SOPRA I POLIEDRI REGOLARI CONVESSI.

(Un capitolo di Geometria descrittiva)

Lo scopo principale di questo modesto scritto è di rappresentare, mediante il metodo di Monge, le rotazioni che trasformano in se stessi i poliedri regolari convessi. L'argomento è generalmente dimenticato negli ordinari trattati di Geometria descrittiva malgrado la sua indiscutibile importanza. Dopo la pubblicazione della ormai classica opera di Klein sull'icosaedro [1] è impossibile svolgere un qualsiasi corso di teorie gruppali senza far capo in qualche modo ai tre notevoli gruppi che prendono nome dai poliedri regolari.

Come utile preparazione sembra dunque opportuno, a chi scrive, di far posto nella Geometria descrittiva (nel capitolo della rappresentazione dei poliedri) alla esposizione sistematica di tali gruppi servendosi del metodo più acconcio che, in questo caso, è quello di Monge.

Ho diviso il presente scritto in due parti. La 1ª contiene la rappresentazione dei cinque solidi regolari convessi. Veramente avrei potuto limitarmi a tre di essi, chè, dal punto di vista gruppale, è ben noto come la teoria del cubo sia identica a quella dell'ottaedro, e quella del dodecaedro a quella dell'icosaedro. Ma, per omogeneità di trattazione, non ho trascurato alcuno dei cinque solidi, riportando pure quelle rappresentazioni di essi che sono conosciutissime e si trovano in tutti i trattati, anche perchè mi si è presentato così la occasione di dimostrare certe osservazioni che ordinariamente sono soltanto affermate (cfr. per es. i n. 5 e 6).

In base alle costruzioni date nella 1ª parte, si svolge la 2ª parte espressamente dedicata alla descrizione delle rotazioni che sovrappongono a se stessi i poliedri rappresentati e agli importanti gruppi nei quali esse, per così dire, si organizzano.

I. — Rappresentazione nel metodo di Monge.

1. Tetraedro. — Rappresenteremo il solido in due posizioni particolari rispetto ai piani coordinati. La prima di queste posizioni è la solita adoperata usualmente. Assumiamo per piano orizzontale quello

---

(1) Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder un die Auflözung der Gleichungen vom fünften Grade.* (Leipzig. Teubner, 1884).

di una faccia e conseguentemente per piano verticale uno che sia parallelo all'altezza del solido che cade su tale faccia. Indichiamo con A, B, C, D i vertici del solido. La proiezione orizzontale si comporrà del triangolo equilatero $A_1B_1C_1$ e del suo centro D_1 (fig. 1). Le proiezioni verticali A_2, B_2, C_2 saranno sulla linea di terra nei punti d'incontro con le rispettive ordinate condotte da A_1, B_1, C_1 rispettivamente. Quanto a D_2 esso si troverà sulla ordinata tirata da D_1 ad una distanza dalla linea di terra che è cateto di un triangolo rettangolo che ha per altro cateto A_1D_1 e per ipotenusa il lato del solido che è uguale al lato del triangolo $A_1B_1C_1$. Nella figura 1 il triangolo in parola è $A_1D_1(D)$ e può considerarsi come il ribaltamento del triangolo A_1D_1D sul piano orizzontale attorno al cateto A_1D_1.

" *L'altezza del punto D sul piano orizzontale (cioè in sostanza l'altezza del solido) resulta anche uguale al lato del quadrato iscritto nel cerchio* c, *in cui è pure iscritta una faccia del solido* ".

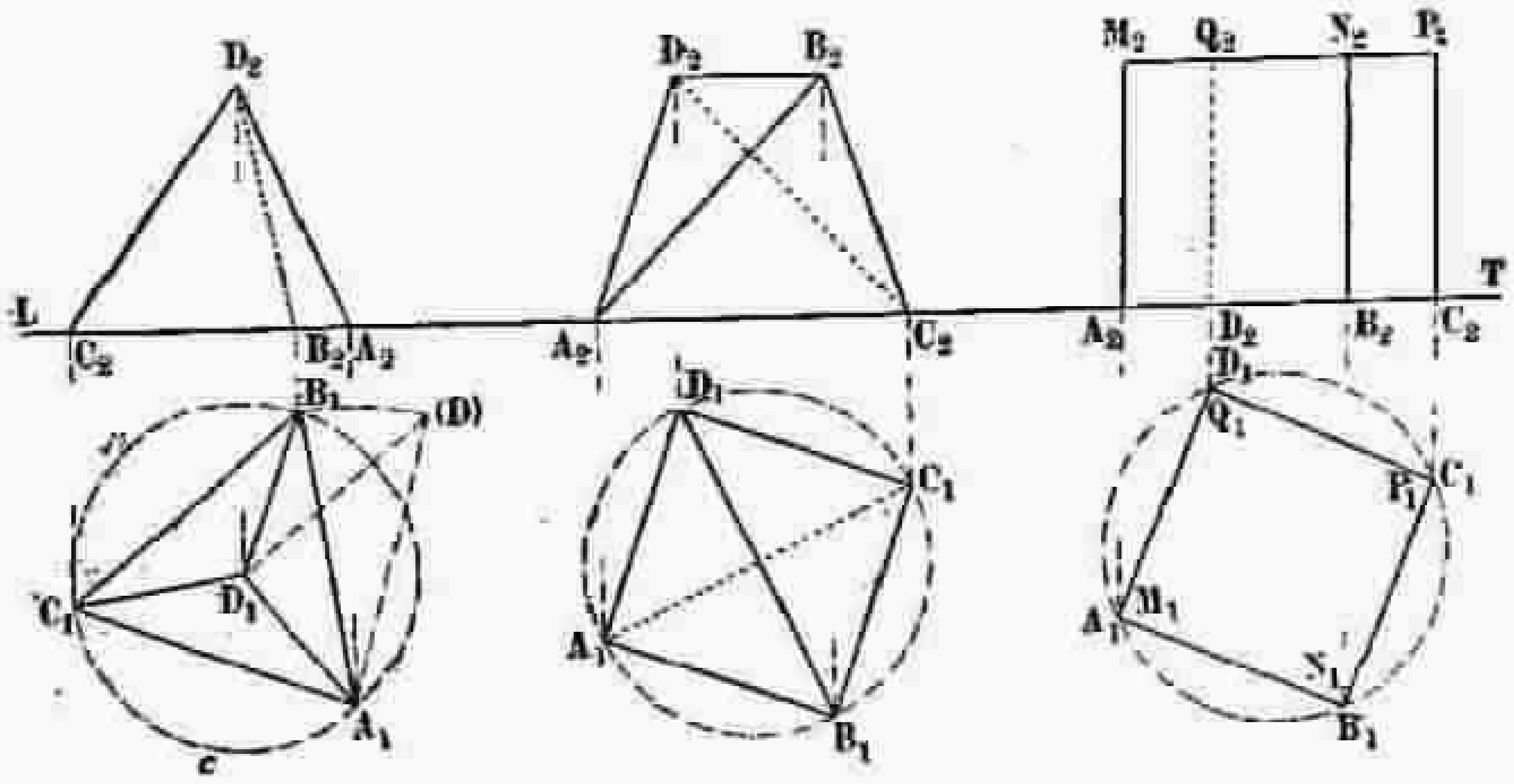


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

Infatti, prendendo per unità di misura il raggio di c, dal triangolo rettangolo $A_1D_1(D)$ si trova:

$$D_1(D) = \sqrt{\overline{A_1B_1}^2 - 1} = \sqrt{2}.$$

Questa osservazione può recare qualche semplificazione quando tutta la figura 1 si incominci dal tracciare il circolo c.

Nella 2ª posizione che dobbiamo considerare, assumeremo per piano verticale uno che sia parallelo alla perpendicolare comune a due spigoli opposti del solido e per piano orizzontale quello che passa per uno di tali spigoli ed è parallelo all'altro (fig. 2). La proiezione orizzontale sarà composta con i vertici del quadrato $A_1B_1C_1D_1$ di cui la diagonale sia uguale al lato del solido. Se AC è il lato esistente sul piano orizzontale, $\overline{A_2C_2}$ e $\overline{B_2D_2}$ si troveranno rispettivamente sulla linea di terra e su di una parallela ad essa. Conducendo da $A_1C_1B_1D_1$ le relative ordinate, non mancherà che di conoscere la distanza delle due rette $\overline{A_2C_2}$, $\overline{B_2D_2}$ per completare la rappresentazione del solido. Ma tale distanza è manifestamente cateto di un triangolo rettangolo che ha per altro cateto il lato del quadrato $A_1B_1C_1D_1$ e per ipotenusa il lato del solido (cioè la diagonale del quadrato suddetto). Si può dunque dire che:

" *La minima distanza di due spigoli opposti del tetraedro uguaglia il lato del quadrato che ha per diagonale lo spigolo del solido* ".

2. Cubo. — Basta una sola rappresentazione che è la consueta. Assumiamo per piano orizzontale quello di una faccia e per piano verticale uno qualunque perpendicolare al precedente (fig. 3). Allora la proiezione orizzontale è tutta assorbita da un quadrato di cui ogni vertice rappresenta due vertici del solido: le otto proiezioni verticali

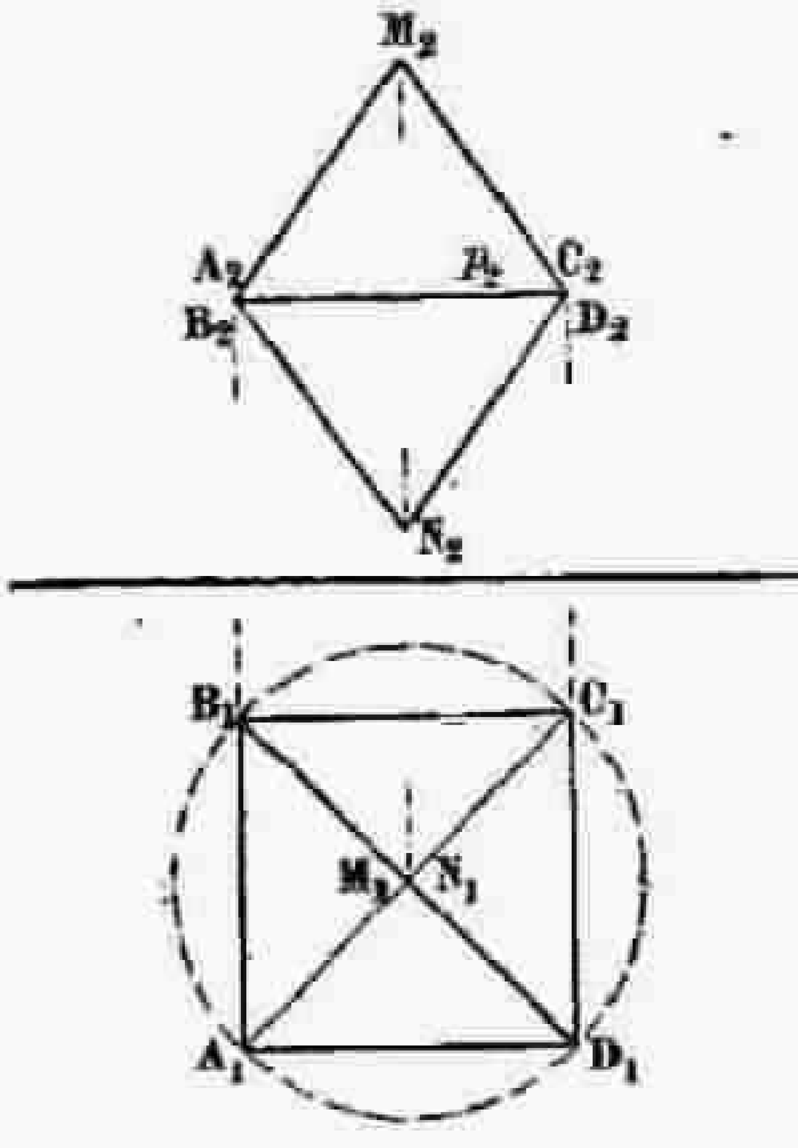


Fig. 4.

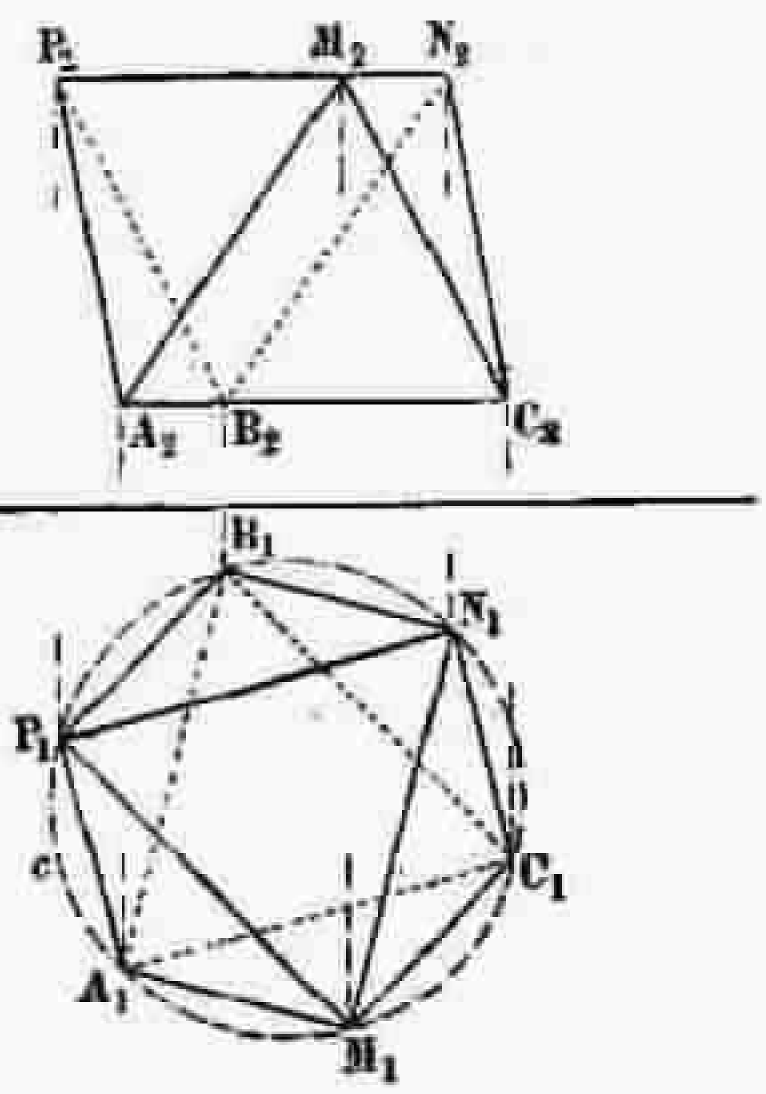


Fig. 5.

dei vertici si distribuiscono a 4, a 4 sopra due rette parallele (di cui una è la linea di terra) a una distanza fra loro che è uguale al lato del solido cioè al lato del quadrato suddetto. Non manca che di condurre le ordinate dai vertici del quadrato a incontrare le due rette nominate e la rappresentazione è completa.

3. Ottaedro. — Occorrono due rappresentazioni.

Per chiarire bene quale deve essere la posizione del solido nella 1ª rappresentazione, indichiamo con A, B, C, D i vertici del solido esistenti in un piano diagonale, con M ed N i due rimanenti. Sceglieremo allora per piano orizzontale un piano parallelo al piano diagonale suddetto e per verticale uno che sia perpendicolare ai due spigoli opposti AB, CD (e quindi parallelo ad AD, BC). Ne segue (fig. 4) che la proiezione orizzontale è costituita dal quadrato $A_1B_1C_1D_1$ (uguale al quadrato obbiettivo ABCD) e dal centro del suddetto quadrato come rappresentante i due vertici rimanenti M ed N (in $M_1 \equiv N_1$). Per fissare la proiezione verticale si fissi la traccia verticale p_2 del piano diagonale in discorso: dove essa incontrerà le A_1B_1, C_1D_1, ivi saranno le proiezioni verticali dei vertici di ABCD ed evidentemente A_2 coinciderà con B_2 e C_2 con D_2. I punti M_2 ed N_2 esistono sulla ordinata da $M_1 \equiv N_1$, uno da una parte e uno dall'altra di p_2 ad una distanza uguale alla semidiagonale del solido, cioè alla semidiagonale del quadrato $A_1B_1C_1D_1$.

Nella 2ª posizione si assumerà per piano orizzontale uno che sia parallelo a una faccia (fig. 5) e per piano verticale un qualsiasi piano perpendicolare al primo.

Indichiamo allora con ABC e con MNP i due triangoli che costituiscono le due facce del solido parallele al piano orizzontale. Tali due triangoli si proiettano in vera grandezza e quindi in due triangoli equilateri simmetrici un dell'altro rispetto al centro comune (cioè iscritti anche in un medesimo cerchio c). Quanto alla proiezione verticale si osserverà che $A_2B_2C_2$ e $M_2N_2P_2$ si proietteranno sopra due rette parallele alla linea di terra (tracce verticali dei piani ABC, MNP) e sulle ordinate corrispondenti tirate dalle relative proiezioni orizzontali. Non manca dunque che di trovare la distanza fra le due rette parallele suddette.

Basta a tale uopo osservare che la differenza di altezza fra i punti C ed M è cateto di un triangolo rettangolo che ha per altro cateto C_1M_1 (lato dell'esagono regolare iscritto in c) e per ipotenusa il lato del solido (che è uguale a quello di uno qualunque dei due triangoli equilateri $A_1B_1C_1$; $M_1N_1P_1$). Si può dunque dire che:

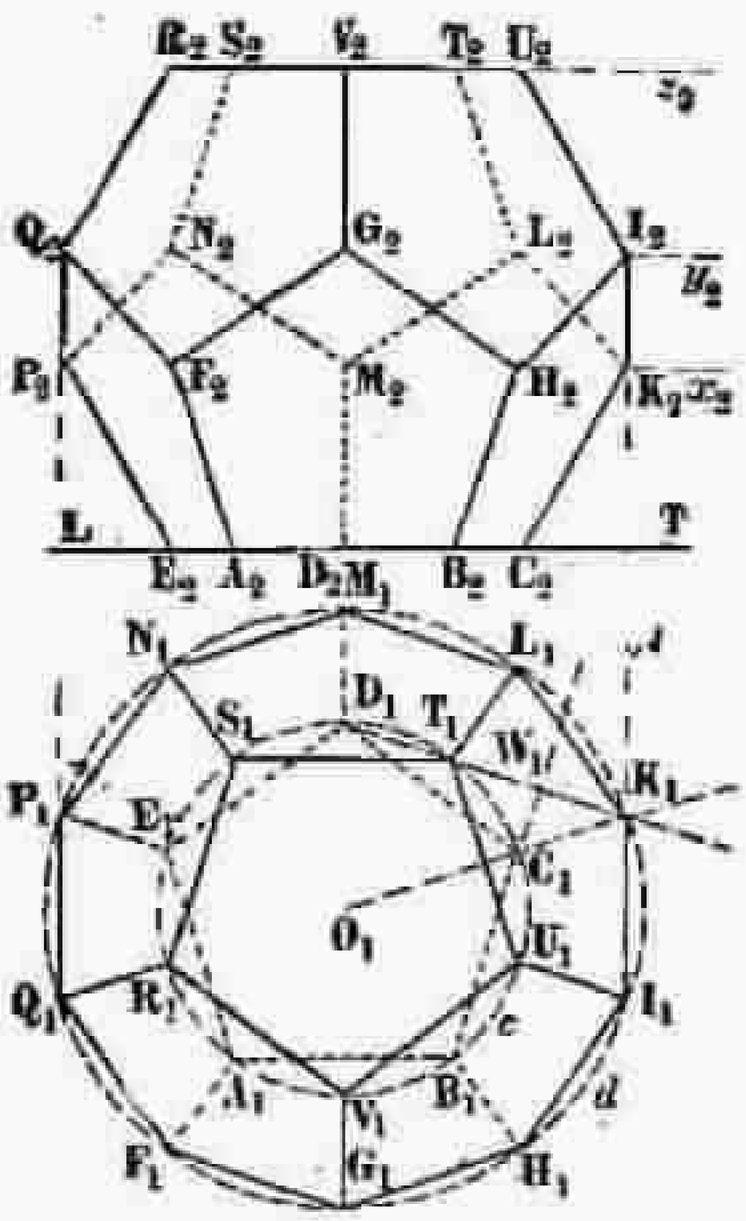


Fig. 6.

"*La distanza fra due facce opposte del solido è uguale al lato del quadrato iscritto nel cerchio in cui è pure iscritta una faccia del solido medesimo*".

Infatti assumendo per unità di misura il raggio di c si ha $C_1M_1=1$; $A_1B_1=\sqrt{3}$ e quindi la distanza in parola è $=\sqrt{2}$.

4. Dodecaedro. — È sufficiente rappresentare il poliedro in una sola posizione, che è la solita. Sia, a tale scopo, piano orizzontale il piano di una faccia ABCDE. Essa si rappresenterà orizzontalmente in se stessa nel pentagono regolare $A_1B_1C_1D_1E_1$ (fig. 6), iscritto nel cerchio c. La faccia opposta si proietterà orizzontalmente secondo un altro pentagono $R_1S_1T_1U_1V_1$ iscritto nel medesimo cerchio e simmetrico del primo rispetto al centro comune. I vertici rimanenti del solido compongono un decagono gobbo che si proietta orizzontalmente in un decagono regolare convesso iscritto in un cerchio d concentrico a c. Vediamo come si possa costruire un tal cerchio d, o (ciò che è lo stesso) cerchiamo la proiezione orizzontale di un vertice del suddetto decagono. Immaginiamo, a tale scopo, di far ruotare la faccia $A_1B_1C_1D_1E_1$ del solido attorno a B_1C_1 fino a farla coincidere con l'altra faccia che passa per B_1C_1. La proiezione orizzontale del punto D_1, durante il movimento, si sposta sulla perpendicolare tirata da D_1 all'asse di rotazione che è B_1C_1: d'altra parte quando il movimento di rotazione è finito, la proiezione cercata deve trovarsi sul raggio O_1C_1; dunque il punto D_1 alla fine del movimento suddetto, si proietterà nel punto K_1 comune al raggio e alla perpendicolare suddetta. Il cerchio concentrico a c e di raggio O_1K_1 è il cerchio d richiesto. E sopra i raggi che da O_1 proiettano i vertici dei due pentagoni precedenti, nei punti d'incontro di tali raggi con d si troveranno i vertici del decagono cercato. È così costruita la consueta proiezione orizzontale del solido.

Per caratterizzare nel modo più opportuno la proiezione verticale si indichi con $F_1G_1H_1I_1K_1L_1M_1N_1P_1Q_1$ il decagono regolare ultimo trovato e si assuma la linea di terra perpendicolare ai due lati opposti I_1K_1; P_1Q_1. Le proiezioni verticali dei vertici vengono a disporsi a cinque, a cinque sulla linea di terra e sopra altre tre linee ad essa parallele, che in dicheremo ordinatamente con x_2, y_2, z_2. Conducendo dalle proiezioni orizzontali le relative ordinate avremo:

A_2,	B_2,	C_2,	D_2,	E_2	sopra	la	LT
K_2,	H_2,	M_2,	F_2,	P_2	"	"	x_2
I_2,	L_2,	G_2,	N_2,	Q_2	"	"	y_2
R_2,	S_2,	T_2,	U_2,	V_2	"	"	z_2.

Per completare la proiezione verticale non manca che di trovare le mutue distanze fra le quattro rette parallele suddette. Ci serviremo a tale scopo del solito metodo. La distanza fra L_2T_2 e la x_2 è la lunghezza della proiezione verticale dello spigolo CK, di cui si conosce la vera lunghezza (lato del solido) e la proiezione orizzontale C_1K_1. Dunque la distanza cercata sarà cateto di un triangolo rettangolo che ha per altro cateto C_1K_1 e per ipotenusa il lato del pentagono iscritto nel cerchio c. Analogamente, la distanza fra x_2 e y_2 è la lunghezza della proiezione verticale dello spigolo IK, e quindi è cateto di un triangolo rettangolo che ha per altro cateto I_1K_1 e per ipotenusa il lato del pentagono suddetto. Quanto alla distanza fra y_2 e z_2 essa è uguale a quella fra LT e x_2 per ovvie ragioni di simmetria.

5. Per semplificare in modo evidente il processo costruttivo valgono le osservazioni seguenti.

" *Il raggio del cerchio* d *si può ottenere aggiungendo al raggio del cerchio* c *il lato del decagono regolare iscritto in* c ".

Infatti chiamando con W_1 il punto comune a B_1C_1 e D_1K_1 si ha:

$$\overline{C_1K_1}^2 = \overline{C_1W_1}^2 + \overline{K_1W_1}^2 = \overline{C_1D_1}^2 . \cos^2 D_1\widehat{C_1}W_1 + \overline{C_1W_1}^2 . \mathrm{tg}^2\, W_1\widehat{C_1}K_1 =$$
$$= \overline{C_1D_1}^2 . \cos^2 D_1\widehat{C_1}W_1 . \left\{1 + \mathrm{tg}^2\, W_1\widehat{C_1}K_1\right\}.$$

Prendendo per unità di misura il raggio di c si ha:

$$\overline{C_1D_1} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2},$$

e

$$D_1\widehat{C_1}W_1 = \pi - B_1\widehat{C_1}D_1 = \pi - \frac{3\pi}{5} = \frac{2\pi}{5},$$
$$W_1\widehat{C_1}K_1 = \pi - (O_1\widehat{C_1}D_1 + D_1\widehat{C_1}W_1) = \frac{3\pi}{10},$$
$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \qquad \mathrm{tang}\frac{3\pi}{10} = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}};$$

onde, sostituendo si trova,

$$\overline{C_1K_1}^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2},$$

e quindi

$$C_1K_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

il che prova l'affermazione fatta.

" *La distanza fra la linea di terra e la retta* x_2 *è uguale al raggio del cerchio* c. Infatti essa è cateto di un triangolo rettangolo che ha per altro cateto il lato del decagono iscritto in c (per l'osservazione precedente) e per ipotenusa il lato del pentagono. Ora è ben noto che esiste un triangolo rettangolo che ha per cateti il raggio e il lato del decagono iscritto e per ipotenusa il lato del pentagono iscritto, dunque la distanza cercata è effettivamente data dal raggio in parola.

" *La distanza fra le due rette parallele* x_2 *e* y_2 *è uguale al lato del decagono iscritto nel cerchio* c ".

Infatti, come abbiamo visto, essa è cateto di un triangolo rettangolo che ha per ipotenusa il lato del pentagono iscritto in c e per altro cateto il lato del decagono iscritto in d, cosicchè (per il teorema dianzi citato) tutto si riduce a dimostrare che il lato del decagono iscritto in d è uguale al raggio di c. Ciò risulta subito dal confronto dei due triangoli simili $O_1C_1T_1$, $O_1K_1L_1$ i quali dànno:

$$(\overline{O_1C_1} + \overline{C_1K_1}) : K_1L_1 = O_1C_1 : C_1T_1$$

ma sappiamo già che $\overline{C_1K_1} = C_1T_1$, dunque:

$$O_1C_1 . C_1T_1 + \overline{C_1T_1}^2 = \overline{O_1C_1} . \overline{K_1L_1}$$

e d'altra parte è

$$\overline{C_1T_1}^2 = \overline{O_1C_1} . (O_1C_1 - C_1T_1)$$

per cui sostituendo si trova:

$$\overline{O_1C_1} = \overline{K_1L_1}$$

ciò che dimostra la nostra affermazione.

6. Icosaedro. — È necessario considerare tre posizioni diverse del solido rispetto ai piani coordinati.

La prima di queste posizioni è la consueta. Si assuma per piano orizzontale un piano perpendicolare alla retta che congiunge due vertici opposti M ed N (fig. 7). Tale piano riesce parallelo ai piani di due pentagoni che hanno per vertici i rimanenti 10 vertici del solido e che noi, per brevità, chiameremo " pentagoni diagonali ". Essi si proiettano orizzontalmente in vera grandezza in due pentagoni regolari col lato uguale allo spigolo del solido, iscritti nel medesimo cerchio c e simmetrici uno dell'altro rispetto al centro del cerchio (il quale centro rappresenta orizzontalmente le proiezioni $M_1 \equiv N_1$ di M ed N).

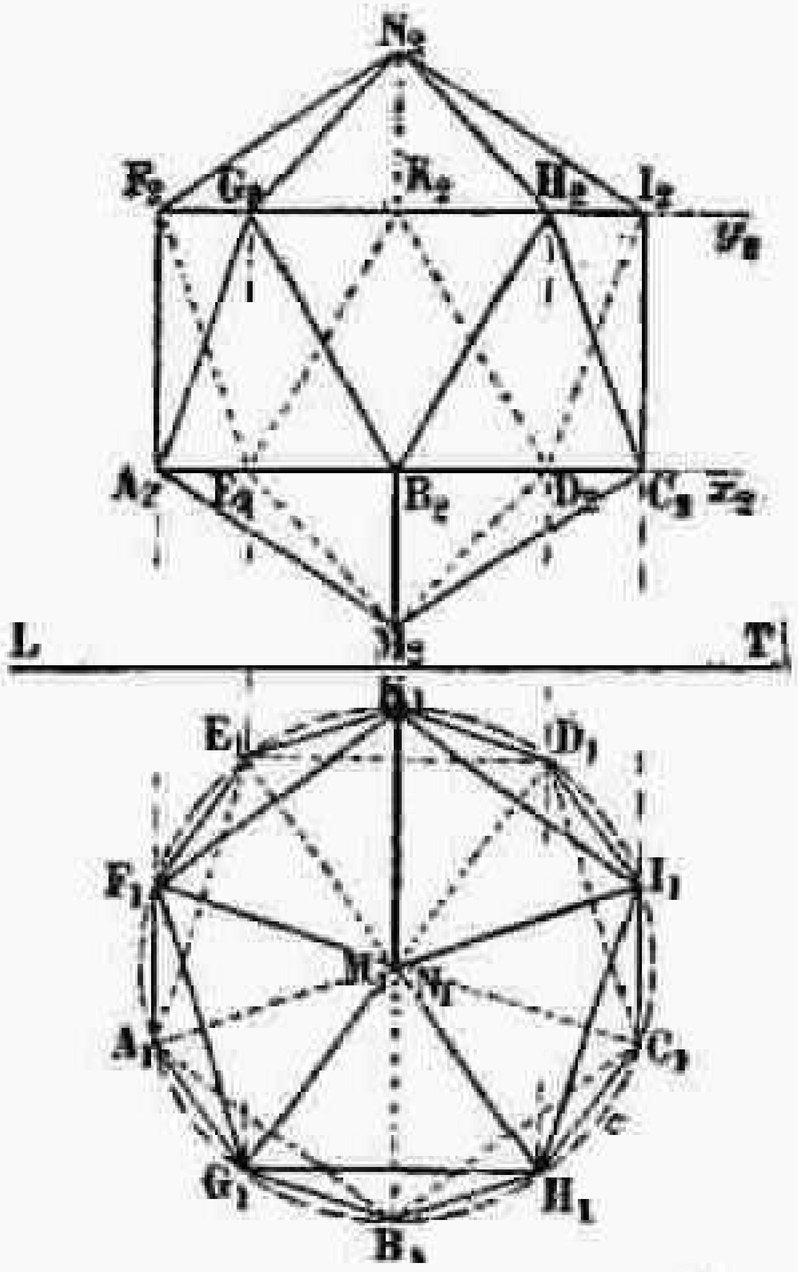


Fig. 7.

Per maggiore simmetria assumiamo per linea di terra una perpendicolare ad una delle altezze comuni dei suddetti pentagoni $A_1B_1C_1D_1E_1$, $F_1G_1H_1I_1K_1$. Per costruire la proiezione verticale si osservi che $A_2B_2C_2D_2E_2$, $F_2G_2H_2I_2K_2$ si disporranno sopra due rette x_2y_2 parallele alla linea di terra, e che M_2 ed N_2 si troveranno a distanze uguali dalla striscia che tali parallele individuano uno al disopra e uno al disotto. Per cui non manca che di trovare la distanza fra x_2 e y_2 e quella fra M_2 e x_2 per potere completare, mediante le ordinate relative, la proiezione verticale. Per determinare tali distanze si osservi che la distanza fra M_2 e x_2 non è che l'altezza del punto C_2 sopra il piano parallelo all'orizzontale condotto per M. Essa è dunque cateto di un triangolo rettangolo che ha per ipotenusa il lato del solido (cioè il lato di uno dei due pentagoni iscritti in c) e per altro cateto il segmento M_1C_1 (cioè il raggio di c). In modo analogo la distanza fra x_2 e y_2 si vede che è l'altezza del punto F sopra il piano parallelo all'orizzontale passante per E. Essa è dunque cateto di un triangolo rettangolo che ha per ipotenusa il lato del solido (cioè il lato di uno dei due pentagoni iscritti in c) e per altro cateto il segmento E_1F_1 (ossia il lato del decagono iscritto in c).

Le costruzioni inerenti a queste distanze possono semplificarsi dimostrando:

" *Che la distanza fra* M_2 *e* x_2 *uguaglia il lato del decagono iscritto in* c ".

" *Che la distanza fra* x_2 *e* y_2 *uguaglia il raggio di* c ". Per convincersene basta considerare la esistenza, già notata al N. 5, di un triangolo rettangolo che ha per ipotenusa il lato del pentagono iscritto in un cerchio qualunque e per cateti il lato del decagono iscritto nello stesso cerchio e il raggio.

7. Per collocare il solido nella seconda delle posizioni volute si assuma per piano orizzontale quello di una faccia ABC (fig. 8). Con ciò i 12 vertici vengono a disporsi a tre, a tre in quattro piani paralleli di cui il primo è il piano orizzontale. Sieno tali terne in ordine di altezza così indicate: ABC, DEF, GHI, KMN. La prima e l'ultima costituiscono due facce opposte: esse si proiettano in vera grandezza in due triangoli equilateri $A_1B_1C_1$, $M_1N_1K_1$ iscritti nel medesimo cerchio e simmetrici uno dell'altro rispetto al centro. Nella figura 8 tale cerchio che indicheremo con c non è disegnato per non complicarla troppo. Rimangono da rappresentarsi orizzontalmente i 6 vertici DEF, GHI che possono riguardarsi componenti l'esagono regolare gobbo DGFHEI. Esso si proietterà in un esagono regolare direttamente omotetico a $K_1B_1M_1C_1N_1A_1$ e non mancherà quindi che di trovare il raggio del cerchio d circoscritto a tale esagono. Si consideri perciò il pentagono diagonale MNECF e si osservi che la sua diagonale EF si proietta in vera grandezza (orizzontalmente) e precisamente nel lato del triangolo equilatero iscritto in d. Ma EF è anche diagonale del pentagono regolare che ha per lato A_1B_1. Si costruisca dunque una tale diagonale eppoi si descriva (concentrico a c) un cerchio il cui triangolo equilatero iscritto abbia per lato la lunghezza della diagonale prima trovata e la questione sarà risoluta.

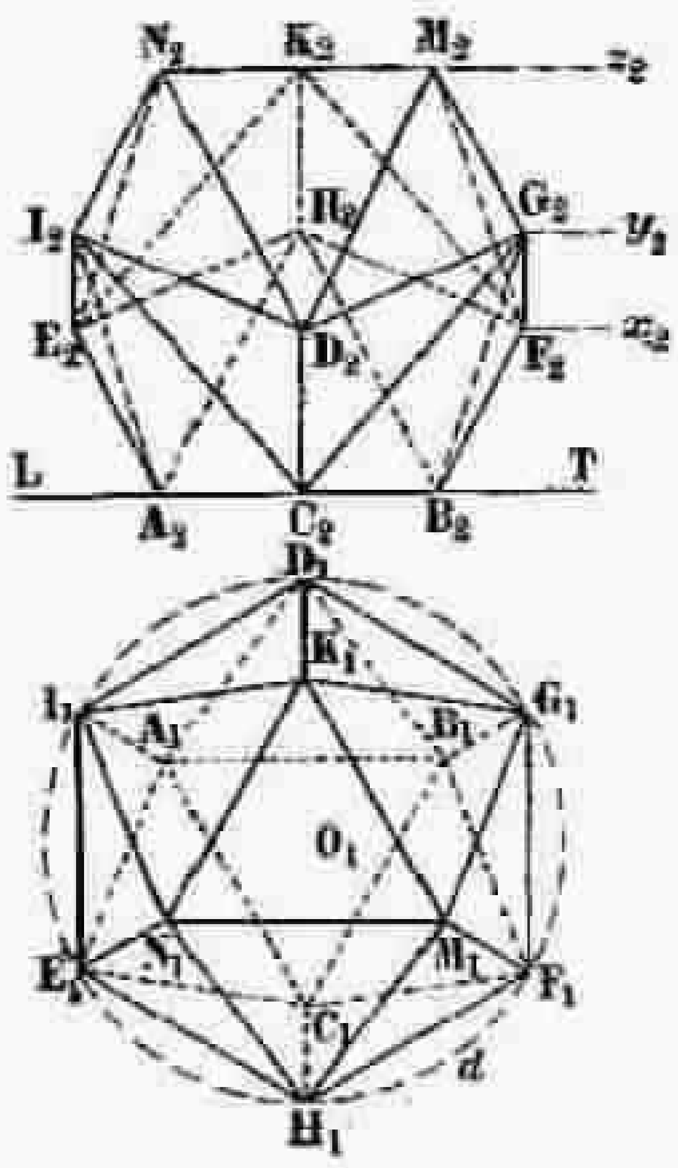


Fig. 8.

Quanto alla proiezione verticale si osserverà che i vertici vengono ivi a distribuirsi secondo le terne già scritte in 4 rette parallele di cui la prima è la linea di terra. Indichiamo le altre con $x_2y_2z_2$. Non manca che di trovarne le mutue distanze perchè (servendosi delle ordinate relative) possa dirsi completata anche la proiezione verticale.

Ora la distanza fra LT e x_2 è l'altezza di F sul piano orizzontale e quindi è cateto di un triangolo rettangolo che ha per altro cateto B_1F_1 e per ipotenusa il lato del solido (cioè B_1C_1). In modo analogo la distanza fra x_2 e y_2 è la differenza delle altezze di G e D sul piano orizzontale e per conseguenza uguaglia il cateto di un triangolo rettangolo che ha per altro cateto D_1G_1 e per ipotenusa il lato del solido (ossia B_1C_1).

8. Le costruzioni del n. precedente possono semplificarsi notevolmente mediante le seguenti osservazioni.

" *Il raggio del cerchio esterno* d *si può ottenere aggiungendo al raggio del cerchio interno* c *il lato del decagono iscritto in* c ".

Infatti

$$\overline{O_1F_1} = \frac{\overline{E_1F_1}}{\sqrt{3}}, \qquad \overline{O_1M_1} = \frac{\overline{M_1N_1}}{\sqrt{3}}.$$

Ma prendendo per unità di misura il raggio del cerchio in cui è iscritto il pentagono regolare di lato M_1N_1 si ha:

$$\overline{M_1N_1} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}; \qquad E_1F_1 = 2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$$

e quindi

$$\overline{M_1F_1} = \overline{O_1F_1} - \overline{O_1M_1} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2\sqrt{3}}$$

da cui

$$\frac{\overline{M_1F_1}}{\overline{O_1M_1}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}. \qquad \text{c. d. d.}$$

" *Le distanze di* x_2, y_2 *dalla linea di terra sono rispettivamente uguali ai raggi dei cerchi* c *e* d ".

Dimostriamo prima che la distanza fra LT e y_2 è uguale al raggio del cerchio d. Perciò osserviamo che essa può riguardarsi come altezza di G sul piano orizzontale, ossia come cateto di un triangolo rettangolo che ha per altro cateto B_1G_1 e per ipotenusa il lato del solido (ossia A_1B_1). Basta dunque dimostrare la seguente identità

$$\overline{A_1B_1}^2 - \overline{B_1G_1}^2 = (O_1B_1 + B_1G_1)^2,$$

la quale si rende manifesta osservando che per l'osservazione precedente si ha:

$$\overline{B_1G_1}^2 = \overline{O_1B_1} \cdot (\overline{O_1B_1} - \overline{B_1G_1}), \qquad \overline{A_1B_1}^2 = 3\,\overline{O_1B_1}^2.$$

Finalmente per dimostrare che la distanza fra LT e x_2 è uguale al raggio del cerchio c basta dimostrare che la distanza fra x_2 e y_2 è uguale a B_1G_1. Ora la distanza fra x_2 e y_2 essendo l'altezza del punto G sul piano parallelo all'orizzontale che passa per F, è cateto di un triangolo rettangolo che ha per altro cateto F_1G_1 e per ipotenusa A_1B_1.

Tutto dunque si riduce a dimostrare la seguente identità

$$\overline{A_1B_1}^2 - \overline{F_1G_1}^2 = \overline{B_1G_1}^2.$$

Ma $\overline{F_1G_1}$, lato dell'esagono iscritto in d, è uguale al raggio del cerchio d, e allora si ricade nella identità dimostrata precedentemente, c. d d. Quanto poi alla distanza fra y_2 e z_2 essa è uguale a quella fra LT e x_2 per evidenti ragioni di simmetria.

9. In ultimo, per collocare il solido nella terza posizione che occorre di considerare, si osservi che già dalla figura 7 resulta che i 30 spigoli sono a due, a due, paralleli in guisa che i 15 piani che così vengono individuati compongono 5 triedri trirettangoli col vertice nel centro del solido. Uno di tali triedri (è in quella figura 7) individuato dai tre piani: MKNB, GHDE, AFCI. Ebbene prendiamo per piani coordinati due che sieno paralleli a MKNB, GHDE (fig. 9). Se il piano orizzontale è quello parallelo a MKNB, un tale rettangolo si proietterà ivi in vera grandezza in $M_1K_1N_1B_1$ dove i lati M_1K_1, K_1N_1 saranno rispettivamente uguali allo spigolo del solido e alla diagonale di un pentagono diagonale. Se si osserva, che lo spigolo suddetto è anche lato del nominato pentagono e che d'altra parte il lato del pentagono regolare è la parte maggiore della sua diagonale divisa in sezione aurea, si vede che per costruire un rettangolo come $M_1N_1K_1B_1$ si può prendere il lato maggiore a piacere e il lato minore uguale alla parte maggiore del lato maggiore diviso in sezione aurea. I quattro vertici GHDE (situati sopra i due spigoli opposti GH, DE) si proietteranno a due, a due negli estremi del segmento $G_1H_1 \equiv D_1E_1$ che avrà la lunghezza K_1M_1 e si disporrà sull'asse di simmetria del (rettangolo $M_1K_1N_1B_1$) che è parallelo a K_1N_1 e avrà il suo punto medio nel centro del rettangolo medesimo. I quattro vertici rimanenti A, F, C, I si proietteranno a due, a due negli estremi di un segmento che avrà la lunghezza K_1N_1, che sarà disposto sull'altro asse di simmetria del solito rettangolo e sarà bisecato dal centro del medesimo rettangolo. Per l'esattezza della costruzione si osservi che i tre punti M_1, G_1, C_1 debbono essere in linea retta perchè i loro obbiettivi sono vertici del pentagono diagonale MGCIE che esiste in un piano perpendicolare all'orizzontale (è il piano delle rette EG, IC). La stessa cosa può dirsi di $K_1G_1A_1$ e di $I_1D_1B_1$, $A_1H_1N_1$. La proiezione verticale si può ottenere dalla orizzontale facendola ruotare, nel piano del disegno, di 180° attorno al suo centro e poi spostandola con una traslazione arbitraria nel senso A_1C_1.

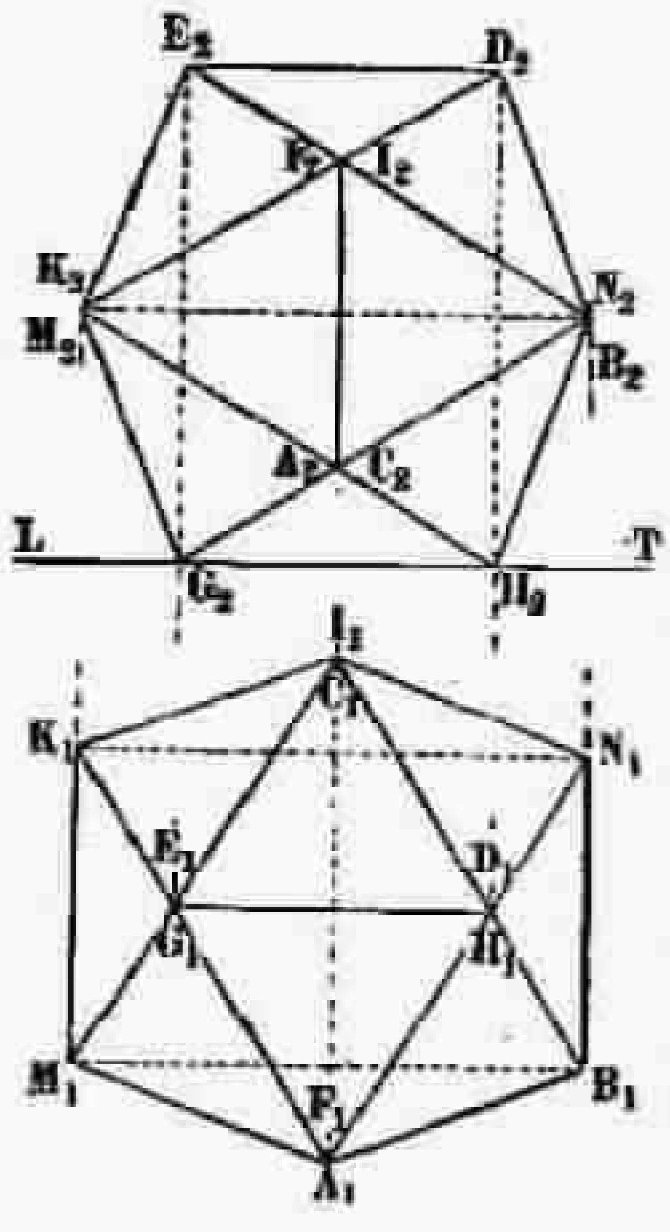


Fig. 9.

E. Ciani.

(Continua)

COSTRUZIONE DI ENTI IMMAGINARI

1. Daremo una rappresentazione reale dell'insieme dei punti reali e immaginari di un piano, la quale renderà possibile la costruzione geometrica di punti o rette o in generale enti reali o immaginari, partendo da dati reali o immaginari. L'ente reale sul quale faremo la rappresentazione è l'insieme delle coppie di punti reali di un piano reale; un elemento di tale insieme sarà dunque una coppia di punti M, N, reali. Indicheremo un tale elemento con [M, N] e lo chiameremo *elemento-coppia*; i punti M ed N saranno rispettivamente il *primo punto* e il *secondo punto* dell'elemento-coppia. Gli elementi-coppie [M, N] e [N, M] saranno considerati come distinti.

Poichè nelle nostre considerazioni avranno particolare importanza, limitatamente ai punti reali, quelle speciali trasformazioni proiettive del piano in se stesso che sono le *similitudini inverse*, così comincieremo col porre in evidenza alcuni caratteri, per noi essenziali, delle medesime.

I. — Osservazioni sulle similitudini inverse.

2. In una similitudine inversa la retta all'infinito è unita, e su essa si ha una involuzione con due punti uniti reali, U_∞ e V_∞, le direzioni dei quali sono ortogonali. Le direzioni A_∞ e B_∞ inclinate di $\frac{\pi}{4}$ rispetto alle U_∞ e V_∞ sono corrispondenti e perpendicolari fra loro; noi le chiameremo *direzioni principali* della similitudine.

Al fascio di raggi di centro A_∞, considerato nella prima figura, corrisponde il fascio di centro B_∞ proiettivamente, anzi prospettivamente perchè la retta all'infinito è unita; i raggi corrispondenti si incontrano su una retta r_1. Così al fascio di centro B_∞, considerato nella prima figura, corrisponde il fascio di centro A_∞ prospettivamente, e i raggi corrispondenti si incontrano su una retta r_2.

Siano M_1, M_2 due punti corrispondenti nella similitudine inversa; alla retta M_1A_∞ corrisponde la M_2B_∞, e queste due rette si incontrano in un punto A di r_1; alla retta M_1B_∞ corrisponde la M_2A_∞, e la incontra in un punto B di r_2. Si ha dunque un rettangolo M_1AM_2B, del quale due vertici opposti sono i due punti corrispondenti M_1 e M_2, e gli altri due vertici opposti sono uno su r_1 e uno su r_2.

Ecco dunque come si può ottenere il punto M_2 corrispondente a un dato punto M_1: per M_1 si conducono le rette a e b parallele alle due direzioni principali A_∞ e B_∞; per i punti $a.r_1$ e $b.r_2$ si conducono le rette a' e b' parallele alle direzioni B_∞ e A_∞; il punto $a'.b'$ è il punto M_2.

Cercando con questa costruzione i punti corrispondenti a quelli di r_1 si ottengono i punti di r_2, e inversamente; r_1 ed r_2 son dunque corrispondenti nella similitudine, e perciò ugualmente inclinate sulle direzioni unite U_∞ e V_∞.

Si può concludere dunque che: *Per ogni similitudine inversa esistono due rette* r_1, r_2 *tali che in ogni rettangolo* M_1AM_2B *che ha i vertici opposti* A, B *sulle rette* r_1, r_2 *e i lati inclinati di* $\frac{\pi}{4}$ *sulle bisettrici degli angoli di* r_1 *e* r_2, *gli altri due vertici opposti sono due punti corrispondenti.*

I due vertici M_1 e M_2 sono distinti dal fatto che il lato M_1A si mantiene costantemente *in una determinata* delle due direzioni principali, e il lato M_2A nell'altra. La direzione del lato M_1A si dirà *prima direzione principale*, e quella del lato M_2A *seconda direzione principale.*

Si noti che r_1 e r_2 non sono mai ortogonali.

3. Reciprocamente, dimostriamo che *prese a priori due rette* r_1, r_2 *del piano, purchè non ortogonali, e di ogni punto* M_1 *trovato il corrispondente* M_2 *mediante la costruzione di un rettangolo* M_1AM_2B *coi vertici* A *e* B *su* r_1 *e* r_2 *e col lato* M_1A *in una determinata delle due direzioni inclinate di* $\frac{\pi}{4}$ *sulle bisettrici degli angoli di* r_1 *e* r_2, M_1 *e* M_2 *sono corrispondenti in una similitudine inversa.*

Intanto si vede che la corrispondenza fra M_1 e M_2 è biunivoca; al più si ha qualche incertezza nella corrispondenza fra i punti della retta all'infinito, ma su questo faremo poi una osservazione.

Se M_1 descrive una retta m_1 non coincidente con M_1A e M_1B, i punti A e B descrivono due punteggiate proiettive nelle quali si corrispondono i punti all'infinito, onde le rette M_2A e M_2B descrivono due fasci prospettivi; M_2 descrive dunque una retta m_2. Se poi M_1 descrive o la retta M_1A o la M_1B, M_2 descrive o la M_2A o la M_2B. In ogni caso, dunque, mentre un punto descrive una retta, il corrispondente descrive una retta.

Poichè a rette parallele corrispondono rette parallele, la incertezza relativa ai punti all'infinito si risolverà considerando come corrispondenti i punti all'infinito delle rette corrispondenti. Così stabilito, si ha che la corrispondenza fra M_1 e M_2 è una proiettività nella quale la retta all'infinito è unita, quindi una affinità.

In questa affinità il punto d'intersezione di r_1 e r_2 è unito, e le bisettrici degli angoli di r_1 e r_2 sono manifestamente rette unite; le r_1 e r_2 sono corrispondenti involutoriamente. La proiettività sulla retta all'infinito è dunque una involuzione che ha due punti uniti reali, le direzioni dei quali sono ortogonali. Da questo segue che i due fasci di raggi corrispondenti con centro in due punti corrispondenti qualunque sono inversamente uguali, e che quindi la nostra affinità è una similitudine inversa.

4. Abbiamo lasciato una certa arbitrarietà nella scelta della *prima* e *seconda* direzione principale, cosicchè due rette r_1, r_2 determinano due similitudini inverse, una inversa dell'altra. Dall'una si passa all'altra scambiando le due direzioni principali, o anche scambiando r_1 con r_2.

Per avere una corrispondenza biunivoca fra le coppie di rette (non ortogonali) del piano e le similitudini inverse del piano stesso, fissiamo di prendere per prima direzione principale quella che si trova nell'angolo descritto dalla bisettrice dell'angolo acuto di r_1 e r_2 (*prima bisettrice*) fino alla bisettrice dell'angolo ottuso (*seconda bisettrice*), nel senso positivo delle rotazioni. Così stabilito, le due similitudini inverse determinate, nel modo detto, da due rette, sono già distinte dall'ordine nel quale si considerano tali rette.

Le rette r_1, r_2 si diranno *rette rappresentatrici* della similitudine inversa, la quale si indicherà con (r_1, r_2).

5. I caratteri di una similitudine inversa sono in relazione con la posizione relativa delle rette rappresentatrici. Nel caso generale, le rappresentatrici r_1 e r_2 si incontrano in un punto O, che è l'unico punto unito a distanza finita. Le bisettrici degli angoli di r_1 e r_2 dividono il piano in quattro quadranti, che si trasformano uno nell'altro nella similitudine; la quale è il prodotto di una simmetria rispetto alla prima bisettrice per una omotetia diretta di centro O.

Se r_1 e r_2 sono parallele e hanno una distanza d, la similitudine non ha punti uniti a distanza finita ed è il prodotto di una simmetria rispetto alla bisettrice della striscia $r_1 r_2$ per una traslazione lungo le rette r_1, r_2, di ampiezza d.

Quando r_1 e r_2 sono coincidenti, la similitudine si riduce alla simmetria rispetto all'asse $r_1 \equiv r_2$. È questo il solo caso nel quale una similitudine inversa è involutoria.

