SOPRA LE COLLINEAZIONI SPAZIALI

Nota di Edgardo Ciani

1. Lo scopo essenziale di questo modesto scritto è di esporre i casi più notevoli della collineazione spaziale deducendoli, con metodo semplice e uniforme dalle due proposizioni fondamentali, che reggono tutta la teoria e che ora qui ricordo esplicitamente ammettendole come dimostrate.

La prima è la seguente: " esiste una ed una sola collineazione spaziale che fa corrispondere ai cinque punti A, B, C, D, E, ordinatamente i cinque punti A′, B′, C′, D′, E′. Unica condizione restrittiva è che 4 qualunque dei 5 punti A, B, C, D, E non siano in un piano e che altrettanto possa dirsi dei 5 corrispondenti A′, B′, C′, D′, E′.

La seconda è questa: se una collineazione possiede 5 punti uniti di cui 4 qualunque non esistenti in un piano, tutti i punti dello spazio sono uniti per tale collineazione (il che si suole esprimere, più brevemente, dicendo che la collineazione è identica).

Ebbene, in base a queste due proposizioni, io riguarderò la collineazione definita dai 4 punti uniti ABCD (non esistenti in un piano) e da una ulteriore coppia di punti corrispondenti distinti MM′, in guisa dunque che la collineazione resulti individuata facendo corrispondere ai 5 punti

A, B, C, D, M

ordinatamente i 5 punti

A, B, C, D, M′,

e mi proporrò di considerare, separatamente, tutti i casi possibili che può presentare la posizione della retta MM′ riguardo al tetraedro ABCD (che chiamerò tetraedro fondamentale). — Quando si tenga conto della restrizione imposta alla prima delle proposizioni, dianzi ricordate, si vede che i casi in parola si riducono ai seguenti:

a) La retta MM′ non incontra alcuno spigolo del tetraedro ABCD.

b) La retta MM′ incontra uno ed un solo spigolo del tetraedro suddetto.

c) La retta MM' si appoggia a due spigoli opposti senza passare per alcun vertice.

d) La retta MM' passa per un vertice del tetraedro (e non incontra altri spigoli all'infuori di quelli che concorrono in tal vertice).

Corrispondentemente si vedrà che saranno attuati i casi più notevoli rispettivamente:

a) della collineazione generica,

b) della collineazione assiale,

c) della collineazione biassiale,

d) della omologia solida.

Vengono con ciò ad essere esclusi altri casi della collineazione spaziale: ciò non è dubbio (ad es. si escludono, in tal modo, quelli per i quali i punti ABCD non siano tutti reali, e quelli nei quali i detti punti non sono tutti distinti). Ma è altrettanto non dubbio che i casi esclusi presentano minore interesse specialmente dal punto di vista degli invarianti assoluti della collineazione, la nozione dei quali (nei casi esclusi) o svanisce, o si presenta in forma più complicata.

Chiudo queste poche parole d'introduzione pregando il cortese lettore a non cercare nelle pagine seguenti più di quello che di proposito vi è espresso.... Dunque: niuna novità nelle proposizioni: se qualche novità vi può essere è soltanto nella uniformità del metodo di esposizione, che è quello recentemente seguìto nelle mie lezioni universitarie di Geometria proiettiva.

2. Collineazioni del tipo generico. — Cominciamo dal considerare il caso (*a*) del n. precedente. La collineazione sia dunque determinata dal tetraedro fondamentale ABCD, esigendo che i suoi vertici sieno punti uniti, e dalla coppia di punti corrispondenti distinti MM', dati in guisa che la retta MM' non incontri alcuno spigolo del tetraedro suddetto. Dico che non esistono altri punti uniti all'infuori di A, B, C, D. Infatti: se ne esistesse un altro, esso dovrebbe giacere in una faccia, almeno, del tetraedro fondamentale altrimenti (per la 2ª proposizione del numero precedente) la collineazione sarebbe identica e quindi M ed M' dovrebbero coincidere. Ebbene, sia dunque unito un punto E della faccia ABC. Se E non appartiene a nessuna delle costole di ABCD (situate in ABC); nel piano ABC abbiamo i 4 punti uniti ABCE di cui tre non sono in linea retta: dunque tutti i punti di tale piano sono uniti: ne segue che è unita ogni retta per D, perchè contiene due punti uniti, cioè D è il punto in cui essa incontra la faccia ABC: dunque coincidono le due rette DM, DM', ossia la retta MM' passa per D il che è contro la ipotesi. Se poi E esiste sullo spigolo AB, tutti punti di AB sono uniti e quindi sono uniti tutti i piani per CD, perchè ciascuno può riguardarsi come individuato da C, D e dal suo punto d'intersezione con AB: dunque coincidono i piani che da CD proiettano M ed M', ossia la retta MM' si appoggia allo spigolo CD il che è ancora contro la ipotesi. Dualmente si vede che non esistono altri piani uniti all'infuori delle facce del tetraedro ABCD. E infine se una retta è unita, è anche unito ogni suo punto d'incontro con le faccie suddette e quindi essa è uno spigolo del tetraedro medesimo. Dunque:

" *La collineazione attuale non possiede altri punti, rette e piani uniti all'infuori dei vertici, spigoli e facce del tetraedro fondamentale* ".

Noi diremo che questa collineazione appartiene al " *tipo generico* ".

3. Sieno MM', NN' due coppie qualunque di punti corrispondenti. Le due quaterne di piani che dallo spigolo AB proiettano le due quaterne di punti CDMN, CDM'N' si corrispondono e quindi sono proiettive: tagliandole con la retta CD troveremo su di essa due quaterne proiettive di punti. Indicando dunque con R, R', S, S' le intersezioni di CD ordinatamente con i piani che da AB proiettano M, M', N, N' avremo:

$$CDRS \barwedge CDR'S'$$

ovvero

$$(CDRS) = (CDR'S')$$

che si può anche scrivere:

$$(CDRR') = (CDSS') = \text{costante}.$$

Si ha dunque il teorema:

" *Se da uno spigolo* AB *del tetraedro fondamentale* ABCD, *si proiettano due punti corrispondenti qualunque* MM', *sullo spigolo opposto* CD, *è costante il valore del birapporto della quaterna formata ordinatamente da* C, D *e dalle due proiezioni suddette* ". Il valore di questa costante si chiamerà " *invariante assoluto* " relativo allo spigolo CD. (Si esclude il valore uno, altrimenti tutti i punti di CD sono uniti e, ovviamente, si escludono i valori zero e infinito.)

4. Si hanno così sei invarianti assoluti (tanti quanti gli spigoli di ABCD), ma non sono tutti indipendenti. Così, ad es., se sono dati tre di essi inerenti a tre spigoli concorrenti in uno stesso vertice di ABCD, i rimanenti sono determinati perchè rimane in tal modo individuata la collineazione. Ciò esprime il seguente teorema (che ora dimostreremo):

" *La collineazione attuale è determinata quando sia dato il tetraedro fondamentale e i tre invarianti assoluti inerenti a tre spigoli concorrenti in un medesimo vertice* ".

Per precisare le cose stabiliremo di leggere le quaterne inerenti agli invarianti assoluti suddetti, cominciando dal vertice comune. Ciò premesso, sieno λ_1, λ_2, λ_3 i tre invarianti assoluti inerenti agli spigoli AB, AC, AD, concorrenti in A. Allora, per trovare il corrispondente di un qualsiasi dato punto M, proiettiamolo da CD, DB, BC successivamente sopra gli spigoli opposti AB, AC, AD in Q, R, S, e dopo determiniamo, sopra tali spigoli, tre punti Q', R', S' in guisa che si abbia:

$$(ABQQ') = \lambda_1 ; \ (ACRR') = \lambda_2 ; \ (ADSS') = \lambda_3.$$

Poi proiettiamo i punti così trovati Q', R', S' rispettivamente da CD, DB, BC: il punto M' d'intersezione dei tre piani che si ottengono sarà il punto cercato corrispondente a M'.

" *I tre invarianti assoluti $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ debbono essere tutti disuguali* ". Infatti, se due fossero uguali, ad es. $\lambda_1 = \lambda_2$ seguirebbe

$$ABQQ' \barwedge ACRR'$$

e quindi le tre rette BC, QR, Q'R' s'incontrerebbero in un medesimo punto che sarebbe unito: onde sulla BC avremmo un 3° punto unito il che è impossibile (n. 2).

5. La collineazione che ha lo stesso tetraedro fondamentale unito ABCD e i cui tre invarianti assoluti inerenti al vertice A sono gl'inversi di $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$, si chiama la collineazione inversa di quella data. Se la collineazione data si indica con Ω, la sua inversa si suole indicare col simbolo Ω^{-1}. La ragione del nome e del simbolo sta in questo: se a un punto M qualunque si applica la collineazione Ω pervenendo così a M', applicando dopo la collineazione Ω^{-1} a M' si ritorna in M. Infatti chiamiamo M'' il corrispondente di M' secondo la Ω^{-1}, e con Q'', R'', S'' le proiezioni di M'' ordinatamente da CD, DB, BC sugli spigoli opposti: avremo dunque:

$$(ABQ'Q'') = \frac{1}{\lambda_1} ; \ (ACR'R'') = \frac{1}{\lambda_2} ; \ (ADS'S'') = \frac{1}{\lambda_3}$$

cioè:

$$(ABQ''Q') = \lambda_1 ; \ (ACR''R') = \lambda_2 ; \ (ADS''S') = \lambda_3$$

e per conseguenza (n. 4)

$$ABQQ' \barwedge ABQ''Q' ; \ ACRR' \barwedge ACR''R'$$
$$ADSS' \barwedge ADS''S'$$

cioè Q'', R'', S'' coincidono ordinatamente con Q', R', S' e quindi anche M'' con M'. Questo dimostra l'affermazione fatta dianzi.

" *Una collineazione del tipo generico non può mai coincidere con la propria inversa* ". Infatti ciò richiederebbe $\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_1}$, $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_2}$, $\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_3}$ e quindi: $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \lambda_3^2 = 1$, ossia gli invarianti assoluti non potrebbero essere disuguali il che è impossibile (n. 4).

Il piano all'infinito individua due piani che gli corrispondono nella collineazione diretta e nella inversa. *Essi si chiamano i piani limiti di entrambe.*

6. Collineazioni del tipo assiale. — Passiamo ora a considerare il caso (*b*) del n. 1. Cioè la retta MM′ incontri uno ed un solo spigolo AB del tetraedro fondamentale ABCD. Segue subito che è unito ogni piano per AB giacchè sono uniti i tre piani ABC, ABD, ABMM′, ma non ogni punto di AB è unito, altrimenti sarebbe unito ogni piano per CD (come individuato da CD e dalla sua intersezione con AB), e quindi coinciderebbero i piani CDM, CDM′, ossia la retta MM′ incontrerebbe anche CD il che è contro la ipotesi. Dunque, mentre la retta AB è inviluppo di piani uniti essa non è luogo di punti uniti: essa contiene i due soli punti A, B e non altri. Ne segue che ogni punto di CD è unito, perchè comune alla retta unita CD e al piano unito che lo proietta da AB. Dunque CD è invece luogo di punti uniti, ma non inviluppo di piani uniti e due soli piani per CD sono uniti, cioè: CDA e CDB. Non vi sono altri punti uniti, perchè se ne esistesse un altro indicandolo con E, si vede che E dovrebbe essere esterno ad AB e allora sarebbe sempre possibile aggiungere ai tre punti A, B, E due punti della retta CD, così da ottenere cinque punti uniti di cui 4 qualunque non esistono in un piano e quindi la collineazione sarebbe identica (n. 1), il che è impossibile perchè M ed M′ sono due punti distinti. Dualmente si vede che non vi sono altri piani uniti all'infuori di quelli descritti. Noi diremo che la collineazione attuale appartiene " *al tipo assiale* ". Dunque si ha:

" *In una collineazione del tipo assiale sono punti uniti tutti quelli di una retta* r *e altri due situati su di una retta* s *sghemba con* r. *Dualmente: sono piani uniti tutti quelli che passano per* s *e altri due: quelli che da* r *proiettano i due punti uniti giacenti sopra* s ".

Esiste dunque un asse luogo di punti uniti, ma non inviluppo di piani uniti e un altro asse (sghembo col primo), che è invece inviluppo di piani uniti, ma non luogo di punti uniti. Chiameremo il primo: l'asse di punti uniti; e il secondo l'asse di piani uniti. Non esistono altri punti nè piani uniti all'infuori di quelli descritti.

7. Se M è un punto qualunque, il piano che passa per M e per l'asse di piani uniti, è unito e quindi contiene il punto M′ corrispondente di M. Quindi:

" *Tutte le rette che congiungono due punti corrispondenti si appoggiano all'asse di piani uniti* ".

Dualmente: tutte le rette intersezioni di due piani corrispondenti si appoggiano all'asse di punti uniti.

Ora una retta unita è contemporaneamente congiungente di punti corrispondenti e intersezione di piani corrispondenti; per conseguenza si può dire che:

" *Nella collineazione attuale sono rette unite i due assi e inoltre tutte quelle dei due fasci che si ottengono proiettando l'asse di punti uniti dai due punti uniti che giacciono sull'asse di piani uniti* ".

Non esistono altre rette unite.

8. La considerazione dei due fasci precedenti conduce subito a quest'altro teorema:

" *Una collineazione del tipo assiale possiede due e due sole omologie piane subordinate: esse hanno in comune l'asse, che è l'asse di punti uniti della collineazione: i centri sono i due punti uniti dell'asse di piani uniti* „.

Gl'invarianti assoluti di queste due omologie piane si chiameranno gli invarianti assoluti della collineazione. Se fissiamo che la quaterna che individua l'invariante assoluto di una omologia piana, sia ordinata nel modo seguente: un punto qualunque, il suo corrispondente, il centro d'omologia, il punto d'incontro della sede della quaterna con l'asse di omologia; si può enunciare una proposizione del tutto simile a quella del n. 4, cioè:

" *I due invarianti assoluti di una collineazione del tipo assiale debbono essere disuguali* „.

Infatti siano A, B i centri delle due omologie subordinate: conduciamo per AB un piano a incontrare in R l'asse di punti uniti: se PP′ sono due punti corrispondenti sopra AR e QQ′ altri due punti corrispondenti sopra BR (secondo le due omologie suddette); i due invarianti in parola sono i due birapporti

$$(PP'AR), (QQ'BR).$$

Se essi fossero uguali ne seguirebbe

$$PP'AR \barwedge QQ'BR$$

e quindi le tre rette AB, PQ, P′Q′ dovrebbero passare per uno stesso punto che evidentemente sarebbe unito per la nostra collineazione, e quindi sull'asse AB di piani uniti esisterebbero tre punti uniti il che è impossibile (n. 6).

9. " *Una collineazione del tipo assiale è determinata dalle sue due omologie subordinate purchè esse sieno sottoposte alle seguenti condizioni:*

" *Sieno situate in piani differenti, ma abbiano l'asse in comune (e sia, naturalmente, la retta intersezione dei due piani);*

" *i centri non sieno incidenti al comune asse suddetto, e gl'invarianti assoluti sieno disuguali* „.

Quando queste condizioni sieno adempiute l'asse di punti uniti della collineazione resultante è l'asse di omologia suddetto, e i due ulteriori punti uniti della collineazione sono i relativi centri di omologia. Indichiamo infatti con A e B i centri e con r l'asse delle due omologie (in posizione sghemba con la retta AB). Sia M un punto qualsiasi esterno alla r e alla AB, e indichiamo con R il punto ove il piano ABM incontra la r: proiettiamo poi M da A e da B rispettivamente sopra BR e AR nei punti Q e P. Sieno Q′ e P′ i corrispondenti di Q e P nelle due omologie date: essi giacciono rispettivamente sopra BR e AR, così che le rette AQ′, BP′ esistono nel piano ABR e quindi s'incontrano in un punto che indicheremo con M′. Prendiamo finalmente sopra r due punti C, D diversi da r e consideriamo la collineazione che ha i quattro punti uniti A, B, C, D e in cui M, M′ sono punti corrispondenti. Essa è del tipo assiale perchè la retta MM′ incontra il solo spigolo AB del tetraedro unito ABCD (n. 6) manifestamente le omologie date sono ad essa subordinate, non solo ma si può anche dire che la costruzione precedente serve a trovare il corrispondente M′ di un punto generico M.

Il teorema ora dimostrato si esprime affermando che:

" *Una collineazione del tipo assiale è determinata quando sieno dati: l'asse di punti uniti, i due punti uniti ulteriori (su di una retta sghemba con l'asse in parola) e i valori dei due invarianti assoluti* ".

10. La collineazione assiale che ha gli stessi punti uniti di quella data e i cui invarianti assoluti sono inversi rispettivamente di quelli della data (in guisa dunque che le due omologie piane subordinate dell'una, sieno inverse di quelle dell'altra) si chiama la *collineazione inversa* della data.

Indicando quella data col simbolo Ω, ci serviremo del simbolo Ω^{-1} per l'inversa. La ragione del nome e del simbolo è identica a quella già addotta in uguale occasione al n. 5. Infatti la costruzione del numero precedente dimostra che se Ω trasporta M in M′, la Ω^{-1} trasporta M′ in M.

" *Una collineazione del tipo assiale non può mai coincidere con la propria inversa* ".

Indicando infatti con λ_1, λ_2 gl'invarianti assoluti di Ω, quelli di Ω^{-1} saranno $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}$ e quindi se Ω e Ω^{-1} coincidessero dovremmo avere $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 1$, ma il valore uno va escluso altrimenti la corrispondente omologia è una identità: dunque $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, cioè gl'invarianti assoluti dovrebbero essere uguali, ciò che è impossibile (n. 8).

I due piani che corrispondono al piano all'infinito secondo la Ω e la Ω^{-1}, si chiamano i *piani limiti* di Ω o di Ω^{-1}. Siccome due piani corrispondenti si tagliano secondo una retta che si appoggia all'asse di punti uniti (n. 7), così ne viene che:

" *I piani limiti di una collineazione del tipo assiale sono paralleli all'asse di punti uniti* ".

11. Collineazioni del tipo biassiale. — Passiamo adesso al caso (c) del n. 1. Cioè la retta MM′ si appoggia ai due spigoli opposti AB, CD del tetraedro fondamentale ABCD. Il ragionamento fatto al n. 6 è ora simmetrico rispetto a entrambi gli spigoli AB, CD: per ciascuno passano 3 piani uniti e quindi tutti sono uniti, da cui segue immediatamente che l'uno e l'altro sono anche luogo di punti uniti. Si dice allora che la collineazione appartiene *al tipo biassiale*.

Dunque: " *Una collineazione del tipo biassiale possiede due assi sghembi, ciascuno dei quali è contemporaneamente luogo di punti uniti e inviluppo di piani uniti* ".

Non esistono altri punti uniti. Infatti se ne esistesse uno sarebbe possibile considerare, insieme ad esso, altri 4 punti uniti (due sopra ciascun asse) in guisa da avere 5 punti uniti di cui 4 non esistenti in un piano: la collineazione sarebbe identica (n. 1) mentre M ed M′ sono due punti distinti per ipotesi. Dualmente si vede che non esistono altri piani uniti.

12. Conduciamo per un punto qualunque P dello spazio la retta appoggiata ai due assi r ed s della nostra collineazione: siccome i due punti di appoggio sono uniti, così la retta in parola è unita e quindi contiene il corrispondente P′ di P.

Tenendo presente anche la considerazione duale si può dire che: " *In una collineazione biassiale ogni retta che congiunge due punti corrispondenti è anche retta d'incontro di piani corrispondenti e si appoggia a entrambi gli assi della collineazione* ".

D'altra parte ogni retta unita che non sia luogo di punti uniti congiunge punti corrispondenti ed è intersezione di piani corrispondenti. Quindi: *Sono rette unite gli assi e tutte quelle che incontrano entrambi gli assi.* Non esistono altre rette unite.

13. Sieno PP′ due punti corrispondenti qualunque e H,K i punti in cui la retta PP′ incontra gli assi r, s della collineazione: dico che il birapporto (PP′HK) è costante al variare della coppia PP′. L'affermazione è evidente se la retta HK rimane fissa e P, P′ variano conseguentemente su di essa, giacchè allora viene a subordinarsi sopra tale retta una proiettività rettilinea di cui H e K sono punti uniti e PP′ due punti corrispondenti qualunque. Consideriamo poi un'altra coppia di punti corrispondenti Q, Q′, su di una retta diversa dalla HK e siano E, F i punti in cui la QQ′ si appoggia a r, s. Tiriamo le due rette corrispondenti PQ, P′Q′, e da un punto T della prima conduciamo la retta t a incontrare r ed s. Il punto T′ deve esistere sulla t e d'altra parte anche sulla P′Q′, quindi ne viene che la t incontra pure la P′Q′. Allora considerando i 4 piani che da t proiettano le quattro rette PQ, P′Q′, r, s, si vede subito che le due quaterne PP′HK, QQ′EF sono proiettive (come sezioni della quaterna di piani sopra nominata). Dunque

$$(\mathrm{PP'HK}) = (\mathrm{QQ'EF}).$$

Resulta quindi il teorema seguente:

" *In una collineazione del tipo biassiale è costante il birapporto della quaterna rettilinea formata ordinatamente da un punto qualunque, dal suo corrispondente e dai due punti nei quali la retta che congiunge i punti corrispondenti suddetti si appoggia agli assi della collineazione* ".

Il valore di questo birapporto si chiama " *invariante assoluto* " della collineazione. È interessante il caso in cui tale valore è l'unità negativa, per una ragione che vedremo nel prossimo numero. Quando ciò accade la quaterna in parola è armonica e la collineazione prende allora il nome di *involuzione gobba.*

In ogni caso è manifesto che:

" *La collineazione biassiale è individuata quando siano dati gli assi e l'invariante assoluto* ".

Infatti se r ed s sono gli assi dati (sghembi) e λ è l'invariante assoluto, per trovare il corrispondente M′ di un punto qualsiasi M basterà tirare da M la retta appoggiata a r e s: se H e K sono i punti di appoggio dovremo dopo trovare su tale retta il punto M′ tale che sia

$$(\mathrm{MM'HK}) = \lambda$$

e la costruzione sarà così ottenuta.

14. Indichiamo col simbolo Ω la nostra collineazione e col simbolo Ω^{-1} quella che ha gli stessi assi di Ω, ma il cui invariante assoluto è inverso di quello di Ω. Chiameremo Ω^{-1} la inversa di Ω. La ragione del nome e del simbolo è la stessa di quella già addotta in occasioni analoghe nei numeri 5 e 10.

Se cioè al punto M corrisponde M′ nella Ω, si dimostra facilmente che a M′ corrisponde M nella Ω^{-1}. Infatti indicando con M″ il corrispondente di M′ nella Ω^{-1}, osserveremo che i tre punti M, M′, M″ sono in linea retta (perchè Ω e Ω^{-1} hanno in comune gli assi). Indicando con H e K i punti in cui tale retta incontra gli assi r, s, avremo:

$$(\mathrm{MM'HK}) = \lambda, \quad (\mathrm{M'M''HK}) = \frac{1}{\lambda}$$

e quindi

$$(\mathrm{M''M'HK}) = \lambda$$

cioè:

$$\mathrm{MM'HK} \barwedge \mathrm{M''M'HK}$$

dunque M ed M″ coincidono, il che prova l'affermazione fatta.

Può una collineazione biassiale coincidere con la propria inversa? Perchè ciò accada bisogna che sia $\lambda = \frac{1}{\lambda}$, cioè $\lambda = \pm 1$, ma $\lambda = 1$ si esclude altrimenti Ω è identica, quindi $\lambda = -1$.

Dunque: " *l'unica collineazione biassiale che coincida con la propria inversa è la involuzione gobba* " (n. 13).

15. I piani corrispondenti al piano all'infinito nella Ω e nella Ω^{-1} si chiamano i *piani limiti* dell'una, o dell'altra. Siccome due piani corrispondenti si tagliano secondo una retta appoggiata a entrambi gli assi, così si può dire che

" *I piani limiti di una collineazione biassiale sono paralleli a entrambi gli assi della collineazione* ".

Si può anche aggiungere che:

" *La distanza fra un piano limite e uno degli assi è uguale alla distanza fra l'altro piano limite e l'altro asse* ". Infatti, sulla retta che misura la minima distanza fra gli assi, consideriamo i corrispondenti R' e R'' del punto R_∞ di tale retta (nella Ω e nella Ω^{-1}) e osserviamo che avremo (indicando con H e K i punti in cui la retta in parola si appoggia agli assi):

$$(R_\infty R'HK) = \frac{1}{(R_\infty R''HK)}$$

cioè:

$$\frac{\overline{KR'}}{\overline{HR'}} = \frac{\overline{HR''}}{\overline{KR''}}$$

ovvero:

$$\frac{\overline{KR'} - \overline{HR'}}{\overline{HR'}} = \frac{\overline{HR''} - \overline{KR''}}{\overline{KR''}}$$

ed anche:

$$\frac{\overline{KH}}{\overline{HR'}} = \frac{\overline{HK}}{\overline{KR''}}$$

e quindi, in valore assoluto, $HR' = KR''$, $\overline{KR'} = \overline{HR''}$, il che prova l'asserto.

16. Omologie solide. — Finalmente non manca che l'esame del caso (*d*) del n. 1: cioè la retta MM' passa per un vertice A del tetraedro fondamentale e i punti M, M' non esistono in alcuna faccia del tetraedro medesimo. Segue subito che sono uniti tutti i punti del piano BCD (perchè in esso sono uniti B, C, D e il punto d'incontro colla retta che contiene i tre punti A, M, M').

La collineazione attuale si chiama " *una omologia solida* ", A è " *il centro di omologia* ", il piano BCD è " *il piano di omologia* ". Dunque:

" *In una omologia solida sono punti uniti: il centro, tutti i punti del piano di omologia e non altri* ". Se esistesse infatti un altro punto P sarebbe possibile scegliere, nel piano di omologia, tre punti in guisa che insieme a P e al centro di omologia si avessero cinque punti uniti, di cui 4 non esistenti in un piano, e la collineazione dovrebbe essere identica (n. 1), il che è impossibile perchè M ed M' sono due punti distinti per ipotesi.

" *Dualmente si vede che i soli piani uniti sono: il piano di omologia e tutti quelli passanti per il centro di omologia* ".

17. Ogni retta passante per il centro A è unita perchè congiunge due punti uniti (il punto A e la intersezione sua col piano di omologia). Se dunque N ed N' sono due punti corrispondenti qualunque le rette AN, AN′ debbono coincidere, cioè i tre punti A, N, N′ sono in linea retta. Quindi:

" *In una omologia solida due punti corrispondenti sono sempre allineati col centro e, dualmente, due piani corrispondenti si tagliano sempre in una retta esistente sul piano di omologia* ".

Il punto d'incontro di una retta col piano di omologia è unito, ed è anche unito il piano che la proietta dal centro; dunque si ha che:

" *Due rette corrispondenti si tagliano sul piano di omologia ed esistono in un piano passante per il centro di omologia* ".

Una retta unita, se non è luogo di punti uniti, congiunge punti corrispondenti e quindi ne segue:

" *Sono rette unite (e non altre) quelle del piano di omologia e quelle passanti per il centro di omologia* ".

18. Sieno M, M′ due punti corrispondenti qualunque: sulla retta che li congiunge consideriamo il centro A di omologia e il punto H d'incontro col piano di omologia: dico che il birapporto (MM′AH) non varia al variare della coppia MM′. Il teorema è evidente se la coppia MM′ varia sulla retta AH, perchè, su tale retta, viene a individuarsi una proiettività rettilinea subordinata in cui A, H sono punti uniti. Se poi la retta che congiunge altri due punti corrispondenti NN′ è diversa dalla MM′ si può osservare che le due rette MN, M′N′, essendo corrispondenti, si taglieranno in un punto S del piano di omologia, per cui indicando con K il punto di incontro di tale piano con NN′ ne seguirà che le due quaterne

$$MM'AH, \quad NN'AK$$

saranno prospettive da S e quindi

$$(MM'AH) = (NN'AK)$$

il che prova l'asserto. Si può dunque enunciare il seguente teorema:

" *In una omologia solida è costante il valore del birapporto della quaterna rettilinea costituita ordinatamente: da un punto, dal suo corrispondente, dal centro e dal punto d'incontro della sede della quaterna, col piano di omologia* ".

Il valore di questa costante si chiama " *invariante assoluto* " della omologia. È interessante, come vedremo, il caso in cui questo valore sia l'unità negativa e quindi la quaterna suddetta sia armonica. Allora la omologia prende il nome di *omologia armonica*.

19. *Una omologia solida è determinata quando sia dato il centro* A, *il piano d'omologia* π *e una coppia di punti corrispondenti* MM′ *allineati col centro (ed esterni a* π*).*

Infatti (poichè noi escludiamo il caso in cui A sia incidente con π) sarà sempre possibile scegliere tre punti BCD in π, in guisa che resulti individuata la collineazione in cui A, B, C, D sono punti uniti ed M, M′ corrispondenti. Siccome la retta MM′ passa per A così ne segue che tale collineazione è l'omologia cercata (n. 16). Dato un punto N esterno alla retta MM′, per costruirne il corrispondente basta osservare che esso deve trovarsi sopra la AN e sulla corrispondente alla MN, la quale è subito costruita perchè passa per M′ e per il punto d'incontro di MN con π. La costruzione cade se N è sulla retta MM′: ma vi si può rimediare costruendo, avanti, una coppia di punti corrispondenti esterni a tale retta e valendosi dopo di questa nuova coppia per trovare N′.

" *L'omologia è anche determinata quando sia dato il centro, il piano di omologia e il valore dell'invariante assoluto* λ ". — Perchè se A è il centro e π il piano dato, per trovare il corrispondente di un punto qualsiasi M, basta congiungere M con A, trovare il punto H in cui tale retta incontra π e, dopo, costruire su di essa un tal punto M′, così che si abbia:

$$(MM'AH) = \lambda.$$

20. L'omologia solida che ha lo stesso centro e lo stesso piano d'omologia della data, ma il cui invariante assoluto sia inverso di quello della data, si chiama *omologia inversa*. Se quella data si indica con Ω, la inversa si indicherà con Ω^{-1}.

La ragione del nome e del simbolo è la solita (numeri 5, 10, 14). Se, cioè, nella Ω al punto M corrisponde M′, nella Ω^{-1} a M′ corrisponde M. Infatti chiamando con M″ il corrispondente di M′ in Ω^{-1} si osservi che M, M′, M″ esistono su di una retta per A: se H è il punto in cui essa incontra il piano di omologia avremo:

$$(MM'AH) = \lambda\,; \quad (M'M''AH = \frac{1}{\lambda}$$

e quindi

$$(M''M'AH) = \lambda$$

e per conseguenza

$$MM'AH \barwedge M''M'AH$$

il che significa che M ed M″ coincidono.

Può una omologia solida coincidere con la propria inversa? Perchè ciò accada deve essere $\lambda = \frac{1}{\lambda}$, cioè $\lambda = \pm 1$, ma il segno positivo si esclude altrimenti Ω è l'identità. Dunque $\lambda = -1$, ossia (n. 18):

" *L'unica omologia solida che coincida con la propria inversa è l'omologia armonica* ".

21. I piani corrispondenti al piano all'infinito in una omologia e nella sua inversa chiamansi i *piani limiti* dell'una, o dell'altra. Siccome due piani corrispondenti si tagliano sul piano di omologia (n. 17), così ne segue facilmente che:

" *I piani limiti sono paralleli al piano di omologia* ".

Se poi si applica il ragionamento del n. 15, riferendolo alla perpendicolare tirata per il centro sul piano di omologia, si può aggiungere che:

" *La distanza fra il centro e un piano limite è uguale, in valore assoluto, alla distanza fra il piano d'omologia e l'altro piano limite* ".

22. Coppie involutorie. — Rimanendo sempre nel campo delle collineazioni descritte nei numeri precedenti, diremo che una coppia di punti AA' è involutoria, quando essi si corrispondono tanto nella collineazione diretta Ω, quanto nella inversa Ω^{-1}. Se tutte le coppie possibili sono involutorie allora Ω e Ω^{-1} coincidono e la collineazione prende il nome di " *involuzione spaziale* ". Riunendo i teoremi dei numeri 5, 10, 14, 20 si può dire che:

" *Le sole involuzioni spaziali sono: l'omologia armonica e l'involuzione gobba* ".

All'infuori di questo caso si può porre la seguente questione: *può una collineazione Ω possedere delle coppie involutorie senza che tutte lo siano? (senza cioè che Ω sia una involuzione spaziale?)*

Per rispondere a questa domanda cominciamo dall'osservare che se esiste una coppia involutoria AA', ne esistono infinite: la sede comune è la retta AA' e su di essa compongono una involuzione rettilinea subordinata a Ω. Di guisa che la questione si tramuta in quest'altra: " *Quante involuzioni rettilinee possono essere contenute nella nostra collineazione Ω, senza che, per questo, Ω sia una involuzione spaziale?* "

Se si osserva che le sedi di tali involuzioni rettilinee debbono essere rette unite per Ω si vede subito che Ω non può essere omologia, nè appartenere al tipo biassiale (perchè l'invariante assoluto, calcolato su tali rette unite, sarebbe l'unità negativa e quindi Ω sarebbe una involuzione).

23. Rimangono dunque da esaminare le collineazioni del tipo assiale e quelle del tipo generico. Per procedere per gradi, proviamo a esigere la esistenza di una (e una sola) involuzione rettilinea subordinata, e cerchiamo le conseguenze.

Se Ω è assiale la sede supposta non può appartenere come raggio unito ad alcuna delle due omologie piane subordinate, altrimenti la omologia relativa sarebbe armonica e Ω possederebbe infinite involuzioni rettilinee subordinate. Dunque la sede non può essere altro che l'asse dei piani uniti (n. 6). Indichiamo allora con Ω^2 la collineazione che si ottiene applicando successivamente due volte la Ω. Si vede subito che Ω^2 è biassiale ed ha per assi quelli di Ω. Riprendiamo le notazioni del n. 8 chiamando con P'', Q'' i corrispondenti di P', Q' secondo Ω, di guisa che P'', Q'' saranno i corrispondenti di P, Q secondo Ω^2. Ma si ha

$$(PP'AR) = (P'P''AR) = \lambda_1$$
$$(QQ'BR) = (Q'Q''BR) = \lambda_2$$

dove λ_1 e λ_2 sono gl'invarianti assoluti di Ω. Segue

$$(PP''AR) = (PP'AR)\ (P'P''AR) = \lambda_1^2$$
$$(QQ''BR) = (QQ'BR)\ (Q'Q''BR) = \lambda_2^2$$

e Ω^2 essendo biassiale ne viene (n. 13) che

$$(PP''AR) = (QQ''BR)$$

e quindi

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2$$

ma non può essere $\lambda_1 = \lambda_2$ (n. 8), dunque sarà $\lambda_1 = -\lambda_2$, cioè Ω avrà gli invariati assoluti uguali ma di segno contrario.

Se poi Ω è del tipo generico, la sede della involuzione rettilinea dovendo essere unita, non può essere altro che uno spigolo del tetraedro fondamentale (n. 2). Si ha dunque il teorema:

" *Se una collineazione possiede una involuzione rettilinea subordinata (e non altre), essa è necessariamente del tipo assiale, o del tipo generico. Nel 1º caso la sede dell'involuzione è l'asse di piani uniti e i due invarianti assoluti sono uguali in grandezza, ma di segno contrario. Nel 2º caso la sede è uno degli spigoli del tetraedro fondamentale* ".

24. Procedendo sempre per gradi esigiamo ora la presenza di due (e non più) involuzioni rettilinee subordinate.

Le sedi saranno sghembe altrimenti esisterebbero, in conseguenza infinite involuzioni rettilinee subordinate, e precisamente tutte quelle di una omologia piana armonica subordinata. Il centro sarebbe il punto d'incontro delle due sedi supposte e il piano sarebbe quello individuato dalle due sedi medesime. Le sedi essendo sghembe, la collineazione cercata non può essere assiale altrimenti gli invarianti assoluti sarebbero uguali, il che è impossibile (n. 8).

Non resta dunque altra ipotesi (n. 22) che la Ω sia del tipo generico e le due sedi sieno due spigoli opposti del tetraedro fondamentale. In conclusione si può dunque enunciare la seguente proposizione:

" *Il massimo numero di involuzioni rettilinee subordinate che possa contenere una collineazione senza contenerne infinite, è due: la collineazione che le possiede è del tipo generico e le sedi delle due involuzioni sono due spigoli opposti del tetraedro fondamentale.*

" *L'unica collineazione che contenga infinite involuzioni rettilinee (senza perciò essere una involuzione spaziale) appartiene al tipo assiale e una delle sue omologie piane subordinate è armonica* ". (Le sedi delle involuzioni rettilinee suddette costituiscono tutti i raggi uniti di detta omologia piana).

SUL VERSO DEGLI ANGOLI E DEI TRIEDRI

Mi permetto di esporre in questa Nota come si potrebbero introdurre logicamente nell'Insegnamento Elementare di Geometria i concetti di *verso* degli angoli (di un piano), e di *verso* dei triedri, — indispensabili ove si voglia con qualche precisione trattare delle similitudini (e delle uguaglianze) dirette ed inverse. — I paragoni del verso degli angoli, e del verso dei triedri si fondano, qui, entrambi, su concetti affatto analoghi di *parità*, e *disparità* che credo sia bene porre in evidenza: ma, astraendo da ciò, per quanto riguarda il verso degli angoli il procedimento qui seguìto coincide sostanzialmente con quello esposto dal Ch.^{mo} prof. B. LEVI, [1] e consiste nel giudicare del verso di due angoli di un piano mediante una retta ausiliaria, e nel mostrare come l'eseguito giudizio sia indipendente dalla retta (n. 1-5); dedotta da ciò la nozione di *verso* pei triangoli di un piano (n. 6), il giudizio sul verso di due triedri si fa coll'uso di un piano ausiliario, e si dimostra indipendente dal piano (n. 7 e segg.). — Si hanno così, pei triedri e per gli angoli, definizioni e procedimenti affatto analoghi, il che è certo didatticamente vantaggioso. — Tralasciando le facili estensioni, mi limito a considerare angoli e triedri convessi, che è quanto basta allo scopo indicato. — Suppongo noti ed esposti i postulati d'ordinamento dei punti di una retta, di un piano, dello spazio e i loro immediati corollari.

1. Per angolo di due raggi m, n uscenti da un punto e che supporremo sempre non per diritto, nè sovrapposti, intendiamo l'angolo *convesso* che ha per lati i due raggi, cioè il luogo dei punti del loro piano che rispetto alla retta di ognuno dei due raggi stanno dalla banda ov'è l'altro.

Sieno, ora, due angoli $\widehat{mn}$, $\widehat{pq}$, riferiti, [2] di un piano; una retta t del piano che non passi per nessuno dei due vertici, nè sia parallela a nessun lato, incontri le *rette* dei lati ordinatamente nei punti M, N, P, Q; diremo che *i due angoli dati sono* EQUIVERSI FRA LORO RISPETTO ALLA *t*, *se i segmenti* MN, PQ *sono* EQUIVERSI *quando è* PARI *il numero totale dei lati dei due angoli* (cioè dei *raggi* m n p q) *incontrati dalla* t, o *se*

(1) B. LEVI, *Sull'uguaglianza diretta e inversa delle figure* (in questo Periodico, Vol. XII. Fasc. V, 1904). — Cfr. anche gli *Elementi di Geometria* di G. VERONESE. Padova, Drucker, 1897; pp. 187-192.

(2) Dicendo (esplicitamente o no) che due segmenti MN, PQ; due angoli $\widehat{mn}$, $\widehat{pq}$; due triangoli MNP, QRS; due triedri $(m\,n\,p)$, $(q\,r\,s)$ sono riferiti, intendiamo che agli elementi (estremi, lati, vertici, spigoli) M, N; m, n; M, N, P; m, n, p dell'uno sieno rispettivamente omologhi gli elementi P, Q; p, q; Q, R, S; q, r, s dell'altro.

i segmenti stessi sono CONTRAVERSI, *quando è* DISPARI *lo stesso numero. Nelle opposte ipotesi i due angoli si diranno* CONTRAVERSI RISPETTO ALLA *t*. — Perchè, giusta tale definizione, possa farsi il giudizio sul verso rispetto a t dei due angoli dati, occorre quindi che la t non passi per nessun vertice, nè sia parallela a nessun lato. Queste ipotesi si sottintenderanno sempre nel seguito.

COROLLARIO 1°. — *Se due angoli riferiti hanno il medesimo vertice e un lato (omologo a sè) in comune, essi sono equiversi rispetto a ogni retta del piano ove gli altri due lati (omologhi fra loro) sieno da una banda della retta del lato comune; sono contraversi rispetto a ogni retta del piano nella ipotesi contraria.* — Infatti siano $\widehat{mp}, \widehat{mq}$ i due angoli dati, e i lati p, q stieno dalla stessa banda rispetto al lato comune: allora i segmenti determinati su una segante t dalle rette dei lati dei due angoli hanno un estremo comune e gli altri due dalla stessa banda di questo e sono quindi equiversi, se la t incontra ambedue i raggi p, q, o ambedue gli opposti; hanno invece un estremo in comune e gli altri due da banda opposta di esso, e sono contraversi, se la t incontra uno dei due raggi p, q e l'opposto dell'altro. — E poichè la t incontra, nella retta di m, due o nessun lato dei due angoli, questi sono equiversi rispetto a ogni segante t. Similmente nella seconda ipotesi.

COROLLARIO 2°. — *Se due lati omologhi di due angoli riferiti sono raggi opposti, i due angoli sono equiversi rispetto a ogni retta del loro piano, se gli altri due lati sono da bande opposte rispetto alla retta dei primi; contraversi rispetto a ogni retta del piano, se gli altri due lati sono dalla stessa banda rispetto a tale retta.* — Si dimostra in modo affatto analogo al precedente. In particolare:

COROLLARIO 3°. — *Due angoli opposti al vertice, riferiti in modo che i lati omologhi sieno raggi opposti, sono equiversi rispetto a ogni retta del piano.*

COROLLARIO 4°. — *Ogni angolo* $\widehat{mn}$ *è contraverso al suo inverso* $\widehat{nm}$ *rispetto a ogni retta del suo piano.*

2. *Se due angoli di un piano sono equiversi ad un terzo* (del medesimo piano) *rispetto a una stessa retta, essi sono equiversi fra loro rispetto alla stessa retta.* I due angoli $\widehat{mn}, \widehat{pq}$ sieno equiversi all'angolo $\widehat{rs}$ rispetto alla retta t: sieno MN, PQ, RS le coppie di punti che le rette dei lati degli angoli segano su t; sia, ad esempio, *pari* il numero dei raggi m, n, r, s incontrati da t; *dispari* l'analogo pei raggi p, q, r, s; sarà allora *dispari* lo stesso numero pei raggi m, n, p, q. Ma, per l'ipotesi, dei due segmenti MN, PQ l'uno ha il verso di RS, l'altro l'opposto: dunque i segmenti MN, PQ sono contraversi, e quindi gli angoli dati *equiversi* rispetto a t. Così negli altri casi. — Si ha pure, analogamente, che *se, rispetto a una* t, *due angoli sono contraversi ad un terzo, essi sono, rispetto alla* t, *equiversi fra loro, e se di essi l'uno è equiverso e l'altro contraverso al terzo, essi son contraversi fra loro, sempre rispetto alla* t.

3. *Due angoli di un piano, riferiti, aventi lo stesso vertice o sono equiversi rispetto a ogni retta del piano, o sono contraversi rispetto a ogni retta del piano.*

Per i corollari 1° e 2° del n. 2, il teorema è provato nel caso in cui un lato del primo angolo e l'omologo del 2° sono sovrapposti o per diritto. — Per i due angoli riferiti $\widehat{mn}$, $\widehat{pq}$ aventi il medesimo vertice si può dunque supporre che i due lati omologhi m, p non sieno sulla medesima retta.

Riferiti allora gli angoli $\widehat{mn}$, $\widehat{qp}$, $\widehat{mp}$ nel modo scritto, (1) vale per le coppie $\widehat{mn}$, $\widehat{mp}$; $\widehat{qp}$, $\widehat{mp}$ il Corollario 1°, n. 1; potranno quindi darsi questi due casi:

1°. $\widehat{mn}$ $\widehat{qp}$ sono ambedue equiversi, oppure ambedue contraversi a $\widehat{mp}$ rispetto a ogni retta del piano;

2°. di essi l'uno è equiverso, l'altro contraverso a $\widehat{mp}$ rispetto a ogni retta del piano.

E poichè gli angoli $\widehat{pq}$, $\widehat{qp}$ sono fra loro contraversi rispetto a ogni retta del piano (Coroll. 4°, n. 2), si ha (n. 2) che nel caso 2° gli angoli dati sono equiversi, nel caso 1° sono contraversi rispetto ad ogni retta del piano.

