IL CONCETTO GEOMETRICO DI LINEA

(Continuaz. e fine — Vedi fascicoli III, IV e V - Anno XXVI).

CAPITOLO III. — Le linee come grandezze.

Il concetto di lunghezza. (¹)

62. Su una data linea l, limitata o illimitata, prendiamo n punti $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ordinati secondo un senso fissato di l. I segmenti:

$$A_1A_2,\ A_2A_3,\ \ldots,\ A_{n-1}A_n,$$

formano una linea spezzata s di un numero finito di lati, inscritta nella linea l [28], che indicheremo col simbolo

$$[A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n].$$

Portiamo su un raggio indefinito r, a partire dalla sua origine O, tanti segmenti consecutivi, uguali rispettivamente ai lati della spezzata s. Avremo un segmento OX somma di questi segmenti, equivalente alla spezzata s, e noi faremo corrispondere il punto X di r alla spezzata s inscritta in l.

Essendo infinite le spezzate inscritte in l, sono infiniti i punti X che loro corrispondono in r; però uno stesso punto X può corrispondere a varie spezzate. Osserveremo subito che, se la linea l non è essa stessa una spezzata di un numero finito di lati, l'insieme dei punti X di r è un insieme illimitato, giacchè non esiste in esso l'ultimo punto. Se infatti X_1 è un punto dell'insieme, esso corrisponde ad una spezzata.

$$s_1 \equiv [A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n];$$

questa spezzata non coincide con l, e quindi in uno dei tratti A_iA_{i+1} di l si può prendere un punto M che non appartenga ad s_1. (²) Consideriamo allora l'altra spezzata,

$$s_2 \equiv [A_1,\ \ldots,\ A_i,\ M,\ A_{i+1},\ \ldots,\ A_n];$$

essa equivale a un segmento OX_2 maggiore di OX_1, perchè al lato A_iA_{i+1} di s_1 si sono sostituiti i lati A_iM e MA_{i+1} di s_2; quindi il punto X_2

(¹) Per il grande sviluppo delle teorie relative a tale concetto nel campo analitico, questa nostra breve trattazione non può avere altro intendimento che quello della semplicità ed elementarità; ed appunto per questo la limitiamo allo stretto necessario.

(²) Se s_1 coincidesse con un tratto di l, il punto M si prenderebbe o nel tratto $\overleftarrow{A_1}$ o nel tratto $\overrightarrow{A_n}$.

corrispondente ad s_2 segue il punto X_1. Ciò prova che nessuno dei punti X è l'ultimo del loro insieme.

Ora possono darsi due casi:

1° che a qualunque punto M del raggio r seguano dei punti X;

2° che esista un punto M di r al quale non seguano punti X, in modo che l'insieme dei punti X sia contenuto nel segmento OM.

Nel primo caso, la linea l si dirà *infinita*; e cioè, una linea è infinita quando si può inscrivere in essa una spezzata di un numero finito di lati equivalente a un segmento maggiore di un segmento fissato qualunque.

Nel secondo caso, la linea l si dirà *finita*. Esiste, in questo caso, un segmento minimo OH contenente l'insieme dei punti X; esso è il limite superiore dei segmenti equivalenti alle spezzate di un numero finito di lati inscritti in l, e non è raggiunto se l stessa non è una spezzata di un numero finito di lati.

Il segmento OH si definirà come *equivalente alla linea* l; e si avrà allora che:

XXI. *Una linea* l *qualunque o è infinita o equivale a un segmento rettilineo* λ.

Nel primo caso, fissato ad arbitrio un segmento ω, *si può inscrivere in* l *una spezzata di un numero finito di lati equivalente a un segmento* σ *per il quale si abbia*

$$\sigma > \omega.$$

Nel secondo caso, ogni spezzata s *inscritta in* l *equivale a un segmento* σ *che soddisfa alla relazione*

$$\sigma < \lambda,$$

e, fissato ad arbitrio un segmento ε, *si può determinare* s *in modo che si abbia*

$$\lambda - \sigma < \varepsilon.$$

63. Due linee equivalenti a uno stesso segmento rettilineo, o a segmenti rettilinei uguali, si dicono *equivalenti fra loro*.

L'elemento astratto comune a tutte le linee equivalenti a uno stesso segmento è la *lunghezza* di quelle linee. Una lunghezza si rappresenterà solitamente con un segmento, e si sommeranno due o più lunghezze sommando i segmenti che le rappresentano.

Le linee finite, considerate rispetto al concetto di lunghezza, costituiscono una *classe di grandezze*, la quale, per la corrispondenza fra essa e la classe dei segmenti rettilinei, è *continua, a una dimensione e a un sol senso.* (¹) In essa non esistono grandezze nulle; introducendo nella classe anche le linee infinite, queste si riguarderanno

(¹) V. p. es. BETTAZZI, *Teoria delle grandezze*. Pisa, 1890, p. 19-40 ecc.

come le *grandezze infinite* (tutte equivalenti fra loro) della classe, e saranno quindi da considerare come maggiori di ogni linea finita.

Sarebbe quasi inutile osservare che i concetti di linea *finita* e *infinita* [61], *limitata* e *illimitata* [6], *definita* e *indefinita* [21] sono del tutto distinti. Si può solo affermare in generale che *ogni linea indefinita è illimitata e infinita.*

64. Vogliamo mostrare che, se in una linea esistono uno o due estremi, la lunghezza della linea non cambia sopprimendo questi estremi. Per brevità enuncieremo la proprietà solo per il caso che la linea sia limitata e si sopprimano ambedue gli estremi.

XXII. *La lunghezza di una linea limitata è uguale alla lunghezza della linea illimitata che si ottiene da essa sopprimendone gli estremi.*

Consideriamo le linee $l \equiv AB$ e $\overline{l} \equiv \overline{AB}$; supponendo prima che l sia infinita, dimostriamo che è infinita anche $\overline{l}$.

Fissato un segmento ω qualunque, esiste una spezzata s inscritta in l e di lunghezza $\sigma > \omega$. Se gli estremi di s sono diversi da A e B, s è inscritta anche in $\overline{l}$, e quindi è già detto che in $\overline{l}$ si può inscrivere una spezzata di lunghezza $\sigma > \omega$. Supponiamo dunque che uno degli estremi di s o ambedue siano in A e B, e, per semplicità, che tanto A che B siano estremi di s. Posto

$$s \equiv [A, A_1, \ldots, A_n, B], \quad \sigma \dot{-} \omega = \varepsilon,$$

descriviamo due superfici sferiche di centri A e B e raggio $= \frac{1}{2}\varepsilon$.

Nei tratti AA_1 e BA_n di l prendiamo A′ e B′ interni alle due superfici sferiche; consideriamo le spezzate

$$s' \equiv [A, A', A_1, \ldots, A_n, B', B]$$
$$s'' \equiv [A', A_1, \ldots, A_n, B'].$$

Avremo:

$$\sigma' \geqslant \sigma, \qquad \sigma'' > \sigma' - \varepsilon, \qquad \sigma'' > \sigma - \varepsilon, \qquad \sigma'' > \omega.$$

La spezzata s'' è inscritta in $\overline{l}$ ed ha lunghezza $> \omega$; da questo si deduce che anche $\overline{l}$ è infinita.

Sia, come secondo caso, l finita e di lunghezza λ. Fissato un segmento ε ad arbitrio, in l si può inscrivere una spezzata

$$s \equiv [A, A_1, \ldots, A_n, B]$$

tale che, essendo σ la sua lunghezza, si abbia

$$\lambda - \sigma < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Con centri in A e B descriviamo due superfici sferiche di raggio $= \frac{1}{4}\varepsilon$, e nei tratti AA_1 e BA_n di l prendiamo A′ e B′ interni alle due superfici sferiche. Considerando le spezzate s' ed s'' come nel caso precedente, avremo:

$$\sigma' \geqslant \sigma, \quad \sigma'' > \sigma' - \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \sigma'' > \sigma - \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Quindi, notando che σ'' è certamente minore di λ:

$$\lambda - \sigma'' < \lambda - \sigma + \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

Da questo risulta che anche la lunghezza di $\bar{l}$ è λ.

È evidente che una dimostrazione analoga si può fare se l è limitata e si sopprime uno solo dei suoi estremi, o se l è illimitata in un sol senso e si sopprime l'unico suo estremo.

La lunghezza di una linea composta è la somma delle lunghezze delle sue parti.

65. La somma di due linee, secondo la definizione data [63], si effettua passando dalle linee a due segmenti ad esse equivalenti, sommando i due segmenti, e passando poi, se occorre, dal segmento somma a una linea equivalente ad esso.

Ora vogliamo mostrare che se le due linee ne formano una sola, composta di esse, questa rappresenta la somma di quelle.

XXIII. *Se una linea è divisa in un numero finito di tratti, la lunghezza della linea è la somma delle lunghezze dei vari tratti.*

Supponiamo che una linea L sia divisa da un punto B in due tratti limitati o illimitati, l ed l'; se λ e λ' sono le lunghezze di l ed l', dimostreremo che la lunghezza di L è $\lambda + \lambda'$.

È chiaro intanto che se uno dei tratti l od l' è infinito, anche L è infinita; possiamo quindi supporre che l ed l' siano finiti.

Consideriamo una spezzata inscritta in L,

$$[A_1, \ldots, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n],$$

e indichiamo con lo stesso simbolo anche la sua lunghezza. Il punto B sarà in uno dei tratti A_iA_{i+1} di L, o in uno dei tratti $\overleftarrow{A}_1$ o $\overrightarrow{A}_n$; sia per esempio B nel tratto A_iA_{i+1}, e non escludiamo che possa coincidere anche con A_i. Avremo:

$$\begin{aligned}[A_1, \ldots, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n] &\leqslant [A_1, \ldots, A_i, B, A_{i+1}, \ldots, A_n] \\ &\leqslant [A_1, \ldots, A_i, B] + [B, A_{i+1}, \ldots, A_n] \\ &< \lambda + \lambda'.\end{aligned}$$

Dunque, ogni spezzata inscritta in L ha una lunghezza

$$\sigma < \lambda + \lambda'.$$

Dato un segmento ε ad arbitrio, si può considerare una spezzata inscritta in l

$$[A_1, \ldots, B] > \lambda - \frac{1}{2}\varepsilon,$$

un'altra inscritta in l'

$$[B, \ldots, A_n] > \lambda' - \frac{1}{2}\varepsilon;$$

esse, unite, formano una spezzata inscritta in L:

$$[A_1, \ldots, B, \ldots, A_n] > \lambda + \lambda' - \varepsilon.$$

Dunque, dato un segmento ε ad arbitrio, esiste una spezzata inscritta in L che ha una lunghezza

$$\sigma > \lambda + \lambda' - \varepsilon,$$

per la quale quindi si ha:

$$(\lambda + \lambda') - \sigma < \varepsilon.$$

Questo prova che $\lambda + \lambda'$ è la lunghezza di L.

Dimostrato il teorema nel caso di L divisa in due tratti, il teorema medesimo rimane dimostrato anche per il caso di L divisa in un numero finito qualunque di tratti.

Trasporto di una lunghezza data su una linea finita.

66. Su un segmento, a partire da un estremo, si può prendere una lunghezza uguale a quella di una linea data, purchè minore del segmento stesso. La proprietà si estende dal segmento a qualunque linea finita col teorema seguente:

XXIV. *Una linea finita* l *si può dividere in due tratti, in modo che uno determinato di essi abbia una lunghezza fissata* λ, *minore della lunghezza della linea* l.

L'enunciato di questa proposizione ammette la considerazione così di linee limitate che di linee illimitate, purchè finite; per primo caso supponiamo che l sia limitata, e siano A e B gli estremi.

Cominciamo a osservare che esistono su l dei punti X tali che la lunghezza del tratto AX sia minore di λ, e dei punti Y tali che la lunghezza del tratto AY sia maggiore di λ. Infatti, in l si può inscrivere una spezzata

$$[A_1, \ldots, A_n]$$

la lunghezza della quale sia maggiore tanto di λ che di $l - \lambda$, e si può supporre che A_1 e A_n non coincidano con A e B, perchè la linea $l \equiv \overline{AB}$ ha la stessa lunghezza di l [64]. La differenza fra l e il tratto A_1A_n di l è minore di λ, e quindi il tratto AA_1 ha lunghezza minore di λ; il tratto AA_n ha invece lunghezza maggiore di λ. Ciò prova che il punto A_1 è uno dei punti X, e A_n uno dei punti Y.

Consideriamo il gruppo G_1 dei punti X, e il gruppo G_2 dei punti Y; è certo che i punti di G_1 precedono quelli di G_2. Di più, tanto G_1 che G_2 sono due gruppi illimitati.

Infatti, se X è un punto di G_1, indicando con AX non soltanto il tratto di l ma anche la sua lunghezza, si ha

$$AX < \lambda;$$

per l'osservazione fatta, si può determinare un punto X' del tratto HB, tale che si abbia ancora

$$AX + XX' = AX' < \lambda.$$

Il punto X' segue X ed è anch'esso di G_1. Analogamente, se Y è un punto di G_2, si può determinare un punto Y' del tratto AY di l che sia ancora di G_2.

Non esistendo nè l'ultimo punto di G_1 nè il primo punto di G_2, esiste un punto M che separa i due gruppi e non appartiene nè all'uno nè all'altro. Il tratto AM di l ha appunto la lunghezza λ.

Se la linea l è illimitata, il ragionamento può ripetersi sostituendo alla considerazione dei tratti AX e analoghi quella dei tratti $\overleftarrow{X}$ e analoghi.

67. Il teorema dimostrato permette di trasportare dai segmenti alle linee finite qualunque tutte le proprietà relative alla *divisibilità in parti di ugual lunghezza o aventi fra loro relazioni di lunghezza stabilite.*

Infatti, considerando un segmento equivalente a una data linea finita, ogni divisione in parti di questo segmento si può trasportare sulla linea, in modo che la lunghezza delle parti si mantenga.

La corrispondenza biunivoca fra i punti di una linea finita e quelli di un tratto rettilineo [30, 31] si può stabilire in modo che la distanza fra due punti qualunque del tratto rettilineo sia uguale alla lunghezza del tratto compreso fra i due punti corrispondenti della linea.

Osservazione sulla definizione di lunghezza.

68. Abbiamo definito come equivalente a una data linea il segmento che è il limite superiore dei segmenti equivalenti alle spezzate di un numero finito di lati inscritte nella linea; ora vogliamo mostrare come non sia necessaria la considerazione di tutte le spezzate inscritte, e come sia sufficiente considerare un insieme di esse soddisfacente a certe condizioni. Per questo premettiamo il teorema:

XXV. *Data una linea* l *limitata o illimitata ma finita, e un segmento* ε *ad arbitrio, si può determinare un segmento* h *in modo che tutte le spezzate di un numero finito di lati inscritte in* l, *i vertici delle quali dividono* l *in tratti che possono essere contenuti entro superfici sferiche di raggio* h, *abbiano una lunghezza che differisca da quella di* l *per meno di* ε.

Se l è infinita, dato un segmento ω ad arbitrio si può determinare h in modo che tutte le spezzate soddisfacenti alla condizione suddetta abbiano una lunghezza maggiore di ω.

Nel caso di l finita, esiste una spezzata inscritta in l,

$$s \equiv [A_1, \ldots, A_n],$$

per la quale si ha, dette λ e σ le lunghezze di l ed s:

$$\lambda - \sigma < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posto

$$h = \frac{\varepsilon}{8n},$$

sia s' una spezzata di un numero finito di lati inscritta in l, i vertici della quale dividano l in tratti che possono esser contenuti entro superfici sferiche di raggio h; e siano

$$A'_i, \ldots, A''_i$$

i vertici di essa che si trovano nel tratto A_iA_{i+1} di l, e

$$A'_0, \ldots, A''_0$$
$$A'_n, \ldots, A''_n$$

i vertici di essa che si trovano nei tratti $\overleftarrow{A_1}$ e $\overrightarrow{A_n}$ di l, rispettivamente.

Non si esclude che in qualcuno dei tratti A_iA_{i+1} di l possano non esistere vertici di s', nè che A''_i possa coincidere con A_{i+1}.

Si ha, per quanto abbiamo detto:

$$s' \equiv [A'_0, \ldots, A''_0, A'_1, \ldots, A''_{i-1}, A'_i, \ldots, A''_{n-1}, A'_n, \ldots, A''_n].$$

Consideriamo l'altra spezzata:

$$s'' \equiv [A'_0, \ldots, A''_0, A_1, A'_1, \ldots, A''_{i-1}, A_i, A'_i, \ldots, A''_{n-1}, A_n, A'_n, \ldots, A''_n]:$$

avremo:

$$s'' = s' + \sum_{i=1}^{i=n}(\text{segm. } A''_{i-1}A_i + \text{segm. } A_iA'_i - \text{segm. } A''_{i-1}A'_i).$$

Ma poichè il tratto $A''_{i-1}A'_i$ di l è contenuto entro una superficie sferica di raggio h, i segmenti $A''_{i-1}A'_i$ e $A_iA'_i$ sono ambedue minori di $2h$, onde, indicando con σ' e σ'' le lunghezze di s' e s'', si ha

$$\sigma'' < \sigma' + n \cdot 4h.$$

D'altra parte

$$\sigma \leqslant \sigma'', \qquad \lambda - \sigma < \frac{\varepsilon}{2};$$

sommando membro a membro le tre disuguaglianze si ottiene:

$$\lambda < \sigma' + \frac{\varepsilon}{2} + n \,.\, 4h$$

$$\lambda < \sigma' + \varepsilon$$

dalla quale:

$$\lambda - \sigma' < \varepsilon.$$

Il segmento h risponde dunque alla condizione enunciata.

Analogamente si può procedere nel caso di l infinita.

69. Si abbia un insieme J di spezzate di un numero finito di lati inscritte in una linea l, tale che *assegnato un segmento* h *esista nell'insieme una spezzata i vertici della quale dividano* l *in tratti che possano essere contenuti entro superfici sferiche di raggio* h.

Se la linea l è finita, i segmenti equivalenti alle spezzate dell'insieme J hanno un limite superiore, che è il segmento λ equivalente alla linea; se la linea l è infinita, i segmenti medesimi possono superare qualunque segmento fissato.

Si può perciò, per la determinazione della lunghezza della linea l, sostituire l'insieme J all'insieme di tutte le spezzate inscritte in l. [1]

Così, per es., per una circonferenza è sufficiente la considerazione dei poligoni regolari inscritti.

CAPITOLO IV. — **Proprietà delle linee convesse.**

Linee piane convesse.

70. Una linea piana si dice *convessa* quando per ogni punto di essa si può condurre una retta in modo che tutta la linea si trovi in uno solo dei due semipiani determinati dalla retta medesima; ossia, quando in ogni punto esiste una retta sfiorante [61].

È evidente che questa definizione è una estensione di quella che si dà nei Trattati di Geometria per le linee poligonali convesse. In ogni punto di una linea poligonale convessa la retta sfiorante è quella alla quale appartiene il lato sul quale si trova il punto considerato.

Una linea convessa può anche avere nodi; se, per esempio, una linea ABC è convessa, anche la linea BABC è convessa, e ogni punto del tratto AB è un nodo. Noi però considereremo sempre linee convesse prive di nodi.

Osserviamo subito le due seguenti proprietà delle linee convesse:

1°. *Se una linea è convessa, anche ogni tratto di essa, limitato o illimitato, è una linea convessa.*

---

[1] Non basta che nell'insieme J esista una spezzata coi lati minori di un segmento dato ad arbitrio, anche se si pone la condizione che gli estremi di essa siano negli estremi della linea, ammesso che esistano; infatti, sarebbe necessario escludere che la linea abbia dei nodi, mentre noi abbiamo lasciato alla linea l tutta la generalità.

2°. *Se una retta* r *ha comuni con la linea convessa* l *tre punti o più, la retta* r *è necessariamente una retta sfiorante della linea* l.

E infatti, se dei tre punti A, B, C comuni ad l ed r è B quello che si trova nel segmento determinato dagli altri due, per B deve passare una retta sfiorante di l, e poichè rispetto ad essa A e C non devono trovarsi da parte opposta, così la retta sfiorante è necessariamente la stessa r.

Proprietà caratteristiche d' intersezione di una linea chiusa convessa con le rette del piano.

71. Limitandoci per ora alla considerazione di *linee convesse chiuse e prive di nodi*, cerchiamo quali casi si possono presentare nell'intersezione di una tal linea con una retta del suo piano.

Sia l la linea ed r la retta; supponendo che abbiano almeno un punto comune, r sarà segante o sfiorante per l [61].

Se r è segante, esistono due punti almeno, M ed N, comuni ad l e r; e non possono esistere altri punti communi ad l e r, perchè r dovrebbe essere una retta sfiorante [70].

I punti M, N dividono l in due tratti, i punti dei quali, eccettuati gli estremi, si trovano da parte opposta rispetto ad r; tutti i punti del segmento MN, esclusi M ed N, sono interni alla linea l [61].

Sia ora r una retta sfiorante della linea l. Se A è un punto di l ma non di r, si consideri l come una linea limitata con gli estremi coincidenti in A, e, fissato un senso su l, siano M, N il primo e l'ultimo punto nei quali l incontra r.

Supposto che M ed N non coincidano, sia X un punto qualunque del tratto MN di l; è facile vedere che X è su r.

Infatti, se X non fosse su r si troverebbe, rispetto ad r, dalla stessa parte di A, onde si potrebbe condurre una retta r' parallela ad r e tale che rispetto ad essa la retta r si trovasse da una parte e i punti A, X dall'altra; i tratti AM, MX, XN, NA di l incontrerebbero ciascuno r' in un punto, e quindi r' avrebbe quattro punti comuni con l senza essere sfiorante. Questo, essendo l convessa, non è ammissibile.

Dimostrato che ogni punto X del tratto MN si trova su r, si ha che il tratto MN di l coincide col segmento MN di r [24]; quindi, se una retta sfiorante ha a comune col l più di un punto, ha a comune con essa un intero segmento rettilineo.

Riassumendo, si può enunciare il seguente teorema:

XXVI. *Una linea convessa chiusa e priva di nodi è incontrata da ogni retta segante in due punti, e da ogni retta sfiorante o in un sol punto o in tutti i punti di un segmento rettilineo.*

Nel caso della retta segante, i due punti d' intersezione M, N *dividono la linea in due tratti, i punti dei quali, eccettuati* M *ed* N, *sono da parte* *opposta rispetto alla segante, e i punti interni del segmento* MN *sono interni alla linea.*

72. *Se* A, B *sono due punti della superficie limitata da una linea convessa chiusa e priva di nodi, il segmento* AB *appartiene interamente alla superficie.*

Infatti, la retta AB è sfiorante o segante rispetto alla linea; se è sfiorante, A e B sono due punti di sfioramento e anche tutti i punti del segmento AB sono punti di sfioramento e quindi punti del contorno; se è segante, esistono due punti di intersezione M, N il segmento dei quali è contenuto nella superficie, e poichè i punti A e B sono necessariamente sul segmento MN si ha che anche il segmento AB è contenuto nella superficie.

Si vede anzi di più che il segmento AB o ha solo gli estremi sul contorno o appartiene interamente ad esso.

73. Il Teorema XXVI può scomporsi in due parti, una riguardante l'intersezione di una linea chiusa convessa con una retta sfiorante, e l'altro con una retta segante; ora ci proponiamo di invertire ciascuna di queste due parti, e cioè di mostrare che se una linea piana chiusa e priva di nodi si comporta rispetto a ogni sua retta sfiorante o rispetto a ogni sua retta segante nel modo detto nel teorema precedente, la linea è necessariamente convessa.

Consideriamo prima il caso delle rette sfioranti.

XXVII. *Una linea piana chiusa e priva di nodi che con ogni sua retta sfiorante ha a comune solo un punto o tutti i punti di un segmento rettilineo, è una linea convessa.*

Noi mostreremo come dalla ipotesi fatta segua che in ogni punto della linea considerata l esiste una retta sfiorante.

Si raggiungerà questo scopo considerando l'insieme λ dei punti di l nei quali esiste una retta sfiorante, e dimostrando che tale insieme λ coincide con l.

Con centro in un punto qualunque O del piano di l descriviamo una circonferenza c di raggio maggiore della massima distanza di O dai punti di l. Se A è un punto di c, fra le rette perpendicolari al diametro passante per A ne esistono due che sfiorano la linea l [19]: di queste, quella che ha minor distanza da A sfiora l in un punto A′ o nei punti di un segmento α'. Faremo corrispondere al punto A di c il punto A′ o i punti del segmento α' di l. Così avremo che a ogni punto di c corrisponde un punto di l o i punti di un segmento rettilineo appartenente ad l, ma per semplicità penseremo, in generale, che a un punto di c corrisponda un solo punto di l.

Fissiamo su c un senso, per modo che i due archi nei quali c è divisa da due suoi punti siano sufficientemente distinti dall'ordine dei loro estremi. A due punti diametralmente opposti A ed A_1 di c

corrispondono su l due punti A′ e A'_1, per i quali passano due rette sfioranti a ed a_1 perpendicolari al diametro AA_1; la linea l è compresa nella striscia aa_1. Le rette a e a_1 intercettano sulle semicirconferenze AA_1 e A_1A due archi HH_1 e KK_1; i punti A′ e A'_1 dividono l in due tratti, ciascuno dei quali non ha altri punti comuni con a e a_1, e determina nella striscia aa_1 due regioni, secondo il teorema XIV [38]. Ciascuno dei due tratti $A'A'_1$ di l si trova rispetto all'altro dalla parte di uno degli archi HH_1 e KK_1; fissiamo su l un senso in modo che il tratto $A'A'_1$ sia dalla parte dell'arco HH_1 e il tratto A'_1A' sia dalla parte di KK_1.

È facile vedere che i punti di l corrispondenti ai punti della semicirconferenza AA_1 stanno sul tratto $A'A'_1$, e i punti di l corrispondenti a quelli della semicirconferenza A_1A stanno sul tratto A'_1A'. Se infatti B′ è il punto corrispondente a un punto B di AA_1, per B′ passa una retta sfiorante b che non è parallela ad a e a_1 e rispetto alla quale tutta la linea l si trova nel semipiano opposto a quello nel quale è B; nel medesimo semipiano si trova evidentemente anche l'arco KK_1.

Se per B′ conduciamo un raggio parallelo ad a nel semipiano nel quale è B, questo, senza incontrare l in altri punti che B′, incontra necessariamente l'arco HH_1. Ciò dimostra che B′ è su quello dei due tratti $A'A'_1$, A'_1A' che si trova, rispetto all'altro, dalla parte dell'arco HH_1, cioè è sul tratto $A'A'_1$.

Dall'osservazione fatta segue che a punti di c ordinati nel senso fissato su c corrispondono punti di l ordinati nel senso fissato su l. Limitiamoci alla semicirconferenza AA_1, e siano B, C due punti di essa, e B preceda C; B_1 sia il diametralmente opposto di B; B′, C′, B'_1 i corrispondenti di B, C, B_1. Il punto C si trova nelle semicirconferenze AA_1 e BB_1, onde C′ si trova nei tratti $A'A'_1$ e $B'B'_1$, e perciò si trova nel tratto $B'A'_1$; dunque C′ segue B′ su l, come C segue B su c. Analoga considerazione si può fare per i punti della semicirconferenza A_1A.

Indicando con λ l'insieme dei punti di l che corrispondono ai punti di c, si ha che l'ordinamento dei punti di λ è lo stesso tanto che si consideri determinato dalla corrispondenza di λ con c, quanto dal fatto che l'insieme λ è parte dell'insieme ordinato l. L'insieme λ soddisfa inoltre, per la corrispondenza con c, alla condizione II posta nella definizione di linea [1]; per dimostrare quindi che λ è una linea basta dimostrare che soddisfa anche alla condizione I, e cioè che fissato un punto di λ e una circonferenza con centro in esso, si può considerare in ciascun senso un tratto di λ che ha per estremo quel punto ed è interno alla circonferenza fissata.

Ma facciamo prima una considerazione. Un punto X′ di λ può corrispondere anche a più punti di c; dico che in tal caso quei punti costituiscono un arco di c. Infatti, riguardiamo c come una linea aperta con gli estremi coincidenti in un punto al quale non corrisponda X', ed l come aperta nel punto corrispondente; PQ sia il minimo arco di c nel quale è contenuto l'insieme dei punti ai quali corrisponde X'. Poichè a punti ordinati di c corrispondono punti ordinati di λ, si ha che se a due punti di c corrisponde X', anche a tutti i punti dell'arco da essi determinato non può corrispondere che X', e da ciò segue che a tutti i punti dell'arco PQ (eccettuati, se mai gli estremi), e ad essi soltanto, corrisponde X'. [1] Il dubbio rimane per gli estremi P e Q; ma se ad uno di essi, per esempio P, non corrispondesse X', la retta p condotta per X' perpendicolarmente al diametro OP non sarebbe sfiorante di l, onde esistendo punti di l tanto da una parte che dall'altra di p si potrebbe prendere un punto P_0 nell'arco PQ in un intorno tale di P che anche la retta p_0 condotta per X' e perpendicolare al diametro OP_0 non fosse sfiorante di l. Avremmo così un punto P_0 interno all'arco PQ, al quale non corrisponderebbe X', e questo è assurdo.