6. Una similitudine inversa fra i punti reali di un piano, nella quale si considerino come elementi le coppie di punti corrispondenti, è un insieme appartenente all'insieme di tutte le coppie di punti reali del piano stesso. Ora cerchiamo, considerando due similitudini inverse

$$\Sigma \equiv (r_1, r_2), \qquad \Sigma' \equiv (r'_1, r'_2),$$

se i due insieme Σ e Σ' hanno elementi-coppie comuni. Indicando con Σ^{-1} la inversa della similitudine Σ, il prodotto $\Sigma^{-1}.\Sigma'$ è una similitudine diretta S, i punti uniti della quale sono i punti che corrispondono a uno stesso punto in Σ e Σ'.

La similitudine diretta S può essere: 1°. una rotazione; 2°. il prodotto di una rotazione per una omotetia, con lo stesso centro; 3°. una omotetia; 4°. una traslazione. Nel 1° e 2° caso, Σ e Σ' hanno un solo elemento-coppia comune, a distanza finita; nel 3° caso, hanno a comune un elemento a distanza finita e tutti gli elementi che si trovano sulla retta all'infinito; nel 4° caso hanno comuni soltanto gli elementi che si trovano sulla retta all'infinito.

Esaminiamo il 3° e 4° caso. I punti uniti all'infinito di Σ e Σ' coincidono, e coincidono perciò anche le direzioni principali di Σ e Σ'. Ma può darsi che la prima direzione principale di Σ coincida con la prima di Σ', o con la seconda; se la prima direzione principale di Σ coincide con la seconda di Σ', r_1 incontra necessariamente r'_2 in un punto A, e r_2 incontra r'_1 in un punto B; il rettangolo che ha per vertici opposti A e B e i lati paralleli alle direzioni principali ha gli altri due vertici corrispondenti tanto in Σ che in Σ'. Esiste perciò, oltre le coppie all'infinito, una coppia a distanza finita comune a Σ e Σ'.

Se poi coincidono le prime direzioni principali di Σ e Σ', ed esiste un punto A comune a r_1 e r'_1 e quindi un punto B comune a r_2 e r'_2, si ha analogamente che Σ e Σ' hanno una coppia comune a distanza finita, e inversamente. Ne segue che *affinchè Σ e Σ' non abbiano una coppia comune a distanza finita, è necessario e sufficiente che le rette rappresentatrici* r_1 *e* r_2 *di Σ siano parallele rispettivamente alle rette rappresentatrici* r'_1 *e* r'_2 *di Σ'.*

In questo caso, Σ e Σ' si diranno *parallele.*

7. Due similitudini inverse parallele hanno a comune le coppie di punti corrispondenti all'infinito, ma questa non è una caratteristica delle similitudini parallele. Fra le coppie di punti corrispondenti all'infinito diamo una particolare importanza a quella costituita dai punti all'infinito delle rette rappresentatrici, e consideriamola come l'*elemento-coppia all'infinito* della similitudine; allora avremo che due similitudini parallele hanno lo stesso elemento all'infinito, mentre due similitudini non parallele non hanno lo stesso elemento all'infinito, ma hanno un elemento-coppia comune a distanza finita.

8. Una coppia di punti reali del piano potrà per noi essere costituita non solo di due punti all'infinito (nel qual caso dovrà essere riguardato come elemento all'infinito comune a tutte le similitudini parallele le cui rette rappresentatrici hanno le direzioni dei due punti, le quali non devono essere ortogonali), ma anche di un punto all'infinito e di un punto a distanza finita. Onde poter considerare anche similitudini inverse contenenti simili coppie, riguarderemo come *similitudini inverse degeneri* quelle corrispondenze nelle quali a un determinato punto P_1 considerato nella prima figura corrisponde ogni punto del piano (al finito e all'infinito), e ad ogni punto diverso da P_1 corrispondono tutti i punti della retta all'infinito; oppure, a ogni punto del piano considerato della prima figura corrisponde un determinato punto P_2, e ad ogni punto all'infinito corrisponde ogni punto del piano (al finito o all'infinito).

Tali similitudini degeneri sono dunque di due specie; sono *della*

1ª specie quelle nelle quali il *centro* P_1 è da considerarsi nella prima figura; *di 2ª specie* quelle nelle quali il *centro* P_2 è da considerarsi nella seconda figura. Si indicheranno rispettivamente con $\{P_1, \omega\}$ e $\{\omega, P_2\}$.

Due similitudini degeneri $\{P, \omega\}$ e $\{Q, \omega\}$ hanno a comune tutti gli elementi-coppie del tipo $[M, N_\infty]$; esse si riguarderanno come parallele e il loro elemento all'infinito comune sarà rappresentato da uno qualunque degli elementi-coppie suddetti. Analogamente per due similitudini degeneri della 2ª specie.

Invece, due similitudini degeneri di specie diversa $\{P, \omega\}$ e $\{\omega, Q\}$ hanno a comune la coppia $[P, Q]$ a distanza finita.

Finalmente, riguarderemo convenzionalmente come *similitudine inversa degenere all'infinito* quella corrispondenza alla quale appartengono tutti gli elementi-coppie all'infinito delle similitudini degeneri e non degeneri.

9. Grazie alle convenzioni fatte abbiamo che *due similitudini inverse, considerate come insieme di elementi-coppie, hanno in ogni caso uno ed un solo elemento comune;* è facile poi accertare che, *dati due elementi-coppie al finito o all'infinito, esiste sempre una ed una sola similitudine inversa che li contiene.*

Ciò è evidente quando le coppie date sono a distanza finita, e formate di punti distinti; gli altri casi vanno esaminati ad uno ad uno. Per es. siano date le coppie $[M_1, M_2]$ e $[N_{1\infty} N_{2\infty}]$; consideriamo la direzione che biseca l'angolo acuto delle direzioni $N_{1\infty}$ e $N_{2\infty}$ (che non possono essere ortogonali), e costruiamo un rettangolo M_1AM_2Q coi lati inclinati di $\frac{\pi}{4}$ sulla bisettrice suddetta, in modo di più che la direzione M_1A sia quella che forma l'angolo $+\frac{\pi}{4}$, e la M_1B quella che forma l'angolo $-\frac{\pi}{4}$. Per A e B conduciamo r_1 e r_2 nelle direzioni $N_{1\infty}$ e $N_{2\infty}$ rispettivamente; la similitudine inversa $\{r_1, r_2\}$ sarà quella che contiene le due coppie date. Analogamente per gli altri casi.

Possiamo perciò concludere che *le similitudini inverse, nell'insieme che ha per elementi le coppie di punti reali di un piano, presentano le medesime proprietà di appartenenza che caratterizzano la retta nel piano.*

II. — **Coordinate di un elemento-coppia.**

10. Consideriamo in un piano due assi coordinati ortogonali X, Y (vedi figura). Faremo corrispondere gli elementi-coppie di quella speciale similitudine inversa le cui rette rappresentatrici coincidono nell'asse X, e che è la simmetria rispetto a questo asse, ai valori di una variabile complessa X, nel modo seguente: se

$$X = a + ia'$$

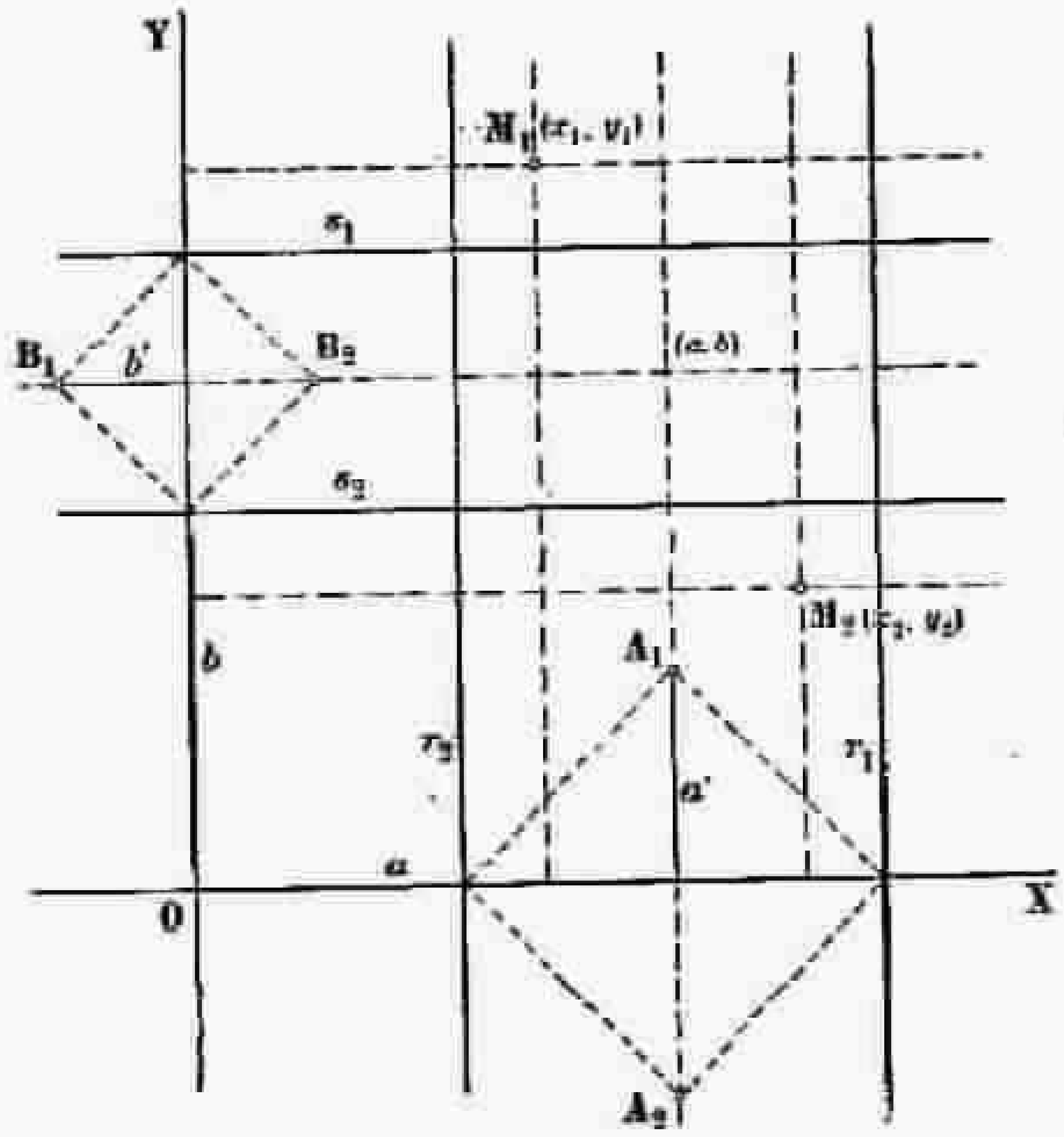
è il valore considerato di X, ad esso corrisponderà quell'elemento $[A_1, A_2]$ della similitudine $\{X, X\}$ per il quale, rispetto agli assi cartesiani X, Y, si ha:

$$A_1 \equiv (a, a'), \qquad A_2 \equiv (a, -a').$$

Analogamente, al valore

$$Y = b + ib'$$

di una variabile complessa Y, faremo corrispondere quell'elemento



$[B_1, B_2]$ della similitudine $\{Y, Y\}$, che è la simmetria rispetto all'asse Y, per il quale rispetto agli assi cartesiani X, Y si ha:

$$B_1 \equiv (b, -b'), \qquad B_2 \equiv (b, b').$$

E alla coppia di valori complessi (X, Y) faremo corrispondere l'elemento coppia $[M_1, M_2]$ comune alle due similitudini inverse condotte per gli elementi $[A_1, A_2]$ e $[B_1, B_2]$, *parallele* rispettivamente alle similitudini $\{Y, Y\}$ e $\{X, X\}$.

Così avremo che a ogni coppia di valori di due variabili complesse corrisponde un elemento $[M_1, M_2]$ dell'insieme costituito delle coppie di punti reali del piano; e inversamente, a ogni elemento $[M_1, M_2]$ di tale insieme corrispondono due valori delle due variabili complesse.

Poichè alle infinite coppie di valori di due variabili complesse corrispondono anche, rispetto agli assi cartesiani X, Y, gli infiniti punti reali e immaginari del piano, noi possiamo dire di avere ottenuto una rappresentazione completa dell'insieme dei punti reali e immaginari di un piano nell'insieme delle coppie di punti reali del piano stesso.

Vediamo ora qualche carattere di questa rappresentazione.

11. Per la costruzione dell'elemento $[M_1, M_2]$ corrispondente ai valori

$$X = a + ia', \qquad Y = b + ib',$$

ricordiamo (5) che la similitudine $\{r_1, r_2\}$ passante per $[A_1, A_2]$ e parallela a $\{Y, Y\}$ è il prodotto di una traslazione e di una simmetria rispetto alla bisettrice della striscia $r_1 r_2$, e che analogamente avviene per la similitudine $\{s_1, s_2\}$ passante per $[B_1, B_2]$ e parallela a $\{X, X\}$. Ponendo rispetto agli assi cartesiani X, Y:

$$M_1 \equiv (x_1, y_1), \qquad M_2 \equiv (x_2, y_2),$$

avremo:

$$x_1 = a - b', \quad y_1 = b + a', \quad x_2 = a + b', \quad y_2 = b - a', \tag{I}$$

dalle quali si ricava:

$$a = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad b = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad a' = \frac{y_1 - y_2}{2}, \quad b' = \frac{x_2 - x_1}{2},$$

e quindi:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{x_1 + x_2}{2} + i\,\frac{y_1 - y_2}{2}, \\ Y &= \frac{y_1 + y_2}{2} + i\,\frac{x_2 - x_1}{2}. \end{aligned}\right. \tag{II}$$

Sono queste le relazioni che legano le coordinate X, Y di un elemento-coppia alle coordinate cartesiane reali x_1, y_1; x_2, y_2 dei due punti che lo costituiscono. Da queste relazioni e dalle (I) si ricava:

1°. *Gli elementi-coppie che corrispondono a valori reali delle coordinate* X, Y *sono costituiti di due punti coincidenti, e coincidenti precisamente in quel punto del piano che, rispetto agli assi cartesiani* X, Y, *ha quelle stesse coordinate reali.*

Possiamo perciò dire che la nostra rappresentazione completa dei punti di un piano (reali e immaginari) è una estensione della rappresentazione ordinaria, in quanto che i punti reali del piano sono rappresentati *dai punti stessi*, solo considerati come coppie di punti coincidenti.

2°. *I due elementi-coppie che corrispondono a valori coniugati delle coordinate* X, Y *sono costituiti dei medesimi punti, solo scambiati uno con l'altro; di modo che se* [P, Q] *rappresenta un certo punto immaginario del piano,* [Q, P] *rappresenta il punto coniugato.*

III. — Rappresentazione completa della retta.

12. Nella nostra rappresentazione dell'insieme dei punti reali e immaginari di un piano nell'insieme delle coppie di punti reali del piano stesso, un ente E costituito di punti del piano obiettivo verrà rappresentato da un insieme di elementi-coppie considerando i primi punti di tali coppie come costituenti una prima figura, e i secondi punti delle coppie stesse come costituenti una seconda figura, avremo sul piano rappresentativo una corrispondenza C. Inversamente, ogni corrispondenza C fra i punti reali del piano rappresentativo, considerata come insieme di elementi-coppie, rappresenta un ente E costituito di punti del piano obiettivo.

Se l'ente E è reale, ossia se, contenendo un punto, contiene anche il suo coniugato, la corrispondenza C è involutoria. I punti reali dell'ente E sono i punti uniti della corrispondenza C.

13. Vediamo qual'è la corrispondenza C quando l'ente E è una retta. Sia l'equazione di essa, rispetto agli assi cartesiani X, Y:

$$(A + iA')\,X + (B + iB')\,Y + \frac{C + iC'}{2} = 0;$$

per X e Y poniamo le espressioni date dalle (II) del n. 11, indi annulliamo separatamente la parte reale e la immaginaria, e risolviamo le due equazioni lineari che si ottengono rispetto a x_2 e y_2; avremo:

$$x_2 = \frac{-(A^2+A'^2-B^2-B'^2)x_1 - 2(AB+A'B')y_1 - (AC+A'C'+BC'-B'C)}{(A'+B)^2+(A-B')^2},$$

$$y_2 = \frac{-2(AB+A'B')x_1 + (A^2+A'^2-B^2-B'^2)y_1 + (AC'-A'C-BC-B'C')}{(A'+B)^2+(A-B')^2}.$$

Queste sono le formole che legano le coordinate di un punto (x_1, y_1) a quelli del punto (x_2, y_2) ad esso corrispondente nella corrispondenza C che rappresenta la retta.

Manifestamente C è una proiettività, che non degenera finchè non si abbia

$$[(A'+B)^2+(A-B')^2].[(A^2+A'^2-B^2-B'^2)^2+(AB+A'B')^2]=0.$$

Avviene questo solo quando sia

$$A = B', \qquad A' = -B,$$

oppure quando sia

$$A^2 - B^2 = -A'^2 + B'^2, \qquad AB = -A'B',$$

delle quali segue:

$$A + iB = \pm\, i\,(A' + iB'); \qquad A = \mp B', \quad A' = \pm B.$$

Per tali relazioni si ha che la proiettività C degenera solo quando l'equazione della retta sia della forma

$$X \pm iY = \gamma,$$

con γ reale o complesso. Escludiamo per ora questo caso.

Nel caso generale, la proiettività C è una affinità, perchè in essa la retta all'infinito è unita. Se il punto (x_1, y_1) descrive una retta di coefficiente angolare μ, il punto corrispondente (x_2, y_2) descriverà una retta di coefficiente angolare μ'; e poichè è

$$\mu = \lim_{x_1=\infty} \frac{y_1}{x_1}, \qquad \mu' = \lim_{x_1=\infty} \frac{y_2}{x_2},$$

si ha la relazione:

$$\mu' = \frac{-2(AB + A'B') + (A^2 + A'^2 - B^2 - B'^2)\mu}{-(A^2 + A'^2 - B^2 - B'^2) - 2(AB + A'B')\mu}.$$

Di qui si vede che, poichè cambiando μ in $-\frac{1}{\mu}$ anche μ' si cambia in $-\frac{1}{\mu'}$, a due rette ortogonali della prima figura corrispondono due rette ortogonali della seconda figura; ciò basta per poter affermare che i fasci di raggi corrispondenti sono direttamente o inversamente uguali. Se poi si pone $\mu = \mu'$, si ha una equazione che ha sempre due radici reali e non può averne infinite; i fasci di raggi corrispondenti sono perciò inversamente uguali, e l'affinità C è una similitudine inversa.

Si ha dunque che, nel caso generale, *una retta ha la sua rappresentazione completa in una similitudine inversa non degenere, considerata come insieme di elementi-coppie.* È manifesto poi, per il fatto che una similitudine inversa è determinata da due sue coppie, che *ogni similitudine inversa non degenere rappresenta una retta.*

Se la retta è reale, la similitudine che la rappresenta è una simmetria che ha per asse la retta reale stessa.

14. Consideriamo il caso finora escluso, nel quale l'equazione della retta abbia una delle due forme:

$$X + iY = C + iC', \qquad X - iY = C - iC'.$$

Sono queste le equazioni delle due rette che dal punto reale di coordinate cartesiane C, C' vanno ai punti ciclici del piano. Ponendo per X e Y le espressioni date dalle (II) e uguagliando separatamente le parti reali e le immaginarie, si ha nel primo caso:

$$x_1 = C, \qquad y_1 = C',$$

e nel secondo caso:

$$x_2 = C, \qquad y_2 = C'.$$

Nel primo caso adunque al punto $P \equiv (C, C')$, considerato nella prima figura, corrisponde nella seconda figura un punto qualunque del piano, e a un punto diverso da P corrispondono i punti della retta all'infinito; la corrispondenza che rappresenta la retta considerata è perciò la similitudine inversa degenere $\{P, \omega\}$ (8). Nel secondo caso invece il punto P va considerato nella seconda figura, e la corrispondenza è la similitudine inversa degenere $\{\omega, P\}$.

Gli elementi all'infinito delle similitudini inverse rappresentano i punti all'infinito delle rette da esse rappresentate; si ha perciò che *le similitudini inverse degeneri* $\{P, \omega\}$ *e* $\{\omega, P\}$ *rappresentano le rette che dal punto reale* P *vanno ai punti ciclici del piano; e gli elementi-coppie del tipo* $[P, A_\infty]$ *e* $[Q_\infty, P]$ *rappresentano i punti ciclici del piano.*

Le rette che dal punto rappresentato dall'elemento-coppia $[A_1, A_2]$ vanno ai punti ciclici son rappresentate dalle similitudini degeneri $\{A_1, \omega\}$ e $\{\omega, A_2\}$.

15. Retta passante per due punti dati. — Nel caso generale, i due punti sono rappresentati da due elementi-coppie $[M_1, M_2]$ e $[N_1, N_2]$; nella similitudine inversa passante per essi le rette M_1N_1 e M_2N_2 sono corrispondenti, e la bisettrice di uno dei loro angoli ha la direzione di uno dei punti uniti all'infinito. Costruiamo due rettangoli M_1AM_2B e N_1CN_2D coi lati M_1A e N_1C paralleli e inclinati di $\frac{\pi}{4}$ sulla bisettrice suddetta; le rette AC e BC sono le due rappresentatrici della similitudine inversa che rappresenta la retta passante per i punti dati.

Quale di esse sia la prima e quale la seconda si vedrà a norma del n. 4.

La costruzione si semplifica molto nei casi particolari.

16. Intersezione di due rette. — Le due rette sono rappresentate, nel caso generale, da due similitudini inverse $\{r_1, r_2\}$ e $\{s_1, s_2\}$. Presi due punti A_1 e B_1 nel modo più opportuno per la semplicità della costruzione, determiniamo i loro corrispondenti A_2, B_2 e A'_2, B'_2 nelle due similitudini; indi determiniamo il punto unito U_2 nella similitudine diretta nella quale ad A_2 e B_2 corrispondono A'_2 e B'_2 (6).

Per questo, detto M il punto d'incontro di A_2B_2 con $A'_2B'_2$, costruiamo le circonferenze $A_2A'_2M$ e $B_2B'_2M$; esse, oltre che in M, s'incontrano in un altro punto, che è precisamente U_2.

Il punto U_2 corrisponde a uno stesso punto U_1 in ambedue le similitudini, e l'elemento-coppia $[U_1, U_2]$ rappresenta il punto comune alle due rette da esse rappresentate.

Anche qui, la costruzione si semplifica nei casi particolari.

IV. — Rappresentazione completa del cerchio e problemi relativi.

17. Proponiamoci ora di vedere quale corrispondenza fra i punti reali del piano, considerata come insieme di elementi-coppie, stia a rappresentare l'insieme dei punti reali e immaginari di un cerchio; per questo verranno in considerazione quelle particolari corrispondenze quadratiche che sono le *affinità circolari di* Möbius [1], caratte-

[1] Möbius, *Die Theorie der Kreisverwandschaft in rein geometrischer Darstellung.* Werke, Bd. II.

rizzate dal fatto di avere due vertici dei triangoli fondamentali nei punti ciclici del piano, i quali possono essere omologhi di se stessi (affinità circolare *diretta*) o omologhi l'uno dell'altro (affinità circolare *inversa*).

Sono queste le sole corrispondenze che trasformano cerchi in cerchi, oltre le similitudini alle quali possono in particolare ridursi. Le affinità circolari conservano gli angoli, e le *dirette* ne conservano anche il senso, mentre le *inverse* lo invertono.

Per stabilire una affinità circolare diretta fra i punti di un piano, basta stabilire una proiettività fra i raggi del fascio che ha per centro uno dei punti ciclici C, e un'altra proiettività fra i raggi del fascio che ha per centro l'altro punto ciclico C', e far corrispondere a ogni punto X del piano il punto X' nel quale s'incontrano i raggi CX' e C'X' corrispondenti ai raggi CX e C'X. Se l'affinità dev'essere inversa, si deve invece stabilire una proiettività fra i fasci C e C' e un'altra fra i fasci C' e C. Affinchè la corrispondenza sia reale, ossia affinchè in essa a punti reali corrispondano punti reali, occorre che a raggi coniugati fra loro corrispondano, nelle due proiettività, raggi coniugati fra loro. Allora si ha una corrispondenza fra i punti reali del piano che è solo una parte della corrispondenza totale.

18. Sia K un cerchio, reale o immaginario; mentre un punto X lo percorre, i raggi CX e C'X descrivono due fasci proiettivi. Nel medesimo tempo il punto X' coniugato di X percorre il cerchio K' coniugato di K, e anche i raggi C'X' e CX' descrivono due fasci proiettivi. Ne segue che il punto M nel quale s'incontrano i raggi CX e C'X', e il punto M' nel quale s'incontrano i raggi C'X e CX', si corrispondono in una affinità circolare inversa (17).

Sia $[A_1, A_2]$ l'elemento-coppia che rappresenta il punto X del cerchio K; avremo (14):

$$X \equiv [A_1, A_2], \qquad CX \equiv \{A_1, \omega\}, \qquad C'X \equiv \{\omega, A_2\},$$
$$X' \equiv [A_2, A_1], \qquad CX' \equiv \{A_2, \omega\}, \qquad C'X' \equiv \{\omega, A_1\}.$$

Il punto M nel quale s'incontrano i raggi CX e C'X' è rappresentato dall'elemento-coppia $[A_1, A_1]$ (8), e quindi è il punto reale A_1; il punto M', nel quale s'incontrano i raggi C'X e CX', è il punto reale A_2. Per quello che abbiamo detto, i punti A_1 e A_2 si corrispondono in una affinità circolare inversa, la quale è manifestamente reale.

Notiamo che gli elementi-coppie che rappresentano i punti del cerchio K esauriscono tutta la parte reale, considerata come insieme di elementi-coppie, dell'affinità circolare suddetta; infatti, se $[B_1, B_2]$ è un elemento di questa parte reale, la retta $CB_1 \equiv \{B_1, \omega\}$ incontra necessariamente il cerchio K in un punto, che non può essere rappresentato altro che dalla coppia $[B_1, B_2]$.

Il ragionamento fatto è invertibile, e si può concludere che *un cerchio ha la sua rappresentazione completa in una affinità circolare inversa, reale, limitata ai punti reali e considerata come insieme di ele-*

menti-coppie; e inversamente, ogni affinità circolare soddisfacente a queste condizioni è la rappresentazione completa di un cerchio.

19. Le affinità circolari sono corrispondenze quadratiche che hanno due vertici dei triangoli fondamentali nei punti ciclici del piano; gli altri due vertici, omologhi, sono in generale a distanza finita. Ad uno di essi S, considerato nella prima figura, corrispondono tutti i punti della retta all'infinito, l'altro T, considerato nella seconda figura, corrisponde a tutti i punti della retta all'infinito.

I *punti centrali* S e T sono centri di due fasci di semirette corrispondenti, *inversamente* uguali se l'affinità è *diretta*, *direttamente* uguali se è *inversa*. Se M, M' sono due punti corrispondenti si ha, in ambedue i casi:

$$SM \,.\, TM' \equiv k^2,$$

nella quale k^2 è la *costante* dell'affinità.

Una affinità circolare *inversa* è involutoria quando S e T coincidono, e coincidono anche le semirette corrispondenti uscenti da S e T, o sono opposte. Nel primo caso la affinità possiede un cerchio di punti uniti e rappresenta un cerchio K reale, i punti reali del quale sono quelli del cerchio c dei punti uniti; gli altri punti di K sono rappresentati dalle coppie di punti *inversi* rispetto al cerchio c.

Nel secondo caso il cerchio K è reale in quanto che la sua equazione ha coefficienti reali, ma tutti i suoi punti sono immaginari.

20. Vediamo, nel caso generale, qual'è il punto rappresentato dall'elemento-coppia [S, T]. La retta rappresentata dalla similitudine {S, ω} incontra il cerchio K *solo* in uno dei punti ciclici (perchè ad S corrispondono, nell'affinità, solo i punti della retta all'infinito) e quindi è la tangente a K in questo punto ciclico; così la retta rappresentata da {ω, T} è la tangente a K nell'altro punto ciclico; il punto nel quale s'incontrano le due tangenti è il centro del cerchio, ed è rappresentato dall'elemento-coppia [S, T].

Le similitudini degeneri {S, ω} e {ω, T} rappresentano gli asintoti del cerchio.

21. Fermiamoci a risolvere alcuni problemi relativi a rette e cerchi reali; secondo i nostri concetti, una retta reale deve immaginarsi completata con tutti gli elementi-coppie della simmetria che ha per asse la retta stessa, e un cerchio reale con tutti gli elementi-coppie della *inversione quadrica* o *trasformazione per raggi vettori reciproci* rispetto al cerchio stesso.

Intersezioni di una retta r con un cerchio c, quando r e c non s'incontrano in punti reali. — Si tratta di determinare due punti simmetrici rispetto ad r e inversi rispetto a c; essi saranno le intersezioni M ed N della circonferenza descritta con centro in un punto P di r e raggio uguale a una tangente condotta da P a c, col diametro di c perpendicolare ad r. I due elementi-coppie [M, N] e [N, M] rappresentano i punti d'intersezione, coniugati, di r con c.

22. Intersezioni di due cerchi c e c', che non s'incontrano in punti reali. — Si deve determinare la coppia comune alle due inversioni quadriche determinate dai cerchi c e c', che è anche la coppia dei punti uniti nella involuzione rettilinea alla quale appartengono le coppie di punti nelle quali c e c' sono segate dalla retta dei centri.

Se M, N sono i due punti uniti suddetti, gli elementi-coppie [M, N] e [N, M] rappresentano le intersezioni di c e c'. La retta che li congiunge, ossia l'asse radicale di c e c', è reale ed è la retta r asse del segmento MN.

I punti M ed N si possono ottenere appunto costruendo prima l'asse radicale r mediante la considerazione di un altro cerchio c'' che seghi c e c' in punti reali, e determinando poi le intersezioni di r con c come nel caso precedente.

23. Osservazione sul fascio di cerchi. — Le considerazioni fatte mostrano la identità sostanziale di costituzione del fascio di cerchi nei due casi che i cerchi che lo determinano si incontrino in punti reali o non s'incontrino in punti reali. Infatti, in questo secondo caso non esistono punti reali comuni a tutti i cerchi del fascio, ma esistono due punti M, N, inversi rispetto a tutti i cerchi del fascio, i quali hanno perciò a comune i due punti immaginari rappresentati dagli elementi-coppie [M, N] e [N, M].

24. Tangenti a un cerchio c da un punto interno P. — Si costruisca la polare r di P rispetto a c, e si determinino (21) le sue intersezioni [M, N] e [N, M] con c; le due similitudini inverse che passano per l'elemento-coppia [P, P] e i due suddetti rappresentano le tangenti, immaginarie coniugate, condotte da P a c.

Le rette rappresentatrici comuni (salvo l'ordine) alle due similitudini si ottengono costruendo il quadrato MANB e conducendo le rette PA e PB.

25. Intersezioni di un cerchio reale c con una retta immaginaria passante per il centro. — La retta immaginaria sarà rappresentata da una similitudine inversa, le cui rette rappresentatrici r_1, r_2 s'incontreranno nel centro O di c. È manifesto che le coppie comuni alla similitudine $\{r_1, r_2\}$ e alla inversione rispetto al cerchio c si trovano sulla prima bisettrice della similitudine, ossia sulla bisettrice r degli angoli acuti di r_1 e r_2. Consideriamo una sola delle semirette nelle quali r è divisa da O, e sia A la sua intersezione con c e B_∞ il suo punto all'infinito.

A ogni punto X della semiretta corrisponde un punto X' nella similitudine e un punto X'' nella inversione; X' e X'' si corrispondono in una proiettività. Si determini, col sussidio di r_1 e r_2, il corrispondente A' di A nella similitudine; avremo che mentre X va in O, A, B_∞, il punto X' va in O, A', B_∞ e il punto X'' va in B_∞, A, O. Dunque la proiettività fra X' e X'' è una involuzione, della quale O è il centro e A, A' una coppia.

Si determini nel segmento AA' un punto M' in modo che OM' sia medio proporzionale fra OA e OA'; sarà M' un punto unito dell'involuzione, e, se M è il punto al quale corrisponde M' nella similitudine, l'elemento-coppia [M, M'] rappresenta una delle intersezioni della retta $\{r_1, r_2\}$ con c.

L'altra intersezione è rappresentata dalla coppia simmetrica di [M, M'] rispetto al centro O.

26. Tangente a un cerchio c in un suo punto immaginario. — Il punto immaginario nel quale si vuole la tangente sarà rappresentato da un elemento-coppia $[M_1, M_2]$, con M_1 e M_2 inversi rispetto a c. Conduciamo la retta reale r passante per il punto dato, cioè l'asse del segmento M_1M_2, e determiniamo il polo P di essa rispetto a c. Poichè il punto $[M_1, M_2]$ sta su r, la polare di $[M_1, M_2]$, ossia la tangente in esso, deve passare per P. La tangente richiesta è dunque rappresentata dalla similitudine inversa passante per le coppie [P, P] e $[M_1, M_2]$.

Le rette rappresentatrici si ottengono facilmente come al n. 24.

(Continua) P. Benedetti.

SOPRA LE TRASFORMAZIONI BI-RAZIONALI TRILINEARI

È noto che, nella moderna geometria, si fa largo uso di trasformazioni di figure; il metodo delle trasformazioni, variamente applicato, permette di dedurre molte proprietà delle figure geometriche le quali, per altra via, difficilmente si potrebbero dimostrare.

La maggior parte di tali trasformazioni rientra nelle *trasformazioni bi-razionali*, dovute al Cremona, nelle quali ad un punto d'una certa figura corrisponde, in generale, un solo punto nell'altra figura.

Ci proponiamo lo studio d'una speciale trasformazione bi-razionale di punti d'un piano mediante operazioni basate su un triangolo fisso in esso assegnato.

1. Dato un triangolo ABC e scelti tre coefficienti $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$, siano P_a, P_b, P_c tre punti appartenenti rispettivamente alle rette BC, CA, AB; ai punti P_a, P_b, P_c facciamo corrispondere, sui lati rispettivi, i punti P'_a, P'_b, P'_c, in guisa che si abbia

$$(BCP_a) \,.\, (BCP'_a) = \lambda_a; \;\; (CAP_b)(CAP'_b) = \lambda_b; \;\; (ABP_c)(ABP'_c) = \lambda_c.$$

In tal modo, sopra ciascuno dei lati del triangolo viene stabilita una corrispondenza biunivoca, che non è altro che una involuzione. Viceversa, stabiliti comunque, su uno dei lati del triangolo, per es.

su BC, due punti P_a, P'_a, l'involuzione individuata dalle coppie B, C; P_a, P'_a è tale che, al variare di P_a, il prodotto $(BCP_a) . (BCP'_a)$ si mantiene costante.

Le involuzioni, così stabilite sui lati BC, CA, AB del triangolo ABC, vengono proiettate, da A, B, C, rispettivamente, secondo tre involuzioni di raggi di centri A, B, C, e, per nota proprietà, abbiamo

$$(bcp_a)\,(bcp'_a) = \frac{b^2}{c^2}\lambda_a\,;\quad (cap_b)\,(cap'_b) = \frac{c^2}{a^2}\lambda_b\,;\quad (abp_c)\,(abp'_c) = \frac{a^2}{b^2}\lambda_c\,.$$

È evidente che le involuzioni di raggi, aventi i vertici del triangolo per centri, ottenute mercè le suddette proiezioni, sono rispettivamente della medesima specie di quelle esistenti sui lati opposti e dalle quali, per proiezione, sono originate; quindi, secondochè su un lato è assegnata una involuzione iperbolica od ellittica, l'involuzione di raggi proiettanti i punti di esso lato è iperbolica od ellittica.

Nelle involuzioni sopra descritte due vertici sono punti corrispondenti sul lato che li contiene; due lati sono raggi corrispondenti nel fascio da essi individuato.

Nella trattazione che ci occupa acquistano importanza i valori λ_a, λ_b, λ_c, a cui rispettivamente si mantengono uguali i prodotti dei rapporti semplici staccati su ciascun lato da coppie di punti corrispondenti; perciò noi, chiamando j_a, j_b, j_c le involuzioni assegnate come sopra rispettivamente su ciascun lato, chiameremo *caratteristiche* di tali involuzioni i coefficienti λ_a, λ_b, λ_c. Chiameremo *corrispondente* d'un punto, appartenente a un lato del triangolo, quel punto che gli corrisponde nell'involuzione assegnata su quel lato.

2. Sia P_b, P'_b una coppia di punti corrispondenti nell'involuzione j_b; P_c, P'_c una coppia di punti corrispondenti nell'involuzione j_c. Le infinite coniche che passano per P_b, P'_b, P_c, P'_c o non tagliano la retta BC, oppure la tagliano in due punti P_a, P'_a corrispondenti d'una involuzione nella quale sono anche corrispondenti i punti Q_a, Q'_a d'incontro di BC rispettivamente con $P_bP'_c$, $P_cP'_b$. Per conseguenza sarà

$$\lambda_a = (BCP_a) . (BCP'_a) = (BCQ_a) . (BCQ'_a).$$

Per il teorema di Menelao, applicato al triangolo ABC, tagliato dalle trasversali $P_bP'_cQ_a$, $P_cP'_bQ'_a$, si ha

$$(BCQ_a) . (CAP_b) . (ABP'_c) = 1,$$
$$(BCQ'_a) . (CAP'_b) . (ABP_c) = 1;$$

dal prodotto di queste due, per la relazione precedente, scende

$$\lambda_a\lambda_b\lambda_c = 1.$$

Dunque si è assodato che " i punti in cui una conica taglia i tre " lati d'un triangolo determinano, insieme coi vertici del triangolo " stesso, sui lati di esso, tre involuzioni le cui caratteristiche hanno " per prodotto l'unità positiva ".

Assegnate ora, sui rispettivi lati, tre involuzioni j_a, j_b, j_c, mediante le caratteristiche λ_a, λ_b, λ_c, coll'unica condizione che sia $\lambda_a\lambda_b\lambda_c = 1$, siano P_a, P'_a; P_b, P'_b; P_c, P'_c coppie di punti corrispondenti; questi sei punti appartengono ad una conica. Invero, fra le infinite coniche passanti pei quattro punti P_b, P'_b, P_c, P'_c, le quali tagliano BC in punti d'una stessa involuzione, scegliamo quella che passa per P_a; essa taglia BC in un altro punto che, insieme colla coppia BC, determina su BC una involuzione j'_a di caratteristica λ'_a, tale che

$$\lambda'_a\lambda_b\lambda_c = 1;$$

quindi, per la condizione posta è $\lambda'_a = \lambda_a$: l'involuzione j'_a coincide colla j_a e, quindi, P'_a coincide con il punto in cui la conica $P_bP'_bP_cP'_cP_a$ taglia ulteriormente BC.

Resta, con ciò, pienamente dimostrato che: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè tre punti, presi ordinatamente sui tre lati d'un triangolo, e i loro corrispondenti, appartengano ad una conica, è che il prodotto delle caratteristiche delle tre involuzioni sui lati, sia uguale a 1.*

E dualmente, avremo che: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè tre rette, uscenti ordinatamente dai vertici d'un triangolo, e le loro corrispondenti, siano tangenti ad una conica, è che il prodotto delle caratteristiche delle tre involuzioni sia uguale a 1.*

Il caso in cui il prodotto delle caratteristiche delle tre involuzioni sia uguale all'unità positiva è dunque di speciale importanza; esso stabilisce, come vedremo, una vera corrispondenza fra elementi del piano del triangolo, riferiti al triangolo medesimo. Questo caso, appunto sarà da noi preso in considerazione col nome di *trasformazione bi-razionale trilineare.*

3. Assegnata dunque, nel piano d'un triangolo ABC, una trasformazione bi-razionale trilineare, se ai punti P_a, P_b, P_c appartenenti rispettivamente alle rette BC, CA, AB, corrispondono, nelle involuzioni j_a, j_b, j_c ordinatamente i punti P'_a, P'_b, P'_c, i punti P_a, P_b, P_c, P'_a, P'_b, P'_c appartengono ad una conica; tale conica può degenerare in due rette, e, all'uopo, è necessario e sufficiente che tre di quei sei punti, per es. P_a, P_b, P_c, risultino in linea retta: allora anche P'_a, P'_b, P'_c saranno situati in linea retta, e potremo dire:

Assegnata, nel piano d'un triangolo, una trasformazione bi-razionale trilineare, se tre punti, presi ordinatamente sui lati del triangolo sono in linea retta, anche i loro corrispondenti nelle relative involuzioni sono in linea retta.

I punti P_a, P_b, P_c e i loro corrispondenti P'_a, P'_b, P'_c vengono proiettati dai vertici opposti secondo sei rette p_a, p_b, p_c; p'_a, p'_b, p'_c tangenti ad una conica; tale conica può degenerare in due punti e in tal caso si può dire:

Assegnata nel piano d'un triangolo una trasformazione bi-razionale trilineare, se le congiungenti i vertici del triangolo con tre punti presi *ordinatamente sui lati opposti sono concorrenti, anche le congiungenti i medesimi vertici con i corrispondenti di essi punti nelle rispettive involuzioni, sono concorrenti.*

Chiameremo *coniugati* due punti del piano del triangolo, quando per ognuno d'essi passano le rette corrispondenti delle congiungenti i vertici del triangolo con l'altro; e *coniugate* due rette del piano del triangolo tali che ognuna d'esse passa pei corrispondenti dei punti d'incontro dell'altra coi lati del triangolo.

In tal modo, ad ogni punto del piano del triangolo viene a corrispondere un punto ben determinato e, in generale, non coincidente con esso; ad ogni retta del piano del triangolo viene a corrispondere una retta ben determinata e, in generale, non coincidente con la prima.

È manifesto che, qualunque sia la trasformazione bi-razionale trilineare, i punti coniugati dei punti d'un lato qualunque coincidono col vertice opposto; le rette coniugate delle rette passanti per un vertice qualunque, coincidono col lato opposto.

4. Supponiamo ora che un punto P si muova nel piano del triangolo ABC, descrivendo una retta: vediamo qual'è il luogo descritto dal suo coniugato P'.

Al muoversi di P sopra una retta p, i raggi BP, CP che lo proiettano da B e C descrivono due fasci proiettivi; contemporaneamente il punto P', coniugato a P, che risulta come intersezione dei corrispondenti di BP, CP nelle rispettive involuzioni, si muove in guisa che BP, BP' descrivono fasci proiettivi; analogamente CP, CP' descrivono fasci pure proiettivi; quindi i fasci descritti da BP', CP' essendo proiettivi con due fasci fra loro proiettivi, risultano proiettivi. Dunque il luogo descritto da P', coniugato di P, è una conica.

Poichè la retta descritta da P taglia i lati del triangolo ABC, in tre punti, generalmente tutti distinti, la conica descritta da P' dovrà necessariamente contenere i tre vertici di ABC (n. 3).

Al muoversi di P sulla retta p, il corrispondente al raggio AP nella involuzione relativa ad A proietta costantemente il punto P' da A; cosicchè, allorquando P cade nel punto P_a d'incontro di p con BC, essendo P'_a il corrispondente di P_a nell'involuzione su BC, la retta AP_a proietterà P' da A; ma, in tal caso, A e P' coincidono (n. 3), dunque AP'_a riesce tangente alla conica. Diremo dunque, conchiudendo:

Stabilita, nel piano d'un triangolo ABC, *una trasformazione birazionale trilineare, i coniugati dei punti d'una retta qualunque appartengono ad una conica circoscritta al triangolo e tangente, nei vertici di esso, alle rette che li congiungono coi punti dei lati opposti che corrispondono, nelle rispettive involuzioni, ai punti in cui essi incontrano la retta.*

E dualmente: *Le rette coniugate delle rette passanti per un punto qualunque sono tangenti ad una conica inscritta nel triangolo, e che tocca* *i lati d'esso nei punti che corrispondono, nelle rispettive involuzioni, ai punti d'incontro dei lati colle ceviane relative al punto dato.*

5. Abbiasi ora una conica Γ circoscritta al triangolo ABC e le tangenti alla conica nei vertici A, B, C del triangolo, incontrino i lati rispettivi nei punti P'_a, P'_b, P'_c: questi punti appartengono a una medesima retta p'. Stabilita comunque una trasformazione bi-razionale trilineare, nelle involuzioni sui lati BC, CA, AB, ai punti P'_a, P'_b, P'_c corrispondono rispettivamente tre punti P_a, P_b, P_c allineati su una retta p. Detto P' un punto qualunque di Γ, sia P il suo coniugato; il punto P deve necessariamente appartenere alla retta p. Infatti, essendo, al muoversi di P', i fasci descritti da BP, BP' fra loro proiettivi, come pure i fasci descritti da CP, CP', i fasci descritti da BP, CP risultano fra loro proiettivi, poichè sono fra loro proiettivi BP' e CP'. Ne segue che P descrive una conica; ma tale conica deve passare pei punti P_a, P_b, P_c e quindi coincide colla retta p.

Resta dunque dimostrato che: *Stabilita comunque una trasformazione birazionale trilineare nel piano d'un triangolo* ABC, *i coniugati dei punti d'una conica circoscritta al triangolo appartengono ad una retta che incontra i lati del triangolo nei punti corrispondenti, nelle rispettive involuzioni, ai punti in cui i lati sono tagliati dalle tangenti alla conica nei vertici opposti.*

E dualmente: *Le rette coniugate delle tangenti ad una conica inscritta nel triangolo passano per un punto le cui ceviane tagliano i lati nei punti che, nelle rispettive involuzioni, corrispondono ai punti di contatto della conica coi lati del triangolo.*

6. Assegnata nel piano d'un triangolo ABC, comunque, una trasformazione bi-razionale trilineare, sia p una retta generica del piano; la conica Γ descritta dal coniugato d'un punto che percorre la p, può avere con questa retta due, uno o nessun punto comune. Se Γ e p hanno i punti P e P' comuni, P e P' sono evidentemente coniugati. Possiamo dunque affermare che la eventuale coppia di punti coniugati, esistente su una data retta è costituita dai punti d'incontro di essa retta con la conica con essa coniugata.

Dualmente si ha che la eventuale coppia di rette coniugate passanti per un punto qualsiasi del piano del triangolo, è costituita dalle tangenti, condotte per esso punto alla conica inviluppata dalle coniugate delle rette passanti pel punto dato.

È evidente che tanto la coppia di punti d'incontro, quanto la coppia di tangenti suddetti possono ottenersi come la coppia comune a due involuzioni.

Infatti, al muoversi d'un punto P sulla retta p, i raggi BP, BP' sono tagliati da p in punti corrispondenti d'una involuzione j_b: analogamente i raggi CP, CP' sono tagliati da p in punti corrispondenti d'una involuzione j_c. La eventuale coppia comune a queste due involuzioni ci dà la coppia di punti coniugati eventualmente esistente sulla retta p.

E dualmente.

7. Nel piano d'un triangolo ABC supponiamo ora assegnate due trasformazioni bi-razionali trilineari j, j' alle quali siano subordinate sui lati le involuzioni j_a, j_b, j_c; j'_a, j'_b, j'_c di caratteristiche $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$; $\lambda'_a, \lambda'_b, \lambda'_c$. D'un punto P_a di BC si trovi il corrispondente P'_a nell'involuzione j_a; sarà

$$(BCP_a) . (BCP'_a) = \lambda_a .$$

Del punto P'_a si trovi il corrispondente P''_a nell'involuzione j'_a; sarà

$$(BCP'_a) . (BCP''_a) = \lambda'_a .$$

Se ne deduce

$$(BCP_a) . (BCP''_a) = \frac{\lambda_a \lambda'_a}{(BCP'_a)^2} .$$

Ora, al variare di P, varia la posizione di P'_a e, quindi, varia il valore del rapporto (BCP'_a), mentre si mantiene costante il prodotto $\lambda_a \lambda_a$; dunque la corrispondenza fra P_a e P''_a non è tale che il prodotto $(BCP_a) . (BCP''_a)$ si mantenga costante.

Consideriamo più punti $P_1, P_2, P_3 \ldots$ d'una retta; i coniugati di essi nella trasformazione j, che indichiamo con $P'_1, P'_2, P'_3 \ldots$ appartengono ad una conica circoscritta ad ABC, e, quindi, se di questi punti troviamo i corrispondenti nella trasformazione j' otterremo altrettanti punti $P''_1, P''_2, P''_3 \ldots$ situati in linea retta.

Diremo dunque: *Assegnate, nel piano d'un triangolo due trasformazioni bi-razionali trilineari, se dei punti coniugati, in una d'esse ai punti d'una retta, troviamo i coniugati nell'altra, otteniamo punti d'una retta.*

E dualmente: *Se delle rette corrispondenti in una d'esse alle rette passanti per un punto, troviamo le coniugate nell'altra, otteniamo rette che passano per un punto.*

8. Una conica qualunque, circoscritta al triangolo ABC, può considerarsi come coniugata d'una retta arbitrariamente assegnata in una certa trasformazione bi-razionale trilineare.

Infatti, detti P'_a, P'_b, P'_c i punti in cui le tangenti alla conica in A, B, C tagliano i lati opposti, e P_a, P_b, P_c i punti in cui la retta data taglia i lati medesimi, si consideri la trasformazione bi-razionale trilineare determinata dalle involuzioni individuate sui tre lati dalle coppie di punti corrispondenti P_a, P'_a; P_b, P'_b; P_c, P'_c. Se dei punti di tale retta troviamo i coniugati, essi appartengono alla conica data.

Quindi, individuata una conica mediante cinque punti e assunti tre d'essi come vertici d'un triangolo base, si trovi degli altri due, i coniugati in una opportuna trasformazione bi-razionale trilineare; allora i coniugati dei punti della retta che unisce questi due punti trovati, appartengono alla conica data. Si possono, in tal modo, ottenere quanti si vogliono punti della conica.

E dualmente: Individuata che sia una conica mediante cinque tangenti, assunte tre d'esse come lati d'un triangolo base, si trovi delle altre due le coniugate in una opportuna trasformazione bi-razionale trilineare; allora le rette coniugate delle rette uscenti dal punto d'incontro di queste due sono tangenti alla conica data. Si possono, in tal modo, ottenere quante si vogliono tangenti alla conica.

9. È opportuno esaminare attentamente le tre involuzioni formanti la trasformazione che stiamo esaminando, fermandoci sulla costruzione di coppie d'elementi corrispondenti di esse; queste considerazioni ci daranno modo di dedurre altre proprietà.

Dato al solito, un triangolo ABC, sia stabilita nel suo piano una trasformazione bi-razionale trilineare; siano j_a, j_b, j_c le tre involuzioni individuate dalle caratteristiche $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$. Ai punti impropriì dei lati BC, CA, AB, nelle rispettive involuzioni corrispondono i centri J_a, J_b, J_c di esse, i quali stanno tutti su una retta, coniugata colla retta all'infinito del piano. Per questi punti si ha

$$(BCJ_a) = \lambda_a; \qquad (CAJ_b) = \lambda_b; \qquad (ABJ_c) = \lambda_c.$$

Le caratteristiche $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$ debbono essere o tutte e tre positive o due negative e l'altra positiva. Nel caso che siano tutte positive, le involuzioni sono tutte e tre iperboliche; su ogni lato vi sono allora due punti doppi, simmetrici rispetto al centro d'involuzione. Di questi punti uno è interno al segmento finito staccato sul lato dai due vertici che gli appartengono, l'altro è esterno, e separano, com'è noto, armonicamente i due vertici. Se U_a, V_a; U_b, V_b; U_c, V_c sono tali punti doppi, sarà

$$(BCU_a) = -\sqrt{\lambda_a}; \qquad (BCV_a) = \sqrt{\lambda_a};$$
$$(CAU_b) = -\sqrt{\lambda_b}; \qquad (CAV_b) = \sqrt{\lambda_b};$$
$$(ABU_c) = -\sqrt{\lambda_c}; \qquad (ABV_c) = \sqrt{\lambda_c};$$

(U_a, U_b, U_c rispettivamente interni ai segmenti finiti BC, CA, AB, V_a, V_b, V_c esterni).

Si riconosce agevolmente che le terne di rette AU_a, BU_b, CU_c: AU_a, BV_b, CV_c: AV_a, BU_b, CV_c; AV_a, BV_b, CU_c concorrono rispettivamente in quattro punti $\Delta, \Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$, mentre le terne di punti V_a, V_b, V_c; V_a, U_b, U_c; U_a, V_b, U_c; U_a, U_b, V_c appartengono rispettivamente a quattro rette $\delta, \delta_a, \delta_b, \delta_c$.

Se le caratteristiche sono due negative e l'altra positiva; solo una involuzione è iperbolica, mentre le altre due sono ellittiche e, solamente su un lato esistono i due punti doppi.

La costruzione di punti corrispondenti nelle tre involuzioni assegnate sui lati può ottenersi molto facilmente col noto metodo del quadrilatero completo. A tale uopo, è utile avvertire che, come coppia di lati opposti del quadrilatero costruendo, si possono scegliere due lati del triangolo. Così, per esempio, per trovare d'un punto Q_a di BC il suo corrispondente Q'_a nell'involuzione j_a assegnata su BC mercè le coppie B, C; P_a, P'_a, si conduca per Q_a una trasversale arbitraria e si uniscano i punti in cui essa taglia AC e AB l'uno con P_a e l'altro con P'_a; la congiungente i punti d'incontro di queste due rette; rispettivamente con AB e AC, taglia BC nel punto Q'_a cercato.

Quando l'involuzione j_a su BC è individuata mercè l'assegnazione del centro J_a d'involuzione, un lato del quadrilatero può scergliersi all'infinito, e la costruzione si riduce alla segnente: Dato un punto P su BC, si conduca per esso la parallela a CA (o AB) che taglia AB (o CA) in un punto F; allora se la J_aF taglia CA (o AB) in E, la parallela per E ad AB (o CA) taglia BC in P', corrispondente di A.

La costruzione di coppie di punti corrispondenti nelle involuzioni assegnate può eziandio eseguirsi mercè fasci di cerchi. Talchè, se l'involuzione j_a su BC è assegnata mercè la coppia P_a, P'_a, detto T il punto d'incontro delle circonferenze circoscritte ai triangoli $AP_aP'_a$, ABC, se la circonferenza ATQ_a taglia ulteriormente BC in un punto Q'_a, Q_a e Q'_a sono punti corrispondenti all'involuzione j_a; il punto in cui AT taglia BC è, com'è noto, il centro dell'involuzione. Evidentemente, Q_a e Q'_a possono coincidere in un punto doppio dell'involuzione.

