $p_{12}$ si distruggono, otteniamo:

$$l_3 a_1^2 + k_3 a_2^2 = (p_{12}^2 + k_3 l_3) a_3 + \sum_3^n \left\{ l_3 k_r^2 + k_3 l_r^2 \right\} - \sum_3^n (k_r k_s l_3 + l_r l_s k_3) \cos(a_r a_s).$$

In questa relazione poniamo per le $k$ e $l$ i loro valori dati dalle (9), avuto riguardo alle (8) e osservando che la quantità racchiusa nell'ultimo sommatorio è, a meno di un fattore, quella che costituisce il primo membro della (11), se ne ottiene, dopo fatte le debite riduzioni, con le quali spariscono i termini in $a_3^2, a_4^2 \ldots a_n^2$.

$$(r+s)^2 p_{12}^2 = a_1^2 r^2 + a_2^2 s^2 + 2 r s a_1 a_2 \cos(a_1 a_2) \tag{$\gamma$}$$

che è l'estensione del teorema di Stewart.

## § 6. — Applicazioni del teorema di Stewart.

In questo paragrafo daremo alcune applicazioni del teorema di Stewart all'*n-edro*.

1°. Supponiamo che sia:

$$\cos(a_1 a_2) = 0. \tag{12}$$

La relazione ($\gamma$), essendo omogenea in $r$ ed in $s$, e potendovisi perciò porre $A_1P_{12}$ in luogo di $r$ e $A_2P_{12}$ in luogo di $s$ diventa:

$$\overline{A_1P_{12}}^2 a_1^2 + \overline{A_2P_{12}}^2 a_2^2 = \overline{A_1A_2}^2 p_{12}^2 \tag{13}$$

Questa, come facilmente si può riconoscere, è la condizione *necessaria e sufficiente* perchè l'angolo formato dagli angoli $S_{n-2}$ delle facce $a_1$ e $a_2$ sia retto.

2°. Si faccia nella ($\gamma$) $r$ uguale ad $s$: la corrispondente è la sezione mediana $m_{12}$.

Si ottiene:

$$4m_{12}^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(a_1a_2). \tag{14}$$

Scambiamo in essa circolarmente gl'indici 1, 2, 3... $n-1$ e sommiamo la (14) con tutte quelle ottenute, che saranno in numero di $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2} - 1$.

Avremo, tenuto presente il teorema di Carnot applicato alla faccia $a_n$:

$$4\sum_1^{n-1} m_{1k}^2 = (n-1)\sum_1^{n-1} a_i^2 - a_n^2; \tag{15}$$

formula che ci fa conoscere la somma dei quadrati delle mediane uscenti da un vertice dell'*n-edro*, in funzione delle $n$ facce.

Applicando la (15) successivamente a tutti i vertici dell'*n-edro*, otteniamo sommando membro a membro le relazioni ottenute, il risultato:

$$\sum_1^n m_{ik}^2 = \frac{n}{4}\sum_1^n a_i^2, \tag{16}$$

che può enunciarsi così:

*Il rapporto della somma dei quadrati delle sezioni mediane dell'*n-edro *alla somma dei quadrati delle facce è* $\frac{n}{4}$.

Ne segue:

*Nell'* $S_4$ *e negli spazi di dimensione superiore la somma dei quadrati delle sezioni mediane è maggiore della somma dei quadrati delle facce.*

3°. Poniamo $r = a_2$ ed $s = a_1$: la corrispondente sezione è la bisettrice $\beta_{12}$.

Segue dalla ($\gamma$):

$$\beta_{12} = \frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}\cos\left(\frac{a_1a_2}{2}\right) \tag{17}$$

e da questa il teorema:

*Se dal punto d'incontro* $P_{12}$ *della sezione bisettrice collo spigolo* $A_1A_2$ *si eleva una normale all'*$S_{n-2}$ *della sezione stessa fino ad incontrare l'*$S_{n-2}$ *della faccia* $a_1$ *nel punto* M, *l'* (n — 1)-edro $MA_3A_4 \ldots A_n$ *è medio armonico fra le facce dell'*n-edro *che comprendono la sezione bisettrice.*

4°. Facciamo nella ($\gamma$) una prima volta:

$$r = a_2^h, \qquad s = a_1^h$$

e una seconda:

$$r = a_1^{h-2}, \qquad s = a_2^{h-2}.$$

Il rapporto delle corrispondenti sezioni sarà dato da:

$$a_1 a_2 \frac{a_1^{h-2} + a_2^{h-2}}{a_1^h + a_2^h}.$$

Supponiamo in particolare $h$ eguale a 2, con che la prima sezione diviene la simediana e la seconda la mediana. Otterremo:

$$\frac{s_{12}}{m_{12}} = \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2}.$$

5°. Le (1) del § **1** si possono considerare come $n$ equazioni lineari ed omogenee in $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$, 1. Per la loro compatibilità si richiede dunque che sia nullo il determinante dei coefficienti.

La condizione:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & \cos(a_1 a_2) & \cos(a_1 a_3) & \ldots \cos(a_1 a_n) \\ \cos(a_2 a_1) & -1 & \cos(a_2 a_3) & \ldots \cos(a_2 a_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos(a_n a_1) & \cos(a_n a_2) & \cos(a_n a_3) & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad (18)$$

che per $n$ uguale a *tre* altro non ci esprime se non che la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due retti, ci fornisce nel caso generale una relazione fra i coseni dei diedri dell'*n-edro*. Ma essa ci permette anche di trovare innumerevoli relazioni fra le sezioni dei diversi ordini, bastando a questo scopo rimpiazzare i coseni che in essa figurano colle espressioni ricavate dal teorema di Stewart.

## § 7. — **Estensione del concetto di punto notevole.**

Rappresentiamo con $x_i^{(1)}\, x_i^{(2)} \ldots x_i^{(n)}$ le coordinate dei vertici $A_1 A_2 \ldots A_n$, e con $m_1 m_2 \ldots m_n$, $n$ quantità corrispondenti ai vertici medesimi.

Preso sulla congiungente $A_1 A_2$ un punto $P_{12}$ tale che le sue distanze da $A_1 A_2$ siano nel rapporto di $m_1$ ad $m_2$ e poi sulla congiungente $P_{12} A_3$ un secondo punto tale che le sue distanze da $P_{12}$ e da $A_3$ siano nel rapporto di $m_1 + m_2$ ad $m_3$ e così via, perverremo ad un punto detto *centro* delle distanze, proporzionali alle quantità $m_1, m_2 \ldots m_n$, le cui coordinate sono:

$$\left\{ \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{m_1 x_1^{(1)} + m_2 x_1^{(2)} + m_3 x_1^{(3)} + \ldots + m_n x_1^{(n)}}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n} \\ \xi_2 &= \frac{m_1 x_2^{(1)} + m_2 x_2^{(2)} + m_3 x_2^{(3)} + \ldots + m_n x_2^{(n)}}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n &= \frac{m_1 x_n^{(1)} + m_2 x_n^{(2)} + m_3 x_n^{(3)} + \ldots + m_n x_n^{(n)}}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n}. \end{aligned} \right. \quad (19)$$

È evidente che il punto $K_p$ da noi studiato nel § 2 rientra in questa categoria di punti, potendosi ottenere facendo $m_i = a_i^p$. Ma possiamo dare alle formule (19) tutta la generalità di cui sono suscettibili supponendo che alcune delle $m_i$ siano negative. In tal caso basterà che conveniamo che il punto che divide un segmento nel rapporto di $m$ ad $n$ sia interno al segmento stesso od esterno secondo che $m$ ed $n$ hanno segno uguale o contrario. È chiaro allora che il numero totale dei punti corrispondenti alle ipotesi che nessuno, uno, due, ecc., coefficienti siano negativi, sarà dato per $n$ dispari, da

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}},$$

e per $n$ pari da:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \tfrac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}};$$

e in conseguenza, in virtù di una nota formula di analisi combinatoria, sì nell'uno che nell'altro caso, da $2^{n-1}$.

I punti a cui perveniamo sono dunque $2^{n-1}$, *al massimo*. E diciamo al massimo perchè potrà darsi che si riducano a un numero minore, ciò avvenendo quando si annulli la somma che comparisce nel denominatore delle (19). In tal caso i corrispondenti punti si allontanano a distanza infinita. Abbiamo però allora la seguente limitazione:

*In uno spazio di dimensione dispari il minimo numero di punti a distanza finita, centri delle distanze proporzionali a date quantità* $m_1, m_2, m_3 \ldots m_n$ *corrispondenti ai vertici dell'*$n$-edro *e che si ottengono preponendo ad esse quantità il segno positivo o negativo in tutti i modi possibili, è* $2^{n-1} - \frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}$.

Nel caso poi di $m_i = a_i^p$ si aggiunga che mentre quel numero è raggiungibile per l'*n-edro regolare* (¹) dello spazio a numero *dispari* di dimensioni, sono invece tutti a distanza finita i $2^{n-1}$ punti relativi all'*n-edro regolare* dello spazio a numero *pari* di dimensioni.

È particolarmente interessante il caso di $p$ eguale ad *uno*. In tal caso esisteranno non più di $2^{n-1}$ e non meno di $2^{n-1} - \frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}$ punti equidistanti dagli $S_{n-2}$ delle facce dell'*n-edro*. Uno di essi è interno all'*n-edro* stesso ed è il centro dell'ipersfera iscritta, il cui raggio indicheremo con $r$: in quanto agli altri, considereremo qui soltanto i centri delle ipersfere che toccano una sola faccia e i prolungamenti delle altre e ne indicheremo i raggi con $r_1, r_2, \ldots r_n$.

(¹) Se con $\alpha_k$ indichiamo l'angolo del $k$-edro regolare di $S_{k-1}$ dalle (1) del § 1 si ricava subito che $\cos\alpha_k = \frac{1}{k-1}$.

Se allora indichiamo con V la misura dell'*n-edro*, troveremo facilmente le relazioni:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{(n-1)V}{r}$$

$$-a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{(n-1)V}{r_1}$$

$$a_1 - a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{(n-1)V}{r_2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots - a_n = \frac{(n-1)V}{r_n}.$$

Considerando queste come formanti un sistema di $n+1$ equazioni lineari ed omogenee in $a_1, a_2, \ldots a_n$, $(1-n)V$, si richiede per la loro coesistenza l'annullarsi del determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 & \frac{1}{r} \\ -1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 & \frac{1}{r_1} \\ 1 & -1 & 1 & \ldots\ldots & 1 & \frac{1}{r_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & -1 & \frac{1}{r_n} \end{vmatrix}.$$

Moltiplicando la prima linea per $n-2$ e sottraendovi la somma delle altre, con che i primi $n$ termini della prima linea stessa si riducono a zero, e osservando che il coefficiente dell' $(n+1)$-esimo termine, nello sviluppo, è differente da zero, si trae:

$$\frac{n-2}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_n},$$

estensione di note formule del piano e dello spazio.

## § 8. — Estensione all'*n*-edro della formula della distanza.

Indichiamo con $k$ la somma dei prodotti dei quadrati delle distanze di un punto P di $S_{n-1}$ dai vertici dell'*n-edro* per le quantità $m_1, m_2 \ldots m_n$ ad essi corrispondenti, poniamo cioè:

$$k = \Sigma_h m_h \overline{PA_h}^2.$$

Tenendo presenti le notazioni del § 7 e indicando con $X_1, X_2, \ldots X_n$ le coordinate di P rispetto a un sistema di assi ortogonali, avremo anche

$$k = \Sigma_h m_h \,.\, \Sigma_r (X_r - x_r^{(h)})^2.$$

Supposto che sia $\Sigma_i m_i$ diverso da zero, [1] dividiamo ambo i membri della precedente per $\Sigma_i m_i$. Otterremo:

$$\frac{k}{\Sigma_i m_i}=\frac{\Sigma_h m_h \Sigma_r (X_r - x_r^{(h)})^2}{\Sigma_i m_i}=\Sigma_r X_r^2+\frac{\Sigma_h m_h \Sigma_r (x_r^{(h)})^2}{\Sigma_i m_i}-2\frac{\Sigma_r X_r \Sigma_h m_h x_r^{(h)}}{\Sigma_i m_i}.$$

Aggiungendo e togliendo al secondo membro l'espressione:

$$\frac{2\Sigma_{hk} m_h m_k \Sigma_r x_r^{(h)} x_r^{(k)}+\Sigma_h m_h^2 \Sigma_r (x_r^{(h)})^2}{(\Sigma_i m_i)^2},$$

e osservando che è:

$$\Sigma_r X_r^2+\frac{2\Sigma_{hk} m_h m_k \Sigma_r x_r^{(h)} x_r^{(k)}+\Sigma_h m_h^2 \Sigma_r (x_r^{(h)})^2}{(\Sigma m_i)^2}-2\frac{\Sigma_r X_r \, . \, \Sigma_h m_h x_r^{(h)}}{\Sigma_i m_i}=$$
$$=\Sigma_r \left\{X_r-\frac{\Sigma_h m_h x_r^{(h)}}{\Sigma_i m_i}\right\}^2,$$

potremo scrivere anche:

$$\frac{k}{\Sigma_i m_i}=\Sigma_r \left\{X_r-\frac{\Sigma_h m_h x_r^{(h)}}{\Sigma_i m_i}\right\}^2+$$
$$+\frac{\Sigma_h m_h \Sigma_r (x_r^{(h)})^2}{\Sigma_i m_i}-\frac{2\Sigma_{hk} m_h m_k \Sigma_r x_r^{(h)} x_r^{(k)}+\Sigma_h m_h^2 \Sigma_r (x_r^{(h)})^2}{(\Sigma_i m_i)^2}.$$

Ora si ha:

$$\frac{\Sigma_h m_h \Sigma (x_r^{(h)})^2}{\Sigma_i m_i}-\frac{2\Sigma_{hk} m_h m_k \Sigma x_r^{(h)} x_r^{(k)}+\Sigma_h m_h^2 \Sigma_r (x_r^{(h)})^2}{(\Sigma_i m_i)^2}=$$
$$=\frac{\Sigma_h m_h^2 \Sigma (x_r^{(h)})^2+\Sigma_{hk} m_h m_k \Sigma_r \left\{(x_r^{(h)})^2+(x_r^{(k)})^2\right\}}{(\Sigma_i m_i)^2}$$

e in conseguenza:

$$\frac{k}{\Sigma_i m_i}=\Sigma_r \left\{X_r-\frac{\Sigma_h m_h x_r^{(h)}}{\Sigma_i m_i}\right\}^2+\frac{\Sigma_{hk} m_h m_k \Sigma_r (x_r^{(h)}-x_r^{(k)})^2}{(\Sigma m_i)^2}.$$

Il primo sommatorio del secondo membro non è altro che il quadrato della distanza di P dal centro D delle distanze proporzionali a $m_1, m_2 \ldots m_n$, e il secondo può anche scriversi:

$$\frac{\Sigma_{hk} m_h m_k \overline{A_h A_k}^2}{(\Sigma_i m_i)^2}.$$

Ne segue la formula domandata:

$$\overline{PD}^2=\frac{\Sigma_h m_h \overline{PA_h}^2}{\Sigma_i m_i}-\frac{\Sigma_{hk} m_h m_k \overline{A_h A_k}^2}{(\Sigma_i m_i)^2}. \qquad (20)$$

Se D coincide con $k_p$, allora è $m_i = a_i^p$ e si trova:

$$\overline{PK_p}^2=\frac{\Sigma_h a_h^p \overline{PA_h}^2}{\Sigma_i a_i^p}-\frac{\Sigma_{hk} a_h^p a_k^p \overline{A_h A_k}^2}{(\Sigma a_i^p)^2}. \qquad (21)$$

[1] Ciò equivale a supporre che il centro delle distanze proporzionali alle $m$ sia a distanza finita.

Ponendo:

$$E_p = \frac{\Sigma_{hk} a_h{}^p a_k{}^p \overline{A_h A_k}^2}{(\Sigma_i a_i{}^p)^2},$$

si può scrivere la precedente in modo più semplice:

$$\overline{PK_p}^2 = \frac{\Sigma_h a_h{}^p \overline{PA_h}^2}{\Sigma_i a_i{}^p} - E_p.$$

Da queste segue che quanto più P è vicino a $K_p$, tanto meno $\frac{\Sigma_h a_h{}^p \overline{PA_h}^2}{\Sigma_i a_i{}^p}$ differisce da $E_p$. Il minimo valore di detto sommatorio si ha dunque quando P coincide con $K_p$, ed è $E_p$. Notiamo inoltre che i punti P pei quali $\Sigma_h a_h{}^p \overline{PA_h}^2$ è costante, sono sopra un'ipersfera di centro $K_p$.

*Posizioni speciali di* P. Se P coincide col centro O dell'ipersfera circoscritta, abbiamo:

$$\overline{OK_p}^2 = R^2 - E_p$$

dalla quale segue che $E_p$ è la potenza dei punti di detta ipersfera rispetto a quella di raggio $OK_p$.

Se facciamo coincidere P con $K_r$ troviamo:

per $r$ diverso da $p$:

$$\overline{K_r K_p}^2 = \frac{\Sigma_h a_h{}^p \overline{K_r A_h}^2}{\Sigma_i a_i{}^p} - E_p$$

per $r$ uguale a $p$:

$$\Sigma a_h{}^p \overline{K_p A_h}^2 = \frac{\Sigma_{hk} a_h{}^p a_k{}^p \overline{A_h A_k}^2}{\Sigma_i a_i{}^p}.$$

Aggiungiamo da ultimo i due teoremi la cui dimostrazione lasciamo allo studioso.

1°. *La congiungente un vertice col baricentro della faccia opposta viene divisa dal baricentro dell'*n-edro *in due parti tali che quella che va al vertice è* (n — 1) *volte quella che va alla base. (Estensione del teorema di Commandino.)*

2°. *In un* n-edro (n — 1) *rettangolo in* $A_1$ *la porzione di congiungente* $A_1$ *col punto* $K_2$ *di Lemoine compresa entro l'*n-edro *è divisa per metà da* $K_2$.

Enrico Piccioli

*Empoli.*

# ESTENSIONE DI ALCUNI TEOREMI SUI GRUPPI DI SOSTITUZIONI

**1.** Un gruppo di sostituzioni G, transitivo, d'ordine $n$ e classe $n-1$ possiede $n-1$ operazioni che ne spostano gli $n$ elementi, e lo studio dei casi nei quali queste formano un gruppo ha dato origine a varie ed interessanti ricerche. Maillet (*Recherches sur les substitutions*, Parigi, 1892) e Burnside (*Theory of groups of a finite order*, Cambridge, 1897, pag. 141-147) ad esempio, hanno già da tempo stabilito certe limitazioni all'ordine del gruppo quando ne sia noto il grado, ed il secondo di questi matematici, che ha poi ripresa la questione considerandola sotto un nuovo punto di vista, ha potuto concludere che, solo quando $n$ è maggiore del quadrato del più piccolo numero dispari che è ordine di un gruppo semplice, G possiede necessariamente un sottogruppo transitivo invariante formato da quelle $n$ sostituzioni e del quale $n$ è ordine e grado. Ha così potuto dedurre che se un gruppo è d'ordine $pq$, essendo $p$ e $q$ numeri primi fra di loro, e contiene $p$ sottogruppi d'ordine $q$, coniugati e risolubili, non aventi, ad eccezione dell'identità, nessuna operazione comune, allora esso possiede un sottogruppo invariante d'ordine $p$. Inoltre, che se G ammette un gruppo d'isomorfismi, che ha per ordine la potenza d'un numero primo e le di cui operazioni non lasciano altro elemento di G inalterato se non quello identico, allora il gruppo degli isomorfismi è ciclico. Queste questioni, già per loro stesse interessanti, si collegano ad altre che riguardano l'esistenza dei gruppi semplici d'ordine dispari. È noto che l'ordine d'un gruppo semplice non può esser rappresentato da un numero dispari se questo non può scomporsi in più di cinque fattori primi, e se non ha nessuna delle forme $p^\alpha$, $p^\alpha q$, $p^\alpha q^2$, $p^\alpha q^\beta$, ..., $r^\gamma$, nell'ultima delle quali gli indici devono essere i numeri 1 e 2; ma fino ad ora le ricerche su tali gruppi sono rimaste fra limiti molto ristretti, ed è ancora Burnside che vi ha dedicate varie note e che nell'opera già citata (pag. 371-379) ha potuto dimostrare come l'ordine d'un tal gruppo non può essere un numero minore di 9000.

**2.** Se un gruppo semplice G d'ordine dispari vien rappresentato quale gruppo di sostituzioni sul minor numero possibile di elementi, i sottogruppi intransitivi, nonchè i costituenti transitivi, sono semplicemente transitivi e d'ordine dispari: inoltre, il massimo sottogruppo, di grado $n-1$, è formato di un numero pari di costituenti semplicemente transitivi d'ordine dispari e Jordan ha mostrato a pag. 28 del suo *Traité des substitutions*, che l'ordine di ognuno di tali costituenti contiene tutti i fattori che concorrono a formare l'ordine del sottogruppo massimo. Il grado di G non può essere un numero primo della forma $2^m+1$, giacchè allora gli operatori di quest'ordine verrebbero trasformati in loro stessi da sostituzioni d'ordine 2, e ciò pel teorema che stabilisce che ogni operatore d'ordine $p$ ($p$ numero primo) d'un gruppo di grado $p$ deve venir trasformato in sè stesso da un numero di operatori del gruppo che è maggiore di $p$, sempre che l'ordine del gruppo sia un numero composto. Che se poi uno dei costituenti transitivi del sottogruppo massimo avesse per grado un numero primo della forma $2^m+1$, l'ordine di questo sottogruppo sarebbe $p$. In conseguenza G possederebbe $n-1$ sostituzioni di grado $n$ e potrebbe venir rappresentato quale gruppo transitivo di grado minore di $n-1$, per cui non sarebbe più quel gruppo di sostituzioni sul minor numero di elementi al quale abbiamo accennato. Possiamo così ritenere che in G non può essere nessun costituente transitivo il cui grado sia rappresentato da uno dei numeri 3, 5, 17, ... cioè, in altre parole, che il grado d'un gruppo semplice d'ordine dispari è sempre minore di 50. (1)

Se dunque i gruppi primitivi d'ordine dispari sono semplicemente transitivi, lo studio dei gruppi primitivi semplicemente transitivi potrà contribuire alla conoscenza dei gruppi semplici d'ordine dispari, come già ha mostrato il prof. Rietz, (2) ed è sotto questo aspetto che si può con profitto affrontare la questione, estendendo ai gruppi semplici d'ordine dispari alcuni dei teoremi dati pei gruppi semplicemente transitivi da Jordan, (3) da Burnside, (4) da Miller, (5) ecc.

**3.** Se $p$ e $q$ sono numeri primi differenti e della forma $2^m+1$, nessun gruppo primitivo di grado $pq$ può nel suo ordine contenere $p$ e $q$ contemporaneamente.

Sia $p^\mu q^\nu$ l'ordine di uno di tali gruppi; saranno $p^{\mu-1}q^{\nu-1}$ e $pq-1$ rispettivamente l'ordine e il grado del sottogruppo massimo $G_s$ che non sposta un dato elemento $a_s$ del gruppo. Per $p^2>q$ è $p^2>pq-1$, e nessuno dei costituenti transitivi potrà essere di grado $p^\alpha$ ($\alpha>1$), nè tutti potranno essere di grado $p$, non essendo questo numero fattore di $pq-1$. Per ragione analoga non potranno neppure essere di grado $q$. Supponiamo dunque che siano in parte di grado $p$ ed in parte di grado eguale ad una potenza di $q$. Ma l'ordine d'un costituente transitivo di grado $p$ è $p$, numero che è per ipotesi primo con $q$, nel mentre che, come è noto, ogni numero primo che divide l'ordine d'un costituente transitivo di G deve

(1) MILLER, *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. XXXIII, pag. 7.
(2) *On primitive Groups of odd order*, pag. 3 e segg.
(3) *Traité des Substitutions*, pag. 281-284. Parigi, 1870.
(4) *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. XXVIII, pag. 533-542.
(5) *Theory of Groups of a finite order*. Cambridge, 1897, pag. 152-185.

pur dividere l'ordine di tutti questi costituenti: (1). dunque $q$ non può essere grado di nessuno di quei costituenti.

**4.** Il sottogruppo massimo $G_s$ di G sia d'ordine dispari, ammetta un costituente transitivo T di grado $pq$ e possegga $q$ sistemi d'imprimitività. I numeri $p$ e $q$ siano ancora quali nel numero precedente. È ben noto che i $q$ sistemi d'imprimitività sono permutabili secondo il gruppo ciclico d'ordine $q$. All'identità di T corrisponde in $G_s$ un sottogruppo invariante $H_s$ di grado $n-\alpha$ $(\alpha < pq+1)$: indichiamo con $G_r$ il coniugato di $G_s$ che non sposta un elemento di T. e con $R_s$ il sottogruppo invariante di $G_s$ che corrisponde a quello principale in T. In $G_r$ il sottogruppo $H_s$ è elemento di una serie di $pq$ coniugati che da $G_r$ sono trasformati per mezzo d'un costituente transitivo $T_1$ d'ordine $p^u q^v$. Ma $T_1$ è imprimitivo. e se $p$ e $q$ sono quali li abbiamo supposti nessun gruppo imprimitivo esiste che essendo di grado $pq$ abbia il suo ordine divisibile sia per $p^2$ che per $q^2$ se tale ordine è un numero dispari, ed inoltre, come lascia invariato un elemento, altri pure ne lascerebbe, così $H_s$ è in $G_s$ trasformato in sè stesso da una parte dei suoi coniugati. Sia $H_{s_1}$ uno di essi e tale che $H_{s_1}^{-1}H_sH_{s_1} = H_s$: esso è contenuto tanto in $G_s$ che in $G_r$ e dunque anche in $R_s$, e se questo possiede operatori d'ordine $q$. tali operatori apparterranno pure ad $H_s$. Quindi $H_s$ ed $H_{s_1}$ posseggono le stesse sostituzioni d'ordine $q$. Ma il primo è invariante in $G_s$ ed il secondo in $G_{s_1}$; dunque le sostituzioni d'ordine $q$ di $H_s$ generano un gruppo invariante sia in $G_s$ che in $G_{s_1}$, il che non può essere, giacchè, per ipotesi, $G_s$ è il sottogruppo massimo.

**5.** Sia ora $p^a$ la più alta potenza del numero primo $p$ che è fattore dell'ordine $n$ di G e sia H un sottogruppo d'ordine $p^a$: indichiamo con $G_1$ quel sottogruppo massimo che contiene H invariantemente e supponiamo che tutte le operazioni di $G_1$ siano permutabili con quelle di H talchè questo sia abeliano. Se rappresentiamo G quale gruppo di sostituzioni sugli $n$ simboli

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots, a_n$$

e indichiamo con $H_1$ un qualunque sottogruppo d'ordine $n$ $(n = mq)$, tutti gli elementi $a$ saranno regolarmente permutati in $q$ serie di $n$ elementi ciascuna dalle operazioni di $H_1$. Se

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots, a_m$$

è una di queste serie e facciamo

$$\varphi_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m,$$

sarà $\varphi_1$ funzione lineare delle $a$, invariante per tutte le operazioni di G

(1) Cfr. JORDAN, *op. cit.* pag. 284.

contenute in $H_1$, ma non per nessun'altra, e che quindi assumerà $q$ valori differenti per tutte le operazioni di G. Indichiamoli coi simboli

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_q.$$

Ciascuno di questi valori è somma di $m$ differenti $a$ ciascuno dei quali non può esser compreso in più di uno dei valori di $\varphi$, che sono quindi permutati dalle operazioni di G. Questo può così venir rappresentato quale gruppo di permutazioni sulle $\varphi$, ed il gruppo delle $a$ è in isomorfismo meriedrico od oloedrico col gruppo delle $\varphi$ a seconda che $H_1$ contiene o no un sottogruppo invariante di G. Il gruppo delle $\varphi$ può rappresentarsi colla notazione [1]

$$\varphi'_i = \varphi_{i'}^{(k)} \qquad (i, i' = 1, 2, \ldots, q\,;\ k = 1, 2, \ldots, n)\,;$$

designamolo con G'. Se G è in isomorfismo meriedrico con G', sarà per due o più valori di $k$,

$$\varphi_{i'}^{(k)} = \varphi_i$$

per ogni valore di $i$. In ogni caso per ciascun $k$ i $q$ simboli

$$\varphi_1^{(k)}, \ \varphi_2^{(k)}, \ \varphi_3^{(k)}, \ldots, \varphi_q^{(k)}.$$

rappresenteranno i $\varphi$ presi in diverso ordine.

Ciò premesso, sia S un'operazione di H, d'ordine $p^\beta$, e tale che non possa esservi altra operazione S' in H per la quale la relazione $S = S'^p$ possa ancora sussistere. Il gruppo H è isomorfo al gruppo ciclico d'ordine $p^\beta$, ed è possibile determinare un suo invariante relativo $j$ che da S sia trasformato in $\rho j$, essendo $\rho$ radice primitiva $p^\beta$ (esima) dell'unità, ma che rimane invariato per tutte le operazioni di H rispetto alle quali esso è isomorfo ad (S). [2]

Se S fa parte di $(1 + kp)$ sottogruppi d'ordine $p^\alpha$ e se in G' ogni sottogruppo d'ordine $p^\alpha$ lascia $h$ elementi invariati, l'operazione che in G' corrisponde ad S lascerà $(1 + kp)\,h$ simboli invariati che dovranno essere transitivamente permutati per mezzo del più ampio sottogruppo K nel quale S è invariante. [3] Deduciamo così che se $p$ è il maggior numero primo e $p^\alpha$ la sua massima potenza che dividono l'ordine $n (= mp^\alpha)$ di G,

1° G è prodotto diretto di gruppi d'ordine $p^\alpha$ ed $m$ rispettivamente se ogni operazione di un suo sottogruppo d'ordine $p^\alpha$ è sua operazione invariante;

2° G possiede un sottogruppo invariante d'indice $p^\alpha$ se i sottogruppi che hanno questo numero per ordine sono abeliani.