Chiarito questo punto, torniamo a fissare un senso qualunque su c e il senso corrispondente su l, e siano M e M' due punti corrispondenti; vogliamo dimostrare che in qualunque tratto di l a partire da M' e nel senso fissato si trovano punti di λ diversi da M'. Può darsi che ad M corrispondano tutti i punti di un segmento di l, fra i quali sia M'; in tal caso possiamo supporre che M' sia l'ultimo punto di questo segmento, nel senso fissato, giacchè altrimenti ogni dimostrazione sarebbe superflua. Così pure può darsi che M' non corrisponda solo ad M; in tal caso supporremo che M sia l'ultimo dei punti ai quali corrisponde M'.

Sia M'R un tratto qualunque di l, nel senso fissato. Consideriamo il punto M_1 diametralmente opposto di M, e sia M'_1 il suo corrispondente; in M' esiste una retta sfiorante m perpendicolare al diametro MM_1 e rispetto alla quale i punti del tratto RM'_1 di l sono dalla parte opposta a quella in cui è M. Prendiamo, come si può, un punto N della semicirconferenza MM_1 tale che rispetto alla retta n_0 condotta per M' perpendicolarmente al diametro ON il punto N e il tratto RM'_1 siano da parte opposta; nel punto N' corrispondente ad N esisterà una retta sfiorante n parallela a n_0, e dalla parte di n_0 nella quale si trova N e non si trova il tratto RM'_1. Il punto N', diverso certamente da M', è sul tratto $M'M'_1$ perchè N è sulla semicirconferenza MM_1, ma non può essere nel tratto RM'_1; è dunque nel tratto M'R.

Dimostrata l'esistenza di un punto di λ in qualunque tratto di l a partire da un punto fissato di λ stesso, ne viene che in qualunque intorno circolare di un punto di λ, come si ha un tratto di l, si ha anche un tratto di λ. L'insieme λ ha perciò il carattere di linea.

---

(1) Si può osservare che l'arco PQ è certamente minore di una circonferenza; infatti a due punti di c diametralmente opposti non può corrispondere uno stesso punto di l.

La linea λ è chiusa, come c, e non ha nodi, come l; poichè i punti di λ sono su l avremo che la linea λ necessariamente coincide con la linea l [26]. Ma λ è l'insieme di quei punti di l nei quali esiste una retta sfiorante; si può dunque concludere che in ogni punto di l esiste una retta sfiorante, e quindi che la linea l è convessa.

74. Segue dal teorema dimostrato che *ogni linea piana chiusa e priva di nodi, non convessa, possiede almeno una retta sfiorante che ha a comune con la linea due punti o più, senza avere a comune con essa un segmento che li contenga.*

Se r è una tal retta sfiorante ed A, B sono i due punti di sfioramento, in ciascuno dei due tratti nei quali A e B dividono la linea si può prendere un punto che non sia su r; siano C, D questi punti. Una retta r' parallela ad r e tale che rispetto ad essa r e i punti C, D siano da parte opposta, è incontrata da ciascuno dei quattro tratti AC, CB, BD, DA almeno in un punto; r' è quindi una retta segante che ha almeno quattro punti diversi comuni con la linea. Due qualunque di essi non sono contenuti in un segmento comune alla linea e ad r'.

Si può quindi affermare che:

XXVIII. *Una linea piana chiusa e priva di nodi che da nessuna retta segante è incontrata in quattro punti o in un gruppo di punti tale che fra essi se ne possano prendere quattro in modo che due di essi non siano contenuti in un segmento rettilineo appartenente al gruppo, è una linea convessa.* (1)

In particolare, se ogni retta segante incontra una linea piana chiusa e priva di nodi in due soli punti, la linea è convessa. Questa proprietà e quella enunciata nel teorema XXVII costituiscono insieme il teorema inverso del XXVI.

La linea convessa più ristretta che inviluppa una linea chiusa non convessa.

75. Una linea piana l è *inviluppata* da un'altra linea λ giacente nel medesimo piano, chiusa e priva di nodi, quando la linea l è contenuta nella superficie limitata dalla linea λ.

È manifesto che ogni linea, purchè non indefinita, è inviluppata da infinite linee, e in particolare da infinite linee convesse; ora noi vogliamo mostrare, considerando una linea chiusa l priva di nodi e non convessa, che fra le linee convesse che la inviluppano ce n'è una λ la quale *stringe* la linea l più da presso di ogni altra, nel senso che ogni linea convessa la quale inviluppa l inviluppa necessariamente anche λ. È la linea che praticamente si otterrebbe immagi-

---

(1) Il gruppo dei punti comuni è perciò necessariamente costituito, per il teorema XXVI, di due soli punti.

nando la superficie limitata da l ritagliata in una lastra di un certo spessore, e ricingendola con un filo elastico; questo rappresenterebbe appunto la linea λ.

XXIX. *Fra le linee convesse che inviluppano una data linea piana* l *chiusa, priva di nodi e non convessa, ne esiste una λ che è a sua volta inviluppata da tutte le altre. La lunghezza di λ è minore della lunghezza di* l.

Poichè l non è convessa, si può considerare una retta r la quale sfiori l in due punti A e B, senza che la sfiori in ogni punto del segmento AB. Prendiamo un punto del segmento AB che non sia su l, e consideriamo i primi punti A_1 e B_1 nei quali i due raggi nei quali r è divisa da quel punto incontrano l; il segmento $s_1 \equiv A_1B_1$ non conterrà altri punti di l all'infuori di A_1 e B_1.

I punti A_1 e B_1 dividono l in due tratti l_1 e l'_1; alle tre linee s_1, l_1, l'_1, le quali hanno a comune gli estremi A_1 e B_1 senza che due di esse abbiano altri punti comuni, si può applicare il teorema XVIII [52], e si ha perciò che una di queste linee è interna alla superficie limitata dalle altre due. La linea interna non può essere s_1, perchè una retta sfiorante non ha punti interni alla linea sfiorata [61]; è dunque una delle linee l_1 o l'_1. Supponiamo che sia la l_1, e che quindi l_1 sia contenuta nella superficie limitata dalla linea chiusa $s_1l'_1$. Considereremo il tratto l_1 come corrispondente al segmento s_1.

Dei segmenti nella condizione di s_1 possono esisterne diversi, e anche infiniti; considerandone due s_1 e s_2, osserviamo che s_2 non può avere un estremo nel tratto l_1, escludendo gli estremi di questo. Infatti, rispetto alla retta alla quale appartiene il segmento s_2 tutta la linea l si trova in uno stesso semipiano, ed in questo sono anche il segmento s_1 e la linea $s_1l''_1$; il tratto $\overline{l_1}$, che è interno a questa linea, non può avere punti comuni col segmento s_2.

Poichè gli estremi di s_2 sono anche quelli del tratto l_2 corrispondente di l, si ha che i due tratti l_1 e l_2 non hanno punti comuni o hanno solo un estremo comune.

Ora consideriamo l'insieme λ costituito:

1° dai punti di l che non appartengono a tratti del tipo l_i;

2° dai punti dei segmenti del tipo s_i.

Fissando un senso su l si viene a fissare un senso anche su ciascuno dei segmenti s_i, onde si ha che λ è un insieme ordinato chiuso, e manifestamente privo di nodi. Di più, stabilendo una corrispondenza biunivoca, a norma del teorema XI [30], fra i punti di ciascuno dei segmenti s_i e quelli del corrispondente tratto l_i, e facendo corrispondere a se stessi i punti comuni a l e λ, si ottiene una corrispondenza biunivoca fra i punti dell'insieme ordinato λ e quelli della linea l, per la quale a un senso di l corrisponde un senso di λ; per questa corrispondenza si ha che l'insieme λ soddisfa alla condizione II posta nella definizione di linea [1].

Che l'insieme λ è una linea è del tutto evidente quando i tratti di λ del tipo s_i sono in numero finito; ma affinchè la dimostrazione sia generale, fissato un punto X di λ e un senso di λ a partire da X, mostriamo come in qualunque intorno circolare c di X esista un tratto di λ adiacente ad X e nel senso fissato.

Il senso fissato su λ fissa un senso anche su ciascuno dei segmenti s_i; sia A_i il primo punto e B_i l'ultimo punto di s_i, in quel senso. Ora, il punto X può essere:

un punto di un segmento s_i, distinto dagli estremi;

un punto del tipo A_i;

un punto del tipo B_i, senza essere del tipo A_i;

un punto comune a l e λ, ma non del tipo A_i o del tipo B_i.

Nel primo caso e nel secondo esiste certo un tratto XX′ del segmento s_i, e quindi di λ, contenuto nell'intorno c; nel terzo e quarto caso consideriamo un tratto XY di l, nel senso corrispondente a quello fissato su λ, contenuto nell'intorno c. Se il tratto XY di l appartiene anche a λ, non c'è altro da dire; se non appartiene tutto a λ, è chiaro che esiste in esso almeno un punto X′ del tipo A_i; e il tratto XX′ di λ è contenuto in c essendo costituito di punti del tratto XY di l e di punti appartenenti a segmenti del tipo s_i aventi gli estremi in punti del tratto XY di l.

Dunque l'insieme λ è una linea, chiusa e priva di nodi; essa è convessa. Infatti, se non lo fosse, esisterebbe una retta che sfiorerebbe λ in due punti M, N senza sfiorarla in altri punti del segmento MN; M ed N non potrebbero essere su l, perchè il segmento MN sarebbe del tipo s_i ed apparterebbe a λ; perciò uno dei punti M, N dovrebbe essere su un segmento del tipo s_i. Ma in tal caso la retta MN non potrebbe evidentemente essere sfiorante di λ, come si è supposto.

76. Per dimostrare che la linea λ inviluppa l, osserviamo che i punti di l che non appartengono a λ sono quelli dei tratti del tipo l_i, esclusi gli estremi. Consideriamo per esempio il tratto l_1, il segmento $s_1 \equiv A_1B_1$, e quel tratto λ_1 di λ che insieme con s_1 forma la intera λ; queste tre linee hanno in comune gli estremi A_1 e B_1 senza che due di esse abbiano altri punti comuni, onde una di esse appartiene alla superficie limitata dalla linea chiusa formata dalle altre due [52]. Ma i punti di s_1 non possono essere interni alla linea chiusa $l_1\lambda_1$, perchè la retta alla quale appartiene s_1 sfiora la linea $l_1\lambda_1$; così i punti di λ_1 non possono essere interni alla linea chiusa s_1l_1, perchè fra i punti di λ_1 ce ne sono anche alcuni appartenenti a l'_1, che, come vedemmo, è esterna alla linea s_1l_1; è perciò necessario ammettere che l_1 sia interna alla linea chiusa $s_1\lambda_1 \equiv \lambda$. Il ragionamento vale per tutti i tratti l_i, e quindi si ha che la linea l è contenuta nella superficie limitata dalla linea λ.

Qualunque altra linea convessa L la quale inviluppi l, inviluppa anche λ; e infatti, poichè la superficie limitata da L contiene gli estremi A_i e B_i di ciascuno dei segmenti s_i, e L è convessa, la superficie suddetta contiene anche ogni altro punto del segmento s_i [72], e contiene perciò λ.

77. Il teorema sarà completamente dimostrato quando avremo veduto che la lunghezza di λ è minore della lunghezza di l. Consideriamo una spezzata σ di un numero finito di lati inscritta in λ, i vertici della quale costituiranno un gruppo finito ordinato secondo un senso di λ, riguardata come aperta con gli estremi coincidenti in un suo punto. Siano

$$s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_k}$$

quei tratti del tipo s_i di λ sui quali si trovano vertici della spezzata σ; al gruppo dei vertici di σ aggiungiamo i punti

$$A_{i_1}, B_{i_1}, A_{i_2}, B_{i_2}, \ldots A_{i_k}, B_{i_k},$$

e ordinando di nuovo il gruppo ottenuto consideriamo i suoi punti come i vertici di una nuova spezzata σ'. Avremo evidentemente, riferendoci alle lunghezze:

$$\sigma \leqslant \sigma'.$$

Ora, dal gruppo dei vertici di σ' sopprimiamo quelli che si trovano sui segmenti s_i, esclusi gli estremi di questi segmenti; la nuova spezzata σ'' differisce da σ' solo per il fatto che alcuni lati di σ'' sono formati di più lati successivi di σ', e quindi si ha:

$$\sigma' = \sigma''.$$

Però σ'', oltre che in λ, è inscritta anche in l. Dalla relazione

$$\sigma \leqslant \sigma''$$

si deduce che la lunghezza di λ è minore di quella di l o la uguaglia.

Ma questo secondo caso è da escludere; infatti, nel tratto l_1 di l consideriamo un tratto HK che non sia rettilineo, e sia l_0 la linea che si ottiene da l sostituendo al tratto HK il segmento HK; avremo:

$$l_0 < l.$$

D'altra parte, la linea λ è nella stessa relazione con la linea l_0 che con la linea l; si ha quindi, per quanto abbiamo veduto:

$$\lambda \leqslant l_0 < l.$$

Così il teorema XXIX è completamente dimostrato.

Relazione fra la lunghezza di una linea chiusa convessa e quella delle linee chiuse che la inviluppano.

78. Il teorema nel quale è espressa la relazione suddetta è il seguente:

XXX. *Una linea chiusa convessa e priva di nodi ha lunghezza minore di quella di qualunque altra linea chiusa e priva di nodi che la inviluppi.*

Se l è la linea convessa e λ è la linea che la inviluppa, notiamo che si può supporre che anche λ sia convessa; infatti, se λ non fosse convessa, si potrebbe ad essa sostituire la più ristretta linea convessa che la inviluppa [75], la quale è di lunghezza minore di quella di λ; tale linea inviluppererebbe anche l, onde quando fosse dimostrato che la lunghezza di l è minore di quella di questa linea convessa sarebbe anche dimostrato che la lunghezza di l è minore di quella di λ.

Per noi dunque anche λ sarà convessa. Inscriviamo in l una spezzata σ di un numero finito di lati, chiusa, e siano i suoi lati $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Può darsi che il lato a_1 appartenga a λ (e in tal caso dovrebbe appartenere anche ad l), ma in generale la retta alla quale appartiene questo lato è una segante di λ, e quindi incontra λ in due punti A_1 e A'_1; a_1 fa parte del segmento $A_1A'_1$ [71]. Nel caso eccezionale che a_1 appartenesse a λ, il segmento $A_1A'_1$ sarebbe per noi a_1 stesso.

I segmenti a_1 e $A_1A'_1$ dividono le superfici $S(l)$ e $S(\lambda)$ rispettivamente ciascuna in due parti, e in una delle due parti di $S(\lambda)$ è ancora contenuta la spezzata σ. Il contorno λ_1 di questa parte è formata dal segmento $A_1A'_1$ e da uno dei due tratti $A_1A'_1$ di λ. Se a_1 appartiene a λ, λ_1 coincide con λ; in ogni altro caso è evidente che, poichè λ_1 si ottiene da λ sostituendo ad uno dei tratti $A_1A'_1$ il segmento $A_1A'_1$ col quale non coincide, la lunghezza di λ_1 è minore di quella di λ. Si ha dunque, riferendoci alle lunghezze:

$$\lambda_1 \leqslant \lambda.$$

La spezzata σ è inviluppata dalla linea convessa λ_1, onde si può ripetere la medesima considerazione sul lato a_2 rispetto alla linea λ_1; avremo così un'altra linea λ_2, e la relazione

$$\lambda_2 \leqslant \lambda_1.$$

Così procedendo avremo:

$$\begin{gathered} \lambda_3 \leqslant \lambda_2 \\ \cdots\cdots \\ \lambda_n \leqslant \lambda_{n-1}. \end{gathered}$$

Ma osserviamo che a_1 fa parte di λ_1, a_2 di λ_1 e λ_2, a_3 di λ_1 λ_2 e λ_3, e così via fino ad a_n che fa parte di $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; la spezzata σ fa dunque parte di λ_n, ed essendo chiusa coincide con λ_n [26]. All'ultima relazione si può dunque sostituire l'altra:

$$\sigma \leqslant \lambda_{n-1}.$$

Notiamo anche che non può darsi che in tutte le relazioni scritte valga il segno di uguaglianza, perchè questo verrebbe a dire che λ coincide con σ, e allora λ coinciderebbe anche con l; si può dunque concludere in ogni caso:

$$\sigma < \lambda.$$

Veduto così che ogni spezzata inscritta in l ha lunghezza minore di quella di λ, si ha

$$l \leqslant \lambda.$$

Per scartare il segno di uguaglianza facciamo questa considerazione: prendiamo un punto M di l che non sia di λ, e quindi interno a λ, e sia r una retta che sfiori l in M; l è segante di λ, e quindi la incontra in due punti H e K. A quel tratto HK di λ che si trova rispetto ad r dalla parte opposta a quella nella quale si trova l sostituiamo il segmento HK; avremo così una linea λ_0 che inviluppa ancora l, ed evidentemente

$$\lambda_0 < \lambda.$$

Avendo già, per quanto abbiamo dimostrato, che

$$l \leqslant \lambda_0,$$

si deduce:

$$l < \lambda.$$

Questo, appunto, ci eravamo proposti di dimostrare.

79. Una linea convessa chiusa e priva di nodi si può immaginare inviluppata da una linea poligonale di un numero finito di lati, per esempio da un quadrato; la lunghezza della linea convessa sarà minore del quadruplo del lato del quadrato, e quindi finita. Si può affermare perciò che *ogni linea convessa chiusa e priva di nodi è una linea finita.*

Ci troviamo così in presenza di una vasta categoria di linee finite; nel seguito ne otterremo una molto più ampia.

Proprietà delle linee convesse aperte.

80. Finora abbiamo considerato soltanto linee convesse prive di nodi e chiuse; in questo paragrafo considereremo invece linee convesse aperte, limitate o illimitate, sempre però prive di nodi.

Cominciamo ad osservare che:

Una linea convessa priva di nodi e illimitata, non indefinita, si può ridurre coll'aggiunta di un punto o di due, a seconda che è illimitata in un sol senso o in ambedue, ad una linea convessa limitata.

Sia l la linea ed M un punto di essa; consideriamo soltanto uno dei tratti nei quali M divide la linea, che indicheremo con $\overrightarrow{\mathrm{M}}$.

Disegniamo sul piano di l un quadrato ABCD in modo che tutti i punti di l siano interni ad esso. Se A′ e D′ sono i punti medi dei lati AB e CD, la retta A′D′ divide il quadrato in due rettangoli AA′D′D e A'BCD'. La retta A'D' può essere sfiorante rispetto al tratto $\overrightarrow{M}$, e allora tutto questo tratto appartiene alla superficie di uno dei due rettangoli; se poi la retta A'D' non è sfiorante, essa incontra il tratto $\overrightarrow{M}$, che è convesso, al più in due punti, e prendendo il punto M_1 su $\overrightarrow{M}$ seguente ai punti d'intersezione (se esistono) si ha che il tratto $\overrightarrow{M_1}$ di l ha tutti i suoi punti interni a quello dei due rettangoli nel quale si trova M_1.

In ogni caso dunque esiste un punto M_1 del tratto $\overrightarrow{M}$ tale che il tratto $\overrightarrow{M_1}$ appartenga alla superficie di uno solo dei due rettangoli, per esempio del rettangolo AA'D'D.

Ora essendo A_1 e D_1 i punti medi dei lati AA' e D'D del rettangolo AA'D'D si conduca il segmento A_1D_1 che divide il rettangolo medesimo in due altri rettangoli AA_1D_1D, $A_1A'D'D_1$; ripetendo le considerazioni già fatte avremo che su $\overrightarrow{M_1}$ si può prendere un punto M_2 tale che tutto il tratto $\overrightarrow{M_2}$ sia contenuto nella superficie di uno solo dei due rettangoli.

Così procedendo avremo una successione di rettangoli

$$R,\ R_1,\ R_2, \ldots,\ R_n, \ldots,$$

che avranno per basi dei segmenti

$$AA',\ A_1A'_1,\ A_2A'_2, \ldots,\ A_nA'_n, \ldots,$$

ciascuno dei quali è la metà del precedente ed è contenuto in esso; e sul tratto $\overrightarrow{M}$ avremo una successione di punti

$$M_1,\ M_2, \ldots,\ M_n, \ldots,$$

con la proprietà che tutti i punti del tratto $\overrightarrow{M_n}$ di l sono contenuti nella superficie del rettangolo R_{n-1}.

I punti $A, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, dei quali alcuni possono anche coincidere fra loro, e i punti $A', A'_1, A'_2, \ldots, A'_n, \ldots$, costituiscono sul segmento AB due gruppi separati di punti; esiste perciò un punto di separazione fra i due gruppi, ed anzi ne esiste uno solo perchè la distanza $A_nA'_n$ decresce indefinitamente col crescere di n. Se questo è A_0 e per esso si conduce una retta r parallela al lato BC del quadrato ABCD, la retta r è tale che assegnato un segmento ε ad arbitrio si può prendere un punto M_h sul tratto $\overrightarrow{M}$ in modo che ogni punto del tratto $\overrightarrow{M_h}$ abbia da r distanza minore di ε.

Un ragionamento analogo fatto rispetto al lato BC anzichè rispetto al lato AB del quadrato ABCD dimostra che esiste una retta r' parallela al lato AB tale che assegnato un segmento ε ad arbitrio si può prendere un punto N_k sul tratto $\overrightarrow{M}$ di l in modo che ogni punto del tratto $\overrightarrow{N_k}$ abbia da r' distanza minore di ε.

Le rette r e r' s'incontrano in un punto X; l'insieme costituito dei punti del tratto $\overrightarrow{M}$ di l, ai quali si conservi lo stesso ordinamento che hanno in $\overrightarrow{M}$, e del punto X che si consideri come ultimo punto dell'insieme, è ancora una linea; infatti esso soddisfa alla condizione II posta nella definizione di linea [1] e soddisfa alla I non solo per tutti i punti del tratto $\overrightarrow{M}$ ma anche per l'estremo X, perchè fissato un intorno circolare qualunque di X si può prendere su $\overrightarrow{M}$ un punto P in modo che il tratto $\overrightarrow{P}$ di l, e quindi il tratto PX del nuovo insieme, sia contenuto nell'intorno fissato.

Uguali considerazioni possono farsi per il tratto $\overleftarrow{M}$ di l, dal quale si ottiene una linea limitata MY mediante l'aggiunta di un determinato punto Y; di modo che la linea illimitata l, coll'aggiunta dei punti X e Y, si riduce a una linea limitata della quale X e Y sono gli estremi.

Che la linea XY sia ancora convessa risulterà dalla proprietà che segue.

81. *Se* $l \equiv AB$ *è una linea limitata priva di nodi che non coincide col segmento* AB, *ed è convessa la linea* l *stessa o almeno il tratto* $\overline{AB}$ *di essa, la linea chiusa* λ *formata di* l *e del segmento rettilineo* AB *è priva di nodi e convessa.*

La linea λ non ha nodi perchè il segmento AB non può avere con l un punto comune C, diverso da A e B; se infatti un tal punto C esistesse, considerando un punto M di l che non sia sul segmento AB e che si trovi, per esempio, nel tratto CB, si potrebbe condurre una retta r rispetto alla quale A ed M si trovassero da una parte e C, B dall'altra; poichè i punti A, C, M, B si troverebbero su l in quest'ordine, ciascuno dei tratti AC, CM, MB incontrerebbe r, onde avremmo una retta con tre punti diversi comuni col tratto $\overline{AB}$ di l, senza essere sfiorante; questo è assurdo perchè il tratto $\overline{AB}$ è convesso.

Ora vediamo se λ è convessa. In ogni punto di λ che appartenga al tratto $\overline{AB}$ di l esiste una retta sfiorante per la linea $\overline{AB}$, e questa è evidentemente sfiorante anche per λ; in ogni punto poi del segmento AB una retta sfiorante per la linea λ è la retta AB stessa. Infatti, supponiamo che esistano due punti M, N di λ, e quindi di l, che siano da parte opposta rispetto alla retta AB; il tratto MN di l incontra la retta AB in un punto C che non può essere nel segmento AB, come abbiamo veduto sopra, e quindi è o sul prolungamento di AB o sul prolungamento di BA, per esempio sul prolungamento di AB. Si può condurre una retta r rispetto alla quale A e N si trovino da una parte, B e C dall'altra; e poichè i punti A, M, C, N, B si trovano su l in quest'ordine, ciascuno dei tratti AC, CN, NB incontra r. Abbiamo così una retta che ha tre punti diversi comuni con l, anzi col tratto $\overline{AB}$ di l, senza essere sfiorante, e questo è assurdo.

Esistendo dunque una retta sfiorante in ogni punto di λ, si conclude che λ è convessa.

82. Dai due teoremi precedenti risulta che:

XXXI. *Una linea convessa aperta priva di nodi, limitata o illimitata ma non indefinita, si può considerare in ogni caso come un tratto di una linea convessa chiusa e priva di nodi.*

Il valore di questa proposizione sta nel fatto che per essa da alcune delle proprietà delle linee convesse chiuse si possono dedurre facilmente delle proprietà delle linee convesse aperte.

83. Una proprietà che si estende senz'altro alle linee convesse aperte è quella contenuta nel teorema XXX [78]. Si ha infatti che:

XXXII. *Una linea convessa aperta e priva di nodi, limitata o illimitata ma non indefinita, ha lunghezza minore di quella di qualunque linea chiusa e priva di nodi che la inviluppi.*

Sia l la linea convessa aperta, che possiamo supporre limitata [80] senza variazione della sua lunghezza [63]. ed l' la linea che la inviluppa. Consideriamo quella linea convessa λ' che inviluppa l' ed è inviluppata da tutte le altre linee convesse che inviluppano l' [75]; la linea λ' invilupperà l ed avrà lunghezza minore di quella di l', o uguale nel caso che anche l' sia convessa.

Se A, B sono gli estremi di l, aggiungendo ad l il segmento rettilineo AB si ottiene una linea λ chiusa, priva di nodi e convessa, sempre inviluppata da λ' [71]. Dalle relazioni, che si riferiscono alle lunghezze delle varie linee:

$$l<\lambda,\ \lambda\leqslant\lambda',\ \lambda'\leqslant l',$$

si ha:

$$l<l',$$

e questo, appunto, si voleva dimostrare.

Una classe ampia di linee finite.

84. Se una linea è convessa, sappiamo che ogni tratto di essa è pure convesso; inversamente, *se ogni tratto limitato della linea priva di nodi* $l\equiv AB$, *non comprendente gli estremi* A *e* B, *è convesso, anche la linea* l *è convessa.*

Prendiamo su l il senso AB, e sia M un punto di l, diverso da A e B; sia poi HK un tratto di AB comprendente M ma non comprendente nè A nè B, e perciò convesso. In M esiste una retta sfiorante r per il tratto HK; dico che r è una retta sfiorante anche per la linea AB.

Su l abbiamo i punti A, H, M, K, B in quest'ordine, e il tratto HK si trova interamente in uno dei due semipiani determinati da r; se tutta l non si trovasse in quel medesimo semipiano, potremmo prendere in uno dei tratti AH o KB, per esempio su KB, due punti R ed S, dei quali R, che potrebbe anche coincidere con K, si trovasse da quella parte di r dalla quale si trovano dei punti di HK, ed S dall'altra; di più potremmo supporre che S non coincidesse con B. Allora è chiaro che, tanto nel caso che H si trovi su r che nel caso contrario, si potrebbe condurre una retta r' tale che rispetto ad essa i punti H ed R fossero da una parte, e i punti M, S dall'altra. Poichè i punti H, M, R, S si seguirebbero su l in questo ordine, avremmo che ciascuno dei tratti HM, MR, RS segherebbe r' almeno in un punto; questo è assurdo perchè il tratto HS è convesso ed r' non lo sfiora.

Dimostrato così che in ogni punto M di l diverso da A e B esiste una retta sfiorante per l, si ha che il tratto $\overline{AB}$ di l è convesso; e allora dal teorema dimostrato al n. 81 segue che anche $l \equiv AB$ è convessa.

85. Supponiamo che su una linea limitata $l \equiv AB$, e che non sia nello stesso tempo convessa e priva di nodi, si possa considerare un tratto AX convesso e privo di nodi; vogliamo dimostrare che *si può prendere su l un punto A_1 in modo che il tratto AA_1 sia convesso e privo di nodi, ma ogni tratto AA'_1 comprendente AA_1 non sia convesso e privo di nodi.*

Consideriamo l'insieme J dei punti X di l tali che il tratto AX sia convesso e privo di nodi, e sia AA_1 il tratto minimo di l che lo contiene.