Dal detto emergono alcune notevoli proprietà:

a) *Assegnata nel piano d'un triangolo una trasformazione bi-razionale trilineare, le congiungenti i vertici del triangolo rispettivamente con i punti in cui la circonferenza circoscritta al triangolo incontra le circonferenze individuate ciascuna da un vertice e da una coppia di punti dell'involuzione subordinata sul lato opposto, tagliano i lati opposti in punti allineati.*

b) *Se una conica qualsiasi taglia i lati* BC, CA, AB *d'un triangolo rispettivamente nei punti* P_a, P'_a; P_b, P'_b; P_c, P'_c, *le congiungenti i vertici* A, B, C *del triangolo rispettivamente coi punti in cui le circonferenze* $AP_aP'_a$, $BP_bP'_b$, $CP_cP'_c$ *tagliano ulteriormente la circonferenza circoscritta al triangoto, incontrano i lati opposti in punti allineati.*

10. Abbiasi una conica Γ qualunque circoscritta al triangolo ABC e sia assegnata una trasformazione bi-razionale trilineare; essa trasformerà la conica Γ in una retta p che taglierà i lati del triangolo in tre punti P_a, P_b, P_c. L'involuzione j_a di punti subordinati su BC viene da A proiettata secondo un'involuzione di raggi, che, a loro volta, tagliano la conica secondo un'involuzione di punti; è noto che le congiungenti coppie di punti corrispondenti in quest'ultima involuzione passano per uno stesso punto (polo). Ora, nella involuzione j_a, al punto P_a in cui p taglia BC corrisponde il punto P'_a in cui questo lato è incontrato dalla tangente alla conica, condotta per A; perciò, se AP_a taglia ulteriormente la conica in A', A e A' si corrispondono nella involuzione, come sopra ottenuta sulla conica: dunque, il polo in questione è precisamente P_a.

Analogamente, le involuzioni subordinate su CA, AB vengono, da B, C proiettate sulla conica in punti in involuzioni di poli P_b, P_c.

Talchè, se le congiungenti A, B, C con un punto Q tagliano rispettivamente la conica in A', B', C' e le rette $A'P_a$, $B'P_b$, $C'P_c$ tagliano la stessa conica in A_1, B_1, C_1, le rette AA_1, BB_1, CC_1 concorrono in Q' coniugato in Q.

Ed ancora, dati due punti generici P e P' nel piano di ABC, se le rette AP, AP'; BP, BP'; CP, CP' tagliano la conica Γ rispettivamente nei punti A'_p, $A'_{p'}$; B'_p, $B'_{p'}$; C'_p, $C'_{p'}$ le rette $A'_pA'_{p'}$; $B'_pB'_{p'}$; $C'_pC'_{p'}$ incontrano rispettivamente i lati BC, CA, AB nei punti in cui essi lati sono tagliati dalla retta coniugata alla conica Γ nella trasformazione bi-razionale trilineare che muta P in P'.

Ed ora siamo in grado d'enunciare le seguenti importantissime proprietà:

1°. *Dato un triangolo e una conica ad esso circoscritta, i punti in cui la conica incontra le congiungenti i vertici con un punto dato, congiunti coi punti in cui i lati, sono tagliati da una retta data, dànno luogo a tre rette che tagliano ulteriormente la conica in tre punti: le congiungenti i vertici del triangolo rispettivamente con tali punti concorrono nel coniugato del punto dato nella trasformazione bi-raziozionale trilineare che muta la conica nella retta data.*

2°. *Le congiungenti i punti in cui la conica taglia le rette che uniscono ciascun vertice del triangolo con due punti dati tagliano i lati rispettivi in tre punti che stanno sulla retta che, nella trasformazione che muta un punto dato nell'altro, è coniugata alla conica.*

3°. *Le tangenti alla conica condotte pei punti in cui essa taglia ulteriormente le congiungenti un punto dato coi vertici del triangolo, tagliano i lati opposti di questo in tre punti allineati.*

E viceversa.

Dato un triangolo e una conica in esso inscritta, le rette tangenti alla conica, ulteriormente condotte pei punti in cui i lati tagliano una retta data incontrano le ceviane d'un punto dato in tre punti; le ulteriori tangenti alla conica, condotte per questi tre punti tagliano rispettivamente i tre lati in punti che stanno sulla retta che è coniugata alla retta data nella trasformazione bi-razionale trilineare che muta la conica data nel fascio di centro al punto dato.

Le congiungenti i vertici del triangolo coi punti d'incontro delle tangenti alla conica, ulteriormente condotte dai punti d'incontro di ciascun lato con due rette date, concorrono in un punto, che, nella trasformazione, in cui le due rette sono coniugate, è coniugato alla conica inviluppo data.

Le congiungenti i vertici del triangolo coi punti di contatto della conica colle ulteriori tangenti ad essa condotte pei punti in cui i lati incontrano una retta data, concorrono in un punto. E viceversa.

11. Queste conclusioni ci forniscono un metodo spiccio per costruire elementi coniugati nella trasformazione bi-razionale trilineare assegnata. Infatti, alle coniche dianzi considerate possiamo rispettivamente sostituire le circonferenze circoscritta ed inscritta.

Di conseguenza possiamo agevolmente dedurre una costruzione abbastanza semplice del seguente problema: " Trovare i punti d'in- " contro d'una retta data con una conica assegnata mediante cinque " punti ".

Sia dato un triangolo ABC e, nel suo piano, due punti M, N. I punti A, B, C, M, N individuano una conica Γ; vogliamo trovare i punti in cui tale conica incontra eventualmente una retta data r. All'uopo, scegliamo la trasformazione bi-razionale che, ai punti della retta r fa corrispondere i punti della circonferenza circoscritta ad ABC. Nelle involuzioni subordinate sui lati da tale trasformazione, ai punti in cui la r taglia BC, CA, AB corrispondono rispettivamente i punti in cui i medesimi lati sono incontrati dalle tangenti alla circonferenza circoscritta nei vertici opposti. Laonde, detti r_a, r_b, r_c i rapporti di partizione determinati dalla retta r sui lati e $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$ le caratteristiche d'involuzione è

$$\lambda_a = \frac{c^2}{b^2} r_a; \qquad \lambda_b = \frac{a^2}{c^2} r_b; \qquad \lambda_c = \frac{b^2}{a^2} r_c.$$

Ciò premesso, supponiamo che siano P, Q i punti cercati: nella trasformazione or ora descritta a P, Q corrispondono due punti P′, Q′ appartenenti alla circonferenza circoscritta. Se ora, in questa stessa trasformazione, troviamo i coniugati dei punti della conica ABCMN, troveremo punti d'una retta che, necessariamente, passa per P′, Q′.

Ne viene che, per trovare i punti d'incontro della conica ABCMN colla r basta, nella trasformazione bi-razionale trilineare che trasforma la r nella circonferenza circoscritta, trovare i coniugati di M, N, indi trovare i coniugati dei punti in cui la congiungente i due punti così ottenuti taglia la circonferenza circoscritta.

Per la ricerca di punti coniugati è opportuno seguire il procedimento dianzi indicato. Così facendo, facilmente dai punti M, N s'ottengono i coniugati M′ e N′; allora, se M′N′ taglia la circonferenza circoscritta nei punti R, S e le congiungenti questi due punti col punto in cui la r taglia un lato qualunque, per es. BC, incontrano ulteriormente la circonferenza circoscritta in due punti R′, S′ le rette AR′, AS′ tagliano r nei punti cercati.

Considerazioni duali delle precedenti ci dicono che se è dato un triangolo ABC e, nel suo piano, due rette m, n, le cinque rette a, b, c, m, n inviluppano una conica Γ. Per trovare le tangenti da un punto R assegnato alla conica Γ, basta trovare, nella trasformazione bi-razionale trilineare che trasforma il fascio di centro R nella circonferenza inscritta al triangolo, le coniugate m, n indi le coniugate, in questa stessa trasformazione, delle rette tangenti alla circonferenza circoscritta condotte dal punto d'incontro delle rette come sopra ottenute.

12. Dal problema or ora trattato possiamo far dipendere il seguente:

" Dato un triangolo ABC e, nel suo piano, una retta generica r, " trovare, sulla r la eventuale coppia di punti coniugati in una data " trasformazione bi-razionale trilineare J ".

È evidente che i punti cercati sono i punti in cui la conica coniugata di r taglia eventualmente questa retta. Detti, cioè, P e Q due punti qualunque di r, siano P' e Q' i loro rispettivi coniugati in J: la conica ABCP'Q' è la conica coniugata di r. Nella trasformazione bi-razionale trilineare J' che trasforma r nella circonferenza circoscritta, troviamo i coniugati P' e Q', e siano questi P'' e Q''. Allora, se la retta P''Q'' incontra la circonferenza circoscritta in due punti R, S, i coniugati R', S' di R, S nella trasformazione bi-razionale J', sono i punti richiesti.

La costruzione si semplifica alquanto quando i punti P, Q non si scelgono comunque sulla r, ma sui punti d'incontro di tale retta coi lati del triangolo, perchè allora, nella trasformazione J, se ne conoscono i coniugati che sono i vertici del triangolo, e si trovano subito le tangenti alla conica coniugata di r, condotte pei vertici del triangolo. La costruzione diviene allora: Siano R'_a, R'_b, R'_c i corrispondenti di R_a, R_b, R_c (punti d'incontro di r coi lati del triangolo), nelle involuzioni subordinate sui lati dalle trasformazioni J; R''_a, R''_b, R''_c i corrispondenti di R''_a, R''_b, R''_c nelle involuzioni subordinate sui lati dalla trasformazione bi-razionale J', che muta r nella circonferenza circoscritta. I punti R''_a, R''_b, R''_c stanno su una retta r'' che taglia eventualmente la circonferenza circoscritta in due punti R, S; i coniugati di questi punti nella J' sono i punti cercati.

Brevemente può dirsi: Trovata di r la coniugata r' nella trasformazione J data e di r' la coniugata r'' nella trasformazione J', essendo R, S i punti in cui r'' taglia la circonferenza circoscritta, se le rette RR_a, SR_a tagliano questa circonferenza in R', S' le rette AR', AS' tagliano r nei punti cercati.

È evidente che, detti r_a, r_b, r_c i valori dei rapporti semplici (BCR_a), (CAR_b), (ABR_c) e λ_a, λ_b, λ_c le caratteristiche delle involuzioni subordinate dalla trasformazione J sui lati del triangolo si ha

$$(BCR''_a) = \frac{r_a^2}{\lambda_a} \cdot \frac{c^2}{b^2}; \quad (CAR''_b) = \frac{r_b^2}{\lambda_b} \cdot \frac{a^2}{c^2}; \quad (ABR''_c) = \frac{r_c^2}{\lambda_c} \cdot \frac{b^2}{a^2}.$$

13. Parimenti, possiamo, con uguale semplicità, trattare il problema: " Dato un triangolo ABC e, nel suo piano, un punto gene" rico R, trovare la eventuale coppia di rette coniugate, in una data " trasformazione bi-razionale trilineare J, passanti per R ".

Un ragionamento duale di quello seguìto nel num. precedente, ci conduce alla seguente costruzione:

Trovato di R il coniugato R' nella trasformazione J data e di R' il coniugato R'' nella trasformazione J', che muta il fascio di centro R nella circonferenza inscritta nel triangolo, essendo r, s le tangenti condotte per R'' alla circonferenza inscritta e r', s' le ulteriori tangenti a questa circonferenza, condotte pei punti $r\overline{AA}_r$, $r\overline{AA}_s$, le rette che uniscono R coi punti ar', as' sono le rette cercate.

R. Vercellin.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 735, 744, 757, 764, 769 E 771

735. *Se i vertici* A, B, C, D *di un quadrangolo corrispondono ai vertici* A', B', C', D' *di un altro quadrangolo in modo che delle sei coppie di lati*

$$\begin{cases} AB \\ C'D' \end{cases} \quad \begin{cases} AC \\ D'B' \end{cases} \quad \begin{cases} AD \\ B'C' \end{cases} \quad \begin{cases} CD \\ A'B' \end{cases} \quad \begin{cases} DB \\ A'C' \end{cases} \quad \begin{cases} BC \\ A'D' \end{cases}$$

cinque abbiano i punti d'intersezione sopra una retta r, *anche il punto d'incontro della sesta coppia di rette è sopra la stessa retta* r.

K.

Risoluzione del sig. Giorgio Aprile, R. U. di Catania.

Una prima risoluzione di tale questione è stata pubblicata nel fasc. I dell'anno in corso di questo *Periodico*.

Un'altra risoluzione, molto semplice, sarebbe data dalle seguenti considerazioni.

La retta r non può passare per nessun vertice dei quadrangoli dati, giacchè con essa dovrebbero allora coincidere i tre vertici non corrispondenti dell'altro. Per un noto teorema avremo adunque fra i punti

$$M \equiv r,\ AB \equiv r,\ C'D', \qquad N \equiv r,\ AC \equiv r,\ D'C', \qquad P \equiv r,\ AD \equiv r,\ B'B'$$
$$M_1 \equiv r,\ CD \equiv r,\ A'B', \qquad N_1 \equiv r,\ DB \equiv r,\ A'C' \qquad P_2 \equiv r,\ BC, \quad P'_1 = r,\ A'D'$$

di r le seguenti involuzioni

$$MNP \barwedge M_1N_1P_1$$
$$MNP \barwedge M_1N_1P'_1$$

epperò $P_1 = P'_1$ c. s. v.

744. *Se in un tetraedro due spigoli opposti hanno eguale lunghezza* a, *e altri due spigoli opposti eguale lunghezza* b:

1° *la congiungente i punti medi degli altri due spigoli è la loro normale comune;*

2° *gli angoli diedri agli spigoli sono eguali;*

3° *dette* α, β *le misure di questi diedri, si ha*

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta};$$

4° *nel quadrilatero sghembo formato dalle coppie di spigoli opposti eguali, le normali nei quattro vertici ai piani dei due lati che vi concorrono giacciono sopra un iperboloide e il birapporto di queste generatrici è* $(m, m', n, n') = \frac{a^2}{b^2}$.

L. Bianchi.

Risoluzione del prof. G. B. Zecca di Bologna.

1°. Se $ABA'B'$ è il quadrilatero sghembo ($AB = a$, $AB' = b$) e O, O' sono i punti medi dei segmenti AA', BB', si ha $BO = B'O$ (mediane di triangoli uguali); allora nel triangolo BOB' la mediana OO' è perpendicolare a BB': analogamente si vede che OO' è perpendicolare a AA'.

2°. I triedri A e B sono uguali rispettivamente ai triedri A', B' (faccie eguali): dunque i diedri AB', AB sono eguali ai diedri $A'B$, $A'B'$.

3°. Se indichiamo con α e β i diedri AB, AB', si ha

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{\operatorname{sen} B'AA'}{\operatorname{sen} BAA'} = \frac{\operatorname{sen} B'AA'}{\operatorname{sen} B'A'A} = \frac{a}{b}.$$

4°. Diremo primo piano bisettore di un angolo il piano normale alla bisettrice esterna nel vertice: secondo piano bisettore quello normale alla bisettrice interna. Le rette del primo piano bisettore fanno angoli eguali coi lati dell'angolo (il raggio condotto per il vertice parallelo alla retta in un senso qualunque fa angoli eguali coi due lati): quelle del secondo bisettore fanno angoli eguali con un lato e col prolungamento dell'altro. Per le rette uscenti dal vertice sussiste anche la proprietà inversa.

Osservazione preliminare. — " Se un quadrilatero sghembo ha i lati opposti eguali, i primi piani bisettori di due angoli opposti e i secondi piani bisettori degli altri due angoli passano per una stessa retta ".

Prendiamo per il quadrilatero le precedenti indicazioni. Se a è eguale a b la proprietà è immediatamente verificata: la retta comune è parallela a una diagonale. Supponiamo ora $a < b$ (l'altro caso si riduce a questo con uno scambio di lettere). I primi piani bisettori di due angoli opposti, per es. B e B', non possono essere nè paralleli nè coincidenti perchè AA' sarebbe perpendicolare alle bisettrici interne di B e B' e si avrebbe $a = b$. Prendiamo sui due raggi BA', $B'A'$ due segmenti BD, $B'E$ eguali rispettivamente ad a, b. Sarà $DA' = A'E$ ed E si troverà sul prolungamento di $B'A'$. Se M è un punto qualunque comune ai primi piani bisettori degli angoli B e B', sarà $MD = MA$, $ME = MA$ e quindi $MD = ME$: i due triangoli MDA', MEA' sono allora eguali ed è $\widehat{MA'E} = \widehat{MA'D}$. Dunque M appartiene al secondo bisettore di A': così M appartiene pure al secondo bisettore di A.

Per la dimostrazione della quarta proprietà osserviamo subito che se a è eguale a b, le quattro rette m, m', n, n' che chiamo le *quattro normali*, sono situate in due piani (iperboloide degenere). Sia $a \neq b$. Nella simmetria di asse OO' i vertici e le faccie del tetraedro dato si corrispondono a due a due. Alle rette m, n corrispondono le rette m', n'. Ai piani bisettori primi e secondi di A, B corrispondono i piani bisettori omonimi di A', B'. Dunque la retta t_1 comune ai primi piani bisettori di A, A' e ai secondi piani bisettori di B, B' e la retta t_2 comune agli altri quattro piani bisettori sono *unite* nella simmetria e perciò perpendicolari all'asse in certi due punti H_1, H_2. Le rette t_1 e t_2 sono distinte (perchè un loro punto comune apparterrebbe alle quattro normali): ciascuna appartenendo a piani bisettori dei quattro angoli incontra tutte le rette m, m', n, n', le prime in punti che diremo M_1, M'_1, N_1, N'_1, le seconde nei punti M_2, M'_2, N_2, N'_2. Il birapporto dei quattro punti M_1, M'_1, N_1, N'_1, simmetrici a due a due rispetto H_1 è $\frac{(M_1N_1)^2}{(M_1N'_1)^2}$. Poichè la retta t_1 appartenente al primo piano bisettore di A fa angoli eguali coi lati di quest'angolo, il rapporto dei segmenti M_1N_1, $M_1N'_1$ è eguale a quello delle loro proiezioni a, b su questi lati. Avremo dunque $(M_1M'_1N_1N'_1) = \frac{a^2}{b^2}$. Analogamente si ha: $(M_2M'_2N_2N'_2) = \frac{(M_2N_2)^2}{(M'_2N_2)^2} = \frac{a^2}{b^2}$. Dunque le rette m, m', n, n' uniscono i punti corrispondenti di due punteggiate proiettive e sono perciò generatrici reali di una quadrica: il birapporto (m, m', n, n') è $\frac{a^2}{b^2}$.

Osservazione. — La quadrica non è tangente al piano all'∞, poichè in tal caso le quattro dette generatrici sarebbero parallele a uno stesso piano, al quale sarebbero perpendicolari i piani del tetraedro dato che avrebbe così gli spigoli paralleli.

757. *Se ad una tangente variabile* t *della parabola semicubica*

$$ay^2 = x^3 \tag{1}$$

conduciamo la perpendicolare t' *nel suo punto d'incontro con l'asse della* x, *lo inviluppo di* t' *è una parabola conica avente lo stesso asse e il medesimo vertice.*

V. Retali.

Risoluzione del sig. Giorgio Aprile, R. U. di Catania.

L'equazione

$$3yX - 2xY - xy = 0 \tag{2}$$

di t, per $Y = 0$, dà $X = \frac{x}{3}$.

L'equazione di t' è allora

$$6xX + 9yY - 2x^2 = 0,$$

e quindi le sue coordinate plückeriane sono

$$u = -\frac{3}{x}, \qquad v = -\frac{9y}{2x^2}.$$

Eliminando x, y fra queste equazioni e la (1), si ha

$$4av^2 + 27u = 0,$$

equazione dell'inviluppo richiesto, che rappresenta una parabola la cui equazione cartesiana

$$27y^2 + 16ax = 0$$

ci mostra facilmente le proprietà enunciate.

764. *La bisettrice dell'angolo degli assi* Ox, Oy *incontra in* R *la tangente nel punto* M *di una curva* (C).

Determinare questa curva con la condizione che RM *sia eguale alla lunghezza della normale in* M.

J. Rose.

Risoluzione del prof. G. B. Zecca di Bologna.

Se non si vuol limitare la ricerca a posizioni particolari della curva, è facile vedere che alla famiglia di iperboli determinate dall'egregio solutore (*Periodico*, pag. 181) si deve aggiungere un'altra famiglia di curve. L'equazione differenziale

$$y\sqrt{1+(y')^2}=\frac{(y-x)\sqrt{1+(y')^2}}{1-y'} \tag{1}$$

impone alla curva la condizione che per un suo punto reale qualunque il segno di y sia eguale a quello di $\frac{y-x}{1-y'}$, mentre, perchè sia soddisfatto il problema, è necessario e sufficiente che resultino eguali i valori assoluti dei membri della (1). Si è così condotti a risolvere anche la:

$$yy'=2y-x, \tag{2}$$

la quale con la sostituzione $z=\frac{y-x}{x}$ diventa: $x(z+1)\frac{dz}{dx}=-z^2$.

Risolvendo con la separazione delle variabili e riponendo per la z la sua espressione si ha l'equazione

$$x=(y-x)\log_e[C(y-x)] \tag{3}$$

che ci dà al variare del parametro reale C una serie di curve trascendenti che godono della proprietà richiesta.

È da notare il fatto che la presente quistione generalizzata ammette soluzioni più semplici di quelle della data, che si riferisce a un caso *eccezionale*. Se infatti invece della bisettrice di xOy consideriamo una retta OL qualunque ed è k la tangente dell'angolo xOL, si trovano due equazioni differenziali di tipo noto, che dànno luogo alle due famiglie di curve

$$(y-kx)^k=C(y-x)$$
$$(x-kx)^k(y+x)=C,$$

dove C è il parametro variabile. Così per $k=2$ si hanno cubiche e coniche (parabole). Il caso $k=1$ è eccezionale perchè, come si vede facilmente, nell'integrazione delle relative equazioni differenziali, a un certo punto bisogna seguire una via particolare.

769. *Sia* AB *una corda di una parabola passante per un punto fisso* P, *e sia* Q *il punto d'incontro delle normali alla parabola nei punti* A *e* B, *e* S *la proiezione di* Q *su* AB. *Trovare i luoghi di* Q *e di* S.

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. Giorgio Aprile, R. U. di Catania.

Sia

$$y^2=2p(x+\alpha) \tag{1}$$

l'equazione della parabola, riferita all'asse ed alla perpendicolare a questo condotta da P (α, β); e (x', y'), (x'', y'') rispettivamente i punti comuni a detta conica e alla corda

$$x=m(\beta-y) \tag{2}$$

passante per P. È allora

$$\left.\begin{aligned} x' &= m(\beta-y'), & y' &= -pm+\sqrt{p^2m^2+2p(m\beta+\alpha)} \\ x'' &= m(\beta-y''), & y'' &= -pm-\sqrt{p^2m^2+2p(m\beta+\alpha)}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Poichè $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}$, le equazioni delle normali alla (1) in tali punti divengono

$$Y - y' = -\frac{y'}{p}(X - x'), \qquad Y - y'' = -\frac{y''}{p}(X - x'')$$

donde, tenendo conto delle (3),

$$X = p + m(2mp + \beta), \qquad Y = -2m(m\beta + \alpha); \tag{4}$$

dalle quali eliminando m si ha l'equazione del luogo di Q

$$\begin{vmatrix} 2\beta & 2\alpha & -Y & 0 \\ 0 & 2\beta & 2\alpha & -Y \\ 2p & \beta & p - X & 0 \\ 0 & 2p & \beta & p - X \end{vmatrix} = 0,$$

che per $X = x + p$, $Y = y$ diviene

$$2(\beta x - py)^2 + (2\alpha p - \beta^2)(2\alpha x + \beta y) = 0, \tag{5}$$

la quale rappresenta una parabola passante per la nuova origine e il cui asse forma l'angolo φ, dato da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{\beta}$, coll'asse della conica data.

Se P è un punto della (1) il luogo della (5) diviene la retta

$$x = \frac{p}{\beta} y$$

contata due volte.

E se P coincide con l'origine il luogo richiesto si riduce alla retta $y = 0$ contata due volte.

Per le (2) e (4) risulta che le coordinate x, y del punto S soddisfano le

$$2pm^3 + 3\beta m^2 + (2\alpha + p - X)m + Y = 0, \qquad (Y - \beta)m + X = 0,$$

dalle quali eliminando m, e ponendo $X = x$, $Y = y + \beta$ si ottiene l'equazione del luogo di S

$$y^4 + x^2y^2 + \beta y^3 - 2px^3 + 3\alpha x^2 y - (2\alpha + p)xy^2 = 0,$$

la quale rappresenta una quartica passante tre volte per P.

771. *Indicando con* δ_a, δ_b *e* δ_c *le distanze di un punto* P *del piano* α *di un triangolo* ABC (abc) *rispettivamente dai lati* a, b *e* c, *il luogo dei punti di* α *per i quali si ha* $\delta_c^2 = \delta_a^2 + \delta_b^2$ *è una conica* γ_2.

Se è $\widehat{C} < \frac{\pi}{2}$, *la conica* γ_2 *è una iperbole.*

Se è $\widehat{C} = \frac{\pi}{2}$, *la* γ_2 *è una parabola. (Il fuoco è in* C *e la direttrice è la retta a cui appartiene il lato* c, *la parabola taglia i lati* a *e* b *nei piedi delle bisettrici interne* l_a *ed* l_b). (1)

Se è $\widehat{C} > \frac{\pi}{2}$, *la* γ_2 *è una ellisse (che si riduce ad un cerchio se il triangolo dato è isoscele ed è* $\widehat{C} = \frac{2}{3}\pi$).

Il triangolo ABC *è* autoconiugato *rispetto alla* γ_2.

G. Cardoso-Laynes.

---

(1) Si deduce che "Le distanze d, d_1 e d_2 di un punto di una parabola rispettivamente dalla direttrice e da due rette ortogonali uscenti dal fuoco sono legate dalla relazione $d^2 = d_1^2 + d_2^2$. Ciò, del resto, si dimostra direttamente con considerazioni elementari. (G. C.-L.).

Risoluzione del prof. G. B. Zecca di Bologna.

Se x, y, z sono le coordinate trilineari (indicate nell'enunciato con δ_a, δ_b, δ_c), di un punto del piano rispetto al triangolo ABC, l'equazione data di secondo grado

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \tag{1}$$

rappresenta, com'è noto, una conica. L'equazione della retta all'∞ del piano è

$$ax + by + cz = 0. \tag{2}$$

Eliminando z fra (1) e (2) ho la:

$$(c^2 - a^2)\,x^2 - 2abxy + (c^2 - b^2)\,y^2 = 0. \tag{3}$$

La conica è un'ellisse o una parabola o un'iperbole secondo che il discriminante della (3), che è $4\,(a^2 + b^2 - c^2)\,c^2$, è negativo, nullo, o positivo, ossia secondo che si ha $C \lesseqgtr 90^0$.

ABC è autoconiugato rispetto alla conica perchè la (1) contiene soltanto i quadrati delle coordinate.

Nel caso della parabola per trovare il fuoco basta sottrarre dall'equazione dei punti ciclici ($u^2 + v^2 + w^2 - 2\,vw\cos A - 2\,wu\cos B - 2uv\cos C = 0$) l'equazione tangenziale della conica, cioè $u^2 + v^2 - w^2 = 0$; si ottiene una coppia di punti reali fra cui $w = 0$, cioè il punto C che è il fuoco richiesto.

La direttrice è AB perchè C ha per polare AB (v. sopra). La parabola incontra i lati AC, BC in punti appartenenti alle rette $x = z$, $y = z$ e cioè alle bisettrici interne di A e B.

Resta a trovare la condizione perchè la conica (1) si riduca a un cerchio. L'equazione complessiva delle rette che proiettano da C i punti ciclici è

$$x^2 + 2xy\cos C + y^2 = 0.$$

Essa deve avere i coefficenti proporzionali a quelli della (3). Si deve dunque avere:

$$c^2 - a^2 = c^2 - b^2 = -\frac{ab}{\cos c},$$

ossia $a = b$, e $\cos C = 1$ oppure $\cos C = -\frac{1}{2}$. Il valore 1 dà un triangolo degenere (estraneo al problema). Al valore $-\frac{1}{2}$ di $\cos C$ corrisponde $C = 120^0$. c. d. d.

BIBLIOGRAFIA

A. Bassi. — *Esercizi e problemi di Algebra complementare* ad uso del 2° biennio degl'Istituti tecnici. Vol. I, Parte II. Presso l'Autore a Mondovì. — L. 1.80

Gli argomenti trattati in questa 2ª Parte sono: *Massimi e minimi, Frazioni continue, Discussione delle equazioni di 1° e 2° grado.*

Come nella prima parte, ogni argomento è diviso in capitoli, intorno a ciascun argomento sono richiamate tutte le proprietà elementari che all'argomento si riferiscono, sono risolute quistioni prima semplici, poi più complicate, e ogni capitolo è seguìto da un gran numero di esercizi e problemi proposti, tutti con le risposte, e i meno semplici con avviamento.

L'impressione favorevolissima ricevuta dalla lettura della prima parte si è in me ripetuta alla lettura della seconda parte. L'egregio Collega, tanto benemerito della scuola secondaria, per il contributo che con instancabile assiduità reca al miglioramento della scuola, ha felicemente colmato una lacuna nei nostri libri scolastici, (¹) compiendo un lavoro che è un modello di precisione e una fonte inesauribile di esercizi e problemi per gli alunni della 3ª classe degl'Istituti tecnici. Il capitolo sui massimi e minimi geometrici, trattati, oltre che con il sussidio dell'analisi, con procedimenti appartenenti alla Geometria pura è del più grande interesse, ed in esso l'Autore si è fermato più a lungo nel risolvere un maggior numero di quistioni, in vista anche delle maggiori difficoltà che le quistioni di Geometria pura presentano.

Auguro al libro la maggiore diffusione, che ben merita, e spero che l'egregio Collega per il nuovo anno scolastico ci dia il volume per la quarta classe.

S. Catania.

Ettore Baroni. — *Algebra e Trigonometria* ad uso dei Licei. Volume I (Primo anno di Liceo). Firenze, R. Bemporad e figlio. — L. 2.75.

Quantunque pubblicato l'anno scorso, credo bene di dire qualche parola intorno a questo libro: giacchè da un lato non è necessario che la recensione di un libro sia fatta pochi giorni dopo la sua comparsa in pubblico, chè anzi di una più prolungata meditazione ne può produrre un giudizio più esatto, e d'altro canto è sempre un bene che si fa alla scuola mettendo in vista i buoni, pur troppo rari, manuali che devono essere le prime e per ciò le fondamentali sorgenti del sapere dei giovani.

Il libro incomincia naturalmente con la teoria dei numeri razionali relativi e lo zero (classe r_0); il metodo di trattazione è quello del Weierstrass, cioè i numeri della classe r_0 sono definiti mediante coppie di numeri interi positivi. La trattazione è ordinata, chiara e piuttosto svelta; parecchie dimostrazioni sono fatte con procedimenti eleganti.

Segue un cenno sui numeri reali, nel quale il numero reale è definito al modo di Dedekind. Questo breve cenno, quantunque non imposto dai programmi, è necessario, perchè senza il concetto di numero reale non si può fondare la teoria dei radicali, e nemmeno si possono dare gli elementi della teoria delle funzioni circolari. Il cenno della teoria dei radicali, quantunque breve, è sufficiente e svolto con chiarezza. Segue, ed è molto opportunamente stabilita, la corrispondenza tra i numeri reali ed i punti di una retta, come anche un cenno sulle coordinate cartesiane dei punti di un piano, giacchè se ne fa poi uso sistematico nella trattazione degli elementi di trigonometria.

I capitoli successivi contengono lo studio dei monomi interi e frazionari, e dei polinomi. Anche questi capitoli sono ben fatti: mi sembra però che le innovazioni

(¹) A titolo di onore va segnalata anche l'opera eccellentissima del prof. S. Ortu-Carboni, *Complementi d'Algebra*, edita dalla Casa Raffaello Giusti di Livorno.

di metodo introdotto nella teoria del quoziente e dal resto dei polinomi non siano più opportune del consueto metodo di trattazione. Le teorie del massimo comun divisore e del minimo comune multiplo dei polinomi, che in molti libri, a torto, non si trovano svolte, sono trattate con sobrietà non scompagnata da molta chiarezza e precisione. Fa seguito la teoria elementare della divisibilità dei polinomi e la regola di Ruffini, quindi la decomposizione dei polinomi in fattori: il tutto è ben coordinato e, senza esagerare in ricerche, vi sono svolti lucidamente e speditamente i principali metodi elementari per la decomposizione dei polinomi in fattori, dedicando l'A. la cura, che merita, a questo argomento così importante anche nell'analisi elementare.

Il calcolo algebrico termina col capitolo riguardante le frazioni algebriche, che è trattato colla solita misurata estensione non disgiunta da limpidezza nella esposizione e dal dovuto rigore scientifico.

Si giunge così al capitolo XIX, che tratta delle equazioni in generale. I principii sulla equivalenza delle equazioni sono dimostrati oltre che con metodo piano anche in modo compiuto, e merita speciale attenzione la discussione sulla equivalenza di una equazione a quella, che si ottiene da essa moltiplicandone ambo i membri per un numero o per una espressione algebrica. Nel capitolo successivo è detto della risoluzione di una equazione algebrica in generale ed in particolare del metodo per risolvere una equazione di primo grado ad una incognita, la cui formola di risoluzione vi è discussa.

Il capitolo XXI tratta delle equazioni di secondo grado ad una incognita. Anche questi capitoli sono svolti colla consueta chiarezza e sono corredati di opportuni esempi. Il capitolo XXII tratta dei sistemi di equazioni di primo grado a due incognite. In quest'ultimo è molto ben fatta la discussione delle formole di risoluzione.

Un capitolo breve ma sufficiente e ordinato relativo alla risoluzione di problemi mediante l'algebra chiude la parte del libro dedicata allo studio delle equazioni. Gli ultimi due capitoli dell'algebra riguardano le progressioni aritmetiche, le geometriche ed i logaritmi.

Nella parte seconda del libro sono trattati gli elementi delle funzioni circolari fino alle relazioni tra le funzioni circolari di uno stesso arco. Sobrietà e chiarezza congiunte a rigore scientifico sono le caratteristiche di questa come delle altre parti del libro.

Se si tien conto della grande varietà di argomenti che è obbligato a trattare chi vuol scrivere un trattato di algebra pel primo corso liceale, e della sobrietà a cui è costretto per ragioni didattiche, ben si comprende quanto sia difficile unire questa qualità del libro a quel rigore scientifico, che si richiede in una trattazione razionale, e quanto debba essere per ciò lodato l'autore, che ha raggiunto attraverso a tante difficoltà, felicemente superate, lo scopo di scrivere un libro utile alla scuola. Il libro del chiar.mo prof. Baroni del R. Liceo E. Q. Visconti in Roma ha molti pregi scientifici e didattici, il rigore, la chiarezza e la sobrietà sono, come abbiamo detto, le sue doti costanti; e merita per ciò le migliori raccomandazioni agli insegnanti dei licei, mentre è da augurarsi che presto sia pubcato il secondo volume pel secondo corso liceale. Una lode speciale è dovuta anche all'editore, che non ha risparmiato nè spazio nè caratteri, ed ha dato al libro una veste decorosa ed attraente, la quale ha indubbiamente la sua non lieve importanza nelle esigenze didattiche.

A. B.

BURALI-FORTI e MARCOLONGO. — *Elementi di calcolo vettoriale*, con numerose applicazioni alla Geometria, alla Meccanica e alla Fisica-Matematica. — Bologna, Zanichelli, 1909.

Gli egregi autori fino dall'aprile 1907 hanno iniziato la pubblicazione nei *Rendiconti del circolo matematico di Palermo* di una serie di articoli col titolo *Per l'unificazione delle notazioni vettoriali*, nei quali si propongono di fare un accurato esame critico comparativo dei diversi sistemi di nomi e di segni adottati dai varî autori. La molteplicità di questi sistemi è la causa principale della diffidenza con la quale è ancora accolto da molti il calcolo vettoriale, che ha pure importantissime applicazioni in meccanica e fisica; ed è quindi indispensabile una intesa universale per giungere alla unificazione delle notazioni vettoriali, come fu approvato dal Congresso internazionale di Roma dell'aprile 1908, perchè il calcolo stesso abbia quella diffusione che sarebbe desiderabile.

Gli *elementi* che ora vedon la luce sono dunque il risultato dello studio critico comparativo sopra accennato e comprende lo sviluppo di un sistema vettoriale minimo che è sperabile valga ad attuare l'unificazione desiderata dei segni e dei nomi.

L'opera si compone di due parti, la prima delle quali è destinata alle *operazioni e funzioni vettoriali* e la seconda alle *applicazioni del calcolo vettoriale* alla *Geometria*, alla *Meccanica*, alla *Fisica-Matematica*. Ecco i titoli dei varî capitoli:

Parte I. — Cap. I. Somma e prodotto per un numero. — II. Calcolo baricentrico. — III. Prodotto vettoriale e interno. — IV. Rotazioni in un piano. — V. Funzioni di numeri. — VI. Funzioni di un punto.

Parte II. — Cap. I. Applicazioni alla Geometria. — II. Formole di calcolo integrale. — III. Applicazioni alla Meccanica. — IX. Applicazioni all'Idrodinamica. — V. Applicazioni alla teoria dell'equilibrio dei corpi isotropi. — VI. Applicazioni all'Elettrodinamica.

BURALI-FORTI e MARCOLONGO. — *Omografie vettoriali*, con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto ed alla Fisica-Matematica. — Torino, Petrini, 1909.

Agli *Elementi di calcolo vettoriale*, di cui abbiamo parlato sopra, fa seguito questo volume sulle Omografie, nel quale si aggiunge al sistema vettoriale minimo sviluppato negli *elementi* quel che manca per risolvere sotto forma assoluta ed autonoma la maggior parte delle questioni fisico-matematiche.

L'opera si compone di tre capitoli, il primo dei quali è destinato ad esporre i fondamenti della teoria generale delle omografie, cioè delle trasformazioni lineari di vettori in vettori; il secondo è destinato allo studio delle derivate di numeri e di enti geometrici rispetto al punto, adoperando un algoritmo che poco differisce da quello dell'ordinaria analisi, secondo la notazione del Leibnitz. Il terzo capitolo infine è destinato alle applicazioni e si compone dei seguenti paragrafi:

§ 1. Cinematica delle deformazioni infinitesime. — § 2. Statica dei corpi continui. — § 3. Moto libero per onde piane nei mezzi isotropi e cristallini. — § 4. Leggi di propagazione di un'onda piana trasversale nei cristalli magnetici. — § 5. Proprietà del flusso calorifico in un corpo cristallino.

Dott. ALPINOLO NATUCCI. — *Compendio di Aritmetica pratica* per le scuole medie. — Remo Sandron, Editore.

Questo libretto, scritto con coscienza e, in generale, con assai rigore, vuol essere segnalato per la cura che l'autore ha avuto di spiegare ai giovanetti qual'è l'uso delle operazioni, e di avviarli così alla sana risoluzione dei problemi. È noto che gli alunni, dinanzi ad un problema, trovano difficoltà non nell'*eseguire* le operazioni, in cui sogliono essere abbastanza esperti, ma nel *giudicare* quali siano le operazioni da fare: e sta qui, infatti, il lato veramente difficile della risoluzione. Occorre quindi che essi siano abituati a sapere quando occorra l'una o l'altra operazione: e il prof. Natucci nel suo testo si trattiene appunto a presentare ai giovinetti i varî generi di questioni che possono capitare nei problemi, e ad indicare qual'è l'operazione che vi corrisponde.

Forse in alcuni punti l'esposizione del libro è alquanto difficile, data l'età e, più che tutto, l'abituale impreparazione dei giovinetti uscenti dalle scuole elementari, per i quali il rigore spesso è un mito; ma un buon insegnante saprà temperare colla parola sua questa difficoltà.

Taccio di qualche piccola osservazione che si può fare leggendo il libro, trattandosi di cose minime e non essenziali: è inutile citarle qui, dove intendo dare solo un giudizio generale. Non devo lasciar di dire che il libro è ricco di buoni e interessanti esercizi e problemi. In sostanza, il testo del prof. Natucci è fatto bene.

R. Bettazzi.

II CONGRESSO NAZIONALE

della "MATHESIS" Società Italiana di Matematica.

(Padova, 20-23 Settembre 1909)

A) Programma.

Lunedì 20 sett. ore 10. — Cerimonia inaugurale. Discorso del prof. Gino Loria della R. Università di Genova sul tema: *L'insegnamento delle matematiche nelle scuole medie italiane ed estere, durante gli ultimi 50 anni. Critiche e raffronti.*

" " ore 17. — Relazione e discussione sul tema: *Opzione fra il greco e la matematica nei licei.* Relatore prof. Duilio Gigli del R. I. di Sassari.

Martedì 12 ore 14. — Relazione e discussione sul tema: *Riforme e ritocchi dei programmi scolastici.* Relatrice la prof. Bisson Minio Ersilia, alla quale eventualmente si aggiungeranno altri Relatori.

Mercoledì 22 ore 14. — Relazione e discussione sul tema: *Preparazione degli insegnanti di matematica delle scuole medie.* Relatori i prof. Gino Loria della R. U. di Genova e Alessandro Padoa del R. I. T. di Genova.

" " ore 16. — Relazione *Sopra un' Enciclopedia di matematiche elementari, da pubblicarsi sotto gli auspici di " Mathesis ".*

Relatori i prof. LUIGI BERZOLARI della R. U. di Pavia e ROBERTO BONOLA della R. S. N. di Pavia.

Giovedì 23 ore 9. — Relazione e discussione *Sui lavori della Commissione Internazionale pel Congresso di Cambridge.* Relatore prof. GUIDO CASTELNUOVO della R. Università di Roma.

" " **ore 14.** — *Seduta per trattare affari d'ordine interno.* Modificazioni dello Statuto proposte dal C. D. ed eventuali modificazioni proposte dai Soci. Discussione e approvazione del Conto consuntivo. Bollettino sociale.

Nelle sedute di Martedì, Mercoledì, Giovedì dopo terminata la discussione dei singoli temi, si terranno le lezioni pel concorso, di cui si parla in B). *Se occorrerà, le lezioni potranno proseguirsi nel giorno di Venerdì.*

Il programma è stabilito in modo che i Soci possano intervenire all'inaugurazione delle sedute principali del Congresso della Società del Progresso delle Scienze.

B) Modalità del Concorso per una Lezione di Matematica.

1. Fra i Soci della " Mathesis „ è aperto un concorso a premio per una lezione orale sopra un argomento controverso di matematiche elementari.

2. Il concorso avrà luogo a Padova durante il II Congresso sociale, com'è stabilito in *A)*

3. Il premio di lire Duecento sarà versato nelle mani del vincitore subito dopo la proclamazione.

4. Il concorrente potrà scegliere liberamente per la lezione uno dei temi seguenti:

a) *Introduzione alla teoria delle frazioni.*
b) *Dei numeri negativi.*
c) *L'eguaglianza delle figure.*
d) *L'equivalenza delle figure piane.*

5. L'ordine secondo cui i concorrenti sosterranno la prova verrà determinato dalla sorte.

6. Ogni lezione non potrà durare più di 40 minuti.

7. Il termine utile per l'inscrizione al Concorso scade col 15 settembre.

Le inscrizioni devono farsi dirigendo analogo avviso al segretario *Prof. P. Gazzaniga, piazza del Santo, 11, Padova.*

8. La costituzione della Commissione giudicatrice verrà comunicata nella prima adunanza del Congresso.

9. La proclamazione del vincitore verrà fatta durante il Congresso.

VALENTINO CERRUTI

il 20 agosto si è spento in seguito a lunga e terribile malattia di stomaco nel paese di Crocemosso in provincia di Novara, ove era nato il 1° febbraio 1850. Un suo compaesano, Federigo Garlanda, così narra le umilissime origini dell'illustre estinto:

" Crocemosso, il comune nativo del Cerruti, è sparso in varie piccole borgate, sporgenti su quei poggi dalle vedute meravigliose, quasi tutte ombreggiate e talvolta più che per metà nascoste tra gruppi di alberi annosi. (Lo stesso cognome Cerruti, italianizzamento del locale cerù, richiama una macchia di cerri). In una di queste umili borgate, a breve distanza dal maestoso campanile del gruppo centrale, si vede, incastrata fra le altre, una casupola, che a rigor di termine, se la parola non suonasse irriverente, si dovrebbe dire un tugurio: a due soli piani bassissimi; una porta e una finestra a terreno; due finestre, modestissime, al piano superiore. Niente che la distingua dalle altre casette dei nostri operai.

" In questa casupola, sotto così povero tetto senza grondaie, fu concepito e, con incredibile tenacia, realizzato uno di quei sogni eroici che più altamente confermano e consacrano la nobiltà della nostra stirpe.

" In quella casupola visse tutta la sua vita umile e oscura, ma illuminata da un alto ideale, un povero meccanico, che guadagnava la sua vita scendendo tutte le mattine, per sentieri da capre, a lavorare nella valle, in uno degli opifici lungo il torrente, e risalendo stanco e fuliginoso, a sera, per la parca cena, e il meritato riposo. La vita di una fra i milioni di formiche umane.

" Giovane ancora, s'era unito con una buona figliuola, sua vicina; la quale in breve tempo lo fece padre di tre figli; tre maschietti, non belli veramente, tranne che agli occhi paterni e materni, ma intelligenti e precoci in modo non comune. Fu allora che egli concepì il suo sogno. In tempi nei quali non si parlava ancora di lotta di classe, egli deve incosciamente averla intesa in modo suo peculiare. " Io che sono nato al penultimo o terzultimo gradino della scala sociale — egli deve essersi detto — invece di protestar contro quelli che sono nati al di sopra di me, spingerò i miei figli su su, al disopra di quelli, fino ai gradini più alti „. E mentre, intorno a lui, anche in famiglie più agiate, avviavano i figli per gli studi commerciali e industriali, che dànno profitti più pronti e più lauti, egli, con una larghezza di vedute maravigliosa in un povero meccanico, volle, e decise, che i suoi figli seguissero gli studi classici e andassero all'università, per una via che conduce a più larghi frutti intellettuali, è vero, ma a guadagni materiali assai scarsi e più tardivi.

“ Questo fu il sogno del meccanico. Ma in qual modo realizzarlo, con quali mezzi, non avendo egli altre risorse al di là del misero salario? Qui si affaccia l'eroismo. In paese raccontano che per quasi vent'anni egli non si cibò che di minestre e di polenta. E questa non era, dopo tutto, la peggiore privazione. La sventura, che non ha occhi, gli rapì presto la sua compagna, e a lui toccò di vivere quasi sempre solo, imperocchè per tutta la durata dell'anno scolastico i figli dovevano rimanere a scuola, prima a Biella, poi a Torino, raccolti in un'unica stanzetta, veglianti allo stesso tavolino, nutriti di poco cibo ma più assai, dalla invincibile fede in sè e dell'affetto paterno.

“ Così, per anni ed anni, il povero padre salì il suo calvario solo. Nessun cireneo, tranne la fede invitta. Ma quante volte, alla sera, levando gli occhi dalla scodella, gli sarà sembrata la stessa polenta un pane del cielo! Poichè man mano che gli anni passavano si diffondeva e splendeva il nome suo e dei suoi figli, i quali salivano tutti come una triplice forza, su su pei gradini — imposti categoricamente a tutti dalla nostra Minerva dagli occhi di gesso e dal cervello di cartapecora — su su per i gradini del ginnasio, del liceo, e poi, finalmente dell'Università!

“ E il povero meccanico potè veder percorso tutto dai suoi figli questo cammino, che riesce così facile a chi dispone di un borsellino non troppo magro; percorso tutto, ma in tal modo e con tali onori, pei quali non sono sufficienti neppure le borse meglio guernite.

“ Il primo dei tre fu naturalmente il primo alla vittoria, laureandosi ingegnere; il secondo che si era dato agli studi medici, presentò una tesi della quale ebbe a parlare tutta l'Università di Torino; il terzo, Valentino, pubblicò, giovanissimo ancora, quella celebre monografia sui legamenti elettro-meccanici, che gli valse l'onore di esser chiamato subito, l'anno appresso, ad insegnare in quella stessa Scuola d'Applicazione nella quale era stato, pochi anni prima, scolaro.

“ Così vide il meccanico di Crocemosso realizzato quel sogno che una mente più ristretta non avrebbe neppure concepito, e una volontà meno eroica non avrebbe neppure tentato.

“ In presenza del sogno fatto realtà, le forze così lungamente tese si allentarono; la stessa gioia deve aver fatto subentrare alla fiera tensione un grande languore. La tempra eroica si piegò, si accasciò:

ormai " i suoi tre „ potevano fare la strada da soli: potevano da soli seguire il volo cui egli li aveva lanciati. Egli se ne dipartì, a raggiungere la sua compagna.

" Ed essi restarono a far la strada soli, ma oramai sicuri di sè, e infiammati da quel ricordo glorioso.

" Come è naturale, anche i figliuoli dovettero, di contro a tante difficoltà da superare, sostenere un lungo sforzo: e dello sforzo condizione prima, inesorabile, la solitudine, il vivere solinghi e appartati. Onde un chè di chiuso nel loro carattere, e di poco espansivo, che a molti non piaceva. Ma erano come quei frutti che hanno la scorza ispida e dura, ma dentro sono dolci e buoni „.

Laureato ingegnere nel 1873 a Torino, **VALENTINO CERRUTI**, proseguì gli studi di matematiche pure a Roma sotto la guida sapiente di Cremona e Beltrami. Il Cremona che ne aveva riconosciuto le alte doti, si valse della sua attività grandissima nei primi anni della Scuola degli ingegneri di Roma, da lui fondata, e lo fece assistente d'idraulica, poi di geometria pratica, e nel 1875 anche incaricato di fisica tecnologica. Straordinario nel 1877 e ordinario nel 1881, insegnò a vicenda fisica matematica, meccanica razionale e analisi superiore, e nel 1900 succedè al Cremona nella direzione della Scuola degl'ingegneri di Roma. Le sue più importanti memorie scientifiche, inserite per la massima parte negli Atti della R. Accademia dei Lincei, della quale fu per molti anni segretario per le scienze fisiche e matematiche, videro la luce nel periodo dal 1875 al 1892. Dopo egli dedicò la sua attività principalmente al lavoro di organizzazione e non pubblicò che poche necrologie. L'ultimo suo lavoro scientifico fu il diligente ed interessante lavoro storico sugli studi matematici in Italia dell'ultimo secolo, col quale inaugurò i lavori della sezione matematica nel 1° Congresso della *Società Italiana di Matematica*, tenuto a Parma nel 1907.

Socio della R. Accademia dei Lincei, della Società dei Quaranta, senatore del regno, insignito delle più alte onorificenze, egli era un esempio vivente di quanto possa la forza dell'ingegno accoppiata alla tenacia e costanza di propositi.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 24 Settembre 1909

SOPRA I POLIEDRI REGOLARI CONVESSI.

(Un capitolo di Geometria descrittiva)

(Continuazione e fine — vedi fascicolo precedente).

II. — I gruppi di rotazioni.

10. Prima di trattare delle rotazioni che trasformano in sè stesso un poliedro regolare convesso, sarà utile fare qualche considerazione di carattere generico. Indichiamo col simbolo θ una rotazione dello spazio intorno ad un asse. Se immaginiamo di compierla successivamente n volte troveremo una nuova rotazione che indicheremo col simbolo θ^n. Se l'ampiezza di θ è parte aliquota della intera circonferenza, ad es: la p-esima parte, ne segue che la rotazione θ^p riporta in se stesso ogni punto dello spazio. Allora si suol dire che θ^p è la identità che p è il periodo di θ e si suole scrivere $\theta^p = 1$. La rotazione inversa di θ è quella che si ottiene eseguendo la θ in senso inverso: si suole indicarla con θ^{-1} e si scrive $\theta . \theta^{-1} = 1$ per esprimere che eseguendo la θ e dopo la θ^{-1} si ottiene l'identità. È poi evidente che si ha $\theta^{-1} = \theta^{p-1}$.

Le rotazioni che dovremo prendere in considerazione, permutano fra loro sempre i vertici di un poliedro. Per cui riteniamo opportuno richiamare le nozioni fondamentali inerenti alle permutazioni sopra n elementi. Una permutazione sopra n elementi si chiama sostituzione. Per $n = 2$ la sostituzione prende il nome di trasposizione. Se all'elemento a si sostituisce b, se all'elemento b si sostituisce l'elemento c e così di seguito, se all'ultimo elemento k si sostituisce a, la sostituzione si chiama " sostituzione circolare " o " ciclo " e si indica col simbolo $(abc \dots k)$. Se dopo la sostituzione S si eseguisce la T, si trova una nuova sostituzione che si chiama prodotto di S per T e si indica con ST. Il concetto si generalizza: se dopo la sostituzione ST si effettua la U si dice che si è fatta la sostituzione STU prodotto di S per T e per U ecc. Un prodotto di più sostituzioni non gode in generale la proprietà commutativa, gode invece sempre la proprietà associativa. Se $S = T = U = \dots$ il prodotto si chiama potenza di S. Con S^{-1} si indica la sostituzione inversa di S. Una sostituzione qualsiasi può sempre riguardarsi come il prodotto di più sostituzioni circolari: quando così la si riguardi, si suol dire si decompone in cicli.