Ciò si estende facilmente al caso nel quale l'ordine $n = mp^\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) del gruppo G è un numero dispari e $p$ è minore di ciascuno dei fattori

---

(1) Dyck, *Mathematische Annalen*, vol. XXII, pag. 90-92.

(2) Burnside, " On some properties of Groups of odd order „ *Proc. of the London Math. Soc.* vol. XXXIII.

(3) Si può notare infatti che gli $h$ simboli lasciati invariati da H sono permutati transitivamente da $G_1$ (compreso in K) che contiene operazioni che permutano H con ciascuno degli altri sottogruppi d'ordine $p^\alpha$ nei quali è contenuta l'operazione S.

primi di $m$; il G possiede allora un sottogruppo invariante d'ordine $m$. Se per $\alpha = 3$ i gruppi d'ordine $p^3$ sono abeliani e non si hanno fra $m$ e $(p^2+p+1)$ dei fattori comuni, G possiede un sottogruppo invariante d'ordine $m$, giacchè i soli isomorfismi il cui ordine sia maggiore di $p$ che possono essere ammessi da un gruppo abeliano d'ordine $p^3$ sono quelli che hanno per ordini i fattori di $(p^2+p+1)$. Ma se non lo sono, G possiede un sottogruppo invariante d'indice $p^3$. Infine, se l'ordine, dispari, di G ha un fattore primo $q$ non ripetuto e della forma $2^n+1$, il gruppo G possiede un sottogruppo invariante d'indice $q$.

**6.** Facendo seguito alla conseguenza prima del numero precedente mostreremo che, o il sottogruppo H è regolare, o che esso risulta da isomorfismo oloedrico stabilito fra gruppi regolari d'ordine $p^\alpha$ solo quando è $n-1$ il suo grado, e che G contiene un sottogruppo intransitivo di grado $n$ avente un costituente transitivo di grado $1+kp$ $(k>0)$ e d'ordine $mp$.

Il prof. Burnside (1) ha già dimostrato che quel sottogruppo di G che ne contiene tutte le sostituzioni trasformanti H in sè stesso permuta transitivamente i $\eta$ elementi che non entrano in H. Per $\eta = 1$ dovranno in H essere contenuti (2) alcuni dei sottogruppi

$$G_1, \quad G_2, \quad G_3, \ldots, G_n$$

che lasciano invariato un elemento di G, essendo il loro grado primo con $n$. Sia $H_1$ un sottogruppo d'ordine $p^\beta$ comune a due qualunque di quegli $n$ sottogruppi e nessun sottogruppo d'ordine $p^\gamma$ $(\gamma > \beta)$ sia comune a due qualunque di essi. Per $\beta > 0$ (3) il sottogruppo $H_1$ deve essere contenuto in sottogruppi $K_1$, $K_2$ d'ordine $p^\alpha$; e siccome in gruppi di quest'ordine ogni sottogruppo $H_1$ è trasformato in sè stesso da quelle operazioni del gruppo che in esso stesso non sono contenute, così $H_1$ è invariante in un sottogruppo $H_2$ di grado $n-1$, contenuto in $K_1$. Analoga cosa si dirà per $K_2$; il gruppo $H_1$ è invariante in un sottogruppo $H_3$ di grado $n-1$, per cui è invariante in $[H_2, H_3]$ di grado $n$; e siccome è $n \equiv 1$, mod. $p$, così deduciamo che se diciamo $q$ il numero di elementi di G non contenuti in $H_1$, è pure $q \equiv 1$, mod. $p$. Di più, per essere tanto $H_2$ che $H_3$ di grado $n-1$, segue che $[H_2, H_3]$ possiede un costituente transitivo di grado $1+kp$ $(k>0)$ formato da quegli elementi che non sono contenuti in $H_1$ ed il di cui ordine è un multiplo di $p$.

Deduciamo da ciò che, chiamando ancora $p^\alpha$ la maggior potenza del numero primo $p$ che divide l'ordine del sottogruppo $G_s$ di G che non sposta un dato elemento $a_s$, se tutti i gradi dei costituenti transitivi di $G_s$ sono multipli di $p^\beta$, ma uno almeno non è multiplo di $p^{\beta+1}$, allora o è $\alpha = \beta$, o in G è un sottogruppo di grado $n$ che possiede un costituente transitivo di grado $1+kp$ $(k>0)$ ed il cui ordine è multiplo di $p$.

---

(1) *Op. cit.* pag. 202.

(2) Burnside. *Op. cit.* pag. 204.

(3) Sarebbe superfluo considerare il caso nel quale è $\beta = 0$ giacchè allora H risulta da isomorfismo oloedrico stabilito fra' gruppi regolari.

**7.** L'ordine $n$ del gruppo G, primitivo, sia ancora un numero composto. È noto (1) che se in $G_s$ sono $r_a$ sostituzioni di grado $(g-\eta_a)$, il numero totale di sostituzioni di G aventi per grado un numero minore di $g$ è espresso dalla somma

$$\frac{1}{\eta_1} gr_1 + \frac{1}{\eta_2} gr_2 + \frac{1}{\eta_3} gr_3 + \ldots + \frac{1}{\eta_u} gr_u ,$$

avendo indicato con $u$ il numero di gradi differenti delle sostituzioni di $G_s$. La somma di tutti questi $u$ termini $\frac{r}{\eta}$ può considerarsi equivalente ad una somma di $\frac{n}{g} = N$, addendi della forma $\frac{1}{\eta}$, giacchè è

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_u = \frac{n}{g},$$

per cui possiamo scrivere al posto di quella somma l'espressione

$$g \Sigma \frac{1}{\eta_a},$$

intendendo sempre il sommatorio esteso da $a=1$ ad $a=N$. Ma è pur noto (2) che il numero medio di elementi delle sostituzioni d'un gruppo intransitivo è dato dall'eccesso del grado sul numero di sistemi d'intransitività, per cui se consideriamo $G_s$, nel quale supponiamo $v$ sistemi di intransitività, come se, essendo transitivo fosse dotato di un sistema di intransitività, il valore medio di $\eta_a$ sarà $v+1$, cioè sarà

$$v + 1 = \frac{1}{N} \Sigma \eta_a .$$

Ma la media aritmetica di qualsiasi numero di quantità positive è sempre maggiore della loro media geometrica, e siccome i $\eta_a$ dell'ultimo sommatorio non possono essere tutti eguali avendo esclusa l'identità dalle sostituzioni di $G_s$, così possiamo scivere

$$\frac{1}{N} \Sigma \eta_a > (\eta_1 \eta_2 \eta_3 \ldots \eta_N)^{1:N},$$
$$\frac{1}{N} \Sigma \frac{1}{\eta_a} > \left(\frac{1}{\eta_1 \eta_2 \eta_3 \ldots \eta_N}\right)^{1:N},$$

dalle quali diseguaglianze siamo facilmente condotti all'altra

$$N^2 : \Sigma \eta_a < \Sigma \frac{1}{\eta_a} .$$

Combinando quest'espressione con quella che dà il valore di $v+1$ otteniamo,

$$\frac{n}{g(v+1)} < \Sigma \frac{1}{\eta_a}, \qquad \text{cioè} \qquad \frac{n}{v+1} < g \Sigma \frac{1}{\eta_a},$$

(1) JORDAN. "Recherches sur les substitutions", *Journal de Math. de Liouville*, vol. XVII. pag. 353.
(2) JORDAN. *Comptes-Rendus de l'Ac. des Sciences de Paris*, vol. 74, pag. 977; FROBENIUS. *Crelle*, vol. 101, pag. 288.

la quale mostra che un gruppo primitivo G di grado $g$ e che ha un numero composto $n$ per ordine, contiene più di $\frac{n}{v+1}$ sostituzioni di grado minore di $g$, essendo $v$ il numero di sistemi d'intransitività del sottogruppo che non sposta un dato elemento.

Per $v=1$, nel qual caso il gruppo è più volte transitivo, le sostituzioni di grado minore di $g$ sono più della metà.

In particolare un gruppo di grado $kp$ e d'ordine $mp$ ($p$ numero primo, $m$ primo con $p$ e con $p-1$) contiene $m$ operatori il cui ordine è multiplo di $m$; tutte le sostituzioni di grado inferiore a $kp$ hanno per ordine un numero primo con $p$, per cui, per quanto è detto più su, è

$$v > \frac{mp}{v+1}, \qquad \text{cioè} \qquad v > p-1;$$

e siccome per essere $mp$ dispari, $v$ è pari, è pure $v \geqq p+1$, così il sottogruppo $G_s$ ha almeno $p+1$ costituenti transitivi.

**8.** Gli elementi di un costituente transitivo T di grado $t$ del gruppo G siano

$$a_{s,1}, \quad a_{s,2}, \quad a_{s,3} \dots, a_{s,t};$$

la funzione quadratica

$$f = \sum_{s=1}^{s=g} a_s (a_{s,1} + a_{s,2} + a_{s,3} + \dots + a_{s,t}),$$

rimane invariante per tutte le sostituzioni di G ed è inoltre, a meno di un possibile fattore numerico, (1) il minor invariante quadratico che contiene $a_s a_{s,1}$. Se l'ordine di G è dispari, i costituenti transitivi di $G_s$ di egual grado sono a coppie: $G_s$ contiene un sottogruppo invariante $H_s$ di grado $(g-\alpha)$, e dei $g$ coniugati fra i quali esso è compreso ne entrano $(\alpha-1)$ in $G_s$. Questi $(\alpha-1)$ sottogruppi $H_s$, che designeremo con

$$H_{s,1}, \quad H_{s,2}, \quad H_{s,3} \dots, H_{s,\alpha-1}, \tag{a}$$

generano un gruppo di grado $(g-1)$. Ora, « se $G_s$ possiede (2) $v$ sistemi d'intransitività ed è $H_s$ il sottogruppo invariante di $G_s$ corrispondente all'identità di uno dei costituenti transitivi, nel mentre $G_s$ trasforma i sottogruppi $(a)$ secondo un costituente che possiede $v_1$ sistemi d'intransitività, allora $H_s$ possiede più di $\frac{v}{v_1}$ sistemi d'intransitività, facendo eccezione pel caso nel quale è $v_1=1$, giacchè allora ne possiede $v$ almeno ». Questa legge si verifica facilmente tenendo conto di quanto abbiamo già detto, giacchè deduciamo che se $H_s$ avesse meno di $\frac{v}{v_1}$ sistemi d'intran-

(1) Rietz. *op. cit.* pag. 7.
(2) Miller. *Proc. of the London Math. Soc.*, vol. XXVIII, pag. 535.

sitività, le $v_1$ serie coniugate in $G_s$ nelle quali i sottogruppi $(a)$ sono suddivisi conterebbero il massimo numero di elementi

$$\left(\frac{v}{v_1}-1\right)v_1+1=v-(v_1-1)$$

dei $v$ sistemi d'intransitività di $G_s$, dovendo ognuno di quei sottogruppi contenere almeno un ciclo di T, per cui questi ultimi non potrebbero appartenere ad un gruppo di grado $(g-1)$ eccetto che per $v_1=1$ (cfr. numero precedente).

Siano ora T e T' due costituenti transitivi corrispondenti, in G e $G_s$ rispettivamente, ma fra loro differenti. Un certo numero di quei $(\alpha-1)$ sottogruppi vengono trasformati per mezzo di T' quando $H_s$ corrisponde all'identità di T. (1) Notiamo innanzi tutto che se indichiamo con

$$a_{x,1}\,,\quad a_{x,2}\quad a_{x,3}\,,\ldots,a_{x,t}$$

gli elementi di T', possiamo scrivere, come già abbiamo fatto per T,

$$f=\sum_{x=1}^{x=g}(a_{x,1}+a_{x,2}+a_{x,3}+\ldots+a_{x,t})\,a_x\,.$$

Formiamo il coniugato $G_{s,a}$ di $G_s$ lasciando invariato un elemento di T: dai due differenti valori di $f$ rileviamo che in $G_{s,a}$ l'elemento $a_s$ entra nel gruppo trasformato di T', cioè in $R^{-1}TR$, essendo R tale che $R^{-1}G_sR=G_{s,a}$: ma $H_s$ è trasformato per mezzo di G nel modo stesso nel quale è trasformato $a_s$, e da ciò il teorema.

Siano ora due solamente i costituenti transitivi, ed all'identità in uno di essi, in T', ad esempio, corrisponda un sottogruppo invariante $H_s$ di $G_s$. I sottogruppi

$$H_{s,1}\quad H_{s,2}\quad H_{s,3}\,,\ldots,H_{s,h}\,,\qquad [h=\tfrac{1}{2}(g-1)],\tag{b}$$

sono i trasformati da $G_s$ per mezzo degli elementi di $H_s$, (2) per cui, per due dei $g$ sottogruppi

$$H_1\,,\quad H_2\,,\quad H_3\,,\ldots,H_g\,,$$

coniugati in G sussiste l'una o l'altra, ma non entrambe contemporaneamente, delle relazioni

$$H_\beta^{-1}H_\alpha H_\beta=H_\alpha\,,\qquad \text{ed}\qquad H_\alpha^{-1}H_\beta H_\alpha=H_\beta\,.\tag{c}$$

Sia $v$ il numero di elementi comuni ad $H_\alpha$ e $H_\gamma$: è pure $v$ il numero di elementi comuni a due qualunque dei sottogruppi $(b)$. Siano

$$a_1\,,\quad a_2\,,\quad a_3\,,\ldots,a_u\,,\quad b_1\,,\quad b_2\,,\quad b_3\,,\ldots,b_v\,,$$

gli elementi di $H_s$ e

$$b_1\,,\quad b_2\,,\quad b_3\,,\ldots,b_v\,,\quad c_1\,,\quad c_2\,,\quad c_3\,,\ldots,c_u\,,$$

quelli di $H_{s,1}$, ad esempio: è $u+v$ il grado di $H_s$. Dovendo $H_{s,1}$ venir

(1) Rietz. *Loc. cit.* pag. 11.

(2) Giacchè, se i sottogruppi $(a)$ formano un'unica serie coniugata in $G_s$, vengono trasformati per mezzo di T' quando $H_s$ corrisponde all'identità in T.

trasformato per mezzo degli elementi di $H_s$ che esso non contiene, è trasformato per mezzo di uno degli elementi $a$, ed in $H_s$ sono necessariamente sostituzioni che non trasformano $H_{s,1}$ in sè stesso. Sia S una di queste: $S^{-1}H_sS$ contiene allora tutti gli elementi $a$ giacchè $H_{s,1}$ ed $S^{-1}H_{s,1}S$ hanno appunto $v$ elementi in comune. Ma $a_{s,1}$, per mezzo del quale $H_{s,1}$ è trasformato, è contenuto in $S^{-1}H_{s,1}S$, e dunque non può trasformare $H_{s,1}$ in sè stesso. Analogamente $H_{s,1}$ non può trasformare in sè stesso $S^{-1}H_{s,1}S$; e siccome ciò è contrario alla relazione ($c$), così possiamo dire che se sono solamente due i costituenti transitivi del sottogruppo $G_s$ di un gruppo primitivo d'ordine dispari, tale sottogruppo risulta da isomorfismo oloedrico fra quei costituenti.

Il $G_s$ risulta da isomorfismo oloedrico fra costituenti transitivi primitivi, se questi non sono più di quattro, ed anche questo si deduce facilmente. Ammettiamo infatti che ciò non sia: allora all'identità di qualcuno dei costituenti transitivi T di grado $t$ corrisponderà in $G_s$ un sottogruppo invariante $H_s$ che avrà o due o tre sistemi d'intransitività. Ne abbia tre e sia $(g-\alpha)$ il suo grado: sarà $(\alpha-1)=t$, e nel coniugato di $G_s$ che lascia un elemento di T invariato, il sottogruppo H sarà uno dei $t$ coniugati, il che non può essere giacchè sappiamo che questi $(\alpha-1)$ sottogruppi non possono esser coniugati. [1] Ne abbia dunque due; allora è $n-\alpha=0$, mod. 2 e anche $\alpha-1\equiv 0$, mod. 2 e gli $(\alpha-1)$ sottogruppi ($a$) potranno venir trasformati solamente per mezzo d'un gruppo T' avente due costituenti transitivi, il che conferma l'affermazione fatta.

**9.** I costituenti transitivi $T_1, T_2, T_3, \ldots$ di $G_s$ siano d'egual grado $t$ e d'ordine $s_1, s_2, s_3, \ldots$ rispettivamente: mostreremo che se i rapporti $\frac{s_1}{t}, \frac{s_2}{t}, \frac{s_3}{t}, \ldots$ non contengono un dato numero $p$ che sia fattore di $t$, l'ordine di $G_s$ è della forma $kt$, essendo $k$ un numero primo con $t$.

Ammettiamo ancora che ciò non sia e che il sottogruppo invariante $H_s$ di $G_s$ corrispondente all'identità in $T_1$ sia d'ordine $h=qp^m$, essendo $q$ primo con $p$ ed $m>0$; le sostituzioni di $H_s$ che hanno per ordini qualche potenza di $p$ generano allora un gruppo $H'_s$ d'ordine $q_1p^m$, invariante in $G_s$. Nel coniugato $G_r$ di $G_s$ lasciamo invariato un elemento appartenente a $T_1$: avremo $\frac{1}{t}$ sostituzioni di $G_s$, e $H'_s$ apparterrà alla serie dei $t$ coniugati che $G_r$ trasforma per mezzo di uno dei suoi costituenti transitivi T di grado $t$. Il sottogruppo invariante $H'_r$ di $G_r$ corrispondente all'operazione identica di T contiene le sostituzioni comuni a $G_r$ e $G_s$, giacchè trasforma $H'_s$ in sè stesso, e sarà dunque d'ordine $q_2p^m$, essendo $q_2$ un numero primo con $p$. Ma poichè tutte le sostituzioni di $T_1$ i di cui ordini non sono numeri primi con $p$ sono di grado $t$, ne segue che le so-

---

[1] Miller, *Proc. of the London Math. Soc.*, vol. XXVIII, pag. 535: "Se tutti i costituenti transitivi di $G_s$ sono gruppi primitivi, la serie ($a$) non può essere una serie coniugata in $G''$".

stituzioni i di cui ordini sono potenze di $p$ e sono comuni a $G_r$ e $G_s$ appartengono ad $H_s$.

Se $H'_s$ contenesse tutte queste sostituzioni di $H_s$, sarebbe invariante in $G_r$ ed in $G_s$, il che non può ammettersi essendo entrambi questi sottogruppi, i massimi. Ne contenga solamente una parte e siano P le rimanenti: l'ordine di $[H'_r, P]$ è un multiplo di $p^{m+1}$ ed i due sottogruppi $G_s$ e $G_r$ hanno gruppi d'ordine $p^{m+1}$ in comune, ciò che invece non può essere essendo l'ordine di $H_s$ primo con $p^{m-1}$ già per ipotesi. L'ordine di $G_s$ deve dunque necessariamente essere della forma $kt$, dove, come già abbiamo supposto, è $k$ primo con $p$, numero primo contenuto quale fattore in $t$.

Questa proprietà di $G_s$ dà luogo ad alcune importanti conseguenze che si possono riassumere brevemente. L'ordine di $G_s$ non può essere multiplo del quadrato del numero primo $p$ nè se in $G_s$ è un costituente transitivo di grado $p$, nè se tutti i suoi costituenti transitivi di grado $mp$ $(p > m)$, posseggono $p$ sistemi d'imprimitività: se poi i costituenti transitivi di dato grado $p^\alpha$ sono di classe $p^\alpha - 1$, il loro ordine non può essere multiplo di $p^{\alpha+1}$. Infine, se il numero primo $p$ è grado d'un certo numero di costituenti transitivi di $H_s$, il gruppo che essi determinano risulta da isomorfismo oloedrico stabilito fra di essi.

**10.** In $G_s$ sia un sottogruppo invariante $H_s$ di grado $n - \alpha$ $(\alpha > 1)$: mostriamo che allora $G_s$ ha almeno un costituente transitivo il di cui grado supera il grado di ciascuno dei costituenti transitivi di $H_s$. Se ammettiamo infatti che quello fra i costituenti transitivi di $G_s$ che ha grado più alto sia di grado eguale a quello del costituente transitivo T di $H_s$, allora, siccome $H_s$ entra tanto in $G_s$ che nel suo coniugato $G_r$ che lascia un elemento di $H_s$ invariato, i due gruppi $G_s$ e $G_r$ hanno almeno un costituente transitivo formato dagli stessi elementi, da quelli di T, ad esempio, ed il gruppo $[G_s, G_r]$ è intransitivo. Ma deve invece essere identico a G, essendo $G_s$ sottogruppo massimo; dunque $H_s$ non può avere il costituente transitivo T di grado quale lo abbiamo supposto.

Da ciò, ricordando che ogni sottogruppo invariante di un gruppo primitivo è transitivo, deduciamo che se tutti i costituenti transitivi di $G_s$ sono gruppi primitivi d'egual grado $t$, il semplice isomorfismo stabilito fra di essi determina $G_s$. Che inoltre, se fra i costituenti transitivi di questo è un gruppo regolare T il di cui grado $t$ è minore del suo ordine, allora $G_s$ deve possedere un altro costituente transitivo dello stesso grado $t$ il cui sottogruppo che lascia un elemento invariante, sposta tutti i rimanenti.

In una prossima nota applicheremo alcuni di questi teoremi a dimostrare certe proprietà dei gruppi metrici.

C. Alasia.

# UN CRITERIO DI CONVERGENZA DELLA SERIE DI LAGRANGE

1. La formola di Lagrange, è noto, ha per iscopo di ottenere una delle radici dell'equazione (in $z$) della forma

$$z - u - tf(z) = 0 \tag{1}$$

sviluppata in serie di potenze di $t$, essendo $u$ e $t$ due parametri e $f(z)$ una funzione analitica di $z$, regolare nel punto $z = u$.

Il primo membro della (1) è una funzione di $z$ e di $t$, $\Phi(z, t)$ che si annulla per $z = u$, $t = 0$; ed essendo

$$\left(\frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z}\right)_{\substack{z=u\\t=0}} \neq 0$$

per ogni valore di $t$, sufficientemente prossimo a zero, la (1) ha una radice $\zeta$ prossima ad $u$ e sviluppabile nell'intorno di $t = 0$, nella serie:

$$\zeta = u + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots \tag{2}$$

in cui

$$a_n = \frac{1}{\underline{|n}} \left(\frac{\partial^n \zeta}{\partial t^n}\right)_0$$

dove l'indice 0 indica che si deve prendere il valore della derivata per $t=0$ e $\frac{\partial^n \zeta}{\partial t^n}$ è la derivata rispetto a $t$ della funzione ricavata dall'equazione data, derivata che contrassegnamo coi segni delle derivazioni parziali perchè, venendo la funzione $\zeta$ a dipendere anche da $u$, si possono considerare derivazioni rispetto a questo parametro.

Immaginando ora attribuito ad $u$ un valore particolare, regolare per $f(z)$, indichiamo con $F(\zeta)$ una funzione analitica di $\zeta$, regolare in $\zeta = u$, sviluppabile cioè nell'intorno di $u$, in una serie di potenze di $\zeta - u$

$$F(\zeta) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha_n (\zeta - u)^n. \tag{3}$$

Se $t$ è prossimo a zero, $\zeta$ sarà sufficientemente vicina ad $u$ e si potrà trovare un intorno di $t = 0$, per esempio un cerchio di raggio $\varepsilon$, nel quale sia

$$|\zeta - u| < \sigma$$

essendo $\sigma$ una quantità piccola a piacere. Entro il cerchio di raggio $\varepsilon$, $\zeta - u$ è sviluppabile in una serie di potenze di $t$, quindi, entro tale cerchio, i termini della serie (3), che è convergente in egual grado, sono funzioni finite, continue e monodrome di $t$, regolari per $t = 0$, e $F(\zeta)$ è sviluppabile in una serie di potenze di $t$ della forma

$$F(\zeta) = F(u) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\underline{|n}} \left(\frac{\partial^n F(\zeta)}{\partial t^n}\right)_0 t^n,$$

dove

$$\left(\frac{\partial^n F(\zeta)}{\partial t^n}\right)_0$$

è il valore per $t=0$ della derivata $n^{ma}$ rispetto a $t$, di ciò che diventa $F(\zeta)$ quando, per $\zeta$, si ponga la serie (2).

Con facili calcoli, [1] si trova

$$\left(\frac{\partial^n F(\zeta)}{\partial t^n}\right)_0 = \frac{\partial^{n-1}}{\partial u^{n-1}}[f^n(u)\,F'(u)],$$

essendo $F'(u)$ il valore della derivata di $F(\zeta)$ rispetto a $\zeta$, per $\zeta = u$.

Si ha così

$$F(\zeta) = F(u) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{t^n}{\underline{|n}} \cdot \frac{\partial^{n-1}}{\partial u^{n-1}}[f^n(u)\,F'(u)],$$

che è la formola di Lagrange nella sua forma più generale.

Se in particolare

$$F(\zeta) = \zeta,$$

si ha

$$\zeta = u + tf(u) + \frac{t^2}{1\,.\,2}\cdot\frac{df^2(u)}{du} + \ldots + \frac{t^n}{1\,.\,2\ldots n}\cdot\frac{d^{n-1}f^n(u)}{du^{n-1}} + \ldots$$

che dà lo sviluppo di una delle radici della (1) in una serie ordinata secondo le potenze intere e positive di $t$.

**2.** Indichiamo con $u_0$ una radice qualunque dell'equazione

$$f(z) = 0$$

e immaginiamo che, nella (1), al parametro $u$ sia attribuito un valore tanto prossimo a $u_0$ che, descrivendo nel piano $z$ col centro in $z=u$ un cerchio $\Gamma$ di raggio $|u_0 - u|$, entro $\Gamma$ e sul contorno, la funzione $f(z)$ si mantenga sempre finita, mantenendosi anche diversa da zero nell'interno di $\Gamma$ e annullandosi sul contorno solo in $u_0$. Descriviamo inoltre col centro in $z=u$ un secondo circolo C interno a $\Gamma$, il cui raggio, minore di $|u_0 - u|$, possiamo anche supporlo prossimo quanto si vuole a questa quantità.

Dalla (1) si ricava

$$t = \varphi(z) = \frac{z-u}{f(z)},$$

ossia

$$t = b_1(z-u) + b_2(z-u)^2 + \ldots$$

con $b_1 \neq 0$, perchè, essendo

$$\varphi'(z) = \frac{f(z) - (z-u)\,f'(z)}{[f(z)]^2},$$

si ha

$$b_1 = \varphi'(u) \neq 0.$$

La funzione $\varphi(z)$ allora, entro C e nel contorno, non si annulla nè diventa infinita, tranne in $z=u$, in cui si annulla, e il suo modulo avrà sul contorno $s$ di C, un minimo $M_0$ ($\neq 0$).

Descriviamo ora nel piano $t$, col centro in $t=0$, un circolo C' di raggio $M_0$; ad ogni punto $t$ entro C', corrisponderà un solo punto $\zeta$ entro C e $\zeta$ sarà una funzione analitica di $t$, regolare nell'intorno di $t=0$. [2] Per tutti i valori di $t$ entro C' si avrà uno sviluppo della forma

$$\zeta = u + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots,$$

il quale dovrà necessariamente coincidere con lo sviluppo di Lagrange.

---

(1) BERTRAND, *Calcul différentiel.*

(2) BIANCHI L., *Funzioni di variabile complessa*, § 58.

Possiamo dunque concludere che pei valori di $t$ situati entro un circolo col centro in $t=0$ e con un raggio eguale a $M_0$, la serie di Lagrange è necessariamente convergente. Di qui, il

TEOREMA. — *Se al parametro* u *dell'equazione*

$$z - u - tf(z) = 0$$

*sono attribuiti valori sufficientemente prossimi ad una radice* $u_0$ *dell'equazione*

$$f(z) = 0,$$

*tali che, descrivendo nel piano* z *col centro in* $z = u$ *un cerchio* $\Gamma$ *di raggio* $|u_0 - u|$ *entro* $\Gamma$ *e sul contorno la funzione* $f(z)$ *si mantenga sempre finita, sia diversa da zero entro* $\Gamma$ *e si annulli sul suo contorno solo in* $u_0$, *indicando con* $M_0$ *il minimo del modulo della funzione* $\frac{z-u}{f(z)}$ *sul contorno di un qualunque circolo col centro in* $z = u$ *e interno a* $\Gamma$, *la serie*

$$u + tf(u) + \frac{t^2}{1.2} \cdot \frac{df^2(u)}{du} + \ldots + \frac{t^n}{1.2\ldots n} \cdot \frac{d^{n-1}f^n(u)}{du^{n-1}} + \ldots$$

*è certamente convergente per tutti i valori di* t *interni al cerchio col centro in* $t = 0$ *e col raggio eguale a* $M_0$.

GUIDO SADUN

*Siena.*

---

## LE EQUAZIONI RECIPROCHE IN SENSO GENERALE

L'illustre matematico francese G. DE LONGCHAMPS in una interessante nota « Sulle equazioni quadratiche » (*Jour. de Math.*, vol. 6°, pag. 265) indicò mediante un caso particolare (equazione di 4° grado) come anderebbe generalizzata la teoria delle equazioni reciproche. Siccome non ho visto sviluppato altrove questo concetto, che mi sembra meritevole di considerazione, ne ho fatto argomento di questa nota.

**1.** DEFINIZIONE. — (De Longchamps). — *Una equazione di grado* n, $f(x) = 0$ *è reciproca quando si ha identicamente*

$$f(x) = \lambda\, x^n f\left(\frac{k}{x}\right),$$

*per valori convenientemente scelti* di k *e* $\lambda$.

Il numero $k$ lo diremo il modulo di reciprocità della equazione.