Intanto si ha che AA_1 è privo di nodi; infatti, se due punti Y e Z di AA_1 coincidessero, e Z fosse diverso da A_1, il tratto AZ_1, con Z_1 compreso fra Z e A_1, avrebbe un nodo in $Y \equiv Z$, e questo non può essere. Se poi A_1 coincidesse con un altro punto Y del tratto AA_1 diverso da A, prendendo un punto W compreso fra Y e A_1 e non sulla retta AY, si potrebbe condurre una retta r rispetto alla quale A e W si trovassero da una parte e $Y \equiv A_1$ dall'altra; i tratti AY, YW, WA_1 incontrerebbero r in tre punti diversi, ed essendo R l'ultimo di questi punti nel senso AA_1, ed S un punto compreso fra R e A_1, avremmo che il tratto convesso AS sarebbe incontrato in tre punti diversi dalla retta r che non è sfiorante; questo, come si sa, è assurdo. Si può dunque ammettere soltanto che A_1 coincida con A, il che porterebbe che il tratto AA_1 fosse chiuso, ma sempre privo di nodi.

Si ha poi che il tratto AA_1 è convesso; infatti, ogni tratto AX di esso è convesso, e quindi è convesso anche ogni tratto A'X di AA_1 non comprendente nè A nè A_1 [84].

Che infine ogni tratto AA'_1 comprendente AA_1 non è nello stesso tempo privo di nodi e convesso risulta dal fatto che A_1 è l'ultimo punto dell'insieme J.

Il tratto AA_1 si potrà chiamare il *massimo tratto* di l convesso e privo di nodi, a partire da A.

86. Ed ora supponiamo che una linea limitata o chiusa $l \equiv AB$ (gli estremi A e B coincideranno se l è chiusa), la quale non sia nello stesso tempo convessa e priva di nodi, ma abbia una sola di queste qualità o nessuna delle due, sia tale che ogni punto di essa sia l'estremo comune di due tratti della linea convessi e privi di nodi. Faranno eccezione gli estremi A e B, a partire da ciascuno dei quali si potrà considerare soltanto un tratto convesso e privo di nodi.

Consideriamo i successivi tratti di l, nel senso AB:

$$AA_1\,,\ A_1A_2\,,\ A_2A_3\,,\ldots,\ A_{n-1}A_n\,,\ldots,$$

intendendo che AA_1 sia il massimo tratto convesso e privo di nodi a partire da A, e in generale A_iA_{i+1} sia il massimo tratto della linea A_iB convesso e privo di nodi, a partire da A_i. Fermandoci, nella successione considerata, al termine $A_{n-1}A_n$, diremo di aver raggiunti, con n tratti convessi e privi di nodi, tutti i punti del tratto AA_n di l.

È facile vedere che con un numero finito di tratti convessi e privi di nodi si può raggiungere ogni punto della linea l. Supposto infatti che ciò non sia, distribuiamo i punti di l in due gruppi G_1 e G_2, ponendo in G_1 quelli che si possono raggiungere con un numero finito di tratti convessi e privi di nodi, e in G_2 gli altri. Poichè i punti che precedono un punto di G_1 sono ancora di G_1, si ha che i gruppi G_1 e G_2 sono separati, e precisamente G_1 precede G_2, nel senso AB.

In G_1 non esiste un ultimo punto, perchè se con n tratti convessi e privi di nodi si raggiunge un punto X di l, con $n+1$ tratti si raggiungono altri punti che seguono X. Così, nel gruppo G_2 non esiste un primo punto; e di fatto, se questo esistesse e fosse Y, si potrebbe, a partire da Y e nel senso YA, considerare un tratto YY' convesso e privo di nodi: il punto Y' sarebbe di G_1, e si potrebbe quindi raggiungere con un numero finito m di tratti convessi e privi di nodi. Questo significa che l'estremo A_m del tratto $A_{m-1}A_m$ si troverebbe nel tratto Y'Y, ed allora è manifesto che il tratto successivo A_mA_{m+1} comprenderebbe Y. Perciò Y sarebbe raggiungibile con $m+1$ tratti convessi e privi di nodi, e questo è assurdo essendo Y un punto di G_2.

Abbiamo dunque i gruppi G_1 e G_2 separati che esauriscono l e non ammettono un punto di separazione, il che contraddice alla definizione di linea.

Dal fatto che l'estremo B di l si può raggiungere con un numero finito di tratti convessi e privi di nodi segue che:

XXXIII. *Una linea limitata o chiusa sulla quale, a partire da un punto qualunque e in ciascuno dei due sensi, si può considerare un tratto* *convesso e privo di nodi, o è essa stessa convessa e priva di nodi, o è scomponibile in un numero finito di tratti convessi e privi di nodi.*

87. Poichè una linea o un tratto convesso e privo di nodi è sempre finito [79], segue dal teorema XXXIII che *le linee soddisfacenti alle condizioni enunciate nel teorema medesimo hanno lunghezza finita.*

Queste linee costituiscono appunto quella categoria molto ampia di linee finite alla quale accennavamo.

P. Benedetti.

DEL MATEMATICO GAETANO GIORGINI

e di una sua memoria inedita

Quando, per ragioni di ufficio, mi trovavo a Massa, facendo delle ricerche nel R. Archivio di Stato, di quella città, nella *Raccolta Lunigianense* fatta dal conte Giovanni Sforza, trovai un manoscritto inedito dell'illustre matematico Giorgini, nel quale è esposta una originale dimostrazione diretta della famosa formula Newtoniana, indipendente dalle teorie del calcolo superiore.

Data l'importanza dell'argomento e per portare un contributo alla storia della matematica, ponendo in luce l'acutezza dell'ingegno analitico del Giorgini, pensai essere utile la pubblicazione della memoria, la quale, per quanto letta dal Giorgini alla Reale Accademia di Lucca il 17 Maggio 1821, non si trova però pubblicata nei rendiconti dell'Accademia stessa e non si trova neppure mentovata nell'elenco delle opere del Giorgini.

Cause indipendenti dalla mia volontà m'impedirono fino ad oggi di dare alle stampe la memoria citata.

Una circostanza tutta speciale m'ha fatto ricordare il manoscritto inedito dell'illustre matematico. Nel Decembre ultimo scorso, Donna Matilde Schiff, nata Giorgini, nepote di Alessandro Manzoni e di Gaetano Giorgini, ha pubblicato in una edizione di soli cinquanta esemplari, un volume, dedicato a' suoi figliuoli, e riservato agli amici intimi e più cari, dal titolo: *Vittoria e Matilde Manzoni.*

In questo, la colta e gentile signora, raccoglie la duplice ed illustre tradizione domestica, quella materna, tutta manzoniana, e quella paterna del ceppo lucchese dei Giorgini.

Di questo libro, pieno di dolci e soavi ricordi, scrissero, per quanto io sappia, Alessandro D'Ancona e Guido Biagi: nel *Giornale d'Italia* il primo, nel *Corriere della Sera* il secondo; e il D.r Valenti nell'*Alfiere* di Roma.

Quest'ultimo però, cogliendo occasione dalla magistrale recensione del D'Ancona, trovò modo di fare una critica acerba (a cui rispose sdegnosamente ed esaurientemente il D'Ancona) facendo comprendere come con quel volume di ricordi si fosse quasi tentato di portar via al Manzoni " luce e calore " e spropositando sugli illustri vecchi di casa GIORGINI dice, fra altro, che GAETANO GIORGINI non lasciò traccia di sè.

Credo, dunque, non fare cosa del tutto inutile per gli studiosi, aggiungere alla Memoria analitica un cenno sulla vita di questo illustre matematico, un poco più ampio di quello che si trova nelle storie della matematica nelle quali il GIORGINI è ricordato.

GAETANO GIORGINI nacque a Montignoso, in quel di Massa, il 15 Giugno 1795, da famiglia patrizia lucchese. Trascorse la sua adolescenza alla corte della Principessa Maria Elisa di Lucca, in qualità di paggio, ed ancor giovanetto fu condotto a Parigi quando la principessa si trasferì presso la corte imperiale. Il GIORGINI, tra lo sfarzo ed il brio della corte imperiale, trovò tempo di dedicarsi profondamente agli studi, tantochè a soli 17 anni potè conseguire il primo premio di matematica nel concorso generale dei Licei di Parigi e la soluzione che egli diede del problema proposto fu dichiarata degna di stampa, insieme a quella data da un altro concorrente: il Monge.

In seguito, nel concorso per l'ammissione alla Scuola Politecnica, fu dichiarato primo per ordine di merito, e primo si mantenne sempre anche da allievo, come appare dai due certificati di F. Arago e S. D. Poisson che si conservano tra le carte di casa GIORGINI:

Je soussigné certifie que Monsieur Giorgini a suivi avec le plus grand succès les cours de Géométrie descriptive que j'ai faits à l'École Polytecnique pendant les deux années qui viennent de s'écouler; qu'il a montré les plus heureuses dispositions pour les recherches mathématiques, et qu'il a toujours été régardé comme le meilleur élève de la promotion.

Paris, le 21 juillet 1814. F. ARAGO

Membre de l'Institut.

Je soussigné professeur de mecanique à l'École Polytechnique certifie que Monsieur Giorgini a suivi avec le plus grand succès les cours que j'ai fait à cette École, pendant cette année et la précédente; que cet élève, entré à l'École le premier de sa promotion, s'est toujours montré digne de ce succès par son intelligence et son aptitude aux sciences mathematiques; et qu'il a confirmé par ses nouveaux succès, l'opinion avantageuse que les premières études dans les Lycées, avaient de lui.

Paris, ce juillet 1814. POISSON

Membre de l'Institut.

Tornato in Italia continuò nei suoi studi prediletti, e nel 1817 pubblicò la *Teoria delle superficie di secondo ordine*, lavoro che gli fece acquistare buon nome in Italia e fuori. Intanto Maria Luisa di Borbone lo nominò Direttore delle Acque, Strade e Macchie del Ducato di Lucca, ed al tempo stesso gli affidò la cattedra di Meccanica e di Calcolo infinitesimale nel Liceo cittadino.

Pubblicò in quel tempo la *Teoria analitica delle proiezioni*, lavoro importante che riscosse gli elogi dei più grandi matematici del tempo. Michele Chasles, l'illustre matematico francese, che fu condiscepolo e poi amico affezionatissimo del GIORGINI e che ebbe per lui tale stima da giungere fino all'ammirazione, (¹) così scriveva nella sua *Mémoire de Géometrie pure sur les systèmes des forces* (1830):

" Cette dernière formule, et celle qui donne le carré de la resul- " tante d'un système de forces, ont été données en premier lieu par " M. Binet, dans un mémoire lu a l'Institut de France 1814; puis " démontrées par M. Giorgini, dans un excellent écrit sur la theorie " analitique des projections „, ed in seguito: " Les théorèmes (37 " et 38).... dont nous avons donné deux démonstrations, ont été dé- " montrés differemment par M. Gergonne et par Mœbius.... M. Gior- " gini de son côte, était parvenu *precédemment* a ces théorèmes. Lui " ayant communiqué l'an dernier plusieurs propriétés générales des " systèmes de deux forces équivalentes, objet dont il venait de s'oc- " cuper pour faire suite à sa theorie des projections, j'eus la satis- " faction d'apprendre, qu'ainsi que cela nous était arrivé souvent " dans nos premières études, nous nous étions rencontré *dans la plu- " part des résultats*, quoiqu'ayant suivi deux marches differents „.

Anche nel suo nuovo ufficio di Direttore delle Acque e Strade ben presto ebbe a distinguersi ed acquistarsi fama tra i valenti della celebre Scuola idraulica toscana.

Alcuni invidiosi, capitanati dall'idraulico padre Michele Bertini, tentarono e riuscirono a farlo cadere in disgrazia presso la Corte di Lucca, tantochè egli, profondamente sdegnato, si ritirò a vita privata e si trasferì a Firenze.

Non abbandonò gli studi prediletti di matematica, nè quelli d'idraulica, ed in quel tempo scrisse la Memoria " *Sur les causes de l'insalubrité de l'air dans le voisinage des marais en communication avec la mer* „, che fu letta alla Reale Accademia di Parigi il 12 Luglio 1825 e che fu poi stampata a cura di Arago e Gay-Lussac ed inserita anche nel " *Rapporto sul bonificamento delle Maremme* „ del Salvagnoli Marchetti. I suoi lavori di matematica e le sue dotte memorie d'idraulica, scritte per ragioni di ufficio o per difendersi valorosamente dagli attacchi degli invidiosi, l'avevano reso noto in Italia e fuori, e perciò il

---

(¹) V. la lettera che il BERTRAND inviò al prof. G. LORIA dopo aver letta la biografia che questi dedicò al GIORGINI nel *Giornale di Matematiche di Battaglini* (1893).

Granduca Leopoldo II volle valersi dell'opera sapiente di lui e nel Novembre del 1825 lo nominò professore di Matematiche applicate nell'Accademia di Belle Arti e membro del Consiglio, che doveva presiedere il nuovo Corpo degli Ingegneri del Granducato.

Poco dopo venne nominato Conservatore generale del nuovo Catasto.

Nel 1828 pubblicò una Memoria " *Sopra alcune proprietà de' momenti principali e delle coppie di forze equivalenti* ", e nel 1834 un'altra Memoria " *Intorno alle proprietà geometriche dei movimenti di un sistema di punti di forma invariabile* ".

Nel 1835 pubblicò il 1° volume degli *Elementi di Statica*, dei quattro che egli aveva divisato pubblicare, ma che disgraziatamente non condusse a termine. Questo 1° volume è un trattato completo di meccanica ed è raccomandabile agli studiosi per chiarezza, eleganza di esposizione e pel rigore scientifico cui è sempre informato. [1]

Per queste opere il GIORGINI ebbe l'onore di essere ascritto tra i XL della Società Italiana delle Scienze. Da quest'epoca poi comincia il periodo della vita più gloriosa del GIORGINI, di cui il signor D.r Valenti, come magistralmente e sdegnosamente scrive l'illustre senatore Alessandro D'Ancona, assevera " che non lasciò tracce di sè " mostrando di non conoscere a fondo la Storia della Toscana. [2]

Fu appunto il GIORGINI che dal 1838 al 1848 dette nuova vita agli studi del Granducato, chiamando i più chiari scienziati di allora (per la più parte esuli, per ragioni politiche, dalla loro patria) ad insegnare nel pisano Ateneo, nell'Aula Magna del quale l'effigie marmorea di lui, fu posta nel 1876. Egli fu nel '39 uno de' fondatori dei Congressi Scientifici, che, se poco giovarono alla scienza, resero però grandi servigi alla causa della libertà. Fece parte nel 1848 del Ministero Capponi in qualità di Ministro agli Affari esteri, e nella Storia documentata della diplomazia europea in Italia, scritta da Nicomede Bianchi, si possono leggere varie lettere di GAETANO GIORGINI che mostrano l'elevatezza della sua mente e dicono da quali sensi di alto patriottismo egli fosse animato. Mise mano nel 1859 al Bonificamento delle Maremme e vi lavorò fino al 1862 con competenza di scienziato e di tecnico.

Ascritto fra i primi al Senato del nuovo Regno, il suo nome figura degnamente in quella eletta pleiade d'insigni uomini toscani che fiorirono in quegli anni, e che ebbero costante dimestichezza con lui. Morì a Firenze il 16 Settembre 1874. L'illustre storico francese I. T. Perrens, insegnante nella stessa Scuola politecnica dove il

[1] V. ROUSE-BALL, *Storia della Matematica*. Appendice sui matematici italiani de' tempi recenti di D. GAMBIOLI.

[2] Per la memoria di MANZONI e GIORGINI, *Giornale d'Italia*, 12 Gennaio 1911.

GIORGINI aveva studiato, in una sua commovente commemorazione scriveva:

" Son âge mûr avait demandé beaucoup pour l'Italie et peu pour " la Toscane, alors qu'il parlait comme Ministre des affaires étran- " gères, en parfait accord avec ce veneré Gino Capponi qui dévait " illustrer son pays par l'histoire, comme Giorgini l'illustrait par les " Mathematiques. Il n'a cessé de vivre qu'après avoir accompli sa " tâche et vu tous ses vœux exaurés, donnant l'édifiant exemple d'un " cœur chaud qui ne se laisse jamais refroidir par les speculations " abstraites, d'un savant illustre qui sût être un grand citoyen „. [1]

La Memoria del GIORGINI di cui ho parlato in principio e che io trascrivo per intero è la seguente:

SOPRA LA DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA NEWTONIANA.

Memoria presentata alla R. Accademia di Lucca nella seduta del 17 Maggio 1821 dall'Accademico GAETANO GIORGINI

Dopo scoperta da Newton la forma generale dello sviluppo in serie delle potenze intiere e positive di un binomio, venne estesa per analogia alle potenze fratte e negative, e successivamente ad una qualunque potenza razionale od irrazionale, reale od immaginaria.

Diverse dimostrazioni furono quindi offerte dagli analisti per liberare dalla induzione una verità così interessante, e merita singolare osservazione quella ingegnosissima che ci ha lasciato Eulero per le potenze fratte e negative.

Ciò non ostante non pare che la formula Newtoniana di un uso tanto comune in tutti i rami delle matematiche abbia sin qui ricevuto una dimostrazione diretta e rigorosa, a meno che non si voglia, come ha fatto il Lagrangia, ricorrere ai superiori principî della derivazione delle funzioni e dello sviluppo in serie delle funzioni istesse.

Ecco come questo ingegno immortale si esprime nella sua bella opera, intitolata *Leçons sur le calcul des fonctions*, dopo di avere, mediante una dotta combinazione dei suoi principî, indicato come si trovino le funzioni derivate di una potenza della forma Ax^m:

" De là, et de la loi des developpement des fonctions resulte une " demonstration aussi simple que génerale et peut-être, la seule ri- " goureuse que l'on ait encore donnée „ e quindi prosiegue la sua luminosa analisi sempre appoggiato alla trascendentale teorica delle derivazioni.

---

[1] Vedi: *Nell'esequie solenni del sen. G. Giorgini* di GIOVANNI SFORZA, Lucca, Cannetto, 1875.

Se dunque l'illustre autore non considerava senza utilità, la rigorosa conferma della formola Newtoniana, ancorchè per ottenerla dovesse ricorrere a tali elevati principî, sarà prezzo dell'opera mostrare come indipendentemente da questi, io sia pervenuto allo stesso oggetto.

Supporrò pertanto rigorosamente dimostrata, come difatti si trova in tutti i trattati di Algebra elementare, la formula Newtoniana nel caso particolare di un esponente intiero e positivo, e questa premessa unita al metodo dei coefficienti indeterminati, mi basterà per dimostrare lo sviluppo in serie delle quantità esponenziali. Quindi, osservando che per passare dalle quantità esponenziali alle potenze, basta supporre che la quantità indeterminata che serve d'esponente alla esponenziale riceva un valore determinato, riuscirà facile la transizione dallo sviluppo in serie di queste, allo sviluppo in serie di quelle, seguendo, come ognun vede, una strada inversa da quella praticata generalmente.

Il metodo dei coefficienti indeterminati consiste, come si sa, nella posizione ipotetica della forma dello sviluppo di una funzione e nella determinazione di coefficienti che soddisfino alle sue proprietà. Così dopo aver posto che lo sviluppo di $f(x+1)$ sia della forma

$$A + B + C^2 + D^3 + \ldots \text{ ecc.},$$

deduce il Lagrangia dalle proprietà della funzione $f(x+1)$, la legge di derivazione dei coefficienti A, B, C....; così operavano tutti gli analisti per lo sviluppo in serie delle funzioni, nè si richiede, nell'attuale stato della scienza, maggior rigore, non essendo riescito sin qui a dimostrare a priori la forma di tali sviluppi.

Pongasi però

$$(1) \qquad a^x = 1 + Ax + A_1x^2 + A_2x^3 + A_3x_4 + \ldots \text{ ecc.},$$

ove

$$A, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3 \ldots \text{ ecc.},$$

sono funzioni di a da determinarsi. Cambiata x in y, poi y in $x+y$, ne deriveranno:

$$a^y = 1 + Ay + A_1y^2 + A_2y^3 + A_3y_4 + \ldots \text{ ecc.},$$
$$a^{x+y} = 1 + A(x+y) + A_1(x+y)^2 + A_2(x+y)^3 + \ldots \text{ ecc.},$$

e siccome per la proprietà caratteristica delle esponenziali

$$a^{x+y} = a^x \times a^y$$

si avrà:

$$1 + A(y+x) + A_1(y+x)^2 + A_2(y+x)^3 + \ldots$$
$$\ldots = (1 + Ax + A_1x^2 + A_2x^3 + \ldots)(1 + Ay + A_2y^2 + A_3y^3 + \ldots)$$

da dove paragonando i coefficienti della prima potenza di x

$$A + 2A_1 y + 3A_2 y^2 + 4A_3 y^3 + \ldots = A(1 + Ay + A_1 y^2 + A_2 y^3 + \ldots)$$

e quindi. y essendo indeterminato,

$$2A_1 = A^2, \quad 3A_2 = AA_1; \quad 4A_3 = AA_2 \ldots \text{ ecc.},$$

ovvero:

$$A_1 = \frac{1}{2} A^2, \quad A_2 = \frac{1}{2.3} A^3; \quad A_3 = \frac{1}{2.3.4} A_4 \ldots \text{ ecc.},$$

e però:

$$(2) \qquad a^x = 1 + Ax + \frac{1}{2} A^2 x^2 + \frac{1}{2.3} A^3 x^3 + \frac{1}{2.3.4} A_4 x_4 \ldots \text{ ecc.}$$

Formola nella quale A rappresenta la funzione di a che soddisfa alla equazione:

$$a = 1 + A + \frac{1}{2} A^2 \ldots \text{ ecc.}$$

Invece della forma di sviluppo scelta a rappresentare a^x, potevamo supporre:

$$(3) \qquad a^x = 1 + Bx + B_1 x(x-1) + B_2 x(x-1)(x-2) + \ldots \text{ ecc.},$$

giacchè questa si riduce alla prima effettuando le moltiplicazioni.

I nuovi coefficienti indeterminati B, B_1, B_2, $B_3 \ldots$ si otterranno dalla equazione identica:

$$(4) \qquad 1 + Ax + A_1 x^2 + A_2 x^3 + A_3 x_4 + \ldots$$
$$\ldots = 1 + Bx + B_1 x(x-1) + B_2 x(x-1)(x-2) + \ldots \text{ ecc.}$$

Ma l'un membro e l'altro di questa equazione, rappresentano egualmente lo sviluppo di a^x, dunque ricordandoci che

$$a^x \times a^m = a^{x+m}$$

ne potremo indurre che l'equazione (4) rimarrà identica, moltiplicando il 1° membro successivo per a, a^2, a^3, $a_4 \ldots$ e cambiando nel secondo, x in $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4 \ldots$, ciò che darà la serie di equazioni:

$$a + Xx = 1 + B + X'x$$
$$a^2 + Yx = 1 + 2B + 2B_1 + Y'x$$
$$a^3 + Zx = 1 + 3B + 3.2B_1 + 3.2B_2 + Z'x$$
$$a_4 + Tx = 1 + 4B + 4.3.B_1 + 4.3.2B_2 + 4.3.2B_3 + T'x$$

nelle quali X, Y, Z... X', X', Z' sono serie ordinarie secondo le potenze di x.

Nelle ottenute identità i termini indipendenti da x dovranno essere uguali nei due membri e quindi avremo:

$$a = 1 + B$$
$$a_2 = 1 + 2B + 2B_1$$
$$a_3 = 1 + 3B + 3 . 2B_1 + 3 . 2B_2,$$
$$a_4 = 1 + 4B + 4 . 3B_1 + 4 . 3 . 2B_2 + 4 . 3 . 2 . B_3 \dots \text{ ecc.},$$

da dove si ricavano successivamente:

$$B = a - 1$$
$$B_1 = \frac{1}{2}(a-1)^2$$
$$B_2 = \frac{1}{2 . 3}(a-1)^3$$
$$B_3 = \frac{1}{2 . 3 . 4}(a-1)_4 \dots \text{ ecc.},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

ciò che dimostra la serie:

$$a^x = 1 + (a-1) + \frac{1}{2}(a-1)^2 x(x-1) + $$
$$+ \frac{1}{2 . 3}(a-1)^3 x(x-1)(x-2) \dots \text{ ecc.},$$

nella quale è evidente la legge secondo cui progrediscono i coefficienti, che può d'altronde dimostrarsi direttamente facendo vedere che se progredisce sino al termine n^{mo} si verifica ugualmente pel termine:

$$(n+1)^{esimo}.$$

Difatti in questa supposizione avremo:

$$a^n = 1 + (a-1)x + \frac{1}{n}(a-1)^2 x(x-1) + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{2.3\dots(n-1)}(a-1)^{n-1}x(x-1)\dots[x-(n-2)] + B_{n-1}x[x-(x-1)] \dots \text{ ecc.}$$

Dovranno poi essere identici i due sviluppi che otterremo moltiplicando la serie (2) per a^n e cambiando nella antecedente, x in $x+n$; ciò che darà:

$$a^n + Vx = 1 + n(a-1) + \frac{n(n-1)}{2}(a-1) + \dots$$
$$\dots + \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^{n-2} + n(a-1)^{n-1} + n(n-2)\dots 3 . 2B_{n-1} + V'x.$$

Ma le parti dei due membri indipendenti da x dovranno essere uguali, dunque:

$$a^n = 1 + n(a-1) + \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^{n-2} + (a-1)^{n-1} + 2\,.\,3\dots(n-1)\,n\,B_{n-1},$$

e siccome n essendo un numero intero è dimostrato che

$$a^n = [1+(a-1)]^n = 1 + n(a-1) + \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2 - \dots$$
$$\dots + \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^{n-2} + n(a-1)^{n-1} + (a-1)^n,$$

ne deriverà sostituendo e liberando B_{n-1}:

$$B_{n-1} = \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4\dots(n-1)\,n}(a-1)^n,$$

ciò che si doveva trovare affinchè non restasse dubbio che la serie (5) non progredisca all'infinito.

Paragonando la prima potenza di x nella serie (2) alla prima di n nella (5) si ottiene:

$$A = (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 \dots \text{ ecc.}$$

Ciò che compisce la determinazione degli elementi che entrano nella serie (2).

Dimostrato come abbiamo fatto, senza altro sussidio che quello della formula Newtoniana nella ipotesi di un esponente intero e positivo le serie che servono allo sviluppo delle esponenziali, ho detto che si passerebbe facilmente allo sviluppo delle potenze.

Difatti, suppongasi adesso che nella serie (5), alla indeterminata x, venga sostituito un nuovo valore determinato m, e si avrà:

$$a^m = 1 + m(a-1) + \frac{m(m-1)}{2}(a-1)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3\dots}(a-1)^3 + \dots \text{ ecc.}$$

Si mette quindi $\frac{p}{q}$ per $(a-1)$ e $1+\frac{p}{q}$ per a ed otterremo, moltiplicando per q^m i due membri, lo sviluppo:

$$(q+p)^m = q^m + mpq^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}p^2q^{m-2} = \frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}p^3q^{m-3} + \dots \text{ ecc.}$$

che dimostra la formula di Newton qualunque sia l'esponente m del binomio $(q+p)$.

D.r Torello Del Chicca
R. S. T. di Livorno.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 783, 784, 786, 787, 788 E 789

783. *Il luogo dei punti M tali che le loro distanze da tre punti dati A, B, C sono in progressione geometrica, si compone di tre cubiche. Che cosa diventano quelle cubiche se A, B, C sono in linea retta ed è AB = BC?*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. R. Gatti, R. S. Comm. di Feltre.

Siano

$$A(x', y'), \quad B(x'', y''), \quad C(x''', y''')$$

i tre punti.

Esprimendo che le loro distanze da un punto $M(x, y)$ sono, in un certo ordine, in progressione aritmetica, si è evidentemente condotti ad una relazione della forma:

$$\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{(x-x'')^2+(y-y'')^2}=\frac{(x-x'')^2+(y-y'')^2}{(x-x''')^2+(y-y''')^2},$$

che dà luogo, siccome si vede facilmente, liberandola dai fratti, all'equazione di una cubica.

Si hanno dunque tre cubiche.

Supponiamo ora che A, B, C siano in linea retta e che sia AB = BC.

Assumiamo la retta AC come asse delle x e B come origine; così, se le coordinate di A sono a, 0, quelle di C saranno $-a$, 0.

Si è perciò condotti alle seguenti relazioni:

$$\frac{(x-\alpha)^2+y^2}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2}{(x+\alpha)^2+y^2} \qquad (1)$$

$$\frac{x^2+y^2}{(x+\alpha)^2+y^2}=\frac{(x+\alpha)^2+y^2}{(x-\alpha)^2+y^2}, \qquad (2)$$

dove $\alpha = \pm a$.

Dalla (1), con un calcolo facile, si deduce:

$$x^2-y^2=\frac{a^2}{2};$$

cioè si ha un'iperbole equilatera, che taglia sull'asse delle x un segmento che è il lato del quadrato la cui diagonale è a.

Dalla (2) si deduce, poi, anche con un calcolo facile:

$$(x^2+y^2)(\alpha+6x)+\alpha(\alpha+2x)^2=0.$$

Non è difficile vedere che questa equazione può anche scriversi:

$$y^2(\alpha+6x)+(\alpha+3x)(2x^2+\alpha x+\alpha^2)=0,$$

d'onde:

$$y^2=-\frac{\alpha+3x}{\alpha+6x}(2x^2+\alpha x+\alpha^2).$$

nella quale il trinomio $2x^2+\alpha x+\alpha^2$ è sempre positivo.