Si può sempre fare in modo che questi cicli sieno trasposizioni. A seconda che il numero di queste trasposizioni è pari, o dispari, la sostituzione si chiama pari, o dispari. La sostituzione $S^{-1}TS$ si chiama trasformata di T mediante S. Più sostituzioni si dice che formano un gruppo quando il prodotto di due qualunque di esse equivale ad un'altra sostituzione del gruppo. Chiamasi ordine del gruppo il numero delle sostituzioni che lo compongono, l'identità compresa. Un esempio semplice di gruppo è fornito dalle potenze di una stessa sostituzione. Un altro esempio è dato dal gruppo di tutte le sostituzioni pari sopra n elementi. Esso ha l'ordine $=\frac{n!}{2}$ e si chiama " gruppo alterno ". Il gruppo di tutte le sostituzioni (pari e dispari) è d'ordine $n!$ e si chiama gruppo totale. Se le sostituzioni di un gruppo G_1 appartengono tutte a un altro gruppo, più ampio, G_2 si dice che G_1 è sottogruppo di G_2. Così il gruppo alterno è sottogruppo del gruppo totale.

11. Gruppo del tetraedro. — Proponiamoci ora di esaminare le rotazioni che sovrappongono a se stesso un poliedro regolare convesso cominciando dal tetraedro. La figura 1 dimostra la esistenza di una rotazione di ampiezza $\frac{2\pi}{3}$, attorno all'altezza del tetraedro che passa per il vertice D, capace di trasformare il tetraedro in se medesimo: infatti la figura stessa ci dice che per effetto di tale rotazione, il vertice D non cambia, mentre i rimanenti tre vertici vengono permutati circolarmente. Il periodo della rotazione è uguale a 3. Con essa viene a individuarsi il suo quadrato o (ciò che è lo stesso) la sua inversa.

L'effetto di una tale rotazione può rappresentarsi col simbolo (ABC) che denota la sostituzione prodotta sopra i vertici ABC.

Quanto a D, è sottinteso che rimane fisso. La rotazione inversa avrà il simbolo $(ABC)^{-1}=(ABC)^2=(ACB)$. Si può dunque dire che esistono otto rotazioni del solido in se stesso a periodo tre: a due, a due sono inverse una dell'altra e si compiono attorno alle 4 altezze del solido.

D'altra parte considerando la figura 2 si può affermare la esistenza di un'altra rotazione che trasforma il tetraedro in se stesso. L'asse è la perpendicolare comune ai due spigoli opposti AC, BD: l'ampiezza è π e quindi il periodo è uguale a due. Essa scambia A con C e B con D per cui il suo effetto sopra i vertici può rappresentarsi col simbolo (AC)(BD).

Esistono dunque altre tre rotazioni (a periodo 2) che sovrappongono il solido a se medesimo. Esse si compiono attorno alle rette che congiungono i punti medi di due spigoli opposti.

12. Si hanno quindi in tutto 11 rotazioni che trasformano il solido in se stesso. Ebbene, se si considerano le 11 sostituzioni sui vertici che sono l'effetto di tali rotazioni, e si aggiunge la identità, si trova un insieme di 12 sostituzioni le quali formano un gruppo nel senso stabilito nel n. precedente. Per dimostrarlo si osservi che esse, possono rappresentarsi simbolicamente come segue

$$(AB)(CD); \qquad (AC)(BD); \qquad (AD)(BC)$$
$$(ABC)^r; \qquad (BCD)^r; \qquad (ACD)^r; \qquad (ABD)^r$$
$$r = 1, 2, 3$$

dove per $r = 3$ si avrà la identità. Or bene è evidente che ciascuna è una sostituzione pari (ad es. $(ABC) = (AB)(AC)$): il prodotto di due sostituzioni pari è ancora pari: d'altra parte le sostituzioni pari sopra ABCD sono tutte e sole quelle sopra rappresentate: è dunque necessario che il prodotto di due qualunque di esse equivalga a una 3ª sostituzione scelta fra le 12 medesime.

Questo prova che esse formano un gruppo. Lo si chiama il " *Gruppo del tetraedro* ". Si può dunque enunciare il seguente teorema:

" *Le rotazioni che sovrappongono a sè stesso un tetraedro regolare sono delle due specie seguenti: ne esistono tre a periodo due i cui assi sono le tre congiungenti i punti medi di 2 spigoli opposti del solido;*

ne esistono otto a periodo tre (a due, a due inverse una dell'altra) e aventi per assi le quattro altezze del tetraedro.

Se a queste rotazioni si aggiunge la identità e si considera l'effetto che esse producono sui vertici del solido, si perviene al gruppo alterno di 12 sostituzioni sopra 4 elementi ".

Un notevole sottogruppo del gruppo ora descritto, è quello composto dalla identità e da tutte e tre le sostituzioni a periodo due:

$$(AB)(CD); \qquad (AC)(BD); \qquad (AD)(BC).$$

Esso suol chiamarsi un gruppo quadrinomio e siccome esso è unico, nel sottogruppo alterno in parola, così è chiaro che tutte le 12 sostituzioni considerate, debbono trasformarlo in se stesso; il che si esprime dicendo che il gruppo alterno in discorso possiede come sottogruppo invariante il gruppo quadrinomio.

13. Gruppo dell'ottaedro (o del cubo). — Procedendo nelle nostre considerazioni, in modo analogo a quel che si è fatto per il tetraedro, dovremmo prendere in esame, adesso, le rotazioni che sovrappongono a se medesimo il cubo. Ma si vede facilmente che esse sono identiche a quelle inerenti all'ottaedro. Basta infatti osservare che i centri delle facce di un cubo possono riguardarsi come vertici di un ottaedro regolare e, quindi ogni rotazione che sovrappone a se stesso il cubo, sovrappone a se stesso anche l'ottaedro e viceversa. Ecco dunque perchè l'ottaedro e il cubo si sogliono riguardare insieme; e noi, in considerazione delle proiezioni disegnate, riferiremo il nostro linguaggio all'ottaedro.

La figura 4 ci dimostra la esistenza di due specie di rotazioni che trasformano l'ottaedro in se stesso. L'una si compie attorno alla diagonale MN, perpendicolare al piano orizzontale, ha l'ampiezza di $\frac{\pi}{2}$

e quindi il periodo uguale a quattro. L'altra si compie attorno alla retta che passa per i punti medi dei due spigoli opposti AD, BC (e che resulta perpendicolare al piano verticale). L'ampiezza di questa seconda rotazione è π cioè il suo periodo è uguale a due.

La figura 5 dimostra poi la esistenza di un'altra specie di rotazioni sovrapponenti il solido a se medesimo. Infatti da quella figura resulta manifesto che facendo una rotazione di ampiezza $\frac{2\pi}{3}$, attorno alla retta che unisce i centri delle due facce opposte ABC, MNP il solido si trasforma in se stesso. Il periodo di una tale rotazione è uguale a tre.

14. Consideriamo ora l'effetto che producono queste varie specie di rotazioni sulle 4 rette *abcd* che uniscono i punti medi di due facce opposte dell'ottaedro (o, ciò che è lo stesso, sulle 4 diagonali del cubo).

Una rotazione a periodo 4, permuta circolarmente le 4 facce del solido che concorrono nell'uno, o nell'altro dei due vertici esistenti sull'asse di rotazione: essa permuterà dunque, nel medesimo modo, i centri di tali facce e quindi anche le relative rette a, b, c, d. Dunque l'effetto di una tale rotazione, sopra le nominate rette, è quello di produrre una sostituzione del tipo $(abcd)$.

Una rotazione a periodo tre, si compie attorno a una delle rette in parola: quindi una tale retta rimane fissa e le altre tre vengono permutate circolarmente. La sostituzione che viene a effettuarsi su di esse è del tipo (abc).

Finalmente le rotazioni a periodo due, possono essere di due specie. Quelle, già descritte, che hanno per assi le congiungenti i punti medi di due spigoli opposti e quelle che costituiscono i quadrati delle rotazioni a periodo 4. Quanto a quest'ultime, il simbolo della sostituzione che esse producono è subito trovato: basta fare il quadrato di $(abcd)$ e si trova il tipo $(ac)(bd)$. Circa alle prime si osservi che si permutano fra loro due facce segantesi nell'uno o nell'altro dei due spigoli che si appoggiano all'asse di rotazione, dunque altrettanto avverrà dei centri di tali facce e quindi delle relative rette *abcd*. Le rimanenti coppie di facce opposte non vengono permutate. Dunque la sostituzione cercata è del tipo (ab).

Ora se si tien presente che le sostituzioni possibili sopra a, b, c, d sono necessariamente appartenenti ai tipi dianzi trovati:

$$(abcd), \qquad (abc), \qquad (ac)(bd), \qquad (ab)$$

si vede che (riunendo in una sola proposizione i resultati delle osservazioni di questo n. e del precedente) si può enunciare questo teorema:

" *Le rotazioni che sovrappongono a se stesso un ottaedro regolare si possono classificare a seconda del loro periodo nelle seguenti specie:*

Ne esistono sei a periodo quattro. A due a due sono inverse una dell'altra e si compiono attorno alle tre diagonali del solido.

Ne esistono otto a periodo tre. A due, a due sono inverse una del-

l'altra e si compiono intorno alle 4 rette che congiungono i centri di due facce opposte.

Ne esistono nove a periodo due. Sei hanno per assi le sei congiungenti i punti medi di due lati opposti. Le tre rimanenti non sono altro che i quadrati delle rotazioni a periodo quattro.

Se a queste 23 rotazioni, si aggiunge la identità e si considera l'effetto che esse producono sopra i quattro assi delle rotazioni a periodo tre, si perviene al gruppo totale di 24 sostituzioni sopra quattro elementi „.

È dunque naturale di chiamare un tale gruppo “ *il gruppo dell'ottaedro* „. Esso contiene manifestamente come sottogruppo invariante quello del tetraedro.

15. Gruppo dell'icosaedro (o del dodecaedro). — In modo perfettamente analogo a quanto si è fatto per l'ottaedro e per il cubo, si può osservare, che ogni rotazione che sovrappone a se stesso un icosaedro regolare, sovrappone a se stesso anche il dodecaedro regolare che ha i vertici nei centri delle facce dell'icosaedro e viceversa: ogni rotazione in se del secondo solido è tale anche per il primo. Possiamo dunque limitarci a considerare l'icosaedro. Giovano a tale scopo le figure 7, 8 e 9.

La figura 7 dimostra la esistenza di una rotazione a periodo 5, sovrapponente il solido a se medesimo. La rotazione si compie attorno alla retta che unisce i due vertici opposti M, N.

La figura 8 mette in evidenza una rotazione, trasformante il solido in se stesso, col periodo uguale a tre. L'asse di rotazione è la retta che unisce i centri delle due facce opposte: ABC, MNK.

Finalmente dalla considerazione della figura 9 resulta un'altra specie di rotazione del solido in se stesso. Il periodo è uguale a due e l'asse congiunge i punti medi dei due spigoli opposti DE, GH.

16. Per vedere l'effetto prodotto da queste rotazioni, osserviamo come già vedemmo al N. 9 e figura 9 che, i 12 vertici del solido possono distribuirsi a 4 a 4 nei tre piani DEGH, MKNB, ICFA formanti un triedro trirettangolo con il vertice nel centro del solido e i cui spigoli sono le tre congiungenti i punti medi degli spigoli opposti (DE, GH), (MK, NB), (IC, FA). È manifesto che una distribuzione dei 12 vertici in tre quaterne, come quelle descritte, può farsi in cinque modi dando così luogo a cinque triedri, come quello descritto, che chiameremo i triedri di simmetria del solido e indicheremo con le lettere $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$. Ebbene: ci proponiamo di esaminare l'effetto che si produce sopra questi triedri da ciascuna delle rotazioni descritte nel N. precedente. Cominciamo da una rotazione a periodo due. Il suo asse sarà spigolo di uno dei triedri suddetti: per es. di α. Ne segue che α non varia nella rotazione (i rimanenti due spigoli di α vengono scambiati fra loro. Dei rimanenti triedri $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ niuno rimane immutato perchè; se ad es. β rimanesse tale, bisognerebbe che uno dei suoi tre spigoli fosse asse di rotazione, cioè α e β dovrebbero avere uno spigolo in comune il che è impossibile. Ma d'altra parte il periodo della rotazione è due, dunque la sostituzione che essa produce sarà una delle seguenti tre:

$$(\beta\gamma)(\delta\varepsilon); \qquad (\beta\delta)(\varepsilon\gamma); \qquad (\beta\varepsilon)(\delta\gamma).$$

Quando si fa invece una sostituzione a periodo tre come nella figura 8, si vede che si permuteranno circolarmente gli assi che passano per i punti medi di AB, BC, CA i quali appartengono manifestamente a tre diversi triedri di simmetria. Quanto ai due triedri rimanenti è certo che essi non possono venire scambiati altrimenti il periodo della rotazione non potrebbe essere uguale a tre: dunque rimarranno immutati. La sostituzione cercata è dunque del tipo $(\alpha\beta\gamma)$.

Finalmente, dall'esame della figura 7 si vede che una rotazione a periodo 5 permuta circolarmente i cinque spigoli concorrenti in M e siccome due di essi non appartengono certamente a un medesimo triedro di simmetria, così ne viene che i cinque triedri in parola vengono permutati circolarmente e la sostituzione corrispondente è del tipo $(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)$.

Ebbene: se alle sostituzioni dei tipi trovati si aggiunge la identità, è evidente che si trovano tutte le sostituzioni pari sopra i cinque elementi $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ e costituenti quindi il gruppo alterno. Riunendo questo resultato a quello del precedente si può dunque formulare la seguente proposizione:

" *Le rotazioni che sovrappongono a se stesso un icosaedro regolare si possono classificare, a seconda del loro periodo, nel modo seguente:*

Ne esistono 24 a periodo cinque divisibili in sei quaterne, quelle di ogni quaterna essendo le 4 diverse potenze di una medesima e avendo quindi l'asse in comune. I sei assi che così si trovano sono le sei rette che congiungono due vertici opposti del solido.

Ne esistono 20 a periodo tre divisibili in 10 coppie, quelle di ogni coppia essendo l'una inversa dell'altra e avendo quindi l'asse in comune. I 10 assi che così si trovano sono le 10 rette che congiungono ciascuna i centri di due facce opposte del solido.

Ne esistono 15 a periodo due, attorno alle 15 rette congiungenti ciascuna i punti medi di due spigoli opposti.

Se a queste 59 rotazioni si aggiunge la identità e si considera l'effetto che esse producono sopra i cinque triedri di simmetria del solido, si perviene al gruppo alterno di 60 sostituzioni sopra cinque elementi ".

Ecco perchè un tal gruppo si suol chiamare " *il gruppo dell'icosaedro* ". Esso contiene i cinque sottogruppi tetraedrici che si ottengono tenendo fisso uno dei triedri suddetti e permutando gli altri quattro secondo le sostituzioni del gruppo alterno sopra quattro elementi. (1)

(1) Relativamente alla prima parte di questo scritto veggansi le seguenti pubblicazioni di F. P. Paternò: *Su talune proprietà dei poliedri regolari di prima specie.* Palermo, tip. del " Giornale di Sicilia ", 1882. *Un teorema sulle proiezioni di due segmenti rettangolari.* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1904.

E. Ciani.

COSTRUZIONE DI ENTI IMMAGINARI

(Continuazione e fine — v. fascicolo precedente)

V. — Proiettività e problemi sulle coniche.

27. Quando una retta r si rappresenta per mezzo di una similitudine inversa, considerata come insieme di elementi-coppie, una proiettività P fra i punti della retta viene rappresentata da una certa corrispondenza P′ fra gli elementi-coppie della similitudine. Per caratterizzare la corrispondenza P′ basta caratterizzare la corrispondenza che si ha fra i *primi punti* degli elementi-coppie corrispondenti in P′, o fra i *secondi punti.*

Più in generale supponiamo di avere una proiettività P fra i punti di due rette r e r' (nessuna delle quali passi per un punto ciclico del piano) e siano X e X′ due punti corrispondenti di r e r', e C e C′ i due punti ciclici. Mentre X descrive la retta r, X′ descrive r', i raggi CX e C′X′ descrivono due fasci proiettivi di centri C e C′, e in conseguenza il punto d'incontro M dei raggi CX e C′X′ descrive una circonferenza.

Ma ponendo:

$$X \equiv [A_1, A_2], \quad X' \equiv [A'_1, A'_2],$$

si ha:

$$CX \equiv \{A_1, \omega\}, \quad C'X' \equiv \{\omega, A'_2\}, \quad M \equiv \{A_1, A'_2\};$$

poichè M descrive una circonferenza, si ha che (18) i punti A_1 e A'_2 si corrispondono in una affinità circolare inversa.

Se la corrispondenza fra A_1 e A'_2 è una affinità circolare inversa, essendo la corrispondenza fra A'_2 e A'_1 una similitudine inversa, si ha che la corrispondenza fra A_1 e A'_1 è una affinità circolare *diretta*, prodotto delle due prime corrispondenze.

Il ragionamento fatto è invertibile, e perciò concludiamo che *nella corrispondenza fra gli elementi-coppie di due similitudini inverse che rappresenta una proiettività fra le rette obiettive, i primi punti (o i secondi) degli elementi-coppie corrispondenti si corrispondono in una affinità circolare diretta; e inversamente, ogni affinità circolare diretta che si stabilisca fra i primi punti (o fra i secondi) degli elementi-coppie di due similitudini inverse, stabilisce fra gli elementi-coppie medesimi una corrispondenza che rappresenta una proiettività sulle rette obiettive.*

La affinità circolare diretta si riduce a una similitudine diretta se nella proiettività sulle rette obiettive i punti all'infinito si corrispondono.

28. Nella dimostrazione fatta al n. precedente abbiamo escluso che una delle rette r e r' passi per un punto ciclico del piano; la ragione è evidente.

Se r passa per C ed r' non passa nè per C nè C', proiettando i punti di r' da C e i punti di r' da C si giunge ugualmente alla conclusione che fra i *secondi* punti degli elementi-coppie corrispondenti si ha una affinità circolare diretta.

Se r passa per C ed r' passa per C', e si ha quindi:

$$r \equiv \{H, \omega\}, \qquad r' \equiv \{\omega, K\},$$

proiettando i punti di r da C' e quelli di r' da C, si trova che fra i *secondi* punti degli elementi-coppie che rappresentano i punti di r e i *primi* punti degli elementi-coppie che rappresentano i punti di r' si ha una affinità circolare inversa.

Se infine r e r' passano ambedue per C, considerando una terza retta r'' proiettiva tanto a r che a r' e non passante per C si torna al primo dei casi qui considerati, e si arriva alla medesima conclusione relativamente alla corrispondenza fra i *secondi* punti degli elementi-coppie che rappresentano i punti di r e r'.

29. La proiettività fra i punti di due cerchi si riflette in una corrispondenza fra gli elementi-coppie delle affinità circolari inverse che li rappresentano, della stessa natura di quella trovata al n. 27; cioè, fra i primi punti degli elementi-coppie medesimi si ha una affinità circolare diretta.

Infatti, si può ripetere per due cerchi proiettivi il ragionamento fatto sopra per due rette proiettive; e si può ripetere anche per un cerchio e una retta, proiettivi.

30. Una involuzione fra i punti di una retta è rappresentata da una affinità circolare diretta involutoria fra i primi punti degli elementi-coppie che rappresentano i punti della retta.

Una affinità circolare diretta è involutoria quando i punti centrali S e T, corrispondenti ai punti della retta all'infinito nelle due figure, coincidono in un solo punto S. Questo punto è centro di due fasci di semirette corrispondenti, inversamente uguali (19): sulle due semirette unite, opposte l'una all'altra, si hanno i punti uniti della affinità, alla distanza k da S, se k^2 è la costante.

La affinità può essere anche una similitudine diretta, che, per essere involutoria, deve essere la simmetria rispetto a un punto. Il centro di simmetria e i punti della retta all'infinito sono in tal caso i punti uniti della corrispondenza.

31. Punti uniti di una involuzione reale su una retta r. — Siano AA', BB' due coppie della involuzione; costruiamo i cerchi c e c' che hanno per diametri AA' e BB'. Se c e c' non s'incontrano in punti reali, esistono su r due punti M, N inversi tanto rispetto a c che rispetto a c', e questi sono i due punti uniti reali dell'involuzione.

Se invece c e c' s'incontrano in due punti reali P e Q, le coppie dell'involuzione sono le intersezioni con r dei cerchi passanti per P e Q, e il punto S nel quale l'asse radicale PQ incontra r è il centro dell'involuzione; la affinità circolare diretta involutoria che ha per punto centrale S e alla quale appartengono le coppie dell'involuzione su r, ha per punti uniti evidentemente P e Q. A questi corrispondono, della simmetria rispetto ad r, rispettivamente Q e P, onde gli elementi-coppie [P, Q] e [Q, P] rappresentano i due punti uniti, immaginari coniugati, dell'involuzione.

32. Punti uniti di una proiettività reale su una retta r. — La proiettività sarà fissata, per esempio, per mezzo di tre coppie di punti corrispondenti reali. Con uno qualunque dei mezzi noti determiniamo i punti S e T di r corrispondenti al punto all'infinito, considerato nella seconda figura e nella prima rispettivamente. Può darsi che S e T siano all'infinito, ma allora la proiettività è una similitudine, che ha sempre punti uniti reali.

La proiettività su r si rappresenta in modo completo con una affinità circolare diretta fra i primi punti degli elementi-coppie appartenenti alla simmetria di asse r; tale affinità ha per punti centrali S e T, e in essa la retta r è unita; la costante k^2 dell'affinità è nota, perchè si conoscono delle coppie di punti corrispondenti (19).

La retta r è divisa in due semirette da S e in altre due da T; può darsi che le semirette corrispondenti siano quelle che hanno la medesima direzione, e in tal caso è manifesto che la proiettività su r ha due punti uniti reali, che sono anche i punti uniti dell'affinità e che possono determinarsi in uno dei modi noti.

Quando poi si corrispondano le semirette che hanno direzione contraria, con centri in S e T descriviamo due circonferenze di raggio k; se esse non s'incontrano in punti reali, i punti M, N inversi rispetto ad ambedue le circonferenze sono i punti uniti reali della proiettività; se esse si incontrano in due punti reali P e Q, questi sono i punti uniti dell'affinità, e i due elementi-coppie [P, Q] e [Q, P] rappresentano i due punti uniti, immaginari coniugati, della proiettività.

33. Intersezioni di una retta r con una conica c, quando r e c non s'incontrano in punti reali. — Su r consideriamo l'involuzione dei punti coniugati rispetto alla conica c; gli elementi-coppie che rappresentano i punti uniti di questa involuzione (31) rappresentano anche le intersezioni di r con c.

In modo analogo si risolvono tutti gli innumerevoli problemi, relativi alle coniche reali, che si riducono alla determinazione dei punti uniti di una involuzione o di una proiettività; per esempio, quello della costruzione delle tangenti da un punto interno, degli assintoti in una ellisse, ecc.

Anche la determinazione dei *punti uniti di una proiettività reale su una conica* si riduce a quella dei punti d'incontro, reali o immaginari, di una retta reale con la conica; perciò anche tale problema si può ritenere risoluto.

34. Polare di uno dei punti ciclici del piano rispetto a una conica reale c. — Consideriamo per esempio il primo punto ciclico, ossia quello che è rappresentato da elementi-coppie del tipo $[P, Q_\infty]$ (14); la sua polare rispetto a c passerà per il centro O, e precisamente sarà il diametro coniugato a quello rappresentato dalla similitudine degenere (O, ω), passante per il punto ciclico considerato.

Sulla tangente r in un vertice S di c determiniamo una coppia A, A' dell'involuzione reale nella quale r sega l'involuzione dei diametri coniugati; il centro dell'involuzione è S. Il diametro (O, ω) sega r in un elemento-coppia $[O, O_2]$, nel quale O_2 è il simmetrico di O rispetto a r; l'elemento coppia $[O'_1, O'_2]$, corrispondente a questo nell'involuzione su r, si otterrà prendendo O'_1 corrispondente a O nella affinità circolare diretta che ha per centro S e nella quale A e A' si corrispondono.

Se A e A' sono da parte opposta rispetto ad S, il punto O'_1 è l'intersezione del cerchio OAA' coll'asse OS; se A e A' sono dalla stessa parte rispetto ad S, il punto determinato nel modo ora detto è invece O'_2, e O'_1 è il suo simmetrico rispetto ad r.

La similitudine inversa passante per gli elementi-coppie $[O, O]$ e $[O'_1, O'_2]$ rappresenta la polare del primo punto ciclico, e la inversa di questa rappresenta la polare dell'altro punto ciclico.

35. Intersezione di una conica reale c con la retta che da un punto reale M va a uno dei punti ciclici. — La retta r che noi consideriamo sia quella che da M va al primo punto ciclico, e quindi sia rappresentata dalla similitudine degenere (M, ω). Sulla retta r si ha una involuzione di punti coniugati rispetto a c, nella quale al punto M, ossia all'elemento-coppia $[M, M]$, corrisponde l'elemento d'intersezione $[M, N]$ della retta r con la polare, reale, di M, e all'elemento all'infinito di r corrisponde l'elemento d'intersezione $[M, S]$ di r con la polare del primo punto ciclico, già determinata. Tanto N che S sono di facile costruzione.

Gli elementi uniti $[M, M']$ e $[M, M'']$ di questa involuzione, che rappresentano le intersezioni della retta r con c, si ottengono prendendo per M' e M'' i punti uniti dell'affinità circolare diretta involutoria che ha per punto centrale S e per punti corrispondenti M ed N.

36. Non abbiamo dato il carattere generale della corrispondenza fra i punti reali del piano che, considerata come insieme di elementi coppie, rappresenta una conica. Si può osservare subito che in essa a ogni punto M corrispondono in generale due punti; infatti, la retta rappresentata della similitudine degenere (M, ω), che è quella che dal punto M va al primo punto ciclico, incontra la conica in due punti, che sono rappresentati da due elementi-coppie $[M, M']$ e $[M, M'']$; al punto M corrispondono dunque i due punti M' e M''.

Abbiamo mostrato (35) come si possano costruire effettivamente i punti M′ e M″ quando la conica è reale; ma da questo alla determinazione del carattere della corrispondenza il passo è certamente lungo. Noi non tenteremo qui di farlo come per brevità tralascieremo molte altre considerazioni più o meno ovvie.

P. Benedetti.

RISOLUZIONE IN NUMERI INTERI DELL'EQUAZIONE INDETERMINATA
$x^2 + axy + by^2 = z^n$

I. Data l'equazione

$$x^2 + axy + by^2 = z^n, \tag{1}$$

dove a, b, n sono quantità note, poniamo, ciò che si può sempre fare e in un sol modo,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha\beta = b. \end{cases} \tag{2}$$

Sostituendo le (2) nel primo membro della (1) e scomponendo in fattori, si otterrà

$$x^2 + axy + by^2 = (x + \alpha y)(x + \beta y);$$

affinchè sia

$$(x + \alpha y)(x + \beta y) = z^n \tag{3}$$

è *sufficiente* che ciascuno fattore del primo membro della (3) sia una potenza ennesima.

Posto intanto

$$x + \alpha y = (r + \alpha s)^n,$$

si avrà, sviluppando secondo la formola della potenza del binomio:

$$\begin{aligned} x + \alpha y = r^n + nr^{n-1} s\alpha + \frac{n(n-1)}{2!} r^{n-2} s^2 \alpha^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} r^{n-3} s^3 \alpha^3 + \dots \\ \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} r^{n-k} s^k \alpha^k + \dots \\ \dots + nrs^{n-1}\alpha^{n-1} + s^n \alpha^n. \end{aligned} \tag{4}$$

2. Ora, l'artificio col quale vogliamo giungere alla risoluzione dell'equazione data, consiste nell'esprimere tutte le potenze di α, che figurano nel secondo membro della (4), in funzione delle sole potenze 0 ed 1 della stessa lettera, e ciò per dare allo sviluppo una forma simile a quella del primo membro.

Per ottenere ciò consideriamo le (2). Esse ci dànno l'equazione

$$\omega^2 - a\omega + b = 0$$

od anche

$$\omega^2 = a\omega - b$$

la quale, sostituendo ad ω successivamente le radici α e β, ci dà le uguaglianze

$$\begin{cases} \alpha^2 = a\alpha - b \\ \beta^2 = a\beta - b \end{cases} \tag{5}$$

di cui la prima ci offre l'espressione di α^2 in funzione di α^1.

Moltiplicando l'eguaglianza stessa per α si ha:

$$\alpha^3 = a\alpha^2 - b\alpha = a(a\alpha - b) - b\alpha = a^2\alpha - ab - b\alpha$$

e quindi l'espressione di α^3 in funzione di α^1.

Continuando in modo analogo ed ordinando, si ottengono le espressioni

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= a\alpha - b \\
\alpha^3 &= (a^2 - b)\,\alpha - ab \\
\alpha^4 &= (a^3 - 2ab)\,\alpha - (a^2 - b)\,b \\
\alpha^5 &= (a^4 - 3a^2b + b^2)\,\alpha - (a^3 - 2ab)\,b \\
\alpha^6 &= (a^5 - 4a^3b + 3ab^2)\,\alpha - (a^4 - 3a^2b + 3ab^2)\,b \\
\alpha^7 &= (a^6 - 5a^4b + 6a^2b^2 - b^3)\,\alpha - (a^5 - 4a^3b + 3ab^2)\,b \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

la cui legge di formazione, per $n = 2, 3, \ldots, 7$, è espressa dalla formola:

$$\begin{aligned}
\alpha^n = {} & (a^{n-1} - F^{(1)}_{n-2}\,a^{n-3}b + F^{(2)}_{n-4}\,a^{n-5}b^2 - F^{(3)}_{n-6}\,a^{n-7}b^3 + \ldots)\,\alpha - \\
& - (a^{n-2} - F^{(1)}_{n-3}\,a^{n-4}b + F^{(2)}_{n-5}\,a^{n-6}b^2 - F^{(3)}_{n-7}\,a^{n-8}b^3 + \ldots)\,b,
\end{aligned} \tag{6}$$

dove il simbolo $F^{(q)}_p$ indica il p^{esimo} numero figurato a q dimensioni e la cui espressione è

$$F^{(q)}_p = \frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+q-1)}{q!} = \binom{p+q-1}{q}. \tag{7}$$

3. La (6), ammessa vera per n, vale anche per $n+1$. Infatti abbiamo:

$$\alpha^{n+1} = (a^{n-1} - F^{(1)}_{n-2} a^{n-3} b + F^{(2)}_{n-4} a^{n-5} b^2 - F^{(3)}_{n-6} a^{n-7} b^3 + \ldots)(a\alpha - b) -$$
$$- (a^{n-2} - F^{(1)}_{n-3} a^{n-4} b + F^{(2)}_{n-5} a^{n-6} b^2 - F^{(3)}_{n-7} a^{n-8} b^3 + \ldots)\, b\alpha =$$
$$= (a^n - F^{(1)}_{n-2} a^{n-2} b + F^{(2)}_{n-4} a^{n-4} b^2 - F^{(3)}_{n-6} a^{n-6} b^3 + \ldots$$
$$\ldots - a^{n-2} b + F^{(1)}_{n-3} a^{n-4} b^2 - F^{(2)}_{n-5} a^{n-6} b^3 + F^{(3)}_{n-7} a^{n-8} b^4 - \ldots)\, \alpha -$$
$$- (a^{n-1} - F^{(1)}_{n-2} a^{n-3} b + F^{(2)}_{n-4} a^{n-5} b^2 - F^{(3)}_{n-6} a^{n-7} b^3 + \ldots)\, b =$$
$$= [a^n - (F^{(1)}_{n-2} + 1) a^{n-2} b + (F^{(2)}_{n-4} + F^{(1)}_{n-3}) a^{n-4} b^2 - (F^{(3)}_{n-6} + F^{(2)}_{n-5}) a^{n-6} b^3 + \ldots]\, \alpha -$$
$$- (a^{n-1} - F^{(1)}_{n-2} a^{n-3} b + F^{(2)}_{n-4} a^{n-5} b^2 - F^{(3)}_{n-6} a^{n-7} b^3 + \ldots)\, b;$$

e tenuto conto delle note relazioni

$$F^{(q)}_{p-1} + F^{(q-1)}_{p} = F^{(q)}_{p} \qquad \text{e} \qquad F^{(0)}_{p} = 1$$

si avrà infine:

$$\alpha^{n+1} = (a^n - F^{(1)}_{n-1} a^{n-2} b + F^{(2)}_{n-3} a^{n-4} b^2 - F^{(3)}_{n-5} a^{n-6} b^3 + \ldots)\, \alpha -$$
$$- (a^{n-1} - F^{(1)}_{n-2} a^{n-3} b + F^{(2)}_{n-4} a^{n-5} b^2 - \ldots)\, b.$$

Possiamo quindi concludere che la (6) è generale e vale per qualunque valore di n ($n > 1$) purchè intero e positivo.

In essa si notano le seguenti proprietà:

1°. Il polinomio che moltiplica b è uguale al polinomio che moltiplica α nello sviluppo di α^{n-1};

2°. I polinomi che moltiplicano α hanno t termini tanto per $n = 2t - 1$ come per $n = 2t$: inoltre, quando $n = 2t$, gli stessi polinomi sono multipli di a;

3°. L'ultimo termine di ciascun polinomio moltiplicante α, per quanto si è detto al numero precedente, contiene come fattore a^1 od a^0, secondo che n è della forma $2t$ o $2t - 1$: esso termine è preceduto dal segno $+$ o $-$ secondo che n è delle forme $4t+1$ e $4t+2$ o $4t$ e $4t+3$.

L'ultimo termine dei polinomi che moltiplicano α sarà quindi uguale

per $n = 4t$	a	$-F_2^{(2t-1)} ab^{2t-1}$
» $n = 4t+1$	»	$+b^{2t}$
» $n = 4t+2$	»	$+F_2^{(2t)} ab^{2t}$
» $n = 4t+3$	»	$-b^{2t+1}$

e l'ultimo termine dei polinomi che moltiplicano b, conseguentemente all'osservazione del n. 1, sarà uguale

per $n = 4t$	a	$-b^{2t-1}$
» $n = 4t+1$	»	$-F_2^{(2t-1)} ab^{2t-1}$

per $n = 4t + 2$ a $+ b^{2t}$

» $n = 4t + 3$ » $+ F_2^{(2t)} ab^{2t}$. (1)

4. Sostituendo ora nelle (4) alle varie potenze di α, a cominciare da α^2, le espressioni trovate in funzione di α^1, si avrà:

$$\begin{aligned} x + \alpha y = r^n + nr^{n-1} s\alpha + \frac{n(n-1)}{2!} r^{n-2} s^2 (a\alpha - b) + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} r^{n-3} s^3 [(a^2 - b)\alpha - ab] + \dots \\ \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} r^{n-k} s^k [a^{k-1} - F^{(1)}_{k-2} a^{k-3} b + \\ + F^{(2)}_{k-4} a^{k-5} b^2 - \dots)\alpha - (a^{k-2} - F^{(1)}_{k-3} a^{k-4} b + F^{(2)}_{k-5} a^{k-6} b^2 - \dots) b] + \dots \\ \dots + nrs^{n-1} [(a^{n-2} - F^{(1)}_{n-3} a^{n-4} b + F^{(2)}_{n-5} a^{n-6} b^2 - \dots)\alpha - \\ - (a^{n-3} - F^{(1)}_{n-4} a^{n-5} b + F^{(2)}_{n-6} a^{n-7} b^2 - \dots) b] + \\ + s^n [(a^{n-1} - F^{(1)}_{n-2} a^{n-3} b + F^{(2)}_{n-4} a^{n-5} b^2 - \dots)\alpha - \\ - (a^{n-2} - F^{(1)}_{n-3} a^{n-4} b + F^{(2)}_{n-5} a^{n-6} b^2 - \dots) b]; \end{aligned}$$

ed ordinando rispetto ad α^0 e α^1:

$$\begin{aligned} x + \alpha y = \Big\{ r^n - \frac{n(n-1)}{2!} r^{n-2} s^2 b - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} r^{n-3} s^3 ab - \\ - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} r^{n-4} s^4 (a^2 - b) b - \dots \\ \dots - \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} r^{n-k} s^k (a^{k-2} - F^{(1)}_{k-3} a^{k-4} b + \\ + F^{(2)}_{k-5} a^{k-6} b^2 - \dots) b - \dots - nrs^{n-1} (a^{n-3} - F^{(1)}_{n-4} a^{n-5} b + \\ + F^{(2)}_{n-6} a^{n-7} b^2 - \dots) b - s^n (a^{n-2} - F^{(1)}_{n-3} a^{n-4} b + F^{(2)}_{n-5} a^{n-6} b^2 - \dots) b \Big\} + \\ + \alpha \Big\{ nr^{n-1} s + \frac{n(n-1)}{2!} r^{n-2} s^2 a + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} r^{n-3} s^3 (a^2 - b) + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} r^{n-4} s^4 (a^3 - 2ab) + \dots \\ \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} r^{n-k} s^k (a^{k-1} - F^{(1)}_{k-2} a^{k-3} b + \\ + F^{(2)}_{k-4} a^{k-5} b^2 - \dots) + \dots + nrs^{n-1} (a^{n-2} - F^{(1)}_{n-3} a^{n-4} b + \\ + F^{(2)}_{n-5} a^{n-6} b^2 - \dots) + s^n (a^{n-1} - F^{(1)}_{n-2} a^{n-3} b + F^{(2)}_{n-4} a^{n-5} b^2 - \dots) \Big\}. \end{aligned} \tag{8}$$

(1) Si badi a non confondere $F_2^{(q)}$ con q, poichè

$F_2^{(q)} = \frac{2 . 3 \dots (q+1)}{q!} = \frac{(q+1)}{q!} = q + 1$. Invece è $F_p^{(1)} = \frac{p}{1!} = p$; $F_1^{(q)} = 1$.

Indicando rispettivamente con X ed Y, nel secondo membro della (8), i polinomi che moltiplicano α^0 ed α^1, si ha

$$x + \alpha y = \mathrm{X} + \alpha \mathrm{Y}. \tag{9}$$

Partendo ora nuovamente dalla (3) ponendo

$$x + \beta y = (r + \beta s)^n$$

e compiendo in modo analogo per β le trasformazioni fatte nel caso di α fino ad ottenere la (8), si perverrà all'eguaglianza

$$x + \beta y = \mathrm{X} + \beta \mathrm{Y}. \tag{10}$$

Dovendo le (9) e (10) sussistere indipendentemente da α e β, essendo a e b interi qualunque, sarà necessariamente

$$x = \mathrm{X}, \qquad y = \mathrm{Y};$$

quindi

$$\begin{aligned}
x = r^n &- \frac{n(n-1)}{2!} r^{n-2} s^{n-2} b - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} r^{n-3} s^3 ab - \\
&- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} r^{n-4} s^4 (a^2 - b) b - \ldots \\
&\ldots - \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} r^{n-k} s^k (a^{k-2} - \mathrm{F}^{(1)}_{k-3} a^{k-4} b + \\
&+ \mathrm{F}^{(2)}_{k-5} a^{k-6} b^2 - \ldots) b \ldots - nrs^{n-1} (a^{n-3} - \mathrm{F}^{(1)}_{n-4} a^{n-5} b + \\
&+ \mathrm{F}^{(2)}_{n-6} a^{n-7} b^2 - \ldots) b - s^n (a^{n-2} - \mathrm{E}^{(1)}_{n-3} a^{n-4} b + \mathrm{F}^{(2)}_{n-5} a^{n-6} b^2 - \ldots) b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y = nr^{n-1} s &+ \frac{n(n-1)}{2!} r^{n-2} s^2 a + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} r^{n-3} s^3 (a^2 - b) + \\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} r^{n-4} s^4 (a^3 - 2ab) + \ldots \\
&\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k} r^{n-k} s^k (a^{k-1} - \mathrm{F}^{(1)}_{k-2} a^{k-3} b + \\
&+ \mathrm{F}^{(2)}_{k-4} a^{k-5} b^2 - \ldots) + \ldots + nrs^{n-1} (a^{n-2} - \mathrm{F}^{(1)}_{n-3} a^{n-4} b + \\
&+ \mathrm{F}^{(2)}_{n-5} a^{n-6} b^2 - \ldots) + s^n (a^{n-1} - \mathrm{F}^{(1)}_{n-2} a^{n-3} b + \mathrm{F}^{(2)}_{n-4} a^{n-5} b^2 - \ldots) b
\end{aligned}$$

od anche, in modo compendioso,

$$x = r^n - \sum_{k=2}^{k=n} \binom{n}{k} r^{n-k} s^k (a^{k-2} - \mathrm{F}^{(1)}_{k-3} a^{k-4} b + \mathrm{F}^{(2)}_{k-5} a^{k-5} b^2 - \ldots) b$$

$$y = \sum_{k=1}^{k=n} \binom{n}{k} r^{n-k} s^k (a^{k-1} - \mathrm{F}^{(1)}_{k-2} a^{k-3} b + \mathrm{F}^{(2)}_{k-4} a^{k-5} b^2 - \ldots)$$

e infine, tenuto conto, per generalità, delle relazioni già citate $F_p^{(o)} = F_1^{(\alpha)} = 1$:

$$x = r^n - \sum_{k=2}^{k=n} \binom{n}{k} r^{n-k} s^k \left[(-1)^t\, b \sum_{t=0}^{\begin{cases} t=\frac{k-2}{2} (k=2h) \\ t=\frac{k-3}{2} (k=2h+1) \end{cases}} F^{(t)}_{k-(2t+1)}\, a^{k-2(t+1)}\, b^t\right]$$

$$y = \sum_{k=1}^{k=n} \binom{n}{k} r^{n-k} s^k \left[(-1)^t \sum_{t=0}^{\begin{cases} t=\frac{k-2}{2} (k=2h) \\ t=\frac{k-1}{2} (k=2h+1) \end{cases}} F^{(t)}_{k-2t}\, a^{k-(2t+1)}\, b^t\right].$$

Volendo poi tener conto della (7) le predette formole diventano:

$$\begin{aligned} x &= r^n - \sum_{k=2}^{k=n} \binom{n}{k} r^{n-k} s^k \left[(-1)^t\, b \sum_{t=0}^{\begin{cases} t=\frac{k-2}{2} (k=2h) \\ t=\frac{k-3}{2} (k=2h+1) \end{cases}} \binom{k-t-2}{t} a^{k-2(t+1)}\, b^t\right] \\ y &= \sum_{k=1}^{k=n} \binom{n}{k} r^{n-k} s^k \left[(-1)^t \sum_{t=0}^{\begin{cases} t=\frac{k-2}{2} (k=2h) \\ t=\frac{k-1}{2} (k=2h+1) \end{cases}} \binom{k-t-1}{t} a^{k-(2t+1)}\, b^t\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

dove la seconda sommatoria va estesa a tutti i valori di t per ciascun valore di k.

In ogni caso, poi, è

$$z = (r + \alpha s)(r + \beta s) = r^2 + ars + bs^2. \tag{12}$$

Dunque, comunque scelti gl'interi r ed s, le (11) e la (12) dànno infinite soluzioni dell'equazione proposta.

5. Volendo risolvere l'equazione più generale

$$x^2 + axy + by^2 = cz^n, \tag{13}$$

quando c è della forma $u^2 + auv + bv^2$, si ha, per le (2):

$$(x + \alpha y)(x + \beta y) = (u + \alpha v)(u + \beta v)\, z^n. \tag{14}$$

Posto

$$\begin{cases} x + \alpha y = (p + \alpha q)(u + \alpha v) \\ x + \beta y = (p + \beta q)(u + \beta v) \end{cases} \tag{15}$$

si ottiene sviluppando:

$$\begin{aligned} x + \alpha y &= pu + \alpha qu + \alpha pv + \alpha^2 qv \\ x + \beta y &= pu + \beta qu + \beta pv + \beta^2 qv \end{aligned}$$

e per le (5), sostituendo:

$$\begin{aligned} x + \alpha y &= pu + \alpha qu + \alpha pv + \alpha aqv - bqv \\ x + \beta y &= pu + \beta qu + \beta pv + \beta aqv - bqv \end{aligned}$$

ed ordinando rispetto ad α e β:

$$x + \alpha y = (pu - bqv) + \alpha\,(qu + pv + aqv)$$
$$x + \beta y = (pu - bqv) + \beta\,(qu + pv + aqv),$$

dalla quale si deduce:

$$x = pu - bqv, \qquad y = qu + pv + aqv.$$

Ma la (14), dopo la soppressione dei fattori comuni $(u + \alpha v)$ $(u + \beta v)$, previa la sostituzione nel primo membro di essa delle (15), diventa

$$p^2 + apq + bq^2 = z^n,$$

e quindi la risoluzione della (13) è ricondotta a quella della (1).

Come si scorge facilmente, procedendo in modo analogo al precedente per un numero qualunque di fattori, si perviene alla risoluzione dell'equazione:

$$x^2 + axy + by^2 = \prod_{k=1}^{k=n} (x_k^2 + ax_ky_k + by_k^2), \tag{16}$$

il cui artificio consiste nell'esprimere il prodotto di più fattori della forma $X^2 + aXY + bY^2$ mediante la stessa forma.

La risoluzione della (16) sarà oggetto di altra nota. Intanto si osservi che la (1) non è che un caso particolare di essa quando si faccia

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n; \qquad y_1 = y_2 = \ldots = y_n.$$

6. Casi particolari. — Se $a = 0$, la (1) prende la forma

$$x^2 + by^2 = z^n.$$

Riguardo alle (11) si noti che i termini della sommatoria si annullano alternativamente e precisamente quelli di posto pari, per la presenza del fattore a; epperò esse diventano:

$$x = (-1)^k \sum_{k=0}^{\begin{cases} k=\frac{n}{2} (n=2h) \\ k=\frac{n-1}{2} (n=2h+1) \end{cases}} \binom{n}{2k} r^{n-2k} s^{2k} b^k$$

$$y = (-1)^k \sum_{k=0}^{\begin{cases} k=\frac{n-2}{2} (n=2h) \\ k=\frac{n-1}{2} (n=2h+1) \end{cases}} \binom{n}{2k+1} r^{n-(2k+1)} s^{2k+1} b^k$$

$$z = r^2 + bs^2.$$

Se $a = 0$ e $b = 1$, si ha l'equazione

$$x^2 + y^2 = z^n.$$

Si ottiene intanto

$$z = r^2 + s^2;$$

e i valori di x e y, sviluppando la sommatoria, diventano

per n pari	per n dispari
$x = r^n - \frac{n(n-1)}{2!} r^{n-2} s^2 + \ldots \pm s^n$	$x = r^n - \frac{n(n-1)}{2!} r^{n-2} s^2 + \ldots \pm nrs^{n-1}$
$y = nr^{n-1} s -$	$y = nr^{n-1} s -$
$- \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} r^{n-3} s^3 + \ldots \mp nrs^{n-1}$	$- \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} r^{n-3} s^3 + \ldots \mp s^n$

dove i segni superiori ed inferiori si corrispondono e va scelto il primo o l'altro, secondo che n è della forma

$$4t \quad \text{o} \quad 4t+2 \qquad | \qquad 4t+1 \quad \text{o} \quad 4t+3.$$

Le precedenti formole coincidono con quelle ricavate direttamente e per altra via nella risoluzione dell'equazione $x^2 + y^2 = z^n$ e trattata nell'ultimo numero, Anno XII, del « Supplemento ».

Se $b = 0$, si ha l'equazione

$$x + ay = z^n,$$

previa soppressione del fattore comune r^n, e le formule risolutive diventano:

$$x = r^n$$

$$y = nr^{n-1} s + \frac{n(n-1)}{2!} r^{n-2} s^2 a + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} r^{n-3} s^3 a^2 + \ldots$$

$$z = r + as.$$

Osservazione. — Poichè nell'equazione data, le incognite x ed y compaiono solo al secondo grado e così pure r ed s nell'espressione di z, perchè le soluzioni siano oltrechè intere, positive, basterà scegliere per r ed s valori dello stesso segno e tali da rendere dello stesso segno anche i valori risultanti di x ed y.

Pavia, settembre 1909.

Fabio Ferrari.

UN TEOREMA SULLE SUCCESSIONI DI FUNZIONI DISCONTINUE

1. Si consideri una successione di infinite funzioni

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x), \ldots \varphi_m(x), \ldots \qquad (1)$$

le quali soddisfano alle seguenti condizioni, che, per brevità, chiameremo condizioni (A):

a) sono discontinue, ciascuna in un numero finito di punti, numero che cresce indefinitamente con m;

b) tendono uniformemente ad una funzione continua $S_0(x)$;

c) hanno in ogni punto le derivate a destra

$$D_x^+\varphi_1(x),\ D_x^+\varphi_2(D),\ D_x^+\varphi_3(x), \ldots D_x^+\varphi_m(x), \ldots \qquad (2)$$

determinate e finite, che sono le derivate ordinarie in tutti i punti dell'intervallo in cui le (1) sono definite tranne che nei punti di discontinuità; e queste derivate a destra tendono uniformemente ad una funzione continua $T_0(x)$.

In una nota pubblicata nel *Giornale di Matematiche* [1] io ho fatto vedere che, prefissate due funzioni continue $\Phi(x)$ e $\Psi(x)$, sempre si può costruire una successione di funzioni (1) soddisfacenti alle condizioni (A) per modo da aversi

$$S_0(x) = \Phi(x), \qquad T_0(x) = \Psi(x).$$

Mi sono domandato, in quella nota, quali ulteriori condizioni bisogna porre perchè la $T_0(x)$ sia la derivata di $S_0(x)$, ed ivi ho enunciato il teorema:

Se una successione di funzioni (1) *soddisfa alle condizioni* (A) *e di più la somma delle discontinuità delle* $\varphi_m(x)$ *è una quantità* $\omega(m)$ *per la quale* $\lim_{m=\infty} \omega(m) = 0$, *la funzione a cui converge uniformemente la successione delle derivate a destra* (2) *è la derivata della funzione a cui converge pure la successione* (1).

Nella dimostrazione che ne dò, è supposto che tenda a zero $\omega(m)$ per $m=\infty$ in qualsiasi intervallo compreso in quello in cui le (1) sono definite, ciò che non è detto nell'enunciato.

In questo senso vuole rettificato l'enunciato del teorema, che anzi può essere completato così:

Condizione necessaria e sufficiente acciò che per una successione di funzioni (1) *soddisfacenti alle condizioni* (A), *la corrispondente successione delle derivate a destra* (2) *tenda alla derivata della funzione cui*

[1] Un teorema sulle successioni di funzioni discontinue ed una osservazione sulle equazioni differenziali. Vol. XLV.

convergono le (1), *è che la somma delle discontinuità delle* $\varphi_m(x)$ *in qualsivoglia intervallo tende allo zero al tendere di* m *all' infinito.*

La dimostrazione può essere fatta più semplicemente che nella nota citata.

Se a è un punto dell' intervallo in cui si suppongono definite le (1), si chiami $\omega_m(x)$ la somma delle discontinuità di $\varphi_m(x)$ in un intervallo che ha per estremo inferiore a e per estremo superiore x.

Osservato che le $\varphi_m(x)$ sono continue a destra nei punti di discontinuità, si vede tosto che le $\varphi_m(x) + \omega_m(x)$ sono funzioni continue in ogni intervallo ed hanno per derivate ordinarie le

$$D_x^+ \varphi_m(x).$$

Ne consegue

$$\int_a^x D_x^+ \varphi_m(x) = \varphi_m(x) - \varphi_m(a) + \omega_m(x).$$

E poichè le $D_x^+ \varphi_m(x)$ convergono uniformemente ad una funzione continua $T_0(x)$, e le $\varphi_m(x)$ ad una funzione continua $S_0(x)$

$$\lim_{m=\infty} \int_a^x D_x^+ \varphi_m(x) \,.\, dx = \int_a^x T_0(x)\, dx$$

$$\lim_{m=\infty} \{\varphi_m(x) - \varphi_m(a)\} = S_0(x) - S_0(a);$$

e poichè

$$\lim_{m=\infty} \omega_m(x) = 0,$$

si otterrà

$$\int_a^x T_0(x)\, dx = S_0(x) - S_0(a),$$

o, come si voleva provare,

$$T_0(x) = S'_0(x).$$

Con ciò è provato che la condizione è sufficiente: ma si vede immediatamente che essa è anche necessaria. Invero si supponga

$$T_0(x) = S'_0(x).$$

Poichè

$$\omega_m(x) = \int_a^x D_x^+ \varphi_m(x) - (\varphi_m(x) - \varphi_m(a))$$

sarà

$$\lim_{m=\infty} \omega_m(x) = \lim_{m=\infty} \int_a^x D_x^+ \varphi_m(x) - \lim_{m=\infty} (\varphi_m(x) - \varphi_m(a)) =$$

$$= \int_a^x T_0(x)\, dx - (S_0(x) - S_0(a))$$

e quindi, per la posta ipotesi:

$$\lim_{m=\infty} \omega_m(x) = 0.$$

F. Sibirani.

RISOLUZIONE DELLA QUISTIONE 770

770. *Dato* $\log\tan x$, *se* $\log\tan x_0$ *è il valore prossimo in una tavola di passo* Δx, *dimostrare che assumendo*

$$\log \operatorname{sen} x = \log \operatorname{sen} x_0 + (\log\tan x - \log\tan x_0) \quad per \quad \log\tan x > 0,$$

e

$$\log \operatorname{sen} x = \log \operatorname{sen} x_0 \quad per \quad \log\tan x > 0,$$

si commette un errore certamente minore di $\Delta x \times 0{,}21715$, *dove* Δx *s'intende espresso in misura circolare.*

G. Pesci.

Risoluzione del Prof. A. L. Csada di Máramarossziget (Ungheria).

1°. Il caso di $\log\tan x < 0$, ovvero $\tan x < 1$, ovvero $x < \frac{\pi}{4}$.

