IL PROBLEMA GENERALE DEGLI OROLOGI SOLARI PIANI RISOLUTO TRIGONOMETRICAMENTE

1. — Osservazioni generali e note bibliografiche.

La gnomonica è stata coltivata, almeno nei tempi passati, più come problema geometrico che analitico; ed è naturale perchè le questioni di cui essa si occupa sono per natura loro essenzialmente grafiche in quanto i resultati relativi agli orologi solari finiscono sempre per tradursi in linee. Del resto il metodo grafico è anche il più indicato per rendere accessibile a coloro che non sono molto versati nella matematica, una scienza che ebbe in passato molti e valenti cultori. Alla maggior parte degli antichi costruttori di orologi solari bastavano poche norme pratiche, e per essi la parte teorica poteva limitarsi a quanto può essere strettamente necessario a far distinguere le diverse specie di quadranti e a fornire le principali nozioni intorno ad essi.

È ciò che succede, del resto, per tutte le questioni quando scendono dal campo teorico a quello pratico; così, per es., anche oggi non tutti i costruttori di meccanismi cronometrici sentono il bisogno di avere il vasto corredo di cognizioni teoriche di un Huyghens, di un Berthoud o di altri. Ma se la gnomonica grafica è più intuitiva dell'analitica, presenta, per altro, lo svantaggio che le costruzioni non sorrette da elementi numerici, vengono a mancare, in generale, di quel rigore che specialmente oggi, è richiesto in tutti gli strumenti destinati a fornire resultati sperimentali.

Numerosi sono i libri antichi e moderni sulla gnomonica grafica, e tutti, in modo più o meno esplicito, trattano la questione come un problema di geometria descrittiva cercando le intersezioni *(linee orarie)* del quadro coi diversi piani orari passanti per l'estremità dello *gnomone*. Procedono generalmente dai casi più semplici *(orologio orizzontale* ed *equinoziale)* ai più complicati (quadro comunque posto rispetto all'orizzonte), e in quelle trattazioni ove si oltrepassano i limiti della gnomonica piana, vengono studiati gli orologi solari sopra cilindri (colonne), coni ed altre superficie ancora. In molti trattati tutte le regole esposte sono accompagnate dalle relative dimostrazioni geometriche, in altri, invece, si dànno solamente le istruzioni pratiche che non sempre, o per il desiderio di riuscire semplici e facili o per la scarsa competenza dell'autore, possono dirsi veramente complete ed esatte. Limitandomi ai principali autori che hanno trattato la gnomonica grafica sotto qualche aspetto speciale, ricorderemo:

1°. *Cristoforo Clavio,* (1) che nel suo volume di oltre 650 pagine, in 4° grande, di fitta composizione, tratta la gnomonica piana come problema geometrico di astronomia sferica. Nell'ottavo libro si occupa ancora di speciali strumenti gnomonici trasportabili. Tale opera ha servito di guida alla maggior parte dei trattatisti posteriori.

2°. *J. Mollett,* (2) che studia gli orologi solari su di un piano e su di una superficie cilindrica come problema di Geometria descrittiva. Il metodo è buono teoricamente e praticamente.

3°. *C. Burali-Forti,* (3) che fa della gnomonica un'elegante applicazione della Geometria proiettiva.

Il calcolo, applicato alla costruzione degli orologi solari, fa conseguire, lo abbiamo già detto, maggiore precisione nei resultati, ed è per ciò che in tempi a noi più vicini la gnomonica ha cominciato a trattarsi come problema analitico nel quale conservando, naturalmente, alla quistione il fondamento geometrico, si è cercato al tempo stesso di rafforzarla col sussidio delle formule matematiche e del calcolo numerico. Non accennerò, neppure per il solo titolo, ai molti libri che trattano la questione degli orologi solari sotto l'aspetto ora detto. Limitandomi ad alcuni autori italiani ricorderò fra i più recenti:

Prof. A. Abetti, *Teorica e pratica della costruzione di un orologio solare.* Vienna, 1876.

G. Frassi, *Manuale per la costruzione degli orologi solari.*

Ing. E. Gallarati, *Metodi semplici per segnare la retta oraria del mezzogiorno* ecc. Milano, Galli, 1872.

E. Schenck, *Orologio solare universale a tempo medio.* Milano, Hoepli, 1891.

Ing. A. Roncalli, *Esercizi di Gnomomica.* Bergamo, Ist. Italiano d'Arti Grafiche, 1896.

Prof. M. Rajna, *L'ora esatta dappertutto.* Milano, Hoepli, 1897.

Quanto alla gnomonica analitica propriamente detta, la bibliografia non è così ricca come la precedente. Non sono a mia conoscenza che i due lavori seguenti:

(1) *Gnomonices,* Libri octo ecc. Romae, Franciscus Zanettum MDLXXX.
(2) *Gnomonique grafique.* Paris, Bachellier, 1837.
(3) *Gnomonica grafica.* Loescher, 1889.

1°. J. Mollet, in una seconda parte del suo libro di *Gnomonica grafica,* precedentemente ricordato, e che intitola *Gnomonica analitica,* si propone di risolvere, col sussidio della sola analisi, questo problema generale:

Trouver les intersections des cercles horaries avec une surface donnée.

A tale scopo ponendo l'origine nel punto in cui l'asse del mondo (centro dell'orologio solare) incontra il piano dell'orizzonte, prende per assi coordinati cartesiani la verticale, la meridiana e la direzione Est Ovest, indi combinando l'equazione generale dei piani orari con quella del quadro perviene alla determinazione delle linee orarie.

Tali linee resultano determinate da espressioni della forma

$$x = y \,.\, \mathrm{F}$$

ove F è una funzione della latitudine e degli elementi che determinano la posizione del quadro, e x ed y le coordinate correnti della linea oraria, di guisa che sarà

$$\mathrm{tg}\, \mathrm{V} = \frac{x}{y} = \mathrm{F}$$

essendo V l'angolo che detta linea forma colla meridiana. Nella esposizione teorica l'Autore segue il cammino graduato e progressivo cominciando dai casi più semplici. Tutta la trattazione conserva però un carattere piuttosto teorico anzichè pratico ed i resultati trovati non sono illustrati da alcun esempio numerico. Le formule, specialmente pel caso generale, resultano alquanto complicate e poco adatte al calcolo. Dopo la gnomonica piana passa a trattare degli orologi solari su di una superficie curva limitandosi però a considerare il solo caso delle superficie di 2° ordine.

2°. Il sig. F. Guarducci, (1) (già Ingegnere all'Istituto Geografico Militare ed ora professore di *Geodesia* all'Università di Bologna) seguendo pure il metodo analitico prende per assi la verticale e due direzioni ortogonali qualunque sul piano dell'orizzonte ponendo l'origine nella estremità dello stilo. Dato poi il quadro per la sua equazione e stabilita quella del raggio che congiunge la posizione del Sole (definita dalla distanza zenitale e dal suo azimut) determina, per ciascuna ora della giornata e per tre epoche dell'anno (solstizio invernale, equinozio, e solstizio estivo) l'intersezione di questo raggio col quadro. Dopo ciò le rette che passano per ogni terna di punti (uno di essi serve di controllo all'esattezza del calcolo) rappresentano le diverse linee orarie. Questo metodo, per altro, (anche non considerando il caso generale di un quadro comunque posto rispetto all'orizzonte pel quale le formule si complicano maggiormente) è eccessivamente lungo tantochè per una sola linea oraria

(1) "Sul calcolo dei quadranti solari", *Rivista di Topografia e Catasto,* 1894.

e col sussidio di un'apposita tavola, il calcolo comprende quasi una intera pagina di stampa.

In complesso può dirsi che se dal punto di vista teorico la geometria analitica rende assai semplice la soluzione del problema gnomonico, non altrettanto può dirsi dal lato pratico della quistione giacchè le formule trovate conducono sempre ad un calcolo lungo e laborioso.

Passati così in rapida rassegna i diversi modi di trattare la teorica degli orologi solari, voglio occuparmi, in ciò che segue, del medesimo problema riguardandolo come una quistione di astronomia e di trigonometria sferica.

Questo metodo, che mi sembra preferibile sia dal lato teorico che da quello pratico, è già stato seguito da altri, (1) però per quanto io mi sappia, non sotto la forma più generale possibile. In questo scritto ci occuperemo pertanto, del problema gnomonico su di un piano qualunque rispetto all'orizzonte; dalle formule generali dedurremo poi quelle relative a tutti i casi speciali; vedremo come la costruzione rispetto ad un quadro qualunque possa sempre ridursi a quella su di un quadro orizzontale; infine applicheremo le formule all'effettivo calcolo numerico di un orologio solare su di un piano comunque posto. Procurerò di dare all'esposizione il massimo ordine e la maggior chiarezza possibile servendomi, a tale scopo, di una ben appropriata figura; infine, per comodità del lettore, verranno riassunte, ad esposizione teorica compiuta, tutte le formule necessarie pel calcolo numerico delle varie specie di orologi solari piani.

S'intende che in questo scritto vengono tralasciate, per brevità, tutte le definizioni, perchè si suppone che il lettore sia al corrente con tutta la terminologia gnomonica e con quella che si riferisce ai primi principi dell'astronomia sferica.

Prima però di cominciare dovrei rispondere al dubbio che il mio lettore, molto probabilmente, avrà già sollevato intorno alla odierna utilità degli orologi solari; ma di ciò mi sono già occupato in altro scritto (2) al quale rimando il lettore. Limitandomi qui alle conclusioni dirò solamente che pur riconoscendo la perduta importanza sotto l'aspetto pratico di quasi tutta la gnomonica, tuttavia non si può disconoscere come dal lato teorico essa possa essere sempre coltivata come utile esercizio di trigonometria e astronomia sferica e come applicazione di moltissime nozioni di geografia astronomica.

---

(1) V. per es. AMANTE, *Elementi di Geodesia*. Libro III *(Geogr. matem.)*, pag. 7-10. Napoli, 1847.

(2) "Quale importanza possa ancor oggi conservare la gnomonica". *Rivista Geografica Italiana*. Questo articolo che doveva esser pubblicato fin dallo scorso giugno, è stato rimandato, per ragioni indipendenti dall'autore, al fascicolo del prossimo ottobre.

2. — Risoluzione del problema generale degli orologi solari piani.

Sia O (fig. 1) il centro della sfera celeste; NESW l'orizzonte del luogo del quale N, E, S, W rappresentano i punti cardinali e Z lo zenit. Sia inoltre HE'H'W' un circolo massimo qualunque il cui piano viene assunto come *quadro* dell'orologio solare. La posizione di tale piano, rispetto all'orizzonte, può essere individuata per mezzo della *declinazione d*, ossia dell'angolo che la sua traccia E'W' sull'orizzonte fa colla direzione Est-Ovest, e dalla *inclinazione i*, ossia dall'angolo

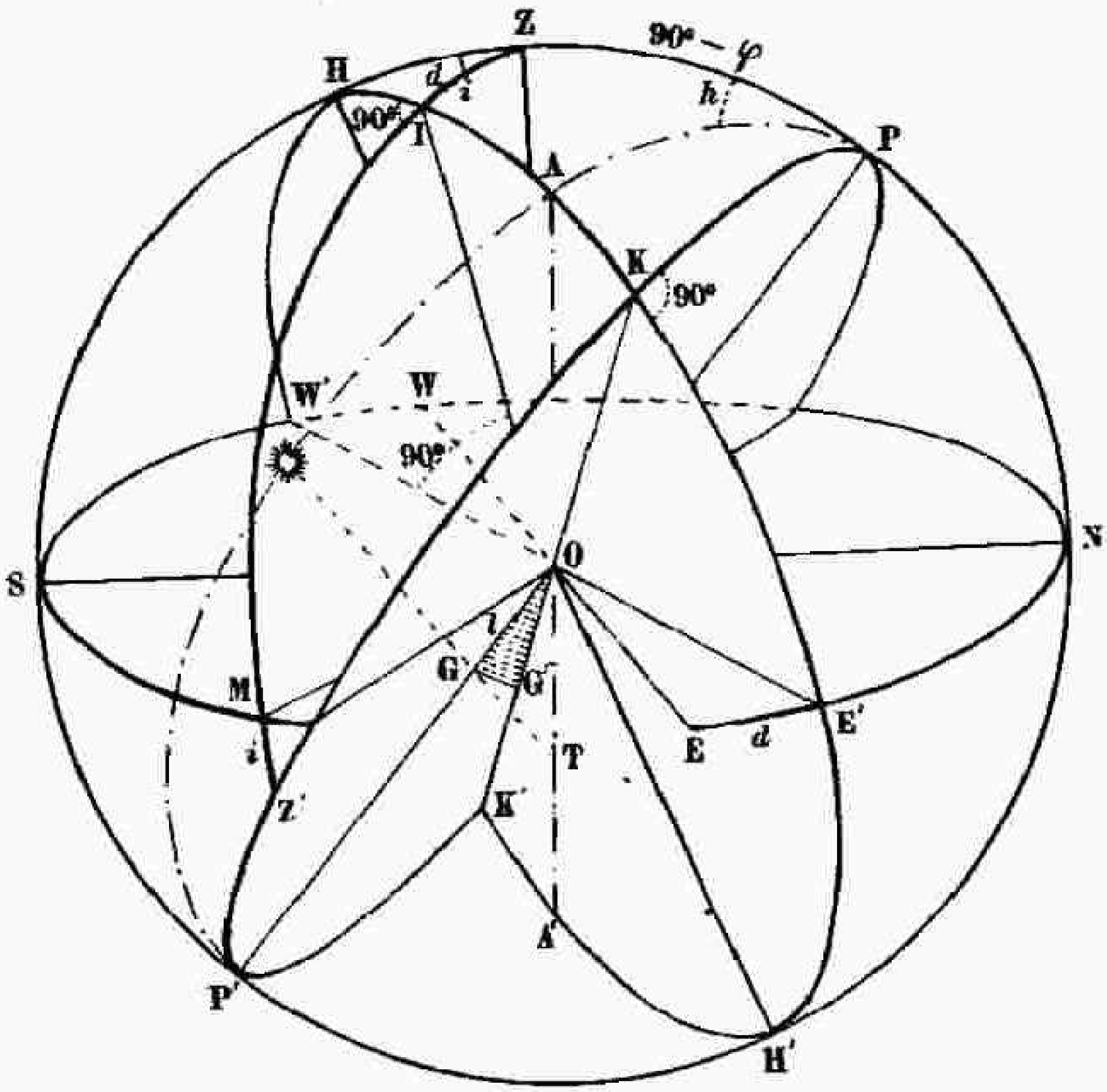

Fig. 1.

che esso piano fa colla verticale del luogo. Sia PP' l'asse del mondo di cui la traccia O sul quadro rappresenta il *centro orario* dell'orologio solare; la porzione OG di esso verrà assunto come direzione e lunghezza dello stilo. La traccia KK' del circolo orario PKP'K', perpendicolare al quadro, è la *substilare*, ed il triangolo OGG', rettangolo in G, è il *triangolo gnomonico* di cui il cateto $OG = l$ è il cosiddetto *stilo* o *gnomone*. Ciò premesso osserviamo che la completa costruzione di un orologio solare su di un piano qualunque, richiede la determinazione dei seguenti elementi:

1°. Linea meridiana;
2°. Substilare;
3°. Angolo che l'asse del mondo fa col quadro;
4°. Linee orarie;
5°. Lunghezza dello stilo e *coniche di declinazione*;
6°. Ore di illuminazione solare del piano del quadro.

Soli dati del problema sono la latitudine φ del luogo e gli elementi che determinano la posizione del *quadro*. Alla conoscenza di quest'ultimi si arriva determinando:

1°. La direzione di una orizzontale del *quadro* e susseguentemente quella della perpendicolare ad essa la quale, come è noto, rappresenta una linea di *massima pendenza* del quadro stesso. Tanto l'orizzontale (W'E') che la perpendicolare (IO) verranno condotte per un punto O scelto in modo conveniente come centro del quadro.

2°. La *declinazione d* della orizzontale, cioè l'angolo che essa fa colla direzione Est-Ovest.

3°. La *inclinazione i* della perpendicolare IO, ossia l'angolo che essa fa colla verticale del luogo.

Noi però non ci occuperemo del modo pratico di effettuare queste determinazioni e perciò rimandiamo il lettore alle pubblicazioni che ne trattano. (1)

Tutte le costruzioni relative all'orologio solare saranno riferite alla orizzontale e alla linea di massima pendenza del quadro, o, secondo le circostanze, a qualche altra linea già definita rispetto ad esse.

E dopo ciò veniamo a risolvere successivamente tutte le quistioni enunciate sopra.

1°. *Tracciamento della meridiana* HH'. Basterà determinare l'angolo HOI o, ciò che è lo stesso, l'arco HI del triangolo ZHI rettangolo in I e che ha l'angolo in Z eguale alla declinazione d (2) e ZI eguale alla inclinazione i del quadro. Da tale triangolo si ricava subito

$$\mathrm{tg\,HI} = \mathrm{sen}\, i \,\mathrm{tg}\, d\,;$$

2°. *Tracciamento della substilare* KK'. Può ottenersi determinando l'angolo K'OH' che essa fa colla meridiana o, ciò che è lo stesso, determinando l'arco HK del triangolo sferico HKP rettangolo in K, mediante la relazione

$$\mathrm{tg\,KH} = \cos \widehat{\mathrm{H}}\ \mathrm{tg\,PH}\,.$$

L'angolo in H e la parte HZ del lato PH sono incogniti; ma dal triangolo rettangolo ZIH, già considerato nella questione precedente,

---

(1) V. per es., GUARDUCCI, pubbl. cit.

(2) Per altre posizioni del quadro, l'angolo HZI può risultare eguale a $180° - d$, come nell'esempio numerico riportato in fondo al presente lavoro.

si ricava subito che $\cos H = \cos i \operatorname{sen} d$ e dopo ciò la precedente può scriversi

$$\operatorname{tg} KH = \cos i \operatorname{sen} d \cot(\varphi - ZH)$$

che servirà a ricavare il valore di HZ.

3°. *Angolo GOG' dell'asse del mondo col quadro.* Si trova determinando l'angolo che OP' fa colla substilare OK' (ossia determinando l'arco PK come cateto del triangolo sferico rettangolo PKH precedentemente considerato) per mezzo della formula

$$\operatorname{sen} PK = \operatorname{sen} H \operatorname{sen}(PZ + ZH) = \operatorname{sen} H \cos(\varphi - ZH)$$

i valori di H e ZH essendo noti dalle relazioni precedenti.

4°. *Linee orarie.* Consideriamo un circolo orario qualunque PA facente l'angolo h col meridiano PZS del luogo; la sua traccia AA' sul quadro è la linea oraria corrispondente di cui la posizione resulterà determinata per mezzo dell'angolo A'OK' che esso forma colla substilare. L'ampiezza di tale angolo è quella dell'arco KA che può ottenersi dal triangolo sferico rettangolo PKA mediante la relazione

$$\operatorname{tg} KA = \operatorname{sen} PK \operatorname{tg}(HPK - h)$$

nella quale PK è già stata determinata e l'angolo HPK si ottiene dal solito triangolo rettangolo PKH per mezzo della formula

$$\cot HPK = \operatorname{tg} H \cos PH.$$

5°. *Lunghezza dello stilo e coniche di declinazione.* Le indicazioni orarie di un orologio solare resultano tanto più precise quanto più lo stilo è lungo; è quindi utile riconoscere qual è la maggiore lunghezza che esso può assumere compatibilmente colle dimensioni del quadro. La precisione delle dette indicazioni potrà rendersi anche maggiore quando sul quadro sieno tracciate le cosiddette curve di declinazione, ossia le linee che l'estremità dell'ombra solare dello stilo descrive durante le diverse giornate; tali curve non sono altro che le sezioni prodotte dal quadro sulle superficie coniche che hanno per vertice l'estremità dello stilo e per direttrici i vari circoli diurni descritti dal Sole. [1] La loro determinazione può farsi per punti cercando l'intersezione di ogni linea oraria col raggio luminoso che passa per la posizione del Sole e per l'estremità dello stilo. Chiamando l la lunghezza dello stilo e T la traccia del raggio luminoso sul quadro, è chiaro che essendo OT un lato del triangolo GOT di cui è noto l'altro lato $OG = l$, l'angolo in $G = 90 + \delta$ e l'angolo GOT, misurato dall'arco PA, avremo

$$OT = \frac{l \cos\delta}{\cos(\delta + PA)}$$

---

[1] Generalmente si tracciano sul quadrante solamente le curve di declinazione che corrispondono all'entrata del Sole nei vari segni zodiacali, e che alcuni distinguono col nome di *archi diurni dei segni*.

essendo PA fornito dal triangolo sferico rettangolo APK mediante la relazione

$$\cot \mathrm{PA} = \frac{\cos(\mathrm{HPK} - h)}{\operatorname{tg} \mathrm{PK}}.$$

Esaminiamo alcuni casi particolari.

1°. La lunghezza m dell'ombra meridiana si otterrà prendendo $\mathrm{PA} = \mathrm{PH} = 90^\circ - \varphi + \mathrm{HZ}$ e quindi

$$m = -\frac{l \cos \delta}{\operatorname{sen}(\delta - \varphi + \mathrm{HZ})}.$$

2°. La minima ombra per un dato valore di δ, si otterrà col minimo di PA e quindi col massimo di $\cos(\mathrm{HPK} - h)$, ossia quando sarà $\mathrm{HPK} = h$, e quindi $\mathrm{PA} = \mathrm{PK}$, il che porta a concludere che l'ombra è minima sulla substilare. Il valore μ di questo minimo è dato perciò da

$$\mu = \frac{l \cos \delta}{\cos(\delta + \mathrm{PK})}.$$

Da quanto precede si conclude che la substilare è asse maggiore di tutte le coniche di declinazione.

3°. La lunghezza ε dell'ombra equinoziale, per un'ora qualunque, è data da

$$\varepsilon = \frac{l}{\cos \mathrm{PA}} = \frac{l}{\cos \mathrm{PK} \,.\, \cos \mathrm{KA}} = \frac{e}{\cos \mathrm{KA}},$$

essendo $e = \frac{l}{\cos \mathrm{PK}}$ la minima ombra equazionale. La relazione precedente, posta sotto la forma $e = \varepsilon \cos \mathrm{KA}$, ci dice che l'estremità dell'ombra dello stilo descrive nel giorno dell'equinozio, una retta *(equinoziale)* che è perpendicolare alla substilare.

Le formule precedenti ci dànno implicitamente, la soluzione della quistione di trovare la massima lunghezza dello stilo compatibilmente colle dimensioni del quadro, e ci permettono di fissare la posizione più conveniente del centro orario in relazione alla grandezza del quadro stesso. È sottinteso che la condizione delle ombre dello stilo cadenti interamente sul quadro, è richiesta solo per le poche ore circumsubstilari che sono quelle che dànno indicazioni di maggiore precisione. Quelle corrispondenti alle ore più lontane vanno assumendo lunghezze sempre maggiori fino a diventare infinitamente lunghe.

6°. *Ore di illuminazione solare del piano del quadro.*

Ad eccezione del piano parallelo all'orizzonte ognuna delle due faccie di un piano qualunque π risulterà necessariamente illuminata dal Sole in qualche ora e giorno dell'anno. Infatti, l'equatore celeste taglia il circolo di orizzonte nei punti E, W (fig. 1) e il circolo celeste corrispondente a π nei punti p, p' [1] di cui l'uno è sempre al disopra e l'altro al disotto dell'orizzonte. È quindi chiaro che nelle

[1] Questi punti, come pure gli altri E_1W_1, E_2W_2 dei quali è parola più sotto, non appariscono disegnati nella fig. 1.

epoche equinoziali il Sole transitando per p o p' cessa di illuminare una faccia di π per incominciare ad illuminare l'altra. Negli altri giorni dell'anno il cerchio diurno del Sole taglia l'orizzonte secondo le rette E_1W_1, E_2W_2, ... tutte parallele ad EW, e quindi se la declinazione d della traccia di π è maggiore della massima amplitudine ortiva od occidua che il Sole può acquistare durante l'anno sull'orizzonte del luogo, il piano π sarà, per tutto l'anno, illuminato per alcune ore del giorno da una parte e per le rimanenti ore dall'altra. Se invece quella declinazione fosse minore dell'amplitudine, l'illuminazione di π, dipendentemente dal valore di i, o si effettuerà per alcuni giorni dell'anno da una parte e pei rimanenti in parte da un lato e in parte dall'altro, oppure due periodi distinti di giorni, pei quali la illuminazione ha luogo da parti opposte, sono separati da un altro periodo di giorni nei quali la illuminazione ha luogo dalle due parti. Vediamo ora come possa esprimersi analiticamente la condizione affinchè resulti illuminata l'una o l'altra faccia del quadro.

A tale scopo chiamando δ la declinazione del Sole in un dato giorno dell'anno, è chiaro che il quadro sarà illuminato dalla parte australe o della boreale, secondochè la porzione PA di circolo orario è minore o maggiore della distanza polare del Sole, ossia di $90-\delta$; nel caso di $PA=90-\delta$ i raggi solari radono le due faccie del quadro.

Ma riguardo alla quistione di cui ora ci occupiamo non volendo entrare in minuti particolari, ci limiteremo a determinare gli istanti in cui il Sole traversa il piano del quadro, dopo di che sarà facile ricavare, caso per caso, in quali ore il detto quadro è illuminato da una parte e in quali dall'altra. Per una tale questione basta dunque trovare gli angoli orari contati da PK, che corrispondono all'istante in cui il Sole trovasi sul piano del quadro e che perciò soddisfano alla relazione

$$\cos(\mathrm{HPK}-h)=\mathrm{tg}\,\delta\,\mathrm{tg}\,\mathrm{PK}\,.$$

S'intende poi che l'illuminazione del quadro è subordinata alla condizione che il Sole si trovi sopra l'orizzonte; quindi gli angoli orari ricavati dalla formula precedente debbono risultare minori di quelli corrispondenti ai punti E' e W'. Si può anche osservare che l'intervallo di tempo durante il quale o l'una o l'atra parte del quadro è esposta ai raggi solari, resta naturalmente divisa per metà dall'ora rappresentata dalla substilare KK', quando, ben inteso, si prescinda dal piano dell'orizzonte giacchè l'interposizione di questo può far cessare l'illuminazione del quadro innanzi tempo.

Ma la questione relativa alla illuminazione solare del quadro può essere considerata anche sotto un altro aspetto.

Infatti, indicando per l'orizzonte di latitudine φ, il semiarco diurno del Sole con α, e con δ la declinazione corrispondente per un dato giorno dell'anno, avremo intanto

$$\cos\alpha=-\,\mathrm{tg}\,\delta\,\mathrm{tg}\,\varphi\,;$$

e analogameate essendo φ' l'altezza del Polo sul piano del quadro e α' il semiarco diurno del Sole rispetto al quadro nello stesso giorno dell'anno, sarà

$$\cos\alpha' = -\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi'.$$

Detta poi h la differenza fra il mezzogiorno e l'ora corrispondente alla substilare e α_h e α'_h i semiarchi diurni precedentemente trovati tradotti in tempo, si riconosce subito che $\alpha'_h + h$ e $\alpha'_h - h$ rappresenteranno rispettivamente le ore locali alle quali il quadro, indipendemente dall'orizzonte, comincerà o cesserà di essere illuminato. Ma quando si tenga conto dell'ostacolo che alla detta illuminazione può presentare l'orizzonte, è chiaro che la durata della illuminazione sarà rappresentata per le ore antimeridiane e per le pomeridiane rispettivamente dal più piccolo dei valori delle due coppie di espressioni

$$(\alpha'_h + h \quad \text{e} \quad \alpha) \qquad \text{e} \qquad (\alpha'_h - h \quad \text{e} \quad \alpha).$$

Si osservi che le due relazioni $\cos(\mathrm{HPK} - h) = \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\mathrm{PK}$ e $\cos\alpha' = -\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\varphi'$, sono identiche perchè appunto si ha $\alpha' = \mathrm{HPK} - h$, e φ' non differisce da PK che per il segno.

E con ciò abbiamo completamente esaurito quanto ci eravamo proposti di dire intorno alla parte teorica degli orologi solari piani su di un piano comunque posto rispetto all'orizzonte. Ci rimarrebbe ora da applicare queste formule generali all'effettivo calcolo di un orologio solare, ma prima è opportuno vedere quali modificazioni esse subiscano per le diverse specie di orologi piani. A tale scopo sarà utile di raccogliere sistematicamente queste formule nel modo che appressso:

I. — *Elementi dati* φ, d, i.

II. — *Elementi ausiliari ricavati dal triangolo* ZIH

(1) $\cos \mathrm{H} = \cos i \operatorname{sen} d$

(2) $\cot \mathrm{ZH} = \cot i \cos d.$

III. — *Elementi ausiliari tratti dal triangolo* PKH

(3) $\mathrm{PH} = \mathrm{PZ} + \mathrm{ZH} = (90 - \varphi) + \mathrm{ZH} = 90 - (\varphi - \mathrm{ZH})$

(4) $\cot \mathrm{HPK} = \operatorname{tg}\mathrm{H} \operatorname{sen}(\varphi - \mathrm{ZH}).$

IV. — *Elementi costituenti l'orologio solare*

(5) Meridiana $\operatorname{tg}\mathrm{HI} = \operatorname{sen} i \operatorname{tg} d$

(6) Substilare $\operatorname{tg}\mathrm{KH} = \cos i \operatorname{sen} d \cot(\varphi - \mathrm{ZH})$

(7) Posizioni dello stilo $\operatorname{sen}\mathrm{PK} = \operatorname{sen}\mathrm{H}\cos(\varphi - \mathrm{ZH}).$

(8) Linee orarie $\operatorname{tg}\mathrm{KA} = \operatorname{sen}\mathrm{PK}\operatorname{tg}(\mathrm{HPK} - h)$

V. — *Lunghezze d'ombra dello stilo*

(9) Formula generale
$$\begin{cases} \mathrm{OT} = \dfrac{l\cos\delta}{\cos(\delta + \mathrm{PA})} & (9)' \\[2ex] \cot\mathrm{PA} = \dfrac{\cos(\mathrm{HPK} - h)}{\operatorname{tg}\mathrm{PK}} & (9)'' \end{cases}$$

(10) Ombra meridiana $$m = -\frac{l\cos\delta}{\operatorname{sen}(\delta - \varphi + \mathrm{ZH})}$$

(11) Ombra minima $$\mu = \frac{l\cos\delta}{\cos(\delta + \mathrm{PK})}$$

(12) Ombra minima equinoziale $$e = \frac{l}{\cos \mathrm{PK}}.$$

VI. — *Illuminazione del quadro*

(13) Arco diurno sul quadro $\cos(\mathrm{HPK}-h) = \cos\alpha' = \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\mathrm{PK}$ (13)'
" " sull'orizzonte $\cos\alpha = -\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi$ (13)''

Il senso secondo il quale sono contati i diversi valori sarà sempre quello indicato dai corrispondenti elementi geometrici della figura 1. In ciò che segue adotteremo le seguenti distinzioni per le varie specie di orologi solari per le quali ci asterremo dal dare le definizioni corrispondenti che il lettore può facilmente trovare da sè.

I. **Orizzontali.**

II. **Verticali**
- 1° Diretti
  - Australi
  - Boreali
- 2° Meridiani
  - Orientali
  - Occidentali
- 3° Declinanti
  - Orientali
  - Occidentali.

III. **Inclinati**
- 1° Equinoziali
  - Australi
  - Boreali
- 2° Polari
  - A) *Diretti*
    - Superiori
    - Inferiori
  - B) *Declinanti*
    - Superiori
      - Occidentali
      - Orientali
    - Inferiori
      - Orientali
      - Occidentali
- 3° A traccia orizzontale in direzione meridiana
  - Superiori
    - Orientali
    - Occidentali
  - Inferiori
    - Orientali
    - Occidentali
- 4° Declinanti
  - Superiori
    - Orientali
      - Boreali
      - Australi
    - Occidentali
      - Boreali
      - Australi
  - Inferiori
    - Orientali
      - Boreali
      - Australi
    - Occidentali
      - Boreali
      - Australi.

Ed ora vediamo per ognuno di questi orologi solari, che cosa divengano le formule generali le quali, per ogni caso che esamineremo, verranno sempre notate collo stesso numero d'ordine col quale sono state precedentemente distinte.

I. — **Orologio orizzontale** $i = 90°$; d, indeterminato

(1) $H = 90°$

(2) $ZH = 90°$

(3) $PH = 180° - \varphi$

(4) $HPK = 0$

(5) $H1$ indeterm.

(6) $KH = 0$

(7) $PK = 180° - \varphi$

(8) $\operatorname{tg} KA = - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} h$

(9) $\begin{cases} OT = \dfrac{l \cos \delta}{\cos(\delta + PA)} \\ \cot PA = -\dfrac{\cos h}{\operatorname{tg} \varphi} \end{cases}$

(10) $m = -\dfrac{l \cos \delta}{\cos(\delta - \varphi)}$

(11) $\mu = -\dfrac{l \cos \delta}{\cos(\delta - \varphi)}$

(12) $e = -\dfrac{l}{\cos \varphi}$

(13) $\cos \alpha' = \cos \alpha = -\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi$.

II. — **Orologio verticale** $i = 0$

1° Diretto $d = 0$

(1) $H = 90°$

(2) $ZH = 0$

(3) $PH = 90° - \varphi$

(4) $HPK = 0$

(5) $HI = 0$

(6) $KH = 0$

(7) $PK = 90° - \varphi$

(8) $\operatorname{tg} KA = - \cos \varphi \operatorname{tg} h$

(9) $\begin{cases} OT = \dfrac{l \cos \delta}{\cos(\delta + PA)} \\ \cot PA = -\dfrac{\cos h}{\cot \varphi} \end{cases}$

(10) $m = \dfrac{l \cos \delta}{\operatorname{sen}(\delta - \varphi)}$

(11) $\mu = \dfrac{l \cos \delta}{\operatorname{sen}(\delta - \varphi)}$

(12) $e = \dfrac{l}{\cos \varphi}$

(13) $\begin{cases} \cos \alpha' = \operatorname{tg} \delta \cot \varphi \\ \cos \alpha = - \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi. \end{cases}$

2° Meridiano $d = 90°$

(1) $H = 0$

(2) $ZH = 90° + \varphi$

(3) $PH = 180°$

(4) $HPK = 90°$

(5) $HI = 180° + \varphi$

(6) $KH = 0$

(7) $PK = 0$

(8) $KA = 0$

(9) $\begin{cases} OT = l \\ PA = 0 \end{cases}$

(10) $m = l$

(11) $\mu = l$

(12) $e = l$

(13) $\begin{cases} \alpha' = 90° \\ \cos \alpha = - \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi. \end{cases}$

3° Declinante $0 < d < 90°$

(1) $H = 90° - d$

(2) $ZH = 0$

(3) $PH = 90° - \varphi$

(4) $\cot HPK = \cot d \operatorname{sen} \varphi$

(5) $HI = 0$

(6) $\operatorname{tg} KH = \operatorname{sen} d \cot \varphi$

(7) $\operatorname{sen} PK = \cos d \cos \varphi$

(8) $\operatorname{tg} KA =$
$= \cos \delta \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} (HPK - h)$

(9) $\begin{cases} OT = \dfrac{l \cos \delta}{\cos(\delta + PA)} \\ \cot PA = \dfrac{\cos(HPK - h)}{\operatorname{tg} PK} \end{cases}$

(10) $m = -\dfrac{l \cos \delta}{\operatorname{sen}(\delta - \varphi)}$

(11) $\mu = -\dfrac{l \cos \delta}{\cos(\delta + PK)}$

(12) $e = \dfrac{l}{\cos PK}$

(13) $\begin{cases} \cos \alpha' = \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} PK \\ \cos \alpha = -\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi \end{cases}$

III. — Orologio inclinato.

1° Equinoziale $i = \varphi$, $d = 0$

(1) $H = 90°$

(2) $ZH = \varphi$

(3) $PH = 90°$

(4) HPK indeterm.

(5) $HI = 0$

(6) KH indeterm.

(7) $PK = 90°$

(8) $KA = HPK - h$

(9) $\begin{cases} OT = -l \cot \delta \\ PA = 90° \end{cases}$

(10) $m = -l \cot \delta$

(11) $\mu = -l \cot \delta$

(12) $e = \infty$

(13) $\begin{cases} \alpha' = \infty \operatorname{tg} \delta \\ \cos \alpha = -\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi. \end{cases}$

2° Polare.

In questo caso fra i dati φ, i, d sussistono le relazioni

$$ZH = 90° + \varphi, \qquad \cot i = -\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \delta}.$$

A) *Diretto* $d = 0$, $i = 90° + \varphi$

(1) $H = 90°$

(2) $ZH = 90° + \varphi$

(3) $PH = 180°$

(4) $HPK = 180°$

(5) $HI = 0$

(6) $KH = 180°$

(7) $PK = 0$

(8) $KA = 0$

(9) $\begin{cases} PA = 0 \\ OT = l \end{cases}$

(10) $m = l$

(11) $\mu = l$

(12) $e = l$

(13) $\begin{cases} \alpha' = 90° \\ \cos \alpha = -\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi. \end{cases}$

B) *Declinante* $0 < d < 90°$

(1) $\cos H = \cos i \operatorname{sen} d$

(2) $ZH = 90° + \varphi$

(3) $PH = 180°$

(4) $HPK = 90° + H$

(5) $\operatorname{tg} HI = \operatorname{sen} i \operatorname{tg} d$

(6) $HK = 0$

(7) $PK = 0$

(8) $KA = 0$

(9) $\begin{cases} PA = 0 \\ OT = l \end{cases}$

(10) $m = l$

(11) $\mu = l$

(12) $e = l$

(13) $\begin{cases} \alpha' = HPK - 90° \\ \cos \alpha = -\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi. \end{cases}$

Alle formule (1) e (5) possono sostituirsi le seguenti che si ricavano dalla considerazione del triangolo ZHI pel quale si ha nel caso attuale, cioè quando H cade in P,

(1)' $\operatorname{sen} H = \dfrac{\operatorname{sen} i}{\cos\varphi}$ (5)' $\operatorname{sen} HI = \cos\varphi \operatorname{sen} d$

(1)'' $\cot = -\operatorname{sen}\varphi \operatorname{tg}\delta$ (5)'' $\cos HI = \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos i}$

3° A traccia orizzontale in direzione meridiana

$$d = 90^\circ, \quad 0 < i < 90^\circ$$

(1) $HI = i$

(2) $ZH = 90^\circ$

(3) $PH = 180^\circ - \varphi$

(4) $\cot HPK = -\operatorname{tg} i \cos\varphi$

(5) $HI = 90^\circ$

(6) $\operatorname{tg} KH = -\cos i \operatorname{tg}\varphi$

(7) $\operatorname{sen} PK = \operatorname{sen} i \operatorname{sen}\varphi$

(8) $\operatorname{tg} KA =$
$= \operatorname{sen} i \operatorname{sen}\varphi \operatorname{tg}(HPK - h)$

(9) $\begin{cases} OT = \dfrac{l\cos\delta}{\cos(\delta + PA)} \\ \cot PA = \dfrac{\cos(HPK - h)}{\operatorname{tg} PK}. \end{cases}$

(10) $m = -\dfrac{l\cos\delta}{\cos(\delta - \varphi)}$

(11) $\mu = \dfrac{l\cos\delta}{\cos(\delta + PK)}$

(12) $e = \dfrac{l}{\cos PK}$

(13) $\begin{cases} \cos\alpha' = \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg} PK \\ \cos\alpha = -\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg} PK \end{cases}$

4° Declinante.

È questo il caso più generale degli orologi solari piani e per esso valgono le formule trovate nella loro forma più generale.

Osservazioni. — 1ª. Gli orologi solari si distinguono in *australi, boreali, orientali, occidentali,* a secondo del punto cardinale verso il quale sono rivolti, e in *superiori* e *inferiori*, secondochè guardano lo zenit e il nadir.

Le formule trovate valgono tanto per l'una che per l'altra parte del quadro, perchè è chiaro che supponendo questo trasparente, un solo tracciamento servirebbe per le due faccie; la sola differenza sta nella posizione dello stilo che ha per le due parti inclinazioni opposte.

Abbiamo già accennato come si possano trovare i giorni dell'anno e le ore della giornata durante le quali serve l'una o l'altra faccia dell'orologio solare.

2ª. La formula (7) degli orologi meridiani, sta ad indicare che il quadro contiene l'asse del mondo; la (8) ci dice poi che tutte le linee orarie coincidono con quest'asse. In tali condizioni l'orologio solare non può funzionare. Vedremo fra poco come in questo caso, che rientra in quello più generale dei quadranti polari, sia necessario spostare il quadro per potere ottenere le indicazioni delle ore.

3ª. Per l'orologio equinoziale la indeterminazione che si presenta nell'angolo HPK sta a significare che può prendersi per substilare (dalla quale si cominciano a contare gli angoli delle linee orarie) una direzione qualunque; se le ore si contano a partire dalla meridiana dovremo porre

$$(4)\quad \mathrm{HPK} = 0, \qquad \text{e quindi} \qquad \mathrm{KA} = -h.$$

4ª. Sempre per l'orologio equinoziale il valore immaginario che la (13) dà per α' sta ad indicare che il circolo diurno del Sole non incontra il quadro il quale è perciò sempre illuminato da una parte o dall'altra; è quindi giustificata la distinzione che degli orologi equinoziali si fa in *boreali* ed *australi*.

Nel nostro emisfero la parte boreale serve dall'equinozio di Primavera a quello di Autunno e l'australe dall'equinozio di Autunno a quello di Primavera. Il contrario succede per l'altro emisfero.

Si osservi che agli equinozi ($\delta = 0$), la 1ª della (13), dà $\cos\alpha' = 0 . \infty$ ossia un valore indeterminato, il che è giustificato dal fatto che nell'istante dell'equinozio il Sole si trova sopra il piano dell'orologio.

5ª. Pei resultati relativi agli orologi polari si presentano quei medesimi caratteri d'impossibilità che abbiamo già rilevato trattando di quelli meridiani. Si possono però rendere atti alla indicazione delle ore spostando il quadro parallelamente a sè stesso o, ciò che è lo stesso, allontanando lo stilo parallelamente all'asse del mondo, e quindi al quadro, di una distanza conveniente D dal quadro stesso. Le linee orarie (tutte parallele alla direzione dell'asse del mondo) resulteranno allora come intersezioni del quadro col fascio regolare dei piani orari che ha per asse lo stilo e potranno facilmente tracciarsi quando sia noto un punto di ciascuna di esse; per questi punti possono prendersi quelli che risultano dalla sezione prodotta dal quadro sulle linee orarie di un orologio equinoziale che abbia lo stilo in comune coll'orologio polare. Dopo ciò è chiaro che per costruire, per es., l'orologio meridiano si può procedere così: Si traccia sul quadro una retta avente la direzione dell'asse del mondo e per un punto O di esso la retta perpendicolare la quale rappresenterà la linea equinoziale. La serie dei punti pei quali passano le diverse linee orarie può essere determinata sulla linea equinoziale per mezzo delle distanze l che essi hanno dal punto O, servendoci della formula

$$l = \mathrm{D} \operatorname{tg}(h \mp 90) = \mp \mathrm{D} \cot h.$$

È chiaro che il punto O appartiene alla linea oraria delle 6 (substilare). Per l'orologio polare diretto si procede in modo identico e si trova

$$l = \pm \mathrm{D} \operatorname{tg} h$$

ove la substilare è ora rappresentata dalla linea meridiana.

In generale per l'orologio polare declinante si può seguire il medesimo procedimento purchè si sappia riconoscere quale linea oraria rappresenti sul quadro la substilare; ciò si rileva dalla conoscenza dell'angolo HPK, conosciuto il quale si fa la solita determinazione dei punti corrispondenti alle diverse linee orarie per mezzo della relazione

$$l = \mathrm{D} \operatorname{tg}(h - \mathrm{HPK}).$$

6ª. La costruzione di un orologio solare su di un piano qualsiasi può sempre ridursi a quella di un orologio orizzontale di un luogo pel quale può facilmente ricavarsi la longitudine e la latitudine. Infatti considerando la fig. 1 è facile riconoscere che il piano dell'orologio HW'H'E' ammette per zenit il punto Z' e quindi il quadrante dato può considerarsi come orologio orizzontale di un luogo terrestre che ha per latitudine $-PK' = PK$, e che presenta, rispetto al luogo che ha per zenit Z, una differenza di longitudine uguale all'angolo HPK.

Questa differenza sta a significare che tutte le indicazioni orarie debbono essere aumentate di una quantità uguale alla differenza di longitudine espressa in tempo.

Le formule generali

$$(4) \quad \cot HPK = \operatorname{tg} H \operatorname{sen} (\varphi - ZH)$$
$$(7) \quad \operatorname{sen} PK = \operatorname{sen} H \cot (\varphi - ZH)$$

dànno respettivamente la differenza di longitudine e la latitudine del luogo pel quale deve considerarsi l'orologio orizzontale. Per questo nuovo orologio la linea KK' (substilare), determinata nel modo che fu già spiegato, rappresenterà la linea meridiana; la OP' (stilo) forma con detta meridiana, l'angolo P'OK' o POK che è uguale alla latitudine del luogo. Le posizioni delle linee orarie sono date per mezzo della formula (8) degli orologi orizzontali ossia per la formula

$$\operatorname{tg} KA = - \operatorname{sen} PK \operatorname{tg} h.$$

Quando però gli angoli orari invece che dalla nuova meridiana si contino dal meridiano HH', dovremo sostituire $HPK - h$ od h dopo di che la precedente diviene

$$\operatorname{tg} KA = - \operatorname{sen} PK \operatorname{tg} (HPK - h)$$

che è appunto la formula generale (8). Le considerazioni ora fatte possono generalizzarsi nel senso che un orologio su di un piano qualsiasi per un dato luogo può sempre esser collocato in modo da renderlo atto a segnare convenientemente le ore in un altro luogo qualsiasi. Se i due luoghi non hanno la stessa longitudine le indicazioni orarie debbono essere però corrette della differenza costante di longitudine fra i luoghi stessi. A questo proposito osserveremo che non è quindi del tutto esatto il dire (come si legge in alcuni sunti storici sulla gnomonica) che l'orologio solare trasportato da M. Valerio Massimo dalla Sicilia a Roma nel 276 av. C., non poteva, *naturalmente*, dare indicazioni esatte sotto il cielo di Roma; sarebbe più giusto il dire invece che in quei tempi non si conosceva il modo di dare a quel quadrante la conveniente disposizione per metterlo in grado di segnare giustamente le ore anche nella sua nuova posizione.

7ª. Termineremo questa breve serie di osservazioni coll'accennare alla corrispondenza che le diverse specie di orologi solari hanno alle varie latitudini.

È facile riconoscere che gli *orologi polari,* che alcuni distinguono anche col nome di *universali,* sono orologi *verticali* sull'orizzonte dell'uno o dell'altro Polo ed orologi orizzontali sotto due punti opposti dell'equatore. Parimente gli *orologi solari equinoziali,* sono orizzontali per ognuno dei due poli e *verticali diretti* per gli orizzonti equatoriali.

3. — Applicazione delle formule trovate al calcolo di un orologio solare su di un piano inclinato e declinante.

Sceglieremo per piano del quadro una delle faccie triangolari della piramide ottagona che serve di copertura al Battistero di Firenze (S. Giovanni) e precisamente quella che guarda più direttamente verso il Campanile di Giotto. Detta faccia, come tutte le altre, ha la forma di un triangolo isoscele ed è determinata in grandezza e posizione degli elementi seguenti: (1)

Lunghezza della base	m. 12,00	
" dei lati uguali	" 19,24	
Declinazione della base	" 43°30′	verso Est
Angolo della faccia coll'orizzonte	" 37°30′.	

I dati sui quali debbono basarsi i nostri calcoli sono adunque i seguenti:

$\varphi = 43^\circ 47'$ latitudine di Firenze

$d = 180^\circ - 43^\circ 30' = 136^\circ 30'$

$i = 90^\circ - 37^\circ 30' = 52^\circ 30'$.

I vari resultati del calcolo che ora faremo, sono distinti collo stesso numero d'ordine delle formule generali del quadro riassuntivo dalle quali provengono.

I. — Elementi fondamentali dell'Orologio Solare.

$$\begin{aligned} \log\cos\ 52^\circ 30' &= 9{,}78445 \\ \log\operatorname{sen}\ 136^\circ 30' &= \underline{9{,}83781} \\ \log\cos H &= 9{,}62226 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log\cot\ 52^\circ 30' &= 9{,}88498 \\ \log\cos\ 136^\circ 30' &= \underline{9{,}86056} \\ \log\cot ZH &= \overline{9{,}74554} \end{aligned}$$

(1) $H = 65^\circ 14'$ (2) $ZH = 119^\circ 06'$

(3) $PH = 90^\circ - 43^\circ 47' + 119^\circ 06' = 165^\circ 19$

$$\begin{aligned} \varphi - ZH = 43^\circ 47' &- \\ - 119^\circ 06' &= -75^\circ 19' \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log tg\ 65^\circ 14' &= 0{,}33596 \\ \log\operatorname{sen}\ 75^\circ 19' &= \underline{9{,}98558} \\ \log\cot HPK &= \overline{0{,}32154} \end{aligned}$$

(1) Questi elementi sono stati ricavati da un disegno grossolano; è quindi sottinteso che la precisione dei calcoli deve essere considerata rispetto ai dati precedenti e non ai veri valori degli elementi considerati. Del resto che anche quelli assunti non sieno molto lontani dai valori reali, lo desumo dal fatto sperimentale, in accordo colle resultanze del calcolo relativo, che la faccia in questione cessa di essere illuminata dal Sole, nel giorno 1º Settembre, alle 18h 40m circa di tempo medio dell'Europa Centrale.

(4) $HPK = 154°30'$

$\log \operatorname{sen} 52°30' = 9{,}89947$
$\log \operatorname{tg} 43°30' = 9{,}97725$
$\log \operatorname{tg} HI = 9{,}87672$

(5) $HI = 143°02'$

$\log \operatorname{sen} 65°14' = 9{,}95809$
$\log \cos 75°19' = 9{,}40394$
$\log \operatorname{sen} PK = 9{,}36203$

$\log \cos 52°30' = 9{,}78445$
$\log \operatorname{sen} 136°30' = 9{,}83781$
$\log \cot 75°19' = 9{,}41836$
$\log \operatorname{tg} KH = 9{,}04062$

(6) $KH = 173°44'$

(7) $PK = 13°18'$

II. — **Durata della illuminazione del quadro all'ingresso del Sole nei segni zodiacali.**

a) *Sorgere e tramonto del Sole rispetto al piano del quadro*

(13)′ $\cos\alpha = -\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg} PK; \quad \log\cos(180° - \alpha) = \log \operatorname{tg}\delta + 9{,}37419$

$\delta = 0; \quad \pm 11°29'; \quad \pm 20°10'; \quad \pm 23°27'$ (¹)

$\log \operatorname{tg}\delta = -\infty; \quad 9{,}30782; \quad 9{,}56498; \quad 9{,}63727.$

Ora corrispondente alla substilare $10^h 18^m \equiv (154°30')$.

Ora del sorgere e del tramonto $10^h 18^m \mp \alpha$.

Giorno 21 del mese di	log cos (180°−α)	α	Ora del sorgere	Ora del tramonto	Giorno 21 del mese di
Marz. Sett.	$-\infty$	$90°\ 0' \equiv 6^h\ 0^m$	$4^h 18^m$	$4^h 18^m$	Marz. Sett.
Apr. Agos.	8,68201	$92°45' \equiv 6^h 11^m$	$4^h 07^m$	$4^h 29^m$	Feb. Ottob.
Mag. Lugl.	8,23917	$94°59' \equiv 6^h 20^m$	$3^h 58^m$	$4^h 38^m$	Genn. Nov.
Giugno	0,01146	$95°54' \equiv 6^h 24^m$	$3^h 54^m$	$4^h 42^m$	Dicembre

b) *Sorgere e tramonto del Sole sull'orizzonte di Firenze*

(13)″ $\cos\alpha = -\operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi = \log\cos(180° - \alpha) = \log\operatorname{tg}\delta + 9{,}98155.$

Giorno 21 del mese di	log cos (180°−α)	α	Ora del sorgere	Ora del tramonto	Giorno 21 del mese di
Marz. Sett.	$-\infty$	$90°\ 0' \equiv 6^h\ 0^m$	$6^h\ 0^m$	$6^h\ 0^m$	Marz. Apr.
Apr. Agos.	9,28937	$101°14' \equiv 6^h 45^m$	$5^h 15^m$	$6^h 45^m$	Feb. Ottob.
Mag. Lugl.	9,54663	$110°37' \equiv 7^h 22^m$	$4^h 38^m$	$7^h 22^m$	Genn. Nov.
Giugno	9,61882	$114°34' \equiv 7^h 38^m$	$4^h 22^m$	$7^h 38^m$	Dicembre

Pei mesi segnati nell'ultima colonna di questa e della precedente tabella, le ore del sorgere e del tramonto debbono essere scambiate fra di loro.