Dalla definizione resulta che affinchè un'equazione

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

sia reciproca, deve aversi identicamente

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x +$$
$$+ a_n = \lambda(a_0k^n + a_1k^{n-1}x + \ldots + a_{n-2}k^2x^{n-2} + a_{n-1}kx^{n-1} + a_nx^n).$$

Dalla identificazione dei coefficienti resulta

$$a_0 = \lambda a_n, \qquad a_1 = \lambda a_{n-1} k, \ldots, a_{n-1} = \lambda a_1 k^{n-1}, \qquad a_n = \lambda a_0 k^n,$$

da cui

$$a_1 = \frac{a_0 a_{n-1}}{a_n} k, \quad a_2 = \frac{a_0 a_{n-2}}{a_n} k^2, \ldots, a_{n-1} = \frac{a_0 a_1}{a_n} k^{n-1}, \quad a_n = \frac{a_0^2}{a_n} k^n,$$

ed anche

$$k = \frac{a_1 a_n}{a_0 a_{n-1}}, \qquad k^2 = \frac{a_2 a_n}{a_0 a_{n-2}}, \ldots, k^{n-1} = \frac{a_{n-1} a_n}{a_1 a_0}, \qquad k^n = \frac{a_n^2}{a_0^2}.$$

L'$i$-esima di queste formule dà

$$k^i = \frac{a_i}{a_{n-i}} \cdot \frac{a_n}{a_0},$$

e l'ultima

$$k = \left(\frac{a_n}{a_0}\right)^{\frac{2}{n}};$$

eliminando $k$ fra queste si ha

$$\frac{a_i}{a_{n-i}} = \left(\frac{a_0}{a_n}\right)^{\frac{n-2i}{n}}$$

ovvero posto $\mu = \sqrt[n]{\frac{a_0}{a_n}}$,

$$a_i = a_{n-i} \mu^{n-2i}. \tag{R}$$

Per $n$ pari si hanno così $\frac{1}{2}n - 1$ condizioni che, scritte per disteso, sono

$$a_1^n a_n^{n-2} = a_{n-1}^n a_0^{n-2}, \; a_2^n a_n^{n-4} = a_{n-2}^n a_0^{n-4}, \ldots, a_{\frac{1}{2}n-1}^n a_n^2 = a_{\frac{1}{2}n+1}^n a_0^2 \quad (2)$$

e per $n$ dispari se ne hanno $\frac{1}{2}(n-1)$, che, scritte per disteso, sono

$$a_1^n a_n^{n-2} = a_{n-1}^n a_0^{n-2}, \; a_2^n a_n^{n-4} = a_{n-2}^n a_0^{n-4}, \ldots, a_{\frac{1}{2}(n-1)}^n a_n = a_{\frac{1}{2}(n+1)} a_0. \quad (3)$$

## 2. Equazione reciproca di grado pari.

*L'equazione reciproca di grado pari (in senso generale) è della forma*

$$a_0 x^{2k} + a_1 x^{2k-1} + \ldots + a_k x^k + \ldots + a_2 \lambda^{k-2} x^2 + a_1 \lambda^{k-1} x + \lambda^k a_0 = 0. \quad (1)$$

Infatti, data l'equazione

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{\frac{1}{2}n} x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

ed ammesso che fra' suoi coefficienti sussistano le (R), ponendo inoltre $\lambda = \mu^2$, si ha la (1).

*La risoluzione della* (1) *si può far dipendere da quella di un'equazione di grado* k *e da* k *equazioni quadratiche.*

Infatti, ponendo

$$x + \frac{\lambda}{x} = y,$$

la (1) diviene

$$\psi(y) = 0,$$

e questa è un'equazione di grado $k$. Indichiamo poi con $y_1, y_2, \ldots y_k$ le sue radici, tutte le radici della (1) si otterranno dalle equazioni quadratiche

$$x^2 - yx + \lambda = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots k)$$

**Equazioni reciproche di grado dispari.**

LEMMA. — *Sopprimendo nella equazione*

$$a_0(x^n+\mu^n)+a_1x(x^{n-2}+\mu^{n-2})+a_2x^2(x^{n-4}+\mu^{n-4})+\dots$$
$$\dots+a_{\frac{1}{2}(n-1)}x^{\frac{1}{2}(n-1)}(x+\mu)=0; \qquad (n=2k+1)$$

*la radice* $x=-\mu$, *l'equazione risultante è della forma*

$$a_0x^{n-1}+A_1x^{n-2}+\dots+A_2\mu^{n-5}x^2+A_1\mu^{n-3}x+a_0\mu^{n-1}=0. \qquad (4)$$

La cosa non presenta alcuna difficoltà eseguendo le diverse divisioni ed aggruppando convenientemente i coefficienti. Per questi si trova la legge di ricorrenza

$$A_p=-\mu A_{p-1}+a_p,$$

colla condizione iniziale $A_0=a_0$.

*La* (2) *è un'equazione reciproca* (senso generale).

TEOREMA. — *Una equazione reciproca di grado dispari (in senso generale) ammette la radice* $x=-\sqrt{\frac{a_n}{a_0}}$ *e soppressa questa radice, l'equazione risultante è un'equazione reciproca di grado pari della forma* (2).

Infatti osserviamo subito che un'equazione generale (1) § 1 può mettersi sotto la forma

$$f(x)=a_0\left(x^n+\frac{a_n}{a_0}\right)+a_1x\left(x^{n-2}+\frac{a_{n-1}}{a_1}\right)+\dots=0,$$

e questa in virtù delle (R) del § 1 può scriversi

$$f(x)=a_0\left(x^n+\frac{a_n}{a_0}\right)+a_1x\left(x^{n-2}+\sqrt[n]{\frac{a_n^{n-2}}{a_0^{n-2}}}\right)+\dots$$
$$\dots+a_{\frac{1}{2}(n-1)}x_{\frac{1}{2}(n-1)}\left(x+\sqrt{\frac{a_n}{a_0}}\right)=0,$$

che è precisamente della forma della equazione presa a considerare nel *Lemma*, ed il Teor. è dimostrato.

Da quanto abbiamo esposto risulta pure

*La risoluzione di una equazione reciproca di grado dispari* ($n=2r+1$) *si può far dipendere dalla risoluzione di una equazione di grado* r.

*Equazioni reciproche ordinarie.* Prendendo il modulo di reciprocità uguale ad 1, si ha $\frac{a_n}{a_0}=\pm 1$. Allora, per $n=2r+1$ si ha

$$\begin{cases} a_0=a_n, \quad a_{n-1}=a_1,\dots \quad \text{per} \quad k=+1 \\ a_0=-a_n, \quad a_1=-a_{n-1},\dots \quad \text{per} \quad k=-1, \end{cases}$$

e per $n=2r$ si ha

$$\begin{cases} a_0=a_n,\ a_1=a_{n-1},\dots,a_{\frac{1}{2}n}=a_{\frac{1}{2}n} \text{ per } k=+1 \\ a_0=-a_n,\ a_1=-a_{n-1},\dots,a_{\frac{1}{2}n}=-a_{\frac{1}{2}n} \text{ epperò } a_{\frac{1}{2}n}=0 \text{ per } k=-1. \end{cases}$$

## Applicazioni.

### Equazioni di 3° grado.

Dalle (3) del § 1 si ricava che deve esistere la relazione

$$a_1^3 a_3 = a_2^3 a_0 . \tag{1}$$

fra' coefficienti dell'equazione

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a^3 = 0. \tag{2}$$

affinchè questa sia reciproca nel senso generale. Lascio alla cura dello studioso il resto dell'applicazione e faccio notare che:

*Un'equazione reciproca, nel senso generale, di 3° grado si può mettere sotto la forma*

$$\alpha^3 X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \beta^3 = 0. \tag{3}$$

Infatti la (2), mediante la (1) e ponendo $x = X \frac{a_0}{a_1^3}$ diviene

$$\frac{a_0^3}{a_1^6} X^3 + \frac{a_0}{a_1^2} X^2 + a_2 X + a_2^3 = 0$$

e ponendo in questa $\frac{a_0}{a_1^3} = \alpha$, $a_2 = \beta$ si ha la (3)

La (3) ha una radice $X = -\frac{\beta}{\alpha}$, e la condizione di realità delle altre due è

$$(\alpha\beta + 1)(3\alpha\beta - 1) \leqslant 0.$$

### Equazioni di 4° grado.

*La equazione reciproca di 4° grado (in senso generale) dipende da tre equazioni di 2° grado.*

Infatti l'equazione

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0, \tag{1}$$

perchè sia reciproca nel senso generale deve ammettere fra' suoi coefficienti l'unica relazione

$$a_1^2 a_4 = a_0 a_3^2; \tag{2}$$

allora essa diviene

$$a_0 \left(x^2 + \frac{a_3^2}{a_1^2 x^2}\right) + a_1 \left(x + \frac{a_3}{a_1 x}\right) + a_2 = 0,$$

e ponendo

$$y = x + \frac{a_3}{a_1 x},$$

questa diviene

$$a_0 y^2 + a_1 y + a_2 - \frac{2a_3}{a_1} = 0.$$

In conclusione indicando con $y_1$ ed $y_2$ le radici di quest'ultima, le radici della (1) sono quelle delle altre due equazioni

$$x^2 - a_1 y_1 x + a_3 = 0, \qquad x^2 - a_1 y_2 x + a_3 = 0.$$

Risolvendo effettivamente la (1) si perviene alle seguenti conclusioni:

Ponendo

$$R = a_1^4 - 4a_0a_1^2a_2 + 8a_0a_1a_2 .$$

Se $R>0$ il primo membro della (1) è decomponibile in 2 fattori quadratici reali,
» $R=0$ » » » è il quadrato di un'espressione quadratica,
» $R<0$ » » » è decomponibile in 2 fattori imm. coniug.

S'intende bene che la (1) è ritenuta reciproca in senso generale.

*L'equazione reciproca* (senso generale) *di 4° grado si può mettere sotto la forma*

$$\alpha^2x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \gamma^2 = 0.$$

(De Longchamps).

Infatti basta trasformare la (1) mediante la posizione $x = \frac{a_0}{a_1^2}X$ e tenere presente la relazione (2). Sotto questa forma più simmetrica la sua risoluzione viene a dipendere dalla quadratica

$$\alpha X^2 - \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\beta + 8\alpha\beta}}{2} X + \gamma = 0.$$

**Equazioni di 5° grado.**

Nel caso dell'equazione di 5° grado

$$a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0,$$

le relazioni che debbono sussistere, perchè sia reciproca in senso generale, sono

$$a_1^5a_5^3 = a_0^3a_4^5, \qquad a_3^5a_5 = a_0a_2^5,$$

e mediante queste relazioni essa può scriversi

$$a_0\left[x^5 + \left(\sqrt[5]{\frac{a_5}{a_0}}\right)^5\right] + a_1x\left[x^3 + \left(\sqrt[5]{\frac{a_5}{a_0}}\right)^3\right] + a_2x^2\left[x + \sqrt[5]{\frac{a_5}{a_0}}\right] = 0$$

e messa sotto questa forma si vede che ammette la radice $x = -\sqrt[5]{\frac{a_5}{a_0}}$.

Sopprimendo questa radice, le altre radici della equazione in questione si otterranno dalla equazione di 4° grado

$$a_0x^4 + (a_1 - a_0\mu)x^3 + (a_2 - a_1\mu + a_0\mu^2)x^2 + (a_1\mu^2 - a_0\mu^3)x + a_0\mu^4 \quad \left(\mu = \sqrt[5]{\frac{a_5}{a_0}}\right)$$

che ha la forma

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + \alpha^2Ax + \alpha^4 = 0,$$

cioè di un'equazione reciproca in senso generale.

G. Candido

*Galatina.*

# INTORNO AD UNA FORMA DEL POTENZIALE DI UNA MASSA SFERICA, LA CUI DENSITÀ NON SIA COSTANTE

Nel suo celebre *Trattato di Analisi*, (¹) ÉMILE PICARD, come applicazione delle nozioni relative agli integrali multipli, studia le proposizioni più semplici della teoria dell'attrazione.

Suppone ripartita, in un corpo attirante, la materia in modo continuo, in modo cioè che la densità $\delta$ sia una funzione continua delle coordinate $a$, $b$, $c$ d'un punto variabile della massa attirante. Le tre componenti X, Y, Z dell'attrazione esercitata su un punto di coordinate $x$, $y$, $z$ sono allora

$$X = \int\int\int \frac{(a - x) \, . \, \delta \, . \, du}{r^3}$$

$$Y = \int\int\int \frac{(b - y) \, . \, \delta \, . \, du}{r^3}$$

$$Z = \int\int\int \frac{(c - z) \, . \, \delta \, . \, du}{r^3}$$

ove $du = da \, . \, db \, . \, dc$ e $r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$, gli integrali tripli essendo estesi alla massa attraente. Le X, Y, Z sono da considerarsi come funzioni di $x$, $y$, $z$. Si dimostra che esse sono le derivate parziali rispetto ad $x$, $y$, $z$ d'una stessa funzione rappresentata dall'integrale

$$V(x, \, y, \, z) = \int\int\int \frac{\delta \, . \, du}{r}$$

esteso alla massa attirante, ed al quale si dà il nome di *potenziale*.

Si stabiliscono quindi le seguenti proprietà generali del potenziale $V(x, y, z)$:

Esso è una funzione continua in tutto lo spazio, e lo sono altresì le sue derivate parziali del primo ordine. Le derivate seconde sono continue nell'interno ed all'esterno delle masse attiranti; la superficie di separazione del mezzo esterno e delle masse attiranti sarà per esse una superficie di discontinuità. Si ha inoltre

$$\Delta V = 0$$

all'esterno, e

$$\Delta V = - 4 \pi \delta \text{ (²)}$$

all'interno delle masse attiranti.

(¹) ÉMILE PICARD, *Traité d'Analyse*, Tome I.

(²) Formula celebre dovuta a *Poisson*.

Di più, $V(x, y, z)$ tende verso zero quando il punto $(x, y, z)$ si allontana all'infinito in un modo qualunque.

Stabilisce che queste proprietà sono caratteristiche del potenziale e dimostra il seguente

Théorème. — V *représentera nécessairement le potentiel en* (x, y, z) *dû à l'attraction d'une matière répartie dans chacun des volumes, la loi de la densité étant représentée en chaque point par la fonction* $\delta$. (1)

Basandosi su questa proprietà si conoscerà il potenziale dovuto all'attrazione di un corpo se si potrà determinare una fuzione V soddisfacente a tutte le condizioni precedenti.

Così il *Dirichlet* in una sua « Memoria », (2) nel caso dell'ellissoide, dà la seguente forma del potenziale $V(x, y, z)$ dovuto all'attrazione dell'ellissoide

$$V = \pi\, abc \,.\, \delta \,.\int_0^\infty \frac{1 - \dfrac{x^2}{a^2+\lambda} - \dfrac{y^2}{b^2+\lambda} - \dfrac{z^2}{c^2+\lambda}}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}\, d\lambda.$$

* * *

Nella presente memoria, seguendo un procedimento speciale, mi propongo di determinare la forma di V quando si abbia una massa sferica nella quale la densità non varia, come generalmente si considera, per superficie sferiche concentriche, ma per superficie sferiche interne alla data e con i centri successivamente situati sopra un diametro di essa.

* * *

Vediamo pertanto quale relazione interceda fra l'ascissa del centro della sfera mobile ed il suo raggio, perchè le sfere sieno successivamente l'una interna all'altra.

L'equazione di una superficie sferica, riferita ad assi ortogonali cartesiani, col centro di coordinate $a$, $b$, $c$ e di raggio $r$ è

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

Se si immagina che $a, b, c, r$ sieno tutte funzioni di una stessa variabile $u$, l'equazione

$$[x - a(u)]^2 + [y - b(u)]^2 + [z - c(u)]^2 = r^2(u) \qquad (1)$$

rappresenta, per ogni valore di $u$, una superficie sferica di raggio e centro diverso.

Se nell'equazione (1) facciamo quindi variare con continuità la $u$, varieranno pure con continuità la posizione del centro e la lunghezza del raggio. I centri delle superficie si troveranno, per conseguenza, su di una linea gobba di coordinate $a(u)$, $b(u)$, $c(u)$.

(1) Cfr. op. cit. pag. 173.

(2) *Journal de Crelle*, t. 32.

Ora, la condizione perchè di due superficie sferiche l'una sia interna all'altra è che la differenza dei raggi sia maggiore della distanza dei centri; per cui dovrà essere soddisfatta la ineguaglianza

$$\sqrt{[a(u+du)-a(u)]^2+[b(u+du)-b(u)]^2+[c(u+du)-c(u)]^2}<$$
$$<|r(u+du)-r(u)|,$$

od anche

$$\sqrt{\left(\frac{a(u+du)-a(u)}{du}\right)^2+\left(\frac{b(u+du)-b(u)}{du}\right)^2+\left(\frac{c(u+du)-c(u)}{du}\right)^2}<$$
$$<\left|\frac{r(u+du)-r(u)}{du}\right|,$$

e quindi, al limite,

$$\left|\sqrt{\left(\frac{da}{du}\right)^2+\left(\frac{db}{du}\right)^2+\left(\frac{dc}{du}\right)^2}\right|<\left|\frac{dr}{du}\right|.$$

Quindi, purchè questa condizione sia soddisfatta, qualunque siano le $a$, $b$, $c$, $r$, *l'equazione* (1) *rappresenta un sistema di superficie sferiche aventi i centri sopra una linea gobba, e poste l'una dentro l'altra.*

Per conseguenza, l'equazione

$$[x-a(u)]^2+[y-b(u)]^2+z^2=r^2(u)$$

rappresenterà un sistema di superficie sferiche eccentriche, i cui centri si trovano sopra una linea posta nel piano $xy$, determinato dalle equazioni

$$a(u)=x, \qquad b(u)=y.$$

Di tali superficie l'una sarà interna all'altra quando sia

$$\left|\sqrt{\left(\frac{da}{du}\right)^2+\left(\frac{db}{du}\right)^2}\right|<\left|\frac{dr}{du}\right|.$$

Finalmente, l'equazione

$$[x-a(u)]^2+y^2+z^2=r^2(u)$$

rappresenterà un sistema di superficie eccentriche, i cui centri sono sull'asse delle $x$; e la condizione che, in tal caso, dev'essere soddisfatta perchè l'una sia dentro l'altra è

$$\left|\sqrt{\left(\frac{da}{du}\right)^2}\right|<\left|\frac{dr}{du}\right|;$$

ossia dev'essere

$$\left|\frac{da}{du}\right|<\left|\frac{dr}{du}\right|.$$

Se la $u$ si riduce alla $a$, allora dev'essere

$$1<\left|\frac{dr}{du}\right|.$$

Se la $u$ si riduce alla $r$, allora

$$1>\left|\frac{da}{du}\right|.$$

***

Vediamo ora quale forma prenda l'integrale triplo generale esprimente la funzione potenziale di un corpo quando, come abbiamo precedentemente detto, la densità della massa vari per strati limitati da superficie sferiche le une interne alle altre, ma coi centri in linea retta.

La densità della massa sarà funzione del parametro della superficie, cioè sarà costante su ogni superficie. Imagineremo gli straterelli di spessore infinitesimo e di densità $\delta$ costante. È chiaro che la funzione potenziale di tutta la massa sarà equivalente alla somma delle funzioni potenziali dei singoli straterelli.

Per determinare la funzione potenziale relativa ad uno straterello qualunque, si consideri una sfera omogenea di densità 1 e di raggio $r$: la sua funzione potenziale relativa ad un punto esterno è

$$\tfrac{4}{3}\pi\frac{r^3}{l},$$

dove $l$ indica la distanza del punto potenziato dal centro della sfera. Se si imagina di levare da questa sfera un'altra sfera, che non sia concentrica ad essa, e di raggio $r_1$, la funzione potenziale dell'involucro rimanente sarà quello della prima sfera diminuito di quello della seconda; cioè sarà

$$\tfrac{4}{3}\pi\left(\frac{r^3}{l}-\frac{r_1^{\,3}}{l_1}\right)$$

dove $l_1$ indica la distanza del punto potenziato dal centro della seconda superficie sferica limite dell'involucro: e quest'involucro sarà infinitesimo se si farà subire uno spostamento infinitesimo al centro della prima sfera, e se si farà diminuire di infinitamente poco il raggio di essa. Ritenendo $r$ e $l$ come funzioni di una variabile indipendente $u$, se le due superficie sferiche limiti dell'involucro corrispondono rispettivamente a due valori $u$ e $u+du$ del parametro, la funzione potenziale di tale involucro sarà data dal differenziale dell'espressione

$$\tfrac{4}{3}\pi\frac{r^3}{l}.$$

Assunta la linea retta, sulla quale si trovano tutti i centri delle superficie, come asse delle $x$, e detta $a$, funzione di $u$, l'ascissa dei centri, la distanza di un punto di coordinate $x$, $y$, $z$ dai centri sarà data da

$$l=\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}.$$

La funzione potenziale d'uno straterello sulla massa sferica sarà per conseguenza

$$\tfrac{4}{3}\pi\frac{d}{du}\left(\frac{r^3}{l}\right)du=4\pi\,.\,\frac{r^2}{l}\frac{dr}{du}du+\tfrac{4}{3}\pi\frac{r^3}{l^3}(x-a)\frac{da}{du}du,$$

sempre supponendo che la densità dell'involucro sia $=1$.

Se invece la densità dello strato è $\delta(u)$, allora la funzione potenziale sarà

$$4\pi\,\delta(u)\cdot\left(\frac{r^2}{l}\frac{dr}{du}+\frac{r^3}{3}\frac{x-a}{l^3}\frac{da}{du}\right)du\,.$$

Dando ad $u$ tutti i valori per i quali si hanno tutte le superficie sferiche, si avranno le funzioni potenziali di tutti gli straterelli nei quali resta divisa la massa sferica totale. La somma di tutte queste funzioni potenziali elementari dà il potenziale V del corpo sferico. Si avrà così

$$V=4\pi\int\delta(u)\cdot\left(\frac{r^2}{l}\frac{dr}{du}+\frac{r^3}{3}\frac{x-a}{l^3}\frac{da}{du}\right)du\,.$$

Supposto che $u_0$ ed $u_1$ sieno i parametri corrispondenti alla prima ed all'ultima superficie sferica del sistema, saranno $u_0$ ed $u_1$ i limiti dell'integrale.

Giova notare che se per $u=u_0$ è $r=0$, allora si ha un corpo sferico pieno, limitato dalla superficie sferica corrispondente al parametro $u=u_1$; che se invece per $u=u_0$ è $r$ diverso da zero, allora si ha un involucro sferico.

Dunque, *la funzione potenziale relativa ad un punto esterno al sistema dev' essere*

$$V=4\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\cdot\frac{r^2}{l}\left(\frac{dr}{du}+\frac{r}{3}\frac{x-a}{l^3}\frac{da}{du}\right)du\,.$$

Vediamo se questa funzione soddisfa alle suaccennate caratteristiche d'una funzione potenziale.

Essa pertanto è funzione delle coordinate del punto attratto, le quali sono contenute in $l$, ed è finita e continua in tutto lo spazio, giacchè $r$, $a$ e $\delta(u)$ sono finite e continue con le derivate prime per i valori di $u$ da $u_0$ ad $u_1$.

Se il punto potenziato va all'infinito, $l$ diventa anch'esso infinito, e la funzione potenziale diventa nulla.

Infatti si può scrivere

$$V=4\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\left(\frac{dr}{du}+\frac{r^2}{3l}\frac{x-a}{l}\cdot\frac{da}{du}\right)du\,.$$

I fattori $\frac{r^2}{l}$ e $\frac{r}{l}$, per $l=\infty$, diventano eguali a zero, ed il fattore $\frac{x-a}{l}$ tende al coseno dell'angolo che $l$ fa con l'asse delle $x$ quando il punto sia all'infinito; e però

$$\lim_{l=\infty}V=0\,.$$

La massa M del sistema si ottiene calcolando il limite verso il quale tende $V\rho$, dove $\rho$ è il raggio vettore del punto potenziato, quando $\rho$ tende all'infinito. Ora è

$$\lim_{\rho=\infty}V\rho=4\pi\lim\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\cdot r^2\cdot\frac{\rho}{l}\left(\frac{dr}{du}+\frac{r}{3}\cdot\frac{1}{l}\cdot\frac{x-a}{l}\cdot\frac{da}{du}\right)du\,.$$

Quando $\rho$ diventa infinito, il fattore $\frac{\rho}{l}$ tende all'unità; e, per quanto si è osservato, si otterrà

$$\lim_{\rho=\infty} V\rho = 4\pi \int_{u_0}^{u_1} \delta(u) \,.\, r^2 \,.\, \frac{dr}{du}\, du = M \,.$$

Deve pur essere

$$\lim_{x=\infty} Vx = \cos \widehat{\rho x} \,.\, M \,;$$

ed infatti si ha

$$\lim_{x=\infty} Vx = 4\pi \lim \int_{u_0}^{u_1} \delta(u) \,.\, r^2 \,.\, \frac{x}{l} \left( \frac{dr}{du} + \frac{r}{3} \,.\, \frac{1}{l} \,.\, \frac{x-a}{l} \,.\, \frac{da}{du} \right) du \,.$$

ovvero

$$\lim_{x=\infty} Vx = 4\pi \int_{u_0}^{u_1} \delta(u) \,.\, r^2 \,.\, \cos \widehat{\rho x} \,.\, \frac{dr}{du}\, du$$

notando che quando il punto potenziato va all'infinito, le direzioni delle $l$ coincidono con quelle delle $\rho$. Quindi, per il valore di M già trovato, sarà

$$\lim_{x=\infty} Vx = \cos \widehat{\rho x} \,.\, M.$$

Analogamente si ha

$$\lim_{y=\infty} Vy = \cos \widehat{\rho y} \,.\, M$$

e

$$\lim_{z=\infty} Vz = \cos \widehat{\rho z} \,.\, M.$$

Derivando la V rapporto alle coordinate $x$, $y$, $z$ contenute in $l$ si ottiene ordinatamente

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -4\pi \int_{u_0}^{u_1} \delta(u) \,.\, r^2 \,.\, \frac{x-a}{l^3} \,.\, \frac{dr}{du}\, du +$$
$$+ \tfrac{4}{3}\pi \int_{u_0}^{u_1} \delta(u) \,.\, \frac{r^3}{3} \left( \frac{1}{l^3} - \frac{3(x-a)^2}{l^5} \right) \frac{da}{du}\, du \,,$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -4\pi \int_{u_0}^{u_1} \delta(u) \,.\, r^2 \,.\, \frac{y}{l^3} \,.\, \frac{dr}{du} \,.\, du -$$
$$- \tfrac{4}{3}\pi \int_{u_0}^{u_1} \delta(u) \,.\, r^3 \,.\, \frac{3(x-a)y}{l^5} \,.\, \frac{da}{du} \,.\, du \,,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -4\pi \int_{u_0}^{u_1} \delta(u) \,.\, r^2 \,.\, \frac{z}{l^3} \,.\, \frac{dr}{du} \,.\, du -$$
$$- \tfrac{4}{3}\pi \int_{u_0}^{u_1} \delta(u) \,.\, r^3 \,.\, \frac{3(x-a)z}{l^5} \,.\, \frac{da}{du} \,.\, du.$$

Queste derivate si mantengono finite e continue in tutto lo spazio esterno alla massa attraente, perchè $l$ non si annulla mai in tutto il corso dell' integrazione.

Si può porre altresì

$$\frac{\partial V}{\partial x}=4\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\frac{r^2}{l^3}\left[\frac{x-a}{l}\cdot\frac{dr}{du}+\frac{r}{3}\left\{\frac{1}{l}-\frac{3}{l}\left(\frac{x-a}{l}\right)^2\right\}\frac{da}{du}\right]du$$

e quindi

$$\lim\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\rho^2=4\pi\lim\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\,r^2\,\frac{\rho^2}{l^3}\left[\frac{x-a}{l}\cdot\frac{dr}{du}+\frac{r}{3}\left\{\frac{1}{l}-\frac{3}{l}\left(\frac{x-a}{l}\right)^2\right\}\frac{da}{du}\right]du$$

per cui, tenendo presente quanto si è già osservato, si ha

$$\lim\frac{\partial V}{\partial x}\rho^2=M\cos\widehat{\rho x}.$$

Parimenti si ottiene

$$\lim\frac{\partial V}{\partial x}x^2=M\cos^2\widehat{\rho x}.$$

Se si deriva nuovamente rispetto alle coordinate del punto potenziato, si ottiene

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=-4\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\,r^2\frac{dr}{du}\left(\frac{1}{l^3}-\frac{3(x-a)^2}{l^5}\right)du-$$
$$-\tfrac{4}{3}\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\,r^3\frac{da}{du}\left(\frac{3(x-a)}{l^5}+\frac{6(x-a)\,l^5-15\,l^3(x-a)^3}{l^{10}}\right)du,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=-4\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\,r^2\frac{dr}{du}\left(\frac{1}{l^3}-\frac{3y^2}{l^5}\right)du-$$
$$-\tfrac{4}{3}\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\,r^3\frac{da}{du}\cdot\frac{3l^5-15l^3y^2}{l^{10}}(x-a)\,du.$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\,r^2\frac{dr}{du}\left(\frac{1}{l^3}-\frac{3z^2}{l^5}\right)du-$$
$$-\tfrac{4}{3}\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\,r^3\frac{da}{du}\cdot\frac{3l^5-15l^3z^2}{l^{10}}(x-a)\,du.$$

Sommando membro a membro si otterrà

$$\Delta_2 V=-4\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\,r^2\frac{dr}{du}\left(\frac{3}{l^3}-3\,\frac{(x-a)^2+y^2+z^2}{l^5}\right)du-$$
$$-\tfrac{4}{3}\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\,r^3\frac{da}{du}\left(\frac{15(x-a)\,l^5}{l^{10}}-15(x-a)\,l^3\frac{(x-a)^2+y^2+z^2}{l^{10}}\right)du;$$

e quindi

$$\Delta_2 V=0.$$

La espressione di V così determinata è valida soltanto per i punti esterni alla massa attraente e non posti nella cavità interna, se si tratta di un involucro.

G. REPETTO

*Sassari.*

*(Continua)*

# QUISTIONI PROPOSTE

**704.** Risolvere l'equazione

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \dots & x \\ x & -1 & x & x \dots & x \\ x & x & -1 & x \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & x \dots & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

E. Piccioli.

**705.** Si consideri un'ellisse E ed un'iperbole equilatera H che ha per vertici reali i fuochi di E. Se $t$, $t'$ sono le tangenti condotte da un punto P di H alla E, si dimostri che l'angolo di $t$ coll'asse maggiore è uguale a quello di $t'$ coll'asse minore.