Posto

$$\log \operatorname{sen} x = \log \operatorname{sen} x_0 + (\log\tan x - \log\tan x_0) + R_1,$$

si ha immediatamente

$$R_1 = \log\cos x - \log\cos x_0,$$

da cui, applicando la formula del teorema del valor medio,

$$R_1 = -M(x-x_0)\tan\{x_0+\theta_1(x-x_0)\}, \quad \text{ossia} \quad |R_1| = M|x-x_0|\tan\{x_0+\theta_1(x-x_0)\},$$

dove $M = 0{,}43429\ldots$ è il modulo del sistema dei logaritmi di Briggs e

$$-1 < \theta_1 < +1, \quad \text{o} \quad |\theta_1| < 1.$$

Ma

$$x_0 + \theta_1(x - x_0) < x < \frac{\pi}{4},$$

quindi

$$\tan\{x_0 + \theta(x - x_0)\} < 1,$$

dunque, essendo

$$|x - x_0| < \frac{\Delta x}{2},$$

sarà

$$|R_1| < \Delta x \frac{M}{2}. \tag{α}$$

2°. Il caso di $\log\tan x > 0$, ovvero $\tan x > 1$, ovvero $x > \frac{\pi}{4}$.

Posto

$$\log \operatorname{sen} x = \log \operatorname{sen} x_0 + R_2,$$

si ha, nello stesso modo

$$R_2 = M(x - x_0)\operatorname{ctn}\{x_0 + \theta_2(x - x)\},$$

onde, anche ora,

$$|R_2| < \Delta x \frac{M}{2}.$$

Sostituendo quindi ad M il suo valore, si ha che in ambedue i casi l'errore è certamente minore di $\Delta x \times 0{,}21715$.

c. d. d.

BIBLIOGRAFIA

LORIA. — *Metodi di geometria descrittiva.* — Manuali Hoepli 192-193. Milano, 1909.

L'editore Hoepli alla *Geometria descrittiva* di Aschieri, che forma parte della sua preziosa raccolta di Manuali, ha sostituito questa nuova e più moderna opera, la quale contiene delle notevoli ed importanti novità. Essa infatti consta di cinque libri così intitolati:

Libro I. — Metodo della doppia proiezione (Metodo di Monge).
" II. — Metodo della proiezione centrale.
" III. — Metodo dei piani quotati.
" IV. — Assonometria teorica.
" V. — Fotogrammetria teorica.

Nei primi quattro son dati con lucidità e chiarezza i principî fondamentali dei quattro metodi di rappresentazione, che si trovano in quasi tutti i trattati, e sono risoluti, talvolta con metodo nuovo, i principali e più importanti problemi geometrici.

Il V contiene un argomento sul quale l'autore avea da lungo tempo fatto importanti ricerche personali, ed ora per la prima volta, se non erriamo, entra in un trattato di geometria descrittiva. L'argomento può riassumersi nei due seguenti problemi:

I. Date le proiezioni di una figura qualsiasi fatte da due dati centri sopra due dati piani, trovare la proiezione della stessa da un terzo centro su di un terzo piano assegnato.

II. Date n ($\geqslant 1$) proiezioni centrali di una figura qualsivoglia, fatte da centri di posizione ignota, quali conseguenze possono trarsi riguardo la forma, la posizione e le proprietà della figura obiettiva? In particolare è possibile ricostruirla?

Non può sfuggire ad alcuno l'importanza pratica del secondo problema; esso infatti permette la ricostruzione di un oggetto da alcune sue fotografie, quando è possibile.

K.

I. JUHEL-RÉNOY. — *Théorie et applications des équations du second degré* à l'usage des élèves de seconde et première C et D et de mathématique A et B. — Paris, Vuibert et Nony, 1909.

Questo trattato, veramente pregevole, fatto per gli allievi degli ultimi corsi delle scuole secondarie francesi è una esposizione completa, quanto si può desiderare, di tutta la teoria delle equazioni e disuguaglianze di 2° grado, o riducibili ad esse. Gli esempii di risoluzione e di discussione di problemi, che sono portati come applicazioni della teoria svolta, sono scelti con molta cura e discernimento (molti, tra i temi di esame dati nelle scuole francesi), e svolti con una cura, una eleganza ed insieme con una uniformità di indirizzo veramente notevoli. L'opera ha poi uno dei pregi comuni ai migliori libri francesi, cioè una grandissima semplicità di dimostrazioni ed una limpidezza di esposizione, tali che certamente anche uno dei nostri studenti di 3° anno d'istituto o di liceo, che avesse un poca di buona volontà non dovrebbe trovare difficoltà notevoli nel leggerlo.

Una esposizione succinta degli argomenti servirà ai colleghi per rendersi conto della materia, che è svolta nell'opera.

Il 1° libro tratta dell'*Equazione di 2° grado ad una incognita*. Dopo aver dimostrate le relazioni tra i coefficienti e le radici dell'equazione, e dedottane la risoluzione dell'equazione stessa, l'A. passa a dire della discussione a priori sulla realità o no delle radici, poi della regola di Cartesio, della somma delle potenze simili delle radici (caso particolare delle formule di Newton), e delle trasformazioni (a radici aumentate, contrarie o reciproche) dell'equazione data. Fatto questo l'A. viene ad esporre alcuni teoremi (che acquistano speciale importanza, quando i coefficienti dell'equazione sono funzioni di un parametro) sul numero delle radici maggiori di un numero dato α, o comprese tra due numeri α e β. Quest'ultimo teorema non è altro, che un caso particolare di quello di Budan e Fourier; l'A. ne deduce le condizioni necessarie e sufficienti, perchè una data equazione (di 2° grado) abbia una o due radici in un intervallo dato, e ne deduce pure un primo metodo per discutere l'equazione, quando la variabilità dell'incognita è limitata. Ad un secondo metodo, volto allo stesso scopo, e basato sulla considerazione dell'invariante armonico, l'A. perviene con una trasformazione lineare dell'equazione.

Passando a parlare delle disuguaglianze di 2° grado, esamina ancora il caso che il campo di variabilità dell'incognita sia illimitato o no, applicando in quest'ultimo caso anche il metodo dell'invariante armonico.

Il capitolo seguente, il quinto, è dedicato allo studio delle variazioni del trinomio, studio, che vien fatto in due modi, col mezzo della decomposizione in quadrati e col mezzo delle derivate; il capitolo stesso termina con una applicazione dei risultati precedenti al caso, che l'incognita sia una funzione trigonometrica.

Il 2° libro è intitolato *Sistemi di due equazioni simultanee di 2° grado*. Dopo aver parlato del risultante di due tali equazioni, e del metodo per decidere quali relazioni di grandezza si abbiano tra le radici delle due equazioni, l'A. parla della frazione razionale $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ con la f e la φ ambedue di 2° grado, e discute l'andamento della curva rappresentativa in tutti i varii casi.

Il libro termina con l'esposizione del metodo generale per risolvere un sistema di due equazioni simultanee di 1° e 2° grado, e con la risoluzione dei tipi particolari più importanti di questi sistemi. Noto in questo libro un paragrafo, in cui dalle cose dette, l'A. con grande eleganza e semplicità deduce le proprietà dell'involuzione su una retta.

Il 3° libro studia l'*Equazioni riducibili al 2° grado*: biquadratiche, reciproche e irrazionali. A proposito delle prime vengono trattati i seguenti argomenti: risoluzione e discussione; trasformazione del radicale biquadratico nella somma di due radicali quadratici; numero delle radici maggiori di un numero dato o comprese tra due numeri pure dati; decomposizione del trinomio biquadratico nel prodotto di due fattori di 2° grado; variazioni dello stesso trinomio; diseguaglianze biquadratiche.

L'ultimo libro, il 4°, ha per titolo *Problemi di 2° grado*. Dopo aver dato alcune norme generali, l'A., risolve e discute completamente 21 problemi, tutti di applicazioni alla geometria, alcuni ben noti, altri nuovi ed eleganti.

Come si vede, e come avevo detto, si tratta di una teoria completa delle equazioni di secondo grado; son tutti argomenti, che in gran parte vengono svolti anche nei nostri istituti tecnici, ma staccati gli uni dagli altri. Credo dunque, che questo libro riuscirebbe utile a quelli tra i nostri studenti d'istituto, che vogliano andare in seguito alla facoltà di matematiche, in quanto che, oltre al resto, servirebbe loro a coordinare in un tutto organico, omogeneo, questa teoria importantissima.

Nè sia un ostacolo per essi l'uso, che l'A. fa delle derivate. In generale si tratta della derivata prima della funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$, e non si cambia nulla se si considera $f'(x)$ semplicemente come una notazione abbreviata di $2ax + b$, senza annetterle il significato di derivata. Solo a pag. 87 si fa uso della definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, e nel capitolo 2° del libro 2° si parla della derivata di $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$. Ma trattandosi di funzioni razionali, sono nozioni, che si possono dare anche ai nostri studenti d'istituto: del resto poi sono molti i professori di istituto, che oramai trattano colle derivate i problemi di massimi e minimi.

Concludendo io non posso fare altro, che raccomandare caldamente ai colleghi questo libro, specialmente per la biblioteca del loro istituto.

SIRO MEDICI.

GAETANO RIBONI. — *Elementi di Geometria* ad uso delle scuole secondarie superiori. 5ª edizione. Bologna, Zanichelli. — L. 3.

Questa quinta edizione non differisce, almeno nella sostanza, dalla quarta, onde è inutile, che io mi diffonda a parlare di questo libro, mentre la sua notevole diffusione ed il rapido succedersi di nuove edizioni a breve distanza l'una dall'altra attestano, che esso è ben noto, e favorevolmente noto, ai colleghi. Mi limiterò quindi a fare alcune piccole osservazioni su due parti del libro, che a parer mio sono quelle riuscite men bene, cioè la teoria dell'equivalenza e quella della misura.

1°. Nella prima di queste due teorie manca il postulato di De Zolt, (1) e questa mancanza infirma alcune osservazioni d'importanza notevole, quali quella del n. 193 e l'altra del n. 206, che ne dipende. « Si conclude adunque, che due poligoni o sono equivalenti o l'uno è maggiore dell'altro, ed un caso esclude l'altro ». A proposito noto che il significato di « maggiore » non è ben stabilito, perchè è stato dato solo per un caso particolare, o per lo meno, anche se si tien conto del n. 194, non risulta ben chiaro. La stessa osservazione si può fare per i poliedri.

2°. Al n. 262 vien dato il postulato della continuità sotto questa forma: « si ammette che ogni serie crescente o decrescente limitatamente abbia il limite »; e viene avvertito che si tratta di grandezze di 1ª e 2ª specie; del resto di grandezze di 3ª specie non si è ancora parlato. In tali condizioni il postulato non è giusto, perchè il limite potrebbe non esistere, quando ci si limita alle grandezze di 2ª specie, come si vede da esempi ovvii. In parecchi degli enunciati dei teoremi seguenti va specificato, che si ammette che esista il limite, e che questo sia una grandezza di 1ª o 2ª specie: altrimenti oltre la mancanza di rigore si va a rischio di generare confusione; e tanto meno mi pare escluso questo pericolo, osservando che in questo modo, per es. al n. 270 (e così al 271), si enunciano un teorema ed una definizione che differiscono solo per le parole.

3°. Al n. 378, trovo « Postulato: Il segmento limite dei perimetri dei poligoni « regolari circoscritti ed iscritti ad una circonferenza, dove il numero dei lati va

(1) Dico postulato, credendo che non convenga darne la dimostrazione in un trattato elementare.

« continuamente raddoppiando, è equivalente alla circonferenza ». Ma prima va definito cosa s'intende per segmento equivalente alla circonferenza, ossia il postulato va cambiato in una definizione. Analoga osservazione per la superficie dei corpi rotondi.

Altre piccole osservazioni potrebbero esser fatte, ma son di ben poca importanza, sicchè non conviene neanche di rilevarle. Una sola ne aggiungerò ancora: la dimostrazione del teorema, che date due figure eguali esse si possono sovrapporre con un movimento elicoidale, non è giusta. Per vederlo basta osservare, che se al punto C' si sostituisce il punto C'' simmetrico di quello rispetto al piano per A'B' parallelo ad OM, i due triangoli ABC, A'B'C'' sono uguali, la retta PQ resta invariata, e così il movimento elicoidale, cui si perviene, resta pure invariato; ma se questo movimento serviva a sovrapporre A'B'C' ad ABC, non serve a sovrapporre A'B'C'' ad ABC; occorre cambiare l'asse.

Di fronte a questi piccoli difetti, cui del resto si può metter riparo col cambiare o aggiungere poche parole, sta una buona disposizione delle parti, una scorrevolezza ed una chiarezza della forma, che lo rendono certamente di facile lettura anche agli studenti, sebbene questa facilità non escluda, che alle volte essi debbano lavorare colla propria testa, l'A. tralasciando spesso le dimostrazioni più ovvie. Quantunque non tutti possiamo essere d'accordo coll'A. nell'ammettere la convenienza di ricorrere al movimento ed alle sue proprietà, specialmente nella misura tenuta dall'A., certo il libro ha indiscutibili pregi sia dal lato didattico che scientifico, ed appunto per questo mi è sembrato doveroso segnalare in un modo, che forse parrà anche pedante, alcuni dei pochi difettucci dell'opera.

Siro Medici.

Gaetano Riboni. — *Elementi di Geometria* ad uso delle scuole secondarie inferiori, corredati da una raccolta di circa mille esercizi per cura di D. Gambioli. 7ª edizione. Bologna, Zanichelli. — L. 2.50.

Anche questo libro ha dei precedenti di largo favore e di larga diffusione, che lo hanno già portato in non molti anni alla 7ª edizione. In questo trattato anche di più che in quello per gli istituti sono notevoli i pregi didattici: si può obiettare ad esso la soverchia ampiezza dello svolgimento, ma questo per me non è un difetto, potendo così ogni insegnante togliere quelle parti che meglio crede. Più giusta per me è l'obiezione, che sebbene nelle scuole inferiori occorra bene spesso ricorrere all'intuizione, pure non è giustificato il tacere dei postulati di cui si fa poi uso. Infine osserverò, che con degli alunni quali quelli delle scuole secondarie inferiori, non è possibile lasciare ad essi la cura di fare le dimostrazioni anche più semplici, e quindi sarebbe bene che l'A. aggiungesse quelle pochissime che ha lasciate al lettore. Così pure, nei paragrafi in cui parla delle posizioni relative di una circonferenza e di una retta o di due circonferenze, l'A. dimostra che le varie condizioni sono sufficienti, ma non sono necessarie: io per conto mio darei forma anche più intuitiva alla dimostrazione, abbastanza difficile per gli alunni, ma volendola fare razionalmente dovrebbe farsi (col teorema di Hauber) anche la seconda parte. Del resto una esposizione chiara, facile, alla portata degli alunni cui si dirige, una buona disposizione e una ottima scelta dei teoremi sono pregi, che giustificano il favore da cui il libro è stato accompagnato fin qui. Ottime sono le parti in cui l'autore parla delle regole per trovare le aree ed i volumi; bene scelti gli esercizii numerosissimi.

Siro Medici.

II CONGRESSO

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI MATEMATICA " MATHESIS "

PADOVA — 20-23 Settembre 1909

SEDUTA INAUGURALE.

La mattina del giorno 20 settembre 1909, alle ore 10, nella sala della Ragione, ebbe luogo la seduta inaugurale del II Congresso della *Società Italiana di Matematica " Mathesis "*.

Parlò primo il prof. SEVERI, presidente dell'Associazione, salutando i convenuti ed esprimendo l'augurio che la Società prenda sempre maggior incremento. Altri oratori portarono il saluto delle autorità locali.

Quindi il prof. GINO LORIA lesse il suo discorso: *La scuola media e la sua attuale crisi di sviluppo*, che fu vivamente applaudito da tutti i presenti.

LAVORI DEL CONGRESSO.

Lo stesso giorno 20 settembre, alle ore 7 $^{3}/_{4}$ pom., dopo la seduta inaugurale del *Congresso della Società Italiana per il progresso delle scienze*, ebbe luogo la 1ª seduta del Congresso della " Mathesis " in una sala della Scuola di applicazione per gli Ingegneri. Si discusse la relazione del prof. D. GIGLI: *Sulle presenti condizioni dell'insegnamento della matematica nei licei. La riforma Orlando del 1904; attacchi e difesa.*

Subito si manifestarono due tendenze opposte, una delle quali, concordando con le idee del relatore, proponeva che, vista l'inutilità di domandare ancora al Ministro l'abolizione del decreto Orlando 1904, si venisse ad un accordo fra i professori di Liceo sul modo di svolgere i programmi di Matematica nella Scuola classica, i quali programmi sono attualmente, per comune consenso, inattuabili; l'altra tendenza sosteneva invece doversi ancora chiedere con insistenza l'abolizione del detto decreto. La discussione si prolungò per tutta la seduta e non potè aver termine.

Nella seduta successiva, del giorno 21 settembre, dietro proposta del prof. Loria si stabilì di svolgere, contemporaneamente a quella del prof. Gigli, anche la relazione del prof. Gallucci: *Riforme e ritocchi dei programmi scolastici. Programmi liceali.*

Dopo una discussione animatissima venne approvato il seguente ordine del giorno, proposto dai proff. Bettazzi e Conti:

Il *II Congresso della Società Italiana di Matematica "Mathesis"*

considerando che, per effetto del R. Decreto Orlando 1904, due discipline fondamentali per la cultura classica, ebbero a soffrirne tutti quei molteplici danni che la grande maggioranza dei competenti additò in più solenni occasioni;

considerando, che anche dal lato puramente educativo, ne derivarono effetti dannosissimi pei criteri generalmente adottati dai giovani nell'optare per l'una o per l'altra materia;

riafferma il voto, che già fu confortato dall'approvazione unanime di tutti i Congressi nazionali tenuti dagli insegnanti dal 1904 in poi, per l'abrogazione del Decreto ricordato.

Il Congresso medesimo subordinatamente dichiara che dopo una esperienza di ben cinque anni si può asserire che il vigente programma di matematica della 1ª liceale è scientificamente mal fatto e didatticamente inattuabile.

Nella stessa seduta del giorno 21 settembre si discusse anche la relazione della professoressa sig.ra Bisson-Minio: *Riforme e ritocchi dei programmi scolastici. Scuola Complementare e Normale.* Fu stabilito di rimandare ad altra occasione l'esame dei programmi presentati dalla sig.ra Minio per causa della ristrettezza del tempo. Furono approvati i seguenti ordini del giorno, proposti dalla stessa sig.ra Minio e lievemente modificati dal prof. Finzi:

1°. Il *II Congresso della Società Italiana di Matematica "Mathesis"*

considerata l'insufficenza assoluta dell'orario di matematica nel corso normale, sia rispetto al programma da svolgere e all'indirizzo con cui deve essere svolto, sia all'obbligo della prova scritta, ed alla conseguente necessità di numerosi esercizi;

fa voti che le ore settimanali d'insegnamento siano portate a 3 in ciascuna classe, tanto nella scuola femminile che nella maschile.

2°. Il *II Congresso della Società Italiana di Matematica "Mathesis"*

ritenuto necessario che le definizioni geometriche, l'enunciazione delle proprietà delle figure e l'indicazione e la giustificazione delle costruzioni grafiche di geometria non si debbano mai trovare discordi o seguire un ordine illogico;

considerata d'altronde la difficoltà del coordinamento e dell'identità di criteri e di definizioni tra l'insegnamento di matematica e quello di disegno, i cui programmi sono compilati indipendentemente l'uno dall'altro;

fa voti perchè la parte *costruttiva* del disegno geometrico sia passata dal programma di disegno a quello di matematica, ritardandosi perciò per l'insegnamento del disegno, alla 2ª e 3ª complementare la parte di applicazione (ornamentale) dell'uso degli strumenti.

3°. Il *II Congresso della Società Italiana di Matematica "Mathesis"*

considerata l'opportunità che le nozioni di computisteria sieno impartite alle alunne della scuola femminile con unità organica, e ritenuto dannoso, invece, il frazionarle fra le diverse classi intercalandole tra lo svolgimento del programma di matematica;

fa voti perchè tale insegnamento sia tutto raccolto nella 3ª classe complementare, assegnandogli esplicitamente un'ora settimanale, tolta dalle quattro dell'orario presente.

Per quello che riguarda la Scuola maschile, nella quale accedono alunni provenienti per lo più dalla Scuola tecnica, il Congresso propone la soppressione delle nozioni di computisteria, aggiungendo, alle prove d'integrazione che devono subire gli allievi provenienti dal Ginnasio, un esame sulle nozioni soppresse.

4°. Il *II Congresso della Società Italiana di Matematica " Mathesis "*

considerata la grande importanza didattica delle norme da darsi nel corso normale per l'insegnamento della matematica nella Scuola elementare;

ritenuto necessario specialmente l'accordo completo tra le norme date teoricamente e le osservazioni che devono esser fatte al tirocinante durante le sue lezioni;

fa voti perchè alle lezioni di tirocinio di matematica debba assistere e guidare gli alunni l'insegnante di tale materia.

Nella seduta del giorno 22 settembre venne esposta e discussa la relazione del prof. PERNA: *Sui programmi di matematica degli Istituti tecnici.* Prima di incominciare il prof. PERNA rivolse un saluto alla memoria del prof. VAILATI, e l'Assemblea, dietro proposta del professor BETTAZZI, inviò alla madre del VAILATI il seguente telegramma: *Congresso " Mathesis ", sentendo dolorosamente vuoto lasciato compianto* VAILATI, *esprime sua degna madre, affettuose, rispettose condoglianze.*

Il prof. PERNA, nella 1ª parte della sua relazione, rilevò essere pericoloso chiedere, in questo momento, modificazioni ai programmi degli Istituti tecnici, i quali rispondono abbastanza bene nella pratica a causa della libertà che lasciano all'insegnante. Nonostante per prevenire il caso che il Congresso non fosse di questa opinione, e anche nell'intenzione di stabilire un certo accordo fra gli insegnanti degli Istituti sul modo di svolgere i programmi attuali il prof. PERNA aveva compilato, nella 2ª parte della sua relazione, dei programmi particolareggiati da sottoporsi all'esame dell'assemblea. Dopo breve discussione si approvarono i seguenti ordini del giorno:

Il *II Congresso della Società Italiana di Matematica " Mathesis "*

accogliendo le conclusioni della 1ª parte della relazione PERNA, ritiene non essere opportuno, nell'attesa della riforma degli studi secondari, chiedere riforme o semplici ritocchi degli attuali programmi di matematica per gli Istituti tecnici. (Proposto dal prof. FINZI.)

Il *II Congresso della Società Italiana di Matematica " Mathesis "*

ritiene utile che le Sezioni prendano in considerazione i programmi annessi alla relazione PERNA, per un'intesa sullo svolgimento degli attuali programmi. (Proposto dai prof. FINZI e CONTI.)

Il prof. CATTANEO illustrò, dopo, un ordine del giorno, nel quale si chiedevano alcune modificazioni agli attuali programmi delle Scuole tecniche; ma l'assemblea non credette opportuno occuparsi dell'argomento, non avendosi una completa relazione in proposito. Il Congresso si limitò a prendere atto delle proposte contenute nell'ordine del giorno CATTANEO, per una futura discussione.

Si passò, quindi, alla discussione del tema: *Preparazione degli insegnanti di matematica per le scuole medie*, per il quale erano relatori i proff. G. LORIA e A. PADOA. Questi concludevano proponendo il seguente ordine del giorno:

Il *V* (¹) *Congresso della Società Italiana di Matematica "Mathesis"*

precisando e completando il voto dell'ultimo Congresso, chiede ai pubblici poteri di provvedere sollecitamente:

1º alla istituzione di cattedre universitarie di Metodologia matematica, da conferirsi mediante apposito concorso, con la procedura e le norme consuete;

2º a rendere obbligatorio, per gli aspiranti al Diploma di magistero in matematica, il tirocinio presso una scuola media, disciplinandolo con norme precise.

Dopo una discussione molto animata, specialmente in riguardo alle norme da seguirsi per l'assegnazione delle nuove cattedre, l'ordine del giorno dei relatori fu integralmente approvato. Venne, inoltre approvato anche il seguente ordine del giorno, proposto dal professore CASTELNUOVO:

L'Associazione rivolge invito ai Professori del 2º biennio delle Università, ove non avvenga immediatamente l'istituzione della cattedra di Metodologia matematica, affinchè, per turno, nel loro corso normale s'intrattengano su quegli argomenti che più specialmente possono illuminare l'insegnamento della matematica elementare.

Il giorno 23 settembre, ultimo del Congresso, si tennero due sedute. Nella seduta del mattino il prof. BONOLA espose la relazione della "Commissione direttiva" per *Una enciclopedia di Matematiche elementari* da pubblicarsi sotto gli auspici della "Mathesis".

Il piano dell'opera presentato dai relatori, che del resto non è ancora definitivo, venne senz'altro approvato. Seguì una discussione intenta a stabilire quali sieno i mezzi migliori per provvedere alle spese occorrenti per la preparazione e per la pubblicazione dell'opera. Il prof. SEVERI promette che il C. D. farà quanto può per aiutare, anche finanziariamente, la pubblicazione dell'enciclopedia. L'assemblea approvò la proposta del prof. LORIA, che cioè ai soci di "Mathesis" si concedano, per l'acquisto dell'opera, quelle stesse facilitazioni che si faranno ai rivenditori; e inoltre dette facoltà al C. D. di aprire una sottoscrizione fra i soci che intendono impegnarsi di

(¹) I Relatori chiamano quinto questo Congresso, computando, nella numerazione, anche i Congressi tenuti prima del rinnovamento della Società.

acquistare l'opera stessa. Il prof. CASTELNUOVO consigliò la Commissione Direttiva dell'opera a rivolgersi, per un sussidio, oltre che al Ministero dell'Istruzione, anche al Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio.

Il prof. BONOLA invita tutti coloro che abbiano da fare proposte relative all'Enciclopedia, ad inviarle al presidente della Commissione prof. L. BERZOLARI.

Il prof. CASTELNUOVO riferì poi sul tema: *Lavori della Sezione italiana della commissione internazionale dell'insegnamento matematico.*

Egli annunziò che la detta commissione si compone dei tre delegati CASTENUOVO GUIDO, ENRIQUES FEDERIGO, SCORZA FRANCESCO e dei professori: sen. ENRICO D'OVIDIO, R. U. di Torino — sen. GIUSEPPE VERONESE, R. U. di Padova — SALVATORE PINCKERLE, R. U. di Bologna — FRANCESCO SEVERI, R. U. di Padova — CARLO SOMIGLIANA, R. U. di Pavia — GIULIO LAZZERI, R. A. N. di Livorno — ALBERTO CONTI, R. S. N. di Roma — GAETANO FAZZARI, R. L. di Palermo — UMBERTO SCARPIS, R. L. di Bologna.

Aggiunse che nei giorni precedenti la detta commissione aveva tenuto varie adunanze, nelle quali si era costituita distribuendo le cariche come segue:

Presidente sen. D'OVIDIO — *Segretario generale* prof. CASTELNUOVO — *Segretario aggiunto* prof. CONTI.

Ed aveva poi stabilito il piano dei lavori e distribuiti gli incarichi per le redazioni delle varie relazioni come segue:

1. Per le scuole elementari, complementari e normali: prof. CONTI.
2. Per le scuole secondarie classiche: prof.ri FAZZARI e SCARPIS.
3. Per le scuole tecniche e gl'istituti tecnici: prof. SCORZA.
4. Per le scuole professionali (civili e militari) e industriali: prof. LAZZERI.
5. Pel 1° biennio d'Università: prof. SOMIGLIANA — Pel 2° biennio d'Università e per le scuole di magistero: prof. PINCKERLE.
6. Per le quistioni d'indole generale: prof.ri D'OVIDIO e VERONESE.

Egli pronunziò poi un magistrale discorso, che verrà pubblicato integralmente nel bollettino della " Mathesis ", nel quale espose, in forma chiara e persuasiva, quali sono i criteri ai quali Egli crede che debba ispirarsi l'insegnamento della matematica elementare. Terminò, proponendo ai Soci della " Mathesis " e a tutti gli insegnanti di matematica, le seguenti questioni, alle quali la Commissione nazionale attende risposta, onde potere con maggior sicurezza trasmettere la sua relazione al Comitato internazionale:

1°. A quale causa attribuite la poca efficacia dell'insegnamento matematico nelle Scuole secondarie? Quali i mezzi per aumentare il profitto?

2°. Quali metodi d'insegnamento, diversi dagli ordinari, furono adottati in scuole private, professionali, commerciali, ... o nell'università popolare, e con quale successo?

3°. Credete conveniente un esperimento dei nuovi programmi e metodi di insegnamento da farsi su scala ristretta, prima di imporre quei programmi e metodi a tutte le Scuole? In qual modo attuare il detto esperimento?

4°. Quale mezzo conviene adottare per tenere al corrente gli insegnanti delle scuole secondarie delle nuove tendenze didattiche o scientifiche che vanno formandosi nell'ambiente universitario?

Nella seduta pomeridiana del giorno 23, si incomincia a discutere una proposta, fatta dal prof. PADOA, riguardante la nomina delle Commissioni per i concorsi delle scuole secondarie. La novità proposta da Padoa consiste in ciò, che i professori universitari chiamati a far parte delle commissioni giudicatrici dei concorsi per scuole secondarie, dovrebbero essere eletti dagli stessi professori secondari. Questa proposta suscita una viva discussione, si riconosce che, trattandosi di argomento molto delicato ed importante, non si può trattare così all'improvviso. Perciò il prof. PADOA ritira la proposta, riservandosi di presentarla come tema di discussione per il venturo Congresso.

La 2ª parte della seduta è occupata dalla discussione per la modificazione di alcuni articoli dello Statuto sociale, e dalla relazione della gestione amministrativa della Società.

CONCORSO PER UNA LEZIONE DI MATEMATICA

Il Consiglio direttivo della " Mathesis " aveva bandito un concorso tra i soci per un premio di L. 200, da assegnarsi a chi avesse fatto la migliore lezione sopra un argomento controverso di matematiche elementari. Le lezioni si svolsero durante gli intervalli delle sedute del Congresso. La commissione giudicatrice, composta dei professori:

D'OVIDIO sen. ENRICO, *presidente*
CASTELNUOVO GUIDO
BETTAZZI RODOLFO
NANNEI ENRICO
VANNINI TOMMASO

assegnò il premio al prof. ALESSANDRO PADOA, il quale aveva tenuto la sua lezione: *L'introduzione del concetto di numero frazionario.*

III CONGRESSO

DELLA SOCIETÀ ITALIANA PER IL PROGRESSO DELLE SCIENZE

PADOVA — 20-25 Settembre 1909

SEZIONI DEL CONGRESSO.

CLASSE *A*.

SEZIONE I. — *Matematica, Astronomia e Geodesia.*
» II. — *Ingegneria ed elettrotecnica.*
» III. — *Fisica.*
» IV. — *Chimica.*
» V. — *Mineralogia e Geologia*
» VI. — *Geografia.*

CLASSE *B*.

SEZIONE UNICA. — *Scienze biologiche.*

CLASSE *C*.

SEZIONE I. — *Scienze filosofiche.*
» II. — *Scienze filologiche.*
» III. — *Scienze storiche e preistoriche.*
» IV. — *Scienze giuridiche.*
» V. — *Scienze sociali.*

CERIMONIA INAUGURALE.

Il 20 settembre a ore 15 nell'aula magna dell'Università fu inaugurato il Congresso. Il segretario dette anzitutto lettura dei saluti e delle adesioni pervenute al Congresso dal Duca degli Abruzzi e dai Ministri BERTOLINI e MIRABELLO. Fecero applauditi discorsi d'occasione il Prefetto in rappresentanza del Ministro della P. I. assente, il rettore dell'Università prof. POLACCO e il sindaco di Padova senatore LEVI-CIVITA.

Il sig. CARLO GARIEL rappresentante della *Association française pour l'avancement des Sciences* portò poi il saluto della consorella francese col seguente discorso:

Messieurs et très éminents collègues

Je tiens à vous exprimer dès aujourd'hui les remerciements du Conseil d'Administration de l'Association française pour l'avancement des Sciences pour l'invitation que sa soeur cadette lui a adressée de se faire représenter à ce congrès. Nous avons saisi avec empressement cette occasion de lui témoigner toute notre sympathie.

Cette sympathie est d'ailleurs très naturelle, puisque, d'une part, nous nous plaisons à croire que, par notre exemple, nous avons un peu contribué à la creation de votre Association et que, d'autre part, nous ne pouvons avoir que de vifs sentiments d'amitié pour cette Italie, soeur latine de la France, pour cette Italie qui, dans les sciences, les lettres et les arts, a brillé d'un éclat incomparable et qui, aujord'hui, pour nous restreindre à celles des connaissances humaines qui nous réunit, possède encore tant de savants éminents dont le travaux font partout autorité.

Permettez-moi d'ajouter que j'ai été personnellement heureux de pouvoir venir me joindre à vous dans cette antique Université à laquelle je suis fier de me trouver rattaché, car dans une autre circostance, à l'occasion des fêtes de Galilée, j'ai eu l'insigne honneur d'être fait Docteur de l'Université de Padoue.

Au nom de l'Association française pour l'avancement des Sciences dont j'apporte le cordial salut et certainement aussi au nom de tous les savants français, je souhaite à l'Association Italienne pour l'avancement des Sciences une brillante prospérité qui ajoutera encore au renom mérité dont dans le monde entier jouit la science italienne.

Il prof. GIACOMO CIAMICIAN dell'Università di Bologna, vice-presidente dell'Associazione, comunicò che egli doveva assumere la presidenza per incarico del presidente sen. VOLTERRA, ancora in viaggio di ritorno dall'America, dove si recò per invito della *Clark University.*

In rappresentanza dell'Associazione rivolse un saluto al Duca degli Abruzzi; salutò poi e ringraziò il Ministro RAVA, che stava per giungere a Padova, il prof. GARIEL rappresentante della Società consorella di Francia, il sindaco di Padova ed il Rettore magnifico; infine l'illustre oratore ufficiale della cerimonia, LUIGI LUZZATTI.

Indi proseguì:

Signori,

Questa è la terza volta che la nostra Società si riunisce a Congresso; nessun altro paese come il nostro offre maggiori opportunità a queste periodiche riunioni, che si fanno ogni anno sempre in centri diversi di coltura, perchè nessun paese ha tante città che possano gareggiare con le nostre per copia di ricordi storici e splendore di opere d'arte.

Tutti abbiamo ancora presente nella memoria la nostra prima riunione al Teatro Farnese di Parma, che apparve come una fantastica visione, e quella dello scorso anno nel Palazzo Vecchio di Firenze. Questi ambienti così superbamente e lietamente artistici, che offrono le città italiane, sono le più adatte sedi pei nostri lavori. La scienza ama di esser contornata dall'arte: il suo fascino è ispiratore d'opere egregie, perchè l'arte e la scienza sono manifestazioni del nostro spirito assai più vicine di quello che non si creda. La scienza non è l'arida investigatrice dei fenomeni umani e del mondo esterno; come l'arte, essa è figlia della nostra fantasia: senza il sussidio di questa non si scopre e non si crea. Tanto il matematico, che lo sperimentatore, il naturalista ed il cultore delle scienze morali hanno bisogno, come l'artista, di quella scintilla ispiratrice. La differenza sta segnatamente in questo: che mentre dallo scienziato si chiede la prova dei fatti a conforto delle sue concezioni, all'artista tale controllo non è necessario. Egli crea liberamente e trova nel godimento estetico che suscita l'opera sua la giustificazione del proprio ardire.

È il lato estetico che manca alla scienza: per questo noi siamo avidi di sensazioni artistiche. Il nostro spirito, costretto sempre alla ricerca del perchè delle cose, si riposa nella contemplazione del bello. Qui in Padova l'arte e la scienza si trovano mirabilmente congiunte: qui frescarono GIOTTO e il MANTEGNA, e quest'aula ci ricorda la gloria di GALILEO e di MORGAGNI.

A nome della nostra Società porgo il saluto a Padova storica ed artistica, a Padova centro di studi, al vetusto Ateneo solo a Bologna secondo per età, ed a cui, come a Bologna, accorrevano in altri tempi studiosi d'ogni nazione: di quelle nazioni che poi si emanciparono, che ci raggiunsero, ma non ci superarono nel culto della scienza; a Padova moderna, la cui vita rinnovellata si espande e si manifesta con opere egregie, a Padova la dotta sorella di Venezia regina, che ora, sposando il sapere alle iniziative industriali, va incontro al più lieto e prosperoso avvenire.

Porgo infine il saluto cordiale ai soci vecchi e nuovi ed esprimo l'augurio che la nostra istituzione con lavoro indefesso e concorde raggiunga l'alto fine a cui tutti miriamo.

Infine avvertì:

Come venne deliberato l'anno scorso, nella nostra attuale riunione avranno maggior sviluppo le adunanze generali e di classe per trattare argomenti che possono interessare i cultori di discipline diverse. Questo indirizzo è sembrato a ragione il più adatto per rendere più stretti i vincoli che uniscono le scienze affini e per dare ai nostri lavori un carattere essenzialmente sintetico.

Il prof. on. LUIGI LUZZATTI, dopo aver dichiarato che l'amore purissimo del vero lo aveva mosso ad accogliere l'insistente invito della *Società Italiana per il Progresso delle Scienze*, pose subito, senza inutili preamboli, alcune gravi domande:

I progressi della scienza, nell'Italia risorta, hanno corrisposto ai doveri e alle speranze?

L'ordinamento degli studi e la diffusione del sapere, si proporzionarono agli incrementi della scienza? Fummo più felici nel produrla che nel distribuirla, come avvenne sinora anche per la ricchezza materiale, in confronto di altri popoli che scienza e ricchezza distribuirono meglio che non sapessero produrle?

Problemi elevatissimi, per rispondere ai quali è necessario esaminare con attenta cura le conquiste fatte dagli italiani nelle varie discipline e l'efficacia esercitata dalla scuola nel diffonderle.

Divise le scienze, secondo l'antica partizione, in matematiche e naturali da un lato, morali e politiche dall'altro, l'oratore intraprese la profonda analisi dei progressi delle une e delle altre.

E dopo avere passato in rassegna i grandi contributi portati dai più eminenti scienziati italiani (dei quali fece un lungo elenco) ad ogni ramo del sapere, conchiuse:

Dopo questa rassegna gloriosa è lecito domandarsi se in 50 anni dal nostro riscatto nazionale abbiamo potuto distribuire la scienza con l'eguale intensità con la quale si seppe crearla.

I tedeschi, i francesi, gli inglesi hanno il vanto di aver fatto partecipare tutta la nazione alle loro produzioni scientifiche; col crescere della scienza si perfezionò in tutti i gradi l'ordinamento delle scuole pubbliche e private. La Francia e l'Inghilterra, dopo il 1870, dedicarono all'insegnamento elementare cure sapienti e mezzi poderosi, ottenendo in trent'anni quanto noi siamo ben lontani ancora dal fare in quasi mezzo secolo.

L'analfabetismo è ancora il vero dominatore del nostro paese. E anche dove la scuola primaria è frequentata, essa non lascia un'impronta efficace negli animi degli alunni, i quali ben presto disimparano quelle poche nozioni che hanno appreso. I grandi sforzi compiuti recentemente a vantaggio dell'istruzione elementare furono insufficienti allo scopo, cosicchè a tanto tesoro di sapienza scientifica si contrappone la più folta caligine di ignoranza popolare e cresce ogni dì più la distanza che nella coltura separa i vari ordini di cittadini.

Una uguale deficienza, più notevole ancora perchè si tratta del nerbo della vita morale, intellettuale ed economica del paese, è nella nostra scuola secondaria. Ci accordiamo tutti nel riconoscere i mali, l'errore di partizione nei vari rami, le fiacchezze di tutti questi. Ma mentre noi ci limitiamo alla critica, tutti gli altri paesi principali rinnovarono profondamente le scuole medie, già migliori delle nostre, mettendole in armonia colla evoluzione dei tempi ed esperimentando un nuovo tipo di scuola, dove gli elementi ideali e reali dell'educazione e dell'istruzione si congiungono con legami lungamente meditati.

Al difettoso ordinamento dei nostri istituti secondari si aggiunga la eccessiva indulgenza che permette al più mediocre allievo di superare le varie prove e di iscriversi all'Università. Indulgenza tanto più colpevole, quando la si confronti colla giusta severità delle scuole austriache, anche nella vicina Trieste, dove i successivi esami operano una forte e opportuna selezione.

La debolezza della scuola media esercita una malefica influenza sulle nostre Università che troppo si ingombrano di *nullatenenti del sapere*, preoccupati soltanto di ottenere una laurea, piuttosto che di allargare la propria coltura nella convivenza intellettuale coi grandi professori. Ed è inutile avvertire che le nostre Università essendo troppe, alzate tutte per una colpevole condiscendenza allo stesso grado, devono contentarsi in alcuni luoghi e in alcune cattedre di professori mediocri.

Dei mali lamentati indaghiamo ora alcune tra le cause, nel riconoscimento delle quali vi è forse la traccia dei rimedi.

Una scuola senza educazione, una scuola senza ideali morali e patriottici è priva del suo vital nutrimento. La nostra coscienza nazionale non ha ancor saputo trovare la nota italiana e redentrice che sia cibo ideale delle anime della nostra gioventù. Non abbiamo ancora potuto tradurre nella scuola la grandezza di pensiero rappresentata ed espressa dai redentori d'Italia, che furono i più sublimi uomini del nostro tempo.

E dopo il carattere nazionale bisogna fortificare l'intelletto italiano, abituarlo al rispetto della scienza, alla cura delle lettere; è uopo trasformare e purificare la nostra vita pubblica, amministrativa, sollevandola alla sincerità delle indagini, alla competenza tecnica. La genuina ricerca del vero, la meditazione sincera devono esser la guida nelle arti della pace e della guerra.

Narrò poi e additò a esempio le conferenze dell'Inghilterra del 1854, a cui presero parte gli uomini maggiori, quali FARADAY e TYNDALL ed aggiunse:

A essi si deve il rinnovamento del carattere tecnico degli studi nelle scuole inglesi e il loro passaggio dalla fase meccanica a quella scientifica. La scuola italiana si trova nelle condizioni della inglese del 1854 e bisogna procedere con la stessa cura.

Le riforme invocate per le nostre scuole sono già mature; l'esperienza delle nazioni più progredite, gli studi della Commissione per le scuole medie hanno segnato la via da seguire.

Nè si accampino le difficoltà finanziarie per la riforma delle scuole medie, per l'incremento e la diffusione delle scuole elementari. Gli studi, come le armi, sono necessari alla difesa dello Stato e sono i segni più sicuri della rinnovata potenza e ricchezza nazionale. Quando sarà cessato questo dissidio fra il progresso della scienza e la decadenza della scuola, allora veramente potremo dal Campidoglio dire anche noi: *Tantae molis erat romanam condere gentem!* Allora saremo degni che sulle nostre teste redente risplenda il sole di Roma.

ADUNANZE GENERALI NELL'AULA MAGNA.

PRIMA ADUNANZA. — *Martedì 21 Settembre - ore 9.*

Nell'Aula Magna dell'Università, sotto la presidenza del prof. CIAMICIAN, ebbe luogo la prima adunanza generale.

Era presente anche il Ministro della P. I. on. RAVA, al quale il Rettore POLACCO rivolse un caldo saluto ed un plauso per la legge universitaria approvata dal Parlamento nel Luglio.

Prese poi la parola il vice-presidente CIAMICIAN, il quale si disse lieto di porgere ancora una volta un saluto a S. E. il Ministro della Pubblica Istruzione in nome della *Società Italiana per il Progresso delle Scienze*, a cui S. E. fu largo d'aiuti e d'incoraggiamenti fino dagli inizi e a cui è comune fiducia ch'egli ne assicurerà di maggiori anche per l'avvenire.

Indi comunicò il telegramma augurale spedito a S. E. il Ministro della Real Casa e la risposta ricevuta.

Propose quindi l'invio di un telegramma al prof. sen. CANNIZZARO che l'Assemblea acclamò.

Il Ministro della Pubblica Istruzione on. RAVA disse:

Signor Rettore, Signore, Signori

Devo adempiere ad un dovere; quello di ringraziare gli oratori illustri per le parole gentili avute a mio riguardo.

Sono lieto, come rappresentante del Governo e quale Ministro degli Studi, di essere tra voi oggi in questa festa di scienza e ieri mi son doluto di non poter dare il mio saluto ai cultori delle scienze.

Mi è caro in questa aula gloriosa ed in questa antica città ricordare che tre anni or sono ho ascoltato un voto, che fu accolto. Così la scienza si avvia a migliori progressi.

È bello dare un saluto agli studiosi in questa aula che ricorda i grandi maestri precursori di tante scoperte: fra cui basterebbe per illustrare la nostra storia GALILEO ed ARDIGÒ, tanto a noi caro, che purtroppo dovette lasciare l'insegnamento.

Il Congresso degli scienziati a Padova ha aperto un nuovo capitolo: quello della scuola, in cui è il segreto della vita e del progresso. Con un discorso altissimo l'illustre maestro LUZZATTI, che ha grandi aspirazioni ed idee, invitò il Ministro degli Studi a studiare tale problema.

In quest'ultimo anno si è fatto per la scuola uno sforzo tenace: gli interessi della scuola sono ora curati con fermo proposito. Uomini d'ingegno si occupano delle riforme per la scuola ed il Ministro degli Studi è lieto di cooperare a quanto vogliono gli scienziati. La concordia in queste riforme è una grande e bella cosa.

In questa sala vibra tutta la storia d'Italia e parla all'animo nostro che tende a sempre maggiori idealità.

Terminò con un pensiero al Re e con un inno alla scienza.

Infine il sen. GOLGI lesse una dottissima relazione sul tema: *Evoluzione della dottrina e delle conoscenze intorno al substrato anatomico delle funzioni psichiche e sensorie.*

SECONDA ADUNANZA. — *Mercoledì 22 Settembre - ore 9.*

Dopo un breve discorso del Presidente VOLTERRA, il dott. VINCENZO CAPRA portò il saluto degli scienziati australiani colle seguenti parole:

Mi è di gradito onore il portare agli scienziati d'Italia, così degnamente qui rappresentati, il saluto e la simpatia degli scienziati dell'Australia, avendone ricevuto da questi formale incarico. È questa forse la prima volta che ricevete questo saluto; vi sia quindi tanto più caro.

Nel mio viaggio della durata d'un intero anno nel continente australiano e nelle isole della Tasmania e della Nuova Zelanda (viaggio fatto con intenti unicamente patriottici per visitare i nostri connazionali là residenti e trovare nuovi campi alla nostra attività, sotto gli auspici del Governo e di pubbliche istituzioni bancarie e industriali e di privati milanesi) fui fatto oggetto alle più vive attenzioni da parte degli scienziati di quelle regioni australiane, che mi trattavano, perchè cultore delle scienze e italiano, come una vecchia conoscenza, sì da provarmi che la scienza affratella più di qualsiasi altra cosa.

Col saluto mi pregarono pure di far noto il loro desiderio di avere più strette relazioni, più frequenti rapporti con noi, sia col cambio delle pubblicazioni, che colle comunicazioni dei lavori, come pure con chiedere materiali e notizie.

Mi sia concesso infine di mandare da questa assemblea un grato plauso agli scienziati australiani, che tanta simpatia hanno per noi.

Infine il prof. Pigorini riferì sul tema: *I primi abitatori d'Italia.*

Terza adunanza. — *Venerdì 24 Settembre - ore 9.*

Il presidente sen. Volterra lesse i telegrammi di ringraziamento mandati al Congresso da S. E. il ministro Rava e dal sen. prof. Cannizzaro. Quindi il prof. Severi fece il suo discorso sul tema: " *Ipotesi e realtà nelle scienze geometriche* ".

" La matematica è una scienza nella quale non si sa mai di che " si parli, nè se ciò di cui si parla sia vero ". Con questo *mot d'esprit* di Bertrand Russell l'oratore cominciò il suo discorso, avvertendo che una tale definizione è possibile solo quando si consideri la matematica come un sistema logico-deduttivo. Ma in realtà non giova dimenticare che i principii fondamentali della geometria traggono la loro origine dall'osservazione e dall'esperienza e quindi che la geometria non si riduce ad un vuoto meccanismo. Pur differendo dalla fisica nel metodo, essa, come la fisica, si occupa del mondo reale.

Alla questione che si affaccia come pregiudiziale, di sapere cioè qual valore positivo debba attribuirsi alle proposizioni geometriche, dal momento ch'esse riferisconsi ad oggetti ideali, l'oratore rispose, che le figure geometriche non devono considerarsi che come schemi, i quali si ottengono da oggetti reali, tralasciandone alcune caratteristiche che si possano ritenere trascurabili, rispetto ad altre. Da ciò seguono dei limiti all'applicabilità dello strumento matematico. E l'oratore li precisò.

Occupandosi poi di quelle parti della matematica di cui non si vede, almeno per ora, il legame colle applicazioni, egli afferma che bisogna lasciare allo scienziato la più ampia libertà di ricerca, senza alcun vincolo di fini pratici. Se no verrebbe a mancare alla scienza la qualità estetica, che è poi quella che attrae la maggior parte degli studiosi. A chi osservi che un tal sistema non è economico, egli risponde come Fossombroni a Napoleone I: " Où il n'y a pas d'autre, Sire, c'est toujours le meilleur ".

A questo punto l'oratore accennò con rapida sintesi alle nozioni relative ai contorni ad una o più dimensioni e si soffermò sopra le possibili applicazioni delle rappresentazioni iperspaziali alla stereochimica. Chiuse questa parte ricordando umoristicamente le idee originali di Zollner sullo spiritismo e la favola immaginata dal romanziere inglese Welles, che ha voluto introdurre piacevolmente anche nel romanzo l'idea degli spazi a più dimensioni!

Concluse, osservando che gl'iperspazi forniscono soltanto un linguaggio comodo e opportuno, ma di cui però potrebbe farsi anche a meno ove volesse riunnciarsi all'economia di pensiero ch'essi consentono.

Passò quindi a trattare dello spazio dal punto di vista fisio-psicologico, e parlando dei canali semicircolari e dell'idea di von Cyon che in essi risieda la percezione delle tre dimensioni, accenna alla concezione bi-dimensionale dello spazio che i topi giapponesi manifesterebbero in modo curioso!

L'oratore s'intrattenne quindi lungamente sulla geometria non euclidea e spiegò — in modo accessibile anche a non matematici — in che cosa consista la questione della indimostrabilità del postulato delle parallele.

Mostrò con dei modelli, come si possano realizzare le geometrie non euclidee ed osservò come da ciò segue a priori la loro coerenza logica.

Per spiegare poi la possibilità che istrumenti di misura più precisi e potenti degli attuali possano rivelarci la natura non euclidea dello spazio, che allo stato presente delle conoscenze e delle esperienze, ci apparisce euclideo, addusse un'immagine ingegnosa di Helmholtz e Clifford.

Passò successivamente a criticare la dottrina kantiana dell'apriori, mostrando però come qualcosa rimanga di quella dottrina, nonostante il colpo formidabile portatole dalla geometria non euclidea. I postulati dell'uguaglianza delle figure appariscono *a priori* rispetto all'esperienza.

L'oratore illustrò quest'attenuazione con un modello ed a proposito della relatività dello spazio, rievocò piacevolmente una immagine di Delboeuf.

Seguì una confutazione di errori matematici commessi da filosofi (Kant, Lotze,...) che hanno male interpretato certi fatti geometrici traendone errate conclusioni filosofiche.

L'oratore si trattenne quindi sul nominalismo di Poincaré, criticandolo col sussidio di un'immagine brillante pensata dallo stesso Poincaré.

Passò infine ad esporre la rivoluzione compiuta sull'idea di tempo e di spazio dalla introduzione del tempo locale di Lorentz e dalle nuove teorie elettromagnetiche. Spiegò in che senso debba intendersi la contrazione che, secondo il Lorentz, subisce una sbarra rigida la quale si muova di moto rettilineo uniforme, e terminò il suo discorso con le seguenti parole:

Signori! Gli spettatori in quiete della mia rapida corsa filosofica siete stati voi, che avete in ogni istante misurato e valutato cogli occhi vigili dell'intelletto. La vostra benevola indulgenza mi affida che non avrò patito io pure, al vostro cospetto, una mortificante contrazione lorentziana.

QUARTA ED ULTIMA ADUNANZA. — *Sabato 25 Settembre - ore 15.*

Il Presidente VOLTERRA dette comunicazione di voti presentati dalle sezioni e dalla riunione tenuta la mattina stessa per la riforma della scuola media, che trasmetterà al Comitato scientifico per gli opportuni provvedimenti. Pregò l'Assemblea, che approvò, di autorizzare la Presidenza a trasmettere i ringraziamenti al Ministro della Pubblica Istruzione, dei Lavori Pubblici e a quello della Marina per gli aiuti efficaci dati alla Società.

Indi il comm. STRINGHER lesse il resoconto finanziario dell'anno sociale che fu approvato con unanimi applausi al comm. STRINGHER e al prof. FOLGHERAITER.

Si proclamò quindi l'esito della votazione alle cariche sociali. Il numero dei votanti fu di 206 e furono eletti:

Presidente: prof. GIACOMO CIAMICIAN, con voti 203. — *Vice-Presidenti*: prof. sen. FRANCESCO D'OVIDIO, 202 e prof. GIULIO FANO, 195. — *Amministratore*: prof. BONALDO STRINGHER, 206. — *Cassiere Economo*: prof. GIUSEPPE FOLGHERAITER, 205.

Presidenti di Sezione - Classe *A*. — Prof. F. BASSANI, con voti 205 — prof. A. GARBASSO, 202 — prof. L. DE MARCHI, 202.

Classe *B*. — Prof. R. PERROTTA, 199 — prof. F. BOTTAZZI, 199.

Classe *C*. — Prof. V. POLACCO, 204 — prof. sen. G. MARIOTTI, 203.

Comitato scientifico: On. prof. G. ALESSIO, con voti 204 — prof. G. B. PARODI, 203 — prof. E. PASCAL, 198 — prof. F. ENRIQUES, 197.

La Presidenza della Società rimane così costituita:

CONSIGLIO. — *Presidente*: prof. GIACOMO CIAMICIAN. — *Vice-Presidenti*: prof. sen. FRANCESCO D'OVIDIO e prof. GIULIO FANO. — *Segretario*: prof. VINCENZO REINA. — *Vice-Segretario*: prof. GIOVANNI BORDIGA. — *Amministratore*: comm. prof. BONALDO STRINGHER. — *Cassiere Economo*: prof. GIUSEPPE FOLGHERAITER. — *Vice-Segretario aggiunto*: dott. LAURETO TIERI. — *Bibliotecario*: prof. ELIA MILLOSEWICH.

Presidenti di Sezione - Classe *A*. — Prof. FRANCESCO BASSANI — prof. sen. GIUSEPPE COLOMBO — prof. LUIGI DE MARCHI — prof. ANTONIO GARBASSO — prof. RAFFAELE NASINI — prof. PAOLO PIZZETTI.

Classe *B*. — Prof. FILIPPO BOTTAZZI — prof. GIULIO CHIARUGI — prof. BENEDETTO MORPURGO — prof. ROMUALDO PIROTTA.

Classe *C*. — Prof. RODOLFO BENINI — prof. sen. GIOVANNI MARIOTTI — prof. VITTORIO POLACCO — prof. PIO RAJNA.

Comitato scientifico. — Prof. on. GIULIO ALESSIO — prof. GIUSEPPE BRUNI — prof. O. M. CORBINO — prof. G. B. PARODI — prof. ERNESTO PASCAL — prof. LUIGI SABBATINI — prof. FELICE TOCCO.

Il Presidente invitò l'Assemblea a deliberare la sede del Congresso del 1910.

Il prof. Pascal, con nobili parole, anche a nome dei colleghi di Napoli, propose che il prossimo Congresso si tenga a Napoli. La proposta fu acclamata all'unanimità, e Napoli venne dichiarata sede del *IV Congresso*. Il sen. Volterra trasmise altresì la domanda, che sarà tenuta presente l'anno venturo, che nel 1911 il *V Congresso* si tenga in Roma.

Dopo ciò il sen. Volterra, acclamatissimo ad ogni frase, mandò un caldo saluto di ringraziamento al Sindaco e alla Città di Padova, la cui larga ospitalità rimarrà memorabile nell'animo grato di tutti i soci, e a tutto il Comitato Ordinatore che personificò nel suo illustre Presidente, il prof. Polacco *(vivissimi applausi)*.

Pregò quindi il prof. Bordiga di leggere i telegrammi che la Presidenza propone siano spediti a S. M. il Re, a S. A. R. il Duca degli Abruzzi ed ai Ministri della Pubblica Istruzione, dei Lavori Pubblici e della Marina. L'Assemblea applaudì unanimemente alla lettura.

Il nuovo presidente prof. Ciamician, accolto da vivissimi applausi, con brevi parole ringraziò l'Assemblea per l'onore fattogli e promise di consacrare alla Associazione tutto l'amore e le cure, sull'esempio luminoso del suo illustre predecessore.

Il prof. Polacco pronunciò un brillante discorso di chiusura, segnalando l'importanza del presente Congresso e volgendo un pensiero ai colleghi che non sono più, e in particolare al prof. **Sella**, al professore **Giovanni Vailati** e al senatore **Valentino Cerruti**, che furono operosi promotori della Associazione e furono decoro della scienza e della vita.

La riforma della Scuola media.

Sabato 25 Settembre - ore 9. — Il prof. Rajna assunse la Presidenza e dette la parola al prof. Ricchieri Giuseppe il quale disse di essere stato incaricato all'ultimo momento di avviare la discussione sulla riforma della scuola media per il fatto che a Firenze propose la trattazione di questo argomento per il presente Congresso e per l'altro fatto che il prof. Salvemini, relatore ufficiale, non ha potuto venire.

Relatore improvvisato, pertanto, egli non si dilungò, tanto più che ormai intorno alla questione si sono pubblicati innumerevoli scritti e fatte non meno innumerevoli discussioni. Ritenendo sia l'ora di riassumere e di fissare alcuni capisaldi intorno ai quali è possibile una utile discussione ed una cosciente votazione da parte del Congresso. Tali capisaldi sono espressi in un ordine del giorno che presentò.

Seguì la discussione, alla quale parteciparono molti congressisti.

La radunanza si sciolse dopo aver votato, all'unanimità, la sospensiva proposta dal sen. D'Ovidio, insieme con la raccomandazione che nel Congresso futuro il problema della Scuola media sia presentato e discusso sin dai primi giorni della riunione in una seduta plenaria.

RESOCONTO SOMMARIO
DELLE ADUNANZE DELLE PRIME TRE SEZIONI DELLA CLASSE *A*.

SEZIONE I. — Matematica, Astronomia e Geodesia.

Martedì 21 Settembre - ore 9. — Il prof. D'ARCAIS porse alla riunione il saluto della Facoltà di Scienze. Egli venne poi acclamato Presidente effettivo della Sezione. Il prof. D'ARCAIS ringraziò e solo dopo gentile insistenza dell'Assemblea accettò.

Dovendosi riunire nella stessa ora e nella stessa aula i congressisti della " Mathesis „ su proposta del prof. LEVI-CIVITA i discorsi di sezione furono rinviati ai giorni di venerdì e sabato.

Venerdì 24 Settembre - ore 9. — Il prof. PASCAL ERNESTO illustrò un apparecchio da lui fatto costruire per la integrazione meccanica delle equazioni differenziali.

Il prof. RICCI GREGORIO parlò sulla determinazione di varietà a tre dimensioni dotate di proprietà intrinseche prestabilite.

Il dott. ALBERTO ALESSIO comunicò dei risultati ottenuti in recenti osservazioni di gravità relativa e svolse alcune sue considerazioni sulla preferenza da dare ai due tipi di istrumenti gravimetrici adoperati.

Indi il prof. D'ARCAIS distribuì ai presenti la comunicazione: *Nombre de Mersenne* pervenuta dal sig. A. GÉRARDIN, membro della " Société Mathématique de France „; la quale comunicazione verrà pubblicata negli Atti.

Avvertì poi che per la difficoltà di riunirsi il giorno successivo, il dott. ABETTI e il dott. ALESSIO rinunciavano alle comunicazioni che dovrebbero ancora svolgere e di cui sarà data notizia negli Atti.

Infine il prof. GALLUCCI GENEROSO parlò *Sulle configurazioni irregolari* N_3.

SEZIONE II. — Ingegneria ed Elettrotecnica.

Mercoledì 22 Settembre - ore 10. — Apertasi la seduta, furono nominati: Presidente il prof. LORI e Segretario l'ing. DE GIUSTI. Quest'ultimo parlò dei motori monofasi per trazione con riguardo speciale a quelli Winter Eichberg adoperati in Italia per la tramvia elettrica Padova-Fusina, della quale descrisse le parti principali.

Mercoledì 22 Settembre - ore 20. — L'ing. FRANCO DELLA PORTA parlò dei più recenti apparecchi per raggi Röntgen, eseguendo anche qualche radiografia.

Giovedì mattina 23, i Congressisti visitarono la fabbrica della " Cines „ per la seta artificiale e la Centrale Elettrica della Società Veneta. Durante la visita alla " Cines „ furono fatte delle prove con un apparecchio atto a prevenire le disgrazie dovute a rotture di fili sottotensioni. Causa il cattivo tempo non poterono aver luogo le progettate visite all'Officina del Gas ed alla Centrale Elettrica della Società Adriatica.

Venerdì 24 Settembre - ore 9. — Alla Scuola di Applicazione parlarono: a sezioni riunite di Ingegneria, Geografia e Geologia, il dottor GIOVANNI MAGRINI sui lavori dell'Ufficio idrografico del Magistrato delle Acque; l'ing. MARIO DORNING sul tema *I politecnici tedeschi ed i laboratori di macchine*; il prof. LUIGI VITTORIO ROSSI, *Sulle case di grande resistenza al terremoto.*

Infine l'ing. EDOARDO SCHENK eseguì delle esperienze con due macchine per le prove dei materiali da costruzioni.

SEZIONE III. — Fisica.

Lunedì 20 Settembre - ore $17\frac{1}{2}$. — Su proposta del prof. LORI venne nominato per acclamazione Presidente il prof. RIGHI. Stabilito il programma delle adunanze successive, stante l'ora tarda si tolse la seduta.

Martedì 21 Settembre - ore 14. — Il Presidente prof. RIGHI aprì la seduta chiamando a Segretari i professori CORBINO e AMADUZZI.

Egli comunicò un telegramma del prof. VICENTINI, direttore dell'Istituto fisico di Padova, ch'era stato posto a disposizione della Sezione di Fisica per tenervi le sedute usufruendo dei mezzi sperimentali in esso contenuti. Nel telegramma il prof. VICENTINI esprimeva il proprio dispiacere per la impossibilità di assistere alle sedute, essendo ammalato.

Il Presidente propose, e l'assemblea approvò unanime, di ringraziare vivamente il prof. VICENTINI della ospitalità accordata, facendo voti per una sua pronta guarigione.

Il presidente lesse una lettera del prof. PEROTTI relativa a un suo ritrovato telefonico. Indi dette la parola all'ing. BARRECA che riferì sulla *Misurazione delle potenze* svolgendo una serie di considerazioni teoriche destinate a definire, dimostrandone l'esistenza, d'un coefficiente caratteristico degli aerei, il quale si conserva costante per una data forma geometrica di essi; e accennando alle esperienze eseguite per determinare sperimentalmente quel coefficiente con un tipo determinato di aereo.

Poscia il prof. BRUNÉ eseguì alcune esperienze sull'emissione dei corpi incandescenti, dalle quali viene dimostrato che un filamento emette entro un palloncino ioni positivi o negativi non solo dipendentemente dalla temperatura del filamento, ma anche dalla pressione del gas ambiente.

Il sig. CASAZZA comunicò alcune sue considerazioni sulle forze.

Infine il prof. RIGHI, dopo avere brevemente richiamate le sue esperienze già comunicate lo scorso anno, e la teoria enunciata per la spiegazione dei fenomeni magnetocatodici e dei nuovi da lui scoperti, guidato dalla teoria medesima; espose i principi della teoria matematica da lui svolta per spiegare che la stabilità d'un sistema neutro ione-elettrone viene accresciuta dalla presenza di un campo magnetico opportunatamente orientato. Ammettendo che il campo sia di piccola intensità la traiettoria normalmente ellittica dell'elettrone viene modificata in modo determinato dall'oratore costruendo la curva per punti. E risulta confermato che la nuova traiettoria è tutta interna alla prima come richiede il concetto espresso della maggiore stabilità.

Mercoledì 22 Settembre - ore 14. — Il Presidente senatore Righi dette la parola al prof. Levi-Civita il quale svolse la comunicazione *Sulla costituzione delle radiazioni elettriche.* Il prof. Levi-Civita chiese ai colleghi fisici un responso sperimentale, destinato a orientare verso un assetto definitivo la teoria delle radiazioni elettriche, e presentò alcune considerazioni critiche sul moto degli elettroni.

Seguì una brillante discussione, cui presero parte, oltre l'oratore, i proff. Abraham, Corbino ed il sen. Righi.

Il prof. Cisotti sviluppò la comunicazione *Sforzi maxwelliani e mezzi elastici,* sulla quale fece alcune osservazioni il prof. Somigliana.

Il prof. Taramelli prese a parlare della costituzione geologica dello stretto di Messina, confutando in ispecial modo le idee del Süss di uno sprofondamento dei terreni fra la Calabria e la Sicilia ed ammise piuttosto l'ipotesi di uno scoscendimento progressivo.

Quindi il prof. Paladini del Politecnico di Milano lesse la sua relazione *Sulla Navigazione interna.* Egli illustrò l'importanza e i punti principali di vari ordini di questioni che il problema coinvolge e cioè:

1°. La scelta delle vie d'acqua e il modo di loro conveniente adattamento.

2.° I tipi di navi e i modi di trazione.

3°. La natura e l'entità dei traffici presumibili e le tariffe applicabili per via d'acqua.

4.° I mezzi occorrenti, da chi debbano essere forniti, e misure legislative correlative.

A conclusione della sua esposizione il prof. Paladini disse:

Per evitare che si prolunghi il periodo di inazione, in ordine generico urge che provvedimenti legislativi dirimano le incertezze di competenza delle spese occorrenti per la costruzione delle opere necessarie a migliorare e sistemare od aprire vie d'acqua;

è inoltre da far voti che il Governo abbia a promuovere e facilitare l'estrinsecazione dei traffici asseriti latenti lungo la via del Po e dipendenze, affidando, a prezzo minore delle tariffe ferroviarie, alle intraprese di navigazione esistenti il trasporto dei carboni che ingombrano le ferrovie, e ciò costruendo alcuni raccordi provvisori semplici ma con grue, fra scali fluviali e ferrovie (a Pontelagoscuro e Piacenza la cosa non presenta difficoltà) e assicurando alle intraprese il traffico per es. per 50.000 tonnellate e per almeno un triennio.

Dal punto di vista tecnico scientifico, è a desiderarsi che si promuova la definizione sicura del modo di calcolo della resistenza alla trazione nella ascesa lungo corsi a pendenza non trascurabile, e che il Governo provveda a che funzionari del Genio Civile, sulla traccia del FARGUE e del BOUSSINESQ, definiscano le caratteristiche della relazione fra curvature dell'andamento planimetrico dell'alveo e profondità minime nel thalweg lunghesso, per le tratte più importanti del Po e fiumi, lungo cui si pensa sistemare la navigazione.

Il PALADINI vorrebbe anzi che dello studio del primo accennato problema tecnico scientifico, si occupasse la Società per il progresso delle Scienze.

Il PALADINI terminò il suo dire, ricordando le proposte e il sistema CAMINADA, che affermò non presentare punti deboli d'ordine tecnico, e fece voti per la grandezza avvenire d'Italia che non sia da noi lasciato quel sistema in abbandono, ma venga invece studiato dal Governo, con sicuro riferimento alle circostanze fisiche idrauliche locali, per le due vie da Venezia e da Genova a oltre Alpi, da cui può in avvenire anche forse non lontano dipendere molta della ricchezza d'Italia.

Dopo il discorso PALADINI presero la parola sul medesimo argomento il prof. sen. VOLTERRA ed il prof. CIAMICIAN.

Venerdì 24 Settembre - ore 14. — Dopo prese alcune deliberazioni relative all'amministrazione della *Società Italiana di Fisica*, il professore CORBINO Segretario della Commissione esaminatrice delle esperienze da lezione ne riassunse le conclusioni.

Il prof. AMERIO e l'ing. SARTORI eseguirono le loro esperienze e al prof. AMERIO venne aggiudicata la medaglia d'oro e all'ing. SARTORI la medaglia d'argento.

Si procedè poi all'elezione di tre Consiglieri e restarono eletti i professori LUSSANA, POCHETTINO e BELLATI.

Il prof. LO SURDO fece quindi una comunicazione sulle registrazioni sismiche, il prof. AMERIO presentò una relazione su esperienze spettroliometriche al Monte Rosa.

Il sen. BLASERNA e il sen. RIGHI proposero che l'Assemblea emettesse un voto che le esperienze del prof. AMERIO sieno continuate nell'anno venturo.

Il Presidente poi comunicò che il prof. HALE aveva chiesto la partecipazione della Società alla Unione internazionale per la cooperazione nelle ricerche solari. Vennero quindi eletti il sen. RIGHI, il prof. RICCÒ e il prof. CORBINO a rappresentanti della Società di Fisica nella Unione medesima.

Il prof. PIOLA fece una comunicazione, sulle elettrolisi con corrente alternata nel campo magnetico.

FESTEGGIAMENTI.

Padova, come due anni prima Parma, volle mostrare ai Congressisti là convenuti da ogni parte d'Italia come si sentisse onorata della presenza di tanti illustri ospiti; e Comitato, autorità, cittadini fecero a gara per fare signorilmente e cortesemente gli onori di casa. Non è qui il luogo per parlare dei festeggiamenti del 20 settembre in Piazza V. Emanuele, del ricevimento del 21 al *Caffè Pedrocchi*, offerto dal Comune e dalla Presidenza del Casino, del ricevimento del 22 alla R. Scuola d'applicazione degl'Ingegneri, della riunione del 24 nel Salone della Ragione, tutti splendidamente riusciti; nè delle varie gite organizzate per il giorno 23 (giorno di riposo per quasi tutte le sezioni) alle quali moltissimi presero parte secondo i propri gusti e le proprie tendenze. Alcuni si recarono ad Arquà alla casa del Petrarca e ad Este, ove il Municipio offerse una refezione, e fu fatta una escavazione nell'interno del castello medioevale, altri fecero una escursione geologica nei colli Euganei; altri infine fecero una gita ad Abano, ove l'amministrazione delle terme offerse un tè.

Ma non possiamo tacere della gita a Venezia e a Trieste, che resterà indubbiamente uno dei più cari e graditi ricordi per tutti coloro che ebbero la fortuna di prendervi parte.

Il 26 a ore 14 per invito del Sindaco di Venezia conte Grimani e del Presidente dell'Istituto Veneto, Senatore Veronese, i congressisti convennero nel palazzo ducale nella Sala del Pregadi per assistere alla cerimonia della consegna della grande medaglia d'oro offerta dalla *Società italiana per il progresso delle scienze* alla consorella francese. Parlarono il Sindaco di Venezia e di Padova, il rettore dell'Università di Padova, il Senatore Volterra, il rappresentante dell'Associazione francese, il prof. Ciamician, per ultimo l'illustre presidente dell'Istituto Veneto, il quale fece una dotta e brillante esposizione di quanto ha fatto l'Istituto da lui degnamente presieduto in pro della scienza e dell'industria specialmente per la regione veneta.

In tutti i discorsi vibrò alta la nota del sentimento della fratellanza latina, fratellanza che la scienza non meno dell'arte rinsalda ogni dì più. L'ambiente così sovranamente artistico, il potere suggestivo dei ricordi gloriosi che emanano da ogni pietra, da ogni sasso del vetusto e splendido palazzo, documento imperituro della grandezza della Veneta repubblica, dettero una importanza ed una solennità eccezionale alla cerimonia di chiusura del Congresso.

Alla quale seguì una gita a Murano e nella laguna per invito del Sindaco di Venezia, che disimpegnò con squisita cortesia i doveri dell'ospitalità.

Alle 20 del giorno stesso 26 i congressisti s'imbarcavano sul piroscafo *Graf Wurmbrand* del Lloyd austriaco, che a mezzanotte gettava l'ancora nel porto di Trieste.

Gli occhi di tutti avevano spiato ansiosamente nelle tenebre profonde della notte l'avvicinarsi dei fari di Salvore e di Trieste, poi il luccichio dei mille e mille lumi della bella Sirena dell'Adriatico; ed i cuori di tutti provavano una dolce emozione fatta di gioia e di dolore all'avvicinarsi a quell'estremo lembo di terra italiana, staccato dalla patria.

Si sapeva che i triestini attribuivano una grande importanza alla visita che i rappresentanti della scienza italiana facevano alla loro città e che si apprestavano a fare grandiose accoglienze per rendere omaggio ad un tempo alla scienza ed alla patria italiana. E la polizia austriaca cooperò efficacemente a sottolineare il significato e l'importanza della visita, e dell'omaggio dei triestini.

Quando il *Wurmbrand* stava per gettare l'ancora, giunse all'orecchio dei congressisti l'eco lontana di applausi ed acclamazioni; poi più nulla; e quando il fianco del piroscafo toccò la banchina del molo S. Carlo, la città apparve quasi deserta. Sul molo non c'erano che i facchini del porto e una diecina di rappresentanti del Comitato di ricevimento, i quali davano ai congressisti le indicazioni per gli alloggi; in distanza molteplici file di poliziotti mantenevano sgombri i dintorni e davano alla città l'aspetto di una città in stato d'assedio.

Che cosa era accaduto? Lo sapemmo poi. Verso le 11 $^1/_2$ un nuvolo di poliziotti aveva chiuso tutti gli sbocchi delle vie conducenti al mare, avevano scacciato dalla piazza Grande e dai caffè le migliaia e migliaia di persone di ogni classe e di ogni età che malgrado l'ora tarda e il tempo minaccioso, si preparavano a salutare i congressisti. Dopo parecchie colluttazioni, una cinquantina d'arresti, e i soliti incidenti che si verificano in queste occasioni, la polizia riuscì a impedire il saluto della cittadinanza agli scienziati, proibito per ordine superiore. Il *Piccolo* del 27 e l'*Indipendente* (sequestrato) descrissero minutamente questi spiacevoli incidenti, ma i giornali italiani, non ne dettero che un breve e sbiadito sunto. Il *Piccolo* così commentò il fatto:

Si erano affollati nelle vie e nelle piazze che conducono alle rive, cittadini d'ogni ordine, coppie di coningi, famiglie intere con le figliuole e ragazzi: la moltitudine che attendeva gli ospiti illustri per dar loro il ben venuto, non aveva dunque aspetto sedizioso. Nè più rivoluzionario carattere era nell'avvenimento che la folla attendeva: l'arrivo di un piroscafo recante a bordo un gruppo di scienziati che, riuniti a Congresso in città a noi vicina avevano fatto mèta Trieste d'una di quelle gite che solitamente si accompagnano a tutti i Congressi.

Nondimeno la Polizia ha tentato di impedire che il saluto della città giungesse agli orecchi degli ospiti. Perchè? Forse perchè doveva essere — e fu — saluto italiano di città italiana a scienziati italiani? O che non abbiamo diritto di festeggiare in casa nostra gli ospiti nostri? O che non abbiamo diritto di mostrar riverenza, affetto, entusiasmo per gli uomini insigni che perpetuano la gloria della Nazione? O che gli scienziati d'Italia non hanno diritto d'imparare a conoscere un centro di vita e di cultura italiana, e sono per la burocrazia austriaca ospiti sgraditi, testimoni importuni, o mallevadori seccanti?

Quanto agli scienziati italiani, il grido che da migliaia di petti, gonfi di entusiasmo, proruppe al loro arrivo, è giunto ai loro orecchi e, ne siamo certi, pure al loro cuore. Per la esatta conoscenza delle nostre condizioni è meglio che sia giunto loro di lontano, al disopra della muraglia di guardie che si affannava a soffocarlo.

L'indole del giornale non permette di diffonderci in particolari sui festeggiamenti affettuosi, entusiastici ricevuti dai congressisti. Basti dire che per due giorni la parte migliore e più colta della cittadinanza, con a capo l'egregio presidente dell'Ateneo ing. I. PIANI si dedicò tutta a mostrare il paese sotto la sua miglior luce; condusse gli ospiti a visitare le molte cose belle e interessanti della città e dintorni, con un'espansione di affetto più che fraterno; che la popolazione accolse il passaggio dei congressisti sempre e dovunque colle più calde manifestazioni di simpatia e di cordialità.

Come sintesi delle molte cose belle ed alte che si dissero in quei due giorni, delle moltissime che si sottintesero nei privati colloqui e nei brindisi che furono fatti nel banchetto che ebbe luogo la sera del 28 nella splendida sala della Filarmonica, presenti il magnifico Podestà Valerio ed il Console italiano Barone Acton, mi piace riportare il brindisi che con parola ispirata portò Attilio Hortis, l'insigne patriotta e scrittore.

... Ed ora erompe dall'animo il saluto a tutti voi, fratelli illustri per ingegno e dottrina, benemeriti dell'umanità e della civiltà, che qui conduce pensiero d'amore, dopo aver reso onore alla scienza e fatto onore alla patria.

Amore di scienza e amor di patria guidarono il cammino dei vostri grandi: l'amore alla scienza produsse i frutti che al nome italiano conciliava la gratitudine dell'umanità: ma soltanto l'amore alla patria, il pronto e continuato sacrificio per essa impongono agli estranei rispetto della Nazione, per legge ineluttabile, che non ha mai perdonato a' deboli. Scienza e patria rappresentano l'onore che non viene in sorte a nessuno che non sappia conquistarlo.

La scienza è detta, ed è, universale; ma anch'essa prende il volo dal nido della patria, poi spazia sull'Universo. E ciascuna nazione la crea col genio suo, e secondo il suo genio l'accresce e l'adopera.

Fratelli, la lingua, che qui risuona sulle nostre labbra è la vostra e vi manifesta ad ogni ora il consentimento de' nostri cuori; col nostro lavoro cooperiamo al lavoro della nazione; unanimi inneggiamo alla scienza e alla grande patria italiana.

È assai più facile imaginare che descrivere l'entusiasmo che suscitarono queste parole e l'uragano d'applausi interminabili che le salutò. Parve a tutti di fare un tuffo nell'ideale, parve di rivivere nel 1848.

Alla mezzanotte del giorno stesso 28 doveva aver luogo la partenza. Ma i più preferirono attendere il mezzogiorno del successivo 29: la dimostrazione che fu impedita all'arrivo ebbe luogo alla partenza, e per essere improvvisata non riuscì meno imponente, calorosa e significativa. Pochi minuti prima del mezzogiorno il Podestà seguito dai rappresentanti del Municipio comparve sul molo per andare a bordo del *Wurmbrand* a salutare i partenti; il suo arrivo fu il segnale di un applauso lungo interminabile, che deve aver risuonato ben lontano, che ha fatto accorrere da tutte le vie adiacenti al porto sciami di persone plaudenti; il piroscafo si staccò solennemente dal molo mentre in una gloria di sole fra uno sventolio di fazzoletti, di ombrellini variopinti, di cappelli, saliva nell'aria fra gli applausi il grido: viva la *Scienza italiana*, a cui da bordo rispondeva l'altro: viva Trieste italiana. Anche i più freddi erano in preda all'entusiasmo e ben poche ciglia rimasero asciutte!

Agli amici Triestini vada un saluto affettuoso fraterno.

G. L.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 30 Ottobre 1909

I NUMERI REALI

INTRODUZIONE.

Che cosa vuol dire "estendere un campo numerico"?

Il *numero*, (1) secondo BERTRAND RUSSELL, (2) può definirsi nominalmente per mezzo di soli concetti logici, onde le proposizioni, che ordinariamente si assumono come primitive per definirlo, altro non sarebbero che delle verità apodittiche.

Qui non vogliamo esaminare la questione se il sistema logico deduttivo del RUSSELL possa essere accolto con profitto nella Scuola, come non vogliamo discutere dell'importanza scientifica del sistema stesso. Per certo, introdotto nel miglior modo il concetto di numero — e uno dei modi migliori è la definizione per postulati data dal PEANO — lo studio dei numeri può esser fatto secondo un sistema logico deduttivo del tutto soddisfacente. Noi vogliamo piuttosto esaminare se gli ordinari metodi, coi quali s'introducono gli altri concetti numerici (i numeri razionali, gl'irrazionali, i numeri complessi) siano veramente rigorosi e se dal punto di vista logico o dal lato didattico sia necessaria od opportuna l'introduzione di nuovi postulati.

Comunque sia definito il numero, nominalmente o per mezzo di un sistema di postulati, l'espressione *nuovo numero*, che spesso si adopera nelle cosidette *definizioni per astrazione* non ha alcun significato, e può anche dubitarsi dell'esistenza dell'ente stesso che si vuol definire.

Prendiamo ad esempio un modo secondo cui qualcuno vorrebbe introdurre il concetto di *rapporto (numero) razionale.*

Se n *è un numero maggiore di* 1, *si ammetta l'esistenza di un nuovo numero* ε *che soddisfi alla relazione* $n \times \varepsilon = 1$.

Questa definizione del rapporto $\dfrac{1}{n}$ ha qualche cosa di strano e di paradossale, perchè implica un postulato che è in disaccordo col teorema: *se* n *è un numero maggiore di* 1, *non esiste alcun numero* x *che soddisfi alla relazione* $n \times x = 1$.

(1) Intendiamo parlare del *numero intero.* L'aggettivo *intero* non ha senso esplicito se non dopo l'introduzione dei *rapporti.*

(2) B. RUSSELL, *The principles of mathematics*, Cambridge, University Press, 1903; v. anche L. COUTURAT, *Les principes des Mathématiques*, Paris, F. Alcan.

Si può invece definire una classe di enti, i quali abbiano proprietà analoghe ai numeri, estendendo ad essi le operazioni definite per i numeri, per modo che esistan sempre enti di quella classe che soddisfino alla relazione precedente. Non dobbiamo uscir fuori dell'Aritmetica per cercare una classe siffatta: i sistemi di numeri, le operazioni sui numeri ci dànno il mezzo di costruirla.

Son noti in vero i metodi nei quali *i rapporti* sono considerati come coppie di numeri, di cui il secondo non è mai nullo (TANNERY). o come operazioni composte di due operazioni elementari: una moltiplicazione per un numero qualunque, seguìta da una divisione per un numero non nullo (PEANO).

Nell'una o nell'altra di queste classi esiste una sottoclasse $\overline{\mathrm{N}}$ (*i rapporti interi*), che si trova in relazione notevole colla classe N dei numeri: *gli elementi di* $\overline{\mathrm{N}}$ *e quelli di* N *si corrispondono biunivocamente e reciprocamente e un'operazione fondamentale qualunque su dati elementi di* $\overline{\mathrm{N}}$ *e l'operazione omonima su gli elementi corrispondenti di* N *hanno risultati corrispondenti.*

Noi esprimiamo questo fatto dicendo che *le due classi* $\overline{\mathrm{N}}$ *ed* N *sono isomorfe*, e che *la classe* R *dei rapporti è una classe di grandezze numeriche superiore ad* N.

Si suol dire comunemente che la classe R è un'*estensione* della classe N. Ma con ciò non devesi intendere che R contiene N, sibbene che R contiene una classe isomorfa, ma non identica, ad N.

Il concetto di classe di grandezze numeriche si può successivamente generalizzare.

Noi diremo in generale che *due classi* C, $\overline{\mathrm{C}}$ *di grandezze numeriche sono isomorfe, se gli elementi di* C *e* $\overline{\mathrm{C}}$ *si corrispondono biunivocamente e reciprocamente e un'operazione fondamentale qualunque su dati elementi di* C *e l'operazione omonima su gli elementi corrispondenti di* $\overline{\mathrm{C}}$ *hanno risultati corrispondenti.*

E allora, *definita una classe* C *di grandezze numeriche, se per una data classe* K, *i cui elementi sono classi di elementi di* C (*sistemi di elementi di* C, *operazioni su elementi di* C,...), *avviene:*

1° *che gli elementi di* K *si possono estendere, con opportune definizioni, i concetti e le operazioni di* C;

2° *che, in seguito a tale estensione, esista in* K *una classe* $\overline{\mathrm{C}}$ *isomorfa a* C, noi diremo che K *è una classe di grandezze numeriche superiore a* C, o anche che K *è un'estensione di* C.

L'isomorfismo fra due classi C e $\overline{\mathrm{C}}$ di grandezze numeriche si può rendere simbolicamente manifesto in una maniera notevole. Siano ε, η *le unità* (*i moduli della moltiplicazione*) di C, $\overline{\mathrm{C}}$ rispettivamente: esse si corrispondono nell'isomorfismo. Se α è un elemento di C, e indichiamo con $\eta\alpha$ il corrispondente elemento di $\overline{\mathrm{C}}$, poichè agli elementi

$$\varepsilon, \quad \alpha+\beta, \quad \alpha-\beta, \quad \alpha\times\beta, \quad \alpha:\beta$$

di C corrispondono in $\overline{C}$ rispettivamente gli elementi

$$\eta\varepsilon, \quad \eta(\alpha + \beta_2), \quad \eta(\alpha - \beta), \quad \eta(\alpha \times \beta), \quad \eta(\alpha : \beta),$$

riconosciamo subito che si ha, in seguito alla definizione di isomorfismo:

$$\eta\varepsilon = \eta, \quad \eta(\alpha + \beta) = \eta\alpha + \eta\beta, \quad \eta(\alpha - \beta) = \eta\alpha - \eta\beta$$
$$\eta(\alpha \times \beta) = \eta\alpha \times \eta\beta, \quad \eta(\alpha : \beta) = \eta\alpha : \eta\beta.$$

Ne segue che *il risultato di qualunque operazione su elementi di* $\overline{C}$ *si può ottenere dal risultato dell'omonima operazione su gli elementi corrispondenti di* C *mutando il nome dell'unità.*

Così, per es., essendo $\frac{1}{1}$ l'unità nella classe R, il rapporto intero $\frac{n}{1}$ si può rappresentare col simbolo $\frac{1}{1}n$, e se si conviene di sottintendere l'unità, il rapporto stesso vien rappresentato dal numero n, cioè la classe $\overline{N}$ dei rapporti si traduce simbolicamente nella classe N.

Ordinariamente si dà il nome di *numeri* anche alle grandezze numeriche: è necessario allora usare aggettivi speciali per indicare le varie classi di numeri; per es. gli elementi di N son detti *numeri interi*, quelli di R *numeri razionali* e se appartengono ad $\overline{N}$ *numeri razionali interi*, altrimenti *numeri razionali frazionari*.

Seguendo una via analoga a quella tenuta pei rapporti si può pervenire alla classe R' dei *numeri razionali relativi*, e si trova che R' è una classe di grandezze numeriche superiore ad R, in quanto esiste in R' una classe $\overline{R}$ isomorfa ad R. La classe $\overline{R}$ è la classe dei *numeri razionali positivi*, la quale va distinta, quantunque le sia isomorfa, dalla classe R, detta anche dei *numeri razionali assoluti*.

Il presente lavoro ha lo scopo di mostrare che *i numeri reali assoluti* (*relativi*) costituiscono una classe di grandezze numeriche superiore a R (R'). Questo concetto è recente e si deve al Russell, ma la teoria dei numeri reali fondata su di esso non era stata ancora svolta. Finora si è seguìta generalmente la definizione per astrazione data dal Dedekind, i cui sviluppi hanno forse maggiore semplicità di quelli fondati sulle definizioni per astrazione date dal Cantor, dal Peano, ...; ma tutte queste teorie hanno un comune difetto dipendente dalla definizione per astrazione: esse non ci dicono che cosa sia e se effettivamente esista il numero reale. Il postularne l'esistenza varrebbe quanto ammettere come primitivo o già definito il concetto generale di grandezza numerica. Il largo favore accordato fin qui alla teoria del Dedekind, è nato dal concetto, che si forma in seguito alla teoria della misura: che, cioè, la grandezza numerica sia come una specie d'imagine della grandezza geometrica.

Da ciò è nata la confusione che si fa tuttavia fra le varie classi di grandezze numeriche, così per es. si son confusi i numeri reali interi e i numeri razionali interi, perchè entrambi si presentano come imagini di una stessa classe di grandezze geometriche.

Il concetto di grandezza geometrica non deve far capolino nell'Aritmetica: esso è di natura affatto diversa dal concetto di grandezza numerica, e il suo intervento nell'Aritmetica non gioverebbe nè alla semplicità nè al rigore logico.

Ai numeri complessi si è già dato da qualche tempo un assetto logico definitivo. Scartata la definizione incomprensibile dell'unità imaginaria i per mezzo della relazione $i^2 = -1$, i numeri complessi sono oggi considerati come coppie di numeri reali. Una classe di queste coppie è isomorfa, ma non identica, alla classe dei numeri reali, cioè *i numeri complessi formano una classe di grandezze numeriche superiore alla classe dei numeri reali.*

L'Aritmetica, svolta con simili vedute, presenta nelle sue varie parti completa uniformità, quando si adotta la definizione del RUSSELL. Gli svolgimenti cui essa dà luogo, come vedremo nelle seguenti pagine, non presentano delle difficoltà maggiori delle altre teorie, onde il metodo che qui presentiamo, ci sembra non solo superiore agli altri per rigore logico, ma anche vantaggioso dal lato didattico.

§ 1. — Segmenti numerici razionali e irrazionali.

1. Chiameremo *segmento numerico*, o semplicemente *segmento, una classe* u *di numeri razionali assoluti, che possiede le seguenti quattro proprietà:*

1° u *contiene lo zero;*

2° u *non contiene tutti i numeri razionali;*

3° *se* r *è un numero diverso da zero appartenente ad* u, *qualunque numero minore di* r *appartiene ad* u;

4° *se* r *è un numero diverso da zero appartenente ad* u, *esiste in* u *un numero maggiore di* r.

Lo zero è il minimo numero che contiene un segmento: esso dicesi l'*origine* del segmento.

Alcuni esempi di segmenti:

La classe costituita dal solo zero è un segmento, che diremo *segmento zero* o *nullo* e indicheremo col simbolo 0.

La classe costituita dai numeri razionali assoluti minori di 1 è un segmento, che denoteremo con η.

Se conveniamo indicare con ηu la classe dei numeri che son prodotti di un numero qualunque di η con un numero qualunque di u, possiamo più concisamente definire così un segmento:

Chiamasi *segmento una classe* u *di numeri razionali assoluti, che non contiene tutti i numeri razionali assoluti e tale che sia*

$$u = \eta u. \qquad (1)$$

Infatti la condizione 3ª equivale a dire che ηu è contenuto in u e la 4ª che u è contenuto in ηu, e quindi $u = \eta u$.

2. La classe dei numeri razionali assoluti minori di un numero razionale assoluto r è un segmento, che denoteremo con ηr, intendendo d'indicare con questo simbolo la classe dei prodotti di ogni numero di η per r.

I segmenti del tipo ηr, essendo r un numero razionale assoluto qualunque si dicono *segmenti razionali.*

I segmenti $0 = \eta 0$, $\eta = \eta 1$ sono segmenti razionali.

Si dice pertanto che *u è un segmento razionale, se è nullo ovvero se esiste un numero razionale assoluto* r *che non appartenga al segmento e tale che qualunque numero razionale assoluto minore di* r *appartenga al segmento.*

Notiamo che non tutti i segmenti sono razionali. Sia, per es., m un numero razionale assoluto non quadrato, e consideriamo la classe u dei numeri razionali il cui quadrato è minore di m. Questa classe è un segmento. Infatti le prime tre condizioni sono subito verificate, in quanto alla quarta si osservi che, se h è un numero di u (e però $h^2 < m$), si può sempre determinare un numero razionale assoluto x non nullo in maniera che sia $(h+x)^2 < m$, e però $h+x$ sia un numero di u: basterebbe assumere x maggiore di 0 e minore del più piccolo dei numeri

$$1, \quad \frac{m-h^2}{2h+1}$$

per avere

$$(h+x)^2 = h^2 + 2hx + x^2 < h^2 + (2h+1)x < m.$$

Il segmento u non è però un segmento razionale. Infatti, evidentemente, u non è nullo, nè può esistere un numero razionale assoluto r fuori di u, tale che sia $u = \eta r$. Infatti, qualunque sia r fuori di u (e però $r^2 > m$), basta scegliere ad arbitrio un numero razionale assoluto x maggiore di 0 e minore del numero

$$\frac{r^2-m}{2r}$$

e quindi minore di $\frac{r}{2}$, perchè sia

$$(r-x)^2 = r^2 - 2rx + x^2 > r^2 - 2rx > m.$$

Allora, non potendo $r - x$ appartenere ad u, non può essere $u = \eta r$.

Un segmento che non è razionale, si dirà *segmento irrazionale.* Di un segmento razionale $u = \eta r$ il numero r si dice *estremo.* Escluso il segmento nullo, l'estremo di un segmento razionale non appartiene al segmento. I segmenti irrazionali non hanno estremi.

3. *Dati ad arbitrio un numero razionale assoluto* ε *non nullo e un segmento* u, *si possono sempre determinare un numero* r *di* u *e un numero* r' *fuori di* u, *tali che sia*

$$r' - r = \varepsilon.$$

Si consideri infatti la progressione aritmetica

$$0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \ldots,$$

della quale certamente un termine, il primo, appartiene ad u, ma non tutti i termini possono appartenere ad u. Infatti, se k è un numero razionale assoluto fuori di u, basta determinare un numero intero assoluto n tale che sia $n > \frac{k}{\varepsilon}$, perchè $n\varepsilon$ e i termini della progressione successivi ad $n\varepsilon$ sian fuori di u. Se dunque r è l'ultimo termine della progressione, che appartiene ad u, ed r' il suo successivo, sarà $r' - r = \varepsilon$.

4. *Dati ad arbitrio un numero razionale assoluto* k *maggiore di* 1 *e un segmento* u, *si può sempre determinare un numero* r *di* u *e un numero* r' *fuori di* u, *tali che sia*

$$\frac{r'}{r} = k.$$

Essendo $k > 1$, si possono determinare due numeri interi positivi n, m tali che sia k^n maggiore di ogni numero di u e k^{-m} minore di qualche numero di u. Allora nella progressione geometrica

$$k^{-m}, k^{-m+1}, \ldots, k^{-1}, 1, k, \ldots, k^n,$$

poichè il primo termine è in u e l'ultimo fuori di u, esisteranno due termini consecutivi r, r', tali che il primo sia in u e il secondo fuori di u, e sarà $\frac{r'}{r} = k$.

§ 2. — Relazioni di maggiore, minore, uguale.

5. *Dati due segmenti* u, v, si dice che u *è maggiore di* v, e si scrive u > v, *se* u *contiene* v *e qualche altro numero che non appartiene a* v.

Se u > v, si dice v *minore di* u, e si scrive v < u.

Due segmenti u, v si dicono *uguali*, e si scrive u = v, *se ogni numero di* u *è un numero di* v, *e viceversa.*

6. *Se il segmento* u *è maggiore del segmento* v, *ogni numero di* u, *che non è in* v, *è maggiore di ogni numero di* v.

E reciprocamente: *se esiste in* u *un numero che sia maggiore di ogni numero di* v, *è* u > v.

Segue subito in virtù della condizione 3ª (n. 1).

7. *Dati due segmenti* u, v, *avviene sempre una e soltanto una delle relazioni:* u > v, u = v, u < v.

Infatti, o esiste in u un numero che sia maggiore di ogni numero di v, e allora (n. 6) è $u > v$, oppure ogni numero di u non è maggiore di ogni numero di v, e allora u è contenuto in v.

In tal caso, se v non contiene altri numeri oltre quelli di u, sarà $u = v$, altrimenti sarà $u < v$.

8. Come conseguenza delle date definizioni, si dimostra facilmente la proprietà transitiva di ciascuna delle relazioni di maggiore, minore, uguale:

se è $u > v$ *e* $v > w$, *sarà* $u > w$;
se è $u < v$ *e* $v < w$, *sarà* $u < w$;
se è $u = v$ *e* $v = w$, *sarà* $u = w$.

9. *Se un segmento* u *è maggiore di un segmento razionale* ηr, *l'estremo* r *di questo è un numero di* u.

Reciprocamente: *se* u *non è nullo ed* r *è in* u, *sarà* $u > \eta r$.

Infatti, se è $u > \eta r$ ed s è un numero di u, che non si trova in ηr, sarà $r \leqq s$, e però r è in u.

Inversamente, se r è un numero non nullo di u, ogni numero di ηr, essendo minore di r, si trova in u, e poichè u contiene r ed r non è in ηr, è $u > \eta r$. Se invece r è zero, non essendo nullo u, evidentemente è $u > \eta r$.

10. *Se un segmento razionale* ηr *è maggiore o uguale a un segmento* v *non nullo, il suo estremo* r *non è in* v.

Inversamente: *se* r *non è in* v, *sarà* $\eta r \geqq v$.

Infatti, se è $\eta r \geqq v$, e v non è nullo, r non potrà essere in v, perchè altrimenti sarebbe $v > \eta r$ (n. 9), contro ipotesi. Reciprocamente, se r non è in v, non può darsi che sia $v > \eta r$ (n. 9) e quindi $v \leqq \eta r$.

11. Dalle proposizioni precedenti si deduce subito che *quella relazione che esiste tra due segmenti razionali, esiste anche fra i loro estremi, e viceversa, cioè, secondo che* $\eta r \gtreqless \eta s$, *si ha rispettivamente* $r \gtreqless s$, *e viceversa.*

12. Si deduce ancora che *se è* $u > v$, *esiste un segmento razionale* ηr, *che sia compreso tra* u *e* v, *tale cioè che sia*

$$u > \eta r > v.$$

Infatti, essendo $u > v$, esiste un numero s in u, che non è in v. Sarà allora (n. 9-10)

$$u > \eta s \geqq v.$$

Ma poichè esiste in u un numero r maggiore di s (n. 1, condiz. 4ª), sarà, per la proposizione precedente $\eta r > \eta s$, e quindi $u > \eta r > v$.

13. Pertanto possiamo stabilire che:

1° il segmento razionale nullo è minore di ogni altro segmento razionale;

2° un segmento razionale ηr non nullo è maggiore di tutti i segmenti razionali i cui estremi sono numeri di ηr, e minore di tutti i segmenti razionali i cui estremi non sono numeri di ηr, ma son diversi da r;

3° un segmento irrazionale è maggiore di tutti i segmenti razionali i cui estremi sono contenuti in esso, ed è minore di tutti i segmenti razionali i cui estremi non sono contenuti in esso.

Se allora indichiamo con U la classe dei segmenti razionali i cui estremi sono i numeri del segmento *u* e con U' la classe dei segmenti razionali i cui estremi non sono in *u*, possiamo dire che, *dato un segmento qualunque* u, *restano definite due classi* U, U' *di segmenti razionali, le quali godono delle tre seguenti proprietà:*

1° *ogni segmento razionale è in una e soltanto in una delle due classi* U, U';

2° *ogni segmento di* U *è minore di ogni segmento di* U';

3° *se la classe* U *non è costituita dal solo segmento nullo, dato un segmento qualunque* ηr *in* U *esiste sempre in* U *un segmento maggiore di* ηr; *se invece la classe* U *è costituita dal solo segmento nullo, dato un segmento* ηs *qualunque di* U' *esiste sempre in* U' *un segmento minore di* ηs.

Il segmento u, *se è razionale e nullo, è il massimo segmento di* U, *se invece è razionale e non nullo, è il minimo segmento di* U'; *se infine* u *è irrazionale, esso è maggiore di ogni segmento di* U *e minore di ogni segmento di* U'.

Reciprocamente, *se la classe di tutti i segmenti razionali viene divisa in due classi* U, U', *che godono delle tre precedenti proprietà, esiste uno e un solo segmento* u *che non è minore di nessun segmento di* U *nè maggiore di nessun segmento di* U'. *Il segmento* u *è razionale e nullo, se la classe* U *è costituita dal solo segmento nullo, è razionale e non nullo, se la classe* U *non è costituita dal solo segmento nullo e la classe* U' *ammette un segmento minimo* ηr *ed in tal caso è* u = ηr; *infine il segmento* u *è irrazionale, se la classe* U *non è costituita dal solo segmento nullo e la classe* U' *non ammette un segmento minimo.*

Tale infatti è il segmento *u* formato dagli estremi dei segmenti di U. Non può esistere un segmento *v* diverso da *u*, che abbia, come *u*, la proprietà di non essere minore di nessun segmento di U nè maggiore di nessun segmento di U', perchè altrimenti, supposto $u > v$, esisterebbe (n. 12) un segmento razionale *ηr* compreso fra *u* e *v*, il quale, come minore di *u*, apparterrebbe ad U, e, come maggiore di *v*, apparterrebbe ad U', il che è assurdo.

§ 3. — Operazioni coi segmenti.

14. Addizione. — Chiamasi *somma* di due segmenti *u*, *v*, e s'indica con $u + v$, la classe dei numeri che si ottengono sommando un numero qualunque di *u* con un numero qualunque di *v*.

La somma di due segmenti è un segmento.

Siano infatti *u*, *v* i due segmenti. Evidentemente $u + v$ contiene lo zero e non tutti i numeri razionali. Se poi *r*, *r'* sono rispettivamente numeri di u, v, esiste in $u+v$ qualunque numero razionale s minore di $r+r'$. Infatti posto $\varepsilon = \frac{s}{r+r'}$ si ha $s = \varepsilon r + \varepsilon r'$ ed essendo $\varepsilon < 1$, sarà εr in u e $\varepsilon r'$ in v e però $\varepsilon r + \varepsilon r'$ in $u+v$. Infine è facile osservare che, dato un numero $r+r'$ qualunque di $u+v$, si trova sempre in $u+v$ un numero maggiore di $r+r'$. Adunque $u+v$ è un segmento.

La somma di due segmenti razionali è un segmento razionale che ha per estremo la somma degli estremi dei due segmenti dati.

È facile infatti dimostrare che

$$\eta_r + \eta_s = \eta(r+s).$$

Si può estendere l'operazione di addizione al caso di più di due segmenti e facilmente verificare che *la somma dei segmenti gode della proprietà commutativa e associativa.*

È anche manifesto che si ha

$$u + o = o + u = u.$$

Se u, v, w *sono segmenti ed è* u $>$ v, *sarà* u $+$ w $>$ v $+$ w.

Siano infatti r, s due numeri di u che non sono in v, allora essi saranno maggiori di ogni numero di v. Supposto $r > s$, potremo determinare (n. 4) un numero r' di w e un numero r'' fuori di w, tali che sia $r'' - r' = r - s$. Sarà allora $r + r' = r'' + s$, e poichè $r + r'$ è un numero di $u + w$ e s, r'' sono rispettivamente maggiori di ogni numero di v, w, sarà $r + r'$ maggiore di ogni numero di $v + w$ e però $u + w > v + w$.

Se ne deduce che se $u + w = v + w$, allora è $u = v$.

15. Sottrazione. — Dati due segmenti u, v, se esiste un segmento w che addizionato a v dia una somma uguale ad u, si dirà w *differenza* tra u e v.

La differenza tra due segmenti, quando esiste, è unica.

Infatti, se $u = v + w$ e $u = v + w_1$, si ha $v + w = v + w_1$, e però (n. 14) $w = w_1$.

Se w è la differenza tra u e v, si scriverà $w = u - v$.

Se u $>$ v, *la differenza tra* u *e* v *esiste ed è il segmento* w *formato da tutte le differenze* r $-$ r', *essendo* r *un numero qualunque di* u *ed* r' *un numero qualunque di* u *fuori di* v *ed* r $\geqq$ r'.

Innanzi tutto bisogna dimostrare che la classe w così costituita è un segmento. Essa contiene manifestamente lo zero e non tutti i numeri razionali. Se poi $r - r'$ è un suo elemento e d un numero qualunque minore di $r - r'$, posto $h = r - r' - d$, si ha $d = (r - h) - r'$ e poichè $r - h$ è in u, anche d è un elemento di w. Infine, se $r - r'$ è un numero di w, esiste in w un numero maggiore di $r - r'$: basta determinare un numero r'' di u maggiore di r, perchè la differenza $r'' - r' > r - r'$ sia in w. Adunque w è un segmento.

Dimostriamo ora che è $u = v + w$.

In primo luogo dimostriamo che ogni elemento s di u è in $v + w$.

Sia, infatti, r un elemento di u maggiore di s, e determiniamo due numeri r'' in v ed r' fuori di v in modo che sia (n. 3)

$$r' - r'' = r - s.$$

Se r' è in u, sarà $r - r'$ in w e però $s = r - r' + r''$ sarà in $v + w$.

Se invece r' non è in u, sarà $d' > r$ e indicando con r'_1 un numero compreso tra r ed s, si avrà $r' > r > r'_1 > s$, $r'_1 - r'' < r' - r''$ e però

$$r'_1 - r'' < r - s,$$

donde $s < r'' + r - s'$. E poichè r'' è in v ed $r - r'_1$ in w, sarà s in $v + w$.

Reciprocamente: ogni elemento di $v + w$, essendo della forma $r'' + r - r'$, dove r'' è un numero di v e $r - r'$ un numero di w, è anche un elemento di u, perchè $r'' + r - r' = r - (r' - r'') < r$.

Pertanto è $d = v + w$.

La differenza fra due segmenti uguali è il segmento zero.

Perchè $u + o = u$.

Se u $<$ v, *non esiste un segmento differenza tra* u *e* v.

Infatti, essendo $w \geqq o$, è (n. 14) $v + w \geqslant v$ e però, se fosse $v + w = u$, sarebbe $u \geqslant v$, contro ipotesi.

La differenza tra due segmenti razionali, il primo non minore del secondo, è un segmento razionale che ha per estremo la differenza degli estremi dei due segmenti dati.

Cioè, se $\eta r \geqq \eta s$, si ha

$$\eta r - \eta s = \eta\,(r - s).$$

Infatti è (n. 14)

$$\eta\,(r - s) + \eta s = \eta r.$$

16. Moltiplicazione. — Chiamasi *prodotto* di due segmenti u, v, e si indica con uv, la classe dei numeri che si ottengono moltiplicando un numero qualunque di u per un numero qualunque di v.

Il prodotto di due segmenti è un segmento.

Infatti, è facile dimostrare che

$$\eta\,(uv) = uv.$$

Il prodotto di due segmenti razionali è un segmento razionale che ha per estremo il prodotto degli estremi dei due segmenti dati.

È facile infatti dimostrare che

$$\eta r \cdot \eta s = \eta\,(rs).$$

Si può estendere la nozione di prodotto al caso di più di due segmenti e facilmente dimostrare che *il prodotto dei segmenti gode della proprietà commutativa, associativa e distributiva.*

Si dimostra pure facilmente la proposizione:

Se u, v *sono due segmenti e* w *è un segmento non nullo, allora se* $u > v$, *si ha* $uw > vw$.

Donde segue:

Se w *non è zero e* $uw = vw$, *si ha* $u = v$.

Manifestamente poi si ha

$$u \, . \, o = o \, . \, u = o, \qquad u \, . \, \eta = \eta \, . \, u = u.$$

In seguito a quest'ultima proprietà il segmento η prende nome di *segmento unità*.

17. Potenza con esponente intero assoluto. — Se n è un numero intero maggiore di 1, ed u è un segmento, il prodotto di n segmenti uguali ad u si indica con u^n e chiamasi la *potenza* n^{ma} *di* u.

Si pone poi

$$u^0 = \eta, \qquad u^1 = u,$$

escludendo che u sia nullo nella prima eguaglianza, e facilmente si dimostra che le potenze dei segmenti godono delle stesse proprietà che le potenze dei numeri razionali, cioè

$$u^n \, . \, u^m = u^{n+m}, \qquad (u^n)^m = u^{nm}, \qquad (uv)^m = u^m v^m,$$

essendo n, m numeri interi arbitrari.

Inoltre è facile dimostrare, come conseguenza di una proposizione del n. precedente, che *secondo che si ha* $u \gtreqless v$, *risulta* $u^m \gtreqless v^m$, *e viceversa*.

18. Divisione. — Dati due segmenti u, v, se esiste un segmento w che moltiplicato per v dia un prodotto uguale a u, si dirà w *quoto di* u *per* v.

Esiste uno ed un solo segmento che sia quoto di un segmento u *per un segmento non nullo* v: *esso è la classe dei quoti* $\frac{r}{r'}$, *essendo* r *un numero qualunque di* u *ed* r' *un numero qualunque di* u *che non è in* v.

Indichiamo con w la classe dei quoti $\frac{r}{r'}$ sopra definiti e dimostriamo innanzi tutto che w è un segmento. Le prime due condizioni (n. 1) sono verificate. Se poi h è un numero minore di un dato numero (non nullo) $\frac{r}{r'}$ di w, posto $\varepsilon = h : \frac{r}{r'}$, si ha $\varepsilon < 1$ e $h = \frac{\varepsilon r}{r'}$, e poichè εr è in u, h è in w. Infine, dato un numero $\frac{r}{r'}$ qualunque di w, esiste in w un numero maggiore di $\frac{r}{r'}$: basta determinare in u un numero $r'' > r$, perchè sia $\frac{r''}{r'} > \frac{r}{r'}$ un numero di w. Adunque w è un segmento.

Dimostriamo ora che si ha

$$u = vw.$$

Sia s un numero di u e dimostriamo che s è anche numero di vw. Essendo r un numero qualunque di u maggiore di s, potremo determinare un numero r'' di v ed r' fuori di v tali che sia (n. 4)

$$\frac{r'}{r''} = \frac{r}{s}.$$

Se r' è in u, si deduce che $s = \frac{r}{r'} \cdot r''$ è un numero di vw, se invece r' è fuori di u, sarà $r' > r$ e potremo determinare un numero r'_1 compreso tra r ed s ed avremo

$$r' > r > r'_1 > s,$$

$$\frac{r'_1}{r''} < \frac{r'}{r''} \quad \text{e quindi} \quad \frac{r'_1}{r''} < \frac{r}{s}$$

e però $s < \frac{r}{r'_1} \cdot r''$. Poichè ora r'_1 è in u, sarà $\frac{r}{r'} r''$, e quindi s, in vw.

Reciprocamente ogni numero di vw è un numero di u, perchè un numero di vw è della forma $r'' \frac{r}{r''}$, dove r'' è un numero di v ed $\frac{r}{r'}$ un numero di w, e si ha $\frac{r''}{r'} < 1$ e però $r'' \frac{r}{r''} < r$.

Infine, non può esistere nessun altro segmento che sia quoto di u per v, perchè, se $u = vw$ e $u = vw_1$, segue vw_1 e, poichè v non è nullo, (n. 16) $w = w_1$.

Il quoto di u per v si indica con $\frac{u}{v}$. A questo simbolo non diamo alcun significato quando v è nullo.

Il quoto di un segmento non nullo per se stesso è il segmento unità, e il quoto di un segmento per il segmento unità è il segmento stesso.

Infatti è

$$u = \eta u.$$

Il quoto di due segmenti razionali (il secondo non nullo), è un segmento razionale che ha per estremo il quoto degli estremi dei due segmenti stessi.

Si ha infatti, se r ed s sono due numeri razionali, ed s non è zero, $\frac{\eta r}{\eta s} = \eta \frac{r}{s}$ perchè $\eta \frac{r}{s} \cdot \eta s = \eta r$.

Se u non è nullo, il quoto $\frac{\eta}{u}$, che moltiplicato per u dà il segmento unità, dicesi *inverso* o *reciproco* di u, ed è facile dimostrare che *se* $u \gtreqless \eta$, *si ha rispettivamente* $\frac{\eta}{u} \lesseqgtr \eta$, e più generalmente, *secondo che* $u \gtreqless v$, *si ha* $\frac{\eta}{u} \lesseqgtr \frac{\eta}{v}$ *e viceversa.*

19. Potenza con esponente intero relativo. — Se, essendo m un numero intero assoluto, si conviene di porre

$$u^{+m} = u^{m},$$

e, quando u non è nullo,

$$u^{-m} = \frac{1}{u^{m}},$$

si potranno estendere alle potenze dei segmenti con esponenti interi relativi le ordinarie regole del calcolo delle potenze.

20. Estrazione di radice. — *Se* m *è un numero intero assoluto e* u *un segmento, esiste uno e un solo segmento* v *tale che sia*

$$v^{m} = u. \tag{1}$$

La classe v dei numeri razionali la cui potenza m^{ima} è un numero di u, è un segmento. Infatti le prime tre condizioni sono subito verificate, se poi r è un numero qualunque di v, e però r^{m} è minore di un numero s di u, si può determinare un numero h intero assoluto non nullo, in modo che $r+h$ sia ancora in v: basta assumere h minore del più piccolo dei numeri

$$1, \quad \frac{s-r^{m}}{(r+1)^{m}-r^{m}},$$

perchè si abbia

$$\begin{aligned}(r+h)^{m} &= r^{m} + \binom{m}{1} r^{m-1} h + \binom{m}{2} r^{m-2} h^{2} + \ldots + \binom{m}{m-1} r h^{m-1} + h^{m} < \\ &< r^{m} + h\left[\binom{m}{1} r^{m-1} + \binom{m}{2} r^{m-2} + \ldots + \binom{m}{m-1} r + 1\right] = \\ &= r^{m} + h\left[(r+1)^{m} - r^{m}\right] < s.\end{aligned}$$

Resta a dimostrare che ha luogo la (1).

Un numero qualunque k di v^{m} è il prodotto di m numeri $r_1, r_2, \ldots, r_m$, la cui potenza m^{ima} è un numero di u, onde, se r è il più grande di questi numeri ed s un numero di u, per cui si ha $r^{m} < s$, risulta

$$k = r_1 r_2 \ldots r_m < r^{m} < s$$

e quindi k è un numero di u. Inversamente, dimostriamo che ogni numero s di u è un numero di v^{m}. Siano, infatti, $s_1, s_2, \ldots, s_m$ altri m numeri di u, maggiori di s e tra loro diversi, e supponiamo che sia

$$s < s_1 < s_2 < \ldots < s_m.$$

Determiniamo quindi m numeri $r_1, r_2, \ldots, r_m$ in v e corrispondentemente m numeri $r'_1, r'_2, \ldots, r'_m$ fuori di v, in modo che si abbia (n. 4)

$$\frac{r'_1}{r_1} = \frac{s_1}{s}, \quad \frac{r'_2}{r_2} = \frac{s_2}{s_1}, \ldots, \frac{r'_m}{r_m} = \frac{s_m}{s_{m-1}}.$$

Moltiplicando membro a membro e ponendo

$$q = \frac{r'_1 \, r'_2 \ldots r'_m}{s_m}, \qquad (2)$$

si ha

$$s = \frac{r_1}{q} r_2 r_3 \ldots r_m. \qquad (3)$$

Il numero q è maggiore di 1, perchè, essendo r' il più piccolo dei numeri $r'_1, r'_2, \ldots, r'_m$, che son fuori di v, r'^m è fuori di u e però dalla (2) si ha

$$q \geqq \frac{r'^m}{s_m} > 1.$$

Pertanto, s essendo, in virtù della (3), uguale al prodotto di m numeri di v, è un numero di v^m.

Il segmento v che soddisfa alla (1), è individuato, perchè se fosse $v_1{}^m = u$, si avrebbe $v^m = v_1{}^m$ e però (n. 17) $v = v_1$.

Il segmento v che soddisfa alla (1) si chiama *la radice* m^{ima} *di* u e si denota con $\sqrt[m]{u}$.

La radice m^{ima} *di un segmento razionale è un segmento razionale allora e soltanto quando il segmento radicando è la potenza* m^{ima} *di un segmento razionale, e in tal caso l'estremo del segmento radice è la radice* m^{ima} *dell'estremo del segmento radicando.*

Infatti, se $\eta_1 r = \sqrt[m]{\eta_1 s}$ si ha $(\eta_1 r)^m = \eta_1 s$, e però $r^m = s$, $r = \sqrt[m]{s}$.

21. Potenza con esponente razionale assoluto o relativo. — Possiamo ora definire le potenze di esponente razionale assoluto o relativo.

Se u è un segmento ed m, n due numeri interi assoluti, ed n inoltre diverso da zero, noi poniamo

$$u^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{u^m}, \qquad u^{+\frac{m}{n}} = u^{\frac{m}{n}},$$

e se u non è nullo,

$$u^{-\frac{m}{n}} = \left(\frac{\eta_1}{u}\right)^{\frac{m}{n}}.$$

Facilmente si dimostra che sussistono per le potenze dei segmenti con esponente razionale le proprietà formali delle potenze di esponente intero.

Si dimostrano pure facilmente le proposizioni:

α) *Se* r *è un numero razionale assoluto o positivo e diverso da zero, ed* u *è un segmento, secondo che si ha* $u \gtreqless \eta_1$, *si ha* $u^r \gtreqless \eta_1$, *e viceversa.*

β) *Se* r *è un numero razionale negativo non nullo, ed* u *è un segmento non nullo, secondo che si ha* $u \gtreqless \eta_1$, *si ha* $u^r \lesseqgtr \eta_1$, *e viceversa.*

γ) *Se è* $u > \eta$, *ed* r, s *sono numeri razionali qualunque, secondo che si ha* $r \gtreqless s$, *si ha* $u^r \gtreqless u^s$, *e viceversa.*

δ) *Se è* $o < u < \eta$, *ed* r, s *sono numeri razionali qualunque, secondo che si ha* $r \gtreqless s$, *si ha* $u^r \lesseqgtr u^s$, *e viceversa.*

ε) *Se* $u > \eta$ *e* v *è un segmento arbitrario, si può determinare un numero intero assoluto o positivo* p *tale che, per ogni numero razionale* $n > p$, *sia* $u^n > v$.

ζ) *Se* $u < \eta$ *e* v *è un segmento arbitrario non nullo si può determinare un numero intero assoluto o positivo* q *tale che sia, per ogni numero razionale* $n > q$, $u^n < v$.

22. Potenza avente per esponente un segmento. — Sia dapprima un segmento $u > \eta$ e v un segmento arbitrario. Consideriamo la classe w dei numeri razionali, ciascuno dei quali è contenuto in uno almeno dei segmenti u^r, essendo r un numero qualunque di v.

È facile dimostrare che w è un segmento. Esso infatti contiene lo zero e non tutti i numeri razionali; se poi k è un numero di w, diverso da zero, esiste un numero r di v tale che u^r contiene k, tutti i numeri minori di k e quanti si vogliano numeri maggiori di k, e però esistono in w tutti i numeri minori di k e quanti si vogliano numeri maggiori di k.

Noi indicheremo il segmento w col simbolo u^v.

Se poi $o < u < \eta$ e v è un segmento arbitrario, essendo $\frac{\eta}{u} > \eta$, ha significato e non è nullo $\left(\frac{\eta}{u}\right)^v$, e noi definiamo u^v ponendo

$$u^v = \frac{\eta}{\left(\frac{\eta}{u}\right)^v}. \tag{1}$$

Se infine $u = \eta$, noi porremo per definizione

$$u^v = \eta. \tag{2}$$

È importante notare che *se l'esponente* v *è un segmento razionale la potenza di* u *di esponente* v *è uguale alla potenza di* u *di esponente uguale all'estremo di* v.

Cioè

$$u^{\eta r} = u^r. \tag{3}$$

Sia dapprima $u > \eta$. Se k è un numero di $u^{\eta r}$, sarà k un numero di $u^{\varepsilon r}$, essendo ε un numero razionale assoluto minore di 1, ma poichè d'altra parte (21, γ) è $u^{\varepsilon r} < u^r$, k è anche un numero di u^r. Inversamente, se k è un numero di u^r, si ha $\eta k < u^r$, e però $\frac{u^r}{\eta k} > \eta$: si può allora determinare un numero intero p tale che sia, per ogni $n > p$ e, se occorre, $> \frac{1}{r}$, $\left(\frac{u^r}{\eta k}\right)^n > u$, donde $\eta k < u^{r - \frac{1}{n}}$, e quindi k è in $u^{\eta r}$.

Se $u < \eta$, si ha, per la (1),

$$u^{\eta r} = \frac{\eta}{\left(\frac{\eta}{u}\right)^{\eta r}} = \frac{\eta}{\left(\frac{\eta}{u}\right)^{r}} = u^r,$$

e, infine, se $u = \eta$, per la (2), risulta subito verificata la (3).

Si estendono facilmente alle potenze aventi per esponente un segmento le formole del calcolo delle potenze, come pure si dimostrano facilmente le proposizioni:

α) *Se* u *è un segmento qualunque e* v *un segmento non nullo, secondo che* $\mathrm{u} \gtreqless \eta$, *si ha* $\mathrm{u}^{\mathrm{v}} \gtreqless \eta$, *e viceversa.*

β) *Se* u, v, w *sono segmenti arbitrari ed è* $\mathrm{v} > \mathrm{w}$, *secondo che* $\mathrm{u} \gtreqless \eta$, *si ha* $\mathrm{u}^{\mathrm{v}} \gtreqless \mathrm{u}^{\mathrm{w}}$, *e viceversa.*

23. Estrazione di logaritmo. — *Se* u, w *sono due segmenti arbitrari non nulli, entrambi maggiori o minori di* η, *esiste uno e un solo segmento* v *tale che sia*

$$u^{\mathrm{v}} = w. \tag{1}$$

a) Supponiamo dapprima che sia $u > \eta$ e $w > \eta$. Indichiamo con v la classe dei numeri razionali r tali che sia $u^r < w$.

È facile verificare che sono soddisfatte le prime tre condizioni perchè v sia un segmento. Per la 4ª si osservi che se r è un numero di v, e però $u^r < w$, si può determinare (n. 21, ε) un numero razionale assoluto n, tale che sia $\left(\frac{w}{u^r}\right)^n > u$, donde $u^{r - \frac{1}{n}} < w$ e quindi $r + \frac{1}{n}$, che è maggiore di r, è un numero di v. Pertanto v è un segmento.

Dimostriamo ora che v soddisfa alla (1).

Se k è un numero di u^v, si ha $\eta k < u^r$, essendo r un certo numero di v, e poichè $u^r < w$, si ha $\eta k < w$, cioè k è anche un numero di w.

Inversamente, se h è un numero di w, si ha $\frac{w}{\eta h} > \eta$, e quindi si può determinare (n. 21, ε) un numero razionale assoluto n, tale che sia $\left(\frac{w}{\eta h}\right)^n > u$ e però $u^{\frac{1}{n}} < \frac{w}{\eta h}$. D'altra parte possiamo determinare un numero r di u ed r' fuori di u, in modo che sia $r' - r = \frac{1}{n}$ (n. 3), e però si ottiene $u^{r'-r} < \frac{w}{\eta h}$, donde $\eta h < \frac{w}{u^{r'}} \cdot u^r$. Or essendo r' fuori di v, $u^{v'}$ non è contenuto in w e quindi si ha $\frac{w}{u^{v'}} < \eta$, e però $\eta h < u^v$, cioè h è un numero di u^v.

Pertanto la (1) è dimostrata.

b) Se poi $o < u < \eta$ e $o < w < \eta$, sarà $\frac{\eta}{u} > \eta$, $\frac{\eta}{u} > \eta$, e dalla proposizione precedente si trae che esiste un segmento v tale che sia

$$\left(\frac{\eta}{u}\right)^v = \frac{\eta}{w},$$

donde $u^v = w$.

Il segmento v nell'un caso e nell'altro è unico, perchè se fosse anche $u^{v'} = w_1$ sarebbe $u^v = u^{v'}$, e però (n. 23, 5) $v = v'$.

Si può infine osservare, che, in seguito alla proposizione α) del n. 22, se $u > \eta$ e $w \gtreqq \eta$, oppure se $u < \eta$ o $w > \eta$, non esiste un segmento v che soddisfi alla (1).

Il segmento v che soddisfa all'equazione (1), si chiama il *logaritmo* di w a base u, e si suole rappresentare col simbolo $\log_u w$.

Dalla definizione discendono subito le proprietà espresse dalle seguenti uguaglianze:

$$\log_u (ww_1) = \log_u w + \log_u w_1, \qquad \log_u \frac{w}{w_1} = \log_u w - \log_u w_1,$$

$$\log_u w^{w_1} = w_1 \log_u w,$$

essendo u, w, w_1 segmenti non nulli tutti maggiori o minori di η.

§ 4. — I numeri reali assoluti e relativi.

24. Dalla teoria che abbiamo svolta, risulta manifestamente che *i segmenti costituiscono una classe* Q *di grandezze numeriche superiore alla classe* R *dei numeri razionali assoluti*. Infatti, dalle proposizioni ricavate nei numeri precedenti intorno alle operazioni sui segmenti razionali, si deduce che *la classe* $\overline{\mathrm{R}}$ *dei segmenti razionali è isomorfa alla classe* R *dei numeri razionali assoluti*.

Quest'isomorfismo si traduce simbolicamente in una identità, se si conviene di rappresentare con 1, anzichè con η, il segmento unità, cioè se *si conviene d'indicare i segmenti razionali per mezzo dei loro estremi*. E se d'ora innanzi i numeri razionali altro non rappresentano che i segmenti razionali, potremo conservare la denominazione di numeri razionali ai segmenti razionali, perchè essa non può più dar luogo ad alcuna ambiguità. È opportuno allora, per uniformità di linguaggio, chiamare *numero irrazionale* un segmento irrazionale e *numero reale* un segmento qualunque.

25. Abbiamo finora considerato i numeri reali come numeri *assoluti* (*moduli*), ma nella stessa maniera colla quale s'introducono i numeri razionali relativi e colle stesse regole con le quali si definiscono le operazioni su di essi, si possono introdurre *i numeri reali relativi* (*positivi* e *negativi*) e definire le operazioni su tali numeri.

Si ottiene in tal modo *una classe* Q' *di grandezze numeriche, superiore alla classe* Q *dei numeri reali assoluti, essendo isomorfa alla classe* Q *la classe* $\overline{\mathrm{Q}}$ *dei numeri reali positivi.*

In Q' le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e la divisione per un numero reale non nullo sono sempre possibili e uniformi, e tale è pure l'elevazione a potenza, escluso il caso della base nulla quando l'esponente è nullo o negativo. L'estrazione di radice è impossibile, se il radicando è negativo e l'indice è pari; è possibile e uniforme, se l'indice è dispari, qualunque sia il radicando; è possibile e biuniforme, se l'indice è pari e il radicando positivo.

L'estrazione di logaritmo è sempre possibile ed uniforme quando la base e il numero da cui si deve estrarre il logaritmo, sono entrambi maggiori o minori di 1, positivi e non nulli, nei quali casi il logaritmo è positivo; ma è anche possibile e uniforme, quando la base e il numero sono entrambi positivi e non nulli, la base minore di 1 e il numero maggiore di 1, o viceversa: in tali casi il logaritmo è negativo.

§ 5. — Varî modi d'individuare un numero reale.

26. Vogliamo ora mostrare come dalla teoria svolta si possano dedurre varî criterî per individuare un numero reale.

Criterio del Dedekind. — Dato un numero reale relativo u, si ripartiscano tutti i numeri razionali in due classi U, U', ponendo in U tutti i numeri razionali relativi minori di u e in U' tutti i numeri razionali relativi maggiori di u. Se u è razionale, esso si ponga in U o in U'.

Le due classi U, U' godono evidentemente delle tre proprietà seguenti:

1° *ogni numero razionale relativo è in una e soltanto in una delle due classi* U, U';

2° *ogni numero di* U *è minore di ogni numero di* U';

3° *non esiste contemporaneamente un massimo in* U *e un minimo in* U'.

Il numero reale u *è l'unico numero reale che non sia minore di alcun numero di* U *nè maggiore di alcun numero di* U'.

Infatti, se un altro numero v godesse della stessa proprietà, supposto, per es., $u < v$, si potrebbe determinare un numero razionale r in modo che fosse $u < r < v$ (cfr. n. 12), e allora r, come maggiore di u non apparterrebbe ad U, e, come minore di v, non apparterrebbe ad U', contrariamente alla 1ª condizione, che nelle classi U, U' siano distribuiti tutti i numeri razionali.

Inversamente, *se tutti i numeri razionali relativi si ripartiscono in due classi* U, U′, *che godano delle tre proprietà sopra menzionate, esiste uno e un sol numero reale che non sia minore di alcun numero di* U, *nè maggiore di alcun numero di* U′.

Infatti, se U ammette un massimo, oppure se U′ ammette un minimo, questo minimo o quel massimo soddisfano alla condizione di non essere nè minori di alcun numero di U nè maggiori di alcun numero di U′.

Se invece non esiste nè un massimo in U nè un minimo in U′, distingueremo due casi, secondo che U contenga o no un numero positivo.

Nel 1° caso la classe U contiene tutti i numeri negativi e infiniti numeri positivi e la classe U′ non contiene che numeri positivi. Se allora indichiamo con U_1 la classe dei valori assoluti dei numeri positivi di U e con U'_1 la classe dei valori assoluti dei numeri di U′, facilmente osserviamo che queste due classi U_1, U'_1 godono delle tre proprietà di cui al n. 13, e però esiste un numero reale (irrazionale) assoluto u che è maggiore di ogni numero di U_1 e minore di ogni numero di U'_1. Allora, evidentemente, il numero reale (irrazionale) positivo $+u$ è maggiore di ogni numero di U e minore di ogni numero di U′.

Se invece U non contiene che numeri negativi e però in U′ si trovano tutti i numeri positivi e infiniti numeri negativi, indicando con U_1 la classe dei valori assoluti dei numeri negativi di U′ e con U'_1 la classe dei valori assoluti dei numeri di U, facilmente osserviamo che U_1 e U'_1 godono delle tre proprietà indicate al n. 13, e però esiste un numero reale (irrazionale) assoluto u, che è maggiore di ogni numero di U_1 e minore di ogni numero di U'_1. Allora, evidentemente, il numero reale (irrazionale) negativo $-u$ è maggiore di ogni numero di U e minore di ogni numero di U′.

In ogni caso il numero reale $+u$ o $-u$ è individuato dalle due classi, come precedentemente abbiamo dimostrato.

Il criterio precedente, che il Dedekind assume per definire per astrazione il numero reale, riesce utile in molte applicazioni.

27. Criterio del Peano. — Sia A una classe di numeri reali relativi. Noi diremo che la classe A è *limitata superiormente*, se esiste un numero reale che sia maggiore di ogni numero di A, e diremo che la classe A è *limitata inferiormente*, se esiste un numero reale che è minore di ogni numero di A.

Diremo poi che un numero reale u è *limite superiore* di A, se ogni numero di A non è maggiore di u, e se, dato un numero $u_1 < u$, esiste qualche numero di A che sia maggiore di u_1.

In modo analogo, diremo che un numero reale v è *limite inferiore* di A, se ogni numero di A non è minore di u, e se, dato un numero $v_1 > v$, esiste qualche numero di A che sia minore di v_1.

Ciò posto, si può dimostrare che *una classe* A *di numeri reali non può ammettere più di un limite superiore, nè più di un limite inferiore.*

Infatti, se u e u_1 fossero entrambi limiti superiori di A, supposto $u_1 < u$, esisterebbe un numero razionale r compreso tra u e u_1, tale cioè che fosse $u_1 < r < u$. Essendo intanto r minore di u, per definizione di limite superiore, si potrebbe determinare in A un numero $a > r$, e si avrebbe $u_1 < a$, contrariamente all'ipotesi che u_1 sia limite superiore di A.

In modo analogo si dimostra che A non può ammettere più di un limite inferiore. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una classe* A *di numeri reali abbia un limite superiore, è che sia limitata superiormente.*

Se la classe A ammette un limite superiore u, qualunque numero maggiore di u è maggiore di ogni numero di A, e quindi A è limitata superiormente.

Inversamente, se A è limitata superiormente, essa ammette un limite superiore. Si ripartiscano infatti i numeri razionali relativi in due classi U, U', ponendo in U tutti i numeri razionali relativi che sono minori di qualche numero di A, e in U' tutti i numeri razionali relativi rimanenti. Le due classi U, U' godono delle tre proprietà enunciate nel numero precedente, e però esiste uno e un sol numero reale u, che non è minore di alcun numero di U, nè maggiore di alcun numero di U', e noi dimostriamo che u è il limite superiore di A. Infatti, non può esistere un numero a di A maggiore di u, perchè altrimenti un numero razionale r, compreso tra a e u, apparterrebbe alla classe U e sarebbe maggiore di u, il che è assurdo. Dato poi ad arbitrio un numero reale $u_1 < u$, esiste un numero razionale r compreso tra u_1 e u, il quale, per conseguenza, appartiene alla classe U, e però è minore di qualche numero a di A: allora si ha $u_1 < a$. È dunque u il limite superiore di A.

In modo analogo si dimostra che *condizione necessaria e sufficiente, perchè una classe di numeri reali abbia un limite inferiore, è che sia limitata inferiormente.*

Ciò posto, poichè, evidentemente, un numero reale u è il limite superiore della classe U dei numeri razionali non maggiori di u ed il limite inferiore della classe U' dei numeri razionali non minori di u, possiamo dire che *un numero reale è il limite superiore* (*inferiore*) *di una classe di numeri razionali limitata superiormente* (*inferiormente*), e stabilire su questa proposizione un altro criterio per individuare un numero reale. Su questo criterio il Peano fonda una definizione, per astrazione, del numero reale.

28. Criterio delle classi contigue. — Un criterio che si può considerare come una trasformazione dei due criteri precedenti è quello delle *classi contigue*. Due classi di numeri razionali A, A', si dicono *contigue* se godono delle seguenti proprietà:

1° ogni numero di A è minore di ogni numero di A';

2° dato un numero razionale positivo non nullo ε, esistono due numeri a, a' rispettivamente in A, A' tali che sia $a' - a < \varepsilon$.

Dato un numero reale u, *si possono sempre determinare due classi contigue* A, A', *tali che* u *non sia minore di alcun numero di* A, *nè maggiore di alcun numero di* A'.

Infatti le due classi U, U', i cui numeri sono tutti i numeri razionali rispettivamente non maggiori e non minori di u, sono contigue.

Inversamente, *date due classi contigue* A, A', *esiste uno e un sol numero reale che non sia minore di alcun numero di* A, *nè maggiore di alcun numero di* A'.

Infatti, essendo A limitata superiormente, ammette un limite superiore u e così A', essendo limitata inferiormente, ammette un limite inferiore v.

Ora dimostriamo che $u = v$. Infatti non può essere $u > v$, perchè, se così fosse, in virtù della definizione di limite superiore, esisterebbe in A un numero $a > v$, e quindi per la definizione di limite inferiore, esisterebbe in A' un numero $a' < a$, ciò che è assurdo. Ma non può essere nemmeno $u < v$, perchè altrimenti, assunto un numero ε razionale positivo e minore di $v - u$, qualunque siano i numeri a, a' rispettivamente in A, A', si avrebbe $a \leqq u < v \leqq a'$, donde $a' - a \geqq v - u$ e però $a' - a > \varepsilon$, il che è assurdo. È dunque $u = v$.

Evidentemente, u non è minore di alcun numero di A nè maggiore di alcun numero di A', come pure è facile osservare che qualunque numero che ha questa proprietà, non può essere diverso da u.

29. Criterio di Cantor. — Questo criterio è fondato sul concetto di *limite*. Data una successione di numeri reali relativi

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

se esiste un numero reale u tale che, dato un numero razionale assoluto non nullo ε ad arbitrio sia

$$\mathrm{mod}\,(a_n - u) < \varepsilon,$$

per tutti i valori di n maggiori di un certo numero ν, si dice che la successione a_n *tende al limite* u, e si scrive $u = \lim a_n$.

È facile osservare che *una successione non può tendere a due limiti diversi* u, v. Infatti, assunto un numero assoluto $\varepsilon < \mathrm{mod}\,(u - v)$, si ha sempre qualunque sia n,

$$\mathrm{mod}\,(a_n - u) + \mathrm{mod}\,(a_n - v) \geqslant \mathrm{mod}\,(u - v)$$

e però

$$\mathrm{mod}\,(a_n - u) + \mathrm{mod}\,(a_n - v) > \varepsilon,$$

mentre, se fosse la successione a_n convergente ad u e v, per n maggiore di un certo numero ν, sarebbe $\mathrm{mod}\,(a_n - u) < \frac{\varepsilon}{2}$ e $\mathrm{mod}\,(a_n - v) < \frac{\varepsilon}{2}$, e però

$$\mathrm{mod}\,(a_n - u) + \mathrm{mod}\,(a_n - v) < \varepsilon.$$

Dato un numero reale relativo qualunque u, *si può sempre determinare una successione di numeri razionali, che abbia per limite* u.

Infatti, nella classe U dei numeri razionali relativi minori di u assumiamo un numero r_0 ad arbitrio, quindi un numero r_1 compreso tra u e $\frac{u+r_0}{2}$, poi un numero r_2 compreso tra u e $\frac{u+r_1}{2}$, e così via. La successione r_n ha per limite u. Infatti, essendo $\frac{u_n+r_{n-1}}{2}<r_n<u$, si ha $u-r_n<\frac{u-r_{n-1}}{2}$ e quindi $u-r_n<\frac{u-r_0}{2^n}$. Dato allora un numero razionale assoluto ε non nullo ad arbitrio si può determinare un numero intero ν tale che per $n>\nu$ sia $\frac{u-r_0}{2^n}<\varepsilon$, e però $u-r_n<\varepsilon$.

Ora vi è un criterio per potere affermare che una successione tende ad un limite senza che questo sia noto, e tale criterio è dato dal seguente *teorema di* CAUCHY: (¹)

Condizione necessaria e sufficiente, perchè una successione a_n *tenda ad un limite, è che ad un numero assoluto non nullo* ε *preso ad arbitrio corrisponda un numero assoluto* ν *tale che per ogni coppia di numeri interi assoluti* n', n'' *maggiori di* ν *sia*

$$\operatorname{mod}(a_{n'}-a_{n''})<\varepsilon.$$

Il CANTOR si giova di questa proposizione per definire il numero reale per astrazione.

30. Criterio delle successioni convergenti. — Un criterio più semplice del precedente e nelle applicazioni molto più comodo è quello delle successioni convergenti, caso particolare delle classi contigue.

Due successioni di numeri razionali a_n, b_n si dicono *convergenti*, se la prima è crescente, la seconda decrescente, per ogni valore di n è $a_n<b_n$, e se, preso ad arbitrio un numero razionale assoluto non nullo ε, si può determinare un numero intero assoluto ν tale che, per ogni $n>\nu$, sia $b_n-a_n<\varepsilon$.

Date due successioni convergenti esiste uno e un sol numero reale che non sia minore di alcun numero della prima successione nè maggiore di alcun numero della seconda.

Infatti la classe A, formata coi termini della prima successione, e la classe A′, formata con quelli della seconda, sono contigue.

(¹) Si vegga, per es., CESÀRO, *Analisi algebrica*, p. 97.

MICHELE CIPOLLA.

SOPRA ALCUNE QUESTIONI DI ANALISI INDETERMINATA

In questa nota ci proponiamo di determinare la più generale soluzione in numeri interi del sistema indeterminato:

$$\sum_{s=1}^{n} x_s = \sum_{s=1}^{n} y_s, \qquad \sum_{s=1} x_s^2 = \sum_{s=1} y_s^2, \tag{a}$$

che non ci consta sia stato fino ad ora trattato altro che nel caso speciale di $n=3$. Per questo, d'altra parte, o sono stati esposti procedimenti per mezzo dei quali da una soluzione se ne possano ottenere altre, [1] oppure se ne sono determinate alcune soluzioni particolari. [2] Recentemente E. B. ESCOTT [3] ha esposto un procedimento che conduce sì alla determinazione di tutte le soluzioni del sistema, ma il metodo oltre all'essere abbastanza complesso, non conduce a formole risolutive che comprendano, per valori convenienti dati alle lettere che in esse entrano, tutte le soluzioni. Di più non si presta affatto per trattare il sistema generale (a). Osserviamo infine che si potrebbe essere tentati di partire dalla soluzione generale dell'equazione

$$\sum_{s=1}^{n} x_s^2 = \sum_{s=1}^{n} y_s^2$$

data dal REALIS, [4] e porre la condizione affinchè detta soluzione sodisfi l'altra equazione

$$\sum_{s=1}^{n} x_s = \sum_{s=1}^{n} y_s$$

ma con questo metodo s'incontrano insormontabili difficoltà di calcolo.

Il procedimento che noi diamo per la determinazione di *tutte* le soluzioni in numeri interi del sistema

$$x + y + z = u + v + w \tag{1}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2 \tag{2}$$

ha il vantaggio, su quello di Escott, di essere molto più semplice e facilmente generalizzabile. Dal sistema precedente facciamo pure dipendere la soluzione dell'altro composto delle (1), (2) e della

$$x^4 + y^4 + z^4 = u^4 + v^4 + w^4.$$

---

[1] V. Général FROLOV, *Egalités à deux degrés.* "Bulletin de la Société Math. „, tomo XVII, 1889.
[2] Vedere *Intermédiaire des Mathématiciens*, 1907, n. 9, pag. 200.
[3] Vedere *Interm. des Math.*, 1908, n. 5, pag. 109.
[4] Vedere *Nouvelles annales*, 1879, pag. 504.

I. Premettiamo che i numeri sui quali si opera sono sempre interi, ove non si dica esplicitamente il contrario. Ciò posto la più generale soluzione della (1) è:

$$\begin{array}{lll} x=a & y=b & z=c \\ u=a+r & v=b+s & w=c-(r+s) \end{array}$$

e affinchè lo sia anche della (2) deve essere:

$$a^2+b^2+c^2=(a+r)^2+(b+s)^2+(c-[r+s)]^2$$

cioè:

$$r^2+r(a-c+s)+s(s+b-c)=0. \qquad (3)$$

Decomponendo $s(s+b-c)$ in fattori potremo porre:

$$s(s+b-c)=hk,$$

e allora la (3) avrà una (e quindi anche l'altra) radice intera (1) quando sia:

$$a-c+s=-(h+k),$$

donde

$$a=c-s-(h+k),$$

e questa è condizione necessaria e sufficiente perchè r abbia i valori h, k interi. Prendendo $r=h$, ovvero $r=k$ si ha la sola soluzione:

$$\text{(I)} \qquad \begin{array}{ll} x=c-s-(h+k) & u=c-s-k \\ y=b & v=b+s \\ z=c & w=c-s-h. \end{array}$$

Assegnati dunque i numeri b, c, s si determinano le m decomposizioni di $s(s+b-c)$ in due fattori, ed allora avremo per h (e per k), m valori e corrispondentemente m soluzioni del sistema proposto analoghe alla (1), nelle quali i valori di y, z, v sono sempre gli stessi. Illustriamo quanto si è detto con un esempio numerico. Nella (1) si faccia

$$s=6 \qquad b=7 \qquad c=3$$

sarà

$$s(s+b-c)=2^2 \,.\, 3 \,.\, 5$$

ed avremo allora:

	h	k	x	y	z	u	v	w
1ª soluzione	1	60	— 64	7	3	— 63	13	— 4
2ª "	2	30	— 35	"	"	— 33	"	— 5
3ª "	3	20	— 26	"	"	— 23	"	— 6
4ª "	4	15	— 22	"	"	— 18	"	— 7
5ª "	5	12	— 20	"	"	— 15	"	— 8
6ª "	6	10	— 19	"	"	— 13	"	— 9

(1) È noto il teorema "Condizione necessaria e sufficiente perchè una equazione di 2º grado ad una incognita abbia una radice intera k è che sia del tipo $ax^2+(h-ak)x-hk=0$". Per $a=1$ segue: Se l'equazione $x^2+bx+c=0$ ha una radice intera anche l'altra è intera.

Occupiamoci ora di alcuni casi particolari notevoli:

a) Per verificare la

$$s(s+b-c)=hk$$

potremo prendere

$$h=s, \qquad k=s+b-c,$$

e per tali speciali valori di h, k, e quindi di r, la (I) ci fornisce la soluzione:

$$\text{(I')}\qquad \begin{array}{ll} x=2c-3s-b & u=2c-2s-b \\ y=b & v=b+s \\ z=c & w=c-2s, \end{array}$$

dove b, c, s sono interi dati comunque. Prendendo

$$b=a'-c', \qquad c=a'+b'+c', \qquad s=b'+c'$$

si ottiene la soluzione del sistema (1), (2) già data dal GRIGORIET (vedi *Interméd.*, 1907, pag. 200):

$$\begin{array}{ll} x=a'-b' & u=a'+c' \\ y=a'-c' & v=a'+b' \\ z=a'+b'+c' & w=a'-b'-c'. \end{array}$$

b) Prendasi

$$b=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta \quad c=\gamma^2+\delta^2+\gamma\delta \quad s=(\gamma-\beta)(\alpha+\beta+\gamma),$$

sarà

$$s(s+b-c)=(\gamma-\beta)(\alpha-\delta)(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\gamma+\delta),$$

e ponendo ad esempio:

$$h=(\beta-\gamma)(\alpha-\delta), \qquad k=-(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\gamma+\delta),$$

avremo dalla (I):

$$\begin{array}{ll} x=(\alpha+\gamma)^2+(\beta+\delta)^2+(\alpha+\gamma)(\beta+\delta) & u=(\alpha+\beta)^2+(\gamma+\delta)^2+(\alpha+\beta)(\gamma+\delta) \\ y=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta & v=\alpha^2+\gamma^2+\alpha\gamma \\ z=\gamma^2+\delta^2+\gamma\delta & w=\delta^2+\beta^2+\delta\beta. \end{array}$$

Questa soluzione è stata trovata dal PROTH (*Nouvelle correspondence*, 1878, pag. 377).

c) Il sistema (1), (2), quando si ponga per le incognite la condizione che siano positive, è la traduzione analitica del problema geometrico di determinare due parallelepipedi isodiagonali tali che sia eguale la somma delle rispettive dimensioni. Possiamo anche imporre che i due parallelepipedi abbiano una diagonale intera Δ assegnata. Ricorrendo alle (I') dovrà essere:

$$x^2+y^2+z^2=u^2+v^2+w^2=9s^2-6s(2c-b)+(2c-b)^2+b^2+c^2=\Delta^2,$$

donde si trae

$$3s=2c-b\pm t, \tag{4}$$

avendo posto

$$t^2=\Delta^2-b^2-c^2.$$

In virtù d'una nota identità (*Interméd.*, 1907, pag. 41) potremo dar subito le soluzioni intere di questa equazione: essendo a_1, b_1, c_1, d_1 interi arbitrari, basta prendere:

$$\Delta = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2, \qquad t = a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 - d_1^2,$$
$$b = 2(a_1c_1 + b_1d_1), \qquad c = 2(a_1d_1 - b_1c_1).$$

Per questi valori però la (4) non ci fornisce in generale un numero intero per s. Perchè ciò avvenga, è sufficiente prendere $a_1 = \alpha\sqrt{3}$, $b_1 = \beta\sqrt{3}$, $c_1 = \gamma\sqrt{3}$, $d_1 = \delta\sqrt{3}$, e si ha:

$$s = 4(\alpha\delta - \beta\gamma) - 2(\alpha\gamma + \beta\delta) \pm (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2),$$

e quindi le (I') divengono:

$$\begin{array}{ll} x = \pm 3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) & u = \mp 2(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)-2(\alpha\gamma+\beta\delta) \\ y = 6(\alpha\gamma+\beta\delta) & v = 4(\alpha\delta-\beta\gamma)+4(\alpha\gamma+\beta\delta) \pm (\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2) \\ z = 6(\alpha\delta-\beta\gamma) & w = 4(\alpha\gamma+\beta\delta)-2(\alpha\delta-\beta\gamma) \mp (\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2). \end{array}$$

Queste formole determinano le dimensioni dei parallelepipedi richiesti, quando però sia $\Delta = 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)$, cioè quando la diagonale data sia un *qualunque* multiplo di 3. Ciò segue dal fatto che un numero intero è al massimo la somma dei quattro quadrati. Così, se si volesse che i due parallelepipedi avessero le diagonali eguali a 21, basta porre nelle precedenti $\alpha = 2\ \beta = \gamma = \delta = 1$, ed avremo:

$$x = 9, \quad y = 18, \quad z = 6, \quad u = 4, \quad v = 13, \quad w = 16$$

e si verifica precisamente che:

$$9 + 18 + 6 = 4 + 13 + 16\,.$$
$$9^2 + 18^2 + 6^2 = 4^2 + 13^2 + 16^2 = 21^2.$$

2. Ricerchiamo ora la soluzione generale del sistema

$$\sum_1^n x_s = \sum_1^n y_s \qquad (5) \qquad\qquad \sum_1^n x_s^2 = \sum_1^n y_s^2. \qquad (6)$$

Se $a_1, a_2 \ldots a_n, r_1, r_2, r_{n-1}$ sono interi arbitrari la più generale soluzione della (5) è:

$$\text{(II)} \quad \begin{array}{lll} x_s = a_s & y_s = a_s + r_s & (s = 1, 2, \ldots n-1) \\ x_n = a_n & y_n = a_n - \sum_1^{n-1} r_s; & \end{array}$$

e perchè questi valori delle x_s, y_s sodisfino la (6) deve aversi:

$$\sum_1^n a_s^2 = \sum_1^{n-1}(a_s + r_s)^2 + (a_n - \sum_1^{n-1} r_s)^2,$$

ovvero

$$2\sum_1^{n-1} a_s r_s + \sum_1^{n-1} r_s^2 + [\sum_1^{n-1} r_s]^2 - 2\,a_n \sum_1^{n-1} r_s = 0; \qquad (7)$$

ma se per brevità si pone:

$$S = r_1(r_2 + \ldots + r_{n-1}) + r_2(r_3 + \ldots + r_{n-1}) + \ldots + r_{n-2}r_{n-1}$$

si ha:

$$[\sum_1^{n-1} r_s]^2 = \sum_1^{n-1} r_s^2 + 2r_1 \sum_2^{n-1} r_s + 2S,$$

e quindi la (7) diviene:

$$\sum_1^{n-1} a_s r_s + \sum_1^{n-1} r_s^2 + r_1 \sum_1^{n-1} r_s + S - a_n \sum_2^{n-1} r_s = 0.$$

E ordinando rispetto ad r_1, avremo:

$$r_1^2 + r_1 (a_1 - a_n + \sum_2^{n-1} r_s) + (\sum_2^{n-1} a_s r_s + \sum_2^{n-1} r_s^2 + S - a_n \sum_2^{n-1} r_s) = 0. \quad (8)$$

Ora, nell'ipotesi di T diverso da zero, può sempre porsi:

$$T = \sum_2^{n-1} a_s r_s + \sum_2^{n-1} r_s^2 + S - a_n \sum_2^{n-1} r_s = HK,$$

ove H, K sono interi non nulli che possono anche essere entrambi eguali ad uno (se $T=1$), ovvero essere l'uno o l'altro eguale all'unità (se T è primo).

Se per i valori scelti di $a_2 \ldots a_n$ $r_2 \ldots r_{n-1}$ si ha $T=0$, allora la (8) ci dà:

$$r_1 = a_n - a_1 - \sum_2^{n-1} r_s;$$

ed in tal caso la soluzione del sistema proposto ci è data dalle (II), ove per r_1 si prenda il valore precedente. Corrispondentemente all'altra radice $r_1 = 0$ si ha $x_1 = y_1$, ed allora $T = 0$ esprime la condizione affinchè $x_2, x_3, \ldots x_n$, $y_2, y_3, \ldots y_n$ sodisfino ad un sistema analogo al proposto.

Ritornando all'ipotesi di T diverso da zero, perchè la (8) dia per r_1 una (e quindi anche l'altra) radice intera deve essere:

$$a_1 - a_n + \sum_2^{n-1} r_s = -(H+K),$$

donde

$$a_1 = a_n - \sum_2^{n-1} r_s - (H+K). \quad (9)$$

Dati dunque i numeri $a_2, a_3, \ldots a_n, r_2, \ldots r_{n-1}$ ci calcoleremo il numero T, e se H, K è una qualunque sua decomposizione in fattori, la (9) ci dà subito a_1 e, dalla (8), per le ipotesi fatte, si ha r_1 eguali ad H oppure a K. In virtù delle (II), sia prendendo $r_1 = H$ sia prendendo $r_1 = K$, avremo la sola soluzione generale del sistema (5), (6) è:

$$x_1 = a_n - \sum_2^{n-1} r_s - (H+K) \qquad y_1 = a_n - \sum_2^{n-1} r_s - K$$

$$y_s = a_s \quad (s = 2, \ldots, n) \qquad y_t = a_t + r_t \quad (t = 2 \ldots n-1)$$

$$y_n = a_n - \sum_1^{n-1} r_s - H.$$

Cosicchè nel caso particolare del sistema:

$$\sum_1^4 x_s = \sum_1^4 y_s\,, \qquad \sum_1^4 x_s^2 = \sum_1^4 y_s^2,$$

si ha che la sua soluzione è:

$$x_1 = a_4 - (r_2 + r_3) - (\mathrm{H} + \mathrm{K}), \quad x_2 = a_2, \quad x_3 = a_3, \quad x_4 = a_4$$
$$y_1 = a_4 - (r_2 + r_3) - \mathrm{K},\ y = a_2 + r_2,\ y_3 = a_3 + r_3,\ y_4 = a_4 - (r_3 + r_2) - \mathrm{H},$$

essendo

$$\mathrm{T} = a_2 r_2 + a_3 r_3 + (r_2^2 + r_3^2) + r_2 r_3 - a_4 (r_2 + r_3) = \mathrm{HK}.$$

Per cui se prendiamo:

$$a_2 = 4, \qquad a_3 = 10, \qquad a_4 = 7, \qquad r_2 = 1, \qquad r_3 = 4$$

si ha:

	T	H	K	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
1ª soluzione	30	1	30	− 29	4	10	7	− 28	5	14	1
2ª „	„	2	15	− 15	„	„	„	− 13	„	„	0
3ª „	„	3	10	− 11	„	„	„	− 8	„	„	− 1
4ª „	„	5	6	− 9	„	„	„	− 4	„	„	− 3

3. Come applicazione dei resultati cui siamo giunti vogliamo dare la soluzione generale in numeri interi del sistema

$$\text{(III)} \quad \begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 &= u^4 + v^4 + w^4 && (9') \\ x^2 + y^2 + z^2 &= u^2 + v^2 + w^2 && (10) \\ x + y + z &= u + v + w && (11) \end{aligned}$$

Premettiamo il

Teorema. — *Affinchè il sistema (III) sia risolubile in numeri interi è condizione necessaria e sufficiente che sia*

$$x + y + z = u + v + w = 0.$$

È ovvio osservare che si escludono i casi in cui: 1° una delle x, y, z sia eguale ad una delle u, v, w; 2° una qualunque delle x, y, z, u, v, w sia nulla.

Intanto non può essere che per una qualunque soluzione $(x\,y\,z\,u\,v\,w)$ del sistema (III) sia:

$$xy + yz + zx = uv + vw + wu = 0, \tag{12}$$

cioè

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 0.$$

Invero, se si riflette all'identità

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} + \frac{1}{\alpha(\alpha - 1)} = 0,$$

alle (12) si sodisfa nel modo più generale prendendo:

$$x=m,\ y=1-m,\ z=m(m-1),\ u=n,\ v=1-n,\ w=n(n-1)$$

essendo $m \neq n$. Dovendo anche essere

$$x+y+z=u+v+w,$$

segue

$$m-n=m^2-n^2,$$

donde

$$n=1-m;$$

e quindi risulterebbe $x=v$, $y=u$, $z=w$, caso che non ci può interessare.

Ciò posto dalle (10), (11) e (10), (9') si ha

$$xy+yz+zx=uv+vw+wu, \tag{13}$$
$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2, \tag{14}$$

e quadrando la 1ª, tenendo conto della 2ª, si ha:

$$xyz(x+y+z)=uvw(u+v+w),$$

da cui, nell'ipotesi di $x+y+z=u+v+w$ diverso da zero, si dedurrebbe

$$xyz=uvw. \tag{15}$$

e per le (11), (13), (15) resulterebbe $x=u$, $y=v$, $z=w$, ciò che si esclude. Dunque in ultima analisi deve essere

$$x+y+z=u+v+w=0.$$

Allora la (9) diviene conseguenza delle (10), (11) per il fatto che se si ha:

$$A+B+C=0,$$

si ha pure:

$$A^4+B^4+C^4=2(AB+BC+CA).$$

Per cui risolvere il sistema (III) equivale a risolvere l'altro

$$\text{(III')}\qquad \begin{aligned} X^2+Y^2+Z^2&=U^2+V^2+W^2 && (16)\\ X+Y+Z&=U+V+W=0. && (17)\end{aligned}$$

Di questo già ci siamo occupati: soltanto nelle formole risolutive (I) del sistema (1), (2) le quantità arbitrarie b, c, s dovranno ora sottostare alla condizione:

$$x+y+z=u+v+w=b+2c-s-(h+k)=0,$$

donde

$$b=s+(h+k)-2c. \tag{18}$$

Allora la

$$hk=s(s+b-c)$$

diviene

$$2s^2+s(h+k-3c)-hk=0;$$

e perchè questa abbia una soluzione intera è condizione necessaria e sufficiente che, se $hk = \alpha\beta$, sia

$$h + k - 3c = \beta - 2\alpha,$$

cioè

$$c = \frac{h + k - \beta + 2\alpha}{3}.$$

Ponendo $h = \alpha m$, $\beta = km$, si ha:

$$c = \frac{\alpha(m+2) - k(m-1)}{3} \tag{19}$$

e c sarà intero:

a) Se $m = 3n + 1$: allora, ricordando che $a = \alpha$ e determinando i valori di b, c dalle (18), (19), la (I) ci fornisce la soluzione:

$$\begin{aligned} x &= -\alpha(2n+1) - k(n+1) & u &= \alpha n - k(n+1) \\ y &= n\alpha + k(2n+1) & v &= \alpha(n+1) + k(2n+1) \\ z &= \alpha(n+1) - kn & w &= -\alpha(2n+1) - kn. \end{aligned} \tag{20}$$

b) Se $\alpha = 3\alpha_1$, $k = 3\beta_1$ avremo l'altra soluzione:

$$\begin{aligned} x &= -\alpha_1(2m+1) - \beta_1(m+2) & u &= \alpha_1(m-1) - \beta_1(m+2) \\ y &= \alpha_1(m-1) + \beta_1(2m+1) & v &= \alpha_1(m+2) + \beta_1(2m+1) \\ z &= \alpha_1(m+2) - \beta_1(m-1) & w &= -\alpha_1(2m+1) - \beta_1(m-1). \end{aligned} \tag{21}$$

Cosicchè se nelle (20), (21) prendiamo $\alpha = \alpha_1 = 2$, $n = m = 2$, $k = \beta_1 = -3$ si ha:

$$\begin{aligned} (-1)^s + (-11)^s + (12)^s &= (13)^s + (-9)^s + (-4)^s \\ (2)^s + (-13)^s + (11)^s &= (14)^s + (-7)^s + (-7)^s \end{aligned} \qquad s = 1, 2, 4,$$

Le (20), (21) dànno delle soluzioni particolari del sistema (III') o del sistema (III): vogliamo ora di questi determinare la soluzione generale. Dalle (17) si ha:

$$Z = -(X + Y), \qquad W = -(U + V),$$

da cui, per la (16)

$$X^2 + XY + Y^2 = U^2 + UV + V^2; \tag{22}$$

ad ogni soluzione (x, y, u, v) di questa corrisponde la soluzione

$$X = x,\quad Y = y,\quad Z = -(x + y),\quad U = u,\quad V = v,\quad W = -(u + v)$$

del sistema (III') o (III) e viceversa. Dunque tutto si riduce a determinare la più generale soluzione della (22). Sia (x, y, u, v) una qualunque soluzione di questa e pongasi:

$$X = \rho x + a,\quad Y = \rho y + b,\quad U = \rho u + c,\quad V = \rho v + d. \tag{23}$$

Dovrà essere

$$(\rho x + a)^2 + (\rho x + a)(\rho y + b) + (\rho y + b)^2 = \\ = (\rho u + c)^2 + (\rho u + c)(\rho v + d) + (\rho v + d)^2,$$

e poichè

$$x^2 + xy + y^2 = u^2 + uv + v^2,$$

si ha:

$$\rho = \frac{(c^2 + cd + d^2) - (a^2 + ab + b^2)}{2(ax + by - cu - dv) + bx + ay - du - cv} = \frac{P}{Q},$$

ed allora le (23) ci dànno

$$X = Px + Qa, \quad Y = Py + Qb, \quad U = Pu + Qc, \quad V = Pv + Qd. \quad (24)$$

Orbene queste formole risolutive della (22) comprendono tutte le possibili sue soluzioni. Invero una soluzione qualunque X_1, Y_1, U_1, V_1 della (22) si ottiene dalle (24) ponendo

$$a = X_1, \quad b = Y_1, \quad c = U_1, \quad d = V_1,$$

perchè risultando allora

$$P = 0, \qquad Q = Q_1,$$

le (24), a meno del coefficiente comune Q_1, ci dànno:

$$X = X_1, \qquad Y = Y_1, \qquad U = U_1, \qquad V = V_1.$$

Concludendo, la più generale soluzione dei sistemi (III), (III'), è:

$$\begin{array}{lll} X = Px + Qa & Y = Py + Qb & Z = -[P(x+y) + Q(a+b)] \\ U = Pu + Qc & V = Pv + Qd & W = -[P(u+v) + Q(c+d)], \end{array}$$

dove a, b, c, d sono interi arbitrari ed (x, y, u, v) è una soluzione qualunque della (22). Prescindendo dai segni avremo la notevole identità:

$$\begin{aligned}[][Px + Qa]^4 + [Py + Qb]^4 + [P(x+y) + Q(a+b)]^4 = \\ [Pu + Qc]^4 + [Pv + Qd]^4 + [P(u+v) + Q(c+d)]^4, \end{aligned} \quad (25)$$

che dà *una* soluzione del sistema

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 &= u^4 + v^4 + w^4 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= u^2 + v^2 + w^2. \end{aligned}$$

Poichè abbiamo visto che da una soluzione (x, y, z, u, v, w) dei sistemi (III) o (III') se ne deduce una, ad es. (x, y, u, v) per la (22), così dalla soluzione (20) si ha (supponendo $n = 1$, $k = \alpha$) che la (22) è sodisfatta dai valori:

$$\begin{array}{ll} x = -(3\alpha + 2\beta) & u = \alpha - 2\beta \\ y = \alpha + 3\beta & v = 2\alpha + 3\beta. \end{array}$$

Sostituendo nella (25) per x, y, u, v questi valori, essa resta identicamente verificata, qualunque siano gl'interi $a, b, c, d, \alpha, \beta$.