Supponendo $\alpha = +a$, si vede subito che i punti reali della curva, la quale è evidentemente simmetrica rispetto all'asse delle x, hanno le ascisse negative; e precisamente, indicandone con x il valore assoluto, si ha:

$$a - 3\,x \geqslant 0\,,$$
$$a - 6\,x < 0\,.$$

Se ne conclude che il tratto reale della curva è tutto compreso fra le rette

$$x = -\frac{a}{3}\,, \qquad x = -\frac{a}{6}\,.$$

Non riesce, infine, difficile vedere che tale tratto passa pel punto $-\frac{a}{3}$, 0 e che è assintotico alla retta $x = -\frac{a}{6}$.

Analoghe osservazioni si possono fare per $\alpha = -a$.

Nota. — È facile pervenire al risultato relativo all'iperbole, con procedimento elementare.

Indichiamo, infatti, con u, v, w le distanze di M dai punti A, B, C.

Avremo:

$$u^2 + w^2 = 2v^2 + 2a^2\,,$$
$$v^2 = uw\,;$$

d'onde:

$$(u - v)^2 = 2a^2\,;$$
$$u - v = \pm a\sqrt{2}\,.$$

Da tale relazione si deduce che il punto M deve descrivere un'iperbole.

È del pari facile trovare l'equazione delle cubiche, precedentemente considerate, assumendo u e v come *coordinate bipolari* di M.

Si ha, infatti:

$$u^2 + w^2 = 2v^2 + 2a^2\,,$$
$$w^2 = uv\,;$$

d'onde:

$$u^2 + uv - 2v^2 = 2\alpha^2\,,$$

ovvero:

$$(u - v)\,(u + 2v) = 2\alpha\,,$$

la quale permette di esprimere razionalmente u e v mediante un parametro λ, giacchè se si pone

$$u - v = \lambda\,, \qquad u + 2v = \frac{2\alpha}{\lambda}\,,$$

si ha:

$$u = \frac{2\,(\lambda^2 + \alpha)}{3\lambda}\,,$$
$$v = \frac{2\alpha - \lambda^2}{3\lambda}\,.$$

784. *Da un punto qualunque della direttrice d'una parabola si possono condurre quattro corde di eguale lunghezza* a, *che fanno gli angoli* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *con gli assi.*

Dimostrare che, qualunque sia il punto e qualunque sia la lunghezza a, *si ha*

$$\Sigma\ \mathrm{tg}\,\alpha\,.\,\mathrm{tg}\,\beta = 0.$$

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. R. Gatti, R. S. Comm. di Feltre.

Sia $y^2 = 4mx$ l'equazione della parabola e sia $(-m, y')$ un punto della sua direttrice.

L'equazione di una retta condotta per tale punto, sarà della forma

$$y = c(x + m) + y'.$$

È facile vedere che le ordinate dei punti d'incontro di questa retta con la parabola sono le seguenti:

$$\frac{2}{c}\left(m + \sqrt{m^2 - m^2c^2 - mcy'}\right), \qquad \frac{2}{c}\left(m - \sqrt{m^2 - m^2c^2 - mcy'}\right).$$

Se ne deduce immediatamente che le ascisse di tali punti sono, corrispondentemente:

$$\frac{2m - mc^2 - cy' + 2\sqrt{m^2 - m^2c^2 - mcy'}}{c^2},$$

$$\frac{2m - mc^2 - cy' - 2\sqrt{m^2 - m^2c^2 - mcy'}}{c^2}.$$

Perciò il quadrato della loro distanza è dato da

$$\frac{16}{c^2}(m^2 - m^2c^2 - mcy') + \frac{16}{c^4}(m^2 - m^2c^2 - mcy') = a^2.$$

Da questa relazione si deduce:

$$\left(\frac{a^2}{16} + m^2\right)c^4 + my'c^3 + my'c - m^2 = 0.$$

Poichè in quest'equazione del 4° grado rispetto a c, è nullo il coefficiente di c^2, si deduce subito che

$$\Sigma \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta = 0.$$

786. (1) *Sia* ABC *uno dei triangoli di area massima inscritti in una ellisse. Le congiungenti dei punti* A, B, C *con uno dei fuochi* F *incontrano i lati opposti in tre punti* A', B', C'. *Dimostrare che:*

1° le lunghezze AA', BB', CC' *sono eguali ai $\frac{3}{2}$ dell'asse maggiore;*

2° il luogo dei punti A', B', C' *è una quartica unicursale che ha la forma di una conchiglia;*

3° l'area di questa curva è eguale alla differenza fra il doppio dell'area dell'ellisse ed i $\frac{3}{4}$ del suo cerchio principale.

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. F. L. Csada di Máramarossziget (Ungheria).

Essendo O il centro, X l'asse maggiore dell'ellisse, siano A, B, Γ tre punti non coincidenti sul circolo principale e poniamo

$$\widehat{XOA} = \varphi_1, \quad \widehat{XOB} = \varphi_2, \quad \widehat{XO\Gamma} = \varphi_3,$$

$$\widehat{BO\Gamma} = \alpha, \quad \widehat{\Gamma OA} = \beta, \quad \widehat{AOB} = \gamma.$$

(1) L'enunciato, come fu proposto, era errato. Tanto l'A. quanto il prof. Csada lo hanno rettificato nel modo scritto sopra.

È chiaro che

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$$

e che α, β, γ sono diversi da zero.

L'area del triangolo determinato dai punti

$$A(x_1, y_1), \quad B(x_2, y_2), \quad C(x_3, y_3),$$

essendo

$$\begin{aligned} x_i &= a \cos \varphi_i \\ y_i &= b \operatorname{sen} \varphi_i \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

è

$$\Delta = \frac{ab}{2} \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & \operatorname{sen} \varphi_1 & 1 \\ \cos \varphi_2 & \operatorname{sen} \varphi_2 & 1 \\ \cos \varphi_3 & \operatorname{sen} \varphi_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Dalle condizioni di massimo,

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_1} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_2} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_3} = 0,$$

segue che

$$\cos(\varphi_3 - \varphi_2) = \cos(\varphi_1 - \varphi_3) = \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

ovvero

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma$$

da cui, perchè α, β, γ sono diversi da zero,

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{2\pi}{3}.$$

Posto

$$\begin{aligned} x_i &= a \cos \left[\varphi + (i-1) \frac{2\pi}{3}\right], \\ y_i &= b \operatorname{sen} \left[\varphi + (i-1) \frac{2\pi}{3}\right], \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

l'equazione della retta passante pei punti B, C è

$$\xi b \cos \varphi + \eta a \operatorname{sen} \varphi + \frac{1}{2} ab = 0, \ldots \tag{1}$$

l'equazione della retta FA è

$$\xi b \operatorname{sen} \varphi + (e - a \cos \varphi) \eta - eb \operatorname{sen} \varphi = 0, \tag{2}$$

dove $e = \sqrt{a^2 - b^2}$.

1°. Risolvendo i sistemi (1) e (2) rispetto ξ, η e calcolando le differenze $\xi - x_1$, $\eta - y_1$, si hanno

$$\begin{aligned} \xi - x_1 &= -\frac{3a}{2} \cdot \frac{e - a \cos \varphi}{e \cos \varphi - a}, \\ \eta - y_1 &= \frac{3a}{2} \cdot \frac{e \operatorname{sen} \varphi}{e \cos \varphi - a}, \end{aligned}$$

da cui

$$AA' = \sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2} = \frac{3a}{2} = \frac{3}{4}(2a).$$

Similmente si trova che

$$BB' = CC' = \frac{3}{2}\,a\,.$$

Questa proprietà è sufficiente per la costruzione geometrica dei punti della curva.

2°. Eliminando φ fra (1) e (2); si ottiene un'equazione biquadratica tra ξ e η. La curva è una quartica.

Invece di questa curva consideriamone un'altra più generale $C^{(\lambda)}$ che si trova nel modo seguente:

Sia M un punto variabile dell'ellisse e P un punto sul segmento FM tale che MP sia un multiplo λa dell'asse maggiore; il luogo di P è la curva $C^{(\lambda)}$. Per $\lambda = \frac{3}{4}$ si ha la curva della quistione proposta.

L'equazione polare di $C^{(\lambda)}$, preso F per polo e Fx per asse polare, è

$$\rho = -\lambda a + \frac{b^2}{a + e\cos\theta}, \qquad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi.$$

α) La $C^{(\lambda)}$ è una quartica e la parte che appartiene a $(0, \pi)$ è simmetricamente eguale alla parte $(\pi, 2\pi)$ rispetto all'asse delle coordinate polari, perchè

$$\cos\theta = \cos(2\pi - \theta)\,.$$

β) La prima parte di $C^{(\lambda)}$ forma un ovale, se è

$$\rho_0 + \rho_\pi = 0\,,$$

da cui $\lambda = 1$.

γ) Il punto F è sempre un punto doppio, perchè ρ sarà zero due volte in $(0, 2\pi)$.

Due altri punti doppi si possono determinare dalla condizione

$$\rho_\theta + \rho_{\theta+\pi} = 0;$$

si trova:

$$\cos\left\{\begin{matrix}\theta_1\\ \theta_2\end{matrix}\right. = \pm\sqrt{\frac{a^2 - \frac{b^2}{\lambda}}{a^2 - b^2}}\,.$$

Le curve $C^{(\lambda)}$ hanno tre punti doppii, esse sono dunque curve unicursali. La $C^{(1)}$ è oltre a ciò binodale; i nodi sono il fuoco ed il centro dell'ellisse.

3°. L'area della $C^{(\lambda)}$ fra 0 e π è

$$I_\lambda = \frac{1}{2}\int_0^\pi \rho^2\,d\theta = \frac{1}{2}\,\lambda^2 a^2\pi - \lambda a b^2 \int_0^\pi \frac{d\theta}{a + e\cos\theta} + \frac{ab\pi}{2},$$

cioè

$$I_\lambda = \lambda^2\,\frac{a^2\pi}{2} + (1 - 2\lambda)\,\frac{ab\pi}{2},$$

dunque l'area dell'ovale precedente è

$$I_1 = \frac{a^2\pi}{2} - \frac{ab\pi}{2}.$$

787. *Il luogo dei centri delle ellissi di data area tangenti ad una stessa retta in un punto ed aventi in esso lo stesso circolo osculatore, è una retta.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. I. L. Csada di Máramarossziget (Ungheria).

Prendiamo la retta data per asse della x, ed il punto O in cui l'ellisse tocca questa retta per origine del sistema di coordinate cartesiane ortogonali.

L'equazione di un'ellisse passante pel punto O e tangente in O all'asse delle x è

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{23}y = 0. \tag{1}$$

Il raggio del circolo osculatore nel punto O è

$$r = \left[\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = -\frac{a_{23}}{a_{11}}.$$

dunque

$$a_{23} = -ra_{11} \tag{2}$$

L'area dell'ellisse è

$$\pi u = \pi \cdot \sqrt{\frac{-A}{A_{33}\rho_1}} \cdot \sqrt{\frac{-A}{A_{33}\rho_2}} = \frac{\pi A}{A_{33}\sqrt{\rho_1\rho_2}},$$

dove ρ_1, ρ_2 sono le due radici dell'equazione

$$\rho^2 - (a_{11} + a_{22})\rho + A_{33} = 0,$$

essendo A il discriminante della (1), ed $A_{33} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2$.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{23} & 0 \end{vmatrix} = a_{11}a_{23}^2 = a_{11}^3 r^2,$$

e dall'equazione precedente

$$A_{33} = \rho_1\rho_2,$$

cioè

$$u = \left(\frac{a_{11}}{\sqrt{A_{33}}}\right)^3 r^2,$$

da cui

$$\left(\frac{u}{r^2}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{a_{11}^2}{A_{33}}.$$

Determinando dalla (1) le coordinate ξ, η del centro dell'ellisse, si trova:

$$\xi = -\frac{a_{11}a_{12}}{A_{33}} \cdot r, \qquad \eta = \frac{-a_{11}a_{23}}{A_{33}} = \frac{ra_{11}^2}{A_{33}} = \left(\frac{u^2}{r}\right)^{\frac{1}{3}},$$

quindi il luogo del centro è una retta parallela all'asse delle x, ossia alla retta data.

Altra risoluzione del prof. **R. Gatti**, R. S. Comm. di *Feltre*.

788. *Da un punto M si conducano le normali MA, MB, MC ad una parabola e siano* A_1, B_1, C_1 *i vertici del triangolo formato dalle tangenti* A, B, C.

1°. *Le rette* AA_1, BB_1, CC_1 *concorrono in un punto* Q;

2°. *Se* M *percorre una retta,* Q *descrive un'iperbole equilatera;*

3°. *In generale, se* M *percorre una curva di ordine* n, Q *percorre una curva di ordine* 2n.

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. R. Gatti, R. S. Comm. di Feltre.

Data la parabola $y^2 = 4mx$, è facile vedere che le ordinate dei punti della curva pei quali le normali passano per $M(x', y')$ sono le radici della seguente equazione:

$$y^3 + 4m(2m - x')y - 8m^2y' = 0.$$

Indicando quindi con y_1, y_2, y_3 tali ordinate, avremo:

$$\Sigma y_i = 0,$$
$$\Sigma y_i y_j = 4m(2m - x'),$$
$$\Sigma y_i^3 = 24m^2 y'.$$

È del pari facile vedere poi che le coordinate del punto d'incontro delle tangenti alla parabola nei punti x_i, y_i, x_j, y_j sono date date da

$$x = \frac{y_i y_j}{4m}, \qquad y = \frac{y_i + y_j}{2}.$$

Perciò le coordinate del punto C′ d'incontro delle tangenti nei punti

$$A(x_1, y_1), \qquad B(x_2, y_2)$$

sono date, in virtù delle relazioni precedenti, da

$$x = \frac{y_1 y_2}{4m} = \frac{y_3^2 - (y_1^2 + y_2^2)}{8m} = \frac{2y_3^2 + 8m(2m - x')}{8m} = \frac{y_3^2 + 4m(2m - x')}{4m},$$
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{y_3}{2}.$$

L'equazione della congiungente il punto $C(x_3, y_3)$ col punto C′ è dunque:

$$\frac{y - y_3}{x - \frac{y_3^2}{4m}} = \frac{-\frac{3}{2}y_3}{\frac{y_3^2 + 4m(2m - x')}{4m} - \frac{y_3^2}{4m}};$$

cioè:

$$(y - y_3)(x' - 2m) = \frac{3}{2}y_3\left(x - \frac{y_3^2}{4m}\right).$$

L'equazioni delle altre congiungenti AA′, BB′ sono quindi le seguenti:

$$(y - y_1)(x' - 2m) = \frac{3}{2}y_1\left(x - \frac{y_1^2}{4m}\right),$$
$$(y - y_2)(x' - 2m) = \frac{3}{2}y_2\left(x - \frac{y_2^2}{4m}\right).$$

Ricerchiamo l'intersezione delle congiungenti AA′, CC′.
Si ha, all'uopo:

$$(y_3 - y_1)(2m - x') = \frac{3}{2}(y_3 - y_1)x + \frac{3}{8m}(y_1^3 - y_3^3);$$

cioè:

$$\begin{aligned} 2m - x' &= \frac{3}{2}x - \frac{3}{8m}(y_1^2 + y_1 y_3 + y_3^2) \\ &= \frac{3}{2}x + \frac{3}{8m}(y_1 y_2 - y_3^2) \\ &= \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}(2m - x'), \end{aligned}$$

poichè:

$$y_1 y_2 - y_3^2 = y_1 y_3 - y_2^2 = y_2 y_3 - y_1^2 = 4m(2m - x');$$

d'onde:

$$x = \frac{x' - 2m}{3}. \qquad (1)$$

Dalla (1) si deduce quindi che le tre congiungenti AA', BB', CC' concorrono in un punto Q, la cui ascissa $x = \dfrac{x' - 2m}{3}$ e la cui ordinata y soddisfano le equazioni:

$$y = y_1 + \frac{\frac{3}{2} y_1 \left(x - \frac{y_1^2}{4m}\right)}{x' - 2m}$$

$$= y_2 + \frac{\frac{3}{2} y_2 \left(x - \frac{y_2^2}{4m}\right)}{x' - 2m}$$

$$= y_3 + \frac{\frac{3}{2} y_3 \left(x - \frac{y_3^2}{4m}\right)}{x' - 2m},$$

dalle quali, sommando:

$$y = \frac{\frac{1}{2}(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3)}{4m(2m - x')} = \frac{3my'}{2m - x'}.$$

Perciò:

$$x' = 3x + 2m$$

$$y' = -\frac{xy}{m}. \qquad (1)$$

Quindi se $(x'\ y')$ soddisfa un'equazione della forma

$$ax + by + k = 0,$$

(x, y) ne soddisferà un'altra della forma

$$hxy + yx + c = 0.$$

la quale rappresenta un'iperbole equilatera.

Più generalmente, dalle formole (1) si deduce che se (x', y') descrive una curva di ordine n, (x, y) ne descrive un'altra di ordine $2n$.

Nota. — Calcolando il discriminante dell'equazione:

$$y^3 + 4m(2m - x')y - 8m^2 y' = 0,$$

si ha, per la presenza di una radice doppia, la seguente condizione:

$$27py'^2 = 16\left(x' - \frac{p}{2}\right)^3.$$

Questa è l'equazione di una *parabola semicubica*, che è l'*evoluta* della parabola data.

789. *Da un punto qualunque* M *situato sopra una parabola* P *si conducono le* MA, MB *normali in* A, B *alla parabola stessa. E sia* r *l'asse radicale dei circoli circoscritti al triangolo* MAB *ed al triangolo formato dalle tangenti alla parabola in* M, A, B. *Trovare l'inviluppo di* r.

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. R. Gatti, R. S. Comm. di Feltre.

È facile vedere che l'equazione che fornisce le ordinate dei punti della parabola $y^2 = px$ pei quali le normali passano pel punto $M(x', y')$ diventa, se M appartiene alla curva:

$$(y - y')(2y^2 + 2yy' + p^2) = 0.$$

Cosicchè, dette y_1, y_2 le ordinate di A e B, si ha:

$$y_1 = \frac{-y' + \sqrt{y'^2 - 2p^2}}{2}, \qquad y_2 = \frac{-y' - \sqrt{y'^2 - 2p^2}}{2}.$$

Sia $M_1(x, y)$ il punto d'intersezione delle tangenti alla parabola nei punti A, B. È noto che

$$x = \frac{y_1 y_2}{p} = \frac{p}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{y'}{2}.$$

Ed analogamente, se $A_1(x, y)$ è il punto d'incontro delle tangenti in B, M, si ha:

$$x = \frac{y' y_2}{p} = -\frac{x'}{2} - \frac{y'\sqrt{y'^2 - 2p^2}}{2p}, \qquad y = \frac{y' + y_2}{2} = \frac{y' - \sqrt{y'^2 - 2p^2}}{4},$$

e se, infine, $B_1(x, y)$ è il punto d'intersezione delle tangenti in A, M:

$$x = \frac{y' y_1}{p} = -\frac{x'}{2} + \frac{y'\sqrt{y'^2 - 2p^2}}{2p}, \qquad y = \frac{y' + y_1}{2} = \frac{y' + \sqrt{y'^2 - 2p^2}}{4}.$$

Il punto medio del segmento A_1B_1 avrà dunque le seguenti coordinate:

$$x = -\frac{x'}{2}, \qquad y = \frac{y'}{2};$$

e quindi l'equazione della perpendicolare condotta alla tangente in M da tal punto è

$$2y'\left(x + \frac{x'}{2}\right) + p\left(y - \frac{y'}{4}\right) = 0. \tag{1}$$

Ricordiamo ora che il circolo circoscritto al triangolo $M_1A_1B_1$ passa pel fuoco $F\left(\frac{p}{4}, 0\right)$. Premesso ciò, ricercando l'equazione della congiungente M_1F, si vede che essa è perpendicolare alla tangente in M; osservando, poi, che le coordinate del punto medio del segmento M_1F sono $\frac{3p}{8}$, $-\frac{y'}{4}$, si può quindi subito scrivere l'equazione della perpendicolare condotta da tal punto medio alla congiungente M_1F.

$$p\left(x - \frac{3p}{8}\right) - 2y'\left(y + \frac{y'}{4}\right) = 0. \tag{2}$$

Possiamo ora evidentemente affermare che il centro del circolo circoscritto al triangolo $M_1A_1B_1$ è l'intersezione delle rette (1), (2).

Ciò posto, si osservi che il centro del circolo circoscritto al triangolo MAB, che passa, siccome si vede facilmente, per M_1, è il punto medio di MM_1; cioè le sue coordinate sono $\frac{x'}{2} + \frac{p}{4}$, $\frac{y'}{4}$.

Per trovare dunque la congiungente i centri dei due circoli, l'uno circoscritto al triangolo MAB e l'altro, al triangolo $M_1A_1B_1$, basterà trovare quella retta del fascio formato dalla (1) e dalla (2) che passa pel punto $\frac{x'}{2} + \frac{p}{4}$, $\frac{y'}{4}$, L'equazione di tale fascio è

$$2y'\left(x+\frac{x'}{2}\right)+p\left(y-\frac{y'}{4}\right)+k\left\{p\left(x-\frac{3p}{8}\right)-2y'\left(y+\frac{y'}{4}\right)\right\}=0.$$

Ponendo $x=\frac{x'}{2}+\frac{p}{4}$, $y=\frac{y'}{4}$, avremo con calcolo facile:

$$k=\frac{4y'}{p}.$$

L'equazione, quindi, della parallela alla congiungente i centri, condotta dall'origine, è la seguente:

$$6y'x+(p-8x')y=0.$$

E pertanto l'equazione della perpendicolare condotta ad essa dal punto M_1, cioè l'equazione dell'asse radiale r, è

$$(p-8x')\left(x-\frac{p}{2}\right)-6y'\left(y+\frac{y'}{2}\right)=0,$$

ossia:

$$x(p-8x')-6y'y+p\left(x'-\frac{p}{2}\right)=0,$$

che si può anche scrivere:

$$\frac{p-8x}{p}y'^2-2.3yy'+p\left(x-\frac{p}{2}\right)=0.$$

Ponendo

$$L=\frac{p-8x}{p},$$
$$R=3y,$$
$$M=p\left(x-\frac{p}{2}\right),$$

si ha dunque:

$$Ly'^2-2Ry'+M=0.$$

Come è noto, l'inviluppo di una tale retta è la conica $LM-R^2=0$, cioè nel nostro caso:

$$8x^2+9y^2-5px+\frac{p^2}{2}=0.$$

Tale equazione rappresenta evidentemente un'ellisse.

Concludiamo che l'asse radicale r è costantemente tangente a tale curva.

QUISTIONI PROPOSTE

793. Data un'ellisse e, per un punto arbitrario P si possono condurre quattro corde della e avanti la lunghezza $2l$. I punti medi di queste corde appartengono ad un circolo, il centro del quale è indipendente da l.

Dimostrare che se P descrive una ellisse e_1 omotetica e concentrica ad e il centro suddetto descrive una ellisse.

E.-N. BARISIEN.

794. Siano A e B i punti di contatto delle tangenti condotte ad una parabola da un punto M della sua direttrice; siano, inoltre, A_1 e B_1 i punti d'incontro di tali tangenti con la tangente nel vertice; sia, infine, F il fuoco. Trovare l'inviluppo dell'asse radicale r dei circoli circoscritti ai triangoli MAB, FA_1B_1.

R. GATTI.

795. Sieno A e B due punti sopra una parabola, A' e B' le loro proiezioni sull'asse, C il punto d'incontro della normale nel punto A coll'asse della parabola.

Dimostrare che AC, BC ed A'B' sono i lati d'un triangolo rettangolo.

I. L. CSADA.

ERRATA-CORRIGE. — Nell'articolo del prof. Usai, inserito nel fasc. VI, anno XXVI, pag. 289, la formula alla riga 16, va indicata col numero (8). — La prima parte della formula in nota a pag. 292, dev'essere corretta così: $D(f_1, f_1, \dots f_n) = (-1)^i f_i \frac{\partial (f_i, f_1 \dots f_{i-1}, f_{i+1} \dots f_n)}{\partial (x_1 \dots\dots\dots\dots x_n)} =$. — Al primo capoverso della pag. 297 deve leggersi: Si faccia ora $\Gamma = P(\varphi, f)$ ecc.

ADUNANZA

DELLA COMMISSIONE INTERNAZIONALE PER L'INSEGNAMENTO MATEMATICO

(MILANO — 17-20 Settembre 1911)

Sotto la presidenza dell'illustre prof. KLEIN la *Commissione internazionale per l'insegnamento matematico* creata dal Congresso internazionale dei matematici, tenuto a Roma nell'Aprile 1908, si è adunata il 17, 18 e 19 Settembre nei locali del Politecnico di Milano, allo scopo di prendere gli accordi definitivi sulla relazione che dovrà essere presentata al prossimo Congresso di Cambridge (Agosto 1912).

Erano rappresentati quasi tutti i principali Stati di Europa, nel modo seguente:

Austria: DINTZL — WIRTINGER.
Danimarca: HEEGAARD.
Francia: BIOCHE — BOURLET — DE SAINT-GERMAIN — LAISANT.
Germania: KLEIN — LIETZMAN — TIEMERDING.
Inghilterra: GREENHILL — GODFREY — HOBSON.
Italia: CASTELNUOVO — CONTI — D'OVIDIO — ENRIQUES — LAZZERI — SOMIGLIANA — VERONESE.
Norvegia: ALFSEN.
Svezia: VON KOCH.
Svizzera: FEHR — GUBLER — JACOTTET.

I delegati dai vari paesi presentarono le relazioni già stampate e resero conto delle relazioni ancora in corso di stampa o manoscritte. Alcune commissioni nazionali hanno già terminati i loro lavori, altre li hanno così inoltrati che può ritenersi che quasi tutte le relazioni saranno pronte pel Congresso di Cambridge.

Fu poi iniziata la discussione sui due temi posti all'ordine del giorno, che erano i seguenti:

1°. *In qual misura si può tener conto, nelle scuole medie dell'esposizione sistematica della matematica? La quistione della fusione delle differenti branche matematiche nell'insegnamento medio.*

2°. *L'insegnamento matematico teorico e pratico destinato agli studenti di scienze fisiche e naturali.*

Sul primo tema riferì anzitutto il prof. CASTELNUOVO il quale formulò il seguente quadro sinottico, che riassume i vari metodi che si possono seguire nell'insegnamento:

A) Metodo interamente logico. (Esempi: PEANO, HILBERT, HALSTED).

B) Fondamenti empirici, sviluppo logico.

a) tutti gli assiomi enunciati. (Esempi: i principali trattati italiani).

b) una parte soltanto di assiomi enunciati.

c) nessun sistema di assiomi. (Esempi: HOLZMULLER, THIEME).

C) Metodo empirico didattico.

D) Metodo intuitivo empirico. (Esempio: PERRY).

Molti oratori esposero quale era il metodo prevalente nei vari paesi e qualcuno anche si mostrò disposto ad aprire la discussione sulla scelta da farsi universalmente fra i vari metodi sopra esposti, ma in seguito ad osservazione del sen. VERONESE fu convenuto che tale discussione non potesse nè dovesse farsi, scopo della Commissione essendo unicamente quello di presentare al Congresso di Cambridge tutte le notizie statistiche, tutti i materiali occorrenti per una discussione che potrà farsi in un avvenire non molto prossimo.

A proposito della fusione delle differenti branche della matematica riferì il prof. BIOCHE. Il prof. LAZZERI, invitato dal presidente KLEIN, riassunse brevemente le vicende della quistione della fusione della planimetria colla stereometria in Italia, astenendosi dall'aprire la discussione sulla bontà del metodo e riferendosi per questo alle sue precedenti pubblicazioni.

Sul secondo tema riferì il prof. TIEMERDING.

L'ultima seduta fu tenuta pubblicamente e con grande solennità. Parlarono il sen. Colombo, il rappresentante del Governo e del Comune di Milano, presidente KLEIN. Infine il prof. ENRIQUES tenne una dotta conferenza *Sulle matematiche e la teoria della conoscenza.*

Sebbene l'adunanza avesse quasi un carattere privato, si era costituito un comitato locale, sotto la presidenza del prof. Sayno, del quale facevano parte i senatori Colombo e Celoria, i professori Baroni, Fasella e Piazza, e l'ing. Giacomo Loria, il quale organizzò festeggiamenti ed onoranze oltremodo cortesi e cordiali ai convenuti.

La sera di Lunedì 17 ebbe luogo una riunione familiare al Caffè *Cova*; la sera del 18 un sontuoso ricevimento offerto dal Municipio nelle splendide sale di Palazzo Marino; e finalmente il 21 fu dedicato ad una gita al Lago Maggiore, al *Mottarone* e all'Isola Bella, riuscita piacevolissima, malgrado il pessimo tempo. I tre giorni passati in comune erano stati sufficienti per stabilire rapporti amichevoli e cordiali fra tanti cultori delle scienze convenuti da lontani paesi e fra le loro signore; e la giornata passò lietamente come fra amici di vecchia data.