(¹) I valori di δ all'ingresso del Sole nei segni zodiacali, sono calcolati colla formula

$$\operatorname{sen}\delta = \cos L \cos \varepsilon,$$

ove ε è l'inclinazione dell'eclittica (23′27) ed L la longitudine del Sole corrispondente ai detti ingressi, per cui dovremo porre successivamente

$$L = 0°,\ 30°,\ 60°,\ 90°,\ 120°,\ 150°,\ 180° \ldots\ldots 360°.$$

c) *Durata della illuminazione del quadro al 21 di ogni mese*

Illuminazione	Giugno	Luglio Maggio	Agosto Aprile	Settembre Marzo	Ottobre Febbraio	Novembre Gennaio	Dicembre
dalle	4^h22^m	4^h38^m	5^h15^m	$6^h\ 0^m$	6^h45^m	7^h22^m	7^h38^m
alle	16^h42^m	16^h38^m	16^h29^m	16^h18^m	16^h07^m	15^h18^m	15^h54^m

III. — **Angoli di direzione delle diverse linee orarie rispetto alla substilare.**

$$(8)\quad \operatorname{tg} KA = \operatorname{sen} 13^\circ 19' \operatorname{tg}(154^\circ 30' - h)$$

$$\log \operatorname{tg} KA = 9{,}36236 + \log \operatorname{tg}(154^\circ 30' - h)$$

con $h = -120^\circ;\ -105^\circ;\ -90^\circ;\ -75^\circ;\ -60^\circ;\ -45^\circ;\ -30^\circ;\ -15^\circ;\ 0;\ +15^\circ;\ +30^\circ;\ +45^\circ;\ +60;\ +75^\circ$

Ore	154°30′ — *h*		KA	
	valore	log tang	log tang	valore
4	274°30′	1,10402	0,46638	108°52′
5	259°30′	0,73203	0,09439	51°11′
6	244°30′	0,32150	9,68386	25°46′
7	229°30′	0,06850	9,43086	15°06′
8	214°30′	9,83713	9,19949	9°00′
9	199°30′	9,54915	8,91151	4°40′
10	184°30′	8,89598	8,25834	1° 2′
11	169°30′	9,26797	8,63033	177°33′
12	154°30′	9,67850	0,04086	173°44′
13	139°30′	9,93150	9,29386	168°52′
14	124°30′	0,16287	9,52523	161°28′
15	109°30′	0,45085	9,81321	146°58′
16	94°30′	1,10402	0,46638	108°52′

IV. — **Angoli delle linee orarie colla direzione dello stilo.**

La determinazione degli angoli richiesti dipende dalla conoscenza degli archi PA corrispondenti alle diverse linee orarie. Questa determinazione si effettua per mezzo della formula

$$(9)''\quad \cot PA = \frac{\cos(HPK - h)}{\operatorname{tg} PK}$$

ove per HPK deve prendersi il valore $180^\circ - 154^\circ 30' = 25^\circ 30'$ e quindi sarà $\log \cot PA = \log \cos(25^\circ 30' - h) + 0{,}62637$.

I valori di $(25^\circ 30' - h)$ si trovano ponendo, al solito, successivamente $h = -120^\circ,\ -105^\circ,\ -90^\circ \ldots$

Ore	25°30′ — AH		PA	
	valore	log cos	log cos	valore
4	94°30′	8,89464	9,52101	108°22′
5	79°30′	9,26063	9,88700	52°22′
6	64°30′	9,63398	0,26035	28°46′
7	49°30′	9,81254	0,43891	20°00′
8	34°30′	9,91599	0,54236	16°00′
9	19°30′	9,97435	0,60072	14°05′
10	4°30′	9,99866	0,62503	13°20′
11	10°30′	9,99267	0,61904	13°31′
12	25°30′	9,95549	0,58186	14°41′
13	40°30′	9,88105	0,50742	17°16′
14	55°30′	9,75313	0,38050	22°36′
15	70°30′	9,52350	0,14987	35°18′
16	85°30′	8,89464	9,52101	71°38′

V. — **Calcolo delle lunghezze d'ombra e determinazione delle coniche di declinazione.**

Il calcolo è naturalmente limitato alle linee orarie che vanno dall'ora 4ª alla 16ª che sono quelle che possono essere utilmente tracciate nel quadrante.

Per ogni ora ci limiteremo a calcolare le lunghezze d'ombra corrispondenti all'ingresso del Sole nei diversi segni zodiacali, cosicchè le linee congiungenti l'estremità delle ombre corrispondenti ad uno stesso giorno rappresenteranno le varie *coniche* (nel caso nostro *iperbole*) *di declinazione o dei segni.*

La formula che serve a questo calcolo è

$$(9)' \quad OT = \frac{l \cos \delta}{\cos(\delta + PA)}$$

da cui, facendo $l = 1$, si ha

$$\log OT = \log \cos \delta - \log \cos (\delta + PA).$$

Ogni calcolo, come apparisce dalla tabella che segue, è compendiato nei 4 numeri di una stessa colonna e sotto una stessa graffa, e dei quali il significato è il seguente:

1°. Valore dell'angolo $\delta + PA$ composto con quello in testa alla colonna (declinazione all'ingresso nei segni) e con quello di PA dedotto, per ogni ora, dal calcolo precedente.

2°. Valore del logaritmo coseno dell'angolo precedente.

3°. Logaritmo di OT che si ottiene togliendo il precedente da quello in testa alla colonna.

4°. Valore cercato di OT espresso, nel caso nostro, in lunghezze di gnomone.

δ	+ 23°27′	+ 20°10′	+ 11°29′	0°	— 11°29′	— 20°10′	— 23°27′
log δ	9,96256	9,97252	9,99122	0,0	9,99122	9.97252	9,96256
Ore							
4	+ 84°55′						
	8,94746						
	1,01939						
	10,4566						
5	+ 28°55′	+ 32°12′					
	9,94217	9,92747					
	0,02039	0,04505					
	1,0481	1,1093					
6	+ 5°19′	+ 8°36′	+ 17°17′	+ 28°46′			
	9,99813	9,99509	9,97993	9,94279			
	9,96443	9,97743	0,01129	0,05721			
	0,9214	0,9494	1,0263	1,1408			
7	— 3°27′	— 0°10′	+ 8°31′	+ 20°00′	+ 31°29′		
	9,99921	0,00000	9,99518	9.97299	9.93084		
	9,96335	9,97252	9,99604	0,02701	0,06038		
	0,9191	0,9387	0,9904	1,0642	1,1402		
8	— 7°27′	— 4°10′	+ 4°31′	+ 16°00′	+ 27°29′	+ 36°10′	+ 39°27′
	9,99632	9,99885	9,99866	9,98284	9,94799	9,90704	9,88772
	9,96624	9,97367	9,99252	0,01716	0,04323	0,06548	0,07484
	0,9252	0,9412	0,9830	1,0403	1,1047	1,1627	1,1881
9	— 9°22′	— 6°05′	+ 2°36′	+ 14°05′	+ 25°34′	+ 34°15	+ 37°32′
	9,99417	9,99755	9,99955	9,98675	9,95525	9,91729	9,89927
	9,96839	9,97497	9,99167	0,01325	0,03597	0,05523	0,06329
	0,9298	0,9940	0,9810	1,0310	1,0864	1,1356	1,1569
10	— 10°07′	— 6°50′	+ 1°51′	+ 13°20′	+ 24°49′	+ 33°30′	+ 36°47′
	9,99319	9,99690	9,99977	9,98813	9,95792	9,92111	9,90358
	9,96937	9,97562	9,99145	0,01187	0,03330	0,05141	0,05894
	0,9319	0,9454	0,9805	1,0280	1,0797	1,1257	1,1454
11	— 9°56′	— 6°39′	+ 2°02′	+ 13°31′	+ 25°00′	+ 33°41′	+ 36°58′
	9,99344	9,99707	9,99973	9,98780	9,95728	9,92018	9,90254
	9,96912	9,97545	9,99149	0,01220	0,03394	0,05234	0,06002
	0,9314	0,9450	0,9806	1,0285	1,0813	1,1281	1,1482
12	— 8°46′	— 5°29′	+ 3°12′	+ 14°41′	+ 26°10′	+ 34°51′	+ 38°08′
	9,99490	9,99801	9,99932	9,98558	9,95304	9,91416	9,89574
	9,96766	0,97451	9,99190	0,01442	0,03818	0,05836	0,06682
	0,9282	0,9430	0,9815	1,0338	1,0919	1,1438	1,1663
13	— 6°11′	— 2°54′	+ 5°47′	+ 17°16′	+ 28°45′	+ 37°26′	+ 40°43′
	9,99747	9,99944	9,99778	9,97997	9,94286	9,89888	9,87964
	9,96509	9,97308	9,99344	0,02003	0,04836	0,07364	0,08292
	0,9228	0,9399	0,9850	1,0472	1,1178	1,1848	1,2132
14	— 0°51′	+ 2°26′	+ 11°07′	+ 22°36′	+ 34°05′	+ 42°46′	+ 46°03′
	9,99995	9,99961	9,99177	9,96580	9,91815	9,86577	9,84138
	9,96261	9,97291	9,99942	0,03460	0,07307	0,10675	0,12118
	0,9175	0,9395	0,9987	1,0829	1,1833	1,2787	1,3219
15	— 11°51′	+ 15°08′	+ 23°49′	+ 35°18′	+ 46°47′	+ 55°28′	+ 58°45′
	9,99064	9,98461	9,96135	9,91176	9,83554	9,75368	9,71498
	9,96192	9,99885	0,02987	0,08824	0,15568	0,21884	0,24758
	0,9160	0,9973	1,0712	1,2253	1,4311	1,6552	1,7684
16	+ 48°11′	+ 51°28′	+ 60°09′	+ 71°38′	+ 83°07′	+ 91°48′	•
	9,82396	9,79447	9,69699	9,49844	9,06873	8,49708	
	0,13860	0,17805	0,29423	0,50156	0,92249	1,47544	
	1,3760	1,5068	1,9689	3,1737	8,3655	29,8841	

Con quanto precede abbiamo fatto la determinazione di tutti gli elementi relativi all'orologio solare sul piano considerato. Vediamo ora come possa essere disegnato e quale sia la posizione più conveniente di esso sulla faccia triangolare in modo da profittare, nel miglior modo possibile, della estensione di questa per il tracciamento delle varie parti dell'orologio stesso.

Ecco come si può procedere. Anzitutto si prepara un disegno provvisorio dell'orologio, tracciando su di un foglio di carta una retta che si assume come substilare, uscente da un punto O considerato come centro orario dell'orologio.

Indi per mezzo degli elementi angolari forniti dalla tabella del Calcolo III, si fa il tracciamento di tutte le linee orarie; infine servendoci degli elementi forniti dalla 1ª ed ultima colonna della tabella relativa al Calcolo V, si tracciano le due iperboli solstiziali e la linea equinoziale assumendo per l (lunghezza del gnomone) un numero di centimetri convenienti perchè il disegno possa essere tutto contenuto entro i limiti del foglio, o, se non tutto, almeno la parte più importante di esso.

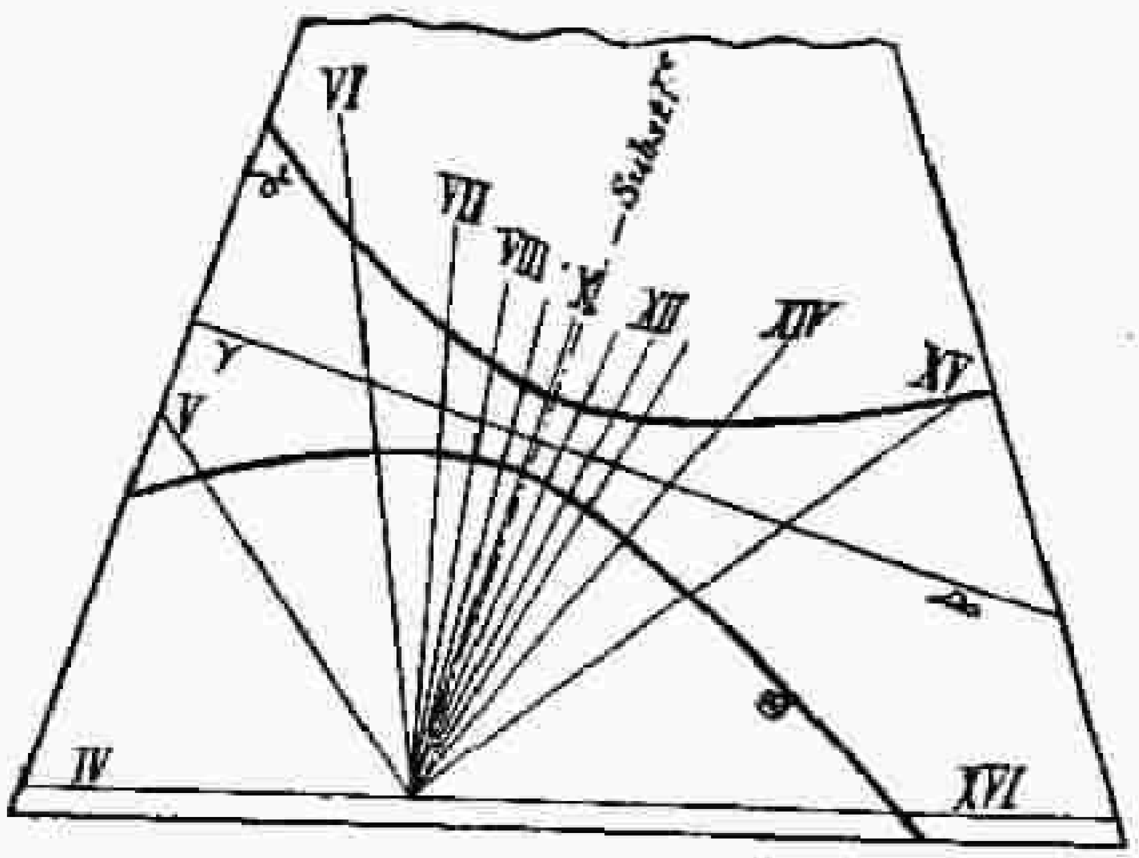

Fig. 2.

Fatto ciò, su di un foglio di carta lucida si disegna un triangolo isoscele simile a quello della faccia considerata, e si riporta sul disegno precedente disponendolo in maniera (spostando anche opportunamente uno dei lati di detto triangolo isoscele parallelamente a se stesso) che il disegno stesso apparisca, almeno nella sua parte più importante, disposto nel miglior modo possibile entro il triangolo (fig. 2). A questo punto non rimane da far altro che ricopiare sul vero triangolo che rappresenta il piano dell'orologio solare, il disegno precedente nella sua giusta posizione e nel dovuto rapporto.

Ma poichè il disegno provvisorio può non essere stato eseguito colla necessaria precisione, così è preferibile disegnare *ex novo* sul quadro, l'orologio solare.

A tale scopo si fissa su questo quadro la posizione del centro orario, della substilare e della equinoziale ricavandone gli elementi dal disegno provvisorio. Si misura poi con tutta esattezza la distanza D del centro orario dalla equinoziale, e, per mezzo della formula $l = \mathrm{D} \cos 13°18'$, si ricava la lunghezza dello stilo.

Tracciate poi esattamente tutte le linee orarie si riportano su ciascuna di esse le varie lunghezze d'ombra dedotte dai resultati del Calcolo V dopo avervi introdotto il valore di l precedentemente determinato. In ultimo si riuniscono gli estremi di queste lunghezze d'ombra corrispondenti ad uno stesso valore di δ per ottenere le iperbole di declinazione.

Si può osservare che l'esattezza del tracciamento delle linee orarie, che è la parte più importante degli orologi solari, resta controllata dall'angolo che esse formano colla substilare e dalle porzioni conosciute di esse che rimangono comprese fra il centro orario e la linea equinoziale. Dette porzioni sono fornite dai valori della Tabella V che corrispondono alla colonna di $\delta = 0$.

A. L. ANDREINI
Firenze.

SUL TEOREMA CANTOR-BERNSTEIN-PEANO

§ 1.

Nel 1895, G. CANTOR *enunciò*, ma *non dimostrò*, le seguenti proposizioni:

α) *Se due insiemi* M *ed* N *sono così fatti che* M *è equivalente ad una parte* N_1 *di* N, *ed* N *è equivalente ad una parte* M_1 *di* M, *sono anche* M *ed* N *equivalenti.*

β') *Se* M_1 *è una parte d'un insieme* M, M_2 *una parte dell'insieme* M_1, *e se* M *ed* M_2 *sono equivalenti, anche* M_1 *è equivalente agli insiemi* M *ed* M_2. (1)

***

Si osservi anzitutto che da β') si può *dedurre* α), così: (2)
per ipotesi

$$\mathrm{M} \text{ è equivalente ad } \mathrm{N}_1 \tag{1}$$

ed

$$\mathrm{N} \text{ è equivalente ad } \mathrm{M}_1; \tag{2}$$

(1) *Contribuzione al fondamento della teoria degli insiemi transfiniti.* "Rivista di Matematica", volume V, p. 129-162. Torino, Bocca, 1895, linee 8-13 della nota a pag. 133.

In queste proposizioni:

insieme vale *classe* (di oggetti arbitrari);

se A e B sono classi, dicendo che "A è *equivalente* a B" s'intende dire che "vi è (almeno) una *corrispondenza reciproca* fra A e B".

(2) In questo momento non si *asserisce* la *verità* di alcuna delle proposizioni α) e β'), ma questo solo: per dimostrare α) è *sufficiente* dimostrare β').

fissata una corrispondenza reciproca fra N ed M_1, alla parte N_1 di N corrisponde una parte M_2 di M_1; e, per definizione di equivalenza,

$$N_1 \text{ è equivalente ad } M_2; \tag{3}$$

cosicchè, l'equivalenza essendo una relazione transitiva, per le (1) (3),

$$M \text{ è equivalente ad } M_2;$$

da cui, per la proposizione β'), risulta che

$$M_1 \text{ è equivalente ad } M; \tag{4}$$

dunque, per le (2) (4):

$$N \text{ è equivalente ad } M.$$

***

Delle due affermazioni della *tesi* di β')

$$M_1 \text{ è equivalente ad } M$$
$$M_1 \text{ è equivalente ad } M_2$$

soltanto la *prima* fu utilizzata per dedurre α) da β'), e del resto la *seconda* è conseguenza immediata della *prima* e dell'*ipotesi*

$$M \text{ è equivalente ad } M_2.$$

Tralasciando perciò la *seconda* affermazione, cambiando M, M_1, M_2, in A, B, C e sostituendo alla frase « è equivalente a » il suo significato, si ottiene la proposizione

β) *Se la classe* A *contiene la classe* B *che contiene la classe* C *e se vi è una corrispondenza reciproca fra* A *e* C, *allora vi è pure una corrispondenza reciproca fra* A *e* B;

dalla quale, per quanto precede, si *deducono* le proposizioni α) e β').

***

Soltanto nel 1898 fu pubblicata una *dimostrazione* di α), dovuta a BERNSTEIN. (1)

Nel gennaio di quest'anno H. POINCARÉ, ravvisando nella dimostrazione di Bernstein « un appel spécial à l'*intuition* » e « l'application du *principe d'induction* » e ritenendo difficile, se non impossibile, evitare tali inconvenienti, disse che « une *autre* démonstration du théorème de Bernstein... sera une *découverte* mathématique importante ». (2)

Questa scoperta è già stata fatta da G. PEANO, il quale ha pubblicato una *dimostrazione* di β) — e quindi, per quanto precede, di α) — nella quale sono usati soltanto *principii logici* universalmente noti. (3)

---

(1) Inserita in BOREL, *Théorie des fonctions*, pag. 104.
Identica dimostrazione (in cui però è usata anche la nozione di *limite*) si trova in E. SCHRÖDER, *Ueber zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantor'sche Sätze* (scritto nel gennaio 1896, presentato il 21 maggio 1896 ed inserito soltanto nel 1898 in *Nova Acta Academiae Caesareae Leopoldino — Carolinae Germanicae Naturae Curiosorum*, tomo LXXI, n. 6, p. 336-340).

(2) *Les mathématiques et la logique* (" Revue de Métaphisique et de Morale ", 14e Année, n. 1, p. 17-34, Paris, Colin, 1906): p. 28, l. 24; p. 29, l. 10, 12-14.

(3) *Super theorema de Cantor-Bernstein* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, Adunanza dell'8 aprile 1906. Tomo XXI, Fasc. III, p. 360-366).
A p. 362, l. 2, invece di " $v\mathcal{E}$ " leggasi " $v\mathcal{3}$ "; a p. 363, l. ultima, invece di " (g, c) " leggasi " (g, a) ".

Malgrado egli abbia tradotto in linguaggio ordinario le principali formule (che son tutte scritte coi *simboli ideografici* adottati nel *Formulario* da lui pubblicato), temo che la presunta difficoltà di lettura tolga allo scritto del Peano l'ampia diffusione di cui mi sembra degno; e perciò mi accingo a *volgarizzarlo.*

Però questa non è una traduzione immediata (dai simboli al linguaggio ordinario) del lavoro del Peano, avendo attuato qualche *semplificazione* così nell'enunciato che nella dimostrazione; ma la parte *sostanziale* del *procedimento dimostrativo* è rimasta immutata.

***

Mi propongo di dimostrare che

γ) *Se la classe* A *contiene la classe* B *e se fra* A *e* B *vi è una corrispondenza simile, allora fra* A *e* B *vi è pure una corrispondenza reciproca.* (1)

Si osservi intanto che da γ) si può *dedurre* β) così:

poichè B contiene C, la corrispondenza *reciproca* che per ipotesi sussiste fra A e C è una corrispondenza *simile* fra A e B; risulta così verificata la *ipotesi* e quindi anche la *tesi* di γ) che è pure la *tesi* di β).

Si osservi inoltre che, mentre nell'*ipotesi* di α) sono nominate *4 classi* e *2 corrispondenze reciproche* ed in quella di β) sono nominate *3 classi* e *1 corrispondenza reciproca*, in quella di γ) sono nominate soltanto *2 classi* e *1 corrispondenza simile.*

Ma γ) — oltre che essere in ciò formalmente più *semplice* di β) e di α), tanto ch'io dubito si possa dare alla verità di cui si tratta una veste ancor più semplice — mi sembra mettere in più chiara luce, che non facciano β) ed α), l'*importanza* di questa verità. (2)

***

Il *procedimento* escogitato dal Peano per *dimostrare* β) mi sembra non meno *importante* della *verità* da dimostrarsi; tanto che, se altre dimostrazioni dovessero attenuarne il valore come *mezzo*, mi sembra dover rimanere immutato il suo valore come *conoscenza.*

E perciò, invece della precedente, dimostrerò la proposizione

δ) *Se la classe* A *contiene la classe* B *e se fra* A *e* B *vi è una corrispondenza* simile e non reciproca, *allora* si può determinare *una classe* comune *ad* A *e a* B *e tale che* la corrispondenza data *sia* reciproca *fra i* rimanenti *individui di* A *ed i* rimanenti *individui di* B,

---

(1) Una *corrispondenza* fra A e B è detta *simile*: se a *ciascun* individuo di A essa fa corrispondere *un* individuo di B, e se ad individui *distinti* di A fa corrispondere individui *distinti* di B; una *corrispondenza* fra A e B è detta *reciproca*: se, *oltre* ad esser *simile*, è tale che in essa *ciascun* individuo di B corrisponde a *qualche* individuo di A.

Se fra A e B vi è una corrispondenza *simile* e *non reciproca*, tale corrispondenza è *reciproca* fra A e la classe B′ formata dai *soli* corrispondenti di A nella corrispondenza data; ad esempio: *la moltiplicazione per 4* è una corrispondenza *simile* e *non reciproca* fra *i numeri della successione naturale* ed *i numeri pari*; essa è *reciproca* fra *i numeri della successione naturale* ed *i multipli di 4.*

Ma il B′ così determinato è una *parte* di B, mentre la proposizione γ) afferma che vi è una corrispondenza *reciproca* fra A e B; nell'esempio dato, *la moltiplicazione per 2* è una corrispondenza *reciproca* fra *i numeri della successione naturale* ed *i numeri pari.*

(2) Si può chiedere: ma α) β) γ) esprimono la *stessa* verità?

Da quanto precede risultando che da γ) si *deduce* β) e da β) si *deduce* α) [cosicchè, per *dimo-*

dalla quale esplicitamente risultano la *verità da dimostrarsi* e la parte essenziale del *procedimento dimostrativo* del Peano. [1]

Che sia *sufficiente* dimostrare δ) è chiaro: perchè, la classe da determinarsi dovendo essere *comune* ad A e a B (ed a tal fine, per l'ipotesi, *basterà* che *ogni* suo individuo appartenga a B), per ottenere una *corrispondenza reciproca* fra A e B, come richiede γ), a ciascun individuo di A si farà corrispondere *sè stesso* ovvero *il suo corrispondente nella corrispondenza data* secondochè esso *appartiene* o *non appartiene* alla classe determinata. [2]

§ 2.

Ed ecco la *dimostrazione* di δ).

Rappresento con A′ la classe formata dai *soli* corrispondenti di A nella *corrispondenza data*; da ciò e dall'*ipotesi:*

A contiene B, che contiene A′. (1)

Analogamente, se A contiene la classe X, rappresento con X′ la classe formata dai *soli* corrispondenti di X nella *corrispondenza data*; da ciò e dall'*ipotesi* risulta che

se A contiene X, la *corrispondenza data* è *reciproca* fra X e X′; (2)

se A contiene X che contiene Y, allora A′ contiene X′ che contiene Y′. (3)

***

Rappresento con A_0 ciò che rimane di A sopprimendo B (1); cosicchè:

A si compone delle classi *disgiunte* A_0 e B. [3] (4)

---

strare α) β) γ), è ormai *sufficiente* ch'io *dimostri* γ)], è come se si chiedesse: da α) si può *dedurre* β) o da β) si può *dedurre* γ)?

Ecco la giustificazione della risposta *affermativa.*

Data l'*ipotesi* di β), si chiami M la classe A, N la classe B, N_1 la classe C, M_1 la parte di C che corrisponde alla parte B di A nella corrispondenza data; *applicando* α), si deduce che M è equivalente ad N, cioè che A è equivalente a B, che è la *tesi* di β); dunque: da α) si deduce β).

Data l'*ipotesi* di γ), si chiami C l'insieme dei soli B che corrispondono agli A nella corrispondenza data; *applicando* β), si deduce la *tesi* di β) che è pure quella di γ); dunque: da β) si *deduce* γ).

(1) L'*ipotesi* di γ) *non esclude* che la corrispondenza data fra A e B sia reciproca; ma in tal caso la *tesi* di γ) è già enunciata nell'*ipotesi*, e la proposizione non ha alcuna importanza.

Per questo, in δ) ho ammesso addirittura che la corrispondenza data fra A e B sia *simile* e *non reciproca.*

Inoltre, affinchè γ) sia *vera è sufficiente* che *ogni* individuo di B appartenga ad A, *senza escludere* il caso in cui anche *ogni* individuo di A appartenga a B; ma allora A e B sarebbero *nomi diversi* della *stessa classe* e la *tesi* di γ) sarebbe vera *indipendentemente dalla corrispondenza data*, bastando che ad *ogni* individuo di A si faccia corrispondere *sè stesso.*

Per questo, in γ) e più specialmente in δ) ammetto senz'altro che *vi sia* qualche A che *non appartiene* a B.

(2) Nell'esempio dato nella nota a γ) *la moltiplicazione per 4* è una corrispondenza *simile e non reciproca* fra i *numeri della successione naturale* ed i *numeri pari*; ivi, per stabilire una corrispondenza *reciproca* fra queste due classi, si ricorre ad un'*altra* corrispondenza: *la moltiplicazione per 2.*

Ciò *basta* per soddisfare γ), ma *non basta* per soddisfare δ): in cui si *impone* di ricorrere *soltanto* alla corrispondenza *data* o all'*autocorrispondenza.*

Ecco in qual modo si può soddisfare δ) nell'esempio considerato: la classe dei *numeri il cui massimo esponente di 2 è dispari* è *comune* alle due classi date e *la moltiplicazione per 4* (che è la corrispondenza *data*) è una corrispondenza *reciproca* fra i *rimanenti* „numeri della successione naturale„ ed i *rimanenti* „numeri pari„.

(3) Dico *disgiunte* due classi prive di individui comuni.

Rappresento con M la classe formata dai *soli* individui *comuni* a *tutte* le classi X che *verificano* la condizione

$$\text{A contiene X, ed X contiene } A_0 \text{ ed } X'. \tag{5}$$

Si noti che: *vi sono* classi che verificano la (5); tale, ad esempio, è A: perchè A contiene A, A_0 (4) ed A′ (1); inoltre A contiene *ogni* classe che verifichi la (5) e perciò

$$\text{A contiene M;} \tag{6}$$

mentre *ogni* classe che verifichi la (5) contiene A_0 e perciò

$$\text{M contiene } A_0. \tag{7}$$

Se X verifica la (5):

$$\text{X contiene X}' \tag{8}$$

ed

$$\text{A contiene X che contiene M}$$

da cui (3)

$$\text{X}' \text{ contiene M}'$$

da cui (8)

$$\text{X contiene M}'.$$

Dunque: *ogni* classe che verifichi la (5) contiene M′ e perciò

$$\text{M contiene M}'. \text{ [1]} \tag{9}$$

* * *

Le classi A_0 ed M′ sono *disgiunte*, perchè A_0 è disgiunta da B (4), mentre [per la (1), B contiene A′, e, per le (6) (3), A′ contiene M′; e perciò]:

$$\text{B contiene M}'; \tag{10}$$

chiamo N la classe che si compone delle classi *disgiunte* A_0 ed M′. (11)

Si noti che:

per la (11),

$$\text{N contiene } A_0; \tag{12}$$

A contiene A_0 (4) e [poichè contiene B (1), contiene anche (10)] M′; cosicchè (11):

$$\text{A contiene N;} \tag{13}$$

per le (7) (9) (11),

$$\text{M contiene N;} \tag{14}$$

per le (6) (14) (3),

$$\text{M}' \text{ contiene N}'; \tag{15}$$

per le (11) (15),

$$\text{N contiene N}'. \tag{16}$$

Dalle (13) (12) (16) risulta che N verifica la (5), e perciò

$$\text{N contiene M.} \tag{17}$$

Sicchè per le (17) (14),

$$N = M$$

e quindi (11):

$$\text{M si compone delle classi } \textit{disgiunte } A_0 \text{ ed M}'. \tag{18}$$

* * *

Per ultimo, rappresento con P ciò che rimane di B sopprimendo M′ (10); cosicchè

$$\text{B si compone delle classi } \textit{disgiunte} \text{ M}' \text{ e P;} \tag{19}$$

---

[1] Benchè non ci serva, si noti che, per le (6) (7) (9), anche M verifica la (5); cosicchè M è la *minima* classe che verifica la (5).

da cui, per la (4),

A si compone delle classi *disgiunte* A_0, M' e P;

da cui, per la (18),

A » » » » M e P. (20)

È dunque P la classe *cercata* [rileggasi la *tesi* di 5)], perchè: per le (20) (19),

P è *comune* ad A e a B

e, per le (6) (2),

la *corrispondenza data* è *reciproca* fra M ed M'

dove M ed M', per le (20) (19), sono appunto le classi formate dai *rimanenti* individui di A ed i *rimanenti* individui di B.

ALESSANDRO PADOA.

Chioggia (Venezia), maggio 1906.

SOLUZIONI RAZIONALI DELLE EQUAZIONI INDETERMINATE DI TIPO $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x_{n+1}^2$

Poichè vale l'identità $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$, la soluzione più generale dell'equazione $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ è $x_1 = m^2 - n^2$, $x^2 = 2mn$, $x_3 = m^2 + n^2$. Volendo le soluzioni intere dell'equazione, basterà attribuire ad m ed n valori interi. In ciò sta la risoluzione del problema di determinare i triangoli rettangoli, i cui lati sono numeri interi, risoluzione già data, se non in modo completo, da Pitagora e Platone.(1)

Più in generale l'identità

$$(\lambda_1^2 + \ldots + \lambda^2_{n-1} - \lambda_n^2)^2 + (2\lambda_1\lambda_n)^2 + \ldots + (2\lambda_{n-1}\lambda_n)^2 = \\ = (\lambda_1^2 + \ldots + \lambda^2_{n-1} + \lambda_n^2)^2$$

dà modo di risolvere l'equazione

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = x^2_{n+2}$$

ponendo

$$x_1 = 2\lambda_1\lambda_n, \qquad x_2 = 2\lambda_2\lambda_n, \ldots, x_n = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda^2_{n-1} - \lambda_n^2, \\ x_{n-1} = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda^2_{n-1} + \lambda_n^2.$$

Lo scopo di questa breve nota è di mostrare come si possa arrivare a questo risultato con semplici considerazioni geometriche.

I. Il problema della ricerca di tutte le soluzioni razionali di una equazione del tipo

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x^2_{n+1} \tag{1}$$

---

(1) HANKEL, *Zur Geschichte der Mathematik*. Pag. 131. Cfr. anche: LUCAS, *Theorie des nombres*. Introduction.

si può ricondurre a quello della determinazione di tutte le sue soluzioni intere.

Infatti, posto che $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n, x_{n+1} = a_{n+1}$ sia una soluzione razionale e che ρ sia il minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni $a_1, a_2, \ldots a_{n+1}$, l'equazione (1) ammette pure la soluzione $\rho a_1, \ldots, \rho a_n, \rho a_{n+1}$, che è costituita da numeri interi.

Se le frazioni $a_1, \ldots, a_{n+1}, a_n$ sono irriducibili, i numeri $\rho a_1, \ldots, \rho a_n, \rho a_{n+1}$ sono inoltre primi fra loro.

Due soluzioni saranno a considerarsi identiche, se costituite da serie di valori ordinatamente proporzionali.

E poichè da una generica soluzione se ne può ottenere un'altra cambiando segno a uno o più valori delle incognite, si potrà limitarci a ricercare le soluzioni costituite da numeri interi positivi (o nulli) primi fra loro.

Siccome infine il primo membro della (1) è simmetrico rispetto alle incognite $x_1, \ldots, x_n$, così, ottenuta una soluzione $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$, saranno a ritenersi equivalenti ad essa tutte quelle, che si ottengono eseguendo una sostituzione sulle lettere $a_1, \ldots, a_n$.

2. Si riferiscano i punti di uno spazio S_n a n dimensioni a una ennupla di assi mutuamente ortogonali uscenti da un punto, e si consideri la sfera col centro nell'origine e raggio uguale a 1. (¹) In coordinate cartesiane omogenee essa avrà per equazione

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x_{n+1}^2 ; \tag{2}$$

e in coordinate non omogenee $\left(\text{posto } \frac{x_i}{x_{n+1}} = X_i\right)$

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 = 1.$$

Il problema propostoci ha dunque la seguente interpretazione geometrica: determinare tutti i punti di questa sfera, le cui coordinate sono razionali.

Per risolverlo osserviamo che una retta di S_n

$$\frac{X_1 - a_1}{\lambda_1} = \frac{X_2 - a_2}{\lambda_2} = \ldots = \frac{X_n - a_n}{\lambda_n} \tag{3}$$

incontra questa sfera in due punti. Supposto che le costanti, che entrano nella (3), sieno numeri razionali, le coordinate dei due punti, quando sono reali, sono per entrambi razionali o no, perchè la loro determinazione dipende dalla risoluzione di una equazione di secondo grado a coefficienti razionali ottenuta eliminando $n-1$ delle variabili $x_1, \ldots, x_n$ fra la (2) e le (3).

Se quindi facciamo passare la retta per un punto di coordinate razionali appartenente alla sfera, l'altro punto d'intersezione avrà

(¹) Per seguire più facilmente le considerazioni che seguono, si pensi al caso di $n = 3$, in cui si è ridotti allo spazio ordinario.

pure coordinate razionali, purchè si attribuiscano a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ valori razionali. Facendo variare questi parametri si avranno punti razionali della sfera.

Un punto, che soddisfa alle condizioni richieste, è per es., quello ove la sfera è incontrata dall'asse x_n. Esso ha le coordinate $(0, \ldots, 0, 1)$ e ogni retta per esso avrà equazioni, che si potranno porre sotto la forma:

$$\frac{X_1}{\lambda_1} = \frac{X_2}{\lambda_2} = \ldots = \frac{X_n - 1}{-\lambda_n}. \tag{4}$$

Indicato con ρ il valore comune di queste frazioni, si ha

$$X_1 = \lambda_1 \rho, \qquad X_2 = \lambda_2 \rho, \ldots, X_n = 1 - \lambda_n \rho; \tag{4$'$}$$

e sostituendo nella (2) si ricava

$$\rho' = 0, \qquad \rho'' = \frac{2\lambda_n}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2}.$$

Il primo valore, sostituito nelle (4)$'$ fornisce il punto $(0, \ldots, 0, 1)$; il secondo, il punto:

$$X_1 = \frac{2\lambda_1\lambda_n}{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_{n-1}^2 + \lambda_n^2}, \ldots$$

$$\ldots, X_{n-1} = \frac{2\lambda_{n-1}\lambda_n}{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_{n-1}^2 + \lambda_n^2}, \quad X_n = \frac{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_{n-1}^2 - \lambda_n^2}{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_{n-1}^2 + \lambda_n^2}.$$

Una soluzione intera della equazione proposta è perciò

$$\frac{x_1}{2\lambda_1\lambda_n} = \ldots = \frac{x_{n-1}}{2\lambda_{n-1}\lambda_n} = \frac{x_n}{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_{n-1}^2 - \lambda_n^2} =$$
$$= \frac{x_{n+1}}{\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_{n-1}^2 + \lambda_n^2}.$$

Reciprocamente, ogni soluzione della (1) si ottiene dando ai parametri $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ convenienti valori.

Infatti le equazioni precedenti, risolute rispetto alle λ, dànno

$$\frac{\lambda_1}{x_1} = \frac{\lambda_2}{x_2} = \ldots = \frac{\lambda_{n-1}}{x_{n-1}} = \frac{\lambda_n}{x_{n+1} - x_n}.$$

3. Volendo procedere a una determinazione sistematica delle soluzioni intere della (1), si potrà fissare il valore di uno dei parametri e far variare gli altri. E siccome dalle (5) le λ sono determinate a mezzo di un fattore, si potrà limitarci ad attribuire ad esse valori interi positivi primi fra loro. Si osservi poi che, escluso il parametro λ_n, il quale, quando s'annulla, fornisce la soluzione evidente $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$, $x_n = x_{n+1}$, qualcuno degli altri parametri può anche essere zero, e in tal caso si annulla il valore dell'incognita di uguale indice e si ottiene una soluzione di una equazione dello stesso tipo con un numero minore di variabili.

Poichè, quando sui parametri $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ si eseguisce una sostituzione la stessa sostituzione, per le (5), avviene sulle variabili $x_1, \ldots, x_{n-1}$, per evitare di ottenere soluzioni equivalenti potremo, senza togliere nulla alla generalità, supporre

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{n-1}$$

e dare a λ_n tutti i valori, per cui risulta positiva o nulla la somma

$$\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_{n-1}^2 - \lambda_n^2.$$

Ma risultano pure equivalenti le soluzioni, in cui il valore di x_n sia scambiato con quello di una delle altre $n-1$, x. Trovata dunque una soluzione $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$, nella ricerca di ulteriori soluzioni, dovremo escludere, per le (5), i valori dei parametri proporzionali a

$$\begin{array}{lll} x_n, & x_2, \ldots, x_{n-1}, & x_{n+1} - x_1, \\ x_1, & x_n, \ldots, x_{n-1}, & x_{n+1} - x_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1, & x_2, \ldots, x_n, & x_{n+1} - x_{n-1}. \end{array}$$

4. Come esempio diamo, per $n = 3$, una tabella di soluzioni, ottenute seguendo il criterio su esposto.

λ_1	λ_2	λ_3	x_1	x_2	x_3	x_4	Parametri da escludere
1	0	1	1	0	0	1	
1	1	1	2	2	1	3	(2, 1, 1)
2	0	1	4	0	3	5	(3, 0, 1), (4, 3, 5)
2	1	2	8	4	1	9	(4, 1, 1), (8, 1, 5)
2	2	1	4	4	7	9	(7, 4, 5)
3	0	2	12	0	5	13	(5, 0, 1), (12, 5, 13)
3	1	1	6	2	9	11	(3, 2, 3), (9, 2, 5)
3	1	2	6	2	3	7	(3, 2, 1), (6, 3, 5)
3	1	3	18	6	1	19	(6, 1, 1), (18, 1, 13)
3	2	2	12	8	9	17	(4, 3, 3), (9, 8, 5)
3	3	1	6	6	17	19	(17, 6, 13)
3	3	2	6	6	7	11	(7, 6, 5)
3	3	4	12	12	1	17	(12, 1, 5)
4	0	1	8	0	15	17	(5, 0, 3), (15, 8, 17)
4	0	3	24	0	17	25	(7, 0, 1), (24, 7, 25)
4	1	2	16	4	13	21	(13, 4, 5), (16, 13, 17)
4	1	3	12	3	4	13	(4, 3, 1), (6, 2, 5)
4	1	4	32	8	1	33	(8, 1, 1), (32, 1, 25)
4	2	1	8	4	19	21	(19, 4, 13), (19, 8, 17)
4	2	3	24	12	11	29	(12, 11, 5), (24, 11, 17)
4	3	2	16	12	21	29	(21, 12, 13), (21, 16, 17)
4	3	4	32	24	9	41	(8, 3, 3), (32, 9, 17)
4	4	1	16	16	31	33	(31, 16, 17)
4	4	3	24	24	23	41	(24, 23, 17)
4	4	5	40	40	7	57	(40, 7, 17)

λ_1	λ_2	λ_3	x_1	x_2	x_3	x_4	Parametri da escludere
5	0	2	20	0	21	29	(21, 0, 9), (21, 20, 29)
5	0	4	40	0	9	41	(9, 0, 1), (40, 9, 41)
5	1	1	10	2	25	27	(5, 2, 5), (25, 2, 17)
5	1	2	10	2	11	15	(11, 2, 5), (11, 10, 13)
5	1	3	30	6	17	35	(17, 6, 5), (30, 17, 29)
5	1	4	20	4	5	21	(5, 4, 1), (20, 5, 17)
5	1	5	50	10	1	51	(10, 1, 1), (50, 1, 41)
5	2	1	5	2	14	15	(7, 1, 5), (14, 5, 13)
5	2	2	20	8	25	33	(5, 4, 5), (25, 8, 13)
5	2	3	15	6	10	19	(5, 3, 2), (15, 10, 13)
5	2	4	40	16	13	45	(16, 13, 5), (40, 13, 29)
5	3	1	10	6	33	35	(33, 6, 25), (33, 10, 29)
5	3	3	30	18	25	43	(6, 5, 5), (25, 18, 13)
5	3	4	20	12	9	25	(12, 9, 5), (20, 9, 13)
5	3	5	50	30	9	59	(10, 3, 3), (50, 9, 29)
5	4	2	20	16	37	45	(37, 16, 25), (37, 20, 29)
5	4	3	15	12	16	25	(8, 6, 5), (16, 15, 13)
5	4	4	40	32	25	57	(8, 5, 5), (32, 25, 17)
5	4	6	60	48	5	77	(48, 5, 17), (60, 5, 29)
5	5	1	10	10	49	51	(49, 10, 41)
5	5	2	10	10	23	27	(23, 10, 17)
5	5	3	30	30	41	59	(41, 30, 29)
5	5	4	20	20	17	33	(20, 17, 13)
5	5	6	30	30	7	43	(30, 7, 13)
5	5	7	70	70	1	99	(70, 1, 29).

Dr. G. Bisconcini.

SULLA TRASFORMAZIONE DEL RADICALE $\sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

1. Risulta, in generale, assai disagevole calcolare numericamente il valore di espressioni algebriche contenenti dei radicali sovrapposti. È utile perciò cercare a quali condizioni sarà possibile trasformare tali radicali nella somma di altri più semplici.

In questa mia Nota mi propongo di trasformare il radicale

$$\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}$$

nella somma di quattro radicali semplici, o nella somma di due radicali semplici e di una radice quarta di quantità razionale.

Applicherò inoltre i risultati ottenuti alla trasformazione di altri radicali.

2. Teorema. — *Il radicale*

$$\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}} \tag{1}$$

in cui le quantità a, b, c *sono razionali, si può trasformare nella espressione*

$$\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}\pm\sqrt{\varepsilon-\sqrt{\beta}}$$

in cui α, β, ε *sono quantità razionali, se risultano verificate le seguenti condizioni:*

1ª. *La differenza* $(a^2-b)^2-c$ *sia un quadrato perfetto* r^2, *sia cioè*

$$(a^2-b)^2-c=r^2. \tag{2}$$

2ª. *La quantità* $\frac{1}{2}(a^2-b-r)$ *sia pure un quadrato perfetto.*

Supponiamo infatti

$$\tfrac{1}{2}(a^2-b-r)=q^2, \tag{3}$$

e poniamo

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}&=\sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{z-\sqrt{y}}\\ \sqrt{a-\sqrt{b+\sqrt{c}}}&=\sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{z-\sqrt{y}}\end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

in cui x, y, z sono quantità razionali.

Considerando di ogni radicale il solo segno positivo ci sarà lecito innalzare al quadrato le equazioni (4), ottenendo le equazioni equivalenti

$$\begin{aligned}a+\sqrt{b+\sqrt{c}}&=x+z+2\sqrt{x+\sqrt{y}}\,.\,\sqrt{z-\sqrt{y}}\\ a-\sqrt{b+\sqrt{c}}&=x+z-2\sqrt{x+\sqrt{y}}\,.\,\sqrt{z-\sqrt{y}}\end{aligned}$$

dalle quali, sommando membro a membro, si ottiene

$$a=x+z. \tag{5}$$

Per le (2) e (3) si ha intanto

$$\sqrt{a^2-b-\sqrt{c}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2-b+r)}-\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2-b-r)}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2-b+r)}-q. \tag{6}$$

Moltiplicando membro a membro le (4) si ha inoltre

$$\sqrt{a^2-b-\sqrt{c}}=2\sqrt{y}-(z-x) \tag{7}$$

e quindi, dalle (6) e (7), si ricava

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2-b+r)}-q=2\sqrt{y}-(z-x),$$

che risulta soddisfatta se si pone

$$\tfrac{1}{2}(a^2-b+r)=4y \qquad q=z-x, \tag{8}$$

Dalle (5) e (8) si ha allora

$$x=\tfrac{1}{2}(a-q), \qquad y=\tfrac{1}{8}(a^2-b+r), \qquad y=\tfrac{1}{2}(a+q),$$

e quindi dalla (4), tenuto conto della (3), si ottiene

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b+\sqrt{c}}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a-q+\sqrt{a^2-b-q^2})}\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+q-\sqrt{a^2-b-q^2})} \tag{9}$$

come volevasi dimostrare.

3. Osserviamo ora che ciascuno dei due radicali che compariscono nel secondo membro della (9) si può decomporre nella somma di due radicali semplici se le quantità

$$2q(q-a)+b \qquad 2q(q+a)+b$$

sono due quadrati perfetti. Posto infatti

$$2q(q-a)+b=h^2, \qquad 2q(q+a)+b=k^2, \tag{10}$$

si ha

$$\sqrt{a-q+\sqrt{a^2-b-q^2}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a-q+h)}+\sqrt{\tfrac{1}{2}(a-q-h)},$$
$$\sqrt{a+q-\sqrt{a^2-b-q^2}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+q+k)}-\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+q-k)},$$

e quindi dalla (9) si ottiene

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b+\sqrt{c}}}=\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{a-q+h}+\sqrt{a-q-h}\pm\sqrt{a+q+k}\mp\sqrt{a+q-k}\right]; \tag{11}$$

risulta cioè che *il radicale* $\sqrt{a\pm\sqrt{b+\sqrt{c}}}$, *in cui* a, b, c *sono quantità razionali, si può decomporre nella somma di quattro radicali semplici, se oltre alle relazioni* (2) *e* (3) *risultano anche verificate le* (10).

Esempio numerico. — Supposto

$$a=12, \qquad b=38, \qquad c=420, \qquad r=104, \qquad q=1,$$

oltre alle (2) e (3) risultano anche verificate le (10) per

$$h=4, \qquad k=8,$$

quindi dalla (11) si ha

$$\sqrt{12\pm\sqrt{38+2\sqrt{105}}}=\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{15}+\sqrt{7}\pm\sqrt{21}\mp\sqrt{5}\right].$$

***

4. Teorema. — *Il radicale*

$$\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}$$

in cui a, b, c *sono quantità razionali, si può decomporre nella somma di due radicali semplici e di una radice quarta di quantità razionale, se risultano soddisfatte le seguenti condizioni:*

1ª. *La somma* $4a^2+b$ *sia un quadrato perfetto.*

2ª. *Il prodotto* $4a^2 . b$ *sia uguale a* $-c$.

Supponiamo infatti

$$4a^2+b=h^2, \tag{12}$$ $$4a^2 . b=-c, \tag{13}$$

e poniamo

$$\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}=\sqrt{x-\sqrt{y}}+\sqrt[4]{y}, \tag{14}$$

in cui le quantità x ed y siano razionali.

Considerando di ogni radicale il solo segno positivo, quadrando la (14) si ottiene l'equazione equivalente

$$a+\sqrt{b+\sqrt{c}}=x+2\sqrt[4]{y}\sqrt{x-\sqrt{y}},$$

che risulta soddisfatta se si pone

$$x=a, \qquad \sqrt{b+\sqrt{c}}=2\sqrt[4]{y}\sqrt{x-\sqrt{y}}, \tag{15}$$

Quadrando la seconda delle (15) si ha inoltre

$$b + \sqrt{c} = 4x\sqrt{y} - 4y,$$

che risulta verificata per

$$b = -4y, \qquad \sqrt{c} = 4x\sqrt{y},$$

ossia per

$$y = -\tfrac{1}{4} b, \quad (16) \qquad c = 16x^2 y. \quad (17)$$

La (17), tenuto conto della prima delle (15) e della (16), è identica alla (13), quindi si ha

$$\sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c}}} = \sqrt{a - \sqrt{-\tfrac{1}{4} b}} + \sqrt[4]{-\tfrac{1}{4} b}. \quad (18)$$

Ma dalla (12) risulta intanto

$$a^2 + \tfrac{1}{4} b = (\tfrac{1}{2} h)^2,$$

quindi, fatte le opportune riduzioni, si ottiene

$$\sqrt{a - \sqrt{-\tfrac{1}{4} b}} = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{2a + h} - \sqrt{2a - h}\right],$$

e perciò dalla (18) si ricava

$$\sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c}}} = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{2a + h} + \sqrt[4]{-4b} - \sqrt{2a - h}\right], \quad (19)$$

come volevasi dimostrare.

