SULLA TRASFORMAZIONE DEI RADICALI SOVRAPPOSTI

(Continuazione e fine — v. fascicolo V, anno XXIII).

§ 3. — Sulla trasformazione dei radicali

$$\sqrt[4]{\sqrt{a_1} \pm \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_{m-1}} \pm \sqrt{a_m}}, \qquad \sqrt[4]{a_1 \pm \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_{m-1}} \pm \sqrt{a_m}}.$$

14. Teorema I. — *Il radicale* $\sqrt[4]{\mathrm{a} + \sqrt{\mathrm{b}}}$, *in cui le quantità* a *e* b *sono razionali, si può trasformare nella somma di due radicali semplici, se sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

1ª. *La differenza* $\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}$ *sia la quarta potenza di una quantità razionale* h, *sia cioè*

$$a^2 - b = h^4. \tag{1}$$

2ª. *La quantità* $\dfrac{\mathrm{h}^2 + \mathrm{a}}{2}$ *sia un quadrato perfetto.*

Supponiamo infatti

$$\frac{h^2 + a}{2} = k^2, \tag{2}$$

e poniamo

$$\sqrt[4]{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \tag{3}$$

in cui con x ed y indichiamo due quantità razionali.

Considerando di ogni radicale il solo segno positivo, ed innalzando la (3) alla quarta potenza, si ha

$$a + \sqrt{b} = x^2 + y^2 + 6xy + 4\sqrt{xy}\,(x + y).$$

Questa uguaglianza risulta soddisfatta se si pone

$$a = x^2 + y^2 + 6xy \qquad \sqrt{b} = 4\sqrt{xy}\,(x + y) \tag{4}$$

dalle quali si ricava

$$a^2 - b = (x - y)^4$$

e quindi, tenuto conto della (1), risulta

$$y = x - h. \tag{5}$$

Sostituendo nella prima delle (4) il valore di y dato dalla (5), si ottiene l'equazione

$$8x^2 - 8hx + h^2 - a = 0,$$

le cui radici, tenuto conto della (2), sono date dalla

$$x = \frac{h \pm k}{2} \tag{6}$$

Dalla (5) risulta allora

$$y = \frac{\pm k - h}{2} \tag{7}$$

e quindi, considerando il solo segno positivo di k, dalle (3), (6) e (7) si ottiene

$$\sqrt[4]{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{k+h}{2}} + \sqrt{\frac{k-h}{2}}, \tag{8}$$

come volevasi dimostrare.

In modo analogo si può dimostrare

$$\sqrt[4]{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{k+h}{2}} - \sqrt{\frac{k-h}{2}}. \tag{9}$$

15. Allo stesso risultato si può giungere applicando la trasformazione (7) del § 1.

Per la (1) si ha infatti

$$\sqrt[4]{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\sqrt{a \pm \sqrt{b}}} = \sqrt{\sqrt{\frac{a+h^2}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-h^2}{2}}},$$

e quindi per la (2)

$$\sqrt[4]{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{k \pm \sqrt{\frac{a-h^2}{2}}}. \tag{10}$$

Tenuto conto ancora della (2), risulta

$$k^2 - \frac{a-h^2}{2} = h^2,$$

quindi il radicale che comparisce nel 2° membro della (10) si può decomporre nella somma di due radicali semplici, e si ottiene:

$$\sqrt[4]{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{k+h}{2}} \pm \sqrt{\frac{k-h}{2}}. \tag{11}$$

Esempio numerico. — Supposto $a = 14$, $b = 180$, $h = 2$, $k = 3$, risultano verificate le relazioni (1) e (2); dalla (11) si ha quindi

$$\sqrt[4]{14 \pm 6\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{10} \pm \sqrt{2}\right].$$

16. Teorema II. — *Il radicale* $\sqrt[4]{a \pm \sqrt{b}}$, *in cui le quantità* a *e* b *sono razionali, si può trasformare nella somma di due radici quarte di quantità razionali, se risultano soddisfatte le seguenti condizioni:*

1ª. *La differenza* $a^2 - b$ *sia un quadrato perfetto* h^2, *sia cioè*

$$a^2 - b = h^2. \tag{12}$$

2ª. *La quantità* $\frac{h}{2}(a+h)$ *sia pure un quadrato perfetto* k^2, *sia cioè*

$$\frac{h}{2}(a+h) = k^2. \tag{13}$$

Si ha, infatti, tenuto conto della (12),

$$\sqrt[4]{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\sqrt{\frac{a+h}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-h}{2}}}. \tag{14}$$

È facile inoltre verificare che la relazione (13) si può scrivere

$$\frac{a+h}{2}\left[\frac{a+h}{2} - \frac{a-h}{2}\right] = k^2;$$

quindi al radicale che comparisce nel secondo membro della (14) si può applicare la trasformazione (6) del § 1; si ottiene allora, fatte le opportune riduzioni

$$\sqrt[4]{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt[4]{\frac{a+3h+4k}{8}} \pm \sqrt[4]{\frac{a+3h-4k}{8}}, \tag{15}$$

come volevasi dimostrare.

Osservazione. — Tenuto conto della (13), risultano vere le seguenti uguaglianze

$$a+3h+4k = \frac{2(k+h)^2}{h}, \qquad a+3h-4k = \frac{2(k-h)^2}{h};$$

quindi la (15) si può scrivere

$$\sqrt[4]{a \pm \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt[4]{4h}}\left[\sqrt{k+h} \pm \sqrt{k-h}\right]. \tag{16}$$

Esempio numerico. — Supposto $a=7$, $b=45$, $h=2$, $k=3$, risultano verificate le relazioni (12) e (13); dalla (15) si ha quindi

$$\sqrt[4]{7 \pm 3\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\left[\sqrt[4]{50} \pm \sqrt[4]{2}\right];$$

oppure dalla (16) si ricava

$$\sqrt[4]{7 \pm 3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt[4]{8}}\left[\sqrt{5} \pm 1\right].$$

17. Teorema III. — *Il radicale* $\sqrt[4]{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, *in cui* a *e* b *sono quantità razionali, si può trasformare nel prodotto di una radice ottava di quantità razionale per la somma di due radicali semplici, se risultano soddisfatte le seguenti condizioni:*

1ª. *Il prodotto* $a(a-b)$ *sia la quarta potenza di una quantità razionale* h, *sia cioè*

$$a(a-b)=h^4. \tag{17}$$

2ª. *La quantità* $\frac{a+h^2}{2}$ *sia un quadrato perfetto* k^2, *sia cioè*

$$\frac{a+h^2}{2}=k^2. \tag{18}$$

Considerando sempre di ogni radicale il solo segno positivo, si ha infatti

$$\sqrt[4]{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt[8]{a}}\sqrt[4]{a \pm \sqrt{ab}}. \tag{19}$$

Ma, acciocchè al radicale $\sqrt[4]{a \pm \sqrt{ab}}$ si possa applicare il teorema I, è necessario che risultino verificate le relazioni analoghe alle (1) e (2), che risultino cioè verificate le seguenti relazioni:

$$a^2-ab=h^4, \qquad \frac{a+h^2}{2}=k^2,$$

che sono identiche alle (17) e (18). Dalle (8) e (9) si ha quindi

$$\sqrt[4]{a \pm \sqrt{ab}}=\sqrt{\frac{k+h}{2}} \pm \sqrt{\frac{k-h}{2}};$$

e perciò risulta

$$\sqrt[4]{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt[8]{a}}\left[\sqrt{\frac{k+h}{2}} \pm \sqrt{\frac{k-h}{2}}\right], \tag{20}$$

come volevasi dimostrare.

Esempio numerico. — Supposto $a=14$, $b=\frac{90}{7}$, $h=2$, $k=3$, risultano verificate le relazioni (17) e (18); dalla (20) si ottiene quindi

$$\sqrt[4]{\sqrt{14} \pm \tfrac{3}{7}\sqrt{70}}=\frac{1}{2\sqrt[8]{14}}\left[\sqrt{10} \pm \sqrt{2}\right].$$

18. Teorema IV. — *Il radicale* $\sqrt[4]{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, *in cui le quantità* a *e* b *sono razionali, si può trasformare nel prodotto di una radice ottava per una radice quarta e per la somma di due radici quadrate di quantità razionali, se risultano soddisfatte le seguenti condizioni:*

1ª. *Il prodotto* a (a — b) *sia un quadrato perfetto* h², *sia cioè*

$$a(a-b)=h^2. \tag{21}$$

2ª. *La quantità* $\frac{h}{2}$ (a + h) *sia pure un quadrato perfetto* k², *sia cioè*

$$\frac{h}{2}(a+h)=k^2. \tag{22}$$

Considerando di ogni radicale il solo segno positivo, si ha

$$\sqrt[4]{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt[8]{a}}\sqrt[4]{a\pm\sqrt{ab}}. \tag{23}$$

Ma, acciocchè al radicale $\sqrt[4]{a\pm\sqrt{ab}}$ si possa applicare il teorema II, è necessario che risultino verificate le relazioni analoghe alle (12) e (13), che risultino cioè verificate le

$$a^2-ab=h^2,\qquad \frac{h}{2}(a+h)=k^2,$$

che sono identiche alle (21) e (22). Dalla (16) si ha quindi

$$\sqrt[4]{a\pm\sqrt{ab}}=\frac{1}{\sqrt[4]{4h}}\left[\sqrt{k+h}\pm\sqrt{k-h}\right],$$

e perciò dalla (23) risulta

$$\sqrt[4]{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt[8]{a}\,\sqrt[4]{4h}}\left[\sqrt{k+h}\pm\sqrt{k-h}\right], \tag{24}$$

come volevasi dimostrare.

Esempio numerico. — Supposto $a=343$, $b=315$, $h=98$, $k=147$, risultano verificate le relazioni (21) e (22); dalla (24) si ha quindi

$$\sqrt[4]{\sqrt{343}\pm\sqrt{315}}=\frac{7}{\sqrt[8]{343}\,\sqrt[4]{392}}\left[\sqrt{5}\pm1\right].$$

19. È chiaro che i teoremi I, II, III e IV del § 3 si possono applicare alle radici delle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x^8+px^4+q&=0\\ x^8+\sqrt{p}\,x^4+q&=0 \end{aligned} \tag{25}$$

in cui le quantità p e q sono razionali.

Lascio al lettore la cura di fare degli esempi numerici.

20. Teorema V. — *Il radicale*

$$\theta=\sqrt[4]{\sqrt{a_1}\pm\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_{2^n-1}}\pm\sqrt{a_{2^n}}} \tag{26}$$

in cui le quantità a *sono tutte razionali, si può trasformare nel prodotto di una radice ottava di quantità razionale per la somma di* 2^n *radicali semplici, se risultano verificate le seguenti condizioni:*

1^a. *Le quantità* a *siano legate dalle relazioni* (19) *del* § 1.

2^a. *I prodotti* $a_1(a_1 - a_i)$, *in cui l'indice* i *assume i valori* (21) *del* § 1, *siano quarte potenze di quantità razionali, siano cioè*

$$a_1(a_1 - a_2) = h_1^4 \quad a_1(a_1 - a_3) = h_2^4 \;\ldots\; a_1(a_1 - a_{2^{n-1}+1}) = h_n^4. \quad (27)$$

3^a. *Le quantità* $\frac{a_1 + h^2}{2}$ *siano dei quadrati perfetti, siano cioè*

$$\frac{a_1 + h_1^2}{2} = k_1^2 \qquad \frac{a_1 + h_2^2}{2} = k_2^2 \;\ldots\; \frac{a_1 + h_n^2}{2} = k_n^2. \quad (28)$$

Infatti, tenuto conto della prima condizione imposta alle quantità a, e ricordando quanto è stato esposto al n. 5, si ricava che il radicale (26) si può scrivere:

$$\theta = \frac{1}{\sqrt[8]{a_1^{n-1}}} \sqrt[4]{\sqrt{a_1} \pm \sqrt{a_2}}\, \sqrt[4]{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_3}}\, \sqrt[4]{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_5}} \ldots \sqrt[4]{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{2^{n-1}+1}}}. \quad (29)$$

A ciascuno dei radicali della forma $\sqrt[4]{\sqrt{a_1} \pm \sqrt{a_i}}$ che compariscono nel secondo membro della (29), tenuto conto delle relazioni (27) e (28), si può applicare la trasformazione (20); si ha quindi, fatte le opportune riduzioni,

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{2^n}\sqrt[8]{a_1^{3n-1}}} (\sqrt{k_1 + h_1} \pm \sqrt{k_1 - h_1})(\sqrt{k_2 + h_2} + \sqrt{k_2 - h_2}) \ldots$$
$$\ldots (\sqrt{k_n + h_n} + \sqrt{k_n - h_n}), \quad (30)$$

che dimostra il teorema.

21. Così per esempio, nel caso particolare di $n = 2$, le relazioni (19) del § 1, le (27) e (28) del § 3 diventano:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_4}{a_3}, \quad a_1(a_1 - a_2) = h_1^4, \quad a_1(a_1 - a_3) = h_2^4,$$
$$\frac{a_1 + h_1^2}{2} = k_1^2, \qquad \frac{a_1 + h_2^2}{2} = k_2^2,$$

e dalla (30) si ricava

$$\sqrt[4]{\sqrt{a_1} \pm \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} \pm \sqrt{a_4}} = \frac{1}{2\sqrt[8]{a_1^3}} \left[\sqrt{(k_1+h_1)(k_2+h_2)} \pm \sqrt{(k_1-h_1)(k_2+h_2)} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{(k_1 + h_1)(k_2 - h_2)} \pm \sqrt{(k_1 + h_1)(k_2 - h_2)}\right]. \quad (31)$$

22. Applicando la trasformazione (24), e con un procedimento analogo a quello precedente, si può dimostrare il seguente:

TEOREMA VI. — *Il radicale*

$$\rho = \sqrt[4]{\sqrt{a_1} \pm \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_{2^n-1}} \pm \sqrt{a_{2^n}}}\,, \tag{32}$$

in cui le quantità a *sono tutte razionali, si può trasformare nel prodotto di una radice ottava, per una radice quarta, e per la somma di* 2^n *radici quadrate di quantità razionali, se risultano soddisfatte le seguenti condizioni:*

1ª. *Le quantità* a *siano legate dalle relazioni* (19) *del* § 1.

2ª. *I prodotti* $a_1 (a_1 - a_i)$, *in cui l'indice* i *assume i valori* (21) del § 1, *siano dei quadrati perfetti, siano cioè:*

$$a_1 (a_1 - a_2) = h_1^2 \quad a_1 (a_1 - a_3) = h_2^2 \ldots a_1 (a_1 - a_{2^{n-1}-1}) = h_n^2. \tag{33}$$

3ª. *Le quantità* $\dfrac{(a_1 + h)\,h}{2}$ *siano dei quadrati perfetti, siano cioè:*

$$\frac{(a_1 + h_1)\,h_1}{2} = k_1^2 \qquad \frac{(a_1 + h_2)\,h_2}{2} = k_2^2 \ldots \frac{(a_1 + h_n)\,h_n}{2} = k_n^2. \tag{34}$$

Il risultato al quale si giunge è il seguente:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt[8]{a_1^{2n-1}}\,\sqrt[4]{4^n h_1 h_2 \ldots h_n}} \Big[(\sqrt{k_1 + h_1} \pm \sqrt{k_1 - h_1})(\sqrt{k_2 + h_2} + \sqrt{k_2 - h_2}) \ldots$$
$$\ldots (\sqrt{k_n + h_n} + \sqrt{k_n - h_n})\Big]. \tag{35}$$

ESEMPIO NUMERICO. — Supposto

$$a_1 = 343 \qquad a_2 = 336 \qquad a_3 = 315 \qquad a_4 = \frac{2160}{7}$$
$$h_1 = 49 \qquad h_2 = 98 \qquad k_1 = 98 \qquad k_2 = 147,$$

applicando il teorema precedente, si ha

$$\sqrt[4]{7\sqrt{7} \pm 4\sqrt{21} + 3\sqrt{35} \pm \frac{12}{7}\sqrt{105}} = \frac{1}{2\sqrt[8]{7}\,\sqrt[4]{2}}\left[\sqrt{15} \pm \sqrt{5} + \sqrt{3} + 1\right]. \tag{36}$$

23. TEOREMA VII. — *Il radicale*

$$\gamma = \sqrt[4]{a_1 \pm \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_{2^n-1}} \pm \sqrt{a_{2^n}}} \tag{37}$$

in cui le quantità a *sono tutte razionali, si può trasformare nel prodotto di una radice quarta di quantità razionale per la somma di* 2^n *radicali semplici, se risultano verificate le seguenti condizioni:*

1ª. *Le quantità* a *siano legate dalle relazioni* (31) *del* § 1.

2ª. *Le differenze* $a_1^2 - a_i$, *in cui l'indice* i *assume i valori* (21) *del* § 1, *siano dei quadrati perfetti, siano cioè:*

$$a_1^2 - a_2 = h_1^2 \qquad a_1^2 - a_3 = h_2^2 \ldots a_1^2 - a_{2^{n-1}-1} = h_n^2. \tag{38}$$

3ª. *Le quantità* $\frac{(a_1+h)h}{2}$ *siano pure dei quadrati perfetti, siano cioè:*

$$\frac{(a_1+h_1)h_1}{2}=k_1^2 \qquad \frac{(a_1+h_2)h_2}{2}=k_2^2 \ldots \frac{(a_1+h_n)h_n}{2}=k_n^2. \qquad (39)$$

Osserviamo prima di tutto che, considerando di ogni radicale il solo segno positivo, si ha

$$\gamma=\sqrt[3]{a_1}\sqrt[4]{\sqrt{a_1}\pm\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\cdots+\sqrt{\frac{a_{2^n-1}}{a_1}}\pm\sqrt{\frac{a_{2^n}}{a_1}}}. \qquad (40)$$

Acciocchè al radicale

$$\gamma_1=\sqrt[4]{\sqrt{a_1}\pm\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\cdots+\sqrt{\frac{a_{2^n-1}}{a_1}}\pm\sqrt{\frac{a_{2^n}}{a_1}}}$$

si possa applicare il teorema precedente, è necessario che risultino verificate le seguenti relazioni:

$$\frac{\frac{a_2}{a_1}}{a_1}=\frac{\frac{a_4}{a_1}}{\frac{a_3}{a_1}}=\ldots=\frac{\frac{a_{2^n}}{a_1}}{\frac{a_{2^n-1}}{a_1}} \quad \text{ecc.}$$

$$a_1\left(a_1-\frac{a_2}{a_1}\right)=h_1^2, \quad a_1\left(a_1-\frac{a_3}{a_1}\right)=h_2^2, \ldots a_1\left(a_1-\frac{a_{2^{n-1}+1}}{a_1}\right)=h_n^2,$$

$$\frac{(a_1+h_1)h_1}{2}=k_1^2, \quad \frac{(a_1+h_2)h_2}{2}=k_2^2, \ldots \frac{(a_1+h_n)h_n}{2}=k_n^2,$$

che sono identiche alle condizioni imposte dall'enunciato del teorema alle quantità a.

Si ottiene quindi

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt[3]{a_1^{2n-1}}\sqrt[4]{4^n h_1 h_2 \ldots h_n}}\left[(\sqrt{k_1+h_1}\pm\sqrt{k_1-h_1})(\sqrt{k_2+h_2}+\sqrt{k_2-h_2})\ldots\right.$$
$$\left.\ldots(\sqrt{k_n+h_n}+\sqrt{k_n-h_n})\right]. \qquad (41)$$

Dalle (40) e (41) risulta allora

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt[4]{2^{2n}a_1^{n-1}h_1h_2\ldots h_n}}\left[(\sqrt{k_1+h_1}\pm\sqrt{k_1-h_1})(\sqrt{k_2+h_2}+\sqrt{k_2-h_2})\ldots\right.$$
$$\left.\ldots(\sqrt{k_n+h_n}+\sqrt{k_n-h_n})\right], \qquad (42)$$

che dimostra il teorema.

24. Nel caso particolare di $n=2$, le relazioni (31) del § 1, le (38) e (39) del § 3 diventano

$$\frac{a_2}{a_1^2}=\frac{a_4}{a_3}, \quad a_1^2-a_2=h_1^2, \quad a_1^2-a_3=h_2^2$$
$$\frac{(a_1+h_1)h_1}{2}=k_1^2, \quad \frac{(a_1+h_2)h_2}{2}=k_2^2, \qquad (43)$$

e dalla (42) si ricava

$$\sqrt[4]{a_1+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}\pm\sqrt{a_4}}=\frac{1}{2\sqrt[4]{a_1h_1h_2}}\left[\sqrt{(k_1+h_1)(k_2+h_2)}\pm\sqrt{(k_1-h_1)(k_2+h_2)}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{(k_1+h_1)(k_2-h_2)}\pm\sqrt{(k_1-h_1)(k_2-h_2)}\right]. \quad (44)$$

Esempio numerico. — Supposto

$$a_1=49 \qquad a_2=2205 \qquad a_3=2352 \qquad a_4=2160$$
$$h_1=14 \qquad h_2=7 \qquad k_1=21 \qquad k_2=14,$$

risultano verificate le relazioni (43), e dalla (44) si ottiene

$$\sqrt[4]{49\pm21\sqrt{5}+28\sqrt{3}\pm12\sqrt{15}}=\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\left[\sqrt{15}\pm\sqrt{3}+\sqrt{5}\pm1\right].$$

25. Applicando il teorema V e con un procedimento analogo a quello precedente, si può dimostrare ancora il seguente

Teorema VIII. — *Il radicale*

$$\varepsilon=\sqrt[4]{a_1\pm\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_{2^n-1}}\pm\sqrt{a_{2^n}}}, \quad (45)$$

in cui le quantità a *sono tutte razionali, si può trasformare nel prodotto di una radice quarta per la somma di* 2^n *radici quadrate di quantità razionali, se risultano verificate le seguenti condizioni:*

1ª. *Le quantità* a *siano legate dalle relazioni* (31) *del* § 1.

2ª. *Le differenze* $a_1^2-a_i$, *in cui l'indice* i *assume i valori* (21) *del* § 1, *siano quarte potenze di quantità razionali, siano cioè*

$$a_1^2-a_2=h_1^4, \qquad a_1^2-a_3=h_2^4, \ldots a_1^2-a_{2^{n-1}+1}=h_n^4. \quad (46)$$

3ª. *Le quantità* $\frac{a_1+h^2}{2}$ *siano dei quadrati perfetti, siano cioè*

$$\frac{a_1+h_1^2}{2}=k_1^2, \qquad \frac{a_1+h_2^2}{2}=k_2^2,\ldots\frac{a_1+h_n^2}{2}=k_n^2. \quad (47)$$

Il risultato al quale si giunge è il seguente:

$$\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{2^n}\sqrt[4]{a_1^{n-1}}}\left[\left(\sqrt{k_1+h_1}\pm\sqrt{k_1-h_1}\right)\left(\sqrt{k_2+h_2}+\sqrt{k_2-h_2}\right)\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\left(\sqrt{k_n+h_n}+\sqrt{k_n-h_n}\right)\right]. \quad (48)$$

Lascio al lettore la cura di fare la dimostrazione.

26. Così, per esempio, nel caso particolare di $n=2$, le relazioni (31) del § 1, le (46) e (47) del § 3 diventano:

$$\frac{a_2}{a_1^2}=\frac{a_4}{a_3}, \qquad a_1^2-a_2=h_1^4, \qquad a_1^2-a_3=h_2^4,$$
$$\frac{a_1+h_1^2}{2}=k_1^2, \qquad \frac{a_1+h_2^2}{2}=k_2^2, \quad (49)$$

e dalla (48) si ricava

$$\sqrt[4]{a_1 \pm \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} \pm \sqrt{a_4}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{a_1}}\Big[\sqrt{(k_1+h_1)(k_2+h_2)} \pm \sqrt{(k_1-h_1)(k_2+h_2)} +$$
$$+ \sqrt{(k_1+h_1)(k_2-h_2)} \pm \sqrt{(k_1-h_1)(k_2-h_2)}\Big]. \qquad (50)$$

27. Come applicazione della (11) merita di essere ancora segnalato il seguente

TEOREMA IX. — *Il radicale $\sqrt[8]{a \pm \sqrt{b}}$, in cui le quantità a e b sono razionali, si può trasformare nella somma di due radici quarte di quantità razionali, se sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

1ª. *La differenza $a^2 - b$ sia la quarta potenza di una quantità razionale h, sia cioè:*

$$a^2 - b = h^4. \qquad (51)$$

2ª. *La quantità $\frac{a + h^2}{2}$ sia un quadrato perfetto k^2, sia cioè:*

$$\frac{a + h^2}{2} = k^2. \qquad (52)$$

3ª. *Il prodotto $\frac{(h + k)\,h}{2}$ sia pure un quadrato perfetto.*

Poniamo infatti

$$\frac{(h + k)\,h}{2} = q^2, \qquad (53)$$

ed osserviamo che, considerando di ogni radicale il solo segno positivo, risulta evidente la seguente uguaglianza:

$$\sqrt[8]{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\sqrt[4]{a \pm \sqrt{b}}}.$$

Ma al radicale $\sqrt[4]{a \pm \sqrt{b}}$ si può applicare la trasformazione (11), poichè le (51) e (52) sono analoghe alle (1) e (2); si ha quindi

$$\sqrt[4]{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{k+h}{2}} \pm \sqrt{\frac{k-h}{2}},$$

e perciò

$$\sqrt[8]{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\sqrt{\frac{k+h}{2}} \pm \sqrt{\frac{k-h}{2}}}. \qquad (54)$$

Acciocchè al radicale che comparisce nel secondo membro della (54) si possa applicare la trasformazione (6) del § 1, è necessario che risulti verificata una relazione analoga alla (5) dello stesso paragrafo, che risulti cioè

$$\frac{k+h}{2}\left[\frac{k+h}{2} - \frac{k-h}{2}\right] = q^2,$$

ossia

$$\frac{(h+k)\,h}{2} = q^2,$$

relazione identica alla (53). Applicando la (6) del § 1, si ha quindi

$$\sqrt[8]{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt[4]{\frac{3h+k+4q}{8}} \pm \sqrt[4]{\frac{3h+k-4q}{8}}, \tag{55}$$

come volevasi dimostrare.

Esempio numerico. — Supposto

$$a = 94, \qquad b = 8820, \qquad h = 2, \qquad k = 7, \qquad q = 3,$$

risultano verificate le relazioni (51), (52) e (53); dalla (55) si ricava quindi

$$\sqrt[8]{94 \pm 42\sqrt{5}} = \sqrt[4]{\frac{25}{8}} \pm \sqrt[4]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt[4]{8}}\left[\sqrt{5} \pm 1\right].$$

28. È superfluo osservare che il teorema precedente si può applicare alla trasformazione dei radicali

$$\sqrt[8]{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}, \qquad \sqrt[8]{a_1 \pm \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_{2^n-1}} \pm \sqrt{a_{2^n}}} \quad \text{ecc.}$$

Lascio, per brevità, al lettore la cura di fare tali applicazioni.

§ 4. — Sulla trasformazione dei radicali

$$\sqrt[3]{\sqrt{a_1} \pm \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_{m-1}} \pm \sqrt{a_m}}, \qquad \sqrt[3]{a_1 \pm \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_{m-1}} \pm \sqrt{a_m}}.$$

29. Teorema I. — *Il radicale* $\sqrt[3]{\mathrm{a} + \sqrt{\mathrm{b}}}$, *in cui le quantità* a *e* b *sono razionali, si può trasformare nella somma di una quantità razionale e di un radicale semplice, se risultano verificate le seguenti condizioni:*

1ª. *La differenza* $\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}$ *sia la terza potenza di una quantità razionale* c, *sia cioè*

$$a^2 - b = c^3. \tag{1}$$

2ª. *L'equazione*

$$4x^3 - 3cx - a = 0 \tag{2}$$

ammetta una radice razionale.

Indicando infatti con x ed y due quantità razionali, ponendo

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = x + \sqrt{y}, \tag{3}$$

ed innalzando al cubo ambo i membri della (3), si ha

$$a + \sqrt{b} = x^3 + 3x^2\sqrt{y} + 3xy + y\sqrt{y},$$

che risulta soddisfatta se si pone

$$a = x^3 + 3xy, \qquad \sqrt{b} = 3x^2\sqrt{y} + y\sqrt{y}. \tag{4}$$

Dalle (4) si ricava

$$a^2 - b = (x^2 - y)^3,$$

e quindi, tenuto conto della (1), si ottiene

$$y = x^2 - c. \tag{5}$$

Sostituendo nella prima delle (4) il valore di y dato dalla (5), si ottiene l'equazione

$$4x^3 - 3cx - a = 0. \tag{6}$$

Se questa equazione ammette una radice razionale, il valore di questa radice, sostituito nella (5), dà pure per y un valore razionale, e quindi il secondo membro della (3) risulta la somma di una quantità razionale e di un radicale semplice. (¹)

Il teorema resta così dimostrato.

Osserviamo che la (3), tenuto conto della (5), può anche scriversi

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = x + \sqrt{x^2 - c}. \tag{7}$$

In modo analogo si può dimostrare

$$\sqrt[3]{a - \sqrt{b}} = x - \sqrt{x^2 - c}. \tag{8}$$

COROLLARIO. — *Il radicale* $\sqrt[3]{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, *in cui le quantità* a *e* b *sono razionali, si può trasformare nella somma di due radicali semplici se risultano verificate le seguenti condizioni:*

1ª. *La differenza* a — b *sia la terza potenza di una quantità razionale* c, *sia cioè:*

$$a - b = c^3. \tag{9}$$

2ª. *L'equazione*

$$x(4x - 3c)^2 - a = 0 \tag{10}$$

ammetta una radice razionale.

Infatti, se al posto delle quantità a ed x poniamo rispettivamente $\sqrt{a}$ e $\sqrt{x}$, le (1) e (2) diventano

$$a - b = c^3, \qquad 4x\sqrt{x} - 3c\sqrt{x} - \sqrt{a} = 0,$$

che si possono mettere sotto la forma

$$a - b = c^3, \qquad x(4x - 3c)^2 - a = 0.$$

La (7) diventa inoltre

$$\sqrt[3]{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{x - c}, \tag{11}$$

come volevasi dimostrare.

In modo analogo si dimostrerebbe

$$\sqrt[3]{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{x - c}. \tag{12}$$

(¹) LACROIX, opera citata.

ESEMPI NUMERICI. — 1°. Supposto $a=7$, $b=50$, $c=-1$, risulta verificata la relazione (1), e l'equazione (2) ammette la radice $x=1$; quindi dalle (7) e (8) si ha

$$\sqrt[3]{7 \pm 5\sqrt{2}}=1 \pm \sqrt{2}.$$

2°. Similmente, per $a=2$, $b=-121$, $c=5$, risulta verificata la relazione (1), e la equazione (2) ammette la radice $x=2$; dalle (7) e (8) si ricava allora

$$\sqrt[3]{2 \pm 11\sqrt{-1}}=2 \pm \sqrt{-1}.$$

3°. Supposto $a=7$, $b=-722$, $c=9$, risulta verificata la relazione (9), e l'equazione (10) ammette la radice $x=7$; dalle (11) e (12) risulta quindi

$$\sqrt[3]{\sqrt{7} \pm \sqrt{-722}}=\sqrt{7} \pm \sqrt{-2}.$$

E così via di seguito.

30. TEOREMA II. — *Il radicale* $\sqrt[3]{\mathrm{a} \pm \sqrt{\mathrm{b}}}$, *in cui le quantità* a *e* b *sono razionali, si può trasformare nel prodotto di una radice sesta di quantità razionale per la somma di due radicali semplici, se risultano soddisfatte le seguenti condizioni:*

1ª. *La quantità* $\frac{\mathrm{a}^2-\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$ *sia la terza potenza di una quantità razionale* c, *sia cioè*

$$\frac{a^2-b}{a}=c^3. \tag{13}$$

2ª. *L'equazione*

$$x(4x-3c)^2-a=0 \tag{14}$$

ammetta una radice razionale.

È evidente, infatti, la seguente uguaglianza

$$\sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}}=\sqrt[6]{a}\sqrt[3]{\sqrt{a} \pm \sqrt{\frac{b}{a}}}. \tag{15}$$

Per il corollario del teorema precedente, acciocchè il radicale $\sqrt[3]{\sqrt{a} \pm \sqrt{\frac{b}{a}}}$ si possa trasformare nella somma di due radicali semplici è necessario che risultino verificate le seguenti condizioni:

1ª. La differenza $a-\frac{b}{a}$ sia la terza potenza di una quantità razionale c, sia cioè

$$a-\frac{b}{a}=c^3. \tag{16}$$

2ª. L'equazione

$$x(4x-3c)^2-a=0 \tag{17}$$

ammetta una radice razionale.

Le (16) e (17) sono identiche alle (13) e (14), quindi dalle (11) e (12) si ottiene

$$\sqrt[3]{\sqrt{a} \pm \sqrt{\frac{b}{a}}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{x-c}, \tag{18}$$

e perciò dalle (15) e (18) risulta

$$\sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt[6]{a}\,\left[\sqrt{x} \pm \sqrt{x-c}\right], \tag{19}$$

come volevasi dimostrare.

Esempio numerico. — Supposto $a=7$, $b=-5054$, $c=9$, risulta verificata la (13), e l'equazione (14) ammette la radice $x=7$; dalla (19) risulta quindi

$$\sqrt[3]{7 \pm \sqrt{-5054}} = \sqrt[6]{7}\,\left[\sqrt{7} \pm \sqrt{-2}\right].$$

31. Teorema III. — *Il radicale*

$$\lambda = \sqrt[3]{\sqrt{a_1} \pm \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_{2^n-1}} \pm \sqrt{a_{2^n}}}, \tag{20}$$

in cui le quantità **a** *sono tutte razionali, si può trasformare nel prodotto di una radice sesta di quantità razionale per la somma di* 2^n *radicali semplici, se risultano soddisfatte le seguenti condizioni:*

1ª. *Le quantità* **a** *siano legate dalle relazioni* (19) *del* § 1.

2ª. *Le differenze* $a_1 - a_i$, *in cui l'indice* i *assume i valori* (21) del § 1, *siano terze potenze di quantità razionali, siano cioè*

$$a_1 - a_2 = c_1^3, \qquad a_1 - a_3 = c_2^3, \ \ldots \ a_1 - a_{2^{n-1}+1} = c_n^3. \tag{21}$$

3ª. *Le equazioni*

$$x_1(4x_1-3c_1)^2-a_1=0, \quad x_2(4x_2-3c_2)^2-a_1=0, \ldots x_n(4x_n-3c_n)^2-a_1=0 \tag{22}$$

ammettano ciascuna una radice razionale.

Per la prima condizione imposta alla quantità a, e tenuto conto di quanto è stato detto al n. 5, il radicale (20) si può scrivere

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt[6]{a_1^{n-1}}} \sqrt[3]{\sqrt{a_1} \pm \sqrt{a_2}}\,\sqrt[3]{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_3}} \ldots \sqrt[3]{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{2^{n-1}+1}}}. \tag{23}$$

A ciascuno dei radicali della forma $\sqrt[3]{\sqrt{a_1} \pm \sqrt{a_i}}$ che compariscono nel secondo membro della (23), tenuto conto della 2ª e 3ª condizione imposta alle quantità a, si può applicare il corollario del teor. I; si ha quindi

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\sqrt{a_1} \pm \sqrt{a_2}} &= \sqrt{x_1} \pm \sqrt{x_1 - c_1} \\ \sqrt[3]{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_3}} &= \sqrt{x_2} + \sqrt{x_2 - c_2} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \sqrt[3]{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{2^{n-1}+1}}} &= \sqrt{x_n} + \sqrt{x_n - c_n}. \end{aligned} \tag{24}$$

Dalle (23) e (24) risulta allora

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt[6]{a_1^{n-1}}} \left[\left(\sqrt{x_1} \pm \sqrt{x_1 - c_1}\right) \left(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_2 - c_2}\right) \ldots \left(\sqrt{x_n} + \sqrt{x_n - c_n}\right) \right], \quad (25)$$

che dimostra il teorema.

È importante osservare che, *per determinati valori di* n, *il radicale* (20) *può anche trasformarsi nella somma di* 2^n *radicali semplici, o nel prodotto di una radice cubica di quantità razionale per la somma di* 2^n *radicali semplici, come risulta molto facilmente dalla* (25).

32. Così, per esempio, nel caso particolare di $n = 2$, le (19) del § 1, le (21) e (22) del § 4 diventano

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_4}{a_3}, \qquad a_1 - a_2 = c_1^3, \qquad a_1 - a_3 = c_2^3, \quad (26)$$

$$x_1 (4x_1 - 3c_1)^2 - a_1 = 0, \qquad x_2 (4x_2 - 3c_2)^2 - a_1 = 0, \quad (27)$$

e dalla (25) si ricava

$$\sqrt[3]{\sqrt{a_1} \pm \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} \pm \sqrt{a_4}} = \frac{1}{\sqrt[6]{a_1}} \left[\sqrt{x_1 x_2} \pm \sqrt{x_2 (x_1 - c_1)} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{x_1 (x_2 - c_2)} \pm \sqrt{(x_1 - c_1)(x_2 - c_2)} \right]. \quad (28)$$

Esempio numerico. — Supposto

$$a_1 = 7, \qquad a_2 = -722, \qquad a_3 = \frac{64}{27}, \qquad a_4 = -\frac{46208}{189},$$
$$c_1 = 9, \qquad c_2 = \frac{5}{3},$$

risultano soddisfatte le relazioni (26), e le equazioni (27) ammettono le radici

$$x_1 = 7, \qquad x_2 = \frac{7}{4},$$

quindi dalla (28) si ottiene

$$\sqrt[3]{\sqrt{7} \pm \sqrt{-722} + \frac{8}{9}\sqrt{3} \pm \frac{8}{63}\sqrt{-15162}} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt[6]{7}} \left[7 \pm \sqrt{-14} + \sqrt{\frac{7}{3}} \pm \sqrt{-\frac{2}{3}} \right]$$

33. Teorema IV. — *Il radicale*

$$\mu = \sqrt[3]{a_1 \pm \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_{2^n - 1}} \pm \sqrt{a_{2^n}}}, \quad (29)$$

in cui le quantità a *sono tutte razionali, si può trasformare nel prodotto di una radice sesta di quantità razionale per la somma di* 2^n *radicali semplici, se risultano soddisfatte le seguenti condizioni:*

1ª. *Le quantità* a *siano legate dalle relazioni* (31) *del* § 1.

2ª. *Le quantità* $\frac{a_1^2 - a_i}{a_1}$, *in cui l'indice* i *assume i valori* (21) del § 1, *siano terze potenze di quantità razionali* c, *siano cioè:*

$$\frac{a_1^2 - a_2}{a_1} = c_1^3, \quad \frac{a_1^2 - a_3}{a_1} = c_2^3, \ldots \frac{a_1^2 - a_{2^{n-1}+1}}{a_1} = c^3_n. \qquad (30)$$

3ª. *Le equazioni*

$$x_1(4x_1 - 3c_1)^2 - a_1 = 0, \qquad x_2(4x_2 - 3c_2)^2 - a_1 = 0, \ldots$$
$$\ldots x_n(4x_n - 3c_n)^2 - a_1 = 0, \qquad (31)$$

ammettano ciascuna una radice razionale.

È evidente infatti la seguente uguaglianza

$$\mu = \sqrt[6]{a_1}\sqrt[3]{\sqrt{a_1} \pm \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} + \ldots + \sqrt{\frac{a_{2^n-1}}{a_1}} \pm \sqrt{\frac{a_{2^n}}{a_1}}}. \qquad (32)$$

Tenuto conto di tutte le condizioni imposte alle quantità a, è facile osservare che al radicale

$$\mu_1 = \sqrt[3]{\sqrt{a_1} \pm \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} + \ldots + \sqrt{\frac{a_{2^n-1}}{a_1}} \pm \sqrt{\frac{a_{2^n}}{a_1}}}$$

si può applicare il teorema precedente; si ha quindi dalla (25)

$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt[6]{a_1^{n-1}}}\left[(\sqrt{x_1} \pm \sqrt{x_1 - c_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_2 - c_2}) \ldots (\sqrt{x_n} + \sqrt{x_n - c_n})\right], \quad (33)$$

e quindi dalle (32) e (33) risulta

$$\mu = \frac{1}{\sqrt[6]{a_1^{n-3}}}\left[(\sqrt{x_1} \pm \sqrt{x_1 - c_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_2 - c_2}) \ldots (\sqrt{x_n} + \sqrt{x_n - c_n})\right], \quad (34)$$

come volevasi dimostrare.

È importante osservare che *per determinati valori di* n, *il radicale* (29) *può anche trasformarsi nella somma di* 2^n *radicali semplici, o nel prodotto di una radice terza di quantità razionale per la somma di* 2^n *radicali semplici*, come risulta molto facilmente dalla (34).

34. Così, per esempio, nel caso particolare di $n = 2$, le (31) del § 1, le (30) e (31) di questo paragrafo diventano

$$\frac{a_2}{a_1^2} = \frac{a_4}{a_3}, \qquad \frac{a_1^2 - a_2}{a_1} = c_1^3, \qquad \frac{a_1^2 - a_3}{a_1} = c_2^3, \qquad (35)$$

$$x_1(4x_1 - 3c_1)^2 - a_1 = 0, \qquad x_2(4x_2 - 3c_2)^2 - a_1 = 0, \qquad (36)$$

e dalla (34) si ricava

$$\sqrt[3]{\sqrt{a_1} \pm \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} \pm \sqrt{a_4}} = \sqrt{x_1 x_2} \pm \sqrt{x_2(x_1 - c_1)} +$$
$$+ \sqrt{x_1(x_2 - c_2)} \pm \sqrt{(x_1 - c_1)(x_2 - c_2)}. \quad (37)$$

ESEMPIO NUMERICO. — Supposto

$a_1 = 108, \quad a_2 = 10800, \quad a_3 = 14580, \quad a_4 = 13500, \quad c_1 = 2, \quad c_2 = -3,$

risultano soddisfatte le relazioni (35), e le equazioni (36) ammettono le radici $x_1 = 3$ $x_2 = \frac{3}{4}$; quindi dalla (37) si ottiene

$$\sqrt[3]{108 \pm 60\sqrt{3} + 54\sqrt{5} \pm 30\sqrt{15}} = \frac{1}{2}\left[3 \pm \sqrt{3} + 3\sqrt{5} \pm \sqrt{15}\right].$$

35. È facile osservare che tutti i teoremi dimostrati sono fecondi di numerose applicazioni: essi, combinati convenientemente, possono risolvere, in molti casi, il problema della trasformazione dei radicali sovrapposti.

SALVATORE COMPOSTO.

DELLA CURVA DI ALLINEAMENTO SOPRA LA SUPERFICIE TERRESTRE

1. In talune ricerche geodetiche è mestieri considerare una particolare curva sopra la superficie (matematica) terrestre, detta *curva di allineamento.*

Per *curva di allineamento* su una superficie, definita da due punti A, B di questa, si intende, com'è noto, il luogo dei punti (della superficie) tali che le normali a questa, in essi, incontrino tutte la retta AB. Così evidentemente tale curva di allineamento si può anche definire come la curva (appartenente alla superficie considerata) tale che fra i piani normali alla superficie stessa, in ciascuno de' suoi punti, ve ne sia sempre uno, il quale contenga pure gli accennati due punti A, B.

Si può affermare, che l'importanza che la curva in parola ha nella Geodesia risiede in questo che, in molte ricerche, delle quali si occupa questa scienza, è mestieri considerare, in luogo dell'arco geodetico (della superficie matematica terrestre), avente per estremi due punti A, B, l'arco di curva di allineamento limitato dagli stessi estremi, i quali siano di più i punti che individuano questa seconda curva. La necessità di siffatta sostituzione di una linea all'altra si presenta particolarmente allorchè si tratta di misurare una base geodetica.

Pertanto si riconobbe da tempo come occorresse sottoporre la curva di allineamento ad uno studio che essenzialmente fosse diretto a valutare gli scostamenti fra un arco di tale curva, particolarmente di quello compreso fra i due punti che la definiscono, e l'arco geodetico avente i medesimi estremi.

Intorno a tale argomento furono eseguite ricerche da varii autori. Taluni [1] posero a base dello studio che fecero della curva di allineamento, definita da due punti A, B, il confronto con una delle due sezioni normali reciproche della superficie considerata, determinate rispettivamente dalla normale nell'uno dei punti A, B alla superficie e dall'altro di detti punti. [2] Altri, e in particolare il Pucci, [3] come anche il Buchholtz, [4] fecero un calcolo diretto di confronto fra curva di allineamento e geodetica definite dai medesimi estremi.

Tutte queste ricerche portarono, come è noto, alla conclusione che, dati i limiti entro i quali, oltre ad essere comprese le lunghezze delle basi geodetiche sino ad ora considerate, è presumibile siano in generale comprese quelli delle basi che i mezzi di cui attualmente dispone la scienza permetteranno di studiare, si possa, senza errore apprezzabile, ritenere la lunghezza di una base misurata lungo una curva di allineamento come identica a quella dell'arco geodetico avente i medesimi estremi. Quanto meno la differenza fra le lunghezze di tali archi è di gran lunga inferiore agli errori di osservazione relativi alla effettiva misura di una base. Le ricerche stesse ebbero per altro di mira, quasi esclusivamente, il confronto fra le lunghezze degli archi di curva di allineamento e di geodetica aventi gli stessi estremi.

Se non che, nel predisporre la trattazione della curva di allineamento che intendevo svolgere nel Corso di Geodesia teoretica (nella R. Università di Pavia), mi venne fatto di osservare come l'equazione stessa della curva di allineamento, in coordinate cartesiane ortogonali, data dal Pucci, nell'opera citata, permetta di compiere facilmente uno studio rapido e semplice della curva di allineamento, fondato sul diretto confronto di questa linea con la geodetica, studio che verrebbe quasi ad integrare quello stesso del Pucci, ponendo in rilievo principalmente l'andamento di una curva di allineamento definita da due punti A, B rispetto alla geodetica definita dagli stessi punti. Tale studio feci ponendo in relazione l'equazione del Pucci con gli sviluppi di Puiseux-Weingarten, i quali, come è noto, costituiscono un valido ed importantissimo strumento per la trattazione, in

---

(1) Senza indugiarci a fare citazioni bibliografiche relative ai lavori dedicati a queste ricerche, rimandiamo, per tale oggetto, alla monografia del prof. PIZZETTI: *Höhere Geodäsie*, costituente il fascicolo 3° della 1ª parte del vol. VI della *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* (§ 25). Lipsia, 1907. Solo però dobbiamo far notare come alle opere citate dal Pizzetti vada aggiunta quella recentissima del BUCHHOLTZ, *Das Mechanische Potential, nach Vorles.*en *von L. Boltzmann bearbeitet, und die Theorie der Figur der Erde*. Lipsia, 1908.

(2) Nel seguito designeremo brevemente due sezioni normali siffatte come " sezioni normali reciproche definite dai due punti considerati ".

(3) V. PUCCI, *Fondamenti di Geodesia*. Vol. I, cap. IV, n. 15. Milano, 1883.

(4) Il Buchholtz, nell'opera citata nella nota 1 a piè di pag. 1, dopo avere studiata minutamente una curva di allineamento AB sopra la superficie matematica terrestre, supposta foggiata a ellissoide di rivoluzione, fondando il suo studio sul confronto fra la citata curva e le sezioni normali (della superficie stessa) definite dagli stessi punti, ritorna più innanzi sull'argomento indicando per sommi capi come si calcoli la differenza fra le lunghezze rispettive di un arco di curva di allineamento e l'arco geodetico limitati dagli stessi punti.

una forma strettamente matematica ed elegante, di molteplici questioni di Geodesia.

All'esposizione dello studio in parola è dedicata la presente nota, la quale, in sostanza, contiene, con l'aggiunta soltanto di alcune considerazioni di indole generale, quanto forma l'argomento delle lezioni che dedico all'esame teorico della curva di allineamento. D'altra parte uno studio dettagliato della curva di allineamento mi sembra giustificato eziandio dal fatto che attualmente uno degli obbiettivi, ai quali sono indirizzati gli sforzi dei Geodeti è anche quello di perfezionare i metodi e gli strumenti di misura, in guisa da poter determinare direttamente la lunghezza di basi sempre maggiori.

In sostanza mi limito a trattare diffusamente la curva di allineamento su un ellissoide di rivoluzione che abbia le dimensioni caratteristiche di quelli (per non parlare, in modo speciale, dell'ellissoide di Bessel) sui quali comunemente si eseguiscono ed ai quali si riducono i calcoli geodetici.

Ogniqualvolta poi parlerò di grandezze misurate, intenderò naturalmente di riferirmi a misure eseguite sì sopra la superficie terrestre, ma già ridotte al considerato ellissoide.

E vengo a determinare in primo luogo la differenza fra gli azimut geodetici relativi ad uno degli estremi A, B, che definiscono la curva di allineamento, come pure lo scostamento lineare, di due punti situati ad uguale distanza geodetica dall'estremo considerato (A o B) l'uno sulla curva di allineamento, l'altro sulla geodetica definita dagli stessi A, B.

Una discussione delle formule che esprimono questi elementi mi conduce a caratterizzare, come sopra fu detto, l'andamento dell'arco di curva di allineamento AB rispetto alla geodetica definita essa pure da A, B. Le predette formule sono già note; (¹) il procedimento col quale le ottengo è però, a quanto so, nuovo. Intorno al calcolo della differenza fra le lunghezze rispettive degli archi considerati, calcolo fatto in base alle accennate formule, mi limito a un cenno sommario, trattandosi di cosa già nota. (²)

Tutti i calcoli che seguono sono, bene inteso, limitati a quell'approssimazione che è propria degli ordinari calcoli geodetici. Però il metodo col quale qui sono condotti è suscettibile, senza che si incontri alcuna difficoltà sostanziale, di essere esteso in guisa da poter essere applicato ad ipotesi più generali. Così esso può, con tutta facilità, essere usato in casi, in cui si richieda di spingere i calcoli ad una approssimazione maggiore di quella indicata.

Di più le relazioni, che vengono stabilite per uno dei suaccennati ellissoidi, si possono facilmente estendere ad una superficie *sferoidica*

(¹) O più precisamente sono deducibili con la massima facilità da formule note.
(²) V. Buchholtz, loc. cit.

più generale quale quella che i risultati delle odierne ricerche di alta Geodesia indicano rappresentare il Geoide, con maggiore approssimazione di un ellissoide di rivoluzione. In tale ipotesi, i risultati delle misure eseguite sulla superficie fisica terrestre andrebbero ridotti, per essere adatti ai calcoli che seguono, all'accennata superficie sferoidica.

2. Consideriamo un ellissoide di rivoluzione: diremo a, b rispettivamente le lunghezze del suo semiasse maggiore (equatoriale) e del suo semiasse minore (polare), supponendo che la superficie in parola sia superficie di rivoluzione intorno a questo secondo asse. Sempre in base alle notazioni generalmente adottate, indicheremo con e l'eccentricità della *ellisse meridiana* dell'ellissoide considerato, cioè l'espressione $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ e designeremo con δ il rapporto $\frac{1-e^2}{e^2}$.

Siano ora A, B due punti dell'ellissoide. Consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali x, y, z con l'origine in A e l'asse delle z diretto secondo la normale in A stesso alla superficie: di più siano gli assi x, y diretti secondo le tangenti (in A) alle linee di curvatura dell'ellissoide stesso in detto punto (cioè al meridiano e al parallelo, poichè si tratta di una superficie di rivoluzione). Per fissare le idee assumiamo come asse delle x la tangente (in A) al meridiano del punto stesso. Siano x_1, y_1, z_1 le coordinate di B rispetto a questo sistema.

Dette p, q le derivate parziali di z rispetto a x, y quali si deducono dall'equazione della superficie in parola, la condizione necessaria e sufficiente a che un generico punto P della superficie stessa, del quale diremo x, y, z le coordinate nel sistema assunto, appartenga alla curva di allineamento definita (nel modo indicato nel § 1) da A, B fu dal Pucci posta sotto la forma

$$x_1y - xy_1 + qzx_1 - pzy_1 + pz_1y - qz_1x = 0. \tag{1}$$

La (1) rappresenta la condizione in parola per qualunque superficie e, sotto tale aspetto, fu dedotta e considerata dal Pucci. [1] Se nella (1) stessa si considerano le coordinate x, y, z come coordinate correnti di una curva della superficie, tale curva sarà di allineamento e la (1) potrà risguardarsi come la sua equazione.

Sostituiamo ora in questa relazione a x, y, z e a x_1, y_1, z_1 le loro espressioni in serie di potenze delle lunghezze degli archi di geodetiche AP, AB fornite dagli sviluppi di Puiseux-Weingarten.

Del pari a p, q sostituiremo le loro espressioni in funzione delle coordinate polari geodetiche rispetto al *polo* A, assumendo come tali naturalmente la distanza geodetica s di P da A e l'azimut α della geodetica PA in A (azimut geodetico di P rispetto ad A).

---

[1] Anzi la (1), la quale fu dal Pucci dedotta, mercè considerazioni semplicissime di Geometria analitica, ha il significato sopra esposto anche quando il sistema cartesiano ortogonale x, y, z sia soggetto all'unica limitazione di avere l'origine in A *e l'asse* z *diretto secondo la normale all'ellissoide in parola, in detto punto*. La limitazione ulteriore suindicata, relativa agli assi x, y, z fu fatta soltanto perchè essa agevola l'ulteriore trattazione dell'argomento.

In base a quanto precedentemente si disse, si presupporranno le grandezze di a, b comprese entro quei limiti, fra i quali variano le grandezze stesse che competono agli ellissoidi (di rivoluzione) che i risultati delle ricerche di Geodesia indicano come possibili superfici di riferimento per i calcoli e le operazioni pertinenti a questa scienza.

Per conseguenza, in conformità a quanto si pratica negli ordinari calcoli geodetici, gli sviluppi di Puiseux-Weingarten andranno limitati ai termini di terzo ordine inclusivamente, rispetto al rapporto delle lunghezze degli archi di geodetiche considerati a quelle dei raggi di 1ª curvatura di tali linee. A sua volta δ va, insieme con e^2, considerata come una quantità del medesimo ordine degli accennati rapporti. E naturalmente, in tutti i calcoli che seguono, andranno così trascurati i termini di ordine superiore al terzo (nel senso testè indicato). Il grado di approssimazione che si raggiunge in tal guisa è, come è noto, sufficiente in studi riflettenti archi geodetici la cui lunghezza si accosti ai 300 chilometri.

Resta poi stabilito una volta per sempre che le relazioni ed i teoremi che seguono sussistono *nell'ordine di approssimazione* che ora fu stabilito.

Gli sviluppi di Puiseux-Weingarten, per le coordinate qui considerate, di P, B, limitati nel modo indicato, sono allora, come è ben noto:

$$\begin{gathered} x = s\cos\alpha\left(1-\frac{s^2}{6R_0\rho_0}\right), \qquad y = s\,\mathrm{sen}\,\alpha\left(1-\frac{s^2}{6R_0N_0}\right), \\ z = \frac{s^2}{2R_0}\left(1-\frac{\delta s\,\mathrm{sen}\,2\varphi\cos\alpha}{2N_0}\right), \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} x_1 = s_1\cos\alpha_1\left(1-\frac{s_1^2}{6R_{01}\rho_0}\right), \qquad y_1 = s_1\,\mathrm{sen}\,\alpha_1\left(1-\frac{s_1^2}{6R_{01}N_0}\right), \\ z_1 = \frac{s_1^2}{2R_{01}}\left(1-\frac{\delta s_1\,\mathrm{sen}\,2\varphi\cos\alpha_1}{2N_0}\right), \end{gathered} \tag{3}$$

dove designino ρ_0, N_0 rispettivamente i due raggi principali di curvatura (dell'ellissoide) in A, e precisamente ρ_0 il raggio di curvatura in A del meridiano del punto stesso, N_0 la *gran normale* in detto punto, mentre designino a loro volta φ la latitudine (ellissoidica) di A e R_0, R_{01} rispettivamente i raggi di 1ª curvatura in A delle geodetiche AP, AB, designando infine s_1, α_1 la distanza geodetica AB e l'azimut geodetico di B rispetto ad A.

Per il calcolo di p, q ci varremo delle relazioni

$$\left\{\begin{aligned} p &= \frac{\dfrac{\partial z}{\partial s}\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}-\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\dfrac{\partial y}{\partial s}}{\Delta} \\ q &= \frac{\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\dfrac{\partial x}{\partial s}-\dfrac{\partial z}{\partial s}\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}}{\Delta} \end{aligned}\right. \tag{4}$$

ove si sia posto:

$$\Delta = \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial \alpha}.$$

Queste relazioni discendono dalle identità

$$\frac{\partial z}{\partial s} = p\frac{\partial x}{\partial s} + q\frac{\partial y}{\partial s}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = p\frac{\partial x}{\partial \alpha} + q\frac{\partial y}{\partial \alpha}.$$

Ora dalle (3) (sino al terz'ordine inclusivamente):

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos\alpha\left(1 - \frac{s^2}{2R_0\rho_0}\right), \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = \operatorname{sen}\alpha\left(1 - \frac{s^2}{2R_0N_0}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{s}{R_0} - 3\frac{\delta s^2 \operatorname{sen} 2\varphi \cos\alpha}{4R_0N_0},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -s\operatorname{sen}\alpha\left(1 - \frac{s^2}{6R_0\rho_0}\right) + \frac{s^3\cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha}{3\rho_0}\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{N_0}\right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = s\cos\alpha\left(1 - \frac{s^2}{6R_0N_0}\right) + \frac{s^3\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha}{3N_0}\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{N_0}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{s^2\operatorname{sen} 2\alpha}{2}\left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{\rho_0}\right)\left(1 - \frac{s\delta\operatorname{sen} 2\varphi\cos\alpha}{2N_0}\right) + \frac{\delta s^3\operatorname{sen} 2\varphi\operatorname{sen}\alpha}{4R_0N_0}.$$

Alla seconda di queste due terne di relazioni si pervenne deducendo, in particolare, la derivata: $\dfrac{\partial \frac{1}{R_0}}{\partial \alpha}$ dall'espressione:

$$\frac{\cos^2\alpha}{\rho_0} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{N_0} \text{ di } \frac{1}{R_0},$$

espressione che è fornita dalla *formula di Eulero*, per la curvatura normale delle linee di una superficie.

Dalle relazioni ora scritte segue immediatamente potersi porre:

$$\Delta = s + T_2,$$

detta T_2 una somma di termini di ordine non inferiore al secondo.

Dalle stesse relazioni è facile dedurre che:

$$\frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial \alpha} - \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial s},$$

differiscono rispettivamente da: $\dfrac{s^2\cos\alpha}{\rho_0}$, $\dfrac{s^2\operatorname{sen}\alpha}{N_0}$ di grandezze di ordine non inferiore al terzo.

Tutto questo, posto in relazione con le (4), ne permette di affermare che:

$$p = \frac{s\cos\alpha}{\rho_0} + T'_3, \qquad q = \frac{s\operatorname{sen}\alpha}{N_0} + T''_3,$$

dette T_3', T_3'' due somme di termini di ordine non inferiore al terzo.

Ora nella (1), p, q figurano sempre moltiplicate ciascuna per z o per z_1 e del pari ciascuna delle z, z_1 figura soltanto moltiplicata per p o per q. Pertanto nella (1) stessa possiamo, trascurando termini di ordine non inferiore al quarto, porre:

$$p=\frac{s\cos\alpha}{\rho_0}, \quad q=\frac{s\operatorname{sen}\alpha}{N_0}, \quad z=\frac{s^2}{2R_0}, \quad z_1=\frac{s_1^2}{2R_{01}}.$$

Sostituendo in pari tempo alle x, x_1, y, y_1 le loro espressioni offerte dalle (2) e (3) potremo porre la (1) sotto la forma:

$$ss_1\left\{\cos\alpha_1\operatorname{sen}\alpha\left(1-\frac{s_1^2}{6R_{01}\rho_0}\right)\left(1-\frac{s^2}{6R_0N_0}\right)-\right.$$
$$-\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha_1\left(1-\frac{s_1^2}{6R_{01}N_0}\right)\left(1-\frac{s^2}{6R_0\rho_0}\right)+\frac{s^2}{2N_0R_0}\cos\alpha_1\operatorname{sen}\alpha-$$
$$\left.-\frac{s^2}{2\rho_0R_0}\operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha+\frac{ss_1\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2R_{01}}\left(\frac{1}{\rho_0}-\frac{1}{N_0}\right)\right\}=0.$$

Da questa relazione, ricorrendo all'altra ben nota:

$$\frac{1}{\rho_0}-\frac{1}{N_0}=\frac{\delta\cos^2\varphi}{N_0}, \tag{5}$$

è facile, con evidenti sviluppi e soppressioni di termini di ordine superiore al terzo, pervenire alla relazione equivalente:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\alpha_1)+\frac{\operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha}{6}\left(\frac{s^2}{R_0\rho_0}+\frac{s_1^2}{R_{01}N_0}\right)-$$
$$-\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha_1}{6}\left(\frac{s^2}{R_0N_0}+\frac{s_1^2}{R_{01}\rho_0}\right)+\frac{s^2}{2R_0}\left(\frac{\cos\alpha_1\operatorname{sen}\alpha}{N_0}-\frac{\operatorname{sen}\alpha_1\cos\alpha}{\rho_0}\right)+$$
$$+\frac{\delta ss_1\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos^2\varphi}{2R_{01}N_0}=0. \tag{6}$$

La (6) può evidentemente risguardarsi come l'*equazione della curva di allineamento in coordinate polari geodetiche.*

Un primo esame di questa relazione ne mostra subito essere $\alpha-\alpha_1$ una grandezza di ordine *almeno* = al secondo. Perciò, essendo tutti i termini successivi al primo nel primo membro della (6), di ordine non inferiore al secondo, possiamo in ciascuno di essi sostituire α_1 ad α. È evidente infatti come ciò equivalga a trascurare termini di ordine almeno = al quarto. La sostituzione in parola trae poi con sè che, in base alla citata formula di Eulero, si sostituisca $\frac{1}{R_{01}}$ a $\frac{1}{R_0}$.

In tal guisa, ricorrendo altresì alla (5) e, osservando che, in virtù di quanto precede è lecito sostituire al seno di $\alpha-\alpha_1$ l'arco stesso, possiamo alla (6) dare la forma:

$$\alpha-\alpha_1=\frac{\delta}{R_{01}N_0}\left\{\frac{s_1^2-s^2}{12}+\frac{s(s-s_1)}{4}\right\}\cos^2\varphi\operatorname{sen}2\alpha_1. \tag{7}$$

La (7) darebbe dunque la formula precedentemente accennata, la quale esprime l'*azimut geodetico* α di un punto generico della curva di allineamento in funzione della sua *distanza geodetica* s *da* A, e che fornisce in pari tempo l'espressione della differenza, che diremo brevemente $\Delta\alpha$, fra gli azimut geodetici di due punti situati ad una uguale distanza geodetica s da A, l'uno sulla curva di allineamento, l'altro sulla geodetica, definite dagli stessi punti A, B.

È poi evidente essere lecito, nella (7), sostituire e^2 a δ e la grandezza designata con a a ciascuna delle R_{01}, N_0.

In Geodesia interessa ordinariamente fare il confronto fra curva di allineamento e geodetica soltanto nel tratto di tali linee compreso fra i due punti che le definiscono; e pertanto noi qui ci limiteremo a fare principalmente questo. Tuttavia è evidente come la (7) e, al pari di questa, altre formule che seguiranno possano applicarsi ancora a punti della curva di allineamento ai quali competano valori di $s > s_1$, purchè però tali valori siano compresi entro quei limiti, nei quali è sufficiente l'approssimazione con la quale sono qui condotti i calcoli.

3. Procediamo ora nell'esame della (7). Ricordiamo in primo luogo che:

$$\frac{\delta \cos^2\varphi \operatorname{sen} 2\alpha}{12\, R_{01} N_0} (s_1^2 - s^2),$$

o, per quanto precede, anche:

$$\frac{e^2 \cos^2\varphi \operatorname{sen} 2\alpha_1}{12\, a^2} (s_1^2 - s^2)$$

è l'espressione della differenza fra l'azimut geodetico (relativo ad A) del punto situato ad una distanza geodetica s da A sopra la sezione normale (dell'ellissoide considerato) definita dalla normale in A e dal punto B, e l'analogo azimut geodetico di B. (¹) Ne segue che:

$$\alpha - \alpha' = \frac{\delta s (s - s_1) \cos^2\varphi \operatorname{sen} 2\alpha_1}{4 R_{01} N_0} \tag{8}$$

rappresenta la differenza fra i rispettivi azimut geodetici α, α' dei punti nei quali la circonferenza geodetica di centro A, raggio s interseca la curva di allineamento e la suaccennata sezione normale.

Dalla circostanza che il secondo membro della (8) si annulla per $s = 0$ si deduce una nuova dimostrazione della ben nota proprietà della curva di allineamento, risultante dalla sua stessa definizione, che cioè:

(¹) V. ad es. PIZZETTI, *Trattato di Geodesia teoretica*, § 38. Bologna, 1905. Occorre appena avvertire che le formule ora in esame danno la misura degli angoli considerati *rettificati* e che una semplice divisione per il fattore ben noto arc 1″ darebbe le corrispondenti espressioni degli angoli stessi in secondi sessagesimali.

La curva di allineamento AB *è tangente in* A *alla sezione normale in parola e tangente in* B *alla sezione normale in* B *stesso, reciproca alla precedente.*

Per giungere a questa seconda conclusione bastano evidentemente considerare un sistema di coordinate polari geodetiche nel quale il *polo* fosse B, l'*asse polare* la tangente in B stesso al suo meridiano.

La (8) può poi servire di base allo studio, fatto con nuovo metodo, della curva di allineamento, fondato sul confronto fra questa e le due sezioni normali reciproche definite dagli stessi punti che individuano l'accennata curva. Si potrebbero così stabilire, per altra via, i risultati esposti nei lavori ricordati nel § 1.

Ritornando alla (7) si vede subito come le due radici dell'equazione di 2° grado in s:

$$\Delta\alpha = 0$$

siano:

$$s = s_1 \qquad s = \frac{s_1}{2}.$$

Possiamo perciò affermare che (oltre, ben s'intende, ai punti, nei quali $s = 0$, $s = s_1$):

La curva di allineamento AB *ha in comune con la geodetica corrispondente, il punto* M *situato ad uguale distanza geodetica* $\frac{s_1}{2}$ *da* A, B.

Dalla stessa (7) si vede subito come la differenza $\Delta\alpha$ abbia, finchè s è compreso fra 0 e $\frac{s_1}{2}$, il medesimo segno di sen $2\alpha_1$ mentre abbia segno opposto a questo allorchè s è compreso fra $\frac{s_1}{2}$ e s. Vale a dire:

La curva di allineamento e la geodetica in parola si attraversano nel punto M, *mentre i due tratti* AM, MB *dell'una di esse si trovano da parti opposte relativamente all'altra.*

Un rapido esame della derivata di $\Delta\alpha$ rispetto a s, derivata che manifestamente è data da:

$$\frac{d\Delta\alpha}{ds} = \frac{\delta}{R_{01}\,N_0}\left\{\frac{s}{3} - \frac{s_1}{4}\right\}\cos^2\varphi \operatorname{sen} 2\alpha_1\,, \tag{9}$$

mostra subito come il valore assoluto di $\Delta\alpha$ vada, al crescere di s, da 0 sino a $\frac{s_1}{2}$, decrescendo dal valore:

$$\frac{\delta \cos^2\varphi \operatorname{sen} 2\alpha_1}{12\,R_{01}\,N_0}\,s_1^2 \tag{10}$$

sino a zero.

Indi al crescere di s da $\frac{s_1}{2}$ sino a $\frac{3}{4}\,s_1$, il valore assoluto di $\Delta\alpha$ cresce da zero sino a:

$$\frac{\delta \cos^2\varphi \operatorname{sen} 2\alpha_1}{96\,R_{01}\,N_0}\,s_1^2.$$

Infatti dalla (7), quando: $s = \frac{3}{4} s_1$:

$$\Delta\alpha = -\frac{\delta \cos^2\varphi \operatorname{sen} 2\alpha_1}{96 R_{01} N_0}.$$

In corrispondenza all'accennato valore di s, $\Delta\alpha$ ha evidentemente un massimo (relativo al tratto MB). Infatti risulta dalla (9) che, per $s = \frac{3}{4} s_1$,

$$\frac{d\Delta\alpha}{ds} = 0,$$

mentre $\frac{d^2\Delta\alpha}{ds^2}$ è diverso da zero ed ha segno opposto a quello di $\Delta\alpha$. Indi, al crescere di s da $\frac{3}{4} s_1$ sino ad s_1, $\Delta\alpha$ va decrescendo dall'accennato massimo sino a zero.

Da queste considerazioni risulta dunque come il valore (10) che $\Delta\alpha$ assume nel punto A sia superiore ai valori (assoluti) che lo stesso $\Delta\alpha$ assume in corrispondenza a tutti gli altri punti dell'arco di curva di allineamento AB. La formula (10) è poi la ben nota espressione della differenza fra l'azimut astronomico e quello geodetico di B rispetto ad A.

È anche facile dare l'espressione dello scostamento lineare fra l'arco di curva di allineamento AB ed il corrispondente arco geodetico, misurato lungo un arco di circonferenza geodetica di centro A. Infatti la lunghezza σ dell'arco di una siffatta circonferenza (di centro A), raggio s, sarà evidentemente data da:

$$\sigma = \int_{\alpha_1}^{\alpha} \sqrt{G}\, d\alpha, \tag{11}$$

dove designi $\sqrt{G}$ la *lunghezza ridotta* [1] dell'arco s.

Ora poichè [2] $\sqrt{G}$ differisce da s di grandezze di ordine non inferiore al secondo potremo, in base agli sviluppi che precedono, porre nella (11):

$$\sqrt{G} = s,$$

ottenendo così:

$$\sigma = \sqrt{G}\ \Delta\alpha = \frac{\delta s}{4 R_{01} N_0} \left\{ \frac{s_1^2 - s^2}{3} + s(s - s_1) \right\} \cos^2\varphi \operatorname{sen} 2\alpha_1. \tag{11'}$$

Le radici dell'equazione di 3° ordine in s:

$$\sigma = 0$$

sono manifestamente:

$$0, \qquad \frac{s_1}{2}, \qquad s_1,$$

---

[1] Questa denominazione fu introdotta dal Christoffel a indicare la radice quadrata del coefficiente G nell'espressione:

$$ds^2 + G\, d\alpha^2,$$

del quadrato dell'elemento lineare di una superficie, in coordinate polari, geodetiche s, α.

[2] V. ad es. PIZZETTI, *Trattato di Geodesia teoretica*, §§ 38 e 42.

come del resto si poteva dedurre senz'altro dalle considerazioni che precedono. Procediamo ora alla ricerca dei massimi di σ (come funzione di s).

Le due radici dell'equazione di 2° grado:

$$\frac{d\sigma}{ds}=0$$

sono evidentemente

$$s=\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{12}}\right)s_1\,,\quad s=\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{12}}\right)s_1\,.$$

La considerazione della derivata seconda: $\frac{d^2\sigma}{ds^2}$ indica subito come in corrispondenza a ciascuno di questi valori di s, abbia σ un massimo. La (11') mostra che questi due massimi hanno il medesimo valore assoluto e, come risulta pure dalle considerazioni svolte precedentemente sull'andamento della curva di allineamento, segno opposto. Il loro valore assoluto è:

$$\frac{\delta \operatorname{sen} 2\alpha_1 \cos^2\varphi}{36\sqrt{12}R_{01}N_0}\,s_1^{\,2}\left(\text{o anche}\quad e^2\frac{\operatorname{sen} 2\alpha_1\cos^2\varphi}{36\sqrt{12}\,a^2}\,s_1^{\,3}\right).$$

Il limite superiore di tale massimo che sarebbe raggiunto qualora

$$\operatorname{sen} 2\alpha_1=\cos^2\varphi_1=1,$$

è:

$$\frac{e^2 s_1^{\,3}}{36\sqrt{12}\,a^2}. \tag{12}$$

Qualora ad a, e si attribuiscano i valori caratteristici dell'ellissoide di Bessel o, quanto meno, valori compresi nei limiti indicati nel § 4, la grandezza rappresentata dall'espressione (12) non raggiungerebbe il *millimetro e mezzo*, ancora quando fosse:

$$s_1=100 \text{ chilometri.}$$

Lo scostamento lineare fra curva di allineamento e arco geodetico corrispondente si manterrebbe dunque, in queste ipotesi, notevolmente inferiore agli errori di osservazione propri delle operazioni inerenti al tracciamento di una base geodetica.

La (12) ne mostra pure come:

Il valore massimo dello scostamento lineare fra un arco di curva di allineamento AB *ed il corrispondente arco geodetico sia $\frac{1}{4}$ del massimo dello scostamento analogo fra detto arco geodetico e ciascuna delle due sezioni normali reciproche definite dagli stessi punti* A, B.

Per affermare questo basta por mente alla nota espressione che rappresenta il massimo di questo secondo spostamento. [1]

---

[1] V. PIZZETTI, *Trattato di Geodesia teoretica*, ibid.

4. La (9) permette poi di calcolare, con procedimento già noto,[1] la differenza fra le distanze S, s di un generico punto P della curva di allineamento in parola, misurate rispettivamente lungo la curva stessa, o lungo la geodetica AP. Infatti, in base alla già citata espressione del quadrato dell'elemento lineare di una superficie in coordinate polari geodetiche, avremo:

$$\mathrm{S} = \int_0^s \sqrt{1 + \mathrm{G}\left(\frac{d\chi}{ds}\right)^2}\, ds$$

dove a $\frac{d\chi}{ds}$ andrà sostituita la sua espressione (9). Potremo perciò nel nostro ordine di approssimazione porre in base alla (12) e sostituendo pure a G, s^2:

$$\mathrm{S} - s = \frac{e^4 \cos^4\varphi \operatorname{sen}^2 2\chi_1}{8a^4} \int_0^s \left(\frac{4}{9}s^4 - \frac{2}{3}s^3 s_1 + \frac{s_1^2 s^2}{4}\right) ds =$$

$$= \frac{e^4 \cos^4\varphi \operatorname{sen} 2\chi_1}{8a^4} \left(\frac{4}{45}s^5 - \frac{s^4 s_1}{6} + \frac{s^3 s_1^2}{12}\right).$$

Il valore speciale $\mathrm{S}_1 - s_1$, corrispondente al punto B, della differenza: $\mathrm{S} - s$ è dunque dato da:

$$\mathrm{S}_1 - s_1 = \frac{e^4 s_1^5 \cos^4\varphi \operatorname{sen}^2 2\chi_1}{1440\, a^4}. \tag{13}$$

Dalla (13) risulta essere[2] $\mathrm{S}_1 - s_1$ la quarta parte della analoga differenza fra le distanze di B da A misurate rispettivamente lungo uno degli archi di sezione normale, definiti dagli accennati due punti, e il corrispondente arco geodetico.

Qualora, ad es., si attribuiscano ad e, a i valori sopra indicati, si vede come per:

$$s_1 = \frac{a}{10} = \text{circa chilometri } 637,$$

$\mathrm{S}_1 - s_1$ non raggiungerebbe neppure nell'ipotesi più sfavorevole, in cui fosse:

$$\cos^2\varphi = \operatorname{sen} 2\chi_1 = 1,$$

i: $\frac{2}{1000}$ di millimetro. Una tale differenza è dunque in pratica del tutto trascurabile.

È bene notare come, riducendosi la differenza $\mathrm{S} - s$ a una grandezza del sesto ordine, la relazione testè considerata possa servire a calcolarla, con sufficiente approssimazione, anche quando le lunghezze s e in particolare s_1 che si considerano raggiungessero grandezze eccedenti il limite indicato nel § 2.

---

(1) V. Buchholtz, loc. cit. Le formule di cui si vale questo autore presentano rispetto a quelle da me adoperate qualche differenza di deltoglio: così ad es. egli si vale della latitudine *ridotta* dei punti considerati anzichè di quella natronomica (ellissoidica), ma il procedimento di calcolo non presenta diversità sostanziali.

(2) V. Buchholtz, ibid.

Poichè dunque sono trascurabili, entro limiti molto ampi, le differenze designate con: $S - s$ è chiaro come si possa applicare la (7) al calcolo degli azimut geodetici dei singoli punti delle curva di allineamento rispetto ad A, ponendo in essa al posto di s, s_1 le grandezze delle corrispondenti distanze da A, effettivamente misurate sulla curva stessa. E i risultati di queste stesse misure servirebbero evidentemente a dedurre con un procedimento di calcolo ben noto, (1) anche gli azimut geodetici dagli azimut astronomici osservati, anzi da uno solo di questi. (2) Noti dunque gli azimut geodetici rispetto ad A dei singoli punti della curva in parola, questi, associati ai predetti risultati di misure lineari, fornirebbero gli elementi occorrenti a dedurre, con ben noti sviluppi in serie, le coordinate geografiche degli accennati punti della curva di allineamento da quelle di A, qualora i progressi della Geodesia rivelassero la convenienza e la possibilità di farlo con una precisione tale da tener conto di grandezze che sfuggono agli odierni metodi di osservazione, mentre la distanza dei punti AB toccasse limiti che è arduo affermare se potranno mai essere raggiunti nell'effettiva misura diretta di linee.

5. Il tenere conto, nelle considerazioni svolte segnatamente nei §§ 2 e 3, dei termini di quarto ordine, non porterebbe difficoltà sostanziali, in quanto tutto si ridurrebbe a estendere, con formule note, gli sviluppi di x, y, z e di x_1, y_1, z_1 (e di p, q), per poi sostituirli nella (1), sino ad un termine successivo a quelli che figurano nelle (3). (3) Si renderebbe soltanto notevolmente maggiore la lunghezza e la complicazione dei calcoli materiali, mentre d'altra parte siffatti sviluppi, come risulta chiaramente da quanto precede, non sono menomamente richiesti dallo stato attuale della scienza geodetica. Per contro è bene osservare come i calcoli esposti qui possano, con evidenti modificazioni, estendersi ad una superficie più generale, sempre di forma sferoidica, purchè però gli elementi che ne caratterizzano la deviazione dalla forma sferica abbiano grandezze del medesimo ordine degli elementi analoghi relativi agli ellissoidi considerati; e ciò appunto può ritenersi che avvenga per gli sferoidi che, nelle ricerche di alta Geodesia, si assumono come atti a rappresentare con sufficiente esattezza, il Geoide. A che sia possibile l'accennata estensione occorre in sostanza, che la differenza fra le curvature principali della superficie che si considera, sia, in ogni suo punto, dell'ordine di grandezza del rapporto indicato con: $\frac{e^2}{a}$ e che le derivate di tali curvature risguardate come funzioni della lunghezza s di geodetica, siano pure grandezze del medesimo ordine delle analoghe derivate delle curvature principali degli ellissoidi considerati.

---

(1) A questo servirebbe la formula ricordata all'inizio del § 3.

(2) Ed appunto quando ci si valga della (7), basterà osservare l'azimut astronomico rispetto ad A, del solo B.

(3) Per il calcolo dei termini di quarto ordine, in questi sviluppi, v. ad es. Pucci, loc. cit., cap. III, n. 5.

Di più, ove si consideri uno sferoide generale che non sia superficie di rivoluzione, come asse *polare* nel sistema di coordinate polari geodetiche da adottarsi, andrà assunta la tangente nel punto designato con A ad una delle linee di curvatura passante per detto punto, anzichè la analoga tangente al meridiano. Così gli angoli α, α_1 che figurano nelle (3) e nelle formule successive, si calcolerebbero assumendo come origine tale nuova direzione.

ADOLFO VITERBI.

ALCUNI TEOREMI SULL' ANGOLO TRIEDRO

e le loro applicazioni in Geometria descrittiva

1. Da un migliore aspetto, più generale, può considerarsi in Geometria descrittiva il noto problema della bisezione dell'angolo diedro, di cui molti anni or sono mi occupai. [1] Sarà, infatti, agevole mostrare che risapute soluzioni e le già indicate sezioni simmetriche o normali rispetto all'uno od all'altro de' suoi piani bisettori (p. b.) facilmente si collegano al caso particolare della sezione retta, non che ai teoremi seguenti, dai quali si possono far dipendere.

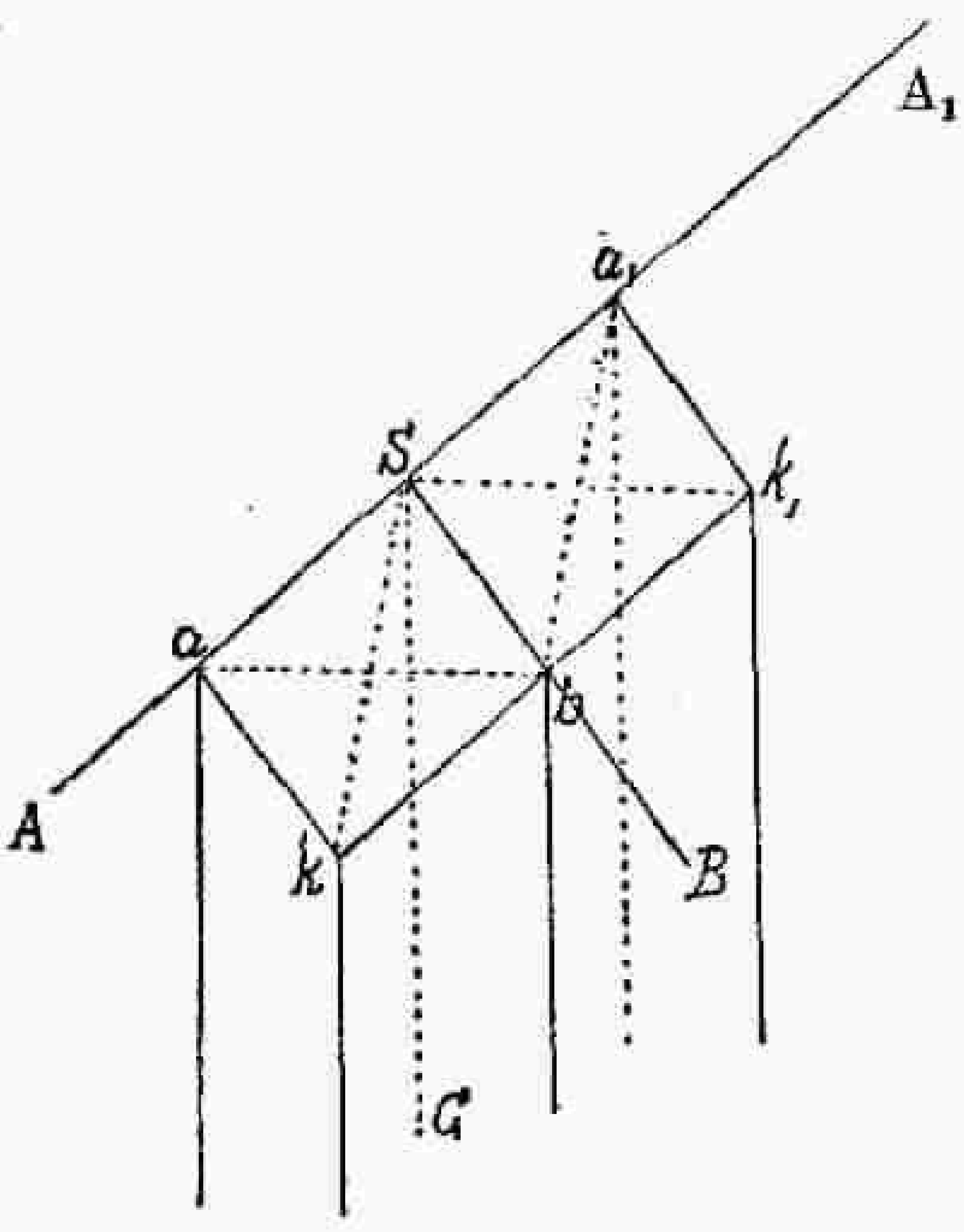

Fig. 1.

2. TEOREMA I.

Se a partire dal vertice, si prendono su due spigoli di un triedro due segmenti in modo che dal terzo spigolo equidistino gli estremi non comuni, le diagonali del parallelogrammo ivi fatto con quelli, saranno l'una coincidente e l'altra parallela alle tracce sul loro piano, dei p. b. del diedro opposto.

Dato, infatti (fig. 1), un triedro S (A, B, C) qualsivoglia, prolungandone uno spigolo AS, per es. in SA_1,

[1] *Sulla determinazione diretta dei piani bisettori di un angolo diedro* (Atti del Collegio degli Ingegneri ed Architetti di Palermo, 1889).

Che se m'indugio talvolta su considerazioni ivi già esposte, si rifletta come ciò fu quasi necessario per meglio coordinare ai precedenti il nuovo contributo sull'argomento; specie se si tien conto della forma forse troppo stringata, e non sempre evidente, di quella prima pubblicazione.

e sugli altri due pigliando rispettivamente i segmenti Sa ed Sb, tali che i loro estremi a e b equidistino dallo spigolo SC, e fatto inoltre $Sa_1 = Sa$, i piani per a, b, a_1 rispettivamente paralleli alle facce del diedro SC, determinano, intersecandosi fra loro e con quelle, due eguali prismi quadrangolari indefiniti, che il piano ASB taglia secondo due eguali parallelogrammi adiacenti.

Ora essendo, per l'indicata costruzione, tutte e quattro egualmente larghe le facce di quei prismi (epperò ciascun vertice di quei parallelogrammi equidistante dalle facce del diedro, che ha lo spigolo nel vertice apposto) ne viene che i piani per gli spigoli opposti d'ognuno de' sudetti prismi coincidono coi p. b. dei loro angoli diedri; e tagliano quei parallelogrammi lungo le diagonali, due a due, com'è ovvio, fra loro rispettivamente parallele. [1]

c. d. d.

3. Teorema II.

Se due facce di un triedro sono eguali o supplementari, il piano bisettore del diedro compreso taglia sempre la terza faccia lungo la sua bisettrice, cadendovi normalmente nel primo caso: quella bisettrice essendo invece, nell'ultimo, pp. al p. b. del diedro adiacente, e quindi allo spigolo.

Assai ovvia è la prima parte del teorema; e mentre è sufficiente notare per la seconda che, dato un triedro qualsivoglia (fig. 1) S (A, B, C) con due facce uguali ASC per es. e CSB, quello S (A_1, B, C) che si deduce da esso prolungandone lo spigolo AS in SA_1, avrà supplementari invece le due facce A_1SC e BSC.

Ora essendo, com'è noto, armonico il fascio delle due facce ASC, CSB e de' p. b. del diedro compreso e dell'adiacente, ne sarà del pari armonica la sezione con ASB. Ma il primo di quei piani tagliando ASB lungo la sua bisettrice, anche secondo la sua bisettrice Sk_1 sarà tagliato l'angolo adiacente A_1SB dall'altro p. b.; e sarà quindi quest'ultima Sk_1 (che giace nel piano k_1SC normale a CSk) perpendicolare a CS: giacchè le bisettrici rispettivamente o i p. b. di due angoli conseguenti rettilinei o diedri sono sempre fra loro p. p.

4. Consegue, viceversa, da quel teorema che:

Qualsivoglia sezione piana normale al p. b. di un diedro, se ne attraversa lo spigolo, ne taglia le facce secondo rette facienti con esso angoli eguali: quegli angoli essendo supplementari invece nel diedro adiacente.

E nel caso particolare, ove siano entrambe rettangolari le due facce eguali di un triedro (epperò la terza riuscendo p. p. ad esse ed al loro comune spigolo) limitandosi alla parte meno ovvia di quel teorema (II) desso può, forse meglio, così enunciarsi:

---

[1] La sezione retta di quei prismi (che non è, peraltro, indispensabile considerare) dà due eguali rombi; le cui diagonali, bisettrici, com'è noto, de' loro angoli, rendono forse più evidenti le conclusioni del teorema.

Dato un angolo diedro qualsivoglia coi suoi p. b. e la sezione retta per un punto qq. del suo spigolo, tutte le sezioni per quello stesso punto, normali ad uno de' suoi p. b., saranno tagliate dall'altro (sul quale cadono, in generale, oblique) lungo una retta, che è la loro bisettrice comune; e che coincidendo inoltre con quella della sezione retta, è necessariamente p. p. al primo di quei p. b. ed allo spigolo del considerato diedro.

5. La sezione retta di un diedro (p. p. come si sa allo spigolo, alle facce ed a' p. b.) non è che un caso particolare di sezioni normali ad

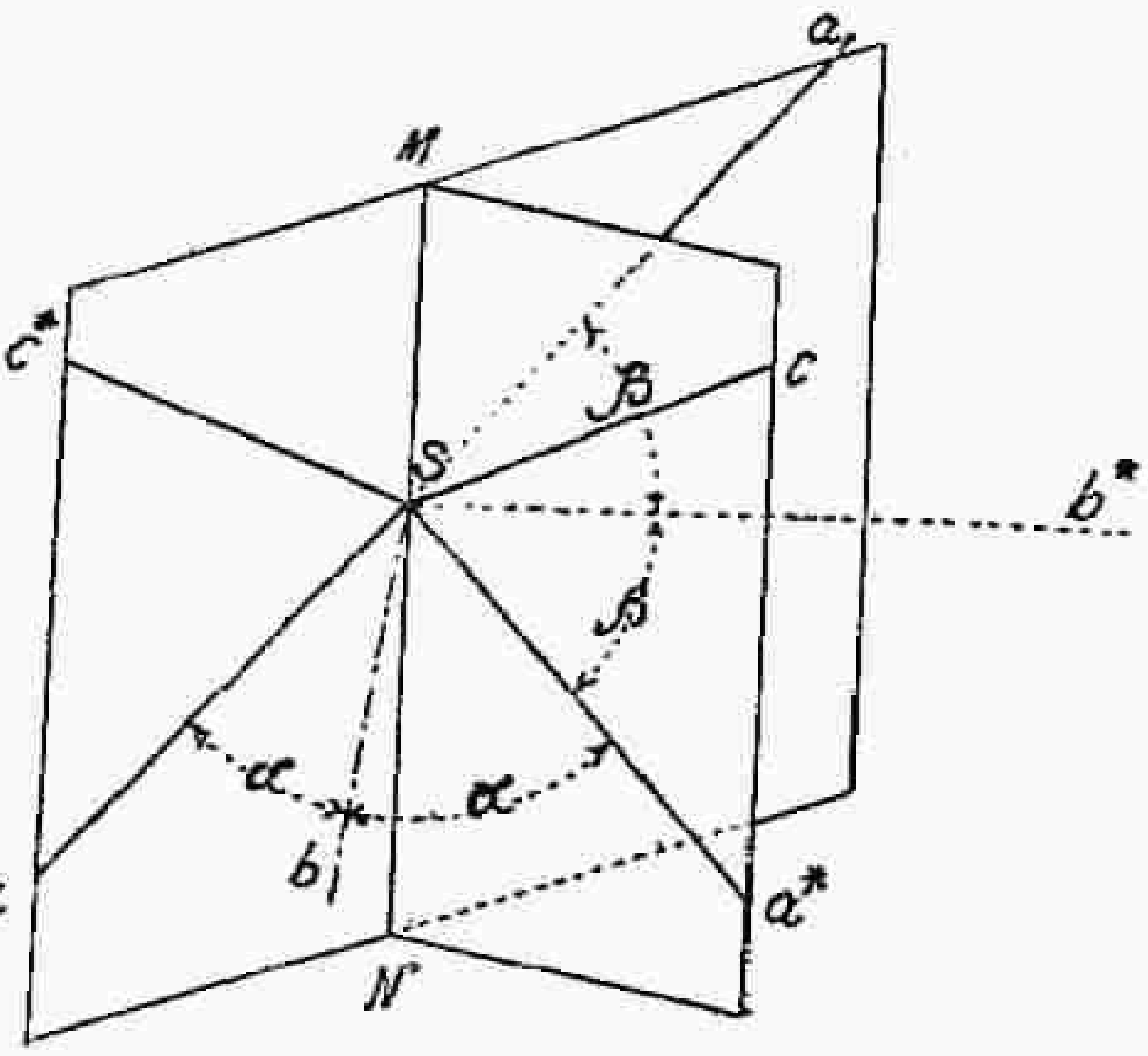

Fig. 2.

uno soltanto di quei p. b.: epperò eguali ad un tempo e supplementari (quindi retti) gli angoli de' suoi lati con lo spigolo; e le loro bisettrici p. p. fra loro e, ciascuna, a quello de' due p. b. che non la contiene.

6. L'anzidetto teorema II può benanco ritenersi come un facile corollario del primo: applicando infatti le costruzioni ivi segnate agli spigoli non comuni delle due facce eguali o supplementari di un diedro, ne risulta sul loro piano un rombo, le cui diagonali, è noto, ne bisecano gli angoli.

7. Ma or volendo determinare (è il caso più generale) le tracce de' p. b. di un diedro sopra un piano trasversale qualsivoglia, obliquo al suo spigolo ed a quei piani, indipendentemente dalla sezione retta, basta considerare il piano simmetrico al dato, rispetto all'uno od all'altro de' suoi p. b. (Cfr. il già citato lavoro). Giacchè due di siffatte sezioni ne tagliano le facce secondo rette scambievolmente simmetriche, che fanno, cioè, angoli reciprocamente uguali con lo spigolo.

Se è, per es. (fig. 2) aSc una sezione qualsivoglia (nè retta, nè normale ad alcun p. b.) di un diedro aMNc, quella simmetrica rispetto al suo p. b. sarà evidentemente c^*Sa^*, ottenuta dalla prima facendo gli angoli c^*SN ed a^*SN rispettivamente uguali a quelli cSN ed aSN. E la intersezione di quei piani sarà quindi una retta Sb per S, appartenente al p. b. cercato, e che, assieme al suo spigolo, lo determina; mentre la intersezione dei due piani aSa^* e cSc^* (normali entrambi, com'è ovvio, a quel p. b.) passando per quello stesso punto S dello spigolo, giacerà invece nel p. b. del diedro adiacente, coincidendo con la bisettrice Sb^* dell'angolo a_1Sa^*: bisettrice comune, come già si disse (n. 4) anche alla sezione retta per S di quel diedro.

8. Or dai teoremi sudetti I e II, o da loro facili corollarii, ne viene, com'è chiaro, che, indipendentemente dalla sezione retta, i metodi per bisecare un angolo diedro si possano ridurre ai tre seguenti, che ordinatamente dirò:

a) Metodo delle *striscie uguali;*
b) „ „ *sezioni simmetriche;*
c) „ „ *sezioni normali a' p. b.*

E secondo la disposizione dei dati, sarà più conveniente adottar l'uno o l'altro di essi, come sarà meglio chiarito dai seguenti esempi di applicazione.

9. Volendo, per es., tracciare i p. b. del diedro (fig. 3) compreso tra i piani RLK e KTR, comunque disposti rispetto ai p. di pr., il metodo delle *striscie uguali* permette una soluzione più semplice di quella risaputa dei piani paralleli ed equidistanti dalle facce (colla quale ha peraltro molta analogia), perchè indipendente dalla preventiva determinazione degli angoli compresi tra le facce del diedro e il piano orizzontale (Cfr. Amiot, *Geometria descrittiva*). [1] Basta condurre, infatti, RR' p. p. ad LT e le p. p. poscia da R' sopra LK e KT, sino alle loro intersezioni R_1 ed R_2 rispettivamente con le circonferenze LR e TR (così indico le circonferenze di centri L e T e di raggi LR e TR): mentre le congiungenti di quei punti con K, rispettivamente riferite alle KL e KT anzidette, daranno gli angoli ribaltati sul piano orizzontale che lo spigolo RK di quel diedro fa con le tracce orizzontali delle sue facce. Se si porta allora, come indica la figura, il minore α sul maggiore β di quegli angoli, e si conduce una parallela n_2r qualsivoglia alla KR_2 (meglio se dal punto n_2 della circonferenza ove son misurati quegli angoli) i segmenti Kr e Kn_1 determineranno un parallelogrammo, le cui diagonali sono l'una coincidente e l'altra parallela alle tracce orizzontali de' richiesti p. b. ecc. . .

[1] Quella costruzione può d'altronde semplificarsi: giacchè, dopo di avere riportato a partire da R' sopra LT i due segmenti $R't_2$ ed $R't_2$ rispettivamente eguali ad R'l ed R't (p. p. da R' sopra LK e KT) e descritto poscia con raggio qualsivoglia la circonferenza Rc, le tangenti ad essa parallelamente ad Rl_2 ed Rt_2, daranno sulla LT due punti, dai quali le parallele ad LK ed KT rispettivamente s'intersecano nel punto k, che appartiene alla traccia orizzontale $s_1{}^b$ del richiesto p. b.; mentre la traccia $s_1{}^{b*}$ dell'altro p. b. può ottenersi o costruendo il 4° armonico (v. n. 13) o tirando per K la parallela ad s_1r ecc. . .

Osservazione. — Risultando eguali, com'è ovvio, i due segmenti KR_1 e KR_2, basta trovar direttamente, nel già indicato modo, l'uno soltanto di quei punti, R_1 per es., e dedurne poscia l'altro, o viceversa.

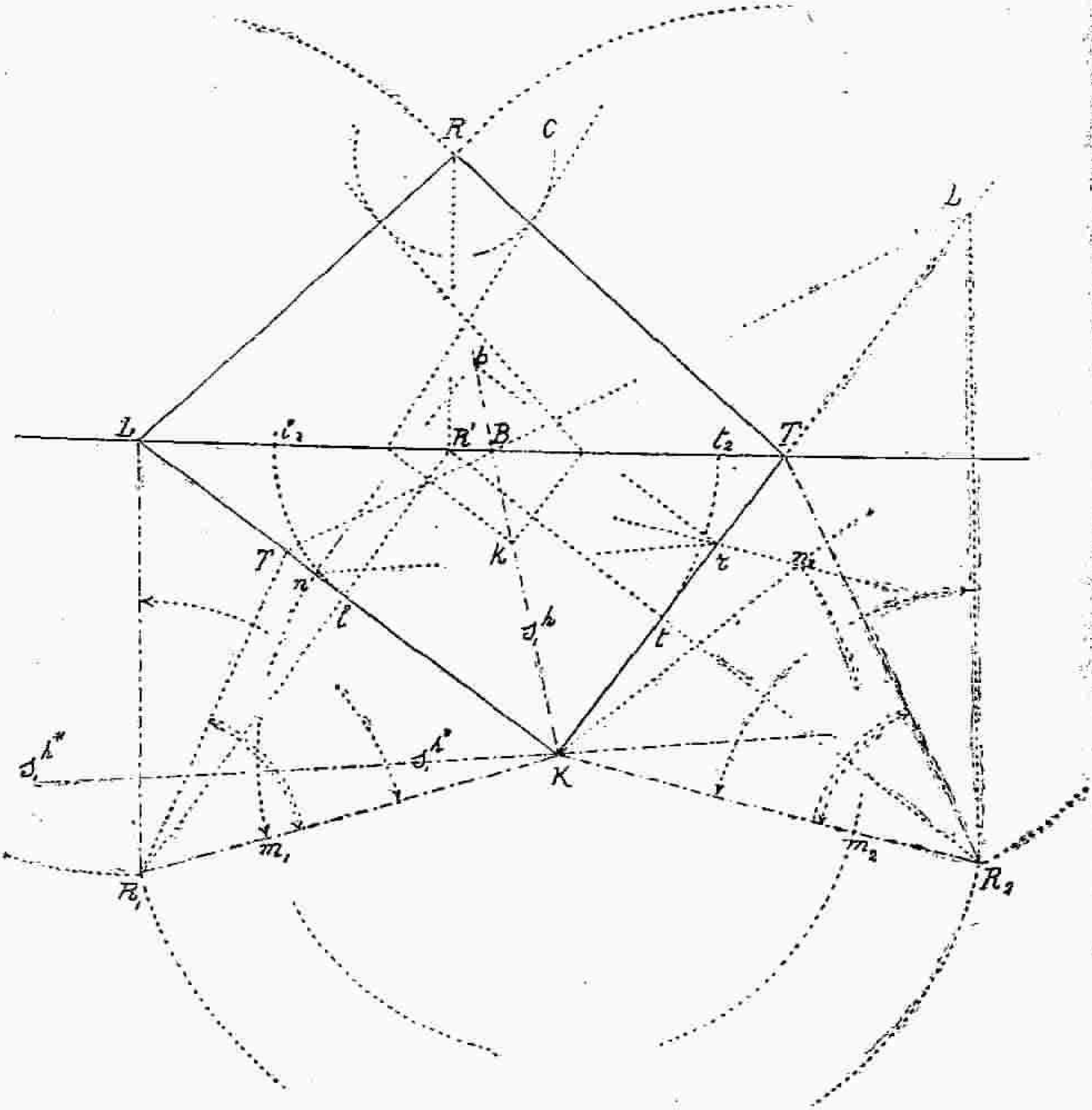

Fig. 8.

(Ma non è, peraltro, superflua quella sovrabbondanza di costruzioni, potendo l'una servire di verifica all'altra).

10. Abbenchè forse meno semplice del precedente, potrebbesi all'uopo anche adoperare il metodo delle *sezioni simmetriche*; ma per non rimandare al già citato lavoro, e riferendosi agli stessi dati della fig. 3, ne richiamo in breve le costruzioni occorrenti. Tirate le R_1L ed R_2T, si consideri di quel diedro RK la sezione simmetrica rispetto al suo p. b. interno, di quella LRT fatta col piano verticale: cioè si faccia l'angolo $KR_1T^* = KR_2T$ e l'angolo $KR_2L^* = KR_1L$. Sarà al-

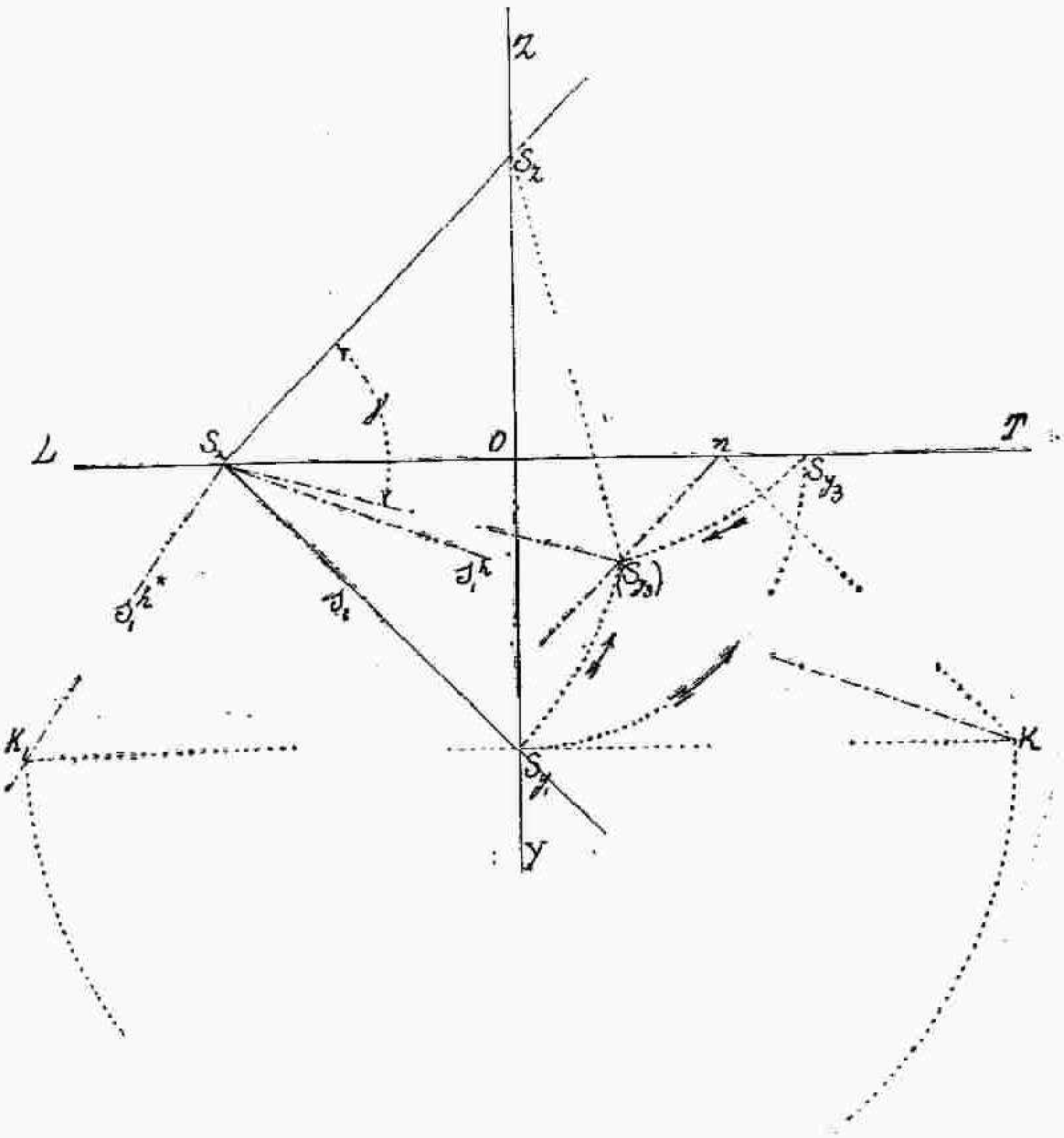

Fig. 4.

lora T^*L^* la traccia orizzontale della cercata sezione, e il punto B, ove quella traccia incontra la LT, apparterrà al p. b. richiesto, dovendo B necessariamente cadere sulla diagonale bK del parallelogrammo dianzi costruito (n. 9): mentre si taglieranno sulla parallela per K all'altra diagonale, le L^*L e TT^*.

11. Il metodo delle *sezioni normali* ai p. b. facilmente si ricava dalle costruzioni precedenti.

Considerando infatti (nello spazio) il triangolo, che ha per vertici i punti R, T e T*, il suo piano è, evidentemente, p. p. al p. b. del diedro RK, e ne è tagliato lungo la bisettrice del suo angolo in R; la quale darà sopra TT* un punto del p. b. richiesto (si osservi, come essendo di quel triangolo tutti e tre noti i lati, ne sia sul p. o. assai facile il ribaltamento).

Osservazione. — La sezione retta di un diedro pur essendo, come già si disse, un caso particolare delle sezioni p. p. all'uno od all'altro

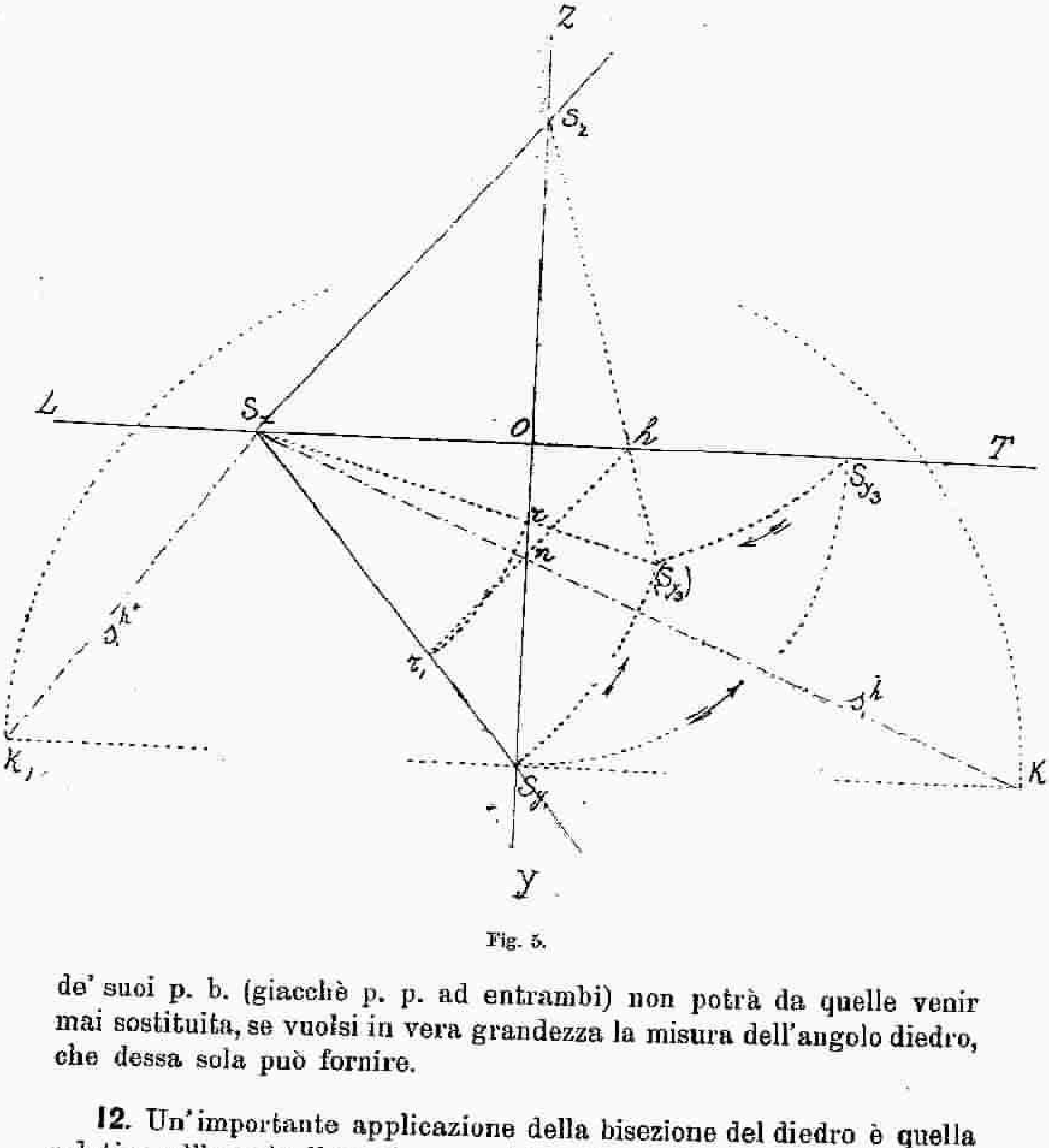

Fig. 5.

de' suoi p. b. (giacchè p. p. ad entrambi) non potrà da quelle venir mai sostituita, se vuolsi in vera grandezza la misura dell'angolo diedro, che dessa sola può fornire.

12. Un'importante applicazione della bisezione del diedro è quella relativa all'angolo di un piano qualsivoglia con l'uno o con l'altro dei p. di pr.: ciò per le ben note ed eleganti relazioni che intercedono fra i ribaltamenti di una figura che giace in esso e le tracce dei p. b.

di quel diedro (Cfr. FIEDLER, *Geometria descrittiva*). Si voglia per es. bisecare (fig. 4) l'angolo diedro che il piano S_z, S_x, S_y fa col p. vert.: di quei p. b. basta determinare le sole tracce orizzontali, le verticali coincidendo entrambe con la S_zS_x. Epperò considerando un piano trasversale qualsivoglia p. p. simultaneamente all'uno od all'altro dei primi due p. di pr., per es. il piano di profilo ZOY, e il ribaltamento $S_zS_x(Sr_3)$ del corrispondente triangolo delle tracce sul piano verticale, verrebbe così ad ottenersi in vera grandezza l'angolo γ, che tra di loro fanno le prime due tracce di quel piano; e tirando da (Sr_3) la parallela $(Sr_3)n$ alla S_zS_y, i due segmenti $S_xSr_1 = S_x(Sr_3)$ ed S_xn, coi quali poter costruire il parallelogrammo S_xnKSr_1, le cui diagonali godono la risaputa proprietà.

13. Ma per lo scopo, anche facile riesce, in quel caso, l'uso delle sezioni simmetriche. Costruito, infatti, come prima (fig. 5) in vera grandezza il triangolo delle tracce, basta fare $S_xr_1 = S_xr$: giacchè l'intersezione n della hr_1 con OSr_1 appartiene, com'è chiaro, alla traccia orizzontale del p. b. dell'angolo diedro α_2, che il piano dato fa col verticale, mentre il 4° armonico coniugato di S_x (Sr_3) dopo i tre raggi per S_x (LT, s_1^h ed s_1) dà parimenti la traccia orizzontale del p. b. del diedro adiacente $180° - \alpha_2$. (Si tiri parallela ad LT, la K_1Sr_1K vi si prenda $Sr_1K_1 = Sr_1K$ e si congiunga infine K_1 con S_x). (¹)

14. Si può, in ultimo, facilmente avvalersi degli anzidetti metodi per determinare in un tetraedro qualsivoglia il centro della sfera inscritta (intersezione, com'è risaputo di tre fra i p. b. de' suoi diedri, purchè non passanti pei tre spigoli di uno stesso angolo solido). (²)

Pertanto, indipendentemente dalle semplificazioni che, nel risolvere quel problema, si possono ottenere da una miglior disposizione del solido rispetto ai piani coordinati (una faccia, per es. sul piano orizzontale ed uno spigolo p. p. ad LT) è fra tutti forse preferibile il metodo anzidetto delle strisce eguali.

F. P. PATERNÒ.

INTORNO AD ALCUNE QUESTIONI ELEMENTARI DI MASSIMO E MINIMO

1. La dimostrazione che si dà nei più noti Trattati di Algebra Complementare del Teorema: *Il prodotto di* n *variabili positive,*

$$P = x_1x_2 \dots x_n,$$

(¹) Ma in quel caso (n. 12), è d'uopo convenirne, la soluzione più semplice e più rapida, è senza meno, quella risaputa (considerare cioè una sezione piana normale al piano verticale e al dato, e il suo ribaltamento sul piano orizzontale ecc.).

(²) Cfr. il più volte citato lavoro.

aventi somma costante, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$, *ha un massimo (assoluto) quando è*

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{a}{n},$$

si limita a provare che se nel prodotto P due variabili hanno valori diversi il prodotto aumenta sostituendo a ciascuna di esse la loro semisomma: ora questo prova soltanto che *se c'è un massimo*, esso non può essere che il prodotto $\frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n} \ldots = \left(\frac{a}{n}\right)^n$, e l'esistenza del massimo è *presupposta*, non *dimostrata*. (1)

Similmente, l'ordinaria dimostrazione del Teorema: *La somma*

$$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

di n *variabili positive, aventi prodotto costante,* $x_1 x_2 \ldots x_n = p$ *ha un minimo per*

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \sqrt[n]{p}, \text{ (2)}$$

limitandosi a provare che la somma diminuisce se a ciascuna di due variabili aventi diverso valore si sostituisce la loro media geometrica, presuppone senza dimostrarla l'esistenza del minimo.

Non sarà dunque inopportuno, anche per l'uso frequente dei due accennati teoremi, il primo dei quali serve di base al noto metodo dei coefficienti indeterminati, che se ne esponga qui una dimostrazione assai semplice e libera da tale obbiezione. (3)

Poichè il primo dei teoremi enunciati, notoriamente, sussiste nel caso di due variabili, (4) ci limiteremo a provare che se esso è valido per il prodotto di $n-1$ variabili, vale anche pel prodotto di n variabili.

Infatti se i fattori del prodotto $x_1 x_2 \ldots x_n$, aventi somma costante $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$, non sono tutti eguali ad $\frac{a}{n}$, ma fra essi ve n'è uno almeno, sia x_1, eguale ad $\frac{a}{n}$, la somma dei rimanenti

$$x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$

è uguale ad $\frac{n-1}{n} a$, e quindi per la supposta validità del Teorema nel caso di $n-1$ variabili, si avrà

$$x_2 x_3 \ldots x_n < \left(\frac{a}{n}\right)^{n-1};$$

---

(1) Osservazione fatta anche da G. M. Testi (in *Complementi d'Algebra*, Livorno, Giusti, 1904, pag. 94) il quale, più oltre, dà anche una dimostrazione rigorosa del Teorema, dipendente però dal concetto di derivata.

(2) Il simbolo $\sqrt[n]{p}$ e gli analoghi denotano qui e nel seguito il valor numerico del radicale.

(3) La stessa applicazione può farsi alle dimostrazioni consuete di teoremi analoghi, per es. di quelli riguardanti il massimo della somma di più variabili positive di cui è costante la somma dei quadrati, o il minimo della somma dei quadrati di più variabili positive di cui è costante la somma: valendo, però, anche per questi, con lievi modificazioni, le dimostrazioni che qui si espongono, ci dispensiamo dal trattarne per disteso.

(4) Si deduce, ad es., dall'identità

$$4x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2.$$

e quindi, essendo $x_1 = \frac{a}{n}$,

$$x_1 x_2 \dots x_n < \left(\frac{a}{n}\right)^n.$$

Se poi nessuno dei fattori del prodotto $x_1 x_2 \dots x_n$ è uguale ad $\frac{a}{n}$, fra essi ve ne sarà uno, sia x_1, minore di $\frac{a}{n}$ e un altro, sia x_2, maggiore di $\frac{a}{n}$; talchè, indicando con d, d' due numeri positivi, di cui il primo minore di $\frac{a}{n}$, si avrà

$$x_1 = \frac{a}{n} - d, \qquad x_2 = \frac{a}{n} + d',$$

e quindi

$$x_1 + x_2 = 2\frac{a}{n} - d + d'.$$

Facendo

$$x_1' = \frac{a}{n}, \qquad x_2' = \frac{a}{n} - d + d',$$

ne risulta

$$x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$$

e quindi

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = x_1' + x_2' + x_3 + \dots + x_n = a.$$

Inoltre $x_1' x_2'$ sono ancora positivi e si ha

$$x_1' x_2' = \frac{a^2}{n^2} - \frac{a}{n} d + \frac{a}{n} d',$$

mentre era

$$x_1 x_2 = \frac{a^2}{n^2} - \frac{a}{n} d + \frac{a}{n} d' - dd',$$

dal che si ricava

$$x_1' x_2' > x_1 x_2,$$

epperò

$$x_1' x_2' x_3 \dots x_n > x_1 x_2 x_3 \dots x_n.$$

Ma poichè il primo dei fattori del prodotto $x_1' x_2' x_3 \dots x_n$ è ora uguale ad $\frac{a}{n}$, senza che lo sieno i rimanenti, si avrà per la 1ª parte della dimostrazione

$$x_1' x_2' x_3 \dots x_n < \left(\frac{a}{n}\right)^n$$

e quindi anche

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n < \left(\frac{a}{n}\right)^n$$

come si voleva.

Il procedimento è simile affatto pel 2° teorema. Esso notoriamente sussiste pel caso di due variabili; [1] basterà dunque provarne la

---

[1] Si deduce ad es. dall'identità

$$(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1 x_2.$$

validità per la somma di n variabili, quando sia presupposta per la somma di $n-1$ variabili. Infatti, se gli addendi della somma

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

delle n variabili positive $x_1, x_2 \ldots x_n$ aventi prodotto costante

$$x_1 x_2 \ldots = p$$

non sono tutti uguali a $\sqrt[n]{p}$, ma almeno uno di essi, sia x_1, è uguale a $\sqrt[n]{p}$, il prodotto dei rimanenti è $x_2 x_3 \ldots x_n = \sqrt[n]{p^{n-1}}$, epperò, per la fatta ipotesi, si avrà

$$x_2 + x_3 + \ldots + x_n > (n-1) \sqrt[n-1]{\sqrt[n]{p^{n-1}}}$$

cioè

$$x_2 + x_3 + \ldots + x_n > (n-1) \sqrt[n]{p}$$

e quindi, poichè $x_1 = \sqrt[n]{p}$,

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n > n \sqrt[n]{p}.$$

Se poi nessuno degli addendi della somma $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ è uguale a $\sqrt{p}$, potremo supporre

$$x_1 < \sqrt[n]{p} \quad \text{e} \quad x_2 > \sqrt[n]{p},$$

e porre quindi

$$x_1 = h \sqrt[n]{p}, \qquad x_2 = h' \sqrt[n]{p},$$

dove h, h' sono numeri positivi ed è $h < 1$, $h' > 1$. Si ha allora

$$x_1 x_2 = hh' \sqrt[n]{p^2},$$

mentre è

$$x_1 + x_2 = (h + h') \sqrt[n]{p}.$$

Facendo allora

$$x_1' = \sqrt[n]{p}, \qquad x_2' = hh' \sqrt[n]{p},$$

ne risulta

$$x_1' x_2' = x_1 x_2,$$

e quindi

$$x_1' x_2' x_3 \ldots x_n = x_1 x_2 x_3 \ldots x_n = p,$$

mentre è

$$x_1' + x_2' = \sqrt[n]{p} (1 + hh').$$

Ma poichè $h' > 1$ ed $h < 1$, si ha subito $h'(1-h) > 1-h$, da cui

$$h + h' > 1 + hh',$$

onde

$$x_1' + x_2' < x_1 + x_2,$$

quindi

$$x_1' + x_2^1 + x_3 + \ldots + x_n < x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n.$$

E poichè $x_1' = \sqrt[n]{p}$, si avrà per la 1ª parte della dimostrazione

$$x_1' + x_2' + x_3 + \ldots + x_n > n\sqrt[n]{p},$$

onde, come si voleva,

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n > n\sqrt[n]{p}.$$

2. La ricerca dei massimi e minimi della funzione esplicita di 3° grado più generale

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

dipendendo dalla risoluzione di una equazione quadratica in x, dovrebbe trovare il suo posto nell'Insegnamento Complementare d'Algebra dei nostri Istituti Tecnici; ciò non avviene poichè la dipendenza stessa viene ordinariamente posta in luce usando il concetto di *derivata*, estraneo ai programmi di tale insegnamento. Non mi pare quindi inutile di esporre come si possano, in ogni caso determinare i massimi e i minimi della funzione stessa, facendo uso solamente delle proprietà del trinomio di 2° grado, e della nozione elementare di *funzione crescente o decrescente in un punto.*

Siano x, x_1 due valori *diversi* della variabile; y, y_1 i corrispondenti valori della funzione: sarà

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$y_1 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d,$$

da cui si ha subito

$$y - y_1 = (x - x_1)\ \mathrm{D}(x, x_1),$$

nella quale si è posto

$$\mathrm{D}(x, x_1) = ax^2 + (ax_1 + b)\,x + (ax_1^2 + bx_1 + c).$$

Il discriminante di $\mathrm{D}(x, x_1)$, ove $\mathrm{D}(x, x_1)$ si consideri come trinomio quadratico in x, è

$$\Delta(x_1) = -3a^2x_1^2 - 2abx_1 + b^2 - 4ac,$$

e il discriminante di $\Delta(x_1)$, che è un trinomio quadratico in x_1, è

$$\delta = 16a^2(b^2 - 3ac).$$

Se ne cava che è $\delta \gtreqless 0$ secondo che $b^2 - 3ac \gtreqless 0$.

I. — Sia $b^2 - 3ac < 0$; allora $\Delta(x_1)$, il cui primo coefficiente è negativo, è negativo qualunque sia x_1; e allora $\mathrm{D}(x, x_1)$ il cui discriminante è $\Delta(x_1)$, avrà, qualunque sia x, sempre il segno di a.

Dunque $\mathrm{D}(x, x_1)$ ha ora, per qualunque valore di x e di x_1, sempre il segno di a. Dalla (1) segue allora che le due differenze $y - y_1$, $x - x_1$ sono sempre dello stesso segno se a è positivo, sempre di segno opposto se a è negativo. Si conclude che: *la funzione proposta è sempre crescente se* a *è positivo, sempre decrescente se* a *è negativo.*

II. — Sia $b^2 - 3ac = 0$. Se ne cava

$$\Delta(x_1) = -\tfrac{1}{3}(3ax_1 + b)^2;$$

dunque, escluso il valore $x_1 = -\frac{b}{3a}$, $\Delta(x_1)$ risulta negativo qualunque sia $x_1 \neq -\frac{b}{3a}$, e allora, come prima, la funzione è crescente o decrescente in ogni punto $\left(\text{tranne il punto } -\frac{b}{3a}\right)$, secondo che a è positivo o negativo. Se poi si suppone $x_1 = -\frac{b}{3a}$, si ricava tosto

$$D\left(x, -\frac{b}{3a}\right) = a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^2,$$

dalla quale scende, che, essendo per ipotesi $x \neq x_1$, ossia, ora, $x \neq -\frac{b}{3a}$, il trinomio $D\left(x, -\frac{b}{3a}\right)$ ha ancora il segno di a qualunque sia x, e allora, anche nel punto $-\frac{b}{3a}$, la funzione è crescente o decrescente, secondo che a è positivo o negativo.

III. — Sia $b^2 - 3ac > 0$. Si consideri il trinomio

$$D(x_1, x_1) = 3ax_1^2 + 2bx_1 + c,$$

che si ricava da $D(x, x_1)$ facendo $x = x_1$. Il suo discriminante è ancora $b^2 - 3ac$, per il che l'equazione

$$D(x_1, x_1) = 0$$

ha ora (e solo ora) due radici reali che sono

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}, \qquad X_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}.$$

Supposto, per fissar le idee, a positivo, e quindi $X_1 < X_2$, se è

$$X_1 < x_1 < X_2$$

sarà $D(x_1, x_1) < 0$ epperò *l'equazione di 2° grado in* x

$$D(x, x_1) = 0,$$

il cui primo coefficiente è per l'appunto $a > 0$, ammetterà due radici reali e distinte e sarà x_1 compreso nel campo di queste radici. Preso allora un punto x dello stesso campo, diverso da x_1, sarà in esso, $D(x, x_1)$ negativo, onde la (1) assicura che se x è compreso in un certo intervallo (il campo delle radici predetto) intorno ad x_1, le $y - y_1$, $x - x_1$ son di segno contrario, cioè: la funzione proposta è decrescente in ogni punto x, tale che $X_1 < x_1 < X_2$.

Se invece è $x_1 < X_1 < X_2$, oppure $X_1 < X_2 < X_1$, sarà

$$D(x_1, x_1) > 0,$$

epperò *l'equazione di 2° grado in* x

$$D(x, x_1) = 0,$$

il cui primo coefficiente è $a > 0$, o non avrà radici reali, o ammettendole, sarà x_1 esterno al loro campo. Preso allora un punto x qualunque nel primo caso, esterno al campo delle radici e dalla parte di x_1 nel secondo, ma sempre diverso da x_1, sarà, in esso, $D(x, x_1)$ positivo onde la (1) assicura che, almeno se x è contenuto in un certo intervallo (escludente il campo delle radici predette, se esistono) intorno ad x_1, le due differenze $y - y_1$, $x - x_1$ sono di ugual segno, cioè: *la funzione proposta è crescente in ogni punto* x_1 *tale che sia*

$$x_1 < X_1 < X_2 \qquad \textit{oppure} \qquad X_1 < X_2 < x_1 .$$

Da queste e da ciò che precede risulta che: *la funzione ha un massimo per* $x = X_1$, *un minimo per* $x = X_2$.

Se invece si suppone a negativo, si ricava similmente che la funzione decresce in ogni punto x_1 per cui si abbia $x_1 < X_2 < X_1$ oppure $X_2 < X_1 < x_1$, cresce in ogni punto x_1 per cui si abbia $X_2 < x_1 < X_1$, e quindi la funzione ha ancora un minimo per $x = X_2$, un massimo per $x = X_1$.

Riassumendo: *La funzione intera di* 3^0 *grado*

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

è sempre crescente o sempre decrescente secondo che $a \gtrless 0$, *quando sia* $b^2 - 3ac < 0$, *e non ha quindi in questo caso nè massimi nè minimi. Se è invece* $b^2 - 3ac > 0$ *essa ha un massimo ed un minimo rispettivamente nei punti*

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}, \qquad X_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a},$$

che si determinano come radici dell'equazione

$$D(x, x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0.$$

Emilio Veneroni.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 735 E 750

735. *Se i vertici* A, B, C, D *di un quadrangolo corrispondono ai vertici* A′, B′, C′, D′ *di un altro quadrangolo in modo che delle sei coppie di lati*

$$\begin{cases} AB \\ C'D' \end{cases} \begin{cases} AC \\ D'B' \end{cases} \begin{cases} AD \\ B'C' \end{cases} \begin{cases} CD \\ A'B' \end{cases} \begin{cases} DB \\ A'C' \end{cases} \begin{cases} BC \\ A'D' \end{cases}$$

cinque abbiano i punti d'intersezione sopra una retta r, *anche il punto d'incontro della sesta coppia di rette è sopra la stessa retta* r.

K.

Risoluzione del sig. Teodorescu, R. L. di Ploesti (Romania).

La proprietà domandata in questo problema essendo projettiva, possiamo projettare quei due quadrangoli sopra un nuovo piano E' di modo che la retta r, sia la retta all'infinito. Ci resta dunque a dimostrare che il punto d'incontro della sesta coppia di rette è sempre all'infinito, ossia che le rette BC e A'D' sono parallele.

Infatti, tenendo conto della teoria dei triangoli ortologici si può enunciare il seguente teorema:

Se abbiamo un quadrangolo ABCD possiamo sempre costruire un secondo A'B'C'D' tale che le rette:

$$\begin{cases} AB \\ C'D' \end{cases} \begin{cases} AC \\ D'B' \end{cases} \begin{cases} AD \\ B'C' \end{cases} \begin{cases} CD \\ A'B' \end{cases} \begin{cases} DB \\ A'C' \end{cases} \begin{cases} BC \\ A'D' \end{cases}$$

sieno due a due perpendicolari.

Se giriamo la figura A'B'C'D' d'un angolo qualunque nel suo piano, risulta il seguente teorema:

Essendo dati nel medesimo piano due quadrangoli ABCD e A'B'C'D se cinque dei lati del primo fanno con quell'altre cinque respettivamente opposte del secondo quadrangolo il medesimo angolo α, allora anche i sesti lati si taglieranno sempre sotto l'angolo α.

Nel caso del problema considerato sul piano F i lati dei quadrangoli ABCD e A'B'C'D' sono cinque d'esse due a due respettivamente paralleli, o fanno fra di loro l'angolo $\alpha = 0°$; risulta dunque secondo il teorema enunciato più su, che anche i sesti lati BC e A'D' faranno tra loro il medesimo angolo $\alpha = 0°$ oppure saranno parallele e per conseguenza s'incontreranno all'infinito sempre sulla retta r, e così il problema proposto è dimostrato.

750. *Supposto* $x < \frac{\pi}{2}$, *trovare il valor massimo della funzione*

$$y = \operatorname{sen} 2x + \sqrt{\operatorname{sen}^2 2x + 4k \cos^2 x}.$$

G. Pesci.

Risoluzione di E. N. Barisien (Parigi).

Poniamo

$$2x = t \text{ (onde } t < \pi),$$

sarà

$$y = \operatorname{sen} t + \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + 2k(1 + \cos t)}, \tag{1}$$

ossia

$$y = \sqrt{1 + \cos t}\,\left(\sqrt{1 - \cos t} + \sqrt{1 + 2k - \cos t}\right). \tag{2}$$

Scriviamo che $\frac{dy}{dx} = 0$, per mezzo della (1), avremo:

$$\cos t + \frac{\operatorname{sen} t \cos t - k \operatorname{sen} t}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + 2k(1 + \cos t)}} = 0,$$

ossia

$$\cos t\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + 2k(1 + \cos t)} = \operatorname{sen} t\,(k - \cos t),$$

$$2\cos^2 t\,(1 + \cos t) = (1 - \cos^2 t)\,(k^2 - 2k \cos t),$$

$$(k + 2)\cos^2 t + 2\cos t - k = 0,$$

$$(\cos t + 1)\,[(k + 2)\cos t - k] = 0.$$

Si hanno dunque valori per $\cos t$: l'uno $\cos t = -1$, ossia $t = \pi$, che dà il minimo $y = 0$; l'altro, sostituito nella (2), dà per il massimo Y di y

$$Y = \sqrt{1 + \frac{k}{k+2}} \left(\sqrt{1 - \frac{k}{k+2}} + \sqrt{1 + 2k - \frac{k}{k+2}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2(k+1)}}{k+2} (\sqrt{2} + \sqrt{2}[k+1]),$$

e quindi

$$Y = 2\sqrt{k+1}.$$

QUISTIONI PROPOSTE

752. L'inviluppo delle parabole che hanno i loro fuochi sull'ellisse

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

e per tangente al vertice l'asse delle x è la sestica

$$(3a^2x^2 + 4b^2y^2 - 3a^4)^3 = b^2y^2(9a^2x^2 + 8b^2y^2 + 18a^4)^2;$$

determinarne le cuspidi, i punti doppi ordinari e le tangenti doppie; dimostrare che ha i medesimi fuochi dell'ellisse.

753. L'inviluppo delle parabole che hanno i fuochi sulla curva

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

e per tangente al vertice l'asse delle x è la sestica

$$b^2c^4U^3 + V^3 = 0,$$

dove si è posto per brevità

$$U \equiv 9a^2(b^2x^2 - 2a^2y^2) - 8b^2c^4$$
$$V \equiv 3a^2(a^2y^2 + b^2x^2) - 4b^2c^4;$$

determinarne le sei cuspidi, i punti doppi ordinari e le tangenti doppie; dimostrare che le due sestiche sono omofocali.

754. Consideriamo una iperbole equilatera H^2 e un suo asintoto m; se a una tangente variabile t di H^2 si conduce la perpendicolare t' nel punto (tm):

1°. L'inviluppo di t' è una parabola cubica C_3^3 concentrica ad H^2 ed avente m per tangente stazionaria; si determini il punto di contatto di t' col suo inviluppo.

2°. L'iperbole e la cubica hanno i medesimi fuochi, e ognuna delle due curve è il luogo dei due fuochi delle parabole che hanno m per tangente al vertice e toccano l'altra. Ognuna delle due curve è ancora l'inviluppo delle parabole che hanno m per tangente al vertice e i loro fuochi sull'altra.

755. Il luogo dei punti che sono equidistanti da una conica centrale e da un punto fisso, non situato su di essa e posto nel suo piano, è una curva razionale del sest'ordine e della quarta classe avente per tangenti doppie la retta all'infinito e le due rette isotrope uscenti dal punto fisso. Si trovino le equazioni cartesiane della sestica e della conica sulla quale sono situate le di lei sei cuspidi.

V. Retali.

BIBLIOGRAFIA

R. de Montessus. — *Leçons élémentaires sur le Calcul des probabilités.* Paris, Gauthier-Villars, L. 7.

" Le calcul des probabilités nous apprend à connaître, à mesurer la véritable " force des motifs de crédibilité, ... C'est par ce seul moyen que l'on peut, à " la fois, porter les derniers coups à la superstition, comme au pyrrhonisme.... ". — Così dice Condorcet nelle conclusioni ai suoi *Éléments du Calcul des probabilités.* — " Le calcul des probabilités offre une contradiction dans les termes mêmes " qui servent à le désigner, ... il nous enseigne surtout une chose: c'est de savoir " que nous ne savons rien ". — Così Poincaré chiude le sue classiche ventidue lezioni. Troppo entusiasmo nel primo; e infatti l'applicazione, che egli volle fare dei calcolo delle probabillità alle decisioni giudiziarie, fu poi giustamente dichiarata (da Stuart Mill) lo scandalo delle Matematiche. Troppo sconforto nel secondo, perchè, non interpretando bene a fondo il suo pensiero, si potrebbe credere inutile e inconcludente lo studio del calcolo stesso; mentre invece i milioni annualmente accumulati dalle grandi case di gioco e dalle grandi società d'assicurazioni dimostrano la verità del teorema di Bernoulli; mentre invece le applicazioni di Bessel alla Astronomia, di Peirce alla Fisiologia, di Quételet alla Statistica, dimostrano la verità della legge degli errori di Gauss [1]. Senza abbandonarsi alle esagerazioni di Condorcet, il Calcolo delle probabilità offre dunque delle applicazioni importantissime, ed è sempre con grande interesse e con viva curiosità che gli studiosi di questa disciplina accolgono ogni pubblicazione in proposito.

Il libro che ci proponiamo di esaminare rapidamente è chiaro e semplice nella forma, elementare nella sostanza; onde lo crediamo adattatissimo per tutti coloro che vogliono iniziarsi in questa parte così curiosa e così piacevole della Matematica applicata.

Premesse alcune succinte nozioni di Analisi combinatoria e di Calcolo infinitesimale, l'A. passa (nel I capitolo) ai principî e alle definizioni [2]. Qui, invece di dare senz'altro la solita arida definizione di probabilità, egli premette alcune chiare e convincenti considerazioni, che giustificano questa definizione, per concludere: " Ce mot probabilité indique seulement que, sur un grad nombre d'é-

(1) E, al dire di Glaisher, l'unica dimostrazione di questa legge, che abbia una base filosofica, è quella di Hagen, il quale la ricavò, appunto, dalla teoria delle probabilità.

(2) Notiamo, di passaggio, che nel rapido cenno storico, che egli dà di questa teoria, non è nominato il sommo Galileo, il quale, per quanto si sappia, fu il primo a risolvere un problema di probabilità.

" preuves, le rapport de nombre d'arrivées d'un événement au nombre d'expérience " tendra précisement vers le rapport de nombre des cas favorables au nombre des " cas possibles, et *rien de plus* „. Cercare una probabilità matematica vuol dunque dire, semplicemente, cercare il rapporto fra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili, e niente di più. Seguono le nozioni di probabilità composta e di probabilità totale, con moltissimi esempi, fra cui quello solito, ma notevole, dei tre cófani.

Nel II capitolo studia il caso in cui il numero degli avvenimenti, che si considerano, tende all'infinito; e qui, dopo una estesa teoria degli scarti, la quale, come è noto, dà luogo alla considerazione della funzione $\Theta(x)$, dimostra prima il famoso teorema di Bernoulli e poi l'altro teorema più pratico, che da questo dedusse il Poisson.

Il III capitolo contiene una interessantissima applicazione di quanto precede ai giuochi più comuni: trente et quarante, baccara, whist, piquet, écarté.... — Questo è per noi il capitolo più notevole, e vorremmo pure che le sue conclusioni, sulla certa ruina dei giocatori, potessero esser comprese da tutti! E altre due applicazioni importanti, però d'indole geometrica, contiene il IV cap.: la prima è il noto problema dell'ago; la seconda è un problema pure assai noto, per il quale il Bertrand trovò, paradossalmente, tre diverse soluzioni. Questa questione preoccupò l'illustre matematico, che del suo paradosso non pubblicò mai la spiegazione; quanto ne dice il nostro A. ci pare sufficientemente chiaro e convincente.

Il V capitolo tratta della probabilità delle cause e consta di tre parti: proposizioni fondamentali (teorema dj Bayes), teoria degli errori, combinazione delle osservazioni. A noi pare che, almeno dal punto di vista didattico, sarebbe stato meglio seguire l'uso comune: trattare cioè la prima parte da sè e passar poscia in un altro capitolo alla teoria degli errori (o, meglio, alla teoria della combinazione delle osservazioni), che è, in sostanza, l'argomento di tutto il resto del libro.

A proposito della prima parte, che, a dir il vero, dovrebbe essere un po' più estesa, osserviamo che l'A. (seguendo Laplace) presenta il teorema di Bayes anche sotto forma obbiettiva, cercando la probabilità degli avvenimenti futuri: confessiamo francamente di non avere mai ben capito (nè qui, nè altrove) come si possa porre e risolvere un tale problema. E a questa confessione ci incoraggia il Bertrand il quale afferma che le applicazioni tentate " ont été presque toutes sans fondement „ (1).

Le altre due parti del capitolo V contengono, come s'è detto, la teoria della combinazione delle osservazioni (2) e questa ci pare svolta troppo brevemente: manca, p. es., ogni considerazione che giustifichi l'uso della media aritmetica; nella dimostrazione della formula importantissima, che dà l'error medio di una

---

(1) Non è qui il luogo di entrare in particolari, osiamo solo manifestare una impressione in noi prodotta dalla lettura del Laplace: a noi pare (e lo diciamo con molta peritanza) a noi pare che il grande matematico sia, a questo proposito, in contradizione con sè stesso. Infatti nella Introduzione alla sua *Théorie analytique des probabilités* (pag. x) egli afferma che di una serie di avvenimenti, tutti egualmente possibili, non è assolutamente ammissibile che gli avvenimenti passati influiscano sulla possibilità degli avvenimenti futuri. E in un altro punto della Introduzione stessa (pag. civ) umoristicamente racconta: " J'ai vu des hommes, desirant ardemment " d'avoir un fils, n'apprendre qu'avec peine les naissances des garçons dans le mois où ils allaient " devenir pères. S'imaginant que le rapport de ces naissances à celles des filles devait être le " même à la fin de chaque mois: ils jugeaient que les garçons déjà nés rendaient plus problables " les naissances prochaines des filles „.

(2) Fra le pubblicazioni moderne sull'argomento, due pregievolissime ne ha avute l'Italia: la *Esposizione del metodo dei minimi quadrati* del Ferrero, e i *Fondamenti matematici per la critica dei risultati sperimentali* del Pizzetti. Disgraziatamente la prima (edita dal Barbèra nel 1876) è assolutamente esaurita, e la seconda non è in commercio e si trova solo in un grosso volume di Atti della R. Università di Genova, pubblicato nel 1892.

osservazione, è troppo sollecitamente sostituito, all'errore della media, il valore medio del suo errore (¹).

Buoni sono invece i tre seguenti ed ultimi capitoli, i quali contengono delle applicazioni della precedente teoria. Il VI cap. riguarda i tiri delle armi da fuoco: è un capitolo ben fatto e opportunissimo, perchè questa è, senza dubbio alcuno, l'applicazione più efficace per l'intelligenza della teoria premessa. Il VII capitolo riguarda la teoria delle assicurazioni e risolve i problemi fondamentali, importantissimi, che in essa si presentano. L'VIII ed ultimo cap. tratta brevemente delle applicazioni del calcolo delle probabilità alle scienze morali ed economiche. Le considerazioni in esso contenute sono molto chiare e convincenti: " le Calcul des probabilités peut être appliqué aux sciences morales et politiques, en tant que celles-ci sont basées sur des statistique convenablement faites ". Questa, per noi, è la ragione vera (da aggiungere alle altre addotte dal BERTRAND) per la quale è *scandaloso* (per ripetere l'espressione di STUART MILL) applicare la teoria delle probabilità alle decisioni giudiziarie; poichè è evidentemente assurdo il supporre di avere una statistica di questo genere (²).

Concludendo: il libro del sig. R. DE MONTESSUS è, in complesso, un buon libro (³), la cui lettura, come già dicemmo, riuscirà utilissima a chi voglia iniziarsi allo studio del Calcolo delle probabilità.

G. PESCI.

(¹) Sono meno solleciti, nei loro trattati di Astronomia, il BRUNNOW e il FAYE, benchè trattino di questo argomento solo incidentalmente.

(²) Eppure il LAPLACE (e dopo lui, il LAURENT) dissero essere il calcolo delle probabilità il buon senso ridotto a calcolo; per noi (e non saremo certo i primi a dirlo) non è il buon senso che guida la scienza, ma il contrario. Il buon senso (detto anche, per antitesi, senso *comune*) non avrebbe mai fatto scoprire, p. es., la legge della caduta dei gravi, le leggi dei moti planetari.... anzi queste scoperte furono ritardate, per molti secoli, appunto dal buon senso.

(³) Non vale certo la pena di rilevare qualche rarissima inesattezza di linguaggio, come, p. es., questa (pag. 21): *il numero delle combinazioni possibili è quello delle combinazioni con ripetizione....* invece di: *il numero dei casi possibili è quello delle disposizioni con ripetizione....*

PREMIO ULISSE DINI.

I sottoscritti si onorano di comunicare ai signori sottoscrittori per le onoranze al Ch.^mo prof. *Ulisse Dini*, senatore del Regno, nel 40° anniversario della sua nomina nella R. Università di Pisa, che la somma di L. 11500 circa, raccolta dalla sottoscrizione, è stata destinata (dedotte le spese e le imposte) dalla Facoltà di Scienze di questa Università alla fondazione di un premio *Ulisse Dini*, da erigersi in ente morale e da assegnarsi secondo le norme dello statuto approvato dalla Facoltà stessa.

La domanda per l'istituzione in ente morale del premio *Dini* e lo statuto relativo sono ora presso il Consiglio di Stato; ed appena questo avrà approvato lo statuto e si avrà il decreto reale che erige in ente morale il premio *Dini*, sarà loro cura inviare a ciascuno dei sottoscrittori il rendiconto della sottoscrizione, insieme con una copia dello statuto del premio stesso.

Domandano insieme scusa del ritardo, indipendente dalla loro volontà.

Pisa, 15 luglio 1908.

La Commissione: proff. MARIO CANAVARI, EUGENIO BERTINI, ONORATO NICOLETTI.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare l'11 Agosto 1908

SULLA DEFINIZIONE

del moto "equabile" del moto "equabilmente vario" e della "velocità"

Nei trattati di Fisica elementare si danno, specialmente del *Moto uniformemente, od equabilmente vario* definizioni diverse. Nella maggior parte di esse si presuppone definita la *velocità* di un moto vario, e si fa dipendere la natura del moto in questione da una ipotesi sul modo di variare della velocità. Da questa ipotesi, con calcoli e ragionamenti che non sono semplici, e non possono essere tali perchè sostituiscono una vera integrazione, si deducono le formole dello spazio e gli altri particolari del moto.

A me pare che la caratteristica di un moto si deve ricercare nel modo particolare di variare dello spazio percorso dal mobile nei successivi ed uguali intervalli del tempo, variazione che è possibile e facile di verificare misurando gli spazi effettivamente percorsi.

Gli intervalli di tempo debbono essere sufficientemente piccoli, anzi dovrebbero essere comunque piccoli, perchè non nasca il dubbio che nell'intervallo stesso il moto cambi di natura.

Il concetto di *velocità* nasce, deriva e deve derivare da questa variazione dello spazio nel tempo, e quindi in una trattazione elementare della *Cinematica* non mi parrebbe inutile di definire la velocità caso per caso, cioè prima per il moto equabile, poi per il moto equabilmente vario, poi per gli altri moti in generale.

In questa " noticina " applicherò questo mio " modo di vedere " ai moti più semplici.

Moto equabile.

1. Il moto di un punto si dice *equabile* quando gli spazi percorsi dal mobile in successivi ed uguali intervalli di tempo comunque piccoli, sono uguali.

2. Sia σ lo spazio percorso dal mobile nell'intervallo di tempo τ, saranno 2σ, 3σ, 4σ... $n\sigma$ gli spazi percorsi nei tempi 2τ, 3τ, 4τ,... $n\tau$ e saranno $\frac{\sigma}{2}$, $\frac{\sigma}{3}$,... $\frac{\sigma}{n}$ gli spazi percorsi nei tempi $\frac{\tau}{2}$, $\frac{\tau}{3}$, ... $\frac{\tau}{n}$

con n intero; lo spazio percorso nel tempo $\frac{m}{n}\tau$ cioè $m\left(\frac{\tau}{n}\right)$ sarà $m\left(\frac{\sigma}{n}\right)=\frac{m}{n}\sigma$; lo spazio percorso in un tempo compreso tra $r\tau$ ed $s\tau$, con r ed s razionali, sarà compreso tra $r\sigma$ ed $s\sigma$.

Ne segue che se x è un numero qualunque, anche irrazionale, posto

$$t=x\tau \qquad s=x\sigma$$

se σ è lo spazio percorso nel tempo τ, sarà s lo spazio percorso nel tempo t.

Ne consegue che:

$$s=\left(\frac{t}{\tau}\right)\sigma.$$

Posto per convenzione:

$$\left(\frac{t}{\tau}\right)\sigma=\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)t \qquad \text{sarà:} \qquad s=\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)t.$$

Posto

$$\frac{\sigma}{\tau}=v$$

sarà

$$s=vt.$$

3. L'espressione $\frac{\sigma}{\tau}$ che abbiamo indicato colla lettera v è una grandezza che si chiama la *velocità* del moto equabile. Essa è indipendente dallo spazio e dal tempo considerati separatamente, ma rappresenta la loro reciproca relazione in un moto equabile.

Diremo dunque che:

Velocità di un moto equabile è il rapporto costante che passa nel moto equabile tra lo spazio percorso ed il tempo impiegato a percorrerlo.

4. La velocità è una grandezza che non è spazio e non è tempo; moltiplicata per un tempo produce uno spazio; essa è uno spazio diviso per un tempo, (1) è ciò indicheremo scrivendo:

Velocità = spazio / tempo.

---

(1) Varie sono le grandezze che si possono definire mediante il rapporto di due altre; la Fisica ce ne offre parecchi esempi:

Densità = Massa / Volume
Peso specifico = Peso / Volume ecc.

e fuori della Fisica abbiamo per esempio:

Prezzo = Valore della merce / Volume

oppure

Prezzo = Valore della merce / Peso;

così lo stipendio o salario di un lavoratore è un valore diviso per un tempo, ed è pure un valore diviso per un tempo l'interesse di un capitale.

Acquistano così un significato ben preciso le frasi: Il peso specifico del mercurio è di kg. 13,50 dm³. Il prezzo dell'oro è di L. 3/gramma; la paga di un operaio è di L. 5/giorno; lo stipendio di un impiegato è di L. 3500/anno, ecc.

Nel sistema assoluto sarà:

Unità di velocità = unità di spazio / unità di tempo.

Nel sistema c. g. s. si dovrà porre:

Unità di velocità = centimetro / secondo.

5. I Fisici potrebbero dare un nome a questa unità e chiamarla per esempio *Cine* e porre:

$$\text{cine} = \text{cm/s} = \text{cm}/\tfrac{1}{60}\ \text{minuto} = 60\ \text{cm/minuto} = 36\ \text{m/hora ecc.}$$
$$\text{megacine} = 10^6\ \text{cine} = 10\ \text{km/s} = 36000\ \text{km/h},$$
$$\text{microcine} = 10^{-3}\ \text{cine} = 36\ \text{mm/h}.$$

Il segno / si legge comunemente *al* oppure *ogni* e funziona nei calcoli come segno di divisione.

6. *Velocità media* nel *moto vario.* — Nel moto che non è equabile, e che si dice vario, gli spazi percorsi in due intervalli di tempo uguali possono non essere uguali. La differenza tra gli spazi percorsi in due tempi uguali dipende dall'ampiezza comune a questi intervalli, ed anche dalla loro posizione nel tempo.

Si chiama *velocità media* di un moto vario, relativa ad un intervallo di tempo, lo spazio percorso in un dato tempo diviso per quel l'intervallo di tempo.

La velocità media di un automobile che ha fatto km 630 in 7 ore, è:

$$\text{km. } 630/7\ \text{h} = (630 : 7)\ \text{km/h} = 90\ \text{km./h} = 2500\ \text{cine}.$$

Moto equabilmente vario.

7. Il moto *equabilmente vario* è quello in cui gli spazi percorsi dal mobile nei successivi ed uguali intervalli del tempo sono in progressione aritmetica.

I successivi intervalli di tempo possono essere piccoli quanto si vuole, purchè rimangano uguali, e si considerino nell'ordine naturale di successione.

Questo fatto si può constatare sperimentalmente, ed il Fisico che osserva il moto rettilineo di un punto, può misurare gli spazi percorsi dal mobile nei successivi secondi, o nelle successive parti aliquote del secondo, avvertire se essi sono o no in progressione aritmetica, e quindi affermare se il moto è o no equabilmente vario. Il Fisico può con apparecchi speciali, macchina d'Attwood, piano inclinato di Galileo ecc., produrre moti che soddisfino alla definizione del moto eq. vario, e quindi verificarne e dimostrarne sperimentalmente anche le altre leggi, che conseguono logicamente dalla definizione.

8. *Accelerazione.* — Sia δ la ragione della progressione degli spazi relativi a successivi intervalli di tempo di ampiezza τ, e sia s_1 lo spazio percorso dal mobile nel primo intervallo; gli spazi percorsi in n successivi intervalli saranno:

$$s_1, \quad s_1+\delta, \quad s_1+2\delta, \quad s_1+3\delta \ldots s_1+(n-1)\delta.$$

Gli spazi percorsi dallo stesso mobile in intervalli di ampiezza 2τ saranno:

$$2s_1+\delta, \quad 2s_1+5\delta, \quad 2s_1+9\delta, \ldots$$

e la ragione della nuova progressione è 4δ.

La ragione corrispondente ad intervalli di ampiezza 3τ sarà:

$$\begin{aligned} &(s_1+3\delta)+(s_1+4\delta)+(s_1+5\delta)\\ &\quad -s_1-(s_1+\delta)-(s_1+2\delta)=\\ &= 3\delta+3\delta+3\delta=9\delta. \end{aligned}$$

La ragione corrispondente ad intervalli di ampiezza $n\tau$ sarà $n^2\delta$; infatti:

$$\begin{aligned} &(s_1+n\delta)+(s_1+n\delta+\delta)+(s_1+n\delta+2\delta)+\ldots+(s_1+n\delta+n\delta-\delta)-\\ &-s_1-(s_1+\delta)-(s_1+2\delta)-\ldots-(s_1+n\delta-\delta)-\\ &=n\delta+n\delta+n\delta+\ldots+n\delta=n^2\delta. \end{aligned}$$

Sia δ' la ragione corrispondente all'intervallo di ampiezza τ/n; la ragione corrispondente all'intervallo $n(\tau/n)$ cioè τ che è δ, sarà $n^2\delta'$, ossia

$$n^2\delta'=\delta; \qquad \delta'=\delta/n^2.$$

Ne consegue che:

Ad intervalli	di tempo	di ampiezza	τ	corrisponde	la ragione	δ
"	"	"	τ/n	"	"	δ/n^2
"	"	"	$m(\tau/n)$	"	"	$m^2(\delta/n^2)$.

Se r è un razionale, ad intervalli di tempo di ampiezza $r\tau$ corrisponde una ragione $r^2\delta$; ad ogni intervallo maggiore o minore di $r\tau$ corrisponde una ragione maggiore o minore di $r^2\delta$.

Ne consegue che, se x è un numero qualunque anche irrazionale, e δ è la ragione corrispondente all'intervallo τ, sarà $x^2\delta$ la ragione corrispondente all'intervallo $x\tau$, cioè *mentre l'intervallo di tempo varia nel rapporto* $\mathbf{x}$, *la ragione corrispondente varia nel rapporto* $\mathbf{x}^2$ ".

Posto:

$$t=x\tau, \qquad d=x^2\delta$$

sarà:

$$d=\left(\frac{t}{\tau}\right)^2\delta.$$

che si può scrivere per convenzione:

$$d=\left(\frac{\delta}{\tau^2}\right)t^2.$$

Il rapporto $\frac{\delta}{\tau^2}$ si chiama *accelerazione* del moto equabilmente vario. La indicheremo colla lettera a cioè porremo:

$$\frac{\delta}{\tau^2} = \frac{d}{t^2} = a \qquad \text{ossia:} \qquad d = at^2, \qquad \delta = a\tau^2.$$

9. I risultati precedenti si possono riepilogare nella seguente *proposizione*: *Nel moto equabilmente vario la ragione della progressione degli spazi percorsi dal mobile in successivi ed uguali intervalli del tempo ha un rapporto costante col quadrato dell'intervallo stesso, e questo rapporto costante è l'accelerazione del moto equabilmente vario.*

10. L'accelerazione è una grandezza fisica diversa dalla velocità, dallo spazio e dal tempo; è indipendente dallo spazio e dal tempo considerati separatamente, produce uno spazio quando è moltiplicata per il quadrato di un tempo; sarà dunque:

Accelerazione = spazio / (tempo)^2.

Nel sistema assoluto sarà:

Unità di accelerazione = Unità di spazio / (Unità di tempo)^2.

Nel sistema c. g. s. si dovrà porre:

Unità di accelerazione = cm. / (secondo)^2 = cine / (secondo).

11. Anche questa unità meriterebbe di essere chiamata con un nome solo e designata con un simbolo. Senza di ciò per indicare una accelerazione bisogna enunciare un numero e due grandezze di cui la seconda al quadrato.

Per es. l'accelerazione dei gravi a Torino è di circa 980 cm. / (secondo)^2 che alcuni leggono 980 cm. per secondo, altri 980 cm. per secondo al secondo, e che si potrebbe leggere 980 cm. per ogni quadrato di secondo, oppure 980 *cine* per secondo.

Questo *dato* significa che un grave che cade verticalmente nel vuoto a Torino percorre spazi che crescono di circa m. 9,80 per secondo, e di m. 9,8 $\times$ 3600 ossia di Km. 35,280 circa per minuto ecc.

12. *Formola degli spazi.* — Siano τ e t due intervalli di tempo contati nel medesimo senso a partire dallo stesso istante iniziale, e siano σ ed s gli spazi percorsi dal mobile in un moto equabilmente vario di accelerazione a nei tempi τ e t; sarà:

$$\frac{s - \frac{1}{2}at^2}{t} = \frac{\sigma - \frac{1}{2}a\tau^2}{\tau}. \tag{1}$$

Dimostrazione. — 1°. Sia $\frac{t}{\tau}$ un numero intero. Nei successivi intervalli di ampiezza τ, gli spazi percorsi dal mobile saranno in progressione aritmetica, ed il primo termine sarà σ, la ragione sarà $a\tau^2$ ed il numero dei termini $\frac{t}{\tau}$, quindi per una nota formola sarà:

$$s = \frac{t}{\tau}\sigma + \frac{1}{2}a\tau^2 \frac{t}{\tau}\left(\frac{t}{\tau} - 1\right) = \left(\frac{\sigma}{\tau} - \frac{1}{2}a\tau\right)t + \frac{1}{2}at^2$$

da cui:

$$\frac{s - \frac{1}{2}at^2}{t} = \frac{\sigma}{\tau} - \frac{1}{2}a\tau = \frac{\sigma - \frac{1}{2}a\tau^2}{\tau}.$$

2°. Sia $\frac{\tau}{t}$ un numero intero. Scambiando nella dimostrazione precedente t con τ ed s con σ si ritrova la stessa formola.

3°. Sia $t/\tau = m/n$ con m ed n interi. Posto

$$\tau' = \tau/n,$$

considero i tempi

$$\tau, \qquad \tau', \qquad t$$

e gli spazi corrispondenti:

$$\sigma, \qquad \psi, \qquad s.$$

Siccome τ/τ' è intero, sarà:

$$\frac{\sigma - \frac{1}{2}a\tau^2}{\tau} = \frac{\psi - \frac{1}{2}a\tau'^2}{\tau'},$$

e siccome anche t/τ' è intero, sarà:

$$\frac{s - \frac{1}{2}at^2}{t} = \frac{\psi - \frac{1}{2}a\tau'^2}{\tau'} \qquad \text{quindi:} \qquad \frac{s - \frac{1}{2}at^2}{t} = \frac{\sigma - \frac{1}{2}a\tau^2}{\tau}.$$

La formola (1) è così dimostrata quando il rapporto t/τ è razionale, e si può facilmente estendere anche al caso in cui t/τ è irrazionale.

Risulta dalla (1) che $(s - \frac{1}{2}at^2)/t$ è costante rispetto a t; questa costante è una velocità perchè spazio / tempo e lo indicheremo con u; cioè porremo:

$$u = \frac{\sigma - \frac{1}{2}a\tau^2}{\tau} = \frac{s - \frac{1}{2}at^2}{t}.$$

Se ne deduce:

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \tag{2}$$

che è la *formola degli spazi*.

13. *Velocità iniziale.* — Cerchiamo nella (2) il significato della costante u. Poniamo in essa

$$a = 0$$

sarà:

$$s = ut$$

formola corrispondente ad un moto equabile di velocità u. Ne consegue che:

Se a partire dall'istante iniziale si suppone nulla l'accelerazione, il moto del punto è equabile, ed u *è la velocità di questo moto equabile.*

Questa velocità è indipendente da t, ma non è indipendente dall'istante iniziale a partire dal quale si contano i tempi, perciò si chiama *velocità iniziale.*

14. *Velocità del mobile alla fine del tempo* t. — Chiamo velocità del mobile alla fine del tempo t quella velocità che è iniziale *rispetto ai tempi che seguono* t.

Detta V questa velocità, per calcolarla applico la formola

$$V = \frac{\sigma - \frac{1}{2} a\tau^2}{\tau} = \frac{\sigma}{\tau} - \frac{1}{2} a\tau$$

dove σ rappresenta lo spazio percorso dal mobile nel primo intervallo di ampiezza τ che segue t, cioè rappresenta lo spazio percorso dal tempo t al tempo $t + \tau$.

Sarà dunque:

$$\sigma = [u(t+\tau) + \tfrac{1}{2} a (t+\tau)^2] - [ut + \tfrac{1}{2} at^2] =$$
$$= u\tau + at\,\tau + \tfrac{1}{2} a\tau^2 = (u + at + \tfrac{1}{2} a\tau)\,\tau$$

e quindi:

$$V = u + at. \tag{3}$$

15. Colle due formole:

$$\left.\begin{aligned} s &= ut + \tfrac{1}{2} at^2 \\ V &= u + at \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

si possono determinare e discutere tutti i particolari del moto. Ad esse conviene aggiungere quella che si deduce eliminando il t. Si ha:

$$s = \frac{1}{2} at\left(t + \frac{2u}{a}\right) = \frac{1}{2} a \left[\left(t + \frac{u}{a}\right)^2 - \frac{u^2}{a^2}\right]$$

e quindi:

$$s = \frac{1}{2a} (V^2 - u^2). \tag{5}$$

16. Caso particolare. — Può avvenire che sia $u = 0$ e le formole (4) e (5) diventano:

$$V = at, \qquad s = \frac{1}{2} at^2, \qquad s = \frac{V^2}{2a}. \tag{6}$$

17. Si può supporre a negativa, e sostituirla nelle formole con $-a$; esse diventano:

$$\left.\begin{aligned} V &= u - at \\ s &= ut - \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2a} (u^2 - V^2) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

e corrispondono all'ipotesi che la progressione degli spazi sia *decrescente*. In questa ipotesi il moto si suol chiamare *uniformemente ritardato*. Esiste un istante in cui $V = 0$ ed è l'istante $t = \frac{u}{a}$. In questo istante s raggiunge il suo valore massimo che è $u^2/2a$.

Posto:

$$T = u/a, \qquad S = u^2/2a$$

si ha:

$$V = a(T - t); \qquad s = S - \frac{a}{2} (T - t)^2 = S - V^2/2a$$

ossia:

$$S - s = \frac{a}{2} (t - T)^2 = V^2/2a \tag{8}$$

$S - s$ rappresenta lo spazio percorso dal mobile dopo il tempo T, spazio che è in senso opposto di quello descritto primo di T.

Posto:

$$S - s = s_1 ; \qquad t - T = t_1 , \qquad - V = V_1$$

si ha:

$$s_1 = \tfrac{1}{2} a t_1^2 = V_1^2 / 2a ; \qquad V_1 = a t_1 ,$$

formole che corrispondono ad un moto uniformemente vario in cui la velocità iniziale è zero.

In questo moto la progressione degli spazi è crescente, ed il moto si chiama *uniformemente accelerato*.

18. Dalla (8) si deduce:

$$t = T \pm \sqrt{2(S - s)/a}$$
$$V = \pm \sqrt{2a(S - s)}$$

e si vede che ad ogni valore di s minore di S corrispondono per V valori eguali ed opposti, e per t valori ugualmente lontani in più od in meno da T.

Si può quindi affermare che: " Se a partire da un dato istante il moto di un punto è rettilineo ed uniformemente ritardato, il mobile si muoverà con un moto uniformemente ritardato verso un punto che chiamerò *vertice*, in cui giungerà con velocità zero; dopo aver raggiunto il vertice il mobile *retrocede* con moto uniformemente accelerato, e ripassa per gli stessi punti, attraversati nel moto diretto, colla stessa velocità ed in istanti ugualmente lontani da quello in cui ha raggiunto il vertice. I tratti di traiettoria rettilinea compresi tra il vertice ed un punto qualunque della medesima sono proporzionali ai quadrati dei tempi impiegati a percorrerli, sia nel moto diretto ritardato, sia nel moto retrogrado accelerato ".

F. Castellano.

UNICITÀ DELL'INTEGRALE IN ALCUNI TIPI DI EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

1. In una Nota presentata all'Istituto Veneto [1] ho dimostrate le due seguenti proposizioni:

I. Data l'equazione alle derivate parziali di ordine n

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^m \partial y^{n-m}} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q}, \ldots\right)$$

[1] *Esistenza degli integrali in alcuni tipi di equazioni alle derivate parziali.* " Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti ". Tomo LXVII, parte seconda.

ove p non può superare $m-1$ e q non può superare $n-m$, ed in cui f è simbolo di funzione continua e finita rispetto a tutti gli argomenti che contiene, rispetto ai quali — ad eccezione di x — ha rapporti incrementali parziali inferiori, in modulo, ad un numero positivo assegnabile S, sempre esiste una funzione $z\,(x, y)$ finita e continua insieme con le derivate parziali degli indici suddetti che soddisfa all'equazione proposta; e di più è per $x = x_0$

$$\frac{\partial^{m-i} z}{\partial x^{m-i}} = \varphi_i\,(y) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots m)$$

e per $y = y_0$

$$\frac{\partial^{n-m-i}}{\partial y^{n-m-i}} = \psi_i\,(x) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n-m)$$

essendo le $\varphi_i\,(y)$ e le $\psi_i\,(x)$ funzioni prefissate ad arbitrio, supposte finite e continue e derivabili $n-m-1$ volte quelle di y ed $m-1$ volte quelle di x e di più soddisfacenti alle relazioni

$$\varphi_k^{(n-m-h)}\,(y_0) = \psi_h^{(m-k)}\,(x_0) \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots m \\ h = 1, 2, \ldots n-m \end{pmatrix}$$

essendo $x_0 y_0$ un punto del campo. (¹)

II. Data l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^m \partial y^{n-m+1}} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots \frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q}, \ldots\right)$$

ove p non può superare $m-1$ e q non può superare $n-m$ ed in cui f è simbolo di funzione continua rispetto a tutti i suoi argomenti, sempre esiste una funzione $z = z\,(x, y)$ che la soddisfa ed è finita e continua essa e le derivate parziali degli indici che compaiono nell'equazione e di più sono soddisfatte le uguaglianze

$$\frac{\partial^{m-i} z}{\partial x^{m-i}} = \varphi_i\,(y) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots m)$$

per $x = x_0$; e

$$\frac{\partial^{n-m+1-i} z}{\partial y^{n-m+1-i}} = \psi_i\,(x) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots n-m+1)$$

per $y = y_0$, ove le $\varphi_i\,(y)$ e le $\psi_i\,(x)$ sono funzioni prefissate ad arbitrio, purchè continue, derivabili $n-m$ volte quelle di y, $m-1$ volte quelle di x e di più soddisfacenti alle relazioni

$$\varphi_k^{(n-m+1-h)}\,(y_0) = \psi_h^{(m-k)}\,(x_0) \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots n-m+1 \\ k = 1, 2, \ldots m \end{pmatrix}$$

$x_0 y_0$ essendo un punto del campo in cui la f soddisfa alle dette condizioni.

(¹) Si intende che o p o q raggiungano il valore massimo indicato nell'enunciato, altrimenti la proposizione I è sostituita dalla II.

2. Ora qui mi propongo di provare che

se per entrambi i tipi di equazioni s'ammettono verificate per la f le condizioni espresse nella proposizione I, *prescindendo dalla finitezza dei rapporti incrementali rispetto ad* y, *la funzione* z *che soddisfa all'equazione ed alle condizioni ai limiti enunciate, è unica.*

E codesta dimostrazione noi faremo seguendo la via tracciata da Goursat nello stabilire la unicità della soluzione in un'equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

ammessa la condizione di Lipschitz. (1)

Ci limiteremo, per mera comodità, ad un'equazione del 2° ordine ma la stessa dimostrazione è estendibile ai tipi generali di equazioni da noi considerate.

Sia dunque data l'equazione

$$\frac{\partial^2 z}{dx\, dy} = f\left(x, y, z, \frac{dz}{dy}\right)$$

ove f è funzione finita e continua in un certo campo Δ rispetto ai quattro argomenti che contiene ed ha rapporti incrementali parziali rispetto agli ultimi due argomenti che in modulo non superano un numero positivo S.

In virtù della proposizione I esiste una funzione $z(x, y)$ finita e continua essa, le derivate parziali prime e la seconda mista, che soddisfa all'equazione proposta e che per $x = x_0$ diviene uguale a $\varphi(y)$ e per $y = y_0$ a $\psi(x)$, essendo $\varphi(y_0) = \psi(x_0)$.

Se noi poniamo

$$z = \int_{y_0}^{y} u(x, y)\, dy + \psi(x)$$

con u nuova funzione incognita, la u stessa dovrà soddisfare all'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f\left(x, y, \int_{y_0}^{y} u(x, y)\, dy + \psi(x), u\right) \qquad (\alpha)$$

e perchè siano soddisfatte le condizioni ai limiti da noi imposte per la z, bisognerà che la u sia tale che per $x = x_0$ si riduca a $\varphi'(y)$, perchè allora

$$z(x_0 y) = \int_{y_0}^{y} u(x_0 y)\, dy + \psi(x_0) = \varphi(y) - \varphi(y_0) + \psi(x_0) = \varphi(y)$$

---

(1) GOURSAT. *Cours d'Analyse Mathématique*. Tome II, pag. 372.

e d'altra parte

$$z(x, y_0) = \psi(x).$$

Ora nella nota citata abbiamo fatto vedere che la successione di funzioni

$$u_1 = 0, \qquad u_2(x, y), \qquad u_3(x, y), \ldots u_n(x, y), \ldots$$

definita da

$$u_n(x, y) = \int_{x_0}^{x} f\left(x, y \int_{y_0}^{y} u_{n-1}(x, y)\, dy + \psi(x), u_{n-1}(x, y)\right) dx + \varphi'(y)$$

tende in un determinato rettangolo di vertice inferiore sinistro $x_0 y_0$ (contenuto in Δ), ad una funzione limite continua $U(x, y)$ che soddisfa all'equazione (α) e per $x = x_0$ si riduce a $\varphi'(y)$.

Codesta funzione U è unica: supponiamo, se è possibile, che vi sia un'altra funzione U_1 soddisfacente alla stessa equazione e alle stesse condizioni; sarà intanto,

$$U_1(x, y) = \int_{x_0}^{x} f\left(x, y \int_{y_0}^{y} U_1(x, y)\, dy + \psi(x), U_1\right) dx + \varphi'(y).$$

Ne discende che

$$U_1(x, y) - u_n(x, y) = \int_{x_0}^{x} \left[f\left(x, y, \int_{y_0}^{y} U_1(x, y)\, dy + \psi(x), U_1(x, y)\right) - \right.$$

$$\left. - f\left(x, y, \int_{y_0}^{y} u_{n-1}(x, y)\, dy + \psi(x), u_{n-1}(x, y)\right)\right] dx.$$

Ma, indicando con M il massimo modulo di U_1 nel rettangolo detto,

$$|U_1 - u_2| \leqslant S \int_{x_0}^{x} \left[\left| \int_{y_0}^{y} U_1(x, y)\, dy \right| + \left| U_1 \right| \right] dx \leqslant$$

$$\leqslant SM(y - y_0)(x - x_0) + M(x - x_0)$$

e così

$$|U_1 - u_3| \leqslant S^2 M \frac{(x - x_0)^2}{2!} \left[(y - y_0) + \frac{(y - y_0)^2}{2!}\right] + SM \frac{(x - x_0)^2}{3!} [1 + (y - y_0)]$$

$$|U_1 - u_4| \leqslant S^3 M \frac{(x - x_0)^3}{3!} \left[(y - y_0) + 2\frac{(y - y_0)^2}{2!} + \frac{(y - y_0)^3}{3!}\right] +$$

$$+ S^2 M \frac{(x - x_0)^3}{3!} \left[1 + 2(y - y_0) + \frac{(y - y_0)^2}{2!}\right]$$

ed in generale

$$|U_1 - u_n| \leqslant S^{n-1} M \frac{(x - x_0)^{n-1}}{n - 1!} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-2}{i-1} \frac{(y - y_0)^i}{i!} +$$

$$+ S^{n-2} M \frac{(x - x_0)^{n-1}}{n - 1!} \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} \frac{(y - y_0)^i}{i!}.$$

Se indichiamo con K la maggiore delle due differenze $x-x_0$, $y-y_0$ abbiamo a fortiori

$$|U_1-u_n| \leqq S^{n-1}M\frac{K^n}{n-1\,!}(1+K)^{n-2}+S^{n-2}M\frac{K^{n-1}}{n-1\,!}(1+K)^{n-2}=$$

$$=\frac{(SK+SK^2)^{n-2}}{n-2\,!}\cdot\frac{M(SK^2+K)}{n-1}.$$

Facendo tendere n all'infinito, il secondo membro tende manifestamente allo zero, epperò

$$\lim_{n=\infty}|U_1-u_n|=0$$

ciò che mostra l'identità della funzione U_1 colla U come dovevasi dimostrare.

F. Sibirani.

IL SENOVERSO[1]

1. Sino alla fine del IX secolo, nella risoluzione dei triangoli piani e sferici, si ricorreva per ogni angolo α a una sola funzione trigonometrica: la corda MN[2], che sottende il doppio dell'arco corrispondente[3].

A questa funzione il celebre astronomo arabo Albatani (880-928)[4] sostituì la metà PM, e la parola (di origine indiana), colla quale egli la indicò, fu poi latinamente tradotta colla parola *sinus* (pag. 17, T.)[5]. Egli inoltre considerò un'altra funzione: il segmento PA, che fu poi chiamato *sinusversus*; per opposizione, si chiamò allora *sinus rectus* il seno PM e *sinus totus*, o *sinus perfectus*, il raggio OA[6].

---

(1) Avendo visto che in alcuni trattati di *Navigazione*, specialmente inglesi, si fa uso delle funzioni *verse*, e che questo uso si vorrebbe ora, da qualcuno, estendere anche fra noi, mi sono chiesto se sarebbe stato opportuno considerare in *Trigonometria* anche queste antiche funzioni. Credo non del tutto inutile pubblicare qui i risultati delle mie ricerche, assieme alle conclusioni a cui essi mi hanno condotto. Le notizie storiche, delle quali non è citata la fonte, sono state dedotte principalmente, dalla *Histoire de l'Astronomie* di Delambre e dalle *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* di Braunmühl. Lipsia, ed Teubner.

(2) Si prega il lettore di fare la figura: perciò, tracciato un circolo di centro O e fissata in esso l'origine A degli archi, segni il diametro AOA_1 e il diametro ad esso perpendicolare BOB_1 (prendendo per punto B l'estremo dell'arco che ha per misura $\frac{1}{2}\pi$); poscia, scelto un arco qualunque AM (l'angolo AOM sarà l'angolo α qui considerato), da M conduca le perpendicolari MP e MQ al diametro AA_1 e il diametro BB_1 rispettivamente; prolunghi finalmente MP sino ad incontrare nuovamente il circolo in N.

(3) Per brevità dico *la corda* MN, anzichè *la misura della corda* MN *rispetto al raggio*; analogamente in seguito.

(4) In latino: Albategnius. Fu così soprannominato perchè nacque a *Batan*, città della Mesopotamia, ma il suo vero nome era Mohammed ben Geber.

(5) Le citazioni così controsegnate si riferiscono al mio *Trattato elementare di Trigonometria* (II ed., 1904).

(6) Il senoverso non è dunque altro che la *saetta* dell'arco doppio; ed è appunto questa la denominazione che usò Fibonacci (n. 1175).

L'uso di queste due funzioni semplificò molto sensibilmente i metodi precedentemente usati dai Greci per la risoluzione dei triangoli: fu poi con esse che l'ALBATANI riescì ad esprimere la relazione fra i tre lati e un angolo di un triangolo sferico [1], la quale permise di risolvere il triangolo stesso direttamente, senza cioè ricorrere alla scomposizione in due triangoli rettangoli [2].

2. Circa un secolo dopo, altri due astronomi, arabi anch'essi, ABOUL WEFA (937-998) e IBN JOÛNIS (979-1008) considerarono tre nuove funzioni: l'*umbra recta*, l'*umbra versa* (o *umbra prima*) e il *diameter umbrae*, che corrispondono, rispettivamente, alla cotangente, alla tangente e alla secante, e le cui denominazioni sono, evidentemente, di origine astronomica. E fu questa una idea fortunatissima, perchè così si poterono facilitare e abbreviare notevolissimamente molti calcoli astronomici (p. es.: quelli in cui compariva il rapporto fra il seno dell'incognita e il seno del complemento dell'incognita stessa). Le moderne denominazioni *tangente* e *secante* (di origine geometrica, (pag. 22, T.) sono dovute al medico danese FINK (1514-1576).

Oltre le cinque funzioni precedenti, un'altra ne era stata considerata fin dagli Indiani: la metà della corda del supplemento dell'arco doppio, la quale corrisponde al coseno. Gli Arabi non se ne servirono, ma fu poi richiamata in uso e VIETA [3] la chiamò *sinus residuae*.

In quanto alle denominazioni delle funzioni complementari (delle quali ho fin qui nominate solo la cotangente e il coseno) ricordo che CAVALIERI (1598-1647) [4] propose di distinguere le funzioni seno, tan-

---

[1] Erroneamente attribuito al EULERO.

[2] La risoluzione di un triangolo qualunque, piano o sferico, mediante la scomposizione in due triangoli rettangoli presentava gravi difficoltà quando i dati erano i tre lati (il caso, in cui di un triangolo sferico siano dati i tre angoli, dagli antichi non fu considerato mai).

Per il triangolo piano TOLOMEO conosceva la relazione che passa fra i tre lati e la differenza dei segmenti determinati dalla perpendicolare abbassata da un vertice C sul lato opposto, relazione che colle solite notazioni (§ 129, T.) si può ora esprimere così

$$n - m = \frac{(a-b)(a+b)}{c};$$

quindi, essendo nota $n + m = c$, egli poteva calcolare n ed m e poscia α e β. (È notevole, a questo proposito, la dimostrazione *geometrica* che TOLOMEO dette della eguaglianza $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$).

Anche per il caso analogo della *Trig. sferica* egli ricorreva alla considerazione dei due segmenti, in cui è diviso un lato da uno dei due archi di circolo massimo ad esso perpendicolari e passanti per il vertice opposto (§ 223, T.); ma il suo procedimento è molto più complicato del precedente, e inoltre egli non dimostra e neppure enuncia la relazione di cui si serve.

La relazione corrispondente a quella usata per i triangoli piani, sopraindicata, si sa ora essere (eserc. 2140, T.)

$$\tan \tfrac{1}{2}(n - m) = \frac{\tan \frac{1}{2}(a-b) \tan \frac{1}{2}(a+b)}{\tan \frac{1}{2} c}.$$

[3] Chiamò anche *prosinus* e *amsinus* la tangente, *transsinuosia* e *prosemidiametri* la secante. Questo matematico francese (1540-1603) fu il più grande geometra de' suoi tempi, e dette per primo le formule analitiche generali che servono alla risoluzione di tutti i triangoli piani e sferici.

[4] Fu allievo di GALILEO e col suo famoso metodo degli indivisibili aprì la via alla invenzione del *Calcolo integrale*. Ricordiamo anche che nella sua *Trigonometria plana et sphaerica* (Bologna, 1635), trovasi molto probabilmente per la prima volta, la formula che dà l'area del triangolo sferico in funzione dell'eccesso.

gente, secante e senoverso dalle rispettive complementari, aggiungendo a ognuna di quelle il qualificativo di *prima* e ad ognuna di queste il qualificativo di *secunda* (onde, p. es., *tangens prima* e *tangens secunda* sarebbero, rispettivamente, la nostra tangente e la nostra cotangente); e che le moderne denominazioni coseno, cotangente e cosecante (di ovvia etimologia) sono invece dovute a GUNTER (1581-1626) [1].

3. Prescindendo dalle funzioni complementari, sono dunque quattro le funzioni trigonometriche, delle quali occorrerebbe conoscere i valori corrispondenti ad ogni valore dell'arco.

Ma le prime tavole trigonometriche complete, calcolate *cum incredibili labore* da RETICO (1514-1576) [2], danno solo i valori del seno, della tangente e della secante [3] (di 10″ in 10″ con dieci cifre). Ciò prova che fin d'allora non si ritenne necessario l'uso del senoverso; e infatti questa funzione divenne pressochè inutile, dopo la introduzione del seno del complemento. Più tardi però furono pubblicate delle tavole contenenti anche i seniversi: le prime, di cui abbiamo notizie, sono quelle che l'astronomo MAGINI pubblicò a Bologna nel 1509.

Altrettanto si può osservare per le tavole logaritmo-trigonometriche. Le prime sono quelle dell'olandese VLACQ (m. 1600?) e contengono il seno, la tangente e la secante coi loro logaritmi, ma non contengono nè il senoverso, nè il suo logaritmo. E non li contennero neppure tutte le altre grandi tavole del GARDINER, del VEGA, del CALLET, ... che vennero dopo. Le tavole che contennero anche i logaritmi dei seniversi furono pochissime e poco note: le prime furono indubbiamente quelle che il CAVALIERI [4] pubblicò a Bologna nel 1632 [5].

Da quanto precede risulta intanto che fin dal secolo XVII l'uso del senoverso non era, generalmente, ritenuto necessario.

4. Molto tempo dopo, la risoluzione di un importante problema di *Navigazione*, il calcolo del tempo mediante le distanze lunari, richiamò in uso il senoverso e il suo logaritmo, e si pubblicarono per essi delle tavole complete e disposte come le tavole logaritmo-trigonometriche moderne.

---

(1) A questo matematico inglese è dovuta la prima idea del regolo logaritmico, il quale in Inghilterra porta anche ora il suo nome.

(2) Così chiamato perchè nacque nella Rezia, ma il suo vero nome era JOAQUIM.

(3) Che REZIO chiamò, rispettivamente, *perpendicolare, base* e *ipotenusa*. Egli calcolò i seni anche con quindici cifre; il manoscritto che li conteneva era stato perduto e fu casualmente trovato dal matematico tedesco PITISCO (1561-1613), il quale ripubblicò, correggendolo ed estendendolo, il grande lavoro di RETICO.

(4) Il quale, come KEPLERO, chiamò *mesologarithmus* il logaritmo tangente, *tomo logarithmus* il logaritmo secante e *versi logarithmus* il logaritmo seno verso.

(5) Mi pare che il DELAMBRE non avesse sufficiente conoscenza dei lavori trigonometrici del CAVALIERI; infatti egli non accenna che alla *Trigonometria plana et sphaerica* che dichiara *un traité sommaire et superficiel*. Invece il BRAUNMÜHL ha dovuto citare tante volte l'umile fraticello che a un certo punto ha esclamato: *Doch kehren wir noch einmal zu Cavalieri zurück!*

Per ciò, oltre il senoverso PA di α, si considerò anche il senoverso di $\frac{1}{2}\pi - \alpha$, che si chiamò *cosenoverso* di α; poi, siccome i senoversi di archi supplementari non sono, in valore assoluto, eguali (contrariamente a quanto accade per le ordinarie sei funzioni trigonometriche), si considerano altre due funzioni: il senoverso di $\pi - \alpha$ e il senoverso di $\pi - (\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \frac{1}{2}\pi + \alpha$, che si chiamarono, rispettivamente, il *subsenoverso* e il *subcosenoverso* di α. Onde, raccogliendo e usando ovvie abbreviazioni, si ha

$$\begin{aligned}
\text{senv}\,\alpha &= 1 - \cos\alpha = 2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\alpha = PA\,, \\
\text{cosv}\,\alpha &= 1 - \text{sen}\,\alpha = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha = QB\,, \\
\text{s. senv}\,\alpha &= 1 + \cos\alpha = 2\,\text{sen}^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) = A_1P\,, \\
\text{s. cosv}\,\alpha &= 1 + \text{sen}\,\alpha = 2\cos^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) = B_1Q\,.
\end{aligned}$$

I valori di tutte queste funzioni si ebbero nella tavola del Guépratte (1), di 1′ in 1′ con sei cifre decimali; questa tavola è a due colonne: la prima contiene

$$\text{senv}\,\alpha = \text{cosv}\,(90^\circ + \alpha) = \text{cosv}\,(90^\circ - \alpha) = s\,.\,\text{senv}\,(180^\circ - \alpha)\,,$$

e la seconda contiene

$$\text{s. senv}\,\alpha = \text{s}\,.\,\text{cosv}\,(90^\circ + \alpha) = \text{s}\,.\,\text{cosv}\,(90^\circ - \alpha) = \text{senv}\,(180^\circ - \alpha);$$

quindi, per dare i valori di una di queste quattro funzioni da 0° a 180°, essa dovette essere estesa da 0° a 90°.

Invece di queste funzioni il Mendoza trovò più opportuno considerare le loro metà, che chiamò rispettivamente *verso*, *coverso*, *subverso* e *subcoverso*, e della quale dette i logaritmi di 15″ in 15″ e con cinque cifre decimali (2). Questa tavola è a quattro colonne, le quali danno rispettivamente (usando le notazioni del Mendoza stesso)

$$\begin{aligned}
\text{ver}\,\alpha &= \text{cov}\;\;(90^\circ + \alpha) = \text{cov}\;\;(90^\circ - \alpha) = \text{subv}\,(180^\circ - \alpha)\,, \\
\text{cov}\,\alpha &= \text{subv}\,(90^\circ + \alpha) = \text{ver}\;\;(90^\circ - \alpha) = \text{cov}\;\;(180^\circ - \alpha)\,, \\
\text{subv}\,\alpha &= \text{subc}\,(90^\circ + \alpha) = \text{subc}\,(90^\circ - \alpha) = \text{ver}\;\;(180^\circ - \alpha)\,, \\
\text{subc}\,\alpha &= \text{ver}\;\;(90^\circ + \alpha) = \text{subv}\,(90^\circ - \alpha) = \text{subc}\,(180^\circ - \alpha).
\end{aligned}$$

In esse quindi, potendo far variare α da 0° a 45° soltanto, si potè seguire una disposizione identica a quella che hanno ora le ordinarie tavole logaritmo-trigonometriche.

La tavola del Guépratte però fu presto abbandonata, quasi completamente, anche in Francia (3), e lo stesso Guépratte, appena tre-

(1) *Problèmes d'Astronomie nautique et de Navigation*. Brest, ed. Lefournier, 1839.

(2) *Coleccion completa de Tablas para los usos de la Navegacion*. Madrid, ed. Alegría, 1850. — Questa è l'edizione che ho sott'occhio, ma la prima fu pubblicata nel 1800 a Madrid, e altre due ne furono pubblicate a Londra nel 1805 e nel 1809. A conferma di quanto dicemmo alla fine del § prec., citiamo dalla prefazione queste parole, dette a proposito dell'uso del seno verso e del coseno verso ..... *lineas trigonométricas que, antes de él* (Mendoza), *se definian por todos, mas no se usaban por nadie*.

(3) Veggasi, p. es.: Chabirand e Brault, *Traité d'Astronomie nautique*. Parigi, ed. Bertrand, 1878, pag. 286.

dici anni dopo [1], sostituì a quella un'altra tavola, la quale dà il logaritmo del verso e del coverso soltanto.

Ed anche l'importanza della tavola del MENDOZA andò diminuendo, perchè, per il problema accennato, si ricorse ad altri metodi più solleciti [2]; ora poi, per lo scopo per il quale fu calcolata, non ha più ragion d'essere, perchè, sia per il perfezionarsi dei cronometri, sia per l'estensione sempre maggiore della geniale idea di SUMNER, il metodo delle distanze lineari è ormai caduto in obblio [3].

L'uso delle funzioni verse ricominciò dunque a non esser ritenuto necessario; e infatti, esaminando i moderni trattati di *Trigonometria*, si vede che molti neppur le nominano (LE COMTE, SERRET, HAMMER, BRIOT, COMBEROUSSE, HEIS, GUYOU, VACQUANT, ...), e che quelli che le nominano, non ne fanno poi uso mai (BALTZER, SCHLÖMILCH, CHAUVENET, KLEYER, CASEY, ...).

Solo in Inghilterra (quasi esclusivamente) non si volle abbandonare l'uso delle funzioni in discorso, specialmente nei calcoli nautici; è là che si trova l'unico trattato moderno di *Trigonometria* (di quelli a me noti) che del *verso* faccia un uso sistematico, e quel trattato è appunto il libro di testo del *Royal Naval College* di *Greenwich* [4]. Ma esaminiamo brevemente i principali calcoli in cui, ed ora non più in Inghilterra soltanto, si ricorre a quelle funzioni.

6. In quanto al senoverso naturale non conosco che un gruppo solo di formule, nelle quali, dagli Inglesi se ne faccia comunemente uso; queste formule sono quelle che servono per il calcolo della deviazione della bussola e sono tutte dello stesso tipo: basta dunque esaminarne una, p. es., questa

$$\mathfrak{G} = \operatorname{sen} B \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} D + \frac{1}{12} \operatorname{senv} B - \frac{1}{4} \operatorname{senv} C\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} C \operatorname{sen} E.$$

Ma perchè, per un tale calcolo, ricorrere anche a una tavola di seniversi naturali, anzichè servirsi della solo tavola che dà il seno (e quindi anche il coseno) e che è la metà dell'altra? La formula sarebbe allora

$$\mathfrak{G} = \operatorname{sen} B \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} D - \frac{1}{12} \cos B + \frac{1}{3} \cos C\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} C \operatorname{sen} E;$$

e non vedo che presenti inconvenienti di sorta. A meno che non si ritenga per un inconveniente il dovere tener conto del segno del coseno; ma non lo credo, perchè lo stesso inconveniente si presenta qui anche per il seno, potendo B, C, D, E essere negativi. Del resto, e questo

---

(1) *Manuel de Navigation.* Brest, ed. Lefournier, 1852.

(2) Veggasi, p. es., CATTOLICA, *Trattato di Navigazione.* Livorno, ed. Giusti, 1893.

(3) *Die Monddistanzen jedoch sind tatsächlich auf das Aussterbeetat gesetzt worden.* — GELCICH, *Das Ende der Monddistanzen.* Mitteilungen aus dem Gebiete des Seewesens, 1906.

(4) GOODWIN, *Plane and spherical Trigonometry.* London, ed. Longmans, 1891.

sia detto in generale, sono fermamente convinto che le piccole difficoltà, che presentano nella pratica i segni delle funzioni trigonometriche, spariranno completamente quando, per la definizione delle funzioni trigonometriche di un arco, si ricorrerà da tutti alle coordinate cartesiane dell'estremità dell'arco stesso (§§ 23 e 24, T.).

Molto più importanti sono i casi in cui delle funzioni verse si usa il logaritmo soltanto, oppure il logaritmo e il valore naturale insieme; esaminerò questi casi nei §§ seguenti. Qui aggiungo solo che non so di altri calcoli in cui, ora, si ricorra comunemente ai seniversi naturali (senza ricorrere anche ai loro logaritmi), ma che, se ne esistono, per ognuno di essi si potrà sempre ripetere la osservazione precedente (1).

7. Mi limiterò ai due principali calcoli in cui si fa uso dei logaritmi delle funzioni verse (2).

Il primo di questi calcoli è quello che dà l'angolo orario P in funzione della latitudine φ, dell'altezza h (o della distanza zenitale z) e della declinazione δ (§ 286, T.). Per ciò, dalla formula

$$\operatorname{sen} h = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos \mathrm{P}, \tag{1}$$

che si può scrivere

$$\operatorname{sen} h = \cos(\varphi - \delta) - 2\cos\varphi\cos\delta \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{P}, \tag{2}$$

si ha

$$2\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{P} = \frac{\cos(\varphi - \delta) - \operatorname{sen} h}{\cos\varphi\cos\delta}, \tag{3}$$

e questa si calcola in due modi.

Il primo, che è il più noto, consiste nel porla sotto la forma

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{P} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}[z + (\varphi - \delta)]\operatorname{sen}\frac{1}{2}[z - (\varphi - \delta)]}{\cos\varphi\cos\delta};$$

e qui può, evidentemente, essere comoda una tavola di logaritmiversi (per il calcolo inverso finale), risparmiando così una division per 2

---

(1) Relativamente all'uso dei valori naturali rimando il lettore a quanto già ne dissi in altra occasione (*Sull'uso e sulle tavole dei valori naturali delle funzioni trigonometriche*, "Periodico di Matematica", 1906). Ricordo che quest'uso dovette cessare da quando in tutte le tavole successive alla grande tavola di VLACQ quei valori sparirono completamente. Occorrendo eccezionalmente, il valore naturale del seno bisognava quindi ricavarlo dal corrispondente logaritmo; a meno che non si possedesse una tavola di funzioni verse naturali, chè allora bastava sottrarre il coseno verso dall'unità (GUÉPRATTE, l. c.).

Uno, che, pur essendo già in uso le tavole di NEPERO, seguitò a servirsi dei valori naturali, fu l'astronomo danese LONGOMONTANO (1564-1647). Di lui il DELAMBRE (*Hist. de l'A. M.*, vol. I, pag. 264) dice: "Il est singulier... qu'il ait cherché à prolonger l'usage de la prostaphérèse, lorsque les "astronomes étaient en possession des Tables logarithmiques de Néper. On tient à ses vieilles "habitudes, on devrait s'en défier un peu plus; et si l'on n'a pas le bon esprit d'y renoncer, il "faudrait se garder du moins de les trasmettre aux élèves, à qui l'on pout en indiquer de "meilleures". Parole d'oro queste ultime; nel nostro caso però non mi pare siano applicate giustamente del tutto, e ciò per le ragioni che ho addotte nella mia nota ora citata.

(2) A scanso di equivoci, avverto che in Inghilterra il *senoverso* e il *verso* si chiamano, rispettivamente, *versed sine* e *halfversins* e si indicano brevemente con *vers* e con *hav*. Avverto pure che in qualche pubblicazione tedesca ho visto indicare con *sem* (*semisinusversus*) e con *cosem* (*complementisemisinusversus*) il *verso* e il *subverso*. (Veggasi, p. es., A. WEDEMEYER, *Bemerkung über die Berechnung der Höhe eines Gestirns*, "Annalen der Hydrographie, 1902).

(del logaritmo del secondo membro) e una moltiplicazione per 2 (dell'arca ricavato dalle ordinarie tavole). E una tavola di logaritmi versi si trova ora, non solo nelle raccolte nautiche inglesi [1], ma anche nelle germaniche [2], nelle tedesche [3], nelle spagnole [4], nelle portoghesi [5]. Non si trova però nella raccolta del CAILLET [6], usata per lungo tempo in Francia e, anche ora, in Italia: è certo per ciò che in Francia e in Italia l'uso dei logaritmi versi, per i calcoli nautici, è stato finora pochissimo noto.

Il secondo modo, non molto noto, col quale si calcola la (3), consiste nel calcolare prima la differenza

$$\cos(\varphi - \delta) - \operatorname{sen} h, \tag{5}$$

mediante una tavola di valori naturali delle ordinarie funzioni trigonometriche, e nel continuare poi con una tavola di logaritmi dei numeri, una tavola di logaritmi delle ordinarie funzioni trigonometriche e una tavola di logaritmiseniversi. (Sono dunque *quattro* le tavole che occorrono, ma, quando esse siano opportunamente limitate [7], pare che questo non sia un inconveniente). E una tavola di logaritmiseniversi si ha, p. es., nella raccolta francese del SERRES [8] e in quella portoghese del DA MATTA [9].

Qualcuno ha anche proposto di mettere la differenza precedente sotto la forma

$$\operatorname{senv} z - \operatorname{senv}(\varphi - \delta), \tag{6}$$

e di calcolarne il valore mediante una tavola di seniversi naturali. Evidentemente questo procedimento non differisce, in sostanza, dal precedente; ma richiede una tavola di seniversi naturali, mentre il procedimento precedente richiede una tavola di valori naturali delle ordinarie funzioni, la quale, potendo servire a molti altri scopi, dovrebbe ormai trovarsi sempre in ogni buona raccolta [10].

---

(1) INMAN, *Nautical Tables designed for the use of british seamen*. Londra, ed. Trübner. — Questa raccolta, invece di una tavola che dia i valori naturali delle ordinarie funzioni trigonometriche, ne contiene una che dà solo i seniversi naturali (da 0° a 180°, di 1′ in 1′ e con sei cifre decimali); occorrendo quindi il seno naturale, bisogna procedere come s'è detto nella nota alla fine del § 6.

(2) LIGOWSKI, *Sammlung fünfstelliger logarithmischer, trignometrischer und nautischer Tefeln*. Kiel, ed. Toeche, 1900.

(3) VITAL, *Tavole e prontuari per i calcoli di Navigazione*. Vienna, ed. Deuticke, 1903.

(4) GRAIÑO, *Colección de Tablas náuticas*. Ferrol, Impr. " El Correo Gallego ", 1905.

(5) FONTOURA, *Tábuas nauticas*. Lisboa, Typ. da Empreza da Historia de Portugal, 1907.

(6) *Tables de Logarithmes*.... Vannes, ed. Lafolye, 1897.

(7) SERRES, *Tables condensées*. Paris, ed. Gauthier-Villars, 1891.

(8) l. c.

(9) *Taboa polytelica*. Lisboa, Typ. da Emprenza da Historia de Portugal, 1906.

Questa tavola originalissima con due sole colonne dà il modo di risolvere qualunque triangolo sferico; e meriterebbe di essere presa in seria considerazione, anche per vedere se è il caso di incoraggiare il grande lavoro a cui si è accinto l'autore, quello di calcolarla con dieci cifre decimali e con un passo non inferiore a 1″.

(10) Cercando (nella stessa tavola dei seniversi naturali) l'angolo il cui senoverso è uguale alla differenza calcolata, si potrebbe fare a meno della tavola dei logaritmi dei numeri. Una osservazione analoga si potrebbe fare anche per il procedimento precedente, ma il SERRES, a parer mio giustamente, non l'ha creduta praticamente opportuna.

Osservazione. — Il calcolo di P si può fare anche o con un angolo ausiliario, o coi logaritmi di addizione e sottrazione, o coi soli valori naturali del seno; ma non è questo il luogo di esaminare anche questi procedimenti.

8. L'altro calcolo nautico che vogliamo cosiderare, in cui si faccia uso dei logaritmiversi, è quello di h (o di z) in funzione di φ, δ e P. per mezzo della (1).

I procedimenti indicati per questo importantissimo calcolo sono molti e nella maggior parte di essi, volendo usare i logaritmi trigonometrici, si ricorre all'uso di un angolo ausiliario [1]. Per alcuni di questi ultimi si è trovato opportuno servirsi dei logaritmi versi, e il più notevole è certamente quello [2] in cui, ponendo

$$\operatorname{ver} x = \frac{\cos\varphi \cos\delta \operatorname{ver} P}{\cos(\varphi - \delta)},$$

si ha

$$\operatorname{sen} h = \cos(\varphi - \delta) \cos x;$$

ed è indubitabile che l'uso della tavola in discorso è anche più utile qui che nel calcolo della (3).

Un altro modo, corrispondente al secondo modo indicato nel § prec., consiste nel calcolare il valore del termine $2 \cos\varphi \cos\delta \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P$ con una tavola dei logaritmi delle ordinarie funzioni trigonometriche, una tavola di logaritmiseniversi o di logaritmi versi (nel qual caso occorre aggiungere il logaritmo di 2, che si sa a mente) e una tavola di logaritmi dei numeri; questo valore, tolto dal valore naturale di $\cos(\varphi - \delta)$, dà il valore naturale di $\operatorname{sen} h$, e quindi il calcolo si completa con una tavola di seni naturali soltanto.

Anche qui alcuni propongono di trasformare la differenza (5) nella (6), onde, avendosi allora

$$\operatorname{senv} z = \operatorname{senv}(\varphi - \delta) + \cos\varphi \cos\delta \operatorname{senv} P,$$

si ricorrerà a una tavola di logaritmi delle ordinarie funzioni trigonometriche, a una tavola di logaritmiversi, a una tavola di logaritmi dei numeri e a una tavola di seniversi naturali. Ma mi pare che si possa, in proposito, ripetere l'osservazione fatta alla fine del § precedente [3].

---

(1) Ho visto ricorrere a *dieci* diversi angoli ausiliari. (Veggasi, principalmente, Ledieu, *Les nouvelles méthodes de Navigation*. Paris, ed. Dunod, 1877; Wedemeyer, l. c.; Serges, *De l'emploi d'une table des lignes naturelles dans les calculs de Mer*, " Revue Maritime et Coloniale ", 1885, II). E oltre questi procedimenti, se ne hanno varî altri, in cui si ricorre o ai logaritmi d'addizione e sottrazione, o ai valori naturali del seno, o ad artifizî speciali (veggansi le mie due note *Sul calcolo relativo alle rette d'altezza*, " Rivista Marittima ", gennaio 1903 e aprile 1904).

(2) *Lehrbuch der Navigation*, herausgegeben vom Reichs-Marine-Amt. (Berlin, ed. Mittler, 1906).

(3) Qui pure si potrebbe fare a meno della tavola dei logaritmi dei numeri, cercando nella stessa tavola dei logaritmi versi l'arco il cui logaritmo verso è uguale al logaritmo del termine $\cos\varphi \cos\delta \operatorname{senv} P$.

9. Tutto quanto precede mi pare che conduca alle seguente conclusione.

Dei valori naturali delle funzioni verse (in particolare, del senoverso) si può benissimo far a meno, perchè in ogni caso si può, ad essi, sostituire i valori naturali delle ordinarie funzioni trigonometriche. E una tavola di questi ultimi valori deve ormai far parte di qualunque raccolta, perchè il loro uso (eccezion fatta per i grandi calcoli della *Astronomia* e della *Geodesia*) è spesso più facile e più sollecito di quello dei corrispondenti logaritmi.

Dei logaritmi seniversi, o dei logaritmi versi, può invece esser comodo servirsi, e quindi sarà opportuno che ogni raccolta di tavole (specialmente nautiche) contenga una tavola dei primi o dei secondi. Resta a discutere se sia più comoda una tavola di logaritmiversi o una tavola di logaritmi seniversi: molti sono per la prima, ma parecchi sono invece per la seconda [1].

A questo proposito poi debbo aggiungere due osservazioni. Prima di tutto a me pare che la tavola ora accennata dovrebbe essere completamente separata da quella delle ordinarie funzioni trigonometriche [2]; e ciò, sia per semplicità, chè le colonne aggiunte a quest'ultima costituiscono un ingombro, specialmente per quelli (e saran sempre molti) che delle funzioni verse non fanno uso [3]; sia per uniformità, perchè, dovendo il logaritmoverso, o il logarimosenoverso, esser dato da 0° a 90°, bisogna (a meno di non aggiungere quattro colonne invece di due) aggiungere poi una tavola speciale per gli archi da 90° a 180° [4]. In questa tavola sarebbe poi molto opportuno dare gli archi tanto in gradi, quanto in ore; e ciò per ovvie ragioni [5].

L'altra osservazione è di indole didattica. A me pare che, pur ritenendo opportuno l'uso di una tavola di logaritmiversi o di logaritmiseniversi, non sia affatto necessario introdurre la considerazione delle funzioni verse nella sistematica trattazione della *Trigonometria*. Per me l'importanza di queste funzioni non è più quella di dieci secoli fa (§ 1); ora se ne può fare a meno benissimo e basta, nella risoluzione dei triangoli, mostrare la comodità che può risultare dall'uso di una tavola, la quale dia addirittura i logaritmi di $\text{sen}^2 \frac{1}{2} \alpha$ e simili, in funzione di α. E, a dir il vero, così si fa in parecchie delle tavole

---

(1) Come, p. es., il SERRES e il DA MATTA, già citato.

(2) Come, p. es., nella citata raccolta del LIGOWSKI e del VITAL.

(3) E nella raccolta citata del GRAIÑO questo ingombro è aumentato ancora dall'aggiunta dei valori di $\text{L tan}^2 \frac{1}{2} \alpha$ e di $\text{L ctn}^2 \frac{1}{2} \alpha$, valori che, se creduti utili, dovrebbero, essi pure, essere raccolti in una tavola speciale, o, tutt'al più, riuniti in una sola tavola coi valori di $\text{L sen}^2 \frac{1}{2} \alpha$ e di $\text{L cos}^2 \frac{1}{2} \alpha$.

(4) Questo accade, p. es., nella raccolta del FONTOURA, già citata.

(5) La nota tavola del LABROSSE (*Tables nautiques*. Paris, chez les libraires des Cartes e Plans de la Marine, 1870), come pure quella della citata raccolta del VITAL, danno gli angoli soli in ore, e questa è una complicazione per tutti i casi, diversi da quello dell'angolo orario, in cui può convenire di ricorrere a quella tavola.

citate [1]. Insomma, la tavola in discussione non dovrebbe essere presentata come una tavola di una determinata funzione trigonometrica, ma piuttosto come una comoda tavola di valori numerici bell'e calcolati; come sono, p. es., le tavole che danno direttamente il logaritmo della radice quadrata di sen α, e il logarimo della tangente della metà di α, conoscendo α [2].

G. Pesci.

SU ALCUNE PROPRIETÀ D'UN PUNTO NOTEVOLE DEL PIANO DEL TRIANGOLO

La *Geometria del triangolo* che, in quest'ultimi tempi ha meritatamente ricevuto un considerevole sviluppo, s'aggira intorno alle proprietà delle linee e dei punti notevoli del piano del triangolo. Parecchi punti sono stati oggetto di celebri pubblicazioni, con cui, illustri matematici additavano ai cultori della scienza le rilevantissime proprietà dei punti medesimi, mostrando come la Geometria del triangolo, pur essendo stata, per molto tempo, tenuta in poco conto, sia uno dei rami più fecondi, più belli e, insieme, più facili della Geometria. Mediante *trasformazioni*, aventi per base il triangolo fondamentale, eseguite sui punti suddetti, può, dai medesimi, dedursi una lunga serie d'altri punti notevoli, il numero dei quali, ormai, può ben dirsi illimitato.

Noi ci proponiamo ora lo studio delle proprietà d'un punto notevole del piano del triangolo, il quale, pur non essendo stato mai, per quanto almeno è alla nostra conoscenza, oggetto di particolare studio, ha tuttavia una non lieve importanza nella Geometria del triangolo, sia per la semplicità delle sue coordinate, sia per le varie sue costruzioni geometriche, sia, infine, per le relazioni semplicissime dalle quali è legato con molti altri punti notevoli.

Questo punto sarà da noi chiamato punto Q. Le sue distanze dai lati del triangolo fondamentale sono direttamente proporzionali ai raggi dei circoli exinscritti, ad essi relativi.

Essendo P un punto qualunque del piano del triangolo ABC, per semplicità ed omogeneità, conveniamo di denotare con A_p, B_p, C_p, rispettivamente, i punti in cui le rette AP, BP, CP incontrano i lati BC, CA, AB e con α_p, β_p, γ_p i valori dei rapporti (BCA_p), (CAB_p), (ABC_p).

---

[1] Come, p. es., nelle tavole del Lisowski, del Labrosse, del Graiño, del Vital.

[2] Veggasi: Magnaghi, *Tavole e formule nautiche*. Milano, Hoepli, 1883.

1. *Le tre congiungenti gli excentri d'un triangolo rispettivamente ai punti in cui i lati toccano la circonferenza inscritta, concorrono in un punto, le cui distanze dai lati del triangolo sono direttamente proporzionali ai raggi dei circoli exinscritti.*

Siano A_γ, B_γ, C_γ le proiezioni ortogonali dell'incentro I sui lati BC, CA, AB. Detti, al solito, I_a, I_b, I_c gli excentri, i triangoli $I_aI_bI_c$, $A_\gamma B_\gamma C_\gamma$ sono omotetici; dunque le rette I_aA_γ, I_bB_γ, I_cC_γ concorrono nel centro Q d'omotetia.

Per evidente similitudine di triangoli, abbiamo

$$x_q : r_a = QA_\gamma : A_\gamma I_a,$$
$$y_q : r_b = QB_\gamma : B_\gamma I_b,$$
$$z_q : r_c = QC_\gamma : C_\gamma I_c,$$

essendo x_q, y_q, z_q, rispettivamente, le distanze del punto Q dai lati del triangolo fondamentale. Avendosi poi evidentemente

$$QA_\gamma : A_\gamma I_a = QB_\gamma : B_\gamma I_b = QC_\gamma : C_\gamma I_c,$$

si deduce

$$x_q : r_a = y_q : r_b = z_q : r_c.$$

È noto che il centro della circonferenza circoscritta al triangolo $I_aI_bI_c$ è il punto O_0, simmetrico dell'incentro di ABC, rispetto al circoncentro O; il circoncentro del triangolo $A_\gamma B_\gamma C_\gamma$, poi, non è altro che il punto I.

Dunque la retta OI congiunge due punti corrispondenti della omotetia fra i triangoli $I_aI_bI_c$ e $A_\gamma B_\gamma C_\gamma$, perciò passa per il punto Q. Potremo dunque affermare:

Il punto Q è allineato con l'incentro e il circoncentro.

2. È opportuno far subito notare la seguente importante proprietà:

Il punto Q, il baricentro e il punto di GERGONNE *sono allineati.*

Infatti, il triangolo ABC è il triangolo ortico del triangolo $I_a I_b I_c$, quindi, detti A_g, B_g, C_g i punti di mezzo dei lati BC, CA, AB, le rette $I_a A_g$, $I_b B_g$, $I_c C_g$ sono simediane del triangolo $I_a I_b I_c$, quindi esse concorrono nel punto di LEMOINE del triangolo $I_a I_b I_c$. Dimostriamo che questo punto appartiene alla retta ΓG, essendo Γ il punto di GERGONNE del triangolo fondamentale. Sia, infatti, K_i il punto in cui la retta $I_a A_g$ taglia GΓ; il punto Γ è punto di LEMOINE del triangolo $A_\gamma B_\gamma C_\gamma$, dunque la retta $A_\gamma \Gamma$ è simediana del triangolo $A_\gamma B_\gamma C_\gamma$; perciò, siccome i triangoli $I_a I_b I_c$, $A_\gamma B_\gamma C_\gamma$ sono omotetici, le rette $I_a A_g$, $A_\gamma \Gamma$, sono parallele. I triangoli GAΓ, $GA_g K_i$ sono dunque simili, e si ha quindi

$$G\Gamma : GK_i = GA : GA_g,$$

da cui si ricava

$$GK_i = \tfrac{1}{2} G\Gamma.$$

Analogamente si dimostra che le rette $I_b B_g$, $I_c C_g$ tagliano la retta $G\Gamma$ nel punto K_1; questo punto è perciò il punto di Lemoine del triangolo $I_a I_b I_c$. Dunque la retta $G\Gamma$, contenendo due punti corrispondenti nella omotetia da noi precedentemente considerata, passa per Q.

Diremo dunque, riassumendo,

" *Nel punto Q concorrono cinque rette notevoli del piano del triangolo, ossia:*

a) *la congiungente l'incentro col circoncentro;*

b) *la congiungente il baricentro col punto di* Gergonne;

c) *le tre congiungenti i centri dei cerchi ex-inscritti rispettivamente coi punti di contatto dei lati con la circonferenza inscritta.*

Qui cade in acconcio fare una interessante osservazione. Il baricentro non è altro che il punto di concorrenza delle congiungenti i vertici del triangolo colle proiezioni del circoncentro sui lati opposti; analogamente il punto di Gergonne non è altro che il punto di concorrenza delle congiungenti i vertici del triangolo colle proiezioni dell'incentro sui lati opposti. Talchè si può dire che il baricentro e il punto di Gergonne deduconsi rispettivamente dal circoncentro e dall'incentro in modo perfettamente analogo. Inversamente, è manifesto che il circoncentro e l'incentro deduconsi dal baricentro e dal punto di Gergonne in modo perfettamente analogo. Questo fatto, giusta la precedente conclusione, mostra *la relazione intima che lega il punto Q col circoncentro e l'incentro, e il medesimo punto col baricentro e il punto di* Gergonne.

3. Una costruzione abbastanza semplice del punto Q è per esempio la seguente:

Pei punti I_a, I_b, I_c si conducano le parallele ordinatamente ai lati BC, CA, AB del triangolo fondamentale, e siano T_a, T_b, T_c i vertici del triangolo che ha per lati queste parallele. Le rette AT_a, BT_b, CT_c concorrono nel punto Q.

Ciò è evidente perchè i triangoli $T_a T_b T_c$, ABC sono figure corrispondenti nella omotetia nella quale si corrispondono i triangoli $I_a I_b I_c$, $A_\gamma B_\gamma C_\gamma$.

Altre costruzioni più semplici sono fornite dai teoremi seguenti:

4. *Le congiungenti i vertici del triangolo fondamentale rispettivamente ai piedi delle altezze del triangolo podario dell'incentro concorrono nel punto* Q.

Infatti il triangolo ABC è il triangolo ortico del triangolo $I_a I_b I_c$; dunque le rette che congiungono i punti A, B, C ai piedi delle altezze del triangolo $A_\gamma B_\gamma C_\gamma$ passano pel centro d'omotetia dei triangoli $I_a I_b I_c$ e $A_\gamma B_\gamma C_\gamma$, ossia pel punto Q.

Le congiungenti i punti in cui le bisettrici esterne del triangolo fondamentale incontrano la circonferenza circoscritta, coi punti medi dei lati del triangolo podario dell'incentro, concorrono nel punto Q.

Infatti, i punti in cui le suddette bisettrici incontrano la circonferenza circoscritta, non sono altro che i punti medi dei lati del triangolo $I_a I_b I_c$.

Il punto di Nagel, *il punto* Q *e l'incentro del triangolo che ha per lati le parallele ai lati del triangolo fondamentale, condotto pei piedi delle altezze del triangolo podario dell'incentro, sono allineati.*

Infatti il punto di Nagel J è incentro del triangolo che ha per lati le parallele ai lati del triangolo fondamentale, condotte per i vertici opposti. Ne viene, come conseguenza, la verità ora enunciata, poichè, al triangolo che ha per lati le parallele suddette, nella omotetia fra i triangoli $I_a I_b I_c$, $A_\gamma B_\gamma C_\gamma$, corrisponde il triangolo che ha per lati le parallele ai lati del triangolo fondamentale, condotte pei piedi delle altezze del triangolo $A_\gamma B_\gamma C_\gamma$, e, quindi, all'incentro del primo l'incentro del secondo.

5. Siano rispettivamente Q_a, Q_b, Q_c i punti d'incontro delle rette B_qC_q, C_qA_q, A_qB_q coi lati BC, CA, AB del triangolo ABC. I punti Q_a, Q_b, Q_c appartengono a una medesima retta, che è la *polare trilineare* del punto Q.

Ciò posto, vogliamo dimostrare la seguente importante proprietà:

1°. *Le insimediane dei triangoli in cui il triangolo fondamentale è spezzato dall'incentro, uscenti dall'incentro stesso, incontrano rispettivamente i lati del triangolo fondamentale nei piedi delle ceviane del punto* Q.

2°. *Le essimediane dei triangoli suddetti, uscenti dall'incentro, incontrano i lati del triangolo fondamentale sulla polare trilineare del punto* Q.

Consideriamo il triangolo BIC, e supponiamo che la insimediana di esso, uscente da I, tagli il lato BC in un punto R. Per una notissima proprietà delle insimediane, è, in valore assoluto,

$$BR : CR = \overline{IB}^2 : \overline{IC}^2.$$

D'altra parte, si ha

$$\overline{IB}^2 = ac\frac{r}{r_b}; \quad \overline{IC}^2 = ab\frac{r}{r_c},$$

quindi la precedente diviene

$$BR : CR = cr_c : br_b,$$

e poichè, dall'essere, sempre in valore assoluto,

$$BA_q : CA_q = \text{area } AQB : \text{area } AQC,$$

scende

$$BA_q : CA_q = cr_c : br_b,$$

ricaviamo che il punto R coincide col punto A_q. La retta IA_q è dunque insimediana del triangolo BIC, uscente da I.

In modo perfettamente analogo, si fa vedere che la retta IQ_a è essimediana del triangolo BIC, uscente da I. Il teorema è così pienamente dimostrato.

6. *Le perpendicolari alle bisettrici interne, condotte per l'incentro, incontrano i lati rispettivi sulla polare trilineare del punto* Q.

Invero, la retta IQ_a essendo essimediana del triangolo BIC è tangente alla circonferenza ad esso circoscritta, ossia alla circonferenza di diametro II_a, quindi è perpendicolare alla retta II_a.

Questo teorema ci dà modo di dedurre, in modo molto semplice, il punto Q dall'incentro. Condotte, infatti, per l'incentro le perpendicolari alle bisettrici, s'uniscano i loro punti d'incontro coi lati rispettivi ai vertici opposti; tali congiungenti sono lati d'un triangolo omologico col triangolo fondamentale: il centro di tale omologia è il punto Q.

Perciò, dal triangolo rettangolo IA_1Q_a si deduce

$$Q_a A_\gamma \,.\, A_\gamma A_1 = r^2.$$

Le congiungenti i vertici del triangolo pedale del punto Q *rispettivamente ai punti in cui le bisettrici esterne del triangolo fondamentale incontrano la circonferenza circoscritta, concorrono nell'incentro.*

Infatti sia A_1 il punto in cui la bisettrice esterna $I_b I_c$ dell'angolo A, taglia la circonferenza circoscritta. La retta IA_1 è mediana del triangolo $II_b I_c$ e quindi, siccome le rette BC, $I_b I_c$ sono antiparallele rispetto all'angolo formato dalle bisettrici BI_b, CI_c, la retta IA_1 non è altro che la insimediana del triangolo IBC, uscente da I, ossia essa coincide colla retta IA_q (n. 5). In modo analogo si prova che le rette B_qI, C_qI passano rispettivamente per i punti in cui le rette $I_a I_b$, $I_a I_c$ tagliano la circonferenza circoscritta.

7. *I punti in cui le perpendicolari, calate dall'incentro sui lati, incontrano le rette che congiungono i rispettivi excentri coi punti d'incontro dei lati stessi con la retta* OI, *stanno sulle congiungenti i vertici del triangolo fondamentale col punto* Q.

Siano rispettivamente Q_1, Q_2, Q_3 i vertici del triangolo che ha per lati le congiungenti i vertici A, B, C coi punti in cui la polare trilineare del punto Q incontra i lati opposti. I triangoli ABC, $Q_1 Q_2 Q_3$ sono omologici e Q è il loro centro d'omologia. Il triangolo $I_a I_b I_c$ è circoscritto al triangolo ABC ed è omologico con esso: I è il centro d'omologia. Perciò le rette IQ_1, IQ_a si tagliano sul lato BC, ossia in A_γ; ne viene come conseguenza che IQ_1 è perpendicolare a BC. Ciò posto [1] il triangolo che ha per lati le rette $I_a Q_1$, $I_b Q_2$, $I_c Q_3$ è inscritto nel triangolo ABC ed è con esso omologico e QI è l'asse d'omologia; la $I_a Q_1$ passa dunque pel punto in cui la retta OI taglia BC. Ciò vuol dire che, nel punto Q_1, concorrono la perpendicolare calata da I su BC e la retta che congiunge I_a con il punto di incontro delle rette BC, OI, come era da dimostrare.

8. *Le rette* IA_q, QA_1 *s'incontrano sulla congiungente il vertice* A *al punto di* GERGONNE.

---

[1] V. la mia nota *Sul triangolo*, " Periodico di Matematica ", anno XXIII, pag. 154.

Infatti, sia S il punto d'incontro delle rette IA_q, QA_i. Consideriamo i triangoli SA_qA_i, $A_\gamma Q_1 I_a$; così riferiti essi sono in omologia, poichè le coppie di rette A_qA_i, $Q_1 I_a$; SA_i, $A_\gamma I_a$; SA_q, $A_\gamma Q_1$ s'incontrano sulla retta OI (n. 7); dunque le rette SA_γ, A_qQ_1, $A_i I_a$ passano per uno stesso punto. Ciò vuol dire che SA_γ passa per A, ossia che il punto S appartiene alla retta $A\Gamma$.

Dalle proiezioni dei punti di contatto dei lati con la circonferenza inscritta, sulla retta OI, *le distanze dei punti di contatto medesimi dai piedi delle ceviane relative al punto* Q *e all'incentro sono vedute sotto angoli eguali.*

Infatti, sia U il punto in cui la retta BC taglia OI, e V la proiezione ortogonale di A_γ su OI. Siccome le coppie di punti UA, VA_γ; VA_q, VA_i si separano armonicamente, anche le coppie di rette VU, VA_γ; VA_q, VA_i si separano armonicamente; perciò, essendo, per ipotesi, le rette VU e VA_γ fra loro perpendicolari, esse sono le bisettrici dell'angolo completo determinato dalle altre due; quindi:

$$A_q\widehat{V}A_\gamma = A_\gamma\widehat{V}A_i.$$

9. La retta IQ_a è tangente comune alla circonferenza BIC e alla circonferenza di diametro AI. Ne segue che Q_a è il centro radicale delle circonferenze ABC, BIC e di quella di diametro AI. Talchè, detto A'_0 il punto in cui quest'ultima circonferenza incontra ulteriormente la circonferenza circoscritta ad ABC, la retta AA'_0 passa per Q_a.

Ne viene la seguente importante proprietà:

Le tre congiungenti i vertici del triangolo fondamentale coi punti in cui le circonferenze di diametro AI, BI, CI *incontrano ulteriormente la circonferenza circoscritta, sono lati d'un triangolo, che è col dato in omologia di centro* Q.

Questo teorema ci suggerisce una semplice costruzione del punto Q. Infatti, da esso si deduce che, se le congiungenti l'incentro del triangolo fondamentale, coi simmetrici dei vertici rispetto al circoncentro, incontrano ulteriormente la circonferenza circoscritta nei punti A'_0, B'_0, C'_0, le rette AA'_0, BB'_0, CC'_0 sono lati d'un triangolo in omologia con ABC: il centro d'omologia è il punto Q.

10. *Le perpendicolari, condotte pei vertici del triangolo alle congiungenti i vertici stessi coi punti in cui la polare trilineare del punto* Q *incontra i lati opposti, concorrono nel simmetrico dell'incentro rispetto al circoncentro.*

Infatti, la retta IA'_0 è perpendicolare alla AQ_a (n. 9); dunque, la perpendicolare alla retta AQ_a, condotta per A, essendo parallela alla retta IA'_0, passa pel simmetrico di I rispetto al punto in cui la perpendicolare alla AQ_a, condotta pel centro di AA'_0, taglia OI, ossia passa per O_0, simmetrico di I rispetto ad O.

È noto che O_0 è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo $I_a I_b I_c$, e che in esso concorrono le perpendicolari condotte dagli excentri sui lati BC, CA, AB.

Di qui deduciamo un altro modo semplice per costruire il punto Q. Infatti, detti A_0, B_0, C_0 i punti in cui le rette AO_0, BO_0, CO_0 tagliano la circonferenza circoscritta, le rette A_0O, B_0O, C_0O incontrano ulteriormente la circonferenza circoscritta nei punti A'_0, B'_0, C'_0 sopra considerati.

Si deduce ancora che *i punti* O_0 *e* I *sono isogonalmente coniugati rispetto al triangolo* $Q_1Q_2Q_3$.

Avremo, conseguentemente:

$$IA'_0 \,.\, AO_0 = IB'_0 \,.\, BO_0 = IC'_0 \,.\, CO_0 \,.$$

Le perpendicolari calate dai vertici del triangolo fondamentale sui lati del triangolo pedale del punto di Nagel, *concorrono in un punto, il cui triangolo podario è simile al triangolo* $Q_1Q_2Q_3$.

Il triangolo pedale del punto J di Nagel non è altro che il triangolo podario del punto O_0; dunque le perpendicolari condotte per A, B, C ai lati di quel triangolo concorrono nel coniugato isogonale del punto O_0 rispetto al triangolo fondamentale; i lati del triangolo podario di quel punto sono dunque rispettivamente perpendicolari alle rette AO_0, BO_0, CO_0, (¹) ossia sono rispettivamente paralleli ai lati del triangolo $Q_1Q_2Q_3$.

Poichè i vertici dei triangoli podari di due punti isogonalmente coniugati appartengono ad una medesima circonferenza, si ricava che i punti in cui la circonferenza circoscritta al triangolo pedale del punto di Nagel, incontra ulteriormente i lati, sono vertici d'un triangolo simile al triangolo $Q_1Q_2Q_3$.

II. *Le congiungenti i vertici del triangolo pedale del punto* Q *coi punti in cui i lati opposti d'esso incontrano rispettivamente le bisettrici interne dei triangolo fondamentale, concorrono nel punto* K *di* Lemoine.

Infatti, dette rispettivamente m, n le rette B_qC_q, KA_q, si ha (²)

$$m_b = -\frac{a(p-c)}{c(p-a)}; \quad m_c = -\frac{b(p-a)}{a(p-b)};$$

inoltre, poichè la retta n e il punto K s'appartengono, avremo

$$\frac{n_c}{\gamma_k} + \frac{\alpha_k}{n_a} = 1; \quad \frac{n_a}{\alpha_k} + \frac{\beta_k}{n_b} = 1,$$

da cui, essendo

$$n_a = -\frac{c(p-b)}{b(p-c)}; \quad \alpha_k = -\frac{c^2}{b^2}; \quad \beta_k = -\frac{a^2}{c^2}; \quad \gamma_k = -\frac{b^2}{a^2},$$

(¹) Cfr. la mia nota *Su alcune proprietà del triangolo*, "Supplemento del Periodico di Matematica", Anno X, Fasc. V-VI.

(²) Cfr. la mia nota *Sul triangolo*, "Periodico di Matematica", anno XXIII, fasc. IV.

si ricava

$$n_c = \frac{b(b-c)(p-a)}{a^2(p-b)}; \quad n_b = \frac{a^2(p-c)}{c(c-b)(p-a)}.$$

Perciò, indicando con α_i il *rapporto di partizione* del lato BC determinato dalla retta (A, mn), avremo

$$\alpha_i = \frac{\frac{1}{m_c} - \frac{1}{n_c}}{m_b - n_b} = -\frac{c}{b},$$

di cui si desume che il punto mn appartiene alla bisettrice uscente da A, come l'enunciato richiede.

Questo teorema mette in relazione il punto Q col punto di LEMOINE. Si vede parimenti come dal punto Q possa rapidamente dedursi il punto di LEMOINE.

12. *Le congiungenti gli excentri rispettivamente ai punti in cui le bisettrici esterne incontrano la circonferenza circoscritta, incontrano i lati del triangolo fondamentale nei piedi delle ceviane relative al coniugato isogonale del punto* Q.

Le perpendicolari alle bisettrici interne, condotte rispettivamente per gli excentri, incontrano i lati del triangolo fondamentale sulla polare trilineare del coniugato isogonale del punto Q.

Sia, infatti, Q′ il punto isogonalmente coniugato al punto Q (inverso del punto Q). Essendo $A_{q'}$, $B_{q'}$, $C_{q'}$, rispettivamente, i punti in cui le rette AQ′, BQ′, CQ′ tagliano i lati BC, CA, AB, consideriamo, nel triangolo $I_a BC$ la trasversale angolare $I_a A_{q'}$. Si ha

$$\overline{I_a B}^2 = ac\frac{r_a}{r_c}; \quad \overline{I_a C}^2 = ab\frac{r_a}{r_b}, \qquad \text{da cui} \qquad \overline{I_a B}^2 : \overline{I_a C}^2 = \frac{c}{r_c} : \frac{b}{r_b}.$$

Avendosi poi, in valore assoluto,

$$BA_{q'} : CA_{q'} = \frac{c}{r_c} : \frac{b}{r_b},$$

si deduce

$$BA_{q'} : CA_{q'} = \overline{I_a B}^2 : \overline{I_a C}^2,$$

e si conchiude che la retta $I_a A_{q'}$ è insimediana del triangolo $I_a BC$. Siccome poi le rette BC, $I_b I_c$ sono antiparallele rispetto all'angolo $I_a \widehat{I_b} I_c$, la retta $I_a A_{q'}$ dimezza il segmento $I_b I_c$, ossia passa pel punto in cui la bisettrice esterna $I_b I_c$ taglia la circonferenza circoscritta.

Osservando che la perpendicolare alla bisettrice AI, condotta per I_a, è essimediana del triangolo $I_a BC$, con considerazioni analoghe alle precedenti, si rileva facilmente ch'essa taglia il lato BC sulla polare trilineare del punto Q′. Sono dunque completamente dimostrate le verità enunciate.

13. *Il coniugato isogonale del punto* Q *è allineato con l'incentro e il punto di* LEMOINE.

Infatti, con quantità rispettivamente proporzionali alle distanze dell'incentro, del punto di LEMOINE e del punto Q' dai lati BC, CA, AB, formiamo il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & p & p \\ a & b & c \\ p-a & p-b & p-c \end{vmatrix}.$$

Se in questo determinante sommiamo le ultime due colonne otteniamo la prima; dunque questo determinante è nullo, perciò (¹) i punti I, K e Q' sono allineati.

I vertici del triangolo fondamentale, il baricentro, l'incentro e il punto Q *sono punti d'una medesima conica.*

È noto, infatti, che i punti coniugati isogonali a tutti i punti di una retta rispetto a un dato triangolo, determinano una conica circoscritta al triangolo dato. In particolare, la conica coniugata isogonale della retta che contiene i punti K, I, Q', passa per i punti G, I, Q ed è circoscritta al triangolo ABC.

14. *Il coniugato isogonale del punto* Q *è il punto di* LEMOINE *del triangolo che ha per vertici gli excentri del triangolo fondamentale.*

1ª DIMOSTRAZIONE. — Infatti, giacchè le distanze dei punti I_a, I_b, I_c dalla retta BC sono rispettivamente eguali di raggi dei circoli exinscritti, per una nota proprietà del punto di LEMOINE, la distanza del punto di LEMOINE del triangolo $I_a I_b I_c$ della retta BC, ha per espressione

$$\frac{r_b\overline{I_a I_c}^2 + r_c\overline{I_a I_b}^2 - r_a\overline{I_b I_c}^2}{\overline{I_b I_c}^2 + \overline{I_c I_a}^2 + \overline{I_a I_b}^2},$$

la quale, avendosi, com'è noto,

$$\overline{I_b I_c}^2 = 4pR\,.\frac{a}{r_a};\quad \overline{I_c I_a}^2 = 4pR\,.\frac{b}{r_b};\quad \overline{I_a I_b}^2 = 4pR\,.\frac{c}{r_c},$$

si riduce a

$$\frac{2S}{\dfrac{a}{r_a}+\dfrac{b}{r_b}+\dfrac{c}{r_c}}\cdot\frac{1}{r_a}.$$

E siccome, analogamente, si ricava che le distanze del punto di LEMOINE di $I_a I_b I_c$ dai lati CA, AB, hanno per espressione

$$\frac{2S}{\dfrac{a}{r_a}+\dfrac{b}{r_b}+\dfrac{c}{r_c}}\cdot\frac{1}{r_b};\quad \frac{2S}{\dfrac{a}{r_a}+\dfrac{b}{r_b}+\dfrac{c}{r_c}}\cdot\frac{1}{r_c},$$

si conchiude che il suddetto punto è precisamente Q'.

(¹) Cfr. la mia nota *Sul triangolo.*

2ª. Dimostrazione. — Al n. 2 abbiamo stabilito che il punto di Lemoine K_i del triangolo $I_a I_b I_c$ è un punto della retta $G\Gamma$ e che il medesimo punto è sul prolungamento del segmento ΓG in modo che si ha

$$GK_i = \tfrac{1}{2}\,\Gamma G.$$

Ciò posto, dette rispettivamente x_γ, x_g, x_{k_i} le distanze di Γ, G e K_i da BC, la semplice considerazione di due triangoli rettangoli simili, ci permette di scrivere

$$G\Gamma : GK_i = (x_g - x_\gamma) : (x_{k_i} - x_g),$$

dalla quale, per la precedente, si trae

$$x_{k_i} = \frac{3x_g - x_\gamma}{2},$$

ossia, essendo, com'è noto

$$x_g = \tfrac{1}{3} h_a\,; \qquad x_\gamma = \frac{r_a h_a}{r_a + r_b + r_c},$$

$$x_{k_i} = \frac{h_a (r_b + r_c)}{2 (r_a + r_b + r_c)}.$$

Se ora ricordiamo la formola [1]

$$\frac{1}{h_a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right),$$

riconosciamo agevolmente che la precedente diviene

$$x_{k_i} = \frac{r_b r_c}{r_a + r_b + r_c}, \quad \text{ossia} \quad x_{k_i} = \frac{S^2}{r (r_a + r_b + r_c)} \cdot \frac{1}{r_a}.$$

Dalla quale s'inferisce che le distanze del punto K_i dai lati BC, CA, AB sono inversamente proporzionali ai raggi dei circoli exinscritti; dunque K_i coincide con Q'.

Dalla precedente dimostrazione, pel n. 13, risulta anche:

Il coniugato isogonale del punto Q è il punto d'incontro della retta che unisce il baricentro e il punto di Gergonne, *con la congiungente l'incentro e il punto di* Lemoine.

15. Ricordando che in ogni triangolo le congiungenti i vertici ai punti medi dei lati del triangolo ortico concorrono nel punto di Lemoine, potremo conchiudere come segue:

" *Nel coniugato isogonale del punto Q concorrono cinque rette notevoli del piano del triangolo, e cioè:*

a) *la congiungente l'incentro col punto di* Lemoine;

b) *la congiungente il baricentro col punto di* Gergonne;

c) *le tre congiungenti gli excentri rispettivamente ai punti medi dei lati* ".

---

(1) Cfr. *Supplemento al Periodico di Matematica*, anno IX, fasc. III.

Dal detto emerge quanto segue:

1°. I punti Q e Q′ costituiscono la coppia di punti isogonalmente coniugati esistente sulla retta che congiunge il baricentro al punto di Gergonne, e non sono altro che i punti d'incontro di quest'ultima retta colle congiungenti l'incentro al circoncentro e al punto di Lemoine.

2°. I vertici del triangolo fondamentale, il punto di Lemoine, il punto Q e il suo coniugato isogonale appartengono a una medesima conica (coniugata isogonale della retta GΓ).

16. Unendo i vertici di ABC rispettivamente ai simmetrici di A_q, B_q, C_q rispetto ai punti di mezzo dei lati relativi, otteniamo tre trasversali angolari, le quali concorrono nel punto Q_0 reciproco del punto Q. Ciò posto, può facilmente dimostrarsi la seguente proprietà:

Il reciproco del punto Q, *il reciproco dell'incentro e il baricentro sono allineati.*

Premettiamo che, se le distanze d'un certo punto dai lati del triangolo sono direttamente proporzionali alle quantità α, β, γ, le distanze del reciproco di esso dai lati stessi sono direttamente proporzionali alle quantità $\frac{1}{a^2\alpha}$, $\frac{1}{b^2\beta}$, $\frac{1}{c^2\gamma}$. Perciò è facile vedere che nel determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{p-a}{a^2} & \frac{p-b}{b^2} & \frac{p-c}{c^2} \\ \frac{p}{a^2} & \frac{p}{b_2} & \frac{p}{c^2} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{vmatrix}$$

gli elementi delle successive linee sono direttamente proporzionali alle distanze dei punti Q_0, I_0, G dai lati del triangolo fondamentale; sommando fra loro la prima e l'ultima linea s'ottiene la seconda, dunque il determinante è nullo. Si conchiude pertanto che i punti Q_0, I_0 e G sono allineati.

Poichè il luogo dei punti reciproci dei punti d'una retta rispetto a un dato triangolo è una conica circoscritta al medesimo, si deduce che la conica che passa pei punti A, B, C, G, I, Q (n. 13), può pure considerarsi come il luogo dei punti reciproci dei punti della retta $G I_0 Q_0$.

17. *La congiungente il reciproco dell'incentro col punto di* Gergonne *passa pel reciproco dell'inverso del punto* Q.

Infatti, il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{c^2} \\ \frac{1}{a(p-a)} & \frac{1}{b(p-b)} & \frac{1}{c(p-c)} \\ \frac{p}{a^2(p-a)} & \frac{p}{b^2(p-b)} & \frac{p}{c^2(p-c)} \end{vmatrix}$$

nel quale gli elementi delle successive linee sono quantità rispettivamente proporzionali alle distanze del reciproco dell'incentro, del punto di GERGONNE e del reciproco dell'inverso del punto Q dai lati BC, CA, AB, è nullo, giacchè sommando fra loro le prime due linee si ottiene l'ultima. Dunque i suddetti punti sono allineati.

Analogamente si dimostra la seguente proprietà:

L'inverso del reciproco del punto Q, *il punto di* LEMOINE *e l'inverso del punto di* NAGEL *sono allineati.*

18. È noto che il raggio del cerchio circoscritto ad $I_a I_b I_c$ è doppio del raggio del circolo circoscritto al triangolo ABC; quindi, siccome il raggio del circolo circoscritto al triangolo podario dell'incentro è r, il rapporto λ della omotetia fra i triangoli $A_r B_r C_r$, $I_a I_b I_c$ è dato dalla formola

$$\lambda = \frac{r}{2R}.$$

Perciò avremo (n. 1)

$$QI : QO_0 = r : 2R,$$

ossia, per nota proprietà,

$$QI : (QI + 2OI) = r : 2R,$$

da cui

$$QI = \frac{2r}{2R - r} OI,$$

ossia

$$QI = \frac{2r}{2R - r} \sqrt{R(R - 2r)}.$$

Per conseguenza sarà

$$QO = \frac{2R + r}{2R - r} \sqrt{R(R - 2r)}.$$

Possiamo valerci di queste formole per trovare le distanze

$$x_q, \quad y_q, \quad z_q$$

del punto Q dai lati del triangolo fondamentale. Infatti dette x_0, x_i le distanze di O, I dal lato BC, si ha

$$(x_i - x_q) : (x_0 - x_i) = QI : OI = 2r : (2R - r);$$

di qui, essendo, com'è noto

$$x_i = r, \qquad x_0 = R - \frac{r_a - r}{2},$$

si deduce agevolmente

$$x_q = \frac{r}{2R - r} \cdot r_a;$$

analogamente

$$y_q = \frac{r}{2R - r} \cdot r_b; \qquad z_q = \frac{r}{2R - r} \cdot r_c.$$

A queste formole si può anche dar la forma seguente:

$$x_q = \frac{2S}{ar_a + br_b + cr_c} \cdot r_a,$$

$$y_q = \frac{2S}{ar_a + br_b + cr_c} \cdot r_b,$$

$$z_q = \frac{2S}{ar_a + br_b + cr_c} \cdot r_c.$$

Le distanze dei punti Q_1, Q_2, Q_3 rispettivamente dai lati BC, CA, AB, s'attengono del pari con grande facilità; indicandole ordinatamente con δ_1, δ_2, δ_3 si hanno le formole:

$$\delta_1 = \frac{-2S}{ar_a + br_b + cr_c} \cdot r_a,$$

$$\delta_2 = \frac{-2S}{ar_a + br_b + cr_c} \cdot r_b,$$

$$\delta_3 = \frac{-2S}{ar_a + br_b + cr_c} \cdot r_c.$$

Queste possono mettersi sotto la forma seguente

$$\delta_1 = \frac{-r}{2R - r_a} r_a; \qquad \delta_2 = \frac{-r}{2R - r_b} r_b; \qquad \delta_3 = \frac{-r}{2R - r_c} \cdot r_c.$$

Si ricava perciò agevolmente

$$IQ_1 = \frac{2Rr}{2R - r_a}; \qquad IQ_2 = \frac{2Rr}{2R - r_b}; \qquad IQ_3 = \frac{2Rr}{2R - r_c}.$$

19. Si ha, evidentemente

$$BA_q = a\frac{cr_c}{br_b + cr_c}; \qquad CA_q = a\frac{br_b}{br_b + cr_c},$$

o, se si vuole,

$$BA_q = a\frac{r_c - r}{4R - r_a - r}; \qquad CA_q = a\frac{r_b - r}{4R - r_a - r}.$$

Perciò, per un noto teorema, indicando con Δ_q l'area del triangolo pedale del punto Q, si ha

$$\Delta_q = \frac{8Rr^2}{(4R - r_a - r)(4R - r_b - r)(4R - r_c - r)} S.$$

Possiamo subito determinare l'area del triangolo podario del punto Q, conoscendo la distanza del punto Q dal circoncentro. Infatti, dalla nota formola

$$\Delta'_q = (R^2 - \overline{OQ}^2)\frac{S}{4R^2},$$

(dove con Δ'_q s'indica l'area del suddetto triangolo podario), scende (n. 16)

$$\Delta'_q = \frac{r^2(4R+r)}{2R(2R-r)^2} S.$$

Da ultimo, segnaliamo le formole

$$\overline{QK}^2 = \frac{8r^2R}{m^2}\left[\frac{R(4R+r)^2 - p^2(R+r)}{(2R-r)^2} - \frac{6p^2R}{m^2}\right];$$

$$\overline{QJ}^2 = \frac{R}{2R-r}\left\{(2p^2-m^2)\left[\frac{t^2}{2Rr} - \frac{r(3R-r)}{R(2R-r)} - 4\right] - 2(8Rr+p^2-10r^2)\right\};$$

$$\overline{QI}^2 = 2r\left\{\frac{2p^2(t^2-2Rr)-m^2t^2}{4(2R-r)(t^2-p^2)} + \frac{S(q^3-pm^2)}{2(t^2-p^2)^2} - \frac{Rr(4R+r)}{(2R-r)^2}\right\};$$

dove, al solito, s'è posto

$$a+b+c=2p; \qquad a^2+b^2+c^2=m^2;$$
$$bc+ca+ab=t^2; \qquad a^3+b^3+c^3=q^3.$$

R. Vercellin.

SU ALCUNI DETERMINANTI DI FUNZIONI

Siano $f, f_1, f_2 \ldots f_n$ $n+1$ funzioni delle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$ e consideriamo il determinante

$$D(f, f_1, \ldots f_n) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Esso è ad un tempo una combinazione lineare di n jacobiani ed una combinazione lineare di n determinanti K come si vede subito sviluppandolo rispetto alla prima colonna od alla prima linea. Se si indica con $K_i(f)$ il determinante K delle $f_1 \ldots f_n$ rispetto alle

$$x_1 \ldots x_{i-1}\, x_{i+1} \ldots x_n$$

si può scrivere:

$$D(f, f_1, \ldots f_n) = \sum_i \frac{\partial t}{\partial x_i} K_i(f) \qquad (1)$$

donde, indicando con t un'altra funzione di $x_1 \dots x_n$:

$$D(tf,\ tf_1,\ tf_n) = \sum_i \left(t \frac{\partial f}{\partial x_i} + f \frac{\partial t}{\partial x_i} \right) K_i(tf)$$

e, per una nota proprietà dei determinanti K: (¹)

$$D(tf,\ tf_1 \dots tf_n) = t^n \sum_i \left(t \frac{\partial f}{\partial x_i} + f \frac{\partial t}{\partial x_i} \right) K_i(f) =$$

$$= t^{n+1} \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} K_i(f) + t^n f \sum_i \frac{\partial t}{\partial x_i} K_i(f)$$

$$= t^{n+1} D(f,\ f_1,\dots f_n) + t^n f\, D(t, f_1, \dots f_n).$$

Questa formola serve ad esprimere il determinante D delle funzioni composte per mezzo di due determinanti della stessa natura ma con funzioni semplici. Essa può scriversi:

$$D(tf,\ tf_1,\dots tf_n) = t^n \{ t\, D(f,\ f_1,\dots f_n) + f\, D(t,\ f_1,\dots f_n) \}. \tag{2}$$

Dalla (1) si deduce pure:

$$D(f,\ tf_1,\dots tf_n) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} K_i(tf) = t^n \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} K_i(f) = t^n D(f,\ f_1,\dots f_n)$$

dunque:

$$D(f,\ tf_1,\dots tf_n) = t^n D(f,\ f_1,\dots f_n). \tag{3}$$

Da queste formole possiamo dedurne altre riguardanti il caso in cui la funzione moltiplicatrice è la f oppure una delle f_i.

Per es. dalla (2) si deduce, prendendo come moltiplicatrice la f:

$$D(f^2,\ ff_1,\dots ff_n) = 2f^{n+1} D$$

dove si è posto per semplicità D in luogo di

$$D(f,\ f_1,\dots f_n).$$

Analogamente:

$$D(f^3, f^2f_1, \dots f^2f_n) = f^n [f\, D(f^2, ff_1, \dots ff_n) + f^2 D(f, ff_1, \dots ff_n)] =$$
$$= f^{n+1} [2f^{n+1} D + f^{n+1} D] = 3f^{2(n+1)} D.$$

In generale sarà:

$$D(f^r, f^{r-1} f_1, \dots f^{r-1} f_n) = r \,.\, f^{(r-1)(n+1)} D. \tag{4}$$

Infatti, ammessa questa, si ha per la (2):

$$D(f^{r+1}, f^r f_1, \dots f^r f_n) = D(f^r . f,\ f^{r-1} f_1 . f, \dots f^{r-1} f_n . f) =$$
$$= f^n \{ f\, D(f^r, f^{r-1} f_1, \dots f^{r-1} f_n) + f^r D(f, f^{r-1} f_1, \dots f^{r-1} f_n) \}$$
$$= f^n \{ r f^{r(n+1)-n} D + f^r f^{(r-1)n} D \} = (r+1) f^{r(n+1)} D$$

dunque la (4) è vera in generale e ci dice che moltiplicando tutte le funzioni di D per una potenza qualsiasi $r-1$ della prima di esse, il determinante si riproduce a meno del fattore $r \,.\, f^{(r-1)(n+1)}$.

(¹) V. ad es. E. PASCAL, *I Determinanti*, pag. 294.

Ora prendiamo come funzione moltiplicatrice una f_i qualunque. Si ha sempre per la (2):

$$D(ff_i, f_1f_i, \ldots f_nf_i) = f_i^n \{ f_i D(f, f_1 \ldots f_n) + f D(f_i f_1 \ldots f_n) \}; \text{ ma}$$

$$D(f_i, f_1, \ldots f_n) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_i & \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_n & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = f_i \frac{\partial (f_1, f_2, \ldots f_n)}{\partial (x_1, x_2, \ldots x_n)},$$

dunque:

$$D(ff_i, f_1f_i \ldots f_nf_i) = f_i^{n+1} \{ D + fI \}$$

dove si è, per semplicità, indicato con I il jacobiano delle f_i rispetto alle x_i. Segue:

$$D(ff_i, f_1f_i, \ldots f_nf_i) = f_i^{n+1} K(f, f_1, \ldots f_n).$$

Dunque moltiplicando tutte le funzioni del determinante D per una di esse che non sia la prima, il determinante si trasforma nel prodotto della potenza $(n+1)^{ma}$ della funzione moltiplicatrice per il determinante K di tutte le funzioni semplici.

Passiamo ora a moltiplicatrice la potenza seconda di f_i.

Abbiamo, sempre per la (2)

$$\begin{aligned} D(ff_i^2, f_1f_i^2, \ldots f_nf_i^2) &= f_i^n [f_i D(ff_i, f_1f_i, \ldots f_nf_i) + ff_i D(f_i, f_1f_i, \ldots f_nf_i)] \\ &= f_i^n [f_i^{n+2} K(f, f_1, \ldots f_n) + ff_i^{n+1} D(f_i, f_1, \ldots f_n)] \\ &= f_i^n [f_i^{n+2} K + ff_i^{n+2} I] = f_i^{2(n+1)} \{ D + 2fI \}. \end{aligned}$$

In generale sarà:

$$D(ff_i^r, f_1f_i^r, \ldots f_nf_i^r) = f_i^{r(n+1)} \{ D + rfI \}. \tag{5}$$

Infatti ammessa questa si ha, per la (2):

$$\begin{aligned} D(ff_i^{r+1}, f_1f_i^{r+1}, \ldots f_nf_i^{r+1}) &= f_i^n [f_i D(ff_i^r, f_1f_i^r, \ldots f_nf_i^r) + ff_i^r D(f_i, f_1f_i^r, \ldots f_nf_i^r)] \\ &= f_i^n [f_i^{r(n+1)+1} (D + rfI) + ff_i^r f_i^{rn} D(f_i, f_1, \ldots f_n)] = \\ &= f_i^n [f_i^{r(n+1)+1} (D + rfI) + ff_i^{r(n+1)+1} I] = f_i^{(r+1)(n+1)} \{ D + (r+1) fI \}. \end{aligned}$$

Dunque la (5) è vera in generale e ci dice che moltiplicando tutte le funzioni di D per una potenza qualsiasi di una di esse che non sia la prima, il determinante risultante si esprime sempre per mezzo di un determinante D ed un jacobiano di funzioni semplici.

Dalla formola (3) possiamo poi dedurre delle relazioni fra jacobiani. Infatti abbiamo:

$$\begin{aligned} D(f, f_1, \ldots f_n) &= D\left(f, f_1 . 1, f_1 . \frac{f_2}{f_1}, \ldots, f_1 \frac{f_n}{f_1}\right) = \ldots \\ &\ldots = D\left(f, \frac{f_1}{f_n} f_n, \ldots \frac{f_{n-1}}{f_n} . f_n, 1 . f_n\right) \end{aligned}$$

donde:

$$f_1^n \frac{\partial\left(f, \frac{f_2}{f_1}, \dots \frac{f_n}{f_1}\right)}{\partial(x_1, \dots x_n)} = f_2^n \frac{\partial\left(f, \frac{f_1}{f_2}, \dots \frac{f_n}{f_2}\right)}{\partial(x_1, \dots x_n)} = \dots$$

$$\dots = f_n^n \frac{\partial\left(f, \frac{f_1}{f_n}, \dots \frac{f_{n-1}}{f_n}\right)}{\partial(x_1, \dots x_n)}.$$

Ed ora applichiamo la (3) a dimostrare il

Teorema. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè tra* n + 1 *funzioni* f, f_1, ... f_n *delle variabili* x_1 x_2, ... x_n *sussista una relazione della forma*

$$f^m \varphi_1 + f^{m-1} \varphi_2 + \dots + \varphi_{m+1} = 0 \tag{6}$$

dove le φ_i *sono funzioni omogenee dello stesso grado* g *rispetto ad* f_1, f_2, ... f_n, *è che sia identicamente nullo il determinante* D.

1°. La condizione è necessaria. Infatti supponiamo che sussista la (6); supposto $f_1 \neq 0$ (come è certamente lecito) si divida per f_1^g; allora le φ si mutano in funzioni di

$$\frac{f_2}{f_1}, \dots \frac{f_n}{f_1}$$

e la (6) si ridurrà ad una relazione tra

$$f, \frac{f_2}{f_1}, \dots \frac{f_n}{f_1}$$

onde segue l'annullarsi del jacobiano delle

$$f, \frac{f_2}{f_1}, \dots \frac{f_n}{f_1}$$

rispetto ad x_1, x_2, ... x_n cioè:

$$\frac{\partial\left(f, \frac{f_2}{f_1}, \dots \frac{f_n}{f_1}\right)}{\partial(x_1 x_2, \dots x_n)} = 0.$$

Ora, in virtù della (3) si ha:

$$D(f, f_1, \dots f_n) = D\left(f, f_1 . 1, f_1 \frac{f_2}{f_1}, \dots f_1 \frac{f_n}{f_1}\right) =$$

$$= f_1^n D\left(f, 1, \frac{f_2}{f_1}, \dots \frac{f_n}{f_1}\right) = f_1^n \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots\dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ 1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ \frac{f_2}{f_1} & \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{f_n}{f_1} & \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{f_n}{f_1}\right) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{f_n}{f_1}\right) \end{vmatrix}$$

infine:

$$D(f, f_1, \ldots f_n) = f_1^n \frac{\partial\left(f, \frac{f_2}{f_1}, \ldots \frac{f_n}{f_1}\right)}{\partial(x_1 x_2, \ldots x_n)} = 0.$$

2°. La condizione è sufficiente. Infatti se

$$D(f, f_1, \ldots f_n) = 0,$$

sarà, come si è visto,

$$\frac{\partial\left(f, \frac{f_2}{f_1}, \ldots \frac{f_n}{f_1}\right)}{\partial(x_1 x_2, \ldots x_n)} = 0$$

epperò sussiste una relazione tra

$$f, \frac{f_2}{f_1}, \ldots \frac{f_n}{f_1}$$

che può sempre ridursi ad una relazione della forma (6).

TEOREMA. — *I determinanti* D *di* n + 1 *funzioni omogenee ad* n *variabili e degli jacobiani* I *di queste funzioni prese* n *ad* n *sono, a meno di un fattore, identici.*

Questo fattore è lo stesso di quello per cui le f *differiscono* (CLEBSCH) (1) *dalle* φ, *jacobiani delle* I.

Infatti, posto

$$I_r = \frac{\partial(f, f_1, \ldots f_{r-1} f_{r+1}, \ldots f_n)}{\partial(x_1 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; x_n)}, \qquad \varphi_r = \frac{\partial(I, I_1, \ldots I_{r-1} I_{r+1}, \ldots I_n)}{\partial(x_1 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; x_n)}$$
$$(r = 1, 2, \ldots n+1)$$

si ha:

$$D(f, f_1, \ldots f_n) = \sum_r f_r I_r;$$

ma, pel teorema di Clebsch, $f_r = M\varphi_r$ essendo M un fattore costante, dunque:

$$D(f, f_1, \ldots f_n) = M \sum_r \varphi_r I_r = MD(I, I_1, \ldots I_n)$$

c. v. d.

Consideriamo ora la matrice:

$$\left\| \begin{array}{ccccc} 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ f_2 & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right\|$$

(1) CLEBSC, *Eine Eigenschaft von Functionaldeterminanten*. Crelle, vol. LXIX, pag. 355.

ed indichiamo con D_i il determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ f_2 & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

cioè quello dedotto dalla matrice col sopprimere la $(i+1)^{ma}$ colonna. Abbiamo:

$$\frac{\partial D_1}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \;\; \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) + \left(f \;\; \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \;\; \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \left(f \;\; \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}\right)$$

$$\frac{\partial D_2}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \;\; \frac{\partial f}{\partial x_1} \;\; \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) + \left(f \;\; \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \;\; \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \left(f \;\; \frac{\partial f}{\partial x_1} \;\; \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}\right)$$

. . . .

$$\frac{\partial D_n}{\partial x_n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \;\; \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\right) + \left(f \;\; \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \;\; \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \left(f \;\; \frac{\partial f}{\partial x_1} \;\; \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n}\right)$$

dove si è indicato colla scrittura

$$\left(f \;\; \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_i} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

il determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \vdots & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_r \partial x_i} & \vdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ f_2 & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \vdots & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_r \partial x_i} & \vdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \vdots & \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_r \partial x_i} & \vdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

dove s'intende soppressa la $(i+1)^{ma}$ e la $(r+1)^{ma}$ colonna e sostituito al posto di una di esse

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_r} \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_i}.$$

Dunque si ha:

$$\left(f, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \left(f, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

$$\left(f, \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_4} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = -\left(f, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \frac{\partial f}{\partial x_4} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \text{ ecc.}$$

epperò moltiplicando le relazioni scritte rispettivamente per

$$(-1)^0, \quad (-1)^1, \quad (-1)^2, \ldots (-1)^{n-1}$$

e sommando si ha:

$$\frac{\partial D_1}{\partial x_1} - \frac{\partial D_2}{\partial x_2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{\partial D_n}{\partial x_n} =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\right).$$

Ora:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = I - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} I_1$$

avendo posto:

$$I = \frac{\partial (f_1 f_2 \ldots f_n)}{\partial (x_1 x_2 \ldots x_n)} \qquad \text{ed} \qquad I_1 = \frac{\partial (f_2 f_3 \ldots f_n)}{\partial (x_2 x_3 \ldots x_n)}.$$

Analogamente:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = -I - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} I_2$$

dove

$$I_2 = \frac{\partial (f_2 f_3 \ldots f_n)}{\partial (x_1 x_3 \ldots x_n)} \quad \text{ecc.}$$

dunque si può scrivere:

$$\frac{\partial D_1}{\partial x_1} - \frac{\partial D_2}{\partial x_2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{\partial D_n}{\partial x_n} =$$

$$= nI - \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} I_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} I_2 + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{\partial f_1}{\partial x_n} I_n \right\} =$$

$$= nI - I = (n-1) I.$$

Epperò: *La somma, coi segni alterni, delle derivate dei determinanti* D_i *rispetto alle variabili* x_i *che in essi non compaiono esplicitamente, è uguale ad* $(n-1)$ *moltiplicato pel jacobiano delle* f_i *rispetto alle* x_i.

COROLLARIO. — *Il determinante ottenuto orlando il circolante di elementi* $\frac{\partial D_i}{\partial x_i}$ *con una linea ed una colonna di elementi* $I, -I, \dots (-1)^{n-1} I$ *in modo che sia* I *l'elemento d'incrociamento, equivale, a meno del fattore* $-\frac{I}{n-1}$, *al circolante di elementi* $\frac{\partial D_i}{\partial x_i}$.

Basta infatti sottrarre dalla prima linea moltiplicata per $n-1$ del determinante

$$R = \begin{vmatrix} I & I & -I & \cdot & (-1)^{n-1} I \\ I & \frac{\partial D_1}{\partial x_1} & \frac{\partial D_2}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial D_n}{\partial x_n} \\ -I & \frac{\partial D_2}{\partial x_2} & \frac{\partial D_3}{\partial x_3} & \vdots & \frac{\partial D_1}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n-1} I & \frac{\partial D_n}{\partial x_n} & \frac{\partial D_1}{\partial x_1} & \vdots & \frac{\partial D_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix}$$

la $2^a, 3^a, \dots (n+1)^{ma}$ rispettivamente moltiplicate per

$$(-1)^0, (-1)^1, \dots (-1)^{n-1}$$

per ottenere:

$$(n-1) R = \begin{vmatrix} -I & 0 & \dots & 0 \\ I & \frac{\partial D_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial D_n}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-1)^{n-1} I & \frac{\partial D_n}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial D_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix} \text{ cioè } (n-1) R = -I \,.\, C$$

dove C indica l'anzidetto circolante. Ne segue

$$R = -\frac{I}{n-1} C.$$

R. OCCHIPINTI.

PICCOLE NOTE

Sopra un problema nel calcolo delle probabilità.

Il dott. C. M. Piuma in una nota pubblicata nel "Giornale di Matematica", vol. XVII, anno 1879, risolve il seguente problema: *Da un'urna che contiene* B *biglietti numerati progressivamente da 1 fino a* B *ne vengono estratti 3 e si fa l'addizione dei 3 numeri scritti su tali biglietti: fra i* $\frac{B(B-1)(B-2)}{6}$ *casi possibili* *quanti ve ne sono nei quali la somma così ottenuta risulti eguale o minore di un numero dato* K?

Il dott. Piuma perviene alla soluzione di questo problema con procedimenti lunghissimi e complicati, e però credo non inutile far vedere come si possa ottenere in modo brevissimo tale soluzione, servendomi dei risultati da me ottenuti in una mia nota inserita in questo *Periodico* (fasc. III, novembre-dicembre 1907) " Sui gruppi di numeri naturali, aventi una data somma ". Risolvo poi lo stesso problema reso più generale.

Farò uso ancora dei simboli introdotti in tale mia nota, ed aggiungo il simbolo $n^{\mathrm{B}}_{\rho,\mathrm{K}}$ per rappresentare il numero delle combinazioni semplici di classe ρ di numeri non maggiori di B, la cui somma sia *uguale* o *minore di* K.

Naturalmente suppongo

$$\mathrm{K} \geqq 1+2+3+\ldots+\rho \quad \text{e} \quad \mathrm{K} \leqq \mathrm{B}+(\mathrm{B}-1)+(\mathrm{B}-2)+\ldots+(\mathrm{B}-\rho+1),$$

perchè per $\mathrm{K} < 1+2+\ldots+\rho$ nessun caso sarebbe possibile e per

$$\mathrm{K} > \mathrm{B}+(\mathrm{B}-1)+\ldots+(\mathrm{B}-\rho+1)$$

tutti i casi sarebbero buoni.

Il numero $n^{\mathrm{B}}_{\rho,\mathrm{K}}$ si ottiene togliendo dal numero $n_{\rho,\mathrm{K}}$ (che rappresenta le combinazioni di classe ρ, di somma $\leqq \mathrm{K}$) il numero di quelle che contengono come maggiore elemento $\mathrm{B}+1$ le quali sono tante quante sono le combinazioni di classe $\rho-1$ di elementi $\leqq \mathrm{B}$, la cui somma sia $\leqq \mathrm{K}-(\mathrm{B}+1)$, cioe $n^{\mathrm{B}}_{\rho-1,\mathrm{K}-\mathrm{B}-1}$), poi togliendo quelle che contengono come massimo elemento $\mathrm{B}+2$ (e che sono $n^{\mathrm{B}+1}_{\rho-1,\mathrm{K}-\mathrm{B}-2}$) e così via. Dunque si ha:

$$n^{\mathrm{B}}_{\rho,\mathrm{K}} = n_{\rho,\mathrm{K}} - (n^{\mathrm{B}}_{\rho-1,\mathrm{K}-\mathrm{B}-1} + n^{\mathrm{B}+1}_{\rho-1,\mathrm{K}-\mathrm{B}-2} + \ldots). \tag{1}$$

Per $\rho = 2$ questa diventa:

$$n^{\mathrm{B}}_{2,\mathrm{K}} = n_{2,\mathrm{K}} - (n^{\mathrm{B}}_{1,\mathrm{K}-\mathrm{B}-1} + n^{\mathrm{B}+1}_{1,\mathrm{K}-\mathrm{B}-2} + \ldots),$$

dove in generale $n^{r}_{1,t} = t$, perchè le combinazioni di un solo elemento $\leqq r$, il cui valore sia $\leqq t$ (dove $t < r$, per l'ipotesi fatta sul valore di K), altro non sono che i numeri $1, 2, 3, \ldots, t$.

Dunque si ha:

$$n^{\mathrm{B}}_{2,\mathrm{K}} = n_{2,\mathrm{K}} - [(\mathrm{K}-\mathrm{B}-1)+(\mathrm{K}-\mathrm{B}-2)+\ldots+1] = n_{2,\mathrm{K}} - \binom{\mathrm{K}-\mathrm{B}}{2};$$

ma si ha intanto: (1)

$$n_{2,t+1} + n_{2,t} = \Sigma_{t-1} + \Sigma_{t-2} = [(t-1)+(t-3)+\ldots] + \\ + [(t-2)+(t-4)+\ldots] = \binom{t}{2},$$

quindi:

$$n^{\mathrm{B}}_{2,\mathrm{K}} = n_{2,\mathrm{K}} - (n_{2,\mathrm{K}-\mathrm{B}+1} + n_{2,\mathrm{K}-\mathrm{B}}). \tag{2}$$

Per $\rho = 3$ la (1) diventa:

$$n^{\mathrm{B}}_{3,\mathrm{K}} = n_{3,\mathrm{K}} - (n^{\mathrm{B}}_{2,\mathrm{K}-\mathrm{B}-1} + n^{\mathrm{B}+1}_{2,\mathrm{K}-\mathrm{B}-2} + \ldots),$$

e per la (2):

$$n^{\mathrm{B}}_{3,\mathrm{K}} = n_{3,\mathrm{K}} - (n_{2,\mathrm{K}-\mathrm{B}-1} + n_{2,\mathrm{K}-\mathrm{B}-2} + \ldots + n_{2,3}) + [(n_{2,\mathrm{K}-2\mathrm{B}} + n_{2,\mathrm{K}-2\mathrm{B}-1}) + \\ + (n_{2,\mathrm{K}-2\mathrm{B}-2} + n_{2,\mathrm{K}-2\mathrm{B}-3}) + \ldots],$$

(1) V. mia nota nel *Periodico di Matematica*, fasc. III, pag. 111, anno 1907.

cioè:

$$n^{B}_{3,K} = n_{3,K} - (n_{2,K-B-1} + n_{2,K-B-2} + \ldots + n_{2,K-2B+1}). \tag{3}$$

Si potrebbe così trovare $n^{B}_{4,K}$, poi $n^{B}_{5,K}$, etc.

Nella mia nota succitata, a pag. 112, ho dato per $n_{3,K}$ la formola

$$n_{3,K} = \frac{1}{4}\left[\frac{(K-1)^3-(r+1)^3}{9} - \frac{3q(K+r-1)}{2} - m\right]$$

dove q ed r sono il quoziente e il resto della divisione per 3 del numero $K-2$, e dove $m = \frac{q}{2}$ se q è pari, e se q è dispari $m = \frac{q+1}{2}$ o $m = \frac{q-1}{2}$ secondochè r è pari o dispari.

Per esprimere in funzione di K e B la quantità in parentesi nel 2° membro dalla (3), si osservi che per $h = 2m$ (numero pari), si ha:

$$\begin{aligned}\Sigma_{2m} + \Sigma_{2m-1} + \ldots + \Sigma_1 &= (m+1)\,m + m^2 + m\,(m-1) + (m-1)^2 + \ldots + \\ &+ 2\,.\,1 + 1^2 = [(m+1)\,m + m\,(m-1) + \ldots + 2\,.\,1] + [m^2 + (m-1)^2 + \ldots + 1^2] = \\ &= \frac{(m+2)(m+1)\,m}{3} + \frac{m\,(m+1)(2m+1)}{6} = \frac{m\,(m+1)(4m+5)}{6}\end{aligned} \tag{4}$$

e per $h = 2m-1$ (numero dispari) si ha:

$$\begin{aligned}\Sigma_{2m-1} + \Sigma_{2m-2} + \ldots + \Sigma_1 &= m^2 + m\,(m-1) + (m-1)^2\,(m-1)\,(m-2) + \ldots + \\ &+ 2\,.\,1 + 1^2 = [m^2 + (m-1)^2 + \ldots + 1^2] + [m(m-1) + (m-1)(m-2) + \ldots + 2\,.\,1] = \\ &= \frac{m\,(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{(m+1)\,m\,(m-1)}{3} = \frac{m\,(m+1)(4m-1)}{6}.\end{aligned} \tag{5}$$

Per far figurare h basta moltiplicare, nell'ultimo membro della (4) e della (5), i primi due fattori del numeratore per 2 ed il denominatore per 4, e si avrà: per h pari:

$$\Sigma_h + \Sigma_{h-1} + \ldots + \Sigma_1 = \frac{h\,(h+2)(2h+5)}{24},$$

e per h dispari:

$$\Sigma_h + \Sigma_{h-1} + \ldots + \Sigma_1 = \frac{(h+1)(h+3)(2h+1)}{24};$$

e poichè si può subito constatare che quest'ultimo numeratore supera di 3 il precedente, si può scrivere, per h qualsiasi:

$$\Sigma_h + \Sigma_{h-1} + \ldots + \Sigma_1 = \frac{h\,(h+2)(2h+5) + 3 \times \frac{1-(-1)^h}{2}}{24}.$$

Ora si ha:

$$\begin{aligned}n_{2,K-B-1} + n_{2,K-B-2} + \ldots + n_{2,K-2B+1} &= \Sigma_{K-B-3} + \Sigma_{K-B-4} + \ldots + \Sigma_{K-2B-1} = \\ &= (\Sigma_{K-B-3} + \Sigma_{K-B-4} + \ldots + \Sigma_1) - (\Sigma_{K-2B-2} + \Sigma_{K-2B-3} + \ldots + \Sigma_1) = \\ &= \frac{(K-B-3)(K-B-1)(2K-2B-1) + 3 \times \frac{1-(-1)^{K-B-1}}{2}}{24} - \\ &- \frac{(K-2B-2)(K-2B)(2K-4B+1) + 3 \times \frac{1-(-1)^{K}}{2}}{24},\end{aligned}$$

che è l'espressione cercata.

Si noti però che se fosse $K - B - 3 < 0$ o $K - 2B - 2 < 0$, si dovrebbero considerare come nulle rispettivamente queste due frazioni o la seconda solamente.

Si può ora risolvere il seguente problema:

Quanti sono i terni di somma $\leqq K$ formati di numeri compresi fra α e β, gli estremi inclusi?

Il numero di questi terni lo indico con $n_{3,K}^{\alpha,\beta}$. Intanto diminuendo di $\alpha - 1$ ogni elemento di uno di tali terni, si ottiene un terno di somma $\leqq K - 3(\alpha - 1)$, con elementi $\leqq \beta - (\alpha - 1)$, e viceversa aumentando di $\alpha - 1$ ogni elemento di uno di questi terni, si ottiene un terno dei primi; dunque si ha:

$$n_{3,K}^{\alpha,\beta} = n_{3,K-3(\alpha-1)}^{\beta-\alpha+1}.$$

Per le combinazioni di classe ρ si otterrebbe parimenti:

$$n_{\varrho,K}^{\alpha,\beta} = n_{\varrho,K-\varrho(\alpha-1)}^{\beta-\alpha+1}.$$

M. Morale.

RISOLUZIONE DELLA QUISTIONE 743

743. 1°. *Si considerino due iperboli equilatere coniugate. Tutte le ellissi concentriche ad esse, aventi per assi gli asintoti e tangenti alle iperboli, hanno eguale area.*

2°. *Si consideri una ipocicloide a 4 regressi. Tutte le ellissi concentriche all'ipocicloide aventi per assi le tangenti cuspidali* (1) *di questa, e tangenti alla curva hanno costante la somma delle lunghezze degli assi.*

E. N. Barisien.

Risoluzione del prof. **V. Retali.**

Di questi due teoremi si trovano dimostrazioni analitiche in molti trattati di Calcolo Infinitesimale: le seguenti sono puramente geometriche e, credo, nuove.

1°. Se proiettiamo un punto arbitrario P di un cerchio di centro O e raggio r su due diametri ortogonali in A e B si ha $AB = r$; l'inviluppo della retta $|AB|$ è l'astroide e la proiezione M di P sopra $|AB|$ è il punto di contatto di questa retta col suo inviluppo. Ciò posto, proiettiamo M sopra OA e OB rispettivamente in A' e B', e sia K^2 l'ellisse di centro O tangente all'astroide in M e avente per assi le tangenti cuspidali (reali) di questa; denotando con ω l'angolo AOP, si ha immediatamente dalla figura:

$$OA = r \cos \omega, \qquad OB = r \operatorname{sen} \omega$$
$$AM = OB \operatorname{sen} \omega = 2 \operatorname{sen}^2 \omega, \qquad BM = r \cos^2 \omega$$
$$A'M = OB' = AM \operatorname{sen} \omega = r \operatorname{sen}^3 \omega$$
$$B'M = OA' = BM \operatorname{sen} \omega = r \cos^3 \omega;$$

i quadrati dei semi-assi dell'ellisse K^2 sono dunque

$$a^2 = OA \,.\, OA' = r^2 \cos^4 \omega$$
$$b^2 = OB \,.\, OB' = r^2 \operatorname{sen}^4 \omega$$

(1) L'*astroide* essendo priva di flessi, non ha tangenti di regresso ma bensì tangenti (doppie) cuspidali.

e per conseguenza
$$a + b = r(\cos^2\omega + \operatorname{sen}^2\omega) = r.$$

2°. Sieno A e B le intersezioni degli asintoti con la tangente in M ad una delle due iperboli; A' e B' le proiezioni di M sopra OA e OB: poichè AM = MB si ha:
$$OA = 2OA', \qquad OB = 2OB',$$
i quadrati dei semi-assi dell'ellisse di centro O, tangente $|AB|$ in M ed avente per assi gli asintoti son dunque:
$$a^2 = OA \,.\, OA' = \tfrac{1}{2}\,\overline{OA'}^2$$
$$b^2 = OB \,.\, OB' = \tfrac{1}{2}\,\overline{OB'}^2,$$
laonde:
$$\pi ab = \tfrac{1}{2}\,\pi\, OA' \,.\, OB' = \pi k^2,$$
se k^2 è la potenza delle iperboli equilatere coniugate. V. RETALI.

Altra risoluzione del sig. Vercellin, R. U. di *Torino*.

1°. L'ellisse
$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \tag{1}$$
risulta tangente alla curva
$$\varphi(x, y) = x^2y^2 - k = 0, \tag{2}$$
se è
$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$
ossia
$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}. \tag{3}$$

Eliminando x e y dalle equazioni (1), (2) e (3) si ricava agevolmente $a^2b^2 = 4k$.

2°. L'ellisse (1) riesce tangente all'ipocicloide a quattro regressi
$$\psi(x, y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - k^{\frac{2}{3}} = 0, \tag{4}$$
se è
$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad \text{ovverosia} \qquad \frac{x^{\frac{4}{3}}}{a^2} = \frac{y^{\frac{4}{3}}}{b^2},$$
ossia, considerando solo i valori positivi dei semiassi a e b,
$$\frac{x^2}{a^3} = \frac{y^2}{b^3}. \tag{5}$$

Eliminando x e y fra le (1), (4) e (5) si trova agevolmente
$$(a + b)^2 = k^2.$$

Restano così pienamente dimostrate le verità enunciate.

Si dimostra parimente che tutte le ellissi, aventi per assi due rette perpendicolari *fisse*, ed aventi la medesima area, inviluppano due iperboli equilatere coniugate, di cui quelle rette perpendicolari sono gli asintoti, e che tutte le ellissi che hanno per assi due rette *fisse*, fra loro perpendicolari e per le quali è costante la somma delle lunghezze degli assi, inviluppano un *astroide* (ipocicloide a quattro regressi).

R. VERCELLIN.

QUISTIONI PROPOSTE

756. Ad una tangente variabile d'una conica centrale C^2 si conduce la perpendicolare t nel suo punto d'incontro con una retta fissa m, non tangente a C^2.

1°. L'inviluppo di t è una C_6^4 del sest'ordine e della quarta classe, che ha m per tangente doppia e tocca con due rami la retta all'infinito in direzione perpendicolare ad m.

2°. Le due curve C^2 e C_6^4 sono omofocali; determinarne le altre tangenti comuni (non isotrope).

3°. Ognuna delle due curve è il luogo dei fuochi delle parabole che hanno m per tangente al vertice e toccano l'altra; ognuna di esse è anche inviluppo delle parabole che hanno i fuochi sull'altra ed m per tangente al vertice.

4°. Se C^2 è parabola, l'inviluppo di t' è una C_4^3 del quart'ordine e della terza classe, che tocca la retta all'infinito sulla direttrice della parabola e in direzione perpendicolare ad m; ha lo stesso fuoco della parabola.

757. Se ad una tangente variabile t della parabola semi-cubica $ay^2=x^3$, conduciamo la perpendicolare t' nel suo punto d'incontro con l'asse delle x, lo inviluppo di t' e una parabola conica avente lo stesso asse, il medesimo vertice e lo stesso fuoco.

758. Il luogo dei punti equidistanti da una conica centrale e da uno dei suoi fuochi reali è la polare reciproca di una lumaca di Pascal.

759. Il luogo dei punti equidistanti da una parabola e da un punto fisso del suo piano non situato in essa è una curva del quinto ordine e della quarta classe, avente la retta all'infinito per tangente stazionaria.

Se la parabola passa pel punto fisso il luogo dei punti equidistanti è una parabola di Neil.

Il luogo dei punti equidistanti da una parabola e dal fuoco di essa, è la polare reciproca di una cardioide, rispetto ad un cerchio avente per centro la cuspide reale.

V. Retali.

BIBLIOGRAFIA

MINEO CHINI. — *Lezioni di Algebra* ad uso dei Licei. Volume II. Livorno, Giusti, 1908.

È uscito il 2° volume di questa opera, contenente gli argomenti che l'attuale programma di matematica assegna alla 2ª ed alla 3ª liceale.

Questo volume ha i medesimi pregi che furono rilevati nel primo; ma avrei desiderato che, essendo destinato a giovani già alquanto esperti nella matematica e che hanno scelto questa disciplina invece del greco, alcuni degli argomenti vi fossero stati svolti con maggiore ampiezza. La parte 2ª, ad es. (*Complementi alla teoria delle equazioni*) avrebbe dovuto contenere, a mio credere, le equazioni trinomie in generale, un maggior numero di casi di equazioni con radicali e di sistemi di 2° grado, qualche caso di sistemi di grado superiore, e dare maggiore importanza agli artifizi che si possono usare, i quali, appunto perchè non si insegnano, devono essere suggeriti dalla copia degli esempi.

Un'altra osservazione che mi permetto di fare è questa. L'A. ha svolto la teoria dei radicali conservando quasi sempre al simbolo $\sqrt[n]{a}$ il suo significato, talora doppio, di numero con segno qualunque. Ciò è corretto, ma rende complicati gli enunciati, mentre preme che l'alunno li veda semplici, per imprimerseli bene nella mente e rendersi disinvolto nel calcolo dei radicali, non facile pei principianti. Mi sembra preferibile limitare i teoremi ai valori assoluti dei radicali, o supporre a positivo e dare al simbolo $\sqrt[n]{a}$ il significato di numero positivo, esponendo i teoremi in questa ipotesi, e ricordando dopo che, quanto al segno, le conclusioni sono da trarsi caso per caso in base a ciò che, sul segno dei radicali, è stato esposto a parte: la semplicità dell'esposizione è così maggiore.

Taccio delle piccole mende che ogni insegnante rileverà e correggerà da sè, e che sarebbe cosa inutile e sconveniente enumerare qui, trattandosi di un libro fatto con coscienza, con abilità e con notevole conoscenza dei bisogni e delle debolezze degli scolari, pei quali, alla fin fine, si fanno i libri di testo! Ma in nome di questi scolari debbo deplorare che anche in questo volume, quasi come nel primo, siano scarsi gli esercizi: giacchè è noto che i giovani volenterosi si rendono esperti nell'algebra facendo da sè gli esercizi che il libro propone, ed essendo quindi utile, se non forse necessario, che il testo ne presenti un numero molto superiore a quello che ne dà il nostro Chini, il quale, come apparisce dalla prefazione, non ha al riguardo idee analoghe alle mie.

RODOLFO BETTAZZI.

F. SIBIRANI, *Formulario di Matematiche* (Bologna, Tipo-litografia Minarelli. L. 5).

L'utilità del formulario in generale è cosa troppo esperimentata e troppo universalmente riconosciuta perchè metta conto parlarne.

Trovo tuttavia opportuno richiamare l'attenzione del lettore sopra il volume testè pubblicato in Bologna dal prof. F. Sibirani, e che porta il titolo *Formulario* *di Matematiche* ad uso degli studenti universitari, titolo ch'io non esito a chiamare eccessivamente modesto riguardo al contenuto. Ed infatti il libro del professor Sibirani, più che un formulario, è un vero e proprio riassunto di quanto s'insegna nei corsi di matematica del primo biennio universitario, perchè comprende, oltre alle pure formule, definizioni ed enunciati di teoremi, enumera le proprietà dei vari enti e risolve le questioni più importanti che si presentano sia nel campo della Trigonometria piana e sferica, che in quella dell'Algebra Complementare, e della Geometria Analitica, del Calcolo e sue applicazioni alla Geometria.

Questa proprietà, di contenere cioè condensata la materia di due anni d'insegnamento, fa sì che il suddetto volume possiede un più alto grado di utilità che gli altri libri del genere.

Chè mentre esso si presta benissimo ad un'ultima rapida scorsa della materia nei giorni precedenti l'esame, rimane anche dopo la laurea un pronto soccorso, ogni qualvolta le circostanze richiedono la presenza di cognizioni eventualmente dimenticate.

Tutto ciò per quanto riguarda l'essenza del contenuto; circa poi la disposizione della materia, il volume del prof. Sibirani ha un pregio notevolissimo; quello cioè di essere corredato alla fine d'un " Indice alfabetico analitico della materia ", come si trova scritto nel volume stesso, il quale indice facilita assai la ricerca della formula, della definizione, o della proprietà di cui si abbisogna.

Queste le doti del *Formulario* in questione, doti, che come si vede, lo fan distinguere fra gli altri generalmente usati.

Dei pregi relativi alle singole parti del volume, cioè buon ordine nel succedersi dei concetti e copiosità senza prolissità dei medesimi, ricchezza di formule senza che le più importanti e le essenziali perdano il rilievo necessario onde attrarre sovra di esse maggiormente l'attenzione, giusta proporzione fra la mole dei vari argomenti, chiarezza, omogeneità, e connessione nello sviluppo generale; di questi pregi, dico, può facilmente convincersi chiunque voglia prender conoscenza del volume in parola.

E qui termino il breve cenno, convinto che le buone qualità del *Formulario* del prof. Sibirani, lo raccomandano da sole a tutti gli studiosi di matematiche ed in particolar modo agli studenti universitari di questa scienza, meglio di quanto possono fare le mie parole.

G. Ferrari.

Intorno ad alcune questioni elementari di massimo e minimo.

A quanto è detto nel n. 1 del mio articolo pubblicato con lo stesso titolo nel fascicolo precedente, è doveroso aggiungere che l'osservazione quivi riprodotta, si trova, assai prima che nei testi ivi citati, in una nota all'ottimo trattato di C. Arzelà (*Complementi di Algebra Elementare* etc. Firenze, Le Monnier, 1906, pag. 220) dove anzi il ch.mo Autore espone un'altra dimostrazione rigorosa del teorema in questione, dovuta al *Darboux*.

E. Veneroni.

ERRATA-CORRIGE per l'articolo: Viterbi A. — *Della curva di allineamento sopra la superficie terrestre*, pubblicato nel fascicolo precedente a pag. 17.

Pag. 18, nota (4), prima linea. — *Vanno soppresse le parole*: a piè di pag. 1.

" 20, linea 12. — *In luogo di*: $\frac{1-e^2}{e^2}$ *leggasi*: $\frac{e^2}{1-e^2}$.

" 20, nota, linee 3-4. — *Vanno soppresse le parole*: e l'asse z diretto secondo la normale all'ellissoide in parola, in detto punto.

" 28, linea 9. — *In luogo di*: (12) *leggasi*: (9).

" 28 " 12. — *In luogo di*: $\operatorname{sen} 2a_1$ *leggasi*: $\operatorname{sen}^2 2a_1$.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 27 Ottobre 1908

I CONGRESSO
DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI MATEMATICA

FIRENZE — 16-20 Ottobre 1908

SEDUTA INAUGURALE.

Il Congresso annunziato s'inaugurò il giorno 16 ottobre a ore $10\,{}^1/_2$, in una sala della R. Accademia di Belle Arti, presenti il prefetto di Firenze ed altre autorità cittadine. Il prof. AGOSTINO GRANDI, presidente del Comitato locale, aprì la seduta, inviando un saluto ai convenuti e un ringraziamento alla direzione dell'Accademia di Belle Arti, che concesse l'uso dei suoi locali; quindi il prof. LAZZERI pronunziò il discorso inaugurale, nel quale espose gli scopi che si propone la nascente società, e che qui riproduciamo in parte:

Un nostro carissimo collega, il prof. GIOVANNI FRATTINI, inaugurando nell'agosto 1901 il 2° congresso dei matematici italiani in Livorno, volle in un motto scolpire l'insegna del congresso medesimo: *Volgere i progressi della scienza a beneficio della scuola.*

Questo motto riassume il pensiero che qui ci ha raccolti da ogni parte d'Italia, sintetizza in modo felicissimo lo scopo della nostra Società italiana di matematica, che oggi riceve solenne consacrazione qui nella dotta, gentile e bella città dei fiori, nella città di Dante, di Brunellesco, di Michelangelo.

Il perfezionamento, il miglioramento della scuola, particolarmente della scuola media, è problema della più alta importanza civile e politica. La scuola deve istruire e educare le nuove generazioni, è la grande officina ove si forma il cuore e la mente dei giovani, è la fucina ove si tempra il carattere dei futuri cittadini che dovranno un giorno esercitare un'azione direttiva nel paese; e perciò non è esagerato affermare che la bontà degli ordinamenti scolastici si riflette sulla grandezza e sulla prosperità della nazione.

Cooperare efficacemente alla risoluzione di tale problema è stato il pensiero che ha mosso i firmatari della circolare del 1° febbraio scorso, colla quale si proponeva la costituzione dell'associazione nostra, è stata l'idea che vi ha fatto rispondere numerosi all'appello, e che, mi lusingo, risveglierà anche i più restii e li spingerà ad inscriversi nelle nostre file.

Il momento in cui sorge la nostra società, è propizio perchè la sua azione non si riduca ad una vuota o inutile Accademia, ma sia veramente efficace ed importante.

Le grandi scoperte scientifiche del secolo decimonono, e le loro innumerevoli e svariate applicazioni hanno rapidamente cambiato la faccia del mondo, hanno trasformato *ab imis fundamentis* le condizioni del vivere civile. Per mezzo di esse l'uomo è riuscito a domare e piegare al proprio servizio le più terribili e più ribelli forze della natura; le ha ridotte sue umili ancelle, apportatrici di ricchezza e di benessere; ha reso facili e alla portata di tutti, cose che un secolo fa sarebbero sembrate miracolose; ed ormai il secolo presente è caratterizzato dalla fede che tutti, colti ed incolti, hanno nel potere irresistibile della scienza; dal fatto che le masse si rivolgono continuamente ad essa e le domandano ogni giorno nuovi benefici, nuovi agi, nuove comodità.

Sotto il soffio potente di questa fede nella novella dea ogni giorno appariscono nuovi aspetti della civiltà, ogni giorno si creano nuovi bisogni, nuove tendenze, nuove aspirazioni; continuamente si accelera la corsa dell'umanità verso un'ideale supremo di prosperità e di grandezza.

E questa tendenza, ancor più che negli altri, si manifesta nel nostro paese, che sente altamente l'orgoglio di dovere al genio italiano le maggiori scoperte scientifiche, che, assurto da poco a dignità di nazione dopo secoli di servaggio, sente rinascere in sè e crescere rigogliosi i germi della antica grandezza.

A questo rinnovarsi rapido delle condizioni morali e materiali del paese fa d'uopo che si uniformino gli ordinamenti scolastici, perchè con spirito di modernità, con larghezza di vedute preparino le future generazioni all'avvenire che si presenta grande e radioso.

Ma intanto la legge organica che regola l'istruzione in Italia è ancora la legge Casati promulgata quasi mezzo secolo fa, il 13 novembre 1859.

È vero che in questo periodo di tempo si sono succeduti un'infinità di regolamenti, programmi, circolari ministeriali, che hanno anche troppo spesso modificato, alterato a diritto e rovescio quella povera legge, cosicchè ormai ben poco resta di essa; ma il più delle volte si è trattato di modificazioni minute, di dettaglio, la cui portata sfuggiva interamente o quasi a coloro che non vivevano nella scuola; di modificazioni aventi un obiettivo modesto e ristretto, interessante più la forma che la sostanza.

E così la scuola media è ancora costretta nelle forme rigide, direi quasi accademiche, nelle quali si trovava 10, 20 e 30 anni fa. Tutto è cambiato sostanzialmente ma gli ordinamenti scolastici non hanno subìto che trasformazioni formali, e non corrispondono più ai bisogni del paese, il quale si trova in essi a disagio, come un adolescente troppo presto cresciuto sta a disagio negli abiti dell'anno precedente.

Il Ministro Leonardo Bianchi sentì la necessità di provvedere; da buon clinico pensò che occorrevano rimedi radicali ed energici, e, incoraggiato anche dalle riforme compiute in altri paesi, con decreto Reale del 19 novembre 1905 fece nominare la *commissione incaricata di studiare l'ordinamento degli studi secondari in Italia e proporre le norme adatte al suo migliore perfezionamento.*

Finalità unica e suprema di tale decreto, come delle due leggi sullo stato economico e giuridico degl'insegnanti è (così dice l'On. Ministro nella relazione precedente il decreto) il " volere che la scuola secondaria, vinti i dubbi e le preoc- " cupazioni dell'ora presente s'ingagliardisca e si avvivi, adempiendo ai molte- " plici suoi fini degnamente ".

E dopo aver detto che " l'impresa è ardua per la difficoltà, grande per l'im- " portanza ", perchè investe tutta la cultura della nazione, e sulle condizioni di questa esercita un'efficacia larga e profonda, l'On. Ministro aggiunge: " Si potrà " variamente proporre o desiderare la soluzione dell'arduo problema; ma un con- " vincimento è ormai diffuso e non più discusso: la scuola secondaria, qual'essa " è, si mostra insufficiente a raggiungere i suoi scopi. Dal qual convincimento " deriva quel senso di diffidenza e d'inquietudine, che pervade con maggiore o " minore intensità tutte le classi, dalle più elevate alle più umili ".

La commissione reale mostrò fin dal principio di intendere lo spirito democratico dei tempi nuovi, comprese che certe riforme non possono uscire, come Minerva dalla testa di Giove, dalla mente di uno o di pochi uomini anche elettissimi, ma devono sorgere dalla coscienza dei più; comprese che la gran voce del paese deve indicare quali sono i bisogni, quali i mezzi migliori per provvedere ad essi. Nella seduta inaugurale del 9 decembre 1905 l'illustre presidente di essa, l'On. Paolo Boselli, rispondendo all'On. Ministro, fece fra le altre la seguente dichiarazione: " Interrogheremo i documenti già raccolti presso di noi, gli esempi di altri paesi " e soprattutto il pensiero vivo e odierno del paese nostro ".

E il 27 marzo 1906 la commissione diramò agli studiosi di quistioni didattiche, ai corpi scientifici e letterati, alle facoltà universitarie ecc. ecc. il quistionario che tutti conoscono.

Essa ha ormai compiuto lo spoglio delle numerosissime risposte ricevute, dalle quali ha potuto premere il succo delle osservazioni raccolte in lunghi anni di lavoro da una schiera di valorosi insegnanti, e ne ha ricavate le sue prime proposte che sono in parte già note.

Al problema di dare buoni ordinamenti alle scuole medie è naturalmente collegato l'altro della preparazione di ottimi insegnanti per le medesime, poichè è evidente che qualunque ordinamento, anche perfetto, non può dare buoni frutti, se non è sapientemente applicato; e d'altra parte un insegnante ottimo potrà con la sua attività ed intelligenza attenuare e rendere minori i difetti di un ordinamento sbagliato, ma non farli sparire interamente, qualunque sia lo spreco di energia che egli sarà costretto a fare; energia che potrebbe essere più utilmente adoperata.

L'Italia non ha invero penuria di ottimi insegnanti secondari, che con entusiasmo, scienza e coscienza disimpegnano nobilmente e bene il loro ufficio; e ciò potrebbe far credere che le nostre scuole di magistero funzionino abbastanza bene; ma in realtà in fatto di pedagogia tutti ci sentiamo autodidatti, ognuno di noi sente di avere creato in gran parte da sè il metodo d'insegnamento che segue. Resta dunque assai dubbio se i buoni frutti dati dalle scuole di magistero siano dovuti alla bontà del funzionamento di queste, oppure alla genialità del buon sangue latino che, manifestandosi in docenti e discenti, corregge i difetti dell'istituzione.

I due problemi cui ho accennato sono indubbiamente le quistioni di più vitale interesse nel momento attuale, e tali si conserveranno finchè le nuove scuole secondarie non saranno un fatto compiuto. E perciò di essi abbiamo voluto che si occupasse esclusivamente questo congresso, naturalmente limitando la questione alla matematica. Poichè se nell'ora presente tali quistioni sono di grande interesse per tutte le discipline, sono di grandissimo, di vitale interesse per le matematiche.

Intanto che classicisti e modernisti spargono fiumi d'inchiostro e si battono a colpi di penna per la quistione della scuola secondaria unica con o senza latino, l'insegnamento della matematica ha subìto un fierissimo colpo nei licei dagli ultimi programmi del 1904, che, accordando la scelta fra il greco e le matematiche, le ha relegate ambedue fra le materie di puro lusso ed inutili.

Non neghiamo certamente noi matematici che gli studi classici concorrano a formare la mente ed il cuore della gioventù, a educare lo spirito, a sviluppare il sentimento estetico; ma crediamo che questa educazione dello spirito non potrebbe essere compiuta senza un proporzionato studio della scienza, specialmente della matematica, che abitua a ragionare dirittamente. Permettete su questo proposito di ricordare alcune parole dell'on. Bianchi.

" Si dice l'insegnamento scientifico sia esclusivamente utilitario; niente di " più erroneo. Esso invece ispirando l'amore e il rispetto alla verità, fornisce un " possente mezzo di educazione morale; la coscienza non è soltanto quello che " diciamo l'io, ma anche il fuori di me, che conosciamo e che ci appartiene. Lo " studio delle scienze estende il dominio dell'io e costituisce quella *humanitas* " scientifica che completa nel senso moderno gli studii dell'antica *humanitas* ".

La nostra associazione potrà fare apprezzare l'importanza eaucatrice della scienza, e difendere questa dagli strappi che per avventura potessero essere tentati a suo danno. In ciò potrà avere efficaci ausiliatrici le consorelle come la Società italiana di Fisica.

Ho detto che la Società italiana di Matematica non poteva trovare momento più opportuno del presente per sorgere. Forse questa parola *sorgere* farà pensare a qualcuno di voi che io abbia dimenticato la vecchia Associazione Mathesis, che ha vissuto per 12 anni, di vita non sempre florida, ma certamente non ingloriosa.

Non l'ho dimenticato, nè potevo dimenticarlo, perchè io ho appartenuto alla Mathesis fino dalla fondazione, e per molti anni ho anche avuto l'onore di far parte del Consiglio direttivo di essa; non la posso dimenticare per le battaglie a cui ho partecipato, per l'opera che bene o male ho ad essa prestata.

È certamente un titolo d'onore per i matematici essere stati fra i primi che sentirono il bisogno di unirsi in una associazione scientifica, in un tempo in cui ciò sembrava un'utopia che faceva sorridere i più, in cui sembrava che le adunanze per discutere su questioni scientifiche e didattiche fossero vane accademie, utili a nulla. Ricordo con compiacenza il fervore e l'entusiasmo con cui 10 o 12 anni fa, per iniziativa della Mathesis, si discutevano tali questioni, senza alcuna preoccupazione per gli interessi personali degl'insegnanti. Questo soffio di entusiasmo verso un ideale nobilissimo, che anima una classe di persone dai profani considerate a torto come la negazione dell'ideale e della poesia, una classe la cui opera non è spesso apprezzata come dovrebbe essere, fece esclamare all'illustre professore Enrico D'Ovidio, che presiedè il Congresso di Torino del 1898: “ Mirabile Congresso questo in cui non si chiedono miglioramenti economici, ma solo aumento di ore di lavoro senza retribuzione! „.

Credo quindi di rendere un omaggio, doveroso in questa occasione, alla vecchia associazione Mathesis, ritessendone in brevi parole la storia.

A questo punto l'oratore ritessè per sommi capi la storia dell'associazione *Mathesis* nei 12 anni della sua esistenza, accennando ai periodi di prosperità e di decadenza; finchè il sorgere della Società Italiana di matematica ne segnò la fine. Ed aggiunse:

Qualcuno penserà che la vecchia *Mathesis* non è morta e che la nuova società non è che il vecchio tronco inverdito e rivestito di nuove fronde. A me piace considerare la nostra *Società italiana di matematica* come una pianta novella giovane e rigogliosa che è nata dal buon seme della prima, e trae vital nutrimento dal terreno che quella ha reso fertile e fecondo.

Ma non facciamo questione di parole. Comunque sia, la nostra associazione fondata su larghe basi, aperta a tutti i cultori della matematica, deve vivere di vita nuova, imitando tutto quello che di buono è stato fatto nel passato, evitando gli errori che l'esperienza può aver rivelato; deve vivere e rendere utili servigi al paese come le consorelle che con scopi assai simili, se non identici, prosperano in Germania, in Inghilterra, in Francia, in America; deve affratellare tutti gl'insegnanti dei vari gradi e far convergere i loro sforzi verso una meta comune, il progresso della scuola.

L'oratore parlò poi delle altre società esistenti, particolarmente del Circolo Matematico di Palermo, e della Società per il progresso delle scienze, e mise in evidenza le differenze sostanziali che passano fra queste e la nascente società.

Terminò augurando che tutti i soci siano animati di eguale ardore per avviare la società verso un avvenire luminoso.

Alla fine del discorso, accolto da vivissimi applausi, il Senatore Veronese propose e l'assemblea approvò che l'ufficio di presidenza fosse così costituito:

Grandi, *Presidente.* — Conti - Lazzeri - Severi, *Vicepresidenti.* — Ceccaroni - Medici - Michel, *Segretari.*

Il Ministro della P. I. inviò il seguente telegramma:

„ Mando a codesto congresso il mio cordiale saluto ed un caldo augurio per „ la migliore riuscita dei lavori, dispiacente che le cure del mio ministero non mi „ abbiano concesso assistere seduta inaugurale.

f.° *Ministro:* Rava „.

A questo il Presidente rispose ringraziando e facendo voti perchè le proposte del Congresso fossero prese in considerazione dal Ministro.

Adunanze generali.

Prima seduta. — Il giorno stesso 16 nelle ore pomeridiane, sotto la presidenza del prof. Lazzeri, fu discusso ampiamente lo schema di statuto proposto dalla commissione composta dei professori Amodeo, Conti, Enriques, e che con alcune modificazioni fu approvato nella forma seguente:

Art. 1. Tra studiosi ed insegnanti e cultori di Matematiche è costituita una Società intitolata: *Mathesis-Società italiana di Matematiche,* che ha come scopo il miglioramento della scuola in tutti i suoi gradi, sotto il punto di vista scientifico e didattico.

Art. 2. A raggiungere il proprio scopo la Società:

a) Tiene riunioni plenarie e parziali;

b) Promuove e favorisce ricerche scientifiche e discussioni didattiche;

c) Pubblica un bollettino;

d) Cerca, anche in altri modi, di diffondere fra i soci la conoscenza di fondamentali teorie e delle migliori opere che vi si riferiscono, ecc.

Art. 3. Ogni socio paga una quota annua di L. 4.

Per essere inscritti nella Società occorre farne domanda al Consiglio Direttivo che delibera in proposito. Possono essere ammessi anche gli stranieri.

Il socio che versi in una sola volta L. 60 sarà dichiarato socio perpetuo e verrà esonerato dal pagamento della quota annua.

Art. 4. La Società è retta da un Consiglio Direttivo eletto dall'intera Società, nel quale debbono essere rappresentate le categorie dei soci seguenti:

a) docenti di matematiche delle Università;

b) docenti di matematiche delle Scuole Medie;

c) docenti di matematiche di Istituti militari, navali, professionali e industriali, ecc.;

d) assistenti universitarii e cultori di matematiche che non ne professano l'insegnamento.

Ogni categoria di soci avrà diritto ad un rappresentante per ogni 60 soci, o frazione di 60 soci, non inferiore a 10-60, ma nessuna categoria potrà avere più di quattro rappresentanti. Se i soci di una categoria non raggiungono i dieci, essi verranno considerati come appartenenti alla categoria meno numerosa.

Art. 5. I membri del Consiglio Direttivo eletti dalla Società si distribuiranno le cariche. Il presidente del Consiglio Direttivo sarà Presidente della Società, e, durante la sua Presidenza, la Società avrà sede nella città ove egli risiede.

Il Consiglio direttivo avrà facoltà di nominare un Segretario che aiuti il Presidente nel disbrigo delle sue mansioni.

Art. 6. Le elezioni del Consiglio Direttivo avranno luogo ogni biennio nel mese di novembre. Il nuovo Consiglio comincerà ad esercitare le sue funzioni dal 1° gennaio successivo.

I membri del Consiglio Direttivo uscente d'ufficio potranno essere immediatamente rieletti una prima volta, ma non una seconda senza interruzione.

Art. 7. I soci potranno costituire Sezioni Regionali nei modi che verranno determinati da disposizioni regolamentari.

Art. 8. I rapporti fra le Sezioni regionali ed il Consiglio Direttivo e le altre norme che appaiono convenienti per determinare l'applicazione del presente Statuto sono stabilite mediante apposito regolamento.

Art. 9. Lo Statuto non potrà essere modificato se non col voto della maggioranza assoluta dei soci.

Le proposte di modicazione dello Statuto saranno sottoposte ai soci o per iniziativa del Consiglio direttivo o per proposta sottoscritta da 10 soci.

Disposizioni transitorie.

a) Il presente Statuto diventerà definitivo dopo che sia trascorso un anno dalla sua approvazione e purchè non si abbia una proposta di modificazione dal Consiglio direttivo o sottoscritta da 10 soci.

b) Il regolamento in applicazione del presente Statuto sarà compilato dal Consiglio Direttivo e sottoposto all'approvazione del prossimo Congresso.

c) La Società terrà il nuovo Congresso nel 1909.

Seconda seduta. 17 ottobre. — Sotto la presidenza del prof. Conti il giorno 17 a ore 9 fu ampiamente discussa una accuratissima relazione dei professori Berzolari, Bertolotti, Bonola, Veneroni sui *programmi di matematica nella Scuola secondaria riformata*. La discussione si chiuse con l'approvazione a voti unanimi dei due seguenti ordini del giorno:

1°. « Il Congresso, prescindendo dalle proposte generali della Commissione Reale per la riforma degli ordinamenti scolastici, passa alla discussione dei principii cui debbono essere improntati i programmi delle Scuole medie ».

2°. « Il Congresso, udita la relazione sul secondo tema, plaudendo ai concetti in essa espressi, riconosce l'opportunità di non entrare in merito sulla questione dei programmi, giacchè tale questione potrà esser trattata più proficuamente soltanto dopo che siano stabiliti i tipi della Scuola media riformata;

riconosce pure l'opportunità di non entrare per ora in merito sulle proposte riforme generali della Commissione Reale, e si limita ad affermare i seguenti principii cui dovrebbe ispirarsi la riforma per quello che concerne l'insegnamento della Matematica:

I. Che la Scuola secondaria di cultura, nei riguardi dell'insegnamento della Matematica, sia divisa in due stadi;

II. Che nel primo stadio l'insegnamento abbia carattere induttivo-sperimentale, evitando assolutamente le definizioni astratte, e che nel secondo si tragga profitto dalle nozioni introdotte nel primo, solamente per illustrare definizioni e postulati, dando del resto uno sviluppo logico deduttivo in tutti i rami della Scuola secondaria superiore, con riferimenti continui a questioni e ad interpretazioni pratiche che preparino, suggeriscano e commentino le teorie;

III. Che si introducano i concetti fondamentali di funzione, derivata ed integrale e delle loro più ovvie interpretazioni ed applicazioni fisiche e geometriche.

Terza seduta. 19 ottobre. — La terza seduta del 19 corrente, fu presieduta dal prof. Severi: Il tema del giorno fu: *Preparazione di buoni insegnanti per le Scuole medie.*

Il prof. Lazzeri diede lettura della relazione compilata dal professor Pittarelli, quindi si iniziò la discussione che si chiuse coll'approvazione del seguente ordine del giorno, proposto dal prof. Padoa:

" Il Congresso, plaudendo alla relazione del prof. Pittarelli sul III tema, disapprova la distinzione di due lauree matematiche, scientifica e didattica, e afferma urgente costituire su più larghe basi la scuola di magistero, inserendo nell'organico universitario alcune cattedre apposite d'indole storica e critica ".

Quarta seduta. 20 ottobre. — Sotto la Presidenza del prof. Lazzeri, l'ultima seduta fu destinata alle discussioni degli ordini del giorno proposti dai soci.

Furono approvati i seguenti ordini del giorno:

1°. " Il Congresso, rinnovando il voto più volte espresso anche in altri convegni, afferma la necessità che venga abrogato il decreto 11 novembre 1904, col quale fu concessa facoltà di opzione fra il greco e la matematica nei licei ".

2°. " Il Congresso ritenendo che gli attuali esami di maturità non diano sufficienti garanzie sul valore dei ragazzi uscenti dalla Scuola elementare, fa voti che detti esami vengano sostituiti con altri di ammissione alle singole scuole secondarie inferiori ".

3°. " Il Congresso riafferma la necessità di ristabilire la prova scritta negli esami di matematica in ogni ordine di Scuole medie ".

4°. " Il 1° Congresso della Società Italiana di Matematica, facendo proprie le proteste già suscitate dal parere emesso l'8 febbraio 1908 dalla Giunta Generale del Consiglio superiore della Pubblica Istruzione sulla validità dei titoli minimi per l'ammissione ai concorsi alle cattedre di matematica delle Scuole medie e sull'estendibilità di tale parere, agli effetti pure dell'assegnazione dell'insegnamento della matematica nelle classi aggiunte, fa voti affinchè nei riguardi di tali ammissioni e assegnazioni si provveda definitivamente con disposizioni di legge, le quali convenientemente tutelino la dignità e gli interessi dei laureati in matematica ".

5°. " Il Congresso fa voti che, per quanto riguarda l'assegnazione delle classi aggiunte, il ministero modifichi il regolamento, nel senso che i professori della stessa materia abbiano la precedenza sui professori di materie affini ".

Dopo l'approvazione dei suddetti ordini del giorno, il prof. Lazzeri rivolse un saluto ai convenuti ed un ringraziamento alla stampa fiorentina e dichiarò chiuso il Congresso della Società italiana di matematiche.

II CONGRESSO

DELLA SOCIETÀ ITALIANA PER IL PROGRESSO DELLE SCIENZE

FIRENZE — 18-23 Ottobre 1908

INAUGURAZIONE.

Il giorno di domenica 18 ottobre a ore 9.30 ebbe luogo la solenne inaugurazione del Congresso nella storica sala dei cinquecento a Palazzo Vecchio. Al banco della presidenza sedevano il Ministro on. RAVA, il Sindaco avv. FRANCESCO SANGIORGI, il presidente della Società professore sen. VITO VOLTERRA e il presidente del Comitato esecutivo prof. GIULIO FANO, al banco degli oratori il prof. sen. PIETRO BLASERNA.

Prese per primo la parola l'on. Sindaco, pronunziando poche parole di saluto e dichiarandosi lieto e orgoglioso di ricevere tutti i cultori delle discipline scientifiche in Firenze che fu sempre patria di alti intelletti.

Il Ministro RAVA pronunziò poi un elevato discorso; annunziò che S. M. il Re aveva firmato il decreto col quale si costituisce la Società Italiana per il Progresso delle Scienze in Ente morale; terminò salutando il Sindaco e i congressisti, e in nome del Re dichiarò inaugurato il Congresso.

Il prof. GIULIO FANO parlò in nome del Comitato fiorentino, e il Presidente, sen. prof. VOLTERRA, ringraziò vivamente il Ministro della P. I. di quanto fece in tante circostanze a pro della Istituzione, e lo ringraziò pure del suo intervento all'inaugurazione. Dimostrò i progressi fatti dalla Società in questo primo anno dal lato scientifico, ed aggiunse:

Un altro fatto di non minore interesse conviene porre in luce; importanti Istituti ed egregi uomini, dedicati alle industrie, hanno accolto con plauso la Società ed hanno riconosciuto i vantaggi che ad essi possono derivare dalla sua attività; ed è da aspettarsi che anche altri enti vengano prossimamente ad ingrossare il nucleo già notevole che così spontaneamente si è associato alla Scienza. L'altissimo valore morale di questo fatto, che non esito a considerare come un fortunato inizio per il nostro paese di utili e fecondi ravvicinamenti che conviene secondare ed aiutare, non ha bisogno di ulteriori commenti. Ciò permise dall'altro canto di raccogliere i capitali sufficienti per raggiungere il fine, invocato da tutti e consacrato nel nostro stesso Statuto, della costituzione della Società in ente morale; costituzione che ebbe nei giorni scorsi la sanzione Sovrana. A tutti gli istituti industriali e scientifici, agli enti pubblici e a tutti coloro che si iscrissero come soci benemeriti e fondatori, io esprimo qui i più sinceri, ringraziamenti. E mi sia concesso a questo punto di manifestare i sensi della più profonda gratitudine all'illustre capo del primo Istituto finanziario d'Italia, il quale, con elevato spirito di scienziato ed alto senno di uomo pratico, così utilmente operò a vantaggio del nostro sodalizio. Alla sua azione pronta ed efficace si debbono i lusinghieri risultati cui ho adesso accennato.

L'oratore continuò parlando dei doveri che si impongono alla Società, salutò gli antichi ed i nuovi soci, ricordò quegli estinti, facendo speciale menzione del compianto segretario Alfonso Sella e concluse:

Con unanime slancio la nostra associazione volle questa volta accoppiare la riunione annuale colla solenne commemorazione di E. Torricelli, a cui non solo il nostro paese, ma tutto il mondo civile tributa degne onoranze. Fu felice pensiero questo: i due avvenimenti così riuniti acquistano un più alto significato; essi ad un tempo ci pongono dinanzi le glorie indimenticabili del passato e le rigogliose speranze avvenire della Scienza Italiana.

Infine il sen. prof. Pietro Blaserna lesse il discorso inaugurale: *Sulle condizioni della Scienza sperimentale in Toscana nel secolo Decimosettimo.*

Terminata la conferenza del sen. Blaserna, l'on. Sindaco offrì ai congressisti un ricevimento nelle sale del Palazzo.

Alle ore 14,30, nella R. Biblioteca Nazionale, coll'intervento di S. E. il Ministro della P. I. on. Rava, ebbe luogo l'inaugurazione della mostra dei manoscritti Galileiani, delle edizioni delle opere scientifiche di Galileo e dei suoi discepoli e dei libri appartenenti al sommo scienziato. Il prof. S. Morpurgo, direttore della Biblioteca, accolse i Congressisti illustrando con poche e illuminate parole l'importanza di tale esposizione, e mostrò agli intervenuti le opere di maggior interesse storico.

Nelle sale del R. Archivio di Stato erano poi esposti ai Congressisti i principali trattati di Evangelista Torricelli e dei suoi discepoli.

Sezioni del Congresso.

Nei giorni di lunedì 19, martedì 20 e mercoledì 21 si compievano i lavori del congresso, restando le sedute antimeridiane destinate alle adunanze generali quelle pomeridiane alle adunanze delle sezioni, che eran così distribuite.

CATEGORIA *A.* - **Scienze matematiche, fisiche e chimiche.** — Sezione I. - **Matematica.** — Sezione II. - **Astronomia e Geodesia.** — Sezione III. - **Fisica.** — Sezione IV. - **Chimica.** — Sezione V. -

Mineralogia. — SEZIONE VI. - **Meccanica applicata ed Elettrotecnica.** — SEZIONE VII. - **Geografia, Fisica terrestre, Meteorologia.** — SEZIONE VIII. - **Geologia e Paleontologia.**

CATEGORIA *B.* - **Scienze biologiche.** — SEZIONE IX. - **Zoologia ed Anatomia umana e comparata.** — SEZIONE X. - **Botanica.** — SEZIONE XI. - **Fisiologia, Farmacologia.** — SEZIONE XII. - **Patologia, Bacteriologia ed Igiene.** — SEZIONE XIII. - **Agronomia.** — SEZIONE XIV. - **Antropologia ed Etnologia.**

CATEGORIA *C.* - **Scienze morali.** — SEZIONE XV. - **Scienze giuridiche.** — SEZIONE XVI. - **Scienze Economiche e Statistiche.** — SEZIONE XVII. - **Storia.** — SEZIONE XVIII. - **Archeologia e Paleontologia.** — SEZIONE XIX. - **Glottologia e Filologia.** — SEZIONE XX. - **Scienze Filosofiche.**

Le adunanze generali furono tenute nell'aula magna dell'Istituto di studi superiori, le altre nelle varie sedi delle sezioni che erano disseminate in una gran quantità di locali.

Adunanze generali.

Prima seduta. — Nella prima seduta del 19 l'on. Senatore COLOMBO riferì sul tema: *Influenza dei nuovi motori a essenza nell'industria dei trasporti.* Con parola facile e chiara tessè per sommi capi la storia dei motori a vapore, a gaz ed essenza, facendo osservare come questo abbia creato l'automibilismo:

Il motore a benzina, disse l'oratore, è un superbo motore per la sua semplicità, per la sua leggerezza, pel piccolo posto occupato, per la facilità di governarlo, per la rapidità colla quale si mette in moto, per la sua attitudine alle grandi velocità di percorso ecc. „. Esso è perciò destinato ad avere altre e svariatissime applicazioni nella piccola navigazione acquea e nella navigazione aerea; e dopo aver parlato dei recenti studi sugli aereopiani e sopra i dirigibili, l'oratore concluse:

Qualunque sia il giudizio che si voglia portare su questi nuovi sistemi di trasporto e sulle loro possibili applicazioni, lo scopo delle considerazioni precedenti fu unicamente dimostrare che non solo l'automobilismo, ma anche e sopratutto la locomozione aerea nello stato per quanto imperfetto in cui trovasi oggi, non sarebbero stati possibili senza l'invenzione dei motori a essenza. E non sarebbe neppur chiusa la serie delle applicazioni di questi motori, se prendesse forma e attitudine pratiche l'idropiano, immaginato dall'ing. Forlanini, col quale il principio stesso dell'aereopiano, esteso alla navigazione, sopprimerebbe quasi del tutto le resistenze e permetterebbe di navigare a velocità sinora irraggiungibili e sconosciute. Si può osservare, e non senza un'apparenza di ragione, che salvo l'automobilismo, si tratta di tentativi vaghi, di applicazioni future ipotetiche delle quali è inutile occuparsi ora, mentre nessuno scopo pratico sembrano avere, tranne lo scopo militare, unico obbiettivo per ora dei dirigibili e degli aereopiani attualmente in esperimento. Ma non è facile divinare l'avvenire e immaginare oggi quali saranno le esigenze future dell'umanità. Si son viste invenzioni di pura curiosità, come il fonografo e la cinematografia, che son diventate di uso generale e quasi indispensabile; si è ritenuto l'automobilismo un semplice *Sport*, eppure si comincia già a considerarlo come un complemento necessario delle comunicazioni ferroviarie. Così la navigazione aerea, non creduta dapprima, creduta poi, ma ritenuta un'invenzione non suscettibile di applicazioni, è già considerata necessaria nell'arte della guerra, e potrà forse diventarlo come un mezzo ordinario di locomozione e di trasporto al pari dei mezzi di locomozione e trasporto per terra e per acqua. I cultori della meccanica si son tenuti sinora in disparte o per lo meno hanno manifestato sempre un grande riserbo nel parlare di questi nuovi trovati, lasciando a pochissimi specialisti il compito di esaminare a fondo le questioni relative, che tanto aiuto attendono dalla scienza e dall'esperienza. Ma è ormai tempo che non disdegnino di occuparsene, ed è questo il solo motivo che mi ha ispirato l'ardire di parlarne in questa dotta assemblea, ove seggono tanti illustri scienziati e ingegneri; non che io sia in grado di portare un contributo a questi studi; ma perchè spero che l'appello non rimanga senza eco da parte di coloro che potrebbero portarvelo a vantaggio della pratica e ad onore della scienza italiana. Si tratta di problemi ritenuti sino a ieri insolvibili, e ancora irti di difficoltà e di incertezze; ma noi, memori di tutto quanto, contro ogni previsione, ha saputo compiere di miracoloso l'ingegno umano, dobbiamo aver fiducia che trovino un giorno o l'altro la loro soluzione.

Dopo di ciò, il prof. sen. E. Paternò, riferì sull'argomento: *Origine e sviluppo della Crioscopia.*

Seconda seduta. — Nella seduta antimeridiana del 20, a ore 9,30, i professori Bruni e Picotta, svolsero la relazione generale sul tema: *La chimica fisica nei suoi rapporti colle scienze biologiche.*

Terza seduta. — Lo stesso giorno 20 a ore 21 ebbe luogo una seconda adunanza generale nella quale il prof. E. Millosevich riferì sull'argomento: *Sull'indirizzo delle moderne ricerche astronomiche.*

Nel suo discorso il prof. E. Millosevich si propose in una breve ma compiuta sintesi, di mettere in luce le scoperte reali e le speranze che hanno gli astronomi di scoperte ulteriori nelle due grandi suddivisioni dell'astronomia, cioè l'astronomia matematica e l'astro-fisica intesa in un senso più largo, che non sia il comune. Dopo aver parlato del problema dei due corpi e del moto perturbato, accennando ai grandi risultati conseguiti e alle piccole deficienze, specialmente nella teoria della luna, espose quali dovrebbero essere le nostre cognizioni per risolvere compiutamente il grande problema del moto del sistema solare nello spazio, e quali in realtà sieno gli attuali acquisti sull'argomento, d'onde le prime nozioni approssimate della direzione di detto moto e della sua velocità. Parlò della distribuzione delle stelle nello spazio, delle difficoltà di avere nozioni precise sulla figura del nostro sistema stellare, del numero delle stelle catalogate con metodi visuali e della fotometria stellare.

Coll'ausilio dei grandi rifrattori e telescopi, dello spettroscopio e della fotografia, il prof. Millosevich a larghi tratti delineò le scoperte fatte nei riguardi dei sistemi doppi e multipli, delle nebule, degli ammassi ecc. ecc. Accennò ai grandi benefici recati dallo spettroscopio a proposito del moto nel senso della visuale, benefici di gran lunga aumentati coll'associazione dello spettroscopio alla fotografia celeste. Entrò in particolari sulla fisica solare e stellare, esponendo i fatti acquisiti e le grandi lacune esistenti. Nell'ultima parte del suo discorso si diffuse a trattare della fotografia celeste, dei vantaggi che essa ha fornito o fornirà all'astronomia, del grande lavoro internazionale della Carta e del Catalogo stellare, conchiudendo che la fotografia provoca una grande rivoluzione nell'astronomia, riducendo gli osservatorii, almeno in parte, a laboratori, certamente con grande beneficio della scienza, anche se il moderno tecnicismo tolga all'astronomo una parte del godimento della psiche, vigilando piuttosto che la lastra sensibile *senta*, e quindi privandosi dell'immediato contatto visivo.

Quarta seduta. — Il giorno mercoledì 21 ottobre il prof. Tocco riferì sul tema: *Il concetto di spazio sotto l'aspetto filosofico e fisiologico.*

Riproduciamo il riassunto fatto dall'autore:

Lo spazio non è una realtà a sè, come non è una realtà a sè l'iperbole o la parabola. Il che non vuol dire che lo spazio assoluto non abbia i suoi caratteri, le sue proprietà, come l'iperbole e la parabola hanno le loro, e che questi caratteri sieno di tal natura, che la mente nostra può scoprirli man mano, ma non mutarli a piacer suo. Se intendeste in questo senso l'obbiettività, anche lo spazio assoluto dovrebbe dirsi obbiettivo, ma certo non l'intesero in questo senso Leucippo e Democrito, non l'intese in questo senso il Newton quando presentava lo spazio assoluto come il continente universale, infinito, immobile, scevro di ogni contenuto. Questo spazio, soggiunge il Kant, così concepito, non si può concepire altrimenti e non è se non una nostra intuizione, e intuizione *a priori*; e non nel senso che intendono i più, come una idea innata, o a così dire stampata nel nostro cervello sin dal giorno delle sua formazione. Kant ha protestato chiaramente contro un innatismo così grossolano, nè poteva cadere in tale errore chi era fieramente avverso ad ogni ideologia dommatica. Con la dicitura *a priori* non intendeva se non questo: lo spazio relativo lo potete astrarre dall'esperienza, quando staccliate le determinazioni formali dal contenuto sensibile o tattile o visivo o che altro sia, con cui sono concresciute, ma lo spazio assoluto non lo potete ricavare dall'esperienza, perchè in nessuna esperienza saprete sorprenderlo. Lo spazio assoluto non è nè può essere un'astrazione, ma una integrazione dell'esperienza. Integrazione che facciamo noi, e che non possiamo a meno di fare per la costituzione originaria della nostra mente. Inteso in questo senso, il detto: "lo spazio è una intuizione *a priori*," non è una sciarada, come è parso a parecchi interpreti della critica, ma una delle più vere e più profonde sentenze che siano state udite nella storia del pensiero umano.

Sospesa la seduta per alcuni minuti il prof. F. Bottazzi, terminò la relazione, iniziata dai colleghi Bruni e Picotta il giorno precedente, sul tema: *La chimica fisica nei suoi rapporti colle scienze biologiche.*

Questa relazione dette luogo ad una assai animata discussione.

Quinta seduta. — Venerdì 23 fu tenuta un'ultima adunanza nella quale si trattarono affari interni ed amministrativi della Società.

Adunanze della Sezione I. — **Matematica.**

Prima seduta. — Lunedì 19 ott. alle 12.30 le sezioni I e II unite inaugurarono i loro lavori sotto la presidenza del prof. Grandi, il quale dopo un saluto ai convitati dette la parola al prof. Pizzetti perchè leggesse il discorso sul tema: *L'astronomia e la geodesia come scienze matematiche.*

Seguirono due comunicazioni:

1ª. Severi, *Sugl'integrali doppi di prima specie appartenenti ad una varietà algebrica.*

2ª. Amoroso, *Dell'estensione del problema di Dirichlet per le funzioni di più variabili complesse.*

Seconda seduta. — Martedì 20 ott. la seduta si aprì alle ore 15,15 sotto la presidenza del prof. Loria. Furono fatte le seguenti comunicazioni:

1ª. Boggio, *Risoluzione di alcune questioni sul potenziale di una sfera eterogenea.*

2ª. Crudeli, *Ultime ricerche sulla teoria delle figure di equilibrio di un corpo fluido, omogeneo ed incompressibile, dotato di moto rotatorio.*

3ª. Loria, *La geometrografia e le sue trasformazioni.* (Pagine di storia contemporanea).

4ª. Vivanti, *Sullo stato attuale delle teorie trascendenti.* In assenza dell'autore il prof. Grandi lesse un breve riassunto di questa comunicazione.

Il prof. sen. Volterra chiese la parola per accennare ad un altro metodo atto a risolvere lo stesso problema trattato dal prof. Boggio.

Il metodo indicato dal prof. Volterra si adatta anche alla risoluzione del problema nel caso di campi non sferici. La quistione è ridotta alla determinazione di una funzione armonica all'esterno del campo e di una funzione biarmonica nell'interno del campo stesso.

Terza seduta. — Mercoledì 20 la seduta si aprì alle ore 15,15. sotto la presidenza del prof. Peano.

Si svolsero le seguenti comunicazioni:

1ª. Favaro, *Galileo Galilei e la determinazione del peso dell'aria.* In questa l'autore fece rilevare l'indubbia precedenza del Galilei a proposito di tale determinazione.

2ª. Gremigni, *Importanza del postulato d'Archimede nella teoria dell'equivalenza geometrica.*

Quindi il prof. Peano dette qualche cenno del Dizionario internazionale, cioè dell'insieme delle parole comuni all'italiano, francese, spagnolo, portoghese, inglese, tedesco e russo. Ne citò una lunga serie relativa alle scienze matematiche. Rilevò che esse sono in enorme maggioranza latine o greche, a grande distanza si trovano le parole arabe; l'influenza delle lingue moderne nel vocabolario internazionale è quasi nulla. Conchiuse coll'osservare che, qualunque lingua moderna si voglia studiare, dall'italiano all'inglese e al russo, sempre s'incontra il latino e il greco.

ADUNANZE DELLA SEZIONE II. — **Geodesia ed Astronomia.**

Prima seduta. — Ebbe luogo il 19 in comune colla I Sezione, come abbiamo già detto.

Seconda seduta. — La seduta si aprì alle ore 14,30. Presiedè il generale GLIAMAS.

Il prof. PIZZETTI, chiesta ed ottenuta la parola, commemorò degnamente il prof. CISCATO, rapito da poco alle scienze astronomico-geodetiche, di cui fu valente cultore, ed all'affetto degli amici. MILLOSEVICH propose, e la sua proposta venne accettata ad unanimità, d'inviare al prof. LORENZONI, maestro ed amico del CISCATO, un telegramma di condoglianza.

Dopo di ciò il tenente di vascello ALESSIO dell'Istituto Idrografico della R. Marina illustrò un programma da lui compilato circa l'opportunità di estendere misure di gravità sul territorio italiano, da eseguirsi coll'apparato tripendolare di Stuckrat anzichè con quello di Sterneck. Questa comunicazione dette origine ad un'ampia discussione fra il tenente ALESSIO e il prof. REINA di Roma, in seguito alla quale e con l'intervento dei professori MILLOSEVICH e VENTURI, venne votato ad unanimità il seguente ordine del giorno:

„ La Sezione di Astronomia e Geodesia della Società Italiana pel progresso delle Scienze, riunita a Firenze, visti i bei risultati conseguiti dal tenente di vascello ALESSIO nella sua recente campagna di determinazioni relative di gravità coll'apparato tripendolare, esprime il voto che l'Istituto Idrografico voglia continuare la sua cooperazione nel campo delle ricerche gravimetriche „.

Il tenente COSTANZI dell'Istituto Geografico Militare dette ragione di una carta da lui costruita in riguardo alle anomalie della gravità, e mise in luce un fatto finora ignorato, che le curve isoanomale si trovano spostate in senso radiale alle linee orografiche.

Il prof. VENTURI espose lucidamente la teoria analitica della bilancia di torsione di Eötvos per l'uso delle determinazioni gravimetriche, e poscia rilevò con ragionamenti inoppugnabili i difetti che nella pratica incontra detto strumento, nonostante che il principio informatore di esso, sia sotto ogni aspetto, giusto.

Terza seduta. — La seduta si aprì alle ore 14,30. Il prof. REINA chiese che fosse chiarito un punto della discussione avvenuta ieri nella seduta precedente circa il grado di precisione delle determinazioni assolute di gravità eseguite a Potsdam ed a Roma.

Il comandante VERDE riferì sopra una modificazione che egli avrebbe proposta ad un noto apparecchio giroscopico per renderlo più adatto alla misura delle distanze zenitali a bordo delle navi, e ne illustrò il concetto. Seguì una breve discussione intesa a determinare la precisione e i vantaggi che potrebbero essere conseguiti nell'uso pratico dello strumento, discussione alla quale presero parte i professori MILLOSEVICH, NACCARI e GUARDUCCI. La sezione deliberò di trasmettere, per competenza, alla Commissione scientifica dell'Associazione l'istanza rivolta dal comandante VERDE e intesa ad ottenere un incoraggiamento per lo sviluppo degli studi pratici che si riferiscono allo strumento.

Il prof. MORI riassunse brevemente una sua comunicazione sui lavori geodetici compiuti in Italia negli ultimi 50 anni, nella quale relazione sono particolarmente poste in evidenza le benemerenze acquistate anche in questo campo dall'Istituto geografico militare, dai diversi osservatori astronomici e dall'opera personale dei professori REINA, RICCÒ, VENTURI ecc. Terminò porgendo un saluto al professor SCHIAPPARELLI, che fu per quasi tutto questo periodo l'autorevole consigliere dei lavori eseguiti, e al prof. CELORIA che oggi presiede la R. Commissione geodetica Italiana.

Su proposta del prof. LOPERFIDO fu inviato un telegramma di saluto al prof. CELORIA e la Sezione si sciolse dopo avere votato un ringraziamento al generale GLIAMAS che efficacemente ne diresse i lavori.

ADUNANZE DELLA SEZIONE III. — **Fisica.**

Prima seduta. - 19 ott. — Presiedè il prof. RIGHI, il quale trattò dei *raggi magnetici*. Egli dichiarò di avere scelto tale soggetto per ragioni di convenienza e di riguardo verso i colleghi, avendo prima avuto già occasione di esporre fuori d'Italia le proprie ricerche sul medesimo soggetto.

In seguito, il sen. VOLTERRA, lesse all'assemblea una lettera del prof. ROITI, colla quale il Direttore di questo Istituto Fisico salutava gli intervenuti, dolente di aver dovuto allontanarsi per partecipare a Londra alla Conferenza internazionale per le misure elettriche.

Il prof. FANO e come Presidente della Facoltà, e in nome del collega assente rivolse agli intervenuti il saluto e l'augurio di fecondità per i loro lavori. Il prof. GARBASSO propose che l'assemblea rispondesse al prof. ROITI, ringraziandolo della ospitalità cortese e deplorando la sua assenza. Il Presidente VOLTERRA s'incaricò di inviare al ROITI un telegramma coll'espressione di questi sentimenti.

Quindi ebbero luogo successivamente le seguenti comunicazioni:

1ª. LOMBARDI, *Sulla propagazione del magnetismo sulle sbarre di ferro.*

2ª. C. GORETTI-MINIATI, *Sopra alcune particolarità nel funzionamento dei tubi Röntgen eccitati da macchine ad influenza di grande rendimento.*

3ª. L. CASTELLANI, *Sullo stato attuale della fotografia a colori.*

4ª. C. Somigliana, *Sopra una rappresentazione meccanica di alcuni campi di forza.*

Seconda seduta. — L'adunanza del 20 si aprì alle ore 14, sotto la presidenza del prof. Righi.

Furono svolte le seguenti comunicazioni:

1ª. L. Amaduzzi, *Rapporto sugli elettroni nei metalli.*

2ª. L. Pucciantì, *Relazione sul corso di microscopia a Jena - Esperienze intorno alla molteplicità spettrale nell'arco elettrico.*

3ª. A. Fiorentino, *Nuove proprietà dei tubi sonori con imboccatura a flauto (con esperienze).*

A questo punto il Pres. presentò all'assemblea il prof. Pellat, il quale prima di recarsi a Faenza come rappresentante della Università di Parigi alle feste Torricelliane, volle cortesemente assistere ad una seduta di questa Società. Un applauso unanime salutò l'illustre fisico francese.

Poi vennero riprese le comunicazioni:

4ª. M. Bertagna, *Osservazioni sulla fotografia a colori tricromica.*

5ª. M. La Rosa, *Una illusione ottica dipendente da astigmatismo.*

Terza seduta. — Il 21 la seduta fu aperta alle 14, ed in essa il prof. Corbino, espose i *Resultati delle recenti ricerche sui fenomeni magneto-ottici.*

Adunanze della sezione VI.

Meccanica applicata ed Elettrotecnica.

Prima seduta. — Il 19 alle ore 21 nell'Aula Magna del R. Istituto di Studi Superiori, il dott. Franco Magrini aprì la seduta, rivolgendo parole di ringraziamento e di saluto ai presenti ed inneggiando all'unione fra tecnici e scienziati, dalla quale si augura che più non si avveri ciò che per il passato è avvenuto, cioè che le maravigliose creazioni del genio italiano trovino l'applicazione pratica all'estero.

Quindi il prof. Ferdinando Lori, pronunziò il discorso inaugurale.

L'oratore dopo aver rivolto un saluto e un ringraziamento agli intervenuti, parlò di alcune delle più recenti applicazioni dell'elettricità: e cominciò la sua rassegna dalle lampade ad incandescenza a filamento metallico, ricordando come con queste lampade si sia notevolmente migliorato il rendimento in confronto di quelle a filamento di carbone.

Passò poi a parlare delle lampade a vapore di mercurio in tubo di quarzo, mostrandone i vantaggi e gli inconvenienti. Un campione di questo venne acceso dal conferenziere nella sala, e lo spettro della sua luce ottenuto con prisma a lente di quarzo, venne proiettato sopra apposito schermo.

Il prof. Lori passò quindi a parlare brevemente dello stato attuale dei vari sistemi di trazione elettrica trattenendosi specialmente su quello monofase Winter-Eichberg, che funzionerà fra poche settimane, per la prima volta in Italia, fra Padova e Fusiana.

Un altro ramo importantissimo delle applicazioni dell'elettricità, al quale oggi i tecnici rivolgono i loro studi, è quello dell'agricoltura. Il conferenziere a questo proposito espose come si ottenga per mezzo della energia elettrica la fissazione dell'azoto dell'atmosfera, partendo dalla fabbricazione dell'acido nitrico, e fece un cenno della produzione della calciocianamide in Italia, e di altri grandi stabilimenti consimili, che si stanno costruendo all'estero — e terminò la sua conferenza con alcune considerazioni generali sulle altre numerose applicazioni elettriche che vanno affermandosi ed estendendosi in questi ultimi tempi. Egli ricordò come l'elettricità venga ora impiegata a risolvere anche molti di quei problemi che trovano la loro esplicazione nello spazio a tre dimensioni.

Riferisce infine i lusinghieri risultati ottenuti coll'elettricità dal Lodge in Inghilterra nel campo dell'agricoltura, augurandosi che anche in Italia si possano al più presto iniziare esperimenti consimili, nella speranza di aprire alle applicazioni elettriche un campo nuovo e, per la nostra Patria, di primaria importanza.

Seconda seduta. — Il 20 alle 14,20 il Presidente della Sezione, prof. ingegnere F. Lori, dichiarò aperta la seduta e dette subito la parola all'ing. G. Astuni, che presentò la sua relazione sul tema seguente: *Il Problema della forza motrice a Napoli e l'impianto idroelettrico di Capo Volturno.* Premesse alcune considerazioni sulla opportunità per l'industria di valersi molto volte del carbone invece della forza idraulica a grande distanza passò a pàrlare delle forze idrauliche ancora disponibili per Napoli. Espose il progetto dettagliato per la derivazione e il trasporto a Napoli della forza dell'alto Volturno mediante 7 gruppi turbo-alternatori ciascuno di 2000 KVA. a 5000 v. e 7 trasformatori elevatori della tensione a 45000 v. L'oratore terminò mostrandosi partigiano della municipalizzazione, e ritenendo che anche con una gestione municipale l'impresa riuscirà profittevole.

Quindi il sig. A. Levy svolse il suo tema: *Ondo-motore a galleggiamento pneumatico a quadrupla espansione (sistema brevettato Pirandello).* L'oratore informò l'assemblea sull'impianto fatto a Rimini, descrivendo le varie parti dell'apparecchio. Ma l'esposizione fatta dal sig. Levy del modo di utilizzare la potenza meccanica delle onde lasciò dubbiosa l'assemblea sulla utilità pratica del sistema, e dette origine ad una lunga ed animata discussione.

LA GEOMETROGRAFIA E LE SUE TRASFORMAZIONI

PAGINE DI STORIA CONTEMPORANEA DI GINO LORIA. (¹)

Se per lo storico della scienza è di sommo interesse il rintracciare le scaturigini delle teorie che già conseguirono assetto definitivo e posto stabile nel nostro patrimonio intellettuale, per converso sopra lo scienziato esercita un'attrattiva irresistibile lo sforzo inteso a divinare quale dei virgulti che giornalmente sorgono sopra qualche vecchio tronco di una disciplina positiva sia destinato a trasformarsi in un vigoroso ramo sostegno di frutti nutrienti e succosi. Se la prima ricerca è ardua quanto lo scoprire quale, fra gli innumerevoli corsi d'acqua che contribuiscono alla costituzione d'un gran fiume, essendo sopra tutti preminente, meriti di portare il nome stesso di quel fiume, la seconda riesce di regola non meno malagevole e pericolosa di quella avente per intento di discernere fra gli infiniti rigagnoli che solcano i fianchi di una catena di montagne quello dalla sorte chiamato ad adunare nel proprio seno le acque provenienti da tutti gli altri: ben conoscono tale difficoltà i cultori di un ramo qualsiasi della storia contemporanea, fra i quali ha valore d'indiscutibile massima l'opinione che il misurare esattamente la portata dei fatti che avvengono sotto i nostri occhi sia compito riserbato a coloro che non possono assistere al loro svolgimento!

Ora la Geometria elementare conta oggi un complesso abbastanza numeroso di ricerche, che, benchè sotto certi aspetti disparatissime, pure sono fra loro connesse da legami tali da far supporre che possano fungere da elementi di una vasta futura teoria, da aggiungersi a quelle generate per effetto del fecondo contatto della Matematica elementare con i concetti più alti dell'Analisi moderna. Per segnalarne la comune natura e le scambievoli relazioni mi parve questa opportuna occasione, giacchè si tratta d'un ordine d'investigazioni a cui gli Italiani furono sino ad ora in generale indifferenti, per non dire ostili, ma al cui ulteriore sviluppo è presumibile (se dal passato è lecito trarre auspici per l'avvenire!) possano contribuire utilmente.

1. Volendo mettere allo scoperto la prima radice di tale ordine d'investigazioni si potrebbero citare alcune frasi di J. Steiner ed alcune pagine di Chr. Wiener. (²) Ma per limitarsi a parlare di ciò che fece l'ufficio di scintilla generatrice d'un vasto incendio, bisogna, ma

(¹) Comunicazione fatta al II Congresso della Società Italiana per il progresso delle scienze (Firenze, 20 ottobre 1908).

(²) Cfr. anche G. MÜLLER, *Zeichnende geometrie* (VI Aufl., 1901) pp. 8-9.

basta, segnalare le pubblicazioni che da un ventennio va facendo il geometra francese Emile Lemoine. Al futuro storico della Geometria moderna lasciamo di seguir passo passo l'evoluzione successiva dei concetti e dei metodi che guidarono il Lemoine a dare vita alla disciplina da lui chiamata *Geometrografia*; a noi importa soltanto di fissare la nostra attenzione sopra i lineamenti più spiccati sotto cui essa si presenta nella notissima esposizione definitiva fattane sei anni or sono dal suo inventore, [1] per dar ragione degli appunti ad essa rivolti e delle nuove forme che venne col tempo man mano assumendo.

Seguendo il Lemoine, quattro sono gli intenti che la Geometrografia si propone e cioè: 1°. Di designare qualsiasi costruzione geometrica con un simbolo che ne manifesti la semplicità e l'esattezza. 2°. Di insegnare la via più semplice per eseguire un'assegnata costruzione. 3°. Di discutere una soluzione già nota per eventualmente surrogarla con altra migliore. 4°. Di paragonare fra loro le varie soluzioni di un problema per decidere qual sia la più esatta e più semplice dal punto di vista della Geometrografia, cioè per determinare la così detta soluzione " geometrografica ".

Tutti questi fini in ultima analisi si riducono ad un solo, cioè alla determinazione della più precisa ed economica fra le soluzioni di una data questione di Geometria, chè quanto alla rappresentazione con un simbolo di qualsivoglia costruzione geometrica, nessuno accerta che sia indispensabile per lo scopo prefissosi dal Lemoine.

Che l'indicato intento non siansi proposti Euclide ed i geometri che ne seguirono le orme è facile comprendere, quando si rifletta che il grande legislatore della Geometria greca ne' suoi *Elementi* risolve i problemi concernenti le figure in cui s'imbatte non appena disponga di elementi sufficienti per farlo, e ciò in omaggio alla norma costante di non usare alcuna figura di cui non si conosca la costruzione con riga e compasso. [2] Ora è chiaro che quanto più ampia e profonda è la conoscenza delle proprietà di una figura e più probabile è la scoperta dei metodi semplici per costruirla; onde è certo che, se Euclide fosse ritornato più avanti sulle stesse questioni, sarebbe giunto a metodi di costruzione assai preferibili dal punto di vista grafico a quelli a cui si è arrestato e che bastavano al fine suo esclusivamente dottrinale.

2. La semplice enumerazione degli intenti a cui mira la Geometrografia fa vedere che essa, al pari della Geometria del compasso,

---

(1) E. Lemoine, *Géométrographie ou art des constructions géométriques* (Paris, 1902).

(2) Lo Zeuthen ha con il consueto suo acume osservato (Die geometriche Construction als " Exixtenzbeweis " in der antiken Geometrie; *Math. Annalen*, T. XLVII, p. 222) che le costruzioni in Euclide disimpegnano il medesimo ufficio dei teoremi di esistenza dell'analisi moderna. Giova anche osservare che le osservazioni fatte sulla Geometria elementare si possono estendere ad es. alla Geometria descrittiva, disciplina che offre tuttora un vasto campo di applicazione pei concetti a cui informasi la Geometrografia.

può servire di valido stimolante all'approfondire lo studio di certe figure che a prima giunta potrebbero sembrare prive d'interesse: per dimostrare che tale ufficio essa ha effettivamente esercitato basti citare l'esempio del sistema di due circonferenze, che, con generale stupore, si rivelò estremamente fecondo quando venne investigato per scoprire la costruzione più semplice delle tangenti comuni a quelle due curve! Non fosse che per tale dote di eminente suggestività posseduta dalla Geometrografia, il Lemoine è benemerito della scienza, e la dottrina da lui concepita va annoverata fra quelle fonti di nuovi veri, che è importante di non lasciare inaridire. Gli è quello che onestamente riconobbero anche i più tiepidi ammiratori del nuovo ramoscello pullulato sull'antica pianta e perfino coloro che ne criticarono i fondamenti teorici. (1) Pel nostro assunto giova far menzione delle critiche che con maggior fondamento, si possono muovere alla dottrina che ci occupa.

Come è noto, il Lemoine prende le mosse da cinque operazioni fondamentali, due da effettuarsi con la riga e tre col compasso; sono: il collocamento dell'orlo della riga in contatto di un determinato punto ed il tracciamento di una retta, il collocamento di una delle punte del compasso in una determinata posizione od a contatto di una data linea ed il tracciamento di una circonferenza. Ora è evidente che tali operazioni sono fra loro di natura differentissima, onde sembrano ribellarsi al trattamento uniforme a cui volle sottoporli il Lemoine; giacchè, come si sa, egli designa con le lettere R_1, R_2, C_1, C_2, C_3 quelle cinque operazioni fondamentali e con

$$\mathrm{Op}:\ (l_1 R_1 + l_2 R_2 + m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3)$$

la costruzione che risulta dal ripeterle rispettivamente l_1, l_2, m_1, m_2, m_3 volte. La scelta delle operazioni " fondamentali „ è, entro certi limiti, arbitraria, ed infatti il Bernès, uno dei primi e più assidui cultori della nuova disciplina, ne propose altre, per certi rispetti preferibili a quelle del Lemoine, ed altre ancora vennero più recentemente consigliate dall'Adler. (2) Ma, qualunque sia la scelta a cui ci si attiene, è evidentemente indispensabile che le operazioni poste a fondamento di tutto l'edificio siano fra loro indipendenti, cioè che nessuna di esse equivalga alla combinazione di alcune delle rimanenti; ora invece il Mehmke (3) ha sostenuto con buone ragioni doversi l'operazione C_1 ritenersi equivalente alla C_2 ripetuta due volte!

Oltre a questo appunto, si può far quello che il Lemoine non ha mai dichiarato quale significato abbia il segno + che entra nel simbolo

(1) Cfr. M. Simon, *Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik* (II Auflage, 1907) p. 5. Cfr. anche p. 130.

(2) *Theorie der geometrischen Konstruktionen*, Leipzig, 1906, p. 280 e seg.

(3) *Bemerkungen zur Geometrographie von M. E. Lemoine* (Jahresber. der Deutschen Math.-Ver. T. XII, 1903, p. 113-116).

di una operazione qualunque; a noi sembra che sia lo stesso di quello che gli si attribuisce nella teoria dei numeri complessi a più unità: ciò in sostanza equivale a rappresentare l'Op: $(l_1 R_1 + \ldots + m_3 C_3)$ col punto dello spazio a cinque dimensioni avente per coordinate i numeri interi positivi $l_1, \ldots, m_3$.

Il Lemoine chiama " coefficiente di semplicità „ la somma

$$l_1 + l_2 + m_1 + m_2 + m_3 ;$$

ora è chiara l'arbitrarietà di tale assunzione! E se si ricorre alla suindicata rappresentazione si vede subito che quell'ufficio con molta maggior ragione potrebbe affidarsi alla norma

$$l_1^2 + l_2^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2,$$

od al modulo

$$\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}$$

del numero complesso $l_1 R_1 + \ldots + m_3 C_3$.

Un punto estremamente delicato ed importante nella teoria del Lemoine è la determinazione della costruzione meritevole dell'epiteto di " geometrografica „, chè non si conosce criterio alcuno atto a distinguere una tale soluzione dalle altre; ed infatti molte costruzioni che furono ritenute degne di quel nome, ne furono riconosciute immeritevoli in seguito a nuovi studi, ed a quelle che oggi sono considerate come geometrografiche si giunse con un processo di approssimazioni successive, attualmente interrotto, ma che può ricominciarsi domani. Se si ricorda come, ai dir del Kronecker, una definizione matematica sia accettabile soltanto se permette con un numero finito di prove di decidere se un dato ente appartenga ad una determinata classe, si vedrà come la locuzione " soluzione geometrografica „ manchi di senso ben determinato, e chi voglia attribuirgliene uno si trovi in presenza di una questione della massima importanza teorica e pratica, la cui soluzione esigerebbe probabilmente un'*instauratio ab imis* di tutta la teoria del Lemoine. (¹)

3. Il Lemoine fa costantemente le comode ipotesi che i disegni geometrici vengano eseguiti con assoluta perfezione e che i risultati abbiano una precisione indipendente dalla posizione dei dati (che per esempio due linee si taglino in un punto esattamente individuato qualunque sia l'angolo sotto cui esse s'incontrano) ed assume la somma $l_1 + m_1 + m_2$ come misura dell'esattezza della Op: $(l_1 R_1 + \ldots + m_3 C_3)$. Senza entrare in una discussione della convenienza di tale scelta, osserveremo come le ipotesi da cui prende le mosse il nostro geometra siano ben naturali quando si ragioni sopra figure completamente ideali, ma sono invece contrarie al vero quando si

---

(¹) In questo nostro modo di vedere ci troviamo agli antipodi col Lemoine, al dir del quale (op. cit., p. 9) " en Géométrographie on ne peut affirmer . . . : voici la construction la plus simple qu'il soit possible de faire pour obtenir tel résultat „.

tratti di figure eseguite o da eseguirsi sopra un ruvido foglio di carta con una volgare matita. Onde, se si vuole riacquistare il contatto con la realtà e ci si propone di riuscire utili anche ai disegnatori, fa duopo abbandonarle!

Allora, a seconda delle circostanze in cui ci si trova, si sarà costretti a preferire ora l'una ora l'altra delle varie soluzioni d'un problema. Se, ad es. si tien conto del fatto che il piano su cui si disegna ha dimensioni finite, ci si troverà di fronte a questioni, molte delle quali tutti conoscono perchè, seguendo l'esempio dato dal Lambert, si sogliono trattare applicando alcuni teoremi elementari di Geometria proiettiva; chi voglia avere sott'occhio un quadro completo di siffatte svariate ed interessanti questioni non ha che ricorrere ad un coscienzioso studio del dott. Alessandro Witting. [1] Se invece si tien conto del fatto che certe costruzioni, in condizioni sfavorevoli dei dati, conducono a risultati imprecisi, nasce tutto un complesso di questioni aventi per fine la scoperta di altri procedimenti più comodi, e delle quali è agevole avere oggi esatta notizia grazie ad una recente monografia del dott. Paolo Zühlke. [2]

In moltissimi altri casi giova ancora lasciare in disparte le supposizioni, così essenziali nella Geometria speculativa, che una retta sia determinata da due de' suoi punti ed un punto da due sole rette che lo contengono; all'opposto giova ammettere che ognuno degli elementi ignoti sia più che determinato, e ciò nell'intento di procurarsi dei preziosi elementi di verifica. Accade allora che, come figura risolutrice di un dato problema, si presentino parecchie aventi eguali diritti, e ci si trova alle prese con la questione, già intraveduta da Chr. Wiener, [3] di scegliere fra esse quella che è più prossima alla vera. È evidente che siffatta questione appartiene al Calcolo delle probabilità e più precisamente alla Teoria degli errori di osservazione, e fu investigata dal dott. Geuer [4] (nel momento stesso in cui il Lemoine pubblicava sotto forma definitiva i suoi studi), appunto applicando i concetti ed i metodi che Gauss ha introdotti nella scienza. Tali concetti e tali metodi notoriamente escono dal quadro della Matematica elementare, onde le ricerche del Geuer non possono essere introdotte in un primo studio della Geometria; ma che i risultati a cui guidano sian del massimo interesse risulta dalle applicazioni fattene a costruzioni classiche. Mi sia lecito dimostrare la verità di questa asserzione sopra un esempio: è noto che per bisecare un segmento

---

(1) *Geometrische Konstruktionen, insbesondere in begrenzter Ebene* (Jahresbericht des Gymn. zum heilig. Kreuz, Dresden, 1889).

(2) *Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen bei ungüstigen Lageverhältnissen* (Leipzig-Berlin, 1908).

(3) *Lehrbuch der darst. Geometrie*, Leipzig, 1884, T. I, p. 190.

(4) *Die Genauigkeit geometrischer Zeichnungen behandelt nach dem Gauss' schen Ausgleicungsverfahren, wonach die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird* (Jahresber. des Grossh. Progymnasiums in Durlach, 1091-02).

rettilineo si descrivono due circonferenze eguali di raggio arbitrario coi centri negli estremi di quel segmento e si congiunge con una retta i due punti in cui esse si secano; ora si può domandare come debbasi scegliere il comun raggio di quelle due circonferenze per conseguire una costruzione di esattezza massima. Ebbene il Wiener ha divinato e il Geuer dimostrato che a tale scopo si deve assumerlo di poco maggiore della metà del segmento dato. A questo esempio altri potrei aggiungerne; ma il poco che dissi è sufficiente per segnalare l'esistenza di un fecondo campo di ricerche, che è ben lungi dall'essere esaurito.

4. Seguendo le traccie del Geuer abbiamo quasi senz'accorgercene abbandonate le figure ideali per le figure reali, ossia, per usare la nomenclatura di Felice Klein, la " Matematica di precisione „ per la " Matematica d'approssimazione „. (1) In tale campo — da cui i matematici ortodossi torcono inorriditi lo sguardo! — ci arresteremo ancora per osservare come appunto alle idee del Klein, a cui testè facemmo allusione, s'inspira la parte che ha attinenza col nostro tema della dissertazione di laurea di Paolo Böhmer, (2) ove la questione dell'esattezza delle figure geometriche viene investigata, partendo dall'osservazione che i disegni geometrici constano non di punti e linee propriamente detti ma macchiette e striscioline aventi uno spessore di circa 8 o 10 centesimi di millimetro, e che inoltre sull'esattezza influisce la scala che si sceglie. Da ciò e dal fatto che il Böhmer invoca ed applica dati e fatti pertinenti all'Ottica fisiologica emerge che egli opera in una regione ben lontana da quella in cui Euclide regna e governa. Ma che i frutti che vi si raccolgono sian capaci di fornire vital nutrimento anche ai matematici emerge dal fatto che, ad es., il Böhmer ha per primo dimostrato che, nell'eseguire la nota costruzione euclidea del triangolo individuato dai suoi lati giova prendere le mosse dal lato massimo e servirsi poi del minimo: così si consegue la più grande precisione! Emerge da ciò che gli studi dell'indicata natura abilitano ad affrontare con probabilità di vittoria tutta una classe di questioni, a cui il Lemoine nemmeno pensava, e che per fermo non la cedono per importanza a quelle che si propone la Geometrografia.

5. Allo stesso concetto di collegare il disegno geometrico alla teoria degli errori d'osservazione sono ispirate alcune più recenti indagini di Corrado Nitz. (3) Il quale non si limitò ad applicare la teoria gaussiana, ma esumò e rimise in circolazione procedimenti ed idee proposti ed applicati in ricerche di alta geodesia da Côtes, Lam-

(1) V. il noto corso di lezioni: *Anwendung der Differential-und Integralrechnung auf die Geometrie* (Göttingen, 1901).

(2) *Ueber geometrische Approximationen* (Göttingen, 1904).

(3) *Anwendung der Theorie der Fehler in der Ebene auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal* (Königsberg, 1905); *Beiträge zu einer Fehlertheorie der geometrischen Konstruktionen* (Zeitschr. für Math. und Phys., T. LIII, 1906, p. 1-37.

bert, Bravais, ecc., fornendo così nuove prove di quanto giustamente il Wiener ed il Klein giudicassero, asserendo che tutte le questioni attinenti all'esattezza delle costruzioni debbano trattarsi applicando il metodo dei minimi quadrati. Non ci è concesso descriver qui la strada battuta dal Nitz, perchè ciò esigerebbe che noi, non solo ci diffondessimo in lunghi sviluppi matematici, ma facessimo anche incursioni in regioni di pertinenza della Psicologia e di altre scienze sperimentali; solo osserveremo che i procedimenti del Nitz, come quelli del Gener e del Böhmer, applicati a problemi classici di geometria elementare, abbiano dato a molte soluzioni notissime dei complementi interessanti pel teorico ed utili pel pratico. Malgrado ciò, vi sarà forse qualcuno tentato di ritenere che questo connubio fra pura Geometria e Geodesia sia da giudicarsi contro natura; ora a me pare che contro tale opinione militi, a tacere d'altro, il fatto che un ingegnere tedesco, Franz Rogel, senz'avere notizia alcuna degli studi su cui mi sono testè intrattenuto, fu spontaneamente condotto ad applicare la Teoria degli errori di osservazione alle questioni relative all'esattezza delle costruzioni geometriche; egli, infatti, prendendo le mosse da alcuni suoi studi di matematica applicata, (1) fu indotto a proporsi e risolvere le seguenti questioni: (2) I. In qual modo debbonsi scegliere gli enti ausiliari di una costruzione per ottenere il risultato più preciso? II. Fra parecchie costruzioni congeneri quale dà il risultato più esatto? III. Per quale sistema di dati deve preferirsi l'impiego di una certa costruzione? Le svariate applicazioni fatte dall'autore delle conclusioni a cui pervenne da un lato mostrano il valore dei metodi proposti e d'altronde spianano ed illuminano la via a chi volesse farne delle altre. E poichè teoria ed applicazioni hanno la loro prima radice negli studi del Lemoine, non vien forse così dimostrato per altra strada la dote di eminente suggestività posseduta dalla Geometrografia?

6. Prima di porgerne ulteriori conferme giova segnalare un nuovo punto di vista da cui, nella scuola di David Hilbert, fu contemplata la totalità delle questioni relative alle costruzioni geometriche.

Come è notorio Euclide (o qualche trattatista anteriore) ha concesso al geometra esclusivamente l'uso della riga e del compasso; il Mascheroni dimostrò poi con la sua " Geometria del compasso „ che si può, senza perdere nulla, bandire la prima; invece Servois e Brianchon vollero esonerarsi, per quanto fosse possibile, dall'adoperare il secondo; finalmente Poncelet e Steiner dimostrarono che tutti i problemi di primo e secondo grado si possono risolvere con la sola riga, quando si sia tracciato un cerchio fisso di centro noto. Ora

(1) *Note über den Ausgleich von Streckenmessungen* (Sitzungsber. der k. böhm. Ges. der Wiss. 1905).

(2) *Ueber die Genauigkeit der planimetrischen Constructionen* (Id., 1906); *Ergebnisse der Untersuchungen über die Genauigkeit planimetrischer Constructionen* (Id., 1907).

l'Hilbert nelle sue memorabili ricerche sopra i fondamenti della Geometria, in base a considerazioni su cui non è il caso di insistere, ha proposto di assumere come operazioni geometriche lecite il tracciamento delle rette ed il trasporto di un certo segmento arbitrario ma fisso. (1) Quale aspetto totalmente nuovo assuma in conseguenza tutta la Geometria venne completamente esposto da un discepolo dell'Hilbert, Michele Feldblum; (2) il quale dimostrò come certe questioni — per es. il problema di Apollonio — divenissero in conseguenza irresolubili e come le fatte ipotesi equivalessero ad ammettere quali operazioni fondamentali il tracciamento delle rette, oltre alla costruzione della bisettrice di un angolo qualunque. Se invece si sceglie come costruzione fondamentale, all'infuori della delineazione delle rette, la trisezione di un angolo qualunque (da effettuarsi con apposito strumento) l'intera Geometria costruttiva subisce una nuova ed ancor più radicale trasformazione, in conseguenza della quale, ad es., la costruzione di certi poligoni regolari diviene possibile, mentre non lo è nel sistema euclideo e viceversa.

Non v'ha dubbio che taluno giudicherà siffatte ricerche come oggetto di pura curiosità, destinate a traviare la Geometria in altro senso, ma non meno profondamente, di quello che si fa da coloro che considerano le figure geometriche, non come enti puramente ideali, ma come materialmente e quindi imperfettamente eseguite dalla mano dell'uomo. Tuttavia la loro importanza teorica appare evidente a chi rifletta come esse pongano in luce meridiana l'intima struttura dell'edificio euclideo; esse, infatti, lo mostrano come qualche cosa non di assolutamente inevitabile, ma quale necessario prodotto della convenzione fatta che si usino sempre e soltanto riga e compasso; si sostituiscano a questi altri strumenti e tutta la Geometria cambia stile e carattere!

7. Con quanto esponemmo non abbiamo ancora finito di descrivere la composizione della famiglia avente per capostipite la comunicazione fatta nel 1888 dal Lemoine al Congresso della nostra sorella maggiore, l'Associazione francese per il progresso delle scienze; ciò è ben noto a coloro che ascoltarono la bellissima lettura filosofico-metodologica fatta dal prof. F. Bernstein dinanzi al recente Congresso internazionale dei matematici. Da quella lettura si appresero nelle loro linee generali l'indole e gli scopi di un vasto piano d'investigazioni intese a paragonare fra loro, non più le varie soluzioni di un problema, ma le differenti dimostrazioni di un teorema. Applicate al teorema di Pitagora guidarono alla conclusione che fra le varie dimostrazioni " per scomposizione „ emerge per semplicità quella dovuta

(1) Cfr. G. WALLEMBERG, *Konstruktionen mit Lineal und Eichmass sowie mit dem Lineal allein* (Sitzungsber. der Berliner math. Ges., T. IV, 1906. p. 21-22).

(2) *Ueber elementar-geometrische Constructionen* (Göttingen, 1899).

ad Anarizio, il ben noto commentatore arabo di Euclide, e che è notissima anche nelle nostre scuole grazie alla « Geometria » del mio illustre e caro maestro Enrico d'Ovidio.

Nell'attesa della pubblicazione integrale del lavoro del Bernstein, chi desidera conoscere l'indole degli originalissimi studi di cui si tratta non ha di meglio che ricorrere a due recenti dissertazioni di laurea eseguite sotto la sua direzione.

Dalla meno recente, dovuta a Giovanni Brandes, [1] si apprende come, per giudicare della dimostrazione di un teorema, il Bernstein suggerisca di paragonarla a tutte quelle in cui intervengono i medesimi assiomi e di conferire la palma della semplicità a quella in cui uno determinato di essi viene applicato il minor numero di volte. Quale via si debba tenere per determinare tale minimo si apprende dall'applicazione fatta dal Brandes alla più celebre proposizione della Geometria elementare, applicazione che guida appunto alla esaltazione di quella fra le dimostrazioni del teorema di Pitagora di cui ci ha parlato il Bernstein.

È vano il tentare di esporre in compendio le sottili argomentazioni che condussero a questa conclusione. E tanto meno quelle che si leggono nell'altra delle citate dissertazioni; [2] nella quale altre dimostrazioni della medesima proposizione vengono assoggettate a congeneri ingegnose analisi microscopiche; e queste guidano a scoprire fra esse affinità inattese, ad immaginare dei nuovi ragionamenti congeneri, ad istituire varie ricerche topologiche sulla decomposizione dei triangoli piani e sferici, le cui risultanze estendono e completano quanto conosciamo intorno all'equivalenza delle figure.

Tutto ciò, mentre porge una conferma dell'inesauribilità del campo d'indagine di pertinenza della Geometria, induce a stabilire un paragone fra questa antichissima scienza e l' « igdrasil », quell'albero meraviglioso della mitologia scandinava, i cui rami avvolgono tutto il nostro pianeta estendendosi sino alle nubi e le cui radici si sprofondano nella terra per estrarne i succhi vitali. Tale albero fu dagli italiani sempre coltivato con impegno e successo; possa quanto io esposi spingerli a continuare nella stessa via, dirigendo i loro sforzi verso un ordine d'investigazioni a cui sembrano applicabili con successo i metodi nel cui maneggio si mostrarono maestri Giuseppe Peano e Mario Pieri.

---

[1] *Ueber die axiomatische Einfachheit mit besonderer Berücksichtigung der auf Addition beruhenden Zerlegungsbeweise des Pythagoräischen Lehrsatzes* (Halle, a. S. 1908).

[2] Paul Mahlo, *Topologische Untersuchungen über die Zerlegung in ebene und sphärische Polygone* (Halle, a. S., 1908).

INTORNO AD ALCUNE DEFINIZIONI PROIETTIVE ED ANALITICHE

delle coniche e delle quadriche

1. Stralcio dalle mie lezioni del corso libero di Geometria analitica (tenuto quest'anno nella R. Università di Genova) le seguenti considerazioni sulle coniche e sulle quadriche. Esse hanno per fine essenziale quello di collegare la teoria sintetica con la teoria analitica e quindi il corso di Geometria proiettiva con quello di Geometria analitica.

2. Comincio dalle coniche. Assumo per definizione proiettiva quella della generazione mediante forme proiettive fondamentali di 1ª specie: assumo, per definizione analitica, l'insieme di tutti i punti reali del piano le cui coordinate cartesiane sono vincolate da una relazione di secondo grado a coefficienti reali (ed escludo quindi dalle considerazioni seguenti la conica immaginaria). Il passaggio dall'una all'altra definizione è estremamente semplice quando ci si possa servire di coordinate omogenee. Ma quando, per ragioni didattiche, si sia costretti a ritardare la introduzione di tali coordinate (così da doversi servire delle cartesiane) la questione si presenta in modo alquanto differente dal lato tecnico del calcolo, ed io mi permetto qui di esporre il metodo seguito nelle mie lezioni.

Sieno due fasci di raggi proiettivi complanari a centri distinti S ed S'. Nel piano dei fasci assumiamo la retta SS' per asse delle y, la perpendicolare a tale retta nel punto medio O di SS' come asse delle x e per unità di misura positiva prendiamo il segmento OS: per cui le coordinate di S ed S' saranno $(0, 1)$ e $(0, -1)$. L'asse delle x taglierà i due fasci secondo due punteggiate proiettive sovrapposte.

Indicando con λ e μ le ascisse di due punti corrispondenti, fra λ e μ passerà dunque la relazione bilineare seguente

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0. \qquad (1)$$

con $a\alpha - bc \neq 0$. Indicando con P e P' questi punti corrispondenti, le loro coordinate saranno $(\lambda, 0)$, $(\mu, 0)$. Facendo variare λ e conseguentemente μ, così che sia sempre soddisfatta la (1), le rette SP, S'P' descrivono i due fasci proiettivi dati e quindi il loro punto comune M descrive la conica la quale viene in tal modo a essere individuata mediante la definizione proiettiva.

Le equazioni delle rette SP ed S'P' sono rispettivamente

$$x + \lambda(y - 1) = 0, \qquad x - \mu(y + 1) = 0.$$

e quindi le coordinate del loro punto d'incontro sono le seguenti

$$x=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+\mu}; \qquad y=\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}$$

dove è da tener presente che λ e μ sono collegate dalla (1). Per cui le precedenti possono scriversi così:

$$\lambda\,(ax+2b)+\mu\,(ax+2c)=-2d$$
$$\lambda\,(y-1)+\mu\,(y+1)=0.$$

Risolvendo queste rispetto a λ e μ eppoi sostituendo nella (1) si perviene alla cercata equazione della conica. Essa è la seguente:

$$ad\,(1-y^2)+\{c\,(y-1)-b\,(y+1)\}\,\{ax+y\,(b-c)+b+c\}+ \\ +\{ax+y\,(b-c)+b+c\}^2=0. \qquad (2)$$

Ossia una equazione del 2° grado in x e y. Si può osservare che nell'eliminazione è supposto d differente da zero: ora il caso $d=0$ non interessa perchè allora i due fasci hanno per raggio unito SS' e sono prospettivi: la conica si spezza in due rette le quali possono sempre rappresentarsi con un'equazione complessiva di 2° grado.

Se dunque d è differente da zero i due fasci in parola non sono prospettivi, la conica non può comporsi di due rette e questo toglie quindi ogni sospetto che la (2) possa decomporsi in due fattori lineari. Così il passaggio dalla definizione proiettiva a quella analitica è attuato.

3. Viceversa abbiasi un'equazione di 2° grado in x e y (coordinate cartesiane ortogonali di un punto). I coefficienti della equazione siano reali ed escludiamo il caso in cui il luogo rappresentato da questa equazione sia completamente immaginario. Ed escludiamo anche il caso ovvio in cui il 1° membro della equazione si decomponga in due fattori lineari.

Sieno dunque S, S' due punti reali del luogo. Assumiamo (come prima) questa retta per asse delle y, la perpendicolare a SS' nel punto medio come asse delle x e il segmento OS come unità di misura positiva. L'equazione del luogo sarà quindi della forma

$$a_{11}x^2+y^2-1+2a_{12}xy+2a_{13}x=0. \qquad (3)$$

Prendiamo sull'asse delle x due punti qualunque P e P' di coordinate $(\lambda, 0)$, $(\mu, 0)$. Le equazioni delle rette SP ed SP' saranno

$$x+\lambda\,(y-1)=0, \qquad x-\mu\,(y+1)=0,$$

e le coordinate del punto comune:

$$x=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+\mu}, \qquad y=\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}.$$

Esigiamo adesso che questo punto appartenga al luogo (sostituendo nella (3) ad x e y i precedenti valori) e troveremo la seguente condizione fra λ e μ

$$\lambda\mu\,[a_{11}\lambda\mu + \lambda\,(a_{12} + a_{13}) + \mu\,(a_{13} - a_{12}) - 1] = 0$$

ma la soluzione $\lambda\mu = 0$ non ci apprende altro che questo: " i punti S ed S' appartengono al luogo ": cioè nulla di nuovo. Rimane l'altra

$$a_{11}\lambda\mu + \lambda\,(a_{12} + a_{13}) + \mu\,(a_{13} - a_{12}) - 1 = 0; \qquad (4)$$

che è la relazione bilineare fra λ e μ. Dunque, al variare di λ e conseguentemente di μ, i punti P e P' descrivono due punteggiate proiettive (in cui O non è unito) e quindi le rette SP, S'P' descrivono due fasci proiettivi (non prospettivi). La condizione essenziale affinchè la (4) sia una proiettività è che

$$-a_{11} + a_{12}^2 - a_{13}^2 \neq 0;$$

ma questa è certamente soddisfatta, perchè il 1° membro è proprio il discriminante della (3), il quale è differente da zero per ipotesi.

Ecco dunque effettuato anche il passaggio inverso dalla definizione analitica di conica a quella proiettiva.

4. Passiamo alle quadriche. Assumiamo la seguente definizione proiettiva: *date due stelle reciproche a centri distinti, si chiama quadrica il luogo geometrico dei punti d'incontro dei raggi dell'una stella con i piani corrispondenti dell'altra.* Dico che le coordinate cartesiane di un punto del luogo sono vincolate da una equazione di secondo grado. Infatti sieno S ed S' i centri delle due stelle. Prendiamo per asse delle z la retta SS', per piano xy quello perpendicolare ad SS' nel suo punto medio O e il segmento OS per unità di misura positiva per cui le coordinate di S ed S' saranno $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$. Tagliando col piano xy le due stelle, troveremo una reciprocità, che è facile rappresentare analiticamente. Basterà, nel piano suddetto far corrispondere al punto R (le cui coordinate cartesiane sieno α, β) la retta r rappresentata dalla equazione seguente:

$$(a\alpha + b\beta + c)\,x + (d\alpha + e\beta + f)\,y + m\alpha + n\beta + p = 0,$$

dove $a, b, c, d, e, f, m, n, p$ sono numeri reali qualsiansi con la sola condizione restrittiva che

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & p \end{vmatrix} \neq 0.$$

Allora le coordinate di un punto variabile sopra la retta SR saranno le seguenti:

$$x = \frac{\alpha}{\lambda + 1}, \qquad y = \frac{\beta}{\lambda + 1}, \qquad z = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \qquad (5)$$

dove λ è un parametro variabile. Il piano che da S' proietta la retta r' avrà per equazione:

$$(a\alpha + b\beta + c)\,x + (d\alpha + e\beta + f)\,y + (m\alpha + n\beta + p)\,(z+1) = 0. \qquad (6)$$

Variando R nel piano xy e conseguentemente r', viene descritta la reciprocità piana, e quindi il raggio SR e il piano Sr' descrivono la supposta reciprocità fra le due stelle di centri S ed S'. La quadrica è il luogo geometrico del punto d'incontro della retta SR col piano Sr' secondo la definizione proiettiva assunta. Per trovar le coordinate di tale punto bisognerebbe sostituire nella (6) i valori di x, y, z dati dalle (5), risolvere rispetto a λ l'equazione che ne seguirebbe e finalmente sostituire questo valore di λ nelle (5) medesime. Troveremmo così le coordinate richieste espresse per α e β, eliminando le quali α e β, perverremmo alla equazione del luogo. Siccome, in sostanza, quel che occorre è quest'ultima, l'eliminazione può abbreviarsi così: risolviamo rispetto a λ l'ultima delle (5) e sostituiamo nelle prime due, otterremo

$$\lambda = \frac{z}{1-z}, \qquad \alpha = \frac{x}{1-z}, \qquad \beta = \frac{y}{1-z}.$$

Ponendo adesso nella (6) questi valori, perverremo alla equazione cercata, che è la seguente:

$$\begin{aligned} ax^2 + ey^2 - pz^2 + p + (b+d)\,xy + (m-c)\,xz \,+ \\ + (n-f)\,yz + (m+c)\,x + (n+f)\,y = 0; \qquad (7) \end{aligned}$$

e con questo l'affermazione fatta è dimostrata e il passaggio dalla definizione proiettiva delle quadriche alla definizione analitica è ottenuto.

5. Viceversa: *data l'equazione generale di 2° grado in* x, y, z *a coefficienti reali, cerchiamo di individuare le due stelle reciproche che generano il luogo geometrico rappresentato da quella equazione.* Per lo scopo escluderemo il caso in cui tutti i punti del luogo sono immaginari. Sieno dunque S, S' due punti reali generici del luogo: assumiamo la retta SS' per asse delle z e il piano perpendicolare a SS' nel punto medio O per piano xy con OS unità di misura positiva. Le coordinate di S, S' saranno (0, 0, 1), (0, 0, —1), e l'equazione del luogo potrà ridursi alla forma:

$$Ax^2 + By^2 - z^2 + 1 + Cxy + Dxz + Eyz + Fx + Gy = 0. \qquad (8)$$

Questa assumerà la forma (7), se saranno adempiute le seguenti condizioni:

$$\frac{a}{p} = A, \quad \frac{e}{p} = B, \quad \frac{b}{p} + \frac{d}{p} = C, \quad \frac{m}{p} - \frac{c}{p} = D,$$
$$\frac{n}{p} - \frac{f}{p} = E, \quad \frac{m}{p} + \frac{c}{p} = F, \quad \frac{n}{p} + \frac{f}{p} = G;$$

da cui segue:

$$\frac{m}{p}=\frac{\mathrm{D}+\mathrm{F}}{2},\ \frac{c}{p}=\frac{\mathrm{F}-\mathrm{D}}{2},\ \frac{n}{p}=\frac{\mathrm{E}+\mathrm{G}}{2},\ \frac{f}{p}=\frac{\mathrm{G}-\mathrm{E}}{2}.$$

Si possono dunque calcolare, dalle precedenti, i seguenti rapporti

$$\frac{a}{p},\quad \frac{e}{p},\quad \frac{m}{p},\quad \frac{c}{p},\quad \frac{n}{p},\quad \frac{f}{p}.$$

Quanto ai due rimanenti $\frac{b}{p}$, $\frac{d}{p}$ basta semplicemente che la loro somma sia ugnale a C.

È dunque possibile in infiniti modi trasformare la (8) nella (7). Ciascuna di queste soluzioni individua mediante i numeri $a, b, c, d, e, f, m, n, p$ una reciprocità nel piano xy e conseguentemente una reciprocità fra le stelle di centri S ed S' (ottenuta per proiezione dalla reciprocità piana suddetta) e così il luogo di secondo grado rappresentato dalla (8) si può generare mediante la reciprocità stellare sopra indicata. È dunque effettuato anche il passaggio dalla definizione analitica delle quadriche alla definizione proiettiva. Possono soltanto presentarsi casi particolari facilmente discutibili. Ne segue l'importante osservazione che *i centri delle due stelle reciproche generanti una quadrica, non vengono a essere punti speciali della superficie ma sono da riguardarsi come punti generici.* Infatti si generi la quadrica con le stelle di centri S ed S', e si pervenga a stabilirne la equazione. Poi si prendano due nuovi punti generici qualunque S'', S''' della superficie, e si applichino tutte le considerazioni fatte precedentemente per passare dalla definizione analitica alla proiettiva, e si troveranno così le due nuove stelle generanti la quadrica con i centri nei punti S'' ed S'''. Per tal modo il teorema inerente al così detto „ *spostamento dei centri delle stelle* „ è stabilito evitando la nota e laboriosa dimostrazione che se ne dà abitualmente in forma sintetica.

6. Dal punto di vista geometrico è però desiderabile assegnare qualche proprietà più espressiva inerente alle stelle in parola.

Può ad es. farsi questa domanda: *data una quadrica e presi due punti generici su di essa come possono individuarsi (senza fare alcun calcolo) due stelle reciproche con i centri in quei punti e capaci di generare la quadrica data?* La risposta è semplice e può essere spiegata appena fatta la teoria della polarità. Essa è la seguente: *si tagli la quadrica con un piano generico passante per la retta reciproca di quella che congiunge i due punti e si proietti da essi il sistema polare che ha origine nel piano suddetto rispetto alla conica sezione con la quadrica. Questa proiezione si faccia dunque nel senso che da uno dei punti dati si proiettino i punti del piano in parola e dall'altro le rette polari di questi punti rispetto alla conica sezione. Ebbene si otterranno così le due stelle reciproche cercate: la quadrica data potrà riguardarsi come il luogo* *geometrico dei punti d'incontro dei raggi dell'una con i piani corrispondenti dell'altra.*

Ecco la dimostrazione. Sieno A e B i due punti generici presi sulla quadrica data e π un piano passante per la retta polare reciproca della congiungente di A con B. Sia c la conica sezione di π con la quadrica: sia R un punto qualunque di π ed r la polare di R rispetto a c, e finalmente sia P il polo di π: per le ipotesi fatte P esiste sulla retta AB. Si consideri ora il piano dei tre punti A, B, R: esso segherà la superficie secondo una conica c' passante per A e B per cui AR e BR segheranno ciascuna c' in un altro punto: sieno M ed N queste ulteriori intersezioni rispettive. Riguardando la omologia armonica che ha il centro in P e per piano fondamentale π, e osservando che essa trasforma la quadrica in se stessa, si vede subito che il punto H comune alle rette AN, BM esiste sopra π: d'altra parte H appartiene al piano polare di R rispetto alla quadrica, perchè il quadrangolo completo ABMN è iscritto in c', e R ed H sono punti diagonali: dunque H esiste sulla retta r. Per conseguenza il piano che passa per B e per r contiene tutta la retta BH e quindi anche il punto M esistente sopra AR. (Ugualmente si vede che il piano passante per A ed r taglia il raggio che unisce B ad R nel punto N). c.d.d. La costruzione cade se la retta AB appartiene per intiero alla quadrica. Quanto al piano π, siccome si hanno a nostra disposizione infinite sue posizioni possibili (esso non è sottoposto altro che a passare per la reciproca della AB), noi lo sceglieremo in modo che esso tagli la quadrica in una conica reale non degenere.

7. Come utile esercizio ci si può proporre di assegnare le due stelle reciproche in guisa da potere ritrovare l'uno dopo l'altro tutti i casi metrici possibili di quadriche a punti reali (non spezzate).

La questione può risolversi costruendo le due stelle reciproche mediante la proiezione del sistema polare piano, rispetto a una conica c, da due punti A, B esterni a quel piano. Vale allora la osservazione generale seguente: *Quando la conica c sia reale, la quadrica generata dalle stelle in parola ha punti iperbolici, parabolici, od ellittici a seconda che il punto d'incontro* M *della retta* AB *col piano della conica c è esterno alla conica suddetta, ovvero esiste su di essa, o finalmente è interno.* — Infatti basta osservare che ogni tangente che da M si può tirare a C individua una retta della quadrica passante per A (e quindi una per B) e viceversa. Perchè se t è una tale tangente ed N il punto di contatto con c, alla retta AN corrisponde il piano individuato da B e da t che passa manifestamente per la AN onde tutti i punti di AN appartengono alla quadrica: viceversa se per A passa una retta della quadrica essa si appoggia a c in un punto: detto N questo punto e t la traccia del piano corrispondente al raggio AN, sul piano di c, ne segue che t passa per N perchè tutta la retta AN esiste nel proprio piano corrispondente: quindi t è tangente a c in N (perchè polare di N rispetto a c): d'altra parte il piano corrispondente suddetto contenendo AN contiene tutta la retta AB e per conseguenza t passa per M.

Ciò premesso ecco la risposta da darsi nei varii casi.

Ellissoide. Perchè la quadrica risulti ellissoide basterà evidentemente che la conica c sia immaginaria e sul piano all'infinito. O, in altre parole; ecco la costruzione: si prenda sopra un piano a distanza finita un sistema polare privo di conica unita e lo si proietti da un punto A esterno al piano, in guisa da ottenere nella stella che ha il centro in A un sistema polare privo di cono unito. Poi preso un altro punto B si tiri per B un raggio qualsiasi r, da A il raggio parallelo r' e poi, per A, il piano ρ' corrispondente ad r' nella polarità sopra indicata. Variando r nella stella di centro B e conseguentemente ρ' nella stella di centro A si otterranno due stelle reciproche generanti un'ellissoide perchè mai accadrà che r e ρ' siano paralleli.

Se, in particolare, si riferiscono tutti raggi per un punto ai piani rispettivamente perpendicolari passanti per un altro punto, la quadrica generata è la sfera che ha per diametro la distanza fra i due punti.

Iperboloide a una falda. La quadrica generata sarà iperboloide ad una falda se la congiungente i punti AB incontrerà il piano di c in un punto esterno a c e se inoltre c sarà ellisse reale. Infatti per l'osservazione fatta, in generale, la quadrica sarà a punti iperbolici, ma non potrà essere il paraboloide iperbolico perchè contiene la ellisse c.

Iperboloide a due falde. La retta AB incontri il piano di c in un punto interno a c e la c sia iperbole. La quadrica sarà iperboloide a due falde perchè ha punti ellittici per la solita osservazione già fatta, e non può essere nè l'ellissoide, nè il paraboloide ellittico perchè contiene la iperbole c.

Paraboloide ellittico ed iperbolico. Si può osservare che la quadrica sarà paraboloide se uno dei centri A (o B) sarà all'infinito, se la conica c non sarà parabola e se la congiungente i centri AB passerà per il centro di c. Dunque se c sarà ellisse reale avremo il paraboloide ellittico, se c sarà iperbole avremo il paraboloide iperbolico.

Cono. La quadrica sarà un cono se la retta AB si appoggia a c. (Si vedrebbe anche che il vertice è il coniugato armonico del punto di appoggio rispetto ad AB.)

EDGARDO CIANI.

UN'ALTRA COSTRUZIONE PER LA DIVISIONE AUREA DI UN SEGMENTO

ed alcune sue applicazioni

La costruzione proposta, per dividere un segmento di retta in media ed estrema ragione, è più semplice di quella risaputa, se ivi si tien conto delle operazioni grafiche iniziali, che preventivamente bisogna supporre eseguite. E come si vedrà in seguito, essa dà inoltre, per così dire, simultaneamente la 3^a, 4^a, 5^a, 6^a, 10^a, 12^a, 15^a, 20^a, 30^a e 60^a parte della circonferenza, prestandosi meglio che la solita alla determinazione del pentagono e del decagono regolari, dei quali si conosce il lato.

Ma ecco in che consiste quella costruzione:

Descritta (fig. 1^a) la circonferenza O di raggio eguale al segmento dato Oa supposto prolungato in Oa_1, centrando successivamente con quello stesso raggio sugli estremi del diametro aa_1, la si tagli in c e b_1, in b e c_1; determinata quindi l'intersezione della corda ca_1 con l'arco bO, che cade nel punto di mezzo i di questo, e fatto centro in c_1 con raggio c_1i, i punti (i) ed i_1, ne' quali è così tagliato il diametro aa_1, ne dividano rispettivamente i raggi Oa ed Oa_1 in media ed estrema ragione.

Chiamando r infatti la lunghezza $Oa = Oa_1$ del raggio di quel cerchio, ed essendo, com'è ovvio, $c_1i = c_1i_1 = r\sqrt{2}$ (lato del quadrante inscritto) ed $hc_1 = \frac{r}{2}\sqrt{3}$, il triangolo rettangolo $h(i)c_1$ dà $(hi) = \frac{r}{2}\sqrt{5}$: ma poichè è inoltre h il centro dei segmenti $i_1(i)$ ed a_1O, e quindi $hO = \frac{r}{2}$ ed $O(i) = i_1a_1$, sarà, c. d. d.

$$O(i) = \frac{r}{2}(-1+\sqrt{5}) \quad \text{ed} \quad i_1O = (1+\sqrt{5}).$$

Or, se avendo già diviso in sei parti eguali la circonferenza O, si determina, senza cambiar di raggio, per intersezione degli archi di centri b e c, il terzo vertice o del triangolo equilatero obc (che congiunto con O, dà il diametro $otOt_1$ perpendicolare all'altro aa_1), sarà ovvio notare:

a) Che per essere, come già fu detto, $c_1i = r\sqrt{2}$, sono di 90° entrambi gli archi nc_1 e c_1n_1, e due dei loro estremi, n ed n_1, punti di mezzo rispettivamente degli archi di 60°, ba_1 e b_1a: eguali quindi gli archi bn ed na_1, an_1 ed n_1b_1, e di 30° ciascuno.

b) Che essendo i segmenti i_1a_1 ed $a_1(i)$ rispettivamente eguali, com'è noto, al lato del decagono regolare semplice o stellato inscritti in quel cerchio O, ne viene che gli archi $ra_1 = a_1r_1$ ed $sa_1 = a_1s_1$, che si hanno tagliando con archi di centro a_1 e raggi a_1i_1 ed $a_1(i)$, risultano rispettivamente di $\frac{1}{10}$ e di $\frac{3}{10}$ della circonferenza; e di $\frac{1}{5}$ quindi ciascuno degli altri due sa ed as_1.

c) Considerando poi convenientemente le differenze degli archi suddetti, si avrà p. es. che l'arco rn del dato cerchio, differenza, com'è chiaro, degli archi ra_1 di 36° ed na_1 di 30°, sarà di 6° (eguale cioè alla 60ª parte di quella circonferenza) e ne sarà la 15ª parte quello r_1c_1, che è di $60° - 36° = 24°$; mentre gli archi $ts = t_1s_1$ ed $sc = s_1c_1$, ne saranno rispettivamente $\frac{1}{20}$ ed $\frac{1}{30}$: poichè differenze, com'è ovvio, fra $\frac{1}{4}$ ed $\frac{1}{5}$, e fra $\frac{1}{5}$ ed $\frac{1}{6}$ di quella stessa circonferenza.

E si osservi come gli archi di 30° e di 18° (12ª e 20ª parte rispettivamente del cerchio) si siano indirettamente ottenuti, senza ricorrere cioè alla bipartizione di quelli di 60° e di 36°; e che la determinazione, inoltre, degli archi di 90° nc_1 e c_1n_1, si ebbe indipendentemente dal tracciamento di diametri perpendicolari nel cerchio cui appartenevano.

Consegue perciò dall'anzidetto come sia possibile, mediante una costruzione grafica abbastanza semplice, trovare simultaneamente la 3ª, 4ª, 5ª, 6ª, 10ª, 12ª, 15ª, 20ª, 30ª e 60ª parte della circonferenza.

Ma quella costruzione addippiù, per la divisione aurea di un segmento si presta meglio, come già si disse, della consueta, alla determinazione, ora simultanea, rispettivamente del pentagono e del decagono regolari con lato di assegnata lunghezza.

Se è, infatti (fig. 2) ab quella lunghezza, segnati nel modo già indicato i punti n_1 ed n_2 (corrispondenti a quelli (i) ed i_1 della fig. 1) e fatto successivamente centro in a ed in b con raggio an_1, le intersezioni di quegli archi fra loro e con le circonf. di raggio ab e centri in a ed in b, daranno, assieme a questi ultimi punti, i vertici del pentagono richiesto; (¹) mentre il cerchio bn_2 (intendo quello di centro b e raggio bn_2) sarà intersecato da lati e diagonali (quella esclusa parallela a kd) di quel pentagono, risp. ne' vertici, com'è evidente, di un decagono regolare inscritto in quel cerchio. (²)

(¹) L'indicata costruzione del pentag. ha qualche analogia con quella che dà il Fiedler nella sua aurea *Geom. Descr.* a proposito della proiezione del dodecaedro: costruzione che è però meno semplice della proposta, occorrendovi inoltre i punti h_1 (formante con a e con c un triangolo equilatero) ed N, intersezione delle circonf. a_1a e b_1b; mentre gli anzidetti punti n_2 ed n_1 sarebbero invece ottenuti sulla ab per intersezione con la circonf. cN.

(Dal triang. rett. infatti a_1cN dove è $a_1c = r$ ed $a_1N = r\sqrt{3}$, si ha $cN = r\sqrt{2}$; ed è quindi la ab tagliata negli stessi punti di prima n_1 ed n_2 della circonf. cN, essendo c e c_1 simmetrici rispetto a quella retta).

Ma si tenga presente come quell'A. si sia proposto, nell'indicata costruzione, di adoperare soltanto il compasso.

(²) Epperò consegue da quella costruzione che:

Se una corda di un cerchio è quanto il magg. segmento della sez. aur. del raggio, e si costruisce internamente a quel cerchio un pent. reg.: un vertice di questo vi cade nel centro, ed i suoi lati e le sue diagonali, quella esclusa che è parall. alla corda, lo tagliano in dieci parti eguali.

Ed è anche facile risolvere il problema generale: dato, cioè, un poligono regolare di n lati, costruire sullo stesso lato, o meglio, sopra un segmento della stessa lunghezza, il poligono regolare di un numero doppio di lati $2n$.

Basta, infatti, osservare che la bisettrice kR del conseguente dell'angolo al perimetro k, p. es., di un poligono regolare di n lati, fa con esso lato kD l'angolo RkD, che è quanto quello al perimetro del poligono regolare di un numero doppio di lati $2n$: gli angoli al perimetro, invero, di quei due poligoni essendo, com'è noto, risp. espressi da $2R - \frac{4R}{n}$ e da $2R - \frac{4R}{2n}$; e quest'ultimo potendosi anche scrivere $R + \frac{1}{2}\left(2R - \frac{4R}{n}\right)$, ne viene che, indicando con α il primo, l'altro sarà $R + \frac{\alpha}{2}$, ossia $\alpha + \frac{1}{2}(2R - \alpha)$. (¹) c. d. d.

Epperò consegue, infine, che partendo dall'angolo α al perimetro di un polig. reg. di n lati, per ottenere quello del poligono regolare di $2^k \times n$ lati, dovendo aggiungere ad α la somma dei k termini della progressione geometrica $\frac{2R-\alpha}{2}, \frac{2R-\alpha}{2^2}, \frac{2R-\alpha}{2^3} \ldots \frac{2R-\alpha}{2^k}$, il limite verso cui tende il valore di quell'angolo è, per un poligono infinilatero (cioè per $k = \infty$) eguale a 2R o 180°.

Ma crescendo sempre, com'è ovvio, indefinitamente in quella costruzione, anche il raggio del cerchio circoscritto, ne viene, ciò che è per altro risaputo, che debba considerarsi come retta la circonferenza di raggio infinito.

F. P. PATERNÒ.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 745, 746, 747, 748 E 751

745. *La cissoide di Diocle* $x(x^2 + y^2) = 2ay^2$ *è polare reciproca di sè stessa rispetto al cerchio*

$$x^2 + y^2 + 2a(x - a) = 0, \tag{1}$$

rispetto alla iperbole equilatera

$$x^2 - y^2 + 2a(x - a) = 0, \tag{2}$$

e alle due parabole

$$y^2 \pm 6a\sqrt{3}(y - a) = 0. \tag{3}$$

Ognuna di queste quattro coniche ha doppio contatto con la cissoide.

(¹) Ecco, pertanto, generalizzata una costruzione grafica assai semplice, per ottenere dall'ang. al perimetro di un polig. reg. quello analogo relativo al polig. reg. di n.º doppio di lati: costruzione adoperata soltanto, ch'io mi sappia, nel tracciamento dell'ottagono reg. di lato assegnato, il cui angolo al perimetro è infatti $\frac{3}{2}$ di un retto.

Se denotiamo con Z la cuspide, con Y il punto $(2a, 0)$ e con C e Γ le intersezioni rispettive della tangente cuspidale con una corda di contatto e colla corrispondente corda comune (che unisce i due punti di semplice intersezione della conica con la cissoide) si ha

$$\frac{Z\Gamma}{Y\Gamma} : \frac{ZC}{YC} = \frac{1}{2}.$$

V. Retali.

Risoluzione del prof. J. Rose di Chimay (Belgio).

L'equazione della tangente alla cubica nel punto (x_1, y_1) è

$$(2a - x_1)^2 y_1 y - x_1^3 (3a - x_1) x + a y_1^3 = 0,$$

e quella della polare del punto (α, β) rispetto al cerchio (1) è

$$\beta y + (\alpha + a) x + a(\alpha - 2a) = 0.$$

Si ha dunque, supposto che (α, β) sia il polo della tangente suddetta,

$$\frac{\alpha + a}{-x_1^2(3a - x_1)} = \frac{\beta}{(2a - x_1)^2 y_1} = \frac{a(\alpha - 2a)}{a y_1^3}.$$

Si trae:

$$\alpha = 2a - x_1, \qquad \beta = -\frac{(2a - x_1)^2 y_1}{x_1^2},$$

valori che verificano l'equazione della cissoide; e ciò prova che la proprietà è verificata.

Lo stesso ha luogo per la iperbole, perchè i valori di α e β restano identici salvo il segno di β.

La cissoide ha doppio contatto col cerchio sulla retta all'∞; dunque $\frac{Z\Gamma}{Y\Gamma} = 1$. La corda comune è $= \frac{2a}{3}$ dunque $\frac{ZC}{YC} = -\frac{1}{2}$ e si ha $\frac{Z\Gamma}{Y\Gamma} : \frac{ZC}{YC} = -\frac{1}{2}$.

L'iperbole ha doppio contatto colla cubica sulla retta $x = a$; ne resulta che $\frac{ZC}{YC} = \frac{\alpha}{-\alpha} = -1$. La corda comune è $x = -2a$; dunque $\frac{Z\Gamma}{Y\Gamma} = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2}$; $\frac{Z\Gamma}{Y\Gamma} : \frac{ZC}{YC} = -\frac{1}{2}$.

L'equazione della tangente alle parabole nel punto (α, β) è

$$\beta y \pm 3a\sqrt{3}\, x \pm 3a\sqrt{3}\,(\alpha - 2a) = 0,$$

ne risulta che

$$\frac{\pm 3a\sqrt{3}}{-(3a - x_1)\, x_1^2} = \frac{\beta}{(2a - x_1)^2 y_1} = \frac{\pm 3a\sqrt{3}\,(2a - x_1)}{a y_1^3}.$$

Donde

$$\beta = \mp \frac{3a\sqrt{3}\,(2a - x_1)^2 y_1}{(3a - x_1)\, x_1^2}, \qquad \alpha = \frac{3a(2a - x_1)}{3a - x_1},$$

valori che verificano l'equazione della cubica.

La seconda proprietà enunciata si verifica facilmente.

746. *La parabola semicubica $y^2 = x^3$ è polare reciproca di sè stessa rispetto ad ognuna delle ∞^1 coniche concentriche*

$$3\lambda x^2 + y^2 = 4\lambda^3, \qquad (1)$$

dove λ è un parametro variabile. Ognuna di tali coniche ha doppio contatto colla cubica sopra una retta variabile c, *e la taglia ulteriormente sopra un'altra* γ, *parallela a* c. *Il rapporto delle distanze di* c *e* γ *dalla cuspide è* -3.

V. Retali.

Risoluzione del sig. prof. J. Rose di Chimay (Belgio).

L'equazione della tangente alla cubica nel punto (x_1, y_1) è:

$$2yy_1 - 3xx_1 + y_1^2 = 0, \tag{2}$$

e l'equazione della polare di un punto (α, β) rispetto alle coniche (1) è

$$3\lambda\alpha x + \beta y - 4\lambda^3 = 0. \tag{3}$$

Se (α, β) è il polo della tangente suddetta, le (2), (3) debbono risultare identiche, ossia

$$\frac{3\lambda\alpha}{-3x_1^2} = \frac{\beta}{2y_1} = \frac{-4\lambda^3}{y_1^2},$$

donde si trae

$$\alpha = \frac{4\lambda^2}{x_1}, \qquad \beta = -\frac{8\lambda^3}{y_1}.$$

Questi valori verificano l'equazione della cubica; e ciò prova che la cubica è polare reciproca di sè stessa rispetto alle coniche.

Queste coniche tagliano la cubica nei punti

$$(x-\lambda)(x+2\lambda)^2 = 0,$$

vale a dire esse hanno doppio contatto sopra la retta c variabile, $x = -2\lambda$, e la tagliano sopra una retta γ parallela a c, $x = -\lambda$. Il rapporto delle distanze di c e γ dalla cuspide è -2.

747. *La cubica iperbolica* $xy^2 = 1$ *è polare reciproca di sè stessa rispetto a ognuna delle iperboli*

$$4x^2 - \lambda^3 y^2 = 3\lambda^2$$

dove λ *è parametro variabile. Queste iperboli hanno ognuna doppio contatto colla cubica, e il rapporto delle distanze dall'asintoto d'inflessione, della corda di contatto e dell'altra corda comune è eguale a* $-\frac{1}{4}$.

V. Retali.

Risoluzione del sig. prof. J. Rose di Chimay (Belgio).

L'equazione della tangente alla cubica nel punto (x_1, y_1)

$$2y + y_1^3 x - 3y_1 = 0$$

è identica a quella della polare del punto (α, β) rispetto alle coniche, cioè

$$4\alpha x - \lambda^3\beta y - 3\lambda^2 = 0,$$

se

$$\frac{4\alpha}{y_1^3} = \frac{-\lambda^3\beta}{2} = \frac{\lambda^2}{y_1}.$$

Donde si ha

$$\alpha = \frac{\lambda_1^2 y_1^2}{4}, \qquad \beta = -\frac{2}{\lambda y_1},$$

valori che verificano l'equazione della cubica; e la proprietà è verificata.

Le coniche tagliano la cubica nelle rette

$$(x-\lambda)(2x+\lambda)^2=0,$$

e hanno un doppio contatto sulla retta $x=-\dfrac{\lambda}{2}$.

Il rapporto enunciato è eguale a $-\frac{1}{2}$.

748. *La parabola cubica* $y=x^3$ *è polare reciproca di sè medesima rispetto alle iperbole*

$$-3\lambda^4x^2+4y^2=\lambda^6,$$

λ *essendo un parametro variabile. Ognuna di queste iperboli ha doppio contatto con la cubica sopra una retta* c *passante per l'origine, e la interseca sopra un'altra retta* y *pure passante pel flesso. Se denotiamo con* γ *la retta che unisce l'origine con la cuspide e con* z *la tangente stazionaria (asse delle* x*) il rapporto anarmonico* (yzcγ) *è eguale a* $-\frac{1}{2}$.

V. Retali.

Risoluzione del prof. J. Rose di Chimay (Belgio).

L'equazione della tangente alla cubica nel punto (x_1, y_1) è

$$y-3x_1^2x-2y_1=0,$$

e quella della polare del punto (α, β) rispetto alle iperboli è

$$-3\alpha\lambda^4x+4\beta y+\lambda^6=0.$$

Si ha dunque

$$\frac{4\beta}{1}=\frac{-3\alpha\lambda^4}{-3x_1^2}=\frac{-\lambda^6}{2y_1},$$

da cui

$$\alpha=\frac{\lambda^2x_1^2}{2y_1},\qquad \beta=\frac{\lambda^6}{8y_1},$$

valori che verificano l'equazione della parabola.

Le coniche intersecano la cubica nei punti

$$(x-\lambda)(x+\lambda)(2x^2+\lambda^2)=0.$$

Ognuna di queste iperboli ha doppio contatto con la cubica della retta

$$(c)\quad y=-\frac{\lambda^2}{2}.x,$$

e la interseca sopra la retta

$$(\gamma)\quad y=\lambda^2x,$$

si ha

$$(yzc\gamma)=\frac{\operatorname{sen}(yc)}{\operatorname{sen}(zc)}:\frac{\operatorname{sen}(y\gamma)}{\operatorname{sen}(z\gamma)}=\frac{\cos(zc)}{\operatorname{sen}(zc)}:\frac{\cos(z\gamma)}{\operatorname{sen}(z\gamma)}=$$

$$=\operatorname{cotg}(zc):\operatorname{cotg}(z\gamma)=\frac{\operatorname{tg}(z\gamma)}{\operatorname{tg}(zc)}=\frac{\lambda^2}{\dfrac{-\lambda^2}{2}}=-2.$$

751. *Consideriamo due parabole* A^2 *e* B^2 *ad assi ortogonali ed aventi lo stesso fuoco, e sieno* A *e* B *i loro punti di contatto colla tangente comune* m*: dimostrare che:*

1°. Le due tangenti che possono condursi alle due parabole da un punto arbitrario di m *sono perpendicolari fra loro.*

2°. *I diametri di* A^2 *e* B^2 *passanti rispettivamente per* A *e* B *sono le direttrici di* B^2 *e* A^2.

3°. *Le tangenti condotte alle due parabole da un punto qualunque delle loro direttrici formano un fascio armonico.*

4°. *Ognuna delle due parabole è il luogo dei fuochi delle parabole che hanno* m *per tangente al vertice e toccano l'altre.*

5°. *Le parabole* A^2 *e* B^2 *sono ognuna inviluppo delle parabole che hanno* m *per tangente al vertice e il loro fuoco sull'altra.*

V. Retali.

Risoluzione del sig. E.-N. Barisien di Parigi.

Siano le equazioni delle parabole A^2 e B^2

$$y^2 = 2px + p^2, \tag{1}$$

$$x^2 = 2qy + q^2. \tag{2}$$

Esprimendo che la retta

$$y = mx + h \tag{3}$$

è tangente a (1) si trova facilmente

$$h = \frac{p(1+m^2)}{2m}. \tag{4}$$

Parimente la condizione affinchè la retta (3) sia tangente a (2) è

$$h = -\frac{q(1+m^2)}{2}. \tag{5}$$

Dalle (4) e (5) si ricava

$$m = -\frac{p}{q}, \qquad h = -\frac{p^2+q^2}{2q}. \tag{6}$$

L'equazione della tangente comune (3) è allora, ponendovi i valori (6)

$$px + qy + \frac{p^2+q^2}{2} = 0. \tag{7}$$

Le coordinate (x_1, y_1), (x_2, y_2) dei punti di contatto A e B di (7) con le parabole (1) e (2) sono

$$x_2 = \frac{p(1-m^2)}{2m^2}, \qquad y_1 = \frac{p}{m}$$

$$x_2 = mq_1, \qquad y_2 = \frac{q(m^2-1)}{2},$$

ossia

$$x_1 = \frac{q^2-p^2}{2p}, \qquad y_1 = -q \tag{8}$$

$$x_2 = -p, \qquad y_2 = \frac{p^2-q^2}{2}. \tag{9}$$

1°. Siano α e β le coordinate d'un punto C della tangente AB; abbiamo

$$p\alpha + q\beta + \frac{p^2+q^2}{2} = 0: \tag{10}$$

una retta qualunque passante per C ha per equazione

$$y - \beta = \mu(x - \alpha);$$

la condizione di contatto con la parabola (1) dà

$$(2\alpha + p)\mu^2 - 2\beta\mu + p = 0, \tag{11}$$

dunque

$$\mu_1\mu_2 = \frac{p}{2\alpha + p}; \tag{12}$$

ma μ_1 è $-\frac{p}{q}$, dunque il coefficiente angolare μ_2 della seconda tangente CA' uscente da C è

$$\mu_2 = -\frac{q}{2\alpha + p}. \tag{13}$$

Similmente la condizione di contatto della retta

$$y - \beta = \mu(x - \alpha)$$

con la parabola (2) è

$$qr^2 - 2\alpha r + 2\beta + q = 0. \tag{14}$$

dunque

$$r_1 r_2 = \frac{2\beta + q}{q}; \tag{15}$$

ora $r_1 = -\frac{p}{q}$, dunque il coefficiente angolare r_2 della seconda tangente CB' è

$$r_2 = -\frac{2\beta + q}{p}. \tag{16}$$

Le direzioni (13) e (16) sono rettangolari, perchè la relazione $\mu_2 r_2 = -1$ si riduce alla

$$\frac{q(2\beta + q)}{p(2\alpha + p)} = -1,$$

che è precisamente la (10).

2°. Le relazioni (8) e (9), $y_1 = -q$ e $x_2 = -p$ rappresentano al tempo stesso un diametro dell'una parabola e la direttrice dell'altra.

3°. Con le notazioni precedenti di (11) e (14) che dànno i coefficienti angolari delle tangenti alle due parabole, uscenti da un punto (α, β) avremo il luogo dei punti tali che queste quattro tangenti formino un fascio armonico, scrivendo la relazione

$$(\mu_1 + \mu_2)(\nu_1 + \nu_2) = 2\mu_1\mu_2 + 2\nu_1\nu_2; \tag{17}$$

ora, per le (11) e (14), abbiamo

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{2\beta}{2\alpha + p}, \qquad \mu_1\mu_2 = \frac{p}{2\alpha + p}$$

$$\nu_1 + \nu_2 = \frac{2\alpha}{q}, \qquad \nu_1\nu_2 = \frac{2\beta + q}{q}.$$

Questi valori sostituiti nella (17) dànno

$$\frac{4\alpha\beta}{q(2\alpha + p)} = \frac{2p}{2\alpha + p} + \frac{2(2\beta + q)}{q},$$

ossia

$$(\alpha + p)(\beta + q) = 0.$$

Il luogo cercato è formato dunque dalle direttrici delle parabole.

4°-5°. Queste due quistioni ognuna delle quali è conseguenza dell'altra saranno dimostrate risolvendo la quistione seguente:

" *Si considera una parabola e una tangente fissa* T *a questa parabola. Il luogo dei fuochi delle parabole* Q *tangenti a* P *e che hanno* T *per tangente al vertice è una parabola* R *avente lo stesso fuoco di* P *e l'asse perpendicolare a quello di* P.

Assumendo la tangente T per asse delle x e la normale nel punto di contatto per asse delle y, l'equazione della parabola P è

$$(y - nx)^2 = ay; \tag{18}$$

l'equazione d'una parabola (Q) sarà

$$(x - X)^2 = 4yY, \tag{19}$$

X e Y essendo le coordinate del suo fuoco. Resta a esprimere che le parabole (18) e (19) sono tangenti: eliminando y abbiamo

$$\left[\frac{(x - X^2)}{4y} - nx\right]^2 = a\,\frac{(x - X)^2}{4Y},$$

ossia, ponendo $x - X = t$,

donde
$$(t^2 - 4nYt - 4nXY)^2 = 4aYt^2,$$

ossia
$$t^2 - 4nYt - 4nXY = \pm\, 2t\sqrt{aY},$$

$$t^2 - 2t\,(2nY \mp \sqrt{aY}) - 4nXY = 0.$$

Scrivendo che questa equazione in t ha due radici eguali si ha:

$$4n^2Y + a \mp 4n\sqrt{aY} + 4nX = 0.$$

riducendo a forma razionale, questa equazione diviene

$$[4n\,(X + nY) + a]^2 = 16an^2Y. \tag{20}$$

Il luogo del fuoco della (18) è dunque la parabola (20). Il suo asse essendo parallelo alla direzione $x + ny = 0$, è dunque perpendicolare all'asse della parabola (18).

Il calcolo delle coordinate dei fuochi delle (18) e (20) dà gli stessi valori pel fuoco comune (ξ, η)

$$\xi = \frac{a}{4\,(1 + n^2)}, \qquad \eta = -\frac{a}{4n\,(1 + n^2)}.$$

Le quistioni 4° e 5° son dunque la conseguenza diretta di questa proprietà.

Altra risoluzione del prof. Rose di Chimay (Belgio).

QUISTIONI PROPOSTE

760. Un cilindro di rivoluzione C, è tagliato da un piano P, secondo una conica Γ, ed A è un vertice di questa conica, situato sull'asse focale.

Trovare il luogo dei fuochi di tutte le coniche Γ determinate sul cilindro da tutte le posizioni del piano P, quando questo rota attorno alla tangente nel punto A.

I. S. TEODORESCU.

761. Trovare il luogo del punto medio del segmento che ha per estremi i centri di curvatura di un'ellisse corrispondenti a due punti coniugati di questa.

762. Dimostrare che

$$\frac{5\pi^2}{1.2.3}-\frac{7\pi^4}{1.2.3.4.5}+\frac{9\pi^6}{1.2.3.4.5.6.7}\cdots=4.$$

E.-N. Barisien.

763. Se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ son gli angoli formati da una retta fissa con le quattro normali condotte ad una ellisse da un punto arbitrario P, fra i quattro angoli stessi esiste la relazione

$$\Sigma \operatorname{tang} \alpha + \Sigma \operatorname{cotg} \alpha = 4.$$

W. Creenstreet.

764. La bisettrice dell'angolo degli assi Ox, Oy incontra in R la tangente nel punto M di una curva (C).

Determinare questa curva con la condizione che RM sia eguale alla lunghezza della normale in M.

J. Rose.

765. Dimostrare " geometricamente ":

1°. Che la tangente all'ellissi, la quale forma cogli assi angoli di 45°, ha per punto di contatto il vertice del rettangolo iscritto di massimo perimetro.

2°. Che la distanza del punto d'incontro di questa tangente con uno degli assi dal centro della curva è uguale all'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha per cateti i due semiassi.

Dedurre un metodo per costruire geometricamente qualunque rettangolo iscritto di perimetro $4p$ ed esaminare i diversi casi corrispondenti ai varii valori di p.

L. Maugeri.

BIBLIOGRAFIA

A. Vaccaro. — *I sofismi geometrici.* Catania, N. Giannotta, 1908. — L. 2.

Questa pubblicazione dell'egregio collega Antonino Vaccaro è veramente geniale e piena d'attrattiva e d'interesse, e si legge con molto piacere. L'A. riporta i più celebri sofismi antichi e moderni coordinandoli e classificandoli in modo da risultarne omogeneità e unità di sviluppo. Riguardo alla utilità, o meno, della pubblicazione l'A. cita l'esempio di Euclide, le cui opere erano completate con esercizi divisi in tre parti, la terza delle quali era una raccolta di artifizi geometrici (sofismi), in cui si trattava di scoprire l'errore. Quest'ultima raccolta andò perduta, ed invano si è cercato di ricostruirla, e il dott. F. Heath, uno dei più studiosi del sommo Geometra, ha scritto all'A. che rinunziava definitivamente a quella ricostruzione.

L'opera è divisa in sei capitoli. Nel primo è esposta una classificazione dei sofismi, seguendo lo Stuart Mill, *Sistème de Logique*. Nei successivi capitoli sono trattate le diverse specie di sofismi, e da per tutto si ammira una maravigliosa lucidezza di esposizione, grandissima copia di esempii, con abbondanti cognizioni storiche e svariate notizie su tutti i rami scientifici.

S. Catania.

Gino Loria. — *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche.* Terza edizione accresciuta di uno sguardo allo sviluppo della Geometria in quest'ultimo decennio. — Torino, Clausen, 1907.

Il libro del Loria, lo diciamo subito, è veramente degno del maestro, che lo ha dettato e della fama, che egli meritamente si è acquistata: vorremmo che di libri così meritevoli di attenzione e di lode in Italia ne comparissero parecchi.

Questa terza edizione riproduce la seconda con l'aggiunta di un'appendice, in cui l'A. passa in rassegna le opere e le memorie relative alla Geometria, che han vista la luce nel decennio 1896-1906, che corre tra gli anni di pubblicazione delle due edizioni. Il largo favore, con cui fu accolta al suo apparire la 2ª edizione, e che non venne mai meno fino ad ora, dimostra con ben maggior voce, di quel che non possa fare io, la grande importanza ed utilità del libro: l'appendice ora aggiunta, e che del resto era resa necessaria dal continuo e grande progresso della geometria, fa sì che l'interesse per tale pubblicazione non sia scemato affatto, anzi sia notevolmente accresciuto. A rendere evidente l'interesse, che presenta questo libro, basta enunciare lo scopo, pienamente raggiunto, che l'A. si è proposto, quello di soddisfare „ il bisogno di gettare uno sguardo retrospettivo sul „ cammino già fatto, il quale permetta ai novizii di penetrare più facilmente nei „ misteri di essa [della geometria], ai già provetti di giudicare con più sicurezza, „ quali sieno i problemi, di cui è più urgente la soluzione „. E tale scopo, come diceva, è pienamente raggiunto, perchè l'A. in un numero di pagine non molto grande, anzi relativamente piccolo, è riuscito a darci un quadro dello sviluppo storico delle principali teorie geometriche, quadro in cui forse si potranno trovare difetti, ma che indubbiamente è completo e fatto con gran cura, e con una estesissima conoscenza della materia tutta: quadro tanto più interessante in quanto, che ne balza fuori con grande evidenza l'importanza dei varii metodi e delle principali opere, su cui l'A. dà brevi giudizii, sempre ben ponderati ed equanimi.

Per la natura stessa del libro non è possibile dire qui dettagliatamente del contenuto del libro stesso; occorre ci contentiamo di dare l'indice dei capitoli. L'opera si divide in due parti la prima delle quali, che riproduce la 2ª edizione, tratta della geometria avanti il 1896; questa prima parte è divisa in 12 capitoli, dei quali diamo i titoli.

1°. *Sguardo alle origini ed allo sviluppo della geometria sin verso il 1850.* — 2°. *Teoria delle curve piane algebriche.* — 3°. *Teoria delle superficie algebriche.* — 4°. *Teoria delle curve algebriche a doppia curvatura.* — 5°. *Geometria differenziale.* — 6°. *Ricerche intorno alla forma delle curve, delle superficie, e di altre figure geometriche, Analysis situs. Configurazioni.* — 7°. *Geometria della retta nello* *spazio.* — 8°. *Corrispondenze, rappresentazioni, trasformazioni.* — 9°. *Geometria numerativa.* — 10°. *Geometria non-Euclidea.* — 11°. *Geometria degli spazii a quantesivogliano dimensioni.*

L'ultimo capitolo poi porta un cenno su diverse teorie secondarie, che non hanno trovato posto nei capitoli precedenti, quali per es. la geometria cinematica, la geometria del compasso, ecc., e chiude con alcune considerazioni sul carattere della geometria moderna.

La 2ª parte è costituita da un'appendice divisa in 12 paragrafi, che salvo il primo (che porta alcuni cenni sui matematici morti negli ultimi anni, e poche cose su varie teorie di cui l'A. aveva parlato nel 1° capitolo della prima parte), portano tutti lo stesso titolo del capitolo corrispondente della prima parte, e parlano dell'ulteriore sviluppo avuto dalle varie teorie nel decennio 1896-1906.

Come si vede anche di qui il quadro è vastissimo e comprende, si può dire, tutta la geometria: se si aggiungono alla vastità del tema la cura e la competenza, la ricchezza della bibliografia, con cui i varii argomenti, sono trattati si può comprendere il valore del libro. Certo qualche appunto si può fare all'A., ma io non sono riuscito a rilevarne, che di ben poca importanza e tali da non scemare il merito dell'opera. Per es. a me non sembrano esaurienti le ragioni, per cui l'A. trascura la geometria del triangolo, e probabilmente l'A. stesso lo ha riconosciuto, perchè nell'ultimo paragrafo dell'Appendice ha detto delle ultime ricerche in quel campo, che avanti aveva messo completamente da parte. Così pure non mi sembra messa ben in luce l'opera del Saccheri, la cui grande importanza è risultata evidente in questi ultimi anni. Potrei fare ancora qualche appunto dello stesso genere, ma mi pare che non ne valga la pena trattandosi di nèi così piccoli, che spariscono dinanzi a tutto il resto ed appena si avvertono.

Concludendo a me non resta qui, che consigliare a tutti quanti s'interessano e si occupano di matematica, specialmente ai giovani che sono ancora al principio della carriera, di leggere questo libro; son sicuro, che dopo si uniranno a me nel ringraziare l'A., che ci ha dato un così buon libro e una così preziosa fonte di notizie.

Voglio fare, qui un'ultima osservazione, che scaturisce da questo libro: basta scorrerlo per vedere, specialmente nell'Appendice, con gran frequenza nomi di autori e di opere Italiane, che vengono ad attestare, malgrado le solite affermazioni dei soliti denigratori delle cose " nostrane ", lo splendido sviluppo che nel nostro paese hanno avuto tutti i rami della geometria, sviluppo di cui possiamo essere ben orgogliosi e che in questo campo assicura all'Italia uno dei primi posti tra le nazioni.

Siro Medici.

Aldo Finzi. — *Elementi di Calcolo combinatorio ed applicazioni.* Paravia, Torino, 1909. — L. 1.80.

Per la grande scarsità di buoni libri di algebra complementare, adatti come testi per gl'istituti tecnici, molti professori preferiscono non seguire alcun testo, obbligando così gli alunni a prendere appunti. Ognuno sa poi come gli alunni dell'istituto sieno in generale incapaci di prendere appunti, e come anche i migliori allievi vi mettano molti errori grossolani. Perciò anche il solo tentativo di riempire la grave lacuna è di per sè solo lodevole; tanto più lo è poi quando, come per quello di cui qui si tratta, il tentativo ha portato ad un buon libro.

Il libro del Finzi è un volumetto di poche pagine, 108, in cui vengono esposti il calcolo combinatorio e relative applicazioni in modo del tutto elementare e perfettamente accessibile agli allievi dei nostri istituti tecnici. La trattazione, più ampia di quello che si faccia di solito nei trattati, è diretta non solo agli alunni della sezione fisico-matematica, ma anche a quelli della sezione di ragioneria, per i quali può servire di un utile studio d'introduzione a quello della statistica. L'operetta molto bene ordinata e concepita è scritta con uno stile facile e piano, che la rende di facile lettura anche per gli studenti; non contiene delle novità, che del resto era ben difficile introdurre in un argomento quale quello trattato, ma è fatta con cura e consegue intieramente lo scopo che si propone. Certo essa non è immune da mende, e nell'esporre l'argomento del libro, ne indicherò diverse, ma credo pure che con poche e semplicissime variazioni, l'operetta, che a parer mio è già buona, potrà divenire ottima.

La prima parte, che espone gli elementi di calcolo combinatorio tratta successivamente delle disposizioni semplici e con ripetizione, delle permutazioni di elementi tutti distinti o no, ed infine delle combinazioni semplici e con ripetizione, determinando in ogni caso il numero di esse ed indicando anche i modi più semplici di ottenerle tutte. Su questa prima parte osserverò solo che sarebbe stato desiderabile, che l'A. avesse esposto in modo un po' più esteso certe dimostrazioni, e che dopo il paragrafo delle permutazioni, avesse parlato delle inversioni e della classe di una permutazione, anche in vista delle applicazioni alle sostituzioni e specialmente della dimostrazione del teorema di pag. 100.

La seconda parte è dedicata alle applicazioni, la prima delle quali naturalmente viene fatta a dimostrare la formula del binomio di Newton e quella del polinomio di Leibnitz. Insieme, l'A. parla anche del triangolo di Tartaglia e dei numeri figurati, chiudendo poi il paragrafo col ricavare dalle cose fatte alcune relazioni tra i coefficienti binomiali, col determinare le somme delle potenze simili dei numeri intieri, e col fare un piccolo cenno sui numeri di Bernoulli. Su questo paragrafo debbo fare due osservazioni: la formula

$$\binom{h+k}{m} = \sum_{r=0}^{r=m} \binom{h}{m-r} \binom{k}{r}$$

si poteva ottenere in modo più semplice ed anche più consono alle altre dimostrazioni del libro, ricorrendo ad un ragionamento di natura combinatoria anzichè ad una dimostrazione puramente formale. Di più sarebbe stato utile applicare le cose viste anche a trovare il massimo numero dei termini di un polinomio, omogeneo o no, di grado n in più variabili.

Come seconda applicazione l'A. espone gli elementi del calcolo delle probabilità in modo semplicissimo, chiaro ed espressivo: a parer mio è questa la parte meglio riuscita del libro. Premesse alcune generalità indispensabili e degli esempî di determinazione diretta della probabilità, l'A. parla poi brevemente della probabilità totale, di quella composta, della probabilità delle prove ripetute per poi venire al teorema di Bernoulli, sempre illustrando la teoria con opportuni esempi. In seguito, accennato alla probabilità a posteriori ed alle tavole di sopravvivenza come applicazione di essa, viene a dire della regola di Bayes, con la quale termina questa parte. Le osservazioni, che ho da fare su questo capitolo sono proprio minime: mi sembra poco adatto l'esempio 6 portato a pag. 52 (sebbene si trovi anche nel Garbieri), perchè mi pare difficile che si possa ammettere, che nel caso pratico i varî casi che si presentano sieno tutti ugualmente probabili. Alle pagine

64 e 65 l'A. introduce i due simboli $\left[\frac{p}{q}\right]$ e $|p|$ senza dirne il significato: son simboli ben noti in matematica, ma son sicuro che, specialmente per il primo, son pochi i giovani dell'istituto che li conoscono; converrebbe dunque spiegarli almeno in nota.

Una terza applicazione vien fatta alle progressioni aritmetiche di ordine superiore; l'A. determina le relazioni tra gli elementi di una tale progressione, e poi la somma di n elementi consecutivi di essa. La dimostrazione di pag. 82 avrebbe potuto farsi in modo diretto con maggior semplicità ed eleganza, invece di ricorrere ad una verifica.

L'A. passa infine a parlare delle sostituzioni. Premesse anche qui poche generalità parla dei prodotti di sostituzioni, delle potenze ad esponente positivo e negativo di esse, del loro ordine, delle sostituzioni circolari, della scomposizione in cicli ed in trasposizioni, della classe di una sostituzione, terminando con un cenno ai gruppi ed ai loro sottogruppi. Diverse osservazioni devo fare su questo capitolo: prima di tutto andrebbero spiegate alcune affermazioni, che si trovano alle pag. 95, 98, 99, e che così come son messe riusciranno di difficile intelligenza per gli alunni. Nel numero 11 a pag. 99, l'A. è caduto in una svista, poichè l'ultima formola della stessa pagina va corretta

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m) = (a_m, a_{m-1})\,(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1});$$

questo errore ne porta di conseguenza diversi altri nella pag. seguente; l'ultima dimostrazione dello stesso numero richiederebbe poi che fosse effettivamente dimostrata la proprietà attribuita alla funzione introdotta. Per ultimo, giacchè ne parla in un caso particolare, l'A. avrebbe potuto definire, anche in generale, il gruppo alternato.

L'operetta termina con un breve e sobrio cenno storico, ed è corredata di numerosi esercizî in generale bene scelti ed ordinati: bisognerebbe però, che l'A. ne curasse meglio gli enunciati, perchè alcuni sono poco precisi, ed anzi qualcuno, così com'è, o non si comprende o appare d'immediata risoluzione e non in relazione coll'argomento trattato nel testo. Segnalo all'A., per es., il 13° di pag. 6 ed il 7° di pag. 90.

Ho terminato così questa esposizione, che parrà forse troppo minuziosa, ma che ho voluto tale perchè il libro essendomi piaciuto, mi è parso che meritasse uno studio un po' accurato, tanto più che segnalate così all'A. le piccole imperfezioni, che il libro contiene, l'A. stesso potrà renderlo ottimo in una seconda edizione.

S. Medici.

Francesco Caldarera. — *Primi fondamenti della Geometria dello spazio.* Un volume in-8° grande di pagine 236-IV. Palermo, Stabilimento tipografico Virzì, 1908. — Prezzo L. 7.

Questa importantissima opera del ch. sig. comm. Caldarera, ordinario di Meccanica Razionale nell'Università di Palermo, fa seguito e completa i *Primi fondamenti della geometria del piano*, che lo stesso autore pubblicò fin dal 1891 per i medesimi tipi. Come in questa opera si fa uso sistematico delle coordinate trilineari, così nella recente sono adoperate le coordinate tetraedriche o quadriplanari.

L'opera è divisa in quattro capitoli: I. " Punti, piani e rette in generale, e rispetto al tetraedro fondamentale ", pagine 67. — II. " Le forme fondamentali di 1ª, 2ª, 3ª specie ", pagine 55. — III. " Generalità sulle linee e le superficie;

spazio rigato; poli e polari, figure polari reciproche; principî generali di omografia e di dualità „, pagine 58. — IV. " Elementi di geometria differenziale „, pagine 55.

Non è possibile in questo breve cenno bibliografico entrare in un minuto esame per far rilevare tutta l'importanza delle molte e belle teorie esposte; non vogliamo però tralasciare di segnalare una nuova e notevole formola, la (47), (49), (§ 133) dell'angolo di torsione in un punto qualsivoglia di una curva gobba espresso con la somma dei quadrati di tre determinanti di terzo ordine composti così che due qualunque di essi deduconsi dal rimanente con semplici sostituzioni circolari degli indici; da cui poi deriva anche la facilità colla quale la formola può essere sviluppata.

Il metodo seguito dal nostro autore è informativo. Da ciò deriva il grande diletto, che prova nel leggerlo, chi già ha qualche conoscenza della materia. Ai principianti poi, purchè forniti di sufficiente preparazione, lo studio di questa notevole opera riesce eminentemente suggestivo in quanto che l'incita a fare una infinità di sviluppi per verificare tutt'i risultati che vi sono indicati.

L'opera appare lungamente meditata per il modo magistrale, nuovo, originale con cui è esposta e raggruppata la materia. L'uso fatto di alcune notazioni se al bel principio possono indurre a far credere che siano di nocumento alla chiarezza, se per poco si mediteranno si riconosceranno non solo opportune, ma anche assai giovevoli a meglio scolpire nella mente del lettore le formole e le relazioni date, fornendo nel contempo un modo semplice per ricavarle l'una dall'altra. In breve, i due libri, che qui abbiamo voluto segnalare all'attenzione dei lettori, costituiscono un *ottimo saggio di una nuova geometria analitica a coordinate trilineari e tetraedriche* ch'è poi il migliore, forse l'unico, libro che possa proporsi come guida a chi deve iniziare i suoi studi nella nuova geometria analitica.

G. Russo.

Grassi Nicola. — I *problemi di geometria e disegno lineare* per l'ammissione alla R. Scuola macchinisti di Venezia. Livorno, Belforte, 1908. — L. 3.

Questo volumetto, destinato ai giovani che concorrono alla R. Scuola macchinisti, si compone di tre capitoli. Il primo, brevissimo, contiene le generalità sui luoghi e sui problemi geometrici. Il secondo contiene la risoluzione di 41 problemi elementari che sono enunciati nel programma per il concorso suddetto. Il terzo è dedicato ad altri problemi enunciati nel programma del disegno lineare, e si suddivide in 11 paragrafi dei quali riproduciamo i titoli.

I. Le scale del disegno. — II. Divisione di un segmento in parti proporzionali a segmenti ed a numeri dati. — III. Disegno in una data scala di una figura *f* simile ad una data figura F mediante le coordinate rispetto a due assi ortogonali. — IV. L'ellisse. — V. L'iperbole. — VI. La parabola. — VII. Rettificazione approssimata di una circonferenza o di un arco di curva qualunque. — VIII. Cicloide, epicicloide, ipocicloide. — IX. Divisione delle circonferenze in parti eguali. — X. Poligoni regolari convessi e regolari. — XI. Raccordamento delle linee.

Il libro è certamente molto utile ai giovani che vogliono prender parte al concorso per la R. Scuola di Venezia, offrendo loro un mezzo facile e piano per acquistare in poco tempo le cognizioni che il programma richiede.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 16 Dicembre 1908

FORMULA FONDAMENTALE

pel calcolo dei volumi poliedrici non euclidei

I. — Preliminari.

Divido questa Nota in due paragrafi; nel 2° dò la formula in questione e in questo riassumo, come inevitabile premessa, le definizioni e i risultati di tre miei precedenti lavori che in ordine di data di pubblicazione indicherò rispettivamente con (V), (R), (E). [1]

Normale è detto un tetraedro con tre diedri retti due dei quali fra loro opposti; dei tre diedri variabili di un tetraedro normale i due opposti diconsi *laterali* e il terzo *medio*. In (V) invece di *normale* ho adoperata la denominazione meno appropriata di *elementare* usata da Liebmann [(R) pag. 40].

Binormale dicesi un tetraedro normale di cui anche il diedro medio è retto; vale a dire, il tetraedro è binormale se ha due coppie di diedri retti opposti; segue facilmente che gli spigoli laterali di un tetraedro binormale sono reciproci-assoluti [(R), pag. 41].

Asintotico è detto un angolo, un angoloide, un poligono, un poliedro se ha un (o il) vertice sull'assoluto cioè all'infinito. In un triedro asintotico la somma dei diedri è π. Un tetraedro può essere fino a quattro volte asintotico; ma un tetraedro normale non può essere più di due volte asintotico, perchè in due dei suoi vertici cadono degli angoli retti.

Elementare si dirà qui il tetraedro normale due volte asintotico; esso ha i diedri laterali uguali fra loro e complementari del medio, sicchè è determinato da uno dei suoi diedri variabili.

Sia P_z [2] il volume di un tetraedro elementare di diedro laterale z reale o complesso; allora se si determina la funzione polidroma

$$\frac{1}{2i}\log 2\,\mathrm{sen}\, z$$

---

[1] (V) richiamerà la Nota " Sul volume dei poliedri nell'ipotesi non euclidea ". *Atti della Società dei Matematici e Naturalisti di Modena.* Serie IV, Vol. IX, 12 marzo 1907.

(R) richiamerà la Memoria " Ricerche di estensionimetria negli spazi metrico-proiettivi ". *R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena.* Serie III, Vol. VIII. Appendice: data di pubblicazione degli estratti: dicembre 1907.

(E) richiamerà la Nota " Sopra alcuni punti della estensionimetria non euclidea ". *R. Accademia delle Scienze di Torino.* Vol. XLIII, 14 giugno 1908.

[2] Secondo la notazione di Lobatschewski; io in (V), quando non conoscevo ancora i contributi di Lobatschewski in materia, ho usata la notazione T_z.