Resta con ciò giustificata la definizione seguente: *Due angoli riferiti aventi il medesimo vertice, di un piano, si dicono equiversi (o contraversi) se sono equiversi (o contraversi) rispetto a una retta (qualunque) del piano.*

4. Si abbiano ora due angoli di un piano, riferiti, di vertici distinti, U, V; un lato dell'uno sia il raggio UV, l'omologo dell'altro sia l'opposto del raggio VU; gli altri due lati omologhi sieno due raggi a, b, giacenti dalla stessa banda rispetto alla UV. — Una secante t incontri in M, A, B la retta UV e le rette di a, b. — I due segmenti MA, MB sono equiversi se la t incontra ambi i raggi a, b o ambedue gli opposti; contraversi se essa incontra uno dei raggi a, b e l'opposto dell'altro. — Ora se M è interno al segmento UV, la t incontra, ivi, un solo *lato* dei due angoli onde i segmenti MA, MB sono allora contraversi od equiversi secondo che è *pari* o *dispari* il numero totale dei lati dei due angoli incontrati da t. — *I due angoli dati sono dunque contraversi rispetto a ogni retta che incontri il segmento* UV, e similmente si prova che *essi sono equiversi rispetto a ogni retta secante* UV *fuori del detto segmento.*

5. Indicati, ora, con α, α' gli angoli considerati al n. 4, sieno dati due altri angoli riferiti, qualunque, β, β', aventi rispettivamente per vertice U, V. — Riferiti i due angoli α, β, comunque, fra loro, risultano l'un l'altro riferiti i quattro α, α', β, β'. — E poichè β, β'

(1) Cfr. la nota al n. 1.

hanno rispettivamente lo stesso vertice di α, α', accadrà l'una o l'altra delle due ipotesi seguenti:

1°. β, β' sono ambedue equiversi, oppure ambedue contraversi, rispettivamente ad α, α' rispetto a ogni retta del piano;

2°. β, β' sono l'uno equiverso, l'altro contraverso, rispettivamente, ad α, α' rispetto a ogni retta del piano.

Quindi l'ottenuto risultato circa gli angoli α, α' (n. 4) e il Teorema del n. 2 mostrano che nell'ipotesi 1ª i due angoli $\beta\beta'$ sono contraversi rispetto a ogni retta t secante il segmento UV, ed equiversi rispetto a ogni t secante la UV fuori del detto segmento, e che nell'ipotesi 2ª accade l'opposto. — La conclusione non è legittima per ogni retta t', che pure incontrando le rette dei lati di β, β', sia parallela a qualcuna delle UV, a, b, non essendo allora possibile il paragone del verso rispetto a t' dei due angoli ausiliari α, α'. — Ma l'eccezione si toglie agevolmente: supponiamo che si verifichi l'ipotesi 1ª; preso un punto W fuori di UV e di t', tracciata una retta t che lasci da una stessa banda i punti U, V, W, e non sia parallela ad alcun lato di α, α', fissiamo un angolo γ di vertice W, equiverso a β e quindi a β' rispetto alla t, e i cui lati non siano paralleli nè a t nè a t'; per la prima parte della dimostrazione, e per le ipotesi fatte circa alla t, i due angoli β, γ (e così i due β', γ) sono contraversi rispetto a ogni retta secante il segmento UW (o il segmento VW), equiversi rispetto a ogni retta che incontri la UW (o la VW) fuori del detto segmento. — Allora, se t' lascia da una banda U,V, essa incontra ambedue i segmenti UW, VW o nessuno; l'angolo γ è contraverso ai due β, β' oppure equiverso ad entrambi, rispetto a t'; quindi β, β' sono fra loro equiversi rispetto a t'. — E se t' incontra il segmento UV, similmente, gli angoli $\beta\beta'$ sono fra loro contraversi rispetto a t'. — Così per l'ipotesi 2ª. — Possiamo quindi legittimamente porre la definizione seguente, che comprende quella del n. 3: *Due angoli riferiti di un piano si dicono* EQUIVERSI *se essi sono equiversi rispetto a ogni retta del piano che lasci da una banda i loro vertici e* (quindi) *contraversi rispetto a ogni retta del piano che lasci i loro vertici da bande opposte. — Nelle contrarie ipotesi i due angoli si dicono* CONTRAVERSI.

COROLLARIO 1°. — *Due angoli di un piano equiversi (o contraversi) ambedue a un terzo* (dello stesso piano) *sono equiversi fra loro. Se l'uno di essi è equiverso e l'altro contraverso al terzo, sono fra loro contraversi.*

Se U, V, W sono i vertici dei tre angoli, una secante t incontra due dei segmenti UV, VW, UW o nessuno: basta allora applicare la definizione del n. 5 e il Teorema del n. 2.

6. Dalla definizione precedente discendono anche i seguenti corollarî, che ci interessano per il seguito:

COROLLARIO 1°. — *Gli angoli* $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAB}$ *di un triangolo* ABC *sono fra loro equiversi; così gli angoli* $\widehat{ACB}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{BAC}$; *ciascuno dei primi è contraverso ad ognuno dei secondi.*

Detto D un punto del segmento BC, la secante AD incontra i quattro lati dei due angoli $A\widehat{B}C$, $B\widehat{C}A$; i due segmenti AD, DA così determinati sono contraversi;. i due vertici B, C sono da bande opposte rispetto alla AD: dunque i due angoli sono equiversi. — Così per gli altri. — Per la 2ª parte si applichi il Corollario 4°, n. 1.

Corollario 2°. — *Se due triangoli* ABC, DEF *di un piano sono riferiti e due angoli omologhi sono equiversi (o contraversi) anche gli angoli omologhi di ogni altra coppia sono equiversi (o contraversi).*

Definizione. — *Due triangoli riferiti di un piano si dicono equiversi (o contraversi) se sono equiversi (o contraversi) due loro angoli omologhi (qualunque).*

Corollario 3°. — *Se in due triangoli riferiti di un piano due vertici dell'uno rispettivamente coincidono cogli omologhi dell'altro, i due triangoli sono equiversi o contraversi a seconda che i rimanenti due vertici stanno dalla stessa banda o da banda opposta del lato comune.*

Corollario 4°. — *Il triangolo* ABC *è equiverso a ciascuno dei due* BCA, CAB, *contraverso a ciascuno dei tre* ACB, CBA, BAC.

Corollario 5°. — *Due triangoli di un piano ambedue equiversi (o contraversi) a un terzo* (del medesimo piano) *sono equiversi fra loro: se l'uno di essi è equiverso, e l'altro contraverso al terzo, essi sono fra loro contraversi.*

Discende dal n. 5, Corollario, e dalla definizione ora data.

7. Sieno ora due triedri riferiti (mnp), (qrs) aventi o no il medesimo vertice. — Un piano π non passante per nessun vertice, nè parallelo ad alcuno spigolo, incontri le *rette* degli spigoli nei punti M, N, P, Q, R, S. Diremo che *i due triedri sono equiversi rispetto al piano* π *se i triangoli* MNP, QRS *sono* EQUIVERSI *quando sia* PARI *il numero totale degli spigoli dei due triedri* (cioè dei raggi m, n, p, p, q, r, s) *incontrati da* π, *o se gli stessi triangoli sono contraversi quando sia dispari il numero stesso. Nelle opposte ipotesi i due triedri si diranno contraversi rispetto a* π. — Perchè, giusta tale definizione, possa farsi il giudizio sul verso rispetto a π dei due triedri dati, occorre quindi che π non passi per nessun vertice, nè sia parallelo a nessun spigolo. — Queste ipotesi si sottintenderanno sempre nel seguito.

Corollario 1°. — *Se in due triedri riferiti, due spigoli dell'uno coincidono cogli omologhi dell'altro, i due triedri sono equiversi rispetto ad ogni piano, se i rimanenti due spigoli giacciono dalla stessa banda rispetto al piano dei primi; contraversi rispetto ad ogni piano, se i rimanenti spigoli giacciono da banda opposta rispetto al piano stesso.*

Si dimostra come il Corollario 1°, n. 1, tenendo presente il Corollario 3°, n. 6.

Corollario 2°. — *Il triedro* (m n p) *è rispetto ad ogni piano equiverso a ciascuno dei due* (n p m), (p m n); *contraverso ad ognuno dei tre* (m p n), (p n m), (n, m, p).

Un piano qualunque (non passante pel vertice nè parallelo a nessuna delle m, n, p) incontra sempre un numero pari di spigoli di due qualunque dei precedenti triedri: si applichi allora la Definizione precedente e il Corollario 4°, n. 6.

8. Ragionando come al n. 2, si prova che: *Se due triedri sono ambedue equiversi o ambedue contraversi ad un terzo rispetto a un medesimo piano, essi sono equiversi fra loro rispetto a quel piano, e se di essi l'uno è equiverso, l'altro contraverso al terzo rispetto a quel piano, essi sono contraversi fra loro rispetto al medesimo piano.*

9. *Due triedri aventi il medesimo vertice o sono equiversi rispetto ad ogni piano o sono contraversi rispetto ad ogni piano.*

In forza dei corollari 1° e 2°, n. 7, il Teorema vale nel caso che due spigoli di un triedro coincidano cogli omologhi dell'altro, e nel caso che ogni spigolo di uno coincida con uno spigolo (omologo o no) dell'altro. — Sieno ora $(m\,n\,p)$, $(q\,r\,s)$ due triedri riferiti aventi il medesimo vertice: sia z uno dei tre spigoli q, r, s che non appartenga alla faccia mn; y uno dei 2 rimanenti che non sia nel piano mz, ed x il terzo. — Si considerino i triedri $(m\,n\,p)$, $(m\,n\,z)$, $(m\,y\,z)$, $(x\,y\,z)$, $(q\,r\,s)$ riferiti l'un l'altro nel modo scritto; alle coppie formate dal 1° e dal 2°, dal 2° e dal 3°, dal 3° e dal 4° si può applicare il Corollario 1°, n. 7, e alla coppia formata dal 4° e dal 5° (poichè i raggi $x\,y\,z$, salvo l'ordine, sono i raggi $q\,r\,s$) il Corollario 2°, n. 7: e allora se tutte queste coppie o due, o nessuna sono di triedri equiversi rispetto ad ogni piano, si concluderà (n. 8) che i due triedri dati sono equiversi rispetto ad ogni piano; se una o tre di esse son di triedri equiversi rispetto ad ogni piano, si concluderà che i due triedri dati sono contraversi rispetto ad ogni piano. Potremo porre, ora, legittimamente, la Definizione: *Due triedri riferiti aventi il medesimo vertice si dicono* EQUIVERSI (o CONTRAVERSI) *se lo sono rispetto ad un piano (qualunque).*

10. Sieno ora due triedri riferiti, di vertici distinti, U $(m\,n\,p)$; V $(q\,r\,s)$; le faccie omologhe $\widehat{mn}$ $\widehat{qr}$ sieno in un piano π e sieno angoli equiversi: i due rimanenti spigoli p, s sieno da una banda rispetto a π. — Un piano α incontri le rette degli spigoli nei punti M, N, P, Q, R, S, e lasci dalla stessa parte U, V; la retta $a \equiv \alpha\pi$ contiene i punti M, N, P, Q e lascia, su π, dalla stessa banda U, V. — Sia, prima, *pari* il numero totale x degli spigoli dei due triedri, incontrati da α; allora, se α incontra ambedue i raggi p, s o ambedue gli opposti, i punti P, S sono dalla stessa banda, su π, rispetto ad a; è *pari* ($x-2$, od x) il numero totale dei lati dei due angoli $\widehat{mn}$, $\widehat{qr}$ incontrati da a; quindi poichè essi sono equiversi, lo sono i segmenti MN, QR, quindi gli angoli $\widehat{MPN}$, $\widehat{QSR}$, e con essi sono equiversi i triangoli MNP, QRS; se α, invece, ferme le rimanenti ipotesi, incontra uno dei raggi p, s e l'opposto dell'altro, i punti P, S sono, su π, da banda opposta rispetto ad a; è *dispari* ($x-1$) il numero dei lati dei due angoli $\widehat{mn}$, $\widehat{qr}$

incontrati da a; quindi i segmenti MN, QR sono contraversi, e i due angoli $\widehat{MNP}$, $\widehat{QSR}$ e con essi i triangoli MNP, QRS sono ancora equiversi. — Similmente si prova che se x è dispari, gli stessi triangoli sono contraversi, dunque i due triedri dati sono equiversi rispetto ad ogni piano che lasci U, V da una stessa banda e, parimenti, contraversi rispetto a ogni piano che lasci U, V da bande opposte.

11. Indicati, ora, con S, S′ i due triedri considerati al n. 10, sieno dati due altri triedri riferiti qualunque T, T′ aventi per vertici rispettivi gli stessi punti U, V.

Con ragionamento identico a quello tenuto nella prima parte del n. 5, si proverà agevolmente che: *Pei due triedri riferiti qualunque* T, T′ *di vertici distinti* U, V *si verifica l'una o l'altra delle ipotesi seguenti:*

a) *essi sono equiversi rispetto a ogni piano che lascia da una banda i loro vertici e* (quindi) *contraversi rispetto ad ogni piano che lascia i loro vertici da bande opposte;*

b) *essi sono contraversi rispetto ai primi piani, equiversi rispetto ai secondi.*

Nel primo caso i due triedri si diranno fra loro EQUIVERSI, *nel secondo fra loro* CONTRAVERSI.

La conclusione, anche qui, non è legittima per ogni piano α' che sia parallelo a qualcuno degli spigoli dei due triedri ausiliari S, S′, non essendo in tal caso possibile il paragone del verso rispetto ad α' dei due triedri ausiliari; ma la restrizione si toglie, assumendo un triedro T″, col vertice W fuori della UV, e gli spigoli non paralleli ad α', e paragonando il verso dei due triedri TT′ rispetto ad α' col tramite del triedro T″, in modo perfettamente simile a quello tenuto per gli angoli nell'ultima parte del n. 5.

Corollario. — *Due triedri equiversi* (*o contraversi*) *a un terzo sono equiversi fra loro. Se l'uno di essi è equiverso e l'altro contraverso al 3°, sono fra loro contraversi.* — Si dimostra come l'analogo del n. 5.

12. Dalla definizione ora data scendono anche i seguenti corollari:

Corollario 1°. — *Dei triedri* A (BCD), B (CDA), C (DAB), D (ABC) *di un tetraedro* ABCD *ciascuno è contraverso al seguente.*

Pei primi due, si consideri il piano CDE, dove E è un punto del segmento AB: i triangoli ECD, CDE determinati su di esso dai due triedri, essendo equiversi, ed essendo inoltre *pari* (6) il numero degli spigoli incontrati dal piano, ed A, B da banda opposta di esso, segue l'asserto.

Corollario 2°. — *Se in due tetraedri riferiti due triedri omologhi sono equiversi (o contraversi) sono pure equiversi (o contraversi) i triedri omologhi di ogni altra coppia.*

Definizione. — *Due tetraedri riferiti si dicono equiversi (o contraversi) se sono equiversi (o contraversi) due triedri omologhi (qualunque).*

Corollario 3°. — *Due tetraedri equiversi (o contraversi) ad un terzo* *sono equiversi fra loro: se l'uno è equiverso, l'altro contraverso al 3°, sono fra loro contraversi.*

13. Notiamo infine come, con processo ricorrente, si possano estendere le definizioni qui poste agli spazi a più dimensioni S_n, pei quali sieno soddisfatti i postulati d'ordinamento analoghi a quelli da noi ricordati, che valgono pel piano e per lo spazio ordinario. — Definito un angoloide n.edro di un tale S_n, determinato da n semirette (spigoli) dell'S_n uscente da un punto, non giacenti in un S_{n-1}, come il luogo dei punti che rispetto a ciascun S_{n-1} di $n-1$ spigoli stanno dalla banda dell'ultimo spigolo, e *supposto definito il verso per gli angoloidi* ($n-1$)*.edri e quindi per le piramidi a* n *vertici di un* S_{n-1} *soddisfaciente alle predette condizioni*, potremo dire " *equiversi rispetto a un* S_{n-1} *dell'* S_n ", due suoi angoloidi n.edri riferiti, *quando le due piramidi ad* n *vertici che le rette dei loro spigoli determinano sull'* S_{n-1} *siano equiverse quando sia pari, o contraverse quando sia dispari il numero totale degli spigoli dei due angoloidi incontrati dall'* S_{n-1}. — Da ciò e da immediate estensioni delle cose precedenti sarà giustificato il definire come " *equiversi* " *due angoloidi ad* n *spigoli riferiti di* S_n *se sono equiversi rispetto a ogni* S_{n-1} *dell'* S_n, *secante il segmento dei vertici,* (quindi) *contraversi rispetto a ogni* S_{n-1} *dell'* S_n *non segante il detto segmento*; e similmente per gli angoloidi n.edri contraversi. — E questo procedimento ricorrente è legittimo, in quanto le stesse definizioni risultano, da quanto si è detto, giustificate per $n=2$, $n=3$.

EMILIO VENERONI.

SISTEMI GEOGRAFICI SULLE SUPERFICIE

In questa breve Nota ci proponiamo di ritrovare geometricamente alcune proprietà, ottenute analiticamente in un altro lavoro, (¹) e di stabilirne alcune altre, riguardanti certi particolari sistemi di coordinate curvilinee (*sistemi geografici*), che si posson considerare sopra una superficie (o regione di superficie) qualunque (non sviluppabile) e che posson presentare qualche interesse per la Geodesia teorica.

1. Supponiamo che in una data regione d'una superficie S si sia assegnato arbitrariamente il verso positivo della normale alla super-

(¹) C. MINEO. *Sulle superficie riferite a un sistema geografico e sulla determinazione intrinseca del Geoide* [*Giornale di Matematiche* di BATTAGLINI, vol. XLVIII (1° della 3ª serie), 1910].

ficie stessa, e consideriamo inoltre un asse qualunque z orientato (*asse polare*). Preso un punto qualunque P sulla data regione di S, chiameremo *latitudine* di P, e la indicheremo costantemente con φ, il complemento dell'angolo che la direzione positiva della normale in P forma con la direzione positiva dell'asse polare z. Chiameremo, poi, *meridiano astronomico* di P il piano formato dalla normale alla S in P e dalla parallela all'asse polare z condotta per P (*asse locale*). Condotto in fine un semipiano arbitrario π per l'asse polare z, chiameremo *longitudine* del punto P, e la indicheremo sempre con ω, l'angolo diedro che il semipiano π forma col meridiano astronomico di P (o, più precisamente, col semipiano contenente l'asse z e il raggio parallelo alla direzione positiva della normale in P, condotto per un punto qualunque di z).

La S sarà ricoperta, nella regione considerata, da un doppio sistema di linee, luoghi di punti di eguale latitudine e di eguale longitudine, che chiameremo rispettivamente *linee* φ e *linee* ω. E diremo che per la S, il sistema (φ, ω) costituisce un *sistema geografico rispetto all'asse polare* z.

Possiamo dire, brevemente, che le linee φ sono caratterizzate dal fatto che lungo ognuna di esse la normale alla superficie forma un angolo costante con l'asse arbitrario z, mentre lungo ogni linea ω la normale è sempre parallela a uno stesso piano passante per l'asse z.

Si può osservare che le φ sono le linee *isofote* della S, rispetto a un fascio di raggi luminosi paralleli all'asse z: l'intensità luminosa d'ogni linea φ essendo proporzionale a $\sin\varphi$. Così le linee ω, lungo le quali la sviluppabile circoscritta a S è cilindrica, sono interessanti in quanto che separano le parti della superficie, illuminate da un fascio di raggi paralleli, da quelle che restano nell'ombra.

2. Giova ancora considerare due direzioni notevoli sul piano tangente in P alla S: l'una è la retta d'intersezione del piano tangente col meridiano astronomico (n. 1), e la chiameremo *direzione Nord* del punto P; l'altra è la direzione ortogonale alla precedente, e la chiameremo *direzione Est* dello stesso punto P. È manifesto che la direzione Est in un punto è perpendicolare al meridiano astronomico dello stesso punto.

Chiameremo inoltre *linee Est* sulla S le curve lungo cui la tangente è perpendicolare all'asse polare z, ossia coincide con la direzione Est. È ovvio che ogni linea Est, avendo le tangenti sempre perpendicolari a una stessa retta, non può essere che piana, e contenuta precisamente in un piano perpendicolare a quella retta. Dunque *le linee Est della* S *sono le sue sezioni con piani perpendicolari all'asse polare* z.

Chiameremo *linee Nord* le traiettorie ortogonali delle linee Est. Lungo una linea Nord la tangente, com'è naturale, coincide con la relativa direzione Nord e forma con l'asse polare z un angolo eguale alla latitudine φ del punto. Lungo ogni linea ω le direzioni Est sono, poi, parallele. (1)

3. È ovvio che per una sviluppabile le generatrici sono a un tempo linee φ e linee ω rispetto a qualunque asse. Se poi una linea L di una sviluppabile, non coincidente con una generatrice, costituisse una linea ω, cioè una linea tale che le normali alla sviluppabile lungo L sono parallele a uno stesso piano α (n. 1), allora *tutte* le normali della sviluppabile dovrebbero essere parallele al piano α, e la sviluppabile sarebbe quindi un cilindro.

Se invece la linea L fosse una linea φ rispetto a un certo asse ζ, si concluderebbe subito che tutte le normali della sviluppabile sarebbero egualmente inclinate sull'asse ζ, e quindi le sue generatrici sarebbero parallele a quelle d'un certo cono retto circolare di asse ζ: la superficie, cioè, sarebbe una elicoide sviluppabile. (2)

S'intende che nelle nostre considerazioni escludiamo il caso delle superficie sviluppabili.

4. Se della S facciamo la nota rappresentazione di Gauss, è manifesto che alle linee φ e ω corrisponderanno i paralleli e i meridiani della sfera rappresentativa, relativa al diametro della sfera parallelo all'asse polare z. Inoltre le direzioni Nord ed Est, relative al punto P della S, sono rispettivamente parallele alle tangenti al meridiano e al parallelo sferico passanti per il punto P', immagine di P.

Se poi ricordiamo che la tangente all'immagine sferica d'una curva C di S e la coniugata della tangente alla stessa C sono perpendicolari, possiamo concludere senz'altro il seguente teorema, già segnalato dal Pizzetti. (3)

In ogni punto della S *la tangente alla linea* φ [ω] *e la direzione Nord* [*Est*] *sono tangenti coniugate.*

E ancora:

Le linee φ [ω] *e le linee Nord* [*Est*] *costituiscono sulla* S *un doppio sistema coniugato.*

5. Segue dal teorema di Pizzetti, che se in un punto P della S la tangente alla linea φ coincide con la direzione Est, nello stesso punto la tangente alla linea ω coinciderà con la direzione Nord, e viceversa. Per conseguenza, in tal caso, la coppia delle direzioni coniugate ortogonali Nord ed Est costituisce in P la coppia delle direzioni principali per la S. Dunque *se una linea* φ [ω] *è contemporaneamente una linea Est* [*Nord*], *essa è di curvatura.*

D'altra parte, se una linea φ è di curvatura, le normali lungo essa alla S devon generare una sviluppabile, il cui spigolo di regresso

(1) Va da sè che il doppio sistema delle linee Nord ed Est s'intende definito rispetto allo stesso asse polare cui si riferisce il sistema (φ, ω).

(2) Analiticamente le superficie in discorso sarebbero gl'integrali generali dell'equazione $p^2 + q^2 =$ *costante*, dove p e q sono le solite derivate mongiane.

(3) Pizzetti, *Contribuzione allo studio della superficie terrestre* [Giornale della Società di Letture e conversazioni scientifiche di Genova, vol. XVII (1887)].

sarà evidentemente un'elica appartenente a un cilindro parallelo all'asse polare z. Ora è noto che le evolventi d'un'elica cilindrica sono curve piane situate in piani perpendicolari alle generatrici del cilindro. [1] Si conclude dunque che *se una linea φ è di curvatura, essa è anco una linea Est.*

Similmente se una linea ω è di curvatura, le normali lungo essa alla superficie — che in generale sono parallele a un piano passante per l'asse z (n. 1) — invilupperanno un'altra curva, la quale evidentemente non potrà essere che piana: ne viene che anco la curva ω sarà piana, e poichè inoltre le sue normali (principali) sono pure normali della superficie, la ω è dippiù una geodetica per la superficie stessa. Ed è anche una linea Nord, come è facile riconoscere. Dunque:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una linea φ sia di curvatura, è che essa sia contemporaneamente una linea Est (e quindi piana).

E similmente:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una linea ω sia di curvatura (e quindi piana e geodetica), è che essa sia contemporaneamente una linea Nord.

6. Al variare dell'asse polare z abbiamo sulla S, ∞^2 sistemi geografici. Esistono sistemi geografici ortogonali e su quali superficie?

Ciò equivale a domandarci se nell'involuzione di tangenti coniugate della S, intorno a un suo punto P, esista una coppia ortogonale di tangenti cui è coniugata un'altra coppia ortogonale (n. 4). Or questa proprietà non spetta che alla coppia ortogonale di tangenti coniugate nell'involuzione stessa, eccettuati i casi in cui l'involuzione è circolare o simmetrica. Nel caso dell'involuzione circolare, l'indicatrice di Dupin sarebbe un circolo e ogni punto P sarebbe un ombelico (sfera). Nel caso dell'involuzione simmetrica, la proprietà accennata appartiene a ogni coppia di tangenti ortogonali; l'indicatrice di Dupin è un'iperbole equilatera, e quindi le direzioni assintotiche (corrispondenti ai raggi doppi dell'involuzione) sono ortogonali: proprietà, questa, che caratterizza le superficie minime o elassoidi. Tolti questi due casi, resta una classe di superficie per le quali le linee φ e ω sono le linee di curvatura, e coincidono quindi (n. 5) rispettivamente con le linee Est e Nord. Esse superficie sono pertanto caratterizzate dal fatto di possedere un sistema di linee di curvatura in piani paralleli (n. 2), e non sono altro che le superficie modanate a sviluppabile direttrice cilindrica, già studiate da Monge. [2]

Mettendo da parte il caso ovvio della sfera, possiamo quindi enunciare il seguente importante teorema, già stabilito analiticamente da Minding: [3]

---

(1) Vedi Cesaro, *Lezioni di Geometria intrinseca*, p. 146.

(2) Vedi Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, 2ª edizione, vol. I. p. 176.

(3) In una Nota dal titolo: *Ueber einige Grundformeln der Geodäsie* [*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, XLIV (1852), p. 66-72], nella quale trovo appunto che il sapiente geometra

Le uniche superficie che ammettono un sistema geografico ortogonale sono le superficie modanate a sviluppabile direttrice cilindrica e gli elassoidi. Su questi ultimi ogni sistema geografico è ortogonale (isotermo). [1]

7. Quando le linee φ e ω sono in ogni punto egualmente inclinate (*isocline*) [2] sulle linee di curvatura? Ciò equivale a domandarsi quando a due raggi di un'involuzione, simmetrici rispetto a uno dei raggi della coppia coniugata ortogonale, sono coniugati due raggi ortogonali. È facile riconoscere che in tal caso questi ultimi debbono essere le bisettrici della coppia coniugata ortogonale. Dunque:

Affinchè il doppio sistema geografico (φ, ω) *sia costituito da una doppia famiglia di linee isocline rispetto alle linee di curvatura, occorre e basta che queste ultime siano le traiettorie a 45° delle linee Nord (o Est).*

8. Quando una linea φ è contemporaneamente assintotica?

Anzitutto è evidente (n. 4) che dovrà coincidere con una linea Nord, e reciprocamente. Inoltre la sua tangente (direzione Nord) farà angolo costante $(= \varphi)$ con l'asse polare z (n. 2), sicchè la φ sarà un'elica appartenente a un cilindro parallelo all'asse polare z, e formante un angolo eguale a φ con le generatrici del cilindro. Reciprocamente, se la φ è un'elica incontrante sotto l'angolo φ le generatrici di un cilindro parallelo a z, facilmente si conclude che essa è anche una linea Nord e quindi un'assintotica. Dunque:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una linea φ *sia a un tempo assintotica per la* S, *è che essa sia un'elica appartenente a un cilindro parallelo all'asse polare* z *e incontrante le sue generatrici sotto l'angolo* φ.

E ancora:

Le superficie per le quali la famiglia di linee geografiche φ, *rispetto a un asse polare* z, *è costituita da linee assintotiche, sono caratterizzate dalla proprietà di possedere* ∞^2 *eliche appartenenti a cilindri paralleli allo stesso asse* z.

[Esse sono quindi superficie più generali degli elicoidi].

9. Vediamo quando una linea ω è a un tempo assintotica. Anzitutto occorre e basta che essa sia ancora una linea Est (n. 4). Ma tenendo presente che ogni linea Est è contenuta in un piano perpendicolare all'asse z (n. 2) e che lungo ogni linea ω la normale alla S (binormale, nel nostro caso, della ω) è sempre parallela a un piano passante per z, facilmente deduciamo che la ω, se assintotica, non può essere che una retta ortogonale alla z. Dunque:

---

aveva già avuto l'idea di generalizzare ed estendere a una superficie qualunque la nozione di meridiani e paralleli (Cfr. anche DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, vol. I, p. 311). — È anche notevole, per la storia della Geodesia, che nell'interessante Nota di MINDING (portante la data del 30 gennaio 1849) si trovano gli sviluppi fondamentali attribuiti a PUISEUX (che li diede soltanto nel 1851) e anche, accompagnata da importanti considerazioni, la formola che dà lo scostamento d'un breve arco di sezione normale dalla geodetica passante per gli estremi (p. 68).

[1] Giacchè ogni sistema geografico corrisponde a un sistema isotermo della sfera, e per gli elassoidi la rappresentazione di GAUSS è conforme (quindi conserva ogni sistema isotermo).

[2] Di queste linee si è occupato il SANNIA nella Nota: *Linee isocline rispetto alle linee di curvatura* [Rend. Circ. Mat. Palermo, t. XXV (1908), p. 283].

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una linea ω sia a un tempo assintotica per la S, è che essa sia una retta ortogonale all'asse z.

E ancora:

Le superficie per le quali la famiglia di linee geografiche ω, rispetto a un asse z, è costituita da linee assintotiche, sono rigate (gobbe) [1] *le cui generatrici sono parallele a uno stesso piano, perpendicolare all'asse z.*

[Esse sono quindi superficie più generali dei conoidi].

10. Possono le linee φ e le ω essere contemporaneamente assintotiche per una superficie? In tal caso il sistema delle assintotiche sarebbe ortogonale, e quindi la superficie sarebbe un elassoide. Inoltre (n. 9) dovrebbe essere una rigata. Ma per il teorema di CATALAN l'unico elassoide rigato è l'elicoide a piano direttore. [2] Dunque:

L'unica superficie per la quale il doppio sistema delle assintotiche è un sistema geográfico, è l'elicoide a piano direttore.

11. Abbiamo già visto (n. 5) che quando una linea ω coincide con una linea Nord, essa è geodetica. Cerchiamo ora una condizione più generale affinchè una linea ω sia anco geodetica.

Notiamo che la sviluppabile circoscritta alla S lungo una ω è in generale un cilindro parallelo alla direzione Est, costante, questa, in ogni punto della ω (numeri 1 e 4). Se la ω è geodetica sulla S, le sue normali principali (normali della S) risulteranno tutte parallele a uno stesso piano, passante per z e perpendicolare alla relativa direzione Est; ossia la ω sarà un'elica appartenente al cilindro circoscritto, lungo essa, alla superficie, e quindi incontrante sotto angolo costante le direzioni Est (o Nord). In particolare la ω può essere una curva piana, ma allora sarebbe una linea di curvatura e quindi una linea Nord (n. 5).

Reciprocamente, se una linea ω taglia sotto angolo costante le linee Est, essa è un'elica sul relativo cilindro circoscritto alla S, e quindi geodetica per la S. Dunque:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una linea ω sia geodetica, è che essa sia una traiettoria isogonale delle linee Nord (o Est). [3]

E ancora:

Le superficie per le quali la famiglia delle linee ω, rispetto a un asse z, è costituita da geodetiche, è caratterizzata dalla proprietà di possedere ∞^1 eliche appartenenti a cilindri ortogonali all'asse z. A queste superficie appartengono le superficie modanate a sviluppabile direttrice cilindrica.

12. Quando una linea φ è geodetica? La sviluppabile circoscritta

---

[1] Cade in errore il sig. VITERBI (vedi Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXV (1908), p. 219) credendo che la superficie in discorso debbano *necessariamente* essere delle sviluppabili (che poi, per quanto si è visto, si ridurrebbero a dei piani). Il caso delle sviluppabili, come si è detto, è da escludere. Su queste le generatrici sono sempre assintotiche, geodetiche, linee di curvatura, di eguale latitudine, di eguale longitudine...

[2] V. CESARO, *op. cit.*, p. 183.

[3] Cfr. PIZZETTI, *luogo citato.*

a una linea φ, poichè le sue generatrici (n. 4) sono le direzioni Nord e formano con l'asse z l'angolo costante φ, è in generale una elicoide (il cui spigolo di regresso è appunto un'elica appartenente a un cilindro parallelo all'asse z). Se la φ è geodetica per S, sarà anco tale per la detta elicoide, e sarà caratterizzata dalla proprietà, com'è naturale, di avere le normali principali egualmente inclinate sull'asse z. Reciprocamente, è facile vedere che se le normali principali lungo una curva φ formano angolo costantemente eguale a $90^\circ - \varphi$ con l'asse z, la φ è anco una geodetica per la S (e quindi anco tale per l'elicoide sviluppabile circoscritta). Dunque:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva φ sia a un tempo geodetica, è che le sue normali principali formino angolo costantemente eguale a $90^\circ - \varphi$ con l'asse polare z. Essa è poi geodetica sopra una certa elicoide sviluppabile.

C. MINEO.

SUL CALCOLO DELLE RIDOTTE DI UNA FRAZIONE CONTINUA

1. È ben noto che il calcolo delle successive ridotte $R_n = \frac{P_n}{Q_n}$ della frazione continua

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}$$

si fa per via ricorrente, mediante le formule

$$P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2}, \qquad Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}. \tag{1}$$

La dimostrazione di queste formule si fa per induzione, osservando che la ridotta R_n si deduce dalla R_{n-1} sostituendo al posto di a_{n-1} l'espressione $a_{n-1} + \frac{1}{a_n}$; si ottiene così

$$R_n = \frac{\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right) P_{n-2} + P_{n-3}}{\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right) Q_{n-2} + Q_{n-3}} = \frac{a_n P_{n-1} + P_{n-2}}{a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}},$$

onde seguono appunto le (1).

Questa dimostrazione non prova però che ogni ridotta R_n *calcolata mediante le* (1) abbia *la stessa forma* che si otterrebbe *eseguendo direttamente i calcoli indicati nell'espressione*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

L'identità formale delle due espressioni di R_n che così si ottengono, effettivamente sussiste, e si potrebbe dedurre a posteriori dalla proprietà che i P_n, Q_n, calcolati mediante le (1), sono, per ciascun valore di n, privi di fattori interi comuni (numerici e letterali), applicando i teoremi sulla divisibilità delle funzioni razionali intere di più variabili ed il principio di identità. È possibile però, ed è evidentemente più semplice, provare *a priori* l'accennata identità, modificando nel modo che segue la dimostrazione delle formule (1).

2. Poniamo

$$\frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

intendendo che P_n *e* Q_n *siano quelle funzioni razionali intere delle* $a_0, a_1, \ldots a_n$ *che risultano eseguendo direttamente i calcoli indicati nell'espressione del secondo membro*; vogliamo dimostrare che *per queste funzioni, così definite, valgono le formule ricorrenti* (1).

Procederemo per induzione, ammettendo il teorema verificato per i valori dell'indice inferiori ad n.

Poniamo

$$\frac{P'_{n-1}}{Q'_{n-1}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}, \qquad \frac{P'_{n-2}}{Q'_{n-2}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}},$$

$$\frac{P'_{n-3}}{Q'_{n-3}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-2}}}},$$

essendo anche qui le funzioni P'_{n-1}, Q'_{n-1}, ecc. il risultato diretto dei calcoli indicati nei secondi membri; avremo, per le formule (1) applicate alla frazione continua $\frac{P'_{n-1}}{Q'_{n-1}}$,

$$P'_{n-1} = a_n P'_{n-2} + P'_{n-3}, \qquad Q'_{n-1} = a_n Q'_{n-2} + Q'_{n-3}. \qquad (2)$$

D'altra parte si ha

$$\frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \frac{1}{\frac{P'_{n-1}}{Q'_{n-1}}} = a_0 + \frac{Q'_{n-1}}{P'_{n-1}} = \frac{a_0 P'_{n-1} + Q'_{n-1}}{P'_{n-1}},$$

e quindi, per il significato che abbiamo dato a P_n, Q_n,

$$P_n = a_0 P'_{n-1} + Q'_{n-1}, \qquad Q_n = P'_{n-1}; \tag{3}$$

analogamente si ottiene

$$P_{n-1} = a_0 P'_{n-2} + Q'_{n-2}, \qquad Q_{n-1} = P'_{n-2}, \tag{4}$$

$$P_{n-2} = a_0 P'_{n-3} + Q'_{n-3}, \qquad Q_{n-2} = P'_{n-3}. \tag{5}$$

Dalle formule (3) e (2) abbiamo allora

$$P_n = a_0 a_n P'_{n-2} + a_0 P'_{n-3} + a_n Q'_{n-2} + Q'_{n-3} =$$
$$= a_n (a_0 P'_{n-2} + Q'_{n-2}) + a_0 P'_{n-3} + Q'_{n-3},$$
$$Q_n = a_n P'_{n-2} + P'_{n-3},$$

onde appunto, per le (4) e (5),

$$P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2}, \qquad Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \qquad \text{c. d. d.}$$

FRANCESCO CECIONI.

ALCUNE FORMOLE DI GONIOMETRIA E DI CINEMATICA

1. Si abbia un sistema rigido, animato da un movimento qualunque. Indichiamo con P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8 otto punti di esso, coincidenti coi vertici di due tetraedri $P_1P_2P_3P_4$, $P_5P_6P_7P_8$, e designamo con V_1, V_2, ... gli estremi dei segmenti rappresentativi delle velocità dei detti punti; ossia indichiamo con V_1, V_2, ... (come diremo brevemente) gli estremi delle velocità dei punti stessi.

Chiamando P_k, P_l due punti qualsivogliano del dato corpo, V_k, V_l gli estremi delle loro velocità, ω la velocità angolare del dato sistema intorno all'asse istantaneo di rotazione, φ_{ki} l'angolo formato da tale asse colla retta $P_k P_i$, sussiste la relazione

$$V_k V_i = P_k P_i \sqrt{1 + \omega^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_{ki}} \,.\ ^{(1)} \qquad (1)$$

È poi noto [ciò deducesi anche dalla (1)] che i punti del sistema e gli estremi delle loro velocità costituiscono due spazi affini: pertanto

$$\frac{\text{volume tetraedro } P_1P_2P_3P_4}{\text{volume tetraedro } V_1V_2V_3V_4} = \frac{\text{volume tetraedro } P_5P_6P_7P_8}{\text{volume tetraedro } V_5V_6V_7V_8}. \qquad (2)$$

2. Con metodo simile a quello che ho impiegato in un precedente articolo, [2] si possono ricavare *tre relazioni fra gli angoli formati da una retta qualunque coi sei spigoli di un tetraedro e fra le lunghezze di questi spigoli.* [3]

Infatti: Suppongasi

$$P_5P_6 = P_6P_7 = P_7P_5 = P_5P_8 = P_6P_8 = P_7P_8 = s, \qquad (3)$$

designando con s lo spigolo del tetraedro regolare equivalente al tetraedro $P_1P_2P_3P_4$; dimodochè, in forza della (2):

$$\left.\begin{array}{l} \text{volume } P_1P_2P_3P_4 = \text{volume } P_5P_6P_7P_8, \\ \text{volume } V_1V_2V_3V_4 = \text{volume } V_5V_6V_7V_8. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Facciamo inoltre l'ipotesi che lo spigolo P_5P_6 sia parallelo all'asse istantaneo: risulterà

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}^2\varphi_{56} = 0 \\ \operatorname{sen}^2\varphi_{67} = \operatorname{sen}^2\varphi_{75} = \operatorname{sen}^2\varphi_{58} = \operatorname{sen}^2\varphi_{68} = \dfrac{3}{4} \\ \operatorname{sen}^2\varphi_{78} = 1. \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Calcoliamo il volume W del tetraedro $V_1V_2V_3V_4$ in funzione dei suoi spigoli, pei valori di questi servendoci della (1). Indicando con U il volume del tetraedro $P_1P_2P_3P_4$ e con λ_1, λ_2, λ_3 tre funzioni di P_1P_2, P_2P_3, ..., $\operatorname{sen}^2\varphi_{12}$, $\operatorname{sen}^2\varphi_{23}$, ..., ricaveremo una relazione del tipo

$$W^2 = U^2 (\lambda_1 \omega^6 + \lambda_2 \omega^4 + \lambda_3 \omega^2 + 1). \qquad (6)$$

Valendosi della (1), inoltre avendo presenti le (3), (4), (5), si esprima il volume W del tetraedro $V_5V_6V_7V_8$ in funzione dei suoi spigoli. Si otterrà una relazione della forma

$$W^2 = U^2 (k_1 \omega^6 + k_2 \omega^4 + k_3 \omega^2 + 1), \qquad (7)$$

dove k_1, k_2, k_3 rappresentano quantità numeriche.

---

(1) V. la mia Nota " Sulla determinazione delle velocità e delle accelerazioni nel moto più generale di un corpo rigido " (*Giorn. di Matem.*, Vol. XLVIII, Fasc. 1).

(2) V. Nota cit.

(3) Tali relazioni sono assai più complicate delle (11), (12), (13) della Nota citata ed occuperebbero uno spazio grandissimo; tuttavia sono suscettibili di molta semplificazione nel caso in cui il tetraedro $P_1P_2P_3P_4$ fosse regolare.

Affinchè le (6), (7) possano coesistere per qualsivoglia valore di ω, dovranno in tali due equazioni risultare uguali fra loro i coefficienti delle medesime potenze di ω: ciò fornisce (a motivo che non venne assoggettata ad alcun vincolo la direzione dell'asse istantaneo di rotazione) le tre formole goniometriche dianzi accennate, relative ad un tetraedro.

3. Fra queste formole la più rimarchevole per la sua semplicità è

$$\lambda_3 = k_3. \tag{8}$$

Invero nella (8) (e soltanto in essa) $\operatorname{sen}^2\varphi_{12}$, $\operatorname{sen}^2\varphi_{23}$, ... compaiono linearmente.

I numeri k_1, k_2, k_3 figuranti nella (7) sono i medesimi qualunque sia il tetraedro $P_1P_2P_3P_4$, e si ha precisamente (come risulta mediante un calcolo facile ma, pur supponendo eguale ad uno ogni spigolo del tetraedro $P_1P_2P_3P_4$, laborioso):

$$k_1 = 0,\ k_2 = 1,\ k_3 = 2. \tag{9}$$

Avuto riguardo alle (9), dalla (7) si deduce

$$\frac{\text{volume } V_1V_2V_3V_4}{\text{volume } P_1P_2P_3P_4} = \omega^2 + 1.$$

Sussiste pertanto il teorema:

In un moto qualunque di un corpo rigido, il quadrato della velocità angolare, aumentato di uno, è uguale al rapporto di due tetraedri corrispondenti nell'affinità fra i due spazi costituiti dai punti del dato corpo e dagli estremi delle loro velocità.

Inoltre, nell'ipotesi che il tetraedro $P_1P_2P_3P_4$ sia regolare, la (8) assume effettivamente l'aspetto:

$$\operatorname{sen}^2\varphi_{12} + \operatorname{sen}^2\varphi_{23} + \operatorname{sen}^2\varphi_{31} + \operatorname{sen}^2\varphi_{14} + \operatorname{sen}^2\varphi_{24} + \operatorname{sen}^2\varphi_{34} = 4. \tag{10}$$

4. Si abbiano presenti le due relazioni goniometriche

$$2\,(\operatorname{sen}^2\varphi_{12} + \operatorname{sen}^2\varphi_{23} + \operatorname{sen}^2\varphi_{31}) = 3\,(1 + \operatorname{sen}^2\mu) \tag{11}$$

$$\begin{aligned}2\,(&\operatorname{sen}^2\varphi_{12} + \operatorname{sen}^2\varphi_{23} + \operatorname{sen}^2\varphi_{31} - \operatorname{sen}^2\varphi_{12}\operatorname{sen}^2\varphi_{23} - \operatorname{sen}^2\varphi_{23}\operatorname{sen}^2\varphi_{31} - \\ &- \operatorname{sen}^2\varphi_{31}\operatorname{sen}^2\varphi_{12}) + \operatorname{sen}^4\varphi_{12} + \operatorname{sen}^4\varphi_{23} + \operatorname{sen}^4\varphi_{31} = 3:\end{aligned} \tag{12}$$

relazioni valevoli per ogni retta formante coi lati di un triangolo equilatero e col piano di esso angoli rispettivamente eguali a φ_{12}, φ_{23}, φ_{31}, μ. (¹)

Intanto dalle (11), (12) consegue

$$\begin{aligned}2\,(&\operatorname{sen}^2\varphi_{12}\operatorname{sen}^2\varphi_{23} + \operatorname{sen}^2\varphi_{23}\operatorname{sen}^2\varphi_{31} + \operatorname{sen}^2\varphi_{31}\operatorname{sen}^2\varphi_{12}) \\ &- (\operatorname{sen}^4\varphi_{12} + \operatorname{sen}^4\varphi_{23} + \operatorname{sen}^4\varphi_{31}) = 3\operatorname{sen}^2\mu.\end{aligned} \tag{13}$$

Confrontando la (13) con la notissima formola

$$2\,(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4 = 16\,S^2,$$

(¹) Le (11), (12) si ottengono dalle (12), (13) della Nota cit., supponendovi $C_{12} = C_{23} = C_{31}$.

dove S indica l'area di un triangolo di lati a, b, c, deducesi che le quantità sen φ_{12}, sen φ_{22}, sen φ_{31} si possono assumere come lunghezze dei lati di un triangolo [la cui area $(=\frac{\sqrt{3}}{4}$ sen $\mu)$ è anche annullabile]. Epperò *ognuno dei seni* sen φ_{12}, sen φ_{23}, sen φ_{31} *è* $\leqslant$ *somma degli altri due, ed è* $\geqslant$ *differenza degli altri due.*

Dalle (10), (11), (12) si potrebbe ricavare una infinità di *relazioni fra gli angoli* $\varphi_{12}, \varphi_{23}, \varphi_{31}, \varphi_{14}, \varphi_{24}, \varphi_{34}, \mu$ *formati da una retta qualunque rispettivamente cogli spigoli* P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1, P_1P_4, P_2P_4, P_3P_4 *e colla faccia* $P_1P_2P_3$ *di un tetraedro regolare.*

Ci limiteremo qui ad allegare le seguenti.

Dalle (10), (11):

$$2\,(\text{sen}^2\varphi_{14}+\text{sen}^2\varphi_{24}+\text{sen}^2\varphi_{34})=5-3\,\text{sen}^2\mu. \tag{14}$$

Dalle (10), (12):

$$2\,(\text{sen}^2\varphi_{14}+\text{sen}^2\varphi_{24}+\text{sen}^2\varphi_{34}+\text{sen}^2\varphi_{12}\,\text{sen}^2\varphi_{23}+\text{sen}^2\varphi_{23}\,\text{sen}^2\varphi_{31}+ \\ +\text{sen}^2\varphi_{31}\,\text{sen}^2\varphi_{12})-(\text{sen}^4\varphi_{12}+\text{sen}^4\varphi_{23}+\text{sen}^4\varphi_{31})=5.$$

Dalle (10), (14):

$$\text{sen}^2\varphi_{12}+\text{sen}^2\varphi_{23}+\text{sen}^2\varphi_{31}-(\text{sen}^2\varphi_{14}+\text{sen}^2\varphi_{24}+\text{sen}^2\varphi_{34})=3\text{sen}^2\mu-1.$$

5. Fra le varie formole goniometriche dianzi scritte od accennate e che concernono un tetraedro regolare, sopratutto la (10), per la sua semplicità, è atta a somministrare *notevoli espressioni dei quadrati della velocità angolare* ω *e dell'accelerazione angolare* ω'.

Basterà sostituire nella (10) stessa, in luogo di sen$^2\varphi_{12}$, sen$^2\varphi_{22}$, ..., i valori di cui sono suscettibili i quadrati dei seni degli angoli rispettivamente formati da ω e da ω' con rette appartenenti al dato sistema rigido. (1)

Ad esempio, indicando con s la lunghezza di ciascuno spigolo di un qualsiasi tetraedro regolare $P_1P_2P_3P_4$ facente parte del dato corpo, ed essendo V_1V_2, V_2V_3, ... gli spigoli del corrispondente tetraedro $V_1V_2V_3V_4$, deducesi

$$\omega^2=\frac{(V_1V_2)^2+(V_2V_3)^2+(V_3V_1)^2+(V_1V_4)^2+(V_2V_4)^2+(V_3V_4)^2}{4\,s^2}-\frac{3}{2};$$

ed anche, designando con D_{12} la differenza geometrica delle velocità di P_1, P_2, ed a D_{23}, D_{31}, ... attribuendo significati analoghi, si ottiene

$$\omega^2=\frac{D^2_{12}+D^2_{23}+D^2_{31}+D^2_{14}+D^2_{24}+D^2_{34}}{4\,s^2};$$

(1) Valori ricavabili dalla (1) del presente scritto, dalla (5) del mio articolo " Sulla determinazione della velocità angolare e della accelerazione angolare nel moto più generale di un corpo rigido " (*Periodico di Matem.*, Anno XXV, Fasc. III), oltrechè da notorie formole di Cinematica.

come pure, chiamando Δ_{12} la differenza delle proiezioni delle accelerazioni dei punti P_1, P_2 sulla retta P_1P_2, ed a Δ_{23}, Δ_{31}, ... attribuendo analoghi significati, si deduce

$$\omega^2 = \frac{\Delta_{12} + \Delta_{23} + \Delta_{31} + \Delta_{14} + \Delta_{24} + \Delta_{34}}{4\,s}.$$

Sempre ad esempio, indichiamo con α_{12}, α_{13}, α_{14} le rispettive componenti delle accelerazioni di P_2, P_3, P_4, componenti dovute all'accelerazione angolare nell'ipotesi che si assumesse P_1 come centro di riduzione del moto istantaneo; con α_{23}, α_{24} le rispettive componenti delle accelerazioni di P_3, P_4, componenti dovute all'accelerazione angolare, supponendo che fosse invece P_2 il centro di riduzione del moto istantaneo; con α_{34} la componente dell'accelerazione di P_4 dovuta all'accelerazione angolare, supposto invece P_3 centro di riduzione del moto istantaneo. E chiamiamo nuovamente s la lunghezza di ciascuno spigolo del tetraedro regolare $P_1P_2P_3P_4$. Ricavasi la relazione

$$\omega'^2 = \frac{\alpha^2_{12} + \alpha^2_{13} + \alpha^2_{14} + \alpha^2_{23} + \alpha^2_{24} + \alpha^2_{34}}{4\,s^2}.$$

CESARE SPELTA.

DUE METODI GENERALI PER LA SOMMA DELLE POTENZE SIMILI

dei termini d'una qualsivoglia progressione aritmetica

I. — Relazioni fondamentali.

1. Se si hanno z funzioni intere, ciascuna d'una variabile, ed è ognuna funzione della forma seguente:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \varphi_1(\alpha_1) = p_{1,0}\,.\,\alpha_1^{x_1} + \ldots + p_{1,x_1}, \text{ di grado } x_1, \\ \alpha_1 &= \varphi_2(\alpha_2) = p_{2,0}\,.\,\alpha_2^{x_2} + \ldots + p_{2,x_2}, \text{ di grado } x_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{z-1} &= \varphi_z(\alpha_z) = p_{z,0}\,.\,\alpha_z^{x_z} + \ldots + p_{z,x_z}, \text{ di grado } x_z, \end{aligned}$$

è chiaro che α_0 sarà una funzione intera di α_z, cioè

$$\alpha_0 = f(\alpha_z) = p_0\,.\,\alpha_z^{x} + p_1\,.\,\alpha_z^{x-1} + \ldots + p_x,$$

essendo

$$p_0 = p_{1,0}\,.\,p_{2,0}^{x_1}\,.\,p_{3,0}^{x_1x_2}\ldots p_{z,0}^{x_1\ldots x_{z-1}}$$

e

$$x = x_1\,.\,x_2\ldots x_z\,.$$

Ponendo

$$\alpha_z = u_n,$$
$$f(\alpha_z) = u_n,$$

se si attribuiscono ad n tutti e solamente i valori, essenzialmente interi, della successione

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{A}$$

è facile vedere che la differenza d'ordine x di u_n è costante ed uguale a quella di $p_0 . \alpha_z^x$ che è il termine di grado maggiore del polinomio che rappresenta $f(\alpha_z)$; quindi

$$\Delta^x u_n = x! \, p_0 . \tag{1}$$

Considerando tutti i valori di n, u_n è una progressione aritmetica d'ordine x, e se si assume

$$u_0 = f(0) = p_x$$

come primo termine, e si fissa un valore ad n, u_n è il termine di posto $n+1$, a destra o a sinistra di u_0, secondo che n è preceduta dal segno $+$ o dal segno $-$.

La progressione aritmetica u_n è quindi funzione della variabile n, nel campo della successione (A), e di $x+1$ costanti arbitrarie, parametri, che sono i coefficienti $p_0, \ldots p_x$.

2. Sia $\psi_1(\xi)$ una funzione intera di grado x

$$\psi_1(\xi) = q_0 . \xi^x + \ldots + q_x$$

e si scelga un valore qualsivoglia di ξ

$$\xi = \alpha + \sqrt{-1} . \beta = a;$$

fissato un intervallo costante b, si ponga

$$\xi = \psi_2(n) = b . n + a,$$

e si avrà

$$\Delta^x \psi_1(b . n + a) = x! \, q_0 . b^x;$$

e se

$$n = \psi_3(n_1) = \binom{n_1}{y} = \frac{1}{y!} n_1^y - \ldots,$$

sarà

$$\Delta^{xy} \psi_1\left(b . \binom{n_1}{y} + a\right) = (xy)! \, q_0 . \left(\frac{b}{y!}\right)^x.$$

Sia s un numero intero e positivo e si considerino i termini di u_n interrottamente di s in s; si ottiene la progressione

$$\Delta^0_s u_n = \ldots, u_{n-2s}, u_{n-s}, u_n, u_{n+s}, u_{n+2s}, \ldots,$$

e sarà

$$\Delta_s^x u_n = x!\, p_0 \,.\, s^x$$

e

$$\Delta_s^x \psi_1 (b \,.\, n + a) = x!\, q_0 \,.\, (bs)^x,$$

perchè ciò equivale a moltiplicare per s l'intervallo costante; così, in particolare,

$$\Delta_s^x \binom{n}{x} = s^x;$$

ma se per u_n il minimo valore di s è 1, vi sono delle serie per cui esiste questo minimo valore di s per ottenere una progressione aritmetica, ma è > 1; fra queste serie sono caratteristiche quelle che s'incontrano nella teoria della partizione dei numeri ed è perciò possibile assegnarne i termini generali.

3. Se si hanno z funzioni intere, ciascuna d'una variabile, ed è ognuna indipendente dall'altra:

$$\varphi_1 (\alpha_1) = p_{1,0} \,.\, \alpha_1^{x_1} + \ldots + p_{1,x_1}, \text{ di grado } x_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_z (\alpha_z) = p_{z,0} \,.\, \alpha_z^{x_z} + \ldots + p_{z,x_z}, \text{ di grado } x_z,$$

e si pone

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_z = n,$$

il prodotto di esse sarà una funzione intera di n, cioè

$$\varphi (n) = p_0 \,.\, n^x + \ldots,$$

essendo

$$p_0 = p_{1,0} \ldots p_{z,0}$$

e

$$x = x_1 + \ldots + x_z,$$

e quindi

$$\begin{aligned} \Delta^{x_1+\cdots+x_z} \varphi (n) &= (x_1 + \ldots + x_z)!\, p_{1,0} \ldots p_{z,0} \qquad (2) \\ &= \frac{(x_1 + \ldots + x_z)!}{x_1! \ldots x_z!} \,.\, x_1!\, p_{1,0} \ldots x_z!\, p_{z,0}, \\ &= \frac{(x_1 + \ldots + x_z)!}{x_1! \ldots x_z!} \,.\, \Delta^{x_1} \varphi_1 (n) \ldots \Delta^{x_z} (n), \end{aligned}$$

la quale formula coincide con quella ottenuta per altra via. (1)

Se s'innalzano tutti i termini di u_n alla potenza di esponente z, sarà

$$u_n^z = [f(n)]^z = p_0^z \,.\, n^{zx} \ldots,$$

(1) V. *Periodico di Matematica*, anno XX, pag. 25.

e quindi

$$\Delta^{zx} u_n^z = (zx)!\, p_0^z, \tag{3}$$
$$= \frac{(zx)!}{(x!)^z} \cdot (x!\, p_0)^z,$$
$$= \frac{(zx)!}{(x!)^z} \cdot (\Delta^x u_n)^z,$$

la quale formula avrebbe potuto ricavarsi dalla (2).

4. La legge di formazione delle differenze finite, che si può applicare a qualsivoglia successione a_n, anche se questa sia di quantità affatto indipendenti l'una dall'altra, si esprime con l'uguaglianza

$$\Delta^{m+1} a_n = \Delta^m a_{n+1} - \Delta^m a_n, \tag{α}$$

da cui

$$\Delta^m a_{n+1} = \Delta^m a_n + \Delta^{m+1} a_n, \tag{β}$$

e

$$\Delta^m a_n = \Delta^m a_{n+1} - \Delta^{m+1} a_n. \tag{γ}$$

Da questa legge e dalla nota proprietà dei cofficienti binomiali

$$\binom{m}{i} = \binom{m-1}{i} + \binom{m-1}{i-1}, \tag{B}$$

si ricavano, e si dimostrano col metodo della induzione completa, le tre formule

$$\Delta^r a_n = \binom{m-r}{0} \cdot \Delta^r a_{n+m-r} - \ldots + (-1)^{m-r} \binom{m-r}{m-r} \cdot \Delta^m a_n,$$
$$\Delta^r a_{n+m-r} = \binom{m-r}{0} \cdot \Delta^r a_n + \ldots + \binom{m-r}{m-r} \cdot \Delta^m a_n,$$
$$\Delta^m a_n = \binom{m-r}{0} \cdot \Delta^r a_{n+m-r} - \ldots + (-1)^{m-r} \binom{m-r}{m-r} \cdot \Delta^r a_n,$$

le quali sono valide per $0 \leqslant r \leqslant m$.

Sebbene le differenze di u_n d'ordine $> x$ siano tutte nulle, nessuna cosa però impedisce di poterle considerare; perciò, applicando ad u_n il calcolo delle differenze finite, se si pone

$$0 \leqslant r \leqslant x$$

e

$$r \leqslant m \gtreqless x,$$

si ha

$$\Delta^r u_n = \binom{m-r}{0} \cdot \Delta^r u_{n+m-r} - \ldots + (-1)^{m-r} \binom{m-r}{m-r} \cdot \Delta^m u_n, \tag{4}$$
$$\Delta^r u_{n+m-r} = \binom{m-r}{0} \cdot \Delta^r u_n + \ldots + \binom{m-r}{m-r} \cdot \Delta^m u_n, \tag{5}$$
$$\Delta^m u_n = \binom{m-r}{0} \cdot \Delta^r u_{n+m-r} - \ldots + (-1)^{m-r} \binom{m-r}{m-r} \cdot \Delta^r u_n. \tag{6}$$

Da (β), si possono ottenere successivamente le relazioni

$$\begin{aligned} \Delta^r u_n &= \Delta^r u_{n-1} + \Delta^{r+1} u_{n-1}, \\ \Delta^{r+1} u_{n-1} &= \Delta^{r+1} u_{n-2} + \Delta^{r+2} u_{n-2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta^x u_{n-x+r} &= \Delta^x u_{n+x-r-1} + \Delta^{x+1} u_{n-x+r-1}, \end{aligned}$$

e sommando ed osservando che

$$\Delta^{x+1} u_{n-x+r-1} = 0,$$

si ha

$$\Delta^x u_n = \Delta^r u_{n-1} + \ldots + \Delta^x u_{n-x+r-1}. \quad (7)$$

Da (γ), si possono ottenere successivamente le relazioni

$$\begin{aligned} \Delta^r u_n &= \Delta^r u_{n+1} - \Delta^{r+1} u_n \\ \Delta^{r+1} u_n &= \Delta^{r+1} u_{n+1} - \Delta^{r+2} u_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta^x u_n &= \Delta^x u_{n+1} - \Delta^{x+1} u_n, \end{aligned}$$

e sommando, dopo di aver cambiato il segno ad ogni seconda relazione, ed osservando che

$$\Delta^{x+1} u_n = 0,$$

si ha

$$\Delta^r u_n = \Delta^r u_{n+1} - \ldots + (-1)^{x-r} \Delta^x u_{n+1}. \quad (8)$$

Da queste ultime cinque formule si deducono le espressioni dei termini generali e dèlle somme di termini consecutivi, ed anche i due metodi generali per la somma delle potenze simili. Con (4) o (5) o (6) si possono calcolare tutti e solamente i termini del triangolo delle differenze di $\Delta^r u_n$, chiuso e limitato dai lati

$$\begin{aligned} &\Delta^r u_n, \ldots\ldots, \Delta^m u_n, \\ &\Delta^m u_n, \ldots\ldots, \Delta^r u_{n+m-r}, \\ &\Delta^r u_{n+m-r}, \ldots, \Delta^r u_n; \end{aligned}$$

con (7), che vincola due consecutive diagonali ascendenti, si può costruire la progressione verso destra, e con (8), che vincola due consecutive diagonali discendenti, si può costruire la progressione verso sinistra.

(Continua) VITO MELFI MOLÈ.

ERRATA-CORRIGE. — Nell'articolo del prof. RUGGERI inserito nel fascicolo VI, anno XXV, a

pag.	268	linea	3	invece di	$z'^2 + 2z'z_1 + z_1^2 = k$	leggasi	$z'^2 + 3z'z_1 + z_1^2 = k$
"	276	"	28	"	$ax^2 + bxy + cy = k$	"	$ax^2 + bxy + cy^2 = k$

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 779 E 780

779. *Un segmento costante* AB *scorre sulla direttrice di una parabola. Se* A', B' *sono i punti d'incontro di questa con le parallele all'asse condotte per i punti* A, B, *dimostrare che l'area del segmento parabolico avente per corda* A'B' *è costante.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. L. Regazzi.

Riferendo la parabola ad un diametro qualunque ed alla tangente nel punto in cui questa incontra la curva, la sua equazione è

$$y'^2 = 2p'x'$$

dove

$$p' \operatorname{sen}^2 \theta' = p$$

essendo θ' l'angolo che quella tangente fa coi diametri.

Il segmento parabolico determinato dalla corda che ha per estremi i punti di coordinate (x', y') e $(x', -y')$ ha per area

$$S = \frac{4}{3} x'y' \operatorname{sen} \theta' = \frac{4}{3} \frac{y'^3 \operatorname{sen} \theta'}{2p'}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{(y' \operatorname{sen} \theta')^3}{p' \operatorname{sen}^2 \theta'} = \frac{1}{12} \frac{(2y' \operatorname{sen} \theta')^3}{p' \operatorname{sen}^2 \theta'};$$

indicando con l la proiezione della corda considerata sulla direttrice, si ha

$$2y' \operatorname{sen} \theta' = l$$

e quindi

$$S = \frac{1}{12} \frac{l^3}{p}.$$

Se dunque la corda AB scorre sulla direttrice senza che vari la sua lunghezza l, l'area del segmento considerato è costante.

Altra risoluzione del prof. **A. L. Csada** di *Máramarossziget* (Ungheria).

780. *Risolvere l'equazione*

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & 0 \\ 0 & x & a & b & 0 \\ 0 & 0 & x & a & b \\ 2x & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x & a & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. A. L. Csada di Máramarossziget (Ungheria).

Sviluppando due volte il determinante secondo gli elementi dell'ultima verticale si ha

$$b^2 \begin{vmatrix} x & a & b \\ 2x & a & 0 \\ 0 & 2x & a \end{vmatrix} = 0,$$

ovvero

$$b^2 x (4bx - a^2) = 0,$$

quindi

$$x_1 = 0,$$
$$x_2 = \frac{a^2}{4b},$$

QUISTIONI PROPOSTE

782. I semidiametri α, β dell'ellisse di Steiner di un triangolo (ellisse circoscritto al triangolo ed avente per centro il baricentro di questo) verificano le condizioni

$$\alpha\beta = \frac{4S}{3\sqrt{3}}$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2,$$

dove a, b, c, S sono le misure dei lati e dell'area del triangolo.

783. Il luogo dei punti M tali che le loro distanze da tre punti dati A, B, C siano in progressione geometrica si compone di tre cubiche. Che cosa diventano quelle tre cubiche se A, B, C sono in linea retta ed è $AB = BC$?

784. Da un punto qualunque della direttrice d'una parabola, si posson condurre 4 corde di eguale lunghezza a che fanno gli angoli α, β, γ, δ con gli assi.

Dimostrare che qualunque sia il punto e qualunque sia la lunghezza a si ha

$$\Sigma \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 0.$$

785. Per tutti i triangoli d'area massima inscritti nell'ellisse di assi $2a$ e $2b$, l'area del triangolo pedale del punto di Lemoine è costante ed eguale a

$$\frac{3a^3b^3\sqrt{3}}{4(a^2+b^2)^2}.$$

E.-N. Barisien.

BIBLIOGRAFIA

A. BATTELLI, A. OCCHIALINI e S. CHELLA. — *La Radioattività*. Opera premiata dal R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Un vol. in-8 grande di pag. 438. Laterza, Bari. — L. 8.

I fenomeni a cui dànno luogo le scariche elettriche nei mezzi gassosi grandemente rarefatti, dimostrarono che i *raggi catodici* sono costituiti da particelle elettrizzate negativamente e respinte dal catodo con una velocità, la quale varia a seconda delle condizioni sperimentali e che da un minimo di 22000 km/s può salire a 100000 km/s. I raggi anodici (*raggi di Goldstein, raggi canale*) resultano invece formati da particelle cariche di elettricità positiva.

La discussione dei resultati ottenuti da misure di elettrolisi unite ai dati della teoria cinetica dei gas, e di quelli desunti dai fenomeni di condensazione del vapor d'acqua intorno a particelle elettrizzate, conducono ad ammettere che il valore più probabile della minima carica possibile di elettricità, ossia il valore dell'*atomo elettrico* od *elettrone* debba essere assunto come uguale a:

$$1{,}55 \times 10^{-20}$$

unità elettromagnetiche assolute, o, se si preferisce, a $1{,}55 \times 10^{-19}$ coulomb, anche perchè questo numero permette d'interpretare le misure di cariche elettriche che si presentano nei fenomeni di radioattività.

D'altra parte, il movimento dei raggi catodici e anodici in un campo elettrico uniforme, moto analogo a quello di un proiettile in un campo uniforme di forza, dimostra che per i raggi catodici il rapporto fra la carica elettrica trasportata da una particella e la massa della particella stessa, è costante ed è circa 2000 volte maggiore dell'analogo rapporto misurato sull'atomo d'idrogeno nei fenomeni di elettrolisi. I fenomeni, già indicati, di condensazione provano poi, che una particella catodica trasporta un elettrone come l'atomo d'idrogeno. È quindi permesso di ammettere che la particella catodica (o corpuscolo) abbia una massa 2000 volte minore della massa dell'atomo d'idrogeno, od anche che l'atomo d'idrogeno sia formato da 2000 masse uguali alle catodiche. Per i raggi anodici quel rapporto varia invece colla natura del gas attraversato dalla scarica e non supera 10^4 unità elettromagnetiche assolute; ossia è del medesimo ordine del rapporto analogo per l'atomo d'idrogeno che è $0{,}96 \times 10^4$ anche dedotto dalle misure elettriche. Le particelle anodiche possono dunque considerarsi come masse atomiche elettrizzate.

Particelle elettrizzate positive o negative s'incontrano nella radiazione che emana dai corpi radioattivi, quali cronologicamente dopo l'uranio furon trovati essere i composti di torio, di radio, di polonio, di attinio, essendo gli ultimi tre nuovi corpi semplici di cui la scienza si è arricchita e dei quali la classificazione del Mendelejeff aveva fatto supporre l'esistenza.

Le proprietà di questi corpi, di produrre decomposizioni chimiche a distanza (impressioni sulla lastra fotografica), di rendere conduttore (o, come si dice, ionizzare) il mezzo gassoso nel quale si trovano, sono comuni ai raggi scoperti dal Röntgen. Però, mentre per questi ultimi è ormai quasi pacifico che si tratti di vibrazioni eteree a piccolissima lunghezza d'onda, magari senza carattere di periodicità ma generate da impulsi isolati e irregolari, la radioattività si trova esser dovuta ad una emanazione, che attraversando un forte campo magnetico in parte è deviata in un certo senso, in parte devia in senso contrario, in parte non devia.

Furono perciò distinti i raggi α, i raggi β, i raggi γ.

I raggi α sono un seguito di particelle che hanno una massa quattro volte maggiore della massa dell'atomo d'idrogeno, e una carica uguale a $3,1 \times 10^{-20}$ unità elettromagnetiche assolute e perciò uguale a 2 elettroni.

Per la loro grande massa i raggi α sono poco deviati nei campi elettrici e magnetici, ed hanno una grande energia cinetica: 50 volte maggiore in media di quella dei raggi β. La loro velocità varia fra 10^9 e 2×10^9 cm/s a seconda della sostanza da cui provengono, e perciò possono percorrere strati diversi d'aria prima di essere assorbiti (da cm. 2,8 per l'ionio a cm. 8,55 per il torio B).

I raggi β invece, hanno la velocità media di 160000 km/s ed il rapporto fra la loro carica e la loro massa è 10^7 *u. e. m. a.*, identico a quello dei raggi catodici. E poichè hanno proprietà identiche a quelle dei raggi catodici, rendono fluorescente il platino cianuro di bario, mentre i raggi α meglio fanno scintillare la blenda di Sidot etc., etc., s'identificano coi raggi catodici medesimi.

I raggi γ hanno poi tutti i caratteri dei raggi X; non hanno energia sensibile, seguono nell'assorbimento la legge del decremento logaritmico, sono formati da raggi eterogenei...; dovrebbero dunque essere assimilati a onde eteree, sebbene una recente teoria del Bragg li voglia formati dalla unione di particelle α e β.

Il polonio ed una trasformazione dell'attinio, l'attinio A, emetterebbero poi dei raggi β dotati della debole velocità di $3,25 \times 10^8$ cm/s, e che furon distinti col nome di raggi δ.

Se ora si osserva che il gas elio, scoperto dal Ramsay nel 1895, ha il peso atomico 4, si sospetterà facilmente che le particelle α, diselettrizzate che siano, debbano costituire degli atomi di elio; la qual cosa fu dimostrata sperimentalmente da Ramsay e Soddy. Le particelle α sono dunque atomi di elio elettrizzati o *elio-joni*.

È qui ora da ricordare, che da un corpo radioattivo si raccolgono, con metodi appropriati, delle sostanze dette *emanazioni*, che sono dei veri gas inerti, cioè incapaci di combinarsi cogli altri corpi conosciuti; ma dotati di enorme energia potenziale, la quale si riduce in calore, e che forse permette loro di decomporre l'acqua secondo modalità non ancora spiegate. Questi gas sono solubili nell'acqua e si condensano verso -150^0 circa.

Altre sostanze si raccolgono dai corpi radioattivi; esse si presentano come pulviscoli depositati sui corpi ordinarii e sono perciò dette *depositi radioattivi*.

In generale poi, una sostanza radioattiva è formata da un miscuglio di più corpi, che è possibile, talvolta, di separare coi metodi chimici ordinarii. Così il Crookes ottenne dal nitrato d'uranio l'Uranio X, il quale emette dei raggi β e γ, mentre l'uranio puro emette soltanto raggi α.

Si è potuto anzi studiare la successiva generazione di corpi radioattivi partendo da un corpo dato, e costituire così le tre *famiglie radioattive* dell'uranio, del torio, dell'attinio. Dal torio, ad esempio, si produce il radiotorio e da questo il torio X; tre corpi che emettono soltanto raggi δ. Dal torio X si sviluppa l'emanazione e si ha poi il deposito, che a sua volta si trova formato da tre corpi i quali si susseguono geneticamente così: il torio A, il torio B, il torio C.

Un corpo può anche non essere radioattivo, non emettere raggi come l'attinio, e dare ciò non ostante origine ad un corpo quale il radio attinio che emette raggi α, e da cui si hanno poi altri corpi radioattivi che si seguono come nel caso precedente.

Questa trasformazione di un corpo in altri avviene di continuo, almeno fino a che non sia raggiunto uno stato di equilibrio fra il corpo generatore e i prodotti ottenuti. Così, spogliato che sia l'uranio dell'uranio X e ridotto perciò ad emettere soltanto raggi α, col tempo si trova che torna ad emettere raggi β e γ; ma allora se ne può separare del nuovo uranio X, che si era quindi nuovamente formato.

***

È tutto questo complesso di fenomeni che ha condotto a nuove teorie sull'atomo.

L'atomo non è più da considerare come un corpo non divisibile; ma è al contrario un complesso di corpuscoli minori; un edifizio assai complicato, capace di assumere nuove configurazioni e perciò nuove proprietà; capace di disgregarsi con perdita dei suoi componenti e di dare origine a nuovi corpi di peso atomico inferiore. Si hanno così dei passaggi da una posizione d'equilibrio assai instabile a configurazioni in cui la stabilità dell'equilibrio vada di continuo crescendo, fino ad ottenere un equilibrio che presenti un alto grado di stabilità. Queste disgregazioni successive, e successive proiezioni di particelle, devono avvenire con grandissimo sviluppo d'energia, come lo dimostra il fatto che 1 gr. di bromuro di radio emette 100 piccole calorie all'ora.

Poichè il peso atomico dell'uranio è 238,5 e quello del radio 226,5 si vede subito che si potrà ottenere il radio dall'uranio collo strappamento di 3 particelle α. E poichè i metodi di *analisi elettroscopica*, si dovrebbe dire, permettono di determinare una quantità di radio dell'ordine di 10^{-12} gr., così Mackenzie e Soddy sperimentando dal 1905 al 1908 poterono dimostrare che 1 kg. d'uranio produce in 1000 giorni 5×10^{-11} gr. di radio. La trasformazione cessa, ossia si ha l'equilibrio, quando ad 1 gr. d'uranio corrispondano $3,8 \times 10^{-7}$ gr. di radio.

Dal radio, per successive perdite di particelle α, si ottiene il radio A, B, C, D, E e poi si giunge al radio F, che ha il peso atomico 210,5, e che emettendo pure raggi α dovrebbe dare il corpo avente per peso atomico 206,5; prossimo cioè a quello del piombo 206,9, la qual cosa sembra confermata da osservazioni geologiche. E il torio, dal peso 232,5 scenderebbe a 208,5 che è il peso atomico del bismuto. Sarebbero questi due corpi, il piombo e il bismuto, le trasformazioni finali di equilibrio del radio e del torio. Si osserva dunque una vera evoluzione della materia, la quale si produce in un solo atomo alla volta, mediante proiezione di particelle α (un grammo di radio puro ne emette $3,4 \times 10^{-10}$ al secondo) e con diminuzione del peso atomico, o con emissione di raggi β senza che il peso atomico varii, almeno sensibilmente, o senza alcuna emissione come avviene nei corpi non radioattivi e che dànno origine a corpi radioattivi.

***

Ho voluto indicare per sommi capi gli argomenti che questo libro tratta in modo facile ed accessibile a chiunque abbia una media coltura di fisica, mentre indica senza inutili superfluità quanto è necessario di conoscere al fisico di professione della parte dimostrativa e tecnica, perchè i problemi a cui oggi sono pervenute la fisica e la chimica interessano anche il matematico.

Lasciamo pur da parte i problemi secondarii che si connettono allo schema generale ora accennato, quali sarebbero la teoria matematica della chimica delle sostanze radioattive, che costituisce un capitolo originale dell'opera (il capitolo VII) le determinazioni a cui dà luogo l'evoluzione della materia, ed anche il succoso capitolo d'indole fisico-matematica sull'inerzia elettromagnetica di una carica elettrica, per osservare come le nuove idee che siamo costretti a formarci intorno all'atomo, esigono per necessità logica della nostra mente la costruzione di modelli rappresentativi, i quali ci rendano ragione dei fenomeni studiati.

Le cognizioni attuali sono poche e la libertà di foggiare dei modelli è quindi grandissima, secondo il noto teorema del Maxwell. Da una parte sarebbe forse preferibile, come gli autori osservano, di " aspettare che i fatti siano in copia sufficiente da permettere una scelta giudiziosa fra le diverse concezioni possibili "; ma, dall'altra, ci sembra sia da temere che le difficoltà crescano insieme alle nostre cognizioni, mentre è da sperare, che sia facile modificare, mano a mano che quelle progrediscono, il modello, o i modelli, che oggi possiamo costruire.

Ci sembra quindi utile il tentativo che in questa direzione è stato fatto da Lord Kelvin. Poichè le cariche positive sono sempre dotate di massa, egli ammette che esse siano permanentemente collegate all'atomo. Il quale dovrà pur possedere delle cariche negative per neutralizzare le prime; e poichè i corpuscoli appaiono facili ad esser separati dall'atomo, ed a rimanere come enti privi (o quasi) di nucleo materiale, così dovrà ammettersi che i corpuscoli possano muoversi liberamente entro l'edifizio atomico.

Perciò Lord Kelvin immaginò l'atomo come formato da elettricità positiva distribuita uniformemente nel volume di una sfera entro la quale siano sparsi i corpuscoli. Questi assumeranno una configurazione di equilibrio, che dipenderà dal loro numero e dalle forze agenti fra loro e colla massa positiva. Nel caso generale, lo studio delle configurazioni possibili presenta difficoltà non superate; e per trattare il problema il Thomson suppose che i corpuscoli possano muoversi soltanto in un piano. Si ottengono allora delle configurazioni ad anelli concentrici, ed i resultati a cui si giunge presentano singolari analogie colla legge del Mendelejeff, e permettono d'intravedere una spiegazione della radioattività, come proiezione di particelle o nuovo assestamento interno dell'atomo. Ma non è questo che un primo tentativo, e mi sembra che sia ormai venuto il giorno presentito dal Dumas. " Le vedute generali della chimica, egli diceva il 16 aprile 1836, " sono subordinate alle condizioni della fisica e della matematica, e le sue speculazioni reagiscono a vicenda sulla prima di queste scienze. Ma un giorno " forse influiranno ancora sulla scienza del calcolo, e forzeranno a metodi nuovi " i geometri, che non rifuggiranno dalle difficoltà del soggetto ". Questo appunto sembra che sia richiesto dallo studio delle condizioni d'equilibrio e dalle deformazioni dell'edifizio atomico.

È naturale che si sia cercato di spingersi oltre in questo cammino; e gli studii, al di là della Manica in special modo, si sono volti alla costruzione di una teoria elettrica della materia. Gli autori espongono in succinto ma in modo sufficiente questa teoria, fermandosi, ragionevolmente, a dimostrarne soltanto la possibilità; perchè quella teoria rende conto dei fenomeni di conducibilità elettrica e termica, di elettromagnetismo e d'induzione magnetica, dell'elettricità di contatto e dei fenomeni che ne seguono, e, com'è facile intendere, delle radiazioni luminose e dei fenomeni d'elettro-ottica, e tenta poi di spiegare le azioni chimiche fra i corpi. È inutile qui svolgere delle osservazioni sopra una tal teoria, che sembra prediletta agli autori; ma senza peccare d'audacia ritengo di poter osservare, che se la teoria corpuscolare dell'elettricità offre una meravigliosa maggior presunzione circa il problema dell'unità di sostanza, presenta anche tutti i difetti della concezione atomica della materia; e che, d'altra parte, quando si riuscisse a passare dal fenomeno elettrico al fenomeno meccanico, sarebbe possibile anche il passaggio inverso, ossia sarebbe creata la vera teoria meccanica dell'elettricità.

Tutto il resultato di una rapida ricerca, che quasi appare senza precedenti nella storia della scienza, è bene spiegato nel libro; il quale si presenta così come un ottimo riassunto delle cognizioni fin qui acquistate sui fenomeni radioattivi, e dei nuovi problemi e teorie a cui essi hanno condotto. Nè l'anno che ora è trascorso dalla pubblicazione del libro, ha per nulla menomato la sua importanza, poichè lo vediamo in questi giorni tradotto in francese a cura della signora Federigo Battelli. Questo giustifichi l'utilità della presente recensione, malgrado il soverchio ritardo col quale viene pubblicata. R. Pitoni.

A. Maroger. — *Leçons critiques et historiques sur les fondements des mathématiques.* Paris, Vuibert et Nony, 1908.

Il libro è fatto per gli allievi dei Licei francesi, e sviluppa alcuni dei problemi filosofici attinenti al metodo e ai fondamenti stessi della matematica. Siccome però questi non sono pochi e tutti importanti, perchè si abbia subito una idea della materia trattata, diamo qui gli argomenti, che l'A. svolge in queste 15 lezioni.

1°. Metodo obbiettivo; 2°. Deduzione, principio d'identità, ufficio dell'induzione, principio d'induzione completa; 3°. Natura delle dimostrazioni, meccanismo del ragionamento matematico; 4°. Gli assiomi e i postulati in matematica ed in filosofia; 5°. L'idea di numero intero in matematica ed in filosofia, nozione dello zero; 6°. L'infinito in matematica ed in filosofia; 7°. Il rigore matematico; 8°. La matematica e la filosofia.

La trattazione di ciascun argomento è seguita da una parte storica e da una critica. " La partie critique, dice l'A. rivolto agli allievi, sera destinée à exercer votre jugement philosophique. La partie historique aura un double but. D'abord elle vous permettra de faire connaissance avec des mathématiciens célèbres à divers titres, et aussi avec des philosophes fameux, qui se sont adonnés à la mathématique... Ensuite elle vous permettra de suivre, en quelque sorte, le développement de telle ou telle idée, de tel ou tel concept mathématique jusqu'à sa signification actuelle ".

Il quadro dell'opera vien completato poi da varie digressioni di cui alcune trattano dei punti di metodo matematico: la legge di reciprocità quella di omogeneità, l'impiego dei luoghi geometrici, il procedimento euclideo per esaustione; altre sono storiche come quella sul principio d'induzione completa e quella sulle Geometrie non Euclidee.

L'A. poi promette di trattare in una seconda parte dei numeri interi, frazionari, irrazionali, negativi e complessi, del concetto di funzione, di quello d'infinitesimo ed infine dell'aritmetica geometrica e della geometria analitica.

La materia, come si vede, non è poca ed il campo che l'A. si è proposto anche tenendo conto della natura elementare del libro, è molto vasto. Pure io non so rendermi ragione dell'esclusione di molti argomenti. " Je ne me soucie guère, dice ancora l'A., de vous entraîner dans la région des fondements de la Géometrie, région si explorée mais encore obscure pour le moment ".

Posso essere in questo in parte d'accordo con lo scrittore, ma a dir la verità mi parrebbe, che nel disegno del libro avesse dovuto trovar posto almeno la trattazione dei due concetti fondamentali di spazio e di grandezza, che pure si prestano benissimo agli scopi del libro.

Del resto la trattazione è svolta con uno stile facile, piano ed elegante; fissate poche linee generali, la materia è trattata in un modo un po' libero, secondo che il corso del ragionamento porta l'A. a discorrere dell'uno o dell'altro argomento più speciale. Ed io, per mio conto, non posso che lodare l'A., che rinunziando ad un ordinamento troppo pedante, ha dato un po' di varietà e di movimento alla materia trattata, rendendola più attraente (o meno noiosa) per gli scolari.

Quanto allo svolgimento, l'A. che dimostra una grande conoscenza delle opere dei grandi filosofi, specialmente di quelle di Pascal, Descartes, Leibniz, Kant, l'ha fatto con cura e competenza. Però a proposito di esso devo anzitutto osservare, che pare fatto più da un filosofo, che da un matematico; per es. egli, che cita abbondantemente dagli autori sopra detti, ben poco dice della attività matematica dei primi tre, che pure appaiono i suoi prediletti; ed anche degli altri illustri matematici, moltissimi o vengono trascurati del tutto o appena rammentati. Capisco, che gli argomenti trattati son di natura più filosofica che matematica, e che dei matematici si può parlare più facilmente durante lo svolgimento delle varie teorie; ma in un'opera del genere di questa avrei desiderato, che ad essi fosse consentito un po' più di posto.

Lasciando da parte questa, che è questione solo di apprezzamento puramente soggettivo, a proposito sempre dello svolgimento della materia, io devo fare le mie riserve a riguardo di varie conclusioni e giudizii dell'A. anzi alcuni di essi mi sembrano addirittura errati. Ne cito qualcuno.

(pag. 14) " Célà examiné, de quel principe initial et qui mérite ce nom est tributaire toute proposition, toute démostration déductive? Eh bien, c'est du principe d'identité ou de contradiction ". A quanto pare, egli crede, che questi due soli principii bastino per costruire tutta la logica: ma, e il principio del terzo escluso, per es., che egli non rammenta mai, e che pure è dimostrato essere indipendente dagli altri due? (¹)

(pag. 92 nella digressione storica sulle geometrie non euclidee) " Le premier en date parmi les géomètres non euclidiens est le Père Saccheri, jésuite italien du XVIII siècle, qui distingue entre la parallèle et la non sécante ". A questo solo si riduce l'opera del padre Saccheri?

(pag. 169) " Nous définirons la mathématique comme la Science des grandeurs abstraites et mesurables, pures créations de l'esprit, quitte à l'orienter de plus en plus vers l'étude des nombres qui sont justement les mesures de ces grandeurs ". E la teoria dei gruppi, quella degli insiemi, la geometria proiettiva non fanno parte della matematica?

E in un campo più prettamente matematico non posso approvare il modo poco preciso con cui l'A. introduce il numero intero. In tutta la teoria esso si mostra indeciso; prima definisce la successione dei numeri naturali mediante l'operazione elementare di aggiungere un oggetto ad una collezione, poi pare che voglia definire il numero per astrazione, determinando quando deve dirsi che due collezioni hanno ugual numero di oggetti, lasciando da parte le osservazioni che si possono fare alla definizione di numero intero mediante l'operazione di contare; dalla indecisione accennata deriva naturalmente anche poca chiarezza del testo, sicchè anche dal punto di vista dello stile questo capitolo è in contrasto col resto del

(¹) Vedasi COUTURAT, *Les principes des mathématiques* (Revue de Métaph. et de Morale, 1904).

libro: per es. a proposito del principio d'invarianza, pur definendolo un assioma, ne dà una spiegazione, che non è e non può essere che intuitiva, mentre dal contesto assume l'aspetto di una dimostrazione (come tale, naturalmente, errata). E così per l'invarianza del paragone tra due numeri interi, che non è un principio, ma che invece dipende dal precedente.

Queste osservazioni, che pure mi sembrano di qualche importanza, ben poco tolgono al valore del libro; ma devo segnalare qui due manchevolezze, che a me sembrano più gravi, e che io non mi sono saputo spiegare in nessun modo.

L'A. si può dire che in tutto il libro non parla mai della logica matematica, nonostante l'importanza notevolissima che essa ha assunto, dimostrando per essa, direi quasi, una vera fobia. E spinge il suo ostracismo a tal segno, che mai dice nulla neanche dei tentativi di calcolo logico e geometrico del Leibniz, che pure sembra tra i suoi autori preferiti.

Così per es. del Couturat, che tanto si è occupato dei fondamenti della matematica e di logica matematica, egli cita solo alcune idee filosofiche sull'infinito e due opinioni critiche, una su alcune idee di Leibniz e l'altra su Euclide (che poi così staccata può originare una falsa interpetrazione dell'idea del Couturat), e basta. A giustificazione l'A. dice nella prefazione: " Pourquoi, me dira-t-on, puisque votre ouvrage se pique d'être au courant des idées, du moment, pourquoi se contente-t-il, de-ci de-là, d'une allusion timide (molto timida!) au grand effort logique moderne aboutissant à ce qu'on nomme l'école des logisticiens, en se taisant sur leur graphie dont le graphisme matématique ne serait qu'un cas particulier? Et ignore-t-il que le logicien anglais M. Russel a soutenu l'opinion suivant: Le fait que toutes les mathématiques sont une logique symbolique est une des plus grandes découvertes de notre époque!

A ceci je répondrai qu'il existe des idées mathématiques résistant singulièrement à l'emprise de tout symbole et que le moule graphique destiné à les emprisonner n'est pas de sitôt fondu, heureusement! „ A parte, che si potrebbe rispondergli che le idee, che non si son potute scrivere in simboli, sono quelle poco chiare o non bene analizzate, a parte questo, pare che l'A. non abbia capito la vera importanza ed essenza della logica simbolica, e che egli la consideri semplicemente come un diverso metodo di scrittura, come una specie di stenografia.

Anche s'egli non vuole attribuire alla logica simbolica quell'importanza, che a me sembra aver acquistata, pure essa per i resultati conseguiti e per le ricerche sui principii della matematica, che essa ha originato e resi possibili, e che l'A. vuole ignorare, la logique quintassenciée de forme algébrique, com'egli la dice, rappresenta un notevole movimento di pensiero, di cui non può non tenersi conto, e che non si può trascurare giustificandosene con tanta spigliatezza con una sola frase.

La seconda manchevolezza, cui sopra ho alluso, è quest'altra: In tutta l'opera dei matematici moderni egli cita soltanto i seguenti: 1°. *Poincaré* di cui riporta così di passaggio alcune sentenze di natura filosofica e di cui rammenta la *Science et l'Hypothèse*; 2°. *Peano* di cui cita solo la definizione di numero intero; 3°. l'*Hermite* di cui cita un'opinione di natura didattica; 4°... il 4° non c'è. Di tutto il movimento, che negli ultimi 50 anni si è svolto intorno ai fondamenti ed alla filosofia della matematica nulla assolutamente. Via, è un po' troppo poco anche per degli scolari.

Riassumendo: mi sembra che in questa opera vi sieno molte cose notevoli da imparare; che, salvo qualche punto facilmente emendabile, la parte svolta sia concepita, quasi direi, col concetto di un umanista; però con questo concetto contrastano stranamente certe idee troppo grettamente scolastiche (nel senso filosofico, s'intende) e certe esclusioni volute dall'A. che non sono per questo meno ingiustificate ed ingiustificabili, e che generano molte lacune, che tolgono all'opera una notevole parte del suo valore.

Siro Medici.

C. Ciamberlini. — *Aritmetica e Geometria* per le scuole complementari. 3 volumi. Torino, Paravia, 1909-10.

Il Prof. Ciamberlini ha pubblicato un trattatello di Aritmetica e Geometria per le classi complementari, diviso in tre volumetti, uno per ciascuna classe. Questo libro è degno della fama che giustamente l'autore si è acquistata come studioso di questioni didattiche e come compilatore di testi di matematica per le scuole. Egli, che evidentemente conosce i bisogni di queste scuole e l'arte di insegnare (molto rara, a giudicare da ciò che si pubblica) ha saputo adattare gli argomenti che doveva svolgere alle peculiari esigenze di una scuola complementare; e, senza venir meno mai a quella precisione che gli è abituale, ha saputo tenere una giusta sobrietà di linguaggio, generalmente accessibile alle giovani testoline a cui si rivolge. Ho detto " generalmente „ perchè qua e là qualche spiegazione più minuta di regole e qualche maggiore dilucidazione avrebbe giovato, specialmente nel 3° volume.

Segnalo, come lodevole, il modo con cui l'autore espone, mano mano che ne capita l'opportunità, le operazioni da farsi sui gruppi di oggetti e sulle grandezze, evitando così l'incertezza che lasciano molti testi circa il modo di indicare quelle operazioni, a differenza di quelle sui numeri. Soltanto voglio chiedere all'egregio collega perchè non ha profittato degli accenni a queste operazioni sulle grandezze, per esporre a quali questioni sulle grandezze si risponde coll'una o coll'altra operazione, preparando così le giovinette alla risoluzione dei problemi, nei quali la difficoltà sta appunto nel trovare *quali* sono le operazioni da fare. Avrebbe egli così accolto l'idea che informa lo stesso modesto libretto sui problemi di aritmetica, che egli ha avuto la bontà di citare, a riguardo di un altro argomento, nel suo trattato.

Buona la scelta degli esercizi tolti in generale dalla pratica. Opportuno l'uso di alcune brevi dimostrazioni, là dove era facile l'accennarle, quasi preludio a quelle che le alunne dovranno imparare, più tardi, nelle scuole normali. Là dove le dimostrazioni delle proprietà non si possono dare, sarebbe forse stato bene far precedere una serie di esempi pratici per mostrare come su essi valga la proprietà che si enuncia (pure avvertendo che gli esempi non bastano a *provare* una verità matematica) sopratutto perchè dagli esempi l'alunna apprenda bene *in che cosa* consista la proprietà che verrà dopo, la quale non di rado, per la forma necessariamente arida o di insolita apparenza algebrica, può essere sulle prime male afferrata da alunne giovani. L'autore, in realtà, dà un esempio per le proprietà principali; ma io credo necessario darne *più di uno*, sia perchè la regola riesce così meglio capita, sia perchè la pluralità dei casi prepara la regola astratta e distacca la mente dell'allieva dal caso particolare, mentre toglie il pericolo di farle credere che ciò che accade in un esempio sia, per ciò solo, una proprietà generale.

Qualche lieve miglioramento di parole o di frasi qua e là, qualche minuscola aggiunta o modificazione potrebbero senza dubbio essere indicate; ma siccome si tratta di impressioni personali, perciò fors'anche discutibili, e non di errori da correggere — chè, come ho già detto e volentieri ripeto, la precisione dell'idea e della parola è sempre impeccabile in questo libro — così non credo decoroso il tenerne conto in una recensione, che non deve essere una revisione. Talchè non mi resta che rallegrarmi per la pubblicazione del libretto, di cui l'autore può compiacersi, parendomi esso ottimo per le scuole a cui è destinato.

Rodolfo Bettazzi.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 30 Settembre 1910

SULLA GENESI E LA GEOMETRIA DESCRITTIVA

de' poliedri regolari convessi

1. Ritorno ancora su quello stesso argomento, del quale molti anni or sono m'intrattenni [1] in grazia del nuovo contributo che vi apporto.

2. Un'altra genesi de' poliedri reg. convessi (pd. r. c.) mi sembra infatti venga suggerita dalla nozione di *stelle regolari* di raggi o semiraggi (n. 5 e seg.) le cui intersezioni con una sfera concentrica qualsivoglia e i piani ivi ad essa tangenti, ne danno risp. i vertici o le facce; mentre l'altra di *poligoni reg. sghembi* (pg. r. s.) (n. 21 e segg.) convenientemente saldati fra loro (n. 28) ne fissa direttamente gli spigoli, già d'altronde ottenuti come intersezioni di quei piani tangenti.

3. Il riferimento, inoltre, di quei poliedri ad un sistema di tre assi ortogonali e di quattro fra essi al cubo (Tav. II) nel darne, anche in virtù delle precedenti considerazioni, la più evidente configurazione nello spazio, ne permette una migliore ed uniforme determinazione.

4. Ma i criteri, sopratutto, di polarità e di correlazione che ricorrono spontanei in quel soggetto, ne indicano nuove proprietà e ne collegano, com'era da aspettarsi, le projezioni e sezioni, debitamente considerate, facilitandone la ricerca (Tav. V). Ed ivi, si noti, viensi ad estendere alle projezioni dei correlativi, se convenientemente disposti fra loro e col piano iconico, la dipendenza, altrove già indicata [2] fra quelle di uno stesso poliedro: dipendenza resa manifesta da una particolare disposizione di quei solidi rispetto ai piani fondamentali e dall'uso di opportune linee di riferimento.

---

(1) " Atti del Coll. degl'Ing. ed Arch. di Palermo „ (1882).

(2) " Rend. dei Circ. Mat. di Palermo „ (T. XVIII, a. 1904). *Un T. sulle proj. ort. di due segmenti rettangolari ecc.*, che, ivi stesso, il prof. GERBALDI volle ritenere, soltanto, come un'altra dimostrazione di un caso particolare di un noto T. di G. Anal., mentre a me venne spontaneo il considerarlo in G. Descr. dove ha naturalmente sua legittima sede. Epperò vien meno l'altro appunto sul segno dei segmenti.

Ma perchè quel critico (assai distinto matematico d'altronde) non disse che, pria di me, nessuno avea mai sognato di dar quell'aspetto a quel *caso particolare?...* di averlo, non foss'altro, estradato in patria? dove, da buon figliolo, si rese utile a qualche cosa.

La forma genuina, infatti, a cui in sostanza può ridursi quel principio, e le sue applicazioni, ora meglio chiarite dal disegno, mostrano, io credo, che l'egr. collega (allora dell'Ateneo di Palermo) avrebbe potuto risparmiarsi l'incomodo di quella sua recensione.

Nè furon trascurate facili verifiche ed analogie che spesso si riscontrono in quelle projezioni.

5. Un multispigolo regolare (m. s. r.) completo o semplice (risultante cioè di raggi o di semiraggi) ed il suo asse bisettore (a. b.) o il suo prolungamento, costituisce una stella regolare di raggi o di semiraggi, se di essi ognuno coincide con l'a. b., o col suo prolungamento, del m. s. r. formato dai circostanti raggi o semir. più vicini che lo comprendono.

6. Una stella reg. di r. o di semiraggi dicesi *semplice* se esclusivamente costituita da un solo m. s. r. col suo a. b. o col suo prolungamento; in essa quindi l'angolo costante fra due spigoli consecutivi è quanto quello che ogni suo spigolo fa con l'a. b. Si dice *composta* invece se risulta dall'insieme di eguali e reg. stelle semplici.

7. Una stella reg. è individuata dal n. dei suoi raggi o semir. come lo è un poligono reg. da quello dei suoi lati; però mentre sono infiniti i polig. reg., sono invece, come or si dirà, di numero limitato quelle stelle. Ed è evidente, sembrami, come ogni stella reg. di dato n. di raggi o semir. sia *unica*: dovendo, infatti, essere di determinata ampiezza, l'angolo di due qualsivogliano spigoli consecutivi del m. s. *particolare* (in modo unico ottenuto) che la costituisce.

Ma non è del pari evidente la supposta limitazione ai soli cinque esempj più sotto riportati (n. 9) del n. di stelle regolari: se pur non voglia desumersi da quello eguale, com'è noto, dei poliedri reg. convessi.

8. La sezione con un piano pp. ad un suo raggio o semir. in ogni stella reg. dà intersecandolo insieme a' raggi più vicini che lo circondano, un polig. regolare ed il suo centro; ed i raggi o semir. d'ogni stella regolare sono (come si vedrà meglio in seguito) due a due distribuiti in piani fra loro pp.

9. Esempj:

a) Il noto sistema di 3 assi ortogonali, caso limite che importa di non escludere, è evidentemente l'esempio più semplice di stella regolare di raggi.

b) Le 4 diagonali del cubo formano una stella reg. tetraradiale; e di 4 raggi non v'ha che quella.

c) Le congiungenti i vertici o i centri delle facce del tetraedro reg. col suo centro dànno due eguali stelle r. di semiraggi che insieme prese (essendo i semir. dell'una per diritto risp. con quelli dell'altra) costituiscono l'anzidetta stella di 4 raggi.

Si hanno, inoltre, e soltanto:

d) La stella regolare di 6 raggi: i 6 diametri p. es. della sfera circoscritta all'icosaedro reg. convesso, ognuno dei quali è determinato da due vertici opposti.

e) La stella reg., infine, di 10 raggi, o i diametri cioè della sfera circoscritta al dodecaedro reg. convesso, contenenti due a due i suoi vertici opposti.

10. Tutte le anzidette stelle, tranne l'ultima, sono *semplici* (n. 6); quella di 10 raggi invece è *composta*, e può intendersi formata da 5 eguali stelle semplici ciascuna di 6 raggi (v. *d*)) convenientemente saldate fra di loro (basta imaginare infatti i 5 cubi inscritti nel dodecaedro).

11. Ogni stella reg. di raggi o semir. copre da sè sola, e senza duplicature, tutto lo spazio a tre dimensioni: il quale può quindi imaginarsi diviso in 4, 6, 8, 12 o 20 regioni eguali od eguali angoli poliedri reg. (triedri, tetraedri o pentaedri).

12. L'asserzione del prec. n. 8 che i raggi o semir. d'ogni stella reg. convenientemente considerati giacciono due a due in piani pp., è evidente per quella di tre raggi (il sistema ortogonale) non che per quelle di 4 semiraggi e di 4 raggi (le diagonali del cubo): ma lo è del pari per quelle di 6 e di 10 raggi che si hanno risp. congiungendo i vertici opposti dell'icosaedro e del dodecaedro anzidetti, se s'imagina dedotti dal cubo (inscritti in esso) quei due poliedri [v. al n. 30 *b*) e le Fig. I e II della Tav. I[bis]].

13. Un'altra genesi, che equivale in fondo alla prima, si ha delle stelle regolari, considerandole formate invece dal conveniente saldarsi di eguali e particolari multispigoli regolari (semplici o completi): così p. es. nasce da 8 triedri trirettangoli la stella di 3 raggi (il noto sistema ortogonale) che divide lo spazio in 8 eguali regioni, com'è risaputo; da 4 particolari ed eguali angoli triedri (reg. e semplici) la stella di 4 semirag. che divide lo spazio in 4 eguali regioni. Similmente per le altre stelle di cui più innanzi (n. 9).

14. Data una qualsivoglia stella di raggi o di semiraggi, e le intersezioni di questi con una sfera concentrica (vertici di un poliedro reg. conv.) i piani ivi tangenti ad essa (facce del polare o correlativo) determinano tagliandosi punti di un'altra stella (ognuno dei quali individua un raggio) che dirò *congiunta reciproca* della prima; giacchè com'è evidente, ogni raggio o semiraggio di una di tali stelle è asse bisettore del multispigolo generatore dell'altra, e viceversa. Ciò è anche meglio chiarito riflettendo, com'è noto, che i centri delle facce di un poliedro reg. qualsivoglia sono i vertici di un altro poliedro regolare (il correlativo).

Epperò due stelle reg. di raggi o semir. se *congiunte-reciproche*, si possono disporre fra loro in modo che i raggi o semiraggi dell'una siano recipr. i bisettori dei multispigoli dell'altra.

Esempj.

a) Gli assi delle facce e le diagonali di un cubo dànno il risaputo caso del sistema ortogonale e de' suoi assi bisettori (Cfr. Fiedler, *G. Descr.*).

Ma, reciprocamente, si rifletta che gli assi bisettori del sistema suddetto delle 4 diagonali del cubo, coincidono coi 3 assi delle sue facce, con quelli cioè del noto sistema ortogonale.

b) Congiunte-reciproche, similmente, sono le due anzidette stelle reg. di 6 e di 10 raggi, risp. formate dagli assi dei vertici (delle facce) dell'icosaedro (dodecaedro) e dagli assi dei vertici (delle facce) del dodecaedro (icosaedro) l'uno circoscritto alla sfera, ed avente per vertici l'altro (il correlativo) i contatti della suddetta sfera con quelle facce.

c) Considerando, infine, la stella reg. di 4 semiraggi, ad essa identica è la sua congiunta reciproca: basta imaginare infatti il tetraedro reg. e le due sfere ad esso inscritta e circoscritta e gli altri due tetraedri reg. e concentrici aventi per vertici l'uno i centri delle facce del primo e l'altro per facce i piani tangenti a quella sfera nei vertici del suddetto tetraedro inscritto. Ma è più semplice riferirsi ai due tetraedri reg. concentrici l'uno dei quali ha per vertici i centri delle facce dell'altro (n. 9 *c*)) onde dedurne colla massima evidenza, la identità che dovea *necessariamente* avverarsi tra le due stelle di semiraggi ottenute dal congiungere col centro comune i vertici o i centri delle facce di quel solido, com'è noto, *autoreciproco.*

15. L'apparente circolo vizioso nel quale a prima vista si cade considerando, per ragioni sopratutto di convenienza e di semplicità, le anzidette stelle regolari nei poliedri, e questi poscia deducendo da quelle, non credo debba preoccupare molto, se sarà concesso far dipendere, come or si vedrà, soltanto dalla ampiezza di due raggi consecutivi la costruzione nello spazio di dette stelle regolari: ampiezza per altro che assai facilmente si determina, e che basta per definirle; [1] mentre *è vantaggioso passare da tali forme più semplici (elementari) a quelle più complesse dei poliedri.* Analoga osservazione vale pei particolari polig. reg. sgh. di cui al n. 25.

16. Ed è poi ovvio, come si scambiano reciprocamente fra loro, in ogni coppia di stelle reg. congiunte (di raggi o semir.) il numero dei semiraggi nell'una con quello degli angoli m. s. semplici o formanti l'altra (quanto, cioè, le uguali regioni in cui essa divide lo spazio).

P. es.:

nelle stelle di 3 e di 4 raggi anzidette [n. 9, *a*) e *b*)] si hanno risp. 6 ed 8 semiraggi; ed 8 o 6 angoli triedri o tetraedri;

20 o 12 angoli triedri o pentaedri nelle stelle di 6 o 10 raggi (epperò di 12 o 20 semiraggi); nella stella, infine, di 4 semiraggi, necessariamente eguali quei numeri, ad essa identica essendo la sua congiunta.

17. Pertanto gli angoli di due consecutivi raggi o semir. di una stella regolare (angoli degli assi dei vertici di un pd. r. c.) facilmente, come or si vedrà, si costruiscono.

---

[1] Per altro mi riserbo di studiar meglio quelle forme, onde assegnarne una determinazione più diretta, e indipendente da qualsivoglia altra considerazione estranea.

(Ma è quì acconcio notare che, data l'ortogonalità fra gli assi dei vertici di un pd. r. qualsivoglia e le facce del polare tangente in quei punti alla sfera circoscritta, ne viene che

" *Sono supplementari il diedro di un pd. r. c. qualsivoglia e l'angolo* " *di due consecutivi* assi dei vertici del correlativo ").

P. es.

a) Dei due angoli conseguenti fra le diagonali di un rettangolo di lati a ed $a\sqrt{2}$ (sezione piana per due spigoli opposti di un cubo di spigolo a) il maggiore misura il diedro dell'ottaedro (il minore quello del tetraedro). (1)

b) Gli angoli di due raggi consecutivi risp. delle due stelle esaradiale e decaradiale anzidette (n. 9 *d*) ed *e*)) (quelli cioè degli assi dei vertici dell'icosaedro e del dodecaedro) anche facilmente si ottengono; poichè riferendo al cubo di lato $a+d$, quei due poliedri, il primo di spigolo d e l'altro di spigolo a (Tav. I^{bis} Fig. I e II) ed ispezionando quelle facili projezioni si deduce, per essere il piano di proj. parallelo a quello di due spigoli opposti (ma peraltro anche pp. a due altri) che tali angoli di due contigui assi dei vertici sono risp. il doppio degli acuti minori dei due triang. rett. $3_1 20$ e $3_1 30$, nei quali un cateto è la parte magg. o minore della sezione aurea dell'altro. (2) Mentre, com'è chiaro, i diedri di quei poliedri (d'altronde misurati dagli angoli k_1 e q_1 di quelle projezioni) essendo risp. supplementari dei primi si possono anche direttamente avere nelle loro metà, considerando invece i più grandi fra gli angoli acuti di quei triangoli.

Così p. es. l'angolo 3_1 del triang. rett. $23_1 0$ (Fig. III) misura metà del diedro del dodecaedro, e l'angolo 3_1 del triang. rett. $33_1 0$ (Fig. IV) misura invece metà del diedro dell'icosaedro.

18. Ora riunendo in sintesi i precedenti tracciati si può con una costruzione grafica assai semplice determinare in un'unica volta tutti e quattro quei semi-angoli (i due cioè fra i raggi consecutivi delle stelle reg. di 6 e di 10 raggi e gli angoli diedri dei solidi reg. che risp. vi corrispondono). *Basta infatti* (Tav. V, Fig. III) *unire il punto di sezione aurea di un lato del quadrato coi vertici del lato opposto*; giacchè quelle congiungenti fanno con questo e con gli adiacenti lati gli angoli richiesti, che ho risp. indicato α_{12} ed α_{20} (quelli fra i raggi) e δ_{12} e δ_{20} (quelli che misurano i diedri).

Dalla quale costruzione è facile ricavare i contorni (che molta analogia hanno fra loro) delle proj. del dodecaedro e dell'icosaedro risp. su di un piano pp. ad un loro asse degli spigoli (quindi a due dei loro

(1) Epperò quei diedri sono simultaneamente misurati dagli angoli che la mediana di un triang. rett. di cateti a ed $a\sqrt{2}$ fa con l'ipotenusa: costruzione questa della massima semplicità.

(2) Essendo a e d risp. le lunghezze del lato e della diagonale del pentagono reg. c., tenuto presente il loro rapporto, ne viene com'è ovvio, che sono d ed a risp. le parti maggiore e minore della sezione aurea di $a+d$.

spigoli) smussando similmente gli angoli di un quadrato (Tav. I^bis, Fig. III e IV), quadruplo dell'anzidetto, con l'una o l'altra di quelle trasversali $3_1 k_1$ o $3_1 q_1$, secondo che si voglia la proj. del dodecaedro o dell'icosaedro: projezioni che tosto si completano nelle parti interne come è indicato nelle rispettive figure ecc.; ovvero con le $m1$ ed $m2$ (Tav. V, Fig. IV).

19. Definite perciò le 5 stelle regolari mediante l'ampiezza dell'angolo, che risp. li determina, dei loro raggi o semiraggi, facilmente ne consegue, come già si disse, quella dei 5 poliedri reg. conv. i cui vertici e le cui facce vanno risp. considerati come intersezioni con una sfera concentrica dei raggi o semiraggi di dette stelle o come i piani ivi ad esse tangenti. D'onde una maggiore evidenza nella struttura geometrica di quei solidi: la proprietà d'inscriverli e circoscriverli nella sfera; la esistenza del centro; i vertici da considerare quali estremi di un diametro della sfera circoscritta; gli spigoli opposti paralleli, eccettuato il tetraedro ove sono pp. (ma di pp. debbono aversene in ogni poliedro); le facce opposte necess. parallele; eguali gli assi di uno stesso sistema in ogni poliedro, e secantisi scambievolmente a metà nel suo centro ecc. (epperò una terza sfera concentrica alle prime, e tangente nei loro medii agli spigoli del poliedro) ecc.

20. Un'altra determinazione dei pd. r. c., beninteso teorica come la prima, è suggerita dalla considerazione dei già cennati polig. reg. sghembi (1) sui quali or brevemente m'intrattengo.

21. *Polig. reg. sghembi* (pg. r. s.) sono quei polig. non piani con lati ed angoli risp. eguali. I loro lati, tre qualsivoglia dei quali mai in un piano, di numero necess. pari, ed in ognuno di quei polig., il quadrangolo per ora escluso:

a) I vertici altern. presi coincidono con quelli di due eguali polig. piani (convessi) regolari (*basi* del polig. sghembo) che giacciano evid. in piani paralleli. (2) La congiungente i loro centri, il segmento ivi compreso ed il suo medio risp. essendo l'*asse*, l'*altezza* e il *centro* del considerato polig. r. s.; le cui *basi* sono però *coassiali* e coi lati dell'una risp. paralleli a quelli dell'altra (gli estremi di que' lati sono cioè i vertici di un rettangolo).

b) Il piano condotto pel centro normal. all'asse di un pg. r. s. passa pei medii dei suoi lati; medii che coincidono coi vertici di un ordin. polig. reg. c. Dirò quel piano, *piano mediano* (parallelo ed equidistante

(1) Niuno, ch'io mi sappia, si è mai occupato di quelle particolari forme geometriche, che io ritengo non trascurabili.

(2) Le *basi* di un pg. r. s. si può supporre originate (d'onde quella loro denominazione) dalle basi di un prisma retto regolare nel quale una di esse abbia conven. rotato attorno all'asse fino a che i suoi lati sieno divenuti risp. paralleli ai lati dell'altra base. $\left(\frac{1}{2n}\right.$ di giro se è n il n. dei suoi vertici$\left.\right)$.

dalle basi). *La projezione di un pg. r. s. sul suo p. med.* (o altro ad esso parallelo) *è un pol. reg. convesso* dello stesso n. di lati.

c) V'hanno in ciascun pg. r. s., tolto il quadrang., vertici e lati opposti (paralleli); risp. eguali le congiungenti i primi (*diagonali maggiori* o *assi dei vertici* del polig.): anche, fra loro, eguali le congiungenti i medii dei lati opposti che tagliano pp. (*mediane* od *assi* dei lati). Gli estremi di due lati opposti sono i vertici di un rettangolo, mentre ogni asse e il piano mediano dividono risp. in parti eguali un pg. r. s. Tutti quegli assi si bisecano nel centro del polig. sgh. Anche uguali sono infine le diagonali che sottendono lo stesso n. di lati; mentre le congiungenti i vertici non comuni di due lati consecutivi (*diag. minime*) altro non sono che i lati delle basi del considerato polig. reg. sghembo.

d) I lati di ogni pg. r. s. sono isoclini con l'asse; e da questo e dal centro del polig. equidistanti. La pp. comune ad un lato qualsivoglia ed all'asse (il segmento compreso fra le basi) passa risp. pei loro medii.

e) *Piani* di un pg. r. s. sono quelli d'ogni coppia di lati consecutivi; tre lati consecutivi determinano due piani il cui angolo, costante com'è ovvio, in un dato pg. r. s., ne è il *diedro*.

Detti *piani* sono egual. inclinati con quello della sezione centrale e risp. quindi con l'asse, che tagliano, alternat. presi, in punti a egual distanza dal centro del considerato polig. r. s.

f) n essendo il n. dei lati di un pg. r. s. la rotazione (*torsione*) riferendosi al prisma regolare di cui più innanzi [v. *a*)] di una delle due basi perchè si disponga conven. rispetto all'altra è di $\frac{1}{n}$ di giro, com'è ovvio: epperò nel più semplice di quei polig., che è il quadrangolo reg. sghembo, i due eguali segmenti a cui or si riducono le basi (ossia le *uniche* sue diagonali), sono *perpendicolari* fra loro e coassiali (due opposti spigoli del tetraedro regolare).

22. Consegue dai precedenti come ogni pg. r. s. è inscrittibile e circoscrittibile alla sfera; e che i suoi lati coincidono, com'è evidente, con generatrici (dei due sistemi) uniform. distribuite di una iperboloide rigata di rivoluzione: i centri e gli assi comuni a quelle due superfici risp. coincidendo con quelli del poligono sghembo.

Donde, rispetto alla sfera, la figura polare di un pg. r. s. è un altro pg. r. s. (ma in generale differente) e dello stesso numero di lati risp. pp. a quelli del primo; col quale è inoltre coassiale, concentrico e con lo stesso piano mediano. Solamente nel caso del *particolare* quadrangolo reg. sgh., con le diagonali quanto i lati (che si riscontra, p. es. come già si disse, nel tetraedro regolare sopprimendovi due spigoli opposti) il polare ha la stessa forma: è, cioè, simile al dato.

23. La pp. comune a due qualsivogliano lati pp. in quei due pg. r. s., che polarmente si corrispondono nella sfera, è anche pp. al loro asse comune; e passa pei loro medii e per quello comune ai due segmenti dell'asse risp. compresi fra le basi dei due poligoni (differenti essendo, com'è ovvio, le loro altezze).

24. D'onde il seguente

Teorema I. — *In ogni coppia polare di polig. r. s., sono complementari gli angoli dei loro lati cogli assi rispettivi.*

Epperò nel particolare quadrangolo r. s. di cui avanti che si riscontra nel tetraedro (n. 21, *f*)) quegli angoli (ma è d'altronde anche facile dimostrarlo direttamente) sono necessariamente semiretti.

25. Si può indip. dai poliedri (r. c.) determinare i particolari pg. r. s. che vi si riscontrano, giacchè basta indicarne la proj. sul piano mediano e l'altezza, che facilmente si ottiene applicando il T. di Pitagora. Ma è bene, onde meglio imaginarli nello spazio, il riferirli ai poliedri ed alle loro projezioni.

Non avvisando altrimenti, dirò sempre a la comune lungh. dei lati di quei polig. e d la diag. del pent. reg. c. che ha quel lato; r ed R i raggi dei cerchi circoscritti risp. al triang. equil. od al pentag. r. (1) di lati a o d (si ricordi che è $a=\frac{d}{2}(-1+\sqrt{5})$ e, viceversa, $d=\frac{a}{2}(1+\sqrt{5})$.

P. es.

a) Il quadrangolo r. s. con angoli di 60° (ha quindi le diagonali quanto i lati) è dato da due eguali segmenti pp. e coassiali distanti $\frac{a}{\sqrt{2}}$ i cui estremi coincidono coi vertici del tetraedro regolare. La sua proj. è un quadrato di lato $\frac{a}{\sqrt{2}}$ eguale all'altezza (Tav. I, Fig. III).

b) L'esagono r. s. con angoli di 60° (ha quindi per basi due eguali triang. equil. dello stesso lato, ed $a\sqrt{2}$ è la distanza fra due vertici opposti): I suoi vertici dànno quelli dell'ottaedro r. c., e la sua proj. è un esag. piano r. c. di lato $\frac{a}{\sqrt{3}}$; la sua altezza $h=\frac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{2}$. (Tav. I, Fig. II ovvero Fig. III della Tav. I^bis^).

c) L'esag. r. s. con angoli retti: ha per basi due eg. triang. eq. di lato $a\sqrt{2}$; distanza fra due vertici opposti $a\sqrt{3}$; la proj. è un esag. r. c. di lato $\frac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{2}$; la sua altezza $h=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Indipendentemente dalle suddette considerazioni, si può determinarlo osservando che, di tre lati successivi qualsivogliano, ognuno è pp. agli altri due, e che il quarto è parallelo e coassiale col primo.

---

(1) Quei raggi pur essendo differenti, non si equivoca indicandoli egualmente, trattandosi di casi fra loro ben distinti.

d) Il decagono r. s. con angoli di 60°, che ha per basi due eg. triang. eq. dello stesso lato; d distanza fra gli estremi più lontani di tre lati consecutivi ed $r\sqrt{5}$ quella fra due vertici opposti (r essendo il raggio del pent. r. c. di lato a). La sua proj. è un ordin. decag. r. di lato $\frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})$, essendo qui r il raggio del triang. eq. di lato a: la sua altezza h quanto quel raggio. (1)

e) Il decag. r. s. con angoli di 108° (quanto quello al perimetro del pent. r. c.) che ha per basi due eg. pent. r. di lato d. La distanza fra gli estremi della poligonale formata da tre lati consecutivi è $d\sqrt{2}$, mentre è $d\sqrt{3}$ quella fra due vertici opposti (basta riferirsi ai cubi inscritti nel dodecaedro ecc). La sua proj. è un ordin. dec. reg. di lato r quanto il raggio del pent. reg. c. di lato a, e la sua altezza $h=\frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})$ è invece quanto il lato del decag. r. inscritto in quello stesso cerchio che contiene i vertici del pent. suddetto ecc....

f) L'esag. r. c. con angoli di 108° ha per basi due eg. triang. eq. di lato d: la distanza fra due vertici opposti è $R\sqrt{5}$ (corrisponde a quella già trovata in d) trattandosi sempre dell'icosaedro ecc.). La sua proj. è un esag. r. di lato quanto il raggio R delle basi; ed è

$$h=\frac{R}{2}(-1+\sqrt{5}).$$

g) L'esag. r. c. infine con ang. di 36° e di lato $a+2d$ che si riscontra prolungando nel dodecaedro i sei spigoli più lontani da due vertici opposti (Tav. IV, Fig. II): le sue basi, com'è ovvio, sono due eg. triang. eq. di lato $a+d$ (tengasi presente che è $a+d$ parte magg. della s. a. di $a+2d$). La sua proj. è un esag. r. c. di lato $\frac{a+d}{\sqrt{3}}$ ed è la sua altezza $h=\frac{2a+3d}{\sqrt{3}}$ (corrisponde cioè alla distanza fra due facce opposte dell'icosaedro di spigolo $a+d$, come si vedrà in seguito a proposito della proj. di quel poliedro).

26. Oss. I. — La distanza di due vertici opposti e l'altezza di un pg. r. s. di dato n. $2n$ di lati bastano a definirlo ed a permetterne

---

(1) Basta ricordare infatti, il noto triang. rett. formato dal raggio di un cerchio e dai lati del pent. e del dec. r. c. in esso inscritti. Ma la distanza fra due vertici opposti (che occorre come si dirà in seguito) per la proj. dell'icosaedro su di un piano pp. ad un suo asse dei vertici, è anche data:

1°. dall'ipot. di un triang. rett. di cateti a e d cioè da $\frac{a}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, che corrisponde alla diagonale del pent. r. c. inscritto nel cerchio di raggio a.

2°. È quanto la somma del raggio del cerchio circoscritto al pent. r. di lato a, con due lati del decag. r. inscritto in quello stesso cerchio: ovvero quanto la somma dei lati dei due decag. r. semplice e stellato ecc.

3°. O quanto, infine, l'ip. del triang. rett. che ha per cateti il raggio ed il diametro di quel cerchio, cioè quanto $r\sqrt{5}$.

la costruzione, ben inteso teorica, nello spazio. Il segmento, infatti, a basi parallele ed equidistanti dal centro $\frac{h}{2}$ di quella sfera, dà due eguali circoli minori, nei quali iscrivendo e conv. disponendo fra loro due eg. pg. r. di n lati, le congiungenti gli estremi dell'uno con quelli dell'altro sono i lati del richiesto pg. r. s.; i cui vertici si potrebbero anche altrimenti ottenere come intersezioni, altern. considerate, di quei due cerchi con $2n$ meridiani che passano pei loro poli ecc.

Oss. II. — Lo studio preventivo di quei particolari pg. r. s. facilita, come è chiaro la ricerca delle proj. dei corrispondenti poliedri ed altre determinazioni relative; nè importa che manchi l'abitudine di considerarli indipend. da questi ultimi. Così p. es. l'angolo di due *piani* consecutivi del decag. r. s. con ang. di 60° (che è l'angolo diedro dell'icosaedro) è ovvio, dopo l'anzidetto al comma *d*) che può esser dato dall'angolo al vertice del triang. isoscele di lati $\frac{a}{2}.\sqrt{3}$ e di base d; ed è facile verificare come sia l'altezza pel vertice di questo triang. quanto la p. min. della s. a. della sua mezza base. (Cfr. al n. 17 la determin. di quel diedro).

27. Ora, in ogni poliedro reg. convesso (pd. r. c.) gli spigoli conv.te scelti formano com'è ovvio particolari polig. reg. sgh. (quegli stessi di cui al preced. n. 25): basta riferirsi infatti a quegli spigoli equidistanti dagli estremi di un asse dei vertici o delle facce e, pel tetraetro, ad un asse degli spigoli (è sufficiente guardare le figure disegnate nelle tavole).

28. Ma riferendosi invece in ogni pd. r. c. (il solo tetraedro escluso) ad un asse degli spigoli, gli equidistanti dai suoi estremi saranno ora pp. o paralleli a quell'asse, ma non più formando, com'è chiaro, un poligono sghembo. Così avviene nel cubo, ove oltre ai due spigoli opposti pp. all'asse che li taglia, anche un'altra coppia ve n'ha di pp. e sghembi rispetto a quello; mentre nell'icosaedro (dodecaedro) ad ogni asse di due spigoli opposti (paralleli) due altre coppie di spigoli corrispondono, due dei quali paralleli (perp.) e due pp. (paralleli) a quell'asse: com'è evidente imaginando inscritti nel cubo quei due poliedri (ma con gli spigoli risp. pp. fra loro) o meglio supponendone l'uno inscritto nella sfera, e da esso polarmente dedotto l'altro.

29. Può quindi ogni pd. r. c. considerarsi, in generale, determinato ne' suoi spigoli dal conveniente saldarsi e intersecarsi degli anzidetti particolari pg. r. s. eguali fra loro e concentrici, di n.° metà dei vertici o delle facce del poliedro (pel tetraedro dei suoi spigoli): quei poligoni essendo polari in ogni coppia di poliedri correlativi, secondo cioè che abbiano recipr. per assi quelli dei vertici o delle facce, o degli spigoli nel tetraedro.

Infatti si può così ottenere:

a) Il tetraedro regolare, da tre eguali e concentrici quadrang. reg. sgh. che hanno quanto le diagonali i lati; epperò di 60° gli angoli al perimetro (ma due bastano).

b) Il cubo e l'ottaedro risp. da quattro esagoni ecc. [1] con angoli di 90° o di 60°, od anche

b') considerando le *deformazioni limiti* di un quadrangolo r. s. (che ha sempre, si rammenti, vertici e lati risp. equidistanti dall'asse) annullata la distanza fra le sue diagonali, in un quadrato il cui piano e i cui lati saranno pp. all'asse (nell'ottaedro); o di quella dello stesso quadrangolo, le cui diagonali, essendo ora infinitamente allontanate, ne divengono fra loro paralleli, e con l'asse, i lati (nel cubo); ne viene che tre eguali risp. di ognuna di quelle figure con gli assi formanti il noto sistema ortogonale, e inoltre conven. disposte fra loro (i tre quadrati due a due con una diagonale comune) dànno, intersecandosi o saldandosi, gli spigoli degli anzidetti poliedri cubo ed ottaedro.

c) L'icosaedro e il dodecaedro r. c. per mezzo di sei risp. eguali e concentrici decagoni r. c. con angoli al perimetro di 60° o di 108°, essendo la distanza fra le basi nell'uno quanto il raggio del pentagono regolare dello stesso lato, o quanto la parte magg. della sua sezione aurea nell'altro. Ovvero:

c') l'icosaedro con dieci eguali esagoni ecc. (angolo al perimetro 108°, distanza fra le basi quanto la p. magg. della s. a. del raggio relativo al tr. equil. dello stesso lato) ed il dodecaedro con altrettanti esagoni ecc. (ang. al perimetro 36°) come quelli che si riscontrano (ma che si ottengono indipendenti dal quel poliedro) prolungando i sei spigoli più lontani ed equidistanti da due vertici opposti ecc. [2] (Si guardi, per meglio imaginare tali poligoni r. sgh., alle projezioni verticali dei poliedri riferendosi, per quest'ultimo caso al prec. n. 25, *g*).

30. Polari sono, pertanto, come già si disse (n. 22) due a due quei polig. r. s. che si riscontrano nell'anzidetta determinazione (doppia in generale) di ogni coppia di pd. r. c. correlativi. Così p. es. è polare di se stessa la forma del quadrangolo reg. s. riscontrato nel tetraedro; e polari, com'è ovvio, risp. fra loro i due decagoni e i due esagoni di cui ai precedenti casi *c*) e *c'*) relativi alla coppia dodecaedro-icosaedro.

Mentre, infine, nel caso *b'*) della coppia cubo-ottaedro si rifletta che i piani tangenti alla sfera nei vertici di un ottaedro inscritto

---

[1] Un solo quadr. od un solo esag. sgh. dànno ciascuno risp. tutti i vertici del tetraedro e dell'ottaedro; mentre due soli esagoni ad ang. retti, saldati per due lati opposti, dànno gli 8 vertici del cubo, e due soli decagoni, con ang. di 60°, dànno del pari i 12 dell'icosaedro ecc.

[2] Que' sei spigoli del dodecaedro si possono supporre ottenuti secando uno di quegli esagoni r. s. con due piani pp. al suo asse, equidistanti dal centro e che risp. divid. in sezione aurea i lati (come due lati consecutivi del pent. reg. dividono il lato opposto al loro vertice comune).

La diag. del cubo di spigolo quanto la diag. del pent. reg. di lato eguale a quello del dodecaedro, è il triplo della distanza fra quei piani, come sarà facile dimostrare in seguito.

dànno, intersecandosi, gli spigoli del cubo; epperò *sono polari il quadrato e l'anzidetto sistema di quattro rette parallele dello spazio*, e tali che ne derivino i vertici di un quadrato, tagliandolo con un piano pp. ecc.

31. Ma eccoci ora ad un'altra facile determinazione di quei pd. r. c. che vien suggerita qualora si suppongano riferiti al cubo o ad un sistema di tre assi ortogonali: e che è indicata, nella prima ipotesi, dal seguente.

Teorema II. — *a*) Dato un cubo (Tav. I, Fig. II), le sue diagonali, quelle delle sue facce e le congiungenti i centri delle opposte fra esse (tre eguali assi ortog. che si bisecano scamb. nel centro di quel solido) sono evidenti: l'ottaedro reg. inscritto che ha per vertici quei punti; i due eguali tetraedri **ABCD**, *abcd* le cui facce (due a due risp. parallele) tagliano pp. in tre eguali segmenti le diagonali del cubo (Cfr. Baltzer, *Stereometria*); [1] e dànno intersecandosi gli spigoli dell'ottaedro suddetto ed otto piccoli tetraedri che vi aderiscono. D'onde *l'altezza del tetraedro è quanto la distanza tra due facce opposte dell'ottaedro che ha lo stesso spigolo; e sono suppl. i loro diedri.*

b) Dato un cubo di spigolo $a + d$ (a e d risp. lato e diag. di un pentag. r. c.) si segnino sulle sue facce (Tav. I^bis, Figure I e II) parallele ai suoi spigoli e coi centri sui centri di quelle (in guisa che riescano due a due pp. le tre rette sulle facce per uno stesso vertice) dei segmenti di lunghezza d o a risp. cioè quanto la parte magg. o minore della sezione aurea dello spigolo. È allora facile dimostrare che i *loro estremi coincidono, nel primo caso, coi vertici dell'icosaedro r. c.; mentre cadono, invece, nel secondo, su dodici dei 20 del dodecaedro:* ciascuno degli altri 8 giacendo sopra un vertice (il più vicino al centro del cubo) degli otto piccoli cubi di spigolo $\frac{a}{2}$, dedotti, come indica il disegno, dal considerato cubo.

Ed è ovvio inoltre che quei due poliedri, se ricavati da uno stesso cubo, sono concentrici fra loro e con esso, e si possono disporre cogli spigoli dell'uno risp. pp. a quelli dell'altro.

Infatti ponendo, com'è risaputo, $a = \frac{d}{2}(-1 + \sqrt{5})$, si ha successivamente pel Teor. di Pitagora, nei triang. rett. (Fig. I) $rm3$ ed $1r3$

$$\overline{r3}^2 = \frac{d^2}{16}(10 + 2\sqrt{5}) \quad \text{ed} \quad \overline{13}^2 = d^2, \quad \text{cioè,} \quad 13 = d.$$

Ma essendo, per ragioni di simmetria $13 = 1s$; $sn_1 = n_1 3$ e $32 = 3k$, ed equilateri inoltre i triang. 123 e $3kn_1$, tutti equilateri ed eguali

(1) Basta osservare, infatti, che i due piani ABC od *abc* sono evident. paralleli fra loro e pp. alla diag. D*d* del cubo, e che i lati della spezzata (reg. sgb.) *d*A *c*D, essendo isoclini con quella vi si projettano necess. secondo tre eguali segmenti.

saranno i cinque triangoli concorrenti nel vertice 3; e lo stesso accadendo per tutti gli altri, che cinque a cinque hanno un vertice comune cogli estremi dei segmenti $1n$, $2k$ ecc. ne viene che il solido in quistione è un *icosaedro reg. convesso.* C. D. D.

Mentre per essere $d = \frac{a}{2}(1+\sqrt{5})$ e $d - a = \frac{a}{2}(-1+\sqrt{5})$, ne viene (Fig. II) dal triang. rett. $1vo$ $\left(\text{dove è } 1o = \frac{d-a}{2} = \frac{a}{4}(-1+\sqrt{5})\right.$ ed $\left. ov = \frac{d}{2} = \frac{a}{4}(1+\sqrt{5})\right)$ che sarà $1v = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, quanto cioè l'altezza del triang. equilatero di lato a. Ed essendo, per costruzione, nell'altro triang. rett. $1v2$ il cateto $v2 = \frac{a}{2}$, consegue che ne è l'ipot. $12 = a$, ossia $12 = 1h = pq = 34$ ecc. . . .; epperò anche eguali ad a i segmenti 15, 54, 32 e 43 (quest'ultimo per dato). *Tutti eguali quindi i lati della figura 1 2 3 4 5.*

Considerando poi successivamente i due triang. rett. $rm3$ e $3r1$, si ha $13 = \frac{a}{2}(1+\sqrt{5})$, cioè $13 = d$; ed essendo anche eguali a d, per costruzione, la 52, e per simmetria con l'anzidetta 13, la 14, ne viene che la figura 1 2 3 4 5 (che ha tutti i lati e tre diag. risp. eguali) è non solo *equilatera, ma piana ed equiangola*: ed è perciò un ordinario *pentagono reg. convesso.*

Lo stesso dimostrandosi per le altre facce (rispetto a quel cubo in condizioni identiche della prima) e tenuto conto della loro reciproca connessione, il solido considerato è un *dodecaedro reg. convesso.* C. D. D.

32. Ma i pd. r. c. si possono, come già si accennò, anche altrimenti determinare, senza avvalersi del cubo, e riferendoli invece ad un sistema di tre eguali assi ortogonali, che scamb. si bisecano nell'origine; ed è ovvio, infatti, come i loro estremi coincidano

a) coi vertici di un ottaedro regolare, che ha il centro in quell'origine:

b) coi medii degli spigoli (a quegli assi risp. pp.) del tetraedro reg. ecc.; (1)

c) coi medii degli spigoli, sei a sei conv.$^{\text{te}}$ scelti, dell'icosaedro e del dodecaedro: la loro lunghezza risp. essendo quanto la parte maggiore o minore della sezione aurea della lunghezza di quei tre eguali assi; osservando inoltre che quelle tre coppie di spig. paralleli, risp. pp. agli assi del sistema ortogonale, ne hanno, ciascuna, quelle stesse direzioni.

(1) Se a è la comune lungh. di quegli assi, condotta dagli estremi di uno di essi qualsivoglia una delle bisettrici dell'angolo degli altri due, in uno, e pel secondo la parallela all'altra bisettrice, i due eguali segmenti lunghi $a\sqrt{2}$ ivi presi, coi medii risp. in quell'asse, sono due spigoli opposti del tetraedro reg. che ha il centro nell'origine del considerato sistema.

Osservazione. — Tutto ciò corrisponde, com'è ovvio, alle precedenti determinazioni (n. 30) di quei poliedri riferiti al cubo ed agli assi delle sue facce.

33. Data poi la simmetria dei pd. r. c. e la ortogonalità, tre a tre, dei loro assi (dei vertici nell'ottaedro, delle facce nel cubo e degli spigoli negli altri) ne viene come si possa ciascun poliedro situare in modo rispetto ai piani fondamentali, da ottenerne *risp. eguali tutte e tre le proiezioni* (tre eguali quadrati pel tetraedro, cubo ed ottaedro; e tre, risp., eguali e particolari esagoni non regolari di cui al n. 18 pel dodecaedro e per l'icosaedro).

34. Applicando ora a que' poliedri il prec. Teor. II sui poligoni regolari sghembi ne viene, com'è evidente, il

Teorema III. — *L'angolo costante che in ogni pd. r. c. gli spigoli più lontani (equidistanti) da un suo asse qualsivoglia fanno con esso, è il complemento di quello, del pari costante, che nel coniugato gli spigoli similmente posti fanno con l'asse correlativo.* [1]

Sono perciò complementari:

a) L'angolo degli spigoli, sei a sei, del cubo con la diagonale (asse dei vertici) che non li attraversa; e quello, nell'ottaedro, con un asse delle sue facce, dei sei spigoli che ne congiungono i vertici.

b) L'angolo che dieci a dieci (sei a sei) nel dodecaedro i suoi spigoli fanno con un asse delle facce (dei vertici); e quello che nell'icosaedro, risp. lo stesso n. di spigoli, fanno con un suo asse dei vertici o delle facce.

c) Epperò sarà, nel tetraedro, com'è noto *autoreciproco, necessariamente semiretto* l'angolo che con l'asse di due spigoli (opposti) fanno gli altri quattro. Proprietà d'altronde assai ovvia, considerando le diagonali del cubo e gli assi delle sue facce: ma che ora, con maggior eleganza, quì si ritrova.

d) E riferendosi, infine, in ogni coppia di conjugati fra quei poliedri ad un asse degli spigoli ed agli spigoli equidistanti dai suoi estremi, risponde all'ennunciato del T. l'essere quegli spigoli pp. nell'uno e paralleli nell'altro a quell'asse: come accade, p. e. nella coppia cubo-ottaedro, dove ai due spigoli pp. nel primo a quell'asse, due ne corrispondono, nel secondo, che gli son paralleli; e nella coppia dodecaedro-icosaedro, dove ai 4 del primo (2 pp. e 2 paralleli all'asse di altri due spigoli opposti) altri 4 vi fanno riscontro nell'icosaedro, 2 dei quali recipr. paralleli e gli altri due pp. a quel medesimo asse. (Si suppongano quei due poliedri simult. inscritti nel cubo e cogli spigoli risp. pp.).

---

[1] Chiamo correlativi (e mi par giustificabile) quegli assi che in due pol. conjugati qualsivoglia risp. congiungono due vertici opposti, in uno, e i centri di opposte facce nell'altro; o, in entrambi, quelli di spigoli opposti.

Similmente in posizione correlativa dirò fra di loro, o rispetto ad un piano, una coppia di quei pd., se con gli spigoli risp. pp., o con due correlativi dei loro assi pp. a quel piano; e *correlative* le projezioni su di esso.

35. Or, dalla evidente simiglianza tra le facce di un pd. r. c. e la sezione piana del conjugato per gli estremi degli spigoli di un suo angolo solido (sez. diagonale); e dall'essere reciprocamente identici il sistema degli assi dei vertici (delle facce) nell'uno con quello delle facce (dei vertici) nell'altro, ne viene che *scambievolmente simili sono le projezioni delle facce e quelle delle anzidette sezioni di quei due poliedri* su piani rispett. pp. ad un asse dei vertici, nell'uno, o delle facce nell'altro.

Ma anche reciproc. simili sono le projezioni verticali delle suddette figure piane in due pd. conjugati qualsivoglia, in grazia, com'è facile assicurarsi, della particolare loro posizione rispetto al piano iconico.

E nel mentre considerazioni ovvie di polarità collegano, come in principio si accennò (Teor. V) le projez. e sezioni, debitamente scelte di quei poliedri, il seguente teorema IV di cui altrove (e che ora sotto forma più semplice richiamo) stabilisce facili rapporti fra le loro projez. non omonime. Ma eccone l'enunciato:

TEOREMA IV. — *Se due segmenti di lungh.* a *e* b *qualsivoglia sono pp. fra loro ed alla linea di terra, i due rapporti fra le proj. di ognuno con quelle risp. non omonime dell'altro, saranno eguali entrambi al rapporto degli originali segmenti presi nel considerato ordine: saranno cioè, eguali ad* $\frac{a}{b}$ *tanto* $\frac{a'}{b''}$ *che* $\frac{a''}{b'}$.

Basta considerare infatti, anche nel caso di segmenti sghembi, quegli altri ad essi risp. eguali e paralleli per un punto qualsivoglia dello spazio: giacchè reciprocamente eguali risultandone i loro angoli con due assi ortogonali (intersezioni del loro piano coi piani di riferimento) lo stesso raccorciamento subiranno, rispetto agli originali segmenti, la projezione dell'uno e quella non omonima dell'altro; epperò si avrà

$$\frac{a'}{a}=\frac{b''}{b} \quad \text{ed} \quad \frac{a''}{a}=\frac{b'}{b} \quad \text{ossia} \quad \frac{a'}{b''}=\frac{a''}{b'}=\frac{a}{b}. \quad \text{C. D. D.}$$

COROLLARIO. — È ovvio che nel caso particolare della eguaglianza fra loro di quei segmenti, ne saranno *recipr. eguali la projez. orizzontale dell'uno con quella verticale dell'altro, e viceversa.*

36. Un'elegante applicazione sorge spontanea, da quel corollario, alle proiezioni dei correlativi d'eguale spigolo fra i pd. r. c.: analoga a quella altrove già indicata (Cfr. *Un T. sulle projez. ort. di due segmenti rettang. ecc.*) per cui si deduceva dalla proj. oriz., p. es., di un pd., quella verticale, e da essa ora quella verticale del coniugato o viceversa, come subito si vedrà. Onde importa aver presente quali fra gli spigoli od altre dimensioni, fra loro o con quelli, riescano pp. in un poliedro; e, se si possano due correlativi disporre in modo da riscontrarvi l'ortogonalità anzidetta.

Pertanto sono pp., com'è chiaro:

a) Due a due gli spigoli del tetraedro; ogni spigolo del cubo con quelli delle due facce (e le loro diagonali) che gli sono pp.; ogni asse dei vertici dell'ottaedro cogli altri due e coi quattro spigoli (formanti un quadrato) che non contengono quei vertici.

b) Ogni spigolo del dodecaedro con altri quattro. In due facce consecutive, infatti, quello comune escluso, ogni spigolo di una faccia è pp. a quello che, giacendo nell'altra, passa pel vertice opposto. Ed ogni spigolo dell'icosaedro lo è, del pari, ad altri quattro; giacchè in ogni sua piramide, formata da cinque facce concorrenti in un angolo, ciascun lato della base è pp. allo spigolo laterale pel vertice opposto ecc. (tutto ciò è più evidente, riferendo quei poliedri al cubo circoscritto).

c) Ed è, infine, evidente, come si possa sempre disporre fra loro due poliedri correlativi con gli spigoli scambievolmente pp.: basta supporre infatti quello che l'uno abbia i vertici nei centri delle facce dell'altro ecc.

37. Ed ora, in virtù delle considerazioni precedenti, riescirà più facile e più razionale in un tempo la determinazione di projezioni e sezioni debitamente scelte dei pd. r. c.: projezioni e sezioni sopra o con piani pp. al centro di un asse dei vertici, delle facce o degli spigoli (delle quali ultime diremo infine). Ma assai ovvie spesso riescono talune di quelle ricerche. (Si supponga, non avvisando altrimenti, che sia a la lunghezza dello spigolo d'ognuno di quei poliedri).

38. Superfluo intrattenersi delle projez. e sezioni del cubo e dell'ottaedro sopra o con piani risp. pp. al centro di un asse delle facce, pel primo, e dei vertici pel secondo: ove si ha sempre un contorno quadrato ecc.

39. Dirò invece della projez. del cubo su di un piano (p. es. orizz.) pp. ad una sua diagonale (Tav. II, Fig. II) che è evident. un esagono regolare coi suoi raggi (projezione com'è noto *isometrica*) in virtù del polig. r. sghembo $AbCaBc$ (n. 21 *b*)).

Ma indipendenti dalle considerazioni ora fatte, si ha gli stessi risultati osservando che gli spigoli tutti del cubo sono isoclini con ogni sua diagonale; che metà delle diagonali delle sue facce essendo parallele al piano orizz., vi si proiettano al vero e formano, tre a tre, due eguali triangoli equilateri concentrici coi lati risp. paralleli. I raggi di quei triangoli e le congiungenti i loro vertici (gli uni e gli altri proiezioni dei 12 spigoli del solido) ne completano la projezione su quel piano pp. ad una sua diagonale. Alla proj. verticale si applica con vantaggio il Teor. IV; giacchè basta considerare la sezione secondo $COco$ (un rettangolo di dimensioni a ed $a\sqrt{2}$) il cui piano risultando pp. alla linea di terra sarà $\sqrt{2}:1$ il rapporto fra la proj. verticale delle sue diagonali e quella orizzontale de' suoi lati, ed il reciproco $1:\sqrt{2}$, viceversa, fra la verticale di questi e l'orizzontale di quelle. Si avrà cioè:

$$C''o''\,(=O''c'')=O'C'\sqrt{2} \quad \text{e} \quad O''C''\,(=c''o'')=O'c':\sqrt{2}$$
$$=O'C':\sqrt{2}$$

epperò

$$O''C''=c''o''=C''o'':2$$

ovvero

$$O''C''=C''c''=c''o''.$$

D'onde la costruzione indicata, per cui le tre altezze della proj. verticale sono rispetto al lato del quadrato inscritto nel cerchio $B'a'C'\ldots$ ordin. quanto la sua metà, l'intero od una volta e mezzo: essendo infatti $c''o''=o''c$; $o''C''=o''C$ ed $o''O''=o''O$ (si noti inoltre che è pure $c''o''=o''a$ essendo il punto a ottenuto sulla LT per intersezione con la circ. $A'a\ldots$ di centro m).

Nè occorre dilungarsi sulle verifiche dell'esattezza del disegno, per altro reso evidente dalle numerose indicazioni appostevi.

40. La sezione del cubo normale al centro di una sua diagonale (asse dei vertici) p. es. Oo è evident. l'esagono regolare che ha i vertici nei punti medî dei sei spigoli che non la tagliano e che si proietta orizzontalmente in vera forma e grandezza ecc.

41. Similmente la projezione dell'ottaedro reg. c. (Fig. III) su di un piano pp. ad un suo asse delle facce (parallelo ad una sua faccia che si ritiene orizzontale) è un esagono regolare con le sue diagonali minori (metà visibili e metà no); ed avendo presente quel suo asse dei vertici e i due spigoli che sono pp. alla linea di terra (coppia di spigoli ed asse, nello spazio, pp. fra loro ed a quella, e il cui rapporto è $1:\sqrt{2}$) ne viene pel Teor. IV che la projezione verticale di quell'asse (projezione che è quanto la distanza fra due facce opposte del solido) eguaglia, moltiplicata per $\sqrt{2}$, il lato dell'esagono anzidetto. D'onde una costruzione analoga a quella precedente relativa al cubo ecc.

42. Mentre è poi evidente che la sezione centrale dell'ottaedro parallela a due facce opposte è anche un esagono regolare coi vertici nei medî degli spigoli che respettivamente congiungono fra loro i vertici di quelle due facce.

43. Le congiungenti, com'è ovvio, il centro di una faccia dell'ottaedro coi vertici della opposta, formando con questa un tetraedro regolare della stessa altezza, se ne giustifica così la solita comune determinazione indicata nella tavola (Fig. I); e basta per completarne la projezione sul piano di quella faccia il disegno di un triangolo equilatero coi suoi raggi (eguali projezioni degli altri tre spigoli).

Dal paragone di quelle projezioni risp. sul piano di una faccia del tetraedro e dell'ottaedro, ove sotto egual forma si presentano le projezioni delle facce ad essa oblique, si può nuovamente inferirne il supplementarismo dei loro angoli diedri (n.° 30 a)).

44. La projezione del tetraedro (Tav. I, Fig. III) su di un piano parallelo a due spigoli opposti (pp. al loro asse) è un quadrato con le sue diagonali, che ne sono in vera grandezza le projezioni; e la sua sezione centrale, pp. all'asse di quegli spigoli, è un altro quadrato coi vertici nei medi dei lati del primo. È così facilmente risoluto il noto problema dei trattati sulle sezioni quadrate del tetraedro e, riferendosi al precedente n.° 39, su quelle regolari esagone del cubo.

45. La considerazione nel dodecaedro (Tav. III, Fig. I) del decag. reg. sghembo ABCDE... mostra che la proiezione del suo contorno apparente sul piano di una sua faccia (oriz. p. es.) è un decagono reg. conv.; mentre fra le diagonali delle sue facce le dieci parallele a quel piano fanno determinar subito il rapporto fra i raggi delle due circonf. concentriche risp. circoscritte alla faccia ed al decagono suddetto, l'uno facilmente deducendosi dall'altro; poichè la differenza tra quei raggi è infatti quanto il lato del decagono minore segnato in quel disegno. (1)

Ma a proposito dello sviluppo di quel solido (di cui fra breve) indicherò maggiori particolari su quella projezione, d'onde è facile dedurre la verticale applicando il Teor. IV. Considerando infatti una coppia di spigoli pp. fra loro ed alla linea di terra (quelli p. es. che si projettano oriz. in $A'B'$ ed Rr) le loro projezioni tanto oriz. che verticali risultano neces. pp. a quella linea; e dovrà quindi aversi

$$D''R = B''T \,(= T_1A'') = A'B' \,(= Or) \qquad \text{ed} \qquad A''B'' = Rr.$$

Epperò:

$$A''T \,(= T_1B'') = OR\ ^{(2)} \qquad \text{e} \qquad T_1T = Or + OR = RO2$$

quanto cioè la somma dei raggi delle due circonf. anzidette. (3)

46. Ecco un facile procedimento per lo sviluppo del dodecaedro di spigolo a sul piano di una sua faccia di cui chiamo d la diagonale: si costruisca sopra $a + d$ il gran pent. reg. conv. $ABC\ldots$ (Tav. I, Fig. I) e il cerchio ad esso circoscritto, le sue diagonali e le congiungenti i vertici coi medi degli archi sottesi dai suoi lati p. es.

---

(1) Chiamando, infatti, a e d risp. le lunghezze del lato e della diag. del pent. reg. conv., il loro rapporto (a essendo com'è noto parte mag. della sezione aurea di d) eguaglia quello dei raggi delle circonf. circostritto a due polig. reg. simili costruiti su quelle dimensioni; ed essendo com'è ovvio, $d - a$ parte magg. della sez. aur. di a, lo stesso avverrà della differenza di quei raggi, rispetto al minore di essi.

(2) Ma che sia $B''T = Or$, si può anche altrimenti dedurre dal triangolo rett. che ha per ipotenusa il lato del pent. reg. e per cateti il raggio ed il lato risp. del decagono inscritti in quello stesso cerchio che contiene i vertici del pentagono.

(3) L'eguag. fra l'altezza $4R$ della proj. vert. col segm. $R2$ di quella orizz., non che l'altra $Rr = 2D'$, mostrano che il medio di Rr è anche quello di $4D'$. Epperò applicando al pent. reg. $iB'D'\ldots$ inscritto nel contorno orizz. la nota proprietà che un suo lato qualsivoglia (quello per i, p. es.) biseca normalmente la distanza fra il punto di concorso dei due lati che gli son consecutivi ed il vertice opposto, ne viene che le diagonali iB' e la simmetrica di sinistra di quel contorno, passano per l'estremo 4 del segmento anzidetto.

D'onde un'altra facile costruzione, o verifica, che da quella orizz. fa dedurre subito la totale altezza della proj. vert. di quel solido.

Emd e Cnd dànno, intersecandosi, la projez. di quel solido sul piano di una sua faccia; od altrimenti le Ed e Cd (che dividono in sezione aurea, nei punti m ed n, la AB) sono risp. pp. ai lati ED e DC ecc. come sono del pari le Crf ed Esf intersecantisi in f, risp. pp. ai lati DE e DC della faccia, e determinano così un vertice della projez. decagona del contorno apparente del poliedro (ma quel punto f anche altrimenti può ottenersi facendo $Df = Dr$ ecc.).

Le diagonali poi del pentagono minore ABCDE, faccia del solido, prolungate, intersecando i lati del pentagono maggiore, ne dànno metà dello sviluppo (le AD e BD p. es. che tagliano AB negli anzidetti punti m ed n, vertici dello sviluppo). Si ha così in una volta la projezione e lo sviluppo del dodecaedro.

47. La simmetria (Tav. I, Fig. I) rispetto a DE delle due figure DEhgf e DEvOr, mostra che gO è il doppio dell'apotema del pentagono ABCDE. D'onde un'altra facile costruzione per determin., data la faccia, la proiez. sul suo piano del dodecaedro; e la conseguenza che il supplemento del suo angolo diedro ha per misura il maggior angolo acuto di un triang. rett. che ha un cateto doppio dell'altro (v. le soluzioni del n.° 44, dove si mostrò $A''T = OR$ ecc.).

Osservazione I. — I cubi formati dalle diagonali delle facce del dodecaedro (Cfr. Amiot, *Geom.*) avendo due spigoli ciascuno paralleli al piano di una faccia del dodecaedro (piano iconico) e quindi pp. ad esso due facce di ogni cubo, ne viene che quattro a quattro le proiezioni dei vertici del dodecaedro (vertici coincidenti con 4 di uno dei suddetti cubi) sono allineati (due di quei vertici appartengono alle due facce opposte parallele al piano iconico, e due al contorno decagonale). Mentre in ognuna di quelle rette giace inoltre un vertice dello sviluppo (vedasi p. es. la $mfsEi$ ecc.).

Osservazione II. — Si noti infine che le anzidette trasversali del grande pentagono dmE e dnC ecc. sono risp. assi di simmetria delle facce $A\ldots$, $B\ldots$ di quello sviluppo, e che i suoi angoli al perimetro sono ciascuno divisi in sei parti eguali, com'è facile verificare, dalle rette, che passano per quei vertici.

Ma non intrattenendosi oltre su particolari e verifiche, dei quali abbonda quel tracciato, solo si rammenti che sono eguali i cerchi ivi segnati con gli stessi numeri; e che i raggi di due cerchi, cui corrispondono numeri successivi, sono l'uno quanto il segmento aureo dell'altro ecc.

48. La sezione del dodecaedro con un piano pp. al centro di un suo asse delle facce (cioè parallelo a due di esse) contiene i medî di quegli spigoli che non passano per i vertici di quelle facce: medî che coincidono coi vertici di un decagono reg. convesso, eguale a quello simmetricamente inscritto nella proiezione decagona regolare del contorno di quel solido sul piano di una sua faccia.

49. La projezione dell'icosaedro (Tav. III, Fig. II) [1] su di un piano pp. ad un suo asse dei vertici (da ritenere p. es. come piano oriz.) è contornata da un decagono reg. conv. (projez. del polig. sghembo formato dagli spigoli non pp. a quell'asse nè passanti pei suoi estremi) le cui diagonali minori formano due eguali pent. reg. concentrici, l'uno visibile e l'altro no, di lato eguale allo spigolo del solido: i raggi di quei due pentagoni (basi dell'anzidetto polig. sgh.) altern. visibili, completano quella projezione. Da essa è facile dedurne la verticale:

a) Prolungando conven.^{te} (data la particolare posizione del solido risp. ai piani di riferimento) due lati consecutivi del pentag. e del decagono anzidetto; giacchè i due punti così ottenuti cadendo sulla projez. verticale di quell'asse, e ripetendone simmetr. un terzo, ne dànno l'intera lunghezza e le rispettive altezze in projezione verticale di tutti i vertici del solido.

b) Ovvero riflettendo che dei tre segmenti di quell'asse i due minori, fra loro eguali, sono risp. quanto il lato del decagono suddetto, ed il maggiore quanto il suo raggio. Si dimostra ciò mediante il solito triang. rett. che ha per lati quelli del pent. e del decag. reg. inscritti nello stesso cerchio ed il suo raggio: o, più semplic. applicando il Teor. IV agli spigoli dell'icosaedro pp. fra loro ed alla linea di terra (alla quale necess. anche pp. riescono le loro projez., sia oriz. che verticali).

c) Ma siccome indip. da altre considerazioni, ognuno dei minori dei segmenti suddetti è parte magg. della sezione aurea del più grande, poichè altro non sono che le proj. de' segmenti dell'altezza di un pent. regolare pp. secata da una diagonale, ne viene che il più grande è parte magg. alla sua volta della sua somma col minore: somma che è però quanto il lato del decagono regol. stellato inscritto in quello stesso cerchio (del quale il raggio, com'è ovvio, ne è la parte maggiore), ecc. D'onde la costruzione indicata nel disegno: i due cerchi concentrici cioè col centro sulla linea di terra, che riportano quella distanza della proj. orizz. su quella verticale.

50. La sezione dell'icosaedro con un piano pp. al centro di un suo asse dei vertici (sezione mediana del decagono reg. sgh. che ha quell'asse in comune col poliedro) è, evid., un decagono reg. conv. eguale a quello che ha i vertici nei medii dei lati della projezione (un altro decagono reg. come già si disse) del contorno apparente dell'icosaedro su quel piano.

51. La solita considerazione del polig. r. s. formato nell'icosaedro (Tav. V, Fig. II) da' sei spigoli che non hanno alcun vertice in comune

---

[1] Le particolari posizioni, rispetto ai piani di riferimento, che si è creduto di scegliere pel Dod. e per l'Icos. (Tav. III e IV) sono, com'è facile rilevare, assai vantaggiose per istabilire il più intimo e reciproco legame fra le projezioni di quei poliedri. Nè preoccupi il parziale sovrapporsi di quelle dei correlativi da essi risp. dedotti: giacchè la diversità delle linee dei tracciati, fa nettamente distinguere le une dalle altre.

con due facce opposte, mostra che la sua projezione sul piano di una di quelle o ad esse parallelo (pp. al loro asse) ha per contorno un esagono regolare.

Dato pertanto le spigolo, è facile (senza ricorrere ai soliti ripieghi del raddrizzamento di particolari sezioni di quel solido) il definir subito quella projezione; giacchè vi si manifestano al vero i due grandi triangoli equilateri atb_1 e vba_1 (eguali, concentrici e coi lati risp. paralleli) il cui lato è quanto la diagonale del pentag. reg. fatto su quello spigolo: pentagono che non è per altro, come or si vedrà, necessario costruire.

D'onde i raggi relativi ad ognuno di quei triangoli ed alla faccia del poliedro stanno nel noto rapporto della diagonale col lato del suddetto pentagono; epperò basta aggiungere al minore la parte magg. della sua sezione aurea per ottenere il raggio (o il lato) del contorno esagonale di quella projezione, che è poi facile completare come è indicato nel disegno.

La proj. verticale si ha osservando gli spigoli pp. fra loro ed alla linea di terra (Teor. IV) orizz. projettati p. es., in ab e vi, per cui è $vO_1 = ab$ $(= Ov)$ ed AB $(= O_1S_2) = vi$ (locchè è sufficiente giacchè si ha per simmetria, $P_1O_1 = vS_2$).

52. Ma data la faccia ikc dell'icos. di spig. a, si possono, per così dire, simult. determinare entrambe quelle sue projezioni mediante il punto b_1. intersezione di due eguali archi di centri i e k e di raggio $im = r\sqrt{2}$ (avendo fatto $Oi = r$). Quel punto è un vertice del contorno esagonale cercato, e basta per determinarlo; (1) mentre gli archi concentrici vS_1, vO, vP dànno rispettivamente intersecando la vP_1 i punti S_2, O_1 e P_1 che determinano, a partire dalla linea di terra, le altezze sul piano verticale dei vertici del solido (si noti peraltro che anche la bk_1, projezione invisibile di uno spigolo, passa per S_2 e taglia la projezione ai nel suo medio z: verifica questa, dell'esattezza del disegno, come lo è l'altra $vz = rS_1$, essendo il punto S_1 intersezione dell'arco b_1xS_1 con la viO, ecc.).

Pertanto la P_1v (distanza fra due facce opposte) eguaglia la somma dei due raggi PO ed Ov delle circonf. risp. circoscritte alla faccia del poliedro ed a quel suo contorno esagonale, ecc. (2)

---

(1) Il rapporto fra i raggi vO ed iO dev'essere quello, com'è chiaro, della diag. al lato di un pent. reg. vb infatti essendo la projez. al vero di una di tali diagonali. Epperò bisogna mostrare che si pervenga a quel risultato mediante l'anzidetto punto b_1.

Infatti posto $Oi = r$ sarà $ib_1 = r\sqrt{2}$ ed $ig = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, d'onde $gb_1 = \frac{r}{2}\sqrt{5}$ e $b_1s = \frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})$ cioè Os $(= Oi)$ parte magg. della sez. aur. di Ob_1 $(= Ov)$. C. D. D.

(2) Che sia $O_1v = ab = vO$, anche altrimenti risulta, giacchè dovendo com'è ovvio essere O_1v $(= P_1S_2)$ e vi cateti di un triang. rett. che ha per ipotenusa la lungh. dello spigolo, e tenendo presente che è vO quanto il lato del decag. reg. stellato inscritto nel cerchio Oi, basta ricordare il T. (V. il "Pitagora" di alcuni anni or sono, che si pubblica a Palermo): *I lati del triangolo equilatero e dei decagoni reg. semplice e stellato inscritti nello stesso cerchio dànno risp. l'ipotenusa e i cateti di un triangolo rettangolo.*

53. La *sezione dell'icosaedro* con un piano pp. al centro di un suo asse delle facce, parallele cioè a quelle facce, non è un poligono regolare, ma un dodecagono invece *semiregolare equilatero e circoscrittibile* (con lati eguali ed angoli alternativamente eguali) che può ottenersi congiungendo ordinat. i medi dei lati della proiez. esagonale su quel piano con punti presi sulle bisettrici de' suoi angoli, distanti dal centro della figura quanto l'altezza del triangolo equil. faccia del solido (facendo p. es. $On = in$ ovvero $cn = Ou$, raggio del cerchio inscritto al triangolo ikc).

Tenendo presente infatti (Tav. V, Fig. II) che il solito rapporto (della diag. al lato del pent. reg.) fra i segmenti CD e DB della projez. verticale non si altera in quella orizzontale, e che però al centro N di DB corrisponde quello n di db, ne viene, che essendo $Oc = \frac{a}{\sqrt{3}}$, saranno risp. $bc = \frac{a}{2\sqrt{3}}(-1+\sqrt{5})$ e

$$cd = \frac{bc}{2}(-1+\sqrt{5}), \quad \text{ossia, sostituendo,} \quad cd = \frac{a}{2\sqrt{3}}(3-\sqrt{5});$$

d'onde

$$cn = \frac{bc+cd}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}};$$

epperò

$$On = Oc + cn = \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}. \qquad \text{C. D. D.}$$

54. *Proiezione del dodecaedro su di un piano pp. ad un suo asse dei vertici* (Tav. IV, Fig. II).

Gli spigoli più lontani ed equidistanti dagli estremi di quell'asse non formano qui, se non si prolungano, un poligono reg. sghembo (esagono evid. di lato $a + 2d$ con angoli di 36°) ma bensì un *tronco* con basi semireg. pp. a quell'asse ed equidistanti dal centro (un prismoide); epperò la proj. su quel piano (p. es. oriz.) del contorno di quel poliedro non è un polig. reg., ma bensì un dodecagono *semiregolare equiangolo inscrittibile* con angoli eguali e lati alternat. eguali ad a e d. [1]

Ma osservando che vi si projettano al vero, concentrici e coi lati risp. paralleli, i due eguali triangoli equilateri coassiali formati dagli estremi tre a tre dei sei spigoli che passano per gli estremi di quell'asse, tali lati saranno quanto la diagonale d della faccia del solido. E poichè è inoltre d (dato il suo rapporto con a) la parte minore, ed $a + d$ la magg. della sezione aurea di $a + 2d$ (lato come già si disse, del considerato esagono reg. sghembo, la cui proj. è quindi un esagono regolare) ne viene la facile costruzione indicata nel

[1] Sono a e d, si rammenti, le lunghezze risp. del lato e della diagonale del pent. regolare, faccia del poliedro.

disegno: (intersecarne cioè i lati risp. con quelli dell'esagono minore concentrico formato coi vertici dei due anzidetti triangoli e che ha i lati paralleli ai lati del primo). Ed è ovvio dall'anzidetto, il solito rapporto fra i lati o fra i raggi di quei due esagoni regolari [1] per cui si ottiene subito il più grande dal più piccolo che ha le diagonali minori eguali a d. Nè occorre la costruzione del pentagono regolare, potendo invece partire dal triangolo equilatero di lato a e dal suo cerchio circoscritto; e da questo, colle solite costruzioni, ai due cerchi più grandi e concentrici circoscritti agli anzidetti esagoni, ecc.; mentre sono evidenti infine le poche rette da aggiungere onde completare la projezione orizzontale del solido. Dalla quale si deduce subito la *projezione verticale*, pel solito Teor. IV, applicato p. es. agli spigoli AB e KO pp. fra loro ed alla linea di terra: sarà infatti perciò $K_1''O_1'' = A'B'$ ed $A''B'' = K'O'$; e per essere $A''B''$ il terzo dell'altezza di quella projezione (quanto la diagonale del cubo inscritto in quel solido) ciò è sufficiente a determinarla completamente, riflettendo inoltre che i terzi estremi sono risp. divisi in s. a. dai punti K'' e K_1''.

55. La *sezione del dodecaedro* pp. al centro di un suo asse dei vertici, OO_1 p. es., è un *esagono regolare* che ha i vertici nei medii degli anzidetti sei spigoli (n. 53) equidistanti dagli estremi di quell'asse, e che si può ottenere in vera forma e grandezza congiungendo ordinatamente i medii dei lati dell'anzidetta proj. orizz. del solido, il cui contorno è come già si disse un *dodecagono semiregolare inscrittibile*, ecc.

56. Le costruzioni fondamentali per le proj. dei pd. r. c. si possono pertanto riassumere, come segue, in facile sintesi.

a) Pel tetraedro, cubo ed ottaedro (nelle posizioni indicate dalla Tav. II) si supponga disegnato un triang. equil. di lato a ed il cerchio circoscritto: il lato del quadrato ivi inscritto $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ dà i $^2/_3$ della altezza della proj. vert. del cubo e quella totale degli altri due poliedri ecc.

b) Le proj. del dodecaedro (dell'icosaedro) su di un piano parall. ad una faccia (Fig. I delle Tav. III e IV) si hanno sempre disegnando un pent. r. (un triang. equilatero) di lato a, il cerchio circoscritto, e quello ad esso concentrico e più grande, in modo che sia il raggio del minore quanto il magg. segm. della s. a. del più grande (ciò che può farsi con una stessa o con differenti costruzioni, come altrove è stato detto); mentre l'altezza della proj. vert. è la somma dei raggi di quei cerchi ecc.

---

(1) Projettandosi paralleli, infatti, i due spigoli AB, KO e la diagonale F_1R (a quest'ultimo parallela) di una faccia (segmenti pp. tutti e tre alla linea di terra), ed essendo $K'O'$ parte magg. della sez. aur. di $F_1'R'$ (giacchè non si altera in proj. parall. il rapporto fra segm. paralleli nello spazio) ne viene che quella stessa relazione passa tra $K'O' = (A'N')$ ed $M'N'$ $(= F_1'R')$. C. D. D.

Ma si tenga presente inoltre il solito rapporto (costante) fra i raggi dei consecutivi cerchi concentrici della figura, risp. circoscritti ai triangoli equilateri di lati a, d, ed $a + d$, ordinatamente, segnati coi numeri successivi 1, 2, 3; l'ultimo dei quali relativo al cerchio circoscritto del contorno esagonale della richiesta projezione.

c) La proj. del dod. su di un piano pp. ad un asse de' vertici si ha disegnando tre cerchi conc. circoscr. a triang. equil. di lati risp. eguali ad a, d, $a+d$, e considerando conv. le intersez. dei lati degli esag. r. a lati paralleli inscritti in quei cerchi (Tav. I[bis], Fig. VI e Tav. IV, Fig. II) mentre l'altezza della proj. vert. è il triplo del raggio del medio fra quei cerchi ecc.

d) Assai semplice è, infine, la proj. dell'icos. (Tav. III, Fig. II) su di un piano pp. ad un asse di vertici (un decag. r. coi suoi raggi e le sue diag. minori); e basta ricordare l'altezza della sua proj. vert. che è quanto uno di quei raggi aumentato di due lati del decagono ecc.

57. Ora in ogni pd. r. c., il tetraedro e l'ottaedro esclusi, i piani passanti per gli estremi degli spigoli concorrenti in un angolo solido dànno, com'è ovvio, intersecandosi le facce del correlativo che è il *nocciuolo* del primo; mentre si può, viceversa passare (v. le Tav. III e IV) da questo al dato (*anti-nocciuolo*) considerandone le intersezioni di facce e di spigoli risp.

Si è così dal dodecaedro (Tav. III, Fig. I), dedotti i vertici dell'icosaedro (o un dodec. di specie sup.) come intersezioni delle facce cinque a cinque circondanti ogni sua faccia; e viceversa i vertici del dodecaedro prolungando gli spigoli non consecutivi d'ogni sezione pentagon. dell'icosaedro.

Ma ispezionando infine con ordine e con pazienza quei tracciati, numerose verifiche e collegamenti si riscontrano fra quelle projezioni tutte, sia relative ad uno stesso poliedro, sia a due correlativi, sia ad un poliedro e al suo nocciuolo.

Nè si dimentichino gli eguali cerchi tracciati in quelle figure delle Tavole III e IV, ed il significato, altrove già detto, dei numeri successivi che risp. li indicano.

58. Aggiungo, per esaurire l'argomento, che il *nocciuolo* del cubo è un ottaedro regolare, solido comune ai due eguali tetraedri inscritti in esso. Cadono perciò i vertici di quell'ottaedro sui centri risp. delle facce del cubo suddetto e sulle intersezioni, i suoi spigoli, delle facce di quei tetraedri, ecc.: mentre ad un punto si riduce evidentem. il nocciuolo dell'ottaedro, cioè, al suo centro.

E nel tetraedro, infine, autoreciproco, coincide col poliedro stesso il suo *nocciuolo*.

59. Ed ora un breve cenno intorno alle *projezioni dei p. r. c. su piani pp. ed un loro asse degli spigoli*: projezioni, non so perchè, quasi sempre neglette; mentre, se inferiori alle altre riguardo alla minor visibilità de' loro elementi, sono invece assai utili (indispensabili anzi dal mio punto di vista): non solo perchè il cubo ed il tetraedro esclusi, dànno gli angoli diedri e la lunghezza degli assi dei vertici, degli spigoli, delle facce (ossia i raggi delle sfere inscritta, circoscritta e tangente agli spigoli), ma sopratutto perchè consentono l'enunciato più generale del Teor. V di cui fra breve (n. 64).

a) Del tetraedro di spigolo a (Tav. I, Fig. III) la projezione su di un piano pp. od un suo asse degli spigoli (parallelo a due spigoli opposti) è evid. un quadrato di lato $a : \sqrt{2}$, con le diagonali di lunghezza a; mentre la sua sezione piana pp. al centro di quell'asse è un altro quadrato che ha i centri nei medii dei lati del primo: quei due quadrati essendo evid. figure polari rispetto al cerchio tangente alla maggiore.

b) Eguali ad un rettangolo di lati a ed $a\sqrt{2}$ la projezione e sezione del cubo di spigolo a sopra o con un piano pp. al centro di un suo asse degli spigoli, sol che si aggiunga nel primo caso la mediana dei lati minori (Tav. I, Fig. IV).

c) Un rombo che ha le diagonali risp. lunghe a ed $a\sqrt{2}$ rappresenta ad un tempo le analoghe projezione e sezione dell'ottaedro di spigolo a (gli angoli maggiori di quel rombo ne misurano l'angolo diedro, e i minori quello invece del tetraedro).

d) Se si considera, infine, come al precedente n. 30 *b*) il cubo di spigolo $a+d$, e in esso inscritti il dodecaedro e l'icosaedro risp. di spigoli a e d, che si projettano sul piano di una faccia di quel cubo, si ottengono, come è ovvio, inscritte in uno stesso quadrato le due Figure III e IV della Tav. I^{bis}; o meglio supponendo cogli spigoli risp. pp. quei due poliedri, si ha la Fig. I della Tav. V che contiene entrambe le loro projezioni, d'altronde subito ottenute disponendo convenientemente sui lati opposti di un quadrato PQRS la parte maggiore o minore $A_1C = C_1A$ o $KM_1 = MK_1$ della s. a. del suo lato ecc.

60. Ma occorre premettere ora talune brevi osservazioni sulla polarità rispetto al cerchio, come sarà facile mostrare, delle proj. e sezioni debitamente considerate dei pd. r. c. coniugati.

Così p. es. si tenga presente:

a) Che di ogni polig. r. conv. la figura polare è un poligono simile: epperò reg. e dello stesso n. di lati.

b) Che ad ogni polig. semireg. di $2n$ vertici con angoli eguali e lati altern. eguali (*semireg. equiangolo, inscrittibile* nel cerchio e che potrebbe ottenersi smussando conv. gli angoli di un ordinario pg. r. c. di n lati) polarmente corrisponde un altro pg. semir. con lati eguali, viceversa, ed angoli altern. eguali (*semireg. equilatero circoscrittibile*) ottenuto mediante le tangenti al cerchio circoscritto nei vertici del primo.

c) Che la figura polare di un rettangolo è un rombo (il più semplice caso di figure semiregolari): essendo infatti equiangola l'una ed equilatera l'altra, ed eguali inoltre i rapporti fra lati del primo e diagonali del secondo. (1)

---

(1) V. il n. 1-2, a. 1907, del *Pitagora*, giornale di matem. che il solerte prof. FAZZARI da parecchi anni pubblica a Palermo.

61. Epperò polari: *a*) i due quadrati ottenuti proiettando e sezionando conven. il tetraedro sopra e con un piano pp. al centro di un suo asse degli spigoli;

b) polari i contorni, risp. coincidenti, delle proiezioni e sezioni del cubo e dell'ottaedro sopra o con piani pp. ad un loro asse degli spigoli ecc.

Il rett. infatti (Tav. I, Fig. IV) ABab di lati a ed $a\sqrt{2}$ è il contorno della proj. del cubo di spigolo a sul piano dei due spigoli opposti Ab e Ba (da completare con la mediana dei suoi lati maggiori) e coincide con la sezione secondo quel piano, pp. evident. al centro dell'asse della coppia di spigoli opposti dC e Dc di quel cubo; mentre l'ottaedro in esso inscritto che si projetta secondo il rombo dYCX evident. simile a quello formato dalle tangenti al cerchio circoscritto nei vertici del rett. suddetto, mostra quanto si asserisce intorno alla polarità di quei contorni ecc.

Dal paragone poi tra quel rombo e i due eguali triang. isosceli ABC ed abd, projezioni dei due tetraedri inscritti nel cubo, è ovvio il supplementarismo fra gli angoli diedri del tetraedro e dell'ottaedro (n. 17 e 30).

Non che polari la projezione, o sezione, del cubo sopra o con un piano pp. al centro di un suo asse delle facce e l'analoga sezione, o proj., dell'ottaedro rispetto ad un suo asse dei vertici (sempre quadrati). Lo stesso per le projez. e sezioni esagone reg. di quei poliedri, con o su piani pp. al centro di una diagonale del cubo o di un asse delle facce dell'ottaedro.

62. Del pari evidente è per l'anzidetto (n. 59) la polarità fra la projez. (sezione) del dodecaedro sopra (con) un piano pp. al centro di un suo asse delle facce e la sezione (projezione) analoga dell'icosaedro rispetto ad un suo asse dei vertici, sempre ottenendosi in quei casi contorni decagoni regolari. Ma occorre anche dimostrarla fra i contorni delle projezioni o sezioni risp. coincidenti, per ognuno di quei due poliedri, sopra e con piani pp. al centro di un loro asse degli spigoli (Tav. V, Fig. I).

Si considerino infatti inscritti nello stesso cubo di spigolo $a+d$ quei due poliedri, il dodecaedro di spigolo a e l'icosaedro di spigolo d; supponendoli disposti inoltre fra loro con gli spigoli risp. pp., e proiettandoli sopra una faccia di quel cubo, si otterranno inscritti nello stesso quadrato (Tav. V, Fig. I) i due differenti esagoni irregolari altrove (n. 18 e 58) già indicati.

Ora essendo AA_1 ed MM_1 (projez. al vero di assi ai vertici dell'icos. e del dod.) risp. pp. alle MN ed AB_1 (proj. di facce del dod. e dell'icosaedro) e considerando il cerchio inscritto nel quadrato PQRS, ne viene, com'è ovvio, che rispetto a quel cerchio i vertici di ognuno degli anzidetti contorni esagoni irregolari sono i poli dei lati dell'altro e viceversa; giacchè le tangenti a quel cerchio nei vertici che vi sono inscritti d'ognuna di quelle figure cadono sui lati dell'altra: donde la loro polarità. C. D. D.

63. Polari, infine, sono il contorno della proj. del dodecaedro su di un piano pp. ad un suo asse dei vertici e la sezione normale al centro di un asse delle facce nell'icosaedro (i due già indicati dodecagoni semiregolari, equiangolo il primo ed equilatero il secondo): polarità che subito si accerta dimostrando che le tangenti p. es. al cerchio circoscritto nei vertici di quella figura equiangola, relativa al dodecaedro, dànno un poligono simile all'anzidetta sezione dell'icosaedro. Basta perciò assicurarsi, come è ovvio, che sono simili i due triangoli NOH ed *noh* (Tav. I[bis], fig. V e VI): che sono eguali cioè i rapporti fra i lati risp. che abbracciano i loro angoli eguali O ed *o* di 30° ciascuno. Rammentando, infatti, che per essere come già si disse (n. 52) *on* quanto l'altezza di un triang. eq. di lato a, è $on = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, ed oh (metà, evident. della diag. d del pent. reg. di lato a) è quanto $\frac{a}{4}(1+\sqrt{5})$; epperò quel rapporto

$$\frac{on}{oh} = \frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{5}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{3};$$

mentre guidando le tang. al cerchio circoscritto, ne' suoi vertici, al polig. FG*ed*.... si ottiene il dodecagono semireg. equilatero NHL.... simile al precedente *nhap*.... giacchè, come or si vedrà, ha quello stesso valore $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{3}$ il rapporto $\frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OH}}$ fra i lati del triang. ONH, che abbracciano l'ang. O. Ma occorre perciò premettere che è (Tav. I[bis], Fig. VI) $\mathrm{OK} = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{5})$ ed $\mathrm{O}i = \mathrm{OK} + \frac{\mathrm{RK}}{2}$, ed essendo RK p. magg. della s. a. di KO ed i il suo centro, ne viene $\frac{\mathrm{RK}}{2} (= i\mathrm{K}) = \frac{a}{2\sqrt{3}}$; (¹) epperò, sostituendo e riducendo, $\mathrm{O}i = \frac{a}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{5})$; ma il T. di Pitagora nel triang. rett. ieO e la similitudine di questo con l'altro NeO, dànno successivamente $e\mathrm{O} = \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{3}}(1+\sqrt{5})$ ossia $e\mathrm{O} = \mathrm{OK}\sqrt{2}$; (²) ed essendo $\mathrm{ON} = \frac{\overline{e\mathrm{O}}^2}{i\mathrm{O}}$, si ha sostituendo $\mathrm{ON} = \frac{a(6+2\sqrt{5})}{\sqrt{3}(2+\sqrt{5})}$.

(¹) O, più semplicemente per essere RK quanto il raggio del cerchio 1, ne viene

$$i\mathrm{K}\left(=\frac{\mathrm{RK}}{2}\right) = \frac{a}{2\sqrt{3}} \text{ ecc.}$$

(²) Epperò dal triang. equil. di lato d e dal cerchio 2 de' suoi vertici, si può subito dedurre (essendo $1:\sqrt{2}$ il rapp. fra i loro raggi) quello concentrico FG*ed*...; le cui intersez. coi lati dell'esag. r. inscritto nel primo, e i vertici di tale esag. dànno la considerata proj. del dodecaedro, facendo a meno del terzo cerchio 3 o del corrispondente esagono.

Mentre, infine, per determinare la lungh. di OH, si rifletta che essendo e e d punti della sez. aurea di RS ($=$ RO), sarà Rd $=$ KO ed ed [p. min. della s. a. di OK, ponendo per OK il valore precedente $\frac{a}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{5})$] sarà, dico, $ed = \frac{a}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{5}) \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}(-1+\sqrt{5})$; mentre sarà $er = \frac{ed}{2} = \frac{a}{4\sqrt{3}}(-1+\sqrt{5})$. Or dal triang. rett. eOr e dalla sua simiglianza con l'altro eHo, si ha successivamente: $Or = \frac{a}{4}(3+\sqrt{5})$ ed $OH = \frac{\overline{eO}^2}{Or}$; ove, sostituendo per Or il valore suddetto e per eO quello già trovato $\frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{3}}(1+\sqrt{5})$, si ha $HO = \frac{4}{3}a$. D'onde infine $\frac{ON}{OH} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6+2\sqrt{5}}{\sqrt{3}(2+\sqrt{5})}$, ossia semplificando, $\frac{ON}{OH} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{3}$: rapporto come si vede identico a quello già ottenuto $\frac{on}{oh}$. C. D. D.

64. Anche altrimenti poteasi, com'è evidente, assicurarsi di quella polarità tra le anzidette figure: dimostrando cioè, reciprocamente, la similitudine fra quel dodecagono semiregolare equiangolo, relativo al dodecaedro, e l'altro che ha per vertici i contatti, con la circonferenza inscritta, al poligono semiregolare equilatero, sezione dell'icosaedro.

65. Riassumendo, infine, se si tien presente che in ogni coppia di pd. r. c. conjugati (il tetraedro incluso, che è autoreciproco) il contorno della projezione o sezione dell'uno sopra o con un piano pp. al centro di un suo asse degli spigoli, è polare con quello della sezione o projezione analoghe dell'altro; e che lo stesso accade rispetto ad un asse dei vertici o delle facce, reciprocamente, in quei due poliedri, sempre ottenendosi infatti polig. reg. simili, eccezione fatta dei casi già considerati, di una proj. del dodecaedro e di una sezione dell'icosaedro (nei quali per altro quella polarità si è del pari addimostrata) ne viene, com'è chiaro, il seguente

Teorema V. — *In ogni coppia di conjugati fra i poliedri reg. conv. sono reciprocamente polari, rispetto al cerchio, il contorno della projezione dell'uno sur un piano pp. ad un suo asse qualsivoglia, con la sezione dell'altro, normale al centro dell'asse correlativo.*

66. Da quel T. i seguenti facili corollarj:

1°. Se di un pd. r. c. è *regolare* (¹) il contorno della proj. o sezione

---

(¹) Non si dimentichi, infatti, come quelle forme sono talvolta irregolari: come avviene riferendosi ad un piano pp. al centro di un asse degli spigoli per le coppie cubo-ottaedro e dodecaedro-icosaedro, ove risp. si hanno, come già si disse, rettangoli o rombi ed esagoni irregolari; e per la proj. (sezione) del dodecaedro (icosaedro) sopra o con un piano pp. al centro di un asse dei vertici (delle facce), ottenendo risp. allora due differenti dodecagoni semiregolari. ecc.

sopra o con un piano pp. al centro di un suo asse qualsivoglia, la stessa forma avrà nel conjugato la sezione o projezione analoga rispetto all'asse correlativo.

(Epperò essendo reg. sempre il contorno della proj. d'ogni pd. r. c. sul piano pp. al centro di un suo asse delle facce, la stessa forma avrà la sezione analoga del correlativo rispetto ad un suo asse dei vertici).

Sono pertanto poligoni regolari convessi, p. es.:

QUADRATO.

a) La projezione e sezione del tetraedro (autoreciproco) sopra o con un piano pp. al centro di un suo asse degli spigoli.

b) La proj. (sezione) del *cubo* sopra (con) un piano pp. ad un asse delle facce (parallelo, cioè, ad una faccia).

La sezione (proj.) dell'*ottaedro* con (sopra) un piano pp. ad un suo asse dei vertici.

ESAGONO REGOLARE.

c) La projezione (sezione) del *cubo* sopra (con) un piano normale al centro di un suo asse dei *vertici*.

La proj. dell'*icosaedro* su di un piano pp. ad un suo asse delle *facce* (parallelo ad una faccia).

La sezione (projezione) dell'*ottaedro* con (sopra) un piano normale al centro di un suo asse delle *facce*.

La sezione del *dodecaedro* con un piano pp. al centro di un suo asse dei *vertici*.

DECAGONO REGOLARE.

d) La proj. del *dodecaedro* (icosaedro) sur un piano pp. ad un suo asse delle *facce* (dei *vertici*).

La sezione dell'*icosaedro* (dodecaedro) normale al centro di un suo asse dei *vertici* (delle *facce*).

2°. Se di un pd. r. c. sono invece contemp. regolari e simili i contorni della projezione e sezione anzidette: anche simili fra loro e con quelle (cioè della stessa forma) saranno gli analoghi contorni del poliedro conjugato rispetto all'asse correlativo.

Così, p. es., essendo entrambi esagoni (decagoni) regolari la projezione e sezione del cubo (dodecaedro) sopra o con un piano pp. al centro di un asse dei vertici (delle facce) anche esagoni (decagoni) regolari, saranno la sezione e projezione analoghe dell'ottaedro (icosaedro) rispetto all'asse correlativo. Epperò nel tetraedro, se quadrata è una di quelle due forme (sezione o projezione, con o sopra un piano pp. al centro di un suo asse degli spigoli): *necess. anche quadrata sarà l'ultra.* E così di seguito, associando convenientemente gli altri esempj del suindicato specchietto.

3°. Che se quelle forme (v. 2°) regolari o no, risultano più che simili, *eguali* in uno stesso poliedro, anche fra loro eguali, necessariamente saranno quelle analoghe rispetto all'asse correlativo nel poliedro conjugato.

P. es. Eguali la projezione e sezione del cubo (i contorni) sopra o con un piano pp. al centro di un asse degli spigoli, ed anche eguali perciò fra loro la sezione e projezione (i contorni) analoghe all'ottaedro rispetto all'asse correlativo: avendosi sempre nel primo caso uno stesso rettangolo ed uno stesso rombo nel caso dell'ottaedro, ecc....

67. Accenno, infine, alle due quistioni di costruire cioè la proj. di un pd. r. c. di *dato spigolo* e di dedurne, viceversa, da essa la lunghezza di quest'ultimo.

Ma tranne qualche caso, di cui or dirò brevemente, le già indicate proj. quasi sempre si iniziano partendo da una faccia o da una sezione diagonale del pd. epperò dal suo spigolo. Riesce utile, inoltre, il confronto in unico tracciato delle correlative (V. nota al n. 34) fra le proj. de' poliedri conjugati, risultandone più evidenti così le loro costruzioni e le analogie e le verifiche che reciprocamente le collegano.

Per es.:

a) La Fig. IV della Tav. VI prepara la ben nota proj. esagonale del cubo di spigolo dato: i raggi, infatti, O*o* ed OA dei cerchi risp. circoscritti ad essa ed al triang. equil. sul dato spigolo AB stanno $::\sqrt{2}:1$; mentre la Fig. II di detta Tav. mostra invece come da quella proj. si possa dedurre la lungh. dello spigolo (Cfr. la Tav. II ove ciò si era già indicato) e le facili relazioni fra le proj. del cubo e dell'ottaedro concentrici ecc. e che hanno eguali spigoli.

Qui cade acconcio notare (Fig. IV) che trovati i punti i_1 ed i_2 ove la circ. di centro c e raggio ci taglia la AB, centrando success. in A e B coi raggi eguali Ai_1 e Bi_2, si determinano per intersezione con altri archi gli altri tre vertici s, k, r del pent. r. c. di lato AB: facile costruzione che ho voluto richiamare, poichè ricorre spesso nel disegno di quelle projezioni (Cfr. *Un'altra costruzione per la divisione aurea* ecc. nel fasc. III a. 1908 di questo stesso *Periodico*).

b) La Fig. I della Tav. V rappresenta, come già si disse, le proj. del dodecaedro e dell'icosaedro inscritti nello stesso cubo e con gli spigoli fra loro pp.: quelle proj. essendo facilmente e risp. ottenute dalla lungh. dello spigolo. Desse sono intimamente collegate fra loro, non solo per la polarità dei loro contorni (Tav. V) ma anche dalla similitudine anzi omotetia fra le proj. delle facce del dodecaedro con le proj. delle sezioni diagonali (pent. reg.) conv. considerate dello icosaedro: i centri di quelle amatetie essendo risp. allogati nelle intersez. delle circ. 4 e 5 con gli assi dei lati del quadrato PQRS, ovvero nei punti d'incontro per es. di NN_1 con B*d*; di B_1B e di C*d* ecc. D'onde risp. parallele le MN ed NK con BC ed A_1B_1; la CB_1 con

dN_1 ecc...; epperò si ha in ognuna di quelle proj. in vera grandezza la misura di *entrambi i diedri* dei considerati solidi.

c) Anche la Fig. I della Tav. VI dà le proj. riunite dell'icosaedro e del dodecaedro inscritti, come prima, nello stesso cubo, ma qui sul piano pp. ad una diagonale di quest'ultimo. Ne sono evidenti le rispettive costruzioni e la loro analogia, bastando smussare, infatti, gli angoli di un esag. reg. con trasversali pp. alle bisettrici e che ne dividono in sezione aurea i lati, ovvero conducendo per ogni vertice delle rette che dividono in quello stesso rapporto i lati che non concorrono in esso; giacchè i segmenti di tali rette, diversamente considerati, dànno proj. degli spigoli dell'uno o dell'altro di quei poliedri e ne completano la rappresentazione.

d) Se è data la lungh. (Fig. III, Tav. VI) A*i* per es. dello spigolo, l'anzidetta proj. del dodec. si disegna subito mediante la circ. *i*A, i suoi raggi pp. R*i* ed *i*A, gli archi di 60° *as* ed *ar* e la circ. *a*R che taglia in R_1 la *is*. Si faccia inoltre $iC = iR_1$ e $Ck = Ai$, e si conducano dai punti C, *k*, *i* le parallele ad A*s* e ad A*r* ecc. (anche nella Fig. I si può iniziare dallo spigolo *ab* e dalle tre circ. concentriche 01, 02, 03... ma la costruzione è meno semplice).

Osservazione. — L'anzidetta costruzione si riduce, in fondo, a quella di un particolare rombo COA3 (formato da due eguali triang. equil.) la cui diag. magg. AC è quanto la somma di quella della faccia del poliedro e del suo lato.

F. P. Paternò.

DUE METODI GENERALI PER LA SOMMA DELLE POTENZE SIMILI

dei termini d'una qualsivoglia progressione aritmetica.

(Continuazione — Vedi fascicolo precedente)

II. — Espressioni dei termini generali e delle somme.

5. La progressione aritmetica u_n e le sue differenze si rappresentano col seguente schema, consentendo che r possa assumere tutt'i valori interi e positivi da 0 ad x, mettendo in evidenza il triangolo delle differenze del primo termine $\Delta^r u_0$ e scegliendo $\Delta^r u_{x+p-r}$ come termine generale a destra e $\Delta^r u_{-p}$ come termine generale a sinistra:

$$\ldots, \Delta^r u_{-p}, \text{—}, \Delta^r u_{-1}, \Delta^r u_0, \text{—}, \Delta^r u_{x-r}, \Delta^r u_{x+1-r}, \text{—}, \Delta^r u_{x+p-r}, \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\ldots, \Delta^x u_{-p}, \text{——}, \Delta^x u_{-1}, \Delta^x u_0, \Delta^x u_1, \text{——}, \Delta^x u_p, \ldots$$

È chiaro che si può aggiungere n a tutti gl'indici delle u; in tal modo si avrebbe la progressione riferita al primo termine $\Delta^r u_n$.

6. In funzione del lato

$$\Delta^r u_0, \ldots, \Delta^x u_0,$$

i termini generali si esprimono con le formule

$$\Delta^r u_{x+p-r} = \binom{x+p-r}{0} . \Delta^r u_0 + \ldots + \binom{x+p-r}{x-r} . \Delta^x u_0, \qquad (9)$$

$$\Delta^r u_{-p} = \binom{p-1}{0} . \Delta^r u_0 - \ldots + (-1)^{x-r} \binom{p-1+x-r}{x-r} . \Delta^x u_0. \quad (10)$$

La formula (9) si deduce direttamente dalla (5), ponendo

$$n = 0,$$
$$m = x + p,$$

ed osservando che sono nulle le differenze d'ordine $> x$.

La formula (10)

$$\Delta^r u_{-p} = \sum_0^{x-r}{}_i (-1)^i \binom{p-1+i}{i} . \Delta^{r+i} u_0,$$

per $p=0$ si riduce al solo primo termine, e quindi ad una identità, perchè il coefficiente si annulla sempre, salvo per $i=0$; per $p=1$ coincide con la (8) ponendo $n=-1$; si proceda quindi per induzione completa: ponendo nella (8) $n=-p$, si ha

$$\Delta^r u_{-p} = \Delta^r u_{-p+1} - \ldots + (-1)^{x-r} \Delta^x u_{-p+1},$$

e consentendo che (10) valga per $p-1$, si sostituiscano nel secondo membro i valori che si ricavano da

$$\Delta^r u_{-p+1} = \sum_0^{x-r}{}_i (-1)^i \binom{p-2+i}{i} . \Delta^{r+i} u_0$$

per $r=r, r+1, \ldots, x$, e sommando si otterrà la formula (10), perchè

$$\binom{p-2}{0} + \ldots + \binom{p-2+i}{i} = \binom{p-1+i}{i}.$$

Le formule (9) e (10) si possono riunire in una: ponendo nella (9) $x+p-r=n$, si ha

$$\Delta^r u_n = \sum_0^{x-r}{}_i \binom{n}{i} . \Delta^{r+i} u_0,$$

e ponendo nella (10) $p=n$, si ha

$$\Delta^r u_{-n} = \sum_0^{x-r}{}_i (-1)^i \binom{n-1+i}{i} . \Delta^{r+i} u_0,$$

e siccome

$$(-1)^i \binom{n-1+i}{i} = \binom{-n}{i},$$

si avrà

$$\Delta^r u_{\pm n} = \sum_0^{x-r} {}_i \binom{\pm n}{i} . \Delta^{r+i} u_0 .$$

7. In funzione del lato

$$\Delta^r u_{x-r}, \ldots, \Delta^x u_0,$$

i termini generali si esprimono con le formule

$$\Delta^r u_{-p} = \binom{x+p-r}{0} . \Delta^r u_{x-r} - \ldots + (-1)^{x-r} \binom{x+p-r}{x-r} . \Delta^x u_0 . \qquad (11)$$

$$\Delta^r u_{x+p-r} = \binom{p-1}{0} . \Delta^r u_{x-r} + \ldots + \binom{p-1+x-r}{x-r} . \Delta^x u_0 . \qquad (12)$$

La formula (11) si deduce direttamente dalla (4), ponendo

$$n = -p,$$
$$m = x + p,$$

ed osservando che sono nulle le differenze d'ordine $> x$.

La formula (12)

$$\Delta^r u_{x+p-r} = \sum_0^{x-r} {}_i \binom{p-1+i}{i} . \Delta^{r+i} u_{x-r-i}$$

per $p = 0$ si riduce al solo primo termine, e quindi ad una identità, perchè il coefficiente si annulla sempre, salvo per $i = 0$; per $p = 1$ coincide con la (7) ponendo $n = x + 1 - r$; si proceda quindi per induzione completa: ponendo nella (7) $n = x + p - r$, si ha

$$\Delta^r u_{x+p-r} = \Delta^r u_{x+p-r-1} + \ldots + \Delta^x u_{p-1},$$

e consentendo che (12) valga per $x + p - r - 1$, si sostituiscano nel secondo membro i valori che si ricavano da

$$\Delta^r u_{x+p-r-1} = \sum_0^{x-r} {}_i \binom{p-2+i}{i} . \Delta^{r+i} u_{x-r-i}$$

per $r = r, r+1, \ldots, x$, e sommando si otterrà la formula (12), perchè

$$\binom{p-2}{0} + \ldots + \binom{p-2+i}{i} = \binom{p-1+i}{i}.$$

Le formule (11) e (12) si possono riunire in una: ponendo nella (11) $p = n$, si ha

$$\Delta^r u_{-n} = \sum_0^{x-r} {}_i (-1)^i \binom{n+x-r}{i} . \Delta^{r+i} u_{x-r-i},$$

e ponendo nella (12) $x+p-r=n$, si ha

$$\Delta^r u_n = \sum_0^{x-r}{}_i \binom{n-x+r-1+i}{i} . \Delta^{r+i} u_{x-r-i},$$

e siccome

$$\binom{n-x+r-1+i}{i} = (-1)^i \binom{-n+x-r}{i},$$

si avrà

$$\Delta^r u_{\mp n} = \sum_0^{x-r}{}_i (-1)^i \binom{\pm n + x - r}{i} . \Delta^{r+i} u_{x-r-i}.$$

Non è inutile avvertire che ciò che manca di simmetria nelle formule (9), (10), (11) e (12) è da attribuirsi alle due convenzioni ammesse: la successione (A) per la quale il segno $+$ è *a destra* e il segno $-$ *a sinistra*, l'uguaglianza (α) per la quale il minuendo è *sempre* il termine a destra e il sottraendo il termine a sinistra.

8. In funzione del lato

$$\Delta^r u_0, \ldots, \Delta^r u_{x-r},$$

i termini generali si esprimono con le formule

$$\Delta^r u_{x+p-r} = \binom{p-1}{0}\binom{x+p-r}{x-r} . \Delta^r u_{x-r} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{x-r}\binom{p-1+x-r}{x-r}\binom{x+p-r}{0} . \Delta^r u_0, \quad (13)$$

$$\Delta^r u_{-p} = \binom{p-1}{0}\binom{x+p-r}{x-r} . \Delta^r u_0 - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{x-r}\binom{p-1+x-r}{x-r}\binom{x+p-r}{0} . \Delta^r u_{x-r}. \quad (14)$$

La formula (13)

$$\Delta^r u_{x+p-r} = \sum_0^{x-r}{}_i (-1)^i \binom{p-1+i}{i}\binom{x+p-r}{x-r-i} . \Delta^r u_{x-r-i}$$

si ricava dalle formule (6) e (9); invero, la formula (9) si può scrivere, invertendo i termini,

$$\Delta^r u_{x+p-r} = \binom{x+p-r}{x-r} . \Delta^x u_0 + \ldots$$
$$\ldots + \binom{x+p-r}{0} . \Delta^r u_0 = \sum_0^{x-r}{}_i \binom{x+p-r}{x-r-i} . \Delta^{x-i} u_0,$$

e dalla formula (6) si ha

$$\Delta^{x-i} u_0 = \binom{x-r-i}{0} . \Delta^r u_{x-r-i} - \ldots + (-1)^{x-r-i}\binom{x-r-i}{x-r-i} . \Delta^r u_0,$$

e sostituendo nella precedente i valori che si ricavano da questa per $i=0,1,\ldots,x-r$, e sommando, il coefficiente di $\Delta^r u_{x-r-i}$ sarà

$$(-1)^i \binom{x+p-r}{x-r}\binom{x-r}{i}+(-1)^{i-1}\binom{x+p-r}{x-r-1}\binom{x-r-1}{i-1}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^0\binom{x+p-r}{x-r-i}\binom{x-r-i}{0},$$

che per la nota proprietà dei coefficienti binomiali

$$\binom{m}{k+h}\binom{k+h}{h}=\binom{m}{k}\binom{m-k}{h}, \tag{C}$$

si trasforma in

$$\binom{x+p-r}{x-r-i}\left[(-1)^i\binom{p+i}{i}+(-1)^{i-1}\binom{p+i}{i-1}+\ldots+(-1)^0\binom{p+i}{0}\right],$$

cioè

$$(-1)^i\binom{p-1+i}{i}\binom{x+p-r}{x-r-i}$$

che è il coefficiente generale della (13).

La formula (14)

$$\Delta^r u_{-p}=\sum_0^{x-r}{}_i\,(-1)^i\binom{p-1+i}{i}\binom{x+p-r}{x-r-i}.\Delta^r u_i$$

si potrebbe senz'altro affermare per ragione di simmetria, ma si può ricavare dalle formule (6) e (10); invero, la formula (10) è

$$\Delta^r u_{-p}=\sum_0^{x-r}{}_i\,(-1)^i\binom{p-1+i}{i}.\Delta^{r+i} u_0,$$

e dalla formula (6) si ha

$$\Delta^{r+i} u_0=\binom{i}{0}.\Delta^r u_i-\ldots+(-1)^i\binom{i}{i}.\Delta^r u_0,$$

da cui

$$(-1)^i\Delta^{r+i} u_0=\binom{i}{i}.\Delta^r u_0-\ldots+(-1)^i\binom{i}{0}.\Delta^r u_i,$$

e si vede bene che essendo crescente l'indice di u, il termine $\Delta^r u_i$ si trova soltanto nelle espressioni da $\Delta^{r+i} u_0$ a $\Delta^x u_0$; sostituendo i valori che se ne ricavano per $i=0,1,\ldots,x-r$, nella formula (10), e sommando, il coefficiente di $(-1)^i\Delta^r u_i$, sarà

$$\binom{i}{0}\binom{p-1+i}{i}+\ldots+\binom{x-r}{x-r-i}\binom{p-1+x-r}{x-r},$$

e perciò, per esser vera la formula (14), dev'essere

$$\sum_0^{x-r-i}{}_j\binom{i+j}{j}\binom{p-1+i+j}{i+j}=\binom{p-1+i}{i}\binom{x+p-r}{x-r-i},$$

cioè

$$\sum_0^{x-r-i}{}_j \frac{\binom{i+j}{j}\binom{p-1+i+j}{i+j}}{\binom{p-1+i}{i}} = \binom{x+p-r}{x-r-i} = \binom{x+p-r}{p+i},$$

e sostituendo i fattoriali e riducendo, si ha

$$\sum_0^{x-r-i}{}_j \binom{p-1+i+j}{p-1+i} = \binom{x+p-r}{p+i},$$

che è una nota proprietà dei coefficienti binomiali.

Le formule (13) e (14) si possono riunire in una: ponendo nella (13) $x+p-r=n$ ed invertendo l'ordine dei termini, si ha

$$\Delta^r u_n = \sum_0^{x-r}{}_i (-1)^{x-r-i} \binom{n-1-i}{x-r-i} \binom{n}{i} . \Delta^r u_i ,$$

e ponendo nella (14) $p=n$, si ha

$$\Delta^r u_{-n} = \sum_0^{x-r}{}_i (-1)^i \binom{n-1+i}{i} \binom{n+x-r}{x-r-i} . \Delta^r u_i ,$$

e siccome

$$(-1)^{x-r-i} \binom{n-1-i}{x-r-i} = \binom{-n+x-r}{x-r-i}$$

e

$$(-1)^i \binom{n-1+i}{i} = \binom{-n}{i},$$

si avrà

$$\Delta^r u_{\pm n} = \sum_0^{x-r}{}_i \binom{\pm n}{i} \binom{\mp n+x-r}{x-r-i} . \Delta^r u_i .$$

9. In funzione del lato

$$\Delta^r u_0 , \ldots , \Delta^x u_0 ,$$

le somme si esprimono con le formule

$$\Delta^r u_0 + \ldots + \Delta^r u_{x-p-r} = \binom{x+p-r+1}{1} . \Delta^r u_0 + \ldots$$
$$\ldots + \binom{x+p-r+1}{x-r+1} . \Delta^x u_0 , \quad (15)$$

$$\Delta^r u_{-1} + \ldots + \Delta^r u_{-p} = \binom{p}{1} . \Delta^r u_0 - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{x-r} \binom{p+x-r}{x-r+1} . \Delta^x u_0 . \quad (16)$$

La formula (15) si deduce dalla (9): invero, ponendo

$$x+p-r = 0, 1, \ldots , x+p-r,$$

si hanno le relazioni

$$\Delta^r u_0 = \binom{0}{0} . \Delta^r u_0,$$

. . . .

$$\Delta^r u_{x-r} = \binom{x-r}{0} . \Delta^r u_0 + \ldots + \binom{x-r}{x-r} . \Delta^x u_0,$$

. . . .

$$\Delta^r u_{x+p-r} = \binom{x+p-r}{0} . \Delta^r u_0 + \ldots + \binom{x+p-r}{x-r} . \Delta^x u_0,$$

e sommando, si ottiene la (15).

La formula (16) si deduce dalla (10): invero, ponendo

$$-p = -1, -2, \ldots, -p,$$

si hanno le relazioni

$$\Delta^r u_{-1} = \binom{0}{0} . \Delta^r u_0 - \ldots + (-1)^{x-r} \binom{x-r}{x-r} . \Delta^x u_0,$$

. . . .

$$\Delta^r u_{-p} = \binom{p-1}{0} . \Delta^r u_0 - \ldots + (-1)^{x-r} \binom{p-1+x-r}{x-r} . \Delta^x u_0,$$

e sommando, si ottiene la (16).

10. In funzione del lato

$$\Delta^r u_{x-r}, \ldots, \Delta^x u_0,$$

le somme si esprimono con le formule

$$\Delta^r u_{x-r} + \ldots + \Delta^r u_0 + \Delta^r u_{-1} + \ldots + \Delta^r u_{-p} =$$
$$= \binom{x+p-r+1}{1} . \Delta^r u_{x-r} - \ldots + (-1)^{x-r} \binom{x+p-r+1}{x-r+1} . \Delta^x u_0, \quad (17)$$

$$\Delta^r u_{x+1-r} + \ldots + \Delta^r u_{x+p-r} = \binom{p}{1} . \Delta^r u_{x-r} + \ldots + \binom{p+x-r}{x-r+1} . \Delta^x u_0. \quad (18)$$

La formula (17) si deduce dalla (11): invero, ponendo

$$-p = x-r,\ x-r-1, \ldots, 0, -1, \ldots, -p,$$

si hanno le relazioni

$$\Delta^r u_{x-r} = \binom{0}{0} . \Delta^r u_{x-r},$$

. . . .

$$\Delta^r u_0 = \binom{x-r}{0} . \Delta^r u_{x-r} - \ldots + (-1)^{x-r} \binom{x-r}{x-r} . \Delta^x u_0,$$

. . . .

$$\Delta^r u_{-p} = \binom{x+p-r}{0} . \Delta^r u_{x-r} - \ldots + (-1)^{x-r} \binom{x+p-r}{x-r} . \Delta^x u_0,$$

e sommando, si ottiene la (17).

La formula (18) si deduce dalla (12): invero, ponendo

$$x+p-r=x+1-r,\quad x+2-r,\ldots,x+p-r,$$

si hanno le relazioni

$$\Delta^r u_{x+1-r}=\binom{0}{0}.\Delta^r u_{x-r}+\ldots+\binom{x-r}{x-r}.\Delta^x u_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta^r u_{x+p-r}=\binom{p-1}{0}.\Delta^r u_{x-r}+\ldots+\binom{p-1+x-r}{x-r}.\Delta^x u_0,$$

e sommando, si ottiene la (18).

11. In funzione del lato

$$\Delta^r u_0,\ldots,\Delta^r u_{x-r},$$

le somme si esprimono con le formule

$$\Delta^r u_{x+1-r}+\ldots+\Delta^r u_{x+p-r}=\sum_{0}^{x-r}{}_i(-1)^i\Delta^r u_{x-r-i}.\sum_{0}^{x-r-i}{}_j\binom{i+j}{i}\binom{p+i+j}{p-1},\quad (19)$$

$$\Delta^r u_{-1}+\ldots+\Delta^r u_{-p}=\sum_{0}^{x-r}{}_i(-1)^i\Delta^r u_i.\sum_{0}^{x-r-i}{}_j\binom{i+j}{i}\binom{p+i+j}{p-1}.\quad (20)$$

La formula (19) si ricava dalle formule (6) e (18): basta sostituire nella (18) i valori ricavati dalla (6), perchè, sommando, il coefficiente di $(-1)^i\Delta^r u_{x-r-i}$ sarà quello stesso della (19).

La formula (20) si ricava dalle formule (6) e (16); basta sostituire nella (16) i valori ricavati dalla (6), invertendo i termini, perchè, sommando, il coefficiente di $(-1)^i\Delta^r u_i$ sarà quello stesso della (20).

È da osservare che il coefficiente comune di queste due formule non è riducibile a forma più semplice, e che da esse sfuggono i termini del lato

$$\Delta^r u_0,\ldots,\Delta^r u_{x-r},$$

in funzione del quale esse somme si esprimono.

Se si richiede la somma di $m+1$ termini consecutivi

$$\Delta^r u_n+\ldots+\Delta^r u_{n+m},$$

si sceglierà per primo termine della progressione un termine opportunamente fissato in dipendenza dei valori di n e m, e della formula che si vuole applicare.

III. — Primo metodo generale.

12. Si scelga u_0 come primo termine della progressione aritmetica u_n d'ordine x; se

$$z=0,1,2,3,\ldots$$

s'innalzino tutt'i termini di u_n alla potenza di esponente z; per la formula (3) si avrà

$$\Delta^{zx} u_0^z = \frac{(zx)!}{(x!)^z} \cdot (\Delta^x u_0)^z,$$

cosicchè u_n^z è una progressione aritmetica d'ordine zx.

Qualunque sia la quantità u_n, si ha $u_n^0 = 1$, e perciò per $z = 0$, la progressione u_n^0 è formata di termini tutti $= 1$ ed è quindi d'ordine zero ed è

$$\Delta^0 u_0^0 = 1$$

e sono nulle le differenze d'ordine > 0.

Per ogni valore di z si formino le differenze del primo termine e si rappresentino col seguente specchio (triangolo delle diagonali)

$$\begin{array}{l}
\Delta^0 u_0^0, \\
\Delta^0 u'_0, \ldots, \Delta^x u'_0, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\Delta^0 u_0^z, \ldots, \Delta^x u_0^z, \ldots, \Delta^{zx} u_0^z.
\end{array}$$

È chiaro che se

$$0 \leqslant i \leqslant zx,$$

un termine qualsivoglia del triangolo si può rappresentare con

$$\Delta^i u_0^z,$$

osservando che si annulla per $i > zx$; per i costante si ottengono i termini d'una verticale e per z costante quelli d'un'orizzontale.

13. Senza bisogno d'innalzare i termini di u_n alla potenza di esponente z, questo triangolo si può costruire per via ricorrente con la sola conoscenza delle differenze di u_0, perchè si ha la seguente legge

$$\Delta^i u_0^z = \sum_0^x {}_r \, \Delta^{i-r} u_0^{z-1} \left[\binom{r}{0} \binom{i}{r} \cdot \Delta^r u_0 + \ldots + \binom{x}{x-r} \binom{i}{x} \cdot \Delta^x u_0 \right], \quad (21)$$

per $z > 0$.

Per $z = 1$, il coefficiente $\Delta^{i-r} u_0^0$ si annulla per $i - r > 0$; e siccome i varia da 0 ad x, dev'essere contemporaneamente

$$i = r = 0, 1, 2, \ldots, x;$$

cosicchè il sommatorio si riduce ad un solo termine, e ponendo $r = i$, si ha

$$\Delta^i u_0 = \Delta^0 u_0^0 \left[\binom{i}{0} \binom{i}{i} \cdot \Delta^i u_0 \right] = \Delta^i u_0 .$$

cioè un'identità, perchè si annullano gli altri termini fra parentesi, essendo $\binom{i}{x} = 0$ per $x > i$.

Per rendere più facile la dimostrazione della formula (21), occorre trasformarla: la somma racchiusa fra parentesi

$$\binom{r}{0} \binom{i}{r} \cdot \Delta^r u_0 + \binom{r+1}{1} \binom{i}{r+1} \cdot \Delta^{r+1} u_0 + \ldots + \binom{x}{x-r} \binom{i}{x} \cdot \Delta^x u_0 ,$$

per la relazione (C) fra i coefficienti binomiali, si può scrivere

$$\binom{i}{r}\binom{i-r}{0}\cdot\Delta^r u_0+\binom{i}{r}\binom{i-r}{1}\cdot\Delta^{r+1} u_0+\ldots+\binom{i}{r}\binom{i-r}{x-r}\cdot\Delta^x u_0,$$

cioè

$$\binom{i}{r}\left[\binom{i-r}{0}\cdot\Delta^r u_0+\ldots+\binom{i-r}{x-r}\cdot\Delta^x u_0\right],$$

e per la (9)

$$\binom{i}{r}\cdot\Delta^r u_{i-r},$$

quindi

$$\Delta^i u_0^z=\sum_0^x{}_r\binom{i}{r}\cdot\Delta^r u_{i-r}\cdot\Delta^{i-r} u_0^{z-1}. \tag{22}$$

Inoltre, ponendo nella (4)

$$r=0,$$
$$m=s,$$
$$n=i-s,$$

ed osservando che per essere u_n una progressione aritmetica d'ordine x, si annullano tutte le differenze d'ordine maggiore di x, si ha

$$\Delta^0 u_{i-s}=\binom{s}{0}\cdot\Delta^0 u_i-\ldots+(-1)^x\binom{s}{x}\cdot\Delta^x u_{i-x}. \tag{δ}$$

Dopo ciò, ponendo nella formula (6)

$$r=0,$$
$$n=0,$$
$$m=i,$$

ed applicandola alla progressione aritmetica u_n^z d'ordine zx, si ottiene

$$\begin{aligned}\Delta^i u_0^z&=\binom{i}{0}\cdot\Delta^0 u_i^z-\ldots+(-1)^i\binom{i}{i}\cdot\Delta^0 u_0^z\\&=\sum_0^i{}_s(-1)^s\binom{i}{s}\cdot\Delta^0 u^z_{i-s},\end{aligned} \tag{ε}$$

e da questa formula, ponendo $z-1$ per z e variando i da i ad $i-x$, si ricavano le relazioni

$$\Delta^i u_0^{z-1}=\binom{i}{0}\cdot\Delta^0 u_i^{z-1}-\ldots+(-1)^x\binom{i}{x}\cdot\Delta^0 u_{i-x}^{z-1}\pm\ldots+(-1)^i\binom{i}{i}\cdot\Delta^0 u_0^{z-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^{i-x} u_0^{z-1}=\qquad(-1)^0\binom{i-x}{0}\cdot\Delta^0 u_{i-x}^{z-1}-\ldots+(-1)^{i-x}\binom{i-x}{i-x}\cdot\Delta^0 u_0^{z-1}.$$

La prima di queste relazioni contiene $i+1$ termini, la seconda contiene i termini, ..., e l'ultima, la $(x-1)$-esima, contiene $i-x+1$ termini; ma si può convenire che contengano tutte lo stesso numero di termini, $i+1$, perchè son tutti nulli i coefficienti binomiali precedenti il primo; perciò se s è una indeterminata che abbia in tutte lo *stesso* valore da 0 ad i, si possono scrivere:

$$\Delta^i u_0^{z-1} = \sum_0^i{}_s (-1)^s \binom{i}{s} . \Delta^0 u_{i-s}^{z-1},$$

$$\Delta^{i-1} u_0^{z-1} = \sum_0^i{}_s (-1)^{s-1} \binom{i-1}{s-1} . \Delta^0 u_{i-s}^{z-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^{i-x} u_0^{z-1} = \sum_0^i{}_s (-1)^{s-x} \binom{i-x}{s-x} . \Delta^0 u_{i-s}^{z-1},$$

e moltiplicando la prima per $\binom{i}{0} . \Delta^0 u_i$, la seconda per $\binom{i}{1} . \Delta' u_{i-1}, \ldots,$ e l'ultima per $\binom{i}{x} . \Delta^x u_{i-x}$, e sommando, si ottiene

$$\sum_0^x{}_r \binom{i}{r} . \Delta^r u_{i-r} . \Delta^{i-r} u_0^{z-1} = \sum_0^i{}_s \left[(-1)^s \binom{i}{s}\binom{i}{0} . \Delta^0 u_{i-s}^{z-1} . \Delta^0 u_i + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{s-x} \binom{i-x}{s-x}\binom{i}{x} . \Delta^0 u_{i-s}^{z-1} . \Delta^x u_{i-x}\right],$$

che per la relazione (C) fra i coefficienti binomiali, si può scrivere

$$\sum_0^x{}_r \binom{i}{r} . \Delta^r u_{i-r} . \Delta^{i-r} u_0^{z-1} =$$

$$= \sum_0^i{}_s (-1)^s \binom{i}{s} . \Delta^0 u_{i-s}^{z-1} \left[\binom{s}{0} . \Delta^0 u_i - \ldots + (-1)^x \binom{s}{x} . \Delta^x u_{i-x}\right],$$

e per la (6)

$$\sum_0^x{}_r \binom{i}{r} . \Delta^r u_{i-r} . \Delta^{i-r} u_0^{z-1} = \sum_0^i{}_s (-1)^s \binom{i}{s} . \Delta^0 u^z_{i-s},$$

e si vede bene che il primo membro è l'espressione della formula (22) ed il secondo è l'espressione (ε) ricavata dalla formula (4).

Volendo applicare la legge (21) ai numeri figurati, che sono le più semplici possibili progressioni aritmetiche, basta porre $u_0 = \binom{0}{x}$, nel qual caso sarà

$$\Delta^0 \binom{0}{x} = \ldots = \Delta^{x-1} \binom{0}{x} = 0$$

e

$$\Delta^x \binom{0}{x} = 1,$$

e quindi

$$\Delta^i \left[\binom{0}{x}\right]^z = \sum_0^i{}_r \Delta^{i-r} \left[\binom{0}{x}\right]^{z-1} . \binom{x}{x-r}\binom{i}{x},$$

cioè, invertendo i coefficienti binomiali,

$$\Delta^i \left[\binom{0}{x}\right]^z = \binom{i}{x} \left\{\binom{x}{0} . \Delta^i \left[\binom{0}{x}\right]^{z-1} + \ldots + \binom{x}{x} . \Delta^{i-x} \left[\binom{0}{x}\right]^{z-1}\right\} . \quad (23)$$

Applicando la legge (22), si ha

$$\Delta^i\left[\binom{0}{x}\right]^z=\sum_0^x{}_r\binom{i}{r}.\Delta^r\binom{i-r}{x}.\Delta^{i-r}\left[\binom{0}{x}\right]^{z-1},$$

cioè

$$\Delta^i\left[\binom{0}{x}\right]^z=\sum_0^x{}_r\binom{i}{r}\binom{i-r}{x-r}.\Delta^{i-r}\left[\binom{0}{x}\right]^{z-1}, \qquad (24)$$

che per la relazione (C) può scriversi

$$\Delta^i\left[\binom{0}{x}\right]^z=\binom{i}{x}.\sum_0^x{}_r\binom{x}{r}.\Delta^{i-r}\left[\binom{0}{x}\right]^{z-1},$$

e coincide con la (23).

Tanto dalla (23) quanto dalla (24), per $x=1$ cioè pei numeri naturali, si ricava la relazione nota

$$\Delta^i 0^z=i.(\Delta^i 0^{z-1}+\Delta^{i-1}0^{z-1}).$$

14. Calcolati così, per mezzo della (21), tutt'i termini del lato

$$\Delta^0 u_0{}^z,\ldots,\Delta^{zx}u_0{}^z,$$

dalle formule (9) e (10) si ha

$$u^z{}_{\pm n}=\sum_0^{zx}{}_i\binom{\pm n}{i}.\Delta^i u_0{}^z,$$

e dalle formule (15) e (16):

$$u_0{}^z+\ldots+u_n{}^z=\binom{n+1}{1}.\Delta^0 u_0{}^z+\ldots+\binom{n+1}{1+zx}.\Delta^{zx}u_0{}^z, \qquad (25)$$

$$u_{-1}{}^z+\ldots+u^z{}_{-n}=\binom{n}{1}.\Delta^0 u_0{}^z-\ldots+(-1)^{zx}\binom{n+zx}{1+zx}.\Delta^{zx}u_0{}^z \qquad (26)$$

VITO MELFI MOLÈ.

(*Continua*).

ERRATA-CORRIGE.

Nella prima parte di questo articolo, inserita nel fascicolo precedente, a

Pag. 34,	linea 23,	*invece di:*	ognuna funzione della forma seguente	*leggasi:* ogni variabile funzione della seguente
» 35,	» 2,	» »	$a_z=u_n$	*leggasi:* $a_z=n$
» 35,	» 31,	» »	$\binom{b}{y!}^x$	» $\left(\frac{b}{y!}\right)^x$
» 36,	» 29,	» »	$\Delta^x{}_z(n)$	» $\Delta^x{}_z\varphi_z(n)$
» 36,	» 32,	» »	$p_0{}^z.n^{zx}\ldots,$	» $p_0{}^z.n^{zx}+\ldots,$
» 38,	» 5,	» »	$\Delta^x u_{n+x-r-1}$	» $\Delta^x u_{n-x-r-1}$
» 38,	» 9,	» »	$\Delta^x u_n$	» $\Delta^r u_n$

V. M. M.

ESERCIZIO DI GEOMETRIA

Problema. — Dati in un piano, un punto M e tre circonferenze $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ col centro comune in O, i raggi r_1, r_2, r_3 delle quali sono diversi fra loro, trovare le condizioni necessarie per l'esistenza di triangoli equilateri col vertice A_1 sulla α_1, il vertice A_2 sulla α_2 ed il vertice A_3 sulla α_3, pei quali un lato preindicato passi per M e determinare poi il numero e la posizione dei triangoli che soddisfano il problema.

Soluzione. — I. Senza tener conto delle altre richieste del problema, cerchiamo dapprima il valore assoluto della lunghezza dei lati di ciascun triangolo equilatero (quando ne esistono), di quelli che abbiano il vertice A_1 sulla α_1, il vertice A_2 sulla α_2 ed il vertice A_3 sulla α_3 e la posizione relativa di questi tre vertici. (1)

Perchè evidentemente ciò nulla toglie alla generalità, supporremo che fra i raggi delle circonferenze $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ abbiano luogo le ineguaglianze:

$$r_1 > r_2 > r_3 > 0. \tag{1}$$

Indicate con x_1, y_1 le coordinate del vertice A_1, con x_2, y_2 quelle del vertice A_2 e con x_3, y_3 quelle del vertice A_3, avendo riferito il tutto ad un sistema qualunque di assi ortogonali coll'origine in O, ed indicato pure con l il valore assoluto della lunghezza dei lati di uno dei triangoli cercati fra le coordinate dei tre vertici ed l si hanno evidentemente le equazioni

$$x_1^2 + y_1^2 = r_1^2, \quad x_2^2 + y_2^2 = r_2^2, \quad x_3^2 + y_3^2 = r_2^2$$
$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)=l^2,\ (x_1-x_3)^2=(y_1-y_3)^2=l^2,\ (x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2=l^2. \tag{2}$$

Per ottenere più speditamente le espressioni di l in funzione di r_1, r_2 ed r_3 e quelle di x_2, y_2, x_3, y_3 in funzione di r_1, r_2, r_3 e delle coordinate x_1, y_1 del vertice A_1, nelle ultime cinque delle (2) sostituiremo x_2, y_2, x_3, y_3 colle incognite $\varphi_2, \psi_2, \varphi_3, \psi_3$ per mezzo delle formole

$$x_2 = \frac{1}{r_1}(\varphi_2 x_1 - \psi_2 y_1), \quad y_3 = \frac{1}{r_1}(\varphi_2 y_1 - \psi_2 y_1),$$
$$x_3 = \frac{1}{r_1}(\varphi_3 x_1 - \psi_3 y_1), \quad y_3 = \frac{1}{r_1}(\varphi_3 y_1 - \psi_3 x_1) \tag{3}$$

(1) Benchè nota la costruzione di un triangolo equilatero coi vertici uno su ciascuna di tre circonferenze concentriche date, che risulta dal teorema " Il luogo geometrico dei punti d'un " piano la distanza dei quali da due punti fissi sono in un rapporto costante è una circonferenza " ne ho esposta qui la soluzione seguente perchè più diretta e principalmente perchè fornisce formule di immediata applicazione alla soluzione del problema oggetto principale di questa nota.

x_1 ed y_1 essendo legati tra loro dalla sola relazione $x_1^2+y_1^2=r_1^2$. Con ciò le ultime cinque equazioni delle (2) si trasformano nelle

$$\varphi_2^2+\psi_2^2=r_2^2 \quad (2_a) \qquad \varphi_3^2+\psi_3^2=r_3^2 \quad (2_b)$$

$$\varphi_2=\frac{1}{2r_1}(r_1^2+r_2^2-l^2), \quad (2_c) \qquad \varphi_3=\frac{1}{2r_1}(r_1^2+r_3^2-l^2), \quad (2_d)$$

$$\varphi_2\varphi_3+\psi_2\psi_3=\frac{1}{2}(r_2^2+r_3^2-l^2). \quad (2_e)$$

Dalle (2_a) e (2_b) si ricava

$$\psi_2^2\psi_3^2=r_2^2r_3^2-r_3^2\varphi_2^2-r_2^2\varphi_3^2+\varphi_2^2\varphi_3^2$$

e fra questa relazione e la (2_e) eliminando prima il prodotto $\psi_2\psi_3$ e nel risultato sostituendo φ_2 e φ_3 colle loro espressioni date dalle (2_c) e (2_d) si ottiene l'equazione

$$l^6-(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\,l^4+(r_1^4+r_2^4+r_3^4-r_1^2r_2^2-r_1^2r_3^2-r_2^2r_3^2)\,l^2=0$$

e sopprimendo in essa il fattore l^2 [poichè ad $l=0$ non può corrispondere soluzione alcuna del nostro problema] si riduce alla

$$l^4-(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\,l^2+r_1^4+r_2^4+r_3^4-r_1^2r_2^2-r_1^2r_3^2-r_2^2r_3^2=0 \quad (4)$$

la quale sciolta rispetto ad l^2 ci dà

$$l^2=\frac{1}{2}(r_1^2+r_2^2+r_3^2\pm\sqrt{3}\,S) \qquad (5)$$

e quando occorra indicare separatamente questi due valori di l^2, se diseguali, porremo

$$l_1^2=\frac{1}{2}(r_1^2+r_2^2+r_3^2+\sqrt{3}\,S) \quad l_2^2=\frac{1}{2}(r_1^2+r_2^2+r_3^2-\sqrt{3}\,S).$$

I valori di l^2 dati dalla (5) non possono essere eguali che per $S=0$ ed indicheremo allora questo valore comune con

$$l_3^2=\frac{1}{2}(r_1^2+r_2^2+r_3^2).$$

Si è posto qui

$$S=\sqrt{(r_1+r_2+r_3)(r_2+r_3-r_1)(r_1+r_3-r_2)(r_1+r_2-r_3)}$$

per cui S rappresenta l'area del triangolo che ha per lati i diametri delle tre circonferenze α_1 α_2 ed α_3 quando questo triangolo esiste. (Considero come esistente un triangolo a vertici collineari.)

Nella soluzione del problema geometrico che ci siamo proposti, tutto dovendo essere reale, deve essere tale l ed a più forte ragione l^2 e quindi anche S reale e dalla (1) perchè ciò si avveri risulta la condizione

$$r_1 \leqq r_2+r_3 \qquad (6)$$

dalla quale segue che il maggiore dei raggi delle circonferenze α_1, α_2 ed α_3 non può superare la somma degli altri due e che perciò S è reale sempre quando il triangolo dei diametri esista.

Si avrà poi $S=0$ quando sia $r_1 = r_2 + r_3$ e perciò il valore di l_3 sarà dato da $l_3 = r_2^2 + r_2 r_3 + r_3^2$.

Se sono verificate ad un tempo le (1) e la (6) oltre ad essere reale S è anche reale il valore di l che si deduce dalla (5), in fatti perchè ciò avvenga è necessario e sufficiente che l_2^2 non sia negativo, condizione espressa dall'ineguaglianza $(r_1^2 + r_2^2 + r_2^2)^2 \geqslant 3S_1^2$ che è sempre soddisfatta perchè in seguito alla (1) il secondo membro dell'identità

$$(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^2 - 3S^2 = 2\,[(r_1^2 - r_2)^2 + (r_1^2 - r_3^2)^2 + (r_3^2 - r_3^2)]$$

che risulta dalle (4) è sempre maggiore di zero.

Trovata così l'espressione di l^2 in funzione di r_1, r_2 ed r_3 e quindi per le (2_c) e (2_d) quelle di φ_2 e di φ_3, dalla (2_a) si deduce

$$\psi_2 = \pm \frac{1}{2r_1} \sqrt{4r_1^2 r_2^2 - (r_1^2 + r_2^2 - l^2)^2}$$

e per la (4) avendosi l'identità

$$4r_1^2 r_2^2 - (r_1^2 + r_2^2 - l^2)^2 = \frac{1}{3} (r_1^2 + r_2^2 - 2r_3^2 + l^2)^2$$

l'espressione precedente di ψ_2 si trasforma nella

$$\psi_2 = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}\,r_1} (r_1^2 + r_2^2 - 2r_3^2 + l^2).$$

Tenuto poi conto delle (4) dalle (2_c), (2_d) e (2_e) si ricavano successivamente le relazioni

$$\begin{aligned}
\psi_2 \psi_2 &= \frac{1}{2} (r_2^2 + r_3^2 - l^2) - \varphi_2 \varphi_3 = \\
&= -\frac{1}{12 r_1^2} [3r_1^4 - 3r_1^2 r_2^2 - 3r_1^2 r_3^2 - 3(r_2^2 + r_3^2) l^2 + 2l^4 + l^4] \\
&= -\frac{1}{12 r_1^2} [r_1^4 - 2r_2^4 - 2r_3^4 - r_1^2 r_2^2 - \\
&\qquad - r_1^2 r_3^2 + 5r_2^2 r_3^2 + (2r_1^2 - r_2^2 - r_3^2) l^2 + l^4] \\
&= -\frac{1}{12 r_1^2} (r_1^2 + r_2^2 - 2r_3^2 + l^2)(r_1^2 - 2r_2^2 + r_3^2 + l^2)
\end{aligned}$$

ed in seguito all'espressione precedente di ψ_2 si ha

$$\psi_3 = \mp \frac{1}{2\sqrt{3}\,r_1} (r_1^2 - 2r_2^2 + r_3^2 + l^2).$$

2. Quando è $l_1^2 \gtrless l_2^2$ dopo aver posto successivamente l_1^2 ed l_2^2 in luogo di l^2 nelle espressioni precedenti di φ_2, φ_3, ψ_2, ψ_3 e portati i risultati nelle (3), per le coordinate dei vertici A_2 ed A_3 si ottengono quattro sistemi di valori due dei quali sono dati dalle formole

$$\left.\begin{aligned}
x_2' &= \frac{1}{2\sqrt{3}\,r_1^2}\left[\sqrt{3}\,(r_1^2+r_2^2-l_1^2)\,x_1+(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)\,y_1\right]\\
y_2' &= \frac{1}{2\sqrt{3}\,r_1^2}\left[\sqrt{3}\,(r_1^2+r_2^2-l_1^2)\,y_1-(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)\,x_1\right]\\
x_3' &= \frac{1}{2\sqrt{3}\,r_1^2}\left[\sqrt{3}\,(r_1^2+r_3^2-l_1^2)\,x_1-(r_1^2+r_3^2-2r_2^2+l_1^2)\,y_1\right]\\
y_3' &= \frac{1}{2\sqrt{3}\,r_1^2}\left[\sqrt{3}\,(r_1^2+r_3^2-l_1^2)\,y_1+(r_1^2+r_3^2-2r_2^2+l_1^2)\,x_1\right]
\end{aligned}\right\}\ (7')$$

$$\left.\begin{aligned}
x_2'' &= \frac{1}{2\sqrt{3}\,r_1^2}\left[\sqrt{3}\,(r_1^2+r_2^2-l_1^2)\,x_1-(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)\,y_1\right]\\
y_2'' &= \frac{1}{2\sqrt{3}\,r_1^2}\left[\sqrt{3}\,(r_1^2+r_2^2-l_1^2)\,y_1+(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)\,x_1\right]\\
x_3'' &= \frac{1}{2\sqrt{3}\,r_1^2}\left[\sqrt{3}\,(r_1^2+r_3^2-l_1^2)\,x_1+(r_1^2+r_3^2-2r_2^2+l_1^2)\,y_1\right]\\
y_3'' &= \frac{1}{2\sqrt{3}\,r_1^2}\left[\sqrt{3}\,(r_1^2+r_3^2-l_1^2)\,y_1-(r_1^2+r_3^2-2r_2^2+l_1^2)\,x_1\right]
\end{aligned}\right\}\ (7'')$$

e gli altri due (x_2''', y_2''') (x_3''', y_3''') e $(x_2^{\text{IV}}, y_2^{\text{IV}})$ $(x_3^{\text{IV}}, y_3^{\text{IV}})$ si deducono sostituendo in essi l_1^2 con l_2^2 ed indicheremo rispettivamente questi nuovi sistemi con (7‴) e (7$^{\text{IV}}$).

In corrispondenza di questi quattro sistemi di valori (7′) (7″) (7‴) (7$^{\text{IV}}$) si hanno i quattro triangoli $A_1\,A_2'\,A_3'$, $A_1\,A_2''\,A_3''$, $A_1\,A_2'''\,A_3'''$, $A_1\,A_2^{\text{IV}}\,A_3^{\text{IV}}$ i quali tutti soddisfanno il problema ed hanno comune il vertice A_1 posto in un punto preso ad arbitrio sulla α_1 del quale abbiamo indicate con x_1, y_1 le coordinate.

Fra le sei combinazioni due a due di questi quattro triangoli non ve ne ha alcuna nella quale coincidano fra loro i due triangoli dai quali risulta.

Infatti: 1° non può coincidere $A_1\,A_2'\,A_3'$. Ne verrebbe in conseguenza

$$x_2'-x_2''=0 \quad y_2'-y_1''=0 \quad x_3'-x_3''=0 \quad y_3'-y_3''=0$$

e per le (7′) e le (7″)

$$(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)\,y_1=0 \quad (r_1^2+r_2-2r_3^3+l_1^2)\,x_1=0$$
$$(r_1^2-2r_2^2+r_3^2+l_1^2)\,y_1=0 \quad (r_1^2-2r_2^2+r_3^2+l_1^2)\,x_1=0$$

onde, perchè non può essere ad un tempo

$$x_1=0 \quad y_1=0$$

dovrebbe essere simultaneamente

$$r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2=0 \quad r_1^2=2r_2^2+r_3^2+l_1^2=0$$

e perciò $r_2^2=r_3^2$ contro le (1).

2°. Non possono coincidere i triangoli $A_1 A_2''' A_3'''$ ed $A_1 A_2^{IV} A_3^{IV}$. Si dimostra analogamente.

3°. Non può coincidere il triangolo $A_1 A_2'' A_3''$ coll'altro $A_1 A_2''' A_3'''$. Se coincidessero sarebbe simultaneamente

$$\sqrt{3}(l_2^2 - l_1^2)\, x_1 - (2r_1^2 + 2r_2^2 - 4r_3^2 + l_1^2 + l_2^2)\, y_1 = 0$$
$$\sqrt{3}\,(l_2^2 - l_1^2)\, y_1 + (2r_1^2 + 2r_2^2 - 4r_3^2 + l_1^2 + l_2^2)\, x_1 = 0$$

e siccome il determinante di questo sistema è diverso da zero si avrebbe:

$$x_1 = 0 \quad y_1 = 0$$

ciò che non è.

4°. Non può coincidere $A_1 A_2' A_3'$ con $A_1 A_2^{IV} A_3^{IV}$. Si dimostra analogamente.

5°. Non possono coincidere $A_1 A_2' A_3'$ e $A_1 A_2''' A_3'''$.

Da questa ipotesi segue

$$(l_2^2 - l_1^2)(\sqrt{3}x_1 - y_1) = 0 \quad (l_2^2 - l_1^2)(\sqrt{3}y_1 + x_1) = 0$$

onde (siccome $l_1^2 \mp l_2^2$)

$$\sqrt{3}\, x_1 - y_1 = 0 \qquad \sqrt{3}\, y_1 + x_1 = 0$$

e perciò $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, il che non è vero.

6°. Non può coincidere $A_1 A_2'' A_3''$ con $A_1 A_2^{IV} A_3^{IV}$. Si dimostra analogamente.

Dalla discussione precedente risulta che con $l_1^2 \mp l_2^2$, preso ad arbitrio un punto della α_1 esistono sempre quattro triangoli e non più di quattro che hanno il vertice A_1 in questo punto, e soddisfanno il problema senza che due tra loro possano coincidere.

Insieme ad $l^2 = l_3^2$ essendo $r_1 = r_2 + r_3$ ed $l_3^2 = r_2^2 + r_2 r_3 + r_3^2$ con metodo analogo a quello pel caso di $l_1^2 \mp l_2^2$ si ottengono due triangoli $A_1 A_2^{V} A_3^{V}$ ed $A_1 A_2^{VI} A_3^{VI}$ che soddisfacendo il problema hanno il vertice comune A_1 in un punto di coordinate x_1 ed x_1 preso ad arbitrio sulla α_1 e le coordinate degli altri due vertici A_2 ed A_3 sono date rispettivamente dalle

$$\left.\begin{aligned} x_2^{V} &= \frac{r_3}{2r_1}(x_1 + \sqrt{3}\, y_1),\; y_2^{V} = \frac{r_3}{2r_1}(y_1 - \sqrt{3}\, x_1), \\ x_3^{V} &= \frac{r_3}{2r_1}(x_1 - \sqrt{3}\, y_1),\; y_3^{V} = \frac{r_3}{2r_1}(y_1 + \sqrt{3}\, x_1) \end{aligned}\right\} \tag{7^{V}}$$

$$\left.\begin{aligned} x_2^{VI} &= \frac{r_2}{2r_1}(x_1 - \sqrt{3}\, y_1),\; y_2^{VI} = \frac{r_2}{2r_1}(y_1 + \sqrt{3}\, x_1), \\ x_3^{VI} &= \frac{r_3}{2r_1}(x_1 + \sqrt{3}\, y_1),\; y_3^{VI} = \frac{r_3}{2r_1}(y_1 - \sqrt{3}\, x_1) \end{aligned}\right\} \tag{7^{VI}}$$

formole dalle quali risulta che questi due triangoli non possono mai coincidere tra loro e perciò con $l^2 = l_3^2$, preso ad arbitrio un punto sulla α_1 esiste sempre una coppia ed una coppia soltanto di triangoli, non mai coincidenti, che soddisfano il problema ed hanno il vertice A_1 in questo punto scelto ad arbitrio sulla α_1.

3. Sciolto così il problema preliminare, ritorniamo al primitivo, e quando esso ammetta soluzioni determiniamo la posizione del vertice A_1 sulla α_1 in modo che un lato prefissato di uno dei triangoli che corrispondono a questa posizione del vertice A_1 passi pel punto M.

Nel seguito, per maggior semplicità, faremo uso del sistema d'assi ortogonali coll'origine pure in O e, quando M non coincida con O, sceglieremo per direzione positiva dell'asse delle ascisse quella del segmento che da O va ad M per cui indicata con m $(m>0)$ la distanza del punto M dall'origine, le coordinate di M saranno:

$$x=m, \quad y=0.$$

Quando invece M coincida con O per direzione positiva dell'asse delle ascisse prenderemo quella di una semiretta qualunque che parta da O ed in questo caso le coordinate di M saranno evidentemente

$$x=0, \quad y=0.$$

Con $m>0$ in questo sistema d'assi la condizione perchè il triangolo $A_1A_2A_3$ abbia

1° il lato A_1A_2 che passi per M è espressa da: $m(y_2-y_1)=y_2x_1-x_2y_1$
2° „ A_1A_3 „ $m(y_3-y_1)=y_3x_1-x_3y_1$
3° „ A_2A_3 „ $m(y_3-y_1)=y_3x_2-x_3y_2$

che per $m=0$ nel primo caso riducesi a $y_2x_1-x_2y_1=0$
„ secondo „ $y_3x_1-x_3y_1=0$
„ terzo „ $y_3x_2-x_3y_2=0$.

Quando è $m>0$ le condizioni relative al primo caso che risultano rispettivamente dalle (7′), (7″), (7‴), (7ᴵᵛ) in unione alla $x_1^2+y_1^2=r_1^2$ sono date dal sistema di relazioni

$$\left.\begin{aligned}
m[(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)x_1+\sqrt{3}(r_1^2-r_2^2+l_1^2)y_1]&=r_1^2(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)\\
m[(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)x_1-\sqrt{3}(r_1^2-r_2^2+l_1^2)y_1]&=r_1^2(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)\\
m[(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_2^2)x_1+\sqrt{3}(r_1^2-r_2^2+l_2^2)y_1]&=r_1^2(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_2^2)\\
m[(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_2^2)x_1-\sqrt{3}(r_1^2-r_2^2+l_2^2)y_1]&=r_1^2(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_2^2)
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

e quelle relative al secondo indicate con (8′) si deducono dalle (8) permutando fra loro in queste ultime r_2^2 ed r_3^2.

Nel terzo caso dalle (7′), (7″), (7‴), (7ᴵᵛ) insieme alla $x_1^2+y_1^2=r_1^2$ tenuto conto del valore l^4 dato dalla (4) si ottiene rispettivamente il seguente sistema di relazioni

$$\left.\begin{aligned}
m[(2r_1^2-r_2^2-r_3^2+2l_1^2)x_1-\sqrt{3}(r_2^2-r_3^2)y_1]&=r_1^2(l_1^2-2r_1^2+r_2^2+r_3^2)\\
m[(2r_1^2-r_2^2-r_3^2+2l_1^2)x_1+\sqrt{3}(r_2^2-r_3^2)y_1]&=r_1^2(l_1^2-2r_1^2+r_2^2+r_3^2)\\
m[(2r_1^2-r_2^2-r_3^2+2l_2^2)x_1-\sqrt{3}(r_2^2-r_3^2)y_1]&=r_1^2(l_2^2-2r_1^2+r_2^2+r_3^2)\\
m[(2r_1^2-r_2^2-r_3^2+2l_2^2)x_1+\sqrt{3}(r_2^2-r_3^2)y_1]&=r_1^2(l_2^2-2r_1^2+r_2^2+r_3^2)
\end{aligned}\right\} \quad (8'')$$

Quando il punto M coincide coll'origine invece dei tre sistemi di relazioni (8), (8'), (8") in corrispondenza dei casi 1° 2° 3° si hanno tre coppie di relazioni che si deducono dalle

$$l^2 = -r_1^2 - r_2^2 + 2r_3, \quad (9) \qquad l^2 = -r_1^2 + 2r_2^2 - r_3^2 \quad (9')$$
$$l^2 = 2r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 \quad (9'')$$

sostituendo successivamente in esse l_1^2 ed l_2^2 al luogo di l^2.

4°. Consideriamo dapprima il caso di $m = 0$ caso che non può aver luogo se una almeno delle (9), (9'), (9") non è soddisfatta. La (9) non può mai aver luogo perchè per le (1) il suo secondo membro è sempre negativo, quindi non esistono triangoli, pel resto soddisfacenti il problema col lato $A_1 A_2$ che passi pel centro comune delle $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$.

Dall'uguagliare il valore di l^2 dato dalla (9') con quello della (5) deducesi $\sqrt{3}(r_1^2 - r_2^2 + r_3^2) \pm S = 0$ ciò che per le (1) prendendo il segno superiore è impossibile per cui se esistono triangoli pel resto soddisfacenti il problema col lato $A_1 A_3$ che passi per l'origine, nella (9') dovrà essere $l^2 = l_2^2$ e quindi $\sqrt{3}(r_1^2 - r_2^2 + r_3^2) - S = 0$ relazione che con un calcolo facile si trasforma nella

$$r_2^4 - 2(r_1^2 + r_3^2)r_2^2 + r_1^4 + r_3^4 + r_1^2 r_3^2 = 0$$

e perciò sarà

$$r_2^2 = r_1^2 \pm r_1 r_3 + r_3^2$$

e fra queste due espressioni di r_2^2 è solamente ammissibile la

$$r_2^2 = r_1^2 - r_1 r_3 + r_3^2$$

perchè dall'$r_2^2 = r_1^2 + r_1 r_3 + r_3^2$ risulta contro le (1) $r_2^2 > r_1^2$. Quando è $r_2^2 = r_1^2 - r_1 r_3 + r_3^2$ l'espressione di $l^2 = l_2$ data dalla (9') diviene $l^2 = (r_1 - r_3)^2$ che coincide con quella di l_2^2 del n. 1.

Verificata la (9') e da essa fra x_1 e y_1 non risultando relazione alcuna oltre la $x_1^2 + y_1^2 = r_1^2$, si deduce l'esistenza di una infinità di triangoli che soddisfacendo nel resto il problema hanno il lato $A_1 A_3$ che passa per l'origine, poichè per ciascun punto della (α_1) esistono triangoli che hanno in esso il vertice A_1 e le coordinate degli altri due vertici sono date dalle (7''') e dalle (7^{v}) e tutti questi hanno il lato $A_1 A_3$ che passa per l'origine. La lunghezza comune dei lati di ciascuno di essi è $l_2 = r_1 - r_3$. Dall'eguagliare i valori di l^2 che risultano rispettivamente dalla (9") e dalla (5) si deduce in modo analogo al precedente

$$r_1^2 = r_2^2 \pm r_2 r_3 + r_3^2 = r_2^2 \pm r_3(r_2 \pm r_3)$$

e fra questi due valori di r_1^2 è solamente ammissibile

$$r_1^2 = r_2^2 + r_2 r_3 + r_3^2$$

poichè da $r_1^2 = r_2^2 - r_2 r_3 + r_3^2$ per le (1) ed in opposizione alle stesse dovrebbe essere $r_1 < r_2$. Dalla (9″) per $r_1^2 = r_2^2 + r_2 r_3 + r_3^2$ si deduce $l^2 = (r_2 + r_3)^2$.

Ma i valori che, con $r_1^2 = r_2^2 + r_2 r_3 + r_3^2$ si ottengono dalle espressioni di l^2 date dalla (5) prendendo rispettivamente in essa il segno superiore e l'inferiore sono $l^2 = (r_2 + r_3)^2$ ed $l^2 = (r_2 - r_3)^2$ e perciò nella (9″) devesi prendere $l^2 = l_1^2$ e quindi analogamente a quanto si è trovato pel caso della (9′) si hanno triangoli che soddisfanno il problema e col lato $A_2 A_3$ che passa per l'origine se fra i raggi delle α_1 α_2 ed α_3 esiste la relazione $r_1^2 = r_2^2 + r_2 r_3 + r_3^2$. Dal verificarsi di questa condizione si deduce come poco fa, pel caso della (9″) l'esistenza di un'infinità di triangoli che, verificando nel resto il problema, hanno il lato $A_2 A_3$ che passa per l'origine e tutti coi lati di lunghezza uguale ad $r_2 + r_3$.

Osserviamo ancora che non si hanno triangoli quali sono richiesti dal problema e con un loro lato che passi per l'origine quando sia $l^2 = l_2^2$, poichè, come abbiamo visto, non può mai essere ad un tempo $m = 0$ ed $r_1 = r_2 + r_3$.

4. Dopo aver discussa l'ipotesi di $m = 0$ passiamo all'altra di $m > 0$, ed in corrispondenza dei quattro triangoli

$$A_1 A_2' A_3', \qquad A_1 A_2'' A_3'', \qquad A_1 A_2''' A_3''', \qquad A_1 A_2^{IV} A_3^{IV}$$

e per ciascuno di essi consideriamo successivamente i tre casi indicati nel n. precedente.

1°. Il lato $A_1 A_2'$ del triangolo $A_1 A_2' A_3'$ sia quello che deve passare per il punto M, condizione espressa dalla prima delle (8), onde perchè ciò avvenga, dato m, dovremo determinare le coordinate del vertice A_1 di questo triangolo in modo da soddisfare questa equazione insieme alla $x_1^2 + y_1^2 = r_1^2$ ed eliminando y_1 fra esse se ne ottiene una in x, dalla quale risulta

$$x_1 = \frac{\begin{array}{l} r_1^2(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)\pm \\ \pm\sqrt{3}\,r_1(r_1^2-r_2^2+l_1^2)\sqrt{m^2[(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)^2+3(r_1^2-r_2^2+l_1^2)^2]-r_1^2(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)^2}\end{array}}{m[(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)^2+3(r_1^2-r_2^2+l_1^2)^2]}$$

la quale per l'identità

$$(r_1^2 + r_2^2 - 2r_3^2 + l^2)^2 + 3\,(r_1^2 - r_2^2 + l^2)^2 = 12 r_1^2\, l^2$$

che risulta dalla (4) e vale quindi tanto per $l^2 = l_1^2$ quanto per $l^2 = l_2^2$ diviene

$$x_1 = \frac{1}{12 l_1^2 m}\Big[(r_1^2 + r_2^2 - 2r_3^2 + l_1^2) \pm \\ \pm \sqrt{3}\,(r_1^2 - r_2^2 + l_1^2)\sqrt{12\, l_1^2\, m^2 - (r_1^2 + r_2^2 - 2r_3^2 + l_1^2)^2}\Big]$$

e tenuto sempre conto dell'identità precedente, portata questa espressione al luogo di x_1 nella prima delle (8) per y_1 si ottiene un'altra coppia di valori per cui nel caso attuale le coordinate x_1, y_1 del vertice A_1 sono date dalle

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{12l_1^2 m}\Big[(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)^2 \pm \\
&\qquad \pm \sqrt{3}(r_1^2-r_2^2 l+l_1^2)\sqrt{12l_1^2m^2-(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)^2}\,\Big] \\
y_1 &= \frac{1}{12l_1^2 m}\Big[\sqrt{3}(r_1^2-r_2^2+l_1^2)(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2) \pm \\
&\qquad \pm (r_2^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)\sqrt{12l_1^2m^2-(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)^2}\,\Big]
\end{aligned}\right\}(10')$$

Nel modo istesso, per le coordinate del vertice A_1 nel triangolo $A_1\,A_2''\,A_3''$ quando il suo lato $A_1\,A_2''$ debba passare per M si trovano le espressioni

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{12l_1^2 m}\Big[(l_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)^2 \pm \\
&\qquad \pm \sqrt{3}(r_1^2-r_2^2+l_1^2)\sqrt{12l_1^2m^2-(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)^2}\,\Big] \\
y_1 &= \frac{1}{12l_1^2 m}\Big[-\sqrt{3}(r_1^2 r_2^2+l_1^2)(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2) \pm \\
&\qquad \pm (r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)\sqrt{12l_1^2m^2-(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)^2}\,\Big]
\end{aligned}\right\}(10'')$$

Analogamente si ottengono per le coordinate del vertice A_1 dei due triangoli $A_1\,A_2'''\,A_3'''$ ed $A_1\,A_2^{\text{IV}}\,A_3^{\text{IV}}$ altre due coppie di formole che indicate con $(10''')$ e (10^{IV}) si deducono rispettivamente dalle $(10')$ e $(10'')$ ponendo in esse l_2^2 al posto di l_1^2. Se considerati i triangoli $A_1\,A_2'\,A_3'$, $A_1\,A_2''\,A_3''$, $A_1\,A_2'''\,A_3'''$, $A_1\,A_2^{\text{IV}}\,A_3^{\text{IV}}$ i rispettivi lati $A_1\,A_2'$ $A_1\,A_2''$, $A_1\,A_2'''$, $A_1\,A_2^{\text{IV}}$ sono quelli che devono passare per M perchè sieno indipendenti da m le espressioni ottenute in corrispondenza a questi casi per le coordinate x_1, y_1 del loro vertice A_1 è condizione necessaria [1] quando debba aver luogo la $(10')$ ovvero la $(10'')$ la

$$r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2=0$$

e quando debba aver luogo la $(10''')$ ovvero la (10^{IV}) invece la

$$r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_2^2=0$$

relazioni come abbiamo visto nel n. precedente entrambe inammissibili.

2°. Se nei triangoli $A_1\,A_2'\,A_3'$, $A_1\,A_2''\,A_3''$, $A_1\,A_2'''\,A_3'''$, $A_1\,A_2^{\text{IV}}\,A_3^{\text{IV}}$ sono rispettivamente i lati $A_1\,A_3'$, $A_1\,A_3''$, $A_1\,A_3'''$, $A_1\,A_3^{\text{IV}}$ che devono passare per M in modo analogo a quello tenuto pel primo caso per le coordinate $x_1\,y_1$ dei vertici A_1 di questi triangoli si ottengono quattro coppie di espressioni che indicate con (11), $(11'')$, $(11''')$, (11^{IV}) si deducono da quelle che corrispondono ad esse nel primo caso permutando r_2^2 con r_3^2.

In questo secondo caso è condizione necessaria perchè le coordinate x_1, y_1 sieno indipendenti da M quando provengono dalle $(11''')$ e

[1] E quando provengono dalle $(11')$ e dalle $(11'')$ la $l_1^2=-r_1^2+r_1\,r_2-r_2^2$.

dalle (11^{IV}) la $l_2^2 = -r_3^2 + r_1 r_2 - r_2^2$. (1) Nel n. precedente abbiamo visto che la prima di esse non può mai aver luogo, mentre la seconda è verificata quando si abbia $r_2^2 = r_1^2 - r_1 r_3 + r_3^2$ e con ciò $l_2 = r_1 - r_3$ ed allora dalle ($11'''$) e (11^{IV}) risultano i due sistemi $x_1 = r$, $y_1 = 0$ ed $x_1 = -r_1$ $y_1 = 0$ ai quali per le ($7'''$) e (7^{IV}) corrispondono i sistemi $x_3 = x_2$ $y_1 = 0$ e $x_3 = +r_3$ $y_3 = 0$ ed essendo i lati $A_1 A_3'''$ ed $A_1 A_3^{\text{IV}}$ posti sull'asse delle ascisse ciascuno di questi lati passa per ognuno dei punti di suddetto asse.

3° Se nei triangoli $A_1 A_2' A_3'$, $A_1 A_2'' A_3''$, $A_1 A_2''' A_3'''$, $A_1 A_2^{\text{IV}} A_3^{\text{IV}}$ sono rispettivamente i lati $A_2' A'$, $A_2'' A''$, $A_2''' A'''$, $A_2^{\text{IV}} A^{\text{IV}}$ quelli che devono passare per M per l'identità

$$(2r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 + 2l^2)^2 + 3(r_1^2 - r_3^2)^2 = 12\, l^2 r_1^2$$

che risulta dalla (4) e che così ha luogo tanto per $l^2 = l_1^2$ quanto per $l^2 = l_2^2$ in modo analogo a quello seguìto nel trattare il secondo caso, per le coordinate $x_1\, y_1$ dei vertici A_1 si ottengono in primo luogo le due coppie di espressioni

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{12 l_1^2 m}\Big[(l_1^2 - 2r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)(2r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 + 2l_1^2) + \\ &\qquad + \sqrt{3}(r_2^2 - r_3^2)\sqrt{12 l_1^2 m^2 - (l_1^2 - 2r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^2}\Big] \\ y_1 &= \frac{1}{12 l_1^2 m}\Big[-\sqrt{3}(l_1^2 - 2r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)(2r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 + 2l_1^2) + \\ &\qquad + (2r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 + 2l_1^2)\sqrt{12 l_1^2 m^2 - (l^2 - 2r_1^2 + r_3^2 + r_3^2)^2}\Big] \end{aligned}\right\} \quad (12')$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \\ y_1 &= \frac{1}{12 l_1^2 m}\Big[\sqrt{3}(l_1^2 - 2r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)(2r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 - r l_1^2) - \\ &\qquad - (2r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 + 2l_1^2)\sqrt{12 l_1^2 m^2 - (l_1^2 - 2r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^2}\Big] \end{aligned}\right\} \quad (12'')$$

e l'altre due poi che indicate con ($12'''$) e (13^{IV}) si deducono da queste cangiando in esse l_1^2 con l_2^2.

In questo caso perchè le coordinate $x_1\, y_1$ sieno indipendenti da m in corrispondenza delle ($12'$) e delle ($12''$) devesi avere $l_1^2 = 2r_1^2 - r_2^2 - r_3^2$ ed in corrispondenza delle ($12'''$) e delle (12^{IV}) $l_2^2 = 2r_1^2 - r_2^2 - r_3^2$ e come

(1) Un modo spedito per giustificare questa osservazione è il seguente in cui non si tien conto che delle coordinate $x_1\, y_1$ date dalle ($10'$) e ($11''$) gli altri casi potendo essere trattati nello stesso modo.

Poichè $l_1^2 > 0$ ed m è reale, e per ipotesi $r_1^2 + r_2^2 - 2r_3^2 + l_1^2 > 0$, se si prende

$$0 < m^2 < \frac{(r_1^2 + r_2^2 - 2r_3^2 + l_1^2)^2}{12\, l_1^2}$$

e i valori di y_1 (dati dalle ($10'$) e ($10''$) sono complessi, mentre sono reali per

$$m^2 > \frac{(r_1^2 + r_2^2 - 2r_3 + l_1^2)^2}{12\, l_1^2}$$

e quindi y_1 non potrà essere indipendente da m se non quando si abbia: $r_1^2 + r_2^2 - 2r_3^2 + l_1^2 = 0$. E quando, supposto possibile, fosse verificata questa condizione si scorge che tanto x_1 quanto y_1 dati dalle ($10'$) e ($10''$) sono indipendenti da m.

abbiamo visto nel n. precedente non può mai aver luogo la seconda di queste relazioni, mentre la prima è verificata quando sia

$$r_1^2 = r_2^2 + r_2 r_3 + r_3^2$$

da dove segue $l_1^2 = r_2 + r_3$ e con ciò dalle (12') e (12'') si ottengono per x_1 ed y_1 le due coppie di valori $x_1 = \pm \frac{r_2 - r_3}{2}$, $y_1 = \pm \sqrt{3}\,\frac{r_1 + r_3}{2}$ ed $x_1 = \pm \frac{r_2 - r_3}{2}$. $y_1 = \pm \sqrt{3}\,\frac{r_2 + r_3}{2}$ ed a ciascuna di esse corrisponde un triangolo col lato $A_2 A_3$ situato sull'asse delle ascisse ed in questo caso si hanno conseguenze analoghe a quelle pel caso precedente.

In ciascuno di questi tre casi per le (7') (7'') (7''') (7^{IV}) da valori reali di x_1 y_1 risultano anche reali, nei triangoli così dedotti, le coordinate degli altri due vertici.

5. Perchè discusse le ipotesi opposte, nel seguito supporremo ad un tempo

$$l^2 - 2r_3^2 + r_1^2 + r_2^2 \pm 0 \qquad \text{ed} \qquad l_1^2 - 2r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \mp 0$$

e per ultimare la soluzione del problema che ci siamo proposti la completeremo separatamente per ciascuno dei tre casi indicati nel n. 4 ed abbiamo visto che per ciascuno di essi, onde sieno reali le coordinate dei tre vertici A_1, A_2, A_3, è necessario e sufficiente che x_1 ed y_1 siano reali e perciò deve aversi sempre $m > 0$. Indicati con μ_1, μ_2, μ_3 i valori minimi di m pei quali x_1 ed y_1 rispettivamente nei casi 1° 2° e 3° risultano reali cercheremo poi per ciascuno di essi in corrispondenza dei valori di m, $m \geqslant \mu_1$ $m \geqslant \mu_2$ $m \geqslant \mu_3$ il numero dei triangoli che soddisfanno il problema.

1°. In questo caso le coordinate x_1 y_1 del vertice A_1 dei triangoli ad esso corrispondenti sono date da una delle coppie di valori (10'), (10''), (10'''), (10^{IV}) e perchè almeno una di queste coppie sia reale è necessario e sufficiente che sia verificata una delle condizioni

$$m^2 \geqslant \frac{1}{12 l_1}(l_1^2 + r_1^2 + r_2^2 - 2r_3^2)^2 \quad m^2 \geqslant \frac{1}{12 l_1^2}(l_2^2 + r_{12} + r_2^2 - 2r_3^2)^2 \quad .$$

ed il valore di μ_1^2 è il più piccolo dei valori di m^2 che risulta da queste due relazioni prendendo in esse il segno inferiore e se si tien conto della (4) si vedrà che μ^2 sarà il più piccolo dei due valori di m^2 dati rispettivamente dalle due eguaglianze

$$m^2 = \frac{1}{4}\left[r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + \frac{(r_1^2 - r_3^2)(r_2^2 - r_3^2)}{l_1^2}\right],$$
$$m^2 = \frac{1}{4}\left[r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + \frac{(r_1^2 - r_3^2)(r_2^2 - r_3^2)}{l_2^2}\right]$$

e di questi due valori il più piccolo proviene dalla prima di esse sarà quindi:

$$\mu_1^2 = \frac{1}{4}\left[r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + \frac{(r_1^2 - r_3^2)(r_2^2 - r_3^2)}{l_1^2}\right] \tag{13}$$

e quando sia $m^2=\mu_1^2$ dalla (10′) si deduce per x_1 ed y_1 un'unica coppia di valori; e dalla (10″) se ne deduce un'altra, e la prima coppia in unione alla (7′) da un triangolo e dalla seconda in unione alle (7″) se ne ottiene un altro e così si hanno in questo caso due triangoli che soddisfanno il problema. Quando sia

$$\frac{1}{4}\left[r_1^2+r_2^2-r_3^2+\frac{(r_1^2-r_3^2)(r_2^2-r_3^2)}{l_1^2}\right]<m^2<\frac{1}{4}\left[r_1^2+r_2^2-r_3^2+\frac{(r_1^2-r_3^2)(r_2^2-r_3^2)}{l_2^2}\right]$$

con un ragionamento analogo al precedente si vede che esistono quattro di tali triangoli, e quando sia

$$m^2=\frac{1}{4}\left[r_1^2+r_2^2-r_3^2+\frac{(r_1^2-r_3^2)(r_2^2-r_3^2)}{l_2^2}\right]$$

se ne hanno sei e per

$$m^2>\frac{1}{4}\left[r_1^2+r_2^2-r_3^2+\frac{(r_1^2-r_3^2)(r_2^2-r_3^2)}{l_2^2}\right]$$

se ne hanno otto.

Da ciò che precede risulta sciolto il problema nel caso che il lato $A_1\,A_2$ sia quello che passa per M.

2°. In questo caso le coordinate x_1, y_1 del vertice A_1 dei triangoli ad esso corrispondenti sono dati da una delle (11′), (11″), (11‴), (11$^{\text{IV}}$) e perchè almeno per una di queste x_1 ed y_1 siano reali è necessario e sufficiente che sia verificata una delle due relazioni

$$m^2\geqslant\frac{1}{4}\left[r_1^2-r_2^2+r_3^2-\frac{(r_1^2-r_3^2)(r_1^2-r_3^2)}{l_1^2}\right],$$

$$m^2\geqslant\frac{1}{4}\left[r_1^2-r_2^2+r_3^2-\frac{(r_1^2-r_2^2)(r_2^2-r_3^2)}{l_3^2}\right]$$

ed i secondi membri di esse, per la loro origine sono entrambi positivi ed avendosi pure

$$r_1^2-r_2^2+r_3^2>0 \qquad \text{ed} \qquad (r_1^2-r_2^2)(r_2^2-r_3^2)>0$$

risulta

$$\mu_2^2=\frac{1}{4}\left[r_1^2-r_2^2+r_3^2-\frac{(r_1^2-r_2^2)(r_2^2-r_3^2)}{l_3^2}\right] \tag{14}$$

e così come precedentemente se $m^2<\mu_2^2$ non esistono triangoli che soddisfacciano il problema, se è $m_2=\mu_2^2$ ne esistono due e per m^2 compreso fra μ_2^2 ed $\frac{1}{4}\left[r_1^2-r_2^2+r_3^2-\frac{(r_1^2-r_2^2)(r_2^2-r_3^2)}{l_1^2}\right]$ ne esistono quattro, per $m^2 = \frac{1}{4}\left[r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 - \frac{(r_1^2 - r_2^2)(r_2^2 - r_3^2)}{l_1^2}\right]$ ne esistono sei e per $m > \frac{1}{4}\left[r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 - \frac{(r_1^2 - r_2^2)(r_2^2 - r_3^2)}{l_1^2}\right]$ ne esistono otto e così anche in questo caso è sciolto il problema.

3°. In questo caso le coordinate $x_1\ y_1$ del vertice A_1 dei triangoli ad esso corrispondenti sono date da una delle (12′), (12″), (12‴), (12$^{\text{IV}}$) e perchè almeno una di queste coppie sia reale è necessario e sufficiente che sia verificata una delle due relazioni

$$m^2 \geqslant \frac{1}{4}\left[-r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \frac{(r_1^2 - r_2^2)(r_1^2 - r_3^2)}{l_1^2}\right]$$

$$m^2 \geqslant \frac{1}{4}\left[-r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \frac{(r_1^2 - r_2^2)(r_1^2 - r_3^2)}{l_2^2}\right]$$

e poichè è $(r_1^2 - r_2^2)(r_1^2 - r_1^2) > 0$ e, per la loro origine, sono entrambi positivi i secondi membri delle stesse, risulta in modo analogo ai precedenti che il più piccolo dei due è il primo e quindi

$$\mu_3^2 = \frac{1}{4}\left[-r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \frac{(r_1^2 - r_2^2)(r_1^2 - r_2^2)}{l_1^2}\right] \tag{15}$$

e che perciò per $m^2 < \mu_3^2$ non esistono triangoli che soddisfacciano il problema, per $m^2 = \mu_3^2$ ne esistono due per

$$\mu_3^2 < m^2 < -r_1^2 + r_3^2 + \frac{(r_1^2 - r_2^2)(r_1^2 - r_3^2)}{l_2^2}$$

ne esistono quattro e ne esistono sei od otto secondo che m^2 è uguale o superiore ad $\frac{1}{4}\left[-r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \frac{(r_1^2 - r_2^2)(r_1^2 - r_3^2)}{l_2^2}\right]$.

9. Dai risultati ottenuti si possono immediatamente dedurre in funzione esplicita le coordinate dei vertici dei triangoli che soddisfanno il problema in funzione di m e dei raggi delle tre circonferenze date e determinare così la posizione effettiva di ciascuno di essi. Mi limiterò qui però supposto

$$m^2 > \frac{1}{12 l_1^2}(r_1^2 + r_2^2 - 2r_3^2 + l_1^2)^2$$

ai casi in cui i lati $A_1 A_2'$, $A_1 A_2''$, $A_1 A_2'''$, $A_1 A^{\text{IV}}$ dei triangoli

$$A_1 A_2' A_3', \quad A_1 A_2'' A_3'', \quad A_1 A_2''' A_3''', \quad A_1 A_2^{\text{IV}} A_3^{\text{IV}}$$

sieno rispettivamente quelli che devono passare per M. In corrispondenza di questa ipotesi le coordinate $x_1\ y_1$ sono date dalle (10′), (10″), (10‴), (10$^{\text{IV}}$) e da queste coordinate si ottengono le espressioni di quelle degli altri due vertici portando successivamente questi valori di $x_1\ y_1$

nelle (7′) (7″) (7‴) (7$^{\text{IV}}$) e così per quattro di questi triangoli le coordinate di tali vertici sono date dalle formole seguenti

$$x_2'=\frac{1}{12l_1^2m}\Big[(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)^2\pm$$
$$\pm\sqrt{3}\,(r_1^2-r_2^2-l_1^2)\sqrt{12l_1^2m^2-(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)^2}\Big]$$

$$y_2'=\frac{1}{12l_1^2m}\Big[(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)\sqrt{3}\,(r_1^2-r_2^2-l_1^2)\pm$$
$$\pm\, r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)\sqrt{12l_1^2m^2-(r_1^2+r_2^2-2a_3^2+l_1^2)^2}\Big]$$

$$x_3'=\frac{1}{12l_1^2m}\Big[(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)(r_1^2+r_2^2-2r_3^2-2l_1^2)\pm$$
$$\pm\sqrt{3}\,(r_1^2-r_2^2)\sqrt{12l_1^2m^2-(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)^2}\Big]$$

$$y_3'=\frac{1}{12l_1^2m}\Big[(r_1^2-r_2^2)\sqrt{3}(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)\mp$$
$$\mp\,(r_1^2+r_2^2-2r_3^2-2l_1^2)\sqrt{12l_1^2m^2-(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)^2}\Big]$$

$$x_2''=\frac{1}{12l_1^2m}\Big[(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)^2\pm$$
$$\pm\sqrt{3}(r_1^2-r_2^2-l_1^2)\sqrt{12l_1^2m^2-(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)^2}\Big]$$

$$y_2''=\frac{1}{12l_1^2m}\Big[\sqrt{3}(r_1^2-r_2^2-l_1^2)(r_1^2+r_2^2-r_3^2+l_1^2)\mp$$
$$\mp\,(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)\sqrt{12l_1^2m^2-(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)^2}\Big]$$

$$y_3''=\frac{1}{12l_1^2m}\Big[(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)(r_1^2+r_2^2-2r_3^2-2l_1^2)\pm$$
$$\pm\sqrt{3}(r_1^2-r_2)\sqrt{12l_6^2m^2-(r_1^2+p_2^2-2r_3^2+l_1^2)^2}\Big]$$

$$y_3''=\frac{1}{12l_1^2m}\Big[\sqrt{3}(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)(r_1^2-r_2^2)\mp$$
$$\mp\,(r_1^2+r_2^2-2r_3^2-2l_1^2)\sqrt{12l_1^2m^2-(r_1^2+r_2^2-2r_3^2+l_1^2)^2}\Big]$$

e cangiando in queste formole l_1^2 in l_2^2 si deducono quelle relative ai vertici degli altri quattro triangoli.

7. Per completare la soluzione del problema, rimarrebbe la ricerca del numero e della posizione dei triangoli che lo soddisfanno nel caso di $l^2=l_2^2$, ma non credo utile esporla qui dettagliatamente perchè ad essa si risponde con metodo, nella sostanza identico al precedente benchè più semplice nei dettagli; rimarcherò solamente che il numero massimo dei triangoli che lo soddisfanno, invece di essere otto, come quando è $l_1^2\neq l_2^2$, è soltanto quattro.

C. M. Piuma.

FUNZIONI SFERICHE E SISTEMI ORTOGONALI

La lettura della nota del sig. E. Izzo sulla teoria delle funzioni sferiche (*Per. di Mat.* XXV, fasc. VI) mi incoraggia a pubblicare le seguenti osservazioni sul medesimo argomento, nelle quali vorrei provare che nell'intento di semplificare ancor più l'esposizione della suddetta teoria si potrebbe con vantaggio partire da una diversa definizione delle funzioni sferiche, che si ricollega ad un ordine di idee che ha dimostrato la sua importanza in molte recenti ricerche. Con questo metodo i punti essenziali della teoria vengono stabiliti assai rapidamente e non senza una certa eleganza.

1. Ricordo che due funzioni $f(x)$, $g(x)$ integrabili in un intervallo (α, β) si dicono *ortogonali* in questo stesso intervallo quando si verifichi l'uguaglianza:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, g(x)\, dx = 0.$$

Un sistema numerabile di funzioni integrabili in (α, β)

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots\ldots\ldots\ f_n(x),\ \ldots\ldots$$

si dirà ortogonale nello stesso intervallo quando siano ortogonali due funzioni qualunque distinte del sistema, cioè quando sia:

$$\int_\alpha^\beta f_r(x)\, f_s(x)\, dx = 0 \qquad \text{per} \qquad r \neq s.$$

Per $r = s$ si ottiene l'integrale:

$$\int_\alpha^\beta f_r^2(x)\, dx,$$

che non può essere nullo che se $f_r(x)$ si annulla infinite volte in qualunque intervallo compreso in (α, β), caso che non ha per noi nessun interesse e che perciò escludiamo.

È chiaro che un sistema ortogonale conserva la sua proprietà moltiplicandone gli elementi per costanti arbitrarie. Quanto alla possibilità di costruire dei sistemi ortogonali, essa sarà dimostrata nel seguito in un caso particolare; per il caso generale rimando alla dissertazione di laurea del sig. E. Schmidt, [1] dove si troveranno altre interessanti proprietà.

2. Vogliamo ora studiare un sistema Σ di funzioni:

$$X_0,\ X_1,\ \ldots\ldots\ X_n,\ \ldots\ldots$$

ortogonale nell'intervallo $(-1, +1)$ e dotato delle seguenti proprietà:

[1] *Entwickelung willkührlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebner.* Math. Ann. Bd. 63 (1907).

a) X_n sia una funzione razionale intera di x, di grado $\leqslant n$, non identicamente nulla.

b) Si abbia sempre $X_n(1) = 1$.

Ammettendo provvisoriamente l'esistenza di un tal sistema Σ, e prescindendo per ora dalla condizione *b*) deduciamo subito alcune sue particolarità.

3. Le funzioni $X_0, X_1, \ldots. X_n$ sono linearmente indipendenti; infatti se si verificasse un'equazione della forma:

$$c_0X_0 + c_1X_1 + \ldots\ldots + c_nX_n = 0 \tag{1}$$

con $c_r \neq 0$ ne verrebbe:

$$c_0 \int_{-1}^{+1} X_0X_r\, dx + c_1 \int_{-1}^{+1} X_1X_r\, dx + \ldots\ldots + c_n \int_{-1}^{+1} X_nX_r\, dx = 0,$$

cioè:

$$c_r \int_{-1}^{+1} X_r^2\, dx = 0,$$

che è evidentemente assurda.

Ciò porta che X_n è precisamente di grado n: giacchè altrimenti le $n+1$ funzioni considerate, di grado $\leqslant n-1$ dovrebbero essere legate linearmente.

4. Se si considera però un'altra funzione $F(x)$ razionale intera di grado $\leqslant n$, essa e le $X_0, X_1, \ldots. X_n$ saranno linearmente dipendenti, e si avrà quindi:

$$F(x) = \alpha_0X_0 + \alpha_1X_1 + \ldots. + \alpha_nX_n.$$

Se ne deduce subito:

$$f_r = \int_{-1}^{+1} FX_r\, dx = 0 \qquad \text{per } r > n \tag{2}$$

$$f_r = \int_{-1}^{+1} FX_r\, dx = \alpha_r \int_{-1}^{+1} X_r^2\, dx \qquad \text{per} \quad r \leqslant n \tag{3}$$

e posto quindi:

$$\gamma_r = \int_{-1}^{+1} X_r^2\, dx$$

si trova la formola fondamentale:

$$F(x) = \sum_0^n \frac{f_r}{\gamma_r} X_r, \tag{4}$$

dove la sommatoria, in virtù della (2), può anche estendersi fino all'infinito; con ciò la formula risulta applicabile ad ogni funzione razionale intera.

5. Sia $l_{n+1}\, x^{n+1}$ il termine di grado più alto in X_{n+1}, e si ponga $F(x) = X_{n+1} - l_{n+1}\, x^{n+1}$; sarà per la (4):

$$X_{n+1} = l_{n+1} \left\{ x^{n+1} - \sum_0^n \frac{X_r}{\gamma_r} \int_{-1}^{+1} X_r\, x^{n+1}\, dx \right\} \tag{5}$$

avendosi in questo caso:

$$f_r = \int_{-1}^{+1} X_{n+1} X_r \, dx - l_{n+1} \int_{-1}^{+1} X_r x^{n+1} dx = -l_{n+1} \int_{-1}^{+1} X_r x^{n+1} \, dx.$$

Viceversa si verifica subito che la funzione X_{n+1} definita dalla (5) soddisfa per ogni $r \leq n$ alle uguaglianze:

$$\int_{-1}^{+1} X_{n+1} X_r \, dx = 0$$

e quindi aggiunta al sistema $X_0, X_1, \ldots . X_n$, supposto ortogonale, lo mantiene ancora ortogonale. In altre parole la (5) dimostra la possibilità di costruire un sistema ortogonale soddisfacente alle condizioni a).

Il coefficiente l_{n-1} resta naturalmente indeterminato, se non si assoggettano le X_n ad una condizione supplementare, quale la b).

La (5) non è però molto opportuna pel calcolo effettivo delle X_n.

6. Si può provare per induzione che X_n è funzione pari o dispari secondochè n è pari o dispari. Infatti si ha subito $X_0 = l_0$, $X_1 = l_1 x$, $X_2 = l_2 (x^2 - \frac{1}{2})$; poi supposto verificato l'asserto per $X_0, X_1 \ldots . X_n$, la (5) lo prova per X_{n+1}, poichè i termini delle sommatorie per cui $r \equiv n \pmod{2}$ contengono il coefficiente $\int_{-1}^{+1} X_r x^{n+1} dx$ che è nullo come integrale di una funzione dispari tra limiti opposti; dimodochè X_{n+1} si riduce ad una somma di termini di parità opposta a quelle di n, cioè uguale a quella dell'indice $n+1$.

7. Poniamo ora nella (4) $F(x) = X'_{n+1}$ che è evidentemente di grado n. Si ha:

$$f_r = \int_{-1}^{+1} F X_r \, dx = \int_{-1}^{+1} X'_{n+1} X_r \, dx = [X_{n+1} X_r]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} X'_r X_{n+1} \, dx$$

integrando per parti; il secondo termine è nullo per la (2); il primo è pure nullo se $r \equiv n+1 \pmod{2}$, mentre nel caso opposto è uguale a $2 X_r(1) \, X_{n+1}(1)$.

Si vede di qui che non può essere, per un valore di n, $X_{n+1}(1) = 0$; altrimenti sarebbe sempre $f_r = 0$ e X'_{n+1} identicamente nullo; quindi X_{n+1} costante, ed anzi ancora identicamente nullo. Si può dunque supporre di scegliere l_{n+1} in modo da far risultare $X_{n+1}(1) = 1$, cioè da soddisfare alla condizione b) per ogni valore di n.

Ciò posto si avrà:

$$X'_{n+1} = 2\left(\frac{X_n}{\gamma_n} + \frac{X_{n-2}}{\gamma_{n-2}} + \ldots\ldots\right) \qquad (6)$$

8. Poniamo ora $F(x) = x X_n$; si ha:

$$f_r = \int_{-1}^{+1} x X_r X_n \, dx.$$

Scrivendo la funzione sotto il segno una volta $x X_r . X_n$ ed una $x X_n . X_r$ si vede per la (2) che l'integrale è nullo per ogni $r < n - 1$

e per ogni $r > n+1$; per $r = n$ l'integrale è pure nullo perchè xX_n^2 è dispari; si ottiene dunque una relazione ricorrente fra tre funzioni consecutive:

$$xX_n = \frac{f_{n-1}}{\gamma_{n-1}} X_{n-1} + \frac{f_{n+1}}{\gamma_{n+1}} X_{n+1}. \tag{7}$$

Per calcolare i coefficienti osserviamo che si ha in generale $X_r = l_r x^r + H_{r-2}$, dove le H hanno al massimo il grado indicato dall'indice, e che quindi:

$$f_{n-1} = \int_{-1}^{+1} xX_{n-1}X_n\,dx = \int_{-1}^{+1} xX_n\,(l_{n-1}\,x^{n-1} + H_{n-3})\,dx =$$
$$= l_{n-1}\int_{-1}^{+1} x^n X_n\,dx + \int_{-1}^{+1} xH_{n-3}X_n\,dx = l_{n-1}\,I_n$$

osservando che il secondo termine è nullo per la (2), e ponendo:

$$I_r = \int_{-1}^{+1} x^r X_r\,dx\,.$$

Analogamente:

$$f_{n+1} = \int_{-1}^{+1} xX_{n+1}X_n\,dx = \int_{-1}^{+1} xX_{n+1}\,(l_n x^n + H_{n-2})\,dx = l_n\,I_{n+1},$$

e quindi la (7) prende la forma:

$$xX_n = \frac{l_{n-1}\,I_n}{\gamma_{n-1}} X_{n-1} + \frac{l_n\,I_{n+1}}{\gamma_{n+1}} X_{n+1}. \tag{8}$$

Uguagliando i coefficienti dei termini di grado massimo dei due membri si ottiene:

$$l_n = \frac{l_n\,I_{n+1}}{\gamma_{n+1}}\,l_{n+1},$$

da cui in generale:

$$I_r = \frac{\gamma_r}{l_r}.$$

Mediante questa la (8) prende la forma:

$$xX_n = \frac{l_{n-1}}{l_n}\,\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}\,X_{n-1} + \frac{l_n}{l_{n+1}}\,X_{n+1}. \tag{9}$$

Eseguendo lo stesso confronto sui due membri della (6), si ha poi:

$$\frac{l_r}{l_{r+1}} = \frac{r+1}{2}\,\gamma_r,$$

che permette di trasformare la (9) nell'altra:

$$xX_n = \frac{n}{2}\,\gamma_n\,X_{n-1} + \frac{n+1}{2}\,\gamma_n\,X_{n+1}. \tag{10}$$

Resta da calcolare γ_n, ciò che può farsi ponendo nella (10) $x = 1$; si ottiene:

$$\gamma_n = \frac{2}{2n+1}$$

e quindi:

$$(2n+1)\,xX_n = nX_{n-1} + (n+1)\,X_{n+1}. \tag{11}$$

9. Avendo determinato ora il valore di γ_n, possiamo completare la formola (6), ottenendo:

$$X'_{n-1} = (2n+1)\,X_n + (2n-3)\,X_{n-2} + (2n-7)\,X_{n-4} + \ldots . \tag{12}$$

dalla quale si deducono le altre:

$$X'_{n+1} - X'_{n-1} = (2n+1)\,X_n \tag{13}$$

$$X'_{n-1} + X'_n = X_0 + 3X_1 + 5X_2 + \ldots + (2n+1)\,X_n. \tag{14}$$

Come è noto, la seconda formola è molto utile per lo studio della sviluppabilità di una funzione in serie di funzioni sferiche.

Dalla relazione trovata:

$$\frac{l_r}{l_{r+1}} = \frac{r+1}{2}\,\gamma_r = \frac{r+1}{2r+1}$$

si deduce facilmente poi il valore di l_r; si ha infatti:

$$l_r = \frac{l_r}{l_{r-1}} \cdot \frac{l_{r-1}}{l_{r-2}} \cdots \frac{l_2}{l_1} \cdot l_1 = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2\ldots\ldots n}.$$

10. La formula trovata (11) che lega tre funzioni successive del nostro sistema ortogonale è evidentemente sufficiente a stabilire l'identità tra le funzioni stesse e le ordinarie funzioni sferiche; ma può darsene ancora un'altra riprova collo stabilire l'equazione differenziale di secondo ordine a cui soddisfano le X_n.

Derivando la (11) si ottiene:

$$(2n+1)\,X_n + (2n+1)\,xX'_n = n\,X'_{n-1} + (n+1)\,X'_{n+1}$$

ed esprimendo mediante la (13) X'_{n+1} per X'_{n-1}:

$$(2n+1)\,X_n + (2n+1)\,xX'_n = (2n+1)\,X'_{n-1} + (n+1)(2n+1)\,X_n,$$

da cui:

$$xX'_n = X'_{n-1} + nX_n. \tag{15}$$

Moltiplicando questa per x e tenendo conto di essa e della (11) si ha:

$$x^2X'_n = xX'_{n-1} + nxX_n = X'_{n-2} + (n-1)\,X_{n-1} + n\,\frac{nX_{n-1} + (n+1)\,X_{n+1}}{2n+1} =$$

$$= X'_{n-2} + \frac{3n^2-n-1}{2n+1}\,X_{n-1} + \frac{n(n+1)}{2n+1}\,X_{n+1}$$

e sottraendo X'_n:

$$(x^2-1)\,X'_n = (X'_{n-2} - X'_n) + \frac{3n^2-n-1}{2n+1}\,X_{n-1} + \frac{n(n+1)}{2n+1}\,X_{n+1},$$

da cui per la (13):

$$(x^2-1)\,X'_n = -(2n-1)\,X_{n-1} + \frac{3n^2-n-1}{2n+1}\,X_{n-1} + \frac{n(n+1)}{2n+1}\,X_{n+1} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2n+1}\,(X_{n+1} - X_{n-1}).$$

Derivando:

$$\frac{d}{dx}[(x^2-1)X'_n]=\frac{n(n+1)}{2n+1}(X'_{n+1}-X'_{n-1})=n(n+1)X_n;$$

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)X'_n]+n(n+1)X_n=0,$$

che è la notissima equazione differenziale cercata.

II. Il lettore potrà anche verificare facilmente che dalla (11) si può risalire alla proprietà fondamentale che ha dato origine alla trattazione classica delle funzioni sferiche, cioè allo sviluppo:

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_0^\infty X_n\alpha^n.$$

Basta infatti porre $y=\sum_0^\infty X_n\alpha^n$ e stabilire per y l'equazione differenziale:

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)y'=(x-\alpha)y,$$

che integrata dà il valore cercato. Non occorre mettere qui in questione la convergenza della serie considerata; bisognerà solo verificare, come nella teoria classica, che i coefficienti dello sviluppo della funzione $(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ soddisfano effettivamente alla (11), dando al procedimento precedente un semplice valore di ricerca. Del resto la convergenza della serie per $|x|<1$ e $|\alpha|<1$ può essere stabilita anche direttamente.

GUIDO ASCOLI.

BIBLIOGRAFIA

B. BETTINI e C. CIAMBERLINI. — *Aritmetica pratica* per le scuole d'arti e mestieri e per i corsi inferiori delle scuole industriali. — Livorno, Raffaello Giusti, 1911.

Questo e l'altro di cui appresso parleremo sono due buoni libri, dovuti a due autori ben noti già per altri eccellenti libri di testo per le scuole medie. Anche questa volta essi hanno speso molto utilmente le loro fatiche, contribuendo al rinnovamento dei testi in iscuole nelle quali, pur essendo necessaria una trattazione puramente utilitaria (in quanto si riferisce alla pratica), deve per altro esser curata, come nelle altre, la precisione e l'ordine dell'esposizione, sì che sieno evitate del pari le difficoltà, le sciatterie e la confusione.

La Matematica, anche esposta in forma pratica, data la sua natura, purchè la trattazione sia condotta con sani criteri, ha sempre elementi educativi delle facoltà mentali. E gli A.[i] mi pare abbiano trovato la giusta misura.

Nel primo dei due libri dei quali ci occupiamo, introducono fin dall'inizio il concetto di funzione " nel modo più intuitivo e più elementare possibile ", e su questo si basano molti tra gli esercizi proposti. E ci pare che ciò sia bene, e che tale concetto anche nelle altre scuole si dovrebbe introdurre in questo modo nello svolgimento della materia, appena gli alunni possono capirlo.

Ogni regola, esposta in forma semplice, chiara, precisa, è seguita e chiarita da opportuni esercizi, ed ogni paragrafo termina con altri esercizi orali e scritti e con problemi adatti per le scuole per le quali il libro deve servire e molti dei quali valgono in certo qual modo di complemento alla trattazione fatta. Troviamo poi esempi di risoluzioni di problemi in forma semplice, sobria e chiara, ciò che è di grande aiuto per l'insegnante che nella prima classe deve correggere gli alunni da certe forme di risoluzione verbose e sciatte che purtroppo mandano in visibilio tanti maestri delle nostre scuole elementari i quali le insegnano con un compiacimento degno di miglior scopo.

Così pure gli autori hanno insistito sul concetto di proporzionalità perchè ad esso " fanno ricorso tante importanti leggi meccaniche e fisiche ". E anche questo è bene.

Si tratta proprio di un libro che per le sue qualità merita larga diffusione.

L. Tenca.

B. Bettini e C. Ciamberlini. — *Elementi di algebra pratica* per le scuole d'arti e mestieri e per i corsi inferiori delle scuole industriali. — Livorno, Raffaello Giusti, 1911.

Anche in questo libro l'esposizione è chiara e succinta e nello stesso tempo corretta. Ogni regola è seguita da esemplificazioni che ne chiariscono il contenuto. Molto opportunamente fin dal principio è introdotta la " rappresentazione " cartesiana delle funzioni di una variabile indipendente, la cui applicazione si " impone ormai nello studio anche elementarissimo d'ogni fenomeno naturale ".

L'importanza di questa introduzione viene illustrata da ben scelti esempi e noi pensiamo che il dire di tale rappresentazione anche in tutte le Scuole Medie non sarebbe al certo inopportuno. Ogni paragrafo termina con molti esercizi adatti per le scuole per cui il libro deve servire.

Non possiamo quindi che ripetere per questo quanto abbiamo concluso per il primo libro, cioè che gli auguriamo, per il bene delle scuole, larga diffusione.

L. Tenca.

F. Enriques e U. Amaldi. — *Elementi di geometria* ad uso delle scuole secondarie superiori. 4ª ediz. in-8 di pag. 607. — Bologna, Zanichelli.

Le mende da me rilevate allorchè fu pubblicata la 3ª edizione di questi *Elementi* (*Bollettino di bibliografia*, ecc., del prof. Loria, fasc. 3°, vol. XI, 1909) sono quasi completamente scomparse. Inoltre, per le aggiunte introdotte dai due chiarissimi Autori, questa quarta edizione segna un notevole miglioramento. Vogliamo però, in maniera assai breve, per il buon profitto scolastico del libro, esaminarne alcuni punti. (1)

A pag. 363, linea 4ª (dal basso) si afferma che $GH = r.1,77246\ldots$ differisce per eccesso da $\sqrt{\pi} = 1,77245\ldots$ per meno di $\dfrac{1}{100000}$ del raggio, mentre evidentemente si può solo affermare che tale differenza è minore di $\dfrac{2}{100000}$ del raggio stesso.

A pag. 490 la dimostrazione del teorema del n. 776 mi pare abbia bisogno di schiarimenti: si afferma che i piani α e β s'intersecano senza aver dimostrato, mediante il n. 725, che non sono paralleli; si richiama il n. 568 mentre, dopo aver notato che l'intersezione del piano α con un piano qualunque passante per l'asse è parallela all'asse (n. 706) e quindi perpendicolare al piano β (n. 701), si può concludere che la distanza da O all'intersezione dei piani α e β è perpendicolare al piano α, cioè (n. 709) è la distanza dell'asse dal piano.

Nel Cap. VIII, pag. 323, *Teoria della misura*, il numero irrazionale è introdotto mediante le *sezioni* dei numeri razionali. (2) Dalle disuguaglianze

$$\alpha > \frac{m}{n}, \quad \frac{m}{n} > \beta, \qquad \text{ovvero} \qquad \alpha < \frac{m}{n}, \quad \frac{m}{n} < \beta,$$

gli Autori traggono rispettivamente le conseguenze

$$\alpha > \beta, \qquad \text{ovvero} \qquad \alpha < \beta,$$

essendo α, β numeri irrazionali. A me pare non si possa senz'altro accettare la validità delle proprietà transitive delle disuguaglianze, trattandosi di nuovi numeri, e quindi non siano da accettare i precedenti risultati senza opportune premesse.

---

(1) Degli errori di stampa trovati in una rapida scorsa, vogliamo solo accennare a quello della pag. 489, linea 6ª, dove è richiamato il n. 555 in luogo del n. 565; all'altro delle p. 556-557, dove si richiama il n. 449 invece del n. 500; all'altro della pag. 595, linea 4ª, dove, invece di πr, deve leggersi $2\pi r$, ecc., ecc.

(2) A tale definizione (Dedekind e Tannery) del numero irrazionale si posson fare le osservazioni contenute nel libro del Couturat: *Les principes des mathématiques*, Paris, Félix Alcan, 1895, p. 83-84.

Proseguiamo l'esame del capitolo. La parte che riguarda le operazioni sui numeri irrazionali è stata arricchita da importanti osservazioni e anche da una definizione (pag. 348) di proporzionalità di quattro numeri (reali). Così resta eliminata la mia critica (*Bollettino di bibliogr.* citato e *Pitagora*, anno XV, n. 8-9). Osserviamo però che, per avere definizioni *omogenee*, sarebbe stato assai meglio se gli Autori avessero volta per volta definito le operazioni sui numeri irrazionali, non come rapporti di segmenti (o di grandezze omogenee), ma come valori comuni a tutti i rapporti....

Il Cap. XVI, *I solidi e le superficie del cilindro, del cono e della sfera*, è svolto in questa 4ª edizione più completamente. Però si può osservare, per esempio, che la proposizione *b*, che consta di varie parti, del n. 882 dovrebbe essere richiamata con maggior precisione nella pagina 576, linea 6ª (dal basso). Invero è per mezzo della proposizione del n. 882, *b*, 2 che si può giustificare con un ragionamento assai semplice, che manca nel libro, la possibilità d'iscrivere nella semi-circonferenza massima della sfera una poligonale regolare il cui apotema sia maggiore di un segmento dato (minore del raggio). La stessa osservazione vale per il richiamo del n. 882, che si trova nella pag. 586, linea 3ª.

Quanto alla teoria dell'equivalenza delle superficie rotonde, gli Autori dànno la definizione caso per caso. Invece il VERONESE [1] fa uso di una sola definizione per l'equivalenza delle figure predette: ciò che mi sembra più vantaggioso, perchè con le definizioni date caso per caso l'alunno non sa quando due figure siano da dirsi equivalenti, all'infuori dei casi studiati nel testo.

Notiamo infine che gl'illustri Autori avrebbero dovuto tenere conto di una condizione ritenuta essenziale dallo stesso ENRIQUES per una trattazione rigorosamente logica della Geometria: tutte le proposizioni debbono essere enunciate esplicitamente come *postulati*, o venire logicamente dimostrate per mezzo di altri postulati (Art. 1° dei *Collectanea* di ENRIQUES, pag. 9). E ciò a proposito delle osservazioni da me fatte (nella citata recensione del *Bollettino*) che, non prese in considerazione dagli Autori, si potrebbero ripetere per alcuni punti di questa quarta edizione.

VINCENZO AMATO.

Annuaire pour l'an 9111 publié par le Bureau des Longitudes. — Paris, Gauthier-Villars.

Questo prezioso volumetto contiene dopo i documenti astronomici, molti quadri relativi alla Metrologia, alle Monete, alla Geografia e alla Statistica e alla Meteorologia.

La parte astronomica contiene le tavole per il calcolo delle altitudini per mezzo del barometro, le parallassi stellari, le stelle doppie di cui è stata calcolata l'orbita, le stelle doppie spettroscopiche, la spettroscopia stellare, ecc.

Nella parte geografica, rimaneggiata dai signori LEVASSEUR e MARCH sono stati messi a giorno i quadri relativi alla geografia statistica.

Nella metrologia si notano in mezzo a molte cose interessantissime, particolarmente i pesi e misure del Giappone e quelli della China e una *Nota* sul *carato metrico* (per il peso delle pietre preziose) che dal 1° gennaio 1911 è reso obbligatorio in Francia.

Il volume si chiude con una nota interessantissima di POINCARÉ, *Sulla XVI conferenza dell'Associazione geodetica* ed una di BIGOURDAN, *Sull'eclissi di sole del 17 aprile 1912*, e con alcune necrologie.

Nella prima l'illustre autore mette in piena luce colla consueta chiarezza i punti più importanti che hanno attirato l'attenzione dei delegati al Congresso e che presentano carattere di novità, esponendo i risultati degli studi recenti sulla variazione di latitudine, sulle maree della scorza terrestre, sulla misura del peso in mare, sulle misure dell'area di meridiano all'equatore e allo Spitzberg, ecc.

L'eclisse del 1912 sarà totale o anulare in molti paesi della Francia.

K.

---

[1] *Elementi di geometria ad uso dei ginnasi e licei, ecc.*; Parte II, 3ª ediz. Verona. Drucker, 1905.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 22 Novembre 1910

IL CONCETTO GEOMETRICO DI LINEA

Il concetto di linea è intimamente legato a quello di funzione continua, e in tal modo è trattato p. es. da JORDAN (1), il quale ne svolge le proprietà principali anche fuori del campo analitico. Da un punto di vista del tutto diverso è trattato nell'opera recente ed eminentemente riassuntiva dello SCHOENFLIES (2). Ivi, ad esempio, una linea piana chiusa è un insieme di punti che, oltre soddisfare a certe condizioni, divide il piano in due regioni, ciascuna delle quali ha per punto limite ogni punto di quell'insieme.

La trattazione dello SCHOENFLIES è tutt'altro che elementare; essa trae largamente profitto dai risultati della teoria generale degli insieme di punti, e ammette conoscenze non semplici relative alle linee poligonali e parti di piano da esse determinate. Quest'ultimo carattere è comune alla trattazione di JORDAN e a quella di SCHOENFLIES.

Il presente lavoro ha lo scopo di riportare lo studio dei problemi generali sulle linee ai fondamenti della geometria. La identità, sostanziale, del nostro concetto con quello di JORDAN è dimostrata dalla identità della rappresentazione analitica.

CAPITOLO I. — **Proprietà generali delle linee.**

Definizione di " linea " e sue prime conseguenze.

1. Le proprietà che caratterizzano il concetto di linea e sono sufficienti per il suo pieno sviluppo nel campo teoretico, sono contenute nella seguente definizione:

Linea è ogni insieme ordinato (3) *di punti che soddisfa a queste due condizioni:*

I. *Fissato un punto dell'insieme, un senso a partire da esso e un intorno sferico del punto medesimo, si può considerare un tratto del-*

---

(1) C. JORDAN, *Cours d'Analyse*, IIIe éd.. Tome 1er. Paris, 1909.

(2) A. SCHOENFLIES, *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*. Zweiter Teil. Leipzig, 1908.

(3) Il concetto di *gruppo* o *insieme ordinato* di elementi si pone ormai anche in molti trattati di Geometria elementare. Un *tratto* di un insieme ordinato sarà la *parte* di esso compresa fra due suoi elementi, e nella quale si computano o no anche gli elementi stessi [7].

Due gruppi di elementi di un insieme ordinato sono *separati* se un elemento qualunque dell'uno non è compreso fra due elementi dell'altro, ossia se ogni elemento di uno di essi precede (in un senso fissato) ogni elemento dell'altro.

Un *elemento di separazione* di due tali gruppi è un elemento che *non è seguito* da alcun elemento di uno di essi e *non è preceduto* da alcun elemento dell'altro.

l'insieme che abbia un estremo in quel punto, giaccia nel senso fissato e sia contenuto nell'intorno fissato.

II. *Se due gruppi di punti dell'insieme sono separati, esiste nell'insieme almeno un punto di separazione fra i due gruppi, il quale può anche appartenere a uno di essi.*

Non escludiamo la considerazione di linee appartenenti a *spazi con più di tre dimensioni*; in tal caso, all'*intorno sferico* di ogni punto di esse, del quale si parla nella definizione, si sostituirà un *intorno ipersferico* (insieme dei punti dei raggi di un'ipersfera con centro nel punto considerato). Se poi la linea è piana, è sufficiente la considerazione di un *intorno circolare* di ogni suo punto.

2. È facile mostrare che *le proprietà* I *e* II *sono fra loro indipendenti*. Basta infatti osservare che l'insieme ordinato dei punti razionali di un segmento soddisfa alla condizione I, ma non soddisfa alla II; mentre l'insieme dei punti di due segmenti di una stessa retta, senza punti comuni, è un insieme ordinato che soddisfa alla condizione II, per il postulato della continuità della retta, ma non soddisfa alla I.

3. Ogni linea si presenta con un certo *ordinamento* dei suoi punti, nel quale si possono considerare *due sensi*, uno inverso dell'altro. Anche se esistessero altri ordinamenti del medesimo insieme di punti per i quali quell'insieme dovesse considerarsi ancora come una linea, con ciascuno di essi avremmo *un'altra linea*, coincidente con la primitiva per i punti che la formano, ma distinta per l'ordinamento.

Perciò *ogni linea ha un ordinamento proprio.*

4. Dalla proprietà I seguono immediatamente le altre:

1) *Ogni punto di una linea è punto limite dell'insieme dei punti della linea.* Questa proprietà, però, non equivale alla I.

2) *Fra due punti di una linea ne sono compresi infiniti.* Possiamo enunciare la stessa proprietà dicendo che *su una linea non esistono punti successivi.*

3) *Se due gruppi separati di punti di una linea la esauriscono, non possono esistere due diversi punti di separazione dei due gruppi.*

Esisterà quindi, nel caso considerato, al più un punto di separazione, che sarà o l'*ultimo* punto del gruppo che precede, o il *primo* di quello che segue, in un senso convenuto.

5. Che un punto di separazione esista certo, è affermato nella proprietà II. Essa è l'estensione a una linea qualunque della proprietà che per la retta è contenuta nel *postulato della continuità* di Dedekind (1).

L'enunciato 3) del n. prec. si può dunque completare come segue: *Se due gruppi separati esauriscono una linea, o nel gruppo che precede (in un senso fissato) esiste l'ultimo punto, o in quello che segue esiste il primo punto. Uno dei due casi esclude l'altro.*

---

(1) Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Braunschweig, 1872.

6. Un insieme ordinato può essere limitato o illimitato; avremo quindi *linee limitate* e *linee illimitate.*

Una linea limitata ha due *estremi*, che sono il primo e l'ultimo punto, in un senso fissato. Una linea illimitata può avere un estremo e può non averne affatto; nel primo caso è *illimitata in un sol senso*, nel secondo è *illimitata in ambedue i sensi.*

Gli estremi di una linea limitata possono coincidere; in tal caso si ha una *linea chiusa*. Una linea chiusa si può considerare come limitata con gli estremi coincidenti in un suo punto qualunque; fissati gli estremi in un punto, abbiamo due sensi sulla linea, uno inverso dell'altro, a partire da quel punto; ciascuno di essi determina un senso a partire da ogni altro punto della linea, nel quale si portino gli estremi coincidenti di essa.

L'ordinamento proprio [3] della linea rimane però, per noi, sempre lo stesso, qualunque sia il punto nel quale si considerano i due estremi coincidenti.

Le denominazioni di *precedente* e *seguente*, applicate ai punti di una linea chiusa, non hanno alcun significato finchè non sia fissato il punto nel quale s'intende d'*aprire* la linea, e un senso a partire da esso.

7. *L'insieme dei punti di una linea compresi fra due punti* A *e* B *di essa, è una linea.* Questa dicesi un *tratto* o una *parte* della linea primitiva. Si computano nel tratto AB anche i punti A e B; se non si vogliono computare, il tratto è illimitato in ambedue i sensi e si indica con $\overline{AB}$. Così si può computare il solo punto A, e si ha il tratto $A\overline{B}$, illimitato nel senso AB.

Se la linea è chiusa, si hanno *due tratti* AB.

Su una linea (aperta o, se chiusa, considerata come aperta in un suo punto) un punto A determina due tratti, a uno dei quali, che indicheremo con $\overleftarrow{A}$, appartengono i punti che precedono A in un senso fissato, e all'altro, che indicheremo con $\overrightarrow{A}$, quelli che seguono A. Ad ambedue apparterrà A, se non si affermerà il contrario.

8. Se si ha una successione finita o infinita di linee ciascuna delle quali ha un estremo comune con la precedente e l'altro con la seguente (la prima e l'ultima, se esistono, possono essere anche illimitate in un senso) l'insieme dei punti appartenenti a queste linee è un'altra linea, che si dice *composta* di quelle. La linea composta di più altre si dice *divisa* in queste, per quanto gli estremi di esse appartengano nel medesimo tempo a due *parti* successive.

9. Ammetteremo che nell'ordinamento dei punti di una linea uno stesso punto possa essere considerato due o più volte, ciascuna volta con un *posto* diverso sulla linea. Un punto in tali condizioni si dirà un *nodo*.

Il posto di un punto su una linea si determina stabilendo quali punti si intendono precedenti e quali seguenti ad esso.

Un nodo divide una linea in due parti in due o più modi diversi, secondo il posto che gli si attribuisce sulla linea. In generale si considera un nodo come rappresentante tanti punti distinti (sebbene coincidenti) della linea, quanti sono i modi nei quali esso divide la linea in due tratti.

10. *Una retta è*, manifestamente, *una linea*; un *tratto rettilineo* è un segmento, o un raggio, o un segmento nel quale si astrae da un estremo o da ambedue, o un raggio nel quale si astrae dall'origine. Un tratto rettilineo può dunque essere limitato o illimitato.

Una linea composta [8] di tratti rettilinei è una *linea spezzata*. Essa può essere costituita così di un numero finito che di un numero infinito di tratti rettilinei, che sono i suoi *lati*.

Minimo tratto di linea contenente un dato insieme di punti.

11. *Dato un insieme* J *di punti di una linea limitata* AB, *si può considerare un tratto* MN, *anche coincidente con* AB, *di questa linea, tale che l'insieme* J *sia contenuto nel tratto* MN *senza essere contenuto in un tratto che sia una parte di esso.*

Sia H un punto dell'insieme J, e si consideri il tratto AH di AB; ammettendo che esista un tratto AK di AH nel quale non siano contenuti punti di J, poniamo *in un gruppo* G_1 *i punti* X *di* AH *tali che nel tratto* AX *non siano contenuti punti di* J (fra questi è il punto K), e in un gruppo G_2 gli altri punti di AH. Avremo che, poichè i punti che precedono un punto di G_1 sono ancora di G_1, i gruppi G_1 e G_2 sono separati; esiste perciò un punto di separazione M che, poichè G_1 e G_2 esauriscono il tratto $\overline{AH}$, è l'ultimo punto di G_1 o il primo punto di G_2 [5].

In ogni caso, nel tratto $A\overline{M}$ non sono contenuti punti dell'insieme J.

Se M è l'ultimo punto di G_1, M non appartiene ad J, ma in ogni tratto MM', con M' compreso fra M ed H, sono contenuti punti di J; se M è il primo punto di G_2, M appartiene necessariamente ad J, e ancora abbiamo che in ogni tratto MM' sono contenuti punti di J (almeno il punto M).

Quando non esistesse un tratto AK di AH contenente punti di J, al punto M si sostituirebbe lo stesso estremo A.

Analogamente, considerando il tratto BH di AB, si troverà in esso un punto N tale che nel tratto $B\overline{N}$ non siano contenuti punti di J, mentre in ogni tratto NN' con N' compreso fra N e H siano contenuti punti di J. Il tratto MN avrà appunto la proprietà di contenere l'insieme J, il quale però non sarà contenuto in alcun tratto M'N' che sia una parte di MN.

Il tratto MN si dirà il *minimo tratto di* AB *contenente l'insieme* J. Se la linea sulla quale si trova l'insieme J è chiusa, essa dovrà considerarsi come aperta con gli estremi coincidenti in un suo punto; il tratto MN però è diverso secondo il punto nel quale si considerano coincidenti gli estremi della linea.

Insieme di punti in corrispondenza univoca e continua coll'insieme dei punti di una linea.

12. Il seguente teorema permette di riconoscere, in molti casi, se un dato insieme di punti è una linea:

I. *Un insieme di punti* l' *in corrispondenza univoca e continua coll'insieme dei punti di una linea* l *(limitata o illimitata) è, con un ordinamento dei suoi punti determinato dalla corrispondenza stessa, una linea.*

La corrispondenza deve essere univoca, ma non si richiede che sia biunivoca, cioè, mentre a un punto di l corrisponde un unico punto di l', uno stesso punto di l' può corrispondere anche a diversi punti di l. Però supporremo che l' abbia almeno due punti non coincidenti.

L'essere la corrispondenza *continua* porta che, se A è un punto di l e A' è il punto corrispondente di l', fissato un intorno sferico qualunque σ di A' si può considerare un tratto ε di l contenente A tale che tutti i punti di l' corrispondenti a quelli di ε siano contenuti in σ.

Per la univocità della corrispondenza, all'ordinamento proprio di l corrisponde un ordinamento di l'; però, poichè uno stesso punto di l' può corrispondere a punti diversi di l, può darsi che nell'ordinamento di l' si abbiano dei nodi [9]. Inoltre poichè l'insieme ordinato l soddisfa alla condizione II [1], anche l'insieme ordinato l' vi soddisfa.

Rimane da vedere se l'insieme l' soddisfa alla condizione I; ossia se, considerando un punto A' di l' e un intorno sferico arbitrario σ di esso, esiste, in ciascuno dei due sensi di l' a partire da A', un tratto di l' contenuto nell'intorno σ.

Se A' corrisponde a un solo punto A di l, per la continuità della corrispondenza si può considerare un tratto AM di l, in un senso e nell'altro, al quale corrisponda un tratto A'M' di l' (vero *tratto*, perchè M' è distinto da A') contenuto in σ. Ma se A' non corrisponde a un solo punto di l, può avvenire che il punto M' corrispondente ad M coincida con A', e che il tratto A'M' di l' si riduca al solo punto A'. Occorrono perciò, in questo caso, altre considerazioni.

Sia Γ *il gruppo dei punti di* l *ai quali corrisponde il punto* A' *di* l'; fissando su l un senso, limitiamoci a considerare, per esempio, il tratto $\vec{A}$ di l [7] e il tratto corrispondente $\vec{A'}$ di l', e distinguiamo due casi: può avvenire che in ogni segmento AX di $\vec{A}$ esistano punti non appartenenti al gruppo Γ, e può avvenire che esistano dei tratti AX di $\vec{A}$ appartenenti interamente a Γ.

Nel primo di questi due casi, la considerazione fatta quando A' corrispondeva ad un solo punto A si può ripetere, perchè si può prendere il punto M fra quelli non appartenenti al gruppo Γ; non così nel secondo caso, perchè ai tratti AM di $\vec{A}$ contenuti in un certo tratto non corrisponde un effettivo tratto A'M' di l', ma il solo punto A'.

Consideriamo allora *quei punti* X *del tratto* $\overrightarrow{A}$ *di* l *tali che tutto il tratto* AX *appartenga a* Γ; può darsi che l'insieme di tali punti esaurisca il tratto $\overrightarrow{A}$ di l, ma in tal caso A′ sarebbe un estremo di l' nel senso corrispondente al senso $\overrightarrow{A}$ di l, e le nostre considerazioni dovrebbero limitarsi al tratto $\overleftarrow{A}$. Se l'insieme dei punti X non esaurisce $\overrightarrow{A}$, esso è contenuto in un tratto limitato di $\overrightarrow{A}$, ed esiste un tratto minimo AA_1 che lo contiene [11].

Dico che il punto A_1 appartiene anch'esso all'insieme dei punti X; infatti, se ad A_1 corrispondesse un punto A'_1 diverso da A′, si potrebbe considerare un intorno sferico σ di A'_1 non comprendente A′; allora avremmo in ogni intorno di A_1 dei punti ai quali corrisponderebbe il punto A′ fuori dell'intorno σ di A'_1, e questo è contrario all'ipotesi della continuità della corrispondenza (1).

Veduto che il punto A_1 appartiene all'insieme dei punti X, si ha che esso è l'ultimo dei punti X; in ogni tratto A_1A_2 con A_2 seguente ad A_1 sono contenuti punti ai quali non corrisponde A′ su l'. Considerando A′ come corrispondente ad A_1 anzichè ad A (con questo non si cambia il *posto* di A′ nell'ordinamento di l') si può ripetere la considerazione già fatta quando A′ corrispondeva a un solo punto di l, e concludere, anche nel caso presente, che si può considerare un tratto A′M′ di l', nel senso di l' corrispondente al senso $\overrightarrow{A}$ di l, contenuto in un intorno sferico di A′ fissato a piacere.

La stessa considerazione si può fare per il senso di l' corrispondente al senso $\overleftarrow{A}$ di l.

13. Facili conseguenze del teorema dimostrato sono:

1) *La proiezione di una linea su di un piano da un punto che non le appartiene o da un punto all'infinito, o è un punto o è un'altra linea.*

2) *Le sezioni coniche, e molte delle curve algebriche o trascendenti delle quali si dà solitamente una definizione geometrica, sono linee.*

3) *L'insieme dei punti le coordinate dei quali sono funzioni finite e continue di una variabile in un intervallo limitato o illimitato, è una linea.*

Infatti, facendo corrispondere i valori della variabile ai punti di un tratto rettilineo, si ha una corrispondenza univoca e continua fra i punti dell'insieme e quelli di un tratto di retta, che è una linea [10].

4) In particolare, *l'ente piano rappresentato dall'equazione* y=f(x), *con* f *simbolo di una funzione finita e continua di* x *in un intervallo* a … b, *è una linea limitata.*

---

(1) Un ragionamento analogo dimostra che un punto limite dell'insieme *Γ* appartiene necessariamente a *Γ*, e che quindi l'insieme *Γ*, contenendo il proprio insieme derivato, è *perfetto* nel senso di Jordan e *chiuso* nel senso di Cantor (V. p. es. Borel, *Leçons sur la Théorie des fonctions*. Paris 1898, p. 35).

Una proprietà generale d'intersezione.

14. Nel concetto intuitivo di linea si trova:

1) *Una linea che congiunge due punti che stanno da parte opposta rispetto a un piano, incontra necessariamente il piano.*

2) *Una linea che congiunge un punto interno con un punto esterno rispetto a una superficie sferica, cilindrica, conica, incontra necessariamente la superficie.*

3) *Una linea piana che congiunge due punti che stanno da parte opposta rispetto a una retta del piano, o un punto interno con un punto esterno rispetto a una circonferenza, incontra necessariamente la retta o la circonferenza.*

Noi vogliamo ora mostrare come le proprietà accennate siano una conseguenza della definizione di linea. Daremo al teorema una forma generale la quale comprenda i casi già detti e molti altri.

II. *Se un ente* S *costituito di punti determina una spartizione dei punti dello spazio* [1] *in due regioni* R_1 *ed* R_2, *in modo che ogni punto dello spazio, e non di* S, *appartenga all'una o all'altra di queste regioni, e in un punto qualunque di* R_1 *o di* R_2 *si possa considerare un intorno sferico appartenente interamente alla stessa regione* R_1 *od* R_2, *si ha che ogni linea la quale congiunge un punto di* R_1 *con un punto di* R_2 *ha necessariamente almeno un punto comune con* S.

Sia l la linea, la quale congiunga un punto A di R_1 con un punto B di R_2; fissiamo su l il senso AB, e consideriamo *l'insieme* J *dei punti* X *di* l *tali che il tratto* AX *sia contenuto tutto in* R_1. All'insieme J faremo appartenere anche l'estremo A, ma non gli appartiene l'estremo B.

Essendo l limitata, esiste un tratto minimo AH di l contenente J [11]; e poichè i punti che precedono un punto di J sono anch'essi di J, abbiamo che tutti i punti del tratto AH appartengono all'insieme.

Se il punto H fosse in R_1, si potrebbe considerare un punto H' seguente ad H e tale che il tratto HH' fosse contenuto in un intorno sferico di H appartenente ad R_1; così, non solo H, ma tutti i punti del tratto HH' sarebbero in R_1 ed apparterrebbero all'insieme J, e questo è impossibile.

Se poi il punto H fosse in R_2, si potrebbe considerare un tratto H''H precedente ad H e ancora contenuto in R_2; nel tratto H''H non si avrebbero punti di J, e anche questo è impossibile.

Poichè H non appartiene nè ad R_1 nè ad R_2, esso è un punto comune ad l ed S, del quale abbiamo dimostrato l'esistenza.

15. Il punto H è il *primo* nel quale l incontra S, nel senso AB. Se consideriamo il senso BA, abbiamo ancora il primo punto d'incontro di l con S nel senso BA, che è l'*ultimo* nel senso AB.

---

(1) Si può intendere " spazio a un numero qualunque di dimensioni "; e in questo caso invece che di " intorno sferico di un punto " si parlerà di " intorno ipersferico " [1].

Dunque, *nelle ipotesi del teorema II, esiste il primo e l'ultimo dei punti comuni alla linea considerata e all'ente* S, *in un senso fissato della linea.*

16. La definizione delle regioni R_1, R_2, nelle quali S divide lo spazio varia caso per caso, ma è, nei casi sopra accennati, del tutto ovvia [1].

La proprietà espressa nel teorema II rimane anche se, invece dell'intero spazio o dell'intero piano, si considerá solo una parte di esso, alla quale appartengano l'ente S, le regioni R_1 e R_2 e le linee che si vogliono considerare. Per esempio, una linea interna a una circonferenza, che congiunge due punti da parte opposta rispetto a una corda, incontra necessariamente la corda; ecc.

Massimo e minimo di distanze.

17. Considereremo prima la distanza dei punti di una linea da un punto, da una retta o da un piano fisso, poi la distanza fra i punti di due linee; stabiliremo la esistenza di un massimo e di un minimo di tale distanza, nell'ipotesi di linee limitate o chiuse.

III. *La distanza di un punto* O *di un piano dai punti di una linea limitata o chiusa, giacente sul piano e non passante per* O, *ha un massimo e un minimo.*

Dimostriamo, per esempio, che la distanza ha un massimo, che possiamo supporre non si verifichi agli estremi A e B della linea l, i quali sono coincidenti se l è chiusa.

Considerando un punto M della linea, distinto da A e B, indicheremo genericamente con X un punto del tratto AM e con Y un punto del tratto MB. Possono allora darsi, per il punto M, due casi:

1° *qualunque sia il punto* X *che si considera, esiste un punto* Y *non interno alla circonferenza* $\varkappa(O, OX)$ [2];

2° *esiste un punto* X *tale che ogni punto* Y *sia interno rispetto alla circonferenza* $\varkappa(O, OX)$.

Porremo i punti M per i quali si verifica il primo caso in un gruppo G_1, e gli altri in un gruppo G_2. I gruppi G_1 e G_2 esauriscono l, escludendo gli estremi A e B.

Esistono punti di G_1 e di G_2; infatti, preso M sulla linea in modo che sia $OM > OA$ e $OM > OB$ e descritta una circonferenza di centro O e tale che rispetto ad essa A e B siano interni ed M esterno, siano M' e M'' il primo e l'ultimo punto d'incontro [15] della linea $l \equiv AB$ con essa: M' è di G_1 e M'' è di G_2.

Osserviamo poi che i punti che seguono (nel senso AB) un punto di G_2 sono anch'essi di G_2; dunque G_1 e G_2 sono due gruppi separati.

---

(1) Si dimostra nei Trattati, come applicazione del postulato della continuità, che un segmento o un arco di circonferenza, che ha gli estremi in regioni diverse rispetto a una circonferenza, ha in comune con essa un punto; ma la dimostrazione che si dà ordinariamente in questo caso particolarissimo è più laboriosa della nostra dimostrazione generale (V. p. es. VITALI, *Sulle applicazioni del post. della continuità nella Geom. elementare*, in "Questioni riguardanti la Geom. elementare" raccolte da F. ENRIQUES, Bologna 1900, pag. 92 e seg.).

(2) Indicheremo, per brevità, con $\varkappa(O, r)$ la circonferenza di centro O e raggio r.