È superfluo dire che l'illustre Klein presiedè con una abilità e una prudenza ammirabili; ma è doveroso dire che tutti i convenuti lasciarono Milano sinceramente grati al Comitato locale per la simpatica e cordiale accoglienza.

BIBLIOGRAFIA

F. Palatini. — *Aritmetica ed algebra* ad uso delle Scuole medie superiori. Petrini-Gallizio, Torino, 1910.

Scopo principale di questa pregevole pubblicazione è quello di avvicinare la teorica dei numeri con quella delle grandezze, senza di che l'insegnamento dell'aritmetica e dell'algebra nelle scuole medie resta quasi privo di valore. E tale scopo il valente A. lo ha assai felicemente raggiunto.

Richiamate nell'*introduzione* (pag. 1-21) le nozioni fondamentali sui numeri razionali, positivi e negativi, dedotti dai concetti di collezione d'oggetti e di divisibilità delle grandezze, l'A. dà nella *prima parte* del suo lavoro (pag. 22-102) lo studio completo di tali numeri, considerati come puri enti astratti; soltanto alla fine li mette in relazione colle grandezze. L'introduzione è svolta in modo tale che si può completamente sopprimere la prima parte e passare senz'altro alla seconda, se c'è bisogno di fare uno studio un po' affrettato.

Nella *seconda parte* (pag. 103-178) l'A. tratta dei numeri reali, introdotti considerando le classi contigue sia di grandezze che di numeri razionali. Dopo di essersi occupato delle 7 operazioni fondamentali. Egli dà le prime nozioni sui limiti e studia le proporzioni fra grandezze e fra numeri, la proporzionalità diretta ed inversa, e le progressioni; colle relative applicazioni alle regole del tre ed ai problemi di interesse, di sconto, di ripartizione, di annualità. In un'*appendice* a questa seconda parte (pag. 179-181) accenna poi brevemente al modo di dedurre lo studio dei logaritmi da quello delle progressioni.

Nella *terza parte* (pag. 182-207) l'A. considera le proprietà dipendenti dal sistema di numerazione; e nella *quarta* (pag. 208-236) fa un breve studio dei numeri complessi.

Svolte nella *quinta parte* (pag. 216-236) le principali nozioni di calcolo letterale, l'A. nella *sesta parte* (pag. 237-295) si occupa delle equazioni lineari o quadratiche ad un'incognita, dei sistemi di equazioni, delle equazioni irrazionali e dell'analisi indeterminata di primo grado; terminando con una raccolta di 1615 *esercizi* (pag. 297-355), opportunamente scelti e bene ordinati, in relazione alle varie parti del libro.

Già da questo breve ed arido riassunto il Lettore deve aver ben compreso che l'A. ha scritto il suo libro con larghezza e modernità di idee. Leggendolo non si sa poi se lodare più il rigore dello svolgimento, o la precisione del linguaggio, o la spigliatezza e la perspicuità dell'esposizione.

Tuttavia, "*perchè non paia che abbiam voluto scrivere un'orazion funebre*" (*Promessi sposi*, Cap. XXII), mi permetto di dichiarare che avrei desiderato l'A. più esclusivo nel metodo seguito; e che, ad es., il vedere non esplicitamente introdotti anche i numeri negativi come simboli operativi sulle grandezze, e il vedere assegnato il posto d'onore alla trattazione puramente formale dei numeri razionali, mi recò non gradita impressione. Alla sincera speranza che il meritato successo del libro gli dia presto l'onore di una ristampa, unisco quella che l'egregio A. renda in essa sempre più intimo e, vorrei,... indissolubile il connubio fra la teoria dei numeri e quella delle grandezze.... Persino in matematica sono recisamente antidivorzista!

PAOLO CATTANEO.

Sir ED. THORPE. — *Storia della Chimica*. Versione dall'inglese. Introduzione e note di R. PITONI. S. T. E. N., Torino, 1911. — L. 3,50.

Quest'opera fa parte della collezione dell'*Association Rationalist Press* e gli editori la presentano al pubblico italiano in ottima veste tipografica e con bella legatura all'inglese, iniziando con essa una raccolta di storie particolari delle singole scienze (già si annunzia la *Storia dell'Astronomia* dell'egregio cultore di quella disciplina che è il prof. Ottavio Zanotti Bianco dell'Università di Torino), in modo da costituire una vera e propria storia dei progressi dello spirito umano. Così avverte una breve introduzione del prof. Rinaldo Pitoni, dove si discorre dottamente del valore della storia della scienza e del modo di trattarne.

Nè meglio si poteva cominciare, perchè il Thorpe, ben noto agli studiosi della Chimica per i suoi lavori originali, i suoi saggi storici e i suoi scritti sul Davy e sul Priestley, mentre conduce il lettore pianamente e con un certo brio tutto britannico dai tempi più remoti fino ai giorni nostri, trova modo di sviluppare le idee più ardue e le teorie più complesse, che hanno guidato i maestri della scienza nella serie di scoperte, di utili applicazioni e in ispecie nella preparazione di numerose sostanze della Chimica organica. Il libro costituisce così, come ebbe a scrivere l'illustre prof. Nasini all'annotatore: "la storia migliore che si poteva dare perchè il lettore acquistasse un'idea chiara dei concetti fondamentali della Chimica nel suo sviluppo".

Naturalmente il Thorpe ha fatto risaltare con abilità il grande contributo recato alla scienza dai suoi concittadini e la parte che riguarda il nostro Paese era stata alquanto sacrificata, dimenticando il più breve cenno del Biringucci, del Sala e perfino del Malaguti e del Sobrero.

Provvede a colmare questa deficienza, il ch.^mo^ prof. Pitoni, con aggiunte che formano oltre la sesta parte del volume e che vanno dalla Chimica presso i Romani fino ad Adolfo Bartoli, non senza qualche occasionale accenno ai viventi. Confrontando la traduzione con l'originale ci si accorge da parecchie correzioni a sviste sfuggite all'Autore, che il testo fu verificato con minuziosa cura.

Anche per questo la traduzione è preferibile all'originale e rende, come ebbe a giudicarne quell'onore della nostra scienza che è il prof. Paternò, " un vero servizio ai giovani chimici italiani ".

D.^r^ G. SALOMONE
prof. di Chimica nell'I. T. di Pinerolo.

Il 6 agosto scorso moriva improvvisamente a Venezia il

PROF. ANSELMO BASSANI

nella ancor verde età di 55 anni. Nato a Novoledo (Vicenza) il 24 Agosto 1856, studiò a Padova ove conseguì la laurea in scienze fisico-matematiche. Insegnò dapprima nei Licei; nel 1887 fu nominato, per concorso, professore della R. Accademia Navale di Livorno; nel 1901 passò, come comandato, alla R. Scuola Macchinisti di Venezia, restando sempre a far parte del ruolo dei professori dell'Accademia Navale; nel 1905 insegnò anche nell'Istituto tecnico di Venezia; dal 1907 insegnava nel R. Liceo " Marco Foscarini " e dal 1909 era anche coadiutore al direttore degli studi della Scuola Macchinisti.

Nei primi anni della sua carriera pubblicò varie interessanti note e memorie su argomenti di calcolo e di analisi; dopo la sua nomina all'Accademia Navale, si dedicò principalmente agli studi di balistica in collaborazione con un valente ufficiale di marina, il tenente di vascello **GREGORIO RONCA**. Un tragico destino volle congiungere nella morte quei due uomini che per lungo tempo erano stati uniti nel lavoro. Gregorio Ronca, divenuto capitano di vascello, dopo aver percorso una brillantissima e fortunata carriera ed essersi conquistato fama ed onori, moriva improvvisamente pochi giorni dopo del suo antico collaboratore, a Napoli, quando era in corso il decreto che lo nominava contr'ammiraglio.

Il **Bassani** fondò anche un giornale scientifico *La Corrispondenza*, che ebbe soltanto due anni di vita.

Valoroso insegnante, egli vivrà a lungo nella memoria dei molti che lo ebbero maestro; e sarà perennemente ricordato con sincero affetto dai colleghi e dagli amici che ne conobbero le doti elettissime del cuore e della mente.

Il rimpianto sincero, profondo, che circonda la sua tomba troppo presto dischiusa, sia di qualche conforto alla desolata famiglia.

Pubblicazioni del prof. Anselmo Bassani.

Elenco delle Opere: *Elementi di geometria*, in collaborazione col prof. G. Lazzeri. Livorno, Giusti, 1891. — *Trattato di balistica esterna*, in collaborazione con G. Ronca. Livorno, Giusti, 1902. — *Primi elementi di geometria*, in collaborazione col prof. G. Lazzeri. Livorno, Giusti, 1902. — *Trattato di meccanica teorico-applicata* ad uso del 2° Corso della R. Scuola Macchinisti. (Litografato). Venezia, 1902.

Elenco delle Note e Memorie: *Due teoremi sull'estrazione di radice*. Roma, Tip. delle Scienze fisiche e matematiche, 1887. Estratto del *Periodico di Matematica*, Anno II, Fascicolo I, 1885. — *Generalizzazione della formula di Lagrange*. Estratto dagli *Atti del R. Istituto Veneto di lettere, scienze ed arti*, Tomo V, Serie VI. Venezia, Tipografia Antonelli, 1887. — *Sulle funzioni determinanti e generatrici di Abel*. Estratto dagli *Atti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli*, Vol. VII, Serie II, Num. 9. Napoli, 1895. — *Contributo alla soluzione razionale del problema balistico*, in collaborazione con G. Ronca, Roma, Forzani e C., 1895. — *Sopra un contributo alla soluzione del problema balistico*, in collaborazione con G. Ronca. Roma, Forzani e C., 1897. — *Nuove formule per il tiro curvo*, nel giornale di scienze militari *La Corrispondenza*, Vol. I. Livorno, Belforte, 1900. — *A proposito dell'aria liquida*. C. S. — *Sulle forme di testa dei proiettili oblunghi che incontrano da parte dell'aria la minima resistenza al moto*. C. S. — *Les grands problèmes géométriques de l'antiquité*. C. S. — *Le probabili perdite di uomini nelle guerre terrestri e marittime dell'avvenire*. C. S., Vol. II, 1901. — *Cannoni Armstrong-Pozzuoli*. C. S. — *Alcuni insegnamenti della guerra Anglo-Boera*. C. S. — *Nota su un criterio di convergenza delle serie infinite a termini positivi*. Estratto dalla *Rivista di matematica elementare*, Serie II, Vol. III. Novara, Tip. della *Rivista di contabilità*. — *Nota di cinematica*. (Traiettoria d'un punto sollecitato da due forze una attrattiva e l'altra ripulsiva, emananti da un centro d'azione fisso). Estratto dal *Giornale di matematica di Battaglini*, Vol. 23. — *Curve piane e derivate*. C. S., Vol. 24. — *Sulle curve $r^m \cos m\theta = a^m$*. C. S. — *Sopra un problema di analisi infinitesimale delle curve piane*. C. S. — *Una formula di analisi*. C. S. — *Sur l'application d'un développement des fonctions implicites à une extension du problème universelle de Wronski*, pubblicata nel *Jornal de sciencias matematicas y astronomicas* di Coimbra. — *Sur une representation des fonctions esponentielles par des produits infinis*. C. S.

G. L.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 17 Ottobre 1911

GENERALIZZAZIONE D'ALCUNE PROPRIETÀ GEOMETRICHE

Dalla conoscenza d'una serie di proprietà d'una classe di figure geometriche, si può, generalizzando convenientemente le medesime, dedurre altre proprietà.

La trattazione di tali proprietà, quanto più è generale, tanto è maggiormente connessa nelle varie sue parti; ne consegue che se, nel trattare le proprietà d'una certa classe di figure, cerchiamo di porci nei casi più generali, otteniamo una trattazione più omogenea, più ordinata, più chiara e, spesso, assai più breve. La diretta dimostrazione dei vari casi particolari ci costringe, il più delle volte, a scegliere metodi affatto differenti nei singoli casi: e allora viene a mancare la conoscenza della ragione diretta di tali proprietà, le quali, per conseguenza, invece di costituire un tutto organico, non potranno essere che un insieme disordinato di leggi.

Vogliamo esporre la generalizzazione d'una serie di proprietà dei triangoli piani.

Vedremo appunto come, da una proprietà generale si possano far scaturire due o più proprietà particolari, in apparenza aventi caratteri affatto differenti.

I. — Triangoli e involuzioni su forme di 1ª specie del loro piano.

1. Nel piano d'un dato triangolo ABC sia assegnata una retta generica p. Su di essa prendiamo, ad arbitrio, un'involuzione di punti.

Per amor di brevità diremo che due rette r, r' del piano sono *coniugate*, rispetto a tale involuzione, quando tagliano p in due punti costituenti una coppia di tale involuzione.

Dualmente: assegnato un punto P arbitrario nel piano d'un triangolo ABC, diremo che due punti R, R′ sono *coniugati*, rispetto ad un'involuzione di rette intorno a P, quando le rette che li proiettano da P costituiscono una coppia di tale involuzione.

2. Nel piano d'un dato triangolo ABC, si prenda, ad arbitrio, un punto H e una retta p; detti rispettivamente A_1, B_1, C_1 i punti in cui la medesima retta taglia i lati BC, CA, AB, il quadrangolo ABCH mostra che le coppie A_1A_0, B_1B_0, C_1C_0 appartengono ad una medesima involuzione di punti.

Viceversa, assegnata ad arbitrio sulla p un'involuzione, siano in questa B_1, C_1 i corrispondenti di B_0, C_0 e sia H il punto d'incontro delle rette BB_1, CC_1. Consideriamo il quadrangolo ABCH: di esso due lati opposti (AC, HB) secano p nei punti A_0, B_1, che costituiscono una coppia della data involuzione, altri due lati opposti (AB, HC) secano p nei punti C_0, C_1, che costituiscono un'altra coppia di punti corrispondenti; perciò, siccome il quinto lato passa per A_0, il sesto lato deve passare per A_1, corrispondente di A_0; dunque anche AA_1 passa per H. Diremo perciò:

Le sezioni, con una medesima retta, dei lati d'un triangolo e delle congiungenti i vertici con un punto arbitrario, sono sei punti in involuzione.

Le rette coniugate ai lati secondo un'involuzione assegnata su una retta, condotte pei vertici opposti, concorrono in un punto.

Enunciamo, senz'altro, le proprietà duali.

Le proiezioni, da uno stesso punto, dei tre vertici d'un triangolo e delle sezioni dei lati con una retta, avvengono secondo sei rette in involuzione.

Assegnata, intorno a un punto arbitrario, un'involuzione di rette, le corrispondenti di quelle che proiettano i vertici tagliano i lati opposti in 3 punti allineati.

3. Casi particolari. — *a*) Nel teor. del n. 2 si può supporre che la retta data sia la retta all'infinito del piano e scegliere su di essa l'*involuzione circolare*. Si ha allora:

Le perpendicolari condotte pei vertici d'un triangolo ai lati opposti concorrono in un punto (**ortocentro**).

b) Si può supporre che l'involuzione di rette assegnata intorno al punto generico di cui è questione nell'ultimo teorema del n. 2, sia quella delle rette perpendicolari. Si ha perciò:

Le perpendicolari condotte per un punto del piano d'un triangolo alle rette che lo congiungono co' vertici incontrano i lati opposti in tre punti allineati.

4. In un piano siano dati due triangoli ABC, A'B'C' e, su una retta p dello stesso piano, sia assegnata un'involuzione di punti, che chiamiamo j. Detti rispettivamente A_0, B_0, C_0; A'_0, B'_0, C'_0 i punti d'incontro dei lati di tali triangoli con la retta p, siano, nell'involuzione j, rispettivamente A_3, B_3, C_3; A'_3, B'_3, C'_3 i corrispondenti dei suddetti punti d'incontro.

Vogliamo dimostrare che se le rette AA'_3, BB'_3, CC'_3 concorrono in un punto, anche le rette $A'A_3$, $B'B_3$, $C'C_3$ concorrono in un punto.

Affinchè le rette AA'_3, BB'_3, CC_3 formino fascio, è necessario e sufficiente che le coppie

$$A_0A'_3,\ B_0B'_3,\ C_0C'_3$$

facciano parte d'una medesima involuzione j'. Ora si osservi che

dai punti A'_0, B'_0, C'_0 mediante l'inv. j, si passa ai punti A'_3, B'_3, C'_3,
„ „ A'_3, B'_3, C'_3 „ „ j, „ „ „ „ A_0, B_0, C_0,
„ „ A_0, B_0, C_0 „ „ j, „ „ „ „ A_3, B_3, C_3.

La serie di queste operazioni è *invertibile*; perciò le proiettività $\begin{matrix} A'_0\, B'_0\, B'_0 \\ A_3\, B_3\, C_3 \end{matrix}$ è un'involuzione j'. Si conchiude pertanto che anche le rette $A'A_3$. $B'B_3$. $C'C_3$ concorrono in un punto (n. 2).

Questo ragionamento regge evidentemente anche nel caso in cui alla involuzione j si sostituisca la proiettività identica. Si può dunque enunciare senz'altro il seguente teorema:

a) *Assegnata, su una retta del piano di due triangoli, un'involuzione o la proiettività identica, se tre rette uscenti dai vertici dell'uno e coniugate rispettivamente coi lati dell'altro, sono concorrenti, anche le rette uscenti dai vertici del secondo e coniugato rispettivamente coi lati del primo sono concorrenti.*

Il teorema duale del precedente può enunciarsi nel seguente modo:

b) *Assegnata un'involuzione di rette, o la proiettività identica, attorno a un punto del piano di due triangoli, se le corrispondenti delle rette che proiettano da quel punto i vertici dell'uno secano i lati rispettivi dell'altro in tre punti allineati, anche le corrispondenti delle rette che proiettano i vertici dell'altro secano i lati rispettivi del primo in tre punti allineati.*

Nel caso della proiettività identica questi teoremi possono enunciarsi sotto una forma alquanto più semplice:

a') *Se le congiungenti i vertici d'un triangolo co' punti in cui una certa retta incontra i lati d'un altro triangolo, concorrono in un punto, anche le congiungenti i vertici di quest'ultimo rispettivamente co' punti in cui la stessa retta incontra i lati del primo, concorrono in un punto.*

b') *Se le congiungenti i vertici d'un triangolo con un punto del suo piano incontrano rispettivamente i lati d'un altro in tre punti allineati, anche le congiungenti i vertici del secondo, con lo stesso punto, incontrano rispettivamente i lati del primo in tre punti allineati.* (1)

5. Fra i casi particolari notevoli citiamo quelli che si hanno considerando nel piano dei triangoli la retta all'infinito e, su di essa, la proiettività identica e l'involuzione circolare. Abbiamo perciò:

Se le $\begin{matrix} \textit{parallele} \\ \textit{perpendicolari} \end{matrix}$ *condotte pei vertici d'un triangolo ai lati d'un altro concorrono in un punto, anche le* $\begin{matrix} \textit{parallele} \\ \textit{perpendicolari} \end{matrix}$ *condotte pei vertici del secondo rispettivamente ai lati del primo concorrono in un punto.* (2)

(1) V. la mia nota "Sul triangolo", *Periodico di Matematica*, anno XXIII, pag. 154 (1908).

(2) Questo enunciato comprende il noto teorema dei triangoli *ortologici*: STEINER, *Giornale di Crelle*, II, 287; LEMOINE, *Journal de Math. spéciales*, 1889.

6. Si abbiano due terne di punti XYZ, X'Y'Z' su di una stessa punteggiata. Siano individuate:

un'involuzione j_x mediante le coppie YZ e Y'Z';
" j_y " " " ZX e Z'X';
" j_z " " " XY e X'Y'.

Suppongasi che questi punti siano fra loro legati in guisa che i corrispondenti di X, Y, Z nelle involuzioni j_x, j_y, j_z coincidano in un punto V. Dimostriamo che, quando tale ipotesi è soddisfatta, anche i corrispondenti di X', Y', Z' nelle medesime involuzioni coincidono in un punto V'.

Invero, quando quella ipotesi si verifica, si ha che:

dai punti Z, Z', V, mediante l'inv. j_y si passa ai punti X, X', Y;
" " X, X', Y " " j_z " " " " Y, Y', X.

Dunque la proiettività che si ottiene trovando dei punti di p_1 corrispondenti nell'involuzione j_y, indi, di quest'ultimi, i corrispondenti nella j_z, non è altro che l'involuzione j_x. Detti perciò V'_x, V_y, V_z i corrispondenti di X,' Y', Z' nelle involuzioni j_x, j_y, j_z, abbiamo:

dai punti X' e V'_y, mediante l'inv. j_y si passa ai punti Z' e Y';
" " Z' e Y' " " j_z " " " " V'_z e X;

dal che consegue che V'_y e V'_z coincidono col corrispondente di X' nella involuzione j_x, ossia che V'_x, V'_y, V'_z coincidono in un unico punto V'.

Quando due terne di punti XYZ, X'Y'Z' d'una retta soddisfano alle condizioni sovra esaminate, diremo che costituiscono una *pseudo-involuzione*, oppure che le medesime sono *pseudoinvolutoriamente coniugate.*

Ne consegue che *una medesima retta è tagliata dai lati d'un triangolo e dalle congiungenti i vertici con tre punti allineati presi sui lati opposti secondo due terne pseudoinvolutoriamente coniugate.*

Si dirà che V e V' sono i *centri involutori* in ordine alle terne XYZ, X'Y'Z'; nominando le terne in quest'ordine, si dirà che V è il *centro diretto* e V' il *centro inverso.*

E dualmente.

7. Si abbia un triangolo ABC e s'indichino rispettivamente con A_0, B_0, C_0 i punti in cui BC, CA, AB tagliano una retta p del piano ABC. Siano A', B', C' tre punti pseudoinvolutoriamente coniugati ad A_0, B_0, C_0: siano R, R' i due centri involutori.

Le coppie B_0C_0, B'C', A_0R appartengono ad un'involuzione j_a;
" C_0A_0, C'A', B_0R " " " j_b;
" A_0B_0, A'B', C_0R " " " j_c.

Indichiamo rispettivamente con R_a, R_b, R_c i punti in cui le rette AA', BB', CC' tagliano BC, CA, AB. Dal quadrangolo BCR_bR_c, del quale due lati opposti (BR_c, CR_b) tagliano p secondo la coppia B_0C_0 dell'involuzione j_a, altri due lati (BR_b, CR_c) tagliano p secondo la coppia $B'C'$ della medesima involuzione e di cui il quinto lato passa per A_0, si ricava che R sta su R_bR_c. Dunque R_b e R_c sono allineati con R; e poichè, analogamente, si dimostra che R_c e R_a sono allineati con R, si conchiude che R_a, R_b, R_c appartengono a una stessa retta r. Diremo dunque:

Le congiungenti i vertici d'un triangolo rispettivamente coi punti d'una retta che sono pseudoinvolutoriamente coniugati coi suoi punti d'incontro coi lati, incontrano i lati stessi in tre punti allineati.

E dualmente:

8. Suppongasi (v. n. 4) che le rette AA'_3, BB'_3, CC'_3 taglino i lati BC, CA, AB in tre punti R_a, R_b, R_c appartenenti a una retta r, la quale tagli p in R. Vogliamo dimostrare che, conseguentemente, anche le rette $A'A_3$, $B'B_3$, $C'C_3$ tagliano i lati $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ in tre punti R'_a, R'_b, R'_c d'una retta r'.

Nella ipotesi suaccennata le terne di punti $A_0B_0C_0$ e $A'_3B'_3C'_3$ sono pseudoinvolutoriamente coniugate (n. 6); in ordine a queste terne R è il centro involutorio diretto e sia R_1 il centro involutorio inverso. Si ha, evidentemente, che

le coppie B_0C_0, $B'_3C'_3$, RA_0, $R_1A'_3$ appartengono ad un'invol. j_a;
" C_0A_0, $C'_3A'_3$, RB_0, $R_1B'_3$ " " " j_b;
" A_0B_0, $A'_3B'_3$, RC_0, $R_1C'_3$ " " " j_c.

Nell'involuzione j siano R', R'_1 i corrispondenti dei punti R, R_1. Ciò posto, si osservi che:

dai punti B'_0, B_3, R'_1 mediante l'inv. j si passa ai punti B'_3, B_0, R_1;
" B'_3, B_0, R_1 " " j_a " " " C'_3, C_0, A'_3;
" C'_3, C_0, A'_3 " " j " " " C'_0, C_3, A'_0.

Poichè la serie di queste operazioni è invertibile, si deduce che la proiettività $\dfrac{B'_0\, B_3\, R'_1}{C'_0\, C_3\, A'_0}$ è un'involuzione; dunque esiste un'involuzione j'_a della quale fanno parte le coppie $B'_0C'_0$, B_3C_3, $A'_0R'_1$. Si dimostra, in modo perfettamente analogo che esistono altre due involuzioni j'_b, j'_c delle quali fanno rispettivamente parte le coppie $C'_0A'_0$, C_3B_3, $B'_0R'_1$ e $A'_0B'_0$, A_3B_3, $C'_0R'_1$. Ne consegue che le terne $A'_0B'_0C'_0$ e $A_3B_3C_3$ sono pseudoinvolutoriamente coniugate (n. 6) e, quindi, che le rette $A'A_3$, $B'B_3$, $C'C_3$ tagliano $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ in tre punti R'_a, R'_b, R'_c d'una retta r' (n. 7).

Il precedente ragionamento regge anche se all'involuzione j si sostituisce la proiettività identica. Si ha, conseguentemente, il seguente teorema:

a) *Assegnata, su una retta del piano di due triangoli, un'involuzione, o la proiettività identica, se le rette passanti pei vertici dell'uno e coniugate coi lati dell'altro, secano i lati del primo in tre punti allineati, anche le rette passanti pei vertici del secondo e coniugate coi lati del primo, secano i lati del secondo in tre punti allineati.*

Traducendo per dualità questo teorema, si ha:

b) *Assegnata, intorno a un punto del piano di due triangoli, un'involuzione o la proiettività identica, se le congiungenti i vertici dell'uno coi punti dei lati opposti che sono coniugati ai vertici dell'altro concorrono in un punto, anche le congiungenti i vertici del secondo coi punti de' lati opposti che sono coniugati ai vertici del primo concorrono in un punto.*

Nel caso della proiettività identica, questi teoremi prendono una forma alquanto più semplice, e cioè:

a') *Se le congiungenti i vertici d'un triangolo co' punti in cui una certa retta taglia i lati d'un altro, incontrano i lati opposti del primo in tre punti allineati, anche le congiungenti i vertici del secondo rispettivamente co' punti in cui la stessa retta taglia i lati del primo, incontrano i lati opposti del secondo in tre punti allineati.*

b') *Se le congiungenti i vertici d'un triangolo colle proiezioni, sui lati opposti del medesimo dei vertici d'un altro da un certo punto, sono concorrenti, anche le congiungenti i vertici del secondo colle proiezioni sui lati opposti di esso dei vertici del primo, dallo stesso punto, sono concorrenti.* (1)

9. Sono notevoli i casi particolari che si hanno allorchè la retta p è la retta all'infinito del piano e, sulla medesima, si considera la proiettività identica e l'involuzione circolare. Si ha così:

Se le $\begin{matrix}\textit{parallele}\\ \textit{perpendicolari}\end{matrix}$ *condotte pei vertici d'un triangolo ai lati d'un altro incontrano i lati del primo in tre punti allineati, anche le* $\begin{matrix}\textit{perpendicolari}\\ \textit{parallele}\end{matrix}$ *condotte pei vertici del secondo ai lati del primo incontrano i lati del secondo in tre punti allineati.*

10. In un piano siano dati due triangoli ABC, A'B'C' e una retta p. Noi possiamo individuare, fra due piani π e π', sovrapposti al piano che si considera, un'omografia, imponendo che alle punteggiate BC, CA, AB e p, considerate in π, corrispondano in π' le punteggiate B'C', C'A', A'B' e p.

Tale omografia subordina, sulla retta p, una proiettività nella quale ai punti A_0, B_0, C_0, in cui i lati BC, CA, AB tagliano la retta p, corrispondono i punti A'_0, B'_0, C'_0 nei quali la medesima retta è tagliata dai lati B'C', C'A', A'B'.

Detto P un punto di π, sia P' il corrispondente in π' nella omografia sopra descritta. Se chiamiamo A_1, B_1, C_1; A'_1, B'_1, C'_1 i punti in cui la retta p taglia le rette AP, BP, CP; A'P', B'P', C'P', le terne

(1) V. la mia nota "Sul triangolo", sopra citata.

$A_1B_1C_1$, $A_1'B_1'C_1$ si corrispondono nella proiettività subordinata sulla p. Ritenendo il punto P legato al triangolo ABC ed il punto P′ legato al triangolo A′B′C′, diremo brevemente che *i punti* P *e* P′ *sono corrispondenti dei triangoli* ABC, A′B′C′, *rispetto alla retta* p.