Prendasi, come esempio, $a = b = 0$, $c = d = 1$ e una soluzione della (22) sia:

$$x = 5, \quad y = 6, \quad u = 1, \quad v = 9,$$

risulterà

$$P = 1, \qquad Q = -10,$$

ed allora per le (24)

$$X = 5, \quad Y = 6, \quad Z = 11, \quad U = 9, \quad V = 1, \quad W = 10,$$

e si verifica facilmente che:

$$5^4 + 6^4 + 11^4 = 9^4 + 1^4 + 10^4; \quad 5^2 + 6^2 + 11^2 = 9^2 + 1^2 + 10^2.$$

Segnaliamo infine l'identità

$$[A(D+C) - B(C-3D)]^4 + [2(BC-AD)]^4 + [A(D-C) - B(C+3D)]^4 =$$
$$[A(D-C) + B(C+3D)]^4 + [2(BC+AD)]^4 + [A(D+C) + B(C-3D)]^4,$$

che si può dedurre dalla (25). Supponendo i numeri interi A, B, C, D, tali che $AD = BC$ si ha

$$[2AD - AC + 3BD)^4 + (4AD)^4 + (2AD + AC - 3BD)^4 = 2(AC + 3BD)^4,$$

che risolve in numeri interi il sistema:

$$x^4 + y^4 + z^4 = 2u^4; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2u^2.$$

Prendendo $A = C = 1$, $B = D = 2$ si ha:

$$15^4 + 8^4 + 7^4 = 2 . 13^4; \quad 15^2 + 8^2 + 7^2 = 2 . 13^2.$$

Umberto Bini.

SULLA DETERMINAZIONE DELLA VELOCITÀ ANGOLARE

e della accelerazione angolare nel moto più generale di un corpo rigido

(Nota di Cesare Spelta.)

1. Sia proposto il problema:

Sono date le tre equazioni

$$\left.\begin{array}{l} \rho^2 \operatorname{sen}^2 \alpha = h_1 \\ \rho^2 \operatorname{sen}^2 \beta = h_2 \\ \rho^2 \operatorname{sen}^2 \gamma = h_3 \end{array}\right\}, \tag{1}$$

indicando con h_1, h_2, h_3 *quantità note, con* ρ *la lunghezza sconosciuta di un segmento, e con* α, β, γ *gli angoli incogniti che tale segmento forma rispettivamente coi lati conosciuti* a, b, c *di un assegnato triangolo. Trovare* ρ^2.

Tale quesito (interessante specialmente a motivo che ad esso si riducono, in tutto od almeno in parte, vari problemi) si può risolvere mediante considerazioni di Cinematica; si ottiene [1] la seguente formola, la quale somministra ρ^2 espresso in funzione soltanto di a, b, c, h_1, h_2, h_3:

$$\begin{aligned} 16S^2\rho^2 = \\ = a^2h_1(b^2+c^2-a^2)+b^2h_2(c^2+a^2-b^2)+c^2h_3(a^2+b^2-c^2)+ \\ +\{[a^2h_1(b^2+c^2-a^2)+b^2h_2(c^2+a^2-b^2)+c^2h_3(a^2+b^2-c^2)]^2+ \\ -16S^2[2(a^2b^2h_1h_2+b^2c^2h_2h_3+c^2a^2h_3h_1)+ \\ -a^4h_1^2-b^4h_2^2-c^4h_3^2]\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{2}$$

designando con S l'area (esprimibile mediante a, b, c) del dato triangolo, ed avvertendo che la potenza con esponente $\frac{1}{2}$ (implicitamente perciò dotata di doppio segno), la quale compare nel secondo membro della (2), va presa con segno positivo.

È notevole che, avuto ρ^2, si possono, mercè le prime due delle (1), determinare due rette r_1, r_2, simmetriche rispetto al piano del sopra menzionato triangolo (rette d'intersezione dei due coni di rotazione aventi per vertice comune il punto di concorso di a, b, per assi a, b e di semi-aperture, ormai conosciute, α, β): r_1 *oppure* r_2 *avrà la direzione del suddetto segmento di lunghezza* ρ.

Di quanto sopra mi sono già valso per risolvere problemi di Cinematica; [2] nella presente Nota mostrerò che quanto ho accennato si può applicare alla risoluzione di altre questioni di Cinematica, due delle quali traggono la loro origine dal teorema di Rivals, relativo all'accelerazione nel moto rotatorio di un sistema rigido intorno ad un punto. [3]

2. Siano P_1, P_2, P_3 tre punti (non allineati) di un corpo rigido, animato da un movimento qualunque. Designamo con Δ_{12} la differenza geometrica delle velocità di P_1, P_2, ed a Δ_{23}, Δ_{31} attribuiamo analoghi significati. Chiamando φ_{12} l'angolo formato dall'asse istantaneo di rotazione col segmento P_1P_2 [4] ed ω la velocità angolare, abbiamo notoriamente

$$\omega^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_{12} = \left(\frac{\Delta_{12}}{P_1P_2}\right)^2 \tag{3}$$

ed altre due relazioni analoghe, relative ai segmenti P_2P_3, P_3P_1.

Indichiamo con V_1, V_2, V_3 gli estremi dei segmenti rappresentativi delle velocità di P_1, P_2, P_3; con θ_{12} l'angolo che il segmento V_1V_2 forma col segmento P_1P_2, ed a θ_{23}, θ_{31} attribuiamo significati analoghi.

---

[1] V. mia Nota "Sulla determinazione delle velocità e delle accelerazioni nel moto più generale di un corpo rigido", in *Giorn. di Matem.*, vol. XLVII.
Le (14), (16) (nella quale va scelto il segno superiore) della citata Nota corrispondono rispettivamente alle (1), (2) del presente scritto.

[2] V. Nota cit.

[3] Teorema riportato ad es. dal Koenigs, *Leçons de Cinématique*, p. 189. Paris, 1897.

[4] Consideriamo il moto del corpo come composto, ad ogni istante, di un moto progressivo conforme al moto di un suo punto e di un moto rotatorio intorno a questo punto (*centro di riduzione del moto istantaneo*).

Sussistono le relazioni

$$\omega^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_{12} = \left(\frac{V_1 V_2}{P_1 P_2}\right)^2 - 1 \text{ (}^1\text{)} \tag{4}$$

ed altre due analoghe, relative ai segmenti P_2P_3, P_3P_1; come pure le formole

$$\omega^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_{12} = \operatorname{tang}^2 \theta_{12} \tag{5}$$

ed altre due analoghe, pei segmenti P_2P_3, P_3P_1. Si osservi invero che (in virtù del noto teorema relativo alle proiezioni delle velocità di P_1, P_2 sulla retta P_1P_2) risulta

$$V_1V_2 = P_1P_2 \sec \theta_{12}: \tag{6}$$

dalle (4), (6) deducesi la (5).

Assumiamo un punto P_1 del corpo come centro di riduzione del moto istantaneo, e consideriamo altri tre punti P_2, P_3, P_4 del sistema tali che i segmenti P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4 risultino rispettivamente paralleli ai tre lati di un triangolo T. Indicando con $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{14}$ le rispettive accelerazioni centripete di P_2, P_3, P_4 (si abbia presente il teorema di Rivals), chiamando nuovamente φ_{12} l'angolo di ω col segmento P_1P_2, inoltre ponendo $\omega^4 = \Omega^2$, è noto che si hanno le formole

$$\Omega^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_{12} = \left(\frac{\gamma_{12}}{P_1P_2}\right)^2 \tag{7}$$

ed altre due simili, relative ai segmenti P_1P_3, P_1P_4.

La (3) ed analoghe, la (4) ed analoghe, la (5) ed analoghe, la (7) ed analoghe sono del tipo (1), sicchè, valendoci di esse e della (2), è chiaro che potremo immediatamente risolvere i problemi:

Conoscendo (sempre in sola grandezza) le differenze geometriche Δ_{12}, Δ_{23}, Δ_{31}, *oppure i segmenti* V_1V_2, V_2V_3, V_3V_1, *oppure gli angoli* θ_{12}, θ_{23}, θ_{31}, *oppure le accelerazioni centripete* $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{14}$, *trovare il quadrato della velocità angolare.*

[Nell'ultimo caso considerato, T corrisponde al triangolo menzionato nel § 1; epperò la (2) si deve applicare al triangolo T].

3. Aggiungendo qualche altro dato, si può determinare eziandio la direzione di ω.

Ad esempio, designamo con P_4 un punto qualunque del corpo, esterno al piano dei punti P_1, P_2, P_3 accennati in principio del § 2, e facciamo l'ipotesi di conoscere, oltre a $\Delta_{12}, \Delta_{23}, \Delta_{31}$, anche Δ_{14}, chiamando Δ_{14} la differenza geometrica delle velocità di P_1, P_4. Ottenuto ω^2 nel modo indicato, saranno noti [mercè la (3) ed analoghe] $\operatorname{sen}^2 \varphi_{12}$, $\operatorname{sen}^2 \varphi_{13}$, $\operatorname{sen}^2 \varphi_{14}$, designando con φ_{13}, φ_{14} gli angoli delle rette P_1P_3, P_1P_4 colla velocità angolare; e la direzione di questa sarà data dall'intersezione dei tre coni di rotazione aventi per vertice comune P_1, per assi P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4 e di semi-aperture $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{14}$.

---

(1) V. Nota cit.

4. Di nuovo si assuma un punto P_1 del sistema come centro di riduzione del moto istantaneo, e si considerino altri tre punti P_2, P_3, P_4 del corpo tali che i segmenti P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4 siano rispettivamente paralleli ai tre lati di un triangolo T. Indichiamo con ω' l'accelerazione angolare, con α_{12}, α_{13}, α_{14} le rispettive componenti delle accelerazioni di P_2, P_3, P_4, componenti dovute ad ω' (abbiasi ancora presente il teorema di Rivals), e chiamiamo ψ_{12} l'angolo di ω' col segmento P_1P_2.

Si sa che sussistono le formole

$$\omega'^2 \operatorname{sen}^2 \psi_{12} = \left(\frac{\alpha_{12}}{P_1P_2}\right)^2 \tag{8}$$

ed altre due simili pei segmenti P_1P_3, P_1P_4.

Servendoci della (8) ed analoghe, ed inoltre della (2) (applicata al triangolo T), potremo immediatamente risolvere il quesito:

Possedendo (soltanto in grandezza) $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}$, *determinare il quadrato dell'accelerazione angolare.*

5. Volendo anche avere la direzione di ω', basta considerare un punto qualsiasi P_5 del corpo, esterno al piano dei punti P_1, P_2, P_3, P_4 accennati nel § precedente, e supporre nota eziandio α_{15}, attribuendo ad α_{15} il significato analogo a quello di α_{12}, α_{13}, α_{14}. Ricavato ω'^2 nella maniera anzidetta, la direzione di ω' sarà data dall'intersezione dei tre coni di rotazione aventi per vertice comune P_1, per assi P_1P_2, P_1P_3, P_1P_5 e di semi-aperture [ormai conosciute mercè la (8) ed analoghe] $\psi_{12}, \psi_{13}, \psi_{15}$, indicando con ψ_{13}, ψ_{15} gli angoli delle rette P_1P_3, P_1P_5 coll'accelerazione angolare.

PICCOLE NOTE

Le costruzioni del baricentro di un segmento circolare. — Sia dato un segmento circolare compreso fra un arco ACB e la sua corda AB. (Il lettore è pregato di fare le figure.)

Sulla tangente in A si sviluppi il semiarco AC, in AL. Unito il punto L col punto di mezzo D della corda AB, si tiri dal centro O la parallela a DL, che incontri in M la AL; si otterrà, com'è noto, il triangolo AMB equivalente, in area, al segmento ACB. Si prenda poi sul prolungamento di AM il segmento $MN = \frac{1}{2}$ AM; la retta AG perpendicolare a DN incontra il diametro OC in G che è il cercato baricentro.

Infatti, chiamando x la retta condotta pel centro O parallelamente ad AB, ed assunti per assi coordinati la x e la OC, si trova subito che il momento di 1° grado dell'area del segmento dato rispetto alla x è

$$M = \int_0^c (c^2 - x^2)\, dx = \tfrac{2}{3} c^3,$$

dove c è la semicorda DB. D'altra parte l'area del segmento è espressa dal prodotto ch, dove h è l'altezza MP del triangolo AMB. Quindi

$$(GO) . c . h = \tfrac{2}{3} c^3 .$$

Donde

$$(GO) : c : : c : \tfrac{3}{2} h .$$

I due triangoli simili AND, OAG servono a costruire questa proporzione, giacchè l'altezza, per N, del triangolo AND è evidentemente $\frac{3}{2} h$.

La notevole proprietà che il *momento di 1° grado di un segmento circolare* rispetto al diametro x parallelo alla corda, *dipende unicamente dalla lunghezza della corda* rende molto semplice la costruzione di altri baricentri, per es. di quello della lunetta.

Siano A, B gli estremi degli archi che la limitano, C'_1, C'_2, D i punti di mezzo degli archi stessi e della corda che li sottende.

Si determinino al solito modo i vertici $M_1 M_2$ dei due triangoli AM_1B, AM_2B equivalenti ai segmenti circolari AC_1BD, AC_2BD, e siano h_1, h_2 le altezze (sopra AB) dei due triangoli. Per i centri O_1, O_2 si conducano due segmenti O_1P_2, O_2P_1 fra loro paralleli ed eguali ad h_2, h_1 rispettivamente. La P_1P_2 incontra il diametro O_1D nel punto G baricentro della lunetta AC_1BC_2.

Infatti l'osservazione precedente dimostra che i momenti di 1° grado dei due segmenti AC_2DB, AC_1DB rispetto alle rette x_2, x_1 rispettivamente, condotte per i centri parallelamente alla corda AB, sono fra loro eguali. Quindi, chiamando S_1, S_2 le aree dei due segmenti, il momento di 1° grado dell'area lunulare rispetto alla retta x_1 sarà: $S_2 . d$, dove d è la distanza O_1O_2 dei due centri. Il baricentro G della lunetta è quindi definito dalla relazione

$$(GO_1)(S_2 - S_1) = S_2 . d, \qquad \text{donde} \qquad (GO_1) = \frac{S_2}{S_2 - S_1} d = \frac{h_2}{h_2 - h_1} d,$$

che corrisponde alla indicata costruzione.

PAOLO PIZZETTI.

I.

Per l'esattezza di un enunciato. — A proposito del teorema:

In un triangolo ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.

notiamo anzitutto che, presi tre segmenti qualunque, possono presentarsi i casi seguenti:

Che i tre segmenti siano uguali.

Che due segmenti siano uguali e maggiori del terzo.

Che due segmenti siano uguali e minori del terzo.

Che i tre segmenti siano disuguali.

Nei primi due casi ciascuno dei tre segmenti è minore della somma degli altri due; negli ultimi due casi tale relazione si verifica sempre per i due segmenti minori, mentre per il segmento maggiore si verifica solo quando i tre segmenti sono lati di un triangolo. Ne consegue che, quando s'intenda parlare di tre segmenti che sono lati di un triangolo, è fuori di luogo enunciare come speciale di tali segmenti una proprietà, della quale due di essi godono all'infuori del fatto di essere lati di un triangolo.

Analogamente nei primi due casi ciascuno dei tre segmenti è maggiore della differenza degli altri due, e negli ultimi due casi tale relazione si verifica sempre per il segmento maggiore, mentre per i due segmenti minori si verifica solo quando i tre segmenti sono lati di un triangolo.

Ad evitare adunque che l'ipotesi e la tesi abbiano elementi comuni, il teorema dovrà essere enunciato nel modo seguente:

In un triangolo il lato maggiore è minore della somma degli altri due, e ciascuno dei lati minori è maggiore della differenza fra gli altri due.

E qui cade acconcio rilevare come sia erroneo ritenere, relativamente alla seconda parte del teorema, che occorra fare la dimostrazione per il solo lato medio, perchè la differenza massima si ottiene quando dal lato più grande si toglie il lato più piccolo (Амют, *Geometria elementare*, edizione Socci). Infatti, indicando rispettivamente con

$$a \qquad a+p \qquad a+p+q$$

i lati minore, medio e maggiore, è manifesto che l'eccesso del lato minore sulla differenza degli altri due è $a-q$, allo stesso modo che l'eccesso del lato medio sulla differenza degli altri due è $(a+p)-(p+q)$, ossia $a-q$.

È dunque indifferente fare la dimostrazione per il lato medio o per il lato minore, o la dimostrazione fatta per uno vale pure per l'altro.

Del resto dalla prima parte del teorema, cioè dalla disuguaglianza:

$$(a+p+q)<a+(a+p)$$

si ha direttamente tanto l'una che l'altra delle disuguaglianze:

$$(a+p)>p+q \qquad a>q.$$

II.

Per l'esattezza di una dimostrazione. — A proposito del teorema:

Se si prolungano nello stesso verso i lati di un poligono convesso, la somma degli angoli esterni così ottenuti è uguale a quattro retti.

è da notarsi che la semplicissima dimostrazione ottenuta conducendo da un punto qualunque i raggi rispettivamente paralleli ai lati del poligono e nello stesso verso in cui vennero prolungati, è affatto incompleta, se non si pone mente ad eliminare le due obbiezioni seguenti:

Che fra gli angoli costruiti intorno al punto possano esistere lacune.

Che fra gli angoli costruiti intorno al punto possano esistere sovrapposizioni.

Per eliminare la prima è sufficiente notare che, per il verificarsi di una lacuna, si dovrebbero, contro ogni possibilità, condurre dal punto stesso due parallele distinte ad uno stesso lato del poligono.

Per eliminare la seconda è da notare anzitutto che, per il verificarsi di una sovrapposizione, un raggio dovrebbe cadere o sopra un altro raggio, o fra i lati di un angolo costruito. Nel primo caso, contro l'ipotesi, due lati paralleli del poligono sarebbero prolungati in verso opposto; nel secondo, immaginando di ripetere la costruzione, anzichè da un punto qualunque, dal vertice dell'angolo esterno secato, risulterebbe che un lato del poligono taglierebbe necessariamente il poligono stesso, e questo perciò, contro l'ipotesi, sarebbe concavo.

Senza tali od analoghe considerazioni, non si ha, a rigore, che una dimostrazione puramente grafica.

III.

Metodi di eliminazione. — Per la risoluzione di un sistema di due equazioni di primo grado con due incognite vengono ordinariamente indicati, come metodi distinti di eliminazione, il metodo di sostituzione, quello di confronto e quello di riduzione. I tre metodi però, ben lungi dall'essere distinti, sono invece una cosa sola, tanto nella sostanza quanto nella forma, e realmente conducono ad eseguire le stesse operazioni aritmetiche ed algebriche.

Quando si confrontano, ad esempio, i valori della x ricavati dalle due equazioni simultanee:

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

e precisamente:

$$x = \frac{c - by}{a} \qquad\qquad x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1}$$

non si fa che sostituire alla x, per esempio, della seconda equazione, scritta in modo opportuno, il valore della x ricavato dalla prima; ed è manifesta la perfetta coincidenza dei metodi di sostituzione e di confronto.

Nè differenza più sostanziale esiste fra i metodi di sostituzione o di riduzione. Infatti, dopo aver ridotte le equazioni, per esempio, alla forma:

$$\begin{cases} a_1a\,x + a_1b\,y = a_1c \\ a\,a_1x + a\,b_1y = a\,c_1, \end{cases}$$

si è condotti, mediante somma o sottrazione, a sostituire al termine in x, per esempio, della seconda il valore del termine in x determinato dalla prima.

In realtà, mediante il metodo di sostituzione, si sostituisce in una equazione il valore dell'incognita da eliminare dato dall'altra; col metodo di confronto si eseguisce la sostituzione dopo aver fatto in modo che i coefficienti dell'incognita siano uguali all'unità positiva in tutte due le equazioni; col metodo infine di riduzione si eseguisce la sostituzione dopo aver fatto in modo che i coefficienti dell'incognita siano uguali in tutte due le equazioni.

Nè si può ritenere che, a seconda dei casi, si ottenga qualche reale vantaggio con l'uno, con l'altro o col terzo metodo. Si può invece raggiungere notevole semplificazione nella teoria astraendo dall'inutile per seguire l'unico metodo di sostituzione. Il meccanismo di questo metodo, diretta conseguenza della definizione di sistema di equazioni, è poi di gran lunga preferibile nella risoluzione di un sistema generale di n equazioni con n incognite.

Ciò non toglie che, quando le equazioni siano tali o siano facilmente riducibili a tali che i coefficienti dell'incognita da eliminare risultino uguali, non si possa fare la sostituzione del termine contenente l'incognita stessa, e che tale sostituzione possa anche ottenersi per somma o sottrazione. È solo da evitarsi che siano tenuti in conto di metodi distinti di eliminazione i diversi espedienti utilizzabili secondo l'opportunità per effettuare la sostituzione.

IV.

Numeri negativi. — Il dire solamente che i numeri negativi sono numeri opposti e contrari ai numeri positivi e viceversa, e che, quando una grandezza può essere considerata in due versi o direzioni opposte, si può stabilire di intenderle positivo in quale dei versi o delle direzioni si vuole, fa quasi supporre che la serie dei numeri positivi e quella dei negativi, ognuna in se stessa, e l'una rispetto all'altra, non presentino divario alcuno. È più che noto però che, se ciò si verifica per quanto si riferisce all'addizione ed alla sottrazione, non ha luogo invece rispetto alla moltiplicazione ed alle operazioni che ne derivano. Non solo il prodotto di due numeri di specie diversa è sempre negativo; ma, mentre il prodotto di due numeri positivi è della stessa specie dei fattori, il prodotto di due numeri negativi è positivo.

Tali anomalie sono caratteristiche dei numeri negativi, e fanno dei numeri negativi una serie non in tutto paragonabile a quella dei numeri positivi. Esiste l'aritmetica dei numeri positivi, ma non può esistere l'aritmetica dei numeri negativi, poichè in questa non solo la sottrazione sarebbe limitatamente possibile, ma la moltiplicazione, e le operazioni che ne derivano, sarebbero impossibili sempre. La stessa definizione:

Il prodotto algebrico di due numeri è il numero formato con l'uno di essi come l'altro con l'unità positiva.

rileva già la sostanziale differenza fra numeri positivi e numeri negativi, in quanto che i negativi derivano dai positivi e non reciprocamente.

Dopo ciò è degno di nota che le leggi della moltiplicazione algebrica, e quindi anche le anomalie dei numeri negativi, hanno un singolare e completo riscontro nel linguaggio ordinario. In questo, non solo ogni negazione presuppone una affermazione, ma si ha:

L'affermazione di una affermazione equivale ad una affermazione.

L'affermazione di una negazione equivale ad una negazione.

La negazione di una affermazione equivale ad una negazione.

La negazione di una negazione equivale ad una affermazione.

Ed il riscontro non è trascurabile, posto che il linguaggio è immagine concreta dell'idea, e questa a sua volta rispecchia la realtà delle cose.

Ciò suggerirebbe di chiamare *affermativi* i numeri positivi, come se i numeri affermativi e negativi stessero rispettivamente ad affermare ed a negare le proprietà rispetto alle quali le grandezze rappresentate possono riguardarsi come opposte o contrarie.

La piccola riforma (di una sola parola) non sarebbe forse, nel campo dei numeri reali, priva di vantaggiosa praticità, visto che l'introduzione dei numeri negativi dedotta dalla sottrazione o dalla rappresentazione grafica dei numeri, non è tale da condurre alle leggi della moltiplicazione. A tali leggi astratte servirebbe di concreta e naturale induzione, forse meglio che il noto e fortunato problema degli spazi (nel senso della fisica) percorsi da un mobile con velocità positiva o negativa in un tempo positivo o negativo.

Comunque si voglia, è però da porre nel massimo rilievo (e crediamo venga detto per la prima volta) che, bensì sono rappresentabili con numeri positivi e negativi quei sistemi di grandezze, che si possono mettere in corrispondenza univoca e reciproca coi segmenti della retta dei numeri, ma è indispensabile che in una questione, nella quale figurano due (o più) sistemi differenti di grandezze (spazio e tempo, interesse e tempo, interesse e capitale, ecc.) venga posta sempre la condizione che allo *zero* di un sistema corrisponda lo *zero* dell'altro.

Diego Fellini.

QUISTIONI PROPOSTE

772. Dimostrare l'identità:

$$\frac{\sum_{r=1}^{r=n-1} \sum_{s=0}^{s=r} \binom{p}{r-s}\binom{n-p}{s} \cdot \frac{r-s}{r}}{\sum_{r=1}^{r=n-1} \sum_{s=0}^{s=r} \binom{q}{r-s}\binom{n-q}{s} \cdot \frac{r-s}{r}} = \frac{p}{q}$$

essendo p, q due interi e positivi qualsiasi ed $n = p + q$.

U. Scarpis.

773. Risolvere l'equazione

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \dots 1 \\ 1 & x & 1 \dots 1 \\ 1 & 1 & x \dots 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 \dots x \end{vmatrix} = 0.$$

774. Sia M un punto qualunque di un ellisse di centro O. Il circolo che ha per diametro la corda OM, incontra l'ellisse in altri tre punti P, Q, R. Da M si possono condurre tre normali all'ellisse in altri tre punti M_1, M_2, M_3. Essendo P', Q', R', M'_1, M'_2, M'_3 le proiezioni di P, Q, R, M_1, M_2, M_3 sull'asse maggiore, dimostrare che

$$\frac{M_1M'_1 \times M_2M'_2 \times M_3M'_3}{PP' \times QQ' \times RR'} = \text{costante},$$

e che i triangoli PQR ed $M_1M_2M_3$ hanno lo stesso baricentro.

775. Si considerino due circoli c, c' variabili, aventi i loro centri sull'asse maggiore di un ellisse, e bitangenti alla medesima, tali che la distanza delle loro corde di contatto sia costante. Dimostrare che le tangenti condotte da un punto di contatto di c con l'ellisse, al circolo c' sono eguali a quelle condotte a c dai punti di contatto di c' coll'ellisse, e che questa lunghezza comune è costante.

E.-N. Barisien.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 726, 757 E 771

726. *Discutere le soluzioni delle equazioni:*

(I) $$x = 1 + x^2,$$
(II) $$x = 1 + (1 + x^2)^2,$$
(III) $$x = 1 + [1 + (1 + x^2)^2]^2,$$
(IV) $$x = 1 + \{1 + [1 + (1 + x^2)^2]^2\}^2.$$

Dimostrare che le radici della (III), *che non sono radici della* (I), *sono date da*

$$x^3 + \lambda (x^2 + x + 1) - 2 = 0, \qquad \textit{dove} \qquad \lambda^2 + \lambda + 3 = 0.$$

e che le radici della (IV), *che non sono radici della* (II) *sono date da*

$$x^4 + \mu x^3 + \tfrac{1}{2}(\mu^2 + \mu + 4)\, x^2 + \tfrac{1}{2}(\mu^2 + \mu + 2)\, x + \tfrac{1}{2}(\mu^2 + \mu + 6) = 0,$$

dove

$$\mu^2 + 7\mu - 4 = 0.$$

W. H. YOUNG.

Aggiungo due osservazioni alla risoluzione che io ho dato della quistione 726 proposta nel Fascicolo IV, Anno XXII, pag. 150 e pubblicata nel Fascicolo V, Anno XXIII, 1908, di questo *Periodico.*

1°. Si trova facilmente nello stesso modo la soluzione elementare dell'equazione:

$$x = y + [y + \{y + (y + x^2)^2\}^2]^2. \tag{1}$$

Infatti le 12 radici speciali sono le radici dell'equazione

$$\Theta^4 + p_1\, \Theta^3 + \tfrac{1}{2}(p_1^2 + p_1 + 4y) + \tfrac{1}{2}\{p_1^2 + (2y - 1)\, p_1 + 2)\, \Theta + \\ + \tfrac{1}{4}(yp_1^2 - yp_1 + 2 + 2y + 2y^2) = 0, \tag{2}$$

dove

$$p_1^2 + p_1 (3 + 4y) - 4 = 0. \tag{3}$$

Mettendo allora $y = -2$, si hanno evidentemente i due casi della divisione del cerchio in diciassette e in quindici parti uguali.

L'ultima equazione (3) diviene

$$(p_1 + 1)(p_1^2 - p_1 - 4) = 0,$$

e $p_1 = -1$ ci dà la divisione in 15 parti e le altre radici la divisione in 17 parti.

2°. L'equazione (2) si spezza nelle due equazioni quadratiche cioè

$$\Theta^2 - \Theta\left(-\tfrac{1}{2} p_1 + \sqrt{1 + \tfrac{1}{4} p_1^2}\right) + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} p_2 + \sqrt{\tfrac{1}{4}(1 + p_2)^2 - p_4} = 0,$$

e

$$\Theta^2 - \Theta\left(-\tfrac{1}{2} p_1 - \sqrt{1 + \tfrac{1}{4} p_1^2}\right) + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} p_2 - \sqrt{\tfrac{1}{4}(1 + p_2)^2 - p_4} = 0,$$

dove

$$p_2 = \tfrac{1}{2}(p_1^2 + p_1 + 4y),$$

e

$$p_4 = \tfrac{1}{4}(yp_1^2 - yp_1 + 2 + 2y + 2y^2).$$

Quando allora l'equazione (3) si spezza, si può sempre risolvere l'equazione (1) colla riga e col compasso.

W. H. YOUNG.

757. *Se ad una tangente variabile* t *della parabola semi-cubica* $ay^2 = x^3$, *conduciamo la perpendicolare* t' *nel suo punto d'incontro con l'asse delle* x, *lo inviluppo di* t' *è una parabola conica avente lo stesso asse, il medesimo vertice e lo stesso fuoco.*

V. Retali.

L'enunciato della quistione quale era stata proposta e come si legge a pag. 94 del T. XXIV, richiedeva di dimostrare che le due parabole semi-cubica e conica hanno anche lo stesso fuoco. In generale, due curve qualunque inverse ortotangenziali l'una dell'altra, vale a dire tali che si corrispondono tangente a tangente in guisa che due tangenti omologhe si segano ortogonalmente sopra una retta fissa, sono omofocali, e le quistioni 752, 753, 754, 756, 757 (pag. 45, 94) che tutte si riferiscono alla inversione indicata, offrono esempi di questa notevole proprietà. Per quanto riguarda la quistione 757, prendendo per origine delle coordinate rettangolari la cuspide e per asse delle x la tangente cuspidale, la equazione tangenziale della parabola di Neil è

$$u^3 - 4v^2 = 0$$

e quella della sua inversa ortotangenziale, rispetto all'asse delle x, si trova subito, ponendovi $-\frac{u^2}{v}$ al posto di v, essere

$$v^2 - 4u = 0\,;$$

le sei soluzioni comuni sono dunque:

$$\begin{array}{llll} u = 0, & v = 0 \text{ (doppia)}; & & \\ u = 4, & v = 4; & u = 4, & v = -4 \\ u = -4, & v = 4i; & u = -4, & v = -4i. \end{array}$$

Oltre alla retta all'infinito ($u = 0$, $v = 0$) la quale come era da prevedersi conta per due tangenti comuni, essendo tangente della parabola conica e tangente stazionaria della semicubica, le due parabole hanno in comune le tangenti della prima uscenti dal piede della direttrice ($u = 4$, $v = \pm 4$) e le rette isotrope uscenti dal fuoco della parabola stessa; esse hanno dunque lo stesso fuoco. È poi evidente che la parabola di Neil ha un solo fuoco, giacchè, appartenendo i punti ciclici a una sua tangente stazionaria, ed essendo la cubica della terza classe, per ognuno dei punti ciclici passa un'altra sola tangente.

I punti di contatto delle due parabole colle tangenti comuni reali sono evidentemente i vertici d'un quadrato avente il centro nel piede della direttrice e hanno per coordinate: $(\frac{1}{4}, \pm \frac{1}{2})$ sulla parabola conica, $(-\frac{3}{4}, \pm \frac{1}{2})$ sulla semicubica; le coordinate dei punti di contatto delle tangenti isotrope sono invece $\left(-\frac{1}{4}, \pm \frac{i}{2}\right)$ sulla prima e $\left(\frac{3}{4}, \pm \frac{i}{2}\right)$ sull'altra. Le due coppie di *punti associati* corrispondenti ai contatti imaginarii, formano dunque un quadrato eguale al precedente ma col centro nel fuoco.

V. Retali.

771. *Indicando con* δ_a, δ_b *e* δ_c *le distanze di un punto* P *del piano* α *di un triangolo* ABC (abc) *rispettivamente dai lati* a, b *e* c, *il luogo dei punti di* α *per i quali si ha*

$$\delta_c^2 = \delta_a^2 + \delta_b^2$$

è una conica γ_2.

Se è $\widehat{C} < \frac{\pi}{2}$, *la conica* γ_2 *è una iperbole.*

Se è $\widehat{C} = \frac{\pi}{2}$, *la* γ_2 *è una parabola.* (*Il fuoco è in* C *e la direttrice è la retta a cui appartiene il lato* c; *la parabola taglia i lati* a *e* b *nei piedi delle bisettrici interne* l_a *ed* l_b.)

Se è $\widehat{C} > \frac{\pi}{2}$, *la* γ_2 *è una ellisse* (*che si riduce ad un cerchio se il triangolo dato è isoscele ed è* $\widehat{C} = \frac{3}{4}\pi$).

Il triangolo ABC *è autoconiugato rispetto alla* γ_2.

G. Cardoso-Laynes.

Risoluzione del prof. A. L. Csada, *Máramarossziget* (Ungheria).

Sieno

$$\xi = x\cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha + p_a = 0,$$
$$\eta = x\cos\beta + y \operatorname{sen}\beta + p_b = 0,$$
$$\zeta = x\cos\gamma + y \operatorname{sen}\gamma + p_c = 0,$$

le equazioni normali delle rette a cui appartengono i lati a, b e c. Il determinante

$$\varphi = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & p_a \\ \cos\beta & \operatorname{sen}\beta & p_b \\ \cos\gamma & \operatorname{sen}\gamma & p_c \end{vmatrix}$$

è diverso da zero.

Chiamando x, y le coordinate cartesiane del punto P; si ha

$$\delta_a = -(x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha + p_a),$$
$$\delta_b = -(x\cos\beta + y\operatorname{sen}\beta + p_b),$$
$$\delta_c = -(x\cos\gamma + z\cos\gamma + p_c).$$

L'equazione del luogo dei punti P è

$$\delta_c^2 = \delta_a^2 + \delta_b^2,$$

cioè

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

dove è

$$a_{11} = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos^2\gamma \qquad a_{13} = p_a\cos\alpha + p_b\cos\beta - p_c\cos\gamma$$
$$a_{12} = \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + \cos\beta\operatorname{sen}\beta - \cos\gamma\operatorname{sen}\gamma \qquad a_{23} = p_a\operatorname{sen}\alpha + p_b\operatorname{sen}\beta - p_c\operatorname{sen}\gamma$$
$$a_{22} = \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta - \operatorname{sen}^2\gamma. \qquad a_{33} = p_a^2 + p_b^2 - p_c^2.$$

La curva è dunque una conica non degenere, perchè il suo discriminante:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & i\cos\gamma \\ \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}\beta & i\operatorname{sen}\gamma \\ p_a & p_b & ip_c \end{vmatrix}^2 = -\varphi^2$$

è diverso da zero.

Si ha poi:

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & i\cos\gamma \\ \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}\beta & i\operatorname{sen}\gamma \end{vmatrix}^2 =$$
$$= \operatorname{sen}^2(\beta - \alpha) - \operatorname{sen}^2(\gamma - \beta) - \operatorname{sen}^2(\alpha - \gamma).$$

Osservando che

$$\operatorname{sen}(\beta-\alpha)=\operatorname{sen} C,$$
$$\operatorname{sen}(\gamma-\beta)=\operatorname{sen} A,$$
$$\operatorname{sen}(\alpha-\gamma)=\operatorname{sen} B,$$

si ha

$$A_{33}=-2\cos C \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B.$$

1°. Se è $\widehat{C}<\frac{\pi}{2}$, si ha $A_{33}<0$, e la γ_2 è una iperbole.

2°. Se è $\widehat{C}=\frac{\pi}{2}$, si ha $A_{33}=0$, e la γ_2 è una parabola. In questo caso è $\delta_a \perp \delta_b$ e $\overline{PC}^2=\delta_a^2+\delta_b^2$, dunque è $\overline{PC}=\delta_c$. Quindi il fuoco è in C e la direttrice è la retta c. Chiamando A_1 e B_1 i punti d'intersezione della conica coi lati a e b, il punto A_1 è equidistante da b e da c ed il punto B_1 da a e da c, perchè C è il fuoco e c è la direttrice, dunque AA_1 è la bisettrice l_a e BB_1 la bisettrice l_b.

3°. Se è $\widehat{C}>\frac{\pi}{2}$, si ha $A_{33}>0$, e la γ_2 è una ellisse, che si riduce ad un cerchio se è

$$a_{11}-a_{22}=\cos 2\alpha+\cos 2\beta-\cos 2\gamma=0,$$
$$2a_{12}=\operatorname{sen} 2\alpha+\operatorname{sen} 2\beta-\operatorname{sen} 2\gamma=0$$

ovvero, eliminando successivamente α, β e γ,

$$\cos 2(\gamma-\beta)=\cos 2A=\tfrac{1}{2},$$
$$\cos 2(\alpha-\gamma)=\cos 2B=\tfrac{1}{2},$$
$$\cos 2(\beta-\alpha)=\cos 2C=\tfrac{1}{2}.$$

Dunque è $A=B$ e $C=\frac{2}{3}\pi$.

L'equazione della polare del punto d'intersezione delle rette

$$\lambda x+\mu y+\nu=0,$$
$$\lambda' x+\mu' y+\nu'=0,$$

è

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \end{vmatrix} x+\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \end{vmatrix} y=\begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \end{vmatrix}=0.$$

Si ottiene che quella della polare del punto C, intersezione delle rette a e b, è

$$(-\varphi\cos\gamma)x+(-\varphi\operatorname{sen}\gamma)y+(-\varphi p_c)=0,$$

cioè

$$x\cos\gamma+y\operatorname{sen}\gamma+p_c=0.$$

Quest'equazione è l'equazione della retta c. Analogamente si può dimostrare che la polare del punto A (risp. B) è la retta a (risp. b).

Il triangolo ABC è dunque autoconiugato rispetto alla conica.

BIBLIOGRAFIA

Annuaire pour l'an 1910, publiè par le Bureau des longitudes.

Questo volumetto, il 115° della raccolta, è prezioso come i precedenti per il grandissimo numero di documenti e notizie in esso contenute.

In conformità delle disposizioni inaugurate nell'Annuario del 1904, si trovano in esso, dopo i quadri astronomici, numerose tavole relative alla Fisica e alla Chimica, cioè elementi magnetici, correzione e comparazione dei barometri e dei termometri, dilatazione dei liquidi, tensione dei vapori, elasticità ed attrito dei solidi, viscosità dei gas, lunghezza d'onde, solubilità ecc., essendo lasciati alle annate pari i dati geografici e statistici.

Interessantissime e veramente d'attualità sono:

1°. La notizia sulla *Riunione del Comitato internazionale permanente per l'esecuzione fotografica della carta del Cielo nel 1909*, tenuta all'Osservatorio di Parigi dal 19 al 24 aprile 1909, notizia redatta dal sig. B. Baillaud presidente della riunione stessa.

2°. La notizia di Lallemand, *Le maree della scorza terrestre e l'elasticità del globo terrestre*, nella quale dopo aver fatto la storia dell'argomento ed esposte le varie ipotesi sulla costituzione dell' interno della Terra, l'egregio Autore fa la teoria matematica delle maree della scorza terrestre.

Infine il volume contiene tre indici: cronologico il primo, per nomi d'autori il secondo, per ordine alfabetico il terzo, delle *notizie* contenute nei 115 annuari pubblicati fin quì.

Quest'opera è utile non solo ai tecnici, ai fisici, ai matematici, ma anche ai profani che potranno consultarla per avere sotto gli occhi la lista delle costanti usuali.

K.

Teixeira. — *Obras sobre Mathematica* publicados por ordem do Governo portuguez. Volume quinto. Coimbra, Imprensa da Universidade, 1909.

Questo bellissimo volume comprende la traduzione francese del tomo II del *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, opera premiata e pubblicata dall'Accademia reale delle scienze di Parigi, e si compone dei seguenti capitoli:

VII. *Curve trascendenti rimarchevoli.* — VIII. *Le spirali.* — IX. *Le parabole e le iperboli generali; le spirali corrispondenti.* — X. *Le curve cicloidali.* — XI. *Su varie classi di curve.* — XII. *Sulle cicliche sferiche.* — XIII. *Sopra alcune curve sferiche.* — XIV. *Sulle elici; sopra alcune curve dell'elicoide gobbo.* — XV. *Sopra alcune curve algebriche gobbe.* — XVI. *Sopra varie classi di curve gobbe.* — XVII. *La polodia e l'erpolodia.*

A pag. 90 vol. XXII di questo *Periodico* abbiamo parlato diffusamente dell'edizione spagnola di questa interessantissima opera pubblicata nel 1905.

K.

BRIOSCHI. — *Opere matematiche* pubblicate per cura del Comitato per le onoranze a F. BRIOSCHI. Tomo quinto. Milano, Hoepli, 1909.

Con questo volume viene compiuta la pubblicazione della grande raccolta di opere matematiche create dal più grande fra i matematici italiani del secolo scorso in cinquant'anni d'ininterrotta e meravigliosa attività scientifica.

Questo volume contiene 88 memorie e note, e cioè quelle pubblicate dal 1880 al 1897 nei *Comptes rendus des séances de l'Academie des sciences*, i lavori giovanili pubblicati dal 1852 al 1859 nei *Nouvelles Annales* ed altri lavori disseminati in ben ventitrè riviste quasi tutte straniere.

Il volume si chiude con una breve notizia che porta le firme dei professori CERRUTI, GERBALDI e PASCAL, nella quale sono esposti i criteri seguiti dagli egregi ordinatori della raccolta, e con l'indice cronologico, redatto dal prof. GERBALDI, delle 279 memorie e note inserite nei primi cinque volumi e che hanno visto la prima volta la luce nel periodo dal 1849 al 1897.

Certamente il Comitato per le onoranze a BRIOSCHI non poteva erigere al medesimo, monumento più insigne di questa bella raccolta delle sue opere, che per le cure dell'egregio editore e della tipografia del Circolo Matematico di Palermo si presenta sotto una veste tipografica bellissima.

K.

RIQUIER. — *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles.* Paris, Gauthier-Villars, 1910.

CARLO RIQUIER, professore dell'Università di Caen, da lunghi anni studia con amore e con successo le difficili e poco note quistioni relative alla teoria generale dei sistemi di equazioni e derivate parziali, aggiungendo notevoli risultati a quelli ottenuti da CAUCHY, da BRIOT e BOUQUET, DE DARBOUX, dalla sig.ª KOWALEVSKY, dal MERAY ed altri. Questi risultati, esposti già in memorie disseminate in varie riviste, l'egregio autore ha ora riuniti in un tutto organico e metodicamente ordinato, semplificando e migliorando l'esposizione, e premettendo quelle quistioni che essendo in certo modo di dominio pubblico, sono indispensabili per rendere l'opera accessibile al più gran numero di lettori. E così ha potuto mettere insieme il bel volume edito colla solita cura ed eleganza dal Gauthier-Villars.

Per ciò che si riferisce alla definizione e alle prime proprietà delle *funzioni analitiche* l'A. ha adottato il punto di vista del MERAY che consiste nel prendere per base della teoria generale delle funzioni le proprietà della serie intere.

L'opera si compone di 14 capitoli, dei quali il 1°, 2°, 3°, 4°, 8° contengono l'esposizione delle cose già note. Negli altri l'A., considerando certi sistemi differenziali, risoluti rispetto a varie derivate delle funzioni incognite che vi compariscono, stabilisce le condizioni perchè questi sistemi sieno *completamente integrabili*, e giunge a risultati di una grande generalità sull'esistenza d'integrali corrispondenti a condizioni *iniziali* arbitrarie. Negli altri capitoli poi segnala un caso interessante in cui, estendendo il metodo classico d'JACOBI, si riduce la ricerca degl'integrali all'integrazione d'equazioni differenziali totali; e infine dimostra, che, salvo alcuni casi d'incompatibilità, ogni sistema differenziale si può ridurre ad una forma completamente integrabile, e che la sua soluzione dipende per conseguenza da funzioni (o costanti) arbitrarie in numero finito.

Come applicazioni l'opera contiene lo studio d'interessanti problemi, fra i quali è notevole la determinazione delle coordinate curvilinee ortogonali a *n* variabili, quistione proposta alcuni anni or sono per il premio BORDIN e non risoluta.

Ecco i titoli dei capitoli:

I. — *Continuità.*

II. — *Serie in generale e serie intere.*

III. — *Funzioni olotrope e loro derivate, composizione di funzioni olotrope.*

IV. — *Generalità sul calcolo delle funzioni per proseguimento.*

V. — *Funzioni schematiche e tagli.*

VI. — *Calcolo inverso della derivazione.*

VII. — *Sistemi ortonomi.*

VIII. — *Funzioni implicite.*

IX. — *Semplificazione ed estensione dei risultati ottenuti sui sistemi ortonomi; proposizioni preliminari.*

X. — *Semplificazione ed estensione dei risultati ottenuti sui sistemi ortonomi. Teorema d'esistenza.*

XI. — *Applicazione delle teorie precedenti alla integrazione dei sistemi d'equazioni a derivate parziali alle quali conducono:* 1° *lo studio delle deformazioni finite d'un mezzo continuo nello spazio a un numero qualunque di dimensioni;* 2° *la determinazione dei sistemi di coordinate curvilinee ortogonali a un numero qualunque di variabili.*

XII. — *Sistemi differenziali nei quali le condizioni iniziali presentano una disposizione regolare.*

XIII. — *Sistemi differenziali l'integrazione dei quali si riduce a quella di equazioni differenziali totali.*

XIV. — *Riduzione di un sistema differenziale qualunque ad una forma completamente integrale.*

K.

CAPELLI. — *Istituzioni di analisi algebrica.* Quarta edizione notevolmente ampliata. Ad uso degli aspiranti alla licenza universitaria in scienze fisiche e matematiche. Napoli, Pellerano, 1909.

Questa importantissima opera è ormai così nota a tutti i cultori della matematica in Italia e fuori, che sarebbe superfluo parlare dei pregi di essa, specialmente in questo periodico, che ha reso conto delle edizioni precedenti. Nella nuova edizione che vede ora la luce essa si presenta notevolmente migliorata ed accresciuta di mole, essendo state rimaneggiate e messe sotto aspetti nuovi molte parti, ed essendo state introdotte molte aggiunte, le più importanti delle quali sono dall'egregio autore così enumerate nella prefazione:

« La teoria della divisibilità delle funzioni intere è stata estesa anche alle funzioni di più variabili e costituita in capitolo apposito come quella che è d'importanza fondamentale così per sè stessa come per le sue applicazioni, specialmente alla geometria algebrica.

« Il capitolo sulla continuità e derivabilità delle funzioni di variabili reali non è stata alterata nelle sue linee generali, ma notevolmente ampliata nei particolari in modo da potersi quasi riguardare come un'introduzione al calcolo infinitesimale. E di questa introduzione mi sono avvalso per dare in un nuovo capitolo, indipendentemente da qualsiasi concetto geometrico, la teoria delle funzioni circolari (ed iperboliche).

« Sono anche stati esposti in due capitoli appositi i fondamenti della teoria delle serie di potenze e delle funzioni ellittiche. Lo studioso potrà facilmente attingere dal primo il concetto di elemento di funzione analitica e della sua prosecuzione nel campo complesso. Nel secondo troverà esposta la teoria delle funzioni θ, in ispecie per quanto riguarda l'addizione degli argomenti, con formole assai più semplici ed al tempo stesso più generali di quelle che si trovano, per quanto a me consta, nei trattati speciali. Questa digressione sulle funzioni ellittiche mi è sembrata opportuna, perchè è ormai tempo (come già ebbi a notare fino dalla 2ª edizione) che anche queste trascendenti trovino un po' di posto, accanto alle trascendenti elementari, nei libri d'istituzione destinati a porre i primi fondamenti dell'analisi „.

K.

LEBON. — *Savants du jour — Henry Poincaré.* Biographie, bibliographie analytique des écrits. Paris, Gauthier-Villars, 1909.

Fino ad ora ha prevalso l'uso di non pubblicare la biografia, e l'elenco delle pubblicazioni degli uomini illustri altro che quando la morte aveva segnato la triste parola *fine*. Il prof. ERNESTO LEBON ha avuto la buona idea di rompere la tradizione ed iniziare una raccolta di notizie biografiche e bibliografiche dei più illustri fra i matematici suoi compatriotti viventi.

È questa un'opera indubbiamente utilissima, poichè se è interessante volgere lo sguardo al passato, è ancora più interessante guardare al presente, ed è utilissimo per i cultori della scienza avere delle indicazioni complete sulla vita e sulle opere degli scienziati che, giunti alla maturità dell'intelletto, hanno ormai segnato un'orma incancellabile nel campo della scienza nella quale s'inoltrano assiduamente con passo sicuro.

La raccolta non poteva cominciare con un nome più illustre. FEDERICO MASSON direttore dell'Accademia francese; ricevendo il 28 gennaio di quest'anno fra gli *immortali* l'insigne matematico ENRICO POINCARÉ, gli rivolgeva le parole seguenti: „ Dovunque andiate nel mondo, voi siete sicuro di trovare dei confratelli che si „ onorano tanto più di celebrare la vostra venuta in quanto ne ricevono l'apparenza „ d'aver compreso i vostri lavori. In Francia voi siete *il Maestro* per chiunque partecipa agli studi matematici; voi presentate nel nostro paese l'unico esempio di una „ superiorità unanimemente riconosciuta, e la vostra riputazione, formata agli inizi „ dai vostri camerati della Scuola politecnica, sostenuta dai vostri colleghi della „ Sorbona, sparsa dai vostri confratelli dell'Accademia delle Scienze, proclamata „ plebiscitariamente dagli scienziati dell'Europa intera, si è stabilita come un „ assioma . . . „

Il volume, preceduto da un bellissimo ritratto di POINCARÉ, si compone di sette sezioni; la prima contiene oltre la detta biografia scritta dal MASSON, dalla quale abbiamo stralciato il precedente brano, il lungo elenco dei gradi, funzioni, titoli onorifici, premi, onorificenze di cui è insignito il medesimo. Le altre sei comprendono gli elenchi delle sue opere rispettivamente sulla analisi matematica, sulla meccanica analitica e meccanica celeste, sulla fisica matematica, sulla filosofia scientifica, le necrologie, e le pubblicazioni diverse. Ogni sezione è preceduta dai giudizi espressi da uomini illustri. Si apprende da questo elenco che il numero degli scritti del POINCARÉ sono 436, numero veramente meraviglioso, se si pensa che egli ha soltanto 55 anni, essendo nato il 29 aprile 1854.

A questo volume ne seguiranno presto altri due su DARBOUX e PICARD.

K.

ERRATA-CORRIGE. — Fascicolo II, pagina 74, linea 5-6; *invece di* Sala della Ragione, *leggasi*: Sala della Gran Guardia.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 23 Dicembre 1909

STUDIO SULLO SVILUPPO DEI METODI GEOMETRICI [1]

I.

Per formarsi un'idea esatta dei progressi fatti dalla Geometria durante il secolo scorso, è importante dare una rapida occhiata alle condizioni in cui si trovavano le matematiche sul principio del XIX secolo. Si sa che, nell'ultimo periodo della sua vita, Lagrange, stanco delle ricerche di Analisi e di Meccanica, che pur gli assicuravano gloria immortale, aveva neglette le Matematiche per la Chimica (che, col suo metodo, diveniva facile quanto l'Algebra), per la Fisica e per le speculazioni filosofiche. Tale condizione di spirito di Lagrange, si riscontra quasi sempre in certi momenti della vita dei più grandi scienziati. Le nuove idee apparse loro nel fecondo periodo della giovinezza, e da essi introdotte nel comune dominio, hanno dato loro tutto quanto potevano attendersene; hanno esaurito il proprio compito, e sentono il bisogno di volgere verso argomenti nuovissimi l'attività della loro intelligenza. Tale bisogno, è d'uopo convenirne, doveva manifestarsi con forza tutta speciale all'epoca di Lagrange. In quel momento, infatti, il programma delle ricerche aperte ai geometri dalla scoperta del Calcolo infinitesimale sembrava quasi esaurito. Alcune equazioni differenziali di più o meno difficile integrazione, alcuni capitoli da aggiungersi al Calcolo integrale e sembravano quasi raggiunti i limiti stessi della Scienza. Laplace terminava la spiegazione del sistema del mondo e gettava le basi della Fisica molecolare. Nuove vie si aprivano per le scienze sperimentali e preparavano loro il meraviglioso sviluppo che hanno ricevuto nel secolo testè finito. Ampère, Poisson, Fourier e Cauchy stesso, il creatore della teoria degli imaginari, si davano cura di studiare prima di tutto l'applicazione dei metodi analitici alla Meccanica, alla Fisica molecolare e sembrava credessero che oltre questo nuovo dominio, che avevano fretta di percorrere, i quadri della Teoria e della Scienza fossero stabiliti definitivamente.

---

(1) Questo interessantissimo *studio* che con felicissima sintesi dà chiara idea dello sviluppo degli studi geometrici, non è altro che la conferenza letta dal prof. GASTONE DARBOUX il 24 settembre 1904 al *Congresso delle Scienze ed Arti* di Saint-Louis. Crediamo che i nostri lettori saranno grati all'insigne geometra del permesso accordatoci di pubblicarne una traduzione in questo periodico.

G. L.