Analogamente si dimostrerebbe

$$\sqrt{a - \sqrt{b + \sqrt{c}}} = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{2a + h} - \sqrt[4]{-4b} - \sqrt{2a - h}\right]. \quad (20)$$

Esempio numerico. — Supposto

$$a = 3, \qquad b = -20, \qquad c = 720, \qquad h = 4,$$

risultano verificate le relazioni (12) e (13), quindi dalle (19) e (20) si ha

$$\sqrt{3 \pm \sqrt{-20 + 12\sqrt{5}}} = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{10} \pm 2\sqrt[4]{5} - \sqrt{2}\right].$$

***

5. Osserviamo ora che, se al posto della quantità a sostituiamo $\sqrt{a}$, la relazione (13) diventa

$$4a \cdot b = -c \quad (21)$$

e la (18) si può scrivere

$$\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b + \sqrt{c}}} = \sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{-\tfrac{1}{4} b}} + \sqrt[4]{-\tfrac{1}{4} b}. \quad (22)$$

Ricordiamo intanto che il radicale $\sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{-\tfrac{1}{4} b}}$ si può trasformare nella somma di due radici quarte di quantità razionali se il prodotto $a(a + \tfrac{1}{4} b)$ è un quadrato perfetto, o, ciò che è lo stesso, se il prodotto $a(4a + b)$ è un quadrato perfetto. (1)

Posto infatti

$$a(4a + b) = h^2, \quad (23)$$

risulta

$$a(a + \tfrac{1}{4} b) = (\tfrac{1}{2} h)^2,$$

(1) Vedi un'altra mia nota nel "Pitagora". Anno XI, pag. 59.

e si ottiene

$$\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{-\tfrac{1}{4}b}}=\tfrac{1}{2}\left[\sqrt[4]{8a+b+4h}-\sqrt[4]{8a+b-4h}\right].$$

Se oltre alla relazione (21) risulta anche verificata la (23), la (22) si può scrivere

$$\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b+\sqrt{c}}}=\tfrac{1}{2}\left[\sqrt[4]{8a+b+4h}+\sqrt[4]{-4b}-\sqrt[4]{8a+b-4h}\right], \qquad (24)$$

risulta cioè il seguente

TEOREMA. — *Il radicale* $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b+\sqrt{c}}}$, *in cui* a, b, c *sono quantità razionali, si può decomporre nella somma di tre radici quarte di quantità razionali se risultano soddisfatte le seguenti condizioni:*

1ª. *Il prodotto* a (4a + b) *sia un quadrato perfetto.*

2ª. *Le quantità* a, b, c *siano legate dalla relazione* 4a . b = — c.

Analogamente si dimostrerebbe

$$\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b+\sqrt{c}}}=\tfrac{1}{2}\left[\sqrt[4]{8a+b+4h}-\sqrt[4]{-4b}-\sqrt[4]{8a+b-4h}\right]. \qquad (25)$$

ESEMPIO NUMERICO. — Supposto

$$a=2 \qquad b=-6 \qquad c=48 \qquad h=2$$

risultano verificate le relazioni (21) e (23); dalle (24) e (25) si ha quindi

$$\sqrt{\sqrt{2}\pm\sqrt{-6+4\sqrt{3}}}=\tfrac{1}{2}\left[\sqrt[4]{18}\pm\sqrt[4]{24}-\sqrt[4]{2}\right].$$

SALVATORE COMPOSTO.

SULLE FUNZIONI SIMMETRICHE DELLE SOLUZIONI COMUNI A PIÙ CONGRUENZE SECONDO UN MODULO PRIMO

L'HURWITZ ha dato recentemente una risposta assai elegante alla questione di determinare il numero delle soluzioni di una congruenza

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_rx^r\equiv 0 \qquad (\text{mod } p),$$

rispetto a un modulo primo p. [1] Il metodo dell'illustre Autore è esclusivamente fondato sul teorema di FERMAT, e non richiede che le più elementari cognizioni della teoria delle congruenze.

Estendendo questo metodo, noi otteniamo qui la risoluzione di varii altri quesiti pertinenti alla teoria delle congruenze di grado superiore, come per es., la determinazione dei residui delle funzioni

(1) HURWITZ, *Archiv der Math. und Phys.*, III R., V, a. 1902, pp. 17-27. La questione era stata altrimenti risoluta dal KÖNIG, che enunciò una proposizione, dimostrata poi dal RADOS nel *Journal f. d. r. u. a. Math.*, IC, a. 1885, p. 258, e dal KRONECKER, ib. pp. 329-371. Cfr. anche vari lavori del GEGENBAUER nei *Ber. d. Ak. d. Wien*, XCV, a. 1887, pp. 165-169; XCVIII, a. 1889, pp. 652-672; CX, a. 1901, pp. 140-147.

simmetriche delle soluzioni di una congruenza, la determinazione del numero delle soluzioni comuni a più congruenze, etc.

1. Posto

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_r x^r$$

e

$$a_0 \equiv 0 \quad (\text{mod } p), \qquad a_r \equiv 0 \quad (\text{mod } p),$$

la differenza

$$1 - f(k)^{p-1}$$

è, per il teorema di FERMAT, divisibile per p, quando k non è soluzione della congruenza

$$f(x) \equiv 0 \quad (\text{mod. } p), \tag{1}$$

ed è invece congrua a 1 (mod p), quando k è soluzione della congruenza. Pertanto, il numero N delle soluzioni della congruenza (1) è congruo (mod p) alla somma

$$\sum_{k=1}^{p-1} [1 - f(k)^{p-1}].$$

Onde, posto

$$f(x)^{p-1} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{r(p-1)} x^{r(p-1)},$$

si ha

$$N \equiv p - 1 - \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{i=0}^{r(p-1)} A_i k^i \equiv -1 - \sum_{i=0}^{r(p-1)} A_i [1^i + 2^i + \ldots + (p-1)^i],$$

e infine, osservando che si ha

$$A_0 \equiv a_0^{p-1} \equiv 1 \quad (\text{mod. } p),$$

$$1^i + 2^i + \ldots + (p-1)^i \equiv \begin{cases} 0, \ (\text{mod } p), \text{ se non è } i \equiv 0 \ (\text{mod } p-1), \\ -1, \ (\text{mod } p), \text{ se è } \quad i \equiv 0 \ (\text{mod } p-1), \end{cases}$$

si ottiene

$$N \equiv \sum_{i=1}^{r} A_{i(p-1)}. \tag{2}$$

Questo risultato si può mettere sotto un'altra forma, dopo avere osservato che è

$$A_{i(p-1)} = \Sigma \frac{(p-1)!}{\alpha_0! \, \alpha_1! \ldots \alpha_r!} a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_r^{\alpha_r},$$

essendo la somma estesa a tutte le soluzioni in numeri interi positivi o nulli, comuni alle due equazioni

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = p - 1, \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + r\alpha_r = i(p-1).$$

Si arriva così al teorema di HURWITZ:

Il numero delle soluzioni della congruenza

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_r x^r \equiv 0 \quad (\text{mod } p),$$

dove a_0 *non è divisibile per* p, *è uguale al numero intero positivo minore di* p, *che è congruo* (mod p) *alla somma*

$$\Sigma \frac{(p-1)!}{\alpha_0! \, \alpha_1! \ldots \alpha_r!} a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_r^{\alpha_r},$$

estesa a tutte le soluzioni in numeri interi positivi o nulli, dell'equazione

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = p - 1\,,$$

che soddisfano alle condizioni

$$\alpha_0 < p - 1\,, \qquad \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + r\alpha_r \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p-1).$$

2. Seguendo questo metodo, si possono determinare i resti (mod p) delle somme delle potenze simili delle soluzioni della congruenza (1).

Indichiamo con s_k la somma delle potenze k^{ime} delle soluzioni della congruenza (1), avremo evidentemente

$$\begin{aligned} s_k &\equiv 1^k[1-f(1)^{p-1}] + 2^k[1-f(2)^{p-1}] + \ldots + (p-1)^k[1-f(p-1)^{p-1}] \equiv \\ &\equiv 1^k + 2^k + \ldots + (p-1)^k - \sum_{i=1}^{p-1} i^k [A_0 + A_1 i^2 + \ldots + A_{r(p-1)} i^{r(p-1)}] \equiv \\ &\equiv 1^k + 2^k + \ldots + (p-1)^k - \sum_{h=0}^{r(p-1)} A_h [1^{h+k} + 2^{h+k} + \ldots + (p-1)^{h+k}] \equiv \\ &\equiv - \sum_{h=1}^{r(p-1)} A_h [1^{h+k} + 2^{h+k} + \ldots + (p-1)^{h+k}] \qquad (\mathrm{mod}\ p). \end{aligned}$$

Osservando che il coefficiente di A_h è $\equiv 0$ (mod. p) se non è $h+k \equiv 0$ (mod p), ed è invece $\equiv -1$ (mod p) se è $h+k \equiv 0$ (mod p), ponendo

$$\varkappa = \left[\frac{k}{p-1}\right],$$

si ha

$$s_k \equiv \sum_{i=1+\varkappa}^{r+\varkappa} A_{i(p-1)-k} \qquad (\mathrm{mod}\ p),$$

ovvero, se si vuole,

$$s_k \equiv \Sigma\, A_i \qquad (\mathrm{mod}\ p) \tag{3}$$

essendo la somma estesa a tutti i valori di i interi, positivi, diversi da zero e non superiori a $r(p-1)$, che verificano la congruenza

$$i + k \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p-1).$$

Con un ragionamento analogo a quello fatto al n. 1, si conclude che *la somma delle potenze k^{ime} delle soluzioni della congruenza* (1) *è congrua alla somma*

$$\Sigma \frac{(p-1)!}{\alpha_0!\,\alpha_1!\ldots\alpha_r!}\, a_0^{\alpha_0}\, a_1^{\alpha_1} \ldots a_r^{\alpha_r}\,,$$

estesa a tutte le soluzioni, in numeri interi positivi o nulli, dell'equazione

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = p - 1,$$

che verificano le condizioni

$$\alpha_0 < p - 1, \qquad k + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + r\alpha_r \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p-1).$$

Ciò posto, in virtù di note proposizioni, il residuo (mod p) di una funzione simmetrica qualunque delle soluzioni di una congruenza si può esprimere mediante una funzione razionale dei coefficienti della congruenza. In particolare, si potrà determinare la congruenza che ammette tutte le soluzioni della data e il cui grado sia eguale al numero delle soluzioni stesse.

3. Il metodo di HURWITZ si può estendere anche alla risoluzione della seguente importante questione: *Ricercare le condizioni necessarie e sufficienti perchè due congruenze*

$$f(x) \equiv 0, \quad (4) \qquad g(x) \equiv 0 \pmod{p} \quad (5)$$

abbiamo m *soluzioni.*

Se poniamo

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r, \qquad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_s x^s$$

e supponiamo che non sia

$$a_0 \equiv 0, \quad a_r \equiv 0, \quad b_0 \equiv 0, \quad b_s \equiv 0. \pmod{p},$$

e se

$$x_1, \ x_2, \ldots, x_\varrho$$

è un sistema completo di soluzioni della (4), la differenza

$$x_i^k [1 - g(x_i)^{p-1}]$$

sarà congrua a zero (mod p), quando x_i è una soluzione della (5), e sarà invece congrua a x_i^k, quando x_i è soluzione della (5). Onde, se indichiamo con S_k la somma delle potenze k^{ime} delle soluzioni comuni a (4) e (5), e con s_k la somma delle potenze k^{ime} delle soluzioni della (4), si ha

$$S_k \equiv \sum_{i=1}^{\varrho} x_i^k [1 - g(x_i)^{p-1}] \equiv s_k - \sum_{i=1}^{\varrho} x_i^k g(x_i)^{p-1} \pmod{p}.$$

Posto quindi

$$g(x)^{p-1} = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_{s(p-1)} x^{s(p-1)},$$

la precedente congruenza diviene

$$S_k \equiv s_k - \sum_{i=0}^{s(p-1)} B_i s_{i+k} \equiv - \sum_{i=1}^{s(p-1)} B_i s_{i+k} \pmod{p},$$

e, in virtù della (3),

$$S_k \equiv - \sum_{i,j} A_j B_i \pmod{p}, \quad (6)$$

essendo la somma estesa a tutti i valori di i e di j, che verificano le condizioni

$$0 < i \leqq s(p-1), \quad 0 < j \leqq r(p-1), \quad i + j + k \equiv 0 \pmod{p-1}.$$

Per $k = 0$, se ne deduce:

Il numero m *delle soluzioni comuni alle due congruenze* (4), (5) *è dato dalla congruenza*

$$m \equiv - \sum_{i,j} A_j B_i . \quad (7)$$

dove la somma si deve estendere a tutti i numeri interi i, j *che soddisfano alle condizioni*

$$0 < i \leqq s(p-1), \qquad 0 < j \leqq r(p-1)$$
$$i + j \equiv 0 \pmod{p}.$$

4. Una notevole applicazione della formula (7) si ottiene ricercando quanti residui n-ici di p vi siano tra le soluzioni della congruenza, essendo n un divisore di $p-1$. Ciò equivale a ricercare il numero delle soluzioni comuni alle due congruenze

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}, \qquad \text{e} \qquad x^{\frac{p-1}{n}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Basterà osservare che, essendo

$$\left(1-x^{\frac{p-1}{n}}\right)^{p-1} = 1 - \binom{p-1}{1} x^{\frac{p-1}{n}} + \binom{p-1}{2} x^{2\frac{p-1}{n}} - \ldots + x^{(p-1)\frac{p-1}{n}},$$

si ha

$$B_i \equiv \begin{cases} 0 \pmod{p}, & \text{se non è } i \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\, \dfrac{p-1}{n}\right), \\ 1 \pmod{p}, & \text{se è } i \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\, \dfrac{p-1}{n}\right), \end{cases}$$

e si ottiene dalla (7) il teorema:

Il numero m *delle soluzioni della congruenza* (1), *che sono residui* n-*ici di* p, *essendo* n *un divisore di* p — 1, *è dato dalla congruenza*

$$m \equiv -\frac{p-1}{n} \sum_{i=1}^{m} A_{\frac{p-1}{n}i} \pmod{p}. \tag{8}$$

5. Si giunge facilmente ad estendere la proposizione del n. 2. Se

$$f_1(x) \equiv 0, \quad f_2(x) \equiv 0, \ldots, f_n(x) \equiv 0 \pmod{p} \tag{9}$$

sono n congruenze dei gradi $r_1, r_2, \ldots, r_n$, prive di soluzioni congrue a zero (mod p), e se si pone

$$f_i(x)^{p-1} = A_0^{(i)} + A_1^{(i)}x + A_2^{(i)}x^2 + \ldots + A^{(i)}_{r_i(p-1)}x^{r_i(p-1)},$$

si dimostra facilmente per induzione completa che il resto (mod p) della somma S_k delle potenze k^{ime} delle soluzioni comuni alle congruenze (9) è dato dalla congruenza

$$S_k \equiv (-1)^{n-1} \Sigma A_{i_1}^{(1)} A_{i_2}^{(2)} \ldots A_{i_n}^{(n)}, \pmod{p} \tag{10}$$

essendo la somma estesa a tutte le soluzioni della congruenza

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_{n-1} + i_n + k \equiv 0 \pmod{p-1},$$

che soddisfano alle condizioni

$$0 < i_1 \leqq r_1(p-1), \quad 0 < i_2 \leqq r_2(p-1), \ldots, 0 < i_n \leqq r_n(p-1). \tag{11}$$

In particolare, *il numero* m *delle soluzioni comuni alle congruenze* (9) *è dato dalla congruenza*

$$m \equiv (-1)^{n-1} \Sigma A_{i_1}^{(1)} A_{i_2}^{(2)} \ldots A_{i_n}^{(n)} \pmod{p}, \tag{12}$$

dove la somma va estesa a tutte le soluzioni della congruenza

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_n \equiv 0 \pmod{p-1},$$

che soddisfano alle condizioni (11).

6. Come applicazione dei risultati del num. precedente, notiamo il teorema:

Se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sono* n *numeri interi non congrui a zero* (mod p) *e non tutti congrui fra loro* (mod p), *e se* k *è anche un numero intero qualunque, si ha, per* $n > 1$,

$$\Sigma\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_n^{i_n} \equiv 0 \qquad (\text{mod } p),$$

qualora la somma si estenda a tutte le soluzioni, in numeri interi positivi diversi da zero e non superiori a $p-1$, *della congruenza*

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_n + k \equiv 0 \qquad (\text{mod } p-1).$$

Basterà applicare le considerazioni del num. precedente alle congruenze

$$x + a_1 \equiv 0, \quad x + a_2 \equiv 0, \ldots, x + a_n \equiv 0 \qquad (\text{mod } p).$$

In ultimo osserviamo che il numero delle soluzioni multiple di ordine m di una congruenza $f(x) \equiv 0$ (mod p), si può ottenere determinando con la formula (12) prima il numero N_{m-1} delle soluzioni comuni alla congruenza data e alle sue derivate sino a quella di ordine $m-1$, poi il numero N_m delle soluzioni comuni alla congruenza data e alle sue derivate sino a quella d'ordine m. La differenza

$$N_{m-1} - N_m$$

sarà uguale al numero delle soluzioni multiple d'ordine m della congruenza data.

M. Cipolla
Palermo.

SULLA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA DELL'ADDIZIONE

1. Nell'ottimo trattato di Aritmetica del prof. P. Gazzaniga nella dimostrazione della proprietà associativa dell'addizione: $(a+b)+c = a+(b+c)$ vi è una menda che va notata. Premesse cinque proposizioni fondamentali e la definizione dell'addizione: $a+1 = a_s$: $a + x_s = (a+x)_s$ e la proprietà se $a=b$, $a+c = b+c$ e viceversa passa alla dimostrazione della proprietà associativa che qui riproduco:

1ª Per la legge di formazione della somma, qualunque siano a e b

$$a + (b+1) = (a+b) + 1.$$

2ª Sia per ipotesi $a + (b+x) = (a+b) + x$, si avrà

$$a + (b + x_s) = (a+b) + x_s;$$

difatti

$$a + (b + x_s) = a + (b+x)_s = [a + (b+x)]_s;$$
$$(a+b) + x_s = [(a+b) + x]_s.$$

Vi è da osservare

1°. Come è lecito stabilire $a + (b + 1) = (a + b) + 1$? La legge di formazione della somma ci dà

$$b + 1 = b_s; \qquad (a + b) + 1 = (a + b)_s;$$
$$a + b_s = (a + b)_s = (a + b) + 1;$$

per concludere che $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ bisogna *ammettere* che

$$a + b_s = a + (b + 1)$$

ovvero, poichè $b_s = b + 1$, la proposizione, se $c = d$, $a + c = a + d$.

2°. Il passaggio

$$a + (b + x_s) = a + (b + x)_s$$

implica la stessa proposizione poichè dalla definizione dell'addizione si ha appunto $b + x_s = (b + x)_s$.

Nella dimostrazione del Peano (v. Aritmetica generale p. 10, 2) che in sostanza è identica a quella riportata dal Gazzaniga vi è da fare la stessa osservazione: In sostanza la dimostrazione della proprietà associativa dell'addizione presuppone nota la proposizione: se $a = b$, $c + a = c + b$.

Ora posto il sistema di proposizioni fondamentali del Peano (A. G. p. 8; 1, 1-5) e le proporzioni generali sull'eguaglianza (A. G. p. 4; 4, 3.4), e cioè se $x = y$, ogni classe di numeri che contiene x, contiene y la dimostrazione della proposizione precedente è analoga a quella della proposizione se $a = b$, $a + c = b + c$ e non porta difficoltà.

Ma volendo attenersi al solo sistema di proposizioni del Gazzaniga, mediante le quali l'uguaglianza aritmetica è definita soltanto in base alle seguenti proprietà:

1ª. $a = b$, $a = b$ è equivalente a $b = a$, se $a = b$ e $b = c$ è $a = c$;

2ª $a = b$ è equivalente ad $a_s = b_s$;

3ª principio d'induzione;

la cosa cambia, perchè sembra che la dimostrazione della suddetta proposizione presupponga appunto la proprietà associativa dell'addizione. Però si può pervenire a dimostrare la suddetta proprietà associativa senza l'introduzione del concetto di classe ed è questo che ci proponiamo di fare. Prima però vogliamo pervenire mediante opportune definizioni ad una forma puramente aritmetica del principio d'induzione.

2. Le Pp primitive dell'aritmetica sono le seguenti:

Pp¹. 1 è numero.

Dich. Il segno 1 si legge *uno*.

Pp². Se a è numero, a_s è numero.

Dich. Il segno a_s si legge *successivo di a*.

Pp³. Se a è numero, 1 non è a_s.

Df¹. Il segno $=$ si legge *uguale*, e la scrittura $a = b$ uguaglianza aritmetica se a e b sono numeri. L'uguaglianza aritmetica è definita oltre che dalle tre proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva dalle 2 ultime Pp. primitive:

Pp⁴. Se, essendo a, b numeri, $a = b$, è $a_s = b_s$ e viceversa.

Df². Se su più numeri $a, b, c, \ldots$ si eseguiscono in un certo ordine delle operazioni aritmetiche ben definite, si ottiene una scrittura in cui compaiono i numeri $a, b, c, \ldots$ e i segni delle operazioni eseguite; questa scrittura si dice *espressione aritmetica*.

Df[3]. Se, eseguendo su più numeri $a, b, c, \ldots$ in un certo ordine delle operazioni aritmetiche ben definite, si ottiene un numero d e se su questo numero con altri, si abbiano da eseguire delle operazioni aritmetiche, il numero d si può rappresentare scrivendo l'espressione aritmetica corrispondente fra parentesi; la nuova scrittura che così si ottiene si dice anche *espressione aritmetica.*

Df[4]. Se sui numeri che compaiono in una espressione aritmetica eseguendo le operazioni indicate si ottiene un numero, questo si dice *corrispondente* alla espressione aritmetica.

Pp[5]. Se a più espressioni aritmetiche corrispondono numeri e questi sono uguali quando c è 1, e se supposto che ciò avvenga qualora c è x, si dimostri avvenire quando c è x_s, alle espressioni aritmetiche corrispondono numeri e questi sono uguali, qualunque numero sia c.

Osservazione. — Da questa Pp. consegue in particolare che per poter asserire che a una espressione aritmetica corrisponde un numero, qualunque numero sia c si deve in primo luogo verificare che ciò avviene se c è 1, e in secondo luogo supposto ciò vero se c è x si deve dimostrarlo se c è x_s.

1ª Operazione Aritmetica - Addizione.

Il segno dell'addizione è $+$ e si legge *più.*

L'addizione è definita dalle due Pp.

$$a + 1 = a_s \qquad \alpha) \qquad\qquad a + x_s = (a + x)_s. \qquad \beta)$$

Teorema 1. — *Se* a *e* c *sono numeri, all'espressione aritmetica* a + c *corrisponde un numero.*

Dm. Per la α) ad $a + 1$ corrisponde il numero a_s e se $a + x$ è numero per le β) ad $a + x_s$ corrisponde il numero $(a + x)_s$, quindi il Teorema è vero (Pp[5]. Oss.)

Teorema 2. — *Se* a = b, a + c = b + c, *e viceversa.*

Dm. Se c è 1, $a + 1 = a_s$, $b + 1 = b_s$ quindi (Pp[4].) se $a = b$, $a + 1 = b + 1$, e viceversa.

Supposto, se $a = b$, $a + x = b + x$ e viceversa, poichè $a + x_s = (a + x)_s$ $b + x_s = (b + x)_s$ [β)] sarà (Pp[4].) se $a = b$, $a + x_s = b + x_s$ e viceversa. Quindi ecc. (Pp[5].)

Teorema 3. — $1 + a = a + 1 = a_s$.

Dm. Se $a = 1$, $1 + 1 = 1_s$ [Df. α)]. Supposto $1 + x = x + 1 = x_s$, poichè

$$1 + x_s = (1 + x)_s = (x + 1)_s \text{ (Ip. e Pp}^4),$$
$$x_s + 1 = (x + 1) + 1 = (x + 1)_s \text{ [Df. } \alpha), \text{ T. 2]}$$

sarà $1 + x_s = x_s + 1$. Quindi ecc. (Pp[5].)

Corollario. — Se $a = b$, $1 + a = 1 + b$. (T. 3, T. 2).

Teorema 4. — (a + b) + c = a + (b + c).

Dich. Pel Teor. 1, alle espressioni aritmetiche $(a + b) + c$, $a + (b + c)$ corrispondono numeri, di più queste sono uguali.

Dm. Se a è 1; $(1 + b) + c = 1 + (b + c)$. Difatti, se c è 1:

$$(1 + b) + 1 = (1 + b)_s \text{ [Df. } \alpha)],$$
$$1 + (b + 1) = 1 + b_s \text{ [Df. } \alpha), \text{ T. 3, Cor.]} = (1 + b) \text{ [Df. } \beta)],$$

quindi $(1 + b) + 1 = 1 + (b + 1)$.

Supposto $(1 + b) + x = 1 + (b + x)$, poichè

$$(1 + b) + x_s = [(1 + b) + x]_s \text{ [Df. } \beta)] = [1 + (b + x)]_s \text{ (Ip. e Pp}^4.)$$
$$1 + (b + x_s) = [1 + (b + x)]_s \text{ [Df. } \beta) \text{ T. 3, Cor.]} = [1 + (b + x)]_s \text{ [Df. } \beta)]$$

sarà: $1+(b+x_s)=(1+b)+x_s$, quindi ecc. (Pp⁵.) Segue che se a è 1,

$$(1+b)+c=1+(b+c).$$

Supposto $(x+b)+c=x+(b+c)$ sarà:

$$\begin{aligned} x_s+(b+c) &= (x+1)+(b+c) \text{ [Df. } \alpha), \text{ T. 2]} = \\ &= (1+x)+(b+c) \text{ (T. 3, T. 2)} = 1+[x+(b+c)] \text{ (caso precedente)} = \\ &= 1+[(x+b)+c] \text{ (Ip. T. 3, Cor.)} = [1+(x+b)]+c \text{ (caso precedente)} = \\ &= [(1+x)+b]+c \text{ (caso prec. e T. 2)} = (x_s+b)+c \text{ (T. 3 e T. 2)}, \end{aligned}$$

quindi ecc. (Pp⁵.)

Corollario. — $a+(c+1)=a+c_s$.

Dm. $a+(c+1)=(a+c)+1=(a+c)_s=a+c_s$.

Teorema 5. — $a+b=b+a$.

Dm. Se a è 1, $1+b=b+1$ (T. 3). Supposto $x+b=b+x$ sarà:

$$x_s+b=(1+x)+b=1+(x+b)=1+(b+x)=(b+x)+1=b+x_s.$$

F. Saverio Palmieri

Messina.

RISOLUZIONE DELLA QUISTIONE 640

640. *Dimostrare che per* $-\rho<x<\rho$ *è*

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c_i}{i+1}x^{i+1}=\frac{a}{\sqrt{b^2-4ac}}\,l\left(\frac{b+2cx-\sqrt{b^2-4ac}}{b+2cx+\sqrt{b^2-4ac}}\right) \qquad 4ac-b^2<0$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c_i}{i+1}x^{i+1}=\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}} \qquad 4ac-b^2>0$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c_i}{i+1}x^{i+1}=\frac{-2a}{b+2cx} \qquad 4ac-b^2=0$$

dove ρ *è, in valore assoluto, la più piccola fra le radici* $-\mathrm{x}_1$, $-\mathrm{x}_2$ *di* $\mathrm{a}+\mathrm{bx}+\mathrm{cx}^2=0$ *ed inoltre*

$$c_i=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\binom{-1}{j}\binom{-1}{i-1}}{x_1^{\,j}\,x_2^{\,i-j}}.$$

R. Occhipinti.

Risoluzione del sig. G. Pasta, R. U. di Palermo.

Ricordiamo che [1]

$$\begin{aligned} \int\frac{dx}{a+bx+cx^2} &= -\frac{2}{b+2cx}, && \text{se} \quad 4ac-b^2=0, \\ &= \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}}, && \text{se} \quad 4ac-b^2>0, \\ &= \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\,l\left(\frac{b+2cx-\sqrt{b^2-4ac}}{b+2cx+\sqrt{b^2-4ac}}\right), && \text{se} \quad 4ac-b^2<0. \end{aligned}$$

Ciò posto, si ha

$$a+bx+cx^2=c\,(x+x_1)\,(x+x_2)$$

(1) V. ad es. Oskar Schlömilch, *Übungsbuch zum studium der höheren Analysis*, zweiter Teil, pag. 11.

quindi

$$\frac{1}{a+bx+cx^2}=c^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}\left(1+\frac{x}{x_1}\right)^{-1}\left(1+\frac{x}{x_1}\right)^{-1}=a^{-1}\left(1+\frac{x}{x_1}\right)^{-1}\left(1+\frac{x}{x_2}\right)^{-1};$$

e, per la nota formula dello sviluppo in serie del binomio della forma $(1+x)^m$, supposto $\left(\frac{x}{x_1}\right)^2<1$, $\left(\frac{x}{x_2}\right)^2<1$, ossia $\left(\frac{x}{\rho}\right)^2<1$, dove ρ ha il significato dichiarato nell'enunciato della quistione, si ha

$$\frac{1}{a+bx+cx^2}=$$
$$=a^{-1}\left(1-\frac{1}{x_1}x+\frac{1}{x_1^2}x^2-\frac{1}{x_1^3}x^3+\ldots\right)\left(1-\frac{1}{x_2}x+\frac{1}{x_2^2}x^2-\frac{1}{x_2^3}x^3+\ldots\right).$$

Le due serie scritte a destra moltiplicate dànno una serie il cui termine generale è

$$c_nx^n=(-1)^n\left(\frac{1}{x_2^n}+\frac{1}{x_1x_2^{n-1}}+\frac{1}{x_1^2x_2^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{x_1^n}\right)x^n,$$

dunque

$$\frac{a}{a+bx+cx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n.$$

Moltiplicando per dx ed integrando fra 0 ed x si ottiene

$$a\int^x\frac{dx}{a+bx+cx^2}=c_0x+\frac{c_1}{2}x^2+\frac{c_2}{3}x^3+\ldots=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c_i}{i+1}x^{i+1}. \quad \text{c. v. d.}$$

Osservazione. — La formula dimostrata può dar luogo ad innumerevoli identità, particolarizzando i coefficienti a, b, c. Per es.: per $a=1$, $b=-2$, $c=1$ si ha $-x_1=-x_2=1$, e quindi

$$c_n=(-1)^n(n+1) \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=0}^{\infty}\frac{c_i}{i+1}x^{i+1}=\sum_{i=0}^{\infty}x^i.$$

Per la formula dimostrata si ha dunque

$$1+x+x^2+\ldots=-\frac{2}{-2+2x}=\frac{1}{1-x},$$

che è la nota formula che dà lo sviluppo della serie geometrica convergente assolutamente per $|x|<1$.

BIBLIOGRAFIA

Francesco Brioschi — *Opere matematiche*, T. IV, Milano, Hoepli, 1906.

Il quarto volume di questa splendida pubblicazione, fatta per cura del Comitato per le onoranze a Brioschi, del quale abbiamo parlato più volte, contiene 46 note e memorie (dalla CXLV alla CXC), preparate per la stampa e rivedute dai proff. Gerbaldi e Pascal.

Le prime 16 sono i lavori pubblicati nei Rendiconti o Memorie della R. Accademia dei Lincei dal 1885 al 1896, e si riferiscono principalmente alla teoria delle funzioni iperellittiche e all'equazione di 6° grado: quattro di esse sono interessanti necrologie di Halphen, Govi, Cayley, Schläfli.

Seguono una nota sugl'integrali multipli ed una memoria " sopra alcune relazioni modulari " pubblicate dal 1864 al 1868 nei Rendiconti ed Atti della R. Accademia di Napoli; altri lavori pubblicati negli Atti della R. Accademia di Torino, nel giornale di Napoli, nel volume *Collectanea mathematica in memoriam Dominici Chelini*, ecc.

Il volume termina con 17 comunicazioni pubblicate nei Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, dal 1858 al 1877 relative principalmente alle funzioni ellittiche ed abeliane.

PIONCHON. — *Principes et formules de trigonométrie rectiligne et sphérique.* Bibliothèque de l'élève ingénieur. Grenoble, Grathier et Rey. Paris, Gauthier-Villars, 1906.

L'autore nella prefazione dichiara che questo libro non è nè un'opera scolastica nè un'opera scientifica per i matematici, ma solo " una specie di *Memento* ragionato dei principali imprestiti che, per i bisogni dello studio e della pratica delle scienze applicate, l'allievo ingegnere può esser condotto a fare ai principî e alle formule della trigonometria rettilinea e sferica ". Per queste ragioni il libro ha potuto trovare posto nella Biblioteca dell'allievo ingegnere.

In esso oltre alle formule trigonometriche ordinarie si trovano le derivate e gl'integrali relativi alle funzioni circolari.

LUCAS DE PESLOÜAN. — N. H. Abel. *Sa vie et son oeuvre.* Paris, Gauthier-Villars, 1906.

In uno degli eleganti volumi della bella collezione iniziata dal Naud e continuata dal Gauthier-Villars, l'autore ha narrato con stile facile ed attraente le vicende della breve e travagliata esistenza del grande matematico norvegiano, ed ha cercato di far conoscere l'importanza dell'opera scientifica, il valore capitale delle scoperte di lui, che, incomprese o quasi dai suoi contemporanei, aprirono una nuova via maestra nel campo dell'alta analisi.

L'opera si compone di quattro capitoli dai seguenti titoli:

I. — *Cristiania - Gioventù* (1802-25).
II. — *Il viaggio* (1825-27).
III. — *Ultimi anni* (1827-1829).
IV. — *Alcune riflessioni a proposito di Abel.*

Abel nacque a Finö piccola isola al Sud-Ovest della Norvegia, dove il padre Giorgio, era pastore protestante.

Quando aveva un anno, il padre fu trasferito alla cura importante di Gjerrestad sul Golfo di Cristiania, dove la famiglia numerosa passò alcuni anni felici e molti tristi, essendo scoppiata nel 1807 la seconda guerra coll'Inghilterra che ridusse il paese all'estrema miseria. Nel 1815 *Abel* entrò nella Scuola Cattedrale di Cristiania, dove parve sulle prime uno scolaro mediocre, finchè dopo tre anni un giovane professore, Holmboë, succeduto ad altro vecchio e semibarbaro, si acquista l'affetto di *Abel*, ne intuisce il genio e lo invoglia allo studio delle matematiche. Alla fine del 1818 Holmboë scriveva del suo allievo: " È un genio rimarchevole ", e un anno dopo: " Diventerà, se vive, un gran matematico ", anzi attraverso alle cancellature si legge che originariamente era scritto: " il più gran matematico del mondo ".

Nel 1820 muore il padre, e la famiglia cade nella più estrema miseria. Ma, mercè l'opera affettuosa di Holmboë, Niels-Enrico è nel 1821 inscritto all'Università, dove in mezzo agli stenti, attenuati dagli aiuti di Holmboë e di un altro suo professore, l'Hansteen, cominciò a produrre molti lavori che contengono i primi germi delle teorie che resero poi illustre il suo nome, ma che furono pubblicati solo nel 1839. Fra questi lavori però sembra che egli annettesse importanza solo a quello sull'equazione di 5° grado.

Tutto questo forma argomento del I capitolo dell'opera. Il II capitolo narra le vicende del viaggio che egli fece dal 1825 al 1827, mercè il sussidio del governo Norvegiano, attraverso l'Europa per conoscere i maggiori matematici del tempo.

L'episodio più felice di questo viaggio fu l'amicizia di Leopoldo Crelle, a Berlino, che divenne da quell'epoca suo protettore e editore. Le due mete più importanti del viaggio di *Abel* dovevano essere Gottinga, dove contava conoscere personalmente il sommo Gauss, e Parigi.

Ma, siccome gli era stato riferito, che quando ricevè la sua memoria sulla impossibilità di risolvere l'equazione di 5^0 grado, Gauss aveva esclamato: " ancora uno di questi errori ", non osò mai presentarsi solo, ed essendo sfumato il progetto di andarvi accompagnato da Crelle, tornò in Norvegia, senza passare da Gottinga. A Parigi, ove giunse con grande entusiasmo nel Luglio 1826 conobbe i matematici più insigni dell'epoca, ma non fu probabilmente apprezzato al suo giusto valore.

" Io non amo il francese quanto il tedesco (così scriveva all'amico Holmboë): il francese è estremamente riservato riguardo ai forestieri; è difficile arrivare a relazioni intime con lui, e non oso sperare di giungervi. Ciascuno lavora a parte senza occuparsi degli altri. Tutti vogliono istruire e nessuno vuole imparare. L'egoismo più assoluto regna su tutto ".

Ed ecco il suo giudizio sui maggiori matematici francesi: " *Legendre* è un uomo estremamente amabile, ma vecchio come le pietre... *Cauchy* è matto e non c'è niente da fare con lui, benchè sia il matematico, che meglio sappia come si devono trattare le Matematiche... *Laplace* è molto piccolo, ma ha il difetto che il diavolo zoppo rimprovera a Zambullo, vale a dire la cattiva abitudine di tagliar la lingua alla gente... *Poisson* è un omino con una graziosa pancetta. Porta il suo corpo con dignità. *Fourier* è lo stesso. *Lacroix* è spaventevolmente calvo e molto vecchio ".

Il suo breve passaggio in Italia non ha svegliato in lui curiosità artistiche o storiche. Padova, dice, è una città orribile, Verona non ha di rimarchevole che l'Arena; solo Venezia gl'ispirò qualche frase.

Verso la metà di Maggio rientrava in Norvegia dopo 20 mesi d'assenza " povero di denaro, ricco di conoscenze, ma senza avere ottenuto in Europa la minima consacrazione ufficiale del suo genio ".

Il terzo capitolo narra degli altri due anni della sua vita passati lottando colla miseria confortata dal miraggio di una cattedra alla Università di Cristiania o a quella di Berlino, che non doveva avere giammai.

L'episodio più saliente di questo periodo è questo. Jacobi aveva pubblicato negli " Annales de Schumacher " la dimostrazione di un teorema relativo alla trasformazione delle funzioni ellittiche.

Abel, che aveva l'abitudine di pubblicare sempre una piccola parte delle sue scoperte, provò, leggendo la memoria d'Jacobi, un'emozione vivissima, " fatta senza dubbio di gelosia e di collera, forse anche del timore di essere preceduto; ma la sua inquietudine dovette cedere ad un movimento d'orgoglio, quando vide con quale timidezza Jacobi aveva impiegato l'inversionè. Essa non era per lui che un mezzo e non una idea direttrice ".

Ed allora in pochissimi giorni scrisse l'ammirabile e orgogliosa memoria *Soluzione d'un problema generale concernente la trasformazione delle funzioni elittiche* Pochi giorni dopo scriveva ad Holmboë: " La mia esecuzione di Jacobi è stampata; ne preparo un'altra che deve partire ".

Il 19 decembre 1828, recandosi con un freddo intenso da Cristiania a Froland dove si trovava la sua fidanzata Cristina Kemp, prese una bronchite che, convertitasi ben presto in una tisi terribile, lo condusse il 6 aprile 1829 alla tomba.

Il quarto capitolo contiene interessanti considerazioni sulle opere scientifiche di Abel e sulle cause per le quali egli fu così lungamente incompreso e non apprezzato al suo giusto valore.

Siamo sicuri che quanti s'interessano agli studî matematici leggerano col più vivo piacere questo libro, di cui abbiamo voluto dare un resoconto molto sommario.

K.

Il 9 Luglio è morto a Parigi all'età di 64 anni il valente matematico

Gastone Alberto Gohierre de Longchamps.

Egli era ben noto ai cultori della matematica per la sua abbondante e varia produzione scientifica, ed in particolare ai lettori del *Periodico di matematica* e del *Supplemento,* per gli articoli e quistioni che sono stati frequentemente pubblicati in questi giornali.

Parleremo più diffusamente dell'opera scientifica e didattica di lui nel prossimo numero; oggi, addolorati dalla perdita di un prezioso collaboratore, ci limitiamo ad inviare sincere condoglianze alla vedova ed ai figli.

Mentre il presente fascicolo stava per vedere la luce, ci giunge la dolorosa notizia della morte del

Prof. DAVIDE BESSO

avvenuta in una villa a Frascati dopo lunga e penosa malattia.

Sebbene non avesse che 61 anni, egli si era già da molto tempo ritirato dall'esercizio della professione, dopo avere consacrato una ventina dei migliori anni della sua vita all'insegnamento delle matematiche nell'istituto tecnico di Roma, e successivamente pochi anni all'insegnamento del Calcolo nell'Università di Modena. Le centinaia e centinaia di scolari suoi, sparsi ormai per tutta l'Italia, hanno conservato indelebile il ricordo di lui, come d'insegnante altrettanto valente e dotto, quanto diligente e scrupoloso nell'osservanza dei propri doveri.

Coloro che ebbero la fortuna di conoscerlo intimamente, hanno sempre ammirata la dolcezza e la bontà dell'animo suo, sempre sollecito, per un nobile sentimento altruistico, a soccorrere tutte le miserie umane, nulla curandosi di sè stesso, se non per tormentarsi assiduamente con mille rimproveri per tutto ciò che di bello e di buono non aveva fatto e avrebbe voluto fare.

Di questa bontà ha dato prova anche nel suo testamento legando 24 mila lire a favore di istituzioni di beneficenza della sua Trieste.

Il *Periodico di matematica,* che egli fondò e diresse con grande amore per alcuni anni, invia alla sua tomba un reverente saluto, riservandosi di parlare della sua vita e della sua opera scientifica.

G. L.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 30 agosto 1906

ERNESTO CESÀRO.

La sera del 12 settembre u. s. telegrammi da Torre Annunziata, la industriosa città del golfo di Napoli, annunziavano a tutta Italia che Ernesto Cesàro ed un figlio, Manlio, di 17 anni erano morti annegati nel golfo, per essersi avventurati a fare il bagno col mare tempestoso. Questa tragica scena si era svolta con la rapidità del baleno. L'illustre scienziato, secondo la sua abitudine, dopo avere lavorato tutta la mattina nel suo studio, si era recato nel pomeriggio a fare il bagno assieme alla moglie ed ai suoi otto figli. Mai come quel giorno egli era stato così sano e lieto. Trovato il mare fortemente agitato da onde furiose, ed avvertito dai bagnini che si correva rischio a scender nell'acqua, egli accondiscese a non bagnarsi che coi soli quattro figli maschi più grandi. Prima che egli fosse pronto, già i figli erano nell'acqua; ma i due maggiori, vistisi a mal partito risalirono subito; degli altri due, uno ebbe la sventura di essere trascinato dalla furia delle onde lontano dal camerino e disperatamente cominciò a chiamare aiuto. Il padre, che ancora non era sceso nell'acqua, a tali grida ebbe uno schianto, e per precipitarsi in aiuto del figlio, cadde sulla scala ferendosi mortalmente alla sinistra del petto e alla testa. Più che scendere scivolò nell'acqua, si agitò per poco, ma già rantolava. I marinai accorsi, con pericolo della vita, lo ritrassero a riva, ove egli spirava subito dopo; il cadavere del figlio inghiottito dal furore delle onde non fu ritrovato che il giorno dopo.

Ed ecco in un attimo strappato dal fato tragico alla stella d'Italia uno dei suoi più fulgidi raggi, alla numerosa famiglia, inconsciente della sua sorte futura, l'unico suo sostegno.

Non è qui il luogo, né in poco tempo si può presumere, di poter scrivere di Ernesto Cesàro una biografia degna dell'alta rinomanza da lui acquistata e del contributo che egli ha dato alla scienza. Io dirò di lui le impressioni che mi agitano il cuore ed il cervello, cercando di rannodare i ricordi che mi sono rimasti nella mente dai discorsi e dalle confidenze che egli faceva con me nei tanti anni che gli sono stato a fianco, e le poche notizie che a voce ho potuto raccogliere dalle persone che lo hanno conosciuto da giovane.

Ernesto Cesàro nacque a Napoli, nel palazzo del principe di Fondi a Via Medina, il 12 marzo 1859, dalla seconda moglie Fortunata Nunziante del padre Luigi, un vecchio liberale e ricco agricoltore di

Torre Annunziata, un precursore dell'introduzione delle macchine agrarie. La sua fanciullezza passò in floridissime condizioni finanziarie: fu educato in buona parte nel Convitto nazionale V.E. di Napoli; e fece brillantemente gli studi fino alla 4ª ginnasiale. Ma, senza aver presa ancora la licenza ginnasiale, il padre lo inviò nel Belgio presso il fratello Giuseppe (ora illustre scienziato e vanto d'Italia e del Belgio) a Liége, affinché studiasse per divenire ingegnere delle miniere. Preparato dal fratello si accinse a superare gli esami di ammissione all'Università di Liége e vi fu ammesso con splendido risultato. Ben presto l'amore delle scienze matematiche lo deviò dallo scopo che voleva raggiungere, e la perizia che in esse acquistò gli fece guadagnare la simpatia e la protezione di Catalan e di Neuberg. Durante il suo studentato un rovescio di fortuna del padre, che morì il 29 luglio 1879, mise lui e tutta la famiglia in condizioni finanziarie difficili, e cominciò per lui la lotta fra lo studio e le privazioni. Vagò fra Liége e Torre Annunziata, stette un anno a Parigi, ed ivi conquistò l'ammirazione di Hermite, poi ritornò in Italia, si ammogliò il 27 settembre 1882 con Angela Cesàro sua nipote, ritornò a Liége, e nel frattempo, per le insistenti raccomandazioni di Catalan e di Hermite, molte persone s'interessarono a lui, per raccomandarlo ai Ministri italiani della pubblica Istruzione, affinché non avessero permesso che il suo ingegno, che già aveva dato prove con memorie di valore, si sciupasse in lavori ingrati e non proficui alla scienza.

„ Saluez-moi mon prodigieux élève „ scriveva Catalan a Siacci; ed al Cremona il 13 giugno 1882 scriveva: „ *Il y a un mois, sans connaître* Gauss, Cesàro *a inventé une définition de la fonction* Γ *different de celle de* Gauss, *mais qui s'accorde avec celle-ci. Ce jeune homme, s'il vit sera un très-grand géomètre* „. Il Ministro De Sanctis, mandatolo a chiamare gli diceva: „ Mi hanno attestato che tu sarai una stella di prima grandezza, e siccome l'Italia di queste stelle abbisogna, io ti darò quel che ti occorre per continuare i tuoi studi „.

Nel settembre dell'anno 1883 ritornò definitivamente da Liége a Torre Annunziata con la moglie e una bambina di pochi mesi. In quell'anno stesso col valido appoggio di Cremona e di Dino aveva ottenuto dal Municipio di Torre Annunziata (fenice dei municipii italiani un assegno per continuare i suoi studi a Liége, che poi gli fu confermato per l'Università di Roma, ove fu inscritto al 4° anno della facoltà matematica. Frequentò i corsi nell'anno 1883-84, e completò la sua educazione matematica. Egli stesso diceva che poco aveva imparato all'estero a confronto di quello che imparò a Roma in quell'anno. Si ritirò alla fine dell'anno a Torre per preparare la sua tesi di laurea, e vi rimase invece tutto l'anno seguente a produrre memorie scientifiche l'una appresso alle altre.

Nell'anno 1886 avvenne un caso favorevole, si misero a concorso un gran numero di cattedre di matematiche delle nostre università, oltre la cattedra di matematica del liceo Mamiani di Roma. Egli non aveva ancora preso la laurea, e, spinto dal prof. DINO, a malincuore si presentò a diversi concorsi e riuscì a guadagnare prima la cattedra del liceo di Roma, e subito dopo fu proposto per ordinario alla cattedra di Calcolo infinitesimale dell'Università di Messina. Fu nominato professore al liceo e un mese dopo, dal 1° novembre 1886, professore ordinario di Algebra complementare all'Università di Palermo, con l'incarico di Fisica matematica. Nel novembre dello stesso anno la facoltà di Roma, con una splendida relazione del prof. Tonelli, gli decretò la *laurea ad honorem.*

Nella sua grande ingenuità, e con quella fenomenale lealtà che lo distingueva, egli confessava che, quando cominciò il corso d'Algebra a Palermo, molte cose egli non conosceva di quelle che doveva insegnare. Ciò contribuì a fargli formare un corso di lezioni originale, che si allontanava dalla tessitura dei soliti trattati di Algebra complementare, ed a fargli concepire un ordinamento degli studi universitari tutto affatto differente dal nostro attuale; e cominciò a dare effetto a questo suo divisamento con la pubblicazione del *Corso di analisi algebrica* (Torino, 1904).

Nell'occasione che il prof. BATTAGLINI lasciava l'insegnamento di Calcolo infinitesimale nell'università di Napoli, per assumere quello di Analisi superiore, egli chiese ed ottenne nel 1891 di essere trasferito a Napoli. Succedendo al BATTAGLINI, egli volle seguire le sue orme e tenne presente il corso pubblicato di recente dal suo antico maestro. Ma la sua giovane e vigorosa intelligenza, la sua preparazione precedente, la sua tendenza ad inserire nel corso tutte le applicazioni svariate, che di ogni teoria egli andava formando o raccogliendo, lo spinsero presto a fare un corso che della tela del BATTAGLINI non serbava nemmeno le vestigia.

I giovani, avvezzi col Battaglini ad esami benevoli, trovarono troppo duro il freno posto dal Cesàro, e dapprincipio alcuni s'imbizzarrirono e recalcitrarono e qualche traviato osò di tanto in tanto di minacciarlo con lettere anonime. Ciò lo addolorava e lo inaspriva, e lui, che voleva essere l'amico dei giovani, e vivere in mezzo a loro, come viveva per essi, si trovava a dover lottare con sé stesso, perché, per non far mostra di debolezza, doveva essere severo quando non lo avrebbe voluto. L'ambiente si modificò però in pochi anni, ed ora egli era divenuto l'idolo della gioventù studiosa.

A Napoli insieme al corso di Calcolo cominciò a dare dei corsi di Matematiche superiori, prima come libero docente, poi per incarico, e in questa cattedra fece dei corsi elevatissimi. Le pubblicazioni della *teoria matematica dell'elasticità* (Torino, 1895); della *geometria intrinseca* (Napoli, 1896); del *corso di calcolo infinitesimale* (Napoli, 1897) si seguirono ad intervallo di un anno e furono il frutto dei suoi lavori didattici; ed avrebbe fra breve dato alle stampe la *geometria non* *euclidea*, e la *teoria matematica del calore*, e la *teoria asintotica dei numeri*, e le lezioni sull'*idrodinamica*, e sugli altri numerosi corsi trattati da lui, se la morte non l'avesse crudelmente rapito alla scienza ed alla fortuna d'Italia.

Il suo valore di maestro valicò presto la frontiera, e la Germania si affrettò a chiedere di pubblicare in tedesco le sue opere; ed egli offrì la seconda edizione della *geometria intrinseca*, (1) e poi i suoi corsi rifatti e fusi insieme di *analisi algebrica* e di *calcolo infinitesimale*. (2)

Nell'insegnamento egli mirava a porre le basi solidissime e con la massima economia di parole, e nello stesso tempo di fare del suo corso, un corso pratico, un corso di esercizi sopratutto, ma dove ogni esercizio avesse la sua ragione di esserci, per le applicazioni che se ne dovessero fare durante la trattazione o nelle matematiche superiori. Una sua caratteristica era di bandire i metodi generali: egli cercava per ogni esercizio la più semplice via per pervenire; gli artifizi erano le sue risorse inesauribili. E se l'aveva a male quando si diceva che il suo corso era teorico, perchè era tutto opposto il fine che egli aveva voluto raggiungere, ed era convinto di averlo raggiunto.

Dare ora una pallida idea della sua enorme produzione scientifica è quasi impossibile: egli stesso non sapeva formulare un elenco di tutti i suoi scritti, nè conservava tutte le sue produzioni. E quando, dopo tante esitazioni, egli fissò di presentarsi all'ultimo concorso per il premio reale delle matematiche (che non ancora è stato aggiudicato), egli andò chiedendo a me e ad altri suoi amici una copia delle sue pubblicazioni, che gli mancavano completamente.

Quello che egli stesso ha indicato come primo suo lavoro porta la data di Liége, 1881, e lo pubblicò nel 1885, per dedicarlo a Cremona; esso è intitolato: *Forme poliedriche regolari e semiregolari in tutti gli spazi.* Un altro lavoro del 1882, di 350 pagine, è intitolato *Diverses questions arithmétiques* ed è inserito nei " Mémoires de la Soc. Scient. de Liége ". Poi seguirono, nel 1884, 4 lavori pubblicati nel " Giornale di Battaglini ", e 4 altri nelle " Nouvelle Annales de Mathématique " Nel 1885 crebbe oltremodo la sua produzione, poichè pubblicò 9 memorie negli " Annali di Brioschi ", che egli riunì in un solo libro intitolato: *Excursions arithmétiques à l'infini* per dedicarlo al prof. Dino; 3 altre nel " Giornale di Battaglini ", e 9 altre nelle " Nouv. Ann. de Math ". Nel 1886 pubblicò due lavori negli " Annali di Brioschi "; uno fra i " Mém. Cour. des Sav. étr. de Bruxelles "; 9 altri nelle " Nouv. Ann. de Math. ". Mi limito a questo cenno per dare un'idea di una parte di ciò che egli aveva prodotto prima di presentarsi ai concorsi del 1886. E sempre poi ha proseguito con la stessa attività, compensando con la intensità e la profondità delle ricerche, quel che risparmiava nel numero.