Analogamente diremo che *due rette* r, r′ *sono corrispondenti dei triangoli* ABC, A′B′C′ *per rispetto alla retta* p, *quando tali rette si corrispondono nell'omografia suddetta.*

Dualmente si definiscono rette *corrispondenti di due triangoli per rispetto a un punto e punti corrispondenti di due triangoli per rispetto a un punto.*

11. Siano P, P′ due punti corrispondenti di due triangoli ABC, A′B′C′ per rispetto a una retta p del loro piano comune. Indichiamo, al solito, con A_0, B_0, C_0; A'_0, B'_0, C'_0 i punti d'incontro, dei lati con la retta p e con A_1, B_1, C_1; A'_1, B'_1, C'_1 i punti d'incontro della medesima retta con AP, BP, CP; A′P′, B′P′, C′P′. L'omografia $\frac{B'C',\ C'A',\ A'B',\ p}{BC,\ CA,\ AB,\ p}$, che chiameremo Φ, subordina sulla retta p una proiettività, che chiameremo φ, nella quale è compresa, come abbiamo veduto, la proiettività $\frac{A'_0B'_0C'_0}{A_0B_0C_0}$.

Sulla retta p sia assegnata un'involuzione j, della quale facciano parte le coppie

$$A_1A_2,\ B_1B_2,\ C_1C_2,\ A'_1A'_2,\ B'_1B'_2,\ C'_2B'_2,$$
$$A_0A_3,\ B_0B_3,\ C_0C_3,\ A'_0A'_3,\ B_0'B'_3,\ C'_0C'_3,$$

e si supponga che le rette AA'_2, BB'_2, CC'_2 concorrano in un punto.

Esiste allora un'involuzione j_0 alla quale appartengono le coppie

$$A_0A'_2,\ B_0B'_2,\ C_0C'_2.$$

Inoltre (n. 2) le coppie A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 appartengono ad un'involuzione j_1, e le coppie $A'_0A'_1$, $B'_0B'_1$, $C'_0C'_1$ ad un'involuzione j'_1.

Ciò posto, si osservi che

dai punti A_3, C_3, C_3 mediante l'involuz. j si passa ai punti A_0, B_0, C_0;
" A_0, B_0, C_0 " " j_0 " " " A'_2, B'_2, C'_2;
" A'_2, B'_2, C'_2 " " j " " " A'_1, B'_1, C'_1;

quindi (poichè la serie di queste operazioni è invertibile), si deduce che la proiettività $\frac{A_3B_3C_3}{A'_1B'_1C'_1}$ è un'involuzione j''.

Si noti, in secondo luogo, che

da A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3, mediante l'inv. j, si passa ad A_1, B_1, C_1, A_0, B_0, C_0;
" A_1, B_1, C_1, A_0, B_0, C_0 " " j_1 " " " A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1;
" A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1 " la proj. φ " " " A'_0, B'_0, C'_0, A'_1, B'_1, C'_1;

e che, per conseguenza le proiettività $\frac{A_2B_2C_2}{A'_0B'_0C'_0}$ e $\frac{A_3B_3C_3}{A'_1B'_1C'_1}$ coincidono.

Si ricava da ciò che le coppie $A'A_2$, $B'_0B'_2$, C'_0C_2 fanno parte dell'involuzione j'' e si conchiude (n. 2) che le rette $A'A_2$, $B'B_1$, $C'C_2$ concorrono anch'esse in un punto.

È lecito dunque enunciare il seguente teorema (*a*), al quale facciamo immediatamente seguire quello (*b*) che si ottiene facendo la solita traduzione per dualità:

a) *Dati due triangoli complanari, assegnata, su una retta del loro piano, un'involuzione, e considerati due punti corrispondenti dei due triangoli rispetto a quella retta, se le rette uscenti dai vertici dell'uno e coniugate con quelle che proiettano i vertici dell'altro dal punto di esso concorrono in un punto, anche le rette uscenti dai vertici del secondo e coniugate con quelle che proiettano i vertici del primo dal suo punto sono concorrenti.*

b) *Dati due triangoli complanari, assegnata, intorno a un punto del loro piano un'involuzione e considerate due rette corrispondenti dei due triangoli rispetto a quel punto, se i punti dei lati dell'uno coniugati coi punti d'incontro dei lati dell'altro con la retta di esso sono allineati, anche i punti dei lati del secondo coniugati coi punti d'incontro dei lati del primo colla sua retta sono allineati.*

12. Si noti che dal ragionamento del n. 11 si deduce che se esiste un'involuzione j_0 di punti, sulla retta p, della quale le coppie

$$A_0A'_2,\ B'_0B'_2,\ C_0C'_2$$

facciano parte, esiste eziandio un'involuzione j'' della quale fanno parte le coppie di punti

$$A_3A'_1,\ B_3B'_1,\ C_3C'_1.$$

Talchè si può dire che " se le rette AA'_2, BB'_2, CC'_2 concorrono in un punto, le rette $P'A_3$, $P'B_3$, $P'C_3$ tagliano i lati $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ in tre punti allineati " (n. 2).

Viceversa, suppongasi che le rette $P'A_3$, $P'B_3$, $P'C_3$ taglino rispettivamente $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ in tre punti allineati. Allora le coppie

$$[P'A',\ P'A_3],\ [P'B',\ P'B_3],\ [P'C',\ P'C_3]$$

appartengono ad un'involuzione di rette e, per conseguenza, le coppie di punti

$$A'_1A_3,\ B'_1B_3,\ C'_1C_3$$

appartengono ad un'involuzione j''. Si noti che

dai punti A'_2, B'_2, C'_2 mediante l'inv. j si passa ai punti A'_1, B'_1, C'_1;
" A'_1, B'_1, C'_1 " " j'' " " " A_3, B_3, C_3;
" A_3, B_3, C_3 " " j " " " A_0, B_0, C_0,

e che, perciò, la proiettività $\dfrac{A'_2B'_2C'_2}{A_0B_0C_0}$ è un'involuzione, sicchè le rette AA'_2, BB'_2, CC'_2 concorrono in un punto.

Da questo ragionamento, messo in relazione alle conclusioni alle quali ci ha condotti il n. 11, unitamente all'osservazione che le dimostrazioni qui esposte reggono egualmente se la involuzione j è sostituita dalla *proiettività identica*, si ha piena giustificazione del seguente enunciato generale:

a) *Dati due triangoli complanari, assegnata su una retta del loro piano un'involuzione, oppure la proiettività identica e considerati, dei due triangoli, due punti corrispondenti rispetto a tale retta, l'esistenza d'uno dei seguenti fatti:*

1° *concorrenza delle rette uscenti dai vertici del primo triangolo e coniugate con quelle che dal punto del secondo proiettano i vertici di esso;*

2° *concorrenza delle rette uscenti dai vertici del secondo e coniugati con quelle che dal punto del primo proiettano i vertici di esso;*

3° *allineamento dei punti d'incontro dei lati del primo con le rette passanti pel punto di esso e coniugate coi lati del secondo;*

4° *allineamento dei punti d'incontro dei lati del secondo con le rette uscenti dal punto di esso e coniugate coi lati del primo;*

è condizione necessaria e sufficiente all'esistenza di tutti.

Traducendo per dualità questo teorema, si ha il seguente:

b) *Dati due triangoli complanari, assegnata, intorno a un punto del loro piano un'involuzione, o la proiettività identica, e considerate due rette corrispondenti dei due triangoli rispetto a quel punto, l'esistenza d'uno dei seguenti fatti:*

1° *allineamento dei lati del primo triangolo coniugati con quelli secondo i quali la retta del secondo taglia i lati di esso;*

2° *allineamento dei punti dei lati del secondo coniugati con quelli secondo i quali la retta del primo taglia i lati di esso;*

3° *concorrenza delle congiungenti i vertici del primo coi punti della sua retta coniugati coi vertici del secondo;*

4° *concorrenza delle congiungenti i vertici del secondo coi punti della sua retta coniugati coi vertici del primo;*

è condizione necessaria e sufficiente all'esistenza di tutti.

13. Quando, invece dell'involuzione si considera la proiettività identica, i teoremi precedenti assumono una forma alquanto più semplice.

Casi particolari interessanti si hanno osservando che, nel caso del teor. *a*) del paragrafo precedente, sono punti corrispondenti i poli della retta rispetto ai due triangoli e che, nel caso del teor. *b*) sono rette corrispondenti le polari del punto rispetto ai triangoli medesimi.

Se poi la retta p (teor. *a*) si prende all'infinito, sono punti corrispondenti i baricentri dei due triangoli. Si deducono, in tal modo, assai agevolmente i seguenti teoremi:

Dati due triangoli complanari, l'esistenza d'uno dei seguenti fatti:

1° *concorrenza delle* $\genfrac{}{}{0pt}{}{\textit{parallele}}{\textit{perpendicolari}}$ *condotte pei vertici del primo triangolo alle mediane del secondo.*

2° *concorrenza delle* $\genfrac{}{}{0pt}{}{\textit{parallele}}{\textit{perpendicolari}}$ *condotte pei vertici del secondo alle mediane del primo;*

3° *allineamento dei punti d'incontro dei lati del primo con le* $\genfrac{}{}{0pt}{}{\textit{parallele}}{\textit{perpendicolari}}$ *condotte pel suo baricentro ai lati del secondo;*

4° *allineamento dei punti d'incontro dei lati del secondo con le* $\genfrac{}{}{0pt}{}{\textit{parallele}}{\textit{perpendicolari}}$ *condotte pel suo baricentro ai lati del primo;*

è condizione necessaria e sufficiente all'esistenza di tutti. (¹)

14. Dati, al solito, due triangoli ABC, A′B′C′ e, su d'una retta p, del loro piano, un'involuzione di punti, si prendano, nel piano, due punti P e P′. Siano rispettivamente A_1, B_1, C_1; A'_1, B'_1, C'_1 i punti in cui le rette PA_1, PB_1, PC_1; $P'A'_1$, $P'B'_1$, $P'C'_1$ tagliano la p: nella data involuzione, che chiamiamo j, siano ordinatamente A_2, B_2, C_2; A'_2, B'_2, C'_2 i corrispondenti di A_1, B_1, C_1; A'_1, B'_1, C'_1.

Supponiamo che le rette PA'_2; PB'_2, PC'_2 taglino rispettivamente BC, CA, AB in punti allineati. In tale ipotesi le coppie di rette

$$[PA,\ PA'_2],\ [PB,\ PB'_2],\ [PC,\ PC'_2]$$

appartengono a una medesima involuzione (n. 2); per conseguenza esisterà un'involuzione j' della quale fanno parte le coppie

$$A_1A'_2,\ B_1B'_2,\ C_1C'_2.$$

Ora si noti che

dai punti	A'_1, B'_1, C'_1	mediante	l'inv.	j	si	passa	ai punti	A'_2, B'_2, C'_2;
"	A'_2, B'_2, C'_2	"	"	j'	"	"	"	A_1, B_1, C_1;
"	A_1, B_1, C_1	"	"	j	"	"	"	A_2, B_2, C_2.

Dalla serie di queste operazioni si desume che esiste un'involuzione j'' della quale fanno parte le coppie:

$$A'_1A_2,\ B'_1B_2,\ C'_1C_2.$$

Dunque, proiettando da P′ la p, si ha che le coppie di rette

$$[P'A',\ P'A_2],\ [P'B',\ P'B_2],\ [P'C',\ P'C_2]$$

appartengono a una medesima involuzione di rette. Dunque (n. 2) le rette $P'A_2$, $P'B_2$, $P'C_2$ tagliano B′C′, C′B′, A′B′ rispettivamente in tre punti allineati. Perciò, osservando che il ragionamento regge

(¹) Questo enunciato comprende il teor. dei triangoli *bariologici* (cfr. la mia nota " Sul triangolo „ sopra citata, al num. 20) nonchè il teor. del num. 23 della nota citata. V. pure la Quist. 96ª a concorso del *Supplemento al Periodico di Matematica*, Anno XIII, fasc. I e IX.

anche quando all'involuzione j si sostituisce la proiettività identica, potremo enunciare la seguente proprietà:

Assegnati nel piano di due triangoli, due punti, una retta e un'involuzione su di essa, se le rette uscenti da uno di questi punti e coniugate rispettivamente con quelle che dall'altro punto proiettano i vertici d'uno dei triangoli, incontrano i lati dell'altro in tre punti allineati, anche le rette condotte per l'altro punto e coniugate rispettivamente con quelle che dal primo punto proiettano i vertici del secondo triangolo incontrano i lati del primo in tre punti allineati.

E dualmente: *Assegnati nel piano di due triangoli due rette, un punto e un'involuzione di punti attorno ad esso se i punti d'una di queste rette coniugati rispettivamente con quelli secondo i quali l'altra taglia i lati d'uno dei due triangoli sono proiettati dai vertici dell'altro secondo tre rette che concorrono in un punto, anche i punti dell'altra retta coniugati rispettivamente con quelli secondo i quali la prima seca i lati del secondo triangolo, sono proiettati dai vertici del primo secondo tre rette che concorrono in un punto.*

15. Il teorema dimostrato nel paragrafo precedente regge evidentemente anche nel caso in cui i due triangoli coincidono in un solo.

In questo caso, se la retta p viene scelta all'infinito, si hanno parecchi teoremi relativi ai triangoli piani. Segnaliamo i seguenti:

" *Le perpendicolari condotte per l'ortocentro d'un triangolo alle tre*
" *congiungenti un punto del suo piano coi tre vertici, incontrano i lati*
" *rispettivi in tre punti allineati* ".

" *In ogni triangolo le parallele condotte per l'ortocentro alle congiun-*
" *genti un punto della circonferenza circoscritta coi tre vertici, incon-*
" *trano i lati rispettivi in tre punti allineati* ". [1]

16. Il ragionamento del numero 8 ci mostra che " se due terne di punti sono pseudoinvolutoriamente coniugate, sono pure pseudoinvolutoriamente coniugate le loro corrispondenti in una involuzione arbitraria ".

Ciò posto, ferme stando le notazioni descritte al numero 14, suppongasi che le rette PA'_2, PB'_2, PC'_2 taglino BC, CA, AB in tre punti, in guisa che le rette che li congiungono co' vertici opposti concorrano in un punto.

In tale ipotesi le terne di rette PA, PB, PC; PA'_2, PB'_2, PC'_2 sono pseudoinvolutoriamente coniugate (n. 6); talchè sono pure tali le terne di punti $A_1B_1C_1$ e $A'_2B'_2C'_2$ e, quindi (oss. prec.) anche le terne $A_2B_2C_2$, $A'_1B'_1C'_1$.

Se ne deduce che le terne di rette $P'A'$, $P'B'$, $P'C'$; $P'A_2$, $P'B_2$, $P'C_2$ sono pseudoinvolutoriamente coniugate, e si conchiude che le rette $P'A_2$, $P'B_2$, $P'C_2$ tagliano i lati $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ in tre punti, in guisa che le rette che li congiungono co' vertici opposti concorrono in un punto.

---

(1) Cfr. il *Supplemento*, Quist. 1190.

Ne viene il seguente teorema:

Assegnati, nel piano di due triangoli, due punti, una retta e su di essa un'involuzione o la proiettività identica, se le rette uscenti da uno di questi punti e coniugate rispettivamente con quelle che dall'altra proiettano i vertici d'uno de' due triangoli, incontrano i lati dell'altra in tre punti le cui congiungenti co' vertici opposti concorrono in un punto, anche le rette uscenti dall'altro punto e coniugate con quelle che dal primo proiettano i vertici del secondo triangolo, incontrano i lati del primo in punti le cui congiungenti co' vertici opposti concorrono in un punto.

E dualmente.

E anche qui, tra i casi particolari notevoli, segnaliamo quello che si ha allorquando i due triangoli, di cui è questione, coincidono; si deducono, in questo modo, molto facilmente, parecchi teoremi relativi ai triangoli piani. [1]

II. — Triangoli in omologia.

17. Siano ABC, A'B'C' due triangoli complanari omologici. Si sa che le rette AA', BB', CC' concorrono nel centro P d'omologia e che i punti A_0, B_0, C_0 d'incontro delle rette BC, B'C'; CA, C'A'; AB, A'B' appartengono all'asse p d'omologia. È noto del pari che se le rette AA', BB', CC' tagliano l'asse p rispettivamente nei punti A'', B'', C'' è costante il valore dei birapporti

$$(AA'PA''),\ (BB'PB''),\ (CCPC'').$$

Siano, rispettivamente, G, G' i poli di p rispetto ai triangoli ABC, A'B'C'; se le rette AG, BG, CG incontrano rispettivamente i lati BC, CA, AB nei punti A_g, B_g, C_g, e le rette A'G', B'G', C'G' tagliano rispettivamente i lati B'C', C'A', A'B' nei punti A'_g, B'_g, C'_g, le coppie di rette B_gC_g, $B'_gC'_g$; C_gA_g, $C'_gA'_g$; A_gB_g, $A'_gB'_g$ passano rispettivamente per A_0, B_0, C_0 e le rette $A_gA'_g$, $B_gB'_g$, $C_gC'_g$ passano per P. Le coppie di rette AA_g, $A'A'_g$; BB_g, $B'B'_g$; CC_g, $C'C'_g$ sono corrispondenti nell'omologia da noi considerata e concorrono rispettivamente in tre punti A_2, B_2, C_2 di p, per i quali i gruppi di punti

$$A_0A_2B_0C_0,\ B_0B_2C_0A_0,\ C_0C_2A_0B_0$$

sono armonici.

I punti G e G' sono dunque punti corrispondenti nell'omologia sopra descritta, quindi sono allineati con P. Dunque:

In una omologia, i poli dell'asse rispetto a due triangoli corrispondenti, sono allineati col centro. E, dualmente, le polari del centro, rispetto a due triangoli corrispondenti, concorrono in un punto dell'asse.

---

[1] Cfr. ad es., la Quist. 928 del *Supplemento*.

18. Siccome i triangoli ABC, $A'_gB'_gC'_g$ sono corrispondenti in una omologia di asse p, le rette AA'_g, BB'_g, CC'_g concorrono in un punto H'. I punti G, G' sono i poli dell'asse p rispetto ai triangoli ABC, $A'_gB'_gC'_g$; dunque H' appartiene alla retta PGG' (n. 17).

Analogamente le rette $A'A_g$, $B'B_g$, $C'C_g$ concorrono in un punto H della retta PGG'. Diremo dunque:

Dati due triangoli in omologia, le congiungenti i vertici di ciascuno d'essi rispettivamente coi punti dei lati dell'altro che, coi loro punti d'incontro con l'asse, separano armonicamente i vertici, concorrono in un punto. E dualmente.

I punti H e H' saranno da noi chiamati **centri coniugati** e, precisamente H *è centro coniugato rispetto al triangolo* ABC, H' *è centro coniugato rispetto al triangolo* A'B'C'.

Dualmente, si hanno due **assi coniugati.**

Diremo dunque, riassumendo:

Dati due triangoli omologici, i punti coniugati sono allineati col centro d'omologia e con i poli dell'asse rispetto a' due triangoli.

Gli assi coniugati formano fascio con l'asse e con le polari del centro d'omologia rispetto ai due triangoli.

19. Sia G_a il punto in cui B_gC_g taglia AG; siccome i gruppi ACB_gB_0, ABC_gC_0 sono armonici, è anche armonico il gruppo $AA_gG_aA_2$, perciò le rette PG_a, PA_2 separano armonicamente le rette PAA', $PA_gA'_g$. Ne viene che, detto X il punto d'incontro delle rette AA'_g, $A'A_g$, siccome dal quadrangolo $AA'A_gA'_g$ risulta che le rette PX e PA_2 separano armonicamente le rette PAA', $PA_gA'_g$, il punto X appartiene alla retta PG_a.

Detto poi A_1 il punto d'incontro delle rette AH, A'H', il quadrangolo XHA_1H' mostra che PA_1 è coniugata armonica di PHG_a rispetto alle rette PAA', PGG' e quindi, siccome AGG_aA_g è un gruppo armonico, il punto A_1 appartiene alla retta $PA_gA'_g$.

Dal quadrangolo $PA'H'A'_g$ si ricava che PH'G'H è un gruppo armonico; analogamente, dal quadrangolo $P'AHA_g$ si desume che PHGH' è un gruppo armonico. Dunque:

Il centro d'omologia e il centro coniugato rispetto a uno dei due triangoli separano armonicamente l'altro centro coniugato e il polo dell'asse rispetto al medesimo triangolo.

Dualmente: *L'asse d'omologia e l'asse coniugato rispetto a uno dei due triangoli separano armonicamente l'altro asse coniugato e la polare del centro d'omologia, rispetto al medesimo triangolo.*

20. Proiettiamo da A (o da A') il gruppo di punti PHGH' (o PH'G'H) sulla retta $PA_gA'_g$; otteniamo così il gruppo $PA_1A_gA'_g$, evidentemente anche armonico. Perciò, considerando il quadrangolo BCB'C', risulta che le rette BC', B'C debbono contenere il punto A_1.

Analogamente, detti B_1, C_1 i punti d'incontro delle rette AC', A'C: AB', A'B, le rette BB_1, CC_1 passano per H e le rette $B'B_1$, $C'C_1$ passano per H'.

Osserviamo che i punti A_1, B_1, C_1 non sono altro che i punti di incontro delle congiungenti i vertici non omologhi dei due triangoli.

Si ha perciò la seguente proprietà:

Dati due triangoli omologici, le congiungenti i vertici d'uno qualunque d'essi con i punti d'incontro delle rette che uniscono i vertici non omologhi, concorrono in un punto (*centro coniugato*).

Il duale del teorema precedente può assumere la forma seguente:

Le congiungenti i punti d'incontro dei lati non omologhi incontrano rispettivamente i lati di ciascun triangolo in tre punti di una medesima retta (*asse coniugato*).

21. È particolarmente notevole il caso dell'*omologia armonica*, nel quale il valore comune dei birapporti

$$(AA'PA''), \quad (BB'PB''), \quad (CC'PC'')$$

è l'unità negativa. In tal caso i sei punti A, B, C, A', B', C' appartengono a una medesima conica Γ e, rispetto a questa conica, il punto P e la retta p sono mutuamente polari.

I quadrangoli BCB'C', CAC'A' ABA'B' sono, in questo caso, inscritti nella conica Γ e hanno tutti P come punto diagonale: gli altri punti diagonali appartengono conseguentemente all'asse p. Perciò, nel caso dell'omologia armonica, i punti A_1, B_1, C_1 non sono altro che i punti in cui le rette $PA_gA'_g$, $PB_gB'_g$, $PC_gC'_g$ tagliano la retta p.

Ciò posto, è evidente che se nel piano d'un triangolo ABC si assegnano arbitrariamente un punto P e una retta p che si considerano come centro e asse rispettivamente d'un'omologia armonica, nella quale siano rispettivamente A', B', C' i corrispondenti ad A, B, C, le rette BC', B'C; CA', C'A; AB', A'C concorrono rispettivamente in tre punti A_1, B_1, C_1 di p, pei quali passano anche rispettivamente le rette PA_g, PB_g, PC_g, essendo G il polo di p rispetto ad ABC. (¹) Le rette AA_1, BB_1, CC_1 concorrono in un punto H.

Ora si osservi che i punti A_1, B_1, C_1 si possono ottenere indipendentemente dalla considerazione dell'omologia armonica di centro P e asse p. Basta, infatti, proiettare da P i punti A_g, B_g, C_g sulla p. Se, quindi, si nota che ABC e $A_gB_gC_g$ sono omologici di centro G e asse p, resta dimostrato un caso particolare del teorema generale seguente:

Dati due triangoli in omologia, le congiungenti i vertici d'uno d'essi rispettivamente con le proiezioni di quelli dell'altro sull'asse, da un punto arbitrario, concorrono in un punto.

Questo teorema può direttamente dimostrarsi eseguendo, in una omologia qualunque, individuata mediante due triangoli omologici, la costruzione del corrispondente d'un punto generico dato.

(¹) Essendo P un punto generico del piano d'un triangolo ABC, con le notazioni A_P, B_P, C_P si indicheranno i punti in cui le rette AP, BP, CP tagliano rispettivamente i lati BC, CA, AB.

Enunciamo la proprietà duale:

Dati due triangoli omologici, le congiungenti i punti d'incontro dei lati d'uno d'essi con una retta arbitraria col centro d'omologia, incontrano rispettivamente i lati dell'altro in tre punti d'una retta.

III. — Coniche circoscritte al triangolo.

22. Dato un triangolo ABC e, nel suo piano, una retta generica p, si scelga, nella infinità di coniche che passano per A, B e C, una determinata conica Γ. Sia j_p l'involuzione di punti reciproci rispetto alla conica Γ, esistente sulla p.

È noto che, assegnati ABC, la retta p e l'involuzione j_p su di essa, è individuata la conica Γ.

Sia P il polo di p rispetto alla conica e G il polo della medesima retta rispetto al triangolo.

Se le rette PA_g, PB_g, PC_g tagliano la p rispettivamente in A_1, B_1, C_1, le rette AA_1, BB_1, CC_1 concorrono in un punto H (n. 19, 20, 21).

È facile vedere che, nella omologia nella quale si corrispondono i triangoli ABC, $A_gB_gC_g$, si corrispondono pure i punti H e P. Laonde, detto Φ il punto in cui la retta PGH taglia la p, si ha

$$(HP\Phi G) = (AA_gA_2G) = (BB_gB_2G) = (CC_gC_2G)\,,$$

dove i punti A_2, B_2, C_2 (come s'è detto al n. 17) sono le intersezioni di GA_g, GB_g, GC_g con la retta p.

Se le rette AP, BP, CP tagliano ulteriormente la conica nei punti A′, B′, C′, le rette $A'A_g$, $B'B_g$, $C'C_g$ passano per H (n. 18).

23. Chiamiamo j la *trasformazione bi-razionale trilineare* che muta la retta p nella conica Γ (si considera ABC come triangolo base). [1] Dimostriamo la seguente proprietà:

Il punto H *è il coniugato di* P *nella trasformazione bi-razionale trilineare che muta la retta* p *nella conica* Γ.

Notiamo, all'uopo che le involuzioni j_a, j_b, j_c subordinate da tale trasformazione sui lati BC, CA, AB, si possono ritenere individuate (oltrechè dai vertici del triangolo) dai punti in cui le rette AB′, AC′; BC′, BA′; CA′, CB′ tagliano rispettivamente i lati, e ciò perchè le rette B′C′, C′A′, A′B′ passano rispettivamente pei punti A_0, B_0, C_0 d'incontro della p coi lati del triangolo fondamentale.

Consideriamo ora il quadrangolo $PB'C'A_1$; in esso sono vertici opposti i punti B′, C′; P, A_1; B, C: proiettando questi sei punti da A s'ottengono sei rette in involuzione e, precisamente, in questa invo-

[1] Cfr. la mia nota "Sopra le trasformazioni bi-razionali trilineari", *Periodico di Matematica*, Anno XXV, fasc. I, 1909.

luzione sono corrispondenti le rette AB', AC'; AB, AC; AP, AA_1. Quest'ultima involuzione viene da BC secata secondo un'involuzione che non è altro che la j_a, e, quindi, poichè la retta AA_1 passa per H, le rette AP, AH tagliano BC in punti che si corrispondono nell'involuzione j_a. Analogamente le rette BP, BH; CP, CH tagliano CA, AB, in punti corrispondenti nelle involuzioni j_b, j_c. Dunque i punti P e H sono coniugati nella trasformazione bi-razionale trilineare che muta p in Γ.

Le proprietà qui dimostrate giustificano le denominazioni di centro coniugato e asse coniugato, usate al n. 18.

Dalle esposizioni fatte emerge la seguente proprietà:

Dato un triangolo, una conica ad esso circoscritta e una retta nel suo piano, i poli della retta rispetto alla conica e al triangolo sono allineati col coniugato del polo rispetto alla conica nella trasformazione bi-razionale trilineare che muta la retta nella conica.

E dualmente: *Dato un triangolo, una conica ad esso inscritta e un punto del suo piano, le polari del punto rispetto alla conica e al triangolo formano fascio con la coniugata della polare rispetto alla conica nella trasformazione bi-razionale trilineare che muta il punto nella conica.*

24. Sia Q un punto generico della p; la sua polare q rispetto alla conica Γ passa per P e taglia p nel punto Q' reciproco di Q; i punti Q e Q' si corrispondono evidentemente nell'involuzione j_0.

Se i punti Q e Q' si congiungono con un punto qualunque S della conica Γ, e si dicono rispettivamente R, R' gli ulteriori punti d'incontro di tali congiungenti con la Γ, siccome QQ'P è triangolo autopolare rispetto alla conica Γ, la retta R, R' passa necessariamente per P.

Dunque: *Da qualunque punto della conica data, l'involuzione di punti reciproci d'una retta viene proiettata sulla conica in un'involuzione di punti il cui polo è il polo della retta rispetto alla conica e il cui asse è la retta medesima.*

Viceversa è manifesto che *due punti allineati col polo vengono, da qualsiasi punto della conica proiettati sulla retta dati in due punti reciproci rispetto alla conica.*

25. Dati, come nei precedenti paragrafi, un triangolo ABC, una retta generica p e una conica Γ contenente i vertici del triangolo (e che può ritenersi individuata dai punti A, B e C e dall'involuzione j_0 di punti reciproci, esistente sulla p), diremo che la retta p è retta *fondamentale*: analogamente la conica Γ è detta *conica fondamentale.*

La trasformazione bi-razionale trilineare che muta la retta fondamentale nella conica fondamentale si dirà *trasformazione fondamentale.*

Due punti coniugati in tale trasformazione si chiameranno *fondamentalmente coniugati.*

Dato un punto M nel piano del triangolo, denotiamo con M_a, M_b, M_c rispettivamente i punti in cui le rette MA_1, MB_1, MC_1 (coniugate ai lati BC, CA, AB rispettivamente, rispetto all'involuzione di punti reciproci sulla retta fondamentale) incontrano i lati BC, CA, AB; il triangolo $M_aM_bM_c$ sarà chiamato **triangolo fondamentalmente inscritto rispetto al punto** M.