**706.** Sia F un fuoco, O il centro ed M un punto variabile di una ellisse, e P la proiezione del centro O sulla perpendicolare da M alla MF. Trovare la curva luogo di P, e l'area della medesima.

**707.** Siano F, F' i fuochi di un'ellisse, A, B, C, D i piedi delle normali ad essa condotte da un punto M del suo piano. Trovare il luogo dei punti M tali che

$$AF \,.\, AF' + BF \,.\, BF' + CF \,.\, CF' + DF \,.\, DF' = \text{costante}.$$

E.-N. Barisien.

# RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 700, 701 E 702

**700.** *Da un punto P del piano di una parabola si conducano le tre normali, di cui i piedi siano A, B, C. Le tangenti in A, B, C s'incontrino nei punti $A_1$, $B_1$, $C_1$. Dimostrare che:*

*1°. La retta congiungente P coll'ortocentro del triangolo $A_1B_1C_1$ è parallela alla congiungente l'ortocentro del triangolo ABC col circumcentro del triangolo $A_1B_1C_1$.*

*2°. I tre punti $A_1$, $B_1$, $C_1$ sono situati sopra un'iperbole equilatera avente per assintoti l'asse e la tangente nel vertice della parabola data. Questa iperbole non cambia, se P si sposta sopra una retta parallela all'asse della parabola.*

E.-N. Barisien.

**Risoluzione del prof. V. Retali di Milano.**

Sia $y^2 = 2px$ l'equazione della parabola riferita all'asse e alla tangente al vertice: l'iperbole d'Apollonio relativa al punto P $(\alpha, \beta)$ è

$$xy + 2p(p-\alpha)\,y - 2p^2\beta = 0$$

e le ordinate dei punti d'incidenza son radici della equazione cubica

$$y^3 + 2p(p-\alpha)\,y - 2p^2\beta = 0,$$

che si ha eliminando $x$ fra le due precedenti; abbiamo dunque

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0, \qquad y_1y_2y_3 = 2p^2\beta.$$

Per equazione del cerchio circoscritto al triangolo ABC si trova facilmente

$$x^2+y^2-(p+\alpha)x-\tfrac{1}{2}\beta y=0,$$

laonde le coordinate del circumcentro $O(x', y')$ di ABC sono

$$x'=\tfrac{1}{2}(p+\alpha), \qquad y'=\tfrac{1}{4}\beta;$$

per avere quelle dell'ortocentro $H(x''', y''')$ dello stesso triangolo, osservo che le coordinate del baricentro sono

$$x''=\tfrac{1}{3}(x_1+x_2+x_3), \qquad y''=0,$$

dunque

$$x'''=-2x'+3x''=-3p+\alpha$$
$$y'''=-2y'+3y''=-\tfrac{1}{2}\beta. \tag{1}$$

I valori delle coordinate dei punti $A_1$, $B_1$, $C_1$, sono

$$\xi_1=\frac{y_2y_3}{2p}, \qquad \eta_1=-\tfrac{1}{2}y_1 \tag{2}$$

e gli altri che se ne deducono con rotazione sugli indici; l'equazione del circolo circoscritto al triangolo $A_1B_1C_1$ è

$$x^2+y^2-(\tfrac{3}{2}p-\alpha)x+\beta y+\tfrac{1}{2}p(p-\alpha)=0,$$

laonde le coordinate del circumcentro $O_1(x'_1, y'_1)$ di $A_1B_1C_1$ sono

$$x'_1=\tfrac{3}{4}p-\tfrac{1}{2}\alpha, \qquad y'_1=-\tfrac{1}{2}\beta. \tag{3}$$

L'ortocentro $H_1(x'''_1, y'''_1)$ di $A_1B_1C_1$, per un teorema notissimo, è sulla direttrice della parabola ed ha per ordinata

$$y'''_1=\frac{y_1y_2y_3}{2p^2}+\tfrac{1}{2}(y_1+y_2+y_3)=\beta. \tag{4}$$

Dalle (1), (3), (4) risulta che le due rette $HO_1$, $PH_1$, dell'enunciato sono parallele all'asse della parabola.

Dalla (2) abbiamo

$$\xi_1\eta_1=\xi_2\eta_2=\xi_3\eta_3=-\frac{y_1y_2y_3}{4p}=-\tfrac{1}{2}p\beta;$$

dunque, i punti d'incidenza delle tre normali cadono sull'iperbole equilatera

$$xy=-\tfrac{1}{2}p\beta.$$

**701.** *Sia M un punto variabile sopra un'ellisse della quale FF' sono i fuochi, AA' gli estremi dell'asse maggiore. Dimostrare che le bisettrici degli angoli MFF', MF'A incontrano MA sulle due direttrici rispettivamente.*

E.-N. Barisien.

**Risoluzione del prof. V. Retali di Milano.**

Il teorema e la dimostrazione seguente valgono anche per l'iperbole. Le bisettrici F1, F2, degli angoli MFA, MFA', incontrino MA rispettivamente nei punti 1 e 2: il gruppo (M1A2) è armonico e, siccome le rette ortogonali F1, F2, passanti pel fuoco sono coniugate rispetto alla conica, il punto 2 è polo di |F1| e giace sulla direttrice corrispondente a F. Analogamente: dette 2', 1', le intersezioni di F1, F2 con MA', si vede che 2' è il polo di |F2| e giace sulla direttrice medesima.

Osservazione. — La stessa dimostrazione vale per la parabola. Siano A, F, A', M, rispettivamente il vertice, il fuoco, il punto improprio e un punto generico d'una parabola: la bisettrice F2 dell'angolo MFA' incontra MA in 2, sulla direttrice. La bisettrice dell'angolo MFA taglia in 2' sulla direttrice il diametro MA'.

**702.** *Se M è un punto d'un'ellisse, della quale F, F' sono i fuochi, M' è il simmetrico di M rispetto all'asse minore, $F_1$, $F'_1$ sono i secondi punti d'incontro dell'ellisse colle rette MF, MF', dimostrare che la retta $F_1F'_1$ e la tangente in M' s'incontrano sull'asse maggiore.*

E.-N. BARISIEN.

**1ª Risoluzione del prof. V. Retali di Milano.**

Se $\mu$ è il simmetrico di M rispetto al centro, il fascio $M(M'\mu F_1F'_1)$ è armonico ([1]) e per conseguenza le tangenti in M.$\mu$. si tagliano sulla retta $F'_1F_1$.

OSSERVAZIONE. — Il teorema, che vale anche per l'iperbole, è corollario immediato di una proprietà evidente del quadrilatero completo circoscritto a una conica; siano F, F' due vertici opposti, O. X i due punti diagonali sopra $|FF'|$: poichè il gruppo F'OFX è armonico, i raggi che lo proiettano da un punto arbitrario M della conica segano questa di nuovo in 4 punti armonici $F'_1\mu F_1M'$ e le tangenti in $\mu$, M', si tagliano sulla $|F_1F_1|$.

**2ª Risoluzione del prof. Sibirani.**

Sia data un'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

in cui $a>b$. I fuochi F, F' hanno rispettivamente le coordinate

$$(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0) \qquad (\sqrt{a^2-b^2},\ 0).$$

Se M è il punto dell'ellisse di coordinate $x_1y_1$, la MF incontra ulteriormente l'ellisse in un punto $F_1$ di coordinate

$$x_1=-\frac{(2a^2-b^2)x_1+2a^2\sqrt{a^2-b^2}}{2a^2-b^2+2x_1\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$y_1=-\frac{b^3\sqrt{a^2-x_1^2}}{a(2a^2-b^2+2x_1\sqrt{a^2-b^2})}$$

e la MF' incontra ulteriormente l'ellisse in un punto $F_1'$ di coordinate

$$x_2=\frac{-(2a^2-b^2)x_1+2a^2\sqrt{a^2-b^2}}{2a^2-b^2-2x_1\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$y_2=\frac{-b^3\sqrt{a^2-x_1^2}}{a(2a^2-b^2-2x_1\sqrt{a^2-b^2})}.$$

Il punto M' simmetrico di M rispetto all'asse minore ha le coordinate $(-x_1,\ y_1)$ e la tangente all'ellisse in M', di equazione

$$-\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1,$$

incontra l'asse $x$ in un punto N di coordinate

$$x_3=-\frac{a^2}{x_1} \qquad y_3=-0.$$

---

([1]) Ciò si può vedere anche più elementarmente nel modo seguente:
Essendo $\mu$ ed F simmetrici di M ed F' rispetto al centro O, la retta $\mu F$ è parallela a MF' e, indicando con $\mu'$ il punto d'incontro della $\mu F$ con la MM'. risulta $\mu\mu'$ divisa per metà da F, dunque $(\mu'\mu F1_\infty)$ costituiscono un gruppo armonico ed anche le rette $M(M'\mu F_1F_1')$ che proiettano quei punti da M sono armoniche.

(*Nota di G. L.*)

Ora si vede immediatamente che il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

è nullo, e ciò esprime l'allineamento dei tre punti $F_1$, $F_1'$, N che è quanto dovevasi dimostrare.

# BIBLIOGRAFIA

SEBASTIANO CATANIA. — *Corso di Algebra elementare* ad uso delle scuole secondarie superiori. Catania, Niccolò Giannotta, edit. 1906.

È noto come, per raggiungere quell'uniformità di metodo che è dote essenziale di ogni disciplina scientifica, si cerchi oggi di fondere in un tutto armonico l'aritmetica razionale e l'algebra, togliendone la convenzionale distinzione. Opportunamente dunque il Prof. Catania ha fatto seguire all'Aritmetica (¹) questo Corso d'algebra, che completa l'esposizione di un metodo (²) rimasto finora, nonostante i suoi pregi, estraneo alla scuola. Esso si compone di tre parti riunite in un sol volume per il 1° biennio d'Istituto, e distribuite per il Liceo coll'aggiunta di appendici in due volumi, che svolgono rispettivamente il programma della 1ª e quello delle ultime 2 classi.

PARTE 1ª. — I. *Numeri relativi.* — I numeri relativi o con segno ($n$, $r$), sono introdotti come simboli delle operazioni $+a$ e $-a$ ($a$ razionale), in modo analogo a quello tenuto per i frazionari (R) e per gli stessi numeri naturali ($N_0$); e vengono quindi, in ultima analisi, definiti tutti coi soli segni: 0, $+$, $-$.

I concetti di uguaglianza, di maggiore e minore, di somma, ecc., sono loro estesi in modo che quando ci si riduca agli $N_0$ e agli R, le nuove definizioni coincidano con quelle già note. Così, due relativi $x$ e $y$ si dicono uguali se, essendo $u$ un razionale conveniente (tale che $u+x$ sia ancora un R), si ha

$$u+x=u+y,$$

perchè allora sarà anche, per qualsiasi altro razionale $v$ conveniente,

$$v+x=v+y.$$

La somma, il prodotto e la potenza sono definite in modo analogo; per es. si dice somma di due relativi $x$ e $y$, un nuovo relativo $z$ tale, che comunque si prenda un razionale $u$ conveniente, si abbia sempre

$$u+x+y=u+z.$$

La sottrazione e la divisione sono considerate invece come operazioni inverse; e la differenza e il quoziente sono definiti per mezzo delle nozioni di numero opposto e inverso di un relativo non nullo.

Da queste definizioni, oltre le proprietà ordinarie, come la nota regola dei segni nella moltiplicazione, sono dedotte anche molte proposizioni che mancano nei comuni trattati, come quelle relative alle uguaglianze e disuguaglianze algebriche.

(¹) *Aritmetica razionale* ad uso delle scuole secondarie superiori. Catania. 1904.

(²) G. PEANO, *Arithmetices principia novo methodo exposita, ecc.*

II. *Monomi e polinomi.* — Il calcolo letterale è svolto in modo breve e conforme alle parti ispirate direttamente al libro di Peano. Notevole soprattutto, è la dimostrazione, omessa in molti trattati, (1) dell'unicità dei polinomi Q e R che compariscono nella nota relazione

$$A = B \cdot Q + R.$$

Essa è dedotta dal principio d'identità, che qui non è assunto per induzione, (2) ma stabilito in modo logicamente migliore per mezzo del seguente teorema, dimostrato assai elegantemente:

*Dato il polinomio*

$$f(x) = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + hx + k,$$

*è sempre possibile assegnare a* x *un valore positivo abbastanza grande, perchè il valore assoluto di* $ax^m$ *superi la somma di tutti gli altri termini.* (3)

La regola di Ruffini è data anche per il caso che il divisore sia della forma $ax - b$. (4)

Le proprietà e le regole delle frazioni algebriche sono esposte col metodo semplice tenuto dal Faifofer. (5)

III. *Equazioni di 1° grado.* — Stabilite in modo chiaro le idee di variabile, di funzione e d'equazione, e premessi pochi cenni sui concetti di limite e d'infinito, l'A. espone i teoremi sull'equivalenza, fra cui un metodo per dedurre da un'equazione frazionaria contenente l'incognita al denominatore, una equivalente a forma intera.

Seguono le risoluzioni dell'equazione generale a un'incognita, e dei sistemi di 2 o *n* equazioni con altrettante incognite. Le formule sono discusse.

Notevoli gli esempi di sistemi indeterminati o incompatibili, che divengono determinati e risolubili, coll'assegnare valori particolari alle lettere, diverse dall'incognite, contenute in essi.

Riguardo ai problemi, non è omessa l'interpetrazione delle soluzioni negative.

Parte 2ª. — Questa parte contiene la regola d'estrazione di radice (IV), le nozioni sulle classi (V) e sui limiti (VI), le teorie dei numeri reali (VII) e dei logaritmi (VIII). (6)

Alle classi in generale, a quella delle frazioni proprie ($\eta$), e ai loro limiti superiori o inferiori, l'A. estende le cinque operazioni aritmetiche e le proposizioni relative.

L'esistenza di classi che non hanno limite superiore razionale, come quella delle radici quadrate di 2 per difetto, induce a introdurre nuovi enti (numeri irrazionali), che insieme ai razionali costituiscono i numeri reali o quantità (Q, $Q_0$).

Risultando essi, così, limiti di classi, son loro estesi immediatamente i concetti di uguaglianza, di disuguaglianza e delle varie operazioni, già stabiliti per i limiti razionali.

Dopo la teoria dei radicali, si accenna anche ai numeri reali negativi, e son considerate classi delle quantità relative che così si hanno, come la classe $\theta$ (comprendente $\eta$) delle quantità minori di 1.

Tutte queste considerazioni sulle classi mi sembrano, in verità, poco opportune; data la difficoltà dell'argomento, conveniva limitarsi a ciò che era stretta-

(1) Per es. nelle *Algebre Elementari* del Faifofer (15ª ediz. pag. 85, 86) e del Garbieri (2ª ediz., pag. 34. 39).

(2) Cfr. Capelli. *Elementi di aritmetica ragionata e algebra*. Libro III, § 20; Gazzaniga, *Libro di aritm. generale e alg. elementare*, pag. 181-186.

(3) Già pubblicato nel *Pitagora*, an. XI, n. 3-4-5. La condizione che $x$ e $a$ siano positivi, mi sembra superflua.

(4) Cfr. Nota di G. Sforza, *Bollettino di Matematica*, anno II.

(5) Tratt. cit., Cap. IV.

(6) Cfr. Peano, *Aritmetica generale e algebra elementare*, §§ 29-33.

mente necessario per stabilire la teoria dei numeri reali. Conveniva anche usare minor concisione e in qualche punto maggior chiarezza: perchè svolgere per es. tutta la teoria dei limiti, senza aver detto prima che cosa s'intenda per questi limiti stessi?

E la teoria delle operazioni era meglio svolgerla per tutti i numeri reali, piuttosto che per i soli limiti razionali.

Quanto all'introduzione degli irrazionali, si osserva giustamente (pag. 184) che non è necessaria la considerazione delle classi contigue, però molte ragioni, specialmente didattiche, inducono a preferire questo metodo. (¹) È certo che l'A. seguendolo, avrebbe conseguito anche in questa parte, quella chiarezza che domina nelle altre.

PARTE 3ª. — IX. *Equazioni quadratiche e sistemi.* — Il cenno sui numeri immaginari e complessi, (²) rende possibile la discussione completa della formula di risoluzione delle equazioni quadratiche e biquadratiche.

Sono considerate anche equazioni in cui l'incognita è implicita sotto il segno di radice.

Oltre le note proprietà delle radici, l'A. tratta del segno del trinomio

$$ax^2 + bx + c,$$

col variare di $x$ da $-\infty$ a $+\infty$, determina la formula per la somma delle potenze simili delle radici, e ricerca il modo di comportarsi di queste radici stesse rispetto a uno o due numeri reali.

Il capitolo termina colla risoluzione di particolari equazioni e sistemi di equazioni di grado superiore al 1°. Sono utile complemento al Corso, le brevi teorie delle progressioni (X), degli interessi e annualità (XI) e delle generatrici (XII).

Le appendici contengono altri argomenti prescritti al Liceo dagli ultimi programmi, opportunamente posti a parte per non turbare l'ordine logico della trattazione.

La prima completa il programma di 1ª Liceale, contenendo un cenno sui radicali, la formula di risoluzione delle equazioni di 2° grado, le progressioni, e i logaritmi dedotti da esse, mentre nel testo (2ª, VIII) son dedotti dall'equazione esponenziale. V'è anche la definizione delle funzioni trigonometriche, insieme alle loro relazioni fondamentali.

La seconda appendice contiene un cenno sui simboli Euleriani, lo sviluppo del Binomio di Newton, e alcune nozioni di Analisi indeterminata, (³) (soluzioni intere, e soluzioni intere positive, dell'equazione $ax + by = c$). Mancano i complementi alla teoria dei numeri primi.

Numerosi e appropriati gli esercizi posti alla fine di ogni capitolo: notevoli soprattutto le applicazioni geometriche (pag. 277-288) illustrate da brevi schiarimenti.

In complesso, il libro si rivela utilissimo alla scuola, sia per il rigore logico, sia per la semplicità che gli va unita, cosa non facile nè comune; e il Prof. Catania merita ampia lode per aver compiuto attraverso difficoltà non lievi, l'ardua impresa di ridurre per l'insegnamento secondario l'ammirevole metodo di Peano.

Dott. A. NATUCCI.

---

(¹) Cfr. "Sulla scelta del metodo per la teoria dei numeri irrazionali„. *Bollettino di Matematica.* Anno IV, n. 5-6-7-8.

(²) Sono introdotti come nuovi numeri i simboli $\sqrt{-k}$, a cui sono estese le regole dei numeri reali. Avendosi

$$\sqrt{-k} = \sqrt{k} \, . \, \sqrt{-1},$$

ogni numero immaginario risulta come prodotto di un numero reale per $\sqrt{-1} = i$ (unità immaginaria).

(³) Cfr. CAPELLI, Elementi cit. Libro II, n. 13, 14, 19; Libro III, n. 18. GAZZANIGA, Libro cit., pag. 107-112.

ROBERTO MARCOLONGO. — *Meccanica Razionale.* — (Manuali Hoepli, 2 vol. (N. 352-353 e 354-355) di pag. rispettivamente XII-271 e VI-324. — Milano, 1905).

Nella prefazione al suo trattato di " *Meccanica Razionale* „ il Prof. Marcolongo dice come egli si sia proposto di: " *presentare un quadro sintetico delle più importanti teorie della Meccanica classica e di dare anche un cenno delle più recenti....* „ Orbene; è facile scorgere con un esame anche rapido del libro in parola, come il Prof. Marcolongo abbia raggiunto egregiamente, sotto ogni rapporto, il fine propostosi.

Egli invero ha studiati, con una trattazione informata ai metodi più moderni ed eleganti, i problemi principali della Meccanica razionale, disponendoli in ordine perfettamente logico. Nel far ciò egli prese a base le ricerche classiche dei grandi luminari Keplero, Euler, Lagrange, Poisson ecc., che gettarono le basi dello studio matematico della scienza del movimento dei corpi, giungendo in pari tempo a dare cenni degli studi più recenti, quali quelli di Ball, Klein e Sommerfeld ecc.

La fusione delle ricerche, per così dire, classiche con quelle più moderne, fu fatta in modo così armonico e perfetto che il libro del Marcolongo si presenta come un tutto organico ed omogeneo.

Come dice l'A., pure nella prefazione, egli si propose, col suo trattato, di riassumere, in gran parte, le lezioni da lui svolte nell' Università di Messina: se non che alla materia che ordinariamente si svolge nei nostri corsi di Meccanica razionale, egli molto opportunamente pensò di aggiungere nel suo libro, qualche cenno su taluni argomenti che possono risguardarsi come costituenti un' introduzione alla Meccanica superiore ed alla Fisica Matematica.

L'A. ebbe pure l'ottima idea di aggiungere ad ogni capitolo un buon numero di esercizi egregiamente scelti, i quali servono a mettere meglio in luce la portata delle varie teorie svolte, indicando allo studioso il modo di applicarle. Molti di questi esercizi servono pure mirabilmente a dare un' idea di taluni argomenti speciali che, pur essendo importantissimi, non potevano, a motivo dei limiti nei quali doveva essere contenuto il libro, far parte vera e propria della materia svolta. Tutti questi pregi del trattato in parola risulteranno meglio dall'esposizione sommaria alla quale ora procederemo degli argomenti studiati dal Marcolongo.

L'opera è, giusta la consuetudine generalmente seguita, divisa in tre parti principali, dedicate rispettivamente alla Cinematica, alla Statica, alla Dinamica.

La prima parte è forse, per l' indole sua stessa, quella nella quale si nota di più la modernità dei metodi usati dall'A. Invero molto opportunamente, nella sua trattazione, egli si vale sin dall' inizio dei metodi del calcolo vettoriale. Sono ben noti i vantaggi che presenta l'uso di questo metodo, in quanto esso permette di dare alle formole maggiore eleganza e semplicità.

All'esposizione pertanto dei principi del calcolo vettoriale è dedicato il primo capitolo del libro in esame. I primi §§ del capitolo (1-5) contengono le definizioni e i concetti fondamentali relativi ai vettori: in un successivo § ne è esposta l'applicazione allo studio delle curve piane e gobbe.

I §§ successivi del capitolo sono dedicati all'esposizione dei concetti di vettori applicati e localizzati, di coppia, di vettore e coppia risultante, di movimenti d'una coppia ecc. È ovvio come da questi concetti si passi in modo assai facile e chiaro alla rappresentazione dei concetti fondamentali della meccanica. Nel secondo capitolo l'A. getta le basi della Cinematica, studiando i caratteri fondamentali dei principali tipi di movimenti, dopo aver dati i concetti di velocità ed accelerazione. Notevole per l'eleganza e la chiarezza è il modo col quale nel § 3 di questo capitolo l'A. espone i caratteri geometrici del moto curvo, fondendo felicemente i concetti relativi allo studio analitico delle curve coi concetti meccanici dei quali viene ad occuparsi.

Il capitolo terzo è dedicato all'analisi del moto finito d'un sistema rigido e allo studio della composizione dei moti finiti. Nelle formole relative alla trattazione di quest'argomento l'A. si vale opportunamente di variabili complesse: indi, dopo aver tenuto parola dei classici angoli Euleriani, egli introduce i *parametri razionali*, il cui uso permette di esprimere con molta eleganza i coseni direttori che legano le due terne di assi che si vengono a considerare.

Nel capitolo successivo è studiato il moto istantaneo di un sistema rigido. Mercè le notazioni proprie del calcolo vettoriale si deducono qui in modo molto elegante le formole di Poisson (§ 3) e le altre relative alla composizione dei moti istantanei e simultanei.

Nel capitolo quinto, dedicato allo studio del moto continuo di un sistema rigido, emerge in modo particolare il felice uso della rappresentazione geometrica, la quale serve ad interpretrare ottimamente i risultati del calcolo. I concetti di centro istantaneo di rotazione, di centro delle accelerazioni, di cerchio dei flessi, la formola di Euler-Savary sono esposti in modo molto chiaro e felice. Le teorie qui trattate sono poi illustrate, negli ultimi §§ del capitolo con applicazioni a casi particolari interessanti. Una di tali applicazioni si riferisce al moto continuo di un sistema rigido intorno ad un punto fisso che l'A. ha cura di caratterizzare, valendosi pure degli elegantissimi parametri dei signori Klein e Sommerfeld. Con questo capitolo si chiude la prima parte del libro del Marcolongo.

La seconda parte, dedicata, come si disse, alla Statica, è divisa in tre capitoli, i quali trattano rispettivamente della composizione delle forze, del principio dei lavori virtuali e dell'equilibrio delle curve funicolari. Notevole nel primo capitolo è il modo con cui l'A. pone in relazione l'equivalenza fra i sistemi di forze e di vettori. Nel capitolo successivo l'A., dopo aver date le idee fondamentali intorno agli spostamenti virtuali, tratta della distinzione dovuta a Hertz dei sistemi in olonomi e anolonomi e del principio dei lavori virtuali, ponendo in rilievo la portata di quest'ultimo con l'aiuto pure di numerosi esempi.

La terza parte (Dinamica) occupa per intero il secondo volume del trattato del Marcolongo. L'esposizione delle leggi fondamentali del moto forma oggetto del primo capitolo di questa parte. Oltre a dare queste tre leggi, l'A. espone pure l'importante concetto di impulso (e forza istantanea) e tratta di alcuni problemi speciali classici (moto d'un punto libero, d'un grave in un mezzo resistente, d'un punto attratto secondo la legge di Newton, d'un proiettile).

Nel secondo capitolo, dedicato allo studio di vari problemi intorno al moto di un punto risalta il modo chiaro ed elegante, col quale l'A. deduce le tre leggi di Keplero e col quale tratta i problemi intorno al moto del pendolo nei vari casi che si possono presentare. Il capitolo successivo incomincia con l'esposizione del principio di D'Alembert e con la deduzione da questo dell'equazione fondamentale della meccanica. Dopo aver trattato delle equazioni di Lagrange nella loro prima e nella seconda forma, l'A. accenna pure alle equazioni di Appell. Finalmente egli tratta eziandio, per quanto succintamente, delle equazioni di Hamilton, valendosi qui della considerazione degli impulsi. Con ciò si può dire che il Marcolongo conduce il lettore alla soglia della Meccanica superiore, in quanto viene a considerare un argomento, illustrandolo pure con un esercizio (pendolo sferico), che esce forse dal quadro d'un corso di Meccanica Razionale.

Nel capitolo successivo sono definiti e studiati i concetti di lavoro, energia e di funzione potenziale, e sono esposte le loro principali proprietà. Nel parlare, in questo capitolo, dei sistemi conservativi l'A. mostra quale sia l'interpretazione o, meglio, la giustificazione necessaria del concetto di *forza relativa ad una delle coordinate generali d'un sistema dinamico*. Seguono poi i teoremi fondamentali della conservazione dell'energia, del centro di massa e delle aree. Il capitolo si chiude con la definizione di azione e con l'esposizione del noto teorema di Jacobi e di quelli della minima azione e del minimo sforzo.

Il capitolo quinto, dedicato alla dinamica dei sistemi rigidi. oltre ai concetti d'indole generale necessari allo studio dell'argomento, contiene in particolare una bella esposizione della teoria del moto d'un corpo rigido intorno ad un punto fisso. L'A. passa così in rivista i vari casi in cui il problema è risolvibile per quadrature. Qui pure l'esposizione e le formole sono rimarchevoli per chiarezza ed eleganza. Lo studio della percossa in un punto rigido, con un cenno sulle ricerche del Ball, e lo studio del problema dell'urto di due corpi chiudono degnamente questo capitolo, col quale termina la meccanica dei corpi rigidi.

Il capitolo successivo, dedicato allo studio della funzione potenziale newtoniana, con speciale riguardo all'attrazione degli ellissoidi, costituisce, a mio debole avviso, una della parti migliori del libro di Marcolongo; e merita pertanto d'essere segnalato in modo particolare. In esso l'A., dopo avere esposti alcuni concetti fondamentali sulla funzione potenziale connettendola a cose dette in un precedente capitolo, dà successivamente il calcolo dell'attrazione d'uno strato sferico, d'un omoeide sia omogeneo, sia decomponibile in strati omogenei. Egli qui, seguendo la via tracciata da Thomson e Tait nella loro " Natural Philosophy ", si vale di metodi semplici e diretti i quali contrastano con i metodi complicati, usati da molti autori nel trattare il medesimo problema. Calcolati poi l'attrazione ed il potenziale d'un ellissoide omogeneo, il prof. Marcolongo deduce in modo assai semplice e piano i teoremi di Mac Laurin e Chasles, oltre ad altre proposizioni fondamentali relative all'attrazione. Negli esercizi relativi a questo capitolo l'A. tratta di problemi riferentisi all'attrazione e alla funzione potenziale di alcuni corpi semplici, che presentano particolare interesse.

Il capitolo settimo, ultimo del libro, tratta della idromeccanica. In esso, dopo aver parlato dell'equilibrio dei fluidi l'A. dà le equazioni del moto dei fluidi nelle due forme di Eulero e Lagrange, trattando pure degli integrali di Cauchy. Allo studio dei moti non vorticosi egli fa seguire quello dei moti vorticosi, chiudendo il capitolo coi teoremi di Helmoltz.

Fra gli esercizi relativi a questo capitolo l'A. ebbe la felice idea di concluderne qualcuno (1°-6°) riferentesi al problema della figura d'equilibrio d'una massa fluida ruotante uniformemente. Qui egli dà pertanto un cenno sugli ellissoidi di Mac Laurin e di Jacobi. Questi esercizi costituiscono così un degno complemento del penultimo capitolo del libro, in quanto assieme con questo vengono a dare al lettore un'idea chiara di problemi di capitale importanza relativi all'applicazione della Meccanica all'Astronomia e alla Geodesia.

Un lato assai saliente del libro è costituito dalle numerose note storico-bibliografiche che si trovano, si può dire, ad ogni passo.