---

(1) *Vorlesungen über natürliche Geometrie*, deutsche Ausgabe v. Dr. G. Kowalewski. Leipzig, 1901.
(2) *Lehrbuch der algebraischen Analysis*, deutsche Ausgabe v. Dr. G. Kowalewski. Leipzig, 1904.

Ma di ciò, ripeto, occorre parlare con più calma dopo accurato studio e le più scrupolose indagini.

La sua numerosa figliuolanza lo teneva in continue preoccupazioni finanziarie, ed egli, vedendo che in Italia, per uno scienziato puro, non era da sperare una posizione adeguata ai suoi bisogni, tentò di abbandonare la patria sua; e se ciò non ebbe luogo, fu per le grandi insistenze che la Facoltà di Napoli fece presso i Ministri per fargli aumentare il compenso dell'incarico, che soltanto nel 1899 fu elevato al massimo di L. 3500. Una volta fu sul punto di andarsene nel Belgio, ma la sua grande aspirazione era l'America, e per questo scopo aveva studiato con perseveranza l'inglese, per parecchi anni, e si era perfezionato alla più squisita pronunzia.

In questi ultimi anni si era annoiato di insegnar Calcolo; la sua mente cercava nuova esca e nuove difficoltà da superare, e voleva insegnare Meccanica. Per questo motivo chiese di essere trasferito a Bologna, e la Facoltà di quell'*alma mater* degli studi accolse ad unanimità il suo desiderio e si preparava a fargli festose accoglienze. Ma il tragico fato ha impedito che la scienza italiana potesse continuare a raccogliere la ricca e valorosa produzione di un genio matematico tanto fertile e tanto profondo, e l'Italia ha ora il dovere di pensare alla famiglia disgraziata e di onorare degnamente la memoria del grande Uomo.

F. Amodeo.

GASTONE GOHIERRE DE LONGCHAMPS.

Nel fascicolo precedente abbiam dato il triste annunzio della morte del chiaro matematico, francese De Longchamps, assai noto ai nostri lettori, poichè da vari anni collaborava al " Periodico di Matematica " e al " Supplemento al Periodico di Matematica ".

Il Periodico ha pubblicato due suoi articoli, cioè: *La geometria dei triangoli* (Serie II, Vol. II. Annata XV, 1900, pag. 112-118). *Nota relativa a quella del D.r Giulio Cardoso-Laynes, Sopra una trasformazione delle curve piane* (Serie III, Vol. I, Annata XIX, 1904. p. 241-242).

Il primo di questi è assai interessante, poichè schiude la via a nuove ricerche in un campo che ha qualche analogia colla oramai notissima *geometria del triangolo*, sebbene sia da questa ben distinta. La *geometria dei triangoli* infatti si propone lo studio di triangoli singolari, i cui elementi cioè verifichino una data relazione algebrica, mentre la *geometria del triangolo* si propone lo studio di proprietà comuni a tutti i triangoli.

Assai più spesso il nome di De Longchamps o il suo pseudonimo *Elgé* è comparso nel Supplemento come apparisce dal seguente prospetto:

Anno II. Fasc. 5, Quist. 11ª a concorso; Fasc. 8-9, Sulla 9ª quist. a concorso (ELGÉ).
„ III. „ 1, „ 198-199; Fasc. 2, Quist. 212.
„ IV. „ 7, „ 29ª a concorso.
„ V, „ 1, La media ed estrema ragione e la serie di Fibonacci; Fasc. 6, Sui radicali sovrapposti; Fasc. 7, Quist. 38ª a concorso.
„ VI, „ 5, Quist. 494.
„ VII, „ 1, „ 48ª a concorso; Fasc. 8-9, Quist. 614 (ELGÉ).
„ VIII, „ 2, „ 57ª a concorso; Fasc. 8, Quist. 62ª a concorso.
„ IX, „ 2, „ 65ª a concorso.

Parecchie di queste quistioni collegantisi alla geometria dei triangoli o ad argomenti affini sono assai interessanti.

Ed ora che all'opera sua è stato scritto la parola fine, paghiamo il nostro tributo di stima ed amicizia, dando su questo giornale, al quale egli era sinceramente affezionato, brevi e sommarie notizie sulla sua vita e sulle sue opere.

***

GASTONE ALBERTO GOHIERRE DE LONGCHAMPS nacque il 1° marzo 1842 ad Alençon da buona famiglia d'origine borgognona. Rovesci di fortuna costrinsero i suoi genitori a separarsi da lui, quando aveva solo nove anni e ad inviarlo in un liceo di provincia per il quale aveva ottenuto una borsa di studio. Dopo qualche anno il giovanetto andò a Parigi, e continuò gli studi nei licei Carlomagno e Luigi il Grande, ove si fece notare per la sua intelligenza e la sua attitudine alle matematiche, che gli valsero vari premi al Concorso generale. Entrò nella Scuola normale superiore nel 1863, e fu nominato professore nel liceo di Mont de Marsan nel 1866, indi nel 1869 in quello di Poitiers, ove la sua carriera venne interrotta dalla grande guerra francotedesca del 1870. Pieno di coraggio e patriottismo, si arruolò come sottotenente nel 10° reggimento artiglieria a Rennes, ove corse rischio di morire per febbre cerebrale. Dopo la guerra, riprese la sua cattedra nel liceo di Poitiers, e fu nominato aggregato di scienze nell'agosto 1871. Si ammogliò in quella città nello stesso anno, e vi rimase quale professore di matematiche speciali fino al 1878. Vi si fece notare per le sue brillanti qualità di professore, che gli procurarono il trasferimento a Parigi, prima al collegio Rollin, poi al liceo Carlomagno, nel 1879, e finalmente al liceo San Luigi, nel 1890, dando ovunque prova di grande abilità didattica. Nello stesso tempo egli esplicava la sua attività pubblicando numerose note e memorie matematiche ed opere didattiche, e dirigendo per molto tempo i due periodici *Journal de mathématiques élémentaires* e *Journal de mathématiques spéciales*.

I suoi meriti scientifici e didattici gli valsero una ben meritata fama, e vari titoli onorifici di società ed accademie straniere. Nel 1876 venne nominato ufficiale d'Accademia, nel 1883, ufficiale della P. I.; il 17 marzo 1883, membro della Società Reale delle Scienze di Liegi (Belgio); il 30 aprile 1887, membro dell'Accademia delle Scienze di Amsterdam (Olanda); il 15 luglio 1888 membro della Società matematica di Francia; nel 1889 membro corrispondente della Società di scienze di Praga; nel 1892 cavaliere della legion d'onore; il 19 aprile 1894 membro corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Lisbona (Portogallo); il 30 agosto 1903, membro della Società di Scienze di Guatemala.

Finalmente dopo 20 anni di un lavoro accanito, prese il suo riposo di professore, ed ottenne il posto di esaminatore d'ammissione alla Scuola militare di Saint Cyr, ove recò le stesse qualità d'intelligenza, di lavoro e di coscienza che lo distinsero per tutta la vita, e gli procurarono l'alta stima ed amicizia di tutti coloro che seppero apprezzarlo. Compì la sua missione d'esaminatore per sei anni, senza che niente della sua salute potesse far prevedere il male che stava per colpirlo. Nell'ottobre 1905, dopo il suo ultimo giro d'esami, risentì i primi sintomi della malattia di fegato di cui non doveva guarire, malgrado le cure e l'affetto di cui fu circondato dalla sua famiglia.

Languì così vari mesi, e si spense il 9 luglio 1906, conservando fino all'ultimo tutta la forza e lucidità della sua mente, portando seco il profondo rimpianto di coloro che l'hanno conosciuto ed amato, e che ne serberanno sempre cara memoria.

***

Le opere d'indole didattica di G. de Longchamps sono le seguenti, tutte edite dal Delagrave di Parigi.

I. — *Cours d'algèbre*
1ª edizione, un volume in 8° di pag. 670. (1883).
2ª „ completamente rifatta, di pag. 755. (1889).

II. — *Supplément* (all'opera precedente)
1ª edizione, un volume di pag. 172. (1885).
2ª „ un volume di pag. 240. (1890).
3ª „ interamente rifatta, comprendente la trigonometria e la meccanica, un volume di pag. 472. (1893).

III. — *Géométrie analytique à deux dimensions.* Un volume di pag. 536. (1884).

IV. — *Géométrie analytique à trois dimensions.* Un volume di pag. 410. (1884).

V. — *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre.* Un vol. di pag. 366. (1890).

VI. — *Cours de problèmes de Géométrie analytique* à l'usage des candidats à l'École Navale, à l'École centrale et à l'École Polytechnique:

Tome I. pag. 295. (1898).
" II. pag. 435. (1899).
" III. *Géométrie à trois dimensions*, pag. 582. (1899).

Tutte si distinguono per la chiarezza e la lucidità, e per l'abbondanza di applicazioni ed esercizi atti a capirne e illustrarne le teorie.

***

Numerosissime sono le note e memorie pubblicate in vari giornali. Molte di esse sono esercizi di algebra o geometria analitica; studi su curve speciali, costruzioni relative a curve, ecc., altre sono di indole più elevata.

Ecco l'elenco delle note e memorie di De Longchamps oltre quelle già citate in principio.

Anno 1866.

1. Étude de géométrie comparée avec applications aux sections coniques et aux courbes d'ordre superieur, particulièrement à une famille de courbes du sixième ordre et de la quatrième classe. (*Nouv. Ann. de mathémat.*, p. 118 à 128).

2. Mémoire sur une nouvelle méthode de transformation en géométrie. (*Ann. scientif. de l'École normale supérieure*, t. III, p. 321 à 342).

Anno 1877.

3. Sur les fractions étagées. (*Giorn. di matemat. del prof. Battaglini*, p. 30).

4. Sur la décomposition en facteur premiers des nombres $2^n \pm 1$. (*Comptes rendus des séances de l'Acad. des Sciences de Paris*, 19 novembre 1877).

5. Sur les nombres de Bernouilli. (*Ann. scientif. de l'École normale supérieure*, p. 55 à 80).

6. Note sur la série harmonique. (*Nouv. Correspon. mathémat.*, p. 145).

7. Note de géométrie. (Idem, p. 306 à 340).

8. Note sur l'intégration d'une équation aux différences finies. (*Assoc. française pour l'avancement des Sciences [Comptes rendus du Congrès du Havre]*).

9. Sur la surface romaine de Steiner. (Idem.)

Anno 1878.

10. Sur les fonctions U_n, V_n de M. Ed. Lucas. (*Nouv. Correspon. matem.*, p. 83).

11. Théorèmes sur les normales aux coniques à centre. (Idem, p. 279 à 281).

12. Sur les questions 406, 412. (Idem, p. 390).

13. Sur le minimum d'une expression à deux variables. (*Journal de Mathémat. élémentaires*, p. 197).

14. Sur le binôme de Newton. (*Nouv. Ann. de mathémat.*, p. 101).

15. Sur les normales aux coniques. (*Assoc. française pour l'avancement des Sciences. [Comptes rendus du Congrès de Paris]*, p. 49 à 53).

Anno 1879.

16. Sur les conchoïdales. (*Nouv. Correspon. mathémat.*, p. 145 à 150).

17. Sur les cubiques unicursales. (Idem, p. 403 à 409).

18. Sur une limite des racines réelles d'une équation de degré quelconque. (*Nouv. Ann. de mathémat.*).

ANNO 1880.

19. Recherche des facteurs commensurables d'une équation de degré quelconque. (*Journal de Mathémat. élément. et spéciales*, p. 41, 70).

20. Sur la somme des puissances semblables des *n* premiers nombres. (Idem, p. 92 à 97).

21. Transversales réciproques et applications. (Idem, 272 à 278).

22. Sur le centre et le rayon de courbure en un point d'une conique. (*Nouv. Ann. de mathémat.*, p. 68 à 71).

23. Théorème d'algèbre. (Idem, p. 71 à 74).

24. Sur les intégrales eulériennes de seconde espèce. (*Ann. scientif. de l'École normale supérieure*, p. 419 à 427).

25. Sur les fonctions récurrentes du troisième degré. (*Assoc. française pour l'avancement des Sciences. [Comptes rendus du Congrès de Reims]*, p. 115 à 118).

26. Sur les séries récurrentes proprement dites et sur un théorème de Lagrange. (Idem, p. 91 à 96).

ANNO 1881.

27. Note de géométrie analytique. (*Journal de Mathémat. élément. et spéciales*).

28. Sur la série de Taylor. (Idem.)

29. Résolution géométrique de deux problèmes du quatrième degré. (Idem.)

ANNO 1882.

30. Courbes diamétrales et transversales réciproques. (*Journal de Mathémat. spéciales*, p. 25 à 29).

31. Transformation réciproque. (Idem, p. 49, 77, 97, 121, 145, 193).

32. Équations quadratiques. (*Journal de Mathémat. élément.*, p. 156 et 169).

33. Note d'analyse indéterminée. (Idem, p. 193).

34. Sur les équations réciproques. (Idem.)

35. Sur les égalités et les inégalités simultanées. (Idem.)

ANNO 1883.

36. Résolution algébrique des équations du troisième degré. (*Journal de Mathémat. spéciales*, p. 102).

37. Sur une nouvelle espèce de fractions continues. (Idem, p. 193, 217, 241, 269).

38. La géométrie récurrente. (*Journal de Mathém. élément.*, p. 3, 25, 49, 73, 121).

39. Théorème d'arithmétique. (Idem, p. 145).

40. Note sur l'ellipse. (Idem, p. 193).

ANNO 1884.

41. Sur une nouvelle espèce de fractions continues. (*Journal de Mathémat. spéciales*, p. 25 à 49).

42. Sur une mémoire de M. Landry. (Idem, p. 73, 97).

43. Applications nouvelles des transversales réciproques. (Idem, p. 121, 145).

44. Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. (Idem, p. 169).

45. Représentation plane des quadriques. (Idem, p. 193, 317, 241, 265).

46. Sur la moyenne harmonique. (*Journal de Mathémat. élément.*, p. 7, 11).

47. Sur le problème de Pell. (Idem, p. 15 à 20).

ANNO 1885.

48. Sur les courbes parallèles et quelques autres courbes remarquables. (*Journal de Mathémat. spéciales*, p. 131, 153, 176, 199, 226, 249, 269).

49. Intégration de certaines suites récurrentes. (*Assoc. française pour l'avancement des Sciences. [Comptes rendus du Congrès de Grenoble]*, p. 94 à 100).

50. Les cubiques circulaires unicursales. (Idem, p. 131 à 135).

ANNO 1886.

51. Sur un nouveau cercle remarquable du plan d'un triangle. (*Journal de Mathémat. spéciales*, p. 57, 85, 100, 126).

52. Sur la conique de Kiepert. (Idem, p. 77, 231).

53. Généralités sur la géométrie du triangle. (*Journal de Mathémat. élément.*, p. 109, 127, 154, 177, 198, 229, 243, 270).

54. Les points d'inflexion dans les cubiques circulaires unicursales droites. (*Assoc. française pour l'avancement des Sciences. [Comptes rendus du Congrès de Nancy]*, p. 5 à 12).

55. Une conique remarquable du plan d'un triangle. (Idem, p. 69 à 83).

56. Sur la potentielle triangulaire. (*Mathesis*, p. 246 à 249).

ANNO 1887.

57. Sur le trifolium. (*Journal de Mathémat. spéciales*, p. 203 à 220).

58. Rapprochement entre la trisectrice de Mac Laurin et la cardioïde. (*Comptes rendus de l'Acad. de Prague*, p. 601 à 608).

59. Sur la rectification de la trisectrice de Mac Laurin au moyen des intégrales elliptiques. (*Comptes rendus des séances de l'Acad. des Sciences*, 7 mars 1887).

60. Sur la rectification de quelques courbes remarquables. (*Mathesis*, p. 127 à 170).

61. Rectification des cubiques circulaires unicursales droites au moyen des intégrales elliptiques. (*Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*, 4 avril 1887).

ANNO 1888.

62. Démonstration du théorème fondamental des développées. (*Journal de Mathémat. spéciales*, p. 109 à 111).

63. Sur une trisectrice remarquable. (*Mathesis*, p. 6 à 11).

64. Sur les normales aux coniques. (Idem.)

65. Sur la transformation orthotangentielle dans le plan et dans l'espace. (*Comptes rendus de l'Acad. de Prague*, p. 241 à 257).

ANNO 1889.

66. Sur la convergence des factorielles. (*Journal de Mathémat. spéciales*, p. 13 à 18).

67. Sur les égalités à deux degrés. (*Journal de Mathémat. élément.*, p. 171 e 195).

68. Sur le cercle de Joachimsthal. (*Mathesis*, p. 153 à 157).

69. Les fonctions pseudo et hyper-Bernouilliennes. (*Mémoires couronnés et mém. des savants étrangers publiés par l'Acad. royale de Belgique*, t. I et II).

70. Sur la fonction hyper-Bernouillienne à clef du second dégré et la fonction $p(u)$ de M. Weierstrass. (*Revue génér. des Sciences*, p. 571).

ANNO 1890.

71. Sur les paraboles de M. Artzt. (*Journal de Mathémat. spéciales*, p. 149, 154).

72. Sur le tétraèdre orthocentrique. (*Mathesis*, p. 49 e 77).

73. Intégration de l'équation de Brassine au moyen des fonctions hyper-Bernouilliennes. (*Assoc. française pour l'avancement des Sciences. [Comptes rendus du Congrès de Limoges]*, p. 146 à 153).

ANNO 1891.

74. Sur les déterminants troués. (*Journal de Mathémat. spéciales*, p. 9, 29, 54).

75. Sur la construction d'Enneper. (Idem, p. 276).

76. Sur les points et les droites de Feuerbach. (*Journal de Mathémat. élément.*, p. 106 à 109).

77. Sur la résolution des problèmes déterminés par la méthode des lieux géométriques. (*Mathesis*, p. 132 à 137).

78. Exposition de la théorie des intégrateurs. (*El Progreso matem.*, p. 73 e 97).

79. Expression du rayon de courbure dans les coniques inscrites à un triangle de référence. (*Assoc. française pour l'avancement des Sciences. [Comptes rendus du Congrès de Marseille]*, p. 11 à 23).

80. Les sommets dans les courbes planes. (Idem, p. 23 à 38).

Anno 1892.

81. Le calcul des séries convergentes. (*El Progreso matem.*, p. 10 e 37).

Anno 1893.

82. Sur la construction des tangents à certaines courbes et notamment à l'atriphtaloïde. (*Journal de Mathémat. spéciales*, p. 11, 31, 63).

83. Sur l'intégrale $\int \frac{dx}{\sin x(a + b\cos x)}$. (Idem, p. 9).

84. Présentation d'un trisecteur. (*Assoc. française pour l'avancement des Sciences. [Comptes rendus du Congrès de Besançon.]*

85. Arithmétique avec figures négatives. (Idem.)

86. Un théorème sur la géométrie des masses. (Idem.)

87. L'espace infinitésimal autour d'un point d'inflexion. (Idem.)

88. Sur l'infinitude des séries divergentes. (*El Progreso matem.*, p. 17 e 131).

Anno 1896.

89. Résolution de l'équation $a \sin x + b \cos x = c$. (*Journal de Mathém. élém.*)

90. Sur les quartiques bicirculaires (Elgé). (*Journal de Mathémat. spéciales.*)

91. Le problème de la duplication du cube. (*Mathesis.*)

92. Construction de la courbe appellée chapeau bicorne. (*L'intérmédiaire de mathématiciens.*)

Anno 1897.

93. Sur une générations par points et par tangents des cubiques unicursales. *Journal de mathématiques speciales.*

94. Sur une paradoxe apparent (Elgé). (Idem.)

95. Sur la méthode de Puiseux (Elgé). (Idem.)

96. Notes sur une courbe. (*Bulletin de Mathématiques spéciales.*)

97. Sur le lieux des centres d'une hyperboloïde mobile. (Idem.)

98. Transformations polaires et applications. (Idem.)

Inoltre nell'*Intérmédiaire des mathématiciens* si trovano numerose risposte alle quistioni proposte. Eccone l'elenco:

		risposta alla quist.
Vol. IV, pag.	6	738
„ „	88	874
„ „	114	925
Vol. VII. „	65	1476
„ „	221	1611
Vol. IX. „	282	2184
„ „	335-337	2435

		risposta alla quist.
Vol. X, pag.	111	2340
„ „	315	2461
„ „	319	2571
„ „	263-266	2579
„ „	323-325	2651
Vol. XI, „	107	2710
„ „	267	2772
Vol. XII, „	59	2818

Infine nel primo trimestre del 1907, per opera d'un suo allievo ed amico, sarà pubblicata un'opera postuma che avrà probabilmente il titolo " Calculs et Exercices pratiques d'Aritmétiques ".

G. Lazzeri.

APPUNTI DI $(n-1)$-EDROMETRIA IPERSFERICA

§ 1. — Definizioni preliminari.

Siano dati in S_{n-1}, $n-1$ raggi uscenti da un punto A_n e fra loro indipendenti: su di essi si prendano, a partire da A_n, $n-1$ punti $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, tali che sia:

$$A_nA_1 = A_nA_2 = \ldots = A_nA_{n-1} = R.$$

Gli $n-1$ punti così ottenuti appartengono all'ipersfera di S_{n-1} di centro A_n e raggio R, e sono vertici di un $(n-1)$-edro, che diremo *ipersferico*. Due di essi, qualunque, sono congiunti da un arco di circolo massimo dell'ipersfera detto *lato*: i lati sono $\binom{n-1}{2}$. Tre vertici dànno origine a un triangolo sferico, che diremo faccia a due dimensioni dell'$(n-1)$-edro ipersferico: queste sono $\binom{n-1}{3}$. In generale k vertici daranno origine a un k-edro, che diremo faccia a $k-1$ dimensioni. Riserveremo il nome di faccia, senz'altro, a ciascuno degli $(n-2)$-edri individuati da $n-2$ fra gli $n-1$ vertici dell'$(n-1)$-edro ipersferico. Due facce hanno a comune $n-3$ vertici e quindi un $(n-3)$-edro, che qualche volta, per brevità di linguaggio, chiameremo *spigolo*. All'S_{n-4} contenente questo $(n-3)$-edro daremo il nome di costola dell'angolo diedro formato dalle due facce, dall'angolo cioè sotto cui si segano le due sfere a $n-3$ dimensioni di cui esse fanno parte, e che sarà misurato dall'angolo formato dagli S_{n-3} tangenti ad esse in un medesimo punto dell'$(n-4)$-edro comune.

Quando i punti $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$, invece di considerarli come facenti parte dell'n-edro $A_1A_2 \ldots A_n$ vorremo considerarli come vertici dell'$(n-1)$-edro ipersferico, li indicheremo rispettivamente con $B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$. Allora $B_i\,B_h$ indicherà il lato che ha per estremi B_i e B_h, $B_i\,B_h\,B_k$ indicherà la faccia a due dimensioni determinata dai vertici B_i, B_h, B_k ecc. Indicheremo poi con b_i la faccia opposta al vertice B_i, determinata cioè dai vertici dell'$(n-1)$-edro ipersferico che rimangono dopo escluso B_i, con $(b_i\,b_h)$ il diedro compreso dalle facce b_i e b_h, e con b_{ih} l'$(n-4)$-edro ipersferico comune a b_i e b_h. Si noti che l'angolo $(b_i\, b_h)$ di due facce dell'$(n-1)$-edro ipersferico è uguale all'angolo $(a_i\, a_h)$, quando i ed h son diversi da n. Aggiungiamo ancora che ogni vertice B_i è vertice di un angoloide $(n-2)$-edro giacente nell'S_{n-2} tangente all'ipersfera nel punto B_i: a questi angoloidi, che sono in numero di $n-1$, daremo il nome di *angoloidi dell'$(n-1)$-edro ipersferico.*

§ 2. — Seno dell'$(n-1)$-edro ipersferico.

Dati in S_{n-1} due spazi lineari S_h ed S_k $(h+k \leqslant n-2)$ individuati l'uno dal punto X di coordinate $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ e dalle direzioni:

$$\begin{array}{lll} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1.n-1} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2.n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{h1} & a_{h2} \ldots & a_{h.n-1}, \end{array}$$

l'altro dal punto y di coordinate $y_1\, y_2 \ldots y_{n-1}$ e dalle direzioni:

$$\begin{array}{lll} b_{11} & b_{12} \ldots & b_{1.n-1} \\ b_{21} & b_{22} \ldots & b_{2.n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{k1} & b_{k2} \ldots & b_{k.n-1}, \end{array}$$

prenderemo l'espressione:

$$\left\| \begin{array}{cccc} x_1 - y_1 & x_2 - y_2 & \ldots & x_{n-1} - y_{n-1} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1.n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{h1} & a_{h2} & \ldots & a_{h.n-1} \\ b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1.n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{k1} & b_{k2} & \ldots & b_{k.n-1} \end{array} \right\|^2 \qquad (1)$$

a rappresentare il quadrato del momento dei due spazi S_h ed S_k.

Quando le direzioni che compariscono in (1) sono tutte fra loro ortogonali, il momento dei due spazi non è altro che la loro minima distanza, ma nel caso generale l'espressione (1) sarà il prodotto del quadrato di questa minima distanza per l'altra espressione:

$$\Delta^2 = \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1.n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{11} & b_{12} \ldots & b_{1.n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{k1} & b_{k2} \ldots & b_{k.n-1} \end{array} \right\|^2 \qquad (2)$$

Chiameremo Δ *seno dell'angoloide* $(h+k)$-edro che si ottiene conducendo per un punto qualunque P dello spazio i raggi paralleli e aventi il medesimo senso di quelli da noi scelti, o anche *seno dell'$(h+k)$-edro ipersferico* ottenuto tagliando detto angoloide con una ipersfera di centro P.(1) Se i vertici di questo $(h+k)$-edro sono $B_i\, B_k \ldots$ indicheremo il suo seno scrivendo sen $(B_i\, B_k \ldots)$ o sen b_i se essi fossero quelli della faccia opposta a B_i.

La precedente denominazione rimane giustificata della analogia che la (2) presenta con l'espressione che da Staudt fu detta *seno del triedro.*

Posto questo, andiamo a trovare alcune espressioni della misura V dell'n-edro $A_1\, A_2 \ldots A_n$ che ci saranno utili per dedurne altre pel seno dell'$(n-1)$-edro ipersferico. Prenderemo come formula di partenza per la misura dell'n-edro la sua espressione analitica, secondo la quale, per una naturale estensione di formule che valgono pel piano e per lo spazio, dovrà aversi, dette $x_i^{(r)}$ le coordinate del vertice A_r rispetto a un sistema di assi cartesiani ortogonali:

$$(n-1)!\,V = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \ldots & x_{n-1}^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_{n-1}^{(2)} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \ldots & x_{n-1}^{(n)} & 1 \end{vmatrix}$$

Prendiamo il vertice A_1 e le direzioni che da esso vanno ai punti $A_2, A_3 \ldots A_{k+1}$ a individuare un S_k: se l_i è la lunghezza dello spigolo A_1A_i ed $\alpha_{i1}, \alpha_{i2} \ldots \alpha_{in}$ sono i rispettivi coseni di direzione, avremo:

$$x_r^{(i)} = x_r^{(1)} + l_i\alpha_{ir} \qquad (r=1,2\ldots n\,;\; i=2,3\ldots k+1). \qquad (\alpha)$$

Il vertice A_{k+2} e le direzioni che da esso vanno ai vertici rimanenti individueranno un S_{n-k-2}: se λ_t è la lunghezza dello spigolo $A_{k+2}A_t$ e $\beta_{j1}, \beta_{j2} \ldots \beta_{jn}$ sono i rispettivi coseni di direzione, avremo:

$$x_s^{(j)} = x_s^{(k+2)} + \lambda_j\beta_{js}, \qquad (s=1,3\ldots n,\; j=k+3,\ldots n) \qquad (\beta)$$

Sostituendo questi valori nel determinante precedente, e osservando che se si sottrae la prima linea da ciascuna delle successive fino alla $(k+1)$-esima e la $(k+2)$-esima da ciascuna delle rimanenti e dalla prima, ciò che rimane è il prodotto del momento M dei due spazi S_k ed S_{n-k-2} per il fattore

$$l_2, l_3 \ldots l_{k+1}, \lambda_{k+3}, \lambda_{k+4} \ldots \lambda_n,$$

otterremo:

$$(n-1)!\,V = l_2, l_3 \ldots l_{k+1}, \lambda_{k+3} \ldots \lambda_n\,.\,M, \qquad (3)$$

formula che costituisce l'estensione del *teorema di Lenthéric.*

Corollario I. — Facciamo $k=n-1$, con che le (β) vengono assorbite dalle (α). Si perviene allora alla formula:

$$(n-1)!\,V = \pi A_1A_h\,.\,\Delta_1, \qquad (4)$$

(1) Veramente la definizione data presupporrebbe che fosse dimostrato essere Δ minore d'*uno*, ma questo risulterà da quanto segue.

dove $\pi A_1 A_h$ indica il prodotto delle misure degli spigoli nell'n-edro uscenti da A_1 e Δ_1 rappresenta il seno dell'angoloide di vertice A_1. Se quest'angoloide è n-rettangolo, è Δ_1 ugnale all'unità e la formula (4) prende la forma:

$$(n-1)!\,V = \pi A_1 A_h.$$

Corollario II. — Facciamo $k=0$. Segue allora:

$$(n-1)!\,V = \lambda_3, \lambda_4 \ldots \lambda_n \,.\, M, \tag{5}$$

stando qui M a rappresentare il momento di A_1 rispetto all'S_{n-2} che contiene la faccia a_1. Ma in virtù di una osservazione fatta è:

$$M = N \,.\, h, \tag{6}$$

essendo h l'altezza dell'n-edro uscente dal vertice A_1 e N il seno dell'angoloide di vertice A_2 esistente nell'S_{n-2} opposto ad A_1.

Di più è per la (3)

$$\lambda_3, \lambda_4 \ldots \lambda_n \,.\, N = (n-)!\, a_1 \tag{7}$$

Ne segue, moltiplicando le (5), (6), (7) membro a membro:

$$(n-1)\,V = a_1 \,.\, h. \tag{8}$$

Da questa formula, che è l'estensione di una notissima, è facile passare ad un'altra di cui ci siamo valsi altra volta.

Caliamo da A_1 la A_1P perpendicolarmente ad a_{12}, cioè all'intersezione dei due S_{n-2} cui appartengono le facce a_1 e a_2. Il triangolo rettangolo che ha per vertici A_1P e la proiezione di A_1 sull'S_{n-2} della faccia a_1 dà

$$h = A_1P \,.\, \text{sen}\,(a_1a_2),$$

dove h ha il significato precedente.

Poichè è:

$$A_1P \,.\, a_{12} = (n-2)\,.\, a_2$$

segue subito:

$$V = \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{a_1a_2 \,.\, \text{sen}\,(a_1a_2)}{a_{12}}, \tag{9}$$

che è la formula cui alludevamo sopra.

Ora possiamo andare a trovare delle espressioni del seno dell'$(n-1)$-edro ipersferico.

Cominciamo dall'eliminare V tra la (4) e la (9).

Avremo, riferendoci per la (4) all'indice n anzichè all'indice 1 e ponendo Δ al posto di Δ_n:

$$\Delta = \frac{(n-2)!\,(n-2)\,.\,a_i\,.\,a_k\,.\,\text{sen}\,(a_ia_k)}{\pi A_n A_h \,.\, a_{ik}}$$

Ma si ha d'altra parte:

$$A_nA_h = R \text{ per } h \text{ da 1 fino a } n-1,$$

$$a_i = \frac{R^{n-2}\,.\,\text{sen}\,b_i}{(n-2)!}, \quad a_k = \frac{R^{n-2}\,.\,\text{sen}\,b_k}{(n-2)!}$$

$$\text{sen}\,(a_ia_k) = \text{sen}\,(b_ib_k), \quad (n-3)!\,a_{ik} = R^{n-3}\,\text{sen}\,b_{ik};$$

per cui:

$$\Delta = \frac{\operatorname{sen} b_i \,.\, \operatorname{sen} b_k \,.\, \operatorname{sen}(b_i b_k)}{\operatorname{sen} b_{ik}} \tag{10}$$

Eliminiamo in secondo luogo V tra la (4) e la (8).

Avremo:

$$\Delta = \frac{(n-2)!\, h_r \,.\, a_r}{\pi A_n A_k} \text{ con } r \text{ diverso da } n.$$

E poichè indicando con k_r l'altezza dell'$(n-1)$-edro ipersferico uscente da B_r, la h_r è data dalla relazione:

$$h_r = R \,.\, \operatorname{sen} k_r,$$

ne segue l'altra espressione pel seno dell'$(n-1)$-edro ipersferico:

$$\Delta = \operatorname{sen} b_r \,.\, \operatorname{sen} k_r. \tag{11}$$

Da questa segue che se un raggio d'angoloide è perpendicolare a tutti i rimanenti, il suo seno è uguale a quello dell'angoloide che i rimanenti raggi individuano.

Per trovare una terza espressione del seno dell'$(n-1)$-edro ipersferico conduciamo gli S_1 tangenti nel punto B_1 ai lati uscenti da B_1, e indichiamo in generale con P_h il punto ove la semiretta A_nB_h incontra l'S_1 tangente a B_1B_h in B_1. Applicando all'n-edro $A_1A_2 \ldots A_n$ e all'altro $A_1P_2P_3 \ldots P_{n-1}A_n$ la (4), prendendo come vertici di partenza A_1 e A_n, se dalle due relazioni che si ottengono eliminiamo V e chiamiamo Δ_1 il seno dell'angoloide di vertice A_1, otteniamo:

$$\Delta = \frac{\Delta_1 \,.\, R \,.\, \pi B_1 P_h}{\pi A_n P_h},$$

dove h può prendere tutti i valori da 2 fino a $n-1$. Osservando che tolto nel prodotto che figura a denominatore il fattore A_nA_1 che viene eliso dalla R che si trova nel numeratore, i due prodotti contengono lo stesso numero di fattori, si può scrivere:

$$\Delta = \Delta_1 \,.\, \pi \frac{B_1 P_h}{A_n P_h} \cdot$$

Ma è:

$$\frac{B_1 P_h}{A_n P_h} = \operatorname{sen} B_1 B_h.$$

per cui:

$$\Delta = \Delta_1 \,.\, \pi \operatorname{sen} B_1 B_h, \tag{12}$$

dove Δ_1, per un'osservazione fatta poco sopra, sta a rappresentare il seno dell'angoloide di vertice B_1 dell'$(n-1)$-edro ipersferico.

Un'ultima espressione del seno dell'$(n-1)$-edro ipersferico ci è fornita dalla (2). Eseguendo il quadrato del determinante, si ha:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos B_1B_2 & \cos B_1B_3 \ldots \cos B_1B_{n-1} \\ \cos B_2B_1 & 1 & \cos B_2B_3 \ldots \cos B_2B_{n-1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cos B_{n-1}B_1 & \cos B_{n-1}B_2 & \cos B_{n-1}B_3 \ldots \quad 1 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Essa ci dà il seno dell'$(n-1)$-edro ipersferico in funzione dei lati.

Aggiungiamo ancora:

1°. I seni di due $(n-1)$-edri ipersferici aventi la medesima altezza stanno fra loro come i seni delle basi.

2°. I seni di due $(n-1)$-edri ipersferici aventi un angoloide comune stanno fra loro come i prodotti dei seni dei lati che comprendono questi angoloidi.

§ 3. — Estensione del teorema di Ceva.

Si divida ciascuno spigolo dell'n-edro secondo la legge rappresentata per lo spigolo A_iA_h dalla relazione:

$$A_iP_{ih} : P_{ih}A_h = \varphi : \psi. \tag{14}$$

dove φ e ψ sono note funzione di tutti o di alcuni degl'indici $1, 2 \ldots n$.

Abbiamo altrove dimostrato che condizioni necessarie e sufficienti perchè l'S_{n-2} che proietta P_{ih} dall'S_{n-3} opposto e gli analoghi passino per un medesimo punto sono:

1° *che in ogni faccia a due dimensioni sia soddisfatto il teorema di Ceva;*

2° *che scambiando in* (14) *l'indice* i *con l'indice* h *e gl'indici rimanenti due a due in tutti i modi possibili, le relazioni che via via si ottengono, che saranno al massimo* $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$, *siano sostanzialmente uguali fra loro e a quella di partenza.*

Vediamo se e come si trasforma questo principio per l'$(n-1)$-edro ipersferico di S_{n-1}.

Cominciamo con l'osservare che detto Q_{ih} il punto ove A_nP_{ih} incontra l'ipersuperficie sferica è:

$$A_iP_{ih} : P_{ih}A_h = \operatorname{sen} B_iQ_{ih} : \operatorname{sen} Q_{ih}B_h, \tag{15}$$

con che la (14) diventa:

$$\operatorname{sen} B_iQ_{ih} : \operatorname{sen} Q_{ih}B_h = \varphi' : \psi', \tag{16}$$

essendo φ' e ψ' note funzioni di tutti o di alcuni degli indici $1, 2 \ldots n-1$, e che il teorema di Ceva, se prima sussisteva, continua a sussistere anche dopo.

Osserviamo in secondo luogo che quando noi abbiamo scritto che le $\frac{(n-2)(n-3)}{3}$ relazioni che si ottengono dalla fondamentale, operandovi come è indicato nella condizione seconda del principio suaccennato, sono sostanzialmente uguali fra loro e a quella di partenza, abbiamo anche scritto le condizioni necessarie e sufficienti perchè esista un punto comune alle corrispondenti V_{n-2} ipersferiche dell'$(n-1)$-edro, per avere le quali basta tagliare con l'ipersfera quelli tra gli S_{n-2} dell'n-dro determinati dalla legge (14) che escono dal punto A_n. Da questo segue che per avere tutte e sole le relazioni necessarie e sufficienti, basterà tralasciare fra quelle scritte sopra quelle che contengono l'indice n.

Tanto basta per poter concludere che:

Condizioni necessarie e sufficienti perchè, diviso con un punto Q_{ih} *il lato* B_iB_h *dell'*$(n-1)$*-edro ipersferico mediante la legge:*

$$\text{sen } B_iQ_{ih} : \text{sen } Q_{ih}B_h = \varphi : \psi\,,$$

dove φ *e* ψ *sono note funzioni di tutti o di alcuni degl'indici* $1, 2 \ldots n-1$, *la* V_{n-2} *proiettante* Q_{ih} *dalla* V_{n-3} *opposta e le analoghe passino per un medesimo punto sono:*

1° *che in ogni faccia a due dimensioni sia soddisfatto il teorema di Ceva;*

2° *che scambiando nella* (17) i *con* h *e contemporaneamente due qualunque dei rimanenti indici in tutti i modi possibili le relazioni che via via si ottengono siano sostanzialmente uguali fra loro e a quella di partenza.*

Questo resultato rappresenta l'estensione del *teorema di Ceva*.

Andiamo a dare alcune applicazioni di esso.

α') Supponiamo che la legge di divisione sia:

$$\text{sen } B_iQ_{ih} : \text{sen } Q_{ih}B_h = \text{sen}^p{}_{b_h} : \text{sen}^p\, b_i.$$

In tal caso le relazioni che si ottengono col procedimento sopra indicato sono identicamente soddisfatte ed esiste un punto K_p comune alle V_{n-3} determinate dalla precedente legge. A questo punto daremo il nome di *punto notevole d'ordine p*. Se $p=0$ esso prende il nome di *baricentro*, se $p=1$ di *centro della sfera a* $n-3$ *dimensioni iscritta*, se $p=2$ di *punto di Lemoine*.

OSSERVAZIONE. — Se k_j e k_i indicano le distanze ipersferiche del punto Q_{ij} dalle facce b_j e b_i, poichè i seni dei due $(n-1)$-edri ipersferici aventi per vertice comune Q_{ij} e per basi rispettivamente b_j e b_i stanno fra loro come i seni dei lati B_iQ_{ij} e $Q_{ij}B_j$ segue, tenuta presente l'espressione (11) del seno dell'$(n-1)$-edro ipersferico e la α'):

$$\text{sen } k_i : \text{sen } k_j = \text{sen}^{p-1}\, b_i : \text{sen}^{p-1}\, b_j\,.$$

Ne resta in particolar modo giustificata la denominazione di *centro della sfera a* $n-3$ *dimensioni iscritta*, data al punto K_1.

β') Vediamo quali condizioni debbono essere soddisfatte perchè gli archi di circolo massimo congiungenti i vertici con i punti notevoli d'ordine $p\,(p \neq 0)$ delle facce opposte concorrano in un punto.

Considerando il lato B_iB_h come facente parte una volta dell'$(n-2)$-edro ipersferico che si ottiene escludendo B_k; una seconda volta come facente parte dell'$(n-2)$-edro ipersferico che si ottiene escludendo B_l, avremo rispettivamente:

$$\text{sen } B_i Q_{ih} : \text{sen } Q_{ih} B_h = \text{sen}^p\, b_{hk} : \text{sen}^p\, b_{ik}$$
$$\text{sen } B_h Q_{ih} : \text{sen } Q_{ih} B_i = \text{sen}^p\, b_{il} : \text{sen}^p\, b_{hl}.$$

Moltiplicando queste membro a membro e scambiando nella uguaglianza che risulta l'indice i con l'indice l otterremo le relazioni:

$$\text{sen } b_{hk} \,.\, \text{sen } b_{il} = \text{sen } b_{kl} \,.\, \text{sen } b_{ih} = \text{sen } b_{hl} \,.\, \text{sen } b_{ih} \qquad (18)$$

che pel teorema precedente saranno le condizioni *necessarie* e *sufficienti* richieste.

Senza più oltre insistere su questo, ci limitiamo a enunciare i teoremi seguenti:

γ') Condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di un punto comune agli archi di circolo massimo dell'ipersfera che congiungono i vertici dell'$(n-1)$-edro ipersferico con i punti di contatto delle facce opposte colla sfera a $n-3$ dimensioni iscritta sono:

$$\begin{aligned}\text{sen } b_{kl} \,.\, \text{sen } b_{ih} \,.\, \cot \tfrac{1}{2}(b_k b_l) \,.\, \cot \tfrac{1}{2}(b_i b_h) &= \\ = \text{sen } b_{ik} \,.\, \text{sen } b_{hl} \,.\, \cot \tfrac{1}{2}(b_i b_k) \,.\, \cot \tfrac{1}{2}(b_h b_l) &= \\ = \text{sen } b_{kh} \,.\, \text{sen } b_{il} \,.\, \cot \tfrac{1}{2}(b_h b_k) \,.\, \cot \tfrac{1}{2}(b_i b_l).& \qquad (19)\end{aligned}$$

δ') Condizioni necessarie e sufficienti perchè esista l'*ortocentro* nell'$(n-1)$-edro ipersferico sono:

$$\begin{aligned}\text{sen } b_{kh} \,.\, \text{sen } b_{il} \,.\, \cot(b_h b_k) \,.\, \cot(b_i b_l) &= \text{sen } b_{ik} \,.\, \text{sen } b_{hl} \,.\, \cot(b_i b_k) \,.\, \cot(b_h b_l) = \\ &= \text{sen } b_{ih} \,.\, \text{sen } b_{kl} \,.\, \cot(b_i b_h) \cot(b_k b_l). \qquad (20)\end{aligned}$$

Ora andiamo ad esporre un teorema che ci permetterà di dare altra forma a queste condizioni.

§ 4. — **Il teorema dei seni.**

Indicato, come si fece al § 2, con Δ il seno dell'$(n-1)$-edro ipersferico, si hanno le formule:

$$\Delta = \frac{\text{sen } b_i \,.\, \text{sen } b_k \,.\, \text{sen } (b_i b_k)}{\text{sen } b_{ik}}$$
$$\Delta = \frac{\text{sen } b_h \,.\, \text{sen } b_l \,.\, \text{sen } (b_h b_l)}{\text{sen } b_{hl}}$$
$$\Delta = \frac{\text{sen } b_i \,.\, \text{sen } b_l \,.\, \text{sen } (b_i b_l)}{\text{sen } b_{il}}$$
$$\Delta = \frac{\text{sen } b_h \,.\, \text{sen } b_k \,.\, \text{sen } (b_h b_k)}{\text{sen } b_{hk}}.$$

Se supponiamo che gl'indici i, h, k, l siano differenti tra loro perveniamo alle formule:

$$\frac{\text{sen } b_{ik} \,.\, \text{sen } b_{hl}}{\text{sen } (b_i b_k) \,.\, \text{sen } (b_h b_l)} = \frac{\text{sen } b_{il} \,.\, \text{sen } b_{hk}}{\text{sen } (b_i b_l) \,.\, \text{sen } (b_h b_k)}, \qquad (21)$$

ugnagliando il prodotto delle prime due a quello delle due ultime. Tali formule ci forniscono delle relazioni, in numero di $\binom{n-1}{4}$, fra *quattro spigoli e i relativi diedri* e costituiscono l'*estensione del teorema dei seni.*

È subito visto che i resultati espressi in formule dalla (18), (19), (20) possono ennunciarsi più semplicemente così:

Condizioni necessarie e sufficienti perchè le congiungenti (archi del circolo massimo dell'ipersfera) i vertici di un (n — 1)*-edro ipersferico con i punti notevoli d'ordine* p *(diverso da zero) delle facce opposte passino per un punto sono:*

$$\text{sen}\,(b_i b_h) \,.\, \text{sen}\,(b_k b_l) = \text{sen}\,(b_i b_l) \,.\, \text{sen}\,(b_h b_k) = \text{sen}\,(b_i b_k) \,.\, \text{sen}\,(b_h b_l). \qquad (22)$$

Condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza del punto di Gergonne *nell'* (n — 1)*-edro ipersferico sono:*

$$\cos \tfrac{1}{2}\,(b_i b_h) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}\,(b_k b_l) = \cos \tfrac{1}{2}\,(b_i b_l) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}\,(b_h b_k) = \cos \tfrac{1}{2}\,(b_i b_k) \,.\, \cos \tfrac{1}{2}\,(b_h b_l). \qquad (23)$$

*Condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza dell'*ortocentro *nell'* (n — 1)*-edro ipersferico sono:*

$$\cos\,(b_k b_l) \,.\, \cos\,(b_i b_h) = \cos\,(b_k b_i) \,.\, \cos\,(b_l b_h) = \cos\,(b_k b_h) \,.\, \cos\,(b_i b_l). \qquad (24)$$

Aggiungiamo da ultimo che uguagliando due qualunque delle espressioni di Δ scritte sopra possiamo ottenere due formule una delle quali ci fornisce una relazione fra *due facce, i diedri che esse formano con una terza e i rispettivi spigoli,* l'altra lega *due spigoli, le facce passanti per essi e i diedri relativi.*

§ 5. — Estensione del teorema di Stewart.

Indichiamo con p la misura dell'$(n-1)$-edro $P_{12}A_3A_4 \ldots A_n$, dove P_{12} è un punto di A_1A_2 tale che

$$A_1P_{12} : P_{12}A_2 = r : s. \qquad (25)$$

Si indichi poi con t la lunghezza del segmento A_nP_{13} e con P'_{12} quel punto ove la semiretta A_nP_{12} incontra l'ipersfera. Avremo:

$$(n-2)!\, a_1 = R^{n-3} \,.\, \text{sen}\, b_1 \qquad (n-2)!\, a_2 = R^{n-2} \,.\, \text{sen}\, b_2$$
$$(n-2)!\, p = R^{n-3} \,.\, t \,.\, \text{sen}\,(B_3B_4 \ldots B_{n-1}P'_{12}).$$

Sostituendo nella formula:

$$(r+s)^2 \,.\, p^2 = r^2 \,.\, a_1^2 + s^2 \,.\, a_2^2 + 2rsa_1a_2 \cos\,(a_1a_2),$$

e ricordando che

$$\cos\,(a_1a_2) = \cos\,(b_1b_2),$$

si ha:

$$(r+s)^2 \,.\, \operatorname{sen}^2(B_3B_4\dots B_{n-1}P'_{12}) =$$
$$= \frac{R^2}{t^2} \,.\, \{r^2 \operatorname{sen}^2 b_1 + s^2 \,.\, \operatorname{sen}^2 b_2 + 2rs \operatorname{sen} b_1 \operatorname{sen} b_2 \cos(b_1 b_2)\}.$$

E poichè il teorema di Stewart applicato al triangolo $A_nA_1A_2$ dà:

$$(r+s)^2 \,.\, t^2 = R^2 \,.\, \{r^2 + s^2 + 2rs \cos A_1A_nA_2\},$$

segue, sostituendo nella precedente:

$$\operatorname{sen}^2 \pi = \frac{r^2 \operatorname{sen}^2 b_1 + s^2 \operatorname{sen}^2 b_2 + 2rs \operatorname{sen} b_1 \operatorname{sen} b_2 \cos(b_1b_2)}{r^2 + s^2 + 2rs \cos B_1B_2} \qquad (26)$$

che ci fornisce appunto il corrispondente del teorema di Stewart nell'$(n-1)$-edro ipersferico.

Si vede subito che la formula (25) si trasforma in quest'altra:

$$\operatorname{sen} B_1P'_{12} : \operatorname{sen} P'_{12}B_2 = r : s. \qquad (27)$$

§ 6. — Applicazioni del teorema di Stewart.

Andiamo a dare alcune applicazioni della formula che abbiamo trovata nel precedente paragrafo.

α) Cominciamo dal supporre $\cos(b_1b_2) = 0$. La relazione (26) essendo omogenea in r ed s, potremo sostituirvi $\operatorname{sen} B_1P_{12}$ per r e $\operatorname{sen} P_{12}B_2$ per s. Così essa diviene:

$$\operatorname{sen}^2 B_1P_{12} \,.\, \operatorname{sen}^2 b_1 + \operatorname{sen}^2 P_{12}B_2 \,.\, \operatorname{sen}^2 b_2 =$$
$$= \operatorname{sen}^2\pi\,\{\operatorname{sen}^2 B_1P_{12} + \operatorname{sen}^2 B_2P_{12} + 2 \operatorname{sen} B_1P_{12} \,.\, \operatorname{sen} B_2P_{12} \,.\, \cos B_1B_2\} \quad (28)$$

e ci fornisce la *condizione necessaria e sufficiente* perchè l'angolo (b_1b_2) sia retto.

La medesima relazione ci fornisce pure la *condizione necessaria e sufficiente* perchè il lato B_1B_2 sia un quadrante. Essa è:

$$\operatorname{sen}^2 B_1P_{12} \,.\, \operatorname{sen}^2 b_1 + \operatorname{sen}^2 b_2P_{12} \,.\, \operatorname{sen}^2 b_2 +$$
$$+ 2 \,.\, \operatorname{sen} B_1P_{12} \,.\, \operatorname{sen} B_2P_{12} \,.\, \operatorname{sen} b_1 \,.\, \operatorname{sen} b_2 \cos(b_1b_2) =$$
$$= \operatorname{sen}^2\pi \,.\, (\operatorname{sen}^2 B_1P_{12} + \operatorname{sen}^2 B_2P_{12}). \quad (29)$$

β) Facciamo nella (26) r uguale ad s: la corrispondente è la *sezione mediana*. Si trova facilmente:

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2} B_1B_2 \,.\, \operatorname{sen}^2 m_{12} =$$
$$= \operatorname{sen}^2 b_1 + \operatorname{sen}^2 b_2 + 2 \operatorname{sen} b_1 \,.\, \operatorname{sen} b_2 \cos(b_1b_2). \quad (30)$$

Scambiamo in questa circolarmente gl'indici $1, 2 \dots n-2$ e sommiamola con tutte quelle che se ne ottengono. Avremo:

$$2 \,.\, \sum_1^{n-2}{}_i \sum_1^{n-2}{}_k \{\cos^2 \tfrac{1}{2} B_iB_k \,.\, \operatorname{sen}^2 m_{ik} - \operatorname{sen} b_i \operatorname{sen} b_k \cos(b_ib_k)\} =$$
$$= (n-3) \,.\, \sum_1^{n-2} \operatorname{sen}^2 b_i; \quad (31)$$

formula che corrisponde a quella che già trovammo trattando dell'n-edro e che ci dava la somma dei quadrati delle mediane uscenti da un vertice in funzione delle facce uscenti dal vertice medesimo.

Prendiamo ora la relazione:

$$4 \, . \sum_1^{n-1} m_{ik}^2 = (n-1)\sum_1^{n-1} a_i^2 - a_n^2,$$

e facciamovi:

$$a_i = \frac{R^{n-2} \, . \, \mathrm{sen}\, b_i}{(n-2)!}, \qquad (i \neq n)$$

e

$$a_n^2 = \frac{R^{2n-4}}{(\lfloor n-2)^2}\left\{\sum_1^{n-1} \mathrm{sen}^2 b_i - 2 \, . \sum_1^{n-1} \mathrm{sen}\, b_h \, . \, \mathrm{sen}\, b_k \cos(b_h b_k)\right\}, \qquad (32)$$

la quale ultima formula si ottiene applicando all'n-edro $A_1A_2 \ldots A_n$ il teorema di Carnot. Se per m_{ik} poniamo:

$$\frac{R^{n-2} \, . \, \mathrm{sen}\, m_{ik} \, . \cos\frac{1}{2} B_iB_k}{(n-2)!},$$

perveniamo alla relazione:

$$4 \, . \sum_1^{n-1} \mathrm{sen}^2 m_{ik} \, . \cos^2 \tfrac{1}{2} B_iB_k =$$
$$= (n-2) \, . \sum_1^{n-1} \mathrm{sen}^2 b_i + 2 \, . \sum_1^{n-1} \mathrm{sen}\, b_h \, . \, \mathrm{sen}\, b_k \, . \cos(b_h b_k), \qquad (33)$$

corrispondente a quella che ci dà la somma dei quadrati delle mediane dell'n-edro in funzione delle facce.

Passiamo ora ad estendere il teorema di Commandino.

Indichiamo con M il baricentro dell'n-edro $A_1A_2 \ldots A_n$ e con P quello della faccia a_1: i tre punti A_1, M, P sono in linea retta e in conseguenza i due triangoli A_1A_nM, A_nMP hanno la medesima altezza. Ne viene la proporzione:

$$A_1M : MP = R \, . \, \mathrm{sen}\, A_1A_nM : A_nP \, . \, \mathrm{sen}\, MA_nP.$$

E poichè il primo rapporto è uguale a $n-1$, si ricava:

$$\frac{\mathrm{sen}\, A_1A_nM}{\mathrm{sen}\, MA_nP} = \frac{(n-1) \, . \, A_nP}{R}. \qquad (34)$$

Ma la formula della distanza applicata all'$(n-1)$-edro $A_2A_3 \ldots A_n$ per calcolare A_nP, ci dà:

$$\overline{A_nP}^2 = \frac{\sum_2^{n-1} \overline{A_nA_h}^2}{n-1} - \frac{\sum_2^{n} \overline{A_hA_k}^2}{(n-1)^2} =$$
$$= \frac{\sum_2^{n-1} \overline{A_nA_h}^2}{n-1} - \frac{\sum_2^{n-1} \overline{A_nA_h}^2 + \sum_2^{n-1} \overline{A_hA_k}^2}{(n-1)^2} =$$
$$= \frac{(n-2)\sum_2^{n-1} \overline{A_nA_h}^2 - \sum_2^{n-1} \overline{A_hA_k}^2}{(n-1)^2}.$$

E siccome è $A_nA_h = R$, $A_hA_k = 2R . \text{sen} \frac{1}{2} B_hB_k$, seguirà:

$$\overline{A_nP}^2 = \frac{(n-2)^2 - 4 . \sum_2^{n-1} \text{sen}^2 \frac{1}{2} B_hB_k}{(n-1)^2} . R^2.$$

Sostituendo nella (34) dopo averne elevato a quadrato ambo i membri e ponendo $\text{sen}\, B_1G_{n-1}$ per $\text{sen}\, A_1A_nM$ e $\text{sen}\, G_{n-1}G_{n-2}$ per $\text{sen}\, MA_nP$, si trova la formula:

$$\frac{\text{sen}^2 B_1G_{n-1}}{\text{sen}^2 G_{n-1}G_{n-2}} = (n-2)^2 - 4 . \sum_2^{n-1} \text{sen}^2 \tfrac{1}{2} B_hB_k \qquad (35)$$

che ci rappresenta l'*estensione all'*$(n-1)$*-edro ipersferico* del *teorema di Commandino.*

Questa formula che pel caso particolare di n eguale a *quattro* ci conduce alla nota relazione:

$$\frac{\text{sen}\, B_1G_3}{\text{sen}\, G_3G_2} = 2 . \cos \tfrac{1}{2} B_2B_3,$$

è a sua volta un caso particolare di una formula che vogliamo qui riportare.

Se indichiamo, al solito, con K_p il punto notevole d'ordine p e con P il punto ove la retta A_1K_p incontra l'S_{n-2} della faccia a_1, i triangoli A_1A_nP e PA_nK_p avendo la medesima altezza forniscono la proporzione:

$$\frac{A_1P}{PK_p} = \frac{R . \text{sen}\, A_1A_nP}{A_nK_p . \text{sen}\, PA_nK_p}.$$

Ma per un teorema noto è:

$$A_1K_p : K_pP = \sum_2^n a_i^p : a_1^p,$$

dalla quale, componendo, segue:

$$A_1P : PK_p = \sum_1^n a_i^p : a_1^p.$$

Allora la proporzione precedente prende la forma:

$$\frac{\text{sen}\, A_1A_nP}{\text{sen}\, PA_nK_p} = \frac{A_nK_p . \sum_1^n a_i^p}{R . a_1^p}. \qquad (36)$$

La formula della distanza ci dà:

$$\overline{A_nK_p}^2 = \frac{\sum_1^{n-1} a_i^p \overline{A_nA_i}^2}{\sum_1^n a_i^p} - \frac{\sum_1^{n-1} a_n^p . a_i^p \overline{A_nA_i}^2 + \sum_1 a_h^p a_k^p . \overline{A_hA_k}^2}{[\sum_1^n a_i^p]^2}$$

$$= \frac{\sum_1^{n-1} a_i^p . \overline{A_nA_i}^2 \left\{ \sum_1^{n-1} a_i^p + a_n^2 \right\} - \sum_1^{n-1} a_n^p a_i^p . \overline{A_nA_i}^2 - \sum_1^{n-1} a_h^p a_k^p . \overline{A_hA_k}^2}{[\sum_1^n a_i^p]^2} =$$

$$= \frac{\sum_1^{n-1} a_i^{2p} . \overline{A_nA_i}^2 + \sum_1^{n-1} a_h^p . a_k^p \left\{ \overline{A_nA_h}^2 + \overline{A_nA_k}^2 - \overline{A_hA_k}^2 \right\}}{[\sum_1^n a_i^p]^2}.$$

Ricordando ora che è:

$$A_nA_i = R, \qquad a_i = \frac{R^{n-2}\,.\,\mathrm{sen}\, b_i}{(n-2)!},$$

e osservando che:

$$\overline{A_nA_h}^2 + \overline{A_nA_k}^2 - \overline{A_hA_k}^2 = 2R^2\,.\,\cos B_hB_k,$$

si trova facendo le sostituzioni nel solo numeratore della formula ultima:

$$\overline{A_nK_p}^2 = \frac{R^{(n-2)\,2p+2}\left\{\sum_1^{n-1}\mathrm{sen}^{2p}\, b_i + 2\,.\sum_1^{n-1}\mathrm{sen}^p\, b_i\,.\,\mathrm{sen}^p\, b_h \cos B_hB_i\right\}}{[(n-2)!]^{2p}\,.\,[\sum_1^n a_i^p]^2} \qquad (37)$$

Sostituendo questo valore nella (36) dopo averne elevati a quadrato i due membri, si perviene alla formula che si domandava e che può scriversi sotto la forma:

$$\frac{\mathrm{sen}\, B_1K_p^{(1)}}{\mathrm{sen}\, K_p^{(1)}K_p} = \frac{\sum_1^{n-1}\mathrm{sen}^{2p}\, b_i + 2\,.\sum_1^{n-1}\mathrm{sen}^p\, b_h\,.\,\mathrm{sen}^p\, b_k \cos B_hB_k}{\mathrm{sen}^{2p}\, b_1}. \qquad (38)$$

Da questa, che è riferita al vertice B_1, si può facilmente passare alla formula generale.

Notiamo che quando p è uguale a zero, il secondo membro della (38) essendo allora una funzione simmetrica dei coseni dei lati, il rapporto $\frac{\mathrm{sen}\, B_1K_0^{(1)}}{\mathrm{sen}\, K_0^{(1)}K_0}$ è costante. Il valore di questo rapporto, è per la (38) stessa dato dall'espressione:

$$(n-1) + 2\sum_1^{n-1}\cos B_hB_k. \qquad (39)$$

γ) La formula generale (26), quando vi si fa:

$$r = \mathrm{sen}^2\, b_2, \qquad s = \mathrm{sen}^2\, b_1$$

dà:

$$\mathrm{sen}^2\, s_{12} = \frac{\mathrm{sen}^4\, b_2\,.\,\mathrm{sen}^2\, b_1 + \mathrm{sen}^4\, b_1\,.\,\mathrm{sen}^2\, b_2 + 2\,\mathrm{sen}^3\, b_1\,.\,\mathrm{sen}^3\, b_2\,.\cos(b_1b_2)}{\mathrm{sen}^4\, b_2 + \mathrm{sen}^4\, b_1 + 2\,\mathrm{sen}^2\, b_1\,.\,\mathrm{sen}^2\, b_2 \cos B_1B_2}$$

ovvero:

$$\mathrm{sen}^2\, s_{12} = \frac{\mathrm{sen}^2\, b_2\,.\,\mathrm{sen}\, b_1\,.\,(\mathrm{sen}^2\, b_2 + \mathrm{sen}^2\, b_1 + 2\,\mathrm{sen}\, b_1\,\mathrm{sen}\, b_2 \cos(b_1b_2))}{\mathrm{sen}^4\, b_2 + \mathrm{sen}^4\, b_1 + 2\,\mathrm{sen}^2\, b_1\,.\,\mathrm{sen}^2\, b^2 \cos B_1B_2}.$$

Tenendo conto della formula (30), perveniamo facilmente alla seguente:

$$\frac{\mathrm{sen}^2\, s_{12}}{\mathrm{sen}^2\, m_{12}} = \frac{4\,\mathrm{sen}^2\, b_1\,.\,\mathrm{sen}^2\, b_2\,.\cos\frac{B_1B_2}{2}}{\mathrm{sen}^4\, b_2 + \mathrm{sen}^4\, b_1 + 2\,\mathrm{sen}^2\, b_2\,.\,\mathrm{sen}^2 b_1\,.\cos B_1B_2}. \qquad (40)$$

Questa è l'estensione all'$(n-1)$-edro ipersferico del teorema trovato dal sig. *Thiry* sul rapporto fra la simediana e la mediana di un triangolo rettilineo.

§ 7. — Formula della distanza.

Sia S un punto della ipersuperficie sferica, K_p il punto notevole d'ordine p dell'n-edro $A_1A_2\ldots A_n$ e K'_p il punto ove l'ipersuperficie sferica è incontrata dalla semiretta A_nK_p: sarà K'_p il punto notevole d'ordine p dell'$(n-1)$-edro ipersferico.

Tiriamo il segmento SK_p e prendiamo a considerare il triangolo rettilineo A_nSK_p. Pel teorema di Carnot abbiamo:

$$\overline{SK_p}^2 = \overline{A_nK_p}^2 + R^2 - 2 \,.\, R \,.\, A_nK_p \,.\, \cos S_n\widehat{A}K'_p,$$

e siccome si è trovato pure:

$$\overline{SK_p}^2 = \frac{\Sigma a_h{}^p \,.\, \overline{SA_h}^2}{\Sigma a_h{}^p} - E_p,$$

uguagliando i secondi membri e isolando il termine col $\cos S\widehat{A_n}K'_p$ troveremo:

$$2R \,.\, A_nK_p \,.\, \cos S\widehat{A_n}K'_p = R^2 - \frac{\Sigma a_h{}^p \,.\, \overline{SA_h}^2}{\Sigma a_h{}^p} - E_p + \overline{A_nK_p}^2.$$

Sommando membro a membro questa e l'altra:

$$\overline{A_nK_p}^2 = R^2 - E_p,$$

che si ottiene dalla formula generale della distanza, fattovi $P \equiv A_n$, e facendo le debite riduzioni, si perviene alla relazione:

$$2R \,.\, A_nK_p \,.\, \cos SA_nK'_p = 2R^2 - \frac{\Sigma a_h{}^p \overline{SA_h}^2}{\Sigma a_h{}^p}.$$

Sostituendo a SA_h il suo valore dato da:

$$SA_h = 2R \,.\, \mathrm{sen}\, \tfrac{1}{2} S\widehat{A_n}A_h,$$

la precedente può scriversi anche:

$$2R \,.\, A_nK_p \,.\, \cos \widehat{S}A_nK'_p = 2R^2 \,.\, \frac{\Sigma a_h{}^p \,.\, (1 - 2 \,.\, \mathrm{sen}^2 \tfrac{1}{2} S\widehat{A_n}A_h)}{\Sigma a_h{}^p},$$

ovvero:

$$2R \,.\, A_nK_p \,.\, \cos S\widehat{A_n}K'_p = 2R^2 \,.\, \frac{\Sigma a_h{}^p \,.\, \cos S\widehat{A_n}A_h}{\Sigma a_h{}^p}: \qquad (41)$$

e tenendo presente l'espressione di a_h,

$$A_nK_p \,.\, \cos SA_nK'_p = \frac{R^{(n-2)p+1}}{[(n-2)!]^p} \,.\, \frac{\Sigma\, \mathrm{sen}^p\, b_h \,.\, \cos S\widehat{A_n}A_h}{\Sigma a_h{}^p}.$$

Ricordando poi la relazione:

$$A_nK_p = \frac{R^{(n-2)p+1}}{[(n-2)!]^p} \,.\, \frac{\sqrt{\sum_1^{n-1} \mathrm{sen}^{2p}\, b_i + 2 \,.\, \sum_1^{n-1} \mathrm{sen}^p\, b_h \,.\, \mathrm{sen}^p\, b_i \,.\, \cos B_iB_h}}{\sum_1^n a_h{}^p} \,. \qquad (42)$$

di cui già facemmo uso nel precedente paragrafo: e dividendo membro a membro le (41), (42) perveniamo, fatte tutte le riduzioni possibili, alla formula:

$$\cos SK'_p = \frac{\sum_1^{n-1} \operatorname{sen}^p b_h \,.\, \cos SB_h}{\sqrt{\sum_1^{n-1} \operatorname{sen}^{2p} b_i + 2 \sum_1^{n-1} \operatorname{sen}^p b_i \,.\, \operatorname{sen}^p b_h \,.\, \cos B_i B_h}}. \tag{43}$$

Questa formula ci permette di calcolare la distanza (ipersferica) di un punto S dell'ipersuperficie sferica dal punto notevole d'ordine p dell'$(n-1)$-edro ipersferico in funzione dei seni delle facce, dei coseni dei lati e dei coseni delle distanze del punto S dai vertici.

Andiamo a dare alcune applicazioni della formula testè trovata e cominciamo dallo scrivere la medesima per un altro punto T. Se dividiamo la (43) e quella così ottenuta, membro a membro, otteniamo:

$$\frac{\cos SK'_p}{\cos TK'_p} = \frac{\Sigma \operatorname{sen}^p b_h \,.\, \cos SB_h}{\Sigma \operatorname{sen}^p b_h \,.\, \cos TB_h}. \tag{44}$$

Ora, se SK_p è minore di TK_p, sarà $\cos SK_p > TK_p$, e quindi la somma che figura al numeratore sarà maggiore di quella che figura al numeratore. La somma:

$$\sum_1^{n-1} \operatorname{sen}^p b_h \,.\, \cos SB_h$$

è dunque *massima* quando S coincide con K_p. E il valore che essa somma prende in tal caso è, per la (43):

$$\sqrt{\sum_{1\,i}^{n-1} \operatorname{sen}^{2p} b_i + 2 \sum_{ih}^{n-1} \operatorname{sen}^p b_i \,.\, \operatorname{sen}^p b_h \,.\, \cos B_i B_h}.$$

In particolare, per p uguale a zero, si ha:

$$\sum_1^{n-1} \cos B_i K_0 = \sqrt{(n-1) + 2 \,.\, \Sigma \cos B_i B_h}.$$

Se facciamo coincidere S col centro O della ipersfera circoscritta troviamo, per p uguale a zero, uno, due:

$$\begin{cases} \cos OG = \dfrac{(n-1) \,.\, \cos R}{\sqrt{(n-1) + 2 \,.\, \Sigma \cos B_i B_h}} \\ \cos OI = \dfrac{\cos R \,.\, \Sigma \operatorname{sen} b_i}{\sqrt{\Sigma \operatorname{sen}^2 b_i + 2 \,.\, \Sigma \operatorname{sen} b_i \,.\, \operatorname{sen} b_h \cos B_i B_h}} \\ \cos OK = \dfrac{\cos R \,.\, \Sigma \operatorname{sen}^2 b_i}{\sqrt{\Sigma \operatorname{sen}^4 b_i + 2 \,.\, \Sigma \operatorname{sen}^2 b_i \,.\, \operatorname{sen}^2 b_h \cos B_i B_h}} \end{cases} \tag{45}$$

dove R indica qui la misura del raggio della ipersfera.

Facendo coincidere S con K_r troviamo, se r è differente da p:

$$\cos K_r K_p = \frac{\sum_1^{n-1} \operatorname{sen}^p b_h \,.\, \cos B_h B_r}{\sqrt{\Sigma \operatorname{sen}^{2p} b_i + 2 \,.\, \Sigma \operatorname{sen}^p b_i \,.\, \operatorname{sen}^p b_h \,.\, \cos B_i B_h}} \tag{46}$$

la quale ci conduce alla formula:

$$\frac{\Sigma \operatorname{sen}^p b_h \,.\, \cos B_h B_r}{\Sigma \operatorname{sen}^r b_h \,.\, \cos B_i K_p} = \sqrt{\frac{\Sigma \operatorname{sen}^{2p} b_i + 2\,.\,\Sigma \operatorname{sen}^p b_i \,.\, \operatorname{sen}^p b_h \,.\, \cos B_i B_h}{\Sigma \operatorname{sen}^{2r} b_i + 2\,.\,\Sigma \operatorname{sen}^r b_i \,.\, \operatorname{sen}^r b_h \,.\, \cos B_i B_h}}$$

e alle altre

$$\left\{\begin{aligned} \cos GI &= \frac{\Sigma \operatorname{sen} b_h \,.\, \cos B_h K_0}{\sqrt{\Sigma \operatorname{sen}^2 b_i + 2\,.\,\Sigma \operatorname{sen} b_i \operatorname{sen} b_h \cos B_i B_h}} \\ \cos IK &= \frac{\Sigma \operatorname{sen}^2 b_h \,.\, \cos B_h I}{\sqrt{\Sigma \operatorname{sen}^4 b_i + 2\,.\,\Sigma \operatorname{sen}^2 b_i \,.\, \operatorname{sen}^2 b_h \cos B_i B_h}} \\ \cos KG &= \frac{\Sigma \operatorname{sen}^2 b_h \,.\, \cos B_h K_0}{\sqrt{\Sigma \operatorname{sen}^4 b_i + 2\,.\,\Sigma \operatorname{sen}^2 b_i \,.\, \operatorname{sen}^2 b_h \,.\, \cos B_i B_h}} \end{aligned}\right. \qquad (47)$$

mentre, se r è uguale a p risulta:

$$\sum_1^{n-1} \operatorname{sen}^p b_h \,.\, \cos B_h K_p = \sqrt{\Sigma \operatorname{sen}^{2p} b_i + 2\,.\,\Sigma \operatorname{sen}^p b_i \,.\, \operatorname{sen}^p b_h \cos B_i B_h} \quad (48)$$

da cui seguono in particolare le relazioni:

$$\Sigma \operatorname{sen} b_h \,.\, \cos B_h I = \sqrt{\Sigma \operatorname{sen}^2 b_i + 2\,.\,\Sigma \operatorname{sen} b_i \operatorname{sen} b_h \cos B_i B_h}$$
$$\Sigma \operatorname{sen}^2 b_h \,.\, \cos B_h K = \sqrt{\Sigma \operatorname{sen}^4 b_i + 2\,.\,\Sigma \operatorname{sen}^2 b_i \operatorname{sen}^2 b_h \cos B_i B_h}$$

che riportiamo dalla lunga serie di formule che si possono trarre dalla (43).

Notiamo da ultimo la relazione generale:

$$\Sigma \operatorname{sen}^p b_h \,.\, B_i H = 0, \qquad (49)$$

che ha luogo quando H è un punto della *sezione massima* che ha per polo K_p e che consegue dalla formula (43).

In particolare è poi:

$$\Sigma \cos B_i H = 0, \qquad (50)$$

se la distanza HK_0 è di un quadrante. I punti tali che la somma medesima sia *costante* sono sopra una varietà sferica a $n-3$ dimensioni, della quale la (43) ci fornisce allora il raggio.

ENRICO PICCIOLI.

(Continua)

SULLA TRASFORMAZIONE DEI RADICALI

$$\sqrt{a \pm \sqrt[4]{b}}, \quad \sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt[4]{b}}, \quad \sqrt{\sqrt[4]{a} \pm \sqrt[4]{b}}$$

1. Il prof. DE-LONGCHAMPS, nel *Supplemento al Periodico di Matematica*, [1] richiamò l'attenzione del lettore sulla questione elementare, ma interessante, della trasformazione dei radicali sovrapposti, mostrando con un esempio che « si possono trovare in questa via dei risultati semplici e probabilmente inosservati fin qui ».

[1] Anno V, fasc. VI.

In altri miei lavori io ho già fatto rilevare la verità di tale affermazione, riuscendo a trasformare alcuni radicali sovrapposti nella somma di radici quadrate, quarte ecc. di quantità razionali.

Qui mi propongo ora di eseguire, sullo stesso argomento, altre nuove trasformazioni, le quali, se non m'inganno, conducono a dei risultati degni di nota.

***

2. Lemma. — *Il radicale* $\sqrt{\mathrm{a} \pm \sqrt[4]{\mathrm{b}}}$, *in cui le quantità* a *e* b *sono razionali, si può trasformare nella espressione*

$$\sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}} \pm \sqrt{\varepsilon - \sqrt{\beta}},$$

in cui α, β, ε *sono quantità razionali, se risultano verificate le seguenti condizioni:*

1ª. *La differenza* $\mathrm{a}^4 - \mathrm{b}$ *sia un quadrato perfetto* r^2, *sia cioè*

$$a^4 - b = r^2. \tag{1}$$

2ª. *La quantità* $\frac{1}{2}(a^2 - r)$ *sia un quadrato perfetto* q^2, *sia cioè*

$$\tfrac{1}{2}(a^2 - r) = q^2. \tag{2}$$

Poniamo infatti le equazioni

$$\sqrt{a + \sqrt[4]{b}} = \sqrt{x + \sqrt{y}} + \sqrt{z - \sqrt{y}}, \qquad \sqrt{a - \sqrt[4]{b}} = \sqrt{x + \sqrt{y}} - \sqrt{z - \sqrt{y}}, \tag{3}$$

e proponiamoci di risolverle, se sarà possibile, con dei valori razionali delle incognite x, y, z.

Considerando di ogni radicale il solo segno positivo, quadrando le (3) e sommando membro a membro si ottiene

$$a = x + z. \tag{4}$$

Moltiplicando invece membro a membro le (3) si ha

$$\sqrt{a^2 - \sqrt{b}} = 2\sqrt{y} - (z - x). \tag{5}$$

Per le (1) e (2) si ha intanto

$$\sqrt{a^2 - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a^2 + r}{2}} - \sqrt{\frac{a^2 - r}{2}} = \sqrt{\frac{a^2 + r}{2}} - q, \tag{6}$$

e quindi, dalle (5) e (6) si ricava

$$\sqrt{\frac{a^2 + r}{2}} - q = 2\sqrt{y} - (z - x),$$

che risulta soddisfatta se si pone

$$4y = \tfrac{1}{2}(a^2 + r), \qquad z - x = q. \tag{7}$$

Dalle (4) e (7) si ricava allora

$$x = \tfrac{1}{2}(a - q) \quad , \quad y = \tfrac{1}{8}(a^2 + r) \quad , \quad z = \tfrac{1}{2}(a + q),$$

e quindi dalle (3)

$$\sqrt{a \pm \sqrt[4]{b}} = \sqrt{\frac{a - q + \sqrt{\frac{a^2 + r}{2}}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a + q - \sqrt{\frac{a^2 + r}{2}}}{2}},$$

che, tenuto conto della (2), può anche scriversi

$$\sqrt{a \pm \sqrt[4]{b}} = \sqrt{\frac{a-q+\sqrt{a^2-q^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a+q-\sqrt{a^2-q^2}}{2}}, \tag{8}$$

come volevasi dimostrare.

Esempio numerico. — Supposto $a=7$, $b=2112$, $r=17$, $q=4$ risultano verificate le relazioni (1) e (2); dalla (8) si ha quindi

$$\sqrt{7 \pm 2\sqrt[4]{132}} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{6+2\sqrt{33}} \pm \sqrt{22-2\sqrt{33}}\right].$$

***

3. Teorema I. — *Il radicale* $\sqrt{a \pm \sqrt[4]{b}}$, *in cui le quantità* a *e* b *sono razionali, si può decomporre nella somma di due radici quarte e di due radici quadrate di quantità razionali, se risultano soddisfatte le seguenti condizioni:*

1ª. *La differenza* $a^4 - b$ *sia un quadrato perfetto* r^2, *sia cioè*

$$a^4 - b = r^2. \tag{9}$$

2ª. *La quantità* $\frac{1}{2}(a^2 - r)$ *sia un quadrato perfetto* q^2, *sia cioè*

$$\frac{1}{2}(a^2 - r) = q^2. \tag{10}$$

3ª. *Il prodotto* $2q(a+q)$ *sia un quadrato perfetto* h^2, *sia cioè*

$$2q(a+q) = h^2. \tag{11}$$

Essendo le relazioni (9) e (10) identiche alle (1) e (2), al radicale $\sqrt{a \pm \sqrt[4]{b}}$ si può applicare il lemma precedente; si ha quindi

$$\sqrt{a \pm \sqrt[4]{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{a-q+\sqrt{a^2-q^2}} \pm \sqrt{a+q-\sqrt{a^2-q^2}}\right]. \tag{12}$$

Osserviamo intanto che il radicale $\sqrt{a-q+\sqrt{a^2-q^2}}$ che comparisce nel secondo membro della (12), si può trasformare nella somma di due radici quarte di quantità razionali se il prodotto

$$(a^2-q^2)[(a^2-q^2)-(a-q)^2] = 2q(a+q)(a-q)^2$$

sia un quadrato perfetto. (¹)

Similmente, il radicale $\sqrt{a+q-\sqrt{a^2-q^2}}$ si può trasformare nella differenza di due radicali semplici, se

$$(a+q)^2-(a^2-q^2) = 2q(a+q)$$

è un quadrato perfetto.

Posto allora, come abbiamo fatto nella (11),

$$2q(a+q) = h^2$$

risulta

$$2q(a+q)(a-q)^2 = [(a-q)h]^2,$$

e quindi si ottiene (¹)

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{a-q+\sqrt{a^2-q^2}} &= \sqrt[4]{\frac{(a-q)(a+2h+3q)}{4}} + \sqrt[4]{\frac{(a-q)(a-2h+3q)}{4}} \\ \sqrt{a+q-\sqrt{a^2-q^2}} &= \sqrt{\frac{a+q+h}{2}} - \sqrt{\frac{a+q-h}{2}},\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

(¹) Cfr. una mia Nota nel *Periodico di Matematica*. Vol. XXI, fasc. VI.

e perciò la (12) si può scrivere

$$\sqrt{a \pm \sqrt[4]{b}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt[4]{(a-q)(a+2h+3q)} + \sqrt[4]{(a-q)(a-2h+3q)} \pm \sqrt{a+q+h} \mp \sqrt{a+q-h}\right], \quad (14)$$

come volevasi dimostrare.

Esempio numerico. — Supposto $a = 7$, $b = 192$, $r = 47$, $q = 1$, $h = 4$, risultano verificate le relazioni (9), (10) e (11): dalla (14) si ha quindi

$$\sqrt{7 \pm 2\sqrt[4]{12}} = \frac{1}{2}\left[\sqrt[4]{108} + \sqrt[4]{12} \pm \sqrt{12} \mp 2\right].$$

***

4. Teorema II. — *Il radicale* $\sqrt{a \pm \sqrt[4]{b}}$, *in cui le quantità* a *e* b *sono razionali, si può decomporre nella somma di quattro radicali semplici, se risultano soddisfatte le seguenti condizioni:*

1ª *La differenza* $a^4 - b$ *sia un quadrato perfetto* r^2, *sia cioè*

$$a^4 - b = r^2. \quad (15)$$

2ª. *La quantità* $\frac{1}{2}(a^2 - r)$ *sia un quadrato perfetto* q^2, *sia cioè*

$$\tfrac{1}{2}(a^2 - r) = q^2. \quad (16)$$

3ª. *I prodotti* $2q(q - a)$, $2q(q + a)$ *siano due quadrati perfetti.*

Essendo le relazioni (15) e (16) identiche alle (1) e (2), al radicale $\sqrt{a \pm \sqrt[4]{b}}$ si può applicare il lemma precedente; si ha quindi

$$\sqrt{a \pm \sqrt[4]{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{a - q + \sqrt{a^2 - q^2}} \pm \sqrt{a + q - \sqrt{a^2 - q^2}}\right]. \quad (17)$$

Osserviamo inoltre che i due radicali che compariscono nel secondo membro della (17) possono rispettivamente decomporsi nella somma e nella differenza di due radicali semplici, se i prodotti

$$2q(q - a), \qquad 2q(q + a)$$

sono due quadrati perfetti.

Posto infatti

$$2q(q - a) = h^2, \qquad 2q(q + a) = k^2, \quad (18)$$

si ha

$$\sqrt{a - q + \sqrt{a^2 - q^2}} = \sqrt{\frac{a - q + k}{2}} + \sqrt{\frac{a - q - k}{2}}$$
$$\sqrt{a + q - \sqrt{a^2 - q^2}} = \sqrt{\frac{a + q + h}{2}} - \sqrt{\frac{a + q - h}{2}};$$

e quindi dalla (17) si ottiene

$$\sqrt{a \pm \sqrt[4]{b}} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a - q + k} + \sqrt{a - q - k} \pm \sqrt{a + q + h} \mp \sqrt{a + q - h}\right], \quad (19)$$

come volevasi dimostrare.

Esempio numerico. — Supposto $a=\frac{7}{10}$, $b=-144$, $r=-\frac{1201}{100}$, $q=\frac{5}{2}$ risultano verificate le relazioni (1) e (2); dalla (8) si ha quindi

$$\sqrt{\frac{7}{10}\pm\sqrt[4]{-144}}=\sqrt{\frac{-9+12\sqrt{-1}}{10}}\pm\sqrt{\frac{16-12\sqrt{-1}}{10}}.$$

Ma per $h=3$, $k=4$ risultano anche verificate le relazioni (18); dalla (19) si ottiene allora

$$\sqrt{\frac{7}{10}\pm\sqrt[4]{-144}}=\sqrt{\frac{3}{10}}+2\sqrt{-\frac{3}{10}}\pm3\sqrt{\frac{1}{5}}\mp\sqrt{-\frac{1}{5}}.$$

***

5. Teorema III. — *Il radicale*

$$\mu=\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt[4]{b}}, \tag{20}$$

in cui le quantità a *e* b *sono razionali, si può decomporre nella somma di quattro radici quarte di quantità razionali, se risultano verificate le seguenti condizioni:*

1ª. *La differenza* a^2-b *sia un quadrato perfetto* r^2, *sia cioè*

$$a^2-b=r^2. \tag{21}$$

2ª. *La quantità* $\frac{1}{2}a(a-r)$ *sia un quadrato perfetto* q^2 *sia cioè*

$$\tfrac{1}{2}a(a-r)=q^2. \tag{22}$$

3ª. *Il prodotto* $2q(q+a)$ *sia un quadrato perfetto* h^2, *sia cioè*

$$2q(q+a)=h^2. \tag{23}$$

Considerando di ogni radicale il solo segno positivo, il radicale (20) si può porre sotto la forma

$$\mu=\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\sqrt{a\pm\sqrt[4]{a^2b}}. \tag{24}$$

Al radicale $\sqrt{a\pm\sqrt[4]{a^2b}}$ si può applicare la trasformazione (14), poichè, potendosi la (21) scrivere

$$a^2(a^2-b)=a^2r^2, \tag{25}$$

per le (25), (22) e (23) risultano verificate le relazioni analoghe alle (9), (10) e (11). Dalle (14) e (24) si ha allora

$$\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt[4]{b}}=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt[4]{a}}\left[\sqrt[4]{(a-q)(a+2h+3q)}+\sqrt[4]{(a-q)(a-2h+3q)}\pm\sqrt{a+q+h}\mp\sqrt{a+q-h}\right], \tag{26}$$

che può anche scriversi

$$\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt[4]{b}}=$$
$$\frac{1}{2}\left[\sqrt[4]{\frac{(a-q)(a+2h+3q)}{a}}+\sqrt[4]{\frac{(a-q)(a-2h+3q)}{a}}\pm\sqrt[4]{\frac{(a+q+h)^2}{a}}\mp\sqrt[4]{\frac{(a+q-h)^2}{a}}\right] \tag{27}$$

come volevasi dimostrare.

Osservazione. — È chiaro che se, nella (24), al radicale $\sqrt{a \pm \sqrt[4]{a^2 b}}$ si potesse applicare il Teorema I, il radicale (20) verrebbe decomposto nel prodotto di una radice quarta di quantità razionale per la somma di quattro radicali semplici.

Il lettore può dimostrare, molto facilmente, che tale trasformazione ha luogo se risultano verificate le seguenti relazioni

$$a^2 - b = r^2 \ , \ \tfrac{1}{2} a (a - r) = q^2 \ , \ 2q (q - a) = h^2 \ , \ 2q (q + a) = k^2. \quad (28)$$

Il risultato al quale si giunge è il seguente

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt[4]{b}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{a}} [\sqrt{a - q + k} + \sqrt{a - q - k} \pm \sqrt{a + q + h} \mp \sqrt{a + q - h}]. \quad (29)$$

Esempio numerico. — Supposto $a = 343$, $b = 9408$, $r = 329$, $q = 49$, $h = 146$ risultano verificate le relazioni (21), (22) e (23); dalla (26) si ha

$$\sqrt{5\sqrt{7} \pm 2\sqrt[4]{588}} = \frac{7}{2\sqrt[4]{343}} [\sqrt[4]{108} + \sqrt[4]{12} \pm 2\sqrt{3} \mp 2].$$

***

6. Teorema IV. — *Il radicale*

$$\rho = \sqrt{\sqrt[4]{a} \pm \sqrt[4]{b}}, \quad (30)$$

in cui le quantità a *e* b *sono razionali, si può decomporre nel prodotto di una radice ottava per la somma di quattro radici quarte di quantità razionali, se risultano verificate le seguenti condizioni:*

1ª. *Il prodotto* a (a — b) *sia un quadrato perfetto* r², *sia cioè*

$$a (a - b) = r^2. \quad (31)$$

2ª. *La quantità* ½ a (a — r) *sia un quadrato perfetto* q², *sia cioè*

$$\tfrac{1}{2} a (a - r) = q. \quad (32)$$

3ª. *Il prodotto* 2q (q + a) *sia un quadrato perfetto* h², *sia cioè*

$$2q (q + a) = h^2. \quad (33)$$

Considerando di ogni radicale il solo segno positivo, risulta vera la seguente uguaglianza

$$\rho = \sqrt[8]{a} \sqrt{1 \pm \sqrt[4]{\frac{b}{a}}}. \quad (34)$$

Le relazioni (31), (32) e (33) si possono rispettivamente scrivere

$$1 - \frac{b}{a} = \left(\frac{r}{a}\right)^2, \quad \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r}{a}\right) = \left(\frac{q}{a}\right)^2, \quad 2\frac{q}{a}\left(\frac{q}{a} + 1\right) = \left(\frac{h}{a}\right)^2, \quad (35)$$

quindi al radicale $\sqrt{1 \pm \sqrt[4]{\frac{b}{a}}}$ si può applicare il Teorema 1°.

Dalle (14), (34) e (35), fatte le opportune riduzioni, risulta allora

$$\sqrt{\sqrt[4]{a}\pm\sqrt[4]{b}}=$$
$$\frac{1}{2\sqrt[8]{a^3}}\left[\sqrt[4]{(a-q)(a+2h+3q)}+\sqrt[4]{(a-q)(a-2h+3q)}\pm\sqrt{a+q+h}\mp\sqrt{a+q-h}\right] \quad (36)$$

che può anche scriversi

$$\sqrt{\sqrt[4]{a}\pm\sqrt[4]{b}}=$$
$$\frac{1}{2\sqrt[8]{a}}\left[\sqrt[4]{\frac{(a-q)(a+2h+3q)}{a}}+\sqrt[4]{\frac{(a-q)(a-2h+3q)}{a}}\pm\sqrt[4]{\frac{(a+q+h)^2}{a}}\mp\sqrt[4]{\frac{(a+q-h)^2}{a}}\right] \quad (37)$$

come volevasi dimostrare.

Esempio numerico. — Supposto $a=7,\ b=\frac{192}{43},\ r=\frac{47}{7},\ q=1,\ h=4$, risultano verificate le relazioni (31), (32) e (33); dalla (36) si ha quindi

$$\sqrt{\sqrt[4]{7}\pm\sqrt[4]{84}}=\frac{1}{2\sqrt[8]{7}}\left[\sqrt[4]{108}+\sqrt[4]{12}\pm\sqrt{12}\mp 2\right].$$

***

7. E chiaro che dei teoremi precedenti si possono fare diverse applicazioni. Noi ne faremo qualcuna, lasciando al lettore la cura di farne altre per suo conto.

Consideriamo, prima di tutto, le seguenti equazioni di 2° grado:

$$\begin{aligned} x^2-2\sqrt{a}\,x+\sqrt[4]{b}&=0\\ x^2-2\sqrt[4]{a}\,x+\sqrt[4]{b}&=0\\ x^2-2\sqrt[8]{a}\,x+\sqrt[4]{b}&=0 \end{aligned} \quad (38)$$

le cui radici sono rispettivamente date, com'è noto, dalle

$$\begin{aligned} x&=\sqrt{a}\pm\sqrt{a-\sqrt[4]{b}}\\ x&=\sqrt[4]{a}\pm\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt[4]{b}}\\ x&=\sqrt[8]{a}\pm\sqrt{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}. \end{aligned} \quad (39)$$

Se ai radicali sovrapposti che compariscono nel secondo membro delle (38) si possono applicare i teoremi dimostrati precedentemente, le radici delle equazioni (38) si possono esprimere mediante la somma di radici quadrate, quarte, ottave di quantità razionali.

***

8. Supponiamo di avere le 2^n quantità

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \ldots a_{2^n-1} \quad a_{2^n} \qquad (n \text{ intero e} > 1)$$

legate tra loro dalle seguenti $n-1$ relazioni:

$$\left.\begin{array}{ll}
(1) & \dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{a_6}{a_5}=\dfrac{a_8}{a_7}=\ldots=\dfrac{a_{2^n-2}}{a_{2^n-3}}=\dfrac{a_{2^n}}{a_{2^n-1}} \\
(2) & \dfrac{a_3}{a_1}=\dfrac{a_7}{a_5}=\ldots=\dfrac{a_{2^n-1}}{a_{2^n-3}} \\
(3) & \dfrac{a_5}{a_1}=\ldots=\dfrac{a_{2^n-3}}{a_{2^n-7}} \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n-1) & \dfrac{a_{2^{n-2}+1}}{a_1}=\dfrac{a_{2^n-(2^{n-2}-1)}}{a_{2^{n-1}+1}}
\end{array}\right\} \qquad (40)$$

la cui legge di formazione non ha bisogno di schiarimento alcuno, e consideriamo la somma

$$S=a_1\pm a_2+a_3\pm a_4+\ldots+a_{2^n-1}\pm a_{2^n}. \qquad (41)$$

Essa si può scrivere

$$S=a_1\left(1\pm\frac{a_2}{a_1}\right)+a_3\left(1\pm\frac{a_4}{a_3}\right)+\ldots+a_{2^n-1}\left(1\pm\frac{a_{2^n}}{a_{2^n-1}}\right)$$

e quindi per la (1) delle relazioni (40) si ha

$$S=\left(1\pm\frac{a_2}{a_1}\right)(a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2^n-1})$$

che si può anche scrivere

$$S=\left(1\pm\frac{a_2}{a_1}\right)\left[a_1\left(1+\frac{a_3}{a_1}\right)+a_5\left(1+\frac{a_7}{a_5}\right)+\ldots+a_{2^n-3}\left(1+\frac{a_{2^n-1}}{a_{2^n-3}}\right)\right]$$

ossia, per la (2) delle (40)

$$S=\left(1\pm\frac{a_2}{a_1}\right)\left(1+\frac{a_3}{a_1}\right)(a_1+a_5+a_9+\ldots+a_{2^n-3}).$$

È facile ora osservare che applicando successivamente tutte le relazioni (40) si ottiene

$$S=\frac{1}{a_1{}^{n-1}}(a_1\pm a_2)(a_1+a_3)(a_1+a_5)\ldots(a_1+a_{2^{n-2}+1})(a_1+a_{2^{n-1}+1}). \qquad (42)$$

Era questo il risultato al quale volevamo giungere.

Osserviamo intanto che negli n fattori della (42) aventi la forma $(a_1\pm a_i)$ i valori dell'indice i sono

$$2 \qquad 2+1 \qquad 2^2+1 \qquad 2^3+1\ \ldots\ 2^{n-2}+1 \qquad 2^{n-1}+1 \qquad (43)$$

come si può facilmente verificare.

***

9. Consideriamo ora il radicale

$$\theta=\sqrt{\sqrt[4]{a_1}\pm\sqrt[4]{a_2}+\ldots+\sqrt[4]{a_{2^n-1}}\pm\sqrt[4]{a_{2^n}}}, \qquad (44)$$

in cui le quantità razionali a siano legate dalle relazioni (40). Tenuto conto di quanto è stato esposto al N. 8, il radicale (44) si può scrivere

$$\theta = \frac{1}{\sqrt[8]{a_1^{n-1}}} \sqrt{\sqrt[4]{a_1} \pm \sqrt[4]{a_2}} \sqrt{\sqrt[4]{a_1} + \sqrt[4]{a_3}} \ldots \sqrt{\sqrt[4]{a_1} + \sqrt[4]{a_{2^{n-1}+1}}}. \tag{45}$$

Se a ciascuno dei radicali della forma $\sqrt{\sqrt[4]{a_1} \pm \sqrt[4]{a_i}}$, che compariscono nel secondo membro della (45), si può applicare la trasformazione (37), il radicale (44) si può decomporre nel prodotto di una radice ottava per la somma di 2^{2n} radici quarte di quantità razionali.

Lascio, per brevità, al lettore la cura di dimostrare il seguente

TEOREMA. — *Il radicale*

$$\theta = \sqrt{\sqrt[4]{a_1} \pm \sqrt[4]{a_2} + \ldots + \sqrt[4]{a_{2^n-1}} \pm \sqrt[4]{a_{2^n}}}$$

in cui le quantità a *sono razionali, si può trasformare nel prodotto di una radice ottava di quantità razionale per la somma di* 2^{2n} *radici quarte di quantità razionali, se risultano verificate le seguenti condizioni:*

1ª. *Le quantità* a *siano legate dalle relazioni* (40).

2ª. *I prodotti* $a_1(a_1 - a_i)$, *in cui l'indice* i *assume i valori* (43) *siano dei quadrati perfetti* r^2, *siano cioè*

$$a_1(a_1 - a_2) = r_1^2 \quad a_1(a_1 - a_3) = r_2^2 \ldots a_1(a_1 - a_{2^{n-1}+1}) = r_n^2. \tag{46}$$

3ª. *Le quantità* $\frac{1}{2}[a_1(a_1 - r)]$ *siano dei quadrati perfetti* q^2, *siano cioè*

$$\tfrac{1}{2}[a_1(a_1 - r_1)] = q_1^2 \quad \tfrac{1}{2}[a_1(a_1 - r_2)] = q_2^2 \ldots \tfrac{1}{2}[a_1(a_1 - r_n)] = q_n^2. \tag{47}$$

4ª. *I prodotti* $2q(q + a_1)$ *siano dei quadrati perfetti* h^2, *siano cioè*

$$2q_1(q_1 + a_1) = h_1^2 \quad 2q_2(q_2 + a_1) = h_2^2 \ldots 2q_n(q_n + a_1) = h_n^2. \tag{48}$$

Analoghe applicazioni si possono fare dei Teoremi 1°, 2° e 3°.

SALVATORE COMPOSTO.

INTERSEZIONE DI UNA QUADRICA DELLO SPAZIO AD r DIMENSIONI CON UNA RETTA ASSE DI UN SISTEMA LINEARE ∞^{r-2} DI IPERPIANI

1. Sia

$$(f=)\, a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{rr}x_r^2 + 2a_{01}x_0x_1 + \ldots + 2a_{r-1,r}x_{r-1}x_r = 0 \tag{1}$$

l'equazione di una quadrica Φ, immersa in uno spazio lineare ad r dimensioni; e sieno

$$\begin{matrix} \alpha_0x_0 + \alpha_1x_1 + \ldots + \alpha_rx_r = 0 \\ \beta_0x_0 + \beta_1x_1 + \ldots + \beta_rx_r = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_0x_0 + \lambda_1x_1 + \ldots + \lambda_rx_r = 0 \end{matrix} \tag{2}$$

le equazioni di $r-1$ iperpiani linearmenti indipendenti, cioè atti ad individuare una retta s; il problema di determinare l'intersezione della Φ con la s è condotto alla risoluzione del sistema formato con le equazioni (1) e (2). *A questo sistema se ne può sostituire un altro formato con equazioni lineari.* [1]

2. Consideriamo la funzione

$$I = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_r \\ \alpha_0 & \beta_0 & \dots & \lambda_0 & a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0r} \\ \alpha_1 & \beta_1 & \dots & \lambda_1 & a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_r & \beta_r & \dots & \lambda_r & a_{r0} & a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

Nel determinante del secondo membro agli elementi della r-esima verticale, moltiplicati per x_0, aggiungiamo quelli della $r+1$-esima moltiplicati per x_1, quelli della $r+2$-esima moltiplicati per x_2 ecc.... fino a quelli della $2r$-esima moltiplicati per x_r. Nel determinante così ottenuto ripetiamo le operazioni analoghe sulle orizzontali; si avrà, tenendo conto delle (2) e del teorema di Eulero sulle funzioni omogenee, ed indicando con $f'x_i$ la semiderivata di f rispetto ad x_i:

$$x_0^2 I = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & f'_{x_1} & f'_{x_2} & \dots & f'_{x_r} \\ \alpha_1 & \beta_1 & \dots & \lambda_1 & f'_{x_1} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ \alpha_2 & \beta_2 & \dots & \lambda_2 & f'_{x_2} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_r & \beta_r & \dots & \lambda_r & f'_{x_r} & a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

od anche

$$x_0^2 I = (-1)^{r(r+1)} A_0^2,$$

in cui A_0 è il determinante che si ottiene sopprimendo la prima verticale nella matrice

$$\begin{Vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_r \\ \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_r \\ f'x_0 & f'x_1 & \dots & f'x_r \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Quindi, secondo che r è pari o dispari, si ha:

$$x_0\sqrt{I} = A_0, \quad (4) \qquad \text{o} \qquad x_0\sqrt{I} = \sqrt{-1}\,A_0, \quad (4)'$$

nelle quali $\sqrt{I}$ deve considerarsi col doppio segno.

---

[1] La retta s può avere ∞^1 punti a comune con la quadrica; nè può avere più di questi punti a comune, altrimenti le equazioni (2) non sarebbero indipendenti.

Il sistema delle equazioni lineari omogenee (2) e (4), se r è pari; o (2), e (4)', se r è dispari ci dà i punti di intersezione della retta s con la Φ.

Supposto r pari; allora se $I > 0$ i due punti comuni alla s e alla Φ sono reali, se $I < 0$ i due punti sono immaginari, se $I = 0$ i punti sono reali e coincidenti. Nell'ipotesi in cui r sia dispari i primi due risultati si cambiano. (1)

Concludiamo per tanto: *la condizione necessaria e sufficiente affinchè la retta* (2) *sia tangente alla quadrica* (1) *è*

$$I = 0.$$

3. Se nel determinante A_0 ai termini della verticale p-esima moltiplicati per x_p aggiungiamo quelli della 1ª moltiplicati per x_1, quelli della 2ª moltiplicati per x_2, ecc., avremo, tenendo conto del teorema di Eulero sulle funzioni omogenee, delle (2), spostando la verticale p-esima di $p-1$ posti e ponendo successivamente $p = 1, 2, \ldots p-1, p-2, \ldots, r$

$$x_0 \sqrt{I} = A_0, \quad x_1 \sqrt{I} = A_1, \ldots, x_r \sqrt{I} = A_r \quad \text{per } r \text{ pari,} \tag{5}$$

$$x_0 \sqrt{I} = \sqrt{-1}\, A_0, \quad x_1 \sqrt{I} = \sqrt{-1}\, A_1, \ldots, x_r \sqrt{I} = \sqrt{-1}\, A_r \quad \text{per } r \text{ dispari,} \tag{5)'$$

nelle quali $A_0, A_1, \ldots, A_r$ sono i determinanti che si estraggono dalla matrice (3) sopprimendo rispettivamente la 1ª, 2ª, ..., r^a verticale.

4. Consideriamo la matrice

$$\left| \begin{matrix} \alpha_0 & \alpha_1 \ldots \alpha_r \\ \beta_0 & \beta_1 \ldots \beta_r \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \lambda_0 & \lambda_1 \ldots \lambda_r \end{matrix} \right| \tag{6}$$

gli $\binom{r+1}{r-1} = \frac{r(r+1)}{2}$ determinanti di ordine massimo estratti da essa si possono assumere come coordinate omogenee della retta s nello spazio ad r dimensioni. (2)

Se indichiamo con $\alpha_{a,b}$ $(a + b = 0, 1, 2, \ldots, r)$ il determinante che si ottiene dalla matrice (6) sopprimendo le verticali a-esima e b-esima, e sviluppiamo il determinante I secondo i minori d'ordine massimo estratti dalla matrice formata con le prime $r-1$ orizzontali ed eguagliamo a zero il risultato, avremo una equazione

$$\varphi(\alpha_{a,b}) = 0$$

quadratica ed omogenea nelle $\alpha_{a,b}$ che si può interpetrare come *l'equazione di una quadrica in coordinate di retta.* (3)

(1) Per $r = 2$. vedi V. Mollame, *I determinanti e la loro applicazione all'algebra ed alla geometria analitica.*

(2) Vedi Clebsch, *Ueber eine Fundamentalanfgabar Invariantentheorie Gött Akad.* Vol. XIII (1872).

(3) Le $\alpha_{a,b}$ sono legate da $\frac{1}{2}(r-1)(r-2)$ relazioni quadratiche, e le coordinate non omogenee della retta sono $2(r-1)$. (V. Clebsch, l. c.)

5. Supposto $\mathbf{I}=0$, le equazioni (5) o (5)', che non sono indipendenti, e che si possono sostituire al sistema delle equazioni (2) (4), si possono scrivere:

$$\left.\begin{array}{rl} \alpha_{01} f'_{x_1} + \alpha_{02} f'_{x_2} + \ldots + \alpha_{0r} f'_{x_r} &= 0 \\ \alpha_{10} f'_{x_0} + \qquad \alpha_{12} f'_{x_2} + \ldots + \alpha_{1r} f'_{x_r} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_{r0} f'_{x_0} + \alpha_{r1} f'_{x_1} + \ldots + \alpha_{r,r-1} f'_{x_{r-1}} &= 0 \end{array}\right\} \tag{7}$$

od anche

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{l=0}^{l=r}\left(\sum\limits_{h=0}^{h=r} a_{hl}\,\alpha_{0h}\right) x_l = 0 \\ \sum\limits_{h=0}^{h=r}\left(\sum\limits_{h=0}^{h=r} a_{hl}\,\alpha_{hl}\right) x_l = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{l=0}^{l=r}\left(\sum\limits_{l=0}^{l=r} a_{hl}\,\alpha_{rh}\right) x_l = 0 \end{array}\right\}. \tag{8}$$

Sicchè *le coordinate del punto, in cui la retta* s *è tangente alla* Φ, *sono proporzionali ai complementi algebrici degli elementi di una orizzontale qualunque del determinante*

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{h=0}^{h=r} a_{h0}\,\alpha_{0h} & \sum\limits_{h=0}^{h=r} a_{h1}\,\alpha_{0h} & \ldots & \sum\limits_{h=0}^{h=r} a_{hr}\,\alpha_{0h} \\ \sum\limits_{h=0}^{h=r} a_{h0}\,\alpha_{1h} & \sum\limits_{h=0}^{h=r} a_{h1}\,\alpha_{1h} & \ldots & \sum\limits_{h=0}^{h=r} a_{hr}\,\alpha_{1h} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{h=0}^{h=r} a_{h0}\,\alpha_{rh} & \sum\limits_{h=0}^{h=r} a_{h1}\,\alpha_{rh} & \ldots & \sum\limits_{h=0}^{h=r} a_{hr}\,\alpha_{rh} \end{vmatrix}.$$

6. Perchè una retta, in uno spazio ad r dimensioni, passi per un punto occorrono $r-1$ condizioni; se vogliamo che questa sia tangente alla quadrica Φ nel punto in discorso bisogna aggiungere la condizione $\varphi=0$. Si hanno in tutto r condizioni fra le $2(r-1)$ coordinate non omogenee di una retta. Quindi: *le rette che passano per un punto* P' *della quadrica e sono tangenti alla medesima in questo punto, formano un sistema* $\mathrm{r}-2$ *volte infinito.*

Le suddette rette stanno in un iperpiano. Infatti se

$$\mathrm{P}\,(x'_0,\ x'_1,\ \ldots,\ x'_r)$$

è un punto semplice della quadrica Φ, e vogliamo che la retta PP', le cui coordinate $\alpha_{a,b}$ sono proporzionali ai minori estratti dalla matrice [1]

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \ldots x_r \\ x'_0 & x'_0 \ldots x'_2 \end{vmatrix},$$

sia tangente alla quadrica, devono esse soddisfare l'equazione

$$\varphi\,(\alpha_{a,b})=0,$$

[1] Vedi CLEBSCH, l. c.

e le coordinate del punto P', come quelle della retta PP', devono soddisfare le equazioni (7).

Così deve essere soddisfatta la i-esima delle (7) che, dopo la sostituzione, diviene

$$(x_i x'_0 - x_0 x'_i) f'_{x'_0} + \ldots + (x_i x'_{i-1} - x_{i-1} x'_i) f'_{x'_{i-1}} + \\ + (x_i x'_{i+1} - x_{i+1} x'_i) f'_{x'_{i+1}} + \ldots + (x_i x'_r - x_r x'_i) f'_{x'_r} = 0$$

od anche:

$$x_i (x'_0 f'_{x'_0} + \ldots + x'_{i-1} f'_{x'_{i-1}} + x'_{i+1} f'_{x'_{i+1}} + \ldots + x'_r f'_{x'_r} + \\ + x'_i (x_0 f'_{x'_0} + \ldots + x_{i-1} f'_{x'_{i-1}} + x_{i+1} f'_{x'_{i+1}} + \ldots + x_r f'_{x'_r}) = 0$$

o, ciò che è lo stesso, per il teorema di Eulero:

$$x_0 f'_{x'_0} + x_1 f'_{x'_1} + \ldots + x_r f'_{x'_r} = 0. \tag{9}$$

La (9) è *l'equazione di un iperpiano luogo delle rette tangenti alla quadrica* Φ *nel punto* P' cioè è *l'equazione dell'iperpiano tangente in* P' *alla quadrica* $f = 0$.

Prof. Cesare Bianca.

PICCOLE NOTE

Sulla proprietà associativa dell'addizione.

Il prof. Palmieri con il superiore titolo ha pubblicato nell'ultimo numero di questo " Periodico „ una nota dalla quale un lettore superficiale potrebbe dedurre che nell'opera del Peano, *Aritmetica razionale*, vi sia un circolo vizioso, in virtù del quale il Peano per dimostrare la legge associativa si serve della legge stessa.

Che un logico della forza del Peano abbia potuto incorrere in un errore così grave di logica non è naturalmente cosa ammissibile. L'equivoco ha dovuto dipendere dal non avere tenuto presente la profonda differenza che vi è fra i due segni (=) e (= Df).

Riguardo al secondo segno il Peano, a pag. 44 delle sue *Notations de logique mathématiques*, scrive:

" La forme la plus simple d'une définition est:

$$x = a \qquad \text{Df}$$

où x est un signe qui n'a pas encore de signification, a est un groupe de signes ayant une signification connue, et nous convenons d'écrire le signe simple x au lieu du groupe a. Cette convention est exprimée en écrivant le signe = entre x et a, et Df à la fin de la ligne. Exemple:

$$\mathrm{N}p = (\mathrm{N} + 1) - [(\mathrm{N} + 1) \times (\mathrm{N} + 1)]. \text{ (1)} \qquad \text{Df}$$

Aux mots " nombre premier „ on attribue la signification de " nombre plus grand que l'unité et qu'on ne peut pas décomposer dans le produit de deux nombres plus grands que l'unité „.

(1) Il segno (—) va letto *non*.

Sauf l'importance, ont la même nature des définitions les positions qu'on fait dans un raisonnement quelconque, lorsque, par abréviations, on dèsigne par une lettre toute une formule „.

Il pensiero del Peano è così lucido, che non ha bisogno, di schiarimenti.

Così, nella definizione delle cifre, quando scrive

$$1 = 0 + \qquad \text{Df}$$

si deve leggere: " conveniamo di scrivere il segno semplice 1 in luogo del gruppo di segni $0 +$ „; oppure " poniamo 1 in luogo di $0 +$ „.

In base a tale convenzione è lecito scrivere $a + 1$ in luogo di $a + (0 +)$, perchè significa che in $a + (0 +)$ conveniamo, per abbreviazione, di scrivere 1 al posto di $0 +$.

Così è lecito scrivere, secondo le convenzioni poste,

$$a + 1 = a + (0 +),$$

senza che in ciò intervenga il teorema: " se a, b, c sono numeri, ed è $b = c$, sarà pure $a + b = a + c$ „.

Similmente è lecito scrivere

$$a + (b + 0) = a + b,$$

avendo convenuto di indicare con il segno semplice b il gruppo di segni $b + 0$.

Un altro punto da cui si deduce la gran differenza fra $=$ e $=$ Df si trova negli *Studi di Logica matematica* del Peano pubblicati negli " Atti dell'Accademia reale delle Scienze di Torino „, anno 1897.

Egli vuole definire l'eguaglianza fra due classi e scrive:

Poniamo la seguente definizione:

$$a,\ b\ \varepsilon\ \text{Cls}\,.\supset: a = b\,.=.\, a \supset b\,.\, b \supset a.$$

E legge nel seguente modo:

" Siano a e b delle classi; diremo che $a = b$ quando ogni a è b, e ogni b è a „.

" In questa definizione trovasi, nel primo membro il segno $=$ fra classi, segno che si vuol definire; nel secondo membro una scrittura non contenente questo segno. I due membri sono collegati col segno $=$; ma questo si deve considerare unito al segno Df, sicchè tutto il segno $=$ Df si deve considerare come un segno solo. Talchè è solo apparente il circolo vizioso di definire il segno $=$ facendo uso del segno stesso „.

Riguardo poi alla parte sostanziale della nota dell'egregio collega Palmieri, e specialmente alla modificazione che egli propone alla legge d'induzione, allo scopo di evitare nell'Aritmetica il concetto di classe, è cosa che giudicheranno coloro che nella Logica hanno studi profondi. Con compiacimento è da rilevare però come l'opera insigne del Peano è oramai oggetto di studio di parecchi insegnanti secondari, degni della più alta lode, e si va diffondendo nelle nostre scuole. L'opera del Peano è monumento eccelso di logica congiunta a classica semplicità.

Sebastiano Catania.

RISOLUZIONE DELLA QUISTIONE 718

718. *Essendo* x *una retta che passa pel centro* O *di un circolo* c, *trovare l'equazione dell'inviluppo delle rette simmetriche di* x *rispetto alle varie tangenti del circolo* c.

E. N. Barisien.

Risoluzione del sig. Pasta, R. Università di Palermo.

Considerando le tangenti al circolo nei punti in cui la retta data x lo seca, troviamo come retta dell'inviluppo la retta x stessa. Inoltre le tangenti al circolo nei punti dove la perpendicolare alla retta x in O seca il circolo dànno come rette simmetriche della x le parallele a questa retta distanti dall'una parte e dall'altra di essa della quantità $2r$, r essendo il raggio del circolo dato.

È chiaro d'altronde che ogni punto di queste due rette, è un punto dell'inviluppo richiesto. Ciò posto prendiamo come assi cartesiani la retta x data (asse delle x) e la perpendicolare ad essa in O (asse delle y). Sia M un punto qualunque del circolo, e P il punto in cui la tangente in M al circolo seca l'asse delle x; poniamo $\mathrm{OP} = a$, e si prenda come parametro variabile a, se α indica l'angolo che la tangente MP forma con l'asse delle x la equazione della simmetrica di quest'asse rispetto alla tangente MP è

$$y = (x - a) \tan 2\alpha\,; \tag{1}$$

ma il triangolo rettangolo OPM dà $\operatorname{sen} \alpha = \frac{r}{a}$ dunque $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2r\sqrt{a^2 - r^2}}{a^2 - 2r^2}$, epperò sostituendo in (1) risulta

$$ay^2 - 2r^2y = 2r(x - a)\sqrt{a^2 - r^2},$$

ossia, liberando dai radicali

$$(y^2 - 4r^2)\,a^4 + 8r^2xa^3 - 4r^2(x^2 + y^2 - r^2)\,a^2 - 8r^4xa + 4r^2y^2 = 0.$$

Derivando rispetto ad a risulta

$$(y^2 - 4r^2)\,a^3 + 6r^2xa^2 - 2r^2(x^2 + y^2 - r^2)\,a - 2r^4x = 0.$$

Eliminando a fra queste due ultime equazioni si ottiene

$$8r^6(y^2-4r^2)\begin{vmatrix} y^2-4r^2 & 8r^2 & -4r^2(x^2+y^2-r^2) & -8r^2x & 4r^2y^2 & 0 \\ 0 & y^2-4r^2 & 8r^2x & -4r^2(x^2+y^2-r^2) & -8r^2x & 2y^2 \\ -r & x^2+y^2-r^2 & 3r^2x & -2y^2 & 0 & 0 \\ 0 & -x & x^2+y^2-r^2 & 3r^2x & -2y^2 & 0 \\ 0 & y^2-4r^2 & 6r^2x & -2r^2(x^2+y^2-r^2) & -2r^4x & 0 \\ 0 & 0 & y^2-4r^2 & 6r^2x & -2r^2(x^2+y^2-r^2) & -r^2x \end{vmatrix} = 0,$$

che è l'equazione richiesta.

Si vede che si stacca il fattore $y^2 - 4r^2$ cioè dell'inviluppo fanno parte le rette $y = 2r$, $y = -2r$ come si era asserito in principio.

QUISTIONI PROPOSTE

721. (1) Siano due serie a termini positivi

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \qquad v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

convergente la prima, divergente la seconda. Dimostrare che se u_n/v_n finisce per decrescere sempre, quando n cresce indefinitamente, si ha,

$$\lim \frac{u_n}{v_n}(v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n) = 0.$$

(Per $v_n = 1$ vedi BOREL, *Théorie des fonctions entières*, pag. 17, o la nostra " Analysis ", Teubner, 1903, § 207, c).

E. CESÀRO.

722. Un triangolo ABC è circoscritto ad un circolo fisso. Trovare il luogo dell'ortocentro di esso, quando la retta r del lato BC rimane fissa e il vertice A percorre una retta r'. Si consideri in particolare il caso in cui r, r' son parallele.

723. Si considerino i triangoli rettangoli aventi per ipotenusa comune un segmento AB. L'inviluppo dei circoli di Brocard di questi triangoli è una podaria del centro di un'ellisse.

724. Trovare il luogo dei baricentri dei triangoli formati da due rette fisse con una tangente variabile di una conica.

E. N. BARISIEN.

BIBLIOGRAFIA

F. GOMES TEIXEIRA. — *Tratado de las curvas especiales notables.* Madrid, Imprenta de la " Gaceta de Madrid „ 1905, pagg. IX-632.

È noto come gli antichi geometri greci si siano occupati di alcune notevoli curve: ad es. la quadratrice di Dinostrato, la cissoide di Diocle, la concoide di Nicomede ecc.; e come molte altre linee, algebriche di grado superiore al secondo o trascendenti, si siano presentate ai matematici, specialmente degli ultimi secoli, dai tempi di Galileo sino ad oggi. Però le notizie e le proprietà di queste curve erano, fino a poco tempo fa, disperse in memorie e libri non sempre accessibili alla maggior parte degli studiosi; e succedeva anche, talvolta, che una medesima curva venisse trovata per via diversa da diversi autori, e battezzata con nomi differenti, così da generare poi confusione e incertezze sulla priorità della scoperta.

(1) La presente quistione ci è stata inviata dal prof. Alasia al quale era stata comunicata dall'illustre e compianto prof. Cesàro poco prima della sua morte.

Era quindi naturale che si manifestasse fra i matematici il desiderio di veder pubblicato un elenco delle curve conosciute, con una succinta esposizione delle loro principali proprietà: tanto più che confrontando fra loro alcune di queste curve, trovate con metodi assolutamente diversi, si era potuto stabilire delle relazioni fra di loro, in modo da considerarle come appartenenti a una medesima famiglia o a famiglie della medesima classe.

L'accademia delle scienze di Madrid interpetrò il desiderio generale, proponendo pel suo concorso triennale del 1892 il tema seguente: " Compilare un catalogo " ordinato di tutte le curve di qualsiasi classe, che abbiano avuto un nome spe- " ciale, accompagnandolo con un'idea succinta della forma, equazione e proprietà " di ciascuna, con notizie sui libri o autori che prima le han fatte conoscere ".

Il concorso andò deserto, nonostante che nell' " Intermédiaire des mathématiciens " il sig. Hâton de la Goupillière, proponendo la famosa quistione 89, che su per giù riprendeva il tema dell'accademia madrilena, mostrasse quali vantaggi avrebbe potuto arrecare un'opera dedicata allo studio delle curve notevoli. (1)

Nel 1895 il tema fu riproposto, e il premio assegnato all'opera di cui oggi ci occupiamo, la quale cominciata a stampare nel 1900, vide la luce solo cinque anni dopo, quando sullo stesso argomento erano ormai già noti i due volumi (litografati) di Henri Brocard, (2) così ricchi di notizie e d'informazioni e la magistrale opera del nostro G. Loria: *Spezielle algebraische und trascendente ebene kurven;* senza contare il trattato del Busset, nonchè altri lavori.

Ma se il ritardo nella pubblicazione dell'opera ha potuto togliere alcun che di novità, non le ha tolto nulla della sua importanza, essendo essa compilata con criteri diversi da quelli che informano i lavori citati, ed avendo di più il vantaggio di un'esposizione elementare, adatta alla maggior parte degli alunni delle università. Questo scopo didattico è fatto palese anche dall'A. stesso nella prefazione. (3) Egli, piuttosto che uno studio di tutte le curve, ha fatto maestrevolmente vedere come si fa per studiare le curve e, perciò, la lettura di questo libro sarà per i giovani di massimo interesse.

Nello studio delle curve algebriche, l'A. ha seguito l'ordine indicato dal grado delle rispettive equazioni cioè, prima le cubiche, poi le quartiche e successivamente le sestiche e le biquartiche. Alle curve algebriche seguono le trascendenti, le spirali, le parabole e iperbole in generale, le curve cicloidali e varie altre curve piane: due capitoli son dedicati alle curve gobbe e l'ultimo alla polodia ed erpolodia di Poinsot.

Non bisogna credere che quest'opera sia una semplice compilazione. Le precedenti pubblicazioni dell'illustre A. in molti periodici scientifici avevano già arrecato importanti contributi allo studio delle curve notevoli, specialmente delle toroidi e delle curve parellele all'astroide: e questi risultati son riprodotti nel libro. Del resto, il nome stesso dell'A. basta ad assicurare che anche là dove egli riproduce cose gia note, debba trovarsi l'impronta del suo spirito geniale ed investigatore.

---

(1) "... m'immagino un giovane geometra che utilizzi le sue letture per aprire, per ogni curva, un fascicolo, nel quale accumuli pazientemente, delle schede relative a tutte le proprietà che incontra... Questo giovane geometra... si preparerebbe così per l'avvenire la pubblicazione di un volume che interesserebbe certamente i matematici... "

(2) È noto che il col. H. Brocard si è sempre occupato con fecondi risultati della questione delle curve notevoli; e il ricco materiale pei suoi due volumi (che, essendo litografati, non possono, pur troppo, aver larga diffusione) fu da lui cominciato a raccogliere fin dal 1866. Colgo l'occasione per esprimere all'illustre matematico la mia gratitudine per le informazioni fornitemi e per avermi dato il modo di conoscere l'opera sua.

(3) " Molte questioni potevano essere trattate con maggior concisione, per mezzo di procedimenti speciali; però ci è parso che un lavoro di questo genere, per essere utile, debba essere accessibile a tutti i lettori che desiderano studiare qualsiasi delle curve considerate, anche se son sprovvisti di conoscenze scientifiche profonde; e perciò abbiamo sempre impiegato i metodi più generali e conosciuti ".

Quanto al metodo tenuto dall'A. esso risulterà chiaro dalla esposizione del contenuto del libro, nella quale appositamente ci siamo diffusi, in special modo pel primo capitolo, affinchè risulti come l'A. passi dal particolare al generale, cercando, per quanto è possibile, di uniformare le ricerche: pur non tralasciando occasione di far conoscere le diverse vie, con cui si può raggiungere il medesimo risultato. L'opera è divisa in quattordici capitoli.

Cap. I. *Cubiche notevoli.*

Questo capitolo è composto di 5 paragrafi. Nel primo è considerata la *cissoide.* Data la costruzione, diremo, classica della cissoide retta, e un cenno storico su questa celebre curva, l'A. insegna a costruirne le tangenti, determina il raggio di curvatura, l'area, la lunghezza dell'arco, il volume del solido generato ruotando intorno all'assintoto. Poi fa vedere come la cissoide serva per risolvere il problema della duplicazione del cubo. Esposta quindi la costruzione della cissoide obliqua, mostra che la cissoide è una curva *unicursale* e riporta i teoremi di Bolitrand. Poi nota come la cissoide non sia che un caso particolare di cubiche unicursali dedotte da una conica e da una retta qualunque. E ricorda il teorema di Zahradinick, secondo il quale, affinchè una cubica unicursale sia una cissoide è condizione sufficiente che possegga tre assintoti reali o uno solo a distanza finita.

Nel secondo paragrafo è studiata la *concoide di Sluse,* rammentando che su questa curva richiamò l'attenzione il prof. G. Loria. Datene le equazioni in coordinate polari e cartesiane, determina i flessi della curva, trovando che il luogo dei flessi delle concoidi che hanno il medesimo assintoto e il medesimo punto singolare è una cissoide.

Nel terzo paragrafo è considerata la *strofoide.* Costruita la curva e stabilitane l'equazione, l'A. dà un cenno storico bibliografico, in cui, secondo le indicazioni del Loria, attribuisce questa curva a Roberval e a Torricelli e narra dei diversi nomi attribuitile (*cucumeneide, focale con nodo,* ecc.) Poi passa a considerare specialmente la strofoide retta, determinando il raggio di curvatura, l'area e la lunghezza dell'arco, esprimendola con integrali di 1ª e 2ª specie di Legendre, senza ricorrere come Booth alla considerazione della curva inversa. Tornando poi alla strofoide obliqua, accenna come il metodo di Balitrand, esposto nello studio della cissoide, sia applicabile alla strofoide e se ne possano ricavare molte eleganti proprietà. Quindi risolve il noto problema di Casali e di Quetelet di determinare cioè il l. g. dei fuochi di una conica variabile determinata in un cono retto da un piano che passa per una tangente fissa al cono; e mostra che la focale di Quetelet è una strofoide, che è retta, quando invece del cono si abbia un cilindro.

Del quarto paragrafo è oggetto la *Trisettrice di Maclaurin.*

Nel quinto l'A. riassume ed amplia con metodi generali alcune proprietà delle cubiche circolari, cui appartengono le curve studiate nei §§ precedenti. Dimostra che esistono quattro serie di circoli bitangenti a una cubica circolare, e che questa è evolvente di ciascuna di tali serie di circoli; che il luogo dei centri di questi circoli è una parabola; che essi tagliano tutti ortogonalmente un circolo fisso; e che tutte le rette che passano pei due punti di contatto dei circoli bitangenti alla cubica e appartenenti alla medesima serie, si tagliano in un punto fisso; di più le cubiche circolari sono *anallagmatiche,* cioè coincidono colle loro trasformate per raggi vettori reciproci.

Quindi, ricordate le definizioni di *fuoco ordinario* e singolare di una curva secondo Plücker, e la nota relazione $n = m(m-1) - 2\delta - 3\nu$ fra la classe, l'ordine, il numero dei nodi e il numero dei punti di regresso di una curva, trova con metodo semplice e chiaro che ogni cubica circolare ha 16 fuochi ordinari, di cui 4 reali, se la curva è di classe 6, ossia se non ha nessun punto doppio; ne ha 4, di cui due reali, quando la curva è di classe 4, ossia se ha un punto doppio: ne ha uno reale quando è di classe 3, ossia ha un punto di regresso. Di più dimostra il teorema di Hart, cioè che i fuochi ordinari della curva sono i punti d'intersezione di ciascuna delle parabole luogo dei centri dei circoli bitangenti, con un certo circolo. Applica quindi i metodi generali suesposti alla ricerca dei fuochi della strofoide e della cissoide. Poi dà un'unica costruzione per dedurre, dato un circolo e una retta, le cubiche circolari unicursali; e rammenta l'importante teorema di Longchamps, cioè che la tangente in un punto del circolo e la tangente nel punto corrispondente della curva, tagliano la retta fissa in due punti equidistanti dalla retta dei punti considerati.

Credendo di aver così dato un'idea sufficiente del metodo seguito dall'A., esponiamo più rapidamente il contenuto dei capitoli seguenti:

CAP. II. *Cubiche notevoli.*

Nei primi dieci paragrafi sono studiate le seguenti curve: il *folium di Cartesio*, la *serpentina* e il *tridente di Newton*, la *concoide parabolica di Cartesio*, la *versiera dell'Agnesi*, la *curva di Rolle*, la *cubica mista*, il *folium parabolico*, le *parabole divergenti di Newton*, e le *cubiche di Chasles*. Nel paragrafo riguardante la cubica dell'Agnesi, son considerate anche le due curve ad essa associate, cioè la *pseudoversiera di Longchamps* e la *versiera di Peano*, dando conto delle osservazioni del Loria ad esse relative: e facendo vedere, crediamo per la prima volta, che la pseudoversiera corrisponde a una cissoide di Diocle e che, con una trasformazione dovuta a Maclaurin, si può dedurre dalla pseudoversiera sia il folium di Cartesio che la serpentina di Newton.

Nel paragrafo undecimo è dato un cenno bibliografico sulle cubiche in generale.

CAP. III. *Quartiche notevoli.*

Il capitolo è diviso in quattro paragrafi. Il primo tratta delle *spiriche di Perseo*, cioè le curve che si ottengono tagliando un toro con piani paralleli all'asse. Ne stabilisce la forma e l'equazione ne' diversi casi, e, con metodo molto semplice ed elementare, ne determina i fuochi.

Il secondo parla degli *ovali di Cassini* e fa vedere come queste curve, nonchè le lemniscate di Bernouilli rientrino nelle spiriche di Perseo; e col metodo esposto nel § prec. determina i fuochi di queste curve e i loro punti d'inflessione.

Nel terzo sono studiate le *lemniscate*, cioè quelle spiriche la cui equazione è della forma $(x^2+y^2)^2 = b^2x^2 \pm a^2y^2$, considerando separatamente i due casi (lemniscata *ellittica* e *iperbolica*) e provando che esse sono l'inversa e la podaria rispettivamente dell'ellisse e dell'iperbole relativamente al centro.

Il quarto è dedicato alla celebre *lemniscata di Bernouilli*, riportando molte delle innumerevoli proprietà trovate dai geometri che si sono occupati di questa curva. Notiamo i teoremi di Weyr e di Schoute sul luogo dei punti da cui si possono condurre quattro tangenti in modo che i punti di contatto siano in linea retta, e i teoremi di Charpentier sulle relazioni fra un'iperbole equilatera e la sua podaria, cioè la lemniscata di Bernouilli, e i teoremi di Fagnano sugli archi di lemniscata.

CAP. IV. *Quartiche notevoli.*

Il capitolo comprende quattro paragrafi. Il primo tratta delle *chiocciole di Pascal*; il secondo di una chiocciola speciale, cioè la *cardiode*; il terzo degli *ovali di Cartesio*; il quarto, in generale, delle *quartiche bicircolari*.

Nello studio della chiocciola notiamo che, determinata la lunghezza dell'arco, l'A. vi abbia mostrato, riferendosi all'arco di queste curve, come si possan dedurre teoremi analoghi a quelli dimostrati nella teoria degl'integrali ellittici relativamente agli archi d'ellisse.

Nell'esteso paragrafo riguardante gli ovali di Cartesio, è ricordato il teorema di Chasles, secondo il quale ogni ovale può esser definito in tre modi diversi come luogo geometrico dei punti le cui distanze da due punti fissi son legate da una relazione lineare; e sono determinate le normali con metodo generale, applicabile a tutte le curve riferite a coordinate bipolari.

Nello studio sulle quartiche bicircolari del quarto paragrafo vien generalizzato il teorema di Chasles stabilendo che ogni quartica può essere definita in quattro modi distinti come luogo geometrico di punti le cui distanze da tre punti fissi son legate da una relazione lineare omogenea.

CAP. V. *Quartiche notevoli.* (Continuazione.)

I primi undici paragrafi di questo capitolo sono dedicati allo studio delle seguenti curve di quarto ordine; la *concoide di Nicomede*, dandone l'applicazione alla trisezione dell'angolo e al problema di Delo; la *parabola virtualis* o *bisaccia* e il caso particolare in cui essa diventa un *otto* (lemniscata di Gerono); la *cruciforme* (krenzkurve) per la quale sono estesi i teor. di Weyr e Schoute (V. cap. III) e sono riportate le definizioni di Neuberg e Retali; la *puntiforme* (koklenspitzenkurve), la *piriforme*, la *curva del diavolo*, il *folium* semplice, il *bifolium*, estendendo questa denominazione al gruppo di curve definite dall'equazione

$$y = \pm \sqrt{x}\,(\sqrt{p - ax} \pm \sqrt{r - bx}),$$

che comprende le curve di Cramer e le quartiche studiate da Ruiz-Castizo; il *trifolium*, il *bicorno* (cocket Hat), di cui è data la semplice costruzione di Scott e la *curva* K.

Nel paragrafo dodicesimo sono considerate le concoidi focali delle coniche, delle quali è studiata la forma, ed è notata l'identità delle concoidi ellittica e iperbolica colle curve di *Jerabek*.

CAP. VI. *Sestiche e biquartiche più notevoli.*

In questo capitolo sono considerate: la *curva di Watt*, l'*astroide*, le *curve parallele all'astroide*, già dall'autore studiate in precedenti pubblicazioni; le *evolute dell'ellisse e dell'iperbole*, o *tetracuspidi di Bellavitis*, notando la differenza fra queste curve e le parallele all'astroide, colle quali talvolta sono confuse; lo *scarabeo*, l'*atriftaloide di Haugton*, applicando all'equazione della curva il teorema di Sturm per determinare le ordinate massime e minime; e la *curva di Talbot*, considerata come podaria negativa dell'ellisse.

Il paragrafo ottavo di questo capitolo è dedicato alle *toroidi* o curve parallele all'ellisse, riportando i notevoli risultati conseguiti dall'A. in lavori precedenti sia su queste curve che sulle loro podarie centrali.

Interessante, nel paragrafo nono, è lo studio della curva equipotenziale di Cayley, nel quale, con metodo originale è ritrovata la forma della curva ed è dimostrato che la somma delle 8 distanze di un fuoco dai punti d'intersezione di una retta colla curva è costante; ed è pure costante il prodotto delle 8 distanze di un fuoco dai punti d'intersezione della curva con una retta passante per l'altro fuoco.

CAP. VII. *Curve trascendenti.*

Nel primo paragrafo è trattata la *logaritmica di Torricelli*, e insieme una curva che può da essa dedursi, detta *visoria* dall'ing. Saareda che la trovò nel 1886, studiando la miglior forma da darsi a un anfiteatro, in modo che tutti gli spettatori possano vedere un determinato punto della sala.

Nei paragrafi seguenti sono studiate: le *catenaria*, la *trattrice di Leibnitz*, facendo notare che essa è un caso particolare di una famiglia di curve indicate dal Duran-Loriga; la *sintrattrice di Sylvester*, la catenaria di egual resistenza, la *sinusoide*, accennando anche alla *tangentoide* e alla *secantoide*, e alla sinusoide speciale studiata già dall'A. nelle " Memorie dell'Acc. di Madrid „ e nel " Giornale di Crelle „, definita dall'equazione mod sen $(x + iy) = c$; la *quadratrice di Dinostrato*, la *curva elastica* o *lintearia* (muldenkurve) e la *curva isocrona paracentrica.*

CAP. VIII. *Le spirali.*

In questo capitolo sono considerati: la *spirale d'Archimede*, la *spirale di Galileo*, la *spirale di Fermat*, e quella *parabolica* che la comprende; la *spirale iperbolica*, il *lituo di Cotes*, la *spirale logaritmica*, quella di *Poinsot*, la *spirale trattrice*, la *cocleoide*, che è l'inversa della quadratrice di Dinostrato, e della quale molte proprietà furono studiate dal nostro prof. Cesàro, rapito recentemente, in modo così crudele, alla scienza; la *clotoide* trovata da Jac. Bernouilli, ma denominata e studiata dallo stesso Cesàro, e poi da Pirondini, come facente parte di una famiglia più generale di curve; la *pseudocotenaria* e la *pseudotrattrice* dello stesso Cesàro.

CAP. IX. *La parabola e l'iperbole.*

Dopo un paragrafo, nel quale sono studiate in generale le parabole, cioè le curve definite dall'equazione $y = a^{1-k}x^k$, si considerano nei paragrafi seguenti i casi particolari, corrispondenti alla *parabola semicubica* o di *Neil*, e la *parabola cubica* o di *Wallis*. Chiude il capitolo un paragrafo, analogo al primo, nel quale sono date alcune proprietà generali delle iperbole, cioè delle curve definite dall'equazione $y = a^{1+k}x^{-k}$.

CAP. X. *Curve cicloidali.*

Nei sette paragrafi di questo capitolo sono considerate: la *cicloide ordinaria*, le *cicloidi allungate e accorciate*, le *epicicloidi* e le *ipocicloidi*, e specialmente la *ipocicloide tricuspidale*, riportandovi gli eleganti teoremi di Steiner, Cremona, Painvin, Longchamps, Brocard, ecc. su questa curva e le sue podarie, e considerando pure la *quartica trinodale*, che all'ipocicloide tricuspidale è intimamente connessa; l'*evolvente* del circolo e le *ipocicloidi* e *epicicloidi allungate*. La *rulletta di Delaunay*, studiata nel paragrafo sesto, è un opportuno esempio delle rullette, di cui la teoria generale fu esposta dal Cesàro.

Il paragrafo settimo è dedicato alle curve che Cesàro chiamò *pseudocicloidi* e altri *paracicloidi* e *ipercicloidi*.

CAP. XI. *Varie classi di curve.*

In questo capitolo sono considerate le *perle di Sluse*, le *rodonee di Grandi*, estendendo a queste curve il teorema di Fagnano, noto per gli archi d'ellisse; le *spighe*, i *nodi*, le *curve di Lamé*, e le *curve triangolari simmetriche*, di cui quelle possono considerarsi come prospettive; le *curve d'inseguimento*, dette anche *del cane* o di *Bouguer*, le *spirali sinusoidi*, delle quali si riportano le principali proprietà trovate da Hâton de la Goupillière e da Bassani, e le *curve di Ribaucour* insieme alle spirali sinusoidi, fan parte di una famiglia più estesa di curve, di cui s'occupò pure il Cesàro.

CAP. XII e XIII. *Curve a doppia curvatura.*

Nel primo di questi capitoli sono considerate alcune curve gobbe che possono tracciarsi su una superficie sferica, cioè: le *spirali di Pappo*, la *finestra di Viviani*, e la *lemniscata sferica di Eudossio*, di cui essa è un caso particolare, le *clelie del P. Grandi*, la *curva lossodromica*, l'*epicicloide sferica* e l'*ellisse sferica*, la quale fa parte delle *cicliche*. Alle cicliche in generale è poi dedicato un paragrafo speciale, i cui resultati sono applicati a ritrovare le proprietà dell'ellisse sferica.

Nel capitolo XIII sono studiate le *eliche* (cilindrica, conica e cilindroconica) i *circoli storti*, nonchè le *coniche logaritmiche* di Booth provenienti dall'intersezione d'un paraboloide di rivoluzione con un cilindro retto, avente per base una conica; la *curva d'Archita*, l'*oroptera* di Helmoltz, cioè quella curva che ha per proiezione sul piano xz una cubica dell'Agnesi e sul piano yz una serpentina di Newton; e le *curve di Bertrand*.

CAP. XIV.

Quest'ultimo capitolo è dedicato alla *polodia*, all'*erpolodia* e alla *spirale di Poinsot*; notevole in questo capitolo la dimostrazione che l'erpolodia non ha nè flessi, nè punti di regresso.

Seguono tre note: una sulle curve anallagmatiche, una sulla formula di Plücker adoprata nel cap. I, § 4, e una sulle coppie di curve che sono una prospettiva dell'altra.

Chiudono il volume gli elenchi alfabetici delle curve studiate e degli autori citati.

E. NANNEI.

L'ASSOCIAZIONE "MATHESIS"

Le elezioni del Giugno confermarono in carica tutto il Comitato direttivo del biennio precedente, presieduto dall'egregio professore dott. Enrico De Amicis, preside del R. Istituto tecnico di Forlì, e la maggioranza dei rieletti accettò l'officio.

Il 28 Settembre ebbe luogo a Bologna l'adunanza del Comitato suddetto, e tale adunanza fu assai notevole per alcune deliberazioni prese.

Gl'intervenuti riconobbero che l'associazione non è più fiorente come qualche anno fa, che la sua voce non è più ascoltata come una volta.

Basti ricordare che i programmi di matematica e fisica per le scuole medie del 1900 furono fatti, accogliendo ed armonizzando le proposte, le osservazioni, i desideri degli insegnanti di tutta Italia, di cui l'Associazione "Mathesis" e la Società Italiana di Fisica *si erano fatti autorevoli interpetri*, come è dichiarato nella relazione che precede i detti programmi; mentre i nuovi programmi del 1904 relegarono la matematica fra gl'insegnamenti di secondaria importanza, e suscitarono le proteste, inascoltate, di tutti gl'insegnanti delle scuole medie.

È dunque evidente che l'Associazione "Mathesis" non è più ritenuta ora autorevole come nel 1900. Non sta a me indagare tutte le cause di questa *diminutio capitis*, ma è certo che una importantissima si deve ricercare nell'avere accentuato la separazione fra insegnanti medî e superiori (separazione che io ho sempre biasimata), e che fu resa palese sopratutto nel Congresso di Napoli, nel quale si esclusero dalla presidenza i professori universitari, mentre nei due precedenti congressi di Torino (1898) e di Livorno (1902) tutti si ritennero onorati di avere a presidenti gl'illustri professori D'Ovidio e Bianchi.

È naturale che tale separazione sia voluta dalla Federazione Nazionale dei Professori delle scuole medie, la quale si propone di tutelare gl'interessi materiali della classe, ed ha mostrato coi fatti di sapere raggiungere gl'intenti che si era proposta; ma non è giustificabile in una società che si propone di tutelare soltanto gl'interessi scientifici e didattici di una determinata disciplina.

Per queste ragioni il Comitato deliberò di proporsi come scopo immediato e principale la trasformazione della "Mathesis", che dovrà assumere il titolo

MATHESIS

SOCIETÀ ITALIANA DI MATEMATICA.

Essa dovrà accogliere tutti i cultori della matematica, a qualunque grado d'insegnamento essi appartengano; conservando però il suo carattere eminentemente educativo e didattico.

Confidiamo che la proposta trasformazione verrà favorevolmente accolta dalla maggioranza dei soci e degli illustri colleghi universitari così chiamati a dare nuova vita alla "Mathesis", la quale, non ne dubitiamo, continuerà a rendere ancora e per lungo tempo utili servizi all'insegnamento.

Segretario economo dell'associazione è il Prof. Gaetano Riboni (Via Vittoria N. 53, Milano) al quale devono essere indirizzate tutte le comunicazioni dei soci e degli aderenti alla progettata trasformazione.

G. Lazzeri.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 18 novembre 1906

APPUNTI DI $(n-1)$-EDROMETRIA IPERSFERICA

(Continuaz. e fine v. fasc. prec.)

§ 8. — Estensione della formula di Erone.

Le formule (10), (11) e (12) conducono concordemente alla relazione:

$$\lim_{R=\infty} \Delta R^{n-2} = (n-2)!\, V, \tag{51}$$

dove V rappresenta la misura dell'$(n-1)$-edro nel quale tende a trasformarsi l'$(n-1)$-edro ipersferico quando col crescere di R all'∞ la varietà sferica che lo contiene tende a diventare un S_{n-2} lineare passante pei medesimi vertici.

Osserviamo che dal triangolo $A_n B_i B_k$ si ricava:

$$\overline{B_iB_k}^2 = 4R^2 . \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} B_i\widehat{A_n}B_k = 2R^2 . \{1 - \cos B_i\widehat{B_k}\},$$

da cui

$$\cos B_iB_k = 1 - \frac{\overline{B_iB_k}^2}{2R^2}.$$

Sostituendo questo valore nella (13) si troverà:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1-\dfrac{\overline{B_1B_2}^2}{2R^2} & \dots & 1-\dfrac{\overline{B_1B_{n-1}}^2}{2R^2} \\ 1-\dfrac{\overline{B^2B_1}^2}{2R^2} & 1 & \dots & 1-\dfrac{\overline{B_2B_{n-1}}^2}{2R^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-\dfrac{\overline{B_{n-1}B_1}^2}{2R^2} & 1-\dfrac{\overline{B_{n-1}B_2}^2}{2R^2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Per sviluppare questo determinante osserviamo che, scrivendo $1-0$ al posto di 1 nella diagonale principale, esso potrà decomporsi nella somma di altri determinanti dello stesso ordine; di questi alcuni saranno nulli per avere almeno due colonne uguali e in conseguenza rimarranno: quelli che si ottengono prendendo da una sola colonna i primi termini e dalle rimanenti i secondi (e questi saranno in numero di $n-1$), e l'altro:

$$\begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\overline{B_1B_2}^2}{2R^2} & \dots & -\dfrac{\overline{B_1B_{n-1}}^2}{2R^2} \\ -\dfrac{\overline{B_2B_1}^2}{2R^2} & 0 & & -\dfrac{\overline{B_2B_{n-1}}^2}{2R^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\dfrac{\overline{B_{n-1}B_1}^2}{2R^2} & -\dfrac{\overline{B_{n-1}B_2}^2}{2R^2} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

In quest' ultimo si può porre in evidenza il fattore $(-2R^2)^{1-n}$, mentre negli altri $n-1$ si può porre in evidenza il fattore $(-2R^2)^{2-n}$. Scrivendo che Δ^2 è uguale alla somma di questi n determinanti, moltiplicando ambo i membri dell'uguaglianza risultante per R^{2n-4} e passando al limite per R infinito, si ha:

$$(n-2)!\, V = \sqrt{\frac{A}{(-2)^{n-2}}} \tag{52}$$

dove A sta a rappresentare la somma dei determinanti che si ottengono dal determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{B_1B_2}^2 & \overline{B_1B_3}^2 & \dots & \overline{B_1B_{n-1}}^2 \\ \overline{B_2B_1}^2 & 0 & \overline{B_2B_3}^2 & \dots & \overline{B_1B_{n-1}}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{B_{n-1}B_1}^2 & \overline{B_{n-1}B_2}^2 & \overline{B_{n-1}B_3}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

facendo uguali all'unità una prima volta gli elementi della prima colonna, una seconda quelli della seconda e così di seguito.

La (52) costituisce l'estensione della *formula di Erone.*

§ 9. — Le formule fondamentali.

Come già facemmo nel secondo paragrafo per trovare una espressione del seno dell'$(n-1)$-edro ipersferico in funzione dei seni dei lati uscenti da un vertice e del seno dell'angoloide da essi compreso, conduciamo pel vertice B_i gli S_1 tangenti ai lati uscenti da esso e indichiamo con P_h il punto ove la semiretta A_nB_h incontra l'S_1 tangente a B_iB_h in B_i. Applicando il noto teorema delle proiezioni alle facce dell'n-edro così ottenuto, fatta eccezione di quelle opposte ad A_i e A_n, e osservando che l'angolo formato dalla faccia a_n con ciascuna di quelle uscenti da A_i è retto, perverremo a formule del tipo seguente:

$$\cos B_iB_h \,.\, \operatorname{sen} b_h = \Sigma_k \operatorname{sen} b_k \,.\, \cos B_iB_h \,.\, \cos(b_kb_h), \tag{53}$$

dove h è differente da i, e k può prendere tutti i valori interi da 1 a $n-1$, eccettuato il valore $k=h$.

Si otterranno così $(n-2)(n-1)$ relazioni fra le $n-1$ facce, gli $n-2$ lati uscenti da un vertice e gli $n-2$ angoli che una faccia forma colle rimanenti. Esse costituiscono l'estensione delle formule delle proiezioni.

Osservazione I. — Supponiamo che l' $(n-1)$-edro ipersferico sia $(n-1)$-rettangolo in B_p: per vedere come si semplificano le (53) in questo caso osserviamo che essendo nulli i coseni dei diedri formati dalle facce passati per B_p, basterà, nei secondi membri delle (53) omettere quei termini in cui manca, entro parentesi, l'indice p. Rimarranno così quelli nei quali uno dei due indici h o k è uguale a p, cosicchè le formule domandate saranno:

$$\operatorname{sen} b_h = \operatorname{sen} b_p \cdot \cos(b_h b_p) \cdot \frac{\cos B_i B_p}{\cos B_i B_h} \tag{54}$$

dove b_h è un cateto e b_p l'ipotenusa. In questa formula i può prendere i valori $1, 2 \ldots h-1,\ h+1 \ldots n-1$. Seguono le:

$$\frac{\cos B_1 B_p}{\cos B_1 B_h} = \frac{\cos B_2 B_p}{\cos B_2 B_h} = \ldots = \frac{1}{\cos B_p B_h} = \frac{\cos B_{n-1} B_p}{\cos B_{n-1} B_h}. \tag{55}$$

Osservazione II. — Scriviamo le $n-1$ relazioni:

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen} b_1 \cos B_{i_1} B_1 = \operatorname{sen} b_2 \cos B_{i_1} B_2 \cos(b_2 b_1) + \ldots + \operatorname{sen} b_{n-1} \cos B_{i_1} B_{n-1} \cos(b_{n-1} b_1). \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \operatorname{sen} b_{n-1} \cos B_{i_{n-1}} B_{n-1} = \operatorname{sen} b_1 \cos B_{i_{n-1}} B_1 \cos(b_1 b_{n-1}) + \ldots + \operatorname{sen} b_{n-2} \cos B_{i_{n-2}} B_{n-2} \cos(b_{n-2} b_{n-1}) \end{array}\right. \tag{56}$$

che si ottengono facendo nelle (53) $h = 1, 2 \ldots n-1$, e dove $i_1\, i_2 \ldots i_{n-1}$ posson prendere i valori da 1 a $n-1$ esclusi $1, 2 \ldots n-1$ rispettivamente.

Queste possono considerarsi come formanti un sistema di equazioni lineari omogenee nelle $n-1$ incognite:

$$\operatorname{sen} b_1 \qquad \operatorname{sen} b_2 \ \ldots\ \operatorname{sen} b_{n-1}$$

che non possono esser nulle. Si richiede pertanto che sia nullo il determinante dei coefficienti:

$$\left|\begin{array}{lll} -\cos B_{i_1} B_1 & \cos B_{i_2} B_2 \cos(b_2 b_1) \ldots & \cos B_{i_1} B_{n-1} \cos(b_{n-1} b_1) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cos B_{i_{n-1}} B_1 \cos(b_1 b_{n-1}) & \cos B_{i_{n-1}} B_2 \cos(b_2 b_{n-1}) \ldots & -\cos B_{i_{n-1}} B_{n-1} \end{array}\right| \tag{57}$$

Uguagliando a zero questo determinante si ottengono delle relazioni che hanno per corrispondente quella contrassegnata ne' miei “ *Fondamenti per la geometria dell'* n *- edro in uno spazio lineare con* n − 1 *dimensioni* „ col numero (18).

Osservazione III. — Chiamando *regolare* un $(n-1)$ - edro ipersferico quando ha uguali tutte le facce a k dimensioni $(k = 1, 2 \ldots n-2)$

e i diedri pure uguali, la relazione che si ottiene uguagliando a zero il determinante (57) ci fornisce un legame fra il lato e il diedro di tale (n—1) - edro. Essa è, facendo per esempio in generale $i_h = h+1$, se $h=1, 2 \dots n-2$ e $i_{n-1}=1$, e indicando con l e d le misure del lato e del diedro rispettivamente:

$$\begin{vmatrix} -\cos l & \cos d & \cos d \,.\, \cos l \dots & \cos d \,.\, \cos l \\ \cos d \,.\, \cos l & -\cos l & \cos d & \cos d \,.\, \cos l \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos d \,.\, \cos l & \cos d \,.\, \cos l & \cos d \,.\, \cos l & -\cos l \end{vmatrix} = 0 \qquad (58)$$

Questa relazione si tiene facilmente a memoria ove si osservi che chiamando a_{rs} l'elemento che occupa la linea r - esima e la colonna s - esima, si ha:

$$\begin{aligned} a_{hh} &= -\cos l \quad \text{per} \quad h=1, 2, \dots n-1. \\ a_{h.\,h+1} &= \cos d \quad \text{per} \quad h=1, 2, \dots n-2 \\ a_{p.\,q} &= \cos l \,.\, \cos d \quad \text{con} \quad q-p \neq (0, 1). \end{aligned}$$

Le formule (53) costituiscono il *primo* gruppo di formule fondamentali: il numero di questi gruppi è $\frac{n+1}{2}$ se n è dispari e $\frac{n}{2}$ se n è pari. Ci fermeremo qui a cercare un gruppo speciale, ma il procedimento di cui faremo uso ci additerà senz'altro la via da seguirsi nel caso generale.

Cominciamo con lo scrivere le (53) sotto forma più adatta ponendo in generale:

$$k_{rs} = \operatorname{sen} b_r \,.\, \cos \mathrm{B}_{i_r}\mathrm{B}_s, \qquad (59)$$

dove i_r ha il medesimo significato che sopra. Così il sistema prenderà l'aspetto:

$$\begin{cases} k_{11} = k_{21} \cos(b_2 b_1) + k_{31} \cos(b_3 b_1) + \dots + k_{n-1.1} \cos(b_{n-1} b_1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ k_{ii} = k_{1i} \cos(b_1 b_i) + k_{2i} \cos(b_2 b_i) + \dots + k_{n-1.i} \cos(b_{n-1} b_i) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ k_{n-1.n-1} = k_{1.n-1}\cos(b_1 b_{n-1}) + k_{2.n-1}\cos(b_2 b_{n-1}) + \dots + k_{n-2.n-1}\cos(b_{n-2} b_{n-1}). \end{cases} \quad (60)$$

Proponiamoci di determinare i parametri $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}$ in modo che sommando membro a membro le (60) dopo averle moltiplicate ordinatamente per i detti parametri, il secondo membro contenga, fra i coseni dei diedri quelli formati da facce aventi a comune un *dato* vertice. Fissiamo che questo vertice sia B_{n-1}: i valori da attribuirsi alle λ si troveranno risolvendo le equazioni:

$$\lambda_i \,.\, k_{n-1.i} + \lambda_{n-1} \,.\, k_{i.n-1} = 0 \qquad (i=1, 2 \dots n-2) \qquad (61)$$

che si ottengono annullando i coefficienti dei coseni dove tra parentesi figura l'indice $n-1$. A queste condizioni si soddisfa ponendo:

$$\begin{cases} \lambda_{n-1} = -1 \\ \lambda_i = \dfrac{k_{i.n-1}}{k_{n-1.i}}. \end{cases} \qquad (62)$$

Procedendo allora nel modo che abbiamo indicato sopra troveremo:

$$\sum_1^{n-1} \lambda_i k_{ii} = \sum_1^{n-2} \cos(b_r b_s) \,.\, \{\lambda_s k_{rs} + \lambda_r k_{sr}\} \tag{63}$$

ovvero, avendo presenti le (63):

$$\sum_1^{n-2} k_{ii} \frac{k_{i.n-1}}{k_{n-1.i}} - k_{n-1.n-1} = \sum^{n-2} \cos(b_r b_s) \,.\, \left\{k_{rs} \frac{k_{s.n-1}}{k_{n-1.s}} + k_{sr} \frac{k_{r.n-1}}{k_{n-1.r}}\right\}. \tag{64}$$

La precedente relazione e le analoghe costituiscono la estensione delle *formule di Eulero*.

È manifesta poi l'estensione del *teorema di Pitagora* fornita dalla formula:

$$k_{n-1.n-1} = \sum^{n-2} k_{ii} \frac{k_{i.n-1}}{k_{n-1.i}}; \tag{65}$$

dove bisogna ricordarsi che B_{n-1} è il vertice dell'angoloide $(n-1)$-rettangolo.

Per trovare gli altri gruppi si tenga presente il procedimento applicato, a pagine 1 e 2 dei *Fondamenti* sopracitati, alle formule delle proiezioni, ove si sia cambiato prima n in $n-1$ e si vede *quali* coseni figurano in una qualsiasi formula del gruppo che si ottiene quando, per esempio, p fra le ε, $(p \leqslant n-p-1)$ sono supposte negative. Tornando allora al sistema (60) si determinino i parametri λ in modo che nella formula a cui si perviene col metodo che abbiamo indicato compariscano i *medesimi* coseni.

Questa e le analoghe formeranno il $(p+1)$-*esimo gruppo fondamentale ipersferico* corrispondente al $(p+1)$-*esimo gruppo fondamentale lineare.*

§ 10. — **Altre formule. I raggi delle sfere a $n-3$ dimensioni circoscritta e iscritta all'$(n-1)$-èdro ipersferico.**

Alle formule di cui abbiamo parlato nel precedente paragrafo altre se ne possono aggiungere che ci saranno utili in seguito.

Cominciamo dal notare quelle che si ottengono uguagliando fra loro le espressioni di Δ fornite dalle (10), (11), (12) e (13) dal secondo paragrafo. Tali sono:

$$\left\{\begin{aligned}
&\operatorname{sen} b_i \,.\, \operatorname{sen} b_k \,.\, \operatorname{sen}(b_i b_k) = \operatorname{sen} b_r \,.\, \operatorname{sen} k_r \operatorname{sen} b_{ii} \\
&\operatorname{sen} b_i \,.\, \operatorname{sen} b_l \,.\, \operatorname{sen}(b_i b_l) = \operatorname{sen} b_{ik} \,.\, \Delta_1 \,.\, \pi \operatorname{sen} B_1 B_h \\
&\operatorname{sen}^2 b_i \,.\, \operatorname{sen}^2 b_l \,.\, \operatorname{sen}^2(b_i b_l) = \operatorname{sen}^2 b_{ik} \,.\, \begin{vmatrix} 1 & \cos B_1 B_2 \ldots \cos B_1 B_{n-1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cos B_{n-1} & \cos B_{n-1} B_2 \ldots 1 \end{vmatrix} \\
&\operatorname{sen} b_r \,.\, \operatorname{sen} b_r = \Delta \,.\, \pi \operatorname{sen} B_1 B_h \\
&\operatorname{sen}^2 b_r \,.\, \operatorname{sen}^2 b_2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos B_1 B_2 \ldots \cos B_1 B_{n-1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cos B_{n-1} B_1 & \cos B_{n-1} B_2 \ldots 1 \end{vmatrix} \\
&\Delta_1^2 \,.\, \pi \operatorname{sen}^2 B_1 B_h = \begin{vmatrix} 1 & \cos B_1 B_2 \ldots \cos B_1 B_{n-1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cos B_{n-1} & \cos B_{n-1} B_2 \ldots 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}\right. \tag{66}$$

dove k_3 è l'altezza dell'$(n-1)$-edro relativo alla faccia b_r e Δ_1 il seno dell'angoloide di vertice B_1.

Un'altra serie di relazioni ci viene fornita dal teorema di Stewart e dalla (57) uguagliata a zero. Si ricavino dalla formula (26) i coseni dei diedri in funzione delle ceviane corrispondenti alla divisione dei lati in *dati* rapporti. Sostituendo questi valori nel determinante (55), e uguagliandolo a zero potremo ottenere numerose relazioni fra le sezioni mediane, bisettrici, simediane ecc. e gli elementi dell'$(n-1)$-edro ipersferico. Si può anche eliminare dalla relazione ottenuta annullando il determinante (57), invece che i coseni dei diedri, quelli dei lati, servendosi sempre della formula (26), ma della ricerca di tali relazioni lasciamo la cura allo studioso.

Prendiamo ora a considerare il gruppo di relazioni che si ottiene dal sistema (53) facendo, per esempio, $h = n-1$ e successivamente i uguale a $1, 2 \ldots n-2$.

$$\begin{cases} \cos B_1B_{n-1} \operatorname{sen} b_{n-1} = \operatorname{sen} b_{n-2} \cos B_1B_{n-2} \cos(b_{n-2}b_{n-1}) + \ldots + \operatorname{sen} b_1 \cos(b_{n-1}b_1) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cos B_{n-2}B_{n-1} \operatorname{sen} b_{n-1} = \operatorname{sen} b_{n-2} \cos(b_{n-2}b_{n-1}) + \ldots + \operatorname{sen} b_1 \cos B_{n-2}B_{n-1} \cos(b_{n-2}b_{n-1}) \end{cases} \quad (67)$$

Da esse si ricava, ponendo

$$C = \begin{vmatrix} \cos B_1B_{n-2} & \cos B_1B_{n-3} \ldots & 1 \\ \cos B_2B_{n-2} & \cos B_2B_{n-3} \ldots 1 & \cos B_2B_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1 & \cos B_{n-1}B_{n-2} & \cos B_{n-1}B_1 \end{vmatrix}, \quad (68)$$

e indicando con C_k il determinante che si ottiene da C sostituendo agli elementi della colonna $(n-1-k)$-esima i coefficienti di $\operatorname{sen} b_{n-1}$:

$$C \,.\, \operatorname{sen} b_k \,.\, \cos(b_k b_{n-1}) = C_k \,.\, \operatorname{sen} b_{n-1} \quad (69)$$

dove k va da 1 a $n-2$. Questa relazione lega i seni di due facce e il coseno del diedro che esse formano, coi lati dell'$(n-1)$-edro ipersferico.

Da questa formula segue che per tutti i valori di k da 1 a $n-2$ è:

$$\frac{\operatorname{sen} b_k \,.\, \cos(b_k b_{n-1})}{C_k} = \text{costante}. \quad (70)$$

Andiamo ora a trovare una formula che ci dia il coseno del raggio della sfera a $n-3$ dimensioni circoscritta all'$(n-1)$-edro ipersferico, raggio la cui misura sarà chiamata R, in funzione degli elementi di questo.

Indichiamo con:

$$\begin{cases} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots \alpha_{1.n-1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{n-1.1} & \alpha_{n-1,2} & \ldots \alpha_{n-1.n-1} \end{cases}$$

i coseni di direzione delle congiungenti il punto A_n coi vertici $B_1 \ldots B_{n-1}$, e proponiamoci la questione di determinare una direzione uscente da A_n tale che gli angoli che essa forma con dette congiungenti siano uguali. Detti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ i coseni direttivi di tal retta, deve aversi:

$$\Sigma \alpha_{is} \, . \, \alpha_s = h \qquad (h \text{ cost. minore d'uno})$$

per tutti i valori di i ed s da 1 a $n-1$.

Osserviamo che l'eliminazione di h fra le $n-1$ equazioni precedenti conduce al sistema di $n-2$ equazioni:

$$\begin{cases} \Sigma \, \alpha_s \, . \, (\alpha_{1s} - \alpha_{2s}) = 0 \\ \Sigma \, \alpha_s \, . \, (\alpha_{2s} - \alpha_{3s}) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma \, \alpha_s \, (\alpha_{n-2 \, . \, s} - \alpha_{n-1 \, . \, s}) = 0. \end{cases}$$

Da esse si ricava per le α:

$$\alpha_s = \frac{(-1)^{r+1} \, . \, M_s}{\sqrt{M^2}}, \tag{71}$$

dove M_s rappresenta il minore della matrice

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{11} - \alpha_{21} & \ldots \alpha_{1 \, . \, n-1} - \alpha_{2 \, . \, n-1} \\ \alpha_{21} - \alpha_{31} & \ldots \alpha_{2 \, . \, n-1} - \alpha_{3 \, . \, n-1} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n-2 \, . \, 1} - \alpha_{n-1 \, . \, n-1} & \ldots \alpha_{n-2 \, . \, n-1} - \alpha_{n-1 \, . \, n-1} \end{matrix} \right\|$$

ottenuto sopprimendo la colonna s-esima.

Ora si ha manifestamente:

$$h = \cos R$$

per cui:

$$\cos R = \sum_1^{n-1} (-1)^{s+1} \frac{\alpha_{1s} \, . \, M_s}{\sqrt{M^2}}.$$

Ma l'espressione $\Sigma (-1)^{s+1} \alpha_{1s} M_s$ non è altro che il determinante:

$$\left| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{\, . \, n-1} \\ \alpha_{11} - \alpha_{21} & \alpha_{12} - \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{1 \, . \, n-1} - \alpha_{2 \, . \, n-1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{n-2 \, . \, 1} - \alpha_{n-1 \, . \, 1} & \alpha_{n-2 \, . \, 2} - \alpha_{n-1 \, . \, 2} & \ldots & \alpha_{n-2 \, . \, n-1} - \alpha_{n-1 \, . \, n-1} \end{matrix} \right|,$$

il quale differisce pel fattore $(-1)^{n-2}$ da Δ, cosicchè sarà:

$$\cos^2 R = \frac{\Delta^2}{M^2}. \tag{72}$$

Basta notare che, eseguendo il quadrato della matrice M, si ottiene un determinante simmetrico il cui elemento a_{ik} è dato da:

$$a_{ik} = \cos B_i B_k + \cos B_{i+1} B_{k+1} - \cos B_i B_{k+1} - \cos B_{i+1} B_k, \tag{73}$$

per concludere che la (72) ci fornisce un'espressione del coseno del raggio della sfera a $n-3$ dimensioni circoscritta all'$(n-1)$-edro ipersferico in funzione dei soli lati, se per Δ si tenga conto della formula (13), o in funzione dei lati e di altri elementi se ci piaccia tener conto delle espressioni di Δ forniteci dalle (10), (11) e (12).

Osservazione I. — Supponiamo che l'$(n-1)$-edro ipersferico sia regolare, e vediamo qual forma assume la (72) in tal caso.

Se poniamo, al solito, $\cos B_iB_k = \cos l$, si ha:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos l & \dots & \cos l \\ \cos l & 1 & \dots & \cos l \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos l & \cos l & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1+\dfrac{1-\cos l}{\cos l} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+\dfrac{1-\cos l}{\cos l} & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1+\dfrac{1-\cos l}{\cos l} \end{vmatrix} . \cos^{n-1} l.$$

Basta rammentare che per note proprietà è:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1+a_{n-1} \end{vmatrix} = a_1 a_2 \dots a_{n-1} . \left\{ 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} \right\},$$

perchè, facendo $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = \dfrac{1-\cos l}{\cos l}$ si ottenga:

$$\Delta^2 = (1-\cos l)^{n-2} . (1+(n-2)\cos l). \tag{74}$$

Questo per Δ. Quanto poi a M^2 si osservi che i soli elementi a_{ih} che sono differenti da zero sono quelli per cui $k-i$ è o zero o in valore assoluto uguale a *uno* e precisamente nel primo caso è, per la (73):

$$a_{kk} = 2 . (1-\cos l)$$

e nel secondo, sempre per la (73):

$$a_{k.h+1} = a_{h+1.h} = \cos l - 1.$$

Ponendo in evidenza il fattore $1-\cos l$ da ciascuna linea si ottiene:

$$M^2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix} (1-\cos l)^{n-2}.$$

Il determinante che figura come coefficiente di $(1-\cos l)^{n-2}$ si vede, abbastanza facilmente, che è uguale a $n-1$.

Ne segue

$$(n-1) . \cos^2 R = 1 + (n-2)\cos l. \tag{75}$$

Osservazione II. — L'eliminazione di $\cos R$ fra le (45) e la (72) ci conduce a delle formule che ci forniscono $\cos OG$, $\cos OI$, $\cos OK$ ecc. in funzione degli elementi dell'$(n-1)$-edro ipersferico.

Indichiamo ora con $\beta_{i1}\, \beta_{i2} \dots \beta_{i.n-1}$ i coseni di direzione di quel raggio dell'S_1 perpendicolare in A_n all'S_{n-2} individuato da A_n stesso e dai vertici che rimangono dopo escluso A_1, che si trova con $A_n A_i$ nella medesima delle regioni in cui lo spazio S_{n-1} vien diviso dall'S_{n-2}. Questa semiretta e le altre che si ottengono facendo andare i da 1 a $n-1$ incontreranno la ipersuperficie sferica nei punti $B'_1, B'_2, \ldots B'_{n-1}$ che saranno vertici dell'$(n-1)$-edro ipersferico *polare*.

Se I è il centro della sfera a $n-3$ dimensioni inscritta in $B_1B_2 \ldots B_{n-1}$ e il cui raggio è r, detti $C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$ i punti di contatto di detta sfera con $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ rispettivamente, portando sui prolungamenti degli archi C_i I, a partire da I, degli archi uguali a $90^\circ - r$, perverremo ai punti $B'_1, B'_2, \ldots B'_{n-1}$. Il centro della sfera a $n-3$ dimensioni inscritto in $B_1B_2 \ldots B_{n-1}$ distando dai vertici $B'_1, B'_2, \ldots B'_{n-1}$ di $90^\circ - r$, è dunque anche il centro della sfera a $n-3$ dimensioni circoscritta al suo *polare* e i raggi delle due sfere sono complementari.

Segue da ciò che per avere il raggio r della sfera a $n-3$ dimensioni inscritta basterà nella (72) cambiare R in $90^\circ - r$ e le α nelle β con che si verrà a porre $180 - (b_i b_k)$ al posto di $B_i B_k$. Se indichiamo con D ed N gli analoghi di Δ ed M costituiti per le β, troveremo:

$$\operatorname{sen}^2 r = \frac{D^2}{N^2} \tag{76}$$

dove l'elemento b_{ik} del determinante N^2 sarà dato da:

$$b_{ik} = \cos(b_i b_{k+1}) + \cos(b_{i+1} b_k) - \cos(b_i b_k) - \cos(b_{i+1} b_{k+1}). \tag{77}$$

Nel caso in cui si tratti di un $(n-1)$-edro ipersferico regolare, avuto riguardo alla (75) e all'altra:

$$(n-1) . \operatorname{sen}^2 r = 1 - (n-2) \cos d, \tag{78}$$

che si ottiene in modo del tutto analogo dalla (76), si perviene alle formule

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\cos^2 R}{\operatorname{sen}^2 r} &= \frac{1 + (n-2)\cos l}{1 - (n-2)\cos d} \\ \frac{\operatorname{sen}^2 R}{\cos^2 r} &= \frac{1 - \cos l}{1 + \cos d}, \end{aligned} \right. \tag{79}$$

dove $\cos l$ e $\cos d$ sono legati dalla relazione (58).

Settembre, 1906.

Enrico Piccioli
Cortona.

TEORIA ELEMENTARE DEI NUMERI IMAGINARII

La teoria dei numeri imaginarii, in forma analitica, si suole introdurre nel seguente modo.

Il simbolo, p. es., $\sqrt{-4}$ è privo di significato, non rappresenta numero alcuno. Noi lo considereremo come una *nuova* specie di numero, e diremo che esso ha la proprietà di $\sqrt{k}$, per k positivo, cioè porreremo $(\sqrt{-4})^2 = -4$. Poi ci liberiamo d'ogni impiccio ulteriore, *convenendo* di estendere a questi nuovi enti *tutte* le proprietà dei numeri reali. Questo modo di ragionare è tutt'altro che matematico. Il Peano sul proposito, nella sua Nota « Principio de permanentia », exercitio de latino recto, pubblicata nel vol. VIII della *Revue de Mathématique*, opportunamente osserva: Si omne regula et omne theroma super numero in senso non lato subsiste super numero in senso lato, necesse es ut numero in senso lato es identico ad numero in senso non lato. Nam duo ente es inter se aequale, si omne proprietate de uno es quoque proprietate de alio. Hoc es ipse definitione de aequalitate: « Eadem sunt quorum unum in alterius locum sobstitui potent, salva veritate (LEIBNIZ) ».

E lo stesso Peano cita:

Contra hic modo de ratiocinio Gauss antea dice: « Quodsi quis dicat, triangulum rectilineum aequilaterum rectangulum impossibile esse, nemo erit qui neget. At si tale triangulum impossibile tanquam novum triangulorum genus contemplari, aliasque triangulorum proprietas ad illud applicare voluerit, quis risum teneat? Hoc esset verbis ludere seu potius abuti ».

E nell'importante Convegno tenutosi l'anno scorso a Milano fra i professori di Matematica, ad iniziativa dell'Associazione « Mathesis », per discutere i nuovi programmi di Matematica nelle scuole classiche, lo stesso Peano a proposito dei numeri imaginarii disse:

La quistione dei numeri immaginarii è molto difficile: perchè, come si definiscono? Una definizione semplice non vi è. Il dire « dal momento che un numero reale che moltiplicato per sè stesso dia per risultato — 25, non ci è, ebbene noi, per non togliere all'Algebra il carattere di generalità che le compete, ne fabbrichiamo, ne pensiamo uno imaginario », non sono che parole, non vuol dire niente... Bisognerebbe dare una definizione dei numeri imaginarii che non avesse l'assurda pretesa di rendere possibile l'impossibile, che non avesse *l'inconveniente di creare una cosa che si sa che non esiste.*

Il Peano, nel *Formulario*, dà la teoria degli imaginarii, come conseguenza della teoria dei complessi, dei determinanti e delle sostituzioni. Ma confesso che, vuoi per la difficoltà offerta dalla ideografia logico-simbolica a chi tutto ha dovuto fare da sè, vuoi per le limitate facoltà del mio ingegno, quando pubblicai, nel settembre 1905, il mio testo d'Algebra, non potei compilare, come desideravo, una teoria semplice e rigorosa di quegli enti. La seconda edizione del mio testo, intanto, imponendosi, grazie alla benevola accoglienza che i miei Colleghi più intelligenti gli hanno fatto, sono ritornato sull'argomento, ed offro ora ai lettori del *Periodico*, il cui Direttore gentilmente ha acconsentito di pubblicarla, una teoria che mi sembra non solo assai semplice, ma del tutto rigorosa.

I lettori colti si accorgeranno subito che i germi di essa si trovano nel *Formulario* e nel *Calcolo geometrico* del Peano, e le imperfezioni che per avventura in essa teoria si potranno riscontrare, si devono naturalmente attribuire a me, e non all'opera del grande Maestro, benemerito della Scienza e della Scuola.

I. — Cenno sulle coppie di numeri reali.

1. I numeri reali si possono distribuire a coppie. Si formano infinite coppie, che costituiscono un sistema di enti, che chiameremo sistema C. La coppia dei numeri a e b si indica con (a, b).

2. Due coppie (a, b), (a', b') si dicono *eguali*, se $a = a'$, $b = b'$. Cioè si pone

$$(a,\ b) = (a',\ b') . = . a = a' \text{ e } b = b'. \qquad \text{Df}$$

Si prova subito che per l'eguaglianza così definita sussistono le leggi formali.

Se, p. es. si vuole dimostrare che da $(a, b) = (a', b')$, $(a', b') = (a'', b'')$ si deduce $(a, b) = (a'', b'')$, si dirà: Dalle ipotesi si ha $a = a'$, $a' = a''$, $b = b'$, $b' = b''$; quindi $a = a''$, $b = b''$, e perciò $(a, b) = (a'', b'')$.

3. Date due coppie (a, b), (a', b'), si chiama loro *somma*, e si indica con $(a, b) + (a', b')$, la coppia $(a + a', b + b')$. Cioè si pone

$$(a,\ b) + (a',\ b') = (a + a',\ b + b'). \qquad \text{Df}$$

La somma di più di due coppie si definisce come per i numeri reali. Si verifica facilmente che per la somma così definita sussistono le leggi formali.

4. Si indica qualche volta con 0 la coppia (0, 0). Di qui, come per i numeri reali si ha

$$(a, b) + 0 = (a, b) + (0, 0) = (a + 0,\ b + 0) = (a, b).$$

E se m è un numero reale, si pone

$$m\,(a, b) = (ma,\ mb). \qquad \text{Df}$$

Segue che:

a) Se (a, b) è un ente di C, anche $m\,(a, b)$ è un ente di C.

b) Se $(a, b) = (a', b')$, sarà $m\,(a, b) = m\,(a', b')$.

Infatti: dall' HP si ha $a = a'$, $b = b'$ (P2); quindi $ma = ma'$, $mb = mb'$; e perciò, P2:

$$(ma,\ mb) = (ma',\ mb');$$

cioè, Df:

$$m\,(a, b) = m\,(a', b').$$

c) Se m ed n sono numeri reali, anche $m+n$ è un numero reale, perciò

$$\begin{aligned}(m+n)(a,\,b) &= [(m+n)\,a,\ (m+n)\,b] && \text{Df}\\ &= [(ma+na),\ (mb+nb)] && \text{Distrib.}\,(\times,+)\\ &= (ma,\ mb)+(na,\ nb) && \text{P3}\\ &= m\,(a,\ b)+n\,(a,\ b). && \text{Df}\end{aligned}$$

Dunque, Trans. :

$$(m+n)\,(a,\,b)=m\,(a,\,b)+n\,(a,\,b).$$

d) Similmente si dimostra che

$$m\,[n\,(a,\,b)]=(mn)\,(a,\,b).$$

e) È poi

$$1\,(a,\,b)=(1a,\,1b)=(a,\,b),$$
$$0\,(a,\,b)=(0a,\,0b)=(0,\,0)=0.$$

E posto $(a,\,b)-(a',\,b')=(a,\,b)+[-1\,(a',\,b')]$, risulta

$$(a,\,b)-(a,\,b)=0.$$

II. — **Cenno sui sistemi lineari.**

5. I numeri reali formano un sistema di enti che godono delle seguenti proprietà.

a) È definita fra essi l'eguaglianza, che gode delle leggi formali.

b) È definita la somma di due enti del sistema, e poi di un qualunque numero di enti, e tale somma è pure un ente del sistema, e soddisfa alle solite leggi formali.

c) Se $m,\ n,\ a,\ b,\ c,\ldots$ sono enti del sistema, anche ma è un ente del sistema; se $a=b$, anche $ma=mb$;

$$m\,(a+b)=ma+mb\,;$$
$$(m+n)\,a=ma+na\,;$$
$$m\,(na)=mna\,;$$
$$1a=a, \qquad 0a=0.$$

Inoltre, posto $a-b=a+(-1b)$, si ha

$$a-a=0, \qquad a+0=a.$$

6. Ogni sistema di enti che gode di queste proprietà si chiama *sistema lineare.*

I numeri reali formano un sistema lineare, gli enti del sistema C formano pure un sistema lineare.

7. Dicesi *dimensione* d'un sistema lineare il numero degli enti *indipendenti* del sistema, dati i quali, ogni ente del sistema si può determinare.

I numeri reali formano un sistema lineare a *una* dimensione.

Infatti, se a è un dato numero reale, non nullo, b un altro numero reale, posto

$$ax = b,$$

oper/a si ottiene

$$x = b/a.$$

Così da a si ottiene b, oper $\times (b/a)$.

Gli enti del sistema C formano un sistema lineare a *due* dimensioni. Infatti, siano (a, b), (a', b') elementi qualunque indipendenti di C, e sia (a'', b'') un'altra coppia qualunque.

Siano x ed y numeri reali tali che

$$x\,(a, b) + y\,(a', b') = (a'', b''), \qquad (1)$$

cioè P4:

$$(xa, xb) + (ya', yb') = (a'', b''),$$

ovvero ancora, P3:

$$(xa + ya', xb + yb') = (a'', b''),$$

e infine, P2:

$$xa + ya' = a''$$
$$xb + yb' = b''.$$

Il determinante dei coefficienti, cioè il denominatore comune dei valori di x ed y, è

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b,$$

che non è nullo; perchè, se fosse $ab' = a'b$, si avrebbe

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \; (= k),$$

da cui

$$a = a'k, \qquad b = b'k, \qquad (a, b) = k\,(a', b'),$$

e le coppie (a, b), (a', b') non sarebbero indipendenti. Dunque x ed y esistono. È manifesto poi che unica è la coppia dei valori di x ed y con cui si effettua la trasformazione (1).

III. — **Cenno sulle operazioni distributive.**

8. Dato un sistema lineare A, su d'ogni ente a di A si eseguisca un'operazione R, e si indichi con Ra l'ente che si ottiene. Si supponga che gli enti Ra formino pure un sistema lineare; allora la R si dirà una *trasformazione lineare*. E se, essendo m un numero reale, ed a, a' enti di A, siano verificate le identità

$$\mathrm{R}\,(a + a') = \mathrm{R}a + \mathrm{R}a',$$
$$\mathrm{R}\,(ma) = m\,(\mathrm{R}a),$$

allora l'operazione lineare R dicesi *distributiva*.

Si verifica subito che la moltiplicazione per un numero reale è un'operazione distributiva per i due sistemi lineari sopra considerati.

9. Se $a, b, c, \ldots$ sono enti di un sistema lineare A; $m, n, p, \ldots$ numeri reali, R un'operazione distributiva rispetto ad A, si ha

$$a) \qquad R(ma + nb + pc + \ldots) = mRa + nRb + pRc + \ldots$$
$$b) \qquad R0 = 0.$$

Infatti:

a) Limitandoci ai soli tre enti a, b, c, si ha

$$\begin{aligned} R(ma + nb + pc) &= R[(ma + nb) + pc] & \\ &= R(ma + nb) + R(pc) & \text{P8} \\ &= [R(ma) + R(nb)] + R(pc) & \text{"} \\ &= [m(Ra) + n(Rb)] + p(Rc) & \text{"} \\ &= m(Ra) + n(Rb) + p(Rc). & \end{aligned}$$

$$b) \qquad R0 = R(m0) = 0\,(Rm) = 0.$$

IV. — Operazioni sulle trasformazioni lineari.

10. Due trasformazioni R ed S d'un sistema lineare A si dicono *eguali*, se qualunque sia l'ente a di A, si ha sempre $Ra = Sa$.

Per l'eguaglianza così definita sussistono manifestamente le leggi formali.

11. Se R ed S sono trasformazioni degli enti a di un sistema lineare A in enti di un sistema lineare B, si pone

$$(R + S)\,a = Ra + Sa\,;$$

cioè, si indica con $R + S$ l'operazione unica con cui da a di A si ottiene l'ente $Ra + Sa$ di B.

La trasformazione $R + S$ si chiama *somma* delle due trasformazioni R ed S.

12. Se R ed S sono operazioni distributive, anche $R + S$ è una operazione distributiva.

Infatti; siano a ed a' enti del dato sistema lineare; allora anche $a + a'$ è un ente di A (P 5, c). Quindi

$$\begin{aligned} (R + S)(a + a') &= R(a + a') + S(a + a') & \text{P11} \\ &= (Ra + Ra') + (Sa + Sa') & \text{P8} \\ &= (Ra + Sa) + (Ra' + Sa') & \text{Assoc} + \\ &= (R + S)\,a + (R + S)\,a'. & \text{P11} \end{aligned}$$

Inoltre, se m è un numero reale, $m\,a$ è un ente di A; perciò

$$\begin{aligned} (R + S)\,m\,a &= R(m\,a) + S(m\,a) & \text{P11} \\ &= m(Ra) + m(Sa) & \text{P8} \\ &= m(Ra + Sa) & \text{"} \\ &= m(R + S)\,a. & \end{aligned}$$

Questi due risultati mostrano appunto, P 8, che $R + S$ è un'operazione distributiva.

La somma di più di due trasformazioni si definisce come per i numeri reali, e se le trasformazioni sono distributive, anche la somma è distributiva.

La somma gode, come è facile verificare, delle solite leggi formali.

13. Se R è un'operazione distributiva degli enti a, d'un sistema lineare A, in enti d'un sistema lineare B, ed S un'operazione distributiva degli enti di B in enti d'un sistema lineare C, si scrive $\mathrm{SR}a$ in luogo di $\mathrm{S}(\mathrm{R}a)$.

Si dimostra, come al n. precedente, che SR è un'operazione distributiva, e si chiama *prodotto* di R per S.

L'operazione SR trasforma gli enti di A in enti di C.

Il prodotto di due trasformazioni si definisce come per i numeri reali.

14. Sussistono le leggi Distrib $(\times, +)$ e Assoc $\times$, e se di due trasformazioni una è rappresentata da un numero reale, sussiste pure la legge Comm $\times$.

Si voglia, p. es., dimostrare che

$$\mathrm{S}(\mathrm{R}+\mathrm{R}') = \mathrm{SR}+\mathrm{SR}'.$$

Se a è un ente qualunque d'un sistema lineare A, si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{S}(\mathrm{R}+\mathrm{R}')\,a &= \mathrm{S}[(\mathrm{R}+\mathrm{R}')\,a] && \text{P13}\\ &= \mathrm{S}(\mathrm{R}a+\mathrm{R}'a) && \text{P11}\\ &= \mathrm{S}(\mathrm{R}a)+\mathrm{S}(\mathrm{R}'a) && \text{P8}\\ &= \mathrm{S\,R}a+\mathrm{S\,R}'a && \text{P13}\\ &= (\mathrm{SR}+\mathrm{SR}')\,a. && \text{P11} \end{aligned}$$

Di qui, P 10:

$$\mathrm{S}(\mathrm{R}+\mathrm{R}') = \mathrm{SR}+\mathrm{SR}'.$$

Si dimostra similmente che

$$(\mathrm{S}+\mathrm{S}')\,\mathrm{R} = \mathrm{SR}+\mathrm{S'R},$$
$$(\mathrm{TS})\,\mathrm{R} = \mathrm{T}(\mathrm{SR}).$$

Infine, se a è un ente d'un sistema lineare A, si ha

$$\begin{aligned} m\mathrm{R}a &= m(\mathrm{R}a) && \text{P13}\\ \mathrm{R}am &= \mathrm{R}(ma). \end{aligned}$$

Dunque: $m\mathrm{R} = \mathrm{R}m$.

NOTA. — La legge Comm $\times$ in certi particolari prodottti può mancare. Per questo può bastare un esempio.

Dato un tetraedro ABCD è determinato il suo volume.

Se si imagina un osservatore coi piedi in A e la testa in B, e che sia rivolto verso il tetraedro, il volume di questo si assumerà come *positivo* o *negativo*, secondo che C sarà alla destra o alla sinistra dell'osservatore.

Segue che se ABCD si assume come positivo, ABDC sarà negativo. E si può verificare che lo scambio di due punti consecutivi fa cambiare il segno al tetraedro.

Se ABC è un triangolo, e D un punto fuori del suo piano, si chiami *prodotto* di ABC per D il tetraedro ABCD, e *prodotto* di D per ABC, il tetraedro DABC.

Siccome

$$\mathrm{DABC} = -\mathrm{ADBC} = +\mathrm{ABDC} = -\mathrm{ABCD},$$

risulta

$$\mathrm{ABC} \,.\, \mathrm{D} = -\mathrm{D} \,.\, \mathrm{ABC},$$

dove si vede che mutando l'ordine dei fattori, il prodotto cambia di segno.

Osservazione. — Se un'operazione distributiva R degli enti d'un sistema lineare A dà enti del sistema stesso, si dice *sostituzione*.

Per le sostituzioni valgono perciò tutte le proprietà enunciate per le operazioni distributive.

V. — Unità imaginaria.

15. Dato un ente del sistema lineare C, data cioè una coppia (x, y) di numeri reali, e dato il simbolo

$$u = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix},$$

dove $u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}$ sono numeri reali, si indica con $u(x, y)$ la trasformazione con cui dalla coppia (x, y) si passa alla coppia

$$(u_{11}x + u_{12}y,\ u_{21}x + u_{22}y).$$

Se, per esempio

$$u = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

si ha

$$u(x, y) = (x + 2y,\ 3x + 4y).$$

Mediante l'operazione u da enti del sistema C si ottengono enti del sistema stesso.

In particolare, si chiama *unità imaginaria*, e si indica con i, la trasformazione

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Così si ha

$$i(x, y) = (0x - 1y,\ 1x + 0y) = (-y,\ x).$$

16. La trasformazione i è un'operazione distributiva.
Infatti, si ha:

$$\begin{aligned} i[(x, y) + (x', y')] &= i[(x + x'),\ (y + y')] && \text{P3} \\ &= [-(y + y'),\ (x + x')] && \text{P15} \\ &= [(-y - y'),\ (x + x')] && \\ &= (-y, x) + (-y', x') && \text{P3} \\ &= i(x, y) + i(x', y'). && \text{P15} \end{aligned}$$

Similmente si dimostra che

$$im(x,\ y) = m[i(x,\ y)].$$

Questi risultati mostrano, P8, che la trasformazione i è distributiva.

E siccome, come si è visto, mediante i da enti di C si ottengono enti del sistema stesso, così i è una sostituzione.

17. Il prodotto $ii = -1$.

Infatti

$$ii(x,\ y) = i[i(x,\ y)] = i(-y,\ x)$$
$$= (-x,\ -y) = -1\,(x,\ y).$$

Dunque: $ii = -1$.

Se si conviene, seguendo le consuetudini dell'algebra, di scrivere i^2 invece di ii, si ha

$$i^2 = -1.$$

E, se, seguendo le stesse consuetudini, si pone $i^0 = 1$, e se m è un N_0, e i^m una sostituzione, si pone $i^{m+1} = i^m \cdot i$, si ha

$$i^0 = 1, \qquad i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = -1, \qquad i^4 = 1.$$

In generale

$$i^{4m} = 1, \qquad i^{4m+1} = i, \qquad i^{4m+2} = -i, \qquad i^{4m+3} = -i.$$

Cioè, qualunque potenza della sostituzione i è uguale a una delle sostituzioni

$$1, \qquad i, \qquad -1, \qquad -i.$$

Nota. — ia, ovvero ai, dove a è un numero reale, è una sostituzione.

VI. — Numeri complessi. [1]

18. Se x ed y sono numeri reali, x ed yi sono sostituzioni, e quindi anche $x + yi$ è una sostituzione. Si chiama *numero imaginario* o *complesso.*

Se $y = 0$, sarà $yi = 0$, e il numero complesso si riduce al numero reale x.

Se $x = 0$, il numero complesso si riduce ad yi, cioè a un numero imaginario *puro.*

19. Essendo i numeri complessi delle sostituzioni, restano fissati, per essi, i concetti di eguaglianza, somma, prodotto.

20. Operare sulla coppia $(a,\ b)$ con la sostituzione, o numero complesso, $x + yi$.

---

(1) Questa denominazione non è conforme al *Formulario*, dove numero complesso non ha il significato che negli elementi gli si attribuisce. L'ho conservata per seguire l'uso comune.

Si ha

$$\begin{aligned}(x+yi)(a,\ b) &= x(a,\ b)+iy(a,\ b) && \text{P11}\\ &= (xa,\ xb)+i(ya,\ yb) && \text{P4}\\ &= (xa,\ xb)+(-yb,\ ya) && \text{P15}\\ &= (xa-yb,\ xb+ya). && \text{P3}\end{aligned}$$

Dunque

$$(x+yi)(a,\ b)=(xa-yb,\ xb+ya). \qquad (1)$$

Nota. — Se $x+yi=0$, si ha $x=0$, $y=0$.
Infatti; operando su $(1,\ 0)$ si ha per la (1)

$$(x+yi)(1,\ 0)=(x,\ y)=0.$$

Quindi $x=0$, $y=0$.
Reciprocamente: se $x=0$, $y=0$, sarà $x+yi=0$.

21. Se $x+yi=x'+y'i$, sarà $x=x'$, $y=y'$.
Infatti; dall'ipotesi, oper-x' ed oper-yi si ha

$$(x-x')+(y-y')i=0.$$

Da cui, P20, nota:

$$x-x'=0, \qquad y-y'=0.$$

Cioè: $x=x'$, $y=y'$.

22. Per la somma di due numeri complessi si ha

$$(x+yi)+(x'+y'i)=(x+x')+(y+y')i.$$

Ciò risulta dal fatto che i numeri complessi sono sostituzioni, e per le sostituzioni valgono le leggi Assoc$+$, Distrib$(\times,\ +)$.

23. Per il prodotto, sussistendo per le sostituzioni la legge Distrib$(\times,\ +)$, si ha

$$\begin{aligned}(x+yi)(x'+y'i) &= (x+yi)x'+(x+yi)y'i\\ &= (xx'+x'yi)+(xy'i+yy'i^2)\\ &= (xx'+x'yi)+(xy'i-yy')\\ &= (xx'-yy')+(xy'+x'y)i.\end{aligned}$$

Per il prodotto dei numeri complessi sussistono le leggi Assoc$\times$ e Distrib$(\times,\ +)$, tali leggi sussistendo per il prodotto delle sostituzioni. Ma sussiste pure la legge Comm$\times$. Ciò risulta calcolando $(x+yi)(x'+y'i)$, $(x'+y'i)(x+yi)$ con la formola precedente. Si otterrà lo stesso risultato.

Nota. — Due numeri complessi come $x+yi$, $x-yi$, che differiscono per il segno della parte imaginaria si dicono *coniugati*.

Dalla formola precedente risulta che il loro prodotto è x^2+y^2.

La quantità reale x^2+y^2 è detta *norma* di ciascuno dei due numeri complessi coniugati; la radice quadrata positiva della norma si chiama *modulo* di ciascun dei numeri medesimi.

Modulo si abbrevia con mod.

Così si ha

$$\text{mod}\,(x+yi)=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\text{mod}\,(x-yi)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Nota II. — Il modulo d'un numero reale è il valore assoluto del numero stesso.

Nota III. — Se un numero complesso è nullo, nullo sarà pure il suo modulo. E reciprocamente.

Infatti; se $A=x+yi=0$, sarà $x=0$, $y=0$, $\sqrt{x^2+y^2}=0$, cioè $\text{mod}\,A=0$.

Reciprocamente; se $\text{mod}\,A=0$, se cioè $\sqrt{x^2+y^2}=0$, cioè ancora $x^2+y^2=0$, sarà $x=0$, $y=0$, e quindi $A=0$.

24. Il modulo del prodotto di due numeri complessi è uguale al prodotto dei moduli dei fattori.

Infatti, se $A=x+yi$, $B=x'+y'i$, si avrà, P 23

$$AB=(xx'-yy')+(xy'+x'y)\,i.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\text{mod}\,(AB)&=\sqrt{(xx'-yy')^2+(xy'+x'y)^2}\\&=\sqrt{(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)}\\&=\sqrt{x^2+y^2}\,.\,\sqrt{x'^2+y'^2}\\&=\text{mod}\,A\,.\,\text{mod}\,B.\end{aligned}$$

Il teorema si estende a un numero qualunque di fattori.

25. La condizione necessaria e sufficiente affinchè un prodotto di numeri complessi sia nullo, è che sia nullo almeno uno dei fattori.

La condizione è *necessaria*.

Siano A e B due numeri complessi, e sia $AB=0$. Sarà allora (P 23, nota III), $\text{mod}\,AB=0$; cioè (P 24), $\text{mod}\,A\,.\,\text{mod}\,B=0$.

Di qui

$$\text{mod}\,A=0, \qquad \text{oppure} \qquad \text{mod}\,B=0.$$

Cioè:

$$A=0 \qquad \text{oppure} \qquad B=0.$$

Reciprocamente: se $A=0$, sarà $\text{mod}\,A=0$. Quindi

$$\text{mod}\,(AB)=\text{mod}\,A\,.\,\text{mod}\,B=0\,.\,\text{mod}\,B\,;$$

e perciò $AB=0$.

26. Si chiama *opposto* d'un numero complesso un altro numero complesso che sommato col primo dà 0.

L'opposto del numero complesso A si indica con $-A$.

L'opposto del numero complesso $x+yi$ è $-x-yi$. Infatti la loro somma è zero.

È manifesto che un numero complesso ha un solo opposto.

La differenza di due numeri complessi si definisce come per i numeri reali.

Si sottrae un numero complesso aggiungendo l'opposto.

Per esempio $A - B = A + (-B)$.

Infatti, $A + (-B) + B = A + [(-B) + B] = A$.

In particolare

$$(x + yi) - (x' + y'i) = (x - x') + (y - y')\, i.$$

27. Anche il quoziente di due numeri complessi si definisce come per i numeri reali.

Sia $x' + y'i$ un numero complesso non nullo, e $a + bi$ un numero complesso tale che

$$\frac{x + yi}{x' + y'i} = a + bi.$$

Si deve avere per definizione

$$\begin{aligned} x + yi &= (x' + y'i)(a + bi) \\ &= (x'a - y'b) + (x'b + y'a)\, i. \end{aligned}$$ P23

Quindi

$$x'a - y'b = x, \qquad x'b + y'a = y.$$

Qui le incognite sono a e b. Risolvendo si ha:

$$a = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2}, \qquad b = \frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}.$$

Essendo il secondo numero complesso non nullo, sarà $x'^2 + y'^2$ non nullo, ed a e b sono finiti.

Si ha perciò

$$\frac{x + yi}{x' + y'i} = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + \frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}\, i.$$

Si verifica poi, come per i numeri reali, che il quoziente è unico.

28. Se A, B, C, D sono numeri complessi, sussiste il doppio teorema

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} .=. AD = BC.$$

Si dimostra come per i numeri reali.

Si deduce: $\dfrac{A}{B} = \dfrac{AC}{BC}$.

29. Per le potenze dei numeri complessi a esponenti interi e positivi si conservano le medesime leggi di formazione adottate per i numeri reali. Così, se m è un N_0, A un numero complesso, A^m pure un numero complesso, poniamo

$$A^0 = 1, \qquad A^{m+1} = A^m . A.$$

Di qui risulta come per i numeri reali

$$A^1 = A, \qquad A^2 = A \,.\, A, \qquad A^3 = A \,.\, A \,.\, A, \text{ ecc.}$$

Segue che come il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso, così qualunque potenza d'un numero complesso è un numero complesso.

Esempi:

$$(1+i)^2 = 1 - 1 + 2i = 2i$$
$$(1+i)^3 = 2i\,(1+i) = 2i - 2 = -2 + 2i.$$

30. Sussistono i soliti teoremi sulle potenze, e si dimostrano come per i numeri reali.

Questo risultato, insieme con le leggi Assoc $+$, Comm $+$, Assoc $\times$, Comm $\times$, Distrib $(\times, +)$ ci dicono che le operazioni relative a polinomii valgono anche se i termini sono in tutto, o in parte, numeri complessi.

In particolare

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$$
$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2.$$

31. Se il polinomio $ax^3 + bx^2 + cx + d$ è identicamente nullo, cioè si annulla per tutti i valori *reali* di x, si annullerà pure per tutti i valori complessi di x.

Infatti, essendo il polinomio identicamente nullo, saranno nulli a, b, c, d; e quindi, essendo le potenze di numeri complessi pure dei numeri complessi, il polinomio si annulla anche per valori non reali di x.

Segue che si estendono i criterii di divisibilità per $x - a$, anche per a non reale; sussiste il teorema che se il polinomio intero in x, $f(x)$, si annulla per $x = a, b, \ldots$, con $a, b, \ldots$ reali, o no, differenti fra loro, sarà divisibile per $(x-a)(x-b)\ldots$; sussiste il teorema che un polinomio intero in x, di grado m, non può annullarsi per più di m valori di x fra reali e imaginarii, senza che sia identicamente nullo; ecc., ecc.

32. Se a è un numero complesso, ed m un N_1, si chiama radice m^{esima} di a, e si indica con $\sqrt[m]{{}^*a}$, ogni numero complesso che elevato ad m dà a.

Siccome un numero reale elevato a potenza intera positiva dà un numero reale, segue che le radici m^{esime} d'un numero complesso non sono numeri reali.

Se poi a è un numero reale positivo, oppure un numero complesso, le sue radici m^{esime} si indicano sempre con $\sqrt[m]{{}^*a}$, e con $\sqrt[m]{a}$ si indica quella di tali radici che ha maggior parte reale, e che si chiama anche *radice principale*.

33. Se a è un numero reale positivo o negativo, le sue radici m^{esime} non possono essere più di m. Infatti; il polinomio $x^m - a$ non può annullarsi per più di m valori di x, fra reali e complessi (P31).

In particolare un numero reale non può avere più di due radici quadrate.

Se a è reale positivo, ed α è la sua radice quadrata aritmetica, sarà

$$\sqrt{{}^*a} = \pm \alpha.$$

Infatti: $(\pm \alpha)^2 = \alpha^2 = a$.

La radice principale è $\sqrt{a} = \alpha$.

Se a è un numero reale negativo, e α la radice quadrata aritmetica di $-a$, talchè $\alpha^2 = -a$, sarà

$$\sqrt{{}^*a} = \pm \alpha i.$$

Infatti; $(\pm \alpha i)^2 = \alpha^2 i^2 = -\alpha^2 = a$.

Si può verificare che

$$\sqrt[3]{{}^*1} = 1, \quad \text{o} \quad -\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} i, \quad \text{o} \quad -\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2} i.$$

Quindi $\sqrt[3]{1} = 1$.

34. Infine, se x è un numero reale positivo o negativo, y un numero reale positivo, si ha

$$\sqrt{x+yi} = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}\, i$$

$$\sqrt{x-yi} = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}\, i.$$

Difatti, elevando al quadrato il secondo membro della prima eguaglianza si ha $x + yi$; elevando al quadrato il secondo membro della seconda eguaglianza si ha $x - yi$.

Gli opposti di detti secondi membri sono manifestamente radici quadrate rispettivamente di $x + yi$, $x - yi$. Nè si possono avere altre radici quadrate.

Infatti; se $a_1 + a_2 i$ è una radice quadrata di $x + yi$, p. es. quella scritta, e $b_1 + b_2 i$ un'altra radice, si deve avere

$$(a_1 + a_2 i)^2 = x + yi, \qquad (b_1 + b_2 i)^2 = x + yi.$$

Da queste si deduce agevolmente che

$$a_1^2 - a_2^2 = b_1^2 - b_2^2; \qquad a_1 a_2 = b_1 b_2.$$

Eliminando b_1, dopo qualche riduzione si ha

$$(a_1^2 + b_2^2)(b_2^2 - a_2^2) = 0,$$

che dà $b_2^2 - a_2^2 = 0$, cioè

$$(b_2 - a_2)(b_2 + a_2) = 0.$$

Deve dunque aversi: o $b_2 = a_2$, o $b_2 = -a_2$. In corrispondenza risulta: o $b_1 = a_1$, o $b_1 = -a_1$. Quindi $b_1 + b_2 i = a_1 + a_2 i$, cioè la proposta radice; o $b_1 + b_2 i = -a_1 - a_2 i$, cioè l'opposta della proposta.

Quelle scritte adunque sono le radici principali rispettivamente di $x + yi$, $x - yi$.

Catania, novembre, 1906. S. CATANIA.

NUMERI RAZIONALI ESPRIMIBILI CONTEMPORANEAMENTE MEDIANTE DUE FORME BINARIE I CUI GRADI DIFFERISCONO DI UNA UNITÀ

Le coordinate dei punti di una curva razionale d'ordine n avente un punto multiplo d'ordine $n-1$ sono, com'è noto, esprimibili razionalmente per un parametro. Come tale si potrà, ad es., scegliere il coefficiente direttivo di una generica retta uscente dal detto punto multiplo.

Se i coefficienti dell'equazione della curva sono numeri razionali, e se il punto multiplo ha coordinate razionali, la ricerca degli altri punti della curva, aventi coordinate razionali, si potrà fare scegliendo, fra le rette uscenti dal punto $(n-1)$-plo, quelle, il cui coefficiente direttivo è un numero razionale.

Supponendo che il punto $(n-1)$-plo sia l'origine delle coordinate, l'equazione della curva conterrà, com'è noto, i soli termini di grado n ed $n-1$, cioè sarà del tipo:

$$\begin{aligned} a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = \\ b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2}y + \ldots + b_{n-2}xy^{n-2} + b_{n-1}y^{n-1}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Delle intersezioni colla retta $\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu}$, $n-1$ cadranno nell'origine e l'ennesima sarà il punto di coordinate:

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda \frac{b_0\lambda^{n-1} + b_1\lambda^{n-2}\mu + \ldots + b_{n-2}\lambda\mu^{n-2} + b_{n-1}\mu^{n-1}}{a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1}\mu + \ldots + a_{n-1}\lambda\mu^{n-1} + a_n\mu^n}, \\ y &= \mu \frac{b_0\lambda^{n-1} + b_1\lambda^{n-2}\mu + \ldots + b_{n-2}\lambda\mu^{n-2} + b_{n-1}\mu^{n-1}}{a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1}\mu + \ldots + a_{n-1}\lambda\mu^{n-1} + a_n\mu^n}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Se le costanti $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ sono numeri razionali, attribuendo a λ e μ tutte le coppie di valori interi, positivi o negativi, primi fra loro, si avranno tutti i possibili punti di coordinate razionali della curva (1).

Al problema geometrico di determinare questi punti della curva data si può dare anche una veste aritmetica, che metterà in chiaro lo scopo della nostra ricerca.

Immaginiamo di considerare uno qualunque dei punti della (1), le cui coordinate x, y si ottengono dalle (2) dando a λ e μ valori del tipo ricordato più sopra. Questi due numeri razionali x, y soddisfano alla (1), facendo assumere ai due membri di essa uno stesso valore razionale A. Questo numero A è dunque il valore comune assunto da due forme binarie, l'una di grado n, l'altra di grado $n-1$ per una stessa coppia di numeri razionali x, y convenientemente scelti.

Orbene, la veste aritmetica, che vogliamo dare al problema geometrico accennato, è la seguente:

Determinare tutti i numeri razionali A, *che sono ad un tempo esprimibili mediante una forma binaria di grado* n *ed una di grado* n — 1.

Eliminando x e y fra la (1) e le (2), si arriva facilmente alla espressione più generale di tali numeri. Essa è:

$$A = \frac{(b_0\lambda^{n-1} + b_1\lambda^{n-2}\mu + \ldots + b_{n-2}\lambda\mu^{n-2} + b_{n-1}\mu^{n-1})^n}{(a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1}\mu + \ldots + a_{n-1}\lambda\mu^{n-1} + a_n\mu^n)^{n-1}}. \qquad (3)$$

Dunque: " I numeri, che godono della proprietà voluta, si presen-
" tano sotto la forma del quoziente delle potenze n^{esima} ed $(n-1)^{\text{esima}}$
" dei valori che assumono le due forme date, l'una di grado $n-1$,
" l'altra di grado n, quando al posto delle variabili si pongono due
" numeri interi qualunque primi fra loro ".

Limiteremo le nostre considerazioni solo ad alcuni fra i casi corrispondenti ad $n=2$ ed $n=3$: quelli che possono presentare qualche interesse dal punto di vista dell'aritmetica.

Considereremo inoltre le sole soluzioni razionali positive della (1), sicchè ai parametri λ e μ dovremo attribuire solo valori interi positivi (primi fra loro).

Avvertiamo poi che, ogniqualvolta le due forme date saranno simmetriche, basterà per una determinazione sistematica dei numeri A, dare a λ e μ valori (interi, positivi, primi fra loro) tali che sia, ad es., $\lambda > \mu$. Il numero A risulta infatti espresso, in quei casi, come una funzione simmetrica di λ e μ. Le coordinate dei punti della curva (1) si scambiano invece, in virtù delle (2), una nell'altra.

§ 1. — Casi corrispondenti ad $n=2$.

Si presentano dapprima alcuni casi, per dir così, riducibili, la cui trattazione è ridotta a un problema d'analisi indeterminata di primo grado.

Ad es., lo studio dell'equazione $x^2-y^2=x\pm y$ è ridotta (astrazione fatta dalle soluzioni $x=\mp y$) a quello dell'equazione $x\mp y=1$.

Di questi casi non ci occuperemo.

I. *Determinare tutti i numeri razionali positivi* A, *che si possono riguardare ad un tempo come somma e come prodotto di due altri numeri razionali positivi.*

Posto $xy=A$, $x+y=A$, si tratterà di risolvere per numeri razionali positivi l'equazione $xy=x+y$. In virtù delle formole (2) e (3), fatto $n=2$ e particolarizzate in modo ovvio le costanti a e b, abbiamo:

$$x=\frac{\lambda+\mu}{\mu}\quad,\quad y=\frac{\lambda+\mu}{\lambda},$$
$$A=\frac{(\lambda+\mu)^2}{\lambda\mu}.$$

Dimostriamo che " l'equazione $xy=x+y$ ammette la sola so-" luzione intera $x=2$, $y=2$, cui corrisponde il numero $A=4$, il " quale è il minimo dei valori, che può avere A ".

Infatti $x=\frac{\lambda+\mu}{\mu}=1+\frac{\lambda}{\mu}$ e $y=\frac{\lambda+\mu}{\lambda}=1+\frac{\mu}{\lambda}$ risultano numeri interi solo se $\frac{\lambda}{\mu}$ e $\frac{\mu}{\lambda}$ sono numeri interi, cioè (ricordando che λ e μ devono essere positivi) se $\frac{\lambda}{\mu}=1$. In corrispondenza si trova $x=2$, $y=2$, $A=4$. Siccome poi i due numeri x, y soddisfano all'equazione $z^2-Az-A=0$, e questa ammette radici reali solo quando $A\geqq 4$, si conclude che $A=4$ è il minimo valore di A.

Di tale teorema si può dare un'altra dimostrazione con metodo geometrico, che seguiremo sistematicamente anche in seguito.

La curva $xy=x+y$ è l'iperbole, che ha per asintoti le rette $x=1$, $y=1$ e passa per l'origine (e quindi pel punto (2,2) simmetrico dell'origine rispetto al punto (1,1), centro della curva). Il ramo situato dalla banda delle x e y positive, essendo tutto compreso nelle due strisce limitate, l'una dalle rette $x=1$, $x=2$, l'altra dalle rette $y=1$, $y=2$, non passa per altri punti di coordinate intere all'infuori del punto (2, 2). Infine il ramo di curva in questione è tutto situato da quella parte della retta $x+y=4$ (tangente nel punto (2, 2) all'iperbole) ove si trovano i punti, la cui somma delle coordinate è maggiore di 4. Dunque 4 è il minimo valore della somma $x+y$. (¹)

(¹) Sarà bene che il lettore, per maggiore intelligibilità, si costruisca in questo e nei casi successivi le relative figure, del resto molto semplici.

Per questo primo caso diamo anche una tabella dei valori di x, y ed A, che corrispondono ai valori di λ e di μ inferiori a 5.

λ	μ	x	y	A
1	1	2	2	4
2	1	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$
3	1	4	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{3}$
3	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{25}{6}$
4	1	5	$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{4}$
4	3	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{49}{12}$

II. *Trovare i numeri razionali positivi, che si possono considerare ad un tempo come somma (o differenza) di due altri numeri razionali positivi e come somma dei loro quadrati.*

Detto A uno dei numeri richiesti, dovrà essere $x^2+y^2=A$ ed $x \pm y = A$. I numeri razionali positivi, con cui è composto il numero A, dovranno perciò soddisfare all'equazione $x^2+y^2=x \pm y$.

Consideriamo il solo caso corrispondente al segno $+$; l'altro si tratterebbe in modo identico.

Intanto, per le (2) e (3), si ha:

$$x=\lambda\frac{\lambda+\mu}{\lambda^2+\mu^2}\quad,\quad y=\mu\frac{\lambda+\mu}{\lambda^2+\mu^2},$$
$$A=\frac{(\lambda+\mu)^2}{\lambda^2+\mu^2}.$$

Dimostriamo che: " l'equazione $x^2+y^2=x+y$ ammette le sole " soluzioni intere $x_1=1$, $y_1=0$ e $x_2=1$, $y_2=1$ e i numeri $A_1=1$, " $A_2=2$ corrispondenti sono rispettivamente il minimo ed il mas- " simo dei valori assunti da A ".

Si sono escluse nell'enunciato le due soluzioni $x=y=0$ e $x=0$, $y=1$, la prima perchè non offre interesse ed è nota a priori, la seconda perchè equivalente alla soluzione $x_1=1$, $y_1=0$ in virtù della simmetria dell'equazione.

Per dimostrare il teorema si osservi che l'equazione $x^2+y^2=x+y$ rappresenta il cerchio, che passa per l'origine e ha il centro nel punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. L'arco compreso fra l'asse x e la retta $x-y=0$, i punti razionali del quale sono quelli che c'interessano, non contiene altri punti di coordinate intere all'infuori di $(1, 0)$, $(1, 1)$ ed è tutto interno alla striscia formata dalle parallele $x+y=1$, $x+y=2$. Per tutti i punti di quest'arco è dunque $1 \leqq x+y \leqq 2$. c. d. d.

III. *Trovare tutti i numeri razionali positivi, che sono ad un tempo somma (o differenza) di due numeri razionali positivi e quadrato della loro differenza (risp. somma).*

Consideriamo anche qui, per brevità, la sola ipotesi che sia $x+y=A$, $(x-y)^2=A$. Fra x e y passerà la relazione:

$$(x-y)^2 = x+y,$$

e quindi, per le (2) e (3), sarà:

$$x=\lambda\frac{\lambda+\mu}{(\lambda-\mu)^2} \quad , \quad y=\mu\frac{\lambda+\mu}{(\lambda-\mu)^2},$$

$$A=\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}\right)^2.$$

Dico che: " l'equazione $(x-y)^2=x+y$ ammette infinite soluzioni intere positive, che si ottengono dalle formole precedenti " dando a λ un valore intero positivo qualunque e considerando per " μ i valori $\lambda-1$ e $\lambda-2$, se λ è dispari, il solo valore $\lambda-1$, se λ " è pari ".

Intanto, perchè x e y sieno interi, è necessario e sufficiente che sia intero il numero A.

Che la condizione sia necessaria risulta senz'altro dal modo con cui è formato A mediante i numeri x e y. Se poi il numero A, che è un quadrato perfetto, è intero, è pure intera la sua radice quadrata, e quindi sono interi i numeri x e y, la cui espressione in funzione di A è:

$$x=\tfrac{1}{2}\sqrt{A}\,(\sqrt{A}+1) \quad , \quad y=\tfrac{1}{2}\sqrt{A}\,(\sqrt{A}-1).$$

Il teorema sarà dunque dimostrato, se arriveremo a provare, che, soltanto prendendo i parametri λ e μ com'è indicato in esso, il numero A risulta intero.

Ora, essendo $\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}=\sqrt{A}$ e quindi $\dfrac{\lambda}{\mu}=\dfrac{\sqrt{A}+1}{\sqrt{A}-1}$, se si indica con ρ un fattore di proporzionalità, si ha:

$$\rho\lambda=\sqrt{A}+1 \quad , \quad \rho\mu=\sqrt{A}-1. \tag{4}$$

Eliminando $\sqrt{A}$ fra queste due relazioni, si trova:

$$\rho\mu=\rho\lambda-2,$$

cioè

$$\rho=\frac{2}{\lambda-\mu}. \tag{5}$$

Siccome i secondi membri delle (4) sono, per ipotesi, numeri interi, dovranno essere interi tanto $\rho\lambda$ quanto $\rho\mu$, e quindi, essendo λ e μ numeri interi primi fra loro, dovrà essere intero ρ. Ma dalla (5) risulta che i soli valori interi di ρ sono i numeri 1 e 2, e ciò secondo che $\lambda - \mu = 2$ o $\lambda - \mu = 1$, dunque potrà essere soltanto:

$$\mu = \lambda - 1, \qquad \text{ovvero} \qquad \mu = \lambda - 2.$$

Ora, se λ è dispari, entrambi questi valori di μ, essendo primi con λ, si possono ad esso accoppiare; se invece λ è pari, soltanto il primo è accettabile, perchè esso solo è primo con λ. Es.:

λ	μ	x	y	A
1	0	1	0	1
2	1	6	3	9
3	1	3	1	4
3	2	15	10	25
4	3	28	21	49
5	3	10	6	16
5	4	45	36	81

Non sarà superfluo osservare, che i numeri A, i quali godono della proprietà voluta, sono *tutti* i quadrati perfetti. Infatti, supposto che il numero A intero sia un quadrato perfetto i due numeri:

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{A}\,(\sqrt{A}+1) \quad , \quad y = \tfrac{1}{2}\sqrt{A}\,(\sqrt{A}-1)$$

sono pure interi e soddisfano, come s'è visto più sopra, alle equazioni $(x-y)^2 = x + y = A$. P. es., posto $A = 13^2 = 169$ si ha: $x = 91$, $y = 78$ e quindi l'identità numerica $(91-78)^2 = 91 + 78$.

§ 2. — Casi corrispondenti ad $n = 3$.

Abbiamo dapprima alcuni casi, che segnano quasi il passaggio fra la precedente categoria e questa.

Se ci proponiamo infatti di risolvere le equazioni di terzo grado:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)^2, \\ x^3 - y^3 &= (x-y)^2, \\ x^3 + y^3 &= x^2 - y^2, \\ x^3 - y^3 &= x^2 - y^2, \end{aligned}$$

troviamo che il problema equivale a risolvere le equazioni di secondo grado:

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= x + y, \\ x^2 + xy + y^2 &= x - y, \\ x^2 - xy + y^2 &= x - y, \\ x^2 + xy + y^2 &= x + y. \end{aligned}$$

Lo studio di queste procede in modo perfettamente analogo a quello usato in casi precedenti, e lo omettiamo essendo poco interessante.

Consideriamo piuttosto qualche caso irriducibile.

I. *Trovare tutti i numeri razionali positivi, che sono ad un tempo differenza (o somma) dei cubi di due numeri razionali positivi e quadrato della loro somma (o differenza).*

Poniamoci, ad es., nella ipotesi $x^3 - y^3 = A$, $(x + y)^2 = A$. Fra x e y passerà la relazione:

$$x^3 - y^3 = (x + y)^2,$$

e quindi, per le (2) e (3), avremo:

$$x = \lambda \frac{(\lambda + \mu)^2}{\lambda^3 - \mu^3} \quad , \quad y = \mu \frac{(\lambda + \mu)^2}{\lambda^3 - \mu^3},$$
$$A = \left[\frac{(\lambda + \mu)^3}{\lambda^3 - \mu^3}\right]^2.$$

La curva del terzo ordine rappresentata dall'equazione $x^3 - y^3 = (x + y)^2$ ha una cuspide nell'origine, colla tangente cuspidale $x + y = 0$, taglia l'asse x nel punto (1, 0) ed ha per asintoto la retta $x - y = \frac{4}{3}$. (1)

Che la curva consti di un solo ramo, quello compreso fra le rette $x - y = 0$, $x - y = \frac{4}{3}$, si può verificare, sia costruendo effettivamente la curva, sia osservando che, in caso diverso, qualche retta uscente dalla cuspide la incontrerebbe in più di tre punti. È chiaro poi che il ramo situato nella regione delle x e y positive rimane tutto interno alla striscia limitata dalle rette $x - y = 1$, $x - y = \frac{4}{3}$. Infatti, se questo ramo dovesse attraversare o toccare il contorno, esisterebbe una retta almeno del piano, che avrebbe in comune colla curva più di tre punti.

Concludiamo quindi che questa curva non contiene nessun punto di coordinate intere positive all'infuori del punto (1, 0).

Il numero A non può inoltre essere intero, se non sono interi i numeri x e y con cui risulta composto. Infatti, supposto A intero (quadrato perfetto) e indicata con $\frac{m}{n}$ una frazione irriducibile, ponendo $x = \frac{m}{n}$, $y = \sqrt{A} - \frac{m}{n}$, risulta soddisfatta la condizione $(x + y)^2 = A$, ma non si possono trovare due numeri m, n primi fra loro, per i quali sia soddisfatta anche la seconda condizione $x^3 - y^3 = A$, perchè dovrebbe essere intera l'espressione $\frac{m^3}{n^3} - \left(\sqrt{A} - \frac{m}{n}\right)^3$, cioè $\frac{m^3 - (\sqrt{A}\, n - m)^3}{n^3}$, mentre invece il numeratore della frazione non è mai divisibile per n (a meno che sia $m = 0$, il che è escluso). Si conclude dunque che non esistono numeri A interi (escluso il valore $A = 1$) soddisfacenti alle condizioni imposte.

(1) Tutte queste asserzioni si giustificano coi soliti procedimenti della " Geometria analitica "; in particolare, per verificare l'ultima, basta tagliare la curva colla retta $x - y = m$, e determinare m in modo che x e y assumano valori infiniti.

L'ipotesi $x^3+y^3=\mathrm{A}$, $(x-y)^2=\mathrm{A}$ si discute in modo analogo. La curva rappresentata dall'equazione $x^3+y^3=(x-y)^2$ è simmetrica della precedente rispetto all'asse x. Si conclude quindi che " esistono " le sole soluzioni intere $x=1$, $y=0$; $x=0$, $y=1$ in corrispondenza " delle quali $\mathrm{A}=1$. Questo valore è il massimo dei valori razionali " positivi, che possono assumere i numeri A richiesti ".

II. *Trovare tutti i numeri razionali positivi, che si possono rappresentare sia mediante la somma dei cubi di due altri numeri razionali positivi, sia mediante la somma dei loro quadrati.*

Per questi numeri A si dovrà avere contemporaneamente $x^3+y^3=\mathrm{A}$, $x^2+y^2=\mathrm{A}$, e quindi fra x e y passerà la relazione:

$$x^3+y^3=x^2+y^2.$$

Come al solito si ha:

$$x=\lambda\frac{\lambda^2+\mu^2}{\lambda^3+\mu^3}\quad,\quad y=\mu\frac{\lambda^2+\mu^2}{\lambda^3+\mu^3},$$

$$\mathrm{A}=\frac{(\lambda^2+\mu^2)^3}{(\lambda^3+\mu^3)^2}.$$

La cubica corrispondente a questo caso ha l'origine come punto doppio isolato, taglia normalmente le direzioni positive degli assi alla distanza 1 dall'origine, e passa pel punto (1, 1), avendo per tangente in esso la retta $x+y=2$; infine ha per asintoto la retta $x+y=\frac{2}{3}$. La curva non si compone di altri rami all'infuori di quello compreso nella striscia limitata dalle rette $x+y=\frac{2}{3}$, $x+y=2$ (cfr. il caso precedente). Il tratto di curva che si trova nella regione positiva delle coordinate è tutto interno alla corona circolare limitata dalle circonferenze $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=2$ e tocca il contorno nei soli punti (1, 0), (0, 1), (1, 1). Infatti, se il contorno venisse attraversato o toccato in un altro punto, per la simmetria della curva rispetto alla retta $x-y=0$, dovrebbe venire attraversato o toccato in un secondo punto, e allora una o l'altra delle circonferenze limitanti la corona avrebbe più di sei punti comuni colla curva data, il che è assurdo.

Da tutto ciò si ricava che " l'equazione $x^3+y^3=x^2+y^2$ ammette " le sole soluzioni intere positive (1, 0), (1, 1) e che i due numeri " $\mathrm{A}=1$, $\mathrm{A}=2$, corrispondenti, l'uno alla prima soluzione, l'altro " alla seconda sono rispettivamente il minimo ed il massimo dei va- " lori, che possono avere i numeri A ".

La soluzione $x=0$, $y=1$, non è stata considerata nell'enunciato, perchè equivalente in virtù della simmetrica dell'equazione, alla soluzione $x=1$, $y=0$.

In modo analogo si discuterebbe l'equazione $x^3-y^3=x^2+y^2$ (corrispondente all'ipotesi $x^3-y^3=\mathrm{A}$, $x^2+y^2=\mathrm{A}$) che rappresenta la curva simmetrica della precedente rispetto all'asse x.

III. *Trovare tutti i numeri razionali positivi rappresentabili ad un* *tempo mediante il cubo della differenza di due altri numeri razionali positivi e mediante il quadrato della loro somma.*

Dalle due relazioni $(x-y)^3 = A$, $(x+y)^2 = A$ si trae:

$$(x-y)^3 = (x+y)^2,$$

e quindi:

$$x = \lambda \frac{(\lambda+\mu)^2}{(\lambda-\mu)^3} \quad , \quad y = \mu \frac{(\lambda+\mu)^2}{(\lambda-\mu)^3}$$

$$A = \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}\right)^6 .$$

Per quanto riguarda le soluzioni intere, questo caso si discute in modo analogo a quello tenuto nel II caso del § 1, e si conclude che " esistono infinite soluzioni intere positive dell'equazione $(x-y)^3 =$ " $(x+y)^2$, le quali si ottengono dando a μ i valori $\lambda - 1$ e $\lambda - 2$, " se λ è dispari, il solo valore $\lambda - 1$, se λ è pari; da queste solu- " zioni e da queste soltanto si traggono i valori interi di A; ogni " sesta potenza di un numero naturale è un numero A ".

IV. *Trovare tutti i numeri razionali positivi, che risultano ad un tempo uguali al cubo della differenza di due altri numeri razionali positivi ed alla somma dei loro quadrati.*

Dalle relazioni $(x-y)^3 = A$, $x^2 + y^2 = A$ si ricava:

$$(x-y)^3 = x^2 + y^2,$$

e quindi:

$$x = \lambda \frac{\lambda^2+\mu^2}{(\lambda-\mu)^3} \quad , \quad y = \mu \frac{\lambda^2+\mu^2}{(\lambda-\mu)^3},$$

$$A = \left[\frac{\lambda^2+\mu^2}{(\lambda-\mu)^2}\right]^3 .$$

Per quanto riguarda le soluzioni intere positive si ha il teorema: " Si ottengono soluzioni intere positive solo attribuendo a λ e μ va- " lori consecutivi $(\lambda > \mu)$. Ad esse soltanto corrispondono valori in- " teri di A, i quali sono tutti e soltanto i cubi dei numeri interi, " che si possono scomporre nella somma dei quadrati di due numeri " consecutivi ".

Che per valori consecutivi di λ e μ i numeri x, y, A risultino interi, appare senz'altro dalle formole precedenti.

Dimostriamo reciprocamente che, se A è un numero intero positivo soddisfacente alle condizioni imposte, 1° risultano necessariamente interi i numeri x e y con cui A è composto, 2° i parametri λ e μ corrispondenti sono numeri consecutivi.

Poichè A è il cubo della differenza $x-y$, posto $A = a^3$, avremo:

$$x - y = a \quad , \quad x^2 + y^2 = a^2. \qquad (a > 0)$$

Risolvendo queste equazioni rispetto a x e y, e non tenendo conto delle soluzioni negative, si ha:

$$x = \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{2a-1}\right), \quad y = \frac{a}{2}\left(-1 + \sqrt{2a-1}\right).$$

Perchè x e y risultino numeri razionali dovremo porre:

$$2a-1=m^2,$$

cioè

$$a=\frac{m^2+1}{2}.$$

Ma, per ipotesi, a è intero, quindi m^2+1 dovrà essere un numero pari, e, in conseguenza, m un numero dispari. Posto $m=2n-1$ (n, numero intero) avremo:

$$a=2n^2-2n+1=n^2+(n-1)^2.$$

Dunque:

$$A=[n^2+(n-1)^2]^3$$

e

$$x=n[n^2+(n-1)^2], \quad y=(n-1)[n^2+(n-1)^2].$$

Risulta così provato che x e y sono interi. Vediamo ora quali coppie di valori per λ e μ si debbano prendere.

Essendo $x-y=\frac{\lambda^2+\mu^2}{(\lambda-\mu)^2}$, ed avendo dimostrato che la differenza $x-y$ è della forma $2n^2-2n+1$, si avrà:

$$\frac{\lambda^2+\mu^2}{(\lambda-\mu)^2}=2n^2-2n+1,$$

ossia:

$$n(n-1)\frac{\lambda^2}{\mu^2}-(2n^2-2n+1)\frac{\lambda}{\mu}+n(n-1)=0.$$

Risolvendo rispetto a $\frac{\lambda}{\mu}$, si hanno le soluzioni:

$$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{n}{n-1} \quad , \quad \frac{\lambda}{\mu}=\frac{n-1}{n}.$$

Si devono dunque prendere per λ e μ valori consecutivi, con l'avvertenza, che, dovendo x e y risultare positivi, dovrà essere $\lambda>\mu$.

Esempi:

λ	μ	x	y	A
1	0	1	0	1
2	1	10	5	5^3
3	2	39	26	13^3
4	3	100	75	25^3
5	4	205	164	41^3

V. *Trovare i numeri razionali positivi, che sono ad un tempo prodotto di due altri numeri razionali positivi e cubo della loro differenza.*

Le due relazioni di condizione $(x-y)^3=A$, $xy=A$ conducono a risolvere l'equazione:

$$(x-y)^3=xy.$$

Si trova:

$$x=\lambda\frac{\lambda\mu}{(\lambda-\mu)^2}\quad,\quad y=\mu\frac{\lambda\mu}{(\lambda-\mu)^2},$$

e i numeri A richiesti sono del tipo:

$$A=\left[\frac{\lambda\mu}{(\lambda-\mu)^2}\right]^3.$$

Si dimostra poi, con procedimento analogo al precedente, che " si " ottengono soluzioni intere positive solo attribuendo a λ e μ valori " consecutivi ($\lambda>\mu$). Ad esse soltanto corrispondono valori interi " di A, i quali sono tutti e soltanto i cubi dei numeri interi, che si " possono scomporre nel prodotto di due numeri consecutivi ".

Esempi:

λ	μ	x	y	A
2	1	4	2	2^3
3	2	18	12	6^3
4	3	48	36	12^3
5	4	100	80	20^3

VI. *Trovare tutti i numeri razionali positivi* A, *che sono ad un tempo prodotto di due altri numeri razionali positivi e differenza dei loro cubi.*

Detti x e y i numeri con cui devono risultare composti i numeri A e indicati con λ e μ i soliti parametri, si ha:

$$x=\lambda\frac{\lambda\mu}{\lambda^3-\mu^3}\quad,\quad y=\mu\frac{\lambda\mu}{\lambda^3-\mu^3},$$
$$A=\frac{(\lambda\mu)^3}{(\lambda^3-\mu^3)^2}. \qquad (\lambda>\mu)$$

Procedendo come nel I caso del § 2, il lettore potrà verificare, studiando la curva $x^3-y^3=xy$, le cui coordinate hanno la espressione parametrica precedente, che non esistono soluzioni intere.

E qui facciamo punto, poichè il nostro scopo era solo di applicare il procedimento geometrico, indicato in principio di questo lavoro, allo studio di qualche problema d'analisi indeterminata di grado superiore, che potesse avere qualche interesse aritmetico.

Roma, 5 novembre 1906.

DOTT. GIULIO BISCONCINI.

EQUAZIONI A RADICI IN PROGRESSIONE ARMONICA

Nelle considerazioni che seguono studieremo quelle equazioni di grado n le cui radici costituiscono una progressione armonica di 1° ordine, cioè son tali che le loro inverse costituiscono una progressione aritmetica di ordine uno. Se

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (1)$$

è una tale equazione, la sua trasformata mediante la sostituzione $x = \frac{1}{y}$ cioè

$$\varphi(y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_1 y + 1 = 0 \qquad (2)$$

ammetterà le radici in progressione aritmetica di ordine uno, cioè della forma

$$y_1 = a, \quad y_2 = a + d, \quad y_3 = a + 2d, \ldots y_n = a + (n-1)d \qquad (2^*)$$

e non resta quindi che applicare le formule risolutive date dal Sig. Cortesi nel fasc. IV Anno XVIII di questo periodico deducendone che le radici della (1) quando sono in progressione armonica d'ordine uno son date dalle formule

$$x_i = \left[-\frac{a_{n-1}}{n a_n} - \frac{1}{n a_n} \sqrt{\frac{3(n-1)^2 a^2_{n-1} - 6n(n-1) a_{n-2} a_n}{n+1}} + \right.$$
$$\left. + \frac{2(i-1)}{n a_n} \sqrt{\frac{3(n-1) a^2_{n-1} - 6n a_{n-2} a_n}{n^2 - 1}} \right]^{-1} (i = 1, 2, \ldots n). \qquad (2^{**})$$

Come si vede, mediante la semplice considerazione della trasformata (2), lo studio delle equazioni a radici in progressioni armoniche si riduce a quello, già stato fatto, delle equazioni a radici in progressioni aritmetiche ed in riguardo al criterio per discernere le equazioni che ci occupano non resta dunque che ripetere quanto è stato detto dal Sig. Cortesi nel lavoro citato, senonchè, crediamo utile, almeno per la parte teorica esporre le considerazioni seguenti.

Se la (2) ammette per radici le quantità (2*), la sua trasformata mediante la sostituzione $y = z - \frac{a_{n-1}}{n a_n}$ cioè la equazione

$$\psi(z) = a_n z^n + \frac{1}{1!} \varphi^{(1)}\left(-\frac{a_{n-1}}{n a_n}\right) z^{n-1} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}\left(-\frac{a_{n-1}}{n a_n}\right) z + \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}\left(-\frac{a_{n-1}}{n a_n}\right) = 0 \qquad (3)$$

ammetterà per radici

$$z_1 = a + \frac{a_{n-1}}{n\,a_n}, \quad z_2 = a + d + \frac{a_{n-1}}{n\,a_n}, \dots$$
$$\dots z_{n-1} = a + (n-2)\,d + \frac{a_{n-1}}{n\,a_n}, \quad z_n = a + (n-1)\,d + \frac{a_{n-1}}{n\,a_n}$$

cioè, poichè $-\frac{a_{n-1}}{n\,a_n}$ è eguale alla media aritmetica delle radici della (2), epperò uguale ad $a + \frac{n-1}{2}\,d$,

$$z_1 = -\frac{n-1}{2}d, \; z_2 = -\frac{n-3}{2}\,d, \dots \; z_{n-1} = \frac{n-3}{2}\,d, \; z_n = \frac{n-1}{2}\,d \quad (3^*)$$

le quali costituiscono una progressione aritmetica più semplice della (2*) in quanto che non compare la a. Viceversa, se la (3) ammette per radici le (3*), la (2) ammetterà radici in progressione aritmetica epperò la (1) in progressione armonica, perchè le radici y non sono altro che le (3*) aumentate di $a + \frac{n-1}{2}\,d$.

Noi esprimeremo dunque in quel che segue le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la (3) ammetta per radici le quantità (3*), e con ciò avremo anche espresso le condizioni perchè la (1) ammetta radici in progressione armonica. Debbono perciò essere soddisfatte le condizioni:

$$\psi\left(-\frac{n-1}{2}\,d\right)=0, \; \psi\left(-\frac{n-3}{2}\,d\right)=0, \dots \psi\left(\frac{n-3}{2}\,d\right)=0, \; \psi\left(\frac{n-1}{2}\,d\right)=0$$

cioè

$$\psi_1 = \left(-\frac{n-1}{2}\right)^n a_n d^n + \frac{1}{1!}\varphi^1\left(-\frac{a_{n-1}}{n\,a_n}\right)\left(-\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} d^{n-1} + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}\left(-\frac{a_{n-1}}{n\,a_n}\right)\left(-\frac{n-1}{2}\right) d + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}\left(-\frac{a_{n-1}}{n\,a_n}\right) = 0$$

$$\psi_2 = \left(-\frac{n-3}{3}\right)^n a_n d^n + \frac{1}{1!}\varphi^1\left(-\frac{a_{n-1}}{n\,a_n}\right)\left(-\frac{n-3}{3}\right)^{(n-1)} d^{n-1} + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}\left(-\frac{a_{n-1}}{n\,a_n}\right)\left(-\frac{n-3}{2}\right) d + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}\left(-\frac{a_{n-1}}{n\,a_n}\right) = 0$$

. . . .

$$\psi_{2n-1} = \left(\frac{n-1}{2}\right)^n a_n d^n + \frac{1}{1!}\varphi^1\left(-\frac{a_{n-1}}{n\,a_n}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1} d^{n-1} + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}\left(-\frac{a_{n-1}}{n\,a_n}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right) d + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}\left(-\frac{a_{n-1}}{n\,a_n}\right) = 0$$

Le equazioni $\psi_1(d) = 0$, $\psi_2(d) = 0, \dots \psi_n(d) = 0$ debbono ammettere dunque tutte una radice comune d. Considerandole due a due occorre e basta perciò che per

$$n = 2p$$

il geminante della $\psi_1 = 0$ coincida con la risultante delle $\psi_1 = 0$, $\psi_3 = 0$, il geminante della $\psi_3 = 0$ coincida con la risultante delle $\psi_3 = 0$, $\psi_5 = 0$

. . . .

il geminante della $\psi_{1+2(p-2)} = 0$ coincida con la risultante delle

$$\psi_{1+2(p-2)} = 0, \quad \psi_{1+2(p-1)} = 0.$$

$$n = 2p + 1$$

il geminante della $\psi_1 = 0$ coincida con la risultante delle $\psi_1 = 0$, $\psi_3 = 0$, il geminante della $\psi_3 = 0$ coincida con la risultante delle $\psi_3 = 0$, $\psi_5 = 0$

. . . .

il geminante della $\psi_{1+2(p-2)} = 0$ coincida con la risultante delle

$$\psi_{1+2(p-2)} = 0, \quad \psi_{1+2(p-1)} = 0;$$

dipiù deve essere verificata la condizione $\psi_0 = 0$ cioè

$$\varphi^{(n)}\left(-\frac{a_{n-1}}{n\,a_n}\right) = 0 \text{ cioè } a_n = 0.$$

In ciò consistono dunque le condizioni necessarie e sufficienti perchè la (1) ammetta radici in progressione armonica.

Applicazioni.

1ª. Consideriamo ora in particolare l'equazione di 3° grado

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0. \tag{4}$$

La sua trasformata mediante la sostituzione $x = \frac{1}{y}$ è

$$a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + 1 = 0 \tag{5}$$

e la trasformata di questa mediante la sostituzione $y = z - \frac{a_2}{3a_3}$ è

$$\psi(z) = a_3 z^3 + \left(a_1 - \frac{a_2^2}{3a_3}\right) z + \frac{2a_2^3 - 9a_1a_2a_3 + 27a_3^2}{27a_3^2} = 0,$$

la quale deve ammettere per radici le quantità d, o $-d$. Dunque anzitutto $2a_2^3 - 9a_1a_2a_3 + 27a_3^2 = 0$.

Esprimendo poi le condizioni $\psi(d) = 0$, $\psi(-d) = 0$, si ritrova la stessa condizione; ciò che è ben naturale perchè tre quantità per far parte di una progressione armonica o aritmetica debbono soddisfare ad una sola condizione. Le formule risolutive dedotte dalla (2**) relative al caso in quistione sono:

$$x_1 = \frac{-3a_3}{a_2 + \sqrt{3a_2^2 - 9a_1a_3}}$$

$$x_2 = \frac{3a_3^2}{-3a_2a_3 + (1 - 3a_3)\sqrt{3a_2^2 - 9a_1a_3}}$$

$$x_3 = \frac{9a_3^2}{-3a_2a_3 + (2 - 3a_3)\sqrt{3a_2^2 - 9a_1a_3}}.$$

Questa quistione è quella proposta dal sig. Occhipinti nel fasc. V Anno VIII, pag. 78. *Suppl. al Period. di Matem.*

2ª. Consideriamo l'equazione di 4° grado

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

trasformandola con la sostituzione $x = \frac{1}{y}$ si ottiene subito,

$$a_4 y^4 + a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + 1 = 0.$$

Formiamo ora la trasformata di questa ultima mediante la sostituzione $y = z - \frac{a_3}{4a_4}$. Questa trasformata è

$$\psi(z) = z^4 + \frac{4^2 a_2 a_4 - 6a_3^2}{4^2 a_4^2} z^2 + \frac{2a_3^3 - 8a_2 a_3 a_4 + 4^2 a_1 a_4^2}{4^2 a_4^3} z +$$
$$+ \frac{4^2 a_2 a_3^2 a_4 + 4^4 a_4^3 - 4^3 a_2 a_3 a_4^2 - 3a_3^4}{4^4 a_4^4} = 0,$$

la quale deve ammettere per radici

$$z_1 = -\frac{3}{2} d, \quad z_2 = -\frac{1}{2} d, \quad z_3 = \frac{1}{2} d, \quad z_4 = \frac{3}{2} d.$$

Perciò ponendo per brevità

$$A_1 = \frac{4^2 a_2 a_4 - 6a_3^2}{4^2 a_4^2}, \qquad A_2 = \frac{2a_3^3 - 8a_2 a_3 a_4 + 4^2 a_1 a_4^2}{4^2 a_4^3},$$
$$A_3 = \frac{4^2 a_2 a_3 a_4 + 4^4 a_4^3 - 4^3 a_2 a_3 a_4^2 - 3a_3^4}{4^4 a_4^4},$$

debbono essere soddisfatte contemporaneamente le quattro equazioni

$$\frac{3^4}{2^4} z^4 + \frac{3^2}{2^2} A_1 z^2 + \frac{3}{2} A_2 z + A_3 = 0$$
$$\frac{3^4}{2^4} z^4 + \frac{3^2}{2^2} A_1 z^2 - \frac{3}{2} A_2 z + A_3 = 0$$
$$\frac{1}{2^4} z^4 + \frac{1}{2^2} A_1 z^2 + \frac{1}{2} A_2 z + A_3 = 0$$
$$\frac{1}{2^4} z^4 + \frac{1}{2^2} A_1 z^2 - \frac{1}{2} A_2 z + A_3 = 0,$$

che con calcoli semplici possiamo sostituire con le seguenti

$$\frac{3^4}{2^4} z^4 + \frac{3^2}{2^2} A_1 z^2 + \frac{3}{2} A_2 z + A_3 = 0$$
$$18A_1 z^2 + 13A_2 z + 80A_3 = 0$$
$$18A_1 z^2 - 14A_2 z + 80A_3 = 0$$
$$A_2 z \qquad = 0.$$

Dunque $A_2 = 0$; con ciò le equazioni 2ª e 3ª di quest'ultimo sistema diventano identichè alla $18A_1 z^2 + 80A_3 = 0$; ed eliminando z fra questa e la $\frac{3^4}{2^4} z^4 + \frac{3^2}{2^2} A_1 z^2 + A_3 = 0$ risulta $100A_3 = 9A_1^2$.

Dunque le condizioni necessarie e sufficienti affinchè l'equazione generale del 4° grado abbia le radici in progressione armonica sono:

$$4^2 a_2 a_3 a_4 + 4^4 a_4^3 - 4^3 a_2 a_3 a_4^2 - 3a_3^4 = 0$$

$$100\,(4^2 a_2 a_3^2 a_4 + 4^4 a_4^3 - 4^3 a_2 a_3 a_4^2 - 3a_3^4) = 9\,(4^2 a_2 a_4 - 6a_3^2)^2.$$

Le formule risolutive che si riferiscono al caso in discorso sono:

$$x_i = \frac{4a_4}{-a_3 + 2(i-1)\sqrt{\dfrac{9a_3^2 - 24a_2a_4}{15}} - \sqrt{\dfrac{27a_3^2 - 72a_2a_4}{5}}}\,.$$

GIUSEPPE PASTA.

SULL'EQUAZIONE CARATTERISTICA DELLA FUNZIONE $\varphi(m)$ DI GAUSS

È molto noto (1) che, se i numeri naturali $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_\nu$ rappresentano tutti i divisori del numero naturale m, compresi 1 ed m, e se la funzione φ verifica l'equazione

$$m = \sum_{i=1}^{\nu} \varphi(\delta_i), \tag{1}$$

avremo per $\varphi(m)$ l'espressione

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_n}\right). \tag{2}$$

dove $p_1, p_2, \ldots, p_n$ rappresentano tutti i divisori *primi* di m, l'unità non compresa. È noto (2) che la formula (2) fornisce il numero dei numeri naturali primi con m e non superiori a m.

La proprietà, secondo la quale la (2) è conseguenza della (1) è, come abbiamo detto, una proprietà nota, e la dimostrazione del Bachmann è molto pregevole, perchè ivi si deduce questa da un'altra più generale: tuttavia credo che all'attenzione dei nostri studenti sarà più lieve la dimostrazione, intuitiva e facile, che ora esporremo.

CASO 1°. — Se p rappresenta un arbitrario numero primo, tutti i divisori di p saranno 1 e p. Secondo l'ipotesi espressa dalla formula (1), dobbiamo avere

$$\varphi(1) + \varphi(p) = p.$$

Ma possiamo notare subito che dalla (1) risulta direttamente $\varphi(1) = 1$, dunque ricaviamo $\varphi(p) = p - 1$, o anche

$$\varphi(p) = p\left(1 - \frac{1}{p}\right). \tag{3}$$

Ciò è conforme alla (2).

(1) P. es. BACHMANN, *Teoria della divisione del cerchio*. Lez. 2ª.

(2) Vedere p. es. DIRICHLET-DEDEKIND, *Teoria dei numeri*. Cap. I.

Caso 2°. — Noi vogliamo procedere per induzione: ammettiamo che, per un arbitrario numero primo p, valgano già, insieme colla (3), anche le altre relazioni

$$\left.\begin{aligned} \varphi(p^2) &= p^2\left(1-\frac{1}{p}\right) \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi(p^{\pi-2}) &= p^{\pi-2}\left(1-\frac{1}{p}\right) \\ \varphi(p^{\pi-1}) &= p^{\pi-1}\left(1-\frac{1}{p}\right) \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

dove π denota un arbitrario numero naturale.

Tutti i divisori della successiva potenza p^π sono $1, p, p^2, \dots, p^\pi$. Se dunque adoperiamo la relazione già dimostrata (3), o la sua equivalente $\varphi(p) = p-1$, e le (4), anch'esse liberate dalla frazione $\frac{1}{p}$, otteniamo, secondo l'ipotesi espressa da (1),

$$\begin{aligned} p^\pi &= 1 + p - 1 + p(p-1) + \dots + p^{\pi-2}(p-1) + \varphi(p^\pi) \\ &= 1 + (p-1)\frac{p^{\pi-1}-1}{p-1} + \varphi(p^\pi) = p^{\pi-1} + \varphi(p^\pi). \end{aligned}$$

Se ne ricava

$$\varphi(p^\pi) = p^\pi\left(1-\frac{1}{p}\right), \tag{5}$$

ed anche questa formula, dimostrata dunque col procedimento d'induzione, è contenuta nella (2).

Caso 3°. — Ora noi supponiamo che il numero naturale a, arbitrario, abbia in tutto i μ divisori $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_\mu = a$. Se moltiplichiamo a per $p^{\pi-1}$, dove p denota un arbitrario numero primo, non contenuto fra i divisori di a, e π un arbitrario numero naturale, il prodotto $ap^{\pi-1}$ avrà anche i divisori $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$, e poi altri, dovuti alla presenza di p: chiamiamo $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_\sigma$ tutti i divisori del numero $ap^{\pi-1}$. Se invece moltiplichiamo a per p^π, il prodotto ap^π avrà i divisori $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots \beta_\sigma$, perchè il suo divisore $ap^{\pi-1}$ li possiede, ma avrà ancora i divisori $\alpha_1 p^\pi = p^\pi, \alpha_2 p^\pi, \alpha_3 p^\pi \dots \alpha_\mu p^\pi = ap^\pi$, e non altri, come è chiaro. Dalla (1) ricaviamo dunque

$$ap^\pi = \sum_{i=1}^{\sigma} \varphi(\beta_i) + \sum_{i=1}^{\mu} \varphi(\alpha_i p^\pi).$$

Ammettiamo, dopo ciò, che per ogni divisore α di a, tranne che per $\alpha_\mu = a$, sia stabilita la relazione

$$\varphi(\alpha p^\pi) = \varphi(\alpha)\,\varphi(p^\pi); \tag{7}$$

la quale, se p. es. a fosse un numero primo, si ridurrebbe all'identità $\varphi(p^\pi) = \varphi(p^\pi)$, perchè non esisterebbe altro α che $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = a$.

Ammessa dunque la (7) per ogni α che non sia lo stesso a, la (6) fornisce, con richiamo della (1),

$$ap^\pi = ap^{\pi-1} + \varphi(p^\pi)\sum_{i=1}^{\mu-1}\varphi(\alpha_i) + \varphi(\alpha_\mu p^\pi)$$
$$= ap^{\pi-1} + \varphi(p^\pi)\,[a - \varphi(a)] + \varphi(ap^\pi).$$

Se ne trae

$$ap^\pi\left(1 - \frac{1}{p}\right) - a\varphi(p^\pi) = -\,\varphi(a)\,\varphi(p^\pi) + \varphi(ap^\pi).$$

Ma il primo membro è nullo per la (5), dunque otteniamo

$$\varphi(ap^\pi) = \varphi(a)\,\varphi(p^\pi). \qquad (8)$$

Così rimane stabilito che avendo ammesso la (7) per ogni divisore di a che sia diverso da a, risulta l'analoga (8) anche per a. Rimane dunque provata la (8) per un numero *primo* arbitrario a, poi per un numero a che sia prodotto di due numeri primi, e poi successivamente per ogni numero a, comunque sia complicata la successione dei suoi fattori: si può dire anche qui che il ragionamento d'induzione dimostra la generale validità della (8). Ma, ammessa la (8), abbiamo terminato, perchè un arbitrario numero naturale m può mettersi nella forma $m = p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} p_3^{\pi_3} \dots p_n^{\pi_n}$, dove $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ siano numeri primi, e $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n$ numeri naturali. Applicando ripetutamente la (3), troviamo

$$\varphi(m) = \varphi(p_1^{\pi_1})\,\varphi(p_2^{\pi_2})\,\varphi(p_3^{\pi_3}) \dots \varphi(p_n^{\pi_n}),$$

e, da ciò, per la (5)

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_n}\right).$$

In modo molto elementare si è dunque dedotta generalmente la (2) dalla (1). La successione di idee impiegata per giungervi ci pare intuitiva e spontanea.

LUCIANO ORLANDO.

Messina, novembre, 1906.

SOPRA LA QUISTIONE 718

Conservando le notazioni e gli assi coordinati, del sig. Pasta, si ha per l'equazione della retta simmetrica di x rispetto alla tangente che fa l'angolo acuto α con x

$$y = -\left(x - \frac{r}{\operatorname{sen}\alpha}\right)\operatorname{tg} 2\alpha,$$

ovvero

$$2\operatorname{sen} 2\alpha + y\cos 2\alpha = 2r\cos\alpha. \qquad (1)$$

La derivata di questa equazione rispetto ad α è

$$x \cos 2\alpha - y \operatorname{sen} 2\alpha = - r \operatorname{sen} \alpha. \tag{2}$$

Risolvendo le (1) e (2) rispetto ad x, y si ha

$$x = r \operatorname{sen} \alpha \, (3 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha), \tag{3}$$
$$y = 2r \cos^3 \alpha. \tag{4}$$

Se si pone $\tan \frac{1}{2} \alpha = 2$, da queste formule si vede che l'inviluppo è una curva unicursale di 6° grado. Eliminando α fra le (3) e (4) si ha l'equazione dell'inviluppo

$$4\,(x^2 + y^2 - r^2)^3 = 27 r^4 y^2. \tag{5}$$

Questo è dunque l'epicicloide a due regressi, generato da un punto d'un circolo di raggio $\frac{1}{2} r$, che rotola sopra un circolo c di raggio r.

Osservazioni. — 1ª Si vede anche che la curva (5) è la caustica per riflessione del circolo concentrico a c e di raggio $2r$ per i raggi paralleli ad x.

2ª L'area del circolo (5) è $3\pi r^2$, cioè il triplo dell'area di c.

3ª *Generalizzazione.* Se invece del circolo c si dà l'ellisse

$$b x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$$

si trova che l'inviluppo è una sestica unicursale avente per area

$$u = \frac{2\pi b\,(a^2 + b^2 + ab)}{a + b}.$$

E. N. Barisien.

Lo inviluppo che forma oggetto della quistione 718 (v. pag. 89) è semplicemente una epicicloide bicuspidale e, conservando le notazioni usate nella risoluzione del sig. Pasta, ha per equazione

$$4\,(x^2 + y^2 - r^2)^2 = 27 r^4 y^2.$$

Gli inviluppi delle rette simmetriche di una retta fissa d rispetto alle tangenti di una curva piana C, coincidono con *gl'inviluppi dei cerchi tangenti a* d *ed aventi i centri su* C; e sono pure *i luoghi dei fuochi delle parabole che toccano* C *ed hanno la retta* d *per direttrice.* Io ripetutamente mi sono occupato in questo Periodico (1) e altrove di questi inviluppi, e ne ho anche esposta la teoria in due Note inserite nell'*Intérmédiaire des Mathématiciens* (fasc. 1° e 2° del t. XIII, anno 1906, p. 22-24 e 40-44). Il caso particolare considerato nella quistione 718 del sig. Barisien è, in sostanza, identico con la prima parte della quistione 667 delle *Nouvelles Annales* (serie 2ª, t. II, an. 1863) proposta dal Catalan e risoluta (ibid., an. 1864, p. 261-264) dai sigg. Mansion e De Marsilly, mediante considerazioni puramente geometriche. Una semplice risoluzione analitica è la seguente. Si tratta di determinare lo inviluppo del cerchio

$$F(x, y, \alpha, \beta) \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 = 0, \tag{1}$$

tangente all'asse delle x, il cui centro (α, β) descrive il cerchio

$$f(\alpha, \beta) \equiv \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0. \quad (1)$$

(1) Cfr. le quistioni 380, 381, 382, 401, 406, e la nota a pag. 163-164 del t. XV di questo Periodico, nella quale trovansi altre indicazioni bibliografiche su questo argomento.

Denotando con λ un moltiplicatore indeterminato, dalle

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}+\lambda\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)=(1+\lambda)\,\alpha-x=0$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \beta}+\lambda\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)=\lambda\beta-y=0,$$

abbiamo

$$\alpha=\frac{x}{1+\lambda}, \qquad \beta=\frac{y}{\lambda},$$

e, sostituendo nelle (1), (2)

$$\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda^2}y^2=-\frac{\lambda x^2}{\lambda-2}$$
$$\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda^2}y^2+x^2=r^2(1+\lambda)^2,$$

dalle quali

$$2x^2=r^2(2-\lambda)(1+\lambda)^2$$
$$\lambda^3x^2=(2-\lambda)(1+\lambda)^2y^2, \tag{3}$$

e da queste

$$\lambda^3=\frac{2y^2}{r^2}; \tag{4}$$

la (3) può scriversi

$$\lambda^3(x^2+y^2)-2y^2=3\lambda y^2,$$

e, avuto riguardo alla (4), dopo soppresso il fattore y^2,

$$2(x^2+y^2-r^2)=3\lambda r^2$$

da questa si ricava facilmente

$$4(x^2+y^2-r^2)^3=27r^4y^2.$$

V. Retali.

RISOLUZIONE DELLA QUISTIONE 662

662. *Sopra una retta* r *sono dati due punti fissi* A_1, A_2 *ed un punto mobile* M. *Costruiti i circoli* c_1, c_2 *di diametri* A_1M, MA_2 *aventi per centri i punti* C_1, C_2 *si domanda:*

1° *il luogo dei punti d'incontro delle tangenti condotti da* A_1 *a* c_2 *con le tangenti condotte da* A_2 *a* c_1;

2° *il luogo dei punti d'incontro delle tangenti condotte da* C_1 *a* c_2 *colle tangenti condotte da* C_2 *a* c_1;

3° *il luogo dei punti d'incontro delle tangenti condotte da* A_1 *al circolo di centro* A_2 *e raggio* A_2M *colle tangenti condotte da* A_2 *al circolo di centro* A_1 *e raggio* A_1M.

Si faccia uno studio di queste curve.

Fumagalli.

Risoluzione. — Di questo problema non essendoci pervenuta alcuna risoluzione, diamo oggi la rappresentazione analitica delle curve proposte.

1. Presi per asse x la retta A_1A_2 e per asse y la perpendicolare ad A_1A_2 nel suo punto di mezzo O, si ponga $A_1A_2 = 2a$, ossia $A_1O = OA_2 = a$. Si avrà quindi

$$C_1C_2 = \tfrac{1}{2} A_1A_2 = r_1 + r_2 = a$$

e per conseguenza in valore assoluto

$$OC_1 = OA_1 - C_1A_1 = a - r_1 = r_2, \qquad A_1C_2 = a + r_1$$
$$OC_2 = OA_2 - C_2A_2 = a - r_2 = r_1, \qquad A_2C_1 = a + r_2.$$

S'indichino con B_1, B_2 i punti di contatto delle tangenti condotte da A_2 a c_1 e da A_1 a c_2, con P il punto d'incontro delle rette A_2B_1, A_1B_2 e con H la proiezione di P sull'asse delle x.

Dalle coppie di triangoli simili A_1PH, $A_1C_2B_2$ e A_2PH, $A_2B_1C_1$ si ha

$$\frac{HP}{A_1P} = \frac{C_2B_2}{A_1C_2}, \qquad \frac{HP}{A_2P} = \frac{C_1B_1}{A_2C_1},$$

ossia (essendo x, y le coordinate di P) elevando al quadrato

$$\frac{y^2}{(a+x)^2 + y^2} = \left(\frac{r_2}{a + r_1}\right)^2, \qquad \frac{y^2}{(a-x)^2 + y^2} = \left(\frac{r_1}{a + r_2}\right)^2. \tag{1}$$

Per avere l'equazione della curva basta eliminare r_1, r_2 tra le (1) e la

$$r_1 + r_2 = a. \tag{2}$$

A tale uopo osserviamo che le (1) si possono scrivere sotto la forma

$$\begin{cases} y^2(a + r_1)^2 = r_2^2[(a+x)^2 + y^2] \\ y^2(a + r_2)^2 = r_1^2[(a-x)^2 + y^2], \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 2ay^2(a + r_1 - r_2) = r_2^2(a+x)^2 \\ 2ay^2(a + r_2 - r_1) = r_1^2(a-x)^2, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 4ar_1y^2 = r_2^2(a+x)^2 \\ 4ar_2y^2 = r_1^2(a-x)^2. \end{cases}$$

Se ora poniamo

$$r_1 = a\cos^2\varphi, \qquad r_2 = a\,\mathrm{sen}^2\varphi,$$

resta verificata la (2), cosicchè per avere l'equazione della curva non resta che eliminare φ fra le equazioni

$$\begin{cases} 4y^2\cos^2\varphi = (a+x)^2\,\mathrm{sen}^4\varphi \\ 4y^2\,\mathrm{sen}^2\varphi = (a-x)^2\cos^4\varphi, \end{cases} \tag{3}$$

che si deduce dalle precedenti colla trasformazione indicata, e che successivamente si trasformano nel modo seguente.

Dalle (3) si deduce

$$\begin{cases} 2y\cos\varphi = (a+x)\,\mathrm{sen}^2\varphi \\ 2y\,\mathrm{sen}\,\varphi = (a-x)\cos^2\varphi \end{cases} \tag{4}$$

Da questa dividendo la seconda per la prima si trae

$$\frac{a-x}{a+x} = \frac{\mathrm{sen}^3\varphi}{\cos^3\varphi}, \tag{5}$$

da cui

$$x = a\,\frac{\cos^3\varphi - \mathrm{sen}^3\varphi}{\cos^3\varphi + \mathrm{sen}^3\varphi};$$

sommando le stesse equazioni (4) moltiplicate per $\cos^2\varphi$ e $\operatorname{sen}^2\varphi$, rispettivamente, si ha

$$y(\cos^3\varphi + \operatorname{sen}^3\varphi) = a\operatorname{sen}^2 y \,.\, \cos^2\varphi;$$

perciò la rappresentazione parametrica della curva è

$$\begin{cases} x = a\,\dfrac{\cos^3\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi}{\cos^3\varphi + \operatorname{sen}^3\varphi} \\ y = a\,\dfrac{\operatorname{sen}^2\varphi \,.\, \cos^2\varphi}{\cos^3\varphi + \operatorname{sen}^3\varphi}\,. \end{cases} \tag{6}$$

Dalla (5) si ricava

$$\tan\varphi = \frac{(a-x)^{\frac{1}{3}}}{(a+x)^{\frac{1}{3}}},$$

e quindi

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{(a-x)^{\frac{1}{3}}}{\{(a-x)^{\frac{2}{3}} + (a+x)^{\frac{2}{3}}\}^{\frac{1}{2}}}, \qquad \cos\varphi = \frac{(a+x)^{\frac{1}{3}}}{\{(a-x)^{\frac{2}{3}} + (a+x)^{\frac{2}{3}}\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Sostituendo questi valori per es. nella prima delle (4) si ha

$$\frac{2y(a+x)^{\frac{1}{3}}}{\{(a-x)^{\frac{2}{3}} + (a+x)^{\frac{2}{3}}\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{(a+x)(a-x)^{\frac{2}{3}}}{(a-x)^{\frac{2}{3}} + (a+x)^{\frac{2}{3}}}$$

ovvero

$$2y\{(a-x)^{\frac{2}{3}} + (a+x)^{\frac{2}{3}}\}^{\frac{1}{2}} = (a+x)^{\frac{2}{3}}(a-x)^{\frac{2}{3}}. \tag{7}$$

Questa è l'equazione della curva. Con successive trasformazioni essa diventa

$$4y^2\{(a-x)^{\frac{2}{3}} + (a+x)^{\frac{2}{3}}\} = (a+x)^{\frac{4}{3}}(a-x)^{\frac{4}{3}}$$

$$(4y^2)^3\left\{(a-x)^2 + (a+x)^2 + 3(a+x)^{\frac{2}{3}}(a-x)^{\frac{2}{3}}\,.\,\frac{(a+x)^{\frac{4}{3}}(a-x)^{\frac{4}{3}}}{4y^2}\right\} = (a+x)^4(a-x)^4$$

$$2^7y^6(a^2+x^2) + 3\,.\,2^4y^4(a^2-x^2)^2 - (a^2-x^2)^4 = 0. \tag{8}$$

La curva è dell'8° grado.

2. Conservando le notazioni precedenti s'indichino con B'_1, B'_2 i punti di contatto delle tangenti condotte da C_1 a c_2 e da C_2 a c_1, con P' il punto d'incontro di queste tangenti e con H' la proiezione di P' sull'asse delle x.

Dalla similitudine dei triangoli $C_1P'H'$, $C_1C_2B'_2$ e $C_2P'H'$, $C_2C_1B'_2$ si ricava

$$\frac{H'P'}{C_1H'} = \frac{C_2B'_2}{C_1C_2}, \qquad \frac{H'P'}{C_2H'} = \frac{C_1B'_1}{C_1C_2},$$

da cui (essendo x, y le coordinate di P')

$$\frac{y^2}{(r_2+x)^2+y^2} = \left(\frac{r_2}{a}\right)^2, \qquad \frac{y^2}{(r_1-x)^2+y^2} = \left(\frac{r_1}{a}\right)^2. \tag{9}$$

Basta eliminare r_1, r_2 fra le (9) e la

$$r_1 + r_2 = a \tag{10}$$

per avere l'equazione del luogo di P'. Il calcolo riesce assai laborioso. Invece è facile trovare la rappresentazione parametrica.

Le (9) si possono scrivere

$$\begin{cases} (a^2 - r_2^2)\,y^2 = r_2^2\,(r_2 + x)^2 \\ (a^2 - r_1^2)\,y^2 = r_1^2\,(r_1 - x)^2. \end{cases} \tag{11}$$

Se poniamo

$$\begin{cases} r_2 = a\cos^2\varphi \\ r_1 = a\operatorname{sen}^2\varphi, \end{cases}$$