Sono ovvie le definizioni duali.

26. Si scelga ora, ad arbitrio, un punto M nel piano della figura, e s'indichi con M′ il suo fondamentalmente coniugato. Detti M_a, M_b, M_c; M'_a, M'_b, M'_c rispettivamente i punti d'incontro delle rette MA_1, MB_1, MC_1; $M'A_1$, $M'B_1$, $M'C_1$ coi lati BC, BA, AB del triangolo, i triangoli $M_aM_bM_c$, $M'_aM'_bM'_c$ sono i triangoli fondamentalmente inscritti rispetto ai punti M e M′ (n. 25).

Vogliamo dimostrare che le rette AM, $M'_bM'_c$; BM, $M'_cM'_a$; CM, $M'_aM'_b$; AM′, M_bM_c; BM′, M_cM_a; CM′, M_aM_b tagliano la p secondo coppie dell'involuzione j_0.

Siano P_m, P'_m, rispettivamente, i punti in cui le rette AM, AM′ tagliano la retta fondamentale, e M_1 il punto in cui la medesima retta è incontrata dalla $M'_bM'_c$. Dalla considerazione del quadrangolo $AMM'_bM'_c$, risulta che le coppie

$$P'_mM_1, \qquad B_1C_0, \qquad C_1B_0,$$

appartengono ad un'involuzione j_1. Proiettando, inoltre, da A l'involuzione j_a subordinata sul lato BC dalla trasformazione fondamentale j, sulla retta fondamentale p, s'ottiene un'involuzione j_2 nella quale sono coppie di punti corrispondenti le seguenti:

$$P_mP'_m, \qquad B_1C_1, \qquad B_0C_0.$$

Ora si noti che:

Dai punti B_0, C_0, B_1, C_1, mediante l'involuzione j_1 si passa a C_1, B_1, C_0, B_0;

dai punti C_1, B_1, C_0, B_0, mediante l'involuzione j_2 si passa a B_1, C_1, B_0, C_0.

Ma la proiettività che dai punti B_0, C_0, B_1, C_1 conduce rispettivamente ai punti B_1, C_1, B_0, C_0, non è altro che l'involuzione j_0. Per trovare adunque d'un punto Q di p il suo corrispondente nella p, basta trovare di Q il corrispondente nell'involuzione j, e, poscia, di quest'ultimo punto, il corrispondente nella j_2. Si osservi ora che:

dal punto M_1, per mezzo dell'invol. j_1 si passa al punto P'_m;
" " P'_m, " " " j_2 " " " P_m,

e che, per conseguenza M_1P_m è una coppia dell'involuzione j_0.

Dunque le rette AM, $M'_bM'_c$ tagliano la retta fondamentale in punti reciproci. Analogamente dicasi delle coppie BM, $M'_cM'_a$; CM, $M'_aM'_b$; AM, M_bM_c; BM′, M_cM_a; CM′, M_aM_b.

Avremo, intanto, la seguente proprietà:

In ogni triangolo, i lati del triangolo fondamentalmente inscritto *rispetto ad un punto, sono, rispetto all'involuzione di punti reciproci della retta fondamentale,* coniugati *alle congiungenti i vertici del triangolo con il punto* fondamentalmente coniugato *al punto dato.*

E dualmente: *i vertici del triangolo* fondamentalmente circoscritto *rispetto a una retta, sono, rispetto all'involuzione di rette reciproche intorno al punto fondamentale,* coniugati *ai punti d'incontro dei lati del triangolo con la retta* fondamentalmente coniugata *alla retta data.*

27. È particolarmente notevole il caso in cui il punto M' appartenga alla conica fondamentale; allora il punto M appartiene alla retta p e le rette M_bM_c, M_cM_a, M_aM_b passano per un medesimo punto della retta fondamentale p (reciproco di M). Resulta da ciò che i punti M_a, M_b, M_c sono allineati. Ne viene la seguente proprietà:

Le congiungenti un punto qualunque della conica fondamentale con i reciproci, sulla retta fondamentale, de' suoi punti d'incontro co' lati, incontrano i lati stessi in tre punti allineati.

Dualmente: *I punti d'incontro d'una tangente qualunque alla conica fondamentale con le reciproche, pel punto fondamentale, delle sue congiungenti co' vertici, sono dai vertici medesimi proiettati secondo tre rette concorrenti.*

IV. — Traversali. - Coniche fondamentali.

28. Data, in un piano, una retta e, su di essa, un'involuzione di punti, ogni conica del piano che sulla retta data subordini l'involuzione data di punti reciproci, sarà chiamata brevemente *conica fondamentale in ordine a tale involuzione.*

È noto che una conica fondamentale in ordine ad una determinata involuzione su forma di 1ª specie è individuata mercè l'assegnazione di tre suoi elementi (punti o tangenti).

Tutte le coniche fondamentali che passano per due punti fissi costituiscono un *fascio di coniche fondamentali.* Quei punti sono i *punti base del fascio.*

In un piano sul quale è assegnata un'involuzione j_0 di punti d'una sua punteggiata p, sia dato un angolo α di vertice A. Scelti comunque un punto B su un lato di α e un punto C sull'altro, sia Γ la conica del fascio di coniche fondamentali i cui punti basi sono B e C, che passa per A. Detto A_0 il punto in cui la retta BC (retta base del fascio) taglia la p, esisterà una ed una sola involuzione di punti della conica Γ che ha A_0 per polo e la polare di questo punto per asse. Proiettiamo da A i punti di tale involuzione: i raggi proiettanti costituiscono un'involuzione j di raggi della quale fanno parte i lati dell'angolo e le rette che congiungono il vertice di esso con i punti B_1 e C_1 che, nella j_0 corrispondono ai punti B_0 e C_0 d'incontro di p con AC, AB (n. 23). Tale involuzione può dunque ritenersi individuata dalle coppie

$$(AB, AC) \quad e \quad (AB_1, AC_1)$$

e quindi non varia al variare di A_0 e, conseguentemente, di Γ.

Assegnata dunque l'involuzione j_0 su p e l'angolo α è individuata la j.

Questa involuzione si dirà *involuzione di traversali angolari fondamentalmente associate rispetto all'involuzione data.*

Due rette che concorrono in un punto di p si chiamano rette *concorrenti con la fondamentale.* E due rette che sono, rispetto all'involuzione data, coniugate a due traversali angolari fondamentalmente associate, si chiamano *rette anticoncorrenti con la* p *rispetto all'angolo dato e alla data involuzione.*

29. Scegliamo ora una conica Γ_1 fra le infinite del fascio di coniche fondamentali di basi B e C. Sia C' il punto in cui essa taglia AB e B' quello in cui interseca AC.

Sia P_1 il polo di p rispetto alla Γ_1. Questo punto appartiene evidentemente alla polare di A_0 e, quindi, alla retta che passa per A_1 (reciproco di A_0) e pel coniugato armonico di A_0 rispetto a BC, che indichiamo con A_g. Tutti i poli di p rispetto alle coniche del fascio hanno dunque la retta A_gA_1 per luogo.

Siano B'', C'', rispettivamente, i punti in cui B_1P_1, C_1P_1 tagliano le rette AC, AB. La retta B_1P_1 è polare di B_0 rispetto alla conica Γ_1; la retta C_1P_1 è polare di C_0 rispetto alla stessa conica; ne segue che la coppia BC' separa armonicamente C_0C'' e la coppia CB' separa armonicamente B_0B''.

Si osservi ora che, al muoversi di P_1 su A_1A_g, i punti B'' e C'' descrivono sui lati di α punteggiate proiettive. Siccome poi è manifesto che *due punti mobili d'una punteggiata tali che ognuno di essi è coniugato armonico d'un punto fisso della punteggiata rispetto all'altro punto mobile e ad un secondo punto fisso, descrivono due punteggiate proiettive sovrapposte,* [1] ne viene che C' si muove proiettivamente a C'' e B' proiettivamente a B''. Dunque, le punteggiate descritte da B' e C' sui lati di α sono fra loro proiettive.

---

[1] Infatti, condotte per un punto fisso A d'una retta r due rette arbitrarie, per un altro punto fisso C della medesima retta, un'altra retta arbitraria che tagli le precedenti in H e K, si prenda un terzo punto B di r e siano L, M i punti in cui le BH e BK tagliano ulteriormente le rette condotte per A: detto D il punto in cui LM taglia r, al muoversi di B, D si mantiene sempre coniugato armonico di C rispetto ad A e B. Qualunque sia B la retta LMD taglia sempre HK nel coniugato armonico di C rispetto ad H e K, dunque le punteggiate descritte da L e D sono prospettive; e poichè anche la punteggiata descritta da B si mantiene prospettiva a quella descritta da L, le punteggiate $r(B)$, $r(D)$ sono proiettive. c. v. d.

Proiettando da B_0 e C_0 rispettivamente le punteggiate descritte da C' e B' si ottengono dunque due fasci di raggi fra loro proiettivi; e poichè, evidentemente, alla retta B_0C_0 dell'uno corrisponde la retta C_0B_0 dell'altro, tali fasci sono prospettivi. Ne viene che, al muoversi di P_1 su A_1A_g, il punto K'_a d'incontro delle B_0C' e C_0B' si muove su una retta la quale (poichè A è unito nella proiettività fra B' e C') passa per A. Detto $A_{k,0}$ il punto coniugato armonico di quelli in cui tale retta taglia p, rispetto a B_0C_0, qualunque sia la posizione di P_1 sulla A_1A_g, la retta $B'C'$ passa per $A_{k,0}$.

Ciò significa che *qualunque conica fondamentale d'un fascio taglia i lati d'un angolo fisso, i cui lati passano pei punti basi in due punti allineati con un punto fisso della retta fondamentale.*

La retta $AA_{k,0}$ riesce tangente alla conica Γ del fascio, passante per A. Se P è il polo di p rispetto alla Γ, le rette $AA_{k,0}$ e AP sono coniugate rispetto all'involuzione j_0.

Ma le rette AP e AA_1 sono traversali angolari fondamentalmente associate rispetto alla j_0 (n. 23), perciò le rette BC e $B'C'$ sono anticoncorrenti con la fondamentale rispetto all'angolo dato e all'involuzione fondamentale.

Abbiamo dunque il seguente teorema:

Gli eventuali punti d'incontro di una conica fondamentale rispetto a una data involuzione, con due rette del piano, stanno due a due su rette anticoncorrenti con la fondamentale, rispetto all'angolo formato dalle rette date e rispetto all'involuzione fondamentale.

Ora riesce evidente che *i punti d'incontro dei lati d'un dato angolo con due rette anticoncorrenti con la fondamentale rispetto a esso angolo e alla involuzione fondamentale, appartengono a una medesima conica fondamentale.*

30. Consideriamo, di bel nuovo, un triangolo ABC e, su una retta p del suo piano, un'involuzione j_0. La conica fondamentale rispetto alla j_0 individuata dai punti A, B e C si dice *conica fondamentalmente circoscritta ad* ABC.

Ciò posto, siano, come al n. 26, due punti M e M' fondamentalmente coniugati e siano $M_aM_bM_c$ e $M'_aM'_bM'_c$ i triangoli fondamentalmente inscritti in ABC, rispetto ad essi.

Dico che i sei punti $M_aM'_aM_bM'_bM_cM'_c$ appartengono ad una medesima conica fondamentale.

Infatti, le rette M_bM_c, $M'_bM'_c$ essendo anticoncorrenti con la retta fondamentale rispetto all'angolo A (n. 26), i punti $M_bM_cM'_bM'_c$ appartengono ad un'unica conica fondamentale Γ_a rispetto alla quale il polo della retta fondamentale è il coniugato armonico Ω del punto d'incontro di MM' con la p, rispetto ad M e M'.

Analogamente i punti $M_cM_aM'_cM'_a$ appartengono ad una medesima conica fondamentale Γ_b, rispetto alla quale il polo di p è ancora Ω.

Le coniche Γ_a e Γ_b sono dunque comuni al fascio di coniche fondamentali di basi M_c e M'_c e siccome, rispetto ad esse è comune il polo di p, esse coincidono in un'unica conica Γ_m.

Abbiamo dunque la seguente proprietà:

I vertici dei triangoli fondamentalmente inscritti in un dato triangolo rispetto a una involuzione assegnata, relativi a due punti fondamentalmente coniugati, appartengono a una stessa conica fondamentale.

31. È facile riconoscere che, al variare della retta BC intorno al punto A_0, fisso su p, e al variare, contemporaneamente, della conica Γ_1 (n. 29), il punto A_g si muove su una retta fissa, coniugata armonica di AA_0, rispetto ai lati di α, la quale incontrerà la p in un punto fisso $A_{1,g}$; tutte le coniche Γ_1 risultano tangenti alla $AA_{k,0}$ e le coppie di punti

$$B_0C_0 , \qquad B_1C_1 , \qquad A_0A_{k,0} ,$$

appartengono ad una medesima involuzione j_a. Inoltre il punto K'_a d'incontro delle rette C_0B', B_0C', al variare di BC e Γ_1 nel modo suddetto, percorre la retta coniugata armonica di $AA_{k,0}$ rispetto ai lati di α; perciò, se tale retta taglia p in $A_{1,k}$, la coppia $A_{1,g}A_{1,k}$ appartiene all'involuzione j_a.

Le rette AA_g, AK'_a sono dunque *fondamentalmente associate* rispetto all'involuzione data.

32. Supponiamo d'avere, come al § 30, un triangolo ABC e si supponga che M e M' coincidano in un unico punto I.

Sia $A_\gamma B_\gamma C_\gamma$ il triangolo fondamentalmente inscritto in ABC, rispetto al punto I. Esisterà una conica che tocca i lati di ABC in A_γ, B_γ, C_γ; tale conica è fondamentale in ordine all'involuzione assegnata nel piano sulla retta fondamentale e, rispetto ad essa, il polo di questa retta è il punto I.

Questa conica è detta *fondamentalmente inscritta nel triangolo* ABC. Dico che queste coniche sono in numero di quattro.

Per accertare questo fatto basta vedere quanti sono i punti del piano che godono della proprietà del punto I suddetto. A tale uopo si osservi che, detta Γ la conica fondamentalmente circoscritta ad ABC, la retta AI taglia ulteriormente Γ nel punto in cui questa conica tocca una delle due tangenti ad essa condotte per A_0. Per A_0 conduciamo le tangenti a Γ: sia A_i il punto di contatto che, rispetto a BC è dalla parte opposta ad A; sia A'_i l'altro punto di contatto; sia poi B_i, B'_i; C_i, C'_i gli analoghi punti rispetto ai lati CA, AB. Le rette AA_i, BB_i, CC_i concorrono in un punto I; le rette AA_i, BB'_i, CC'_i concorrono in un punto I_a; le rette BB_i, AA'_i, CC'_i concorrono in un punto I_b; le rette CC_i, AA'_i, BB'_i, finalmente, concorrono in un punto I_c. Le rette AI, I_bI_c sono raggi uniti dalla involuzione di traversali angolari fondamentalmente associate rispetto all'angolo A; analogamente dicasi di BI, I_aI_b rispetto all'angolo B e di CI, I_aI_b rispetto all'angolo C. [1]

Ognuno dei quattro punti I, I_a, I_b, I_c ha se stesso come punto fondamentalmente coniugato. Perciò *si hanno quattro coniche fondamentalmente inscritte nel triangolo dato*.

Dette dunque Γ', Γ'_a, Γ'_b, Γ'_c le quattro coniche fondamentalmente inscritte nel triangolo ABC, siano A_γ, B_γ, C_γ i punti in cui la Γ' tocca i lati BC, CA, AB; le rette AA_γ, BB_γ, CC_γ concorrono in un punto Γ. Se le coniche Γ'_a, Γ'_b, Γ'_c toccano BC, CA, AB rispettivamente nei punti A_j, B_j, C_j, le coppie di rette IA_g, I_aA_j; IB_g, I_bB_j; IC_g, I_cI_j concorrono rispettivamente nei punti A_1, B_1, C_1 di p; siccome poi i triangoli $A_\gamma B_\gamma C_\gamma$, $I_aI_bI_c$ sono omologici in un'omologia di asse p (n. 29 e seg.), le rette I_aA_j, I_bB_j, I_cC_j concorrono in un punto P_0.

Considerando poi il triangolo $I_aI_bI_c$ e detta Γ_1 la conica fondamentalmente circoscritta ad esso, le coniche Γ' e Γ_1 sono corrispondenti nella omologia nella quale si corrispondono i triangoli $A_\gamma B_\gamma C_\gamma$ e $I_aI_bI_c$ e poichè, in quest'omologia, al punto I corrisponde il punto P_0 ed I è polo di p rispetto alla Γ', sarà P_0 il polo di P rispetto alla conica Γ_1.

Più brevemente si può osservare che le rette I_aA, I_bB, I_cC sono coniugate (rispetto all'involuzione fondamentale) rispettivamente alle I_bI_c, I_cI_a, I_aI_b; che, inoltre, le rette I_aA_j, I_bB_j, I_cC_j, essendo coniugate alle rette BC, CA, AB, i punti I e P_0 sono fondamentalmente associati rispetto al triangolo $I_aI_bI_c$.

Si deduce quindi agevolmente che il punto P (polo della retta fondamentale, rispetto alla conica Γ) e il punto d'incontro della retta PI con la p, separano armonicamente i punti I e P_0.

33. Siccome i triangoli $I_aI_bI_c$, $A_\gamma B_\gamma C_\gamma$ sono in omologia, le rette I_aA_γ, I_bB_γ, I_cC_γ concorrono in un punto Q della retta PI.

Le rette AA_j, BB_j, CC_j concorrono in un punto J.

Siccome le rette IA_γ e I_aA_j concorrono nel punto A_1 di p e, analogamente, le rette IB_γ e I_bB_j concorrono nel punto B_1 e le rette IC_γ e I_cC_j nel punto C_1 (n. 32) e i punti I e P_0 separano armonicamente P e il punto in cui PI taglia p, risulta che i gruppi

$$A_0\,A_g\,A_\gamma\,A_j\,; \qquad B_0\,B_g\,B_\gamma\,B_j\,; \qquad C_0\,C_g\,C_\gamma\,C_j$$

sono armonici; dunque sui lati BC, CA, AB del triangolo ABC esistono rispettivamente tre involuzioni nelle quali sono punti doppi A_g, A_0; B_g, B_0; C_g, C_0 e alle quali appartengono ordinatamente le coppie BC, $A_\gamma A_j$; CA, $B_\gamma B_j$; AB, $C_\gamma C_j$.

Da questo risulta che *i punti* Γ *e* J *sono coniugati nella trasformazione bi-razionale trilineare che a* G *fa corrispondere* G *stesso*.

[1] Cfr. la mia nota "Sopra le trasformazioni bi-razionali trilineari „ prec. citata, n. 9.

34. Le tangenti alla conica Γ (fondamentalmente circoscritta al triangolo ABC) condotte pei vertici di ABC sono lati d'un triangolo $K_aK_bK_c$. Le rette AK_a, BK_b, CK_c concorrono in un punto K; i punti G e K sono fondamentalmente associati.

Consideriamo nuovamente i triangoli $I_aI_bI_c$, $A_\gamma B_\gamma C_\gamma$, omologici di centro Q e asse p.

Le rette che uniscono I_a, I_b, I_c rispettivamente ai punti in cui la Γ taglia ulteriormente BC, CA, AB concorrono in un punto G' che è il polo di p rispetto al triangolo $I_aI_bI_c$ (n. 32); le rette I_aA_g, I_bB_g, I_cC_g concorrono nel punto K_1 che è fondamentalmente associato a G' rispetto al triangolo $I_aI_bI_c$. Le rette $A_\gamma\Gamma$ e I_aK_1 sono dunque corrispondenti nella omologia fra i triangoli $A_\gamma B_\gamma C_\gamma$ e $I_aI_bI_c$ dunque queste rette concorrono in un punto della p.

Siano rispettivamente K'_1, K''_1, K'''_1 i punti in cui le rette I_aA_g, I_bB_g, I_cC_g tagliano la ΓG.

Se le rette AA_g, BB_g, CC_g tagliano la p ne' punti A_2, B_2, C_2 (n. 17) si ha evidentemente

$$(GA_2A_gA) = (GB_2B_gB) = (GC_2C_gC) = \mu;$$

quindi, denotando con P_γ il punto in cui la ΓG taglia la retta fondamentale p, sarà evidentemente

$$(GP_\gamma K'_1\Gamma) = (GA_2A_gA) = \mu.$$

Da questa, e dalle analoghe risulta che i punti K'_1, K''_1, K'''_1 coincidono col punto K_1; è così dimostrato che K_1 appartiene alla retta $G\Gamma$. Ma, nell'omologia fra i triangoli $A_\gamma B_\gamma C_\gamma$ e $I_aI_bI_c$ i punti Γ e K_1 sono corrispondenti, dunque la retta $G\Gamma$ contiene il centro d'omologia Q.

Da quanto ora abbiamo esposto, risulta la duplice proprietà seguente:

1°. Le rette I_aA_g, I_bB_g, I_cC_g concorrono in un punto della retta ΓG;
2°. Il punto Q è allineato coi punti G e Γ.

35. Ed ora con grande facilità, valendoci delle proprietà dimostrate precedentemente, potremmo dedurre moltissime altre proprietà che non sono che la generalizzazione di quelle dimostrate nella geometria elementare, e, più specialmente, nella geometria del triangolo.

La generalizzazione può farsi in modo completo ed esauriente. Noi non abbiamo avuto in animo di trattare qui in modo esauriente questo argomento; solo abbiam voluto far vedere, come, estendendo i concetti su' quali è fondata la geometria elementare, si possa, molto agevolmente, generalizzare molte proprietà elementari; anzi, la trattazione generale riesce molto più connessa nelle sue parti e, quindi, molto più chiara e feconda.

Ponendo fine a questo breve lavoro, daremo uno specchio che compendi le più importanti proprietà da noi dimostrate, le denominazioni adottate e gli elementi considerati, ponendo il tutto in confronto coi corrispondenti casi della geometria elementare.

Caso generale.	*Caso della geometria elementare.*
Retta fondamentale (retta p).	Retta all'infinito del piano.
Involuzione fondamentale.	Involuzione assoluta o circolare.
Conica fondamentale.	Circonferenza.
Rette concorrenti con la fondamentale.	Rette parallele.
Rette coniugate.	Rette perpendicolari.
Rette anticoncorrenti con la fondamentale, rispetto a un certo angolo.	Rette antiparallele rispetto a un certo angolo.
Traversali angolari fondamentalmente associate.	Traversali angolari isogonalmente coniugate.
Fascio di coniche fondamentali.	Fascio di circoli.
Omologia fondamentale (di asse la retta p).	Omotetia.
Punti corrispondenti d'una omologia fondamentale armonica.	Punti simmetrici rispetto a un punto dato.
Triangolo.	*Triangolo.*
Conica fondamentalmente circoscritta.	Circonferenza circoscritta.
Rette coniugate ai lati del triangolo, condotte pe' vertici opposti.	Altezze.
Punti d'incontro di tali rette (punto H).	Ortocentro (H).
Polo della retta fondamentale rispetto alla conica fondamentalmente circoscritta (punto P).	Circumcentro (O).
Polo della retta fondamentale rispetto al triangolo (punto G).	Baricentro (G).
Retta PGH.	Retta d'Eulero.
Punti fondamentalmente coniugati.	Punti isogonalmente coniugati.
Trasformazione fondamentale.	Trasformazione per punti isogonalmente coniugati.
Punti uniti della trasformazione fondamentale (punti I, I_a, I_b, I_c).	Incentro e ex-centri (I, I_a, I_b, I_c).
Rette unite delle involuzioni	Bisettrici interne e esterne.

di traversali angolari, subordinate dalla trasformazione fondamentale.	
Coniche fondamentalmente inscritte.	Circonferenze inscritte e exinscritte.
Triangolo fondamentalmente inscritto rispetto a un punto dato.	Triangolo podario d'un punto.
Punto K.	Punto di *Lemoine*.
Punto Γ.	Punto di *Gergonne*.
Punto J.	Punto di *Nagel*.
Punto Q.	Punto Q. [1]

R. VERCELLIN.

INTORNO ALLA RISOLUZIONE PER RADICALI
di un'equazione algebrica in un campo di Galois

1. Data una funzione dell'*indeterminata* x

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

i cui coefficienti sono interi qualunque appartenenti al sistema completo di residui definito dal numero primo p, e che si suppone irriducibile mod p, vale a dire non decomponibile nel prodotto di funzioni di grado minore a coefficienti dello stesso campo, è noto che i p^n *elementi* [2]

$$\alpha_0^{(i)} x^{n-1} + \alpha_1^{(i)} x^{n-2} + \dots \alpha_{n-1}^{(i)} = r_i \qquad (1)$$

che si ottengono attribuendo a ciascuno dei coefficienti α indipendentemente l'uno dall'altro p valori congrui rispettivamente mod p ad uno qualunque dei p residui

$$0, 1, 2 \dots (p-1)$$

costituiscono il « campo di Galois » definito dalla funzione modulare $f(x)$ e dal numero primo p, che, ove non occorra mettere in vista la funzione modulare, indicheremo brevemente con $[p^n]$.

Agli elementi (1) che si considerano tutti tra loro diversi, si possono sostituire altri che ad essi sieno rispettivamente congrui rispetto

(1) Cfr. la mia nota « Su alcune proprietà d'un punto notevole del piano del triangolo ». *Periodico di Matematica*, anno XXIV, fasc. II, 1908.
(2) « Marche » secondo il DICKSON.

alla funzione modulare ed al numero primo p e che si identificano coi precedenti.

Manifestamente, $[p^n]$ contiene in sè $[p]$ che si può considerare generato dalla funzione irriducibile

$$f(x) = a_0 x + a_1$$

e come è noto in $[p^n]$ sono sempre possibili ed univoche le operazioni razionali, esclusa come di consueto la divisione per 0.

Per quanto poi concerne le equazioni, si dimostra che un'equazione:

$$\varphi(y) = 0,$$

i cui coefficienti appartengono a $[p^n]$ non può avere nel campo stesso più radici delle unità del grado, ma che estendendo convenientemente il campo stesso mediante una funzione di un'altra indeterminata con coefficienti in $[p^n]$, ed in esso irriducibile, si giunge sempre alla costruzione di un nuovo campo

$$[[p^n]^{n'}]$$

tale che in esso la

$$\varphi(y) = 0$$

abbia tante radici quanti ne indica il grado.

Se poi in luogo di un'equazione generale, si considera un'equazione binomia

$$y^m = 1$$

si dimostra che essa ha in $[p^n]$ un numero di radici eguale al m. c. d. di m e $p^n - 1$.

Non constandomi che si sia preso in considerazione il problema della risoluzione per radicali di un'equazione in un campo di Galois, non credo superfluo del tutto questo breve cenno limitato alle equazioni di 3° grado in $[p]$, tanto più che può servire a far *intravedere* quali *deformazioni* verrebbe a subire la Teoria della risoluzione delle equazioni algebriche per radicali secondo Galois applicata ad equazioni in $[p^n]$.

2. Sia $p = 4k - 1 = 12k' + 7$ nella quale ipotesi si ha:

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = -1, \qquad \left(\frac{3}{p}\right) = -1,$$

e consideriamo la cubica

$$y^3 + ay + b = 0 \tag{1}$$

i cui coefficienti appartengono a $[p]$.

Posto che la (1) abbia un'unica radice reale, cioè in $[p]$, ed indicatala con α sarà:

$$y^3 + ay + b = (y^2 + \alpha y + (a + \alpha^2))(y - \alpha) = 0 \tag{2}$$

che, fatto $y = u - \frac{x}{2}$ assume la forma:

$$\left(u - \frac{3x}{2}\right)\left(u^2 + \frac{4a + 3x^2}{4}\right) = 0$$

con la radice reale $\frac{3x}{2}$, cioè in $[p]$, e due fuori di $[p]$, per cui l'elemento

$$-\frac{4a + 3x^2}{4}$$

del campo, è un non-residuo mod p.

Dimostriamo intanto che anche

$$\Delta' = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}$$

è un non-residuo.