In queste note l'A. dà non solo notizie preziose per chi voglia approfondire i singoli argomenti considerati nel trattato, indicando gli autori che in modo speciale se ne occuparono, ma fornisce eziandio larghe notizie di carattere storico, le quali pongono il lettore in grado di vedere come si vennero formando e sviluppando le varie teorie della meccanica, in guisa che egli possa meglio penetrarne lo spirito. Molto giustamente l'utilità di tali notizie storiche è affermata dall'A. stesso nell'introduzione.

Riassumendo quanto fu ora esposto, mi sembra che ben si possa affermare che il prof. Marcolongo rese col suo trattato un segnalato servigio a tutti gli studiosi della Meccanica razionale, in quanto il trattato in parola sarà, senza dubbio, utilissimo allo studente il quale per la prima volta imprende lo studio di tale scienza, e sarà al tempo stesso consultato con sommo vantaggio da chi sia chiamato ad insegnarla.

A. Viterbi

*Mantova.*

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 10 novembre 1905

# SULLA COMPOSIZIONE DELLE FORZE NELLO SPAZIO

È noto che per comporre un sistema di forze qualunque si possono usare vari metodi, fra i quali i più noti sono quello *dei tre punti,* quello della *piramide funicolare,* quello della *rete funicolare,* quello del *piano trasversale e del centro di riduzione.*

Quest'ultimo, come è noto, consiste in questo. Dato un sistema di forze $f_i$, si scelga ad arbitrio un punto arbitrario O ed un piano $\pi$. Detta $A_i$ la traccia della retta di $f_i$ sul piano $\pi$, il piano $Of_i$ taglia $\pi$ secondo una retta $r_i$ passante per $A_i$, e si può scomporre $f_i$ in una forza $p_i$ sulla $r_i$ ed in una $q_i$ sulla $OA_i$. Tutte le forze $p_i$ situate in $\pi$ si compongono in generale in una forza $p$, e tutte le forze per O si compongono in una forza $q$; così il sistema è ridotto a due forze.

Si possono avere costruzioni speciali, dando ad O ed a $\pi$ posizioni particolari. Per esempio, se $\pi$ è il piano all'infinito, il metodo sopra indicato si riduce a trasportare tutte le forze date in un punto O e nel comporre poi tutte le forze trasportate in O e tutte le coppie derivanti dal detto trasporto.

Il sistema si riduce così ad una forza applicata in O, rappresentata da un segmento equipollente alla somma geometrica dei segmenti che rappresentano le forze componenti, ed in una coppia che ha per asse-momento la somma geometrica degli assi-momenti di O rispetto alle componenti.

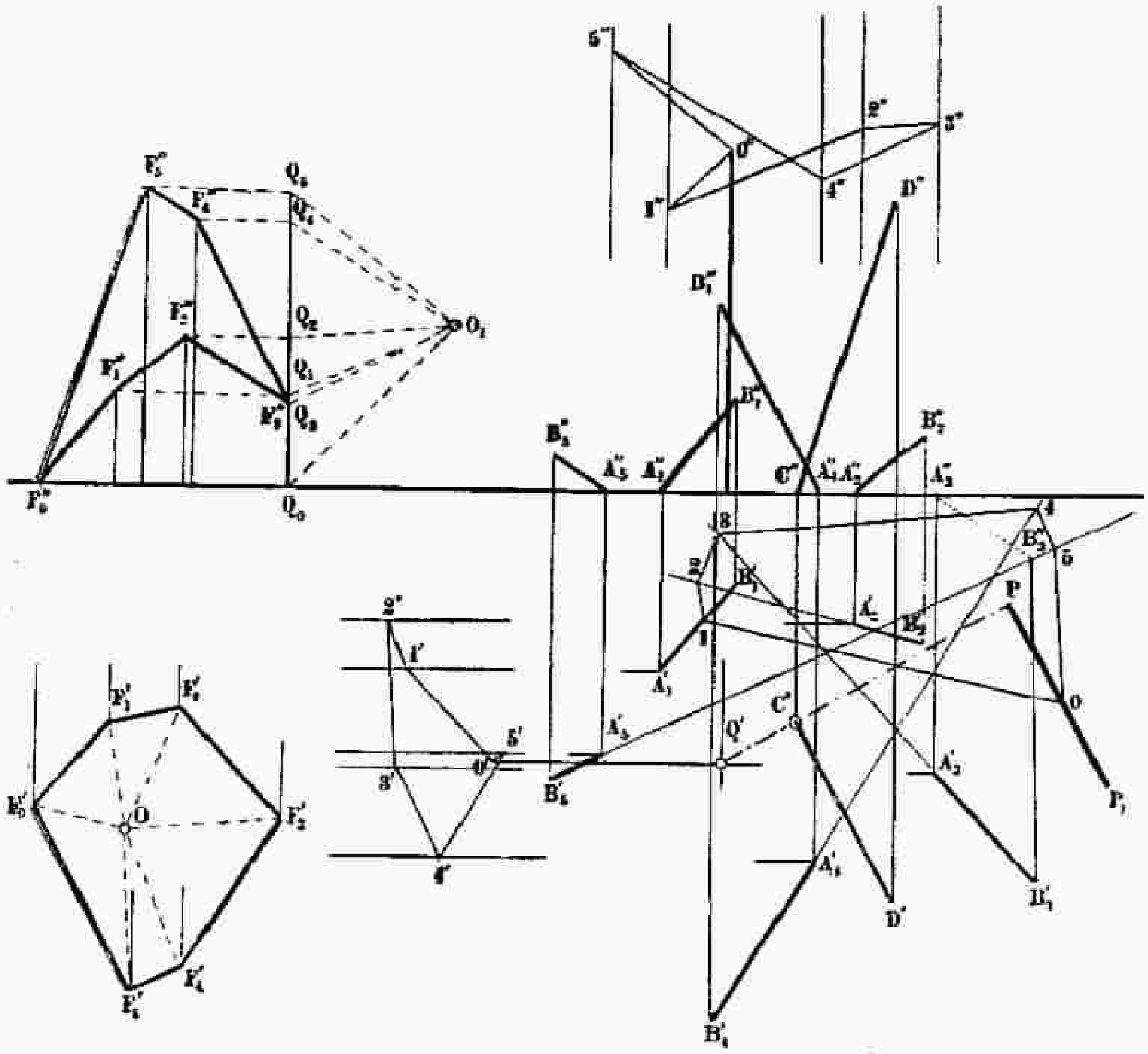
Tutti i vari procedimenti sopraindicati per la composizione delle forze nello spazio si possono attuare per mezzo delle rappresentazioni coi metodi della geometria descrittiva; ma riescono assai laboriosi e lunghi.

Il procedimento al quale meglio si applica il metodo di Monge, è quello del piano trasversale e del centro di riduzione, quando il piano trasversale è uno dei piani di proiezione ed il centro di riduzione è il punto all'infinito della retta perpendicolare a tale piano.

Siccome questa costruzione è appena accennata nei più diffusi trattati di statica grafica, ho creduto non del tutto inutile questa nota destinata ad esporla con qualche dettaglio insieme con la discussione relativa ad essa.

Sebbene la cosa non presenti difficoltà, mi lusingo che possa avere qualche pratica utilità.

1. Sieno date $n$ forze $f_i$ individuate per mezzo delle loro proiezioni su due piani ortogonali, e supponiamo da prima che il segmento equipollente alla somma geometrica dei segmenti che rap-



presentano le $f_i$ non sia nullo, e per conseguenza almeno una delle sue proiezioni non sia nulla. Anzi con uno spostamento di piani di riferimento, potremo supporre che ambedue le proiezioni suddette non siano nulle.

Nell'annessa figura abbiamo supposto che le forze date siano cinque; $A'_iB'_i$, $A''_iB''_i$ sono le proiezioni delle rispettive linee di azione, $A'_i$, $A''_i$ le proiezioni della prima traccia; a parte poi sono disegnate le due proiezioni $F'_0F'_1F'_2F'_3F'_4F'_5$, $F''_0F''_1F''_2F''_3F''_4F''_5$

di un poligono delle forze, cioè avente i suoi lati equipollenti alle forze stesse. È chiaro che i lati di chiusura $F'_0F'_5$, $F''_0F''_5$ determinano la direzione principale del sistema.

È opportuno osservare che per poter fare il disegno occorre che le traccie omonime, per es. le prime, sian tutte nel piano del disegno. Qualora fossero troppo lontane l'una dall'altra si potrà immaginare spostato quanto occorre il primo piano di proiezione parallelamente a sè stesso, il che si effettuerà assai rapidamente spostando la linea di terra.

Ogni forza $f_i$ può essere scomposta in una forza $p_i$ situata nel primo piano di proiezione ed in una $q_i$ perpendicolare ad esso. La $p_i$ avrà per linea d'azione la $A'_iB'_i$, la $q_i$ passerà per la traccia $A'_i$. Il poligono delle forze $p_i$ è il poligono $F'_0\,F'_1\,F'_2\ldots$, quello delle $q_i$ è $Q_0Q_1Q_2\ldots$, essendo $Q_0$, $Q_1$, $Q_2\ldots$, le proiezioni dei vertici $F''_0$, $F''_1$, $F''_2,\ldots$ sopra una perpendicolare alla linea di terra.

Ciò posto per mezzo di un poligono funicolare $0\ 1\ 2\ldots$ si determina la risultante delle forze $p_i$, e per mezzo di due poligoni funicolari $0'\ 1'\ 2'\ldots$, $0''\ 1''\ 2''\ldots$ si determina il baricentro $Q'$ delle forze $q_i$ applicate ai punti $A'_i$.

In tal guisa il sistema di forze è ridotto ad una forza $p = F'_0F'_5$ nel primo piano di proiezione ed in una $q = Q_0Q_5 = \Sigma q_i$ applicata in $Q'$ perpendicolare ad esso.

Trasformato così il sistema, è facile risolvere i più importanti problemi ad esso relativi.

**2.** Problema. — *Determinare l'asse-momento della coppia che nasce trasportando tutte le forze del sistema in un punto.*

Per il punto $C'$ dato si conduca la parallela alla direzione principale e si trovi la sua prima traccia; poichè il momento della coppia che si ottiene prendendo per centro di riduzione un punto C non varia se C si sposta nella direzione principale, possiamo determinare il momento relativo alla traccia suddetta.

Ciò premesso, sia $D'$ la traccia. Trasportando in $D'$ la $p$ avremo una coppia di asse-momento eguale al prodotto di $p$ per la distanza di $D'$ dalla retta di essa, che ridotto ad una base arbitraria si dovrà riportare perpendicolarmente al primo piano di proiezione. Trasportando $q$ in $D'$ nasce una coppia il cui asse momento eguale a $D'Q' \times q$ deve esser portato, ridotto alla stessa base, sul primo piano di proiezione perpendicolarmente a $D'Q'$. Ciò fatto, la composizione dei due assi-momenti non offre difficoltà alcuna.

**3.** Problema. — *Determinare l'asse principale del sistema di forze* $f_i$.

È noto che l'asse principale è la retta, parallela alla direzione principale, luogo dei punti pei quali il momento del sistema è minimo, oppure dei punti pei quali l'asse-momento è parallelo alla direzione principale stessa. È pure noto che esso incontra la retta che rappresenta la minima distanza fra due rette reciproche qualunque ed è perpendicolare ad essa.

L'asse principale cercato deve dunque passare per un punto della retta Q'P, minima distanza fra le due rette reciproche contenenti $p, q$, in un punto C', che può esser facilmente determinato colle considerazioni seguenti.

Siano $x, y$ le sue distanze da P e da Q', e $d = \mathrm{Q'P}$, di guisa che sarà $x + y = d$. I momenti di $p, q$ rispetto a C' sono eguali rispettivamente a $xp$, $yq$ e gli assi-momenti relativi sono perpendicolari fra loro, perchè il primo è perpendicolare al primo piano di proiezione, il secondo giace in quello, perciò il quadrato del momento M del sistema rispetto a C' è

$$\mathrm{M}^2 = p^2x^2 + q^2y^2 = p^2x^2 + q^2(d - x)^2,$$

ossia

$$\mathrm{M}^2 = (p^2 + q^2)\,x^2 - 2q^2d\,.\,x + q^2d^2.$$

Per conseguenza

$$\frac{d(\mathrm{M}^2)}{dx} = 2\,[(p^2 + q^2)\,x - q^2\,d],$$

$$\frac{d^2(\mathrm{M}^2)}{dx^2} = 2\,(p^2 + q^2).$$

Per

$$x = \frac{q^2}{p^2 + q^2}\,d$$

si ha

$$\frac{d(\mathrm{M}^2)}{dx} = 0 \qquad \frac{d^2(\mathrm{M}^2)}{dx^2} > 0,$$

e quindi $\mathrm{M}^2$ è minimo. In conclusione il punto C' per il quale deve passare l'asse principale del sistema è determinato dalle seguenti condizioni

$$x = \frac{q^2}{p^2 + q^2}\,d, \qquad y = \frac{p^2}{p^2 + q^2}\,d;$$

e quindi

$$\frac{x}{y} = \frac{q^2}{p^2}\,.$$

L'asse principale dunque divide PQ' in parti inversamente proporzionali ai quadrati delle forze $p, q$.

Si giunge facilmente allo stesso risultato anche senza fare uso del calcolo, colle seguenti considerazioni semplicissime. Trasportando in un punto C' di PQ' le forze $p$, $q$, gli assi-momenti che nascono sono $xp$, $yq$ e sono rispettivamente paralleli a $q$, $p$. Affinchè la risultante delle due forze $p$, $q$ sia parallela all'asse-momento risultante dei due $yq$, $xp$ è dunque necessario e sufficiente che sia

$$\frac{yq}{xp} = \frac{p}{q},$$

ossia

$$\frac{x}{y} = \frac{q^2}{p^2}.$$

Basta dunque costruire il triangolo rettangolo che abbia i suoi cateti eguali a $p$ e $q$. Le proiezioni di questi sull'ipotenusa sono proporzionali ai quadrati di $p$. $q$, e per conseguenza se si divide $Q'P=d$ in parti proporzionali alle proiezioni suddette, avremo i segmenti $x$, $y$ e quindi il punto C'.

4. Problema. — *Trovare il momento di un sistema di forze rispetto ad una retta arbitraria.*

Supposto di aver ridotto, come nel § 1, il sistema a due forze $p$, $q$ l'una situata nel primo piano di proiezione, l'altra ad essa perpendicolare, il momento del sistema rispetto ad una retta $r$ è uguale alla somma dei momenti di $p$, $q$ rispetto ad $r$.

Sia M'M'' la prima traccia di $r$, e prendiamo su $r$ un segmento MN uguale all'unità. Il momento di $p$ rispetto ad $r$ è sei volte il volume del tetraedro che ha per spigoli opposti MN e $p$; la misura della base $M'p$ di questo tetraedro è $\frac{1}{2}p \cdot d$, essendo $d$ la distanza di M' dalla retta di $p$; la sua altezza è $N_0N''$, dunque il momento di $p$ rispetto ad $r$ è

$$p \cdot d \cdot N_0N''$$

ossia è uguale al *momento del sistema di forze* p; *rispetto alla prima traccia della retta* r, *moltiplicata per la proiezione del segmento unità, appartenente alla* r, *fatta sopra una retta perpendicolare al primo piano di proiezione.*

Il momento della $q$ rispetto ad $r$ è sei volte il volume del tetraedro che ha per spigoli opposti $q$ ed $MN=1$ (sulla $r$) e questo tetraedro è equivalente a quello che ha per spigoli opposti M'N' e $q$. Essendo $h$ la distanza di Q' dalla prima proiezione M'N' di $r$, la base Q'M'N' di questo tetraedro ha per misura $\frac{1}{2}h \cdot M'N'$ e l'altezza di essa è $q$, dunque il momento di $q$ rispetto ad $r$ è

$$M'N' \cdot h \cdot q$$

ossia è uguale al *momento del sistema di forze parallele* $q_i$ *applicate nei punti* $A'_i$ *rispetto alla prima proiezione della* r, *moltiplicata per la prima proiezione del segmento unità dato sulla* r.

Trovati i due momenti di $p$, $q$, si trova il momento del sistema facendo la somma algebrica di essi.

**5.** Nei §§ precedenti abbiamo supposto che la somma geometrica delle $f_i$ non sia nulla e non siano nulle nemmeno le proiezioni sui due piani di rappresentazione.

Conservando l'ipotesi che la somma geometrica delle $f_i$ non sia nulla, può avvenire che una sola delle sue proiezioni sia nulla, nel qual caso l'altra proiezione è uguale alla somma stessa. In altre parole può avvenire che una delle poligonali $F'_0 F'_1 \ldots F'_n$, $F''_0 F''_1 \ldots F''_n$ sia chiusa.

1°. Supponiamo che sia chiusa la poligonale $F'_0 F'_1 \ldots F'_n$ ed aperta la $F''_0 F''_1 \ldots F''_n$. Procedendo esattamente come nel § 1, troveremo per risultante delle forze $p_i$ una coppia coll'asse-momento perpendicolare al primo piano di proiezione, e come risultante delle $q$ una forza perpendicolare al piano stesso. Ne segue che la retta di quella risultante è senz'altro l'asse principale del sistema.

2°. Supponiamo che sia chiusa la poligonale $F''_0 F''_1 \ldots F''_n$ ed aperta la $F'_0 F'_1 \ldots F'_n$. In questo caso le $p_i$ si compongono, come nel § 1, in una sola forza $p$ per mezzo di un poligono funicolare; e le $q_i$, essendo $\Sigma q_i = 0$, si compongono in una coppia situata in un piano perpendicolare al primo piano di proiezione, del quale si può determinare la prima traccia nel modo seguente.

Scelta una qualunque delle $q_i$, per esempio la $q_n$, le rimanenti si devono comporre in una forza uguale ed opposta alla $q_n$ medesima, applicata nel baricentro K, degli $n-1$ punti $A'_1, A'_2 \ldots A'_{n-1}$ affetti da coefficienti proporzionali alle $q_1, q_2 \ldots q_{n-1}$. La traccia del piano contenente la coppia risultante dalle $q_1, q_2 \ldots q_n$ è dunque la $KA'_n$ e il suo asse-momento è perpendicolare a $KA'_n$ sul primo piano di proiezione. Si determina facilmente la grandezza di questo momento, ridotto ad una data base uguale alla $p = F'_0 F'_n$, per mezzo del poligono funicolare già costruito.

Ridotto così il sistema ad una forza $p$ nel primo piano di proiezione e ad una coppia, il cui asse-momento è situato nello stesso piano, potremo scomporre quest'asse-momento in due, uno parallelo e l'altro perpendicolare a $p$. Quest'ultimo si compone con $p$ ed ha per effetto di spostare $p$ parallelamente a sè stessa normalmente al primo piano di proiezione di una di distanza uguale a quell'asse-momento (poichè si è preso $p$ per base di riduzione).

Così troveremo l'asse principale che ha per prima proiezione la $p$ e per seconda la parallela alla linea di terra ad una distanza da essa, uguale all'asse-momento sopra indicato.

**6.** Se ambedue i poligoni $F'_0 F'_1 \ldots F'_n$, $F''_0 F''_1 \ldots F''_n$ sono chiusi, e quindi anche il poligono obiettivo delle $f_i$ è chiuso, le $p_i$ si compongono in una coppia situata nel primo piano di proiezione, e quindi coll'asse-momento ad esso perpendicolare, le $q_i$ pure si compongono in una coppia situata in un piano perpendicolare al primo piano di proiezione, la cui traccia su di essa si determina come nel § precedente. La composizione di queste due coppie non presenta difficoltà.

G. LAZZERI.

## SULL'INSEGNAMENTO DELLA STORIA DELLE MATEMATICHE IN RUSSIA

Di fronte al risveglio delle ricerche storiche, ed all'interesse generale che ai nostri giorni desta lo studio delle varie discipline nella loro storica evoluzione, le scienze esatte, e particolarmente le scienze matematiche, non potevano restare del tutto estranee a quest'ordine di studii; e benchè in esse sia sentito meno che in altre scienze il bisogno di risalire ai precedenti storici, pur tuttavia è certo che la conoscenza delle indagini e dei risultati del passato può in varii casi essere utile a completare e ad approfondire le cognizioni e le indagini presenti; ed è poi innegabile che, per la storia della cultura generale, e quindi della civiltà, è necessario conoscere quale sia stato, nel tempo, il cammino fatto dall'attività intellettuale umana in quest'importantissimo ramo del sapere.

In Italia, dopo l'opera del Libri (che, quantunque pubblicata in Francia ed in lingua francese, è tuttavia nostro vanto, essendo l'autore fiorentino) la storia delle matematiche era stata lasciata in abbandono; ma in questi ultimi tempi anche fra noi si nota un risveglio: da varii anni il Favaro ne fa argomento d'un corso facoltativo all'Università di Padova; il Loria, dell'Università di Genova, si occupa con molto frutto di questi studii; a Pisa il Lazzeri ed a Torino il Vailati hanno svolto dei corsi liberi di storia della geometria e di storia della meccanica; ultimamente l'Amodeo ha conseguito, a Napoli, la libera docenza in storia delle matematiche; e questi studii formarono argomento di discussioni e di relazioni nel II Congresso storico internazionale che fu tenuto, nel 1903, a Roma. Più ancora si è fatto nelle altre nazioni, in diverse delle quali questa disciplina ha una cattedra ufficiale; e sono note a tutti le lezioni che ne dettano il Cantor, il Mansion, il Rouse Ball. Anche in Russia, dove fioriscono così valenti cultori delle scienze matematiche, queste si sono cominciate a studiare nel loro svolgimento storico; ma poichè, per la poca diffusione che ha fra noi la lingua russa, poco o nulla si sa di quello che in questa materia colà si è fatto, così credo che possa riuscire utile agli studiosi il dar notizia del corso libero di storia delle matematiche che da poco più di 20 anni svolge, nell'Università di Mosca, il professor Bobynin e pubblicare la traduzione del programma da lui svolto varii anni fa. [1] Il Bobynin divide il suo corso in due parti, che tratta contemporaneamente, dedicando a ciascuna un'ora di lezione per settimana; nella prima parte si occupa della storia delle matematiche nell'evo antico e nel Medio Evo; nella seconda tratta della storia delle matematiche nell'evo moderno. Egli si propone di completare, in seguito, questo corso generale con un corso speciale della storia dello sviluppo delle matematiche in Russia, e ne va, per ora, raccogliendo il materiale.

Il programma del quale pubblico la traduzione, fu svolto a Mosca negli anni accademici 1888-89 e 1889-90; e fu pubblicato nel giornale *La scienza fisico-matematica nel suo presente e nel passato.*

Nel pubblicare il programma l'ho modificato solo lievissimamente in qualche punto che non sarebbe riuscito chiaro senza aver presente tutto il corso com'è stato svolto. Il Bobynin ha cominciato, qualche anno dopo, a pubblicare, nella stessa Rivista sopra citata, le sue lezioni, allontanandosi però alquanto dal programma; ma non avendo potuto avere che alcuni fascicoli, contenenti solo una parte del corso, non posso darne qui nemmeno un rapido cenno. Soltanto osservo che sarebbe forse da desiderare, in qualche punto, un'esposizione meno astrusa e più chiara; mentre, d'altra parte, è commendevole il fatto che il Bobynin non solo tiene conto di tutto quanto i principali trattatisti hanno scritto in materia, ma altresì pone a profitto le monografie e le scoperte ulteriori, quali, per esempio, quella del papiro di Rinda (di cui il Bobynin si occupa largamente) e che venne pubblicato nel 1877 dall'*Eisenlohr* nel suo scritto " *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter* ".

---

[1] Mi è grato qui ringraziare il chiarissimo prof. Menzbier, ordinario di anatomia comparata nell'Università di Mosca, per mezzo del quale ho potuto procurarmi il programma del professor Bobynin.

# Programma del corso di storia delle matematiche svolto negli anni accademici 1888-89 e 1889-90 nell'Università di Mosca dal libero docente V. V. Bobynin.

## STORIA DELLE MATEMATICHE NELL'EVO ANTICO E NEL MEDIO EVO

### Lezione I.

*Introduzione.*

Scopo della storia delle matematiche e sua importanza: *a*) filosofica (problemi di filosofia matematica e loro importanza per la storia stessa della scienza); *b*) scientifica (guida ai lavori di ricerca); *c*) pedagogica; *d*) per la cultura generale. — Inizio degli studii di storia delle matematiche. Breve rassegna delle condizioni della letteratura storico-matematica nell'evo antico, nel medio evo e nell'evo moderno.

## EPOCA ANTERIORE AL PERIODO SCIENTIFICO

### Lezione II.

*Origine e primo sviluppo della numerazione parlata.*

Sviluppo generale e particolare delle nozioni relative alla formazione dei primi numeri. Sviluppo mimico della numerazione. Posteriore apparizione della numerazione parlata. Trasformazione della numerazione fatta con le dita in numerazione parlata. Ulteriore sviluppo della numerazione in seguito alla formazione del numero 20.

### Lezione III.

*Origine dei sistemi di numerazione.*

Problema fondamentale della numerazione parlata e sua risoluzione spontanea derivante dalla natura degli oggetti. Sistemi di numerazione a base 5, 10 e 20. Forme dei nomi dei numeri in questi sistemi. Sviluppo dell'idea delle unità di differenti ordini. Nomi di queste unità. Limiti della numerazione raggiunti nelle diverse nazioni. Sistemi artificiali di numerazione.

### Lezione IV.

*Origine e primo sviluppo della numerazione scritta.*

Prima applicazione dell'idea della scrittura alla numerazione. Calcolo con pietre o con oggetti. Numerazione coi nodi. Sua condizione presso i Cinesi. Tavola di Lo-sciu. Sua condizione presso i Peruviani: *Kvipuss* (il cordone). Forma grafica della numerazione: tacche, scrittura figurata degli Indiani dell'America settentrionale: scrittura geroglifica dei popoli civilizzati dell'America centrale.

### Lezione V.

*Numerazione scritta nel suo stadio più progredito.*

Stato raggiunto dalla numerazione scritta nelle forme più progredite della scrittura. Principii generali dei sistemi con cifre (alcuni ancora vigenti ed alcuni antiquati). Metodi dell'indicazione dei numeri coi multipli delle unità di vario ordine, negli antichi e nei nuovi sistemi con cifre: 1° metodo dell'indicazione non sistematica; 2° additivo; 3° moltiplicativo; 4° con esponenti; 5° a colonna; 6° metodo di posizione.

### Lezione VI.

*Matematiche nell'antico Egitto.*

Stato dell'Egitto e sua popolazione nell'antichità. Breve schizzo delle principali dinastie dei re egiziani e principali fatti politici della vita dell'Egitto. Tre generi di scrittura usati nell'Egitto. Numerazione scritta nel sistema geroglifico. Papiro di Rinda e sua menzione nello studio della letteratura. Breve rassegna del suo contenuto.

### Lezione VII.

*Matematiche nell'antico Egitto*

(continuazione).

Stato delle matematiche nell'Egitto al tempo dell'elaborazione del papiro di Rinda, dedotto dai dati contenuti nel papiro medesimo. — *Aritmetica.* Numerazione scritta. Trasformazione delle frazioni. Uso dei segni. Somma e sottrazione. Moltiplicazione. Divisione. Elevazione a potenza. Divisione in parti proporzionali. Rapporti geometrici ed inizio dello studio delle proporzioni. Media aritmetica. Problemi relativi alle progressioni aritmetiche. Equazioni di primo grado con una incognita. — *Geometria.* Relativa scarsezza di cognizioni geometriche nell'antico Egitto. Angoli. Linee perpendicolari e parallele. Figure. Origine della dottrina della similitudine. Misura delle aree. Quadratura del cerchio. Solidi geometrici. Paragone delle piramidi. Misura dei volumi dei tronchi di piramide e di cono. Arte del disegno lineare geometrico. Osservazioni generali sui principali metodi d'investigazione dei matematici egiziani.

### Lezione VIII.

*Matematiche nell'antico Egitto* (fine).

*Notizie che abbiamo delle cognizioni matematiche degli abitanti dell'antica Caldea.*

Insufficienza delle nostre nozioni sullo stato e sullo sviluppo raggiunto dalle matematiche nell'antico Egitto nel tempo susseguente all'elaborazione del papiro di Rinda. Iscrizione del tempio di Edfu. Ipotesi che da essa si deduce. — Stato dell'antica Caldea e sua popolazione nell'antichità. Scrittura cuneiforme. Numerazione scritta. Sistema di numerazione sessagesimale. Scoperta di Hincks. Tavola dei quadrati e dei cubi di Senkereh. Influenza del principio del posto nella numerazione. Applicazione dell'aritmetica e della geometria al misticismo. Nostre nozioni sulle cognizioni geometriche dei dotti Caldei. Divisione del circolo. Gradi. Numero $\pi$.

## MATEMATICA NELL'ANTICA GRECIA.

## PERIODO DELL'ASSIMILAZIONE DELLE COGNIZIONI ACQUISTATE DAL GENERE UMANO

### Lezione IX.

*Scuola Ionica.*

Conseguenze che ebbe per la scienza il commercio dei Greci coi popoli civili dell'Oriente, nel tempo anteriore alla fondazione della Scuola Ionica. Biografia di Talete di Mileto. Sue cognizioni matematiche. Stato delle matematiche al tempo dei successori di Talete. Anassagora. Studio delle matematiche fatto dalle persone non appartenenti alla Scuola Ionica. Enopide di Chio. Democrito di Abdera.

### Lezione X.

*Scuola Pitagorica.*

Vita ed attività scientifica di Pitagora. Aritmetica dei pitagorici. Studio delle proprietà dei numeri. Progressioni aritmetiche. Dottrina delle proporzioni e delle medie grandezze.

### Lezione XI.

*Scuola Pitagorica*

(continuazione).

Geometria dei pitagorici. Teorema di Pitagora. Triangoli rettangoli razionali. (1) Linee incommensurabili e numeri irrazionali. Signi-

(1) Viète nel suo *Canon Mathematicus seu ad triangula cum appendicibus*, pubblicato nel 1579, ha inserita una tavola che dà la serie dei triangoli rettangoli razionali, supponendo sia l'ipotenusa, sia la base, sia la perpendicolare divisa in 100000 parti. Gli angoli corrispondenti a ciascuno

ficato dell'idea dell'irrazionalità nella dottrina religiosa e filosofica dei pitagorici. Equivalenza delle figure. Somma degli angoli interni d'un triangolo. Dottrina dei poliedri regolari. Poligoni regolari. Poligoni stellati. Forma, contenuto e metodi della geometria dei pitagorici.

## PERIODO DELL'ATTIVITÀ INDIPENDENTE DEI MATEMATICI

### LEZIONE XII.

*Matematiche in Grecia nel V secolo.*

Crollo della lega dei pitagorici ed importanza di questo fatto pel conseguente sviluppo della geometria greca. Il problema della divisione d'un arco o d'un angolo in un numero arbitrario di parti uguali ed il suo caso particolare della trisezione dell'angolo. Opere di Ippia di Elide. Problemi della duplicazione del cubo e della quadratura del cerchio. Vita e lavori di Ippocrate di Chio. Tentativi di Antifone e di Brisone per risolvere il problema della quadratura del cerchio. Paradossi di Zenone e loro importanza nella storia della geometria greca. Stato delle matematiche in Grecia alla fine del V secolo. Principio della dottrina della prospettiva. Teeteto attico ed i suoi lavori.

### LEZIONE XIII.

*Scuola di Platone.*

Breve notizia della vita e dell'attività di Platone. Sue considerazioni sullo stato e sull'importanza delle matematiche nell'ambito della scienza. Opera di Platone nel dirigere l'attività matematica della sua scuola. Lavori di matematiche, e particolarmente di metodologia e di filosofia, appartenenti a Platone. Attività matematica dei dotti e loro unione con l'Accademia. Laodamante. Attività matematica degli allievi dell'Accademia. Dinostrate. Menecmo. Eudosso di Gnido. Ermotimo di Colofone. Aristeo il vecchio. Scuola dei peripatetici. Sviluppo dell'opera di questa scuola nella storia delle matematiche. Eudemio di Rodi. Teofrasto di Lesbo.

---

di questi triangoli sono stati omessi da Viète, giacchè sono assolutamente irrazionali fra loro. (Cfr. MONTUCLA, *Histoire des Mathématiques*, Paris, An. VII, t. I, p. 611.

PROCLO, nei suoi commentarii sulla proposizione 47 del I libro di Euclide, dà l'indicazione delle ricerche fatte dai pitagorici sui *triangoli rettangoli aritmetici*. La formola che adopravano per formare un numero infinito di questi triangoli può scriversi in algebra come segue:

$$a^2 + \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2.$$

Platone determinava i triangoli rettangoli in numeri, per mezzo d'un metodo che può essere espresso con l'equazione: $a^2 + \left(\frac{a^2}{4} - 1\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} + 1\right)^2$. (Cfr. LIBRI, *Histoire des Mathématiques en Italie*, t. I, p. 206, n. 4.)

LEZIONE XIV.

*Euclide ed i suoi lavori.*

Alessandria. Dinastia dei Tolomei e dimostrazione della protezione da essa accordata alle scienze. Scuola di Alessandria. Notizie della vita di Euclide. Compendio generale del contenuto degli " Elementi ". Resoconto del contenuto dei libri separatamente considerati. Osservazioni sullo scopo degli " Elementi ", sul loro grado di originalità e sulla forma dell'esposizione. Questione dell'autenticità delle copie pervenute sino a noi. Altre opere di Euclide. " Sofismi (*Fallaciarum liber*) ". " Porismi ". " Dei dati (*Data*) ". " Libro della divisione delle superficie (*De Divisionibus*) ". " Luoghi sopra una superficie (*Locorum ad superficiem liber*) ". " Sezioni coniche ". Opere attribuite ad Euclide sulla musica, sull'astronomia, sull'ottica e sulla meccanica.

LEZIONE XV.

*Eratostene ed Apollonio di Perga.*

Notizie della vita e dell'attività di Eratostene. Lettera sulla duplicazione del cubo. Mesolabio. Scritto sulle medie grandezze. Crivello di Eratostene. Saggio per la determinazione della grandezza della terra. — Notizie della vita e delle opere di Apollonio Pergeo. Suoi lavori in fatto di numerazione e di calcolo. Otto libri di sezioni coniche. Due libri sulla divisione del rapporto. (1) Altre opere di Apollonio.

LEZIONE XVI.

*Matematici italiani.*

Le matematiche in Italia dopo il crollo della lega dei pitagorici. Archita di Taranto ed i suoi lavori matematici. Biografia di Archimede. Opere di Archimede pervenute sino a noi; loro carattere e tendenza. Esposizione delle scoperte e dei lavori di Archimede nel dominio della geometria nel piano e nello spazio, dell'aritmetica e della meccanica.

PERIODO DELLA DECADENZA DELLA MATEMATICA GRECA

LEZIONE XVII.

*Studiosi dell'ultimo periodo dello sviluppo della scienza matematica greca secondo lo spirito greco.*

Osservazioni generali sul carattere e sulla tendenza dell'attività matematica di quest'epoca. Nicomede e la sua concoide. Diocle e la sua cissoide. Perseo. Zenodoro. Ipsiclo di Alessandria. Lavori matematici dell'astronomo Ipparco.

(1) Qui il Bobynin evidentemente allude ai due libri *de sectione rationis* e *de sectione spatii* di Apollonio, dei quali il primo fu ritrovato tradotto in arabo e pubblicato da Halley nel 1708, ed il secondo fu ricostruito dallo stesso Halley mediante la semplice descrizione che ne dà Pappo. (Cfr. MONTUCLA, op. cit., t. I, p. 251.)

## INDIRIZZO PRESO DALLA MATEMATICA GRECA SOTTO L'INFLUENZA ESERCITATA IN PARTE DALLE ALTRE SCIENZE E PRINCIPALMENTE DALLE TENDENZE ESTRANEE ALLO SPIRITO GRECO

### INDIRIZZO PRESO DALLE APPLICAZIONI

#### LEZIONE XVIII.

*Coltivazione della meccanica e della geodesia.*

Erone di Alessandria. Determinazione del tempo in cui visse e notizie biografiche di lui. Suoi scritti di meccanica. Lavori geodetici e geometrici di Erone. Sesto Giulio Africano.

#### LEZIONE XIX.

*Coltivazione della trigonometria.*

Studiosi di geometria dell'epoca compresa tra la fine del I secolo avanti Cristo e la metà del II secolo dopo Cristo. Gemino di Rodi; Teodosio di Tripoli; Dionisodoro; Sereno di Antista. Menelao di Alessandria ed il suo scritto " Del calcolo delle corde „. Claudio Tolomeo ed i suoi lavori di geometria e di trigonometria.

### INDIRIZZO DELL'ARITMETICA

#### LEZIONE XX.

*Coltivazione dell'aritmetica e dell'analisi indeterminata.*

Studiosi dell'aritmetica della scuola neo-pitagorica. Nicomaco da Gerasa (di Siria). Teone di Smirne. Timaride. Matematici della scuola neo-platonica: Porfirio; Giamblico. Diofanto alessandrino. Contenuto del suo libro " Aritmetica „ e sue particolarità caratteristiche. Scritto di Diofante " Dei numeri poligoni „.

#### LEZIONE XXI.

*Epoca della completa decadenza della scienza matematica in Grecia.*

L'epoca è caratterizzata esclusivamente dalla diligenza dei commentarii i quali rappresentano la scienza dei matematici. Suo principio e suo progressivo sviluppo. Pappo di Alessandria è il rappresentante di maggior ingegno di quest'epoca. Contenuto del suo scritto " Collezioni „. Patrizio. Teone alessandrino. Ippazia. Matematici della scuola di Atene. Proclo. Damazio di Damasco. Eutochio di Ascalona, Giovanni Filopono.

LE MATEMATICHE PRESSO GL'INDIANI

### Lezione XXII.

*Gl'Indiani. Nostre notizie sulla loro letteratura matematica.*

Origini, organizzazione dello Stato e qualità nazionali degl'Indiani. Loro civiltà. Relazioni con la Grecia e fatti risultanti dalla mutua influenza fra le due nazioni. Aryabhatta e parte matematica della sua " Aryabhattiana ". Brahmagupta. Contenuto dei capitoli dedicati alle matematiche nel suo scritto " Brahma-sfuta-siddhânta ". Bhâskara Acârya. La sua opera " Siddhântaçiromani ". Contenuto delle sue parti matematiche, cioè dei capitoli Lilâwati e Vija-Ganita.

### Lezione XXIII.

*Matematica degl'Indiani.*

Sistemi di numerazione scritta. Le quattro operazioni fondamentali sui numeri interi. Frazioni. Regole e problemi di aritmetica pratica. Aritmetica teorica. — *Algebra.* Regola dei segni. Termini dei polinomii. Numeri negativi. Duplicità delle radici delle equazioni quadratiche. Numeri irrazionali ed operazioni su di essi. Applicazione dell'algebra alla soluzione dei problemi di geometria. Teoria delle equazioni. — *Analisi indeterminata.* Osservazioni generali sul procedimento degl'Indiani nella soluzione dei problemi indeterminati. Equazioni indeterminate con due incognite di primo e di secondo grado, e metodo per la loro risoluzione in numeri interi.

### Lezione XXIV.

*Matematica degl'Indiani*

(continuazione).

*Geometria.* Particolarità caratteristiche e principii della geometria degl'Indiani. Forme indiane della dimostrazione del teorema di Pitagora. Misura dei triangoli e dei quadrangoli. Proposizioni relative alla misura del cerchio, delle sue parti, delle linee e dei poligoni regolari in esso iscritti. Quadratura del cerchio. Approssimazione di $\pi$. — *Trigonometria.* Seno e seno-verso; loro uso e tavole. Triangoli rettangoli piani e sferici. — Caratteri della matematica indiana e sua sfera d'influenza. Cinesi; Arabi; Greci; Europa occidentale.

MATEMATICA PRESSO GLI ARABI

### Lezione XXV.

*Letteratura matematica araba e suoi scrittori.*

Sviluppo della potenza politica degli Arabi. Principali fatti della loro storia politica. Primitiva influenza della scienza indiana e posteriore prevalenza dell'influenza greca. Traduzione e commento delle opere matematiche degli scrittori dell'antica Grecia. Astronomi e matematici arabi nel IX, X ed XI secolo. Matematici egiziani. Astronomi e matematici arabi in Ispagna. Astronomi e matematici in Oriente nei secoli dal XIII al XVI.

### Lezione XXVI.

*Matematica degli Arabi.*

*Aritmetica.* Numerazione scritta. Arte del calcolo. Regole di falsa posizione. Estrazione delle radici. Studio delle proprietà dei numeri. Quadrati magici. Serie. Soluzione dei problemi " Aritmetici " di Diofanto. Costruzione dei triangoli rettangoli razionali. Residui quadratici e cubici. — *Algebra.* Origine dei nomi algoritmo ed algebra. Terminologia e regola dei segni. Operazioni sulle espressioni algebriche. Numeri negativi. Equazioni di primo e di secondo grado. Equazioni di grado superiore riducibili a quelle di secondo. Equazioni cubiche e di quarto grado. Equazioni indeterminate.

### Lezione XXVII.

*Matematica degli Arabi*

(continuazione).

*Geometria.* Primitiva forma greco-indiana della geometria degli Arabi. Opere di Alcarismo (Al Chwarizmi), dei figli di Mûsâ ibn Schâkir e di Abûl-Wafâ. Prevalenza esclusiva dell'influenza della geometria greca. Problemi della trisezione dell'angolo, della quadratura del cerchio e del segmento sferico. Poligoni regolari. Sezioni coniche. Contributo degli Arabi alla geometria pratica. Reciproca applicazione della geometria e dell'algebra. — *Trigonometria.* Risultamenti dell'influenza indiana sulla trigonometria degli Arabi. Seni e seno-versi, Tangenti e cotangenti. Tavole trigonometriche. Trigonometria sferica.

## LE MATEMATICHE PRESSO LE NAZIONI DELL'EUROPA OCCIDENTALE

---

### Lezione XXVIII.

*Stato delle matematiche nelle nazioni che hanno diffuso la scienza dei matematici greci nell'Europa occidentale.*

*Bisanzio.* Carattere e rappresentanti della letteratura matematica bizantina dal VII al XV secolo. — *Roma.* Letteratura matematica romana dal suo sorgere nel primo secolo avanti Cristo fino alla caduta dell'impero romano occidentale.

PERIODO DELL'ASSIMILAZIONE DELLE COGNIZIONI ROMANE

---

### Lezione XXIX.

*Epoca dell'attività monastica.*

Cassiodoro. Boezio ed i suoi lavori. Isidoro di Spagna e le sue *Origines*. Il Venerabile Beda. Alcuino. Attività civilizzatrice di Carlo Magno. Stato delle cognizioni matematiche nell'Europa occidentale alla fine del secolo IX ed al principio del X.

### Lezione XXX.

*Gerberto.*

Vita ed attività scientifica di Gerberto. Principio dell'influenza degli Arabi. Abbaco e metodi di divisione. Letteratura sugli abbachi.

PERIODO DELL'ASSIMILAZIONE DELLA SCIENZA ARABA

---

### Lezione XXXI.

*Traduzioni latine delle opere della letteratura matematica araba.*

Progressivo sviluppo dell'influenza araba nell'Europa occidentale nell'epoca precedente alle Crociate. Attività di Atelarto o Adelardo di Bath. Platone di Tivoli. Gherardo di Cremona. Traduttori di secondo ordine del XII secolo. Cooperazione alla diffusione della scienza da parte dell'imperatore Federigo II e del re di Castiglia Alfonso X. Giovanni Campano.

### Lezione XXXII.

*Leonardo Pisano.*

Notizie della vita e dell'attività di Leonardo. Suoi scritti e cenno del loro contenuto.

### Lezione XXXIII.

*Assimilazione delle cognizioni scientifiche importate dagli Arabi nell'Europa occidentale.*

Stato dell'insegnamento della scienza matematica nelle università medievali. Sviluppo di quest'insegnamento nel XIV e nel XV secolo. Letteratura matematica di quell'epoca e suoi rappresentanti più importanti.

---

# STORIA DELLE MATEMATICHE NELL' EVO MODERNO

## ULTERIORE SVILUPPO DELLE MATEMATICHE NEL RAMO ARITMETICO-ALGEBRICO

### Lezione I.

*Diffusione delle matematiche in Italia.*

Importanza dell'invenzione della stampa e della caduta di Bisanzio per lo sviluppo delle scienze nell'Europa occidentale. Traduzioni e commenti delle opere dei matematici greci. Soluzione delle equazioni cubiche nei lavori di Scipione Ferro, di Tartaglia e di Cardano. Notizie della vita e di altri lavori di questi dotti.

### Lezione II.

*Diffusione della matematiche in Italia*

(continuazione).

Risoluzione delle equazioni di quarto grado. Notizie della vita e dei lavori di Ludovico Ferrari. Procedimento per la determinazione delle radici delle equazioni numeriche. Notizie sui numeri negativi e sulle radici negative ed immaginarie delle equazioni. Raffaele Bombelli e la sua " Algebra ". Soluzione di Bombelli del caso irriducibile della formola di Cardano.

### Lezione III.

*Francesco Viète.*

Biografia di Viète. Sue opere. Lavori sull'introduzione e sul perfezionamento del calcolo letterale. Elucubrazioni di Analisi indeterminata. Ricerche sulla trasformazione delle equazioni e relazioni tra i coefficienti e le radici. Nuovo metodo, fondato sul principio di riduzione, dato da Viète, per la risoluzione delle equazioni di II, III e IV grado. Abbassamento di un'unità del grado di un'equazione.

### Lezione IV.

*Francesco Viète*

(continuazione).

Importanza del metodo di Viète per la determinazione delle radici delle equazioni numeriche. — *Applicazione dell'algebra alla geometria.* Soluzione di Viète del caso irriducibile della formola di Cardano per mezzo d'un'equazione trigonometrica. Ricerche di Viète sulla divisione d'un angolo in un numero dispari di parti uguali (*sectiones angulares*) e loro importanza nella storia dello sviluppo dell'algebra. Lavori di Viète in trigonometria ed in geometria.

### Lezione V.

*L'algebra in Germania, in Inghilterra ed in Olanda. Stato della geometria nel XVI secolo.*

Michele Stifel e la sua *Arithmetica integra*. Scrittori di algebra di secondo ordine contemporanei di Viète. Algebristi posteriori a Viète. Alberto Girard e le sue opere. Tommaso Harriot e la sua *Artis analyticae praxis*. Scomposizione del primo membro d'un'equazione in fattori lineari. — Indirizzo e carattere dei lavori geometrici del XVI secolo. Giovanni Werner di Norimberga. Lavori geometrici di Tartaglia e di Commandino. Maurolico di Messina e suoi lavori originali di geometria. Opere di Pietro Ramus (Pietro de la Ramée) e loro indirizzo. Determinazione del rapporto fra la circonferenza ed il diametro. Lavori di trigonometria e calcolo delle tavole trigonometriche. Tavole di Giorgio Joachim von Lauchen o Retico.

### Lezione VI.

*Progresso dell'arte del calcolare.*

Tendenza ad abbreviare ed a semplificare i calcoli risultante dall'applicazione della geometria all'astronomia. *Frazioni decimali.* Inizio della loro applicazione al calcolo. Loro introduzione nell'uso generale fatta da Simone Stevino. *Logaritmi.* Primo accenno della loro idea fondamentale nell'opera *Arithmetica integra* di Stifel. Biografia di Giovanni Napier. Sviluppo della sua idea dei logaritmi. Le sue tavole: le loro susseguenti edizioni in Inghilterra e la loro riproduzione nelle altre nazioni d'Europa. Enrico Briggs e le sue tavole. Lavori di Vlacq. Scoperta dei logaritmi fatta, indipendentemente da Napier, dal dotto svizzero suo contemporaneo Giusto Bürgi. Differenza dello scopo che si erano proposti l'uno e l'altro.

### Lezione VII.

*Renato Descartes ed introduzione fatta da lui della geometria nell'ambito delle scienze che si sviluppano per mezzo dell'algebra.*

Biografia di Descartes. Suoi lavori matematici. Contenuto della sua " Geometria „. Risultamenti delle investigazioni di Descartes nel dominio dell'algebra. Natura e significato delle radici negative delle equazioni. Regola di Descartes per la determinazione del numero delle radici positive e negative d'un'equazione. Metodo dei coefficienti indeterminati. — *Applicazione dell'algebra alla geometria delle curve.* Applicazione dell'algebra alla teoria delle curve. Dottrina delle tangenti.

### Lezione VIII.

*Progresso dell'analisi indeterminata e della teoria dei numeri. Inizio della teoria delle Probabilità*

Stato dell'analisi indeterminata nella seconda metà del secolo XVI. Traduzioni dell' " Aritmetica " di Diofanto. Biografia di Bachet de Méziriac. Suoi lavori. Biografia di Fermat. Suoi lavori sulla teoria dei numeri. Biografia di Pascal. Studio, fatto da Pascal e da Fermat, dei primi problemi della teoria delle Probabilità.

## SVILUPPO DELL'ANALISI DEGLI INFINITAMENTE PICCOLI

### Lezione IX.

*Metodo di esaustione.*

Metodo di esaustione di Euclide e di Archimede.

### Lezione X.

*Inizio del calcolo degli infinitamente piccoli.*

Considerazioni dei matematici dell'Europa occidentale del XVI secolo sull'antico metodo di esaustione. Primi fondamenti dati da Kepler al calcolo degli infinitamente piccoli. Importanza della sua opera *Nova stereometria doliorum vinariorum* nella storia dello sviluppo di questo calcolo.

### Lezione XI.

*Metodo degl'indivisibili.*

Cavalieri e le sue opere. Metodo degl'indivisibili ed obbiezioni allo stesso. I seguaci di Cavalieri. Importanza del metodo di Cavalieri per lo sviluppo del calcolo degl'infinitamente piccoli.

### Lezione XII.

*Altri metodi di quadratura e di cubatura.*

Fonti dalle quali derivano. Metodo di Fermat. Vita e lavori di Roberval. Metodo degl'indivisibili di Roberval ed opere che lo espongono. Opere di Pascal che trattano lo stesso argomento e loro importanza per lo sviluppo dell'analisi degl'infinitamente piccoli. Metodo di Wallis. Esposizione di esso nella sua opera " *Aritmetica infinitorum* ". Lavori di Niccola Mercator e di Gregorio de Saint-Vincent.

### LEZIONE XIII.

*Metodo per condurre le tangenti e determinazione dei massimi e minimi.*

Determinazione delle tangenti presso i geometri greci. Metodo di Roberval. Metodo di Fermat per determinare i massimi ed i minimi, sul quale è fondato il suo metodo per condurre le tangenti. Metodo di Barrow.

### LEZIONE XIV.

*Isacco Newton ed il suo metodo delle flussioni.*

Vita ed opere di Newton. Metodo delle flussioni.

### LEZIONE XV.

*Calcolo differenziale ed integrale.*

Vita di Leibnitz e suoi lavori matematici. Primo sviluppo dell'idea fondamentale dell'analisi degl'infinitamente piccoli nelle prime memorie manoscritte di Leibnitz. Contenuto delle sue memorie a stampa. Disputa con Newton. Parte avuta da Leibnitz nell'ulteriore sviluppo dei principii del calcolo.

### LEZIONE XVI.

*Diffusione dell'analisi degl'infinitamente piccoli alla fine del XVII ed al principio del XVIII secolo.*

Propagazione del metodo delle flussioni fra i matematici inglesi. Taylor. Mac-Laurin. Obbiezioni contro i principii del calcolo differenziale ed integrale. Propagazione di questo tra i matematici del continente. Giacomo Bernoulli ed i suoi lavori di Analisi degl'infinitamente piccoli. Problemi da lui proposti sulla catenaria, sulla curva elastica e sulla veliera.

### LEZIONE XVII.

*Diffusione dell'analisi degl'infinitamente piccoli alla fine del XVII ed al principio del XVIII secolo.*

(continuazione).

Giovanni Bernoulli e le sue opere di analisi degl'infinitamente piccoli. Marchese de l'Hôpital. Ruggiero Cotes. Abramo de Moivre.

### LEZIONE XVIII.

*Primitivo sviluppo del calcolo delle variazioni.*

Problemi delle brachistocrone e degl'isoperimetri. Disputa fra i fratelli Giacomo e Giovanni Bernoulli.

### Lezioni XIX e XX.

*Leonardo Euler.*

Vita e lavori di Leonardo Euler. I più celebri fra gli scrittori di scienza matematica suoi contemporanei.

### Lezioni XXI e XXII.

*Lagrange.*

Vita e lavori di Lagrange.

## SVILUPPO DELLA GEOMETRIA SINTETICA

### Lezione XXIII.

*I geometri del secolo XVII.*

Midorge. Desargues. Pascal. Gregorio de Saint-Vincent. De la Hire. Huyghens. Newton.

### Lezione XXIV.

*I geometri del secolo XVIII.*

Mac-Laurin. Halley. Roberto Simson. Matteo Stewart. Lambert.

### Lezione XXV.

*Monge.*

Vita e lavori di Monge. Importanza delle sue opere nella storia dello sviluppo della geometria sintetica.

### Lezione XXVI.

*Carnot e Poncelet.*

*Géometrie de position* di Carnot. Poncelet ed il suo *Traité des propriétés projectives des figures.* Importanza storica del fatto della liberazione della Geometria dalla necessità di ricorrere all'Analisi pel suo sviluppo ulteriore.

Alfonso Bonolis.

# INTORNO AD UNA FORMA DEL POTENZIALE DI UNA MASSA SFERICA, LA CUI DENSITÀ NON SIA COSTANTE

*Continuaz. e fine v. fasc. prec.*

Per avere la funzione potenziale relativa ad un punto occupato da massa o posto nella cavità interna, nel caso d'un involucro, dobbiamo riferirci alla formula che dà la funzione potenziale relativa ad un punto occupato da massa d'una sfera massiccia ed omogenea. Si noti che il caso dell'involucro si può ridurre a quello della sfera piena, supponendo che la densità $\delta(u)$ sia zero sino ad un certo valore di $u$ che corrisponde alla superficie sferica, limite interno dell'involucro.

Sia P un punto posto nell'interno d'una sfera massiccia di densità costante 1 e di raggio $r$, e sia $l$ la distanza del centro da P.

La funzione potenziale della sfera, relativa a P, si sa essere

$$2\pi r^2 - \tfrac{2}{3}\pi l^2.$$

Se si imagina di togliere dall'interno di questa sfera un'altra sfera di centro e di raggio diversi da quelli della prima, ma contenente pur essa il punto P, detti $r_1$ e $l_1$ rispettivamente il raggio e la distanza di P dal centro di questa nuova sfera, la sua funzione potenziale relativa a P è

$$2\pi r_1^2 - \tfrac{2}{3}\pi l_1^2.$$

E quindi la funzione potenziale dell'involucro che rimane sarà

$$2\pi(r^2 - r_1^2) - \tfrac{2}{3}\pi(l^2 - l_1^2).$$

Ora se supponiamo che la superficie della prima sfera corrisponda al parametro $u$, e quella della seconda al parametro $u + du$, il potenziale dell'involucro infinitesimo, relativo al punto P interno ad esso, sarà dato dal differenziale rispetto ad $u$ dell'espressione precedente; cioè sarà

$$4\pi r \frac{dr}{du} du - \tfrac{4}{3}\pi l \frac{dl}{du} du.$$

Ovvero, per la natura di $l$, sarà

$$4\pi r \frac{dr}{du} du + \tfrac{4}{3}\pi(x - a)\frac{da}{du} du$$

la funzione potenziale dell'involucro relativa al punto interno P, quando la densità sia $= 1$. E se è $\delta(u)$ la densità dell'involucro, la funzione potenziale sarà

$$4\pi\delta(u)\left(r\frac{dr}{du} + \frac{x-a}{3}\cdot\frac{da}{du}\right)du.$$

Ciò premesso, se P è un punto posto nell'interno della massa sferica in considerazione, la cui densità varia per superficie sferiche eccentriche, esso si troverà sopra una di queste superficie, che supporremo corrispondenti al parametro $u$. Allora, riguardo a tutti gli staterelli interni alla superficie $u$, il punto è esterno, ed è invece interno riguardo a tutti i rimanenti. La funzione potenziale relativa all'insieme dei primi è

$$4\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\frac{r^2}{l}\left(\frac{dr}{du}+\frac{r}{3}\cdot\frac{x-a}{l^3}\cdot\frac{da}{du}\right)du;$$

e quella relativa all'insieme dei secondi sarà, ripetendo il ragionamento già fatto per ottenere la funzione potenziale relativa all'insieme degli involucri ora considerati

$$4\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\,r\frac{dr}{du}du+\tfrac{4}{3}\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)(x-a)\frac{da}{du}du.$$

Quindi la funzione potenziale di tutta la massa, relativa ad un punto di essa, ha la forma

$$V=4\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\frac{r^2}{l}\left(\frac{dr}{du}+\frac{r}{3}\cdot\frac{x-a}{l^3}\cdot\frac{da}{du}\right)du+$$
$$+4\pi\int_{u}^{u_1}\delta(u)\,r\frac{dr}{du}du+\tfrac{4}{3}\pi\int_{u}^{u_1}\delta(u)(x-a)\frac{da}{du}du.$$

Questa forma della $V$ si può applicare tanto ad una sfera massiccia quanto ad un involucro. Riguardo a quest'ultimo il punto può essere o nella cavità o nella massa od all'esterno. Indico con $V_{e'}$, $V_i$, $V_e$ rispettivamente le funzioni potenziali relative a questi tre casi.

Se $u'$ è il parametro della superficie interna dell'involucro, allora da $u_0$ ad $u'$ è $\delta=0$; e quindi

$$V_{e'}=4\pi\int_{u'}^{u_1}\delta(u)\,r\frac{dr}{du}+\tfrac{4}{3}\pi\int_{u'}^{u_1}\delta(u)(x-a)\frac{da}{du}du.$$

Sia ora il punto potenziato posto nella massa, e sia $u$ la superficie del sistema sul quale si trova. Allora, essendo sempre $\delta(u)=0$ da $u_0$ ad $u'$, si avrà

$$V_i=4\pi\int_{u'}^{u}\delta(u)\frac{r^2}{l}\left(\frac{dr}{du}+\frac{r}{3}\frac{x-a}{l^3}\frac{da}{du}\right)du+$$
$$+4\pi\int_{u}^{u_1}\delta(u)\,.\,r\frac{dr}{du}du+\tfrac{4}{3}\pi\int_{u}^{u_1}\delta(u)\,.\,(x-a)\frac{da}{du}du.$$

Finalmente, se il punto potenziato è nello spazio esterno, allora tra $u$ ed $u'$ la $\delta=0$; e, se $u''$ è l'ultima superficie sferica sulla quale $\delta$ non è zero, si ha

$$V_e=4\pi\int_{u'}^{u''}\delta(u)\,.\,\frac{r^2}{l}\left(\frac{dr}{du}+\frac{r}{3}\frac{x-a}{l^3}\cdot\frac{da}{du}\right)du.$$

Da queste formule si vede facilmente che le $V_{e'}$, $V_i$, $V_e$ si continuano l'una nell'altra.

Si è già veduto che per la $V_e$ è soddisfatta la condizione

$$\Delta_2 V_e = 0.$$

Deve essere altresì

$$\Delta_2 V_{e'} = 0.$$

Infatti, basta osservare che dei due integrali, che compongono la $V_{e'}$, l'uno non contiene le coordinate del punto potenziato e l'altro solamente la $x$ in modo esplicito; per cui se ne conclude che le derivate seconde sono singolarmente zero, e che quindi è pure

$$\Delta_2 V_{e'} = 0.$$

Invece, per la $V_i$ si deve verificare la condizione

$$\Delta_2 V_i = -4\pi\,\delta(u).$$

A tal fine, giova notare che, fissato il punto nell'interno della massa, resta determinata la superficie sferica del sistema sulla quale esso si trova. In altre parole, date le coordinate del punto potenziato, resta fissato il parametro $u$, che comparisce come limite d'integrazione; e perciò è funzione delle coordinate del punto.

Nella derivazione, occorrerà derivare non solo rispetto alle $x$, $y$, $z$ contenute nella funzione integranda, ma anche rispetto a quelle implicite in $u$; ossia bisognerà derivare l'integrale rispetto al limite $u$, e moltiplicare per le derivate di $u$ rispetto alle variabili $x$, $y$, $z$.

Ora, la derivata di un integrale rispetto ad uno dei limiti è, a meno del segno, ciò che diventa la funzione da integrarsi quando si dà alla variabile il valore del limite.

Nel caso presente, le quantità $r$ ed $l$, per il valore di $u$ corrispondente alla superficie sferica del sistema sulla quale è il punto potenziato, diventano eguali; e le derivate di $r$ e di $a$ rispetto ad $u$ assumeranno valori particolari, ed $a$ diverrà l'ascissa del centro della superficie sferica $u$.

Ciò premesso, formiamo le derivate seconde della $V_i$ rispetto alle $x$, $y$, $z$. Per comodità, indichiamo con A', B', C' le derivate prime di $V_e$ rispetto alle coordinate $x$, $y$, $z$ contenute nella funzione integranda, e con A'', B'', C'' le corrispondenti derivate seconde, che sono già state precedentemente determinate. Allora

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = \left(4\pi\,.\,\delta(u)\,.\,r\frac{dr}{du} + \tfrac{4}{3}\pi\,.\,\delta(u)\,.\,(x-a)\frac{da}{du}\right)\frac{\partial u}{\partial x} -$$

$$-\left(4\pi\,.\,\delta(u)\,.\,r\frac{dr}{du} + \tfrac{4}{3}\pi\,.\,\delta(u)\,.\,(x-a)\frac{da}{du}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+ A' + \tfrac{4}{3}\int_u^{u_1}\delta(u)\,.\,\frac{da}{du}\,du$$

ossia

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = A' + \tfrac{4}{3}\pi\int_u^{u_1}\delta(u)\cdot\frac{da}{du}\,du\,;$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} = -\left(4\pi . \delta(u) . r^2 \frac{x-a}{r^3} . \frac{dr}{du}\right) . \frac{du}{dx} +$$
$$+ \tfrac{4}{3}\pi . \delta(u) . r^3 \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3(x-a)^2}{r^5}\right) \frac{da}{du} . \frac{du}{dx} -$$
$$- \tfrac{4}{3}\pi . \delta(u) . \frac{da}{du} . \frac{\partial u}{\partial x} + A''$$

donde, riducendo, si ha

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} = -4\pi . \delta(u) . \frac{x-a}{r} . \frac{dr}{du} . \frac{\partial u}{\partial x} -$$
$$- 4\pi . \delta(u) . \frac{(x-a)^2}{r^2} . \frac{da}{du} . \frac{\partial u}{\partial x} + A''.$$

Analogamente si ottiene

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} = -4\pi . \delta(u) . \frac{y}{r} . \frac{dr}{du} . \frac{\partial u}{\partial y} - 4\pi . \delta(u) . \frac{(x-a)\,y}{r^2} . \frac{da}{du} . \frac{\partial u}{\partial y} + B''$$
$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2} = -4\pi . \delta(u) . \frac{z}{r} . \frac{dr}{du} . \frac{\partial u}{\partial z} - 4\pi . \delta(u) . \frac{(x-a)\,z}{r^2} . \frac{da}{du} . \frac{\partial u}{\partial z} + C''.$$

Ed osservando che si può porre

$$\frac{dr}{du} . \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \qquad \text{e} \qquad \frac{da}{du} . \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x};$$

ed analogamente

$$\frac{dr}{du} . \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad \frac{da}{du} . \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial y},$$
$$\frac{dr}{du} . \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} \qquad \text{e} \qquad \frac{da}{du} . \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial a}{\partial z},$$

sommando membro a membro le precedenti eguaglianze, si otterrà

$$\Delta_2 V_i = -4\pi . \delta(u) \left((x-a)\frac{\partial r}{\partial x} + y\frac{\partial r}{\partial y} + z\frac{\partial r}{\partial z}\right) . \frac{1}{r} -$$
$$- 4\pi . \delta(u) \left((x-a)\frac{\partial a}{\partial x} + y\frac{\partial a}{\partial y} + z\frac{\partial a}{\partial z}\right) . \frac{x-a}{r^2},$$

essendo

$$A'' + B'' + C'' = 0.$$

Si osservi inoltre che è

$$(x-a)^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

e che $a$ ed $r$ sono funzioni di $u$ e, per quanto si è osservato, funzioni di $x, y, z$.

Quindi, derivando una prima volta rispetto ad $x$, una seconda rispetto ad $y$ ed un'altra rispetto a $z$, si ha ordinatamente

$$-(x-a)\frac{\partial a}{\partial x} + (x-a) = r\frac{\partial r}{\partial x},$$
$$-(x-a)\frac{\partial a}{\partial y} + y = r\frac{\partial r}{\partial y},$$
$$-(x-a)\frac{\partial a}{\partial z} + z = r\frac{\partial r}{\partial z},$$

ovvero

$$(x-a)\frac{\partial a}{\partial x}=(x-a)-r\frac{\partial r}{\partial x},$$
$$(x-a)\frac{\partial a}{\partial y}=y-r\frac{\partial r}{\partial y},$$
$$(x-a)\frac{\partial a}{\partial z}=z-r\frac{\partial r}{\partial z}.$$

Si moltiplichino i membri di queste eguaglianze rispettivamente per $\frac{x-a}{r^2}$, $\frac{y}{r^2}$, $\frac{z}{r^2}$; si avrà

$$\frac{(x-a)^2}{r^2}\cdot\frac{\partial a}{\partial x}=\left(\frac{x-a}{r}\right)^2-\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{x-a}{r},$$
$$\frac{(x-a)\,y}{r^2}\cdot\frac{\partial a}{\partial y}=\left(\frac{y}{r}\right)^2-\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{y}{z},$$
$$\frac{(x-a)\,z}{r^2}\cdot\frac{\partial a}{\partial z}=\left(\frac{z}{r}\right)^2-\frac{\partial r}{\partial z}\cdot\frac{z}{r}.$$

Sommando membro a membro si ottiene

$$\frac{x-a}{r^2}\left((x-a)\frac{\partial a}{\partial x}+y\frac{\partial a}{\partial y}+z\frac{\partial a}{\partial z}\right)=1-\frac{1}{r}\left((x-a)\frac{\partial r}{\partial x}+y\frac{\partial r}{\partial y}+z\frac{\partial r}{\partial z}\right).$$

In virtù di questa relazione, si trova subito

$$\Delta_2 V_1=-4\pi\delta(u).$$

La V così trovata soddisfa quindi a tutte le condizioni richieste per essere una funzione potenziale; per cui ne concluderemo che la

$$V=4\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\frac{r^2}{l}\left(\frac{dr}{du}+\frac{r}{3}\cdot\frac{x-a}{l^2}\cdot\frac{da}{du}\right)du+$$
$$+4\pi\int_{u}^{u_1}\delta(u)\left(r\frac{dr}{du}+\frac{x-a}{3}\cdot\frac{da}{du}\right)du,$$

*è la funzione potenziale cercata.*

***

Si vede facilmente come essa comprenda come casi particolari quelli della sfera omogenea e della sfera la cui densità varia per sfere concentriche.

Infatti, nel caso della sfera omogenea, o di un involucro sferico omogeneo, la densità $\delta$ è costante, come pure $l$ ed $a$, ed il parametro $u$ si riduce ad $r$; ed allora

$$V=\frac{4\pi\delta}{l}\int_{r_0}^{l}r^2\,dr+4\,\pi\delta\int_{l}^{r_1}r\,dr.$$

E quindi per l'involucro sferico si ha

$$V=2\pi\,.\,\delta\,.\,r_1^2-\tfrac{2}{3}\pi\,.\,\delta\,.\,l^2-\tfrac{4}{3}\pi\frac{r^3}{l};$$

e per la sfera piena, essendo $r_0 = 0$, sarà

$$V = 2\pi\delta r_1^2 - \tfrac{2}{3}\delta l^2.$$

Nel caso in cui la densità varî per superficie sferiche concentriche, questa risulta funzione di $r$, rimanendo costanti $l$ ed $a$; e, poichè la variabile $u$ si riduce alla $r$, si avrà

$$V = \frac{4\pi}{l}\int_{r_0}^{l}\delta(r)\,.\,r^2 dr + 4\pi\int_{l}^{r_1}\delta(r)\,.\,r\,dr.$$

G. Repetto

*Sassari.*

---

# I NUMERI PERFETTI

**1.** La teoria dei numeri perfetti ha le sue basi in Euclide, nè deve sembrare assolutamente indegno che ci si occupi di essa, perchè, se pure possono essere un po' enfatiche le parole di Mersenne, il quale disse che chi trovasse altri numeri perfetti, oltre gli undici noti, avrebbe superata tutta l'analisi presente, non si deve dimenticare, come giustamente osserva il Lucas nella sua *Théorie des nombres*, che tale teoria « ha dato origine ai principali lavori « di Fermat e quindi all'Aritmetica superiore ».

Dicesi numero perfetto un numero che è uguale alla somma di tutti i suoi divisori, escluso tra questi il numero stesso: gli esempi più noti sono offerti dai primi due numeri perfetti che sono

$$6 = 1 + 2 + 3 \qquad e \qquad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Dalla definizione stessa risulta che un numero primo non può essere un numero perfetto: neppure una potenza d'un numero primo può essere un numero perfetto, poichè, se fosse $a$ un numero primo ed $a^n$ un numero perfetto, dovrebbe essere

$$a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1};$$

il che è assurdo perchè il secondo membro altro non è che $\dfrac{a^n - 1}{a - 1}$, quantità evidentemente minore di $a^n$.

Euclide (Libro IX, Prop. 36) enuncia per trovare i numeri perfetti questa regola: « Se a partire dall'unità si prendono successivamente tanti numeri « successivi in progressione geometrica di ragione 2 fino a che la loro somma « sia un numero primo, il prodotto di questa somma per l'ultimo termine « sarà un numero perfetto ». Si ottiene così come forma di un numero perfetto $(2^{n+1} - 1)2^n$ colla condizione che $2^{n+1} - 1$ sia primo.

Consideriamo infatti la progressione geometrica suddetta e supponiamo che

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

sia un numero primo.

Per dimostrare che in tal caso il numero $(2^{n+1}-1)2^n$ è un numero perfetto, osservo che i divisori di esso oltre all'unità e al numero stesso sono: il primo fattore, tutti i divisori del secondo fattore, esso compreso, e i prodotti del primo fattore per i divisori del secondo: la somma loro dunque è

$$2^{n+1}-1+1+2+2^2+\ldots+2^n+(2^{n+1}-1)2+(2^{n+1}-1)2^2+\ldots$$
$$\ldots+(2^{n+1}-1)2^{n-1}=(2^{n+2}-2)+2^n(2^{n+1}-1)-(2^{n+1}-1)2=(2^{n+1}-1)2^n.$$

Per avere i numeri perfetti basta dunque nella progressione detta cercare quei termini che diminuiti dell'unità dànno luogo a numeri primi: il prodotto di ognuno di essi per il termine precedente della progressione è un numero perfetto.

Negli esercizi di Fitz Patrick e Chevrel si giunge a questa formola per una via più generale che mostra come non esistono numeri perfetti del tipo $a^n b$ ove $a$ e $b$ sono numeri primi salvo che per i valori $a=2$, $b=(2^{n+1}-1)$ che ci dànno appunto i numeri perfetti trovati col metodo di Euclide. Anzi si può dimostrare più generalmente che ogni numero perfetto pari ha la forma di quelli trovati con tale metodo. Infatti ogni numero pari è del tipo

$$2^n a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$$

ove $a$, $b$, $c$ sono numeri primi e $n$ è un numero intiero non nullo.

I divisori di questo numero sono dati dai divisori dei singoli fattori e dai loro prodotti, onde la loro somma è

$$(1+2+2^2+\ldots+2^n)(1+a+a^2+\ldots+a^\alpha)(1+b+b^2+\ldots+b^\beta)(1+c+c^2+\ldots+c^\gamma)\ldots=$$
$$=(2^{n+1}-1)(1+a+a^2+\ldots+a^\alpha)(1+b+b^2+\ldots+b^\beta)(1+c+c^2+\ldots+c^\gamma)\ldots$$

Essendo il numero proposto un numero perfetto, dovrà essere uguale alla somma de' suoi divisori da cui si tolga esso stesso: cioè sarà

$$2^n a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots=$$
$$=(2^{n+1}-1)(1+a+\ldots+a^\alpha)(1+b+\ldots+b^\beta)(1+c+\ldots+c^\gamma)\ldots-$$
$$-2^n a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots$$

ossia

$$(2^{n+1}-1)a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots+a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots=$$
$$(2^{n+1}-1)(1+a+\ldots+a^\alpha)(1+b+\ldots+b^\beta)(1+c+\ldots+c^\gamma)\ldots$$

da cui si ricava

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots+\frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots}{2^{n+1}-1}=$$
$$=(1+a+a^2+\ldots+a^\alpha)(1+b+b^2+\ldots+b^\beta)(1+c+c^2+\ldots+c^\gamma).$$

Ma il secondo membro è un numero intero, onde tale deve essere anche il primo: sarà cioè $a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots$ divisibile per $(2^{n+1}-1)$. Il primo membro resta così ridotto a due soli termini: così sarà del secondo: i termini del secondo sono in numero di $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$ onde deve essere $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots=2$: perchè tale uguaglianza sussista, i numeri $\alpha$, $\beta$, $\gamma\ldots$ devono essere tutti nulli tranne uno (e sia $\alpha$) che deve valere 1.

Il numero cercato dunque è del tipo $2^n a$ ove $a$ è un numero primo. Siccome poi deve essere

$$2^n a=1+2+2^2+\ldots+2^n+a+2a+2^2a+\ldots+2^{n-1}a,$$

ossia

$$2^n a=(2^{n+1}-1)+(2^n a-a),$$

si ricava che deve essere $a = 2^{n+1} - 1$, onde si ottiene per ogni numero perfetto pari la formola nota di Euclide.

Volendo poi cercare i valori dell'esponente $n$ che servono per darci i numeri perfetti osserviamo che dovendo essere $(2^{n+1} - 1)$ un numero primo, tale dovrà essere anche $n + 1$ poi che se fosse $n + 1 = pq$ (essendo $p$ e $q$ numeri interi troveremmo

$$2^{n+1} - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^p - 1)[(2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + \ldots + 2^p + 1]$$

uguaglianza che mostra come $(2^{n+1} - 1)$ è divisibile per $(2^p - 1)$ e quindi non è primo. Tale condizione non è però sufficiente perchè ad esempio per il valore $n + 1 = 11$ si ha $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ ossia non si ha un numero primo. Per trovare i numeri perfetti si deve dunque, dando all'esponente $(n + 1)$ valori che siano numeri primi, vedere quali tra essi rendano primo il numero $(2^{n+1} - 1)$ e poi applicare la formola di Euclide. I primi numeri perfetti si ottengono dando ad $(n + 1)$ i valori

2; 3; 5; 7; 13; 17; 19; 31,

ossia sono i numeri

6; 28; 496; 8128; 33.550.336; 8.589.869.056;
137.438.691.328; 2.305.843.008.139.952.128.

Mersenne [1] afferma che i valori consecutivi di $(n + 1)$ che servono per avere numeri perfetti sono 67, 127, 257 e che nessun altro numero minore di 257 può dare numeri perfetti: sembra dunque che egli avesse un metodo per questa ricerca, che noi però non conosciamo. Il Lucas però crede in seguito a suoi lunghi calcoli, che neppure per $(n + 1) = 67$ si ottenga un numero perfetto. Egli enuncia anzi il teorema che, se il numero primo $(n + 1)$ è uguale a un multiplo di 4 diminuito di un'unità, e se $2n + 1$ è anche primo, il numero $(2^{n+1} - 1)$ è divisibile per $(2n + 1)$ e quindi non è primo e non dà luogo a numeri perfetti.

Quanto poi alle cifre con cui terminano i numeri perfetti ossserviamo che essendo quelli che noi consideriamo del tipo $2^n(2^{n+1} - 1)$ ove $(n + 1)$ è primo e quindi dispari, sarà $n$ pari, e quindi la formola generale di essi, escluso il numero 6 che si ha per $n = 1$ è $4^p(2 \times 4^p - 1)$ essendo $p = \frac{1}{2} n$. Osservo allora che le potenze $4^p$ per $p$ pari terminano per uno dei gruppi

16, 56, 96, 36, 76

nel qual caso il fattore $(2 \times 4^p - 1)$ termina rispettivamente per i gruppi

31, 11, 91, 71, 51

e il numero perfetto risultante per

96, 16, 36, 56, 76.

Le potenze $4^p$ per $p$ dispari terminano per

64, 24, 84, 44, 04

nel qual caso il fattore $(2 \times 4^p - 1)$ termina per

27, 47, 67, 87, 07

---

(1) Prefazione dei *Cogitata phisico-mathematica.* (Parigi, 1644.)

e il numero perfetto risultante sempre per 28. Abbiamo così che tutti i numeri perfetti dati dalla formola di Euclide (escluso il numero 6) terminano per uno dei gruppi di cifre 16, 28, 36, 56, 76, 96. Anzi nessun altro numero perfetto oltre a 496 termina per 96. (Vedi *Mathesis*, tomo IX.)

Una notevole proprietà di questi numeri perfetti si è che moltiplicandoli per 8 e aggiungendo al prodotto l'unità si ottiene un quadrato perfetto. Infatti

$$2^n(2^{n+1}-1)\times 8+1=(2^{2n+1}-2^n)2^3+1=(2^{n+2})^2-2\times 2^{n+2}+1=(2^{n+2}-1)^2.$$

**2.** Abbiamo sinora trovato la formola di Euclide che ci dà i numeri perfetti pari, e abbiamo anche dimostrato che ogni numero perfetto pari sodisfa alla formola di Euclide. Una questione che ha molto interessato tutti i matematici i quali si sono occupati di questo argomento, ma che finora non è stata risolta è quella della ricerca dei numeri perfetti impari.

Descartes credeva alla loro esistenza, come si rileva dal brano di una sua lettera a Frénicle in cui dice: « Io non so perchè crediate che non si potrebbe « giungere con questo mezzo a trovare un numero perfetto: se ne avete una « dimostrazione, confesso che essa è superiore alla mia capacità, e che la stimo « straordinariamente, perchè io per me credo che si possano trovare numeri « impari veramente perfetti ». (20 Dicembre 1638.)

Su questi eventuali numeri perfetti impari esiste un teorema il quale dice che se esistono numeri perfetti impari, essi sono del tipo $N=a^{4n+1}i^2$ ove $a$ è un numero primo e $i$ è un numero impari diverso da 1 e sia divisibile per $a$. Infatti sia $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ l'espressione del nostro numero perfetto N decomposto ne' suoi fattori primi. Posto

$$\begin{aligned} A&=1+a+a^2+\ldots+a^\alpha\,,\\ B&=1+b+b^2+\ldots+b^\beta\,,\\ C&=1+c+c^2+\ldots+c^\gamma\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

il prodotto ABC... dà tutti i divisori di N compreso N stesso: essendo N un numero perfetto, sarà

$$N=ABC\ldots-N \qquad \text{ossia} \qquad 2N=ABC\ldots..$$

Dovendo il prodotto ABC... diviso per 2 dare il numero impari N, tutti i suoi fattori devono essere impari, tranne uno, e sia A, che deve essere il doppio di un numero impari. Ma perchè

$$\begin{aligned} B&=1+b+b^2+\ldots+b^\beta\,,\\ C&=1+c+c^2+\ldots+c^\gamma\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

siano impari, occorre, essendo $b, c, \ldots$ e quindi le loro potenze numeri impari, che siano in numeri impari i termini di quelle somme, cioè che siano impari i numeri $\beta+1, \gamma+1, \ldots$. Così essendo $A=1+a+a^2+\ldots+a^\alpha$ un numero pari ma doppio di un numero impari, occorre che il numero $\alpha+1$ dei termini del secondo membro sia pari ma doppio di un numero impari, cioè che sia $\alpha+1=2[2n+1]$, onde $\alpha=4n+1$. Ricaviamo come espressione del numero perfetto $N=a^{4n+1}b^\beta c^\gamma \ldots$, ove $n$ è un numero intero e $\beta, \gamma \ldots$ sono numeri pari (zero incluso). Osserviamo però che i numeri $\beta, \gamma \ldots$ non possono essere tutti nulli contemporaneamente poichè in tal caso avremmo

$$N=a^\alpha=1+a+a^2+\ldots+a^\alpha=\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1},$$

onde $a^{a+1}-a=a^{a+1}-1$, ossia $a=1$ che darebbe $N=1$. Il prodotto $b^{\beta}c^{\beta}\dots$ è dunque il quadrato di un numero impari $i$ diverso da 1, e quando si ha come forma del numero perfetto $N=a^{4n+1}i^2$.

Nell'enunciato del teorema si è detto che $i$ non deve essere divisibile per $a$. poichè se $a$ dividesse $i$, dovrebbe dividere anche $b^{\beta}c\gamma\dots$, mentre tra i fattori primi di questo numero non compare il numero primo $a$. Osserviamo poi che siccome ogni numero impari, e perciò in particolare il numero $a$, elevato a un esponente del tipo $4n+1$ dà come risultato un numero del tipo $4q+1$, come è facile verificare, e che ogni quadrato di numeri impari, come sarebbe $i^2$, è pure del tipo $4q+1$, ne consegue che anche il numero perfetto impari $N=a^{4n+1}i^2$ è del tipo $4q+1$ ossia che non esistono numeri perfetti impari della forma $4q+3$.

Resta ancora a vedere tra i numeri impari del tipo $4q+1$ se esistono dei numeri perfetti e quali siano. Il teorema che abbiamo enunciato è dovuto a Lionnet,(1) il quale si limita a enunciarlo senza dimostrarlo: la dimostrazione che ne abbiamo data si trova nella *Théorie des nombres* di Lucas. Il Lionnet aggiunge inoltre, nè il Lucas lo dimostra, che il numero $a$ (primo e perciò impari) che può essere quindi del tipo $4q+1$ o $4q+3$ è del tipo $4q+1$.

**3.** Nella stessa nota il Lionnet oltre ai numeri perfetti di cui sinora ci siamo occupati, che egli chiama numeri perfetti di prima specie, introduce un'altra sorta di numeri perfetti, che dice di seconda specie, definendoli come quei numeri che sono uguali al prodotto di tutti i loro divisori esclusi se stessi: esempi di tali numeri sono

$$8=1\times2\times4;\quad 10=1\times2\times5;\quad 14=1\times2\times7;\quad 27=1\times3\times9,\ \text{ecc.}$$

Osserviamo anzi tutto a questo proposito che anche tra i numeri perfetti di seconda specie non ci può essere evidentemente nessun numero primo, che abbia per unico divisore diverso da sè, l'unità: vediamo invece se tra i numeri perfetti di seconda specie ne esista qualcuno che sia $n$-esima potenza di un numero primo, cioè se può darsi che sia, indicando con $p$ un numero primo,

$$p^n=1\cdot p\cdot p^2\dots p^{n-1};$$

affinchè ciò accada deve essere

$$1+2+3+\dots+(n-1)=n,$$

cioè $\dfrac{n(n-1)}{2}=n$ il che ci dà $n=3$.

Sono dunque numeri perfetti di seconda specie tutti i cubi dei numeri primi.

Indicando poi con $p$ e $p'$ due numeri primi diversi, vediamo se può essere numero perfetto di seconda specie un numero del tipo $app'$ ove $a$ è un intero qualunque. Se fosse $a>1$, allora $ap$ e $ap'$ dividerebbero entrambi il numero $app'$: ma il loro prodotto $a^2pp'$ supera il numero stesso, mentre ne sarebbe inferiore se fosse $a<1$: perchè dunque $app'$ sia un numero perfetto occorre che sia $a=1$: si ha dunque per i numeri perfetti di seconda specie, che non sono cubi di numeri primi, ancora la sola ipotesi che siano prodotti di due numeri primi disuguali. Essendo dunque $p$ e $p'$ numeri primi, i numeri perfetti di seconda specie sono della forma $p^3$ o della forma $pp'$.

(1) *Nouvelles Annales de Math.* Serie II, Anno 1879, pag. 306.

Volendo poi cercare se esistono numeri doppiamente perfetti, cioè numeri che siano somma e prodotto dei loro fattori, è chiaro che nessun numero perfetto di seconda specie del tipo $p^3$ può essere numero perfetto di prima specie, poi che i suoi fattori diversi da esso sono

$$1, p, p^2 \qquad \text{e} \qquad 1 + p + p^2 = \frac{p^3 - 1}{p - 1} < p^3.$$

Quanto poi ai numeri del tipo $pp'$, i loro fattori diversi dal numero stesso sono $1, p, p'$, affinchè sia $pp' = 1 + p + p'$, occorre che, siccome $p$ e $p'$ dividono il primo membro, dividano anche il secondo, ossia che dividano rispettivamente $(p' + 1)$ e $(p + 1)$. Dovrà dunque essere

$$p \leqq p' + 1; \qquad p' \leqq p + 1;$$

evidentemente non può darsi che in entrambi i casi si abbia il segno dell'uguaglianza: supponiamo dunque che sia $p < p' + 1$: allora, essendo $p$ e $p'$ diversi, sarà $p < p'$; dovendo essere anche $p' \leqq p + 1$ se ne deduce che è $p' = p + 1$; dunque $p$ e $p'$ sono numeri consecutivi; ma gli unici due numeri consecutivi e primi sono 2 e 3, onde il solo numero doppiamente perfetto è il numero 6.

4. Finora ci siamo, come in generale si è fatto da tutti gli autori in questa teoria, limitati al campo dei numeri naturali, cioè dei numeri interi e positivi; il Lionnet (1) estende anche ai numeri negativi la denominazione di numeri perfetti, ed osservando che al cambiare di segno di un numero, cambiano di segno anche i suoi divisori, mentre le loro somme e il loro prodotto conservano lo stesso valore assoluto, conclude che gli unici numeri doppiamente perfetti sono $0, +6, -6$.

Se non ci si limita però al campo dei numeri positivi, allora si possono considerare come divisori del numero non solo quei numeri interi tali che dividendo per essi il numero si ottenga come quoziente un numero intero positivo, come fa il Lionnet, ma anche quelli che dànno, quando si divida per essi il numero proposto, un quoziente intero negativo. Allora con ogni divisore di un numero viene a comparire anche il suo opposto; è chiaro che sotto questo punto di vista, siccome la somma dei divisori (numeri due a due opposti, escludendo tra i divisori del numero oltre al numero stesso il suo opposto uguale in valore assoluto) è nulla, non si ottiene nessun numero perfetto di prima specie ad eccezione di 0. Quanto ai numeri perfetti di seconda specie, indicando con $p$ un numero primo, è chiaro che affinchè sia $p^n$ un numero perfetto, dovrà essere

$$p^n = 1 \cdot p \cdot p^2 \cdot p^3 \ldots p^{n-1} \cdot (-1)(-p)(-p^2) \ldots (-p^{n-1}) = (-1)^n p^2 p^4 \ldots p^{2(n-1)},$$

dovrà quindi essere

$$2 + 4 + \ldots + 2(n-1) = n \qquad \text{ossia} \qquad n = n(n-1)$$

il che ci dà $n = 2$.

Per $n = 2$ l'uguaglianza è vera anche in segno, onde abbiamo che i quadrati dei numeri primi sono, sotto questo nuovo punto di vista, numeri perfetti di seconda specie.

Nè oltre ad essi ce ne sono altri, come sarebbe facile verificare ripetendo con le opportune modificazioni il ragionamento fatto più sopra, con cui il Lionnet giunge alla seconda forma dei numeri perfetti di seconda specie, prodotti di due numeri primi disuguali.

G. Giraud

*Torino.*

(1) In una nota alla memoria citata.

## Sull' indice minimo di N relativo a $p$.

**1.** Dato un numero A, un gruppo di cifre C ed un numero $p$ primo con la base del sistema di numerazione prescelto, ci proponiamo di determinare il minimo numero di volte che occorre scrivere a destra di A il gruppo C per avere un numero congruo ad A secondo il modulo $p$, e quindi, nel caso di A multiplo di $p$, un numero multiplo di $p$. Così potremo occuparci tra l'altro del teorema di Plateau, esposto nella forma più generale di cui sia suscettibile: dato nel sistema di numerazione a base $g$ un qualsiasi gruppo di cifre del sistema, e dato un numero $p$ primo con $g$, esistono infiniti multipli di $p$ che nel dato sistema si scrivono ripetendo quel gruppo, ossia scrivendo in seguito l'uno dell'altro gruppi di cifre identici al dato.

**2.** In quanto segue, dunque, $g$ è la base del sistema di numerazione prescelto, e $p$ è un qualsiasi numero primo con detta base. Con A e C rappresenteremo ordinatamente due gruppi di $\alpha$ e $\gamma$ cifre, nonchè, quando non c'è pericolo di equivoco, i numeri da essi gruppi rappresentati; con N il *numero* che si ottiene scrivendo, in seguito al gruppo A, infinite volte il gruppo C. Il simbolo $N_k$ (*ridotta k-esima* di N) starà a rappresentare il numero che si ottiene cancellando in N tutt'i *periodi* che vengono dopo il $k$-esimo, $k$ essendo un intero qualsiasi positivo. Col simbolo $N_0$ rappresenteremo il numero che si ottiene cancellando in N tutta la parte periodica, cosicchè $N_0$ è uguale ad A. Così, posto, per es.

$$N = 3425030303...$$

o più brevemente

$$N = 3425(03)$$

abbiamo

$$A = 3425; \quad C = 03; \quad \alpha = 4; \quad \gamma = 2;$$
$$N_0 = 3425; \quad N_1 = 342503; \quad N_2 = 34250303; \dots$$

Dunque nella *serie di ridotte*

$$N_0, \; N_1, \; N_2, \dots, N_k, \dots \tag{1}$$

ogni elemento si ottiene dal precedente scrivendo alla sua destra il periodo. Così che qualunque sia $i$ abbiamo

$$N_{i+1} = N_i g^{\gamma} + C. \tag{2}$$

**3.** *La congruenza.*

$$N_x - N_0 \equiv 0 \quad (\text{mod } p) \tag{3}$$

*ammette infinite soluzioni oltre quella evidente* $x = 0$.

1. Supponiamo che s'abbia $N_1 - N_0 \equiv 0$ (mod $p$) ossia

$$N_1 \equiv N_0 \quad (\text{mod } p). \tag{4}$$

Dalla (2) ricaviamo intanto le due eguaglianze

$$N_1 = N_0 g^\gamma + C; \qquad N_2 = N_1 g^\gamma + C$$

e da queste la congruenza

$$N_2 - N_1 \equiv (N_1 - N_0) g^\gamma \qquad (\mathrm{mod}\ p),$$

che per la (4) diventa $N_2 - N_0 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p)$.

Analogamente si proverebbe che, sempre rispetto al modulo $p$, han luogo le congruenze

$$N_3 - N_0 \equiv 0; \qquad N_4 - N_0 \equiv 0; \quad \text{ecc.}$$

Dunque è chiaro che se la data congruenza è soddisfatta da $x=1$, è pure soddisfatta da $x=k$, $k$ rappresentando un intero qualsiasi.

2. Supponiamo invece che non sia $N_1 - N_0 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p)$. Posto

$$r_i = \mathrm{rest}\,(N_i;\ p)$$

con $i = 0, 1, 2, \ldots$, possiamo subito scrivere

$$r_i \equiv N_i \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

e quindi, per la (2)

$$r_{i+1} \equiv r_i g^\gamma + C \qquad (\mathrm{mod}\ p) \tag{5}$$

qualunque sia l'intero $i$.

Per la fatta ipotesi i primi due elementi della serie

$$r_0,\ \ r_1,\ \ r_2,\ \ r_3, \ldots \tag{6}$$

sono disuguali; ma come i primi due, non possono *tutti* essere distinti, perchè sono minori di $p$, ed il numero degl'interi minori di $p$ è limitato. Supponiamo che il gruppo più esteso avente elementi tutti distinti sia il seguente

$$r_0,\ \ r_1, \ldots, r_{m-1}. \tag{7}$$

Sarà $r_m$ identico ad uno degli elementi di questo gruppo. Ma non può aversi $r_m = r_t$ con $t$ compreso fra 0 ed $m$, perchè, allora, siccome si hanno per la (5) le congruenze.

$$r_m \equiv r_{m-1} g^\gamma + C \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$
$$r_t \equiv r_{t-1}\ g^\gamma + C \qquad \text{»}$$

sottraendo membro a membro otterremmo la congruenza

$$0 \equiv (r_{m-1} - r_{t-1})\, g^\gamma \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

e quindi (dacchè $g^\gamma$ e $p$ sono primi fra loro) anche l'altra

$$0 \equiv r_{m-1} - r_{t-1} \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

da cui scaturirebbe l'eguaglianza $r_{m-1}=r_{t-1}$ con $t-1$ intero compreso fra $-1$ ed $m-1$, contraddicente all'ipotesi fatta sul gruppo (7).

Dunque non può essere che questo soltanto: $r_m = r_0$. Ed ora, sol che si ripensi al calcolo ricorrente degli elementi della serie (6), si capirà subito come in questa si ripetano all'infinito e nello stesso ordine gli elementi del gruppo (7).

Da ciò scende immediatamente che l'elemento $r_i$ è uguale ad $r_0$ per gl'infiniti valori di $i$ multipli di $m$, e per essi soltanto. In altri termini si ha $N_i - N_0 \equiv 0 \pmod p$ per gl'infiniti valori di $i$ multipli di $m$, e per essi soltanto. Il teorema resta così esaurientemente dimostrato.

Osservazione. — La minima radice non nulla della congruenza $N_x - N_0 \equiv 0 \pmod p$ verrà indicata con $\lambda$, e godrà, in quanto segue, di una parte importantissima. A $\lambda$ daremo il nome di minimo indice di N relativo a $p$. Dunque per *indice minimo di* N *relativo a* p intendiamo il grado della minima ridotta di N congrua ad $N_0$ secondo il modulo $p$.

**4.** Pensando che $N_x$ si ottiene scrivendo $x$ volte di seguito il gruppo C di $\gamma$ cifre a destra di $N_0$, possiamo subito scrivere

$$N_x = N_0 g^{x\gamma} + C(1 + g^\gamma + g^{2\gamma} + \ldots + g^{(x-1)\gamma})$$

ovvero

$$N_x = N_0 g^{x\gamma} + C \frac{g^{x\gamma} - 1}{g^\gamma - 1}. \tag{8}$$

Ciò posto, l'indice minimo di N relativo a $p$, ossia il numero $\lambda$, essendo la minima radice della congruenza $N_x - N_0 \equiv 0 \pmod p$, è anche, per la (8), la minima radice della congruenza

$$N_0 g^{x\gamma} + C \frac{g^{x\gamma} - 1}{g^\gamma - 1} - N_0 \equiv 0 \qquad \pmod p$$

che con facile trasformazione diventa

$$\frac{g^{x\gamma} - 1}{g^\gamma - 1}(C + N_0 g^\gamma - N_0) \equiv 0 \qquad \pmod p$$

e poi, per via dell'uguaglianza $C + N_0 g^\gamma = N_1$, assume la forma

$$\frac{g^{x\gamma} - 1}{g^\gamma - 1}(N_1 - N_0) \equiv 0 \qquad \pmod p. \tag{9}$$

Se $N_1 - N_0$ è multiplo di $p$, qualunque numero intero evidentemente soddisfa la congruenza (9), e quindi la minima sua soluzione è 1 (cfr. § 3). Siffatto valore dunque è determinabile senz'altro. Supponendo invece che $N_1 - N_0$ non sia multiplo di $p$, il m. c. d. di $N_1 - N_0$ e $p$ sarà diverso da $p$; chiamiamolo $\rho$. Alla congruenza (9) si potrà sostituire la sua equivalente

$$\frac{g^{x\gamma} - 1}{g^\gamma - 1} \equiv 0 \qquad \left(\mathrm{mod}\ \frac{p}{\rho}\right). \tag{10}$$

Dunque: o $\lambda$, indice minimo di N relativo a $p$, è 1, ovvero è la radice minima della congruenza (10).

Osservazione 1ª. — Tutte le alterazioni nella grandezza dei gruppi A e C che, lasciando intatto $\gamma$, non alterano il m. c. d. di $N_1 - N_0$ e $p$, lasciano invariato $\lambda$; perchè, o quel m. c. d. è $p$, ed allora sarà sempre $\lambda = 1$, ovvero è minore di $p$, ed allora $\lambda$ è la minima radice della congruenza

$$\frac{g^{x\gamma}-1}{g^{\gamma}-1} \equiv 0 \qquad \left(\mathrm{mod}\ \frac{p}{\rho}\right)$$

che dipende soltanto da $\gamma$ e da $\rho$.

Osservazione 2ª. — Quando $g^{\gamma}-1$ e $\frac{p}{\rho}$ fossero primi fra loro, $\lambda$ com'è radice minima della (10) sarebbe anche radice minima della congruenza $g^{x\gamma}-1 \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ \frac{p}{\rho}\right)$, equivalente alla (10). Ma, pel teorema di Fermat, tra i valori di $x\gamma$ è $\varphi\left(\frac{p}{\rho}\right)$; dunque $\lambda$ sarebbe divisore di $\varphi\left(\frac{p}{\rho}\right)$.

**5.** Se la radice minima della congruenza

$$\frac{g^{x\gamma}-1}{g^{\gamma}-1} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p) \tag{11}$$

è $2d$, $d$ non sarà radice della stessa, ossia $\frac{g^{d\gamma}-1}{g^{\gamma}-1}$ non sarà multiplo di $p$. Cosicchè, se $p$ si suppone primo, sarà $\frac{g^{d\gamma}-1}{g^{\gamma}-1}$ primo con $p$ e quindi, avendosi per ipotesi

$$\frac{g^{2d\gamma}-1}{g^{\gamma}-1} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p),$$

ossia

$$\frac{(g^{d\gamma}+1)(g^{d\gamma}-1)}{g^{\gamma}-1} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

si avrà pure

$$g^{d\gamma}+1 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)\,.$$

Dunque se $p$ è primo e $\lambda$ è pari, $\frac{\lambda}{2}$ è radice della congruenza $g^{x\gamma}+1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p)$. Nel caso che oltre ad essere $p$ primo e $\lambda$ pari, fosse $g^{\gamma}-1$ non multiplo di $p$ e quindi primo con esso, $\frac{\lambda}{2}$ sarebbe la minima radice di detta congruenza. Difatti se per $\mu < \frac{\lambda}{2}$ si avesse $g^{\mu\gamma}-1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p)$, si avrebbero, secondo lo stesso modulo $p$, le seguenti congruenze

$$g^{\mu\gamma} \equiv 1\,; \quad g^{2\mu\gamma} \equiv 1\,; \quad g^{2\mu\gamma}-1 \equiv 0\,; \quad \frac{g^{2\mu\gamma}-1}{g^{\gamma}-1} \equiv 0$$

ossia $2\mu$ (minore di $\lambda$) sarebbe radice della (11) il che contraddice alla ipotesi

**6.** *Se è* $\frac{p}{\rho} = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_k$ *con* $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ *primi fra loro a due a due, e se* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ *sono le radici minime della*

$$\frac{g^{x\gamma}-1}{g^{\gamma}-1} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ y) \tag{$\omega$}$$

*per* $y = p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$, *sarà* $\lambda = m.\,m.\,c.\,(\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_k)$ *la radice minima della* $(\omega)$ *per* $y = \frac{p}{\rho}$.

Per quanto è stato detto alla pag. 2, la differenza $N_\lambda - N_0$ è multipla di ciascuno dei numeri $p_1, p_2, \ldots, p_k$, e quindi del loro prodotto $\frac{p}{\rho}$. Non può poi essere $N_\mu - N_0$ multiplo di $\frac{p}{\rho}$ per $\mu < \lambda$ perchè sarebbe $N_\mu - N_0$ multiplo di ciascuno dei numeri $p_1, p_2, p_3, \ldots p_k$, divisori di $\frac{p}{\rho}$, e quindi sarebbe $\mu$ multiplo comune degl'indici minimi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, contrariamente all'ipotesi che pone

$$\lambda = \text{m. m. c.}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k).$$

Dunque $\lambda$ è la minima radice non nulla della congruenza

$$N_x - N_0 \equiv 0 \left(\text{mod}\,\frac{p}{\rho}\right)$$

ossia dell'altra

$$\frac{g^{x\gamma} - 1}{g^\gamma - 1} \equiv 0 \qquad \left(\text{mod}\,\frac{p}{\rho}\right). \tag{12}$$

**7.** *Dette* $\delta$ *e* $\lambda$ *ordinatamente le minime radici delle congruenze*

$$\frac{g^x - 1}{g - 1} \equiv 0 \quad (12) \quad \text{e} \quad \frac{g^{x\gamma} - 1}{g^\gamma - 1} \equiv 0 \quad \left(\text{mod}\,\frac{p}{\rho}\right) \tag{13}$$

a) *se* $\gamma$ *è multiplo di* $\delta$, *sarà* $\lambda = \frac{p}{\rho}$, *qualunque sia la natura di* $\frac{p}{\rho}$;

b) *se* $\gamma$ *non è multiplo di* $\delta$ *ed è* $\frac{p}{\rho}$ *numero primo, sarà*

$$\lambda = \frac{\text{m. c. m.}\,(\gamma; \delta)}{\gamma}.$$

1°. Difatti dall'ipotesi $\frac{g^\delta - 1}{g - 1} \equiv 0 \left(\text{mod}\,\frac{p}{\rho}\right)$ scende la congruenza $g^\delta - 1 \equiv 0 \left(\text{mod}\,\frac{p}{\rho}\right)$, e quindi l'altra $g^\gamma - 1 \equiv 0 \left(\text{mod}\,\frac{p}{\rho}\right)$, per via di $\gamma$ multiplo di $\delta$ e quindi di $g^\gamma - 1$ multiplo di $g^\delta - 1$. Detto $m$ un intero qualsiasi, si hanno adesso, successivamente, secondo lo stesso modulo $\frac{p}{\rho}$, le congruenze

$$g^{m\gamma} - 1 \equiv 0; \qquad g^{m\gamma} \equiv 1; \qquad \sum_{m=0}^{m=x-1} g^{m\gamma} = x.$$

Ne viene che è

$$\frac{g^{x\gamma} - 1}{g^\gamma - 1} \equiv 0 \qquad \left(\text{mod}\,\frac{p}{\rho}\right)$$

solo se è $x$ multiplo di $\frac{p}{\rho}$. Dunque la minima radice non nulla della (13) è $\frac{p}{\rho}$; si ha cioè $\lambda = \frac{p}{\rho}$.

2°. Se $\gamma$ non è multiplo di $\delta$, siccome le radici della (12) sono tutte multiple della minima $\delta$, fra esse non è compreso $\gamma$, cioè il quoto $\frac{g^\gamma - 1}{g-1}$ non è multiplo di $p$. Ma per ipotesi $p$ è primo; dunque $\frac{g^\gamma - 1}{g-1}$ e $p$ sono primi fra loro, ed alla (13) possiamo sostituire la congruenza ad essa equivalente.

$$\frac{g^{x\gamma}-1}{g^\gamma - 1}\cdot\frac{g^\gamma - 1}{g-1}\equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ \frac{p}{\rho}\right),\quad \text{ossia}\quad \frac{g^{x\gamma}-1}{g-1}\equiv 0\left(\mathrm{mod}\ \frac{p}{\rho}\right). \tag{14}$$

Per tanto $\lambda$, che per ipotesi è la radice minima della (13), è anche radice minima della (14). Possiamo così dire che $\lambda\gamma$ è radice della (12) e quindi è multiplo di $\delta$; ma $\lambda$ è il minimo valore di $x$ che soddisfa la (14); dunque nella serie dei multipli di $\gamma$

$$0, \gamma, 2\gamma, 3\gamma, \ldots, \lambda\gamma, \ldots$$

è $\lambda\gamma$ il primo multiplo di $\delta$, cioè $\lambda\gamma$ è il m. c. m. di $\gamma$ e $\delta$, e quindi si ha

$$\lambda = \frac{\text{m.c.m.}(\gamma\,;\,\delta)}{\gamma}.$$

**8.** Le cose dette al § 3 restano anche vere per $N_0 = 0, C = 1, \gamma = 1$, nel qual caso è

$$N_x = 1 + g + g^2 + g^3 + \ldots + g^{x-1}$$

e la congruenza

$$N_x - N_0 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

diventa

$$1 + g + g^2 + \ldots + g^{x-1} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p).$$

In altri termini possiamo asserire che qualunque siano $a$ e $p$, purchè primi fra loro, detta $(a)_x$ la somma delle prime $x$ potenze successive di $a$, a cominciare da quella ad esponente 0, ossia posto

$$(a)_x = a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \ldots + a^{x-1} = \frac{a^x - 1}{a-1} \tag{15}$$

la congruenza

$$(a)_x \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p^i)$$

per qualsiasi valore di $i$ ammette infinite soluzioni oltre quella evidente $x = 0$: esse sono eguali agl'infiniti multipli della soluzione minima, che indicheremo col simbolo $m_i$.

**9.** Introducendo il simbolo definito dalla (15), l'eguaglianza evidente

$$\frac{a^r - 1}{a-1}\cdot\frac{a^{rs}-1}{a^r - 1} = \frac{a^{rs}-1}{a-1}$$

diventa

$$(a)_r \cdot (a^r)_s = (a)_{rs}, \tag{16}$$

formola che utilizzeremo fra breve.

**10.** Si noti che qualunque siano gl'interi $i$ e $k$, dei quattro numeri seguenti

$$a^{km_i}-1, \qquad a^{m_i}-1, \qquad \frac{a^{m_i}-1}{a-1}=(a)_{m_i}, \qquad p^i,$$

ognuno è multiplo del seguente, e quindi il primo è multiplo dell'ultimo, cosicchè abbiamo

$$a^{km_i}-1\equiv 0 \qquad (\text{mod } p^i)$$

donde

$$a^{km_i}\equiv 1 \qquad (\text{mod } p^i).$$

Facendo assumere a $k$ successivamente i valori $0, 1, 2, \ldots, s-1$, con $s$ arbitrario, e sommando le $s$ congruenze che ne risultano abbiamo infine

$$(a^{m_i})_s\equiv s \qquad (\text{mod } p^i), \tag{17}$$

altra formola di cui presto faremo uso.

**11.** Ci proponiamo ora di trovare una relazione fra le radici minime $m_t$ ed $m_{t+1}$ nella ipotesi di $p$ primo. Si osservi innanzi tutto che tutte le radici della congruenza $(a)_x\equiv 0$ (mod $p^{t+1}$) sono anche radici della congruenza $(a)_x\equiv 0$ (mod $p^t$); per la qual cosa, ricordando quanto abbiamo osservato nel § 8, è $m_{t-1}$ multiplo di $m_t$.

Ed ora osserviamo che o è $m_{t+1}=m_t$, e la relazione è bell'e trovata; o è $m_{t+1}\neq m_t$, e si tratta di determinare il valore del coefficiente $\nu>1$ nella eguaglianza

$$m_{t+1}=\nu m_t.$$

Per ipotesi $m_{t+1}$, e quindi $\nu m_t$ è la minima radice di

$$(a)_x\equiv 0 \qquad (\text{mod } p^{t-1})$$

e quindi $\nu$ è la minima radice di

$$(a)_{xm_t}\equiv 0 \qquad (\text{mod } p^{t+1})$$

che per la (16) è equivalente all'altra

$$(a)_{m_t}(a^{m_t})_x\equiv 0 \qquad (\text{mod } p^{t+1}). \tag{18}$$

Si noti adesso: 1° che il m. c. d. di $(a)_{m_t}$ e $p^{t+1}$, essendo $p$ numero primo, è della forma $p^r$, con $r\leq t+1$; 2° che essendo, per ipotesi, diverse le radici minime delle due congruenze

$$(a)_x\equiv 0 \qquad (\text{mod } p^t)$$

e

$$(a)_x\equiv 0 \qquad (\text{mod } p^{t+1}),$$

$(a)_{m_t}$ è multiplo di $p^t$ ma non di $p^{t+1}$; 3° che per tanto il detto m. c. d. è proprio $p^t$. Alla congruenza (18) resta così equivalente la congruenza

$$(a^{m_t})_x\equiv 0 \qquad (\text{mod } p). \tag{19}$$

E $\nu$ radice minima della (18) sarà quindi anche radice minima della (19). Ma questa è $p$, perchè la (17) mostra che $(a^{m_i})_s\equiv s$ (mod $p^i$), congruenza che ci permette di asserire che $(a^{m_t})_s$ diventa multiplo di $p$ per $s=p, 2p, \ldots$

Abbiamo dunque dimostrato che $\nu = p$ e quindi che

$$m_{t+1} = pm_t.$$

**12.** Dimostreremo adesso che se $m_t$ ed $m_{t+1}$ sono disuguali $m_{t+2}$ è diverso da $m_{t+1}$, e quindi è $m_{t+2} = pm_{t+1}$.

Per l'osservazione fatta al § 8, $m_{t+2}$ è multiplo di $m_t$; mentre per l'ipotesi fatta, essendo già $m_{t+1}$ diverso da $m_t$, questo non potrà essere uguale ad $m_{t+2}$. In altri termini possiamo scrivere

$$m_{t+2} = sm_t \qquad \text{con } s \text{ intero}, > 1.$$

Ciò posto, la (16) permette di scrivere

$$(a)_{m_{t+2}} = (a)_{sm_t} = (a)_{m_t} \,.\, (a^{m_t})_s \,.$$

Ma è $(a)_{m_{t+2}}$ multiplo di $p^{t+2}$ ed è $p^t$ la massima potenza di $p$ contenuta in $(a)_{m_t}$ perchè per ipotesi è $m_t \neq m_{t+1}$; dunque in $(a^{m_t})_s$ il $p$ dev'essere contenuto almeno alla seconda potenza. Si ha così

$$(a^{m_t})_s \equiv 0 \qquad (\text{mod } p^2).$$

Dimostreremo che per $s=p$ la precedente congruenza è assurda. Così dalla diversità di $s$ e $p$ scenderà quella dei prodotti $pm_t$ ed $sm_t$, ossia dei numeri $m_{t+1}$ ed $m_{t+2}$, che è lo scopo al quale si mira.

Dei tre numeri

$$a^{m_t} - 1, \qquad \frac{a^{m_t}-1}{a-1} = (a)_{m_t}, \qquad p^t$$

ognuno è multiplo del seguente, quindi il primo è multiplo dell'ultimo, e si hanno successivamente le congruenze

$$a^{m_t} - 1 \equiv 0 \quad (\text{mod } p^t)\,; \qquad a^{m_t} \equiv 1 \quad (\text{mod } p^t).$$

Possiamo per tanto porre

$$a^{m_t} = 1 + \rho p^t$$

con $\rho$ intero non nullo.

Dovendo mostrare che non può essere $(a^{m_t})_p \equiv 0)$ (mod $p^2$) dobbiamo mostrare dunque che non può aversi

$$(1+\rho p^t)_p \equiv 0 \qquad (\text{mod } p^2). \tag{20}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}
&(1+\rho p^t)^0 = 1\\
&(1+\rho p^t)^1 = 1 + \rho p^t\\
&(1+\rho p^t)^2 = 1 + 2\rho p^t + \rho^2 p^{2t}\\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&(1+\rho p^t)^{p-1} = 1 + \binom{p-1}{1}\rho p^t + \binom{p-1}{2}\rho^2 p^{2t} + \ldots + \binom{p-1}{p-1}\rho^{p-1} p^{(p-1)t}.
\end{aligned}$$

Sommando membro a membro queste $p$ eguaglianze, e ricordando che nel triangolo di Tartaglia un numero posto nella colonna $h$-esima e nella linea $k$-esima è la somma di tutt'i numeri delle linee precedenti, posti nella colonna $(h-1)$-esima, si ha

$$(1+\rho p^t)_p = \sum_{i=0}^{i=p-1} \binom{p}{i+1} \rho^i p^{it}.$$

Ora si noti che, $p$ essendo primo, $\binom{p}{i+1}$ è uguale a $p$ per $i=0$, ad un multiplo non nullo di $p$ per $i<p-1$, e ad 1 per $i=p-1$. Dunque nel secondo membro dell'ultima eguaglianza troviamo come primo termine $p$, come ultimo $\rho^{p-1}p^{(p-1)t}$; e tutti gli altri sono multipli di $p^2$ per via dei coefficienti multipli di $p$ e di $t$ che non può essere minore di 1.

Nella congruenza (20) possono sopprimersi detti termini multipli del modulo $p^2$, cosicchè in ultima analisi si ha da dimostrare assurda la congruenza

$$p+\rho^{p-1}p^{(p-1)t} \equiv 0 \qquad (\text{mod } p^2).$$

Noi mostreremo assurda perfino quest'altra

$$p+\rho^{p-1}p^{(p-1)t} \equiv 0 \qquad (\text{mod } p).$$

È evidente che solo se si verificassero contemporaneamente le seguenti relazioni essa sarebbe possibile, se si avesse cioè

$$a) \qquad (p-1)t=1; \qquad 1+\rho^{p-1} \equiv 0 \qquad (\text{mod } p).$$

Le condizioni $a)$ si trasformano nelle seguenti

$$p-1=1;\ t=1; \qquad 1+\rho \equiv 0 \qquad (\text{mod } p)$$

e quindi nelle altre

$$p=2; \qquad t=1; \qquad \rho = \text{numero dispari}.$$

Si ricordi adesso che abbiam posto $a^{m_t}=1+\rho p^t$, e che nel caso di $t=1$ e $p=2$ si avrebbe $\rho=\dfrac{a^{m_1}-1}{2}$. Si noti ancora che dovendo $a$ essere primo con $p$, nel caso di $p=2$ dovrebbe $a$ essere dispari, e quindi sarebbe $1+a$ numero pari, si avrebbe cioè $a^0+a^1=(a)_2\equiv 0$ (mod. $p$), donde verrebbe $m_1=2$. Per tanto possiamo asserire che le relazioni $a)$ valgono le seguenti

$$t=1; \quad p=2; \quad \frac{a^2-1}{2} = \text{numero dispari}.$$

L'ultima non può *mai* verificarsi perchè, essendo $a$ dispari, i numeri $a+1$ ed $a-1$ sono entrambi pari, e quindi è pari il numero

$$\frac{a^2-1}{2}=\frac{a-1}{2}(a+1).$$

*Riassumendo:* Nella serie $m_1, m_2, m_3, \ldots$, radici minime della congruenza

$$(a)_x \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^y)$$

per $y=1, 2, 3, \ldots$, se due elementi consecutivi sono diseguali, *tutti* gli elementi che seguono questi sono diseguali, e ciascuno è uguale al prodotto del precedente per $p$.

Per tanto, se ammettiamo che i primi $t$ elementi di detta serie abbiano un comune valore, ed il $(t+1)$-esimo abbia valore diverso, possiamo scrivere

$$m_{t+1}=m_1p=m_1p\,;\quad m_{t+2}=m_{t+1}p=m_1p^2;\quad m_{t+3}=m_{t+2}p=m_1p^3\,;\ldots$$

Si ha cioè, in generale

$$m_k=m_1\frac{p^k}{p^t}$$

e quindi il teorema: *La minima radice della congruenza*

$$(a)_x\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^k),$$

*se* p *è primo è uguale al prodotto della minima radice* $m_1$ *della congruenza*

$$(a)_x\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

*pel quoziente di* $p^k$ *per* $p^t$, *che è la massima potenza di* p *contenuta in* $(a)_{m_1}$.

**13.** In quanto segue ci occupiamo del procedimento da seguire per calcolare l'indice minimo di N relativo ad un qualsiasi numero $p$.

Se $N_1-N_0$ è multiplo di $p$, il chiesto indice minimo è 1.

Nel caso contrario noi sappiamo (§ 4) che detto indice minimo è la minima radice di

$$\frac{g^{x\gamma}-1}{g^\gamma-1}\equiv 0 \qquad \left(\text{mod. } \frac{p}{\rho}\right) \tag{21}$$

con

$$\rho=\text{m. c. d. }(N_1-N_0\,;\ p).$$

Scomposto $\frac{p}{\rho}$ nei suoi fattori primi, supponiamo d'aver trovato

$$\frac{p}{\rho}=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_t^{a_t}.$$

Pel teorema del § 6 è subito calcolabile la radice minima della (21) se son note le radici minime della

$$\frac{g^{x\gamma}-1}{g^\gamma-1}\equiv 0 \qquad (\text{mod. } y) \qquad (\text{per } y=p_1^{a_1}\,;\ p_2^{a_2}\,;\ldots) \tag{22}$$

che, per quanto abbiam detto qui sopra, sono ricavabili dalle radici minime della (22) per $y=p_1\,;\ p_2\,;\ldots;\ p_t$.

Infine il § 7 suggerisce un semplice procedimento per calcolare questi ultimi valori in funzione delle radici minime della congruenza

$$\frac{g^x-1}{g-1}\equiv 0 \qquad (\text{mod. } y) \tag{23}$$

per $y=p_1\,;\ p_2\,;\ldots;\ p_t$.

(A questa congruenza è equivalente l'altra $g^x - 1 \equiv 0$ (mod. $y$) se $y$ è primo con $g-1$).

Si tratta in fondo, come si vede, di conoscere la radice minima di

$$1 + g + g^2 + g^3 + \ldots + g^{x-1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } y)$$

per $y$ eguale ad un numero primo, ossia il minimo numero di volte che bisogna scrivere di seguito la cifra 1 per avere, nel sistema a base $g$, un numero multiplo di detto numero primo.

Dalle cose dette in questo paragrafo scende che, scelto un sistema di numerazione, poniamo di base $g$, se in una tavola di numeri primi scrivessimo, accanto ad ogni numero primo, il numero che esprime quante volte (al minimo) bisogna scrivere di seguito la prima cifra significativa del sistema per avere un numero multiplo di esso numero primo, s'avrebbe quanto basterebbe pel calcolo immediato dell'indice minimo di N corrispondente a qualsiasi numero $p$, i cui fattori primi fossero compresi nella tavola.

Nota: per $g = 10$ e per $y$ diverso da 2, 3, 5 le radici minime della (23) coincidono con i numeri " $n$ " del Bettini (vedasi il tomo XII, a. 1897 del *Periodico di Matematica*, e specialmente la tavola del § 8).

**14.** Esercizio. — *Quante volte, nel sistema di numerazione decimale, in seguito a 292 bisogna scrivere il gruppo 045 per avere il minimo numero congruo a 292 secondo il modulo* $p = 3^4 \times 7^3 \times 11^6$?

Qui è $\gamma = 3$; $N_1 - N_0 = 292045 - 292 = 291753 = 3^2 \times 7 \times 11 \times 421$;

$\rho = \text{m. c. d.}\,(N_1 - N_0 ; p) = 3^2 \times 7 \times 11$; $\quad \dfrac{p}{\rho} = 3^2 \times 7 \times 11^5$.

La congruenza

$$\frac{g^x - 1}{g - 1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } y).$$

per $y = 3 ; 7 ; 11$ ha per radici minime ordinatamente i numeri 3, 6, 2. Ed allora le radici minime della congruenza

$$\frac{g^{3x} - 1}{g^3 - 1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } y) \tag{24}$$

per $y = 3 ; 7 ; 11$ sono ordinatamente (§ 7)

$$3 ; \quad \frac{\text{m. m. c. } (3 ; 6)}{3} = 2 ; \quad \frac{\text{m. m. c. } (3 ; 2)}{3} = 2.$$

Per tanto, e pel § 11, le radici minime della (24) per $y = 3^2 ; 7 ; 11^5$ sono ordinatamente

$$\frac{3^2}{3} . 3 = 3^2 ; \qquad 2 ; \qquad \frac{11^5}{11} . 2 = 11^4 . 2 .$$