Sui principî che servono a stabilire la definizione di massa

In questi ultimi anni i fondamenti della Meccanica razionale sono stati argomento di nuove meditazioni da parte del pubblico matematico. Nell'opera del Signor Enriques *Problemi della scienza* si troverà tutto un capitolo nel quale, con un indirizzo logico e con vedute originali, sono analizzati e discussi i principî della Meccanica. Il Signor Levi-Civita ha poi testè raccolto in un opuscolo autografato quella parte delle sue lezioni di Meccanica razionale che riguarda appunto i principî, offrendo una trattazione sistematica e completa dei concetti e dei postulati fondamentali della scienza meccanica.

Nelle recenti sedute della Società italiana di Fisica, promosse dal Signor Volterra, sono stati particolarmente discussi i metodi d'insegnamento dei principî della Meccanica, in specie per quel che concerne la definizione di massa ed i postulati che sono necessari per stabilirla in modo preciso. Mi preme di riprodurre in questo periodico quanto ho avuto occasione di esporre in quelle sedute, sembrandomi che, anche nei riguardi didattici, possano offrire interesse le conclusioni alle quali sono pervenuto.

***

L'esposizione classica dei principî della Meccanica è fondata sulla nozione di forza, che è generalmente definita *causa* del movimento o anche di tendenza al movimento, quando l'effetto della forza sia impedito o sospeso da un'altra causa (Poisson). Ma fu osservato già da Lazzaro Carnot, che la forza, quando venga definita come causa, può concepirsi solo in modo astratto come qualcosa di troppo vago ed oscuro, giacchè quella definizione essendo applicabile alle cause più diverse di equilibrio e di movimento, rimane del tutto indeterminata. E il Carnot stesso, nei suoi *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement,* pubblicati nel 1783, abbandona risolutamente il concetto metafisico di forza e riduce lo studio meccanico dei fenomeni ad una semplice teoria di " comunicazione di movimenti ", ossia ad una teoria cinematica del moto, precedendo a tanta distanza di tempo le idee del Mach, del Clifford e del Boltzmann. In una esposizione della meccanica, puramente deduttiva e logica, la forza è considerata come un ente analitico e sprovvisto di un vero carattere fisico: nella Dinamica si riassume lo studio fondamentale e la Statica è ridotta ad un caso particolare della Dinamica. Ma questa esposizione, appunto perchè prescinde dall'intuito, non riesce chiara e soddisfacente, ed è necessario, per quanto assai difficile, il sussidio dell'esperienza per stabilire i principî ammessi.

Si può però, senza bandire la nozione fisica di forza dai principi della Meccanica, introdurla fino dagli elementi della Statica come una nozione primitiva, precisando gli effetti delle forze, i soli cioè che si presentino alla percezione e all'osservazione dei nostri sensi, e rendendo quegli effetti numericamente paragonabili fra loro, per quanto diverse siano le cause che li producono. Così, ad esempio, nella Statica, la nozione *soggettiva* di forza può essere data da una pressione, da una tensione, da uno sforzo od anche da una sensazione di disagio, quando si voglia impedire che un corpo prenda un certo movimento.

Ebbene: senza indagare sulla natura intima della forza, si può, fondandosi sulle esperienze, stabilire staticamente la nozione di forza in modo così preciso da introdurla nei calcoli come un elemento numerico qualunque, dandone altresì un'immagine geometrica espressiva. Noi chiamiamo, infatti, *direzione* e *senso* di una forza, applicata ad un punto, la direzione e il senso secondo cui il punto prenderebbe a muoversi se fosse completamente libero ed in riposo. E siccome l'esperienza prova che il movimento del punto può essere impedito da una forza di senso opposto, si può stabilire il concetto di una certa forza uguale alla prima. Dalla uguaglianza si passa alla somma di due e quindi di un numero qualsiasi di forze e successivamente alla nozione di forza multipla di un'altra secondo un numero n. E poichè, conformemente all'esperienza, una pressione, uno sforzo qualsiasi può essere ripetuto con la tensione di un filo inestendibile, prodotta da un peso conveniente, si perviene alla misura statica delle forze. Una forza qualunque sarà così individuata dal punto d'applicazione, dalla direzione (con un certo senso) e da una lunghezza (intensità) riportata dal punto di applicazione sulla direzione della forza, la quale col suo rapporto all'unità di lunghezza dà il rapporto della forza a quella presa per unità.

La rappresentazione statica delle forze si ottiene dunque col sussidio di due esperienze, delle quali la prima (esperienza fondata sul movimento) stabilisce la direzione ed il senso della forza, e la seconda (esperienza statica) ci determina l'intensità (per mezzo di un peso, in un dato luogo). È utile però di osservare che se per la misura statica delle forze è necessario di ricorrere al movimento, non è tuttavia necessario di supporre nessuna relazione fra le forze ed i movimenti impressi, basta cioè di riconoscere i rapporti numerici delle forze. Invece, per stabilire i principî che conducono alla definizione di una massa, bisogna tener conto delle velocità prodotte dalle forze e stabilirne il rapporto, come ora vedremo.

I principî qui appresso elencati non sono altrettanti postulati: essi sono però formati nel modo e nell'ordine che mi sembrano più convenienti, dal punto di vista logico e didattico, per giungere alla definizione di massa nel senso *classico*. Naturalmente il numero di quei principî può essere aumentato o diminuito, secondo il punto dal quale si parte per lo svolgimento della Dinamica; ma io penso che anche le ragioni storiche abbiano la loro importanza, quando si vogliano stabilire con chiarezza i fondamenti d'una scienza che deve pur servire alla interpretazione dei fenomeni naturali.

***

1. Definizione. — Un punto materiale è una particella di materia tale che condotta una retta per un punto di essa, e in una direzione qualsivoglia, soltanto una porzione infinitesima della retta appartiene alla particella. Si può così ammettere, affinchè la velocità di un punto materiale abbia un significato preciso, che nel moto di esso le traiettorie descritte dai suoi diversi punti, si confondano in una curva unica.

2. Postulato d'inerzia. — Un punto materiale in quiete, sul quale non agisce alcuna forza, rimane in quiete. Se nessuna forza agisce sopra un punto materiale in movimento, il moto del punto sarà rettilineo ed uniforme, cioè a dire il punto materiale avrà un'accelerazione nulla.

Questo principio, che è un portato dell'intuito, dell'esperienza e di osservazioni sui corpi celesti, dichiara sostanzialmente che un punto materiale non ha in sè stesso l'attitudine a muoversi od a modificare il moto rettilineo ed uniforme che attualmente possiede, ossia che non può acquistare un'accelerazione se non per l'azione di altri punti materiali. Si ha così la nozione dinamica di forza, come un'*azione acceleratrice* che si esercita sopra un punto materiale per opera di altri punti materiali, e questa azione nasce, come mostra il complesso dei fenomeni naturali, dalle azioni che i corpi esercitano fra di loro. La forza è, quindi, fondata sul concetto cinematico ed *ogget-*

tivo di accelerazione, e noi rappresentiamo una forza con un vettore che ha per punto di applicazione il punto materiale, per direzione e senso la direzione e il senso dell'accelerazione e per intensità la misura statica della forza. Questa rappresentazione vettoriale dinamica della forza coincide con la rappresentazione statica che si ha quando il movimento del punto materiale sia impedito da un ostacolo o da altre forze.

3. Postulato. — Forze staticamente uguali producono, sopra uno stesso punto materiale, accelerazioni uguali.

4. Postulato: indipendenza degli effetti delle forze. — Più forze $F_1, F_2, \ldots$ (delle quali è nota la misura statica) imprimono separatamente ad uno stesso punto materiale le accelerazioni rappresentate rispettivamente dai vettori $j_1, j_2, \ldots$: la risultante statica delle forze $F_1, F_2, \ldots$ imprimerà allo stesso punto materiale un'accelerazione che è rappresentata dal vettore risultante dei vettori $j_1, j_2 \ldots$

5. Corollario: proporzionalità delle forze alle accelerazioni. — In particolare, se le forze F_1 ed F_2 sono eguali ad F, ed hanno lo stesso senso, ciascuna imprime al punto materiale un'accelerazione j (n. 3): quindi una forza 2F imprime allo stesso punto un'accelerazione $2j$. In maniera analoga la forza 3F imprimerebbe un'accelerazione tripla, $3j$, di quella impressa dalla forza F. E, in generale, se due forze sono fra loro nel rapporto di due numeri m ed n, ossia sono rappresentate da mF ed nF, le accelerazioni impresse staranno fra loro come $m:n$; cioè a dire: Le forze (misura statica) sono proporzionali alle accelerazioni che esse imprimono allo stesso punto materiale.

Si può riconoscere questa verità mediante l'esperienza, ad esempio, che si fa col piano inclinato, il quale permette di far variare a piacere la forza applicata ad uno stesso punto materiale e perciò di misurare rigorosamente le velocità impresse nello stesso tempo.

6. Definizione: massa di un punto materiale. — Per un punto materiale il n. 5 conduce all'equazione $\frac{F}{j} = \text{costante}$; indicando con m la costante, il valore numerico di m dipenderà esclusivamente dalle unità di forza e di lunghezza che si sono scelte. Ma fissate queste unità, F e j sono espresse da numeri e risulta un valore numerico determinato pel rapporto $\frac{F}{j}$, ossia per m. Orbene chiameremo *massa* di un punto materiale il coefficiente $\frac{F}{j}$, cioè il valore del rapporto fra la misura statica della forza applicata al punto e la misura dell'accelerazione impressa.

7. Corollario: masse eguali. — Se una forza F imprime ad un punto materiale l'accelerazione j, e una forza eguale F imprime ad

un secondo punto materiale l'accelerazione eguale j, avremo $\frac{F}{j}=m_1$, $\frac{F}{j}=m_2$; donde $m_1=m_2$. Noi diremo che due punti materiali hanno *masse eguali*, quando forze eguali imprimono ai due punti accelerazioni eguali.

Se una stessa forza F opera su due masse diverse m_1 ed m_2, dette j_1 e j_2 le accelerazioni corrispondenti, avremo $\frac{m_1}{m_2}=\frac{j_1}{j_2}$; cosicchè si può misurare una massa come rapporto di accelerazioni, riferendosi ad una massa unitaria.

8. Corollario: proprietà additiva delle masse. — Se due forze F_1 ed F_2 imprimono a due punti materiali di masse rispettive m_1 ed m_2 la stessa accelerazione j, la forza F_1+F_2 imprimerà al punto materiale m_1+m_2, che si ottiene dalla riunione dei due punti materiali m_1 ed m_2, ancora la stessa accelerazione j. Si ha, infatti, $\frac{F_1}{j}=m_1$, $\frac{F_2}{j}=m_2$; donde $\frac{F_1+F_2}{j}=m_1+m_2$.

***

Osserverò, circa l'ordine dei principi su esposti e l'importanza di ciascuno di essi, che il postulato dell'inerzia stabilisce il carattere fondamentale necessario *accelerativo* delle forze, altrimenti si potrebbe ammettere sia che un punto materiale soggetto ad una forza si muova di moto rettilineo ed uniforme, sia che un punto materiale non soggetto a forze acceleri il proprio movimento.

Questo postulato adunque, pur non essendo strettamente necessario per la *misura* delle masse, ha la ragion d'essere in un'esposizione dei principi della Dinamica che servono a stabilire la nozione di massa.

Il postulato del n. 3 permette di enunciare il principio della proporzionalità delle forze alle accelerazioni come conseguenza logica del principio di Galileo, sulla indipendenza delle forze. Questo ultimo principio si trova poi enunciato in una forma più generale di quella che sarebbe necessaria per la *misura* delle masse; basterebbe infatti supporre che le forze, le quali operano simultaneamente sul punto, avessero tutte la stessa direzione.

Il principio del n. 7 permette la sostituibilità, nel movimento, di di una certa massa con un'altra uguale, ma di materia diversa.

Infine il principio additivo delle masse, del n. 8, conduce alla misura della massa di un corpo qualunque che si consideri come un aggregato di punti materiali.

Per un ulteriore sviluppo della Dinamica (dopo i ricordati principi) si potrebbe invocare per la massa la proprietà invariantiva, rispetto allo spazio ed al tempo; ma questo attributo della massa non è necessario volendo limitarsi come abbiamo fatto, alla semplice misura.

Non occorre poi dire che ho potuto, appunto per lo scopo che mi era prefisso, fermarmi alla considerazione delle forze costanti.

***

Accennerò ora ai principî sui quali può fondarsi la definizione di massa, indipendentemente dalla nozione di forza.

Si è già notato che la prima idea (storicamente documentata) di bandire i termini di materia e di forza dalla terminologia scientifica, rimonta a Lazzaro Carnot, nel 1783. Recentemente il Mach ha voluto in modo preciso stabilire il concetto di massa, escludendo la nozione di forza e, quasi contemporaneamente al Mach, il Clifford, in un discorso tenuto alla " Royal Institution „, nel 1873, afferma che " nessun matematico può attribuire un significato qualsiasi al modo, con cui si discorre, di materia, di forza e d'inerzia, nei testi usuali di Meccanica „. Nell'opera del Clifford " The common sense of the exact sciences „ si troverà un capitolo sulle leggi del movimento e sulla massa, e inoltre vi si troverà svolta l'idea di ridurre tutta la Dinamica alla Cinematica.

Non credo si possa essere concordi nell'affermare che prevalgono ragioni scientifiche, didattiche e sperimentali per definire la massa secondo queste ultime vedute; piuttosto sembra prevalere il carattere metafisico della definizione del Mach e del Clifford, che oggi è adottata anche da testi importanti di Meccanica. È bene tuttavia mettere in confronto, con i principî esposti più innanzi, quelli che conducono alla moderna definizione di massa, e che io ripeterò qui appresso, modificando alquanto l'esposizione del Boltzmann.

I. Definizione di punto materiale (come quella data innanzi).

II. Postulato: equivalente al postulato d'inerzia. — Ogni punto materiale ha la proprietà d'indurre accelerazione su di un altro punto materiale, indipendentemente dalla posizione assoluta dei due punti nello spazio e dalla velocità di essi.

III. Postulato. — L'accelerazione di un punto materiale (1) verso un punto materiale (2) è sempre rivolta in senso opposto a quella di (2) verso (1). Se dunque j_{12} ha il senso $\overrightarrow{12}$ della congiungente i due punti, la j_{21} avrà il senso $\overrightarrow{21}$ della stessa congiungente: si dirà allora che i due punti materiali *si attraggono*. Se invece j_{12} ha il senso del prolungamento della congiungente (1) con (2), e precisamente il senso $\overrightarrow{21}$, la j_{21} avrà il senso del prolungamento stesso, secondo $\overrightarrow{12}$, e si dirà che i due punti materiali *si respingono*. Tenuta ragione del II principio, l'accelerazione j_{12}, che (2) induce su (1), si potrà rappresentare in valore assoluto con $F(r_{12})$, se r_{12} è la distanza dei due punti, e precisamente con $-F(r_{12})$ se i punti si attraggono e con $+F(r_{12})$ se i punti si respingono.

IV. Postulato: assimilabile al principio di uguaglianza della reazione all'azione. — Le due accelerazioni j_{12} e j_{21} stanno fra loro in un rapporto costante in tutti i tempi, e qualunque sia la distanza r_{12}; si ha cioè $\frac{j_{21}}{j_{12}} = k_2$, dove k_2 è una grandezza costante per la coppia di punti (1) e (2), e di più *positiva*. Quindi, nel caso dell'attrazione, $j_{12} = -F(r_{12})$, $j_{21} = -k_2 F(r_{12})$; nel caso della repulsione $j_{12} = +F(r_{12})$, $j_{21} = +k_2 F(r_{12})$.

V. Postulato di transitività. — Siano tre punti materiali (1), (2) e (3); diciamo r_{13} ed r_{23} le distanze fra (1) e (3) e fra (2) e (3). L'accelerazione j_{13} si può rappresentare (a parte il segne) con $\Phi(r_{13})$; l'accelerazione j_{31} si rappresenterà allora con $k_3 \Phi(r_{13})$; ebbene: l'accelerazione del secondo punto materiale verso il primo sta a quella del terzo verso il secondo nel rapporto costante $\frac{k_2}{k_3}$, talchè se $j_{23} = \psi(r_{13})$, (a parte il segno), si dovrà avere $j_{32} = \frac{k_3}{k_2} \psi(r_{23})$.

VI. Definizione di massa. — Indichiamo con m_1 un numero *qualunque* positivo, ma costante rispetto al tempo e ai luoghi, e poniamo

$$\frac{m_1}{m_2} = k_2, \qquad \frac{m_1}{m_3} = k_3;$$

avremo

$$\frac{j_{12}}{j_{21}} = \frac{1}{k_2} = \frac{m_2}{m_1};$$

donde

$$j_{12} \,.\, m_1 = j_{21} \,.\, m_2 .$$

Analogamente, avendosi,

$$\frac{j_{23}}{j_{32}} = \frac{k_2}{k_3} = \frac{m_3}{m_2};$$

risulterà

$$j_{23} \,.\, m_2 = j_{32} \,.\, m_3 .$$

Si ha così, per ciascun punto materiale, un numero determinato m, che chiamiamo *massa* di quel punto.

VII. Postulato: assimilabile al principio di Galileo sulla indipendenza delle forze. — Dati più punti materiali, l'accelerazione (considerata come vettore) di un punto qualunque del sistema, è la somma geometrica di $n-1$ accelerazioni (se n sono i punti materiali), di cui ciascuna ha la direzione della retta che va dal punto materiale considerato ad uno qualunque dei punti materiali residui.

Alla precedente definizione di massa, sempre cioè nell'ordine d'idee del Mach e del Clifford, si ricollega quella data dal Volterra (nelle lezioni di Meccanica razionale, a Pisa ed a Torino) movendo però dalla nozione statica di equilibrio e da quella d'un legame che stabilisce una distanza invariabile fra due punti materiali. Supposto quindi un sistema di due punti invariabilmente congiunti fra di loro e in equilibrio, si ammette:

a) che, soppresso il vincolo, le accelerazioni dei due punti siano opposte e dirette secondo la comune congiungente;

b) che le accelerazioni stiano fra di loro in ragione inversa di due numeri, ciascuno dei quali dipende solo dal punto corrispondente. Il numero corrispondente a ciascun punto, si chiamerà *massa* di quel punto.

Noterò infine che nè la definizione classica di massa, nè quella del Mach e del Clifford conducono ad una *misura* delle masse imponderabili, in quanto che le nostre esperienze si limitano (almeno attualmente, in modo preciso) alla misura delle accelerazioni assunte da masse *ponderabili*. Se avessimo, ad esempio, due pendolini perfettamente eguali ed elettrizzati, alla distanza r, dette rispettivamente $q=1$ e $q'=2$ le cariche elettriche, potremmo rappresentare la forza con $\frac{2}{r^2}$; inoltre le accelerazioni sarebbero espresse così: $j_1=\frac{2}{r^2}$, $j_2=\frac{2}{r^2}$ (accelerazioni delle masse ponderabili $m_1=1$, $m_2=1$); quindi $\frac{j_2}{j_1}=1$. Invece se, mantenendo invariate le cariche elettriche dei due pendolini, supponiamo $m_1=1$. $m_2=2$, la forza sarà ancora rappresentata da $\frac{2}{r^2}$; ma si avrà $j_1=\frac{2}{r^2}$, $j_2=\frac{\frac{2}{r^2}}{2}$, $\frac{j_2}{j_1}=\frac{1}{2}$.

Lucio Silla.

Roma, aprile 1907.

NUMERI INTERI, CHE SI POSSONO DECOMPORRE

nella somma o nella differenza dei quadrati di due numeri interi

(Continuazione e fine — v. fasc. precedente)

CAPITOLO IV.

Decomposizioni di un numero composto.

§ 11. Passiamo ora a trattare della decomposizione di un numero, che risulti come prodotto di potenze decomponibili alla lor volta in somme di quadrati.

Cominciamo col dimostrare il

Teorema. — *Le operazioni* (I), (II) *eseguite sul prodotto di più fattori, decomponibili nella somma di due quadrati, godono delle proprietà commutativa e associativa.*

Ci limiteremo per brevità, a dimostrare il teorema per l'operazione (I), poichè ugualmente si procederebbe per l'altra, o per le due operazioni combinate insieme.

Sia:

$$A = \{a, \overline{a}\}, \qquad B = \{b, \overline{b}\}, \qquad C = \{c, \overline{c}\}.$$

Applicando la (I) alle decomposizioni di A e B, si ha:

$$AB = \{ab - \overline{ab},\ a\overline{b} + \overline{a}b\}.$$

Applicando ancora la (I) a questa decomposizione di AB e a quella di C, si ha:

$$ABC = \{abc - \overline{ab}c - a\overline{bc} - \overline{a}b\overline{c},\ ab\overline{c} - \overline{abc} + a\overline{b}c + \overline{a}bc\}.$$

Associamo ora le decomposizioni date in altro ordine, p. es.: $\{a, \overline{a}\}$. $\{c, \overline{c}\}$, $\{b, \overline{b}\}$. Applicando, come prima, l'operazione (I), si avrà:

$$AC = \{ac - \overline{ac},\ a\overline{c} + \overline{a}c\}$$

e successivamente:

$$ACB = \{acb - \overline{ac}b - a\overline{cb} - \overline{a}c\overline{b},\ ac\overline{b} - \overline{acb} + a\overline{c}b + \overline{a}cb\}.$$

Dal confronto delle due decomposizioni ottenute pel prodotto ABC, risulta dimostrato il teorema per il caso del prodotto di tre fattori. Ciò basta però, com'è ovvio, per poter concludere ch'esso vale qualunque sia il numero dei fattori.

Vediamo ora subito un'applicazione di questo teorema.

Sia dato un numero A decomponibile nella somma di due quadrati. Esso avrà necessariamente (v. teor. § 3) la forma:

$$A = 2^{\lambda} P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_m^{\alpha_m} Q_1^{2\beta_1} Q_2^{2\beta_2} \dots Q_n^{2\beta_n},$$

ove i numeri P sono primi di tipo $4p+1$, e i numeri Q primi di tipo $4p-1$.

Cominciamo coll'osservare che il prodotto di quest'ultimi ammette la sola decomposizione eccezionale $\{Q_1^{\beta_1} Q_2^{\beta_2} \dots Q_n^{\beta_n}, 0\}$. (1)

In base al teorema del § 5, siamo certi di ottenere *tutte* le decomposizioni di A, operando colle (I) e (II) successivamente sulla decomposizione del numero $Q_1^{2\beta_1} Q_2^{2\beta_2} \dots Q_n^{2\beta_n}$ e su quelle degli altri fattori di A, considerando, naturalmente, ciascuno di questi tante volte quante sono le unità del relativo esponente. Applicando però il teorema precedente siamo fatti certi che le stesse decomposizioni si ottengono, cercando dapprima le decomposizioni delle diverse potenze di $2^{\lambda}, P_1^{\alpha_1}, P_2^{\alpha_2}, \dots, P_m^{\alpha_m}$, e operando poi mediante le (I) e (II) su queste decomposizioni e su quelle di $Q_1^{2\beta_1} Q_2^{2\beta_2} \dots Q_n^{2\beta_n}$ nell'ordine che si vuole.

Così, ad es., si potranno associare le decomposizioni di $P_1^{\alpha_1}$ a quelle di $P_2^{\alpha_2}$ ed ottenere tutte le decomposizioni di $P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2}$, a queste associare quelle di $P_3^{\alpha_3}$, e così di seguito fino ad ottenere le decomposizioni del prodotto $P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_m^{\alpha_m}$. Poi si potrà operare su queste e sull'unica decomposizione del prodotto dei rimanenti fattori. (2)

§ 12. Lemma. — *Se* $\{a, \bar{a}\}$ *è una decomposizione propria di un numero* A, *ciascuno dei due numeri* a *e* $\bar{a}$ *è primo con* A.

Supponendo infatti che, p. es. A ed a avessero un fattore comune, esso, in virtù della relazione $A = a^2 + \bar{a}^2$, dovrebbe dividere anche $\bar{a}$, e la decomposizione $\{a, \bar{a}\}$ non sarebbe propria.

Teorema. — *Se* $\{a, \bar{a}\}$, $\{b, \bar{b}\}$, $\{c, \bar{c}\}, \dots$ *sono decomposizioni proprie dei numeri* A, B, C ... *primi fra loro due a due, le decomposizioni, che si ottengono pel prodotto* ABC ... *operando colle* (I) *e* (II) *dapprima*

(1) Omettiamo la dimostrazione di questo asserto, perchè identica a quella usata nell'osserv. II del § 8 per dimostrare, che il numero $Q^{2\beta}$ ammette la sola decomposizione $\{Q^{\beta}, 0\}$.

(2) Questo prodotto ammette effettivamente un'unica decomposizione. Infatti, in virtù del teorema di questo paragrafo, per ottenere tutte le decomposizioni di $2^{\lambda} Q_1^{2\beta_1} Q_2^{2\beta_2} \dots Q_n^{2\beta_n}$, basta operare colle (I) e (II) sulle decomposizioni di 2^{λ} e del prodotto degli altri fattori. Ma 2^{λ} e questo prodotto ammettono ciascuno una sola decomposizione, e queste due decomposizioni sono di tale natura, che operando su esse colle (I) e (II) si ha una sola decomposizione (v. § 4), quindi il nostro asserto è provato.

sulle decomposizioni dei fattori A, B, *poi su quelle ottenute per* AB *e su quella di* C, *e così via, sono tutte proprie e distinte.*

Consideriamo, ad es., le decomposizioni:

$$\begin{cases} \{ab - \overline{a}\overline{b},\ a\overline{b} + \overline{a}b\}, \\ \{ab + \overline{a}\overline{b},\ a\overline{b} - \overline{a}b\} \end{cases} \tag{1}$$

del prodotto AB, ottenute operando sulle decomposizioni di A e B mediante le (I) e (II), e supponiamo che, p. es., la prima non sia propria.

Detto λ il m. c. d. dei suoi termini, si avrebbe:

$$ab - \overline{a}\overline{b} = \lambda m, \qquad a\overline{b} + \overline{a}b = \lambda m',$$

e quindi, quadrando e sommando:

$$AB = \lambda\,(m^2 + m'^2).$$

Questa relazione ci dice che, se i termini della decomposizione considerata ammettono un fattore comune, esso deve essere divisibile solo per fattori contenuti in A e B.

Ora dall'identità

$$(ab + \overline{a}\overline{b})\,(a\overline{b} + \overline{a}b) = (a^2 + \overline{a}^2)\,b\overline{b} + a\overline{a}\,(b^2 + \overline{b}^2)$$
$$= Ab\overline{b} + Ba\overline{a}$$

si ricava che il primo membro è divisibile per λ e quindi per certi fattori contenuti in A (o in B), mentre il secondo membro è la somma di due numeri il primo dei quali è divisibile solo per i fattori di A e l'altro solo per quelli di B (perchè, per il lemma precedente, a e $\overline{a}$ sono primi con A, e b e $\overline{b}$ sono primi con B). Siccome A e B sono primi fra loro, l'uguaglianza precedente è assurda. Perciò è assurda l'ipotesi fatta.

Lo stesso può ripetersi per la seconda decomposizione di AB.

Si comprende ora che, dimostrata la proprietà enunciata pel prodotto AB, essa risulta dimostrata in generale.

Infatti AB è un numero, per ipotesi, primo con C; le decomposizioni (1) di AB e quella di C sono proprie, quindi siamo ricondotti al caso del prodotto di due fattori nelle condizioni volute dal teorema.

Passiamo ora a dimostrare la seconda parte del teorema, e cioè che le decomposizioni considerate di ABC... sono tutte distinte.

Per l'ipotesi che sieno proprie le due decomposizioni $\{a, \overline{a}\}$, $\{b, \overline{b}\}$ di A e B, risultano distinte (§ 4) le decomposizioni (1) del prodotto AB.

La seconda parte del teorema sarà quindi dimostrata, se proveremo che, ammesso sieno tutte distinte le decomposizioni del prodotto P di un certo numero di fattori, sono pure tutte distinte quelle, che si ottengono operando su queste e sulla decomposizione data di un altro fattore.

Sieno $\{p_1, \overline{p}_1\}$, $\{p_2, \overline{p}_2\}$, $\{p_3, \overline{p}_3\}\ldots$ le decomposizioni di P ottenute secondo è indicato nel teorema. Essendo tutte proprie e distinte, potremo sempre supporre che sieno state scritte in modo che in ciascuna di esse il primo termine risulti maggiore del secondo, e che i primi termini si seguano in ordine decrescente, e, in conseguenza, i secondi procedano in ordine decrescente.

Varranno dunque le disuguaglianze:

$$\left\{\begin{array}{l} p_1 > \overline{p}_1, \quad p_2 > \overline{p}_2, \quad p_3 > \overline{p}_3 \ldots, \\ \qquad p_1 > p_2 > p_3 > \ldots, \\ \qquad \overline{p}_1 < \overline{p}_2 < \overline{p}_3 < \ldots, \end{array}\right. \tag{2}$$

Sia Q un altro dei numeri dati, $\{q, \overline{q}\}$ la sua decomposizione, scritta in modo che sia:

$$q > \overline{q}. \tag{3}$$

Prese, fra le date, due decomposizioni $\{p_r, \overline{p}_r\}$, $\{p_s, \overline{p}_s\}$ di P, e supposto $r < s$, operando su ciascuna di esse e sulla $\{q, \overline{q}\}$ mediante le (I) e (II), si ottengono pel prodotto PQ le quattro decomposizioni:

$$\begin{array}{l} \{p_r q - \overline{p}_r \overline{q},\ p_r \overline{q} + \overline{p}_r q\}, \\ \{p_r q + \overline{p}_r \overline{q},\ p_r \overline{q} - \overline{p}_r q\}, \\ \{p_s q - \overline{p}_s \overline{q},\ p_s \overline{q} + \overline{p}_s q\}, \\ \{p_s q + \overline{p}_s \overline{q},\ p_s \overline{q} - \overline{p}_s q\}. \end{array}$$

Per l'osservazione fatta nel § 4, la prima è distinta dalla seconda, e la terza dalla quarta. Resta dunque solo a vedere se la prima e la seconda possano coincidere con qualcuna delle altre due. Ci limiteremo a provare che la prima non può coincidere colla terza, perchè lo stesso ragionamento si dovrebbe ripetere nel fare gli altri confronti.

Poichè, in virtù delle (2) e (3) i numeri $p_r q - \overline{p}_r \overline{q}$, $p_s q - \overline{p}_s \overline{q}$ sono positivi, le due decomposizioni considerate coincidono se:

$$p_r q - \overline{p}_r \overline{q} = p_s q - \overline{p}_s \overline{q}, \tag{4}$$

ovvero se:

$$p_r q - \overline{p}_r \overline{q} = p_s \overline{q} + \overline{p}_s q. \tag{5}$$

Ma, in virtù delle disuguaglianze (2), $p_r q > p_s q$ e $\overline{p}_r \overline{q} < \overline{p}_s \overline{q}$; quindi l'uguaglianza (4) non può sussistere.

Ammesso che valga invece la (5) si ricava:

$$\frac{q}{\overline{q}} = \frac{\overline{p}_r + p_s}{p_r - \overline{p}_s}.$$

Siccome q e $\overline{q}$ sono, per ipotesi, numeri primi fra loro, esisterà un numero intero ρ tale che si avrà:

$$\overline{p}_r + p_s = \rho q, \qquad p_r - \overline{p}_s = \rho \overline{q}. \tag{6}$$

Di qua si ricava:

$$\rho\,(p_r q - \overline{p}_r \overline{q}) = p_r p_s + \overline{p}_r \overline{p}_s,$$
$$-\,\mathrm{P} + \rho\,(p_r \overline{q} + \overline{p}_r q) = -\,p_r \overline{p}_s + \overline{p}_r p_s.$$

Quadrando e sommando membro a membro, e tenendo presente che $\{p_r p_s + \overline{p}_r \overline{p}_s,\ p_r \overline{p}_s - \overline{p}_r p_s\}$ è una decomposizione di P^2 e

$$\{p_r q - \overline{p}_r \overline{q},\ p_r \overline{q} + \overline{p}_r q\}$$

una decomposizione di PQ, si ha:

$$\mathrm{P}^2 + \rho^2 \mathrm{PQ} - 2\rho \mathrm{P}\,(p_r \overline{q} + \overline{p}_r q) = \mathrm{P}^2,$$

e quindi:

$$\rho \mathrm{Q} = 2\,(p_r \overline{q} + \overline{p}_r q). \tag{7}$$

In virtù della prima parte del teorema, la decomposizione

$$\{p_r q - \overline{p}_r \overline{q},\ p_r \overline{q} + \overline{p}_r q\}$$

di PQ è propria, e quindi, pel lemma dimostrato il numero $p_r \overline{q} + \overline{p}_r q$ è primo con PQ, e perciò anche con Q. Se Q non è uguale a 2, la (7) è dunque una relazione assurda.

Ma se Q fosse uguale a 2, si avrebbe $q = \overline{q} = 1$, e, dalla (7) $\rho = p_r + \overline{p}_r$. La prima delle (6) porgerebbe allora: $\overline{p}_r + p_s = p_r + \overline{p}_r$, cioè $p_s = p_r$, il che è contrario alle ipotesi fatte circa le decomposizioni di P, che abbiamo considerato. Dunque il teorema risulta dimostrato.

COROLLARIO I. — *Se* $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_m$ *sono numeri primi di tipo* $4p + 1$, *le decomposizioni del prodotto* $\mathrm{P}_1^{\alpha_1}\mathrm{P}_2^{\alpha_2}\ldots\mathrm{P}_m^{\alpha_m}$, *che si ottengono operando mediante le* (I) *e* (II) *sulle decomposizioni proprie dei fattori* $\mathrm{P}_1^{\alpha_1}, \mathrm{P}_2^{\alpha_2}, \ldots, \mathrm{P}_m^{\alpha_m}$, *sono tutte proprie e distinte.*

COROLLARIO II. — *Se* $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_m$ *sono numeri primi di tipo* $4p + 1$, *il prodotto* $\mathrm{P}_1^{\alpha_1}\mathrm{P}_2^{\alpha_2}\ldots\mathrm{P}_m^{\alpha_m}$ *ammette* 2^{m-1} *decomposizioni proprie.*

Per convincersene basta pensare al modo, con cui si ottengono queste decomposizioni, e ricordare (v. oss. § 10), che ciascuno dei fattori $\mathrm{P}_1^{\alpha_1}, \mathrm{P}_2^{\alpha_2}, \ldots, \mathrm{P}_m^{\alpha_m}$ ammette una sola decomposizione propria.

§ 13. Teorema I. — *Operando colle* (I) *e* (II) *sulle decomposizioni distinte delle singole potenze* $P_1^{\alpha_1}, P_2^{\alpha_2}, \ldots, P_m^{\alpha_m}$, *che compariscono nel prodotto* $P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\ldots P_m^{\alpha_m}$, *si ottengono decomposizioni tutte distinte di questo prodotto.*

Le decomposizioni distinte di $P_r^{\alpha_r}$ sono:

$$\{p_{\alpha_r}^{(r)}, \overline{p}_{\alpha_r}^{(r)}\},\ \{P_r p_{\alpha_r-2}^{(r)}, P_r\overline{p}_{\alpha_r-2}^{(r)}\},\ \{P_r^2 p_{\alpha_r-4}^{(r)}, P\overline{p}_{\alpha_r-4}^{(r)}\}, \ldots$$

Una decomposizione generica del prodotto $P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\ldots P_m^{\alpha_m}$, ottenuta operando com'è detto nel teorema, sarà del tipo:

$$\{P_1^{s_1}P_2^{s_2}\ldots P_m^{s_m}p_{s_1s_2\ldots s_m},\ P_1^{s_1}P_2^{s_2}\ldots P_m^{s_m}\overline{p}_{s_1s_2\ldots s_m}\}, \tag{1}$$

ove i numeri $p_{s_1s_2\ldots s_m}, \overline{p}_{s_1s_2\ldots s_m}$ sono termini di una decomposizione propria del numero $P_1^{\alpha_1-2s_1}P_2^{\alpha_2-2s_2}\ldots P_m^{\alpha_m-2s_m}$ ottenuta operando colle (I) e (II) sulle decomposizioni proprie dei fattori $P_1^{\alpha_1-2s_1}, P_2^{\alpha_2-2s_2}, \ldots, P_m^{\alpha_m-2s_m}$.

Se due decomposizioni del tipo (1) dovessero coincidere si dovrebbe avere:

$$P_1^{s_1}P_2^{s_2}\ldots P_m^{s_m}p_{s_1s_2\ldots s_m} = P_1^{r_1}P_2^{r_2}\ldots P_m^{r_m}p_{r_1r_2\ldots r_m},$$

ovvero:

$$P_1^{s_1}P_2^{s_2}\ldots P_m^{s_m}p_{s_1s_2\ldots s_m} = P_1^{r_1}P_2^{r_2}\ldots P_m^{r_m}\overline{p}_{r_1r_2\ldots r_m}.$$

Se $s_1, s_2, \ldots, s_m$ sono diversi rispettivamente da $r_1, r_2, \ldots, r_m$, queste uguaglianze condurrebbero a concludere che i termini dell'una o dell'altra delle decomposizioni proprie

$$\{p_{s_1s_2\ldots s_m}, \overline{p}_{s_1s_2\ldots s_m}\}, \qquad \{p_{r_1r_2\ldots r_m}, \overline{p}_{r_1r_2\ldots r_m}\}$$

non sarebbero primi rispettivamente coi numeri $P_1^{\alpha_1-2s_1}P_2^{\alpha_2-2s_2}\ldots P_m^{\alpha_m-2s_m}$ o $P_1^{\alpha_1-2r_1}P_2^{\alpha_2-2r_2}\ldots P_m^{\alpha_m-2r_m}$, il che è contrario al lemma del § 12.

Se $s_1, s_2, \ldots, s_m$ sono uguali rispettivamente a $r_1, r_2, \ldots r_m$, si ricaverebbe invece che due decomposizioni proprie di $P_1^{\alpha_1-2s_1}P_2^{\alpha_2-2s_2}\ldots P_m^{\alpha_m-2s_m}$, ottenute nel solito modo, coinciderebbero, il che è impossibile (v. § 12, coroll. I).

Corollario. — *Dato il numero* $A = 2^\lambda P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\ldots P_m^{\alpha_m}Q_1^{2\beta_1}Q_2^{2\beta_2}\ldots Q_n^{2\beta_n}$, *le decomposizioni che si ottengono operando mediante la* (I) *su quelle del prodotto* $P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\ldots P_m^{\alpha_m}$, *ottenute com'è detto nel teorema precedente, e su quella di* $2^\lambda Q_1^{2\beta_1}Q_2^{2\beta_2}\ldots Q_m^{2\beta_n}$ *sono tutte distinte.*

La dimostrazione è talmente semplice, che crediamo di ometterla, per brevità.

Ricordando le considerazioni che seguono il teorema del § 11, possiamo riassumere i risultati, ottenuti nei precedenti paragrafi, nel seguente

TEOREMA II. — *Dato il numero* $2^{\lambda}P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\ldots P_m^{\alpha_m}Q_1^{2\beta_1}Q_2^{2\beta_2}\ldots Q_n^{2\beta_n}$, *ove* $P_1, P_2, \ldots, P_m$ *sono fattori primi di tipo* $4p+1$ e $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ *fattori primi di tipo* $4p-1$, *se si opera mediante le* (I) *e* (II) *sulle decomposizioni di* $P_1^{\alpha_1}$ *e* $P_2^{\alpha_2}$, *quindi sulle decomposizioni ottenute di* $P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}$ *e su quelle di* $P_3^{\alpha_3}$, *ecc., e infine si opera mediante la* (I) [*o la* (II)] *sulle decomposizioni di* $P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\ldots P_m^{\alpha_m}$ *e su quella di* $2^{\lambda}Q_1^{2\beta_1}Q_2^{2\beta_2}\ldots Q_n^{2\beta_n}$, *le decomposizioni che si ottengono sono tutte quelle ammesse da* A, *e sono tutte distinte.*

§ 14. TEOREMA. — *Se* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *sono gli esponenti dei fattori di tipo* $4p+1$, *che entrano in un numero* A, *il numero ammette:*

$$\tfrac{1}{2}(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_m+1)+\tfrac{1}{2}$$

decomposizioni distinte, se quelli esponenti sono tutti pari, ammette invece:

$$\tfrac{1}{2}(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_m+1)$$

decomposizioni distinte, se detti esponenti non sono tutti pari. (¹)

Cominciamo coll'osservare che dato il numero:

$$A=2^{\lambda}P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\ldots P_m^{\alpha_m}Q_1^{2\beta_1}Q_2^{2\beta_2}\ldots Q_n^{2\beta_n},$$

ove le lettere hanno il solito significato, il numero delle decomposizioni, ch'esso ammette, è uguale a quello delle decomposizioni ammesse dal prodotto dei fattori della forma $4p+1$, cioè dal numero $P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\ldots P_m^{\alpha_m}$.

Infatti, come s'è visto più sopra, per avere tutte le decomposizioni di A basta operare sulle decomposizioni di $P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\ldots P_m^{\alpha_m}$ e sull'unica decomposizione del prodotto dei rimanenti fattori mediante la sola formola (I) [o (II)].

Rimane dunque a fare il computo delle decomposizioni del numero $P=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\ldots P_m^{\alpha_m}$.

Siccome il teorema vale quando $\alpha_2=\alpha_3=\ldots=\alpha_m=0$ (v. § 10, teor. III), per ritenerlo vero in generale, basterà dimostrare che, se è vero, quando i fattori di P sono $m-1$, è vero anche quando sono m.

Supponiamo dunque che il numero delle decomposizioni del prodotto $P'=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\ldots P_{m-1}^{\alpha_{m-1}}$, quando $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ sono tutti pari, sia:

$$\tfrac{1}{2}(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_{m-1}+1)+\tfrac{1}{2},$$

(¹) Cfr. P. BACHMANN, loc. cit., pag. 229, e P. GAZZANIGA, loc. cit., pag. 113. La dimostrazione che segue è, nelle linee generali, uguale a quella data dal Gazzaniga, ma il teorema è più generale. Ci permettiamo qui di osservare che la dimostrazione di questo autore non è del tutto rigorosa, perchè in essa non è messo in chiaro che le decomposizioni considerate sono le sole ammesse dal numero dato e che sono tutte distinte.

e quando $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ non sono tutti pari, sia:

$$\tfrac{1}{2}(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_{m-1}+1).$$

Osserviamo che nel primo caso il numero considerato ammette una ed una sola decomposizione eccezionale, e nel secondo caso nessuna. [1]

Il numero $P_m^{\alpha_m}$ ammette poi (v. § 10, teor. III) secondo che α_m è pari o dispari

$$\frac{\alpha_m+1}{2}+\frac{1}{2},$$

ovvero

$$\frac{\alpha_m+1}{2}$$

decomposizioni, di cui, nel primo caso, una, nel secondo, nessuna è eccezionale.

Ricordiamo ancora, che, mentre operando su due decomposizioni regolari a termini differenti [2] mediante le (I) e (II) si ottengono due decomposizioni distinte, operando invece su due decomposizioni, di cui una almeno sia eccezionale, si ottiene una decomposizione sola.

Per avere il numero totale N delle decomposizioni di P, basterà dunque fare il doppio del numero dei modi, con cui le decomposizioni regolari di P' si possono combinare con quelle regolari di $P_m^{\alpha_m}$, e aggiungere il numero delle combinazioni, di cui fa parte una decomposizione eccezionale almeno.

Premesso ciò, il computo delle decomposizioni di P è immediato.

1° Caso. — Sieno $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha_m$ tutti pari. Risulterà:

$$N=2\left[\tfrac{1}{2}(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_{m-1}+1)-\tfrac{1}{2}\right]\left[\tfrac{1}{2}(\alpha_m+1)-\tfrac{1}{2}\right]+$$
$$\left[\tfrac{1}{2}(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_{m-1}+1)-\tfrac{1}{2}\right]+\left[\tfrac{1}{2}(\alpha_m+1)-\tfrac{1}{2}\right]+1,$$

ossia, a riduzioni eseguite:

$$N=\tfrac{1}{2}(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_{m-1}+1)(\alpha_m+1)+\tfrac{1}{2}.$$

2° Caso. — Sieno $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ tutti pari, e α_m dispari. Si avrà:

$$P=2\left[\tfrac{1}{2}(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_{m-1}+1)-\tfrac{1}{2}\right].\tfrac{1}{2}(\alpha_m+1)+\tfrac{1}{2}(\alpha_m+1),$$

e quindi:

$$N=\tfrac{1}{2}(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_{m-1}+1)(\alpha_m+1).$$

---

[1] Basta pensare che nel primo caso il numero è un quadrato perfetto, e quindi ammette la decomposizione $\left\{P_1^{\frac{\alpha_1}{2}}P_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\ldots P_{m-1}^{\frac{\alpha_{m-1}}{2}},\ 0\right\}$, che è eccezionale, mentre tutte le altre sono del tipo (I) indicato nel teorema del § 13, e che nel secondo caso il numero non è quadrato perfetto.

[2] Le decomposizioni dei numeri considerati sono a termini differenti, perchè detti numeri sono dispari, e non può essere $A=(a,a)$, se A non è pari.

3° CASO. — Non tutti i numeri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ sieno pari, ed α_m sia pari. Si avrà:

$$N = 2 \cdot \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_{m-1} + 1) [\tfrac{1}{2}(\alpha_m + 1) - \tfrac{1}{2}] + \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_{m-1} + 1),$$

ossia:

$$N = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_{m-1} + 1)(\alpha_m + 1).$$

4° CASO. — Se α_m è dispari, e non tutti i numeri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ sono pari, si ha:

$$N = 2 \cdot \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_{m-1} + 1) \cdot \tfrac{1}{2}(\alpha_m + 1),$$

cioè ancora:

$$N = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_{m-1} + 1)(\alpha_m + 1).$$

Il teorema è dunque provato.

CAPITOLO V.

Esempi di decomposizioni.

Come complemento alla teoria, che abbiamo sviluppato, daremo in questo capitolo alcuni esempi di decomposizioni in somme di due quadrati.

§ 15. Cominciamo col considerare il caso più semplice in cui il numero A dato sia primo del tipo $4p + 1$.

Per determinare l'unica decomposizione, ch'esso ammette, basterà ricercare il primo numero della successione:

$$A - 1^2, \quad A - 2^2, \quad A - 3^2, \ldots$$

che risulta un quadrato perfetto. Posto che $A - \bar{a}^2$ sia il quadrato del numero a, si avrà:

$$A = (a, \bar{a}). \tag{2}$$

Se con $E(\sqrt{M})$ s'intende d'indicare la radice intera del numero M approssimata per difetto, la determinazione della decomposizione (2) esige che si debbano esaminare al più i primi $E\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right)$ elementi della successione (1).

Infatti, posto che sia $a > \bar{a}$, si ha

$$a^2 + \bar{a}^2 = A > 2\bar{a}^2$$

ossia

$$\bar{a} < \sqrt{\frac{A}{2}}$$

e quindi:

$$\bar{a} \leqq E\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\right).$$

Esempio I. — Dato il numero primo 113 $(= 4 \cdot 28 + 1)$, si dovranno esaminare al più $E\left(\sqrt{\frac{113}{2}}\right) = 7$ termini della successione:

$$113 - 1^2, \quad 113 - 2^2, \quad 113 - 2^2, \ldots$$

Effettivamente si trova che il 7° termine $113 - 7^2$ è il quadrato perfetto 64, quindi si ha:

$$113 = \{8, 7\}.$$

Esempio II. — Dato il numero primo 241 $(= 4 \cdot 80 + 1)$, si dovranno esaminare al più $E\left(\sqrt{\frac{241}{2}}\right) = 10$ termini della successione:

$$241 - 1^2, \quad 241 - 2^2, \quad 241 - 3^2, \ldots$$

Si trova però che il 4° termine è il numero 225, che è il quadrato di 15, quindi:

$$241 = \{15, 4\}.$$

§ **16.** Si debba ora decomporre in somme di due quadrati un numero A che sia potenza r^{ma} di un numero primo P di tipo $4p + 1$.

Si cerchino all'uopo le decomposizioni proprie $\{p_r, \bar{p}_r\}$ $\{p_{r-2}, \bar{p}_{r-2}\}$, $\{p_{r-4}, \bar{p}_{r-4}\}, \ldots$ delle potenze $P^r, P^{r-2}, P^{r-4}, \ldots$ che si deducono dalla decomposizione $\{p_1, \bar{p}_1\}$ di P (v. teor. § 9) considerando gli sviluppi delle potenze:

$$(p_1 + i\bar{p}_1)^r, \quad (p_1 + i\bar{p}_1)^{r-2}, \quad (p_1 + i\bar{p}_1)^{r-4}, \ldots,$$

e prendendo come termini delle decomposizioni cercate i valori assoluti della parte reale e del coefficiente di i nei rispettivi sviluppi. Tutte le possibili decomposizioni di A saranno allora (v. § 10, teor. II):

$$\{p_r, \bar{p}_r\}, \quad \{P p_{r-2}, P \bar{p}_{r-2}\}, \quad \{P^2 p_{r-4}, P^2 \bar{p}_{r-4}\}, \ldots$$

Esempio I. — Decomporre in somme di due quadrati il numero $2197 = 13^3$.

Si ha:

$$13 = \{3, 2\}.$$

Quindi:

$$\begin{aligned}(3 + 2i)^3 &= 3^3 + i \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 2^2 - i\, 2^3 \\ &= (3^3 - 3 \cdot 3 \cdot 2^2) + i\,(3 \cdot 3^2 \cdot 2 - 2^3) = -9 + 46i,\end{aligned}$$

e perciò

$$13^3 = \{46, 9\}.$$

Dunque le decomposizioni di 2197 sono:

$$\{46, 9\}, \quad \{39, 26\}.$$

Esempio II. — Decomporre in somme di due quadrati il numero $15625 = 5^6$.

Si ha:

$$5 = \{2, 1\}.$$

E successivamente:

$$\begin{aligned}(2+i)^6 &= 2^6 + i \,.\, 6 \,.\, 2^5 - 15 \,.\, 2^4 - i \,.\, 20 \,.\, 2^3 + 15 \,.\, 2^2 + i \,.\, 6 \,.\, 2 - 1\\ &= -117 + 44i;\\ (2+i)^4 &= 2^4 + i \,.\, 4 \,.\, 2^3 - 6 \,.\, 2^2 - i \,.\, 4 \,.\, 2 + 1\\ &= -7 + 24i;\\ (2+i)^2 &= 2^2 + i \,.\, 2 \,.\, 2 - 1\\ &= 3 + 4i;\end{aligned}$$

Quindi:

$$5^6 = \{117, 44\}, \quad 5^4 = \{24, 7\}, \quad 5^2 = \{4, 3\}.$$

Dunque le decomposizioni del numero dato sono:

$$\{117, 44\}, \quad \{5 \,.\, 24, \quad 5 \,.\, 7\}, \quad \{5^2 \,.\, 4, \quad 5^2 \,.\, 3\}, \quad \{5^3, 0\},$$

ossia, eseguendo i prodotti e ordinando:

$$\{125, 0\}, \quad \{120, 35\}, \quad \{117, 44\}, \quad \{100, 75\}.$$

§ **17.** Sia dato ora un numero composto:

$$A = 2^\lambda P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_m^{\alpha_m} Q_1^{2\beta_1} Q_2^{2\beta_2} \ldots Q_n^{2\beta_n}.$$

Per trovare tutte le decomposizioni distinte, ch'esso ammette, si determinino dapprima (v. § 13, teor. II) tutte le decomposizioni delle diverse potenze $P_1^{\alpha_1}, P_2^{\alpha_2}, \ldots, P_m^{\alpha_m}$; si cerchino poi le decomposizioni di $P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2}$ operando sulle decomposizioni di $P_1^{\alpha_1}$, $P_2^{\alpha_2}$ mediante le (I) e (II), se le decomposizioni, che si considerano, sono entrambe regolari, mediante la sola formola (I) [o (II)] se una almeno di dette decomposizioni è eccezionale; alle decomposizioni del prodotto $P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2}$ si associno quindi, nello stesso modo, quelle di $P_3^{\alpha_3}$, e così di seguito, fino ad aver considerato l'ultimo fattore $P_m^{\alpha_m}$, ed aver quindi ottenute tutte le decomposizioni di $P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_m^{\alpha_m}$. A queste si associ infine, mediante la (I) [o la (II)] la decomposizione del prodotto degli altri fattori, che è

$$\left\{2^{\frac{\lambda}{2}} Q_1^{\beta_1} Q_2^{\beta_2} \ldots Q_n^{\beta_n}, 0\right\},$$

se λ è pari, e

$$\left\{2^{\frac{\lambda-1}{2}} Q_1^{\beta_1} Q_2^{\beta_2} \ldots Q_n^{\beta_n},\ 2^{\frac{\lambda-1}{2}} Q_1^{\beta_1} Q_2^{\beta_2} \ldots Q_n^{\beta_n}\right\}$$

se λ è dispari, e si otterranno tutte le decomposizioni del numero dato.

Esempio. — Si debba decomporre in somme di due quadrati il numero $380250 = 2 . 3^2 . 5^3 . 13^2$.

I fattori primi di tipo $4p+1$ sono 5 e 13, mentre 3 è di tipo $4p-1$; siccome però l'esponente, cui esso è elevato, è pari, il numero sarà decomponibile in somme di due quadrati. Il numero delle decomposizioni (v. § 14) è: $\frac{1}{2}(3+1)(2+1) = 6$.

Ora si ha:

$$5^3 = \{11, 2\} = \{10, 5\},$$
$$13^2 = \{12, 5\} = \{13, 0\}.$$

Quindi, operando su queste decomposizioni mediante le (I) e (II):

$$\begin{aligned} 5^3 . 13^2 &= \{11 . 12 - 2 . 5,\ \ 11 . 5 + 2 . 12\} = \{122, 79\} \\ &= \{11 . 12 + 2 . 5,\ \ 11 . 5 - 2 . 12\} = \{142, 31\} \\ &= \{10 . 12 - 5 . 5,\ \ 12 . 5 + 10 . 5\} = \{110, 95\} \\ &= \{10 . 12 + 5 . 5,\ \ 12 . 5 - 10 . 5\} = \{145, 10\} \\ &= \{11 . 13,\ \ 2 . 13\} = \{143, 26\} \\ &= \{10 . 13,\ \ 5 . 13\} = \{130, 65\} \end{aligned}$$

Poichè la decomposizione di $2 . 3^2$ è:

$$\{3, 3\},$$

si avrà infine, operando mediante la (II) su essa e sulle decomposizioni precedentemente ottenute e ordinando secondo i valori decrescenti dei primi termini, le seguenti decomposizioni per il numero dato:

$\{615, 45\}$, $\{603, 129\}$, $\{585, 195\}$, $\{519, 333\}$, $\{507, 351\}$, $\{465, 405\}$.

CAPITOLO VI.

Decomposizione di un numero nella differenza di due quadrati.

§ 18. La risoluzione del problema, di cui ci occuperemo in questo capitolo, è semplice e immediata.

Ci proporremo di risolvere per numeri interi e positivi la equazione $x^2 - y^2 = A$, dove A è un numero intero e positivo.

Premettiamo, per semplificare la dicitura, qualche definizione.

Quando a' e a'' sieno due numeri tali che risulti $a'^2 - a''^2 = A$, diremo che $[a', a'']$ è una decomposizione di A.

Chiameremo a' e a'' rispettivamente *primo* e *secondo termine* della decomposizione. Essendo A positivo, sarà $a' > a''$.

Una decomposizione di A si dirà *eccezionale*, se $a'' = 0$. Evidentemente i soli quadrati perfetti ammettono decomposizioni eccezionali.

Due divisori di A si diranno *complementari* se il loro prodotto è uguale ad A.

§ **19.** Teorema. — *Ogni numero, che non sia della forma* $4n + 2$, *è decomponibile nella differenza di due quadrati.*

Se un numero A ammette la decomposizione $[a', a'']$, i due numeri $a' + a''$, $a' - a''$ sono due divisori complementari di A, perchè il loro prodotto è uguale ad $a'^2 - a''^2$, cioè ad A.

Reciprocamente, indicando con A′ e A″ due divisori complementari di A, tali che sia $A' > A''$, e ponendo:

$$a' + a'' = A', \qquad a' - a'' = A'',$$

a' ed a'' risulteranno termini di una decomposizione di A. Se si vuole che a' e a'' sieno interi, poichè risulta:

$$a' = \tfrac{1}{2}(A' + A''), \qquad a'' = \tfrac{1}{2}(A' - A''),$$

bisognerà che A′ e A″ sieno entrambi pari o dispari.

Perchè ciò accada, il numero A dovrà essere o un numero pari della forma $4n$, ovvero un numero dispari.

Dunque non ammettono decomposizioni intere i soli numeri pari della forma $4n + 2$.

Osservazione. — Nel teorema precedente è indicato implicitamente un metodo per ottenere una decomposizione di A, quando sieno dati due divisori complementari di questo numero, i quali sieno entrambi pari o dispari.

§ **20.** Teorema. — *Se, decomposto un numero* A *in fattori primi, si trova:*

$$A = 2^{\lambda} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n},$$

il numero ammette:

$$\tfrac{1}{2} |\lambda - 1| (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$$

decomposizioni se $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ *non sono tutti pari; nel caso opposto ne ammette:*

$$\tfrac{1}{2} |\lambda - 1| \{(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1) + 1\}. \text{ (1)}$$

Le due formule mostrano che, per $\lambda = 1$ il numero delle decomposizioni di A, qualunque sieno $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ è uguale a zero, e in-

(1) Conveniamo di indicare col solito simbolo $|m|$ il valore assoluto del numero m.

fatti che A non ammetta decomposizioni intere, quando $\lambda = 1$, risulta dal teorema precedente osservando che per $\lambda = 1$ il numero dato è della forma $2(2n+1)$.

Escluso questo caso, si può osservare, in generale, che il numero dei modi distinti, in cui A si può decomporre nella differenza di due quadrati è, come risulta dalla dimostrazione del teorema precedente uguale al numero delle coppie di divisori complementari di A.

Supposto A dispari, e quindi $\lambda = 0$, il numero dei divisori di A (compresi l'unità e il numero stesso), è

$$N = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_n + 1).$$

Se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ non sono tutti pari, il numero N è pari, e il numero delle coppie di divisori complementari di A è

$$\tfrac{1}{2}(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_n + 1).$$

Se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono tutti pari, il numero N è dispari, e poichè due divisori complementari di A sono $\sqrt{A}$, $\sqrt{A}$, si avranno in tutto $\dfrac{N-1}{2} + 1$ cioè

$$\tfrac{1}{2}\{(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_n + 1) + 1\}$$

coppie di divisori complementari.

Rimane così dimostrato il teorema per $\lambda = 0$.

Supposto $\lambda > 1$ per avere due divisori complementari di A, basterà prendere due divisori complementari di $A : 2^\lambda$ e moltiplicarli rispettivamente per $2^{\lambda-\mu}$ e 2^μ. Ora siccome questi divisori devono risultare entrambi pari, μ potrà assumere solo i valori $1, 2, \dots, \lambda - 1$, e così per ogni coppia di divisori complementari di $A : 2^\lambda$, si avranno $\lambda - 1$ coppie di divisori complementari di A. Osservando che $A : 2^\lambda$ è un numero dispari e ricordando quanto è stato più sopra dimostrato a proposito del numero delle decomposizioni di un numero dispari, si conclude che il teorema è vero in generale.

§ **21.** Diamo ora un esempio di decomposizione.

Sia dato il numero 720. Poichè risulta $720 = 2^4 . 3^2 . 5$, questo numero ammetterà $\frac{1}{2} . 3 . 3 . 2$ cioè 9 decomposizioni.

I divisori di $3^2 . 5$ sono:

$$1, 3, 5, 9, 15, 45$$

e le coppie dei suoi divisori complementari sono perciò:

$$(46, 1), \quad (15, 3), \quad (9, 5).$$

Le coppie di divisori complementari di A costituite da numeri entrambi pari sono dunque:

$$\begin{array}{lll}
(45 . 2^3, \ 1 . 2), & (45 . 2^2, \ 1 . 2^2), & (45 . 2, \ 1 . 2^3); \\
(15 . 2^3, \ 3 . 2), & (15 . 2^2, \ 3 . 2^2), & (15 . 2, \ 3 . 2^3); \\
(\ 9 . 2^3, \ 5 . 2), & (\ 9 . 2^2, \ 5 . 2^2), & (\ 9 . 2, \ 5 . 2^3);
\end{array}$$

cioè:

(360, 2), (180, 4), (90, 8);
(120, 6), (60, 12), (30, 24);
(72, 10), (36, 20), (40, 18).

Applicando le formole:

$$a' = \tfrac{1}{2}(A' + A''), \qquad a'' = \tfrac{1}{2}(A' - A'')$$

ove le lettere hanno il significato loro attribuito nel § 19, si hanno pel numero 720 le decomposizioni:

[181, 179], [92, 88], [49, 41],
[63, 57], [36. 24], [27, 3],
[41, 31], [28, 8], [29, 11].

Dott. G. Bisconcini.

Roma, gennaio 1907.

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA
PER LE FUNZIONI COMPLESSE DI VARIABILE COMPLESSA

Nota di Luigi Galvani, a Bologna

1. È noto che il comportamento delle funzioni reali di variabile reale o complessa è posto assai bene in evidenza dalle ordinarie rappresentazioni geometriche mediante linee o superficie, pel fatto che ogni particolarità di queste ultime traduce un carattere inerente alle funzioni rappresentate.

Al contrario, quando si voglia dare una immagine geometrica di una funzione complessa (di variabile reale o complessa) si urta nella difficoltà di dovere ricorrere ad uno spazio a quattro dimensioni, e si perviene a rappresentazioni che non offrono ai nostri sensi altrettanta evidenza delle precedenti. Ond'è che, rinunciando alla condizione di figurare una funzione complessa in modo tale che risulti visibilmente la corrispondenza fra le variabili indipendente x e dipendente $y = f(x)$, si usa rappresentare la x e la y sopra due distinti piani complessi: tale rappresentazione gode del resto di molte e notevoli proprietà, fra cui quella di essere generalmente isogonale nel caso, assai lato, che la $y=f(x)$ sia analitica. (1)

Il LIE, (2) dopo aver posto:

$$y=u+iv\,, \qquad x=\xi+i\eta\,,$$

suggerì di considerare η, ξ, u come coordinate ortogonali di un punto nello spazio, e v come massa del punto stesso; così la funzione $y=f(x)$ veniva ad avere per immagine una certa superficie di cui ogni punto era affetto da una massa determinata. Più tardi lo SFORZA (3) dimostrò che il campo ternario completo si può rappresentare in modo invariantivo sull'ordinario spazio rigato non appena sia fissata una quadrica a punti ellittici. E finalmente il PINCHERLE (4) ebbe a considerare le superficie ottenute tagliando sopra ogni perpendicolare al piano complesso su cui si rappresenta la variabile indipendente, e da una stessa parte rispetto a questo piano, i segmenti misurati dai moduli dei valori che ha la funzione in quel punto; così, per il caso di funzioni algebriche semplici trovò superficie, generalmente a più fogli, dotate di notevoli proprietà, e che furono oggetto di studio per parte del MONTESANO. (5) Ora, in questi varî metodi si nota sempre che: o vien data una rappresentazione soltanto parziale del comportamento della $y=f(x)$, oppure la corrispondenza fra gli enti che rappresentano la x e la y non ha carattere visivo. Perciò non è inutile cercare un mezzo di rappresentazione che sia, sotto questi riguardi, più soddisfacente di quelli sopra menzionati.

2. A tale fine si assuma un piano su cui venga rappresentata nel modo solito la variabile indipendente x; scelti ξ e η come assi reale e immaginario uscenti dall'origine O, e fissato in essi il senso positivo, ad ogni valore $\overline{x}=\overline{\xi}+i\overline{\eta}$ corrisponderà sul piano $(\xi\eta)$ il punto P di coordinate cartesiane $\overline{\xi}$ e $\overline{\eta}$. Quanto ai valori della funzione $y=f(x)$, rappresentiamoli mediante i vettori di un altro piano sul quale u e v siano rispettivamente l'asse reale ed immaginario, ed Ω l'origine, cosicchè se $\overline{y}=f(\overline{x})=\overline{u}+i\overline{v}$, al valore $\overline{y}$ corrisponderà il vettore ΩN, essendo N il punto di coordinate $\overline{u}$ e $\overline{v}$. Finalmente conduciamo da P, affisso di $\overline{x}$, il vettore PM uguale al vettore ΩN, ed allora il punto M potrà essere riguardato come affisso di $\overline{y}$. Se poi si immagina che il

(1) V. per es. SIEBECK, *Über die graphische Darstellung imaginärer Funktionen*, Giorn. di Crelle, vol. 55, 1858.

(2) *Über eine Darstellung des Imaginären in der Geometrie*, Giorn. di Crelle, vol. 70, 1869.

(3) *Il campo ternario completo rappresentato sullo spazio rigato*. Reggio E., 1885; e inoltre: *Origine geometrica delle superficie di Riemann*. "Annuario del R. Ist. Tecn. di Reggio E.„ 1901.

(4) *Sopra certe superficie razionali che s'incontrano in questioni d'analisi*. "Rend. dell'Ist. Lombardo „ 1891, serie II, vol. XXIV. — Vedi pure: *Résumé de quelques résultats relatifs à la théorie des systèmes récurrents de fonctions*, nei "Rendiconti del Congresso matematico di Chicago„ New York, 1896.

(5) *Su due superficie omaloidi che si presentano in questioni analitiche*. "Rend. dell'Ist. Lombardo „ 1891, serie II, vol. XXIV.

punto P si muova sul piano complesso, il vettore PM si muove nello spazio, mantenendosi però sempre parallelo al piano (uv), e il punto M descrive generalmente una superficie, che risulta piana (e giacente in $(\xi\eta)$) se il piano (uv) sia parallelo a $(\xi\eta)$, ma che è di solito curva se tale parallelismo non si verifica. Ora, fra le infinite giaciture che si possono attribuire al piano (uv) (per ciascuna delle quali il punto M descriverà, anche in corrispondenza di una medesima funzione, superficie diverse) è opportuno scegliere quella determinata dal fare coincidere le parti positive di v e di η, e dal condurre u normale al piano $(\xi\eta)$. Si otterrà così un sistema di tre assi ortogonali ξ, u ed $\eta \equiv v$, uscenti da una comune origine O, e dei quali ξ ed u sono reali, η e v immaginari; e sarà convenuto che sul piano $(\xi\eta)$ (od (uv)) le rotazioni intorno ad O siano contate a partire da ξ (o da u) prendendo come senso positivo quello che sovrappone ξ ad η (od u a v) dopo un quarto di giro. Così dunque una funzione complessa di variabile complessa $y=f(x)$ sarà rappresentata geometricamente dalla superficie τ descritta dall'estremo M del vettore PM parallelo al piano (uv) che ha per componenti sopra u e v le parti reale ed immaginaria di y, e che esce dal punto P affisso sul piano $(\xi\eta)$ del valore x, quando P descrive il campo di definizione della $y=f(x)$.

3. Rispetto alla superficie τ si possono fare alcune osservazioni generali:

a) Ogni punto comune a τ ed al piano $(\xi\eta)$ è l'affisso di un valore della funzione puramente immaginario, perchè estremo di un vettore parallelo ad η, avente quindi su u una componente nulla.

b) Ai punti di una retta η' di $(\xi\eta)$ parallela ad η corrispondono sulla τ punti di una curva piana, ottenuta come sezione di τ col piano parallelo ad (ηu) condotto per η'.

c) La corrispondenza fra i punti di τ e quelli di $(\xi\eta)$ in cui è definita la $y=f(x)$, non è necessariamente biunivoca, neppure se la x sia una funzione ad un valore.

d) Un punto comune a due o più falde di τ non è necessariamente affisso di due o più valori uguali assunti dalla y per uno stesso valore di x.

e) Se in una parte in cui è definita la $y=f(x)$, questa si mantiene reale, ivi la rappresentazione ottenuta coincide con quella data ordinariamente per le funzioni reali di variabile complessa.

4. Applichiamo dapprima il metodo di rappresentazione esposto ad un esempio semplicissimo, e cioè alla funzione $y=x$. Sia

$$\overline{x}=\overline{\xi}+i\overline{\eta}$$

un valore di x al quale corrisponderà $\overline{y}=\overline{\xi}+i\overline{\eta}$; detto P l'affisso di $\overline{x}$ su $(\xi\eta)$, l'affisso M di $\overline{y}$ si potrà ottenere osservando che le componenti sopra u e v del vettore che rappresenta $\overline{y}$ nel piano (uv) sono rispettivamente $\overline{\xi}$ ed $\overline{\eta}$: basterà dunque condurre per P il segmento PN uguale e parallelo a $\overline{\xi}$, e per N il segmento NM uguale e parallelo ad $\overline{\eta}$. L'affisso cercato sarà M.

In particolare: *a*) se P percorre l'asse reale, M descrive una retta b, e cioè la bisettrice dell'angolo $\widehat{\xi u}$; *b*) se P traccia una retta ξ' parallela a ξ, M descrive pure una retta b' che è la parallela alla b uscente da un punto di η, ed avente dal piano (ξu) distanza doppia di quella di ξ'; *c*) quando P percorre l'asse η, anche M descrive lo stesso asse, conservando però sempre da O una distanza doppia di quella del punto P.

Si conclude dunque che la τ relativa alla funzione $y=x$ è il piano bisettore del diedro che ha lo spigolo η e le facce $\eta\xi$, ηu: e se pensiamo che la retta ξ' muovendosi parallelamente a ξ generi il piano $(\xi\eta)$, la retta (corrispondente) b' si muove parallelamente a b, conservando da (ξu) una distanza doppia di quella di ξ' ed appoggiandosi ad η, e genera il piano τ, immagine della funzione.

I punti affissi di valori corrispondenti di x e di y non appartengono, in generale, ad una stessa perpendicolare al piano $(\xi\eta)$; ma è assai facile, segnato un punto qualunque sul piano τ, trovare nel piano $(\xi\eta)$ il punto di cui quello è il corrispondente.

5. In secondo luogo vediamo come sia rappresentata la funzione esponenziale $y=e^x$. Gioverà porre

$$x=te^{i\alpha}=t(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)$$

e ne verrà

$$y=e^{t\cos\alpha}(\cos(t\operatorname{sen}\alpha)+i\operatorname{sen}(t\operatorname{sen}\alpha)).$$

Per quanto si è convenuto relativamente alle rotazioni nei piani $(\xi\eta)$ ed (uv), l'affisso di un valore $\overline{x}=\overline{t}e^{i\overline{\alpha}}$ sarà nel piano $(\xi\eta)$ il punto P di coordinate polari $\overline{t}$ ed $\overline{\alpha}$ quando sia O il polo e ξ l'asse polare; e il vettore corrispondente ad $\overline{y}=e^{\overline{x}}$ sarà, nel piano (uv), quello di argomento $\overline{t}\operatorname{sen}\overline{\alpha}$ e di modulo $e^{\overline{t}\cos\overline{\alpha}}$. Perciò l'affisso M di $\overline{y}$ si avrà conducendo il vettore PM uguale a questo. Ma la costruzione effettiva di PM può essere semplificata, osservando che

$$\cos(\overline{t}\operatorname{sen}\overline{\alpha})+i\operatorname{sen}(\overline{t}\operatorname{sen}\overline{\alpha})$$

rappresenta il vettore PM′ parallelo a PM e di modulo 1 (versore); e poichè PM′ ha come componenti sopra u e v rispettivamente $\cos(\overline{t}\operatorname{sen}\overline{\alpha})$ e $\operatorname{sen}(\overline{t}\operatorname{sen}\overline{\alpha})$, così si cercherà anzitutto M′ conducendo per P il segmento PN′ uguale e parallelo a $\cos(\overline{t}\operatorname{sen}\overline{\alpha})$, e per N′ il segmento N'M' uguale e parallelo a sen $(\bar{t} \operatorname{sen} \bar{\alpha})$; e si moltiplicherà poi il vettore PM' per $e^{\bar{t} \cos \bar{\alpha}}$, pervenendo così al vettore PM di cui l'estremo M è l'affisso cercato.

Per avere un'idea della superficie τ generata da M al variare di P sul piano $(\xi\eta)$, specializziamo il moto di P (fig. 1).

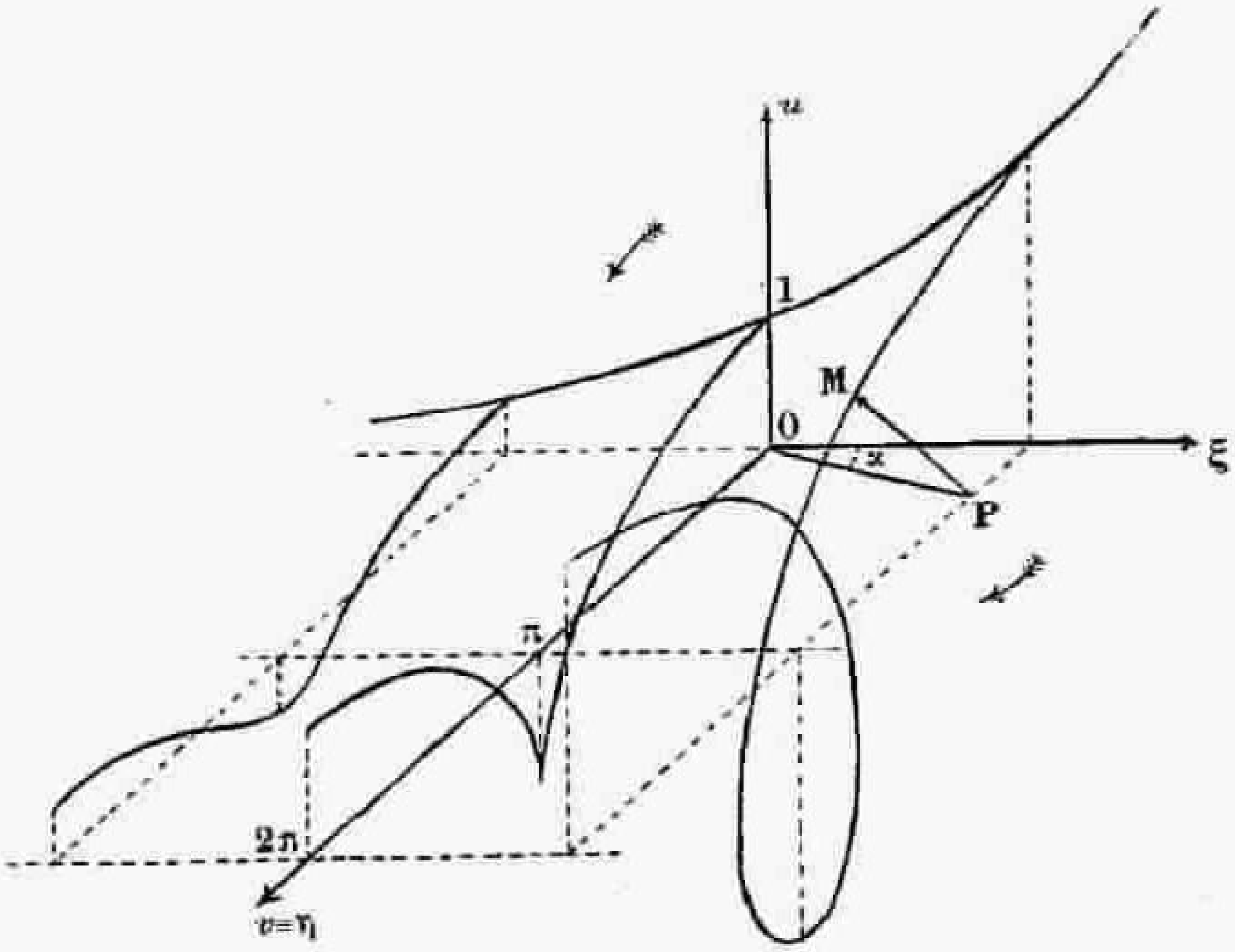

Fig. 1.

a) Supponiamo dapprima che P percorra l'asse reale ξ: poichè in tal caso è $\alpha = 0$, risultano per y valori puramente reali $y = e^t$, e quindi il punto M descrive sul piano (ξu) la ben nota curva dell'esponenziale, rispetto a cui ξ è asintoto.

b) Si faccia ora percorrere a P, affisso di $\bar{x} = \bar{t} (\cos \bar{\alpha} + i \operatorname{sen} \bar{\alpha})$, la retta η' parallela ad η; intanto si osserva subito che al variare di P su η' il vettore corrispondente mantiene il suo modulo costante ed uguale ad $e^{\bar{t} \cos \bar{\alpha}}$, poichè l'equazione polare $t \cos \alpha = \bar{t} \cos \bar{\alpha}$ rappresenta appunto in $(\xi\eta)$ la retta η' descritta da P. Inoltre, come s'è notato, l'estremo M del vettore PM traccierà una curva piana, parallela al piano (uv); al fine di facilitare lo studio di tale curva, vediamo prima quale linea venga generata dall'estremo M' del versore di PM, e riferiamoci ad un sistema cartesiano di cui η' (percorso nel medesimo senso di η) sia l'asse delle ascisse, O' (intersezione di η' con ξ) sia l'origine, e la u' parallela ad u condotta per O' sia l'asse delle ordinate. Sia poi $\overline{\text{M}}'$ una posizione generica del punto M', ottenuta per $\bar{x} = \bar{t} e^{i\bar{\alpha}}$, e si tracci M'S perpendicolare ad η'; allora, se è P il piede del versore $\overline{\text{PM}}'$, risulta che SM' e PS sono le componenti reale ed immaginaria di $\overline{PM}'$, ed O'P è la componente immaginaria di $OP=\overline{x}$, e quindi, dette $\overline{\eta}'$ ed $\overline{u}'$ le coordinate di $\overline{M}'$, verrà:

$$\overline{\eta}' = O'P + PS = \overline{t} \operatorname{sen} \overline{\alpha} + \operatorname{sen} (\overline{t} \operatorname{sen} \overline{\alpha})$$
$$\overline{u}' = \cos (\overline{t} \operatorname{sen} \overline{\alpha})$$

cioè, ponendo $\overline{t} \operatorname{sen} \overline{\alpha} = p$ ed omettendo le lineette:

$$\eta' = p + \operatorname{sen} p$$
$$u' = \cos p.$$

Queste sono le equazioni parametriche della cicloide descritta da un punto A di una circonferenza di raggio 1 che rotoli sopra la retta di equazione $u' = -1$, supponendo che quando il centro del cerchio generatore è in O', il punto A sia sulla parte positiva dell'asse u'. Il parametro p denota la lunghezza dell'intervallo O'P percorso dal centro del cerchio quando il punto A sia venuto in $\overline{M}'$.

È ora facile stabilire la natura della curva descritta da M; poichè M giace su $\overline{PM}'$ ad una distanza $|PM| = e^{\overline{t} \cos \overline{\alpha}}$, così si conclude che il punto M descrive una cicloide ordinaria, accorciata o allungata secondo che $e^{\overline{t} \cos \overline{\alpha}}$ è uguale, minore o maggiore dell'unità.

Così dunque: se il punto P descrive l'asse immaginario η, il punto corrispondente M descrive nel piano (ηu) una cicloide ordinaria, intersezione di tale piano colla superficie τ, rappresentatrice della funzione. Quando P percorre una parallela ad η di equazione $\xi = \overline{\xi}$, il punto M traccia una cicloide allungata se è $\overline{\xi} > 0$, ed accorciata se $\overline{\xi} < 0$: tali cicloidi sono le sezioni di τ coi piani paralleli a (ηu) di equazione $\xi = \overline{\xi}$.

Una generazione cinematica della τ si ottiene dunque così: ad un cilindro indefinito di asse ξ e raggio 1 sia invariabilmente connessa la curva esponenziale già tracciata sul piano (ξu); si immagini poi che tale cilindro rotoli (senza strisciare) sopra il piano parallelo a $(\xi\eta)$ alla distanza -1: allora l'asse del cilindro percorre il piano $(\xi\eta)$, e contemporaneamente la curva esponenziale che gli è connessa descrive la superficie τ.

In ogni istante ai punti situati sull'asse del cilindro corrispondono i punti della curva esponenziale che gli è connessa. Risulta poi evidente che la superficie τ si riproduce identicamente in corrispondenza alle infinite striscie piane comprese fra le rette $\eta = 2k\pi$, $\eta = 2(k+1)\pi$, e ciò traduce geometricamente la periodicità della funzione esponenziale.

c) Il piano (uv) divide la τ in due parti di diverso comportamento grafico. Quella dove ξ è negativo, come ben si vede immaginando le sezioni di τ con un piano parallelo ad (ηu) che si allontani indefinitamente da O, non contiene punti multipli, e rispetto ad essa il piano $(\xi\eta)$ è assintotico, il che significa che $\lim e^x = 0$ quando x tende all'infinito per valori $x = \xi + i\eta$ tali che sia $\xi < 0$. L'altra parte di τ, esaminata mediante analoghe sezioni, si trova contenere infinite linee di punti doppi formate dai nodi delle cicloidi allungate che sono descritte dai punti della curva esponenziale per $\xi > 0$; e poichè tale curva si allontana indefinitamente da ξ al crescere indefinito di ξ, la sezione limite di τ con un piano parallelo ad (ηu) tendente all'infinito è di tale forma che esprime appunto l'essere $\lim e^x = \infty$ quando x va all'∞ per valori $x = \xi + i\eta$ in cui sia $\xi > 0$.

Finalmente il riprodursi indefinito della superficie τ nelle striscie di $(\xi\eta)$ parallele a ξ e di larghezza 2π, esprime anche il fatto dell'indeterminazione di $\lim e^x$ per x che tenda all'infinito percorrendo rette di argomento $\frac{\pi}{2}$.

Si osservi che la falda di τ situata rispetto al piano (ηu) dove ξ è positivo, contiene oltre le linee doppie di cui si è già fatto cenno, quelle che risultano dalla reciproca intersezione delle varie parti di τ corrispondenti alle infinite striscie in cui si è diviso il piano $(\xi\eta)$; ma sì le une che le altre linee doppie non rispecchiano nessuna notevole proprietà della funzione $y = e^x$.

d) Le equazioni parametriche della τ, riferita agli assi ξ, η, u si hanno facilmente da quelle della cicloide, introducendo come nuovo parametro la distanza $d = | e^{\xi} |$ del punto generatore dall'asse del cilindro mobile; esse sono dunque:

$$\xi = \overline{\log} d, \quad \eta = p + d \operatorname{sen} p, \quad u = d \cos p$$

dove d può variare da 0 all'∞, e p da $-\infty$ a $+\infty$.

e) Facciamo percorrere al punto P, sul piano $(\xi\eta)$, un raggio OR di argomento α, essendo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; ciò equivale a dare ad x valori della forma $te^{i\alpha}$ con α costante (fig. 2). Quando P è in O il vettore corrispondente ha il valore assoluto 1 e giace sopra u; di mano in mano che P si allontana da O il vettore PM cresce in valore assoluto come l'esponenziale, e contemporaneamente ruota intorno a P mantenendosi parallelo al piano (uv), per tal modo che quando t è cresciuto da 0 a $\frac{2\pi}{\operatorname{sen} \alpha}$, il vettore PM ha compiuto un giro intorno

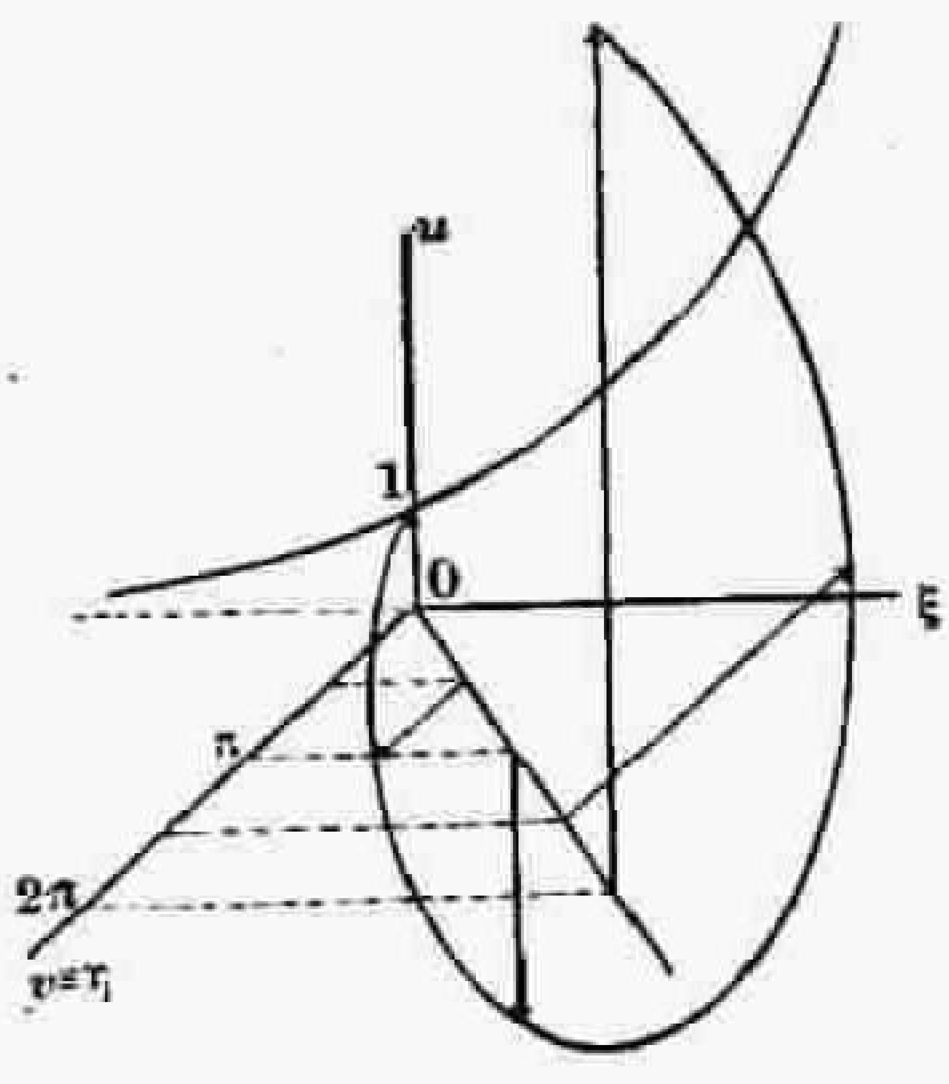

Fig. 2.

a P, e quindi l'estremo M ha descritto la prima spira di una curva indefinita. Per t crescente da $\frac{2\pi}{\operatorname{sen}\alpha}$ a $\frac{4\pi}{\operatorname{sen}\alpha}$, M descrive una seconda spira che si allontana più della precedente dall'asse OR, e così di seguito. La curva tracciata da M quando P percorre OR si compone dunque di infinite spire che si allontanano indefinitamente dal loro asse OR, ma che conservano il *passo* costante ed uguale a $\frac{2\pi}{\operatorname{sen}\alpha}$. Se poi si facesse percorrere a P il raggio OR' opposto ad OR, il punto M genererebbe una curva analoga, le cui spire però si accosterebbero via via ad OR', col crescere della loro distanza da O.

f) Sia M un punto della superficie τ, per es. nella porzione relativa alla striscia di $(\xi\eta)$ compresa fra le rette $\eta=0$ ed $\eta=2\pi$; e si voglia determinare sul piano $(\xi\eta)$ il punto P cui M corrisponde. Basta perciò condurre per M il piano perpendicolare a ξ, valutare l'ascissa $\bar{\xi}$ del punto sezione ottenuto, e tracciare sul piano stesso il cerchio di centro M e raggio $e^{\bar{\xi}}$: una delle due intersezioni del cerchio col piano $(\xi\eta)$ (è facile stabilire quale), costituisce il punto P cercato, come risulta dalla generazione cinematica di τ.

6. Come ultimo esempio consideriamo la funzione algebrica $y=\sqrt{x}$, che ha in $x=0$ un punto di diramazione. Posto, come al solito:

$$x=te^{i\alpha},$$

ne risulterà:

$$y=\begin{cases}\sqrt{t}\, e^{i\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{t}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)\\ \sqrt{t}\, e^{i\frac{\alpha+2\pi}{2}}=\sqrt{t}\left(\cos\frac{\alpha+2\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\alpha+2\pi}{2}\right),\end{cases}$$

e quindi, segnato sul piano $(\xi\eta)$ il punto P affisso di un valore generico $\bar{x}=\bar{t}\,e^{i\bar{\alpha}}$, si dovranno per P condurre due vettori PM_1 e PM_2, rappresentanti i due valori assunti dalla $y=\sqrt{x}$; ed essi avranno lo stesso modulo di misura $\sqrt{\bar{t}}$, e saranno diretti in senso opposto perchè le loro componenti, reale ed immaginaria, hanno segno diverso a cagione di

$$\cos\frac{\alpha+2\pi}{2}=-\cos\frac{\alpha}{2} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\frac{\alpha+2\pi}{2}=-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}.$$

I punti M_1 ed M_2 si possono assai facilmente costruire: basta tracciare per P la parallela u' ad u, indi il raggio parallelo ad (uv) che forma con u' l'angolo $\frac{\bar{\alpha}}{2}$ e segnare su questo raggio il segmento PM_1 avente per misura $\sqrt{\bar{t}}$; dopo ciò, il punto simmetrico di M_1 rispetto a P sarà M_2.

È interessante rendersi conto della forma della superficie τ generata da M_1 ed M_2 al variare di P sul piano $(\xi\eta)$, poichè essa ha gli stessi caratteri, rispetto all'*analysis situs*, della riemanniana di

$$y = \sqrt{x}.$$

a) Suppongasi che il punto P percorra a partire da O il raggio OR di argomento α cioè che in $x = te^{i\alpha}$, (del quale valore P è l'affisso) vari t da 0 all'∞ e sia costante α: allora il vettore corrispondente PM_1 ha un modulo che varia come $\sqrt{t}$, e un argomento costante $\frac{\alpha}{2}$: altrettanto può dirsi di PM_2, colla sola differenza che il suo argomento è $\frac{\alpha + 2\pi}{2}$. Quindi M_1 ed M_2 descrivono insieme una curva piana, e precisamente tutta una parabola rispetto alla quale OR è un diametro; essa è contenuta in un piano che forma con $(\xi\eta)$ il diedro β, essendo β dato mediante $\operatorname{cotg} \beta = \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \cos \alpha$; e la sua equazione, scelto OR come asse delle ascisse ed $OS = s$ (di argomento $\frac{\alpha}{2}$ sul piano (uv)) come asse delle ordinate, è $s^2 = t$.

In particolare: se P percorre l'asse reale positivo, M descrive sul piano (ξu) la parabola di equazione $u^2 = \xi$, rispetto a cui ξ è asse principale. Se P percorre l'asse reale negativo, M descrive sul piano $(\xi\eta)$ la parabola $\eta^2 = -\xi$, che è uguale alla precedente e passante pure per O, ma contenuta in un piano perpendicolare a quello dell'altra.

b) Immaginiamo ora che il punto P, partendo da una posizione $\overline{P} = te^{2\pi i}$ dell'asse reale positivo, percorra il cerchio (O, t) per es. nel senso positivo, e seguiamo il moto dei vettori opposti PM_1 e PM_2 che l'accompagnano e che conservano costantemente il modulo di misura $\sqrt{t}$. Quando P è sull'asse ξ, i vettori sono paralleli ad u, quindi normali al piano $(\xi\eta)$, e precisamente supporremo che PM_1 abbia il senso scelto come positivo su u, cioè corrisponda al valor positivo di $\sqrt{x}$. Di mano in mano che il raggio OP ruotando intorno ad O descrive angoli crescenti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots.$, il vettore PM_1 si muove mantenendosi parallelo al piano (ξu), e formando via via colla parte positiva di u angoli di ampiezza $\frac{\alpha_1}{2}, \frac{\alpha_2}{2}, \ldots.$ In particolare: quando OP ha percorso l'angolo $\frac{\pi}{2}$, il vettore PM_1 è giunto a formare l'angolo $\frac{\pi}{4}$ con detto asse; dopo un mezzo giro di OP, PM_1 forma con u l'angolo $\frac{\pi}{2}$, cioè è contenuto in $(\xi\eta)$; quando OP ha percorso l'angolo $\frac{3\pi}{2}$, PM_1 forma l'angolo $\frac{3\pi}{4}$; e finalmente dopo un intero giro di OP, PM_1 fa con u l'angolo π, vale a dire acquista la posizione inizialmente occupata da PM_2. Perchè il punto M_1 ritorni nel suo posto primitivo, è dunque necessario che P faccia due giri completi intorno ad O. Questo comportamento del vettore PM_1 pone assai bene in luce la polidromia della funzione $y=\sqrt{x}$. Siccome i vettori PM_1 e PM_2 sono opposti, per generare tutta la superficie τ basta che P percorra tutto un raggio uscente da O, e che questo raggio compia un solo giro intorno ad O.

c) Da quanto precede risulta la seguente generazione cinematica di τ. **Si segni sul piano (ξu) la parabola già considerata $u^2=\xi$, intersezione di τ con tale piano, e si pensi ogni ordinata PM della curva connessa al rispettivo piede P sull'asse $\xi \equiv$ OR; poi si faccia ruotare OR con velocità uniforme intorno ad O, nello stesso tempo che ognuna delle ordinate connesse ruota intorno al proprio piede mantenendosi parallela al piano (uv) e con tale velocità angolare che sia metà di quella di OR: dopo un giro di OR, la curva che l'accompagna (parabola) ha generato compiutamente la superficie τ.**

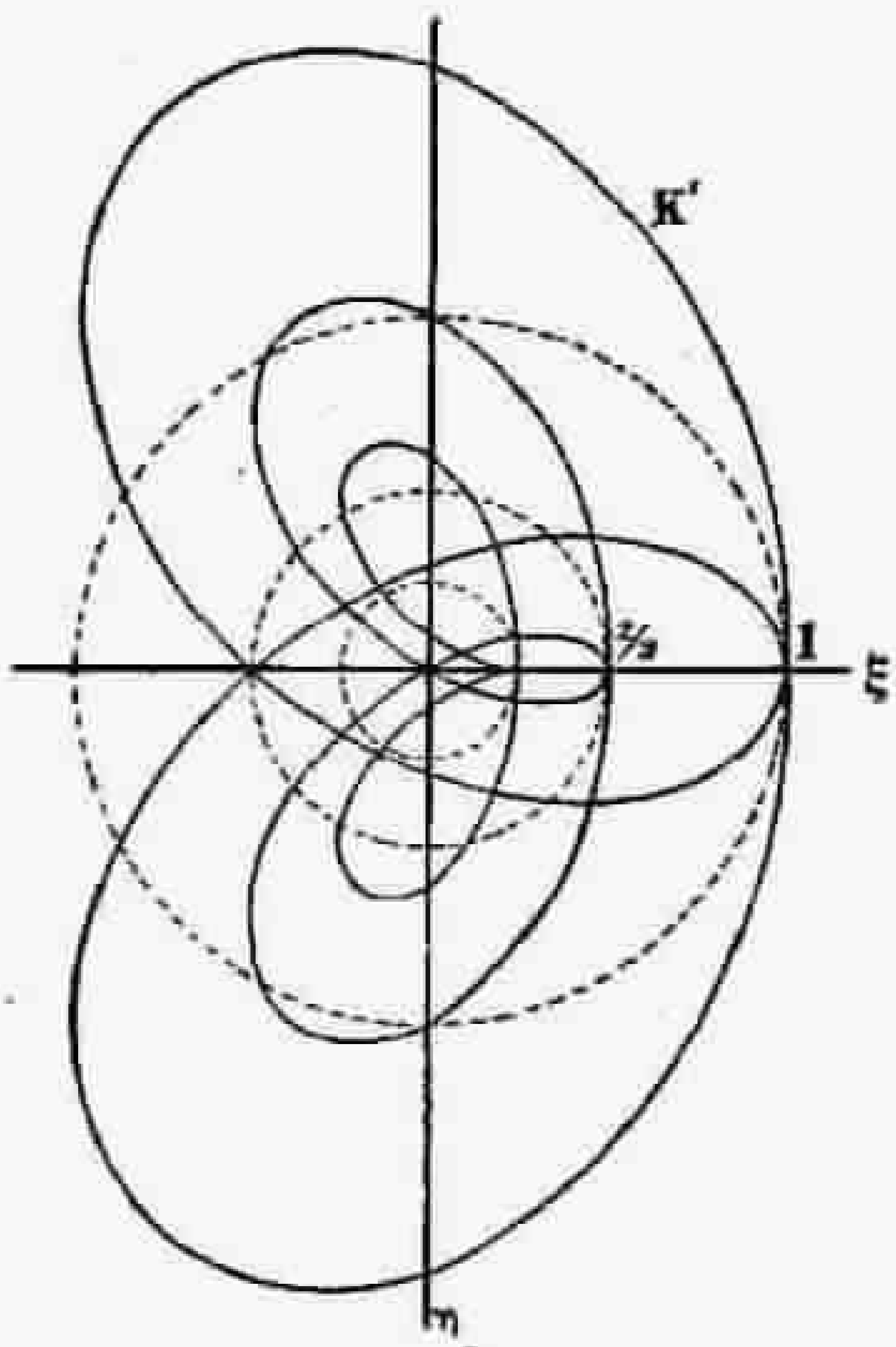

Fig. 3.

d) Giova determinare la forma della curva K tracciata dall'estremo M_1 di PM_1 quando P descrive due circonferenze complete di raggio t intorno ad O: di qui risulterà più evidentemente la forma e l'ordine di connessione di τ.

La proiezione ortogonale K' di K sul piano $(\xi\eta)$ si può costruire (fig. 3) tracciando anzitutto il cerchio (O, t), e notando che da ogni punto P di questo cerchio si deducono due punti di K', e cioè le proiezioni degli estremi dei vettori PM_1 e PM_2 uscenti da P; e poichè il modulo di tali vettori è misurato da $\sqrt{t}$, e l'inclinazione di PM_1 sul piano $(\xi\eta)$ è il complemento di metà dell'argomento α di OP, ne viene che da ogni ordinata di un punto P del cerchio si ottengono le ordinate di due punti di K' aggiungendo e togliendo a quella la proiezione di PM_1 su $(\xi\eta)$. Ora, l'ordinata di un punto generico P del cerchio è:

$$\eta' = \pm \sqrt{t^2 - \xi^2};$$

inoltre

$$\text{proiez. } PM_1 = \sqrt{t} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{t} \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{t - \xi}{2}};$$

e quindi l'equazione di K' è senz'altro

$$\eta = \pm \sqrt{t^2 - \xi^2} \pm \sqrt{\frac{t - \xi}{2}}$$

od anche

$$\eta_1^4 - 2\eta_1^2 \left(t^2 - \xi^2 + \frac{t - \xi}{2}\right) + \left(t^2 - \xi^2 + \frac{t - \xi}{2}\right)^2 - 2(t^2 - \xi^2)(t - \xi) = 0.$$

La K' è dunque una curva del 4° ordine, simmetrica rispetto all'asse ξ, compresa tutta nella striscia limitata fra le rette $\xi = \pm t$.

e) Cerchiamo i due punti doppi della K': perciò dovremo far sistema delle:

$$\begin{cases} F(\xi, \eta) = \eta^4 - 2\eta^2\left(t^2 - \xi^2 + \dfrac{t - \xi}{2}\right) + \left(t^2 - \xi^2 + \dfrac{t - \xi}{2}\right)^2 - 2(t^2 - \xi^2)(t - \xi) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \eta} = 4\eta^3 - 4\eta\left(t^2 - \xi^2 + \dfrac{t - \xi}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione è risoluta per

$$\eta = 0 \qquad \text{e per} \qquad \eta^2 = t^2 - \xi^2 + \frac{t - \xi}{2};$$

se si sostituisce il secondo valore nella equazione precedente si ha:

$$t^2 - \xi^2 = t - \xi$$

da cui $\xi = \pm t$, e risalendo ai corrispondenti valori di η:

$$\eta = 0, \qquad \eta = \pm \sqrt{t}.$$

I punti di coordinate:

$$\begin{cases} \xi = t \\ \eta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi = -t \\ \eta = +\sqrt{t} \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi = -t \\ \eta = -\sqrt{t} \end{cases}$$

sono dunque punti multipli della curva K', purchè per questi valori non risulti $\dfrac{d\eta}{d\xi} = \infty$; ma ciò effettivamente accade, essendo

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \mp \frac{\xi}{\sqrt{t^2 - \xi^2}} \mp \frac{1}{4\sqrt{\dfrac{t - \xi}{2}}},$$

onde si conclude che i tre punti precedenti non sono doppi, ma tali che in essi la tangente a K′ è parallela all'asse η.

Sostituiamo invece nella $F(\xi, \eta) = 0$ l'altro valore di η, cioè $\eta = 0$; risulterà

$$2(t^2 - \xi^2) = t - \xi ,$$

da cui $\xi = t$ e $\xi = \frac{1}{2} - t$; si hanno quindi i due punti di coordinate

$$\begin{cases} \eta = 0 \\ \xi = t \end{cases} \qquad \begin{cases} \eta = 0 \\ \xi = \frac{1}{2} - t \end{cases}$$

dei quali il primo si è già visto non essere multiplo, laddove il secondo è in effetto un punto doppio di K′.

La K′ possiede dunque un punto doppio sull'asse ξ compreso: fra $-\infty$ e 0 per $\infty > t > \frac{1}{2}$; fra 0 e $\frac{1}{4}$ per $\frac{1}{2} > t > \frac{1}{4}$. Per $t > \frac{1}{4}$ esso è un nodo; per $t = \frac{1}{4}$ si riduce a una cuspide; per $t < \frac{1}{4}$ si ha un punto doppio isolato che non appartiene però alla curva proiezione di quella descritta da M.

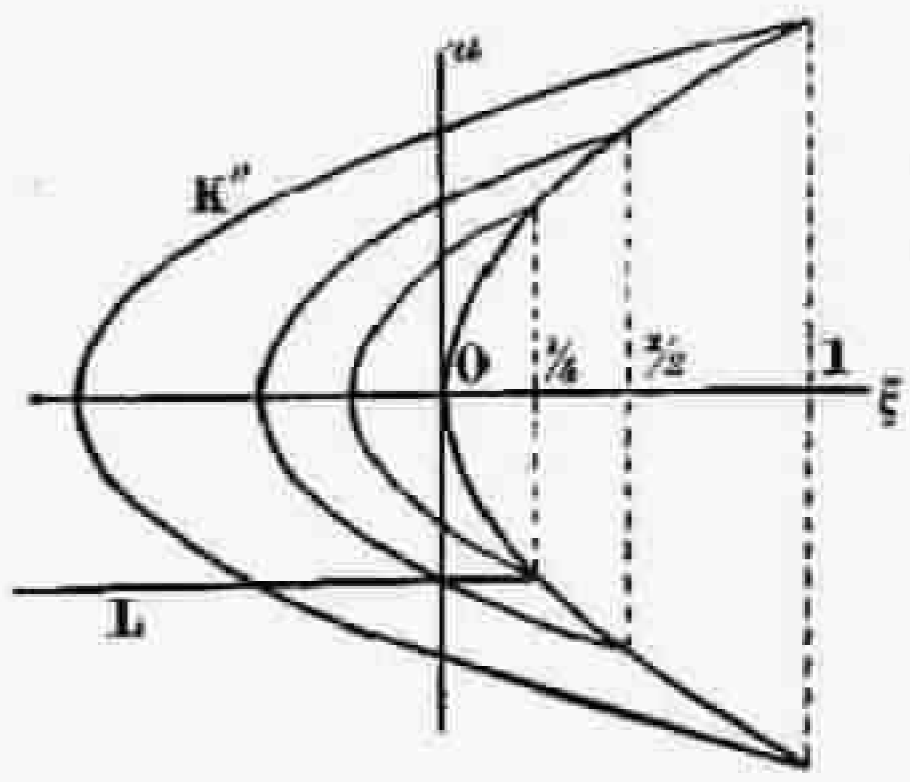

Fig. 4.

Il punto doppio di K′ è proiezione di un punto doppio di K, e di ciò è facile convincersi pensando al modo di generazione della curva K.

f) Determiniamo anche l'equazione della proiezione K″ di K sul piano (ξu) (figura 4). Assunto come parametro l'angolo α descritto intorno ad O da OP essendo P il piede del vettore PM_1, verrà:

$$\xi = t \cos\alpha , \qquad u = \pm \sqrt{t} \cos\frac{\alpha}{2} ,$$

da cui, eliminando α:

$$u^2 = \tfrac{1}{2}\xi + \tfrac{1}{2}t ,$$

equazione di una parabola di asse ξ, che volge la convessità alla parte negativa di ξ, che ha il vertice nel punto $\xi = -t$, il fuoco in $\xi = -t + \frac{1}{8}$ ed il parametro $\frac{1}{4}$.

Però è da osservarsi che la K″, come proiezione di K, si riduce al solo arco di parabola compreso fra le rette $\xi = \pm t$. Si noti pure che la parabola di cui fa parte K″ varia soltanto di posizione al mutare di t: precisamente subisce la traslazione di ampiezza $-h$ quando t acquista l'incremento h.

Gli estremi degli infiniti archi di parabola K″ corrispondenti agli infiniti valori di t costituiscono una nuova parabola, e cioè la $u^2 = \xi$, già ottenuta come sezione della τ col piano (ξu).

g) Finalmente determiniamo la curva L formata dai punti doppi delle curve K corrispondenti agli infiniti valori di t. Poichè la L è evidentemente contenuta nel piano (ξu), si potrà riferirla agli assi ξ ed u: scelto come parametro il raggio t del cerchio descritto da P intorno ad O, e dette ξ, u le coordinate di un punto generico di L, risulterà:

$$\xi = \tfrac{1}{2} - t, \qquad u = -\sqrt{\tfrac{1}{2}\xi + \tfrac{1}{4}t},$$

da cui eliminando t ed osservando che u deve essere negativo:

$$u = -\tfrac{1}{2},$$

equazione della retta parallela a ξ alla distanza $-\tfrac{1}{2}$ dall'origine. Ma si è già osservato che i punti doppi delle K' (cioè le proiezioni dei punti doppi delle K) sono tutti compresi fra $-\infty$ ed $\tfrac{1}{2}$; quindi il luogo L si riduce al raggio contenuto nel piano (ξu), parallelo all'asse ξ ed uscente dal punto di coordinate

$$\xi = \tfrac{1}{2}, \qquad u = -\tfrac{1}{2}.$$

Il raggio L costituisce l'unica *linea di passaggio* da un foglio all'altro della superficie τ; e la sua origine è ciò che per le superficie di Riemann si dice un *punto di diramazione*. La τ, che ha pertanto l'ordine di connessione 2, si può considerare come la superficie descritta da M_1 quando P descrive la riemanniana della funzione $y = \sqrt{x}$. Però è notevole il fatto che per tale riemanniana il punto di diramazione è l'origine O; laddove sulla τ il punto di diramazione non è quello corrispondente ad O.

Febbraio 1907.

RAPPRESENTAZIONE ANALITICA delle superficie generate da due piani σ e σ', e da una stella di classe p con un piano $(p-1)$—*plo*, in corrispondenza birazionale fra loro.

Sia per es. la stella di piani, con un piano multiplo secondo $(p-1)$ (monoide)

$$S \equiv U_p(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \xi_4 U_{p-1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0,$$

ove le ξ sono le coordinate correnti dei piani della stella, e le U funzioni omogenee delle (ξ_1, ξ_2, ξ_3) di grado uguale al loro indice.

La S si può mettere in corrispondenza biunivoca col piano punteggiato $x_4 = 0$, mediante le relazioni:

$$\frac{\xi_1}{Z_1 U_{p-1}(Z_1,Z_2,Z_3)} = \frac{\xi_2}{Z_2 U_{p-1}(Z_1,Z_2,Z_3)} = \frac{\xi_3}{Z_3 U_{p-1}(Z_1,Z_2,Z_3)} = \frac{\xi_4}{U_p(Z_1,Z_2,Z_3)} \quad (1)$$

ove, con Z_1, Z_2, Z_3 indichiamo le coordinate correnti dei punti del piano $x_4 = 0$.

Sia nel piano $\sigma \equiv (0, X_2, X_3, X_4)$ il sistema omaloidico

$$a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + a_3\theta_3 = 0,$$

dove le θ sono funzioni omogenee di grado g delle (X_2, X_3, X_4) e le a_1, a_2, a_3 numeri variabili ad arbitrio.

Le equazioni:

$$Z_1 : Z_2 : Z_3 = \theta_1(X) : \theta_2(X) : \theta_3(X), \quad (2)$$

ci definiranno una corrispondenza cremoniana di ordine g, fra i piani $x_4 = 0$ e $(\sigma \equiv)\ x_1 = 0$.

Componendo le (1) e le (2) avremo:

$$\frac{\xi_1}{\theta_1(X) U_{p-1}[\theta(X)]} = \frac{\xi_2}{\theta_2 U_{p-1}[\theta(X)]} = \frac{\xi_3}{\theta_3 U_{p-1}[\theta(X)]} = \frac{\theta_4}{U_p[\theta(X)]}.$$

Ponendo

$$\begin{aligned} \theta_1 U_{p-1}[\theta(X)] &= \varphi_1(X), \\ \theta_2 U_{p-1}[\theta(X)] &= \varphi_2(X), \\ \theta_3 U_{p-1}[\theta(X)] &= \varphi_3(X), \\ U_p[\theta(X)] &= \varphi_4(X), \end{aligned}$$

avremo

$$\frac{\xi_1}{\varphi_1(X)} = \frac{\xi_2}{\varphi_2(X)} = \frac{\xi_3}{\varphi_3(X)} = \frac{\xi_4}{\varphi_4(X)}. \quad (3)$$

Queste equazioni ci danno la corrispondenza birazionale più generale, che può intercedere fra la stella di piani S ed un piano generico σ, che nel nostro caso abbiamo scelto come piano $x_1 = 0$. O in altri termini, le (3) danno la più generale rappresentazione univoca della stella di piani (monoide) S *di classe* p *dotata di un piano* (p—1)—plo, sul piano punteggiato.

Le φ sono funzioni omogenee delle (X_2, X_3, X_4) di grado $m = g \cdot p$, cioè multiplo dell'ordine della stella.

Sia nel piano $x_1 = 0$, un altro sistema omaloidico

$$b_1\psi_1(X) + b_2\psi_2(X) + b_3\psi_4(X) = 0,$$

ove ψ_1, ψ_3, ψ_4 sono funzioni omogenee di grado n delle (X_2, X_3, X_4) e le b numeri arbitrarii variabili. Le relazioni

$$\frac{Y_1}{\psi_1(X)} = \frac{Y_3}{\psi_3(X)} = \frac{Y_4}{\psi_4(X)} \tag{4}$$

definiscono una corrispondenza birazionale di grado n, fra il piano $\sigma \equiv (0, X_2, X_3, X_4)$ e $\sigma' \equiv (Y_1, 0, Y_3, Y_4)$, indicando con Y_1, Y_3, Y_4 le coordinate x_1, x_3, x_4 sul piano $x_2 = 0$.

Congiungendo i punti di σ e σ' omologhi in virtù di questa corrispondenza, si ottiene *una congruenza* $\Omega n + 2, n$ *di raggi* in corrispondenza biunivoca colla stella S. Il luogo dei punti intersezione dei raggi Ω con i piani corrispondenti nella S, è *una superficie* Σ *razionale*, di cui vogliamo dare la rappresentazione analitica.

Per un punto del raggio di Ω che unisce i punti X_i e $\psi_i(X)$, si ha:

$$t_i = \lambda X_i + \mu\psi_i(X) \begin{cases} i = 1, 2, 3, 4 \\ X_1 = 0, \psi_2 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Al raggio $X_i\psi_i(X)$, corrisponde in S il piano rappresentato in coordinate di punti dall'equazione

$$\varphi_1(X)x_1 + \varphi_2(X)x_2 + \varphi_3(X)x_3 + \varphi_4(X)x_4 = 0. \tag{6}$$

Affinchè il punto t_i giaccia sulla superficie Σ, bisogna che le espressioni (5) soddisfino le (6); quindi

$$\lambda\,(\varphi_2 X_2 + \varphi_3 X_3 + \varphi_4 X_4) + \mu\,(\varphi_1\psi_1 + \varphi_3\psi_3 + \psi_4\psi_4) = 0,$$

ove ponendo

$$F = \varphi_2 X_2 + \varphi_3 X_3 + \varphi_4 X_4,$$
$$F' = \varphi_1\psi_1 + \varphi_3\psi_3 + \varphi_4\psi_4,$$

avremo:

$$\lambda F + \mu F' = 0.$$

Affinchè sia soddisfatta la precedente equazione, bisogna che siano λ e μ proporzionali ad F' e $-F$ e quindi per ogni punto della superficie si avrà

$$t_i = F'X_i - F\psi_i(X) \begin{cases} i = 1 \ldots 4 \\ X_1 = 0, \psi_2 = 0. \end{cases} \tag{α}$$

Le (α) sono dunque le *formule della rappresentazione piana* della superficie Σ, poichè ai punti del piano $x_1 = 0$, corrispondono omaloidicamente, per la genesi della superficie, i punti della stessa forniti dalle (α). E se le (3) s'interpetrano come formule rappresentative di *un inviluppo razionale di piani* (non importa quale) sul piano punteggiato, le (α) saranno le formule che danno la rappresentazione piana della superficie, luogo dei punti intersezione dei piani dell'inviluppo con i raggi corrispondenti in Ω.

In particolare per $p=1$, $m=1$, $n=1$ si hanno le formule rappresentative della superficie del 5° ordine con una curva doppia d'ordine 5. (1)

Per $p=2$, $m=2$, $n=1$, si ha la rappresentazione della superficie del 7° ordine, con una curva doppia d'ordine 12 ed un inviluppo della 3ª classe di piani tritangenti. (2)

R. Scaccianoce.

Sullo sviluppo dei numeri equivalenti in frazioni continue

Il presente lavoro ha soltanto un fine didattico, perchè contiene una dimostrazione semplice di una proprietà molto conosciuta: la semplicità della dimostrazione dipende da un concetto, del quale abbiamo già fatto uso in un'altra precedente nota (3), e che qui brevemente richiamiamo.

Indichiamo con $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ la sostituzione lineare fratta $y=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$. Tale sostituzione si può sempre esprimere come prodotto di cinque dei tre tipi speciali $R=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Precisamente, se γ è diverso da zero, sarà valida la formula $A=S_1T_1RT_2S_2$, dove si legga $h_1=\dfrac{\alpha}{\alpha\delta-\beta\gamma}$, $h_2=\delta$, $k_1=\dfrac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma}$, $k_2=\gamma$; e, se invece γ è nullo, sarà valida l'altra formula $A=S_1T_1RS_2R$, dove si legga $h_1=-\dfrac{\beta}{\alpha\delta}$, $k_1=-\alpha$, $k_2=-\delta$. Avvertiamo che i prodotti si debbono

(1) Del Re, Accademia dei Lincei, vol. 6°, 1890.
(2) R. Scaccianoce, Accademia Dafnica, vol. 2°, Acireale, 1906.
(3) *Sopra un noto invariante delle forme binarie di grado pari.* " Periodico di Matematica ", A. XXII, Fasc. V, 1907.

eseguire *linee per colonne*: con quest'avvertenza, è molto agevole verificare quanto abbiamo asserito.

Noi diremo, secondo l'uso, che i due numeri x ed y sono equivalenti quando esista fra x e y una sostituzione lineare A, tale che i numeri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ siano interi, e che il modulo $\alpha\delta - \beta\gamma$ valga ± 1. In questo caso, le tre sostituzioni elementari R, S, T si riducono a $y = -\frac{1}{x}$, $y = -x$, $y = x + h$.

Il teorema che vogliamo dimostrare non ha importanza per i numeri razionali, che sono tutti equivalenti: noi supponiamo dunque che si tratti di due numeri x ed y reali ed irrazionali, e vogliamo dimostrare che, se x ed y sono equivalenti, lo sviluppo di x e lo sviluppo di y in frazioni continue coincidono a partire da un determinato denominatore [1]. Questo potrebbe essere il μ^{mo} nello sviluppo di x e il ν^{mo} (con μ e ν diversi) nello sviluppo di y.

Procediamo per gradi, e supponiamo, dunque, in principio, che la relazione d'equivalenza sia, con x positivo

$$y = x + h.$$

In tale caso il teorema è evidente, perchè se lo sviluppo di x è rappresentato dalla frazione continua $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, lo sviluppo di y sarà rappresentato dalla frazione continua $(a_0 + h, a_1, a_2, \ldots)$.

Sempre con x positivo, supponiamo ora che la relazione d'equivalenza sia quest'altra:

$$y = -\frac{1}{x} \tag{1'}$$

e scriviamo

$$x = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \xi). \tag{2}$$

L'ultimo denominatore ξ sarà reale ed irrazionale. Noi non fissiamo con precisione il numero n, ma, giacchè sappiamo che la penultima ridotta $\frac{P_n}{Q_n}$ della frazione continua (2) rappresenta, per n abbastanza grande, un valore tanto vicino quanto si vuole al numero positivo x, e sappiamo ancora che Q_{n-1} e Q_n sono positivi, così noi stabiliamo che n sia abbastanza grande perchè P_{n-1} e P_n siano grandezze positive. Ma inoltre possiamo scegliere n in modo che $\frac{P_n}{Q_n}$ approssimi in eccesso il numero x, e perciò $\frac{P_n}{Q_n}$ sarà maggiore di $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ (che lo ap-

[1] L'unicità dello sviluppo di un numero in frazione continua risulta agevolmente dalle definizioni.

prossimerà in difetto), dunque, tenendo presente che le Q non possono decrescere col crescere del loro indice, noi possiamo scegliere n in modo che fra i due numeri positivi P_n e P_{n-1} valga la relazione

$$P_n > P_{n-1}. \tag{3}$$

Ora la formula (2) equivale alla segnente altra formula

$$x = \frac{P_n\xi + P_{n-1}}{Q_n\xi + Q_{n-1}}. \tag{4}$$

Dopo ciò, si deduce da (1)' la relazione

$$y = \frac{-Q_n\xi - Q_{n-1}}{P_n\xi + P_{n-1}}. \tag{5}$$

Si sa che, fra le grandezze $P_{n-1}, P_n, Q_{n-1}, Q_n$, vale la formula

$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^n. \tag{6}$$

Ora noi sviluppiamo in frazione continua la frazione razionale $\frac{-Q_n}{P_n}$, e scriviamo

$$\frac{-Q_n}{P_n} = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m). \tag{7}$$

È facile vedere che, in generale, la frazione continua

$$(k_0, k_1, k_2, \ldots, k_p)$$

si può anche scrivere

$$(k_0, k_1, k_2, \ldots, k_p - 1, 1)$$

se k_p è diverso da 1, e si può scrivere

$$(k_0, k_1, k_2, \ldots, k_{p-1} + 1)$$

se k_p è $= 1$, perciò la parità di m nella (7) è in nostro arbitrio; dunque, fra gli elementi $P'_{m-1}, P'_m, Q'_{m-1}, Q'_m$ delle due ultime ridotte di (7), tenendo conto che è $P'_m = -Q_n$, $Q'_m = P_n$, possiamo scrivere la formula analoga a (6),

$$(-Q_n)\, Q'_{m-1} - P_n P'_{m-1} = (-1)^m = (-1)^n. \tag{6'}$$

Sottraendo (6)' da (6), noi otteniamo

$$P(Q_{n-1} + P'_{m-1}) + Q_n\,(Q'_{m-1} - P_{n-1}) = 0. \tag{8}$$

Questa relazione è verificata quando sia

$$P'_{m-1} = -Q_{n-1}, \qquad Q'_{m-1} = P_{n-1}, \tag{9}$$

e possiamo aggiungere che soltanto in questo caso è verificata; perchè, se non valgono le (9), si deduce dalla (8)

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1} - Q'_{m-1}}{Q_{n-1} + P'_{m-1}},$$

e, giacchè $\frac{P_n}{Q_n}$ è una frazione irriducibile, si deve porre

$$\begin{cases} P_{n-1} - Q'_{m-1} = \lambda P_n \\ Q_{n-1} + P'_{m-1} = \lambda Q_n \end{cases} \qquad (10)$$

dove λ è un numero intero, positivo o negativo. Ma Q'_{m-1} non può essere negativo, e poi vale la (3), dunque la prima (10) dimostra che λ è negativo. Ma allora, dalla stessa equazione, otteniamo $Q'_{m-1} > P_n$, il che non è possibile, perchè Q'_{m-1} è il denominatore dell'ultima ridotta e P_n è quello dell'ultima, ed è noto che tali denominatori non possono procedere decrescendo. Restano dunque dimostrate le (9).

Ma allora consideriamo la frazione continua

$$(b_0, b_1, \ldots, b_m, \xi).$$

L'ultima ridotta ne sarà, per quello che abbiamo ora dimostrato,

$$\frac{-Q_n\xi - Q_{n-1}}{P_n\xi + P_{n-1}}.$$

Richiamando la formula (5), noi vediamo dunque che possiamo scrivere

$$y = (b_0, b_1, \ldots, b_m, \xi).$$

Se in questa formula ed in (2) noi sviluppiamo in frazione continua l'ultimo denominatore ξ, noi verifichiamo il teorema proposto.

Supponiamo finalmente che la relazione d'equivalenza sia

$$y = -x. \qquad (1)''$$

Rifacendo i ragionamenti di prima, scriviamo ancora la formula (2) e la (4). Poi, al posto della (5), scriviamo

$$y = \frac{-P_n\xi - P_{n-1}}{Q_n\xi + Q_{n-1}}. \qquad (5)'$$

Svilupperemo in frazione continua la frazione razionale $\frac{-P_n}{Q_n}$, e saremo condotti a scrivere, invece di (8), l'equazione

$$P_n(Q_{n-1} - Q'_{m-1}) - Q_n(P_{n-1} + P'_{m-1}) = 0. \qquad (8)'$$

Anche qui dobbiamo porre

$$P'_{m-1} = -P_{n-1}, \qquad Q'_{m-1} = Q_{n-1}, \qquad (9)'$$

perchè altrimenti risulta

$$\begin{cases} P_{n-1} + P'_{m-1} = \lambda P_n \\ Q_{n-1} - Q'_{m-1} = \lambda Q_n \end{cases} \qquad (10)'$$

e troviamo $Q_{n-1} > Q_n$, oppure $Q'_{m-1} > Q_n$, il che è assurdo.

Da ciò, in modo analogo a prima, stabiliremo, anche per l'equivalenza (I)'', il teorema che si vuole dimostrare.

Dimostrato che sia per le tre sostituzioni elementari, esso risulta subito evidente per un'equivalenza arbitraria.

LUCIANO ORLANDO.

SULLA RISOLUZIONE ASSINTOTICA DELLE EQUAZIONI NUMERICHE

col metodo di Lagrangia

In questa breve nota faremo vedere come l'operazione di calcolo approssimato delle radici reali d'equazioni numeriche col metodo di LAGRANGIA si possa condurre e disporre in modo da farle acquistare la medesima determinatezza e semplicità delle operazioni ordinarie dell'aritmetica.

Osserviamo anzitutto che ci potremo sempre porre nel caso d'avere a che fare con un'equazione ad unica radice positiva e di dover calcolare questa radice. Infatti, se siasi isolata una radice reale α tra due numeri a e b, mediante la trasformazione

$$x = \frac{ay + b}{y + 1}$$

dove x ed y indicano le incognite primitiva e nuova, s'otterrà una trasformata ad unica radice positiva, che corrisponderà precisamente alla radice α.

Sia dunque $f(x) = 0$ un'equazione a coefficienti reali ad unica radice positiva α, e sia a la parte intera di questa radice. Mediante la trasformazione

$$x = a + \frac{1}{y}$$

s'ottenga la trasformata

$$\varphi(y) = f(a) . y^n + f'(a) . y^{n-1} + \frac{f''(a)}{2!} y^{n-2} + \ldots + \frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!} y + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 0.$$

Quest'equazione ha unica radice positiva, per cui il primo membro muta segno una volta, e solo una, mentre y cresce da 0 a $+\infty$. Ne segue che se β è tal radice, la sua parte intera b, o secondo quoziente incompleto dello sviluppo di α in frazione continua è il massimo valore intero positivo di y pel quale $\varphi(y)$ abbia ancora il segno di $\varphi(0)$, cioè di $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Si calcolerà quindi facilmente col quadro di Ruffini, perchè $\varphi(b)$ non è altro che il termine noto della trasformata alle radici diminuite di b dell'equazione $\varphi(y)=0$. Per ciò, se diminuendo d'un certo intero positivo le radici dell'equazione $\varphi(y)=0$ avremo ottenuta trasformata a termine noto del segno di $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, potremo ancora diminuire d'un numero intero positivo le radici della trasformata; le diminuiremo invece d'un intero negativo, cioè le aumenteremo, se $\varphi(y)=0$ e la trasformata avranno termini noti di segno contrario: e così, mediante una sola trasformazione o con più trasformazioni successive, perverremo facilmente al numero b, che è massima soluzione intera dell'inequazione

$$\varphi(y)\cdot\varphi(0)>0$$

ed è unica soluzione intera positiva della

$$\varphi(y)\cdot\varphi(y+1)<0.$$

In modo analogo si calcolerà il secondo quoziente incompleto dello sviluppo di β in frazione continua o terzo quoziente incompleto dello sviluppo di α; e così via.

L'equazione $\varphi(y)=0$ è trasformata alle inverse delle radici della trasformata alle radici diminuite di a dell'equazione $f(x)=0$; e può esser utile osservare che

$$\beta=-\frac{f(u)}{f(a)}$$

per un conveniente valore di u compreso tra a ed α.

Per fare un esempio consideriamo l'equazione

$$x^3-2x-5=0.$$

Essa ha unica radice positiva, che è tra 2 e 3. Indicando con x questa radice, si ha quindi che

$$x=2+\frac{1}{y}$$

dove $y>1$. Facendo la trasformata alle inverse delle radici della trasformata alle radici diminuite di 2 dell'equazione in x, s'ottiene l'equazione

$$y^3-10y^2-6y-1=0.$$

Questa ha unica radice positiva che, come fu già detto, è maggiore di 1; la sua parte intera è quindi il maggior valore intero di y pel quale il primo membro abbia ancora il segno di quando $y=0$. Si vede subito che il primo membro $y^2(y-10)-6y-1$ ha ancora il segno di -1 quando $y=10$ ed ha già mutato segno, è positivo, quando $y=11$; detta parte intera è dunque 10 cosicchè, per continuare lo sviluppo in frazione continua si porrà che

$$y=10+\frac{1}{z}.$$

Facendo la trasformata alle inverse delle radici della trasformata alle radici diminuite di 10 dell'equazione in y, s'ottiene l'equazione

$$61z^3-94z^2-20z-1=0.$$

La parte intera dell'unica radice positiva di questa equazione è 1, e, per ciò, volendo continuare lo sviluppo in frazione continua, si porrà che

$$z=1+\frac{1}{u}.$$

La trasformata alle inverse delle radici della trasformata alle radici diminuite di 1 dell'equazione in z è

$$54u^3+25u^2-89u-61=0.$$

La parte intera dell'unica radice positiva di quest'equazione è 1; per continuare lo sviluppo in frazione continua, si porrà quindi che

$$u=1+\frac{1}{v}.$$

Si farà ora la trasformata alle inverse delle radici della trasformata alle radici diminuite di 1 dall'equazione in u, ecc.

Siccome i coefficienti della trasformata alle inverse delle radici d'un'equazione sono quelli d'essa equazione presi in ordine inverso, per il metodo di Lagrangia torna molto comodo far uso, come fu già osservato, della regola di Ruffini, [1] nell'applicare la quale converrà operare alternamente da sinistra a destra e da destra a sinistra, come mostra il seguente quadro di calcolo relativo alla radice di cui ci siamo occupati:

---

[1] V. F. Giudice, *Metodo di* Newton *perfezionato e nuovo metodo pel calcolo assintotico delle radici reali d'equazioni*: 1º Esempio, relative note; R. Acc. delle Scienze di Torino, 1904-905.

	1	0	−2	−5	
2		2	2	−1	
		4	10		10
	1	6	0		
		6	−10		
	61	−94	−20	−1	
1		−33	−53	−54	
		28	−25		1
	61	89	−79		
		10	−133		
	71	−123	−187	−54	
2		19	−149	−352	
		161	173		1
	71	303	−179		
		124	−531		
	195	−407	−883	−352	
3		178	−349	−1399	
		763	1940		1
	195	1348	541		
		1889	−858		
	2084	1031	−2257	−1399	
1		3115	858	−541	
		5199	6057		12
	2084	7283	−435		
		2063	−6927		
3	26840	−81061	−13419	−541	

Dal precedente quadro risulta che x è compresa tra

$$2+\frac{1}{10}\dot{+}\frac{1}{1}\dot{+}\frac{1}{1}\dot{+}\frac{1}{2}\dot{+}\frac{1}{1}\dot{+}\frac{1}{3}\dot{+}\frac{1}{1}\dot{+}\frac{1}{1}\dot{+}\frac{1}{12}\dot{+}\frac{1}{3}$$

e

$$2+\frac{1}{10}\dot{+}\frac{1}{1}\dot{+}\frac{1}{1}\dot{+}\frac{1}{2}\dot{+}\frac{1}{1}\dot{+}\frac{1}{3}\dot{+}\frac{1}{1}\dot{+}\frac{1}{1}\dot{+}\frac{1}{12}\dot{+}\frac{1}{4}$$

ossia che

$$\frac{66967}{31972}>x>\frac{50552}{24135}$$

o che

$$2{,}094551482\ldots>x>2{,}094551481\ldots$$

per cui

$$x=2{,}09455148\ldots$$

F. Giudice.

Genova, marzo 1907.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 732, 733 E 734

732. *Essendo date due parabole aventi lo stesso asse e lo stesso vertice, trovare il luogo del punto d'incontro di una tangente dell'una con una tangente ad essa perpendicolare dell'altra.*

E.-N. BARISIEN.

Risoluzione del prof. V. Retali di Milano.

Sieno A e B i fuochi delle parabole date $y^2 = 4ax$, $y^2 = 4bx$ (riferite all'asse e alla tangente al vertice) e P un punto variabile del cerchio C^2 descritto sul diametro AB: le rette PA, PB hanno per equazioni rispettivamente

$$y = \lambda(x - a), \qquad y = -\frac{1}{\lambda}(x - b),$$

dove λ è un parametro variabile, e tagliano l'asse delle y respettivamente nei punti $A'(0, -\lambda a)$, $B'\left(0, \frac{b}{\lambda}\right)$: le equazioni delle rette A'M, B'M resp. parallele a PA, PB sono dunque

$$\lambda^2 a + \lambda y + x = 0,$$
$$\lambda^2 x - \lambda y + b = 0,$$

che risolute rispetto a x, y danno le coordinate di M, cioè le equazioni parametriche del luogo cercato:

$$x = -\frac{a\lambda^2 + b}{1 + \lambda^2}, \qquad y = \frac{-a\lambda^4 + b}{\lambda(1 + \lambda^2)};$$

eliminando λ abbiamo l'equazione cartesiana

$$y^2(x + a)(x + b) + (x^2 - ab)^2 = 0.$$

Il luogo richiesto è dunque *una quartica razionale della sesta classe*, simmetrica rispetto all'asse delle x. Dei suoi tre punti doppi, i due che cadono sull'asse di simmetria hanno per ascisse $x = \pm\sqrt{ab}$; l'altro è all'infinito sull'asse delle y. È da notarsi che *i tre punti doppi sono biflecnodali*, ossia la quartica è una *lemniscata proiettiva*. Tangenti nel punto doppio improprio (*asintoti reali*) son le rette $x + a = 0$, $x + b = 0$, cioè le parallele all'asse delle y condotte pei punti simmetrici dei fuochi rispetto al vertice.

La quartica ha quadruplo contatto col cerchio C^2, di equazione

$$y^2 + (x - a)(x - b) = 0;$$

due punti di contatto sono sull'asse delle y, gli altri due sono i punti ciclici. Il centro di C^2 è dunque anche il *fuoco singolare* della quartica, ossia *le rette isotrope uscenti da questo punto sono gli altri due assintoti della curva.*

La quartica ha due figure ben differenti secondochè le due parabole sono da una stessa banda o da bande opposte del vertice comune: nel 1° caso, è $ab > 0$, i due punti doppi al finito sono reali e i due contatti col cerchio C^2, sull'asse delle y, sono imaginari coniugati; nel 2° caso sono reali quest'ultimi e imaginari coniugati i due punti doppi al finito. La curva è tutta compresa nella striscia limitata dagli assintoti reali, e quindi, se $ab > 0$, il punto doppio esterno alla striscia è *isolato*.

Una costruzione semplice della normale alla quartica in un suo punto qualunque M è la seguente: se le rette MA', MB tagliano resp. in α, β l'asse delle parabole, presi i punti α', β', ordinatamente simmetrici di α, β rispetto ad A' e B', la normale in M passa pel centro del segmento $\alpha'\beta'$.

La quartica in discorso *è anche lo inviluppo delle podarie di una delle due parabole date rispetto ai punti dell'altra* ecc. ecc.

Altra risoluzione del sig. **Adolfo Vacchi**, studente nella R. U. di *Bologna*.

733. *Dimostrare* (1) *che*

$$\int_{\omega=\frac{\pi}{2}}^{\omega=\operatorname{arc}\cos\frac{a}{b}} \frac{\operatorname{sen}\omega\cos^2\omega\, d\omega}{\sqrt{a^2-b^2\cos^2\omega}} = -\frac{\pi a^2}{4b^3}.$$

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. V. Retali di Milano, del sig. Roberto Rossi dell'Università di Manchester, del prof. Aldo Finzi di Reggio Calabria e del sig. Adolfo Vacchi di Bologna.

Ponendo $\frac{b}{a}\cos\omega = z$ l'integrale proposto diviene

$$-\frac{a^2}{b^3}\int_0^1 \frac{z^2dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\frac{a^2}{b^3}\cdot\frac{\pi}{4}$$

perchè è noto che

$$\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\frac{z}{2}\sqrt{1-z^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc}\operatorname{sen} z + c.$$

734. *Essendo* $M_1M_2M_3$ *i piedi delle normali condotte da un punto* P *ad una parabola, trovare:*

1° *il luogo dei punti* P *pei quali l'area del triangolo* $M_1M_2M_3$ *è eguale a una costante data* k^2.

2° *il luogo dei punti* P *pei quali i tre punti* $M_1M_2M_3$ *sono in linea retta.*

K.

Risoluzione del prof. V. Retali.

1°. L'area del triangolo di vertici (x_1y_1), (x_2y_2), (x_3y_3), inscritto nella parabola $y^2=2px$ è espressa da $\frac{1}{4p}(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)$: se i vertici sono i punti d'incidenza delle normali condotte alla parabola dal punto (ξ,η) le y sono radici della equazione

$$y^3+2p(p-\xi)y-2p^2\eta=0.$$

Abbiamo dunque:

$$16p^2k^4=(y_1-y_2)^2\cdot(y_2-y_3)^2(y_3-y_1)^2$$

e, ricordando che il prodotto dei quadrati delle differenze delle radici della equazione $y^3+ay+b=0$ è $-(27b^2+4a^3)$, troviamo per equazione del luogo cercato, dopo soppresso il fattore $4p^2$,

$$4k^4+27p^2\eta^2+8p(p-\xi)^3=0$$

che rappresenta una sviluppata di parabola.

2°. La parabola essendo del 2° ordine, i punti M_1, M_2, M_3 non possono essere in linea retta, altro che se due di essi coincidono. Si ha allora $k=0$ e l'equazione precedente diviene

$$27p^2\eta^2+8p(p-\xi)^3=0$$

che rappresenta l'evoluta della data parabola, come era facile prevedere.

---

(1) Nell'enunciato era incorso un errore, essendo stato posto nel secondo membro $-\frac{\pi a^2}{2b^2}$ invece di $-\frac{\pi a^2}{4b^3}$.

QUISTIONI PROPOSTE

736. Se $K_1, K_2 \dots K_t$ sono tutti numeri interi positivi non maggiori dell'intero n che non hanno per divisori delle potenze $h.^{me}$ si ha:

$$\sum_{i=1}^{i=t} \sqrt[h]{\frac{n}{K_i}} = n$$

(dove il simbolo $\sqrt[h]{\ }$ indica la radice h^{ma} a meno di un'unità).

G. B. Zecca.

737. Sia N il punto d'incontro della normale ad un ellisse in un punto M coll'asse maggiore di questa, P il piede della perpendicolare condotta dal centro alla parallela alla tangente in M, condotta per N. Si trovi l'area della curva luogo di P, che è una curva unicursale del 6° ordine.

E.-N. Barisien.

PER L'UNIFICAZIONE DELLE NOTAZIONI VETTORIALI

I professori Burali-Forti e Marcolongo hanno iniziato nei *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* la pubblicazione di una serie di Note, allo scopo di prendere in esame i diversi nomi e segni proposti da vari autori per il calcolo vettoriale, e studiare la scelta o formazione di un algoritmo per proporlo al prossimo Congresso internazionale di Roma, affinchè da questo venga solennemente consigliato come *linguaggio vettoriale universale*.

L'importanza notevolissima che il calcolo vettoriale ha già raggiunto, e che va ognora crescendo in vista delle sue applicazioni, rende sommamente utile l'opera a cui si sono accinti i due egregi professori, e poichè per un lavoro sintetico di tal genere occorre l'aiuto di tutti coloro che si sono specialmente dedicati allo studio in quistione, essi chiudono la loro prima nota colle seguenti parole:

" Ai colleghi tutti rivolgiamo caldo appello di interessarsi alla importante questione: i loro pareri, i loro consigli, il loro aiuto con note bibliografiche, storiche, ecc., saranno accolti con riconoscenza, e ci saranno utilissimi, non solo per condurre a termine il difficile lavoro, ma per giungere a quelle *proposte concrete* che devono rappresentare quanto di meglio è possibile ottenere praticamente nelle condizioni attuali della scienza e delle applicazioni ".

Torino, Messina } marzo 1907.

C. Burali-Forti.
R. Marcolongo.

Il *Periodico* è lieto di cooperare indirettamente all'importante opera, dando pubblicità all'appello rivolto dai proff. Burali-Forti e Marcolongo a tutti i colleghi.

ERRATA-CORRIGE.

Annata XXII, fasc. IV, pag. 190:

invece di: $\frac{1}{2}(\mu^2+\mu+6)=0.$	si legga: $\frac{1}{2}(\mu^2-\mu+6)=0.$
" H. Young.	" W. H. Young.

Annata XXII, fasc. VI, pag. 292, linea 10:

invece di: $\frac{3(a^2-b^2)\pi}{8ab}$	si legga: $\frac{3(a^2-b^2)^2\pi}{8ab}$

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 31 luglio 1907

SOLUZIONE di un sistema omogeneo di n congruenze lineari ad n incognite rispetto ad un modulo qualunque [1]

Il chiar.mo prof. Gazzaniga nei suoi ben noti " Elementi della Teoria dei numeri " (cap. 2°, § 9), dove pure sono esposti non pochi dei più recenti risultati di questa scienza, accenna brevemente al problema della risoluzione di un sistema lineare omogeneo di congruenze e limitatamente al caso di un modulo primo.

Scopo quindi di questa breve nota è di presentare uno studio generale ed esauriente della questione, coll'assegnare in primo luogo la condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità del sistema con numeri non tutti nulli rispetto ad un modulo qualsiasi, determinando successivamente il numero delle soluzioni distinte ed indicando il modo per ottenerle, e col mostrare in fine come non sieno tutte indipendenti ma deducibili da alcune di esse.

Per raggiungere tale intento nel modo più semplice mi sono valso del concetto di *caratteristica* di un determinante rispetto ad un modulo qualsiasi, e di quello di *gruppo additivo*.

1°. Dato il sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n \equiv 0 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n \equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n \equiv 0 \end{array}\right\} \bmod m \qquad (1)$$

dove m è un intero qualunque, e posto

$$\Delta = \Sigma \pm a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

s'indichi con A_{ij} il complemento algebrico di a_{ij}. Escluso il caso $\Delta = 0$, che facilmente si può trattare con la sola teoria delle equazioni lineari, suppongasi che m e Δ non sieno primi tra loro, per cui, detto

$$\delta = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \ldots p_r^{\gamma_r}$$

(1) Per un largo studio sopra argomenti affini il lettore può consultare l'opera dello STIELTJES: *Essai sur la théorie des nombres*. Paris, Gauthier-Villars.

il loro massimo comun divisore, si faccia:

$$\Delta = \delta \,.\, Q \qquad m = \delta \,.\, q$$

con Q e q manifestamente primi tra loro.

Supponiamo da prima che non tutti i complementi algebrici delle a_{rs} sieno divisibili per δ, e si trovino in questa condizione

$$A_{i1}, A_{i2} \dots A_{in}.$$

Dalle identità:

$$\begin{array}{l} a_{11} A_{i1} + a_{12} A_{i2} + \dots a_{1n} A_{in} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots a_{in} A_{in} = \Delta \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} A_{i1} + a_{n2} A_{i2} + \dots a_{nn} A_{in} = 0, \end{array}$$

moltiplicando per q si ottengono le congruenze identiche:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} A_{i1} \,.\, q + a_{12} A_{i2} \,.\, q + \dots + a_{1n} A_{in} \,.\, q \equiv 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{i1} A_{i1} \,.\, q + a_{i2} A_{i2} q + \dots + a_{in} A_{in} \,.\, q \equiv \Delta q \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} A_{i1} \,.\, q + a_{i2} A_{i2} q + \dots + a_{nn} A_{in} \,.\, q \equiv 0 \end{array}\right\} \bmod m,$$

e si conclude che le (1) ammettono la soluzione:

$$x_1 \equiv A_{i1} \,.\, q, \quad x_2 \equiv A_{i2} \,.\, q, \dots x_n \equiv A_{in} \,.\, q \quad \bmod m,$$

in cui le x non possono essere tutte nulle, mod m, poichè altrimenti tutte le A_{ir} $(r = 1, 2, \dots n)$ sarebbero, contro l'ipotesi, multiple di δ.

Supponiamo ora che tutte indistintamente le A_{ij} sieno multiple di δ, e sia:

$$D = p_1^{\nu_1 + \lambda_1} \,.\, p_2^{\nu_2 - \lambda_2} \dots p_r^{\nu_r + \lambda_r}$$

il più grande dei loro divisori comuni composto con i soli fattori primi $p_1, p_2, \dots p_r$.

Per una nota proprietà dei determinanti reciproci si ha:

$$\Delta^{n-1} = \delta^{(n-1)} \,.\, Q^{(n-1)} = D^n \,.\, \Delta', \tag{2}$$

dove Δ' è il determinante il cui elemento generale è

$$\frac{A_{ij}}{D},$$

e dalla (2) si ricava quindi che Q dev'essere divisibile per $p_1, p_2 \dots p_r$.

Ammesso ora che tali fattori entrino in Q rispettivamente con gli esponenti $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_r$, sarà:

$$Q^{(n-1)} = p_1^{\mu_1(n-1)} \dots p_r^{\mu_r(n-1)} \,.\, Q',$$

e dovendo per la (2) essere $Q^{(n-1)}$ divisibile per

$$p_1^{\lambda_1 n + \nu_1} \dots p_r^{\lambda_r n + \nu_r},$$

se ne deduce:

$$\left.\begin{array}{ll} \mu_1(n-1) \geqslant \lambda_1 n + \nu_1 & \mu_1 \geqslant \dfrac{\lambda_1 n + \nu_1}{n-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \mu_r(n-1) \geqslant \lambda_r n + \nu_r & \mu_r \geqslant \dfrac{\lambda_r n + \nu_r}{n-1} \end{array}\right\}. \tag{3}$$

Ciò premesso, osservando che da quanto precede e dalle stesse relazioni (3) non si può dedurre se μ_i debba essere maggiore, eguale o minore di $\lambda_i + \nu_i$, conveniamo di indicare con σ_i la somma $\lambda_i + \nu_i$ nell'ipotesi $\mu_i \geqslant \lambda_i + \nu_i$, mentre se $\mu_i < \nu_i + \lambda_i$ si rappresenti con σ_i la frazione

$$\frac{\lambda_i \,.\, n + \nu_i}{n-1}, \tag{4}$$

qualora sia apparente, o diversamente l'intero successivo. Ciò stabilito, ne viene che la differenza

$$(\lambda_i + \nu_i) - \sigma_i$$

si riduce a zero per $\mu_i \geqslant \lambda_i + \nu_i$, mentre, se $\mu_i < \lambda_i + \nu_i$, essa risulta positiva e sempre minore di ν_i sia la (4) apparente o no.

Posto ora

$$\pi = p_1^{\sigma_1} \,.\, p_2^{\sigma_2} \dots p_r^{\sigma_r},$$

si dividano per π tutti i complementi algebrici di Δ: dico che i quozienti non potranno esser tutti divisibili per δ.

Infatti per ipotesi:

$$A_{ij} = p_1^{\nu_1+\lambda_1} \dots p_r^{\nu_r+\lambda_r} \,.\, A'_{ij},$$

dove non tutti i numeri A'_{ij} possono essere divisibili per tutti i fattori $p_1, p_2, \dots p_r$, e quindi ne viene che:

$$\frac{A_{ij}}{\pi} = p_1^{(\nu_1-\lambda_1-\sigma_1)} \dots p_r^{(\nu_r+\lambda_r-\sigma_r)} \,.\, A'_{ij},$$

essendo in ogni caso

$$\nu_i + \lambda_i - \sigma_i < \nu_i$$

non potrà essere divisibile per

$$\delta = p_1^{\nu_1} \,.\, p_2^{\nu_2} \dots p_r^{\nu_r}$$

qualunque sieno gli indici i ed j.

In conseguenza, esisterà un indice i pel quale

$$\frac{A_{i1}}{\pi}, \ \frac{A_{i2}}{\pi}, \dots \frac{A_{in}}{\pi}$$

non sarano tutti divisibili per δ.

Considerando ora le identità:

$$a_{11}\frac{A_{i1}}{\pi}.q+a_{12}\frac{A_{i2}}{\pi}q+\dots a_{1n}\frac{A_{in}}{\pi}.q=0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{i1}\frac{A_{i1}}{\pi}.q+a_{i2}\frac{A_{i2}}{\pi}q=\dots a_{in}\frac{A_{in}}{\pi}.q=\frac{\Delta}{\pi}.q$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{n1}\frac{A_{i1}}{\pi}q+\dots a_{n2}\frac{A_{i2}}{\pi}.q+\dots a_{nn}\frac{A_{in}}{\pi}.q=0;$$

e ricordando che

$$\Delta=(p_1^{\nu_1}\dots p_r^{\nu_r}).Q=(p_1^{\nu_1}\dots p^{\nu_r})(p_1^{\mu_1}\dots p_r^{\mu_r}).Q^1,$$

e che per le fatte convenzioni è

$$\sigma_i \leqslant \mu_i,$$

risulta immediatamente che $\frac{\Delta}{\pi}.q$ è multiplo di $m=\delta.q$, e che quindi

$$x_1\equiv\frac{A_{i1}}{\pi}q,\quad x_2\equiv\frac{A_{i2}}{\pi}.q\dots x_n\equiv\frac{A_{in}}{\pi}q,\quad \mathrm{mod}\ m$$

costituiscono una soluzione di (1) in numeri non tutti nulli mod m.

Rimane così provato che il non essere Δ ed m primi tra loro è condizione sufficiente alla risolubilità del sistema nel senso indicato.

Dimostriamo ora che essa è pure necessaria.

Supposto infatti che il sistema (1) sia solubile con numeri non tutti nulli, mod m, indichiamone con

$$x_1\equiv\alpha_1,\quad x_2\equiv\alpha_2,\dots x_n\equiv\alpha_n,\quad \mathrm{mod}\ m$$

una tale soluzione.

Dalle identità

$$a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\dots a_{in}\alpha_n=m.k_i$$
$$(i=1,2,\dots n)$$

si ricava

$$\Delta\alpha_1=m\begin{vmatrix} k_n & a_{n2}\dots a_{nn} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ k_1 & a_{12}\dots a_{1n}\end{vmatrix};$$

ed analogamente per $\alpha_2,\alpha_3\dots\alpha_n$, e quindi, non essendo tutte le α nulle, mod m, m non può esser primo con Δ.

Se $m=p$ numero primo, dev'essere allora Δ multiplo di p.

Nel caso particolare di una sola congruenza con una sola incognita

$$ax\equiv 0,\qquad \mathrm{mod}\ m,$$

se $\Delta = a$ è primo con m, essa è solubile solo da $x \equiv 0$, mod m; e diversamente posto

$$a = \delta . Q, \qquad m = \delta . q,$$

si scorge immediatamente che essa è soddisfatta da

$$x \equiv q, \qquad \text{mod}\, m,$$

e che anzi ammette le δ soluzioni incongrue mod m

$$q, \quad 2 . q, \quad 3 . q, \ldots, \delta . q = m.$$

2°. Consideriamo ora il sistema omogeneo di n congruenze rispetto ad un modulo primo p

$$a_{11}x_1 + a_{12} + \ldots + a_{1n}x_n \equiv 0, \quad \text{mod}\, p, \tag{5}$$

e supponiamo che Δ ed i suoi minori fino a tutti quelli d'ordine r inclusivamente sieno tutti nulli mod p; mentre tra quelli d'ordine $(r-1)$ ve ne sia uno almeno non multiplo di p e quindi primo con p: in altri termini supponiamo che Δ abbia per *caratteristica*, mod p, il numero $(r-1)$.

Immaginiamo quindi nominate le incognite e disposte le congruenze in modo che il minore di Δ formato con le prime $(r-1)$ linee e colonne sia primo con p, e consideriamo il determinante d'ordine r

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \ldots a_{1h} \\ a_{21}a_{22} \ldots a_{2h} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}a_{r2} \ldots a_{rh} \end{vmatrix},$$

essendo h uno qualunque degli indici

$$r, (r+1), \ldots n,$$

e si rappresenti con Δ'' il complemento algebrico di a_{rh}, che, per quanto precede, sarà primo con p.

Gli elementi

$$a_{r1}, a_{r2}, \ldots a_{r(r-1)}$$

possono sempre supporsi non tutti nulli mod p.

Se infatti essi fossero tutti multipli di p, non potendo trovarsi nell'analoga condizione tutti quelli di Δ'', ne viene che aggiungendo alla linea r^{esima} di Δ' alcune delle linee precedenti, si potrebbe sempre far in modo che detti elementi risultassero non tutti nulli, e ciò senza alterare Δ' nè Δ'', venendo così a sostituire in (5) alla congruenza di posto r un'altra equivalente.

Ciò premesso, consideriamo il sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{r-1\,1}y_{r-1} \equiv a_{r1} \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{r-1\,2}y_{r-1} \equiv a_{r2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1(r-1)}y_1 + a_{2(r-1)}y_2 + \ldots + a_{(r-1)(r-1)}y_{r-1} \equiv a_{r(r-1)} \end{array}\right\} \text{mod}\, p \tag{6}$$

da cui si ricava, essendo A_{ij} i minori di Δ'' d'ordine $(r-2)$,

$$\Delta'' y_1 \equiv a_{r1} A_{11} + a_{r2} A_{12} + \ldots a_{r(r-1)} A_{1(r-1)}$$

ed analoghe per $y_2, y_3 \ldots y_{r-1}$.

Δ'' per ipotesi è $\not\equiv 0$, mod p, e d'altra parte non può essere, qualunque sia $i = 1, 2, \ldots (r-1)$,

$$a_{r1} A_{i1} + a_{r2} A_{i2} \ldots a_{r(r-1)} A_{i(r-1)} \equiv 0 \qquad (7)$$

senza che, non essendo tutti nulli, mod p,

$$a_{r1}, a_{r2}, \ldots a_{r(r-1)},$$

sia nullo mod p il determinante reciproco di Δ'': ma quest'ultimo è primo con p e quindi tale sarà il suo reciproco, e si conclude quindi che la (7) non può verificarsi qualunque sia i e che perciò il sistema (6) è solubile con numeri non tutti nulli, mod p.

Dopo ciò detta

$$y_1 \equiv \lambda_1, \quad y_2 \equiv \lambda_2 \ldots y_{r-1} \equiv \lambda_{r-1},$$

una tale soluzione, consideriamo il determinante che si ottiene da Δ' aggiungendo all'ultima linea orizzontale le precedenti moltiplicate rispettivamente per

$$-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots -\lambda_{(r-1)}.$$

Il determinante non muta di valore, e sviluppato secondo gli elementi dell'ultima orizzontale che, ad eccezione dell'ultimo, sono tutti nulli, mod p, ci dà:

$$\Delta' = \Delta'' . (a_{rh} - a_{1h}\lambda_1 - a_{2h}\lambda_2 \ldots - a_{(r-1)h} . \lambda_{(r-1)}).$$

Ma Δ', che è d'ordine r, è per ipotesi nullo, mod p, e quindi non essendolo Δ'' si conclude:

$$a_{rh} - a_{1h}\lambda_1 - a_{2h}\lambda_2 \ldots - a_{(r-1)h}\lambda_{(r-1)} \equiv 0 \quad \text{mod } p.$$

Se ora si ricorda che h è uno qualunque dei numeri

$$r, \quad (r+1), \ldots \quad n,$$

si conclude che tutti gli elementi della linea r^{esima} sono la medesima combinazione lineare degli elementi delle linee precedenti ed appartenenti alle loro rispettive colonne e che quindi l'r^{esima} congruenza dipende dalle precedenti al pari delle altre che le succedono.

Concludiamo che se il determinante di un sistema omogeneo di n congruenze ad n incognite, mod p, ha per caratteristica $(r-1)$, nel sistema possono esservi al più $(r-1)$ congruenze tra loro indipendenti.

Si prova però subito che ve ne sono sempre $(r-1)$ soddisfacenti a tale condizione.

Se infatti tra le $(r-1)$ congruenze

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \equiv 0, \quad \bmod p,$$
$$i = (1, 2, \ldots (r-1)$$

ve ne fosse una conseguenza delle rimanenti, nel determinante Δ'' gli elementi d'una orizzontale dovrebbero essere congrui, mod p, alla stessa combinazione lineare degli elementi delle altre orizzontali ed appartenenti alle loro rispettive colonne, e sarebbe quindi Δ'' nullo, mod p, contro l'ipotesi.

3°. Dato ora il sistema (5), e supposto che Δ vi abbia per caratteristica $(r-1)$, consideriamo l'altro:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{i(r-1)} \cdot x_{r-1} \equiv -(a_{ir}x_r + \ldots a_{in}x_n) \quad \bmod p \qquad (8)$$
$$i = (1, 2, \ldots (r-1)),$$

in cui $\Delta'' = \Sigma \pm a_{11}a_{22} \ldots a_{(r-1)(r-1)}$ è per ipotesi primo a p.

Attribuiamo alle $n-(r-1)$ incognite

$$x_r, x_{r-1}, \ldots x_n$$

valori arbitrari interi per es.:

$$x_r \equiv \beta_r, x_{r+1} \equiv \beta_{r+1}, \ldots x_n \equiv \beta_n, \qquad \bmod p.$$

Al sistema di valori (β) corrisponderà per le

$$x_1, x_2, \ldots x_{r-1}$$

uno ed un solo sistema di valori

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{r-1},$$

comunque risultino i secondi membri

$$-(a_{ir}\beta_r + \ldots a_{in}\beta_n),$$

inquantochè Δ'' è primo con p.

Ad ogni sistema (β) viene così subordinato un sistema (α), e le (β) e le (α) col loro insieme costituiscono una soluzione di (8), e quindi anche di (5).

Ma tutti i possibili diversi sistemi (β) sono in numero di

$$p^{n-(r-1)},$$

e quindi altrettante saranno le soluzioni di (5), le quali differiranno tra loro almeno pei valori delle

$$x_r, x_{r-1}, \ldots x_n.$$

Se la caratteristica di Δ ha il suo massimo $(n-1)$, il numero delle soluzioni si riduce a p.

4°. Consideriamo ora il caso che il modulo sia una qualsiasi potenza d'un numero primo p, p^m non primo con Δ, ed ammettiamo che solo tra i minori d'ordine $(r-1)$ se ne trovi uno primo con p, mentre tutti quelli d'ordine maggiore sieno divisibili per una qualche potenza di p: in altri termini Δ abbia $(r-1)$ per caratteristica, mod p.

Indichiamo quindi con p^{m_1} la massima potenza di p che divide Δ e tutti i suoi minori fino a quelli d'ordine $(r-1)$ esclusi.

Con un procedimento del tutto analogo a quello usato precedentemente potremo sempre immaginare trasformato il sistema (5) in un altro equivalente senza che perciò venga a mutare Δ, e che, nei rapporti della congruenza, mod p^{m_1}, vengano a mutare i suoi minori; intendendo con ciò che se un certo minore era prima della trasformazione divisibile per p^{m_1}, tale si conserva anche dopo, senza però che si debba verificare in ogni caso l'inversa.

Δ verrà così ad assumere la forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1(r-1)} & a_{1r} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2(r-1)} & a_{2r} & \dots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{(r-1)1} & a_{(r-1)2} & \dots a_{(r-1)(r-1)} & a_{(r-1)r} & \dots a_{(r-1)n} \\ 0 & 0 & \dots 0 & \alpha_{rr} & \dots \alpha_{rn} \\ 0 & 0 & \dots 0 & \alpha_{(r+1)r} & \dots \alpha_{(r+1)n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots 0 & \alpha_{nr} & \dots a_{nn} \end{vmatrix},$$

dove α_{rr} rappresenta come al § 2 l'espressione

$$a_{rr} - \lambda_1 a_{1r} - \lambda_2 a_{2r} - \dots - \lambda_{r-1} a_{(r-1)r},$$

ed analogamente per le altre α, ed il minore

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{(r-1)(r-1)}$$

si suppone primo con p.

Se ora poi si osserva che tutti i minori di Δ d'ordine r, che hanno in comune il determinante delle prime $(r-1)$ linee e colonne, in seguito alla nuova struttura di Δ assumono la forma:

$$\alpha \,.\, \Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{(r-1)(r-1)},$$

se ne deduce in virtù dell'ipotesi e di quanto precede che:

$$\alpha \,.\, \Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{(r-1)(r-1)} \equiv 0, \qquad \text{mod } p^{m_1}$$

ed infine che:

$$\alpha \equiv 0, \qquad \text{mod } p^{m_1}.$$

Ponendo poi mente al sistema (5) così trasformato, si scorge che, mentre si può asserire, come nel caso di un modulo primo, l'indipendenza delle prime $(r-1)$ congruenze, non si può però concludere che esse sieno le sole indipendenti.

Infatti, mentre il sistema formato con le prime $(r-1)$ congruenze è sempre risolubile, qualunque sieno i valori, mod p, che si possano attribuire alle

$$x_r, x_{r+1} \dots x_n,$$

al contrario per le $(n-(r-1))$ congruenze:

$$\alpha_{ir} x_r + \alpha_{i(r+1)} x_{r+1} + \dots \alpha_{in} x_n \equiv 0, \qquad \text{mod } p^m,$$

dove i è uno dei numeri

$$r, r+1, \dots n,$$

non si può ammettere la stessa proprietà altro che con le condizioni:

$$\alpha_{ir} \equiv \alpha_{i(r+1)} \equiv \dots \alpha_{in} \equiv 0, \qquad \text{mod } p^m,$$

le quali, in generale, non si verificheranno.

Nel caso del modulo p^m, la caratteristica di Δ ci dà quindi soltanto il minimo del numero delle congruenze indipendenti.

Da quanto precede risulta ora che il sistema proposto si scinde nei due:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots a_{1n} x_n \equiv 0 \\ a_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \dots a_{2n} x_n \equiv 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{(r-1)1} x_1 + a_{(r-2)2} x_2 + \dots a_{(r-1)n} x_n \equiv 0 \end{array}\right\} \text{mod } p^m \qquad (a)$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{rr} x_r + \alpha_{r(r+1)} x_{r-1} + \dots \alpha_{rn} x_n \equiv 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{nr} x_r + \alpha_{n(r+1)} x_{r-1} + \dots \alpha_{nn} x_n \equiv 0 \end{array}\right\} \text{mod } p^m \qquad (\alpha)$$

e che il numero delle sue soluzioni e le soluzioni stesse dipenderanno dal sistema (α).

Come s'è visto, i coefficienti di (α) sono tutti nulli, mod p^{m_1}, e quindi, dividendoli tutti per p^{m_1}, la risoluzione di (α) si farà dipendere da quella del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha'_{rr} x_r + \dots \alpha'_{rn} x_n \equiv 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \alpha'_{nr} x_r + \dots \alpha'_{nn} x_n \equiv 0 \end{array}\right\} \text{mod } p^{m-m_1} \qquad (\alpha')$$

Supponiamo ora che

$$\Sigma \pm \alpha'_{rr} \alpha'_{(r+1)(r+1)} \dots \alpha'_{nn}$$

sia primo con p. In tale ipotesi (α') ammette l'unica soluzione (§ 1)

$$0 \equiv x_r \equiv x_{r+1} \equiv \dots x_n, \qquad \text{mod } p^{m-m_1},$$

e quindi (α) ammette le soluzioni:

$$x_r \equiv k_r \,.\, p^{m-m_1}\; x_{r+1} \equiv k_{r+1}\, p^{m-m_1} \dots x_n \equiv k_n\, p^{m-m_1} \quad \text{mod } p^m$$

dove le k possono variare, indipendentemente l'una dall'altra, da 0 a $(p^{m_1}-1)$, e che sono, manifestamente, incongrue mod p^m ed in numero di

$$(p^{m_1})^{n-(r-1)}.$$

Ma ad ogni soluzione di (α) corrisponde una soluzione per (a), e quindi ad ogni soluzione di (α) una soluzione di (1) ed a soluzioni diverse per (α) soluzioni diverse (almeno nei valori delle $x_r\, x_{r-1} \ldots x_n$) anche per (1).

Se

$$\Sigma \pm \alpha'_{rr}\, \alpha'_{(r+1)(r+1)} \ldots \alpha'_{nn}$$

non è primo con p, il sistema (α'), oltre alla soluzione nulla, ammette pure (§ 1) soluzioni con numeri non tutti nulli rispetto al modulo, e detto σ il loro numero, si dedurrà come precedentemente che il numero delle soluzioni di (α), e quindi anche di (5), sarà dato da

$$\sigma \,.\, (p^{m_1})^{n-(r-1)}.$$

Posto ora che r_1, m_2 abbiano rispetto ad (α') lo stesso significato di r ed m_1 rispetto a (5), si avrà per σ l'espressione

$$\sigma = (p^{m_2})^{n-(r-1)-(r_1-1)} \,.\, \sigma_1\,,$$

dove σ_1 si ridurrà all'unità qualora il determinante dedotto da (α') nello stesso modo che

$$\Sigma \pm \alpha'_{rr} \ldots \alpha'_{nn}$$

è stato dedotto da (5), sia primo con p, mentre che diversamente σ_1 indicherà il numero delle soluzioni di un sistema (α'') che sta rispetto ad (α') come α' rispetto a (5).

Avremo quindi che il numero delle soluzioni di (5) verrà dato dalla formula:

$$(p^{m_1})^{n-(r-1)} \,.\, (p^{m_2})^{n-(r-1)-(r_1-1)} \,.\, \sigma_1.$$

È ormai palese, dopo ciò, la struttura della formula che somministra il numero delle predette soluzioni e come esso dipenda oltre che da p e da n dai numeri $m_1, m_2, \ldots$; $r, r_1, r_2 \ldots$: e si comprende pure come tali soluzioni si possano determinare in ogni caso per un p^m qualunque.

Se $m_1 = m$ la questione si semplifica notevolmente: come nel caso di un modulo primo le congruenze indipendenti sono in numero di $(r-1)$, e quindi pel numero delle soluzioni si trova:

$$(p^m)^{n-(r-1)},$$

come si troverebbe pure qualora, pur essendo $m_1 < m$, tutti i coefficienti α del sistema (α) fossero nulli mod p^m.

5°. Per trattare ora il caso generale di un modulo qualunque M supponiamolo scomposto nel prodotto di due fattori M_1, M_2 primi tra loro, ed indichiamo rispettivamente con σ_1, σ_2 il numero delle soluzioni di (1) rispetto ad M_1 ed M_2.

Se entrambi i numeri M_1, M_2 sono primi con Δ, tale pure essendo M, ne segue (§ 1) che il sistema (1) ammette l'unica soluzione nulla o $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$: diversamente uno almeno dei due numeri σ sarà maggiore dell'unità.

Sia ora:

$$x_1 \equiv \alpha_1 \quad x_2 \equiv \alpha_2 \ldots x_n \equiv \alpha_n, \qquad \text{mod } M_1,$$

una soluzione qualunque di (1) mod M_1, e parimenti

$$x_1 \equiv \beta_1, \quad x_2 \equiv \beta_2, \ldots x_n \equiv \beta_n, \qquad \text{mod } M_2,$$

una qualsiasi soluzione mod M_2.

Com'è palese:

$$(9) \quad x_1 \equiv M_2\alpha_1 + M_1\beta_1, \; x_2 \equiv M_2\alpha_2 + M_1\beta_2, \ldots x_n \equiv M_2\alpha_n + M_1\beta_n, \quad \text{mod } M,$$

costituirà una soluzione di (1) mod M.

Combinando quindi ciascuna soluzione di (1), mod M_1, con ciascuna di quelle, mod M_2, otterremo così un numero di soluzioni di (1), mod M, che verrà dato dal prodotto $\sigma_1 . \sigma_2$: dico che esse sono incongrue, mod M.

Ammesso infatti che per $i = 1, 2, 3, \ldots n$

$$M_2\alpha_i + M_1\beta_i \equiv M_2\alpha'_i + M_1\beta'_i, \qquad \text{mod } M,$$

dove con le α e le α' s'indicano due distinte soluzioni, mod M_1, e parimenti con β, β' due distinte soluzioni, mod M_2, se ne dedurrebbe:

$$M_2(\alpha_i - \alpha'_i) \equiv 0, \qquad \text{mod } M_1$$
$$M_1(\beta'_i - \beta_i) \equiv 0, \qquad \text{mod } M_2$$

e quindi:

$$\alpha_i \equiv \alpha'_i, \quad \text{mod } M_1, \qquad \beta_i \equiv \beta'_i, \quad \text{mod } M_2$$

contrariamente all'ipotesi.

Premesso quindi che, per l'omogeneità del sistema, moltiplicando una soluzione per un intero qualsiasi si ottiene una nuova soluzione, proviamo come ogni soluzione di (1), mod M, si possa ridurre alla forma (9).

Ammesso infatti che $x_i \equiv \mu_i$, mod M, $(i = 1, 2, \ldots n)$ sia una di esse, è chiaro che dovrà essere contemporaneamente:

$$\mu_i \equiv \alpha_i, \qquad \text{mod } M_1$$
$$\mu_i \equiv \beta_i, \qquad \text{mod } M_2$$

da cui, secondo un noto teorema degli Elementi della teoria dei numeri:

$$\mu_i \equiv M_2^{\varphi(M_1)} . \alpha_i + M_1^{\varphi(M_2)} . \beta_i, \qquad \text{mod } M$$

e posto:

$$M_2^{\varphi(M_1)} = k_2 M_2 + q_2 M$$
$$M_1^{\varphi(M_2)} = k_1 M_1 + q_1 M$$

con

$$k_2 < M_1 \qquad k_1 < M_2$$

si ricava infine:

$$\mu_i \equiv M_2 \,.\, k_2 \alpha_i + M_1 k_1 \beta_i \,, \qquad \text{mod } M$$

dove

$$k_2 \alpha_i ,\ k_1 \beta_i \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

rappresentano, per quanto s'è detto poc'anzi, due soluzioni rispettivamente secondo i moduli M_1, M_2.

Dopo ciò si comprende subito come il numero delle soluzioni e le soluzioni stesse del proposto sistema rispetto al modulo più generale:

$$M = p_1^{m_1} \,.\, p_2^{m_2} \dots p^{m_s}$$

si deducano da quelle di (1) considerato rispettivamente secondo i moduli

$$p_1^{m_1}, p_2^{m_2}, \dots p_s^{m_s}.$$

6°. Rappresentando simbolicamente con (s_i) una qualsiasi delle σ soluzioni del sistema (1) mod M:

$$x_1 \equiv \alpha_{1i} \quad x_2 \equiv \alpha_{2i}, \dots x_n \equiv \alpha_{ni}, \qquad \text{mod } M$$

notiamo che l'insieme

$$(s_1), (s_2), \dots (s_\sigma) \tag{10}$$

dove (s_1) rappresenta la soluzione nulla

$$x_1 \equiv 0, \quad x_2 \equiv 0, \dots x_n \equiv 0, \qquad \text{mod } M$$

ammette le seguenti proprietà.

a) Esiste una legge di composizione secondo cui da due qualunque delle (10) si ricava una delle stesse.

Infatti se con $(s_i) + (s_k)$ s'intende rappresentare il complesso degli n resti, mod M,

$$(\alpha_{1i} + \alpha_{1k}), (\alpha_{2i} + \alpha_{2k}), \dots (\alpha_{ni} + \alpha_{nk}),$$

si scorge immediamente che essi forniscono una soluzione di (1), mod M, e che quindi si potrà porre:

$$(s_i) + (s_k) = (s_j)$$

b) Una tale legge di composizione ammette la proprietà associativa.

c) Da ciascuna delle due ipotesi:

$$(s_i) + (s_k) = (s_i) + (s_j)$$
$$(s_k) + (s_i) = (s_j) + (s_i)$$

segue in ogni caso

$$(s_k) = (s_j).$$

Da queste tre proprietà si deduce (¹) che gli elementi (10) costituiscono un *gruppo* rispetto alla suindicata legge di composizione che ammette quale modulo la soluzione nulla (s_1).

Di più essendo, per indici qualunque,

$$(s_i)+(s_k)=(s_k)+(s_i)$$

il gruppo è abeliano.

Considerando ora la successione

$$(s_i),\quad ((s_i)+(s_i)),\quad ((s_i)+(s_i)+(s_i))\ldots$$

che potremo indicare con

$$(s_i),\quad 2(s_i),\quad 3(s_i)\ldots$$

i cui elementi sono tutti in (10), si deduce, essendo il gruppo finito, l'esistenza per ogni (s_i) di un coefficiente o periodo λ_i tale che:

$$\lambda_i\,.\,(s_i)\equiv(s_1),$$

e le

$$(s),\quad 2(s_i),\ldots\lambda_i\,.\,(s_i)$$

sieno tutte tra loro incongrue, mod M.

Segue ora dalla teoria generale di gruppi d'operazioni (²) che, essendo il gruppo (10) abeliano, si potrà sempre determinare un sistema di soluzioni

$$(s_{i_1}),\quad (s_{i_2}),\ldots(s_{i_\nu})$$

rispettivamente di periodi

$$\lambda_1\quad \lambda_2\ldots\lambda_\nu$$

e tra loro indipendenti nel senso che l'ipotesi

$$k_1(s_{i_1})+k_2(s_{i_2})+\ldots k_\nu(s_{i_\nu})\equiv 0\equiv(s_1),\quad \text{mod M},$$

sia ammissibile solo qualora

$$k_1\equiv k_2\equiv\ldots\equiv k_\nu,\quad \text{mod M},$$

tale che l'espressione

$$k_1(s_{i_1})+k_2(s_{i_2})+\ldots k_\nu(s_{i_\nu})$$

variando ciascuna delle k tra 0 e $(\lambda-1)$ riproduca tutte e ciascuna una sol volta le soluzioni di (1), mod M.

La risoluzione di (1), mod M, dipende quindi tutta dalla determinazione di una *base* o *sistema fondamentale* del gruppo abeliano (10). Tale determinazione si può fare in diversi modi, restando però sempre costanti il numero delle soluzioni ed i loro periodi.

UMBERTO SCARPIS.

Bologna, 1907.

(¹) WEBER, *Lehrbuch der Algebra.* Tomo II, Cap. 1°, § 1°.

(²) WEBER, *op. cit.* Tomo II, Cap. 2°, § 9-10.

DI ALCUNI PERFEZIONAMENTI

nella risoluzione grafica dell'angolo triedro

Malgrado l'argomento sia assai elementare, e ne siano da tempo risapute le facili soluzioni, ho nonpertanto creduto perfezionarne talune: quelle cioè relative a' due casi più importanti, ove sono date due facce, o due diedri, ed uno dei diedri o delle facce opposte; studiandone la discussione e le verifiche, che nei trattati soglionsi indicare pel solo caso in cui son note le tre facce.

E sarà agevole osservare le semplificazioni ed i miglioramenti apportati alla soluzione del primo di quei problemi, in confronto alla consueta; mentre senza abbandonare, pel secondo, la solita soluzione, che è tuttavia la più semplice (l'ho peraltro completata collegandone meglio le varie parti del tracciato) [1] ne propongo, inoltre, una variante, che riguarda la posizione de' dati rispetto al piano del disegno. La soluzione è così resa più uniforme a quella del primo, e consente, come si vedrà in fine, una verifica assai facile e spontanea.

Problema I. — Date due facce (Tav. I, Fig. 1ª) BSA, ASC di un triedro ed uno dei diedri opposti, β p. es., determinare la terza faccia e gli altri elementi.

Soluzione. — Distese le due facce date nel piano del disegno, e da bande opposte del comune spigolo AS, da un punto O qualsivoglia di questo si conducano la OO_1 [1] [2] parallela e la OP [2] perp. a BS, non che la XX [3] perp. ad AS: fatto indi l'angolo $O_1 o O = \beta$ e così determinato il triang. rett. $O_1 o O$, se ne riportino [4] il cateto O_1O sulla AS in O_2O e l'ipotenusa O_1o in $o(O_2)$ sulla OP, e si congiunga il punto K con O_2 ed (O_2) [5]. Fissate poscia le intersezioni R_1 ed R_2 [6] della circ. OR [3] con la retta KO_2, le si riportino mediante gli archi circolari KR_2 e KR_1 [7], sulla $K(O_2)$ risp. in (R_2) ed in (R_1); i quali ultimi congiunti infine con S [8] daranno, rife-

---

(1) Purchè non troppe da ingombrare, le linee di riferimento che indicano il passaggio dai dati ai risultati nella traduzione grafica di un problema geometrico, ne rendano più facile e, talvolta, immediata l'intelligenza: ecco in che consiste l'accennato *collegamento*. Mentre, ove occorra, l'uso moderato di numeri progressivi e di frecce apposte alla figura, ed una breve leggenda, sinossi ordinata delle successive operazioni, fanno raggiunger meglio quello scopo.

Di ciò è un saggio in una mia nota " Sul cambiamento simultaneo de' piani di projezione ". (V. *Periodico di Matem.* Roma, 1893.)

(2) Questi numeri fra parentesi corrispondono a quelli, già altrove indicati, della figura.

(3) Così indico la circonf., od un suo arco, di centro O e raggio OR.

rendosi alla BS, le due ampiezze (in generale) BSC_1 e BSC_2 della terza faccia richiesta.

Note così le tre facce del triedro, se ne completi la soluzione, determinando, come al solito, gli angoli diedri.

Dimostrazione. — Se consideriamo infatti come piano orizzontale quello della faccia ASB, la XX come linea di terra e come piano verticale quello per O perp. ad AS, saranno O_2K e KS le tracce del piano della faccia incognita, e $K(O_2)$ il ribaltamento sul p. o. della sua traccia vert.; [1] mentre, com'è ovvio, la circonf. descritta dal punto R, nel rotare attorno ad AS della faccia ASC, non può altrimenti incontrare, se ciò avviene, il piano della CSB che in quella sua retta O_2K.

Osservazione. — Si noti, infine, che la determinazione della $K(O_2)$ deve preceder quella dei punti (R_1) ed (R_2): dai quali invece suolsi incominciare, trascurando, ch'io mi sappia, di mettere in evidenza il loro allineamento con K.

Nè v'ha dubbio che la costruzione, così modificata, sia più razionale e più semplice di quella risaputa: ma è anche preferibile nei riguardi dell'esattezza, giacchè, p. es., il punto (O_2) della OP è più precisamente determinato per intersezione con la circ. oO_1 anzichè, come suol farsi, con la circ. SR: la prima incontrando normalmente, e la seconda obliquamente quella retta.

Delle altre costruzioni, che in proposito dànno i trattati, talune preferirò considerare in seguito come verifiche.

Discussione. — 1°. Se i dati del problema sono tali che ne risulti il segmento $OR = OT$ (T essendo il piede della perp. da O sulla KO_2) il cono generato dal rotare intorno ad AS dello spigolo SC sarà tangente al piano che fa l'ang. β con la faccia BSA, e vi corrisponderà, per la terza faccia da trovare, il valore unico BS(T): i punti T e (T) essendo stati successivamente dedotti da T_1, come da R i punti R_1, R_2, e da questi poscia (R_3) ed (R_2).

Si ha in tal caso una sola soluzione: l'ampiezza data AST_1 rappresentando il valor minimo che può avere quella faccia, affinchè con gli altri dati del problema, sia possibile il triedro; ed il suo piano risulterà, com'è ovvio, perp. a quello della faccia CSB opposta ad AS. Mentre se $OR < OT$ il problema, com'è evidente, non ammette soluzione.

2°. Se $OT < OR < OK$ (quindi $ASC < ASB$ ma però $ASC >$ del valor minimo anzidetto) si hanno allora due soluzioni: quelle, cioè, già trovate BSC_1 e BSC_2, com'è ovvio diseguali, e che sodisfano entrambe il problema.

---

[1] Si è così risoluto il Probl. ausiliare: Data la traccia orizz. BS di un piano che fa l'ang. β col piano orizz. trovarne la traccia vert. KO_2; ovvero, data la grandezza β di un diedro, determinarne la sezione obliqua O_2KO secondo il piano per O perp. ad AS (la costruzione potendosi anco interpetrare come un cambiamento del piano vert. passante dapprima per OP e poscia per XX).

3°. Se pur essendo, come prima, $OR > OT$, è inoltre (Tav. I, Fig. 2ª) [1] $OR > OK$, cioè $ASC > ASB$, delle due soluzioni provenienti dai suddetti punti R_1 ed R_2, l'ultima, cioè BSC_2, è da rigettare: perchè, contrariamente ai dati, sarebbe la faccia ASC allora opposta, com'è chiaro, ad un angolo diedro uguale a $180^0 - \beta$.

4°. Nel caso infine di $OR = OK$, quando cioè sono eguali le due facce date BSA ed ASC, si ha del pari una sola soluzione, che è quella proveniente dall'unico punto R_1: giacchè la seconda intersezione della KO_2 con la circ. OR (già segnata R_2) coincide ora col punto K, e vi corrisponde il sovrapporsi delle due uguali facce date. Epperò, annullandosi nel contempo il diedro compreso e la faccia opposta, il triedro cesserebbe di esistere.

Riassumendo: il problema può ammettere una, due o nessuna soluzione.

Ma ecco infine talune facili

Verifiche del tracciato che possono, occorrendo, sostituire alcune parti della già indicata costruzione.

a) Gli anzidetti punti (R_2), (T), (R_1) sono necessariamente allineati con K e sulla $K(O_2)$, ed il punto (O_2), dianzi determinato, può diversamente ottenersi per intersezione della OP con l'una o con l'altra delle due circ. KO_2 ed SO_3. (V. le *osservazioni* che seguono la soluzione del problema.)

b) I punti, inoltre, (R_2) (T) ed (R_1), dianzi ottenuti sulla $K(O_2)$, possono anche determinarsi per intersezione risp. o per tangenza di quella retta con le circ. SR ed ST_1; ovvero, come si suol fare, conducendo da R_1 per es. la perp. sulla XX e dal suo piede R'_1 su questa la perp. ad SB sino a tagliare in (R_1) la circ. SR, o, se già determinata, la retta $K(N)$.

c) L'angolo $K(T)S$ è necessariamente retto; ed essendo il punto (T) centro del segmento $(R_2)\,(R_1)$, ne viene che la grandezza della faccia minima $BS(T)$, di cui avanti, è quanto la semisomma delle BSC_1 e BSC_2 nel caso della Fig. 1ª o quanto la loro semidifferenza in quello della Fig. 2ª della Tav. I.

d) Altre facili verifiche consente l'omotetia rispetto al centro K della figura pentagonale KO_1O_2O o (O_2) [ove, si noti, sono eguali i segmenti O_2O ed O_1O; oO_1 ed $o(O_2)$] con le altre nelle quali al punto O_2 p. es. corrispondono ordinatamente i punti R_1, T, R_2: d'onde eguaglianze di segmenti e parallelismo di rette. Così p. es. un cateto e l'ipotenusa del triang. rett. $t^*T't_2$ saranno risp. eguali a TT' ed a $t_2(T)$ ecc. mentre riesciranno parallele alla O_1O_2 le $t^*T\ldots$; alla O_2O le $R_1R'_1$, $TT'\ldots$; alla $Oo(O_2)$ le $R'_1(R_1)\ldots$; alla $(O_2)O_2$ le $(R_1)R_1\ldots$; alla $(O_2)O_1$

[1] La congiungente $R_2R'_2$ (e non $R'_2R'_2$ e *circolare* come ritenne l'incisore) è invece necessariamente *retta* e perp. inoltre alla $K\ldots O'_2\ldots O_2$: giacchè dessa indica la proj. ortog. di R_2 su quella linea.

le $(T)t^*\ldots$; alla O_1O le $t^*T'\ldots$ ecc.... Potrebbe quindi farsi a meno p. es. degli archi circolari Tt^* e $t^*(T)$ di centri T' e t_2 che risp. conducono da T a t^* e da questo a (T).

e) Tirando ad ST_1 la perp. in T_1 sino all'incontro con la AS, e poscia costruendo sulla base KL il triang. coi lati $LT^* = LT_1$ e $KT^* = K(T)$, desso risulterà com'è ovvio, rettangolo nel vertice T^*; il quale sarà inoltre allineato coi punti T' e S perpendicolarmente all'anzidetta KL.

Osservazioni. — Si noti infine che la molteplicità (qui la sovrabbondanza) delle costruzioni, colle quali si può in differenti modi risolvere una data quistione geometrica (risulta p. es. dai precedenti che l'anzidetto punto (O_2) trovasi su tre distinte circonferenze e su quattro diverse rette) se rende talvolta poco nitido il disegno, (1) è d'altra parte utile, poichè tenuto conto della possibilità di elementi fuori il quadro o d'intersezioni con angoli molto acuti, non che de' risaputi principî della Geometrografia del Lemoine, si ha l'agio di scegliere, anche nei riguardi della semplicità e dell'esattezza, la più conveniente fra quelle costruzioni.

Problema II. — Dati due diedri α e β di un triedro ed una delle facce opposte, quella p. es. ASC che si oppone all'ultimo, determinare gli altri elementi.

Soluzione. — Considerando, come suol farsi, quale piano del disegno (Tav. II, Fig. 1ª) quello della faccia incognita adiacente ai due dati diedri, vi si supponga ribaltata, da banda opposta dello spigolo comune AS in ASC_1 la faccia nota ASC: si conduca quindi per un punto qualsivoglia di quello spigolo la perp. indefinita MN e, fatto l'angolo $C\alpha N = \alpha$, si riporti AC_1 in AC, si guidi CC' perp. ad MN e si tiri poi Ct che faccia con MN l'ang. β eguale all'altro dei due dati: le tangenti allora che da S si possono condurre alla circ. $C't$, riferite alla SA, dànno le due ampiezze AST^* ed AST della faccia cercata opposta allo spigolo CS; mentre pel valore della terza faccia vi corrisponde, riferendosi tanto all'una che all'altra di quelle due soluzioni, la medesima ampiezza angolare BSC_2; la quale facilmente si determina prendendo sulla $C'T$ perp. ad SB, il segmento $TC_2 = Ct$.

Ma, a fine di collegar meglio fra loro le linee del tracciato si preferisca, abbenchè meno semplice, di riportare anzitutto CC' in $(C)C'$ parallela ad SB, e tirato il segmento (C)T, che risulta eguale al precedente Ct, lo si riporti in TC_2 e se ne congiunga l'estremo C_2 con S.

(1) Si poteva, forse, ovviare a quell'inconveniente collo scindere in separate figure le differenti costruzioni cumulate in unico tracciato, però accrescendo il numero delle tavole; ma non si è creduto di farlo, sopratutto nel dubbio che ne divenissero meno facili i criterii comparativi per la migliore scelta fra quelle costruzioni. Un'accurata descrizione peraltro delle operazioni da eseguire, e gli artificii, già altrove suggeriti, suppliscono senz'altro a quell'apparente diminuzione di chiarezza non venendosi così a smentire la vantata semplicità del tracciato

Si completa la soluzione determinando, come al solito, il terzo angolo diedro.

Osservazioni. — È anche utile conoscere, come or si vedrà, l'angolo che lo spigolo SC fa col piano della faccia opposta: angolo evident. eguale a quello in S del triang. $(C_1)C'S$ rettang. in C'; può quindi considerarsi come

Verifica dell'esattezza di quel tracciato l'essere i punti (C_1) e (C_2), dianzi trovati, entrambi sulla circ. SC_1: potrebbe quindi C_2 determinarsi altrimenti, per intersezione cioè di C'T con quella circonferenza.

Discussione. — 1°. L'anzidetto ang. $(C_1)SC'$, che lo spigolo SC fa con la faccia opposta, dà evidentemente, il valor minimo che può assegnarsi al diedro β affinchè, con gli altri dati del problema, sia possibile il triedro; e vi corrispondono per le facce che lo comprendono, risp. le ampiezze ASB* e CSB*: la prima ottenuta conducendo SB* tangente in S alla circ. C'S e l'altra coi lati ad angolo retto e che si proietta in vera grandezza in C'SB*.

2°. Se fra i due diedri dati sussiste la relazione $\beta > \alpha$ (β essendo il diedro opposto alla faccia nota) epperò $Ct < Ca$, delle due soluzioni fornite dalle anzidette tangenti al cerchio $C't$, è da scartare quella AST*, che apparterrebbe ad un triedro avente, in opposizione ai dati, un angolo diedro eguale a $180° - \beta$.

3°. Se è, invece, $\beta \lesseqgtr \alpha$ (epperò $Ct \gtreqless Ca$) si avrebbe allora nell'ultimo caso, com'è ovvio, una sola soluzione, dovendo rinunciare a quella in cui una faccia verrebbe ad opporsi all'ang. $180° - \alpha$; mentre per $\beta = \alpha$, essendo eguali le due facce risp. opposte che contengono lo spigolo SC (quindi $C't = CA$), l'anzidetto cerchio risulterà tangente in a allo spigolo SA: giacchè quelle due eguali facce sovrapponendosi, si annullerebbero nel contempo sia il diedro γ compreso che la terza faccia.

4°. Se, qualunque sia α, è $\beta = 90°$, quel cerchio di centro C' riducendosi ad un punto, si ha una sola soluzione; e la faccia opposta ad α avrebbe il valor minimo possibile. Se è invece $\alpha = 90°$, potendo sempre condurre per lo spigolo SC due piani che fanno l'angolo dato β col piano della faccia incognita, in questo verrebbe sempre ad aversi la medesima ampiezza angolare pel valore della faccia che vi giace, risultandone due triedri distinti e simmetricamente uguali rispetto al piano della faccia CSA.

Ma ecco, infine, come si accennò sin dal principio, una

Variante alla soluzione del Probl. II.

Si consideri ora come piano del disegno (Tav. II, Fig. 2ª) non più quello della faccia incognita, ma invece quello della faccia nota ASC; e per un punto qualunque A del suo spigolo MAS si conduca la perp. CAb^* e si costruisca l'ang. $BAC = \alpha$, che fra i due diedri dati è quello adiacente alla faccia nota: indi da C la perp. CO sopra BO e le due eguali oblique CR e CR_1 che facciano con BO l'angolo β che misura l'altro dei due diedri dati.

Centrando poscia in A, si riportino i segmenti AR_1, AO ed AR sulla AC risp. in Ar_1, Ao, Ar; e descritta la circ. or vi si conducano da S le tangenti Sb, Sb_1, le quali riferite alla SA dànno, com'è chiaro, le due soluzioni (in generale) ASb_1 ed ASb relative all'ampiezza della faccia opposta al diedro γ; mentre il valore della terza faccia che vi corrisponde tanto nell'una che nell'altra di quelle soluzioni, si ottiene facilmente riportando anzitutto il segmento Ab in AB, determinando poscia il punto (B) per intersezione delle due circonferenze Sb e bB, ovvero proiettando ortogonalmente B in B' sulla bCA e tagliando l'una o l'altra di quelle circonferenze con la perp. da B' sopra CS. Similmente si passa dal punto b_1 all'altro B_1 e quindi a (B_1).

La soluzione si completa determinando il terzo angolo diedro γ che è sullo spigolo SC: basta condurre all'uopo da un punto qualsivoglia A di AS la parallela e la perp. ad SC, determinare l'intersezione M di CB ed SA e riportato a partire da A il segmento AM in $A(M)$ sull'anzidetta parallela, sarà l'ang. $(M)mA$ quello richiesto. (1)

La *discussione* della soluzione del problema non cambia, com'è chiaro, col cambiare di posizione dei dati rispetto al quadro: è quindi la stessa di quella precedentemente esposta (v. Probl. II).

E riguardo, infine, alle verifiche del tracciato, basta osservare che i punti (B) e (B_1), risp. ottenuti come già si disse, da quelli b e b_1 della CA debbono necessariamente trovarsi allineati con S: l'angolo $CS(B)$, infatti non è altro, come è ovvio, che il ribaltamento sul quadro della faccia opposta al diedro α, sia nell'una che nell'altra delle due posizioni che dessa può avere nella formazione del triedro; mentre l'analoga determinazione della faccia minima $CS(O)$ opposta ad α, ottenuta deducendo come dianzi (O) da O, mostra che debba essere retto l'angolo $C(O)S$ che si ottiene congiungendo C con l'anzidetto punto (O).

Palermo, 20 luglio 1907. F. P. PATERNÒ.

(1) Si è così risolto il problema: Determinare la misura γ di un diedro, del quale è data l'ampiezza di una sua sezione obliqua BAC perp. alla faccia ASC: problema evidentemente reciproco di quello occorso nel risolvere il I. (V. ivi le osserv. che le seguono.) Inoltre, cadendo M fuori il quadro, necessitò la riduzione omotetica rispetto ad m, ed operare sui punti ridotti $r/2$, $M/2$ ed $m/2$.

SOLUZIONI RAZIONALI DELLE EQUAZIONI $x^2 \pm y^2 = A$

La presente nota non è che un'appendice di un lavoro pubblicato nell'ultimo numero di questo stesso periodico.

In esso mi proposi di determinare, con metodi puramente elementari, le soluzioni intere e positive delle equazioni $x^2 \pm y^2 = A$, nell'ipotesi che A fosse un numero intero e positivo.

Mi propongo ora di completare brevemente quello studio togliendo le restrizioni imposte ai numeri x, y, A e mantenendo soltanto, com'è naturale, la condizione $A > 0$ nello studio dell'equazione $x^2 + y^2 = A$.

Occorrendo richiamare considerazioni e risultati del lavoro precedente, scriveremo fra parentesi solo il numero del paragrafo, cui intenderemo riferirci.

I.

1. In questa prima parte ci occuperemo delle decomposizioni dei numeri razionali positivi nella somma dei quadrati di due numeri razionali. (Per la terminologia, v. § 1.)

Se $(a, \bar{a})$ è una decomposizione a termini razionali positivi di un numero razionale positivo A, da essa si possono ottenere, in generale, altre sette decomposizioni di A cambiando segno all'uno o all'altro, ovvero a entrambi i termini della decomposizione $(a, \bar{a})$, e scambiando questi termini fra loro. Queste nuove decomposizioni si riducono a tre soltanto, se i termini della decomposizione data sono uguali, ovvero, se uno di essi è uguale a zero.

Noi ci occuperemo delle sole decomposizioni a termini positivi, nelle quali il primo termine è maggiore del secondo, ovvero uguale ad esso, poichè le altre si deducono da queste immediatamente.

2. Teorema. — *Condizione necessaria e sufficiente, affinchè una frazione sia decomponibile nella somma di due quadrati, è che sia decomponibile il prodotto del numeratore pel denominatore.*

Supponendo che la frazione $\frac{m}{n}$ ammetta la decomposizione $\left\{\frac{a}{b}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right\}$, si ricava:

$$(a\bar{b}n)^2 + (\bar{a}bn)^2 = mnb^2\bar{b}^2.$$

Il numero intero $mnb^2\bar{b}^2$ risulta dunque decomponibile nella somma di due quadrati. Ma $b^2\bar{b}^2$ gode manifestamente di questa proprietà, perciò anche il prodotto mn dovrà soddisfare alla stessa condizione. (Si ricava come corollario del teorema del § 5.)

Viceversa, ammesso che mn sia decomponibile nella somma di due quadrati, è pure decomponibile il numero $mnb^2\bar{b}^2$. Se $(h, \bar{h})$ è una sua decomposizione, $\left\{\frac{h}{nb\bar{b}}, \frac{\bar{h}}{nb\bar{b}}\right\}$ sarà una decomposizione di $\frac{m}{n}$.

Corollario I. — *Un numero intero non ammette decomposizioni fratte, se non ne ammette d'intere.*

Per convincersene, basta, nel teorema precedente, supporre $n=1$.

Corollario II. — *Perchè una frazione irriducibile sia decomponibile nella somma di due quadrati, è necessario e sufficiente che i termini della frazione non contengano fattori primi della forma* $4p-1$ *con esponente dispari.*

Data la frazione irriducibile $\frac{m}{n}$, se m ed n non contengono fattori primi di tipo $4p-1$ con esponente dispari, non ne contiene neanche il prodotto mn e quindi (§ 3) esso ammette almeno una decomposizione. Se invece l'uno o l'altro dei termini della frazione contiene qualche fattore della forma $4p-1$ con esponente dispari, siccome m ed n sono primi fra loro, anche il prodotto mn contiene quel fattore collo stesso esponente e perciò non è decomponibile nella somma di due quadrati.

Avvertenza. — D'ora innanzi supporremo sempre, senza che sia necessario avvertirlo, che il numero $\frac{m}{n}$ da decomporre, e i termini di ogni sua decomposizione siano frazioni irriducibili.

3. Teorema. — *Se una frazione è decomponibile nella somma di due quadrati, i termini di ogni decomposizione devono avere come denominatori due numeri tali che il quadrato del loro m. c. m. sia multiplo del denominatore della frazione.*

Supposto che la frazione $\frac{m}{n}$ ammetta la decomposizione $\left\{\frac{a}{b}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right\}$, e che B sia il m. c. m. dei denominatori dei termini della decomposizione, e posto $B = bb' = \bar{b}\bar{b}'$, avremo:

$$\left(\frac{ab'}{B}\right)^2 + \left(\frac{\bar{a}\bar{b}'}{B}\right)^2 = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

E poichè $\frac{m}{n}$ è una frazione irriducibile, indicando con k un conveniente numero intero, dovrà essere:

$$\begin{aligned}(ab')^2 + (\bar{a}\bar{b}')^2 &= mk,\\ B^2 &= nk,\end{aligned} \tag{2}$$

il che prova il teorema.

Corollario. — *I termini di ogni decomposizione fratta di un numero intero devono avere lo stesso denominatore.*

La dimostrazione può farsi fondandosi sul teorema precedente, supponendo $n = 1$, ma si può anche osservare, che se fosse

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right)^2 = m,$$

e si ammettesse, ad es., $b < \overline{b}$, si avrebbe:

$$a^2 + \left(\frac{\overline{a}\, b}{\overline{b}}\right)^2 = mb^2,$$

il che è impossibile, se $b < \overline{b}$ e i due numeri $\overline{a}$ e $\overline{b}$ sono primi fra loro.

4. Dato un numero $\frac{m}{n}$, vediamo ora come si possano determinare le decomposizioni, i cui termini hanno un dato minimo comune denominatore.

Sia B questo numero, tale, bene inteso, che B^2 risulti multiplo di n.

Dalle (1) e (2) del n. precedente si deduce che basta determinare tutte le decomposizioni intere del numero intero $\frac{m}{n} B^2$, i cui termini non sono entrambi divisibili per fattori primi contenuti in B, e dividere poi i termini di ciascuna per B.

Ora per determinare tutte le decomposizioni intere, che servono al nostro scopo, si può procedere nel modo seguente: Si scomponga $\frac{m}{n} B^2$ nel prodotto di due numeri B', B'', dei quali B'' contenga tutti e soltanto i fattori primi di $\frac{m}{n} B^2$, che sono comuni anche a B, ma che compariscono in $\frac{m}{n} B^2$ con esponente maggiore di 1. Si determinino quindi tutte le decomposizioni intere di B' e tutte le decomposizioni proprie di B'', e si associno le une alle altre mediante le formole (I), (II) (v. § 4). [1]

Per convincersi che così si ottengono tutte le decomposizioni richieste, basta osservare: 1° che associando mediante le (I) e (II) tutte le decomposizioni di B' con tutte quelle di B'' si otterrebbero *tutte* le possibili decomposizioni di $\frac{m}{n} B^2$; 2° che le decomposizioni improprie di B'' hanno i termini divisibili solo per fattori di B'' (che sono poi anche fattori di B) e che associandole con quelle di B' si avrebbero

[1] Crediamo utile, per maggior chiarezza, riportare queste formole. Se due numeri A e B ammettono rispettivamente le decomposizioni $\{a, \overline{a}\}$, $\{b, \overline{b}\}$, il loro prodotto AB ammette le decomposizioni:

$$AB = \{ab - \overline{a}\,\overline{b},\quad a\overline{b} + \overline{a}\, b\} \qquad \text{(I)}$$

$$AB = \{ab + \overline{a}\,\overline{b},\quad a\overline{b} - \overline{a}\, b\} \qquad \text{(II)}$$

decomposizioni che non soddisfano alle condizioni richieste; 3° che le eventuali decomposizioni improprie di B' hanno i termini divisibili entrambi solo per fattori non contenuti in B, e quindi, associate a quelle proprie di B'' danno luogo a decomposizioni intere $\frac{m}{n}B^2$, che godono della proprietà voluta.

5. Abbiamo visto che B non può essere un numero arbitrario, ma deve soddisfare alla condizione che $\frac{B^2}{n}$ sia un numero intero. Occorre ora mettere in evidenza un'altra condizione, cui deve soddisfare questo numero B, affinchè esso possa essere effettivamente un minimo denominatore comune dei termini di una decomposizione fratta di $\frac{m}{n}$.

Dimostriamo all'uopo il

TEOREMA. — *Se B_1^2 è il minimo quadrato divisibile per* n, *B_1 è il più piccolo fra i minimi denominatori comuni dei termini delle decomposizioni razionali di* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$. *Tutti gli altri minimi denominatori comuni si ottengono moltiplicando B_1 per potenze di fattori primi della forma* $4\mathrm{p}+1$.

Che non esista altro numero B'_1, minore di B_1, che possa essere denominatore comune ai termini di una decomposizione di $\frac{m}{n}$, scende direttamente dalla condizione che $\frac{B_1'^2}{n}$ debba essere un numero intero, il che è contrario all'ipotesi fatta su B_1. È chiaro poi che B_1 è veramente un denominatore comune ai termini di almeno una decomposizione di $\frac{m}{n}$.

Infatti, se n contiene fattori primi della forma $4p-1$ con esponente pari, $\frac{B_1^2}{n}$ non contiene affatto di tali fattori, perchè, in virtù dell'ipotesi fatta relativamente a B_1, gli esponenti con cui compariscono quei fattori in B_1^2 e in n sono uguali; se inoltre n contiene il fattore 2^λ, $\frac{B_1^2}{n}$ o non contiene questo fattore, se λ è pari, o lo contiene con esponente uguale ad 1, se λ è dispari. Poichè infine m ed n sono primi fra loro, si conclude che il numero B'', di cui è parola nel n. precedente, non contiene che fattori della forma $4p+1$. Questo numero ammette allora almeno una decomposizione propria e quindi $\frac{m}{n}B_1^2$ ammette almeno una decomposizione, i cui termini non sono divisibili entrambi per fattori contenuti in B_1.

È ovvio pure che ogni altro numero, che sia il prodotto di B_1 per potenze di fattori della forma $4p+1$ può essere un possibile minimo denominatore comune.

Perchè il teorema sia dimostrato basterà infine provare che non si può scegliere come minimo denominatore comune un numero, che sia ottenuto in modo diverso.

Se B è un numero ottenuto moltiplicando B_1 per potenze di 2 o di numeri primi della forma $4p-1$, il numero B″ non ammetterà decomposizioni proprie (§ 13), perchè o è della forma $4p$ o contiene esso pure fattori primi di tipo $4p-1$.

Corollario. — *Il denominatore comune ai termini di ogni decomposizione fratta di un numero intero è sempre un numero dispari divisibile solo per fattori primi della forma* $4p+1$.

Infatti, essendo $n=1$, il numero $B_1=1$ e gli altri minimi denominatori comuni si hanno moltiplicando comunque fattori primi della forma $4p+1$.

6. Passiamo ora a determinare il numero delle decomposizioni razionali di un numero $\frac{m}{n}$, i termini delle quali hanno come minimo comune denominatore un numero assegnato.

Dimostriamo perciò il

Teorema. — *Se* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ *è una frazione decomponibile nella somma di due quadrati, e, posto* $B'B''=\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}B^2$ *(ove B, B′, B″ sono numeri soddisfacenti alle condizioni, di cui sopra s'è parlato), si indica con N il numero delle decomposizioni di B′ e con α il il numero dei divisori primi di B″, il numero ν delle decomposizioni di* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$, *i termini delle quali sono frazioni irriducibili aventi come m. c. m. dei denominatori B è uguale a N se* $B''=1$; *risulta invece:*

$$\nu=2^{\alpha-1}(2N-1),$$

se B′ è un quadrato o un doppio quadrato, negli altri casi questo numero è

$$\nu=2^{\alpha}N.$$

Poichè B″ contiene solo fattori primi della forma $4p+1$, le decomposizioni proprie di B″ saranno $2^{\alpha-1}$ (§ 12, Coroll. II).

Fra le N decomposizioni di B′ ve n'è una di eccezionale, se il numero è un quadrato perfetto; ve n'è una, i cui termini sono uguali, se esso è il doppio di un quadrato perfetto. Esclusi questi casi, tutte le N decomposizioni ammesse da B′ sono regolari a termini distinti.

Una decomposizione di B′ associata mediante le (I) e (II) a una decomposizione propria di B″ dà luogo a decomposizioni distinte di $\frac{m}{n}B^2$, se la decomposizione considerata di B′ non è eccezionale o non ha i termini uguali; in caso diverso dà luogo invece a una sola decomposizione di $\frac{m}{n}B^2$ (§ 4, oss. II).

Associando tutte le decomposizioni di B′ a quelle proprie di B″, ove B′ sia un quadrato o un doppio quadrato, si hanno quindi

$$\nu=2(N-1)2^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}=2^{\alpha-1}(2N-1)$$

decomposizioni di $\frac{m}{n}B^2$, i cui termini non sono entrambi divisibili per fattori di B.

Negli altri casi il numero di tali decomposizioni è

$$\nu = 2 \,.\, N \,.\, 2^{\alpha-1} = 2^{\alpha} N.$$

In virtù del n. 4 ciò basta per ritenere vero il teorema.

Se fosse $B'' = 1$ è ovvio che $\nu = N$.

7. Come applicazione di quanto abbiamo fin qui detto daremo alcuni esempi di decomposizioni, cosiderando dapprima il caso, in cui il numero da decomporre sia intero:

Sia $m = 850 = 2 \,.\, 5^2 \,.\, 17$

I. $B = 5$. Sarà:

$$mB^2 = 2 \,.\, 5^4 \,.\, 17; \quad B' = 2 \,.\, 17, \quad B'' = 5^4;$$
$$N = 1, \quad \alpha = 1, \quad \nu = 2^1 \,.\, 1 = 2.$$
$$B' = \{5,\ 3\}, \quad B'' = \{24,\ 7\};$$
$$B'B'' = mB^2 = \{141,\ 37\} = \{107,\ 99\}.$$

Quindi:

$$850 = \left\{\frac{141}{5},\ \frac{37}{5}\right\} = \left\{\frac{107}{5},\ \frac{99}{5}\right\}.$$

II. $B = 13$. Sarà:

$$mB^2 = 2 \,.\, 5^2 \,.\, 13^2 \,.\, 17; \quad B' = 2 \,.\, 5^2 \,.\, 17, \quad B'' = 13^2;$$
$$N = 3, \quad \alpha = 1, \quad \nu = 2^1 \,.\, 3 = 6.$$
$$B' = \{29,\ 3\} = \{27,\ 11\} = \{25,\ 15\}, \quad B'' = \{12,\ 5\};$$
$$B'B'' = mB^2 = \{379,\ 3\} = \{375,\ 60\} = \{363,\ 109\} =$$
$$= \{333,\ 181\} = \{310,\ 225\} = \{269,\ 267\}.$$

Quindi:

$$850 = \left\{\frac{379}{13},\ \frac{3}{13}\right\} = \left\{\frac{375}{13},\ \frac{60}{13}\right\} = \left\{\frac{363}{13},\ \frac{109}{13}\right\} =$$
$$= \left\{\frac{333}{13},\ \frac{181}{13}\right\} = \left\{\frac{310}{13},\ \frac{225}{13}\right\} = \left\{\frac{267}{13},\ \frac{267}{13}\right\}.$$

III. $B = 17$. Sarà:

$$mB^2 = 2 \,.\, 5^2 \,.\, 17^3; \quad B' = 2 \,.\, 5^2, \quad B'' = 17^3;$$
$$N = 2, \quad \alpha = 1, \quad \nu = 2^0 (2 \,.\, 2 - 1) = 3.$$
$$B' = \{7,\ 1\} = \{5,\ 5\}, \quad B'' = \{52,\ 47\};$$
$$B'B'' = mB^2 = \{495,\ 25\} = \{411,\ 277\} = \{381,\ 317\}.$$

Quindi:

$$850 = \left\{\frac{495}{17},\ \frac{25}{17}\right\} = \left\{\frac{411}{17},\ \frac{277}{17}\right\} = \left\{\frac{381}{17},\ \frac{317}{17}\right\}.$$

IV. $N=65=5.13$. Sarà:

$$mB^2=2.5^4.13^2.17; \quad B'=2.17, \quad B''=5^4.13^2;$$
$$N=1, \quad \alpha=2, \quad \nu=2^2.1=4.$$
$$B'=\{5, \ 3\}, \quad B''=\{323, \ 36\}=\{253, \ 204\};$$
$$B'B''=mB^2=\{1877, \ 261\}=\{1779, \ 653\}=\{1723, \ 789\}=\{1503, \ 1149\}.$$

Quindi:

$$850=\left\{\frac{1877}{65}, \ \frac{261}{65}\right\}=\left\{\frac{1779}{65}, \ \frac{653}{65}\right\}=\left\{\frac{1723}{65}, \ \frac{789}{65}\right\}=\left\{\frac{1503}{65}, \ \frac{1149}{65}\right\}.$$

8. Supponiamo ora che si debbano trovare le decomposizioni di un numero fratto.

Sia $\frac{m}{n}=\frac{17}{50}$.

I. Il più piccolo quadrato divisibile per 50 è 100.
$B=10=2.5$. Sarà:

$$\frac{m}{n}B^2=2.17; \quad B'=2.17, \quad B''=1;$$
$$N=\nu=1.$$
$$B'B''=\frac{m}{n}B^2=\{5, \ 3\}.$$

Quindi:

$$\frac{17}{50}=\left\{\frac{1}{2}, \ \frac{3}{10}\right\}.$$

II. $B=50=2.5^2$. Sarà:

$$\frac{m}{n}B^2=2.5^2.17; \quad B'=2.17, \quad B''=5^2;$$
$$N=1, \quad \alpha=1, \quad \alpha=2^1.1=2.$$
$$B'=\{5, \ 3\}, \quad B''=\{4, \ 3\};$$
$$B'B''=\frac{m}{n}B^2=\{29, \ 3\}=\{27, \ 11\}.$$

Quindi:

$$\frac{17}{50}=\left\{\frac{29}{50}, \ \frac{3}{50}\right\}=\left\{\frac{27}{50}, \ \frac{11}{50}\right\}.$$

III. $B=130=2.5.13$. Sarà:

$$\frac{m}{n}B^2=2.13^2.17; \quad B'=2.17, \quad B''=13^2;$$
$$N=1, \quad \alpha=1, \quad \nu=2^1.1=2.$$
$$B'=\{5, \ 3\}, \quad B''=\{12, \ 5\};$$
$$B'B''=\frac{m}{n}B^2=\{75, \ 11\}=\{61, \ 45\}.$$

Quindi:
$$\frac{17}{50}=\left\{\frac{15}{26},\quad \frac{11}{130}\right\}=\left\{\frac{61}{130},\quad \frac{9}{26}\right\}.$$

II.

9. Passiamo ora a determinare le soluzioni razionali dell'equazione $x^2-y^2=A$, cioè le decomposizioni di un numero razionale A nella differenza di due quadrati (Per la terminologia e le notazioni v. § 18.)

Possiamo supporre, senza togliere nulla alla generalità della trattazione, che A sia un numero razionale positivo, poichè ad ogni decomposizione $[a', a'']$ di un numero corrisponde la decomposizione $[a''\ a']$ del numero opposto.

Per le stesse ragioni esposte nel n. 1, ci occuperemo solo di determinare le decomposizioni, i cui termini sono numeri positivi.

Dato un numero A, e indicato con λ un numero razionale qualunque, si ha sempre:
$$A=\left(\frac{A+\lambda^2}{2\lambda}\right)^2-\left(\frac{A-\lambda^2}{2\lambda}\right)^2,$$
quindi si ha il

Teorema. — *Un numero razionale è sempre decomponibile nella differenza dei quadrati di due numeri razionali.*

10. Proponiamoci ora, dato un numero razionale $\frac{m}{n}$, di determinare tutte le decomposizioni, i cui termini hanno come m. c. m. dei denominatori un numero dato B.

Se $\frac{m}{n}$ ammette la decomposizione $\left[\frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}\right]$, indicando con B il m. c. m. dei denominatori delle frazioni, e ponendo $B=b'b_1=b''b_2$, si ha:
$$\frac{(a'b_1)^2-(a''b_2)^2}{B^2}=\frac{m}{n}, \tag{1}$$
da cui, essendo m ed n primi fra loro:
$$(a'b_1)^2-(a''b_2)^2=km, \tag{2}$$
$$B^2=kn. \tag{3}$$

La (3) ci dice che

Il m. c. m. dei denominatori dei termini di una decomposizione di una frazione irriducibile è sempre un numero, il cui quadrato è multiplo del denominatore della frazione.

In particolare si ricava, facendo $n=1$ e ripetendo un ragionamento identico a quello tenuto nella dimostrazione del corollario del n. 3:

I termini di una decomposizione razionale di un numero intero hanno uguali i denominatori.

11. Dalle (1) e (2) si ricava poi che, per determinare le decomposizioni razionali di un numero $\frac{m}{n}$, i cui termini hanno come m. c. m. dei denominatori un dato numero B (tale, s'intende, che sia $B^2 = kn$), basta trovare le decomposizioni intere del numero $\frac{m}{n}B^2$, i cui termini non sono entrambi divisibili per fattori di B, e dividere poi quei termini per B.

Ricordando che, per ottenere una decomposizione intera $[a', a'']$ di un numero A intero, basta scomporre A nel prodotto di due numeri A_1, A_2 (divisori complementari di A) pari o dispari insieme, e porre $a' = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)$, $a'' = \frac{1}{2}(A_1 - A_2)$, si ricava immediatamente il

Teorema. — *La frazione* $\frac{m}{n}$ *non ammette decomposizioni razionali, i cui termini abbiano* B *come m. c. m. dei denominatori, se* $\frac{m}{n}B^2$ *è un numero della forma* $2(2p+1)$.

In particolare si ha:

Un frazione, il cui numeratore sia della forma $2(2p+1)$, *non ammette decomposizioni, i cui termini abbiano denominatori entrambi dispari.*

Una frazione il cui denominatore sia della forma $2^{2\lambda+1}(2p+1)$, *non ammette decomposizioni, i cui termini abbiano come m. c. m. dei denominatori un numero della forma* $2^{\lambda+1}(2p'+1)$.

Si ha pure il

Teorema. — *La frazione* $\frac{m}{n}$ *non ammette alcuna decomposizione, i cui termini abbiano come m. c. m. dei denominatori un numero pari* B, *se il numero* $\frac{m}{n}B^2$ *risulta della forma* $4(2p+1)$.

Infatti, in questo caso, due divisori complementari qualunque di $\frac{m}{n}B^2$ (dovendo essere entrambi pari) sono entrambi della forma $2(2p'+1)$, e perciò i termini di ogni decomposizione intera di $\frac{m}{n}B^2$ sono sempre numeri pari.

Si ricava quindi:

Una frazione, il cui denominatore sia un numero pari della forma $2^{2\lambda}(2p+1)$, *non ammette decomposizioni, i cui termini abbiano come m. c. m. dei denominatori un numero della forma* $2^{\lambda-1}(2p'+1)$.

E inoltre:

Una frazione a termini dispari non ammette decomposizioni, per le quali il m. c. m. dei denominatori sia un numero pari della forma $2(2p+1)$.

12. Resta ora a far vedere come si possano determinare le decomposizioni di $\frac{m}{n}B^2$, i cui termini non sono entrambi divisibili per fattori contenuti in B.

Supponiamo dapprima B dispari.

Si osservi che le decomposizioni di un numero A, i cui termini sono entrambi divisibili per un numero h, hanno origine dalle sole scomposizioni di A in divisori complementari entrambi divisibili per h, e che in tal caso il numero A contiene il fattore h con esponente maggiore di 1.

Allo scopo dunque di ottenere scomposizioni di $\frac{m}{n} B^2$, i cui divisori complementari non sieno entrambi divisibili per fattori contenuti in B, si scomponga $\frac{m}{n} B^2$ nel prodotto di due fattori B', B'' dei quali B'' risulti il prodotto di tutti e soltanto quei fattori primi che sono comuni a $\frac{m}{n} B^2$ e a B e che compariscono in $\frac{m}{n} B^2$ con esponente maggiore di 1. Si trovino poi tutte le scomposizioni di B' in divisori complementari e tutte le analoghe scomposizioni di B'', i cui divisori sono però primi fra loro, e infine si associno in tutti i modi possibili una scomposizione di B' con una di B'' moltiplicando fra loro i divisori delle due scomposizioni in modo da ottenere divisori complementari di $\frac{m}{n} B^2$.

Se B è pari ed $\frac{m}{n} B^2$ è dispari nulla c'è d'aggiungere a quanto s'è detto; ma se $\frac{m}{n} B^2$ è anch'esso un numero pari, i divisori complementari di B'' non potranno essere entrambi della forma $4p$. Se ciò fosse sarebbero pure della stessa forma anche i divisori complementari di $\frac{m}{n} B^2$ e quindi le corrispondenti decomposizioni intere di questo numero avrebbero i termini entrambi pari.

13. Vediamo ora quante sono le decomposizioni di $\frac{m}{n}$, i cui termini hanno come m. c. m. dei denominatori un numero B.

Se α è il numero dei fattori primi distinti contenuti in B'', le scomposizioni di B'' in divisori complementari primi fra loro, ovvero pari ma non entrambi della forma $4p$, sono $2^{\alpha-1}$. (1)

---

(1) Infatti, posto $B'' = 2^\lambda p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots$ (con $\lambda > 2$), per ottenere quelle scomposizioni basta scrivere la tabella:

$$\begin{array}{ll} 2^{\lambda-1}, & 2; \\ p_1^{\alpha_1}, & 1; \\ p_2^{\alpha_2}, & 1; \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{array}$$

moltiplicare ordinatamente i numeri della prima riga per quelli della seconda, i prodotti ottenuti: $2^{\lambda-1} p_1^{\alpha_1}$, $2p_1^{\alpha_1}$, $2^{\lambda-1}$, 2. ordinatamente per i numeri della terza riga, i nuovi prodotti ottenuti $2^{\lambda-1} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$, $2p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$, $2^{\lambda-1} p_2^{\alpha_2}$, $2p_2^{\alpha_2}$, $2^{\lambda-1} p_1^{\alpha_1}$, $2p_1^{\alpha_1}$, $2^{\lambda-1}$, 2. per i numeri della quarta riga e così di seguito e accoppiare i numeri estremi della successione ottenuta, e quelli i quali sono equidistanti dagli estremi.

Se N è il numero delle scomposizioni di B', poichè associando ogni scomposizione di B' con una di B'' si hanno due scomposizioni di $\frac{m}{n}$ B² in divisori complementari, ovvero una soltanto, secondo che la scomposizione considerata di B' non ha o ha i divisori uguali (nel quale ultimo caso B' è un quadrato perfetto), si conclude che le cercate decomposizioni $\frac{m}{n}$ sono in numero di

$$\nu = 2N\, 2^{\alpha-1} = 2^{\alpha} N,$$

se B' non è un quadrato; e sono in numero di

$$\nu = 2\,(N-1)\, 2^{\alpha-1} + 2^{\alpha-1} = 2^{\alpha-1}\,(2N-1);$$

se B' è un quadrato.

Avvertenza. — Se $B'' = 1$ è ovvio che si ha $\nu = N$.

14. Come applicazione cerchiamo alcune decomposizioni del numero $\frac{25}{3}$.

Poichè i termini della frazione sono entrambi dispari, non potrà essere (v. n. 11) un numero della forma $2\,(2p+1)$.

I. $B = 3$. Sarà:

$$\frac{m}{n} B^2 = 3 \,.\, 5^2; \qquad B' = 3 \,.\, 5^2, \qquad B'' = 1;$$

$$\nu = N = 3.$$

Scomposizioni di B' in divisori complementari:

$$(3 \,.\, 5^2,\ 1); \quad (5^2,\ 3); \quad (3 \,.\, 5,\ 5).$$

Quindi:

$$B'B'' = \frac{m}{n} B^2 = [38,\ 37] = [14,\ 11] = [10,\ 5];$$

e infine:

$$\frac{25}{3} = \left[\frac{38}{3},\ \frac{37}{3}\right] = \left[\frac{14}{3},\ \frac{11}{3}\right] = \left[\frac{10}{3},\ \frac{5}{3}\right].$$

II. $B = 9 = 3^2$. Sarà:

$$\frac{m}{n} B^2 = 3^3 \,.\, 5^2; \qquad B' = 5^2, \qquad B'' = 3^3;$$

$$N = 2, \qquad \alpha = 1, \qquad \nu = 2^0\,(2 \,.\, 2 - 1) = 3.$$

Scomposizioni di B' in divisori complementari:

$$(5^2,\ 1); \qquad (5,\ 5).$$

Scomposizioni di B'':

$$(3^3,\ 1).$$

Scomposizioni di $\frac{m}{n}B^2$:

$$(3^3 5^2,\ 1);\qquad (3^3 . 5,\ 5);\qquad (3^3,\ 5^2).$$

Quindi:

$$B'B'' = \frac{m}{n}B^2 = [338,\ 337] = [70,\ 65] = [26,\ 1];$$

e infine:

$$\frac{25}{3} = \left[\frac{338}{9},\ \frac{337}{9}\right] = \left[\frac{70}{9},\ \frac{65}{9}\right] = \left[\frac{26}{9},\ \frac{1}{9}\right].$$

III. $B = 12 = 2^2 . 3$. Sarà:

$$\frac{m}{n}B^2 = 2^4 . 3 . 5^2;\qquad B' = 3 . 5^2,\qquad B'' = 2^4;$$

$$N = 3,\qquad \alpha = 1,\qquad \nu = 2^1 . 3 = 6.$$

Scomposizioni di B':

$$(3 . 5^2,\ 1);\qquad (5^2,\ 3);\ (3 . 5,\ 5).$$

Scomposizioni di B'':

$$(2^2,\ 2).$$

Scomposizioni di $\frac{m}{n}B^2$:

$$(2^3 . 3 . 5^2,\ 2);\qquad (2 . 3 . 5^2,\ 2^3);\qquad (2^3 . 5^2,\ 2 . 3);$$
$$(2 . 5^2,\ 2^3 . 3);\qquad (2^3 . 3 . 5,\ 2 . 5);\qquad (2 . 3 . 5,\ 2^3 . 5).$$

Quindi:

$$B'B'' = \frac{m}{n}B^2 = [301,\ 299] = [103,\ 97] = [79,\ 71] =$$
$$= [37,\ 13] = [65,\ 55] = [35,\ 5];$$

e infine:

$$\frac{25}{3} = \left[\frac{301}{12},\ \frac{299}{12}\right] = \left[\frac{103}{12},\ \frac{97}{12}\right] = \left[\frac{79}{12},\ \frac{71}{12}\right] =$$
$$= \left[\frac{65}{12},\ \frac{55}{12}\right] = \left[\frac{37}{12},\ \frac{13}{12}\right] = \left[\frac{35}{12},\ \frac{5}{12}\right].$$

IV. $B = 15 = 3 . 5$. Sarà:

$$\frac{m}{n}B^2 = 3 . 5^4;\qquad B' = 3,\qquad B'' = 5^4;$$

$$N = 1,\qquad \alpha = 1,\qquad \nu = 2^1 . 1 = 1.$$

Scomposizioni di B':

$$(3,\ 1).$$

Scomposizioni di B'':

$$(5^4,\ 1).$$

Scomposizioni di $\frac{m}{n}B^2$:

$$(3 \,.\, 5^4,\ 1); \qquad (5^4,\ 3).$$

Quindi:

$$B'B'' = \frac{m}{n}B^2 = [938,\ 937] = [314,\ 311]$$

e infine:

$$\frac{25}{3} = \left[\frac{938}{15},\ \frac{937}{15}\right] = \left[\frac{314}{15},\ \frac{311}{15}\right].$$

Roma, marzo 1907.

Dott. Giulio Bisconcini.

DALLA FORMULA DI PASCAL A QUELLA DI BERNOULLI

sulle somme delle potenze simili dei primi n numeri

Nota di Alberto Tanturri

1. La formula di Pascal [1]

$$\sum_{0}^{m} \binom{m+1}{i} s_i = (n+1)^{m+1} - 1 \qquad (1),$$

dove n è un numero naturale ed $s_i = 1^i + 2^i + \ldots + n^i$, conduce, per via semplice ed elementare, alla espressione esplicita di s_m. Scritta difatti la (1) per $m = 0, 1, \ldots, m$, si hanno $m+1$ equazioni, nelle quali il determinante dei coefficienti delle s vale $(m+1)!$; sicchè

$$(m+1)!\, s_m = \begin{vmatrix} \binom{1}{0} & 0 & 0 & \ldots & 0 & (n+1)^1 - 1 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & 0 & \ldots & 0 & (n+1)^2 - 1 \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \ldots & 0 & (n+1)^3 - 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \ldots & \binom{m}{m-1} & (n+1)^m - 1 \\ \binom{m+1}{0} & \binom{m+1}{1} & \binom{m+1}{2} & \ldots & \binom{m+1}{m-1} & (n+1)^{m+1} - 1 \end{vmatrix}.$$

(1) Vedi, ad es., *Formulario Mathematico* per G. Peano, tomo V, pag. 126, od anche Capelli, *Istituzioni di Analisi algebrica*, pag. 87 dell'ediz. 3ª (1902).

Dall'ultima colonna di questo determinante togliamo la 2^a moltiplicata per n, la 3^a moltiplicata per $n^2, \ldots$, sino alla m^{ma} (che è la penultima) moltiplicata per n^{m-1}; ci ridurremo agli elementi

$$n \quad n^2 \quad n^3 \ldots \quad n^m \quad n^{m+1} + \binom{m+1}{1} n^m;$$

e, quindi, sviluppando secondo essi elementi,

$$(m+1)!\, s_m = m!\, n^{m+1} + \left[m! \binom{m+1}{1} - (m-1)! \binom{m+1}{m-1}\right] n^m +$$

$$+ \sum_{1}^{m-1} (m-i-1)!\, \Delta_{i+1,m}\, n^{m-i},$$

dove

$$\Delta_{i+1,m} = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} \binom{m-i+1}{m-i-1} & \binom{m-i+1}{m-i} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \binom{m-i+2}{m-i-1} & \binom{m-i+2}{m-i} & \binom{m-i+2}{m-i+1} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{m-1}{m-i-1} & \binom{m-1}{m-i} & \binom{m-1}{m-i+1} & \ldots & \binom{m-1}{m-2} & 0 \\ \binom{m}{m-i-1} & \binom{m}{m-i} & \binom{m}{m-i+1} & \ldots & \binom{m}{m-2} & \binom{m}{m-1} \\ \binom{m+1}{m-i-1} & \binom{m+1}{m-i} & \binom{m+1}{m-i+1} & \ldots & \binom{m+1}{m-2} & \binom{m+1}{m-1} \end{vmatrix}.$$

Ad ogni elemento di questo determinante applichiamo la relazione $\binom{a+b}{a} = \frac{(a+b)!}{a!\,b!}$ (dove a e b sono interi): portiamo poi fuori il fattore

$$\frac{(m-i+1)!\,(m-i+2)! \ldots (m-1)!\, m!\,(m+1)!}{(m-i-1)!\,(m-i)! \ldots (m-3)!\,(m-2)!\,(m-1)!} = \frac{m!\,(m+1)!}{(m-i-1)!\,(m-i)!},$$

ponendo infine

$$A_{i+1} = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{i!} & \frac{1}{(i-1)!} & \frac{1}{(i-2)!} & \ldots & 1 & 0 \\ \frac{1}{(i+1)!} & \frac{1}{i!} & \frac{1}{(i-1)!} & \ldots & \frac{1}{2!} & 1 \\ \frac{1}{(i+2)!} & \frac{1}{(i+1)!} & \frac{1}{i!} & \ldots & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} \qquad (2).$$

Avremo

$$(m+1)!\,s_m = m!\,n^{m+1} + \frac{(m+1)!\,n^m}{2} +$$

$$+ \sum_{1}^{m-1} {}_i (m-i-1)! \frac{m!\,(m+1)!}{(m-i-1)!\,(m-i)!} A_{i-1}\, n^{m-i},$$

od anche

$$(m+1)\,s_m = n^{m+1} + \frac{(m+1)\,n^m}{2} + \sum_{1}^{m-1} {}_i \binom{m+1}{i+1} (i+1)!\,A_{i+1}\, n^{m-i} \qquad (3),$$

dove A_{i+1} è funzione solo di i.

2. Come si vede, s_m non contiene termini indipendenti da n, e contiene n^m col coefficiente $\frac{1}{2}$.

Dico inoltre che, se non si scrivono i termini nulli, s_{2r} non contiene potenze pari di n, fuori di n^{2r}; ed s_{2r-1} potenze dispari, fuori di n^{2r-1}. Si intende $r = 1, 2, 3, \ldots$.

Ciò si verifica subito per $s_2 \left(= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right)$ e per $s_1 \left(= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \right)$. E, se si suppone vero per le successive s, sino ad s_{2r-2} ed s_{2r-3}, si dimostra facilmente per s_{2r} ed s_{2r-1}.

Prima di tutto, poichè s_m non contiene n a potenze maggiori di $m+1$, basterà far vedere che s_{2r} non contiene potenze pari di n con esponente minore di $2r$, ed s_{2r-1} potenze dispari con esponente minore di $2r-1$. Ora ciò discende dalle note relazioni

$$\begin{aligned} \sum_{0}^{r} {}_k \binom{2r+1}{2k} s_{2k} &= \frac{1}{2} \{(n+1)^{2r+1} + n^{2r+1} - 1\} \\ \sum_{0}^{r-1} {}_k \binom{2r}{2k+1} s_{2k+1} &= \frac{1}{2} \{(n+1)^{2r} + n^{2r} - 1\} \end{aligned} \qquad (4),$$

le quali si deducono immediatamente dalla formula (1) [1]. Difatti: nella 1ª sommatoria, n^{2k} (per $k = 1, 2 \ldots, r-1$) compare solo in s_{2k} col coefficiente $\frac{1}{2}$, ed eventualmente in s_{2r} con un coefficiente che indico con C_{rk}; e, nella 2ª, n^{2k-1} solo in s_{2k-1} col coefficiente $\frac{1}{2}$, ed eventualmente in s_{2r-1} con un coefficiente che indico con C'_{rk}. Sicchè, se eguaglio i coefficienti di n^{2k} nei due membri della 1ª eguaglianza, e di n^{2k-1} nei due membri della 2ª, avrò

$$\frac{1}{2}\binom{2r+1}{2k} + C_{rk}\binom{2r+1}{2r} = \frac{1}{2}\binom{2r+1}{2k}$$

ed

$$\frac{1}{2}\binom{2r}{2k-1} + C'_{rk}\binom{2r}{2r-1} = \frac{1}{2}\binom{2r}{2k-1};$$

donde $C_{rk} = 0$ e $C'_{rk} = 0$, c. v. d.

[1] V. CAPELLI, *loc. cit.*, pag. 231. Od anche, ma sotto forma simbolica, LUCAS, *Théorie des nombres*, pag. 234.

3. In s_m, per $m > 2$, non compaiono dunque n^{m-2}, n^{m-4}, ..., sino ad n^2 o sino ad n^1 secondochè m è pari o dispari. Potremo perciò, nella (3), dare ad i solo i valori dispari $(1, 3, 5, \ldots$, sino ad $m-1$ o ad $m-2)$; o, che è lo stesso, scrivere $2r-1$ al posto di i, e far variare r da 1 ad $\mathrm{E}\,\frac{m}{2}$: cioè sino ad $\frac{m}{2}$ se m è pari e ad $\frac{m-1}{2}$ se è dispari.

Sarà allora

$$(m+1)\,s_m = n^{m+1} + \frac{(m+1)\,n^m}{2} + \sum_1^{\mathrm{E}\frac{m}{2}}{}_r \binom{m+1}{2r} (2r)!\,\mathrm{A}_{2r}\, n^{m-2r+1}.$$

E, se poniamo

$$\mathrm{B}_r = (-1)^{r-1}\,(2r)!\,\mathrm{A}_{2r},$$

avremo

$$(m+1)\,s_m = n^{m+1} + \frac{(m+1)\,n^m}{2} + \sum_1^{\mathrm{E}\frac{m}{2}}{}_r\,(-1)^{r-1} \binom{m+1}{2r} \mathrm{B}_r\, n^{m-2r+1},$$

che è la formula di Bernoulli [1].

4. I numeri bernoulliani B si presentano così espressi mediante i determinanti A, cioè sotto la forma di Glaisher [2]: o, che è lo stesso, come nel *Form. Math.* [3], perchè le quantità A, calcolate con la (2) (per $i = 0, 1, 2, \ldots$), coincidono con quelle soddisfacenti alle condizioni

$$\frac{1}{2!} + \mathrm{A}_1 = 0 \quad \frac{1}{3!} + \frac{\mathrm{A}_1}{2!} + \mathrm{A}_2 = 0 \quad \frac{1}{4!} + \frac{\mathrm{A}_1}{3!} + \frac{\mathrm{A}_2}{2!} + \mathrm{A}_3 = 0 \ldots.$$

Sicchè la prop. $\mathrm{A}_{2r+1} = 0$ (per $r = 1, 2, 3, \ldots$), enunciata nel *Form.*, risulta dal nostro num. 2.

La notazione adottata è pure quella del *Form.*; e si ha $\mathrm{B}_1 = +\frac{1}{6}$, $\mathrm{B}_2 + = \frac{1}{30}$, $\mathrm{B}_3 = +\frac{1}{42}$, ...

---

[1] La dimostrazione di essa, mediante le formule (4), trovasi in Platner, *Sul polinomio bernoulliano.* Rend. Istit. Lomb., II, 25, 1891; ma per via prolissa ed eccessiva. Ciò giustifichi questo breve lavoro.

Le ordinarie dimostrazioni (v. i trattati di Lucas, Capelli, Cesaro, il *Calcolo delle variazioni* di E. Pascal, ecc.) ricorrono a sviluppi in serie, od a calcoli simbolici, od a nozioni sulla differenza di una funzione.

[2] V. la citazione in E. Pascal, *Determinanti*, pag. 180.

[3] *Loc. cit.*, pag. 182.

SOCIETÀ ITALIANA PER IL PROGRESSO DELLE SCIENZE

SOTTO L'ALTO PATRONATO DI S. M. IL RE

PRIMO CONGRESSO DI PARMA

23-29 Settembre 1907.

L'illustre senatore Volterra presentò al Congresso dei naturalisti italiani, promosso dalla Società italiana di Scienze Naturali, e tenuto in Milano dal 15 al 19 settembre 1906, la proposta di far risorgere un'*associazione italiana per il progresso delle scienze*, sullo stesso genere di quelle che da lunghi anni vivono di vita prospera e rigogliosa negli altri paesi, rendendo preziosi servigi alla scienza e alle sue applicazioni.

La prima società di questo genere fu fondata dal farmacista Gosse di Ginevra nel 1815, e nell'anno successivo tenne il suo primo congresso. Essa conta oggi circa 800 soci; pubblica degli *Atti* dal 1816, delle *Memorie* dal 1829 e dei *Resoconti* dal 1879. Nel 1822 in Germania sorse la Società dei medici e dei naturalisti tedeschi, ai quali poi si collegarono i cultori delle matematiche e di altre discipline. Nel 1904 essa contava 2910 membri. Nel 1831 Brewster fondò l'*Associazione britannica per l'avanzamento delle scienze*, che ebbe dapprincipio 371 membri, e ne conta oggi 4500. Essa è la più potente fra le associazioni consimili ed è fornita di larghissimi mezzi finanziari, che le permettono di erogare 50 mila lire annue in incoraggiamenti e sussidii a favore della scienza pura ed applicata; varie iniziative da essa prese ebbero risultati pratici della più grande importanza, fra i quali notevolissimi gli studi sulle unità assolute, da essa promossi.

L'Associazione francese sorse nel 1871, e si fuse con l'Associazione scientifica francese fondata dal Le Verrier sin dal 1864. Essa pubblica dei resoconti sin dal 1872, annovera circa 4000 soci ed ha un reddito annuo superiore alle L. 90 mila, che in parte sono spese per incoraggiare ricerche scientifiche.

Anche in America esiste un'Associazione per l'avanzamento delle scienze, fondata nel 1853, ed infine l'Australia ha un'Associazione consimile con circa 1000 soci, che si adunano a congresso ogni due anni.

L'Italia seguì di buon'ora l'esempio delle altre nazioni; e furono tenuti i seguenti congressi di scienziati:

1°	Congresso	a	Pisa	1839
2°	"	"	Torino	1840
3°	"	"	Firenze	1841
4°	"	"	Padova	1842
5°	"	"	Lucca	1843
6°	"	"	Milano	1844
7°	"	"	Napoli	1845
8°	"	"	Genova	1846
9°	"	"	Venezia	1847
10°	"	"	Firenze	1861
11°	"	"	Roma	1872
12°	"	"	Palermo	1875

I risultati scientifici di questi congressi non furono scarsi nè di poca importanza, ma in quell'epoche in cui la più alta, la più nobile aspirazione degl'Italiani era la libertà, l'indipendenza e l'unità della patria, tutti, più che allo scopo palese, al progresso delle scienze, miravano allo scopo nascosto. La riunione dei cultori di tutte le scienze delle varie regioni d'Italia affermava il principio di nazionalità, quando il parlare di nazione italiana era delitto, e perciò destava gli entusiasmi e le speranze dei patriotti, ed insieme i terrori delle polizie dei varii tirannelli d'Italia, tanto che il generale Radestki a proposito del primo congresso scrisse: " I dotti riuniti in Pisa si sono imposti la maggior riserbatezza nel parlare per non compromettere con imprudenze e indiscrezioni l'avvenire di una istituzione destinata a travagliare gli animi in segreto per gettare le fondamenta dell'opera infernale della rigenerazione italiana ". (1)

Così i congressi, che avevano continuato senza interruzione dal 1839 al 1847, cessarono quando gli entusiasmi del 1848 furono spenti nel sangue e le baionette austriache vennero a puntellare i troni che erano stati lì lì per cadere, travolti dall'onda suscitata da un'idea fulgente di giustizia e di libertà.

Il 10° congresso che doveva aver luogo a Bologna nel 1848 fu rimandato indefinitamente, e si può dire che i successivi congressi furono tenuti quasi a solennizzare i fasti della patria.

Nel 1861 a Firenze si festeggiò l'unione della maggior parte delle provincie d'Italia, la patria risorta a dignità di nazione; nel 1872 si solennizzava l'opera compiuta, il dominio temporale dei papi caduto per sempre, e Roma finalmente capitale d'Italia. Era nell'animo di tutti che questo congresso fosse l'ultimo; ma fu tenuto anche il 12° a Palermo, per salutare l'isola dei Vespri, l'isola che aveva visto il biondo eroe sgominare coi suoi Mille le schiere borboniche e volare attraverso lo stretto di Messina alla conquista del reame di Napoli.

Insomma l'opera dei primi 12 congressi degli scienziati fu per fatalità di eventi eminentemente politica, e fu bene che così fosse; ed era naturale che, conseguito lo scopo principale al quale essi miravano, solennizzato il raggiungimento di questo scopo, il ciclo dei medesimi dovesse chiudersi per sempre.

***

Ma ora, decorso più di un trentennio, le cose sono assolutamente cambiate. L'Italia dopo aver conquistato il suo posto in mezzo alle grandi nazioni ha mostrato di esserne degna. Il sole della libertà ha rese feconde le energie del bel paese, così lungamente depresse e soffocate; le industrie, i commerci, le arti hanno ricevuto uno straordinario impulso, portando l'Italia ad un grado di prosperità, che 50 anni or sono sarebbe stata follia sperare; il genio italiano si è segnalato, come sempre, per grandi scoperte scientifiche che hanno aperte nuove vie all'attività umana, ed è giunto il momento perchè una nuova associazione per il progresso dellè scienze, del tutto simile a quelle delle altre nazioni, sorga con criteri diversi da quella che l'ha preceduta, al difuori della politica ed avente per unico e grande scopo quello che annuncia il suo titolo.

Per questa ragione, oltre che per l'autorità del nome, la proposta lanciata dal senatore Volterra doveva essere ed è stata accolta con entusiasmo da tutti i cultori delle scienze.

Fino al 20 settembre scorso infatti gli aderenti alla nuova società furono 1159, e di questi 8 o 9 cento convennero effettivamente al Congresso, tenuto in Parma dal 23 al 29 del detto mese. Non farò nomi, chè sarebbe troppa difficile impresa, ma dirò soltanto che la maggior parte dei maestri illustri, che onorano col loro nome la scienza, e ad essa hanno ormai portato il forte contributo della loro vita

(1) Chi desidera maggiori notizie sui congressi degli scienziati può consultare, oltre che i resoconti ufficiali le seguenti opere: LINAKER ARTURO, *I congressi degli scienziati e i congressi dei pedagogici italiani*, Firenze, Cellini, 1584. — TACCHI ELISA, *Il primo congresso degli scienziati in Pisa*, "Studi storici ", vol. XII. Pisa, 1903.

operosa, fraternizzarono coi più modesti cultori, coi giovani che sono le speranze dell'avvenire.

La gentile città si mostrò compresa della importanza dell'avvenimento, onorata dalla presenza di tanti uomini illustri, ed accolse tutti con la proverbiale ospitalità emiliana, veramente cordiale e signorile ad un tempo, cosicchè, ne sono certo, tutti i congressisti hanno lasciato Parma conservando un gratissimo ricordo dei bei giorni ivi trascorsi, con un sentimento di riconoscenza per le accoglienze oneste e liete ricevute. Il merito delle quali risale a tutto il Comitato locale, del quale fu benemerito Presidente l'on. prof. Cardani deputato al Parlamento, e vicepresidente il prof. Leone Pesci, rettore dell'Università; e all'Amministrazione Comunale con a capo il suo giovane e brillante Sindaco, Luigi Lusignani professore dell'Università. Sono certo d'interpetrare il sentimento dei più, inviando un ringraziamento a tutti coloro che cooperarono a rendere lieta questa bella festa della scienza.

***

Il 23 settembre a ore 15 nel grandioso teatro Farnese ebbe luogo la solenne inaugurazione del Congresso. Dopo che il Sindaco Lusignani ebbe rivolto il saluto della città ai convenuti, il Presidente effettivo senatore Volterra lesse una dotta conferenza densa di erudizione e di pensiero, nella quale tratteggiò la storia dei congressi precedenti, parlò della importanza della coordinazione delle varie scienze, che tendono a soverchiamente specializzarsi, del largo contributo che il lavoro degli scienziati porta al benessere generale, mercè le loro scoperte che spesso, lungamente elaborate nella quiete dei laboratori, schiudono la via ad applicazioni pratiche della più alta importanza.

Infine S. E. il Ministro della P. I., Rava, dichiarò aperto il Congresso in nome di S. M. il Re, e con un brillante discorso evocò le glorie di Parma nel campo della scienza, ed osservò che, mentre nel primo periodo i vari principotti italiani seguivano con diffidenza e terrore l'opera degli scienziati riuniti a convegno, oggi il Re d'Italia s'interessa vivissimamente all'opera degli scienziati, e ad essa dà tutto il suo appoggio.

***

Le adunanze generali per l'approvazione dello Statuto furono tenute il 24, 26, 28 dapprima nel teatro Farnese, poi nell'Aula Magna dell'Università, essendosi constatate le pessime condizioni acustiche di quel teatro.

La discussione fu lunga e molto animata; non mancarono vivaci incidenti, i quali dimostrarono l'interessamento vivissimo che tutti i convenuti prendono per la nuova istituzione. Infine fu approvato il disegno di Statuto preparato dal Comitato ordinatore del Congresso con lievi varianti, fra le quali ecco le più notevoli.

L'art. 1° proposto dal Comitato diceva:

" È costituita la *Società italiana per il progresso delle scienze*, costituita in " corpo morale, con sede in Roma ".

" Essa ha per iscopo di CONTRIBUIRE AL PROGRESSO E ALLA DIFFUSIONE delle " scienze pure e delle loro applicazioni, e di stabilire rapporti personali fra i cul" tori di esse ".

Alle parole sopra stampate in maiuscoletto furono sostituite le altre " PROMUOVERE IL PROGRESSO LA COORDINAZIONE E LA DIFFUSIONE.

L'art. 3 stabiliva la divisione della Società in *Sezioni*, secondo i vari rami di scienze; fu invece votata la divisione in *classi generali* e la suddivisione di queste in sezioni.

L'art. 6 stabiliva in L. 5 la quota annua dei soci; fu invece votata la quota di L. 10.

L'art. 7 stabiliva che il presidente ed i vicepresidenti stessero in carica 1 anno e non potessero essere rieletti senza interruzione; e il segretario e il vicesegretario stessero in carica 3 anni.

Fu invece votato che il Presidente e i vicepresidenti stiano in carica 2 anni il segretario e il vicesegretario 4.

***

Pure a sezioni riunite furono tenute tre conferenze nell'Aula Magna dell'Università nel seguente ordine:

Martedì 24 a ore 17.

Prof. Giacomo Ciamician: *La chimica organica negli organismi.*

Giovedì 26 a ore 17.

Prof. Pio Foà: *Sul significato biologico dei tumori.*

Venerdì 27 a ore 17.

Prof. Maffeo Pantaleoni: *Quarant'anni di studi economici.*

Tutte e tre furono pregevolissime; la prima sopratutto, per l'affinità delle materie, interessò specialmente i cultori delle scienze esatte.

Con parola facile ed elegante l'illustre oratore incatenò per più d'un'ora l'attenzione del numeroso e scelto uditorio, esponendo lo stato attuale delle ricerche dei chimici sulla sintesi delle sostanze organiche; enumerò rapidamente le principali conquiste già conseguite in questo campo e quelle che si possono sperare realizzabili in un avvenire più o meno prossimo, e mostrò che, mentre si è ritenuto in passato che le sostanze organiche non si possono ottenere che negli organismi viventi, recenti esperienze provano che certi composti che si trovano negli organismi si possono anche produrre artificialmente fuori di essi. È vero che i corpi organici di cui si è ottenuta la sintesi richiedono i grandi mezzi, le grosse artiglierie della chimica, mentre la natura li ottiene con mezzi molto semplici; ma ciò non toglie che resultati notevoli sieno stati raggiunti ed altri siano prossimi a raggiungersi. Ammesso però, il che è ancora assai lontano, che si potesse giungere a costruire artificialmente tutti i composti organici, non sarebbe risoluto per nulla il problema della vita vegetale e animale.

***

Il Congresso si divise in 14 sezioni come segue:

Sezione I. — *Matematica, Astronomia, Geodesia.*
" II. — *Fisica, Fisica terrestre, Meteorologia.*
" III. — *Meccanica ed ingegneria, Elettrotecnica.*
" IV. — *Chimica ed applicazioni.*
" V. — *Agraria.*
" VI. — *Geografia.*
" VII. — *Mineralogia, Geologia, Paleontologia.*
" VIII. — *Botanica.*
" IX. — *Zoologia ed Anatomia comparata.*
" X. — *Antropologia, Etnografia, Paletnografia.*
" XI. — *Anatomia e Istologia.*
" XII. — *Fisiologia e Farmacologia.*
" XIII. — *Patologia, Igiene, Batteriologia.*
" XIV. — *Statistica e scienze economiche.*

Contemporaneamente aveva luogo la riunione della *Società filosofica*, degli *Esercenti le Officine elettriche*, dolla *Associazione elettrotecnica italiana*.

Non è questa la sede opportuna per rendere conto del lavoro di tutte queste sezioni; ma non dispiacerà ai nostri lettori avere qualche notizia sommaria sul lavoro compinto nelle prime tre sezioni.

SEZIONE I.

Martedì 24 a ore 13 ebbe luogo la prima seduta, che fu aperta dal prof. MICHELE DE FRANCHIS, presidente del Comitato sezionale locale. Il senatore VALENTINO CERRUTI lesse la conferenza inaugurale dal titolo " *Le matematiche pure e miste nei precedenti Congressi della Società italiana per il progresso delle scienze* ".

La dottissima conferenza storica mise in luce lavori, alcuni dei quali dimenticati interamente o quasi, e dimostrò che l'opera dei matematici italiani della prima metà del secolo scorso ha un'importanza superiore a quella che si crede dai più. — Alla fine l'illustre conferenziere fu vivamente applaudito.

Fu poi deliberato l'invio di alcuni telegrammi, e per acclamazione fu eletto Presidente della sezione il prof. CERRUTI, al quale fu deferita la nomina del Vice-presidente e del Segretario.

Il prof. Cerruti assunse immediatamente la Presidenza, nominando Vice-presidente il senator D'OVIDIO e segretari i prof. DE-FRANCHIS e AMALDI.

Infine il prof. PIERI lesse una comunicazione del prof. LAURICELLA, assente, sul tema " *Le equazioni funzionali* ".

Il 25 ebbero luogo due sedute a ore 9 e ad ore 14 $^1/_2$ sotto la presidenza del senatore d'Ovidio.

Nella prima il prof. FUBINI lesse una comunicazione " *Intorno ai recenti metodi nella risoluzione del problema di Dirichlet* ". Quindi i congressisti si unirono ai colleghi della II sezione per assistere ad una comunicazione del prof. LEVI CIVITA.

Nella seduta pomeridiana furono lette le seguenti comunicazioni:

BURGATTI: *Sulle equazioni differenziali.*

TEDONE: *Sulle equazioni della fisica matematica.*

AMALDI: *Intorno agli ultimi risultati nella teoria dei gruppi di trasformazioni.*

I conferenzieri dettero conto dello stato attuale della scienza sugli argomenti trattati da ciascuno di essi e del loro contributo personale ai medesimi.

Il 27 furono tenute due sedute, presiedute dal senatore D'OVIDIO. La seduta antimeridiana fu consacrata all'importante relazione del prof. SOMIGLIANA " *Sulla preparazione matematica degli allievi ingegneri* ", nella quale fu affermata la necessità di limitare l'insegnamento matematico per gli allievi ingegneri e dare ad esso un indirizzo più pratico. La relazione dette origine ad una importantissima discussione, alla quale presero parte molti degli intervenuti, fra i quali il professor Giuseppe Pesci, il quale osservò come parecchie delle riforme proposte sono già state attuate da una diecina d'anni nella R. Accademia navale con buoni risultati. Dopo di che fu nominata una commissione composta dei professori Veronese, Castelnuovo, Grassi e Somigliana incaricata di riassumere le idee emerse dalla discussione in un ordine del giorno da votarsi nella seduta pomeridiana.

Infatti in questa seduta, dopo che il prof. Bortolotti ebbe parlato " *Sulla ristampa delle opere matematiche e del carteggio di P. Ruffini* ", fu votato il suddetto ordine del giorno con cui si esprimono i seguenti voti.

1. I corsi fondamentali di matematica siano tre: uno biennale di analisi, uno annuale di geometria analitica ed uno annuale di geometria descrittiva con applicazioni;

2. Il corso di meccanica razionale venga svolta nel secondo anno;

3. Il corso di geodesia teoretica non sia obbligatorio per gli allievi ingegneri;

4. L'insegnamento della fisica sia impartito nel secondo anno con i sussidi del calcolo e della meccanica razionale e coordinato con quelli successivi delle sue applicazioni tecniche, svolte in guisa da evitare ripetizioni e lacune.

5. Ciascun corso venga sussidiato da esercitazioni pratiche di calcolo, laboratorio e disegno, diretto, dove gli allievi sono numerosi, da un numero di assistenti proporzionale al numero degli allievi.

Infine il prof. Vailati intrattenne l'assemblea " *Sull'insegnamento della Matematica nelle scuole secondarie* ". Di questo importante argomento riparleremo più a lungo nel prossimo numero.

Sezione II.

Il giorno 24 a ore 15 dopo brevi parole di saluto e di ringraziamento dell'on. Cardani, si iniziarono i lavori della sezione con una splendida conferenza del senatore Augusto Righi sulle " *Vedute moderne intorno alla costituzione della materia* ". In essa l'illustre oratore fece una dotta e geniale esposizione relativa ai fenomeni della ionizzazione dei gaz, ai raggi-canali, e ad alcune recenti esperienze sulla trasformazione di elementi chimici e mostrò l'analogia fra i fenomeni della ionizzazione dei gaz e quelli dei colloidi e dei cristalli fluidi.

Fu quindi eletto per acclamazione il senatore Righi presidente della sezione e su proposta di lui furono nominati il prof. Sella Vice-presidente e i professori Amaduzzi, Blanc, Bartorelli ed Umani segretari.

Infine il prof. Maiorana tenne una conferenza sperimentale " *Sullo stato attuale della telefonia senza fili* ", mostrando gli effetti delle correnti di Pulsen interessanti tanto scientificamente quanto per le applicazioni, ed esponendo in particolare le sue ricerche sull'argomento.

La mattina del 25 sotto la presidenza del senatore Righi, si aprì la seconda seduta con la interessante conferenza del prof. Tullio Levi Civita " *Sulla massa elettromagnetica* ", alla quale assistevano anche gl'inscritti alla I sezione, come fu già detto.

Quindi il prof. Puccianti, dopo avere accennato ad alcune sue esperienze sui cristalli fluidi, fece il suo rapporto sulla " *Spettroscopia* ", e più specialmente sugli spettri di righe. — Egli fece un riassunto di quanto si conosce sulla regolarità degli spettri, sulle proprietà caratteristiche delle righe; sulla molteplicità spettrale, concludendo che questa è da attribuirsi a una variazione di costituzione; sui vibratori, mostrando che essi, in armonia con recenti esperienze, sono gl'ioni positivi.

Infine il prof. Bruni parlò " *Sui limiti dei vari stati d'aggregazione e specialmente dello stato solido* ", in presenza delle sezioni riunite di fisica, chimica e di mineralogia.

Questa conferenza fu corredata da proiezioni coll'apparecchio microcinematografico di Siedentopf e Sommerfeldt. Tali proiezioni erano una novità perchè solo pochi giorni prima gli autori le avevano presentate al Congresso di Dresda.

Il 26 a ore 17 ebbe luogo la terza seduta sotto la presidenza del senatore Righi. In essa il prof. Rossi fece una comunicazione sopra " *Un rivelatore di onde elettriche* ", il prof. Pochettino intrattenne i soci con un rapporto " *Sulle onde e Sesse* ", ed il prof. Platania parlò delle *Sesse marine*.

Infine, su proposta del prof. Chistoni, si espresse il voto che le ossa di Macedonio Melloni vengano più gelosamente custodite e possibilmente trasferite a Parma.

Il 27 furono tenute due sedute. In quella antimeridiana, presieduta prima dal prof. Sella poi dal prof. Chistoni, il prof. Lo Surdo lesse una comunicazione sulla " *Radiazione notturna* ", descrivendo un suo apparecchio, e riferendo vari resultati. Si ebbe una breve discussione poichè il prof. Puccianti, dopo avere riconosciuto l'interesse della comunicazione e i pregi dell'apparecchio presentato dal Lo Surdo, fece delle critiche d'indole generale ai metodi con cui si studiano le radiazioni notturne. — Il prof. MARCOLONGO fece un interessantissimo sunto storico delle teorie dell'elasticità, mettendo in rilievo l'importanza dei lavori di Betti e Volterra.

La seduta pomeridiana, presieduta prima dal prof. SELLA poi dal prof. RIGHI, si aprì col rapporto del prof. GARBASSO sul " *Miraggio* ", nel quale egli incluse le annunciate comunicazioni del prof. ROLLA (*Un teorema sull'ottica dei mezzi non omogenei attivi*) e di GARBASSO e FUBINI (*Ricerche sull'ottica dei mezzi non omogenei e non isotropi*). La esposizione di indole matematica contiene una teoria assai più completa e perfetta delle antecedenti su questo interessante fenomeno, e si chiuse colla dimostrazione dei vari tipi di miraggio ottenuti artificialmente mediante strati sovrapposti di liquidi di vario indice e miscibili tra loro.

L'ing. MANCINI, mostrò alcune fotografie a colori ottenute col processo Lumiere, dopo avere dato su questo i necessari schiarimenti. — Il professor Righi proiettò una fotografia, che mostrò l'effetto Döppler nei raggi canali, in relazione a quanto aveva esposto nella sua conferenza inaugurale.

Stante l'ora tarda si dette per letto il rapporto del dott. BLANC sulla " *Radioattività* ", ed il presidente dichiarò chiusi i lavori della Sezione.

SEZIONE III.

Il giorno 24 a ore 13, l'ing. ITALO PELLERI Presidente del Comitato sezionale locale, e rappresentante ufficiale del Ministero dei lavori pubblici al Congresso, inaugurò i lavori della sezione con un saluto augurale ai presenti ed al Presidente del Comitato sezionale centrale senatore Colombo; dopo di che il comm. Ascoli lesse un dotto discorso.

Il giorno 25 a ore 9,30, apertasi la seduta sotto la presidenza dell'ing. PELLERI, fu costituito l'ufficio di presidenza, nominando Presidente l'ing. LUIGI LUIGGI, Segretari gl'ing. LUIGI MENOZZI, ALFREDO PROVINCIALI.

Il cav. Luiggi assunse la presidenza, ringraziò gli ordinatori del Congresso, annunciò le importanti comunicazioni degl'ingegneri SASSI, GREPPI e CONTI; fece una rapida esposizione dei più moderni mezzi di comunicazione, e salutando i congressisti, dette la parola all'ing. Sassi che svolse la sua conferenza sulla " *Navigazione fluviale* " facendo cenno di un progetto ideato dall'ing. Grassi, capo dell'ufficio del genio civile di Parma per un canale navigabile da Parma al Po.

Su proposta dell'ing. Amoretti fu deliberato che la conferenza dell'ing. Sassi, oltre che negli Atti della Società, sia stampata in opuscoli da diffondersi nella provincia di Parma.

La seduta si chiuse con l'interessante comunicazione dell'ing. GREPPI sulle " *Recenti migliorie nel materiale rotabile delle ferrovie italiane* ".

La seconda seduta, sotto la presidenza dell'ing. Pelleri fu tenuta il 26 a ore 17 e fu destinata alla lettura del cav. Luiggi sopra " *I lavori marittimi al principio del secolo XX* ". L'importanza dell'argomento e la speciale competenza in materia dell'illustre conferenziere avevano richiamato nell'aula numerosi congressisti anche di altre sezioni, i quali tutti applaudirono vivamente l'oratore.

Ora che i nostri porti si mostrano insufficienti agli scambi accresciuti in modo meraviglioso, e che il parlamento ha votato la cospicua somma di 130 milioni per il miglioramento ed ampliamento dei medesimi, la conferenza del Luiggi è della massima importanza ed attualità.

Il generale BIGOTTI, l'apostolo della navigazione interna, richiamando le conferenze degl'ingegneri Sassi, Greppi e Luiggi, propose che nei prossimi congressi una speciale sezione abbia ad occuparsi del problema generale dei trasporti.

Il cav. Luiggi, come membro del comitato centrale del congresso, promise di presentare ed appoggiare presso il comitato stesso il voto del generale Bigotti.

Dopo di che il Presidente dichiarò chiusi i lavori della Sezione.

Il giorno successivo 27 i congressisti della III Sezione, in unione ad alcuni delle altre sezioni, si recarono a Piacenza per ammirare il grandioso ponte sul Po, che si sta costruendo dalle provincie di Piacenza e Milano.

Un treno speciale composto di materiale tutto nuovo, messo a disposizione dalla direzione delle ferrovie, trasportò i congressisti mostrando il tipo unico che sarà adottato dalle ferrovie italiane per i treni diretti. — Una delle maggiori attrattive della gita fu il carro dinamometrico (l'unico che esista in Italia), nel quale si trovano ingegnosi ed eleganti apparecchi che registrano automaticamente, per mezzo di diagrammi, la velocità del treno in ogni istante, il lavoro consumato, ecc., sia nella trazione a vapore sia in quella elettrica; e tutto ciò che interessa in pratica di conoscere sul funzionamento del freno. L'egregio ing. Greppi spiegò agl'intervenuti il funzionamento di detti apparecchi.

Particolare, degno di nota, il treno raggiunse la velocità di 120 km. all'ora, e anche nelle vetture in coda al treno non si sentivano scosse nè oscillazioni.

Le officine di Savigliano, fornitrici del materiale per il ponte, offrirono un banchetto ai congressisti. Tutte le autorità di Piacenza accolsero festosamente i congressisti e fecero a gara per rendere loro piacevoli le ore da essi passate a Piacenza.

***

Il Congresso si chiuse colla votazione per il Consiglio direttivo della Società, che dette i seguenti risultati: Presidente il prof. senatore Vito Volterra; Vice-presidenti il prof. senat. Camillo Golgi e prof. Giacomo Ciamician; Segretario il prof. Alfonso Sella; Vice-segretario il prof. Pasquale Baccarini; Amministratore il comm. prof. Bonaldo Stringher. Furono eletti a costituire il *Comitato scientifico*, in unione ai presidenti delle diverse sezioni, i signori: Giacomo Vailati (professore di storia delle scienze esatte); Guido Castelnuovo (prof. di geometria nell'Università di Roma), Ferdinando Lori (prof. di elettrotecnica a Parma), Filippo Bottazzi (prof. di fisiologia a Napoli), Vincenzo Tangorra (prof. di scienza delle finanze a Pisa), Gino Galeotti (prof. nell'Università di Napoli), Umberto Ricci (redattore del *Giornale degli economisti*), Ernesto Lugaro (prof. di psichiatria a Messina).

In fine fu proclamata Firenze per sede del secondo Congresso, che sarà tenuto nel 1908.

G. L.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 729 E 730

729. *La tangente in un punto* M *d'una curva piana* (C) *incontra l'asse* Oy *in* T *e la normale incontra l'asse* Ox *in* N. *Determinare la curva* (C), *sapendo che il baricentro* B *del triangolo* MNT *descrive una retta* Ob.

J. Rose.

Risoluzione del sig. De Bei, R. Accademia Navale.

Essendo

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x) \qquad , \qquad Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x)$$

le equazioni rispettivamente della tangente e della normale nel punto M (x, y) della curva richiesta (C), si hanno per gli altri punti della figura le seguenti coordinate

$$\mathrm{T}\left(0 \quad , \quad y-\frac{dy}{dx}x\right)$$

$$\mathrm{N}\left(x+\frac{dy}{dx}y \quad , \quad 0\right)$$

$$\mathrm{B}\left(\frac{1}{3}\left(2x+\frac{dy}{dx}y\right) \qquad \left(\frac{1}{3}\left(2y-\frac{dy}{dx}x\right)\right)\right.$$

Indicando con m il coefficiente angolare della retta OB si ha

$$2y-\frac{dy}{dx}x=m\left(2x+\frac{dy}{dx}y\right).$$

Questa è l'equazione differenziale della curva luogo di M, e si può anche porre sotto la forma

$$2(y-mx)\,dx=(x+my)\,dy.$$

Questa, essendo omogenea, s'integra ponendo $y=zx$ e quindi $dy=zdx+xdz$. Si ha così

$$\frac{dx}{x}+\frac{(mz+1)\,dz}{mz^2-z+2m}=0.$$

Posto $\alpha=\sqrt{1-8m^2}$, si ha

$$\frac{mz+1}{mz^2-z+2m}=\frac{\alpha+3}{2\alpha}\cdot\frac{2m}{2mz-(\alpha+1)}+\frac{\alpha-3}{2\alpha}\cdot\frac{2m}{2mz+(\alpha-1)},$$

e perciò, integrando l'equazione precedente, si trova

$$\log x+\frac{\alpha+3}{2\alpha}\log\{2mz-(\alpha+1)\}+\frac{\alpha-3}{2\alpha}\log\{2mz+(\alpha-1)\}=\log c,$$

da cui, ponendo $\frac{y}{x}$ al posto di z, si ha

$$\{2my-(\alpha+1)\,x\}^{\alpha+3}\cdot\{2my+(\alpha-1)\,x\}^{\alpha-3}=c^{2\alpha}.$$

Altre risoluzioni dei sigg. Scalabrini, R. U. di Pavia e Vacchi, R. U. di Bologna.

730. *Siano* (C) *una curva piana,* P *la proiezione del punto* M *della curva sull'asse delle* x, T *il punto d'incontro della tangente in* M *coll'asse* Oy, TQ *la perpendicolare ad* OM. *Determinare la curva* (C) *tale che* TQ *passi per* P.

J. Rose.

Risoluzione dei sigg. De Bei, R. Accademia Navale, Scalabrini, R. U. di Pavia e Vacchi, R. U. di Bologna.

Essendo x, y le coordinate di M, le coordinate degli altri punti della figura sono

$$\mathrm{P}\,(x \quad , \quad 0)$$

$$\mathrm{T}\left(0 \quad , \quad y-\frac{dy}{dx}x\right).$$

Perciò le equazioni delle rette OM, TP sono rispettivamente

$$\mathrm{Y}=\frac{y}{x}\mathrm{X} \quad , \quad \frac{\mathrm{X}}{x}+\frac{\mathrm{Y}}{y-\frac{dy}{dx}x}=1,$$

ed i loro coefficienti angolari sono

$$\frac{y}{x} \quad , \quad -\frac{y}{x}+\frac{dy}{dx}.$$

Dovendo queste esser perpendicolari, si ha la condizione

$$-\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}\,\frac{dy}{dx}+1=0$$

ovvero

$$(x^2-y^2)\,dx+xy\,dy=0.$$

Questa è l'equazione differenziale della curva (C).

Posto $y=zx$, l'equazione suddetta diviene

$$\frac{dx}{x}+z\,dz=0,$$

da cui

$$\log\frac{x}{c}+\frac{z^2}{2}=0 \quad , \quad \log\frac{x}{c}+\frac{y^2}{2x^2}=0,$$

od anche

$$\frac{x}{c}=e^{-\frac{y^2}{2x^2}}.$$

QUISTIONI PROPOSTE

738. 1°. Se i raggi dei circoli exinscritti di un triangolo sono in progressione aritmetica, la retta che congiunge il punto di Gergonne al baricentro è parallelo al lato medio.

2°. Se i raggi dei circoli exinscritti sono in progressione geometrica la retta che congiunge il centro del circolo inscritto al punto di Lemoine è parallela al lato medio. La retta che congiunge il punto di Nagel al punto di Gergonne è pure parallela al medesimo lato.

3°. Se i raggi dei circoli exinscritti sono in proporzione armonica, i lati sono in progressione aritmetica, il baricentro, il centro del circolo inscritto ed il punto di Nagel sono sopra una retta parallela al lato medio.

E. N. Barisien.

BIBLIOGRAFIA

Laisant. — *Iniziazione alle matematiche.* Traduzione di G. Lazzeri sulla seconda edizione francese. Firenze, Barbèra.

Nel n. V, anno XXI (marzo-aprile 1906) di questo Periodico abbiamo dato notizia di questa interessante operetta, che è stata accolta in modo oltremodo lusinghiero dal pubblico di Francia, tanto che in breve tempo è stata fatta una seconda edizione.

Fra pochi giorni coi tipi del Barbèra sarà pubblicata una traduzione italiana. Ecco la prefazione del traduttore:

Le prefazioni alla 1ª e alla 2ª edizione di questo libretto spiegano così chiaramente quali sono gl'intendimenti che guidarono l'egregio autore nel comporlo, quale è lo scopo che egli si propose raggiungere, che non occorrono altre parole di commento.

Il signor Laisant, ben noto agli studiosi di tutto il mondo per l'attività instancabile con la quale si occupa principalmente di questioni didattiche relative all'insegnamento secondario e superiore del suo paese, per gl'importanti giornali scientifici che dirige brillantemente come le *Nouvelles Annales de Mathématique*, l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, l'*Enseignement mathématique* (questi due ultimi fondati da lui), ha voluto per una volta uscire dal campo cui è solito dedicare le doti del suo ingegno, e dare agli educatori dell'infanzia, ai babbi e alle mamme che vogliono personalmente curare e sorvegliare lo sviluppo intellettuale dei loro bambini, una guida per fare entrare nelle tenere menti una considerevole quantità di cognizioni matematiche, senza alcuno sforzo, sotto forma di giuochi dilettevoli.

Prima ancora che essi sappiano leggere, quasi senza che essi se ne accorgano, i bambini potranno essere condotti col metodo del Laisant, ad acuire le facoltà innate d'intuizione e di osservazione e ad arricchire le loro giovani menti di un corredo di cognizioni, che spianerà loro molto considerevolmente la via, quando comincerà per essi il periodo degli studi.

L'egregio autore, rivolgendo il suo pensiero all'infanzia, è riuscito a farsi piccino piccino, a mettersi a livello dei suoi piccoli scolaretti; e dalla sua mente geniale è scaturita quest'operetta che sotto forma spigliata e divertente contiene tanta sapienza pedagogica, quanta raramente se ne trova nei grossi e pesanti trattati di pedagogia teoretica.

La grandissima diffusione che il libro ha avuto in Francia in tempo brevissimo (la 1ª edizione comparve nel 1906) il lusinghiero giudizio che di esso è stato dato da innumerevoli giornali pedagogici e scientifici francesi e di altri paesi confermano l'importanza educatrice del libro medesimo.

La presente traduzione è stata fatta sulla 2ª edizione francese (1907) e differisce da essa soltanto per alcune lievi modificazioni ed aggiunte, che non vale la pena di enumerare, e che furono in parte suggerite dall'autore, l'altre approvate ed autorizzate da esso.

Mi auguro che tutti coloro che si dedicano all'educazione dell'infanzia, vorranno leggere quest'operetta e meditare su di essa.

Se questa traduzione varrà a diffondere in Italia concetti e metodi educativi che io ritengo altamente commendevoli, mi compiacerò di avere in minima parte cooperato ad un'opera utilissima.

Livorno, settembre 1907. G. Lazzeri.

S. Catania. — *Aritmetica razionale* pei Ginnasi Superiori. Seconda edizione completamente rifatta, corredata di molti esercizi con avviamento. Catania, Cav. N. Giannotta, 1908.

Il sorgere di questa seconda edizione, è indizio sicuro del progresso dell'insegnamento matematico nelle nostre scuole medie. Oramai era tempo che secolari tautologie fossero abbattute da un alito rigeneratore, e che nell'insegnamento secondario un'eco avesse quel grande rigore che ingegni altissimi avevano dato ai principi della Matematica, e, in particolare, dell'Aritmetica Generale.

Il prof. Catania si prefisse un nobile e non facile fine, quello precisamente di accoppiare a questo rigore una semplice e chiara esposizione, in modo da rendere facile ai giovanetti delle nostre scuole medie, lo studio dell'Aritmetica Razionale.

Egli ha raggiunto il suo fine: sincere congratulazioni.

Come l'A. dice, la sua è opera di lunghi e pazienti studi sulle oramai classiche opere del Peano; ma non si creda però che si tratti semplicemente di una volgarizzazione, giacchè l'A. ha assimilato i lavori di quell'insigne.

Premessi brevissimi ma chiari e sufficienti concetti fondamentali di logica, si ammettono come idee primitive, i concetti di numero, di zero, e di successivo di un numero. Poscia su cinque proposizioni primitive, che in sostanza servono a definire i numeri, si alza in modo incrollabile tutto l'edifizio dell'Aritmetica Razionale.

Moltissimi teoremi, particolarmente quelli riguardanti la somma, il prodotto e la potenza, son dimostrati col metodo d'induzione, e ciò ne facilita moltissimo lo studio, mentre nei soliti trattati una delle difficoltà che lo studente incontra, è precisamente la grande varietà di dimostrazioni. Il m. c. m. e il M. C. D. son trattati in modo originale e forse più facile di come si fa ordinariamente.

La teoria dei numeri primi è svolta come di solito. A proposito dirò che uno dei pregi dell'opera in esame, è di non mutare ciò che per rigore e semplicità, da tempo si trova in tutti i trattati del genere.

Le frazioni son definite come l'operazione composta di una moltiplicazione e di una divisione, e poscia ne viene svolta la teoria con quella semplicità e con quel rigore che informano tutta l'opera. Segue la teoria delle proporzioni, e pochi elementi di calcolo letterale.

Ottime le applicazioni alla teoria delle grandezze, le poche note storico-critiche, e la scelta dei molti esercizi con avviamento.

Come conferma del grande rigore col quale son trattate tutte le teorie, valgano le due seguenti domande, che sarebbe impossibile rivolgere per la massima parte dei trattati del genere, perchè si risponderebbe dicendo che si tratta di cose evidenti (?!).

1ª. Che significato hanno le parole: " *... per tutti i numeri a cominciare da k* ", della riga 5ª di pag. 8? S'intende considerate nel punto ove sono.

2ª. Perchè la classe No è rappresentata dagli individui 0, 1, 2, 3, 4, ... (Vedi pag. 10, riga 8ª)? Non può darsi che esistano altri numeri oltre di questi?

All'A. certamente sarà molto facile rispondere, p. es. in una terza edizione che auguro prestissimo, ma io stimo che il farle è cosa assai naturale.

Concludo dicendo che è un fatale pregiudizio il credere che un trattato debba certamente riuscire difficile ai nostri studenti, sol perchè v'è grande rigore, e di ciò parlo per esperienza. L'Aritmetica Razionale del prof. Catania non è certamente più difficile delle tante che corrono, anzi forse è più facile.

G. Marletta.

L'ASSOCIAZIONE MATHESIS

Molti soci di questa Associazione e molti professori universitari, che avevano aderito alla Nuova Mathesis, riformata secondo le proposte accennate un anno fa in questo periodico (Anno XXII, n. 2, p. 76, sett.-ott. 1906) e annunziate ufficialmente in un numero straordinario del bollettino pubblicato nello scorso aprile, mi hanno domandato per iscritto o verbalmente (in occasione del congresso di Parma) perchè l'Associazione da lungo tempo non dà segni di vita, e principalmente perchè la proposta suddetta non è stata neppure messa in votazione.

A tutti rispondo pubblicando la seguente lettera, diretta al presidente dell'Associazione prof. Enrico De Amicis, preside del R. I. Tecnico di Forlì.

Tremoleto, 5 Ottobre 1907.

Caro De Amicis.

Il 28 settembre dello scorso anno, il Comitato dell'Associazione Mathesis adunatosi a Bologna deliberò unanime di proporre ai soci una importante modificazione dello statuto, intesa ad allargare le basi della Società, conservando inalterato il carattere eminentemente didattico della medesima; ed io pubblicai la notizia sommaria di questa deliberazione nel n. 2, anno XXII (sett.-ott. 1906), del mio Periodico di matematica.

Nel mese di aprile è stato pubblicato un bollettino straordinario contenente l'annunzio ufficiale della proposta modificazione di statuto, e dopo il Comitato non ha dato più alcun segno di vita, e nemmeno ha pubblicato i resoconti delle due annate 1905-06 e 1906-07. Evidentemente siamo fuori della legalità; eppure sai bene che non ti sono mancate da parte mia sollecitazioni perchè cessasse questo stato di apatia che uccide la Società.

Non mi resta dunque che presentare le mie dimissioni (assolutamente irrevocabili) da membro del Comitato, non intendendo più oltre di avere una parte anche minima di responsabilità in uno stato di cose che deploro.

G. Lazzeri.

Per maggiori schiarimenti dirò che il prof. De Amicis ha dichiarato costantemente che approvava e desiderava al pari di me di trasformare l'Associazione, in guisa che essa possa essere aperta a tutti i cultori della matematica, a qualunque grado d'insegnamento essi appartengano, conservandole però il suo carattere eminentente educativo e didattico; ma alle sollecitazioni mie e di altri perchè facesse fare la votazione sulla proposta riforma, secondo le norme stabilite dal vecchio statuto, si è limitato a rispondere che le sue occupazioni personali non gli avevano mai lasciato il tempo di farlo.

Una tale ragione, accettabile per qualche settimana o per qualche mese non è più buona dopo oltre un anno; e perciò mentre ho voluto pazientare fino ad ora, forse anche troppo, per amore di concordia, mi sono trovato nella necessita di dimettermi per lasciare la responsabilità soltanto a chi spetta.

Ed ora che, tornato semplice socio, ho riacquistata la mia libertà d'azione, aggiungerò che molti colleghi, addolorati come me di vedere finire per consunzione una società che ha pure avuto una vita florida e rigogliosa, ed ha reso utili servigi all'insegnamento, desiderosi come me di farla risorgere, mi hanno rivolto varie proposte.

Alcuni propongono di sciogliere la Società e di ricostituirla *ex-novo*. Qualcun altro vorrebbe che il Periodico di matematica s'incaricasse di fare le votazioni sulla riforma proposta.

Tanto l'una quanto l'altra di queste proposte sono da considerarsi come rimedi estremi ad un male estremo. Voglio sperare che questo pubblico svegliarino, più energico degli altri, induca i membri del Comitato dell'Associazione ancora in carica a fare sollecitamente ciò che devono, riguadagnando un po' del tempo perduto, in guisa che senza scosse si possa effettuarne la trasformazione, che speriamo debba dare nuovo vigore alla nostra Associazione.

G. Lazzeri.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 31 ottobre 1907

EQUAZIONI LE CUI RADICI SONO DISPONIBILI IN GRUPPI BINARI

AVENTI PRODOTTO COSTANTE

---

1. In questa nota vogliamo occuparci delle equazioni che godono della seguente proprietà: detta x_r una radice qualsivoglia, esiste un certo numero (o un'espressione algebrica) α tale che, posto

$$x_r x_s = \alpha,$$

x_s sia pure radice.

Cercheremo anzitutto le relazioni che debbono legare i coefficienti d'un'equazione, affinchè essa sia del tipo in parola.

Si abbia l'equazione

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0. \tag{1}$$

Affinchè quest'equazione sia del tipo sopra descritto, essa dovrà essere equivalente alla

$$f\left(\frac{\alpha}{x}\right) = 0, \tag{2}$$

ossia alla

$$\varphi(x) = a_n x^n + a_{n-1}\alpha x^{n-1} + a_{n-2}\alpha^2 x^{n-2} + \ldots + a_1 \alpha^{n-1} x + a_0 \alpha^n = 0. \tag{3}$$

Acciocchè le (1) e (3) siano equivalenti deve aversi

$$\frac{a_n}{a_0} = \frac{a_{n-1}}{a_1}\alpha = \frac{a_{n-2}}{a_2}\alpha^2 = \ldots = \frac{a_1}{a_{n-1}}\alpha^{n-1} = \frac{a_0}{a_n}\alpha^n. \tag{4}$$

Da queste si ricava che

$$\frac{a_0}{a_n}, \ \frac{a_1}{a_{n-1}}, \ \frac{a_2}{a_{n-2}}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_1}, \ \frac{a_n}{a_0},$$

debbono essere termini d'una progressione geometrica, di ragione α.

Dalle (4) ricaviamo

$$\alpha = \left(\frac{a_r a_{n-s}}{a_{n-r} a_s}\right)^{\frac{1}{r-s}} (r, s = 0, 1, 2, \ldots, n; \ r \neq s). \tag{5}$$

Viceversa, se le (4) sono verificate, le (3), (1) sono equivalenti e le radici della (1) possono per conseguenza disporsi in gruppi binari aventi prodotto costante. Sicchè potremo affermare quanto segue:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè le radici dell'equazione (1) *siano disponibili in gruppi binari aventi prodotto costante è che i quozienti:*

$$\frac{a_0}{a_n}, \quad \frac{a_1}{a_{n-1}}, \quad \frac{a_2}{a_{n-2}}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_1}, \quad \frac{a_n}{a_0},$$

siano termini successivi d'una progressione geometrica.

La sua ragione ha per espressione

$$\alpha = \left(\frac{a_r a_{n-s}}{a_{n-r} a_s}\right)^{\frac{1}{r-s}} (r, s = 0, 1, 2, \ldots, n; r \neq s).$$

2. L'equazione data può avere per radici semplici o multiple $\sqrt{\alpha}$ e $-\sqrt{\alpha}$, le quali son le sole che, moltiplicate per sè stesse, diano per prodotto α. Ne viene che, liberata l'equazione da queste radici eventuali, si otterrà certamente un'equazione a radici tutte distinte e del tipo in parola e, quindi, di grado pari.

Ne segue ancora che ogni equazione di questo tipo e di grado dispari ammette per radici $\sqrt{\alpha}$ e $-\sqrt{\alpha}$, l'una d'ordine pari, l'altra d'ordine dispari (si considera l'ordine 0 come ordine pari).

3. Consideriamo l'equazione di grado dispari

$$a_0 x^{2m+1} + a_1 x^{2m} + a_2 x^{2m-1} + \ldots + a_{m-1} x^{m+1} + a_m x^m + a_{m+1} x^{m-1} + \ldots + \\ + a_{2m} x + a_{2m+1} = 0, \qquad (6)$$

del tipo considerato; si può porre

$$\frac{a_{2m+1}}{a_0} = \frac{a_{2m}}{a_1} \alpha = \ldots = \frac{a_{m+1}}{a_m} \alpha^m = \frac{a_m}{a_{m+1}} \alpha^{m+1} = \ldots \qquad (7)$$

e quindi

$$\alpha = \frac{a^2_{m+1}}{a^2_m}. \qquad (8)$$

Ciò posto, la (6) può scriversi

$$a_0 \left(x^{2m+1} + \frac{a_{2m+1}}{a_0}\right) + a_1 x \left(x^{2m-1} + \frac{a_{2m}}{a_1}\right) + \ldots a_m x^{m-1} \left(x + \frac{a_{m+1}}{a_m}\right) = 0,$$

ossia, tenendo presenti le (7), (8),

$$a_0 \left(x^{2m+1} + \frac{a_{m+1}^{2m+1}}{a_m^{2m+1}}\right) + a_1 x \left(x^{2m-1} + \frac{a_{m+1}^{2m-1}}{a_m^{2m-1}}\right) + \ldots + a_m x^{m-1} \left(x + \frac{a_{m+1}}{a_m}\right) = 0, \quad (9)$$

che, manifestamente, è verificata per

$$x = -\frac{a_{m+1}}{a_m}. \qquad (10)$$

Potremo dunque affermare che

Ogni equazione di grado dispari, del tipo qui considerato, ammette come radice (d'ordine dispari) il quoziente dei due coefficienti più distanti dagli estremi ed equidistanti dai medesimi, cambiato il segno.

4. Consideriamo l'equazione di grado pari

$$a_0 x^{2m} + a_1 x^{2m-1} + \ldots + a_{m-1} x^{m+1} + a_m x^m + a_{m+1} x^{m-1} + \ldots + \\ + a_{2m-1} x + a_{2m} = 0, \qquad (11)$$

alla forma della quale può agevolmente ridursi ogni equazione del tipo considerato. Avremo

$$\frac{a_{2m}}{a_0}=\frac{a_{2m-1}}{a_1}\alpha=\frac{a_{2m-2}}{a_2}\alpha^2=\ldots=\alpha^m=\ldots=\frac{a_1}{a_{2m-1}}\alpha^{2m-1}=\frac{a_0}{a_{2m}}\alpha^m. \quad (12)$$

Dividiamo ambo i membri della (11) per x^m; avremo

$$\left(a_0x^m+\frac{a_{2m}}{x^m}\right)+\left(a_1x^{m-1}+\frac{a_{2m-1}}{x^{m-1}}\right)+\ldots+\left(a_{m-1}x+\frac{a_{m+1}}{x}\right)+a_m=0,$$

ossia, per le (12),

$$a_0\left(x^m+\frac{\alpha^m}{x^m}\right)+a_1\left(x^{m-1}+\frac{\alpha^{m-1}}{x^{m-1}}\right)+\ldots+a_{m-1}\left(x+\frac{\alpha}{x}\right)+a_m=0. \quad (13)$$

Posto

$$x+\frac{\alpha}{x}=y, \quad (14)$$

è noto che le somme

$$x^2+\frac{\alpha^2}{x^2},\quad x^3+\frac{\alpha^3}{x^3},\ \ldots,\ x^m+\frac{\alpha^m}{x^m},$$

sono esprimibili come funzioni di y dei gradi 2, 3, ..., m, mediante la relazione ricorrente

$$\left(x^{r-1}+\frac{\alpha^{r-1}}{x^{r-1}}\right)\left(x+\frac{\alpha}{x}\right)=\left(x^r+\frac{\alpha^r}{x^r}\right)+\alpha\left(x^{r-2}+\frac{\alpha^{r-2}}{x^{r-2}}\right)\quad (r=2,\ 3,\ldots),$$

e si trova:

$$x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}=y^2-2\alpha,$$

$$x^3+\frac{\alpha^3}{x^3}=y^3-3\alpha y,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e così via. Talchè potremo dire che la (11), giusta la (14), si riduce a un'equazione di grado m, del tipo

$$\varphi(y)=b_0y^m+b_1y^{m-1}+b_2y^{m-2}+\ldots+b_{m-1}y+b_m=0, \quad (15)$$

e che la possibilità di risolvere l'equazione (11) dipende dalla possibilità di risolvere quest'ultima equazione, in conclusione potremo affermare:

Teorema. — *La risoluzione d'un'equazione di grado pari, le cui radici si possono disporre in gruppi binari di prodotto costante, può farsi dipendere dalla risoluzione d'un'equazione di grado metà.*

Caso particolare molto importante è quello delle equazioni *autoreciproche*; in esso si cade ponendo $\alpha=1$.

Altro caso particolare è fornito dalle equazioni le cui radici formano una progressione geometrica. (1)

(1) Cfr. G. Sannia, *Periodico di Matematica*, Anno XXI, Fasc. I.

5. Passiamo a considerare alcuni casi particolari.

Consideriamo l'equazione di terzo grado

$$f(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0\,; \tag{16}$$

condizione necessaria e sufficiente affinchè essa sia del tipo qui considerato, è che

$$\frac{1}{a_3},\quad \frac{a_1}{a_2},\quad \frac{a_2}{a_1},$$

siano termini successivi d'una progressione geometrica, ossia che sia verificata la relazione

$$a_2^3 = a_1^3 a_3. \tag{17}$$

Allora la (16) è verificata per

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1};$$

e le altre due radici x_2, x_3 si possono trovare osservando che

$$\begin{cases} x_2 x_3 = \dfrac{a_2^2}{a_1^2}, \\[2ex] x_2 + x_3 = -a_1 + \dfrac{a_2}{a_1}; \end{cases}$$

da cui

$$\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix} = \frac{a_2 - a_1^2 \pm \sqrt{a_1^4 - 3a_2^2 - 2a_1^2 a_2}}{2a_1}.$$

6. Consideriamo l'equazione di quarto grado

$$f(x) = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0. \tag{18}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè le sue radici siano scomponibili in gruppi binari aventi prodotto costante, è che

$$\frac{1}{a_4},\quad \frac{a_1}{a_3},\quad 1,$$

siano termini successivi d'una progressione geometrica; ossia occorre e basta che sia verificata la relazione

$$a_1^2 a_4 = a_3^2. \tag{19}$$

La (18), dividendone ambo i membri per x^2, a causa della (19), diviene

$$\left(x^2 + \frac{a_3^2}{a_1^2} \cdot \frac{1}{x^2}\right) + a_1 \left(x + \frac{a_3}{a_1} \cdot \frac{1}{x}\right) + a_2 = 0,$$

e, ponendo

$$x + \frac{a_3}{a_1} \cdot \frac{1}{x} = y, \tag{20}$$

da cui

$$x^2 + \frac{a_3^2}{a_1^2} \cdot \frac{1}{x^2} = y^2 - 2\,\frac{a_3}{a_1},$$

essa si riduce all'altra

$$y^2+a_1y+a_2-2\frac{a_3}{a_1}=0,$$

da cui

$$y=-\frac{1}{2}a_1\pm\sqrt{\frac{a_1^2}{4}-a_2+2\frac{a_3}{a_1}}.$$

Quindi, per la (20), la (18) si scinde in due equazioni di secondo grado, che possono mettersi sotto l'unica forma

$$x^2+\left(\frac{1}{2}a_1\pm\sqrt{\frac{a_1^2}{4}-a_2+2\frac{a_3}{a_1}}\right)x+\frac{a_3}{a_1}=0, \qquad (21)$$

e, quindi, rapidamente, si possono scrivere le radici della (18).

7. Sia:

$$f(x)=x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5=0. \qquad (22)$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè essa sia del tipo in discorso, è che

$$\frac{1}{a_5},\ \frac{a_1}{a_4},\ \frac{a_2}{a_3},\ \frac{a_3}{a_2},$$

siano termini successivi d'una progressione geometrica; ossia occorre e basta che siano verificate le relazioni

$$a_5\frac{a_1}{a_4}=\frac{a_2a_4}{a_1a_3}=\frac{a_3^2}{a_2^2}, \qquad (23)$$

ovverosia

$$\frac{a_4}{a_1}=\frac{a_3^3}{a_2^3}; \qquad a_5=\frac{a_3^5}{a_2^5}. \qquad (23)'$$

L'equazione allora è verificata per

$$x=-\frac{a_3}{a_2},$$

e le altre radici sono quelle d'un'equazione di quarto grado, la quale si può scrivere:

$$\frac{a_2^2}{a_3^2}\left(x^2+\frac{a_3^4}{a_2^4}\cdot\frac{1}{x^2}\right)+\left(a_1\frac{a_2^2}{a_3^2}-1\right)\left(x+\frac{a_3^2}{a_2^2}\cdot\frac{1}{x}\right)+\frac{a_2^2}{a_3^2}-a_1\frac{a_2}{a_3}+1=0, \qquad (24)$$

e si risolve col solito metodo, ponendo

$$x+\frac{a_3^2}{a_2^2}\cdot\frac{1}{x}=y.$$

***

8. Le cose dette precedentemente ci suggeriscono alcune considerazioni, le quali, a loro volta, ci forniscono *un nuovo metodo per risolvere le equazioni di 4° grado.*

Dimostreremo il seguente

Teorema. — *Ogni equazione di 4° grado si può trasformare in una equazione, pure di 4° grado, e tale che le sue radici siano disponibili in gruppi binari aventi prodotto costante, risolvendo un'equazione di 3° grado.*

Sia data l'equazione

$$f(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0. \tag{25}$$

Poniamo la trasformazione

$$x = y + z, \tag{26}$$

allora la (25) diviene

$$y^4 + \frac{f'''(z)}{3!} y^3 + \frac{f''(z)}{2!} y^2 + f'(z) y + f(z) = 0. \tag{27}$$

Affinchè quest'ultima equazione abbia le sue radici disponibili in gruppi binari aventi prodotto costante, è necessario e sufficiente che sia (n. 6)

$$f(z) \left(\frac{f'''(z)}{3!}\right)^2 = (f'(z))^2. \tag{28}$$

Essendo, com'è ben noto,

$$f(z) = z^4 + pz^3 + qz^2 + rz + s; \quad f'(z) = 4z^3 + 3pz^2 + 2qz + r,$$

$$\frac{f'''(z)}{3!} = 4z + p,$$

la (28) prende la forma

$$[p(p^2 - 4q) + 8r] z^3 + [q(p^2 - 4q) + 2pr + 16s] z^2 + \\ + [r(p^2 - 4q) + 8ps] z + p^2 s - r^2 = 0; \tag{28'}$$

resta così pienamente dimostrato il teorema enunciato.

Detta dunque α una radice della (28)' l'equazione

$$y^4 + \frac{f'''(\alpha)}{3!} y^3 + \frac{f''(\alpha)}{2!} y^2 + f'(\alpha) y + f(\alpha) = 0, \tag{29}$$

alla quale si trasforma la (25) mediante la posizione

$$x = y + \alpha, \tag{30}$$

appartiene al tipo considerato nei numeri precedenti, epperò si scinde facilmente in due di 2° grado (n. 6).

Posto

$$y + \frac{f'(\alpha)}{\frac{f'''(\alpha)}{3!}} \cdot \frac{1}{y} = t, \tag{31}$$

la (29) diviene

$$t^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!} t + \frac{f''(\alpha)}{2!} - 2 \frac{f'(\alpha)}{\frac{f'''(\alpha)}{3!}} = 0, \tag{32}$$

da cui

$$t=\frac{1}{2}\left[-\frac{f'''(\alpha)}{3!}\pm\sqrt{\left(\frac{f'''(\alpha)}{3!}\right)^2+8\frac{f'(\alpha)}{\frac{f'''(\alpha)}{3!}}-2f''(\alpha)}\right],$$

ovvero

$$t=\frac{1}{2}\left[-(4\alpha+p)\pm\sqrt{\frac{p(p^2-4q)+8r}{4\alpha+p}}\right].$$

Dunque, per la (31), la (29) diviene:

$$y^2+\frac{1}{2}\left[(4\alpha+p)\pm\sqrt{\frac{p(p^2-4q)+8r}{4\alpha+p}}\right]y+\frac{4\alpha^3+3p\alpha^2+2q\alpha+r}{4\alpha+p}=0. \quad (33)$$

Si ha dunque il seguente

TEOREMA. — *Essendo* x_1, x_2, x_3, x_4 *le radici dell'equazione* (25) *di quarto grado,* y_1, y_2, y_3, y_4 *le radici delle equazioni* (33) *e* α *una radice dell'equazione cubica* (28)', *si ha*

$$x_1=\alpha+y_1,$$
$$x_2=\alpha+y_2,$$
$$x_3=\alpha+y_3,$$
$$x_4=\alpha+y_4.$$

COROLLARIO. — *Essendo* x_1, x_2, x_3, x_4 *le radici dell'equazione*

$$f(x)=x^4+px^2+qx+r=0,$$

y_1, y_2, y_3, y_4 *le radici delle equazioni*

$$y^2+\left(2\alpha\pm\sqrt{\frac{q}{2\alpha}}\right)y+\frac{4\alpha^3+2p\alpha+q}{4\alpha}=0,$$

e α *una radice dell'equazione*

$$8qz^3+4(4r-p^2)z^2-4pqz-q^2=0,$$

si ha

$$x_1=\alpha+y_1;\quad x_2=\alpha+y_2;\quad x_3=\alpha+y_3;\quad x_4=\alpha+y_4.$$

9. Come applicazione risolviamo l'equazione numerica

$$f(x)=x^4+x^3+x^2+x+12=0. \quad (34)$$

Formiamo la risolvente

$$f(z)\left(\frac{f'''(z)}{3!}\right)^2=(f'(z))^2,$$

ossia

$$5z^3+191z^2+92z+11=0, \quad (35)$$

la quale è verificata per

$$z=-\frac{1}{5}.$$

Perciò poniamo la trasformazione

$$x=y-\frac{1}{5},$$

allora la (34) si riduce a

$$y^4+\frac{1}{5}y^3+\frac{16}{25}y^2+\frac{86}{125}y+\frac{7396}{625}=0, \qquad (36)$$

la quale può scriversi

$$\left(y^2+\frac{\overline{86}^2}{25^2}\cdot\frac{1}{y^2}\right)+\left(y+\frac{86}{25}\cdot\frac{1}{y}\right)+\frac{16}{25}=0,$$

ossia, posto

$$y+\frac{86}{25}\cdot\frac{1}{y}=t, \qquad (37)$$

$$t^2+\frac{1}{5}t-\frac{156}{25}=0,$$

da cui

$$t_1=\frac{12}{5}; \quad t_2=-\frac{13}{5}.$$

Perciò dalla (37) si ricava che la (36) si scinde nelle due seguenti:

$$25y^2-60y+86=0; \qquad 25y^2+65y+86=0,$$

da cui

$$\begin{matrix}y_1\\y_2\end{matrix}=\frac{6}{5}\pm i\sqrt{2}; \qquad \begin{matrix}y_3\\y_4\end{matrix}=-\frac{13}{10}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{7},$$

sicchè

$$\begin{matrix}x_1\\x_2\end{matrix}=1\pm i\sqrt{2}; \qquad \begin{matrix}x_3\\x_4\end{matrix}=-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{7}.$$

R. VERCELLIN.

SOLUZIONI INTERE DELL'EQUAZIONE PITAGORICA

e applicazione alla dimostrazione di alcuni teoremi della teoria dei numeri

Nella *Memoria bibliografica sull'ultimo teorema di Fermat* del prof. GAMBIOLI [1] si trova questo teorema:

Per risolvere in numeri interi l'equazione $x^2+y^2=z^2$ *la condizione necessaria e sufficiente è che sia*

$$x=v+w \qquad y=u+w \qquad z=u+v+w$$

dove u *e* v *sono interi e* $w^2=2uv$.

[1] Cfr. il fascicolo IV, dell'anno XVI di questo *Periodico*.

Io mi propongo in questa breve NOTA di giungere allo stesso risultato per altra via, precisando inoltre quale è la forma dei numeri u e v: cioè dimostrerò che essendo p e P numeri dispari primi fra loro e K un intero qualunque deve essere

$$v = p^2 . \mathrm{K} \qquad u = 2^{2s-1} . \mathrm{P}^2 . \mathrm{K}.$$

***

I. Prendo dunque a considerare l'equazione

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{1}$$

È lecito manifestamente supporre x, y, z primi fra loro due a due e di più $x < y < z$: di modo che essendo a e b dei numeri interi e positivi sarà $y = x + a$ e $z = x + a + b$. Con ciò la (1) diviene

$$x^2 + (x + a)^2 = (x + a + b)^2 \tag{1)'$$

da cui

$$x^2 = 2\,(x + a)\,.\,b + b^2. \tag{2}$$

Risulta di qui che se non è $b = 1$ ogni fattore primo di b lo è anche di x, e inoltre che x e b sono contemporaneamente pari o dispari. Posto dapprima

$$x = 2^s . x_1 \quad , \quad b = 2^r . b_1,$$

dove x_1 e b_1 sono dispari la (2) diviene

$$2^{2s} . x_1^2 = (2^s x_1 + a) . 2^{r+1} . b_1 + 2^{2r} . b_1; \tag{2)'$$

ora poichè x è primo con $x + a$ e cioè con a, sarà a dispari; epperò se è $r > 1$ per la possibilità della (2)' si richiede $2s = r + 1$: infatti, se così non fosse, dividendo ambo i membri della (2)' per quella potenza di 2 che ha per esponente il minore dei due numeri $2s$ ed $r + 1$ si otterrebbe una eguaglianza fra due interi uno dei quali soltanto sarebbe pari. Invece se è $r = 1$ la (2)' fa vedere che s può essere qualunque.

Inoltre essendo q un fattore primo dispari di b, pongasi

$$x = q^\mu x_2 \quad , \quad b = q^\nu . b_2,$$

dove nè x_2 nè b_2 è divisibile per q: sostituendo, la (2) diviene

$$q^{2\mu} . x_2^2 = 2\,(q^\mu x_2 + a) . q^\nu . b_2 + q^{2\nu} . b_2^2,$$

e quindi si vede che, poichè a non è divisibile per q, perchè è primo con x, deve essere $\nu = 2\mu$. Lo stesso potendosi ripetere per ogni fattore primo dispari di b, si conclude che, se p è il prodotto di tutti i fattori primi dispari (uguali o no) che entrano in x e che sono comuni a b, per x e b possono darsi i tre casi seguenti:

1°	$x = p\xi$	$b = p^2$
2°	$x = 2^s p\xi$	$b = 2^{2s-1} p^2$
3°	$x = 2^s p\xi$	$b = 2p^2$

dove in ogni caso p e ξ sono dispari e primi fra loro: di più non è escluso che sia $p=1$. Osservo ancora che tanto nel secondo che nel terzo caso è $s \geqq 1$.

Dalla (1)' si deduce ancora

$$(x+a)^2 = 2x(a+b) + (a+b)^2 \tag{3}$$

dalla quale si scorge che ogni fattore primo di $a+b$ lo è anche di $x+a$ e che $x+a$ e $a+b$ sono contemporaneamente o pari o dispari. Ripetendo allora sulla (3) le stesse considerazioni che prima si son fatte sulla (2) (basta a tal fine notare che la (3) è ottenuta dalla (2) mettendo al posto di x, $x+a$ e b risp. $x+a$, x e $a+b$) si concluderà che per $x+a$ e $a+b$ possono presentarsi i tre casi seguenti:

$$\begin{array}{lll}
1^\circ & x+a = \mathrm{P}\eta & a+b = \mathrm{P}^2 \\
2^\circ & x+a = 2^s\mathrm{P}\eta & a+b = 2^{2s-1}\mathrm{P}^2 \\
3^\circ & x+a = 2^s\mathrm{P}\eta & a+b = 2\mathrm{P}^2
\end{array}$$

dove in ogni caso P e η sono dispari e primi fra loro e (nel 2° e 3°) è $s \geqq 1$.

Quindi, riassumendo e tenendo presente che x e $x+a$ sono (come è sempre lecito supporre) primi fra loro, l'equazione (1)' [ossia la (1)] potrà essere verificata solo nei casi seguenti:

$$\begin{array}{ll}
\text{I.} \left\{\begin{array}{r} x = p\xi \\ y = x+a = \mathrm{P}\eta \end{array}\right. & \begin{array}{r} b = p^2 \\ a+b = \mathrm{P}^2 \end{array} \\
\text{II.} \left\{\begin{array}{r} x = p\xi \\ x+a = 2^s\mathrm{P}\eta \end{array}\right. & \begin{array}{r} b = p^2 \\ a+b = 2^{2s-1}\mathrm{P}^2 \end{array} \\
\text{III.} \left\{\begin{array}{r} x = p\xi \\ x+a = 2^s\mathrm{P}\eta \end{array}\right. & \begin{array}{r} b = p^2 \\ a+b = 2\mathrm{P}^2 \end{array} \\
\text{IV.} \left\{\begin{array}{r} x = 2^s p\xi \\ x+a = \mathrm{P}\eta \end{array}\right. & \begin{array}{r} b = 2^{2s-1}p^2 \\ a+b = \mathrm{P}^2 \end{array} \\
\text{V.} \left\{\begin{array}{r} x = 2^s p\xi \\ x+a = \mathrm{P}\eta \end{array}\right. & \begin{array}{r} b = 2p^2 \\ a+b = \mathrm{P}^2. \end{array}
\end{array}$$

In ognuno di questi casi i quattro numeri p, P, ξ, η, sono dispari e primi fra loro due a due.

Passerò ora a discutere ciascuno di questi cinque casi.

2. Considero il primo caso e cioè

$$x = p\xi, \quad x+a = \mathrm{P}\eta, \quad b^2 = p^2, \quad a+b = \mathrm{P}^2, \quad x+a+b = p\xi + \mathrm{P}^2.$$

Dalla identità

$$x+a = x+(a+b)-b$$

si deduce

$$x+a = \mathrm{P}\eta = p\xi + \mathrm{P}^2 - p^2,$$

onde la (1)' diviene

$$p^2\xi^2 + (p\xi + \mathrm{P}^2 - p^2)^2 = (p\xi + \mathrm{P}^2)^2$$

da cui sviluppando

$$\xi^2 + p^2 - 2p\xi = 2\mathrm{P}^2,$$

ossia

$$(\xi - p)^2 = 2\mathrm{P}^2,$$

relazione assurda, non essendo 2 un quadrato perfetto.

Dunque il caso 1 non può assolutamente verificarsi.

3. Nel secondo caso cioè

$$x = p\xi, \quad x + a = 2^s\mathrm{P}\eta, \quad b = p^2, \quad a + b = 2^{2s-1}\mathrm{P}$$

dalla identità di prima

$$x + a = x + (a + b) - b$$

si deduce

$$x + a = 2^s\mathrm{P}\eta = p\xi + 2^{2s-1}\mathrm{P}^2 - p^2,$$

epperò

$$x + a + b = p\xi + 2^{2s-1}\mathrm{P}^2.$$

Con ciò l'equazione (1)' è

$$p^2\xi^2 + (p\xi + 2^{2s-1}\mathrm{P}^2 - p^2)^2 = (p\xi + 2^{2s-1}\mathrm{P}^2)^2,$$

da cui

$$\xi^2 - 2(p\xi + 2^{2s-1}\mathrm{P}^2) + p^2 = 0,$$

ossia

$$(\xi - p)^2 = 2^{2s}\mathrm{P}^2;$$

e poichè è $\xi > p$ (cioè $x > b$)

$$\xi - p = 2^s\mathrm{P},$$

e infine

$$\xi = p + 2^s\mathrm{P}.$$

Dunque si ha

$$x = p^2 + 2^s\mathrm{P}p, \quad x + a = 2^{2s-1}\mathrm{P}^2 + 2^s\mathrm{P}p, \quad x + a + b = p^2 + 2^{2s-1}\mathrm{P}^2 + 2^s\mathrm{P}p.$$

Viceversa è facile verificare che ogni terna siffatta di numeri soddisfa all'equazione (1)'.

4. Il terzo caso rientra nel precedente. Infatti per essere

$$x = p\xi, \quad x + a = 2^s\mathrm{P}\eta, \quad b = p^2, \quad a + b = 2\mathrm{P}^2,$$

si ottiene dalla solita identità

$$x + a = 2^s\mathrm{P}\eta = p\xi + 2\mathrm{P}^2 - p^2$$

e

$$x + a + b = p\xi + 2\mathrm{P}^2.$$

Quindi l'equazione (1)' diventa

$$p^2\xi^2 + (p\xi + 2\mathrm{P}^2 - p^2)^2 = (p\xi + 2\mathrm{P}^2)^2$$

e di qui come prima

$$(\xi - p)^2 = 2^2\mathrm{P}^2$$

e

$$\xi = p + 2\mathrm{P}.$$

Si ottiene cioè la terna di numeri trovata nel caso precedente colla particolarità di $s = 1$.

5. Prendo ora a considerare il caso IV, cioè

$$x=2^s p\xi, \quad x+a=\mathrm{P}\eta, \quad b=2^{2s-1}p^2, \quad a+b=\mathrm{P}^2.$$

Dalla identità

$$x+a=x+(a+b)-b$$

si ricava

$$x+a=\mathrm{P}\eta=2^s p\xi+\mathrm{P}^2-2^{2s-1}p^2$$

e

$$x+a+b=2^s p\xi+\mathrm{P}^2.$$

L'equazione (1)' assume la forma

$$(2^s p\xi)^2+(2^s p\xi+\mathrm{P}^2-2^{2s-1}p^2)^2=(2^s p\xi+\mathrm{P}^2)^2,$$

da cui

$$2^{2s}\xi^2-2^{2s}(2^s p\xi+\mathrm{P}^2)+2^{4s-2}p^2=0,$$

ossia

$$\xi^2-2\,.\,2^{s-1}p\,.\,\xi+2^{2(s-1)}p^2=\mathrm{P}^2,$$

e ancora

$$(\xi-2^{s-1}p)^2=\mathrm{P}^2;$$

infine, per essere $\xi>2^{s-1}p$ (perchè è $x>b$)

$$\xi=2^{s-1}p+\mathrm{P}.$$

Quindi si ottiene

$$x=2^{2s-1}p^2+2^s\mathrm{P}p, \quad x+a=\mathrm{P}^2+2^s\mathrm{P}p, \quad x+a+b=2^{2s-1}p^2+\mathrm{P}^2+2^s\mathrm{P}p.$$

Viceversa si verifica subito che ogni terna di numeri siffatta soddisfa all'equazione (1)'.

6. Quanto al V caso, per la simmetria che esso presenta col III, si vedrà subito che esso rientra nel precedente, come il III caso rientra nel II, che si può considerare simmetrico al IV caso ora discusso.

Quindi riassumendo si può dire che l'equazione (1)' è soddisfatta soltanto nei due casi seguenti:

1° $x=p^2+2^s\mathrm{P}p, \quad x+a=2^{2s-1}\mathrm{P}^2+2^s\mathrm{P}p, \quad x+a+b=p^2+2^{2s-1}\mathrm{P}^2+2^s\mathrm{P}p$

2° $x=2^{2s-1}p^2+2^s\mathrm{P}p, \quad x+a=\mathrm{P}^2+2^s\mathrm{P}p, \quad x+a+b=2^{2s-1}p^2+\mathrm{P}^2+2^s\mathrm{P}p$

e ancora osservando la simmetria di queste espressioni per i tre numeri x, $x+a$ e $x+a+b$ si vede che questi due casi si riducono a uno solo. Di modo che si può concludere col teorema seguente:

condizione necessaria e sufficiente perchè tre numeri interi x, y *e* z *soddisfino alla relazione pitagorica*

$$x^2+y^2=z^2$$

è che si abbia ($\mathrm{x}\gtrless\mathrm{y}$)

$$x=(p^2+2^s\mathrm{P}p)\,.\,\mathrm{K}, \quad y=(2^{2s-1}\mathrm{P}^2+2^s\mathrm{P}p)\,.\,\mathrm{K} \quad \text{e}$$
$$z=(p^2+2^{2s-1}\mathrm{P}^2+2^s\mathrm{P}p)\,.\,\mathrm{K}$$

dove p *e* P *sono numeri primi fra loro e dispari,* K *è un intero qualunque ed* $\mathrm{s}\geqq 1$.

***

7. Dalla condizione necessaria e sufficiente ora trovata per la possibilità in numeri interi dell'equazione pitagorica risulta subito una facile dimostrazione del teorema seguente dovuto a LÉGENDRE [1]

la somma delle quarte potenze di due numeri interi non nulli non può essere un quadrato perfetto.

Infatti l'equazione

$$x^4 + y^4 = z^2 \tag{4}$$

si può scrivere anche così

$$(x^2)^2 + (y^2)^2 = z^2.$$

Onde si vede che, affinchè la (4) sia soddisfatta, è necessario che x^2, y^2 e z sia tre numeri interi pei quali è verificata l'equazione pitagorica; dunque in conseguenza di quanto sopra è stato dimostrato, potendosi supporre x^2 e y^2 primi fra loro, sarà

$$x^2 = p^2 + 2^s Pp, \quad y^2 = 2^{2s-1}P^2 + 2^s Pp, \quad \text{e} \quad z = p^2 + 2^{2s-1}P^2 + 2^s Pp,$$

dove p e P sono numeri dispari e primi fra loro. Ossia si potrà scrivere

$$x^2 = p\,(p + 2^s P) \qquad \text{e} \qquad y^2 = 2^s P\,(2^{s-1}P + p)\,;$$

donde si scorge che, essendo p primo con $p + 2^s P$ e $2^s P$ primo con $2^{s-1}P + p$, i quattro numeri p, $2^s P$, $p + 2^s P$ e $p + 2^{s-1}P$ devono essere tutti dei quadrati perfetti e cioè: $\sqrt{p}$ $\sqrt{2^s P}$ e $\sqrt{p + 2^s P}$ devono essere degli interi soddisfacenti l'equazione pitagorica, quindi in virtù dello stesso teorema essendo p_1 e P_1 dei numeri dispari primi fra loro si dovrà avere

$$p = (p_1^2 + 2^r P_1 p_1)^2 \quad 2^s P = (2^{2r-1}P_1^2 + 2^r P_1 p_1)^2. \tag{5}$$

Ma anche $p + 2^{s-1}P$ deve essere, come si è detto, un quadrato perfetto: ora per le (5)

$$p + 2^{s-1}P = (p_1^2 + 2^r P_1 p_1)^2 + 2\,(2^{2r-1}P_1^2 + 2^{r-1}P_1 p_1)^2,$$

da cui sviluppando i quadrati nel secondo membro

$$p + 2^{s-1}P = p_1^4 + 2^{r+1}P_1 p_1^3 + 2^{2r}P_1^2 p_1^2 + 2^{4r-3}P_1^4 + 2^{3r-1}P_1^3 p_1 + 2^{2r-1}P_1^2 p_1^2,$$

ossia

$$p + 2^{s-1}P = p_1^4 + 4p_1^3 . 2^{r-1}P_1 + 6p_1^2 . (2^{r-1}P_1)^2 + 4p_1(2^{r-1}P_1)^3 +$$
$$+ (2^{r-1}P_1)^4 + (2_r{}^{-1}P_1)^4,$$

e infine

$$p + 2^{s-1}P = (p_1 + 2^{r-1}P_1)^4 + (2^{r-1}P_1)^4$$

cioè le somme delle quarte potenze dei due numeri $p_1 + 2^{r-1}P_1$ e $2^{r-1}P_1$ dovrebbe dare un quadrato perfetto. Ma $p_1 + 2^{r-1}P_1$ è per le (5) certo

---

[1] Cfr. la *Memoria* citata del prof. GAMBIOLI, § IV.

minore di $\sqrt{p}$ e *a fortiori* minori di x, e non può essere zero; similmente per le (5) $2^{r-1}P_1$ è certo minore $\sqrt{2^s P}$ e *a fortiori* minore di y e di più diverso da zero. Quindi si conclude che, se esistessero due numeri interi x e y non nulli tali da essere

$$x^4 + y^4 = z^2,$$

dovrebbero esistere due altri interi e non nulli x_1 e y_1 dove $x_1 < x$ e $y_1 < y$ tali che

$$x_1^4 + y_1^4 = z_1^2.$$

dove z_1 è un intero. E continuando collo stesso ragionamento si concluderebbe l'esistenza di due interi non nulli x_n e y_n piccoli quanto si voglia tali che la somma dei loro biquadrati sia un quadrato perfetto ciò che non può essere.

Dunque l'equazione

$$x^4 + y^4 = z^2$$

non può essere soddisfatta da numeri interi e manifestamente neanche da numeri frazionari.

In sostanza il principio su cui è fondata questa dimostrazione è quello stesso che informa la dimostrazione citata del Légendre.

Segue da quest'ultimo teorema che

l'equazione $x^4 + y^4 = z^4$ *e più in generale l'equazione* $x^n + y^n = z^n$, *dove è l'intero* $n = 2^r . q$ (*con* $r \geqq 1$ *e* q *qualunque*) *non può essere soddisfatta da numeri interi* (*nè da numeri frazionari*). [1]

Terminerò infine questa nota col far vedere ancora come dal teorema sopra dimostrato intorno alle soluzioni intere dell'equazione pitagorica, segue subito un altro teorema dovuto al Fermat e di cui il Lagrange diede una dimostrazione: il teorema è questo

se x, y, z *sono tre numeri interi soddisfacenti all'equazione*

$$x^2 + y^2 = z^2$$

il prodotto xy *non può essere un quadrato perfetto.*

Infatti si ha

$$xy = (p^2 + 2^s Pp)(2^{2s-1}P^2 + 2Pp) . K^2$$

da cui

$$x . y = 2^s Pp (p + 2^s P)(2^{s-1}P + p) . K^2$$

donde si scorge che per essere xy un quadrato perfetto, poichè i numeri P e p sono fra loro primi e dispari, dovrebbe essere s pari e di più i fattori P, p, $p + 2^s P$ e $p + 2^{s-1}P$ tutti dei quadrati perfetti. Ma si è ora visto nella dimostrazione del teorema di Légendre che ciò non può essere: dunque xy non è mai un quadrato perfetto.

Fano, 2 maggio 1907.

Amerigo Bottari.

---

[1] Caso particolare dell'ultimo teorema di Fermat.

SUI GRUPPI DI NUMERI NATURALI, AVENTI UNA DATA SOMMA

Combinazioni semplici.

1. Indichi $c_{\varrho,k}$ una qualunque combinazione di ρ numeri naturali *differenti*, la cui somma sia *uguale o minore* di un dato numero k, e sia $n_{\varrho,k}$ il numero di tutte le possibili $c_{\varrho,k}$. Se gli elementi di una $c_{\varrho,k-\varrho}$ si aumentano ciascuno dell'unità, si avrà una $c_{\varrho,k}$ con elementi tutti maggiori di 1. Viceversa diminuendo di 1 ciascun elemento di una $c_{\varrho,k}$ non contenente l'elemento 1, si avrà una $c_{\varrho,k-\varrho}$. Dunque le $c_{\varrho,k}$, non contenenti l'elemento 1, sono $n_{\varrho,k-\varrho}$. Le $c_{\varrho,k}$ che contengono l'elemento 1, si possono poi ottenere dalle $c_{\varrho-1,k-\varrho}$, aumentando di 1 ciascun elemento, ed aggregando ai $\rho-1$ elementi così modificati l'elemento 1. Ne segue che le $c_{\varrho,k}$ contenenti l'elemento 1 sono $n_{\varrho-1,k-\varrho}$. Sarà allora:

$$n_{\varrho,k}=n_{\varrho,k-\varrho}+n_{\varrho-1,k-\varrho}.$$

Parimenti si ha:

$$n_{\varrho,k-\varrho}=n_{\varrho,k-2\varrho}+n_{\varrho-1,k-2\varrho}$$
$$n_{\varrho,k-2\varrho}=n_{\varrho,k-3\varrho}+n_{\varrho-1,k-3\varrho}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Sommando membro a membro e riducendo, si ha:

$$n_{\varrho,k}=n_{\varrho-1,k-\varrho}+n_{\varrho-1,k-2\varrho}+n_{\varrho-1,k-3\varrho}+\ldots \tag{1}$$

Notisi che in una $c_{\varrho,k}$ non può mai essere $k<1+2+3+\ldots+\rho$, $\left[\text{cioè } k<\binom{\rho+1}{2}\right]$, giacchè gli elementi della $c_{\varrho,k}$ non possono essere minori di $1,2,3,\ldots,\rho$. Dunque se $k<\binom{\rho+1}{2}$ sarà $n_{\varrho,k}=0$, e se $k=\binom{\rho+1}{2}$, sarà $n_{\varrho,k}=1$.

2. Per $\rho=2$ dalla (1) si ha:

$$n_{2,k}=n_{1,k-2}+n_{1,k-4}+n_{1,k-6}+\ldots,$$

e poichè $n_{1,t}=t$, perchè le $c_{1,t}$ non sono che i numeri $1,2,3,\ldots,t$, così ne viene che:

$$n_{2,k}=(k-2)+(k-4)+(k-6)+\ldots,$$

dove l'ultimo termine sarà 2 o 1 secondochè k sia pari o dispari. (¹)

Indicando ora con Σ_l la somma dei numeri pari o dispari da l in giù, si ha:

$$n_{2,k}=\Sigma_{k-2}; \tag{2}$$

(¹) Tale ultimo termine si può rappresentare con $\frac{3+(-1)^k}{2}$

e si può constatare facilmente che:

$$\Sigma_{k-2}=\frac{k(k-2)+\dfrac{1-(-1)^k}{2}}{4}=\frac{(k-1)^2-\dfrac{1+(-1)^{k-2}}{2}}{4}, \tag{3}$$

onde si ha:

$$n_{2,k}=\frac{(k-1)^2-\dfrac{1+(-1)^k}{2}}{4}. \tag{4}$$

3. Per $\rho=3$ la (1) diventa:

$$n_{3,k}=n_{2,k-3}+n_{2,k-6}+n_{2,k-9}+\ldots,$$

e per la (2)

$$n_{3,k}=\Sigma_{k-5}+\Sigma_{k-8}+\Sigma_{k-11}+\ldots+\Sigma_r \tag{5}$$

dove r è il resto della divisione per 3 del numero $k-2$. Il quoziente q di questa divisione rappresenta il numero delle quantità Σ del 2° membro della (5). Se indichiamo ora con m il numero degli indici pari di queste Σ (compreso lo *zero* nel caso di $r=0$) si ha per la (3):

$$n_{3,k}=\tfrac{1}{4}\left[(k-4)^2+(k-7)^2+(k-10)^2+\ldots+(r+1)^2-m\right];$$

ed applicando la formola che dà la somma dei quadrati dei termini d'una progressione aritmetica, si ottiene con qualche semplificazione:

$$n_{3,k}=\frac{1}{4}\left[\frac{(k-1)^3-(r+1)^3}{9}-\frac{3q\,(k+r-1)}{2}-m\right] \tag{6}$$

dove $3q=k-r-2$.

Notisi che se q è pari, sarà $m=\dfrac{q}{2}$, e se q è dispari sarà $m=\dfrac{q+1}{2}$ o $m=\dfrac{q-1}{2}$ secondochè r sia pari o dispari. (¹)

4. Indichi $C_{\varrho,k}$ una qualunque combinazione di ρ numeri naturali differenti, la cui somma sia *uguale a k*, ed $N_{\varrho,k}$ sia il numero di tutte le possibili $C_{\varrho,k}$. Vale per queste il ragionamento del n. 1, onde:

$$N_{\varrho,k}=N_{\varrho,k-\varrho}+N_{\varrho-1,k-\varrho} \tag{7}$$

$$N_{\varrho,k}=N_{\varrho-1,k-\varrho}+N_{\varrho-1,k-2\varrho}+\ldots \tag{8}$$

Intanto è evidente che:

$$N_{\varrho,k}=n_{\varrho,k}-n_{\varrho,k-1}. \tag{9}$$

5. Per $\rho=2$ dalla (9) si ha:

$$N_{2,k}=n_{2,k}-n_{2,k-1}=\Sigma_{k-2}-\Sigma_{k-3}=\frac{k(k-2)+\dfrac{1-(-1)^k}{2}}{4}-$$

$$-\frac{(k-1)(k-3)+\dfrac{1-(-1)^{k-1}}{2}}{4}=\frac{k-2+\dfrac{1-(-1)^k}{2}}{2}. \tag{10}$$

(¹) La m è data evidentemente dalla formola: $m=\dfrac{q+\left(\dfrac{(-1)^q-1}{2}\right)^r}{2}$

Per $\rho = 3$ si ha dalla (8):

$$N_{3,k} = N_{2,k-3} + N_{2,k-6} + N_{2,k-9} + \ldots =$$
$$= (\Sigma_{k-5} - \Sigma_{k-6}) + (\Sigma_{k-8} - \Sigma_{k-9}) + (\Sigma_{k-11} - \Sigma_{k-12}) + \ldots \quad (11)$$

Osservisi intanto che:

$$(\Sigma_t - \Sigma_{t-1}) + (\Sigma_{t-3} - \Sigma_{t-4}) =$$
$$(\Sigma_t - \Sigma_{t-4}) - (\Sigma_{t-1} - \Sigma_{t-3}) = t + (t-2) - (t-1) = t - 1 \quad (12)$$

quindi la (11) diventa:

$$N_{3,k} = (k-6) + (k-12) + (k-18) + \ldots; \quad (13)$$

l'ultimo termine è il resto della divisione di k per 6.

La (12) vale però per qualunque valore di t, tranne che per $t=1$, perchè allora si ha $\Sigma_1 = 1$ e non $\Sigma_1 = 0$; ne viene perciò che quando k è multiplo di 6, resta precisamente nella (11) un ultimo termine Σ_1, e però la progressione della (13) $(k-6) + (k-12) + (k-18) + \ldots$ avrà per ultimo termine 6, ma ad essa bisognerà aggiungere l'unità.

Per es.

$$N_{3,22} = 16 + 10 + 4 = 30$$
$$N_{3,24} = (18 + 12 + 6) + 1 = 36 + 1 = 37.$$

Per avere allora un'espressione completa della (13) potremo scrivere (indicando con q ed r il quoziente ed il resto della divisione di k per 6):

$$N_{3,k} = \frac{(k-6+r)q}{2} + \theta; \quad (14)$$

dove $\theta = 0$ se $r = 1, 2, 3, 4, 5$ e $\theta = 1$ se $r = 0$ [1].

Combinazioni con ripetizione.

6. Indichi $r_{\rho,k}$ una qualunque combinazione con ripetizione di ρ numeri naturali la cui somma sia k, e sia $R_{\rho,k}$ il numero di tutte le possibili $r_{\rho,k}$.

Le $r_{\rho,k}$ sono in altri termini le *partizioni* di k in ρ parti. Esse si possono ottenere:

1°. Aumentando di 1 gli elementi di ogni $r_{\rho,k-\rho}$, e così si hanno le $r_{\rho,k}$ che non contengono l'unità.

2°. Aggregando l'unità ad ogni $r_{\rho-1,k-1}$; e così si ottengono le $r_{\rho,k}$ che contengono l'unità.

Dunque si ha:

$$R_{\rho,k} = R_{\rho,k-\rho} + R_{\rho-1,k-1}; \quad (15)$$

parimenti:

$$R_{\rho,k-\rho} = R_{\rho,k-2\rho} + R_{\rho-1,k-1-\rho}$$
$$R_{\rho,k-2\rho} = R_{\rho,k-3\rho} + R_{\rho-1,k-1-2\rho}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

---

[1] Si potrebbe porre per θ l'espressione: $\dfrac{(1-r)(2-r)(3-r)(4-r)(5-r)}{5!}$.

e sommando e riducendo:

$$R_{\rho,k} = R_{\rho-1,k-1} + R_{\rho-1,k-1-\rho} + R_{\rho-1,k-1-2\rho} + R_{\rho-1,k-1-3\rho} + \ldots \quad (16)$$

Osservisi che $R_{1,k} = R_{k,k} = 1$ e $R_{\rho,k} = 0$ se $k < \rho$.

7. Per $\rho = 2$ la (16) diventa:

$$R_{2,k} = R_{1,k-1} + R_{1,k-3} + R_{1,k-5} + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots$$

Il 2^0 membro ha $\dfrac{k - \dfrac{1-(-1)^k}{2}}{2}$ termini, e però:

$$R_{2,k} = \frac{k - \dfrac{1-(-1)^k}{2}}{2} = \frac{k - 1 + \dfrac{1-(-1)^{k-1}}{2}}{2}$$

e per la (10):

$$R_{2,k} = \Sigma_{k-1} - \Sigma_{k-2} = N_{2,k+1}. \quad (17)$$

8. Per $\rho = 3$ si ha:

$$R_{3,k} = R_{2,k-1} + R_{2,k-4} + R_{2,k-7} + \ldots = N_{2,k} + N_{2,k-3} + N_{2,k-6} + \ldots = N_{3,k+3}$$

per la (8). Ed in generale se poniamo:

$$R_{\rho-1,k} = N_{\rho-1,k+\binom{\rho-1}{2}},$$

si dimostra facilmente che:

$$R_{\rho,k} = N_{\rho,k+\binom{\rho}{2}}. \quad (18)$$

la quale è vera, perchè la prima si verifica per $\rho - 1 = 2$.

Disposizioni.

9. Indichi $d_{\rho,k}$ una disposizione qualunque con *ripetizione* di ρ numeri naturali la cui somma sia k, e sia $D_{\rho,k}$ il numero di tutte le possibili $d_{\rho,k}$. Queste si possono ottenere ponendo 1 davanti a ciascuna $d_{\rho-1,k-1}$, poi ponendo 2 davanti a ciascuna $d_{\rho-1,k-2}$, poi 3 davanti a ciascuna $d_{\rho-1,k-3}$ e così via; onde:

$$D_{\rho,k} = D_{\rho-1,k-1} + D_{\rho-1,k-2} + D_{\rho-1,k-3} + \ldots + D_{\rho-1,\rho-1}. \quad (19)$$

Ora si ha:

$$D_{1,k} = D_{k,k} = 1,$$

e quindi:

$$D_{2,k} = D_{1,k-1} + D_{1,k-2} + D_{1,k-3} + \ldots + D_{1,1} = k - 1$$

$$D_{3,k} = D_{2,k-1} + D_{2,k-2} + D_{2,k-3} + \ldots + D_{2,2} =$$
$$= (k-2) + (k-3) + (k-4) + \ldots + 1 = \binom{k-1}{2}.$$

Supponendo ora che sia

$$D_{t,k} = \binom{k-1}{t-1} \quad (20)$$

per tutti i valori di t che vanno da 1 a $\rho - 1$, qualunque sia k, si ha:

$$\mathrm{D}_{\rho,k} = \mathrm{D}_{\rho-1,k-1} + \mathrm{D}_{\rho-1,k-2} + \mathrm{D}_{\rho-1,k-3} + \ldots + \mathrm{D}_{\rho-1,\rho-1} =$$
$$= \binom{k-2}{\rho-2} + \binom{k-4}{\rho-2} + \binom{k-4}{\rho-2} + \ldots + \binom{\rho-2}{\rho-2} = \binom{k-1}{\rho-1} \quad (21)$$

la quale resta dimostrata per induzione, giacchè la (20) si è trovata vera per $t = 1, 2, 3$.

Applicazioni.

Problema. — *Estraendo tre numeri del lotto, qual'è la probabilità che la loro somma sia uguale o minore di 90?*

Dalla (6) si ha (essendo $q = 29$, $r = 1$, $m = 14$):

$$n_{3,90} = \frac{1}{4}\left[\frac{89^3 - 2^3}{9} - \frac{3 \,.\, 29 \,.\, 90}{2} - 14\right] = 18600$$

che è il numero dei terni la cui somma è uguale o minore di 90.

La probabilità cercata è data dunque da $\dfrac{18600}{\binom{90}{3}}$.

Problema. — *Estraendo tre numeri del lotto, qual'è la probabilità che la loro somma sia 90?*

Dalla (14) si ha (essendo $q = 15$, $r = 0$ e quindi $\theta = 1$):

$$\mathrm{N}_{3,90} = \frac{84 \,.\, 15}{2} + 1 = 631,$$

che è il numero dei terni di somma 90. La probabilità cercata è perciò data da $\dfrac{631}{\binom{90}{3}}$.

Teorema. — *Le partizioni in* n *del numero* 2n *sono tante quante sono tutte le partizioni possibili del numero* n.

Dalla (15), infatti, si ha per $\rho = n$ e $k = 2n$:

$$\mathrm{R}_{n,2n} = \mathrm{R}_{n,n} + \mathrm{R}_{n-1,2n-1};$$

parimenti:

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_{n-1,2n-1} &= \mathrm{R}_{n-1,n} + \mathrm{R}_{n-2,2n-2} \\ \mathrm{R}_{n-2,2n-2} &= \mathrm{R}_{n-2,n} + \mathrm{R}_{n-3,2n-3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{R}_{2,n+2} &= \mathrm{R}_{2,n} + \mathrm{R}_{1,n+1} \\ \mathrm{R}_{1,n+1} &= \mathrm{R}_{1,n} \end{aligned}$$

e sommando e riducendo:

$$\mathrm{R}_{n,2n} = \mathrm{R}_{n,n} + \mathrm{R}_{n-1,n} + \mathrm{R}_{n-2,n} + \ldots + \mathrm{R}_{2,n} + \mathrm{R}_{1,n} \qquad \text{c. d. d.}$$

Dott. M. Morale.

Caltanissetta, marzo 1907.

DEDUZIONE DEL PRINCIPIO D'"ARCHIMEDE„ DA QUELLO DI "CONTINUITÀ„

Il principio di continuità viene stabilito, ordinariamente, o mediante il postulato di DEDEKIND o con quello di CANTOR, che dal primo non differisce sostanzialmente, oppure con quello di WEIERSTRASS. Nella scienza astratta, generale, i postulati di CANTOR e di WEIERSTRASS non si equivalgono: nella geometria non archimedea, p. es., da me stabilita sulla retta in un breve articolo sui " Subfiniti e transfiniti dal punto di vista di CANTOR „ (1) sussiste il postulato di continuità di CANTOR, mentre non sussiste quello di WEIERSTRASS perchè in essa geometria vi sono anche punti senza intorni finiti; e più notevoli singolarità riscontransi, p. es., nella geometria, che considera il punto $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$ come indice della funzione $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$. (2)

Nella scienza pratica però, geometria ed aritmetica ordinarie, quei postulati sono equivalenti, come è noto, cosicchè nella medesima non si avrà che un postulato di continuità, il quale potrà venir presentato in diverse forme, magari in una forma diversa da tutte tre quelle accennate sopra. Siccome una conseguenza immediata del principio di continuità è la proposizione conosciuta come postulato d'ARCHIMEDE, che potrebbe dirsi principio di misurabilità, così ritengo che non sia inopportuno dare di ciò una breve dimostrazione onde risulti evidente la convenienza di concedere a quel principio il posto che gli spetta nella geometria elementare, ed anche nell'aritmetica.

Il postulato di continuità, di WEIERSTRASS, dice: " Se sopra un segmento v'è un aggregato di infiniti punti, esso aggregato ha almeno un punto limite „ cioè un punto tale che tra i segmenti principianti nei punti dell'aggregato e terminanti in esso punto ve ne sono di minori d'ogni segmento prefissato.

Il principio di misurabilità, o postulato d'ARCHIMEDE, dice: " Se sono dati due segmenti disuguali, tra i multipli del minore ve ne sono di più grandi del maggiore „.

Ora dico che la seconda di queste due proposizioni è un corollario della prima. Infatti, consideriamo due segmenti AB, CD e CD sia minore di AB. Sulla retta AB, procedendo nel verso diretto dal punto A al punto B, portiamo gli infiniti segmenti AM_1, M_1M_2, M_2M_3,... tutti uguali a CD. L'aggregato dei punti $M_1, M_2, M_3, \dots$ non ha punti

---

(1) *Rend. Circ. Mat.*, VI, pag. 161. Palermo, 1892.

(2) V. l'interessante capitolo del prof. F. ENRIQUES: *Prinzipien der Geometrie*; " Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften „; Bd III_1, Heft 1, num. 7 e 40. Leipzig, 1907.

limiti sul segmento AB, sul quale quindi, per il principio di continuità, non possono esser tutti gli infiniti punti di quell'aggregato, il quale, perciò, avrà anche dei punti fuori del segmento AB; se M_n è uno di questi punti, si ha che

$$n\mathrm{CD} = \mathrm{AM}_n \quad \text{ed} \quad \mathrm{AM}_n > \mathrm{AB}$$

per cui

$$n\mathrm{CD} > \mathrm{AB}.$$

Può esser utile osservare che non ha luogo l'inverso, cioè che il principio di continuità non è conseguenza del postulato d'ARCHIMEDE. Infatti, nell'ordinaria rappresentazione dei numeri reali sulla retta, i punti d'ascisse razionali formano una successione per la quale sussiste il postulato d'ARCHIMEDE perchè, se a e b sono numeri razionali ed $a > b$, tra i multipli di b, che son tutti razionali, ve ne sono di maggiori di a: non è invece soddisfatto il principio di continuità perchè, per es., sul segmento limitato dai punti di ascisse, razionali, 0 ed 1 si possono prendere gli infiniti punti d'ascisse, razionali,

$$\frac{1}{2!},\ \frac{1}{2!}+\frac{1}{3!},\ \frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!},\ldots .$$

e questi infiniti punti formano un aggregato che nella considerata successione di punti d'ascisse razionali, non ha punti limiti. I numeri razionali formano dunque una successione archimedea discontinua.

Si riconosce parimenti che sono archimedee discontinue la successione dei numeri irrazionali, quella dei numeri decimali aventi un numero finito di cifre, ecc.

Si può dimostrare che il postulato di WEIERSTRASS è equivalente all'insieme dei postulati d'ARCHIMEDE e di CANTOR.

F. GIUDICE.

SOPRA UNO SPECIALE DETERMINANTE

Nota di Pierina Quintili

Riuscirà forse utile agli studenti la dimostrazione, molto semplice e molto elementare, che qui daremo, di una proprietà nota, relativa al determinante

$$\mathrm{D}(x) = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & a_{23} \ldots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

dove x rappresenta una variabile e le quantità a_{ij} rappresentano grandezze indipendenti da x.

Se indichiamo con $S_\nu(x)$ la somma dei minori principali (o diagonali principali) di ordine ν del determinante dato e con $D^{(\nu)}(x)$ la derivata ν^{ma} di $D(x)$ rispetto ad x, la proprietà che noi vogliamo dimostrare consiste nella formula:

$$D^{(\nu)}(x) = \nu!\, S_{n-\nu}(x). \tag{1}$$

Per dimostrare questa proposizione, applichiamo al polinomio $D(x+h)$, di grado n, lo sviluppo di Taylor. (1) Si ha

$$D(x+h) = D(x) + h\,D'(x) + \frac{h^2}{2!}D'' + \ldots + \frac{h^n}{n!}D^{(n)}(x). \tag{2}$$

Come si vede chiaramente da questa formula, la derivata di ordine ν del determinante $D(x)$, presa rispetto ad x, rappresenta il coefficiente di $\frac{h_\nu}{\nu!}$ nello sviluppo di $D(x+h)$. Passiamo allora a considerare il determinante

$$F(h) = \begin{vmatrix} b_{11}+h & b_{12} & \ldots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}+h & \ldots b_{2n} \\ . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots b_{nn}+h \end{vmatrix}$$

dove la quantità b_{ij} sono grandezze indipendenti da h, e cerchiamo quale sia, in questo determinante il coefficiente di h^ν. Ponendo nell'espressione precedente $h=0$, si ottiene il determinante $F(0)$, formato con gli elementi b_{ij} e che rappresenta il termine indipendente da h.

Per formare il termine in h^ν osserviamo che bisogna, in tutti i modi possibili, assumere h in ν termini della diagonale principale e moltiplicare per il minore principale complementare, di ordine $n-\nu$, dove si ponga $h=0$.

Se chiamiamo dunque con T_ν la somma dei minori principali d'ordine ν del determinante

$$\Sigma \pm b_{11}\, b_{22} \ldots b_{nn},$$

è chiaro che il coefficiente di h^ν nello sviluppo della funzione $F(h)$ considerata è dato da $T_{n-\nu}$.

Ma, se nel nostro determinante $D(x)$, al posto di x poniamo $x+h$, il criterio ora esposto ci conduce a stabilire che nello sviluppo di $D(x+h)$ il coefficiente di h^ν è $S_{n-\nu}(x)$, perciò potremo scrivere:

$$D(x+h) = D(x) + h\,S_{n-1}(x) + h^2 S_{n-2}(x) + \ldots + h^{n-1} S_1(x) + h^n. \tag{3}$$

Confrontando quest'ultima formula con la (2), stabilita precedentemente, otteniamo

$$\frac{D^{(\nu)}(x)}{\nu!} = S_{n-\nu}(x)$$

(1) Questa formula può stabilirsi anche senza considerazioni d'indole infinitesimale: ciò è chiaramente esposto, per esempio, nel WEBER, *Lehrbuch der Algebra*, Bd. I.

e quindi si ha la relazione

$$D^{(\nu)}(x) = \nu!\, S_{n-\nu}(x) \qquad (1)$$

che ci eravamo proposti dimostrare.

Sempre nell'intento di far vedere come sia facile stabilire in modo molto elementare la formula (1), già dimostrata precedentemente, vogliamo darne ancora un'altra dimostrazione, indipendente dalla formula di Taylor.

Supponiamo di aver già stabilita, col metodo esposto, la relazione (3), tenendo presente che h deve essere una grandezza variabile indipendentemente da x, derivando ν volte rispetto ad h otteniamo:

$$\frac{\partial^\nu D(x+h)}{\partial h^\nu} = \nu!\, S_{n-\nu}(x) + \Omega(h)$$

dove il polinomio $\Omega(h)$ contiene h come fattore.

Osserviamo che la derivata ν^{ma} di $D(x+h)$ rispetto ad h ha la stessa espressione della derivata ν^{ma} di $D(x+h)$ rispetto ad $x+h$, od anche, rispetto ad x, quindi possiamo scrivere

$$\frac{\partial^\nu D(x+h)}{\partial x^\nu} = \nu!\, S_{n-\nu}(x) + \Omega(h).$$

Ma, come è evidente, quest'ultima formula vale, qualunque sia h, perciò, ponendo in essa $h=0$, deve essere ancora verificata. Il polinomio $\Omega(h)$, contenendo h come fattore, si annulla per $h=0$ e quindi si ricava l'espressione

$$\frac{\partial^\nu D(x)}{\partial x^\nu} = \nu!\, S_{n-\nu}(x)$$

la quale è la formula (1), che volevamo stabilire.

Roma, agosto 1907.

UNDICI TEOREMI SULLA MODERNA GEOMETRIA DEL TRIANGOLO

Dato un triangolo ABC, facciamo girare ciascun lato intorno alle sue estremità finchè vada a ribaltarsi sui due lati adiacenti (dopo di avere traversata[1] l'area del triangolo). Noi otterremo sui lati adiacenti, rispettivamente i punti A', A''; B', B''; C', C'': dicendo A' il punto

[1] Molto felicemente i francesi in simile circostanza il verbo *balayer*.

ove va a porsi l'estremo C del lato a dopo di aver girato intorno al punto B, e A″ il punto del lato b ove va a porsi l'estremo B del lato a dopo di aver girato intorno al punto C, ecc.

Proprietà 1ª. — Le rette $1 \equiv A'A''$, $2 \equiv B'B''$, $3 \equiv C'C''$ sono parallele e determinano una direzione Γ_1.

2ª. I punti medi dei segmenti A′B″, B′C″, C′A″, compresi su ciascun lato fra i sei punti A′B′C′, A″B″C″, sono i punti di contatto del circolo iscritto ad ABC coi lati del triangolo medesimo.

3ª. I punti medi $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ dei segmenti A′A″, B′B″, C′C″ sono i vertici di un triangolo di cui i lati $\alpha_1\beta_1, \beta_1\gamma_1, \gamma_1\alpha_1$, tagliano i lati omologhi c, a, b, di ABC nei punti in cui questi sono tagliati dalle bisettrici degli angoli opposti.

4ª. Le rette che congiungono rispettivamente i punti $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ai punti medi M_1, M_2, M_3 dei lati a, b, c concorrono in uno stesso punto K.

5ª. Le rette 1, 2, 3 tagliano i lati a, b, c rispettivamente in tre punti che sono i vertici di un triangolo RST. Le proiezioni normali A_1, B_1, C_1 di A, B, C sulle rette 1, 2, 3 rispettivamente, sono i vertici di un altro triangolo di cui i lati tagliano i lati omologhi di RST sui lati di ABC in tre punti R_1, S_1, T_1 di una medesima retta Δ_1.

6ª. I triangoli ABC e $A_1 B_1 C_1$ sono per conseguenza omologici affini nell'omologia avente per centro il punto all'∞ in direzione normale a Γ_1 e per asse la retta Δ_1, ma i triangoli $A_1 B_1 C_1$ e RST sono corrispondenti nella affinità di centro il punto all'∞ Γ_1 comune alle tre rette 1, 2, 3 e per asse la retta Δ_1, dunque ABC e RST sono omologici affini nell'affinità avente per asse lo stesso asse Δ_1 e per centro la direzione comune alle rette AR, BS, CT; per conseguenza le rette $I \equiv AR$, $II \equiv BS$ $III \equiv CT$ sono parallele.

7ª. Il centro ortotomico Ω dei tre cerchi $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ che hanno per centri i vertici A, B, C e per raggi i lati opposti, è situato sulla retta di *Eulero* del triangolo dato ABC.

8ª. I tre cerchi $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ si tagliano in sei punti: tre dei quali ρ, σ, τ appartengono al cerchio circoscritto ad ABC e gli altri tre ρ', σ', τ' sono i vertici di un triangolo il cui circocentro coincide con l'ortocentro del triangolo dato. Il raggio del cerchio circoscritto a $\rho'\sigma'\tau'$ è eguale al diametro del cerchio circoscritto a $\rho\sigma\tau$.

9ª. Il circocentro O del triangolo ABC, l'ortocentro H e il punto Ω suddetto, che appartengono alla retta di Eulero di ABC, sono situati in modo che O biseca il segmento $H\Omega$.

10ª. Il punto **C** in cui si tagliano le rette che congiungono i vertici A, B, C del triangolo dato alle proiezioni normali di Ω sui lati opposti, è situato sulla retta δ determinata dal punto K e dal *punto Lemoine* L di ABC.

11ª. Se si congiunge ciascuno dei punti A′, A″, B′, B″, C′, C″ citati al punto medio del lato dal quale proviene per rotazione (intorno ad un vertice del triangolo dato) si hanno delle coppie di rette che concorrono in tre punti ABC. Le rette che uniscono questi tre punti, rispettivamente, ai tre vertici A, B, C, del dato triangolo, si tagliano in uno stesso punto I della retta δ, che non è altro che l'in-centro del triangolo dato.

Napoli, 15 ottobre 1907.

C. CAPPELLO.

SULL' INDIMOSTRABILITÀ DEL POSTULATO DI EUCLIDE

1. I postulati della geometria elementare, riguardanti le proprietà grafiche fondamentali e la congruenza, rispondono immediatamente alla nostra intuizione geometrica.

Su di essi si basa l'edifizio della geometria elementare ordinaria, fino alla teoria delle parallele che viene introdotta aggiungendo ai ai postulati suindicati il postulato di Euclide:

Dato un punto e una retta che non si appartengono, per il punto passa una parallela alla retta ed una sola.

Ora, questo postulato, che si riferisce ad un tempo a due ordini di nozioni: le grafiche e le metriche, non appare così semplicemente intuitivo come gli altri postulati fondamentali.

Perciò, fino da tempi molto antichi [1], si è cercato di dedurlo logicamente da questi. Ma i risultati positivi apparentemente ottenuti sono stati tutti fittizi, perchè basati sull'introduzione, più o meno chiara, di postulati, riconosciuti poi equivalenti a quello di Euclide, mentre gli stessi tentativi per la dimostrazione del postulato euclideo, hanno preparato il costituirsi di geometrie indipendenti da esso.

E oggi, dagli studi, che con diversi indirizzi, sono stati fatti sui fondamenti della geometria, resta stabilita la possibilità logica di tre sistemi, fondati sugli stessi postulati relativi alle nozioni grafiche e alla congruenza.

1°. Il *sistema iperbolico*, in cui, sopra ogni piano, dato un punto e una retta che non si appartengono, si hanno *due* parallele per il punto alla retta.

2°. Il *sistema parabolico* a cui si applica il *postulato di Euclide.*

3°. Il *sistema ellittico*, in cui, data in un piano, una retta ed un punto che non si appartengono, tutte le rette passanti per il punto sono incidenti alla retta.

(1) PROCLO (410-485).

La compatibilità di ciascuno di questi sistemi coi postulati fondamentali suaccennati, dimostra che non si può dedurre logicamente da questi il postulato di Euclide.

Saranno qui sviluppate le considerazioni metrico-proiettive che nel modo relativamente più semplice, mettono in luce questo risultato, per ciò che si riferisce alla geometria piana.

Sono poi analoghe le considerazioni stereometriche.

2. I concetti e i postulati fondamentali della geometria *elementare* nel piano si possono presentare sotto la forma seguente:

Nozioni grafiche.

Post. I. — *Nel piano vi sono quanti si vogliono punti e quante si vogliono rette. La retta che congiunge due punti di un piano, appartiene ad esso.*

Post. II. — *Due punti appartengono ad una retta e ad una sola.*

Post. III. — *I punti della retta sono disposti in due ordini naturali o versi, opposti l'uno all'altro. In ciascun verso, non vi è nè primo, nè ultimo punto e fra due punti, ve ne sono infiniti altri intermedi.*

Def. I. — *Dati due punti* A, B, *di una retta* a, *si dice segmento* AB, *l'insieme dei punti di* a, *compresi fra* A *e* B.

Si dice semiretta l'insieme dei punti di una retta situati da una stessa parte di un punto di essa.

Post. IV. — *Una retta di un piano, divide il piano in due parti contenenti ciascuna infiniti punti, in modo che*

1) *un punto del piano fuori della retta appartiene all'una o all'altra parte,*

2) *due punti del piano appartenenti alla stessa parte sono estremi di un segmento che non incontra la retta,*

3) *due punti del piano appartenenti a parti diverse sono estremi di un segmento che incontra la retta.*

Def. II. — *Si dice settore angolare ciascuna delle quattro parti in cui resta diviso il piano da due rette di esso che s'incontrano.*

Angolo è l'insieme delle semirette comprese in un settore angolare.

Postulato della continuità.

Post. V. — *Se un segmento di retta* AB *è diviso in due parti in modo che*

1) *ogni punto di* AB *appartenga ad una delle parti e ad una sola, l'estremo* A *appartenga ad una di esse, l'estremo* B *all'altra,*

2) *un punto qualunque della prima parte preceda un punto qualunque della seconda, nell'ordine* AB *del segmento,*

esiste un punto C di AB, tale che ogni punto di AB che precede C, appartiene alla prima parte, ogni punto che segue C, alla seconda, nella divisione stabilita.

Postulati della congruenza.

Post. VI. — *Un segmento (un angolo) è congruente a sè stesso.*

Post. VII. — *Se un segmento (un angolo) è congruente ad un altro, anche il secondo è congruente al primo.*

Post. VIII. — *Se un segmento (un angolo) è congruente ad un altro e questo ad un terzo, anche il primo è congruente al terzo.*

Post. IX. — *Sopra una retta, a partire da un suo punto e da ciascuna parte di esso, esiste un segmento congruente ad un segmento dato. Da ciascuna parte di una semiretta OA uscente da un punto dato O si può condurre per lo stesso punto un'altra semiretta tale che l'angolo di ciascuna delle due semirette colla OA sia congruente ad un angolo dato.*

Post. X. — *Se AB, BC sono due segmenti consecutivi di una stessa retta* r *e A'B', B'C' due segmenti consecutivi di una stesssa retta* r' *ed è* [1]

$$AB \equiv A'B', \qquad BC \equiv B'C'$$

è anche

$$AC \equiv A'C'.$$

Vale per gli angoli il postulato analogo.

Def. III. — *Un sistema di tre punti di un piano, non in linea retta e dei tre segmenti che li congiungono, si dice triangolo.*

Def. IV. — *Due triangoli si dicono congruenti, se, riferiti tra loro per elementi dello stesso nome, hanno gli elementi omologhi congruenti.*

Post. XI. — *Se due triangoli hanno rispettivamente congruenti due lati e l'angolo compreso, essi sono congruenti.*

3. Si consideri ora la seguente rappresentazione dell'intero piano, in cui si dimostri: 1° la validità di tutti gli elementi logici contenuti nei concetti e nei postulati precedenti; 2° la validità del sistema *iperbolico*; ne deriverà che i postulati precedenti non possono contenere implicitamente quello di Euclide che contraddice a tale sistema.

Si chiami convenzionalmente:

Piano: *la regione piana* (c) *interna ad una conica* (dunque escluso il contorno).

Punto: *ogni punto di* (c).

Retta: *ogni corda della conica, esclusi gli estremi.*

Segmento: *ogni segmento appartenente a* (c).

Semiretta: *l'insieme dei punti di una retta di* (c) *posti da una stessa parte di un suo punto.*

---

[1] $\equiv$ segno di congruenza.

ANGOLO: *ogni angolo col vertice appartenente a* (c) *e avente per lati due semirette di* (c).

SEGMENTI UGUALI: *due segmenti di* (c), AB, A'B', *tali che siano uguali in valore assoluto i logaritmi dei birapporti dei gruppi formati dagli estremi* A, B; A', B', *colle rispettive intersezioni* M, N; M', N' *della conica colle rette a cui appartengono i detti segmenti.*

ANGOLI UGUALI: *due angoli di* (c), ab, a'b', *tali che siano uguali in valore assoluto i logaritmi dei birapporti dei gruppi che formano i lati* a, b; a', b' *colle rispettive coppie di tangenti immaginarie condotte dai due vertici alla conica.*

TRIANGOLO: *la figura costituita da tre punti di* (c) *non in linea retta e dai tre segmenti che li congiungono.*

TRIANGOLI UGUALI: *due triangoli di* (c), *riferiti fra loro per elementi omonimi, e aventi gli elementi omologhi congruenti*

MOVIMENTI: *tutte le proiettività piane che trasformano in sè stessa la conica.*

Ciò posto, i punti della conica a cui tendono [1] le rette convenzionali, rappresentano i *punti all'infinito* delle rette ordinarie, la conica corrisponde alla *retta all'infinito* e due rette di (*c*) che tendono al medesimo punto della conica sono l'imagine di due *rette parallele.*

L'intero piano viene così rappresentato sul piano convenzionale (*c*).

4. Per dimostrare la validità dei postulati del § 2 nel sistema ora stabilito ci si varrà dei postulati stessi, in quanto si applicano all'intero piano, e delle proprietà proiettive delle coniche.

I postulati grafici I, II, III, si trasportano nel nuovo sistema in base alle definizioni del n. preced. e alle nozioni più ovvie intorno alle coniche.

Si ha inoltre:

Una corda MN della conica divide la regione (*c*) interna ad essa in due parti, a ciascuna delle quali appartengono infiniti punti; due punti di (*c*) appartenenti ad una stessa parte, sono estremi di un segmento che non incontra la corda. Due punti A, B appartenenti a parti diverse sono estremi di un segmento che incontra la retta MN in un punto P. Questo punto è poi interno alla conica e quindi sulla corda MN, perchè la retta AB essendo secante, i due punti R, S, in cui incontra la conica sono estremi di due segmenti complementari (nel senso della geometria proiettiva) di cui uno tutto costituito di punti interni, l'altro di punti esterni. Al primo segmento appartiene il segmento AB e quindi il punto P. Resta così stabilito il postulato IV.

Il postulato V, della continuità si trasporta senz'altro nel nuovo sistema e lo stesso dicasi dei tre primi postulati della congruenza, indicati coi numeri VI, VII, VIII.

---

(1) Nel senso del postulato di Dedekind e della teoria dei limiti.

5. Si considerino ora due secanti la conica, e siano M, N; M′, N′ rispettivamente le loro intersezioni con essa; A, B, due punti di (c) su MN, A′ un punto di (c) su M′N′ (fig. 1).

Detto O il punto comune alle tangenti la conica in M, N; O′ il punto comune alle tangenti in M′, N′, si conducano le rette OA, O′A′ secanti la conica rispettivamente nei punti P, Q; P′, Q′.

La proiettività sulla conica $\dfrac{MPN}{M'P'N'}$, determina un'omografia piana in cui MN, M′N′; OM, O′M′; ON, O′N′; e quindi O, O′; OP, OP′; A, A′,

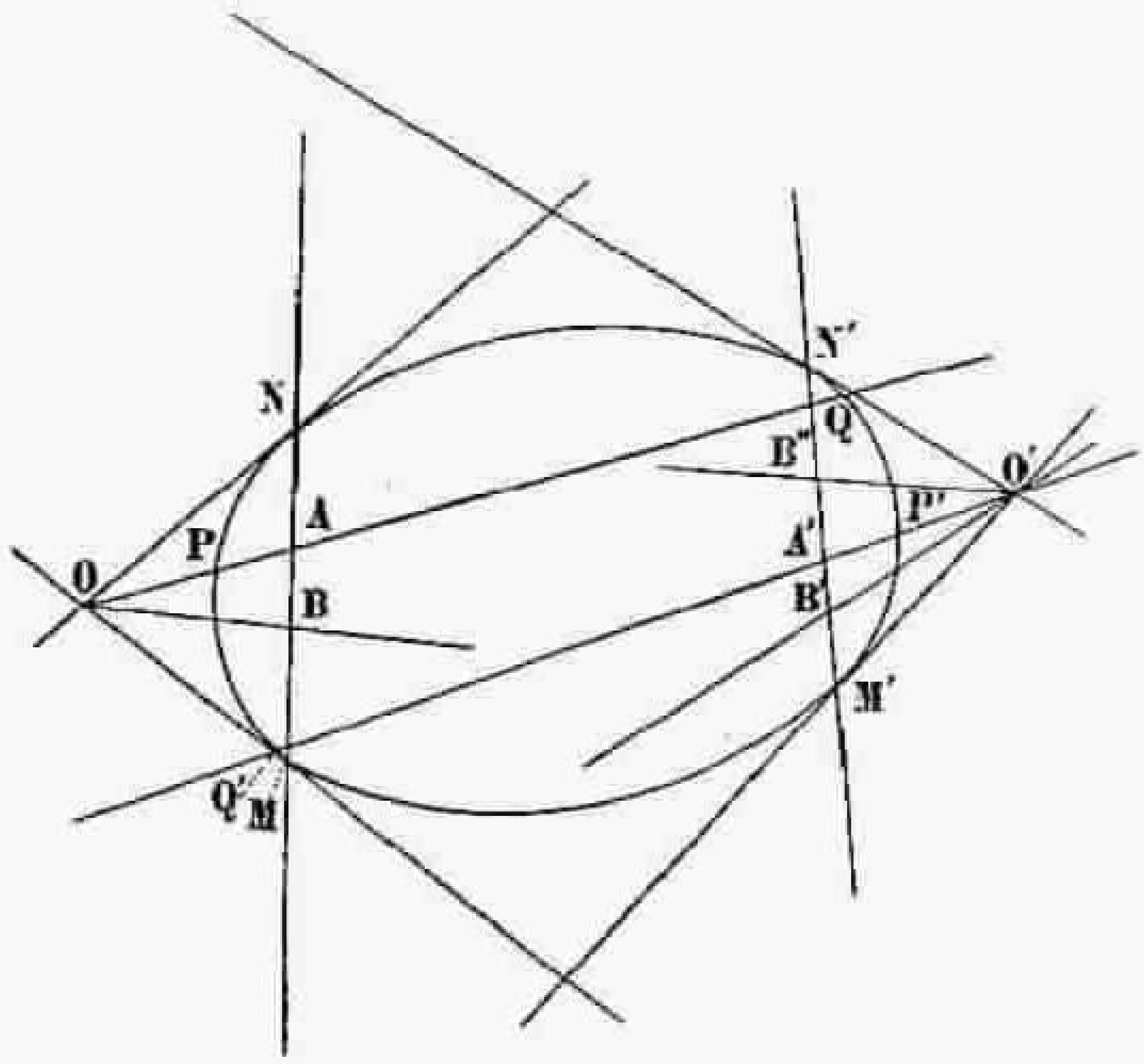

Fig. 1.

sono elementi omologhi; tale omografia subordina perciò sulle rette MN, M′N′ la proiettività $\dfrac{MAN}{M'A'N'}$. La medesima proiettività è subordinata all'omografia che si ottiene, ponendo sulla conica la proiettività $\dfrac{MPN}{M'Q'N'}$.

Viceversa il procedimento dimostra che non esistono altre omografie trasformanti in se stessa conica, alle quali essa possa venire subordinata.

Si ponga ora nella conica una delle due proiettività $\dfrac{MPN}{N'P'M'}$, $\dfrac{MPN}{N'Q'M'}$; procedendo come dianzi si vede che a ciascuna di esse è subordinata fra le rette MN, M′N′, la proiettività $\dfrac{MAN}{N'A'M'}$. Viceversa, data tale proiettività, essa non può venire subordinata ad omografie che trasformino in sè stessa la conica, diverse dalle due precedenti.

Si consideri ora nella retta MN il segmento AB: in base alle osservazioni fatte, si hanno quattro omografie che trasformano in se stessa la conica e determinano sulla retta M'N' due segmenti A'B' A'B'' congruenti ad AB, nel senso del § 3.

I due segmenti A'B' A'B'' che così si ottengono sono poi diversi, perchè i due punti B', B'' corrispondenti a B rispettivamente nelle due proiettività, cadono da parti opposte di A'.

Oss. — Per togliere ogni dubbio intorno alla precisione del risultato, si può anche osservare che nel procedimento sopraindicato, lo scambio di A con B darebbe luogo ad altre quattro omografie e corrispondentemente ad altre due proiettività sulle punteggiate MN, M'N'; $\frac{MBN}{M'A'N'}$ $\frac{MBN}{N'A'M'}$; nè vi sono altri casi da esaminare. Queste proiettività conducono però ancora agli stessi due segmenti precedentemente ottenuti.

Siano infatti rispettivamente B', B'' gli elementi omologhi di B nelle proiettività

$$(1)\qquad \frac{MAN}{M'A'N'} \qquad\qquad (2)\qquad \frac{MAN}{N'A'M'},$$

e x, y gli elementi omologhi di A nelle proiettività

$$(3)\qquad \frac{MBN}{M'A'N'} \qquad\qquad (4)\qquad \frac{MBN}{N'A'M'}.$$

Si ha

$$(1')\quad MABN \barwedge M'A'B'N' \qquad\qquad (2')\quad MABN \barwedge N'A'B''M'$$
$$(3')\quad MBAN \barwedge M'A'XN' \qquad\qquad (4')\quad MBAN \barwedge N'A'yM'$$

da cui

$$(3'')\ MABN \barwedge M'XA'N' \barwedge N'A'XM' \qquad (4'')\ MABN \barwedge N'yA'M' \barwedge M'A'yN'$$

onde, confrontando con (1') (2'),

$$X = B'' \qquad y = B'.$$

Il procedimento tenuto si applica evidentemente anche nel caso in cui le due rette MN, M'N' coincidano.

Resta così stabilito nel sistema (c), per i segmenti il postulato IX. Lo stesso procedimento lo dimostra per gli angoli.

6. Il postulato X è poi subito dimostrato valido nello stesso sistema, osservando che se AB, BC; A'B', B'C' sono coppie di segmenti omologhi consecutivi, rispettivamente, sopra due rette di (c), e posto,

$$(1)\qquad MNAB = \frac{MA}{NA} : \frac{MB}{NB}, \qquad\qquad (2)\qquad \overline{\log} = \text{v. ass. log},$$

è

$$(3)\ \overline{\log}\,(MNAB) = \overline{\log}\,(M'N'A'B'), \quad (4)\ \overline{\log}\,(MNBC) = \overline{\log}\,(M'N'B'C').$$

Da

$$(MNAC) = (MNAB)\,(MNBC) \tag{5}$$

e da

$$\overline{\log}\,(MNAB) + \overline{\log}\,(MNBC) = \overline{\log}\,(M'N'A'B') + \overline{\log}\,(M'N'B'C') \tag{6}$$

si ha

$$\overline{\log}\,(MNAC) = \overline{\log}\,(M'N'A'C'). \tag{7}$$

Analogamente si stabilisce il risultato per gli angoli.

7. Vale infine nel sistema (c) la proposizione XI. Essa si deduce facilmente dalla proposizione IX, ma si può anche dimostrare diret-

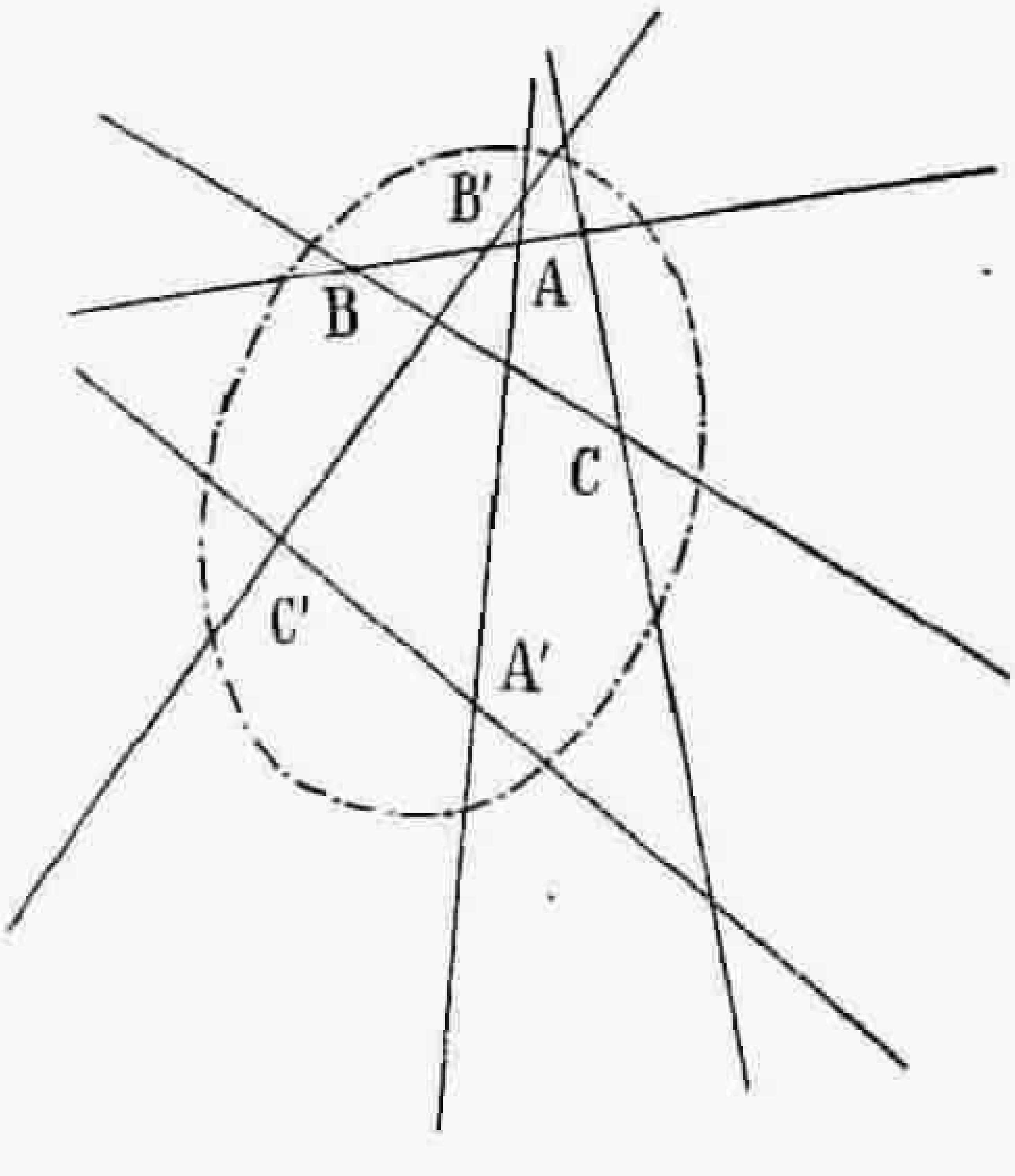

Fig. 2.

tamente. Siano ABC, A'B'C' due triangoli di (c), aventi uguali rispettivamente gli angoli in A, A' e i lati AB, A'B'; AC, A'C', nel senso del § 3. [Fig. (2)].

I due triangoli risultano riferiti elemento per elemento.

In base al principio di continuità e per maggiore chiarezza del procedimento, ci riferiremo nell'esposizione ad elementi tutti reali, rappresentando quindi esterni alla conica i vertici dei due triangoli, ciò che permette di tracciare nella figura (3) le tangenti (reali) alla conica per i punti medesimi. Lo stesso procedimento vale però, colla considerazione delle tangenti imaginarie nel caso dei vertici interni.

Condotte dunque da A, A′ le coppie di tangenti alla conica AH, AK; A′H′, A′K′, per la congruenza degli angoli A, A′, si ha nei fasci di centri A, A′ una proiettività in cui si corrispondono AB, A′B′; AC, A′C′; dato il verso in cui succedono i vertici omologhi dei due triangoli, resta determinato il verso della proiettività fra i due fasci, onde alla tangente AH corrisponderà una determinata tangente A′H′, ad AK, A′K′.

Viceversa, fissata la proiettività fra i due fasci, resta fissato il verso in cui si succedono i vertici e questi verso è concorde o discorde secondochè è diretta o inversa la proiettività considerata.

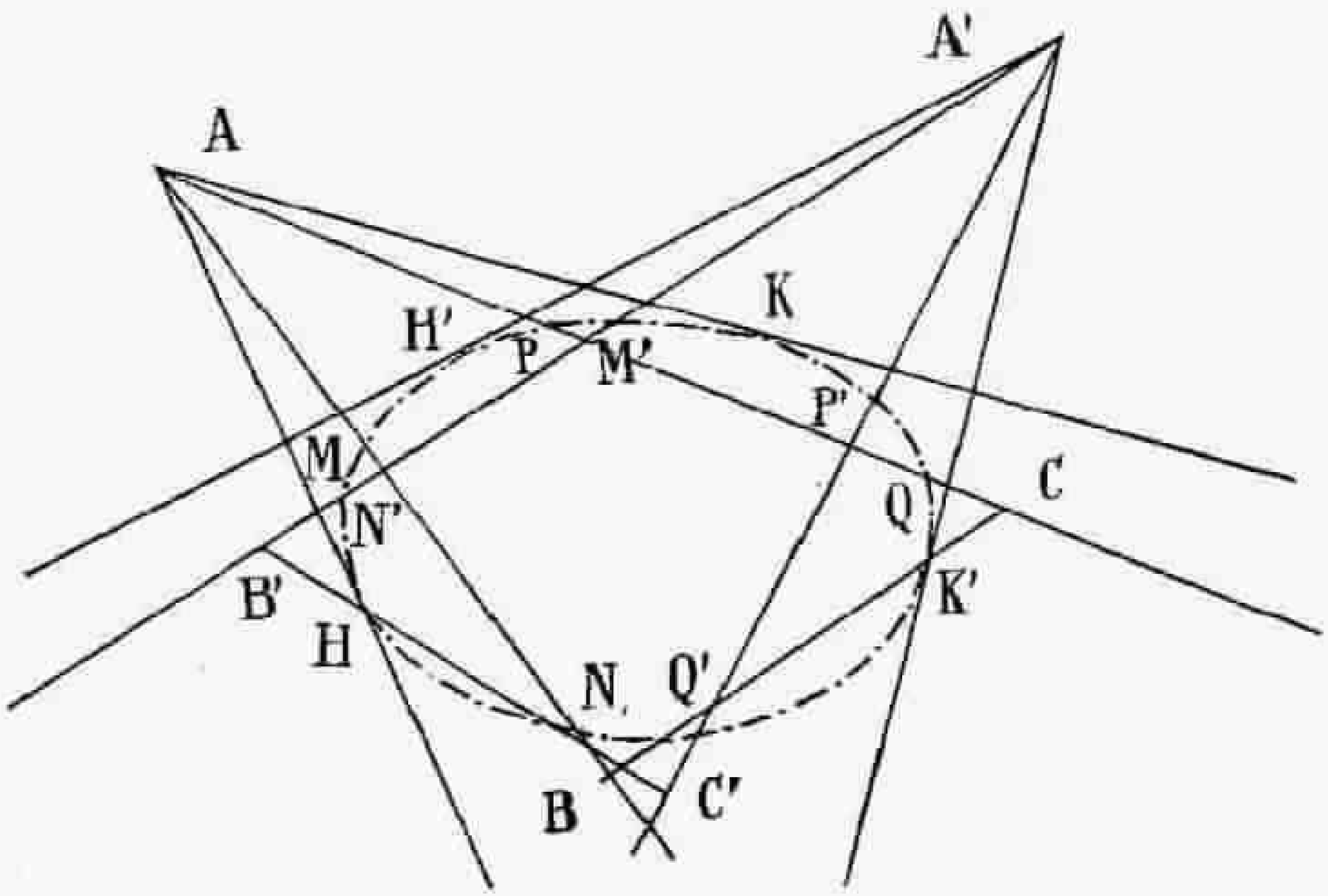

Fig. 3.

Per la congruenza supposta fra i lati AB, A′B′, dette M, N; M′, N′ le intersezioni rispettive delle AB, A′B′ con la conica, si avrà fra queste rette una delle due proiettività $\frac{MAN}{M'A'N'}, \frac{MAN}{N'A'M'}$.

Per la congruenza supposta dei segmenti AC, A′C′, dette rispettivamente P, Q; P′, Q′ le intersezioni delle rette AC, A′C′ colla conica, dev'essere posta fra di esse una delle due proiettività

$$\frac{PAQ}{P'A'Q'},\quad \frac{PAQ}{Q'A'P'}.$$

Ma fissata la proiettività sopra una delle due coppie di punteggiate, la proiettività sull'altra coppia resta pure fissata.

Infatti, la proiettività stabilita fra i due fasci fa corrispondere ad un *angolo* del fascio A un *angolo* del fascio A′, nel senso della geometria proiettiva. Ciascuno di questi angoli è costituito da due angoli opposti al vertice, nel senso della geometria elementare. Dato il triangolo ABC, il triangolo A'B'C' può essere costruito tanto sull'uno come sull'altro due ultimi angoli, indipendentemente dalla relazione fra i versi in cui si succedono i vertici dei due triangoli.

La proiettività fra le punteggiate AB, A'B' fissa uno di questi angoli, onde rimane anche determinato da qual parte deve trovarsi il punto C' rispetto ad A' e ciò corrisponde a fissare una delle due proiettività indicate sulle rette AC A'C'. (1) Se per esempio fra le punteggiate AB, A'B' è posta la proiettività $\frac{\mathrm{M\,A\,N}}{\mathrm{M'A'N'}}$, sulle punteggiate AC, A'C' si deve avere, come si vede subito, la proiettività $\frac{\mathrm{P\,A\,Q}}{\mathrm{P'A'Q'}}$.

Si hanno perciò quattro casi, secondochè tra i fasci di centri A, A' e le punteggiate AB, A'B'; AC, A'C' si hanno rispettivamente le proiettività

$$\text{I.}\qquad \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{A'H'}},\ \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}},\ \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{A'K'}},\qquad \frac{\mathrm{A\,M\,N}}{\mathrm{A'M'N'}},\qquad \frac{\mathrm{A\,P\,Q}}{\mathrm{A'P'Q'}}.$$

$$\text{II.}\qquad \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{A'H'}},\ \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}},\ \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{A'K'}},\qquad \frac{\mathrm{A\,M\,N}}{\mathrm{A'N'M'}},\qquad \frac{\mathrm{A\,P\,Q}}{\mathrm{A'Q'P'}}.$$

$$\text{III.}\qquad \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{A'K'}},\ \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}},\ \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{A'H'}},\qquad \frac{\mathrm{A\,M\,N}}{\mathrm{A'M'N'}},\qquad \frac{\mathrm{A\,P\,Q}}{\mathrm{A'P'Q'}}.$$

$$\text{IV.}\qquad \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{A'K'}},\ \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}},\ \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{A'H'}},\qquad \frac{\mathrm{A\,M\,N}}{\mathrm{A'N'M'}},\qquad \frac{\mathrm{A\,P\,Q}}{\mathrm{A'Q'P'}}.$$

Supposte le condizioni I, si ponga sulla conica la proiettività $\frac{\mathrm{H\,M\,K}}{\mathrm{H'M'K'}}$. Alla omografia che essa determina, tra i fasci omologhi A, A è subordinata la proiettività supposta $\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{A'H'}},\ \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}},\ \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{A'K'}}$ e tra le punteggiate AB, A'B' la proiettività $\frac{\mathrm{MAN}}{\mathrm{M'A'N'}}$, pure supposta.

Viceversa da queste due proiettività, la proiettività sulla conica resta determinata. — Sulle due rette AC, A'C' omologhe nell'omografia, resta determinata una proiettività in cui si corrispondono i punti A, A'; C, C' e le coppie PQ; P'Q'. D'altra parte i gruppi PACQ e P'A'C'Q' sono proiettivi per ipotesi; poichè il gruppo PACQ non è certamente armonico, esso non può in pari tempo essere proiettivo a Q'A'C'P', per cui la proiettività subordinata su AC, A'C' è la supposta. Si ha in ciò una conferma dell'asserzione precedente.

Si considerino ora le rette BC, B'C', omologhe nell'omografia; dette rispettivamente RS, R'S' le loro intersezioni colla conica, viene su-

(1) Questo fatto ha un ovvio riscontro nella geometria elementare.

bordinata sopra di esse la proiettività $\frac{RBS}{R'B'S'}$ come si vede subito osservando i due ordini di punti corrispondenti sulla conica MPNQ... M'P'N'Q'....

I segmenti BC, B'C' sono perciò congruenti.

Nei fasci di centri B e B' è poi subordinata una proiettività in cui si corrispondono BA, B'A'; BC, B'C', e le due coppie di tangenti alla conica rispettivamente B, B', in *un* modo determinato; gli angoli in B, B' sono quindi congruenti. Considerazioni analoghe valgono per i fasci di centri C, C'.

I casi II, III, IV si trattano analogamente.

Si può osservare, che indipendentemente dalla proiettività tra i fasci A, A', la proiettività sulla conica viene diretta o inversa secondochè si hanno le ipotesi I, III o II, IV nelle proiettività tra i lati.

La proposizione XI del § 2 resta così dimostrata nel sistema convenzionale.

6. Si prendano ora sulla conica due punti A, B (fig. 4), e si conduca la corda che li congiunge; essa, esclusi gli estremi, rappresenta una intera retta del piano ordinario. Sia O un punto interno alla conica, fuori della retta AB; dal punto O si possono condurre due rette distinte che incontrano la conica rispettivamente nei punti A, B; *esse rappresentano, nei loro tratti interni alla conica, due parallele del piano ordinario, condotte per un punto ad una retta fuori di esso. Vale dunque nel piano rappresentativo* (c) *il sistema iperbolico.*

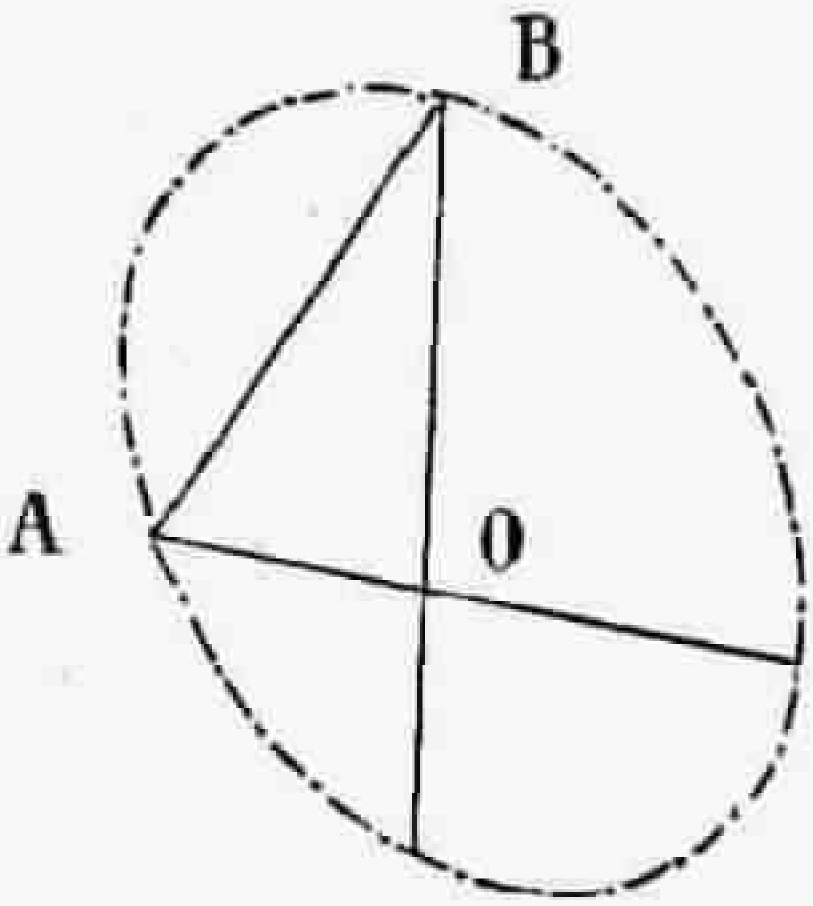

Fig. 4.

Se il contenuto logico dei concetti e dei postulati del § 2 bastasse a dimostrare la proposizione dell'unica parallela, il risultato ora rigorosamente stabilito colla scelta opportuna del piano convenzionale, in cui tuttavia quei concetti e quei postulati valgono in tutta la loro estensione logica, non si sarebbe potuto ottenere.

Rimane perciò stabilita l'indimostrabilità del postulato di Euclide per mezzo dei postulati del § 2.

Come si è già osservato, un procedimento analogo, mette in evidenza tale indimostrabilità anche mediante i postulati fondamentali della geometria nello spazio.

MARIA SITTIGNANI.

SULLA RAPPRESENTAZIONE DEI NUMERI IRRAZIONALI

1. È noto che i numeri razionali sono caratterizzati nell'ordinario sistema di numerazione dalla possibilità di una espressione mediante successioni di cifre che almeno da un certo posto si riproducono periodicamente.

Segue da ciò che le successioni di cifre che non presentano tale periodicità esprimono numeri irrazionali trascendenti, ovvero algebrici di grado superiore al primo.

È noto altresì il difetto dell'ordinario sistema di numerazione nella rappresentazione dei numeri razionali, potendo a due successioni diverse di cifre, corrispondere uno stesso numero razionale.

Comunemente, però, non mi sembra rilevata la mancanza di tale indeterminazione per i numeri irrazionali.

In questa nota, io mi propongo di mostrare come ogni irrazionale ammetta una *sola* rappresentazione per mezzo di successioni di cifre senza periodicità. [1]

Per maggior chiarezza, inoltre, farò precedere una esposizione sistematica della nota rappresentazione dei numeri razionali.

2. Siano: b (base del sistema di numerazione) un numero intero maggiore di 1, e c_i numeri interi non negativi, nè superiori a $b-1$.

Una serie della forma

$$\sum_{i=-n}^{i=\infty} c_i b^{-i} = c_{-n} b^n + c_{-n+1} b^{n-1} + \dots + c_0 + c_1 b^{-1} + c_2 b^{-2} + \dots,$$

potendo sempre dedursi dalla progressione geometrica decrescente:

$$\sum_{i=-n}^{i=\infty} b^{-i} = b^n + b^{n-1} + \dots + 1 + b^{-1} + b^{-2} + \dots = \frac{b^{n+1}}{b-1},$$

moltiplicandone i termini rispettivamente per quelli della successione c_i, limitata superiormente da $b-1$, è convergente assolutamente e quindi definisce un numero reale.

Ordinariamente questo numero reale si rappresenta con l'allineamento

$$c_{-n}\, c_{-n+1} \dots c_0 \,,\, c_1\, c_2\, c_3 \dots$$

Una serie della forma indicata, in cui b e c_i siano sottoposti alle accennate condizioni potrà brevemente chiamarsi *la serie di base* b, *corrispondente alla successione di cifre* c_i.

---

(1) I prof. H. Weber ed I. Wellstein nella loro "Encyklopädie der elementar-mathematik„ (Erster Bande, Leipzig, B. G. Teubner) con metodo diverso e con diverso fine trattano lo stesso argomento senza far risaltare l'accennata unicità.

Intanto si può dire che

I). *Ogni serie di base* b, *corrispondente ad una data successione di cifre, definisce un numero reale.*

3. Una serie di base b, è *periodica*, quando la successione di cifre a cui essa corrisponde è tale che, almeno a cominciare da un certo posto, le cifre si riproducono costantemente e nello stesso ordine.

Si prenda a considerare una serie periodica di base b, con l'*antiperiodo* $c_1 c_2 \dots c_p$ e col *periodo* $c_{p+1} c_{p+2} \dots c_{p+r}$. Se R è il numero reale che essa definisce, si ha:

$$R = c_{-n} c_{-n+1} \dots c_0, c_1 c_2 \dots c_p c_{p+1} c_{p+2} \dots c_{p+r} c_{p+1} c_{p+2} \dots c_{p+r} \dots$$

ossia successivamente

$$R = \sum_{i=-n}^{i=p} c_i b^{-i} + (1 + b^{-r} + b^{-2r} + \dots) \sum_{i=p+1}^{i=p+r} c_i b^{-i},$$

ed

$$R = \sum_{i=-n}^{i=p} c_i b^{-i} + \frac{b^r}{b^r - 1} \sum_{i=p+1}^{i=p+r} c_i b^{-i},$$

che è un numero razionale.

4. Reciprocamente: dato un numero razionale R, basterà ripetere i noti procedimenti di aritmetica, per stabilire che esso è sempre la somma di una serie periodica di base b.

Se d è il denominatore di R, con successive divisioni possono determinarsi dei sistemi di numeri $k, c_1, c_2 \dots c_t \dots$ ed $r_1, r_2, r_3 \dots r_{t+1} \dots$ in modo che si abbiano le relazioni

$$\begin{aligned} dR &= dh + r_1, \\ br_1 &= c_1 d + r_2, \\ br_2 &= c_2 d + r_3, \\ &\dots\dots \\ br_t &= c_t d + r_{t-1} \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

con le condizioni $\quad r_i < d \quad$ per $i = 1, 2, 3, \dots$

Essendo

$$br_i \geqq c_i d \qquad \text{e} \qquad d > r_i,$$

si avrà

$$c_i \leqq b - 1,$$

cioè a dire nel sistema di base b, le c_i sono cifre.

Inoltre, eliminando $r_1, r_2, \dots r_t$ tra le prime $t+1$ delle (1) si ottiene

$$R = k + c_1 b^{-1} + c_2 b^{-2} + \dots + c_t b^{-t} + \frac{r_{t+1}}{d} b^{-t}.$$

Nel caso in cui nessuno dei resti r_i sia nullo, siccome per ogni ε positivo arbitrario si può determinare un indice ν in modo che sia

$$b^{-t} < \varepsilon \frac{d}{r_{t+1}}$$

per tutti gli indici $t > \nu$, la serie di base b

$$c_1 b^{-1} + c_2 b^{-2} + \ldots + c_t b^{-t} + \ldots$$

sempre convergente, ha per somma $R - k$, onde si potrà scrivere

$$R = k, c_1 c_2 \ldots c_t \ldots$$

Lo stesso avviene evidentemente nell'altro caso, in cui qualcuno dei resti, e quindi tutti i successivi, siano nulli.

In virtù delle condizioni $r_i < d$, e delle relazioni (1), in entrambi i casi la serie ottenuta è periodica. Dunque:

II). *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un numero reale sia razionale, è che sia rappresentabile per mezzo di una serie periodica di base assegnata.*

5. Per altro si noti che uno stesso numero razionale può ammettere diverse rappresentazioni in un medesimo sistema.

Così, nel sistema decimale, le serie periodiche

$$1{,}000 \ldots$$
$$0{,}999 \ldots$$

rappresentano entrambe 1.

Però da ciò che segue risulterà che questa indeterminazione si limita ai soli numeri razionali.

6. Ricerchiamo le condizioni affinchè una serie di base b, converga allo zero, ossia che si abbia

$$0 = \sum_{i=1}^{i=\infty} c_i b^{-i}.$$

Ove esista, sia c_k la prima delle cifre $c_1, c_2, c_3 \ldots$ non nulla.

In corrispondenza al numero positivo $c_k b^{-k}$, potrà determinarsi un indice ν tale che sia

$$c_1 b^{-1} + c_2 b^{-2} + \ldots + c_n b^{-n} < c_k b^{-k},$$

per tutti gli $n > \nu$.

Scegliendo, se occorre, $n > k$, potrebbe aversi

$$c_1 b^{-1} + c_2 b^{-2} + \ldots + c_{k-1} b^{-k+1} + c_{k+1} b^{-k-1} + \ldots + c_n b^{-n} < 0,$$

il che, nessuna delle c_i essendo negativa, è assurdo.

Segue che dev'essere

$$c_1 = c_2 = c_3 = \ldots c_k = \ldots = 0,$$

e si conclude che

III). *Affinchè una serie di base* b *converga allo zero, occorre e basta che siano tutte nulle le cifre a cui essa corrisponde.*

7. Si osservi che la dimostrazione precedente può adattarsi al caso più generale di una qualunque serie di potenze di b^{-1}, a coefficiente c_i, che costituiscano soltanto una successione limitata di numeri non negativi.

8. Deduciamo da ciò le condizioni affinchè due serie di base b:

$$0, c_1 c_2 c_3 \ldots \quad \text{e} \quad 0, c'_1 c'_2 c'_3 \ldots$$

rappresentino uno stesso numero reale minore di 1.

Qui limitiamo le nostre considerazioni a due serie corrispondenti a numeri minori di 1, giacchè si vede subito che l'uguaglianza di numeri maggiori di 1, si scinde in quella delle parti intere ed in quella delle parti non intere.

Sia dunque

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} c_i b^{-i} = \sum_{i=1}^{i=\infty} c'_i b^{-i}.$$

Siano ancora c_k e c'_k le prime cifre differenti nelle due serie e supponiamo per fissare le idee $c_k > c'_k$.

Essendo $c_1 = c'_1$, $c_2 = c'_2$, ... $c_{k-1} = c'_{k-1}$, avremo

$$0 = \frac{c_k - c'_k}{b^k} + \frac{c_{k+1} - c'_{k+1}}{b^{k+1}} + \frac{c_{k+2} - c'_{k+2}}{b^{k+2}} + \ldots$$

di cui il secondo membro non è una serie di base b nel senso definito precedentemente, poichè dal secondo termine in poi nulla assicura che i termini siano tutti non negativi.

Però se si osserva che

$$\frac{b-1}{b^{k+2}} + \frac{b-1}{b^{k+3}} + \ldots = \frac{1}{b^k},$$

si potrà scrivere

$$0 = \frac{c_k - c'_k - 1}{b^k} + \frac{b - 1 + c_{k+1} - c'_{k+1}}{b^{k+1}} + \frac{b - 1 + c_{k+2} - c'_{k+2}}{b^{k+2}} + \ldots$$

Nè anche questa in generale è una serie di base b; tuttavia si può ad essa riferire l'osservazione del num. precedente, perchè dalle condizioni

$$c'_k < c_k, \quad c'_i \leqq b - 1, \quad \text{e} \quad c_i \geqq 0$$

per tutti gl'indici $i > k$, seguono le altre

$$c_k - c'_k - 1 \geqq 0, \quad b - 1 + c_i - c'_i \geqq 0 \quad \text{per} \quad i > k.$$

Allora si deduce che deve aversi

$$c_k - c'_k - 1 = 0 \quad \text{e} \quad b - 1 + c_i - c'_i = 0 \quad \text{per} \quad i > k,$$

ossia

$$c'_k = c_k - 1,$$

e

$$c'_i = c_i + b - 1 \quad \text{per} \quad i > k.$$

D'altra parte le c'_i non superano $b - 1$, quindi deve essere necessariamente

$$c_i = 0 \quad \text{e} \quad c'_i = b - 1$$

per ogni $i > k$.

Si può, dunque, concludere che se due serie di base b

$$0, c_1 c_2 c_3 \ldots \quad ; \quad 0, c'_1 c'_2 c'_3 \ldots$$

rappresentano uno stesso numero reale deve essere possibile determinare un indice k in modo che sia

$$\begin{array}{ll} c'_i = c_i & \text{per} \quad i < k, \\ c'_i = c_i - 1 & \text{per} \quad i = k, \\ \left.\begin{array}{l} c_i = 0 \\ c'_i = b - 1 \end{array}\right\} & \text{per} \quad i > k. \end{array}$$

Reciprocamente le due serie di base b

$$0, c_1 c_2 \ldots c_{k-1} c_k 0 0 0 \ldots$$
$$0, c_1 c_2 \ldots c_{k-1} - 1\, b - 1\, b - 1 \ldots$$

rappresentano evidentemente lo stesso numero reale, onde abbiamo il teorema

IV). *Condizione necessaria e sufficiente affinchè due serie di base* b *rappresentino uno stesso numero reale, è che, almeno in un posto, le cifre corrispondenti differiscano di una unità, e le successive siano tutte nulle, o tutte uguali a* b $-$ 1.

9. È notevole che le serie di base b, corrispondenti ad uno stesso numero sono periodiche, epperò (n. 4) che questo numero è razionale.

Pertanto dal teorema precedente si deduce la conseguenza:

V). *Ogni numero irrazionale ammette una e soltanto una rappresentazione in serie di base* b.

G. Mignosi.

Maggio 1907.

L'ASSOCIAZIONE " MATHESIS ,,

In seguito a quel che fu scritto nel numero precedente di questo " Periodico , sull'*Associazione Mathesis*, sono pervenute alla direzione le lettere che qui pubblichiamo.

Il prof. De Amicis continua a serbare il più assoluto silenzio.

Milano, 2 Novembre 1907.

Chiarissimo sig. Direttore del Periodico.

Già fin dallo scorso Luglio, visto che si faceva ancora attendere il numero del Bollettino dell'Associazione Mathesis, promesso dal Presidente prima e dopo il *numero straordinario* dello scorso Aprile, e nel quale dovevasi pubblicare il verbale della seduta tenuta il 28 Settembre 1906 a Bologna dal Comitato col resoconto dell'annata 1905-906, avevo pregato la S. V. che per doveroso riguardo ai Soci volesse pubblicare nel pregiato suo *Periodico* almeno il resoconto stesso. Se non ho poi approfittato della cortese Sua adesione, si è perchè lo stesso Presidente, indicendo l'adunanza del Comitato pel 29 Settembre a Parma, prometteva che in seguito sarebbe uscito il numero del Bollettino con tutti gli atti relativi alle gestioni 1905-906 e 1906-907. Sgraziatamente l'adunanza stessa andò deserta: il sig. preside del R. Istituto tecnico di Parma, a cui mi presentai la mattina del 29 Settembre, mi dava a leggere una cartolina colla quale il Presidente del Comitato scusava la sua assenza per una indisposizione che lo aveva costretto a lasciar Parma prima della fine del Congresso. Essendo solo non mi restava che tornare a Milano.

Ora però, siccome la pubblicazione del Bollettino si fa sempre attendere, per tranquillità dei soci e per mio sgravio Le rinnovo la preghiera di pubblicare il resoconto degli anni 1905-906 e 1906-907, che Le accludo; in attesa che il Presidente si decida a pubblicare il resto e ad indire la votazione per iscritto sulla proposta riforma dello Statuto della Mathesis giusta l'articolo XIII dello Statuto stesso; non che la elezione dei membri del Comitato ora mancanti.

Mi creda con osservanza

devotissimo
GAETANO RIBONI.

Rendiconto finanziario della "Associazione Mathesis"

PER L'ANNO SOCIALE 1905-906

dal 30 Giugno 1905 al 1° Luglio 1906.

Attivo.

N. 54 quote a L. 6.	L. 324,—
„ 80 quote a L. 5 (Soci del *Periodico*)	„ 400,—
„ 9 tasse d'ammissione a L. 4	„ 36,—
Totale	L. 760,—
Deducesi passivo	„ 634,12
Rimane un attivo di	L. 125,88

Passivo.

Disavanzo di Cassa al 1° Luglio 1905	L. 62,53
Spese del Presidente a Milano	„ 18,39
Spese postali del Segretario	„ 1,65
Al tipografo Tamburini pel Bollettino (n. 1-2)	„ 285,—
Vaglia tipografia Artigianelli Torino (firmato Bettazzi)	„ 8,50
Altre spese postali del Segretario	„ 3,45
Al tipografo Tamburini pel Bollettino (n. 3-4)	„ 165,—
Alla Società tipografica di Forlì (firmato De Amicis)	„ 43,50
Spese del Presidente a Forlì	„ 46,10
Totale	L. 634,12

Bologna, 28 Settembre 1906.

Il Segretario-Economo
G. RIBONI.

V.° *Il Presidente*
Firm. E. DE AMICIS.

Rendiconto finanziario della "Associazione Mathesis"

PER L'ANNO SOCIALE 1906-907

dal 30 Giugno 1906 al 31 Luglio 1907.

Attivo.

Avanzo del Rendiconto precedente	L. 125,88
Quota Fabbri 1904-905 a L. 3 (perchè L. 7 spedite alla Direzione del *Periodico*)	„ 3,—
N. 50 quote a L. 5 (Soci del *Periodico*)	„ 250,—
„ 12 quote a L. 6	„ 72,—
„ 1 tassa d'ammissione	„ 4,—
Totale	L. 454,88
Deducesi passivo	„ 81,90
Totale attivo	L. 372,98

Passivo.

All'editore Tamburini per stampa Numero straordinario	L. 76,—
Spese postali del Segretario	„ 3,90
Per N. 2 quote del Socio Gallucci già segnate a L. 6 nel Bilancio precedente, mentre sono a L. 5, perchè socio del *Periodico* . . .	„ 2,—
Totale	L. 81,90

Parma, Settembre 1907.

Il Segretario Economo
G. Riboni.

N. B. — Manca il visto del Presidente, perchè assente dall'adunanza che doveva essere tenuta a Parma. Manca perciò nel passivo anche la nota delle spese dello stesso Presidente.

Notizie relative ai Soci.

Dall'Aprile 1906 a tutto Ottobre 1907 hanno pagata la quota 1904-905 i soci: *Brambilla, Brattina, Burali Forti, Grassi, Murer, Oseletto, Patrassi, Tremontani.*

Hanno pagato la quota 1905-906 i soci:

Benedetti, Bernardi Francesco, Bisson, Brattina, Burali Forti, Bussagli, Casamassima, Conti, Costanzi, Denti, Di Dia, D'Incà Levis, Fabbri, Grassi, Ingrami, Marini, Murer, Oseletto, Rindi, Scarpis, Storchi, Tremontani, Trevisan.

Hanno pagato la quota 1906-907 i soci:

Amaldi Italo, Bettazzi, Bettini, Bisson, Boccardini, Borio, Bosi, Burali Forti, Bussagli, Castellano, Castelli, Catania, Ceretti, Ciabò, Costanzi, Cozza, Dainelli, Di Dia, D'Incà Levis, Fellini, Ferrari Carlo, Fiorentino, Foschi, Gallucci, Ingrami, Lazzeri, Lucarini, Marini, Misani, Mola, Neppi Modona, Oseletto, Pala-

tini, Pirondini, Riboni, Russo, Sadun, Sforza, Testi, Treves, Vaccari, Cipolla, Natucci, Bernardi Giuseppe, Giudice e il nuovo socio *Domenico Giordano* del R. Ginnasio Umberto I di Ragusa in un colla tassa d'ammissione.

Ha pagato la quota 1907-908 il socio *Vaccari.*

Si pregano *vivamente i soci morosi a volersi mettere in regola colla Cassa.*

Torino, 14 Novembre 1907.

Caro Lazzeri

Giacchè nell'ultimo numero del *Periodico* tu risollevi colla tua lettera la scottante questione della *Mathesis,* permetti di fare una dichiarazione anche a me, che avendo ideato e poi fondato col povero Lugli e col Giudice l'Associazione e avendola presieduta per parecchi anni, l'ho vista con gran dispiacere avviarsi alla morte.

Io desidero che si sappia che prima del termine dello scaduto anno sociale (non ricordo la data precisa) mandai le mie dimissioni da *socio,* motivate da una lettera che domandai al Presidente prof. De Amicis di pubblicare nel più prossimo numero del Bollettino, il quale, peraltro, non venne mai. Essendo perciò mancata questa pubblicazione, ci tengo a far sapere ai miei colleghi che io mi dimisi dalla associazione perchè essa non funziona più secondo lo Statuto, non avendo un capo regolarmente eletto, e non pubblicando più nè Bollettini nè verbali di adunanze del Comitato.

Questo desidero si sappia perchè, non essendo stato mai annunziato neanche il mio ritiro da membro del Comitato, non voglio che sembri pesare anche su me la responsabilità dell'attuale deplorevole stato di cose.

Alla Mathesis riordinata o alla nuova Associazione vagheggiata son pronto a dare il mio nome e l'opera mia, come volenterosamente le ho date alla Mathesis ora morente, la quale poteva pur fare ancora del bene!

Ti ringrazio e ti saluto affettuosamente.

*Aff.*mo
R. Bettazzi.

---

15 Novembre 1907.

Chiarissimo Signor Professore,

Ho letto nell'ultimo fascicolo del *Periodico,* le sue dichiarazioni relative all'Associazione Mathesis.

Le ragioni del decadimento di questa, più che nell'indolenza di alcuno del Comitato, credo siano da ricercarsi nell'esser venute a mancare in gran parte le cause che dettero origine alla Società stessa.

I vecchi libri di testo sono stati quasi dovunque sostituiti da trattati ispirati a sani criteri del rigore scientifico e delle esigenze didattiche, i Professori escono dalle Università con sufficiente cultura, e si addestrano continuamente sui periodici di matematica elementare, nelle quistioni didattiche, e anche i programmi si sono andati via via migliorando, per opera specialmente della Mathesis.

Volendo che questa vivesse di vita rigogliosa altri campi dovrebbero dunque aprirsi all'attività sociale; e poichè lo scopo della Società, comunque allargata, deve restare preminentemente educativo, ed esplicarsi in special modo coll'accrescer la cultura degli insegnanti, mi sembra che non siano da disprezzarsi le seguenti proposte, già da me comunicate ai prof. Conti e Riboni.

1°. Dedicare la massima parte del Bollettino alla rassegna dei principali periodici di matematica italiani e stranieri, in modo che anche i soci lontani dai centri di studio possano aver notizia delle principali pubblicazioni, per procurarsi quelle utili nel campo speciale a cui dedicano i loro studi.

2°. Procurare che i soci, in qualunque residenza, possano ottenere in prestito dalle biblioteche Governative i libri occorrenti, con opportune restrizioni e sotto determinate condizioni.

3°. Iniziare la Biblioteca Mathesis, e pubblicare via via, le opere dei soci che vengano giudicate degne di pubblicazione e per la loro natura non siano facilmente pubblicabili negli ordinari Periodici, o inseribili negli Atti delle Accademie.

Con ossequi, mi confermo

Suo dev.mo
A. Natucci.

RISOLUZIONE DELLA QUISTIONE 731

731. *Sia* (C) *una curva piana; la normale in un punto* M *di questa curva incontri* Oy *in* N′, *le parallele a* Ox *e* MN′ *tracciate per i punti* M *e* O *rispettivamente s'incontrino in* R. *Determinare* (C) *con la condizione che sia* RN′ = OM.

J. Rose.

Risoluzione del sig. Scalabrini, R. U. di Pavia.

Essendo $\frac{dy}{dx}$ il coefficiente angolare della tangente in M (x, y) alla curva richiesta, si vede subito che

$$\frac{dx}{dy}X + Y = 0, \qquad X = x$$

sono le equazioni rispettivamente delle rette OR, MR; per cui le coordinate di R sono

$$\left(x \quad , \quad -\frac{dx}{dy}x\right).$$

Per la condizione posta dal problema deve essere

$$x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 x^2,$$

donde

$$ydy \pm xdx = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{x}{y}. \tag{1}$$

Integrando questa equazione differenziale, si trova

$$y^2 \pm x^2 = r^2.$$

Dunque la curva (C) è o un circolo di centro O, o un'iperbole equilatera pure di centro O, avente le rette x, y per assi.

Altre risoluzioni dei sigg. De Boi, R. Accademia Navale e Vacchi, R. U. di Bologna.

QUISTIONI PROPOSTE

739. La tangente in un punto M d'una curva piana (c) incontra l'asse Oy in T e la parallela alla normale condotta per T incontra l'asse Ox in S. Determinare il luogo dei punti di regresso delle curve (c) tale che la superficie del triangolo OTS sia costante.

J. Rose.

740. S'indichino con T, T' i punti d'incontro della tangente ad un'ellisse in un punto variabile M con gli assi.

1°. Il luogo dei baricentri di ciascuno dei triangoli OMT, OMT' è una quartica. L'area limitata fra ciascuna di queste quartiche ed il suo asintoto è $\frac{1}{3}$ di quella dell'ellisse.

2°. Le quartiche luoghi dei centri dei circoli circoscritti ai triangoli OMT, OMT' hanno proprietà analoghe.

3°. I luoghi degli ortocentri dei triangoli OMT, OMT' sono ellissi.

741. L'aree racchiuse fra le tre curve rappresentate dalle equazioni:

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)-\frac{y^2}{b^2}=0,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2}{y^2}-1=0,$$

$$\frac{y^2}{b^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-\left(2-\frac{x^2}{a^2}\right)^2=0,$$

e i loro asintoti sono rispettivamente

$$\pi ab,\quad 2\pi ab,\quad 3\pi ab.$$

E. N. Barisien.

BIBLIOGRAFIA

Prof. Alberto Conti. — *Elementi di calcolo letterale* per la 3ª classe tecnica. Bologna, Zanichelli. — L. 1.

Gli elementi di algebra che s'insegnano nella 3ª classe tecnica, non hanno e non possono avere altro scopo, che di fornire un valido sussidio per la risoluzione dei problemi aritmetici. Ora le generalità relative ai numeri negativi, e alle operazioni sui polinomi, ecc., che si espongono nelle prime pagine di tutti i trattatelli in uso, mentre fanno perder di vista il fine principale, non costituiscono una preparazione razionale allo studio delle equazioni. Perciò ci sembra che abbia fatto molto bene l'A., interpetrando giustamente una delle domande del noto Quistionario, a procedere immediatamente alla risoluzione delle equazioni e dei problemi, coordinando via via che se ne presenta l'opportunità, le altre parti allo studio di esse.

L'alunno viene così a comprendere subito la grande utilità di questa nuova parte delle matematiche, e osservando la facilità con cui gli permette di risolvere problemi che prima gli apparivano complicati e difficilissimi, se ne interessa vivamente.

Lo scopo è dunque buono, ma non meno buono è il modo con cui l'A. ha cercato raggiungerlo, superando felicemente le difficoltà, specialmente di coordinazione, che gli si sono presentate nel tracciarsi questa nuova via.

Utilissimi i preliminari, in cui si riassumono i concetti principali che stanno a base dell'aritmetica, si dànno alcune nozioni sull'uso delle operazioni (parte questa in cui sono molto deficienti quasi tutti i libri d'aritmetica), e si espongono, come in un prospetto, le relazioni esprimenti le proprietà delle 4 operazioni e delle potenze. Poichè non tutte sono note all'alunno, e anche di quelle poche che conosce non gli è stata data una dimostrazione, l'A. chiede che se ne convinca mediante semplici verifiche, aspettando a acquistarne la conferma teorica nel seguito degli studi. È questo certamente un inconveniente, e dipende dalla necessità di dare nozioni d'algebra senza la necessaria preparazione. Tuttavia l'A. merita lode per aver avuto cura di enunciarle, senza servirsene implicitamente come si fa in tanti altri libri.

Entrando in argomento, stabilito con numerosi esempi il concetto d'identità, l'A. mostra come le equazioni risultino direttamente dallo studio dei problemi. Classifica a quest'uopo i problemi a un'incognita in 3 tipi, a seconda delle relazioni che l'incognita ha coi dati, e impianta le equazioni che traducono l'enunciato. Premessi i principî relativi all'equivalenza, mostra con numerosi esempi, tolti da problemi, come coll'applicazione di essi e delle proprietà delle operazioni, riassunte in principio, si possa risolvere ogni equazione di 1° grado a un'incognita. Enuncia infine la regola generale, avvertendo e mostrando con esempi, come non sempre convenga seguirla a puntino.

Accenna anche ai problemi indeterminati, o impossibili, o tali che la soluzione non abbia nessuna ragionevole interpetrazione; e ciò che è più utile, mostra, sempre con esempi, la convenienza di usare la risoluzione algebrica invece dell'aritmetica, nei problemi del 2° e del 3° tipo.

Nel Capitolo III, dalla considerazione di problemi in cui compariscono grandezze dotate di doppio senso risulta l'opportunità d'introdurre i segni + e —, per indicare il senso delle grandezze stesse: si nota opportunamente come questi segni, premessi ai numeri, si possano anche considerare come simboli operativi. Estende ai numeri con segno le proprietà dell'uguaglianza, della disuguaglianza e delle operazioni, già stabilite per i numeri interi e frazionari, valendosi del principio di permanenza delle proprietà formali, della cui applicazione l'alunno ha già avuto esempio a proposito dei numeri frazionari. Anche qui, l'A. non potendo dimostrare la validità di tali proprietà, consiglia il lettore a convincersene mediante verifiche. Passa quindi a definire le operazioni dei numeri con segno, ed estende i concetti d'identità e d'equazione, mostrando come l'introduzione dei numeri negativi permetta di semplificare i principî fondamentali della risoluzione delle equazioni e la regola relativa. Il capitolo IV è una breve trattazione delle espressioni algebriche intere e frazionarie, e delle relative operazioni.

L'appendice si riferisce ai sistemi di più equazioni di 1° grado con altrettante incognite. Anche qui risulta da problemi la necessità di considerare tali sistemi, e si espongono in modo semplice i principî relativi all'equivalenza e i vari metodi d'eliminazione. Una buona raccoltina d'esercizi e di problemi completa il volumetto, il cui pregio principale consiste, a parere mio, nell'esser dedicato per tre quarti alla risoluzione dei problemi. Esso è degno d'esser preso in buona considerazione da tutti gl'insegnanti, perchè è ben diverso dai soliti sunti, o compendi, o raffazzonamenti di trattati, che vengono proposti come libri di testo per la 3ª classe tecnica.

A. Natucci.

Angelo L. Andreini. — *Sfere cosmografiche e loro applicazione alla risoluzione di problemi di* " Geografia Matematica ". Un vol. di pag. xxx-328 con 12 incisioni. Milano, Ulrico Hoepli, editore. — L. 3.

Lo scopo di questa nuova pubblicazione è presto detto.

Le Sfere cosmografiche (globi celesti e terrestri e sfere armillari) ritenuti da molti quali semplici apparecchi rappresentativi, servono invece alla risoluzione di svariatissime ed importanti questioni (molte delle quali di indole pratica) intorno alla Geografia Astronomica e Geodetica, senza che sia necessario di ricorrere a formule ed a dimostrazioni strettamente matematiche.

Di più che 400 problemi sono dati gli enunciati e le relative soluzioni senza contare gli altri numerosissimi che lo studioso, colla guida dei primi, può facilmente risolvere da sè.

L'introduzione storica che forma l'oggetto della prima parte, mette al corrente il lettore sulla importanza, che questi apparecchi hanno avuto in passato, e su quella che possono avere anche oggi specialmente per coloro cui fa difetto una larga cultura matematica, mentre le nozioni fondamentali, che fanno seguito alla detta introduzione, lo instruiscono sui più minuti particolari intorno alla formazione e all'uso delle sfere e degli altri apparecchi cosmografici.

Il chiaro ed esteso indice sistematico ed i vari indici alfabetici, dei quali è corredato il Manuale, servono efficacemente a ritrovare con speditezza tutti i problemi relativi ad un determinato argomento; e le sette tavole numeriche poste in fondo, oltre che pei problemi del testo, presentano non poca utilità anche di per sè stesse.

Il lavoro, per quanto fondamentalmente matematico, è dettato in forma chiara e piana in modo da riuscire accessibile anche a coloro che di questa scienza non posseggono che i primi principi.

Siamo quindi pienamente convinti che gl'insegnanti, gli studiosi ed i dilettanti di cose geografiche possono trarre dalla lettura di questo Manuale, larga messe di utili cognizioni ed acquistare la maggiore familiarità con tutte le questioni di Geografia matematica, le quali oltre che per l'insegnamento possono riuscire proficue anche in alcune applicazioni pratiche nella vita comune.

È poi inutile aggiungere che anche per questo Manuale la Casa Editrice ha saputo, come sempre, conseguire eleganza e nitidezza tipografica.

Mineo Chini. - Ordinario nel R. Liceo Andrea D'Oria. - Incaricato nella R. Università di Genova. — *Lezioni di Algebra* ad uso dei Licei (secondo gli ultimi programmi ministeriali). Vol. I. Livorno, Raffaello Giusti, 1908. — L. 1,80.

Senza stare a fare ora un esame minuto di questa opera, (da rinviarsi a quando essa si sarà potuto usare nella scuola) mi piace di presentarla senza indugio ai miei colleghi, perchè possano profittarne nell'anno scolastico che sta per principiare.

Non ne parlo come di un lavoro organico, giacchè, dovendo essa servire alla 1ª liceale, è stata modellata sui programmi ministeriali per quella classe, dei quali ognuno conosce la... iniquità; ma, quanto allo svolgimento di quelli, non esito a dichiararla un libro *fatto benissimo* e *adatto alla scuola*.

La materia vi è svolta con ordine, chiarezza, sobrietà e spigliatezza di forma, assieme ad un rigore che non si smentisce mai — cosa, quest'ultima, essenziale, giacchè i programmi attuali sono una continua tentazione di far le cose alla buona. Il necessario c'è tutto, ma non c'è nulla di più: salvo qualche breve paragrafo qua e là, che l'insegnante potrà fare o no, secondo il genere degli scolari coi quali avrà da combattere.

Dei miglioramenti da introdurvi potrei indicarne senza dubbio: chi non trova da ridire... nei libri degli altri? Ma avverto subito che non si tratta di cose di sostanza. Tralasciando le osservazioni minute e da microscopio, alle quali è inadatta questa rapida recensione, noto soltanto che, a mio credere, converrebbe arricchire la magra raccolta di esercizi e problemi, dando inoltre esempi di esercizi già risolti e di problemi già intavolati, e aggiungere in un maggior numero di noticine quei consigli di indole pratica che servono ad impedire ai giovani di cadere negli errori più usuali: cose queste che hanno resa così ben accetta nella scuola l'ottima Algebra del Nassò. Così pure io credo che il libro si avvantaggerebbe sotto l'aspetto didattico, se in principio delle *Definizioni*, dei *Teoremi*, delle *Regole*, fossero scritti in carattere distinto questi loro nomi, perchè sa chi ha pratica di scuola quanto gli allievi si sentano aiutati da queste parole in grosso carattere, che spezzano le pagine, permettono di meglio orientarsi, e rendono più agevoli le ricerche e le revisioni rapide.

Non ho che da esporre due voti terminando. Il primo è che i colleghi facciano buon viso a quest'opera coscienziosa, della quale non potranno avere che a lodarsi nella scuola: il secondo è che quest'opera divenga presto inadatta alla 1ª liceale, perchè l'On. Ministro, pentito una buona volta del male che fa al Liceo mantenendo gli ordinamenti attuali, abolisca l'infausta opzione fra il greco e la matematica, regolarizzando i programmi. Questo secondo voto, l'autore che è uomo di spirito, sarà pronto a far suo: perchè se si attuasse, egli, che come insegnante sarebbe il primo ad esserne lieto, ha tanto ingegno e tanta attività, che invece di darci la 2ª edizione del testo attuale, ce ne preparerà un altro adatto ai programmi tornati ragionevoli, del quale si potrà dire il bene che oggi si dice di questo.

Torino, 11 ottobre 1907.

RODOLFO BETTAZZI.

VERONESE con la collaborazione di P. GAZZANIGA. — *Nozioni di geometria intuitiva* ad uso delle scuole complementari.

L'illustre senatore Veronese mostra coll'esempio come sia compito dello scienziato che voglia essere un vero maestro, indicare quale è la via che si deve seguire nell'insegnamento fino dai primi rudimenti per giungere alle cime più eccelse e dopo avere dato largo contributo al progresso degli studî geometrici non sdegna l'ufficio più umile, ma non meno importante, di preparare buoni libri per tutti gli ordini di scuole secondarie.

Del nuovo libro testè pubblicato crediamo non si possa render conto meglio che pubblicando la parte sostanziale della prefazione, che è la seguente:

Caratteri fondamentali di questo libro, come delle Nozioni ad uso dei Ginnasi, sono questi: *le varie proposizioni geometriche sono enunciate solo per le figure che corrispondono ad oggetti che si possono direttamente osservare*, quindi esclusione sino dal principio di rette, di piani e di spazio illimitati, l'introduzione sistematica dei quali spetta ed è riservata ai corsi di Geometria razionale. *Le proposizioni stesse sono sottoposte a constatazione o alla verificazione sperimentale*, ricorrendo ora al trasporto di oggetti ora all'uso di particolari istrumenti (riga, riga graduata, squadra, compasso, carta da lucidi carta millimetrata ecc.), ed ora ad acconcie operazioni e facili costruzioni elementari; *non si danno proposizioni sotto forma logicamente determinata*, ma si ricorre all'imagine delle figure per dar loro nomi opportuni, per rilevare le loro più ovvie proprietà e stabilire i principali criteri che servono a differenziare le une dalle altre; *pur cercando di dare agli enunciati una forma piana accessibile e adatta agli scolari ai quali il libro è destinato*, esso non contiene quindi nè postulati, nè generalmente proposizioni sotto forma di teoremi; è un trattato sperimentale, che, come le sopra ricordate Nozioni ad uso dei ginnasi, si distingue dagli altri del genere. D'altro canto si è cercato che il libro abbia non soltanto uno scopo pratico, come sarebbe un libro destinato ad artigiani o a scuole professionali, ma serva di utile preparazione all'insegnamento della Geometria razionale, cosicchè quando lo scolaro dovrà intraprenderne lo studio in altri corsi, nulla debba essere corretto o rifatto di ciò che qui gli si apprende; nessun concetto o nessuna regola debba trovarsi anche in apparente contrasto coi concetti, colle definizioni o colle regole successivamente impartite nell'insegnamento razionale. Ed è anzitutto utile che i postulati ed i metodi di questo insegnamento trovino il loro naturale fondamento nelle proposizioni date in questo libro. Chi sa quanto sia difficile sradicare dalle menti giovanili nozioni inesatte e involute, già apprese nei primi rudimenti e per la prima volta, comprenderà quanto studio e quanta cura debbono porre in ciò autori ed insegnanti.

Il metodo qui usato è per lo scolaro potentemente suggestivo, perchè non lo obbliga a seguire passivamente un ragionamento, ma esige sempre la sua attiva collaborazione, invitandolo con gli oggetti e con le figure che gli stanno dinanzi a confrontare, a costruire figure, a fare ogni momento verificazioni, cosicchè egli finisce non solo per vederne l'utilità pratica e per prendervi interesse, ma per sentire vivamente il bisogno, dopo avere constatato che una tale proprietà di una figura *è così*, di sapere anche *perchè è così*, laonde il metodo sperimentale qui adottato serve, come ben deve essere, di utile preparazione al metodo razionale. Ed è appunto per non lasciare del tutto insoddisfatta la naturale curiosità che questo metodo farà sorgere nello studioso, che in certi punti del libro (là dove l'opportunità lo consentiva) è data di talune proposizioni oltre che la verifica sperimentale, anche la dimostrazione per via di ragionamento (sebbene per sommi cenni), traendo profitto poi di ciò per segnalare e confrontare i due differenti metodi di insegnamento della Geometria: il metodo sperimentale ed il metodo razionale.

Conserviamo nel titolo del libro il nome di Geometria *intuitiva*, per indicare il contenuto ed il metodo del libro. Secondo noi l'intuizione spaziale pura non esce dai confini dell'osservazione diretta per quanto idealizzata, (1) ma fosse anche una forma *a priori* del nostro spirito, il geometra non può ammettere che il minimo di verità che i vari sistemi filosofici sulla teoria delle conoscenze matematiche concedono, e che tutti devono riconoscere come esatte, quali quelle che derivano dai semplici fatti della pura osservazione del mondo esteriore, basata sui nostri sensi.

(1) Vedi: A. *Il vero nella matematica*. Padova, nov. 1905.
Ciò non impedisce la costruzione di forme geometriche astratte che appaiono trascendere i limiti dell'esperienza.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 23 Dicembre 1907

SUL TRIANGOLO

1. Consideriamo un triangolo ABC. Preso nel suo piano un punto qualunque P, denotiamo con A_p, B_p, C_p, rispettivamente, i punti in cui le rette AP, BP, CP incontrano i lati BC, CA, AB e con $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p$ i valori dei rapporti semplici $\frac{BA_p}{CA_p}, \frac{CB_p}{AB_p}, \frac{AC_p}{BC_p}$.

Il punto P suddetto spezza poi il triangolo fondamentale in tre triangoli BCP, CAP, ABP, la somma de' quali è, in ogni caso, eguale all'area S del triangolo ABC, purchè fra essi si ritengano positivi solo quelli che son situati dalla stessa parte di ABC, rispetto al lato ch'hanno in comune con esso. Denotiamo rispettivamente con $\alpha'_p, \beta'_p, \gamma'_p$ le aree di tali triangoli.

Finalmente, indichiamo rispettivamente con x_p, y_p, z_p le distanze del punto P da' lati BC, CA, AB del triangolo fondamentale; esse debbono ritenersi positive o negative, secondochè il punto, rispetto al lato che si considera, è dalla stessa parte o da parte opposta del triangolo.

Le convenzioni fatte pel punto P valgano per un altro punto qualunque del piano del triangolo.

2. Dati due qualunque dei numeri $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p$, è individuato il punto P; dunque uno dei rapporti $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p$ è funzione degli altri due. Una relazione tra questi rapporti ci è fornita dal notissimo teorema di Ceva:

$$\alpha_p\beta_p\gamma_p = -1. \tag{1}$$

Ciò posto abbiamo

$$\frac{\gamma'_p}{\beta'_p} = -\alpha_p; \quad \frac{\alpha'_p}{\gamma'_p} = -\beta_p; \quad \frac{\beta'_p}{\alpha'_p} = -\gamma_p;$$

e quindi

$$\alpha'_p : -\beta_p = \beta'_p : -\frac{1}{\alpha_p} = \gamma'_p : 1;$$

da cui si ricava

$$\frac{\alpha'_p + \beta'_p + \gamma'_p}{1 - \beta_p - \frac{1}{\alpha_p}} = \alpha'_p : -\beta_p = \beta'_p : -\frac{1}{\alpha_p} = \gamma'_p;$$

laonde, essendo

$$\alpha'_p + \beta'_p + \gamma'_p = S,$$