Infatti sostituendo $-(x^3 + ax)$ in luogo di b, si ottiene:

$$\Delta' = \frac{27x^6 + 54ax^4 + 27a^2x^2 + 4a^3}{4 \, . \, 9 \, . \, 3}$$

$$= \frac{4a + 3x^2}{3} \cdot \frac{(3x^2 + a)^2}{4 \, . \, 9} .$$

Ricordando ora il carattere quadratico di 3, e ponendo mente che $(4a + 3x^2)$ è un residuo poichè non lo è (-1), segue subito che:

$$\left(\frac{\Delta'}{p}\right) = -1.$$

Ciò premesso, applicando ad (1) la formula del Tartaglia, risulta:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\Delta'}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\Delta'}}.$$

La $\sqrt{\Delta'}$ non esiste in $[p]$, per cui estendendo il campo con la funzione irriducibile dell'indeterminata z:

$$f_1(z) = z^2 - \Delta'$$

si ottiene per y l'espressione formale:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + z} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - z}$$

che, lasciando ai radicali tutta la loro generalità, è suscettibile di nove diverse interpretazioni, ma che con un semplice artifizio dovuto al Cayley [1] si può rendere univoca.

---

[1] WEBER, *Lehrbuch der Algebra*, I. § 36-118.

Poniamo ora che nel campo $[p^2]$ definito dall'irriducibile $f_1(z)$, l'elemento $-\frac{b}{2}+z$ sia un residuo cubico, ovverosia che esista $\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+z}$ e sia $(\mu+\nu z)$ una delle sue determinazioni per cui:

$$\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-z}=(\mu-\nu z)$$

appartenendo μ, ν a $[p]$.

Per l'ipotesi $p=12k'+7$, $(p-1)$ è divisibile per 3, quindi la $y^3=1$ ha le sue tre radici in $[p]$, e detta ω una di esse diversa dall'unità e per ciò primitiva, le tre radici di (1) saranno date da:

$$\begin{aligned}\alpha&=2\mu\\ \beta&=\omega(\mu+\nu z)+\omega^2(\mu-\nu z)\\ \gamma&=\omega^2(\mu+\nu z)+\omega(\mu-\nu z)\end{aligned}$$

dalle quali si ricava:

$$\begin{aligned}\alpha\beta+\beta\gamma=\alpha\gamma&=-3\mu^2+3\nu^2z^2=a\\ \alpha\beta\gamma&=2\mu^3+6\mu\,\nu^2z^2=-b\end{aligned}$$

e sostituendo Δ' a z^2, per determinare μ e ν si ottiene il sistema:

$$\begin{aligned}-3\mu^2+3\nu^2.\Delta'&=a\\ 2\mu^3+6\mu.\nu\Delta'&=-b.\end{aligned}\qquad(4)$$

Ricavando dalla prima ν^2 e sostituendo nella seconda, dopo facili riduzioni si ottiene:

$$(2\mu)^3+a.(2\mu)+b=0\qquad(5)$$

cioè la determinazione di μ dipende dalla stessa equazione (1).

La (5) ammetterà quindi la radice $2\mu=\alpha$ e sostituendo $\mu=\frac{\alpha}{2}$ nella prima della (4) si ottiene:

$$-3.\frac{\alpha^2}{4}+3\nu^2.\Delta'=a$$

$$\nu^2=\frac{4a+3\alpha^2}{4.3.\Delta'}\qquad(6)$$

e per quanto si è osservato precedentemento intorno al carattere quadratico di $\frac{4a+3\alpha^2}{4}$, 3, Δ' si conclude che la (6) è solubile in $[p]$.

Resta così provato che in $[p^2]$ si possono estrarre le due radici

$$\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+z},\qquad\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-z}$$

se non che, volendone determinare algebricamente la parte *reale* μ (cioè in $[p]$) ed il coefficiente pure in $[p]$ della parte immaginaria (cioè in $[p^2]$) si è ricondotti alla soluzione di un'equazione identica alla primitiva.

A differenza di ciò che avviene nell'Algebra ordinaria, il *caso irriducibile* si presenta quando la cubica ha una sola radice reale.

3. Supponiamo ora che la (1) sia dotata di tre radici reali cioè in $[p]$. Dalla (3) risulta allora che:

$$\frac{4a+3\alpha^2}{4}$$

è un non residuo, e quindi mantenendo le stesse ipotesi relative a p, Δ' è residuo. Si ha allora:

$$y=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\Delta'}}+\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\Delta'}}=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+q}+\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-q}.$$

Se $-\frac{b}{2}+q$ è residuo cubico in $[p]$, nel qual caso lo è pure $-\frac{b}{2}-q$, qualora si indichino con u, v rispettivamente due *valori* quali si vogliano dei predetti radicali, gli altri verranno espressi da $u\,.\,\omega$; $u\,.\,\omega^2$; $v\,.\,\omega$; $v\,.\,\omega^2$ e le radici di (1) verranno date in modo univoco dalle espressioni

$$u+v;\quad \omega\,.\,u+\omega^2\,.\,v;\quad \omega^2\,.\,u+\omega\,.\,v$$

solo che u, v soddisfino alla relazione:

$$u\,.\,v=-\frac{a}{3}.$$

Facciamo vedere come nell'ipotesi che la (1) abbia le sue radici in $[p]$, $-\frac{b}{2}$ dev'essere un residuo cubico.

Ammesso infatti il contrario, estendiamo il campo con la funzione irriducibile in $[p]$ dell'indeterminata z:

$$f_2(z)=z^3-\left(-\frac{b}{2}+q\right).$$

Posto, in questo caso, $u=z$, $v=-\frac{a}{3z}$ la (1) ammetterebbe in $[p^3]$ le radici

$$z-\frac{a}{3z}=z-\frac{az^2}{3\left(-\frac{b}{2}+q\right)};\quad z\omega-\frac{a\omega^2z^2}{3\left(-\frac{b}{2}+q\right)};$$

$$z\omega^2-\frac{a\omega z^2}{3\left(-\frac{b}{2}+q\right)}$$

e poichè ne ha già tre per ipotesi in $[p]$ che è pure contenuto in $[p^3]$, la stessa equazione verrebbe ad ammettere in quest'ultimo campo un numero di radici superiore al suo grado.

Resta così provato che se la (1) ha le sue radici reali, esse vengono completamente determinate dalla formula cardanica, che, come abbiamo visto, è reale per esser 3 divisori di $(p-1)$.

Esempii:

1°. $$p=7\,,\quad \left(\frac{-1}{7}\right)=-1,\quad \left(\frac{3}{7}\right)=-1.$$

La $y^3+3y+1=0$, ammette in $[p]$ la sola radice $y=4$ e risulta effettivamente $\left(\frac{\Delta'}{7}\right)=-1$ e si presenta il caso irriducibile.

2°. $$p=19=12k+7,\quad \left(\frac{-1}{19}\right)=\left(\frac{3}{19}\right)=-1.$$

La $y^3+2y+4=0$ ha le tre radici reali:

$$4,\quad 7,\quad 8.$$

D'altra parte:

$$\Delta'=5,\qquad \left(\frac{5}{19}\right)=1,\qquad \sqrt{5}=9,\qquad -\frac{b}{2}=17$$

$$y=\sqrt[3]{17+9}+\sqrt[3]{17-9}=\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{8}.$$

Posto ora $\sqrt[3]{7}=4$, si assuma per $\sqrt[3]{8}$ quello dei suoi tre valori che soddisfa alla condizione

$$4\,.\sqrt[3]{8}=-\frac{2}{3}=-7=12$$

cioè:

$$\sqrt[3]{8}=3$$

ed infine, preso $\omega=7$ e quindi $\omega^2=11$, risulta:

$$y_1=4+3,\quad y_2=4\,.\,7+3\,.\,11=4,\quad y_3=4\,.\,11+7\,.\,3=8$$

4. Sia $p=4k-1=12k'+11$ nel qual caso si ha:

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=-1,\quad \left(\frac{3}{p}\right)=1$$

e suppongasi che la (1) abbia l'unica radice reale α, per cui si potrà trasformarla nella (3) con $\frac{4a+3\alpha^2}{4}$ residuo mod p e quindi essendo $\left(\frac{3}{p}\right)=1$, anche Δ' sarà pure residuo. In questo caso essendo 3 primo con $p-1=11k'+10$, entrambi i radicali

$$\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\Delta'}}\quad .\quad \sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\Delta'}}$$

hanno uno ed un solo *valore* in $[p]$ e la loro somma ci fornisce effettivamente la radice reale di (1).

Le altre due si ottengono mediante le radici primitive della $y^3=1$ le quali però, essendo 3 primo con $p-1$, non appartengono a $[p]$.

Esempii:

$$p=23=4.6-1=12.1+11.$$

La $x^3-3=0$ ha l'unica soluzione reale $x=5$. Applicando la formula:

$$x=\sqrt[3]{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}}}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}}}=\sqrt[3]{3}=5$$

La $x^3+4x-12=0$ ha pure l'unica soluzione in $[p]$, $x=19$, e difatti si ha:

$$x=\sqrt[3]{6+\sqrt{6}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{6}}=\sqrt[3]{6+11}+\sqrt[3]{6-11}=15+4=19.$$

Se all'incontro ha le sue tre radici reali, ne segue che $\frac{4a+3x^2}{4}$ è un non-residuo e lo stesso vale per Δ', e conformemente a quanto avviene nell'Algebra la consueta formula ci dà le radici solo formalmente.

Analogamente si possono trattare i casi

$$p=4k+1=12k'+1; \quad p=4k+1=12k'+5:$$

e notando che pel primo si ha:

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=\left(\frac{3}{p}\right)=1$$

e pel secondo:

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=-\left(\frac{3}{p}\right)=1,$$

si può prevedere che s'invertiranno i risultati ottenuti rispettivamente per $p=4k-1=12k'+11$; $p=4k-1=12k'+7$.

U. Scarpis.

DI UNA PROPRIETÀ DEI NUMERI PRIMI

Nella presente Nota mi propongo di dimostrare, basandomi sopra alcune proprietà fondamentali delle congruenze binomie di modulo primo, la seguente proposizione:

Se p *è un numero primo maggiore di* 2 *ed* n *è un intero non di-*

visibile per p — 1, *la somma delle potenze* n^{me} *di* p *numeri interi positivi consecutivi qualunque è uguale ad un multiplo di* p. (1)

Osservando subito che p numeri interi consecutivi

$$x, \quad x+1, \quad x+2, \ldots (x+p-1)$$

sono sempre, salvo l'ordine al più, congrui ai numeri

$$0, \quad 1, \quad 2, \ldots p-1$$

rispetto al modulo p e che altrettanto può dirsi delle n^{me} potenze delle due successioni, basterà per la dimostrazione riferirci al caso in cui è $x=0$. Si tratta dunque di provare che per p primo e maggiore di 2 e per n non divisibile per $p-1$ la somma

$$1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (p-1)^n$$

è uguale ad un multiplo di p.

Ricordiamo (2) che i resti delle divisioni di

$$1^n, \quad 2^n, \quad 3^n, \ldots (p-1)^n$$

per p sono i *residui ennesimi* di p; che, se δ è il massimo divisore comune di n e $p-1$, il numero di questi residui distinti è $p-1:\delta=\mu$; infine, che essi formano un sistema di μ radici incongrue della congruenza

$$x^\mu \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p). \tag{1}$$

Ciò premesso, supponiamo che il numero a appartenga all'esponente μ rispetto al modulo p. Allora le potenze

$$a^0, \quad a, \quad a^2, \ldots a^{\mu-1}$$

sono pure μ radici incongrue della (1) e perciò esse sono rispettivamente congrue ai nominati residui ennesimi di p. (3) Indicando tali residui con $r_1, r_2, r_3 \ldots r_\mu$, abbiamo dunque

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_\mu \equiv a^0 + a + \ldots a^{\mu-1} = \frac{a^\mu - 1}{a-1} \quad (\text{mod. } p). \tag{2}$$

Ora, se n non è divisibile per $p-1$ (intendo che sia anche diverso dallo zero), risultano $\delta < p-1$, $\mu > 1$ e quindi, siccome a appartiene

---

(1) Lo svolgimento della presente Nota è indipendente da quello seguito da E. CATALAN "Quelques théorèmes d'arithmétique„ nei *Mémoires de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique*, tomo XLVI, a. 1886; quivi sono, tra l'altro, dimostrate le proprietà che nella presente mia Nota sono contenute nei Corollari 1°, 3°, 4° e 5° e nella Osservazione. Debbo segnalare che il Teorema di LIONNET (così denominato dal CATALAN) fu dimostrato dal LIONNET nel 1842 (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, vol. I), partendo dalla nota identità

$$(p+1)[(p+1)^n - 1] = \sum_{r=1}^{r=n} \binom{n+1}{r} S_r,$$

essendo $S_r = 1^r + 2^r + 3^r + \ldots + p^r$; seguendo dunque una via molto diversa da quella indicata nella presente Nota. Il CATALAN generalizza la proposizione con un processo analitico e giunge prima all'enunciato che do nel Cor. 4°, quindi con ulteriori sviluppi tratta anche i casi in cui p è composto.

(2) Vedi p. es. *Lezioni sulla teoria dei numeri*, di P. G. LEJEUNE DIRICHLET pubblicato da R. DEDEKIND, § 31.

(3) DIRICHLET, *l. c.*, § 29.

all'esponente μ, la differenza $a-1$ non è nulla nè multipla di p, mentre $a^\mu - 1$ è divisibile per p. Ne viene che il numero intero $\frac{a^\mu-1}{a-1}$ è un multiplo di p. Quindi, escluso il caso che sia n divisibile per $p-1$ (si è supposto $p>2$), la congruenza (2) diviene

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_\mu \equiv 0 \quad (\text{mod. } p). \tag{3}$$

Osservando infine che, essendo r_h uno qualunque dei residui ennesimi di p, la congruenza

$$x^n \equiv r_h \quad (\text{mod. } p)$$

ammette sempre δ e soltanto δ radici incongrue,(¹) si vede che delle potenze

$$1^n, \quad 2^n, \quad 3^n, \ldots (p-1)^n$$

precisamente δ sono congrue ad r_1, altre δ ad r_2 e così via, onde per la (3) si ha

$$1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (p-1)^n \equiv \delta(r_1 + r_2 + \ldots + r_\mu) \equiv 0 \quad (\text{mod. } p).$$

Così la proposizione resta dimostrata.

Osservazione. — Se n è divisibile per $p-1$, ma è diverso dallo zero, in forza del Teorema di Fermat abbiamo evidentemente (²)

$$x^n + (x+1)^n + (x+2)^n + \ldots + (x+p-1)^n + 1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } p). \tag{4}$$

Se $n=0$ (ed è $x>0$) si ha manifestamente

$$x^0 + (x+1)^0 + (x+2)^0 + \ldots + (x+p-1)^0 = p. \tag{5}$$

Si noti ancora che a queste relazioni (4) e (5) soddisfa anche il numero primo 2 per valori interi e positivi qualunque di n e di x.

Casi particolari. — Ponendo per brevità

$$S_n = 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + p^n,$$

possiamo enunciare senz'altro i seguenti corollari, i quali sono casi particolari notevoli della nostra proposizione e dànno alcune proprietà di S_n per p ed n interi.

Corollario 1°. — *Se* p *è primo e maggiore di* 2 *ed* n *è uno dei numeri* 1, 2, 3,... p — 2, S_n *è divisibile per* p. (Teorema di Lionnet.)

Corollario 2°. — *Se* p *è primo* (non escluso il 2) *ed* n *è uno dei numeri* 0, 1, 2,... p — 2, S_n *è divisibile per* p.

Corollario 3°. — *Se* p + 1 *è primo, maggiore di* $n+1 \geqq 2$, S_n *è divisibile per* p + 1. (Catalan, *l. c.*, Teor. II.)

Corollario 4°. — *Se* p *è primo, maggiore di* 2, *ed* n *non è divisibile per* p — 1, S_n *è un multiplo di* p. (Catalan, *l. c.*, Teor. IV.)

(¹) Dirichlet, *l. c.*, § 31.
(²) Cfr. Catalan, *l. c.*, Teoremi III, V e VII.

Corollario 5°. — *Se* $\mathrm{p}+1$ *è primo, maggiore di* 2, *ed* n *non è divisibile per* p, $\mathrm{S_n}$ *è un multiplo di* $\mathrm{p}+1$. (Catalan, *l. c.*, Teor. VI.)

Corollario 6°. — *Se* $\mathrm{p}+1$ *è primo e maggiore di* 3 *ed* n *è pari e non divisibile per* p, *la somma*

$$s_n = 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + \left(\frac{p}{2}\right)^n$$

è un multiplo di $\mathrm{p}+1$.

Per dimostrare quest'ultima proprietà si osservi che, nel caso di n pari, pel Teorema binomiale di Newton si ha

$$r^n \equiv (p+1-r)^n \qquad (\text{mod. } p+1);$$

onde risulta facilmente, variando r da 1 a $\frac{p}{2}$,

$$2s_n \equiv S_n \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p+1)$$

e infine, poichè $p+1>3$,

$$s_n \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p+1).$$

Si noti che, come si vede subito, la proprietà sussiste anche per la somma dei $\frac{p}{2}$ numeri consecutivi che precedono o seguono qualsiasi multiplo di $p+1$ nella serie dei numeri naturali.

Esempi. — Illustriamo con qualche esempio i resultati suesposti.

1°. Siano $p=13$, $n=33$, $x=15$. Si tratta di verificare che la somma delle 33^{me} potenze dei 13 numeri interi consecutivi 15, 16, 17, ... 27 è divisibile per 13. Per fare il calcolo più speditamente, osserviamo che invece dei numeri 15, 16, 17, ... 27 possiamo prendere i resti delle loro divisioni per 13 e che all'esponente 33, in forza del Teorema di Fermat, si può sostituire l'esponente 9, resto della divisione di 33 per 12. Siamo così condotti a verificare che

$$1^9+2^9+3^9+4^9+5^9+6^9+7^9+8^9+9^9+10^9+11^9+12^9$$

è divisibile per 13 (cfr. Cor. 3°). Ora, calcolando i resti delle divisioni per 13 dei singoli termini di questa somma (per eseguire il calcolo prontamente conviene operare sui resti delle successive potenze a partire dalla prima), ci riduciamo a verificare che la somma

$$1+5+1+12+5+5+8+8+1+12+8+12=78$$

è divisibile per 13. Si noti che, come abbiamo visto nella dimostrazione della nostra proposizione, i resti distinti *(residui noni di 13)* 1, 5, 8, 12 sono $4=12:3$, essendo 3 il massimo divisore comune di 12 e 9; che essi sono 4 radici incongrue (minori di 13) della congruenza $x^4 \equiv 1$ (mod. 13); che la loro somma $1+5+8+12=26$ è un multiplo di 13; e che ciascuno di essi è ripetuto 3 volte.

2°. Siano $p+1=13$, $n=8$, quindi (COR. 6°)

$$S_8 = 1^8+2^8+3^8+4^8+5^8+6^8+7^8+8^8+9^8+10^8+11^8+12^8$$
$$s_8 = 1^8+2^8+3^8+4^8+5^8+6^8.$$

Calcolando i resti delle divisioni per 13 dei singoli termini di queste somme, si trova

$$S_8 \equiv 1+9+9+3+1+3+3+1+3+9+9+1 \equiv 52 \equiv 0 \pmod{13}$$
$$s_8 \equiv 1+9+9+3+1+3 \equiv 26 \equiv 0 \pmod{13}.$$

Si noti che, come si è dimostrato, i termini di S_8 equidistanti dagli estremi sono congrui rispetto al modulo 13.

UMBERTO CONCINA.

INTORNO ALLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE $x^n+y^n=z^n$

1. Scopo di questa nota è la dimostrazione diretta del seguente teorema:

Non esiste una terna di forme binarie che fornisca, per ogni coppia di valori delle variabili, una soluzione dell'equazione indeterminata

$$x^n+y^n=z^n$$

in cui n *è un numero intero, maggiore di 2.* (¹)

2. Per raggiungere il nostro intento, proponiamoci la ricerca dei valori di n, per i quali sia possibile determinare una terna di forme binarie, che fornisca, per ogni coppia di valori delle variabili, una soluzione dell'equazione indeterminata

$$x^n+y^n=z^n \tag{1}$$

in cui n è un numero intero, maggiore di *uno*. (²)

Possiamo ammettere che le tre forme cercate siano prime fra loro, giacchè altrimenti potrebbero essere sostituite da altre tre forme di

(¹) La curva piana rappresentata dall'equazione considerata è notoriamente di genere superiore a zero, quindi può concludersi *a priori* la verità della proposizione enunciata. Crediamo tuttavia non inutile esporre una dimostrazione diretta ed elementare del teorema, tanto più che in questi ultimi tempi sono rifioriti i tentativi (pubblicati in giornali esteri, anche autorevoli) dei cosidetti *fermatisti*, i quali si lusingano di poter concludere che l'ultimo teorema di Fermat è valido, cioè che l'equazione $x^n+y^n=z^n$, per $n>2$, non ammette soluzioni razionali, in termini differenti da zero, seguendo certi procedimenti, che dimostrano non aver essi notizia alcuna del teorema predetto.

(²) Abbiamo escluso il caso di $n=1$, perchè il procedimento, che intendiamo di seguire, cade in difetto per tale valore di n. Ma è intuitivo che esistono infinite terne di forme binarie, capaci di dare una soluzione dell'equazione indeterminata $x+y=z$, per ogni coppia di valori delle variabili. La terna più semplice è $x=u$, $y=v$, $z=u+v$, in cui u e v sono due variabili arbitrarie.

grado inferiore, che si otterrebbero dalle prime sopprimendo il fattore comune; la terna di forme risultanti fornirebbe pure una soluzione della (1) per ogni coppia di valori delle variabili. Sono in conseguenza escluse le terne in cui una almeno delle forme sia identicamente nulla.

Osserviamo infine che se esistono tre forme binarie capaci di dare, per ogni coppia di valori delle variabili, una soluzione della (1), esse sono dello stesso grado, perchè altrimenti l'equazione non potrebbe mutarsi in un'identità, dopo avervi sostituito alle x, y, z coteste forme, senza che almeno una delle tre forme sia identicamente nulla.

Premesso ciò, consideriamo le tre forme binarie di m^{mo} grado, prime fra loro,

$$\begin{cases} x = a_0 u^m + a_1 u^{m-1} v + \ldots + a_m v^m, \\ y = b_0 u^m + b_1 u^{m-1} v + \ldots + b_m v^m, \\ z = c_0 u^m + c_1 u^{m-1} v + \ldots + c_m v^m, \end{cases} \tag{2}$$

in cui i coefficienti a, b, c sono quantità costanti, u e v due variabili, e supponiamo che esprimano (se ciò è possibile) una soluzione dell'equazione (1), per ogni coppia di valori di u e v.

Allora è evidente che le due equazioni

$$a_0 u^m + a_1 u^{m-1} v + \ldots + a_m v^m = 0, \tag{3}$$

$$(b_0 u^m + b_1 u^{m-1} v + \ldots + b_m v^m)^n = (c_0 u^m + c_1 u^{m-1} v + \ldots + c_m v^m)^n, \tag{4}$$

devono necessariamente ammettere le medesime radici: da ciò consegue che *la (4) deve avere radici multiple.*

La (4) si scinde nelle n equazioni che si deducono dalla seguente, ponendovi $\mu = 1, 2, \ldots, n$,

$$b_0 u^m + b_1 u^{m-1} v + \ldots + b_m v^m = \varepsilon^\mu (c_0 u^m + c_1 u^{m-1} v + \ldots + c_m v^m), \tag{5}$$

in cui ε rappresenta una radice n^{ma} *primitiva* dell'unità.

Due equazioni del gruppo (5) *non possono avere una radice in comune.* Infatti se per $\frac{u}{v} = k$ si avesse

$$b_0 k^m + b_1 k^{m-1} + \ldots + b_m = \varepsilon^\mu (c_0 k^m + c_1 k^{m-1} + \ldots + c_m),$$
$$b_0 k^m + b_1 k^{m-1} + \ldots + b_m = \varepsilon^{\mu'} (c_0 k^m + c_1 k^{m-1} + \ldots + c_m),$$

essendo $\mu' \mp \mu$, conseguirebbe immediatamente

$$b_0 k^m + b_1 k^{m-1} + \ldots + b_m = 0,$$
$$c_0 k^m + c_1 k^{m-1} + \ldots + c_m = 0;$$

e poichè k sarebbe radice dell'equazione (4) e quindi anche della (3), le forme (2) avrebbero una radice in comune, il che è escluso.

Dunque una radice dell'equazione (3) è radice di una, e di una soltanto delle equazioni del gruppo (5).

Conseguenze che *m non può essere minore di n.*

3. Indichiamo con $k_{\mu 1}, k_{\mu 2}, \ldots, k_{\mu\sigma_\mu}$ le radici *distinte* di una delle equazioni del gruppo (5); potremo scrivere, avendo presenti le (2):

$$y - \varepsilon^\mu z = (b_0 - \varepsilon^\mu c_0)(u - k_{\mu 1} v)^{r_{\mu 1}} (u - k_{\mu 2} v)^{r_{\mu 2}} \ldots (u - k_{\mu\sigma_\mu} v)^{r_{\mu\sigma_\mu}}, \quad (6)$$

in cui $r_{\mu 1}, r_{\mu 2}, \ldots r_{\sigma\mu_\mu}$ indicano i gradi di molteplicità delle radici; e quindi sarà

$$r_{\mu 1} + r_{\mu 2} + \ldots + r_{\mu\sigma_\mu} = m. \quad (7)$$

Moltiplicando membro a membro le n equazioni del gruppo (6), otteniamo, ricordando che ε è una radice n^{ma} primitiva dell'unità,

$$y^n - z^n = (b_0^n - c_0^n) \prod_1^n{}_\mu (u - k_{\mu 1} v)^{r_{\mu 1}} (u - k_{\mu 2} v)^{r_{\mu 2}} \ldots (u - k_{\mu\sigma_\mu} v)^{r_{\mu\sigma_\mu}}$$

e quindi, per la (1),

$$x^n = (c_0^n - b_0^n) \prod_1^n{}_\mu (u - k_{\mu 1} v)^{r_{\mu 1}} (u - k_{\mu 2} v)^{r_{\mu 2}} \ldots (u - k_{\mu\sigma_\mu} v)^{r_{\mu\sigma_\mu}}.$$

Ma le quantità k sono tutte differenti, e x rappresenta una forma binaria di m^{mo} grado, quindi concludiamo essere

$$r_{\mu h} = n s_{\mu h}, \qquad (h = 1, 2, \ldots, \sigma_\mu),$$

in cui $s_{\mu h}$ indica un numero intero e positivo, per tutti i valori di μ e di h considerati.

Allora la (7) dimostra che *m dev'essere multiplo di n.*

4. Eleviamo i due membri della (6) alla potenza λ^{ma}, essendo $0 < \lambda < n$, e addizioniamo membro a membro le n equazioni che risultano ponendo $\mu = 1, 2, \ldots, n$; otterremo

$$n y^\lambda = \sum_1^n{}_\mu (b_0 - \varepsilon^\mu c_0)^\lambda (u - k_{\mu 1} v)^{\lambda r_{\mu 2}} (u - k_{\mu 2} v)^{\lambda r_{\mu 2}} \ldots (u - k_{\mu\sigma_\mu} v)^{\lambda r_{\mu\sigma_\mu}}.$$

Quest'equazione esprime adunque una condizione necessaria, affinchè esistano tre forme binarie capaci di fornire una soluzione della (1), per ogni coppia di valori delle variabili.

Se ora poniamo

$$\varphi_\mu = (u - k_{\mu 1} v)^{r_{\mu 1}} (u - k_{\mu 2} v)^{r_{\mu 2}} \ldots (u - k_{\mu\sigma_\mu} v)^{r_{\mu\sigma_\mu}},$$

la precedente equazione diventa

$$n y^\lambda = \sum_1^n{}_\mu (b_0 - \varepsilon^\mu c_0)^\lambda \cdot \varphi_\mu{}^\lambda, \quad (8)$$

dalla quale ricaviamo, sostituendo ad y l'espressione che da essa risulta ponendovi $\lambda = 1$,

$$\left\{ \sum_1^n{}_\mu (b_0 - \varepsilon_\mu c_0) \varphi_\mu \right\}^\lambda = n^{\lambda - 1} \sum_1^n{}_\mu (b_0 - \varepsilon^\mu c_0)^\lambda \varphi_\mu{}^\lambda. \quad (9)$$

Quest'uguaglianza non può essere un'identità per $\lambda \mp 1$. Infatti, supponendo ch'essa sia un'identità per ogni valore di $\lambda = 1, 2, \ldots, n-1$, le $n-1$ equazioni seguenti:

$$\Sigma_\mu (b_0 - \varepsilon^\mu c_0)^\lambda \varphi_\mu^\lambda = np^\lambda u^{\lambda(m-\nu)} v^{\lambda\nu},$$

in cui ν rappresenta uno qualunque dei numeri $0, 1, 2, \ldots, m$, devono necessariamente avere in comune tutte le radici di quella fra esse che corrisponde a $\lambda = 1$, per ogni valore di p, scelto ad arbitrio.

È evidente che ciò è possibile solo quando sia identicamente

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n; \text{ (1)}$$

ma questo caso è escluso, non potendo le equazioni (5) avere alcuna radice in comune. La (9) non può dunque sussistere che per $\lambda = 1$, e per conseguenza essa vale soltanto quando è $n = 2$. (2)

---

(1) Basta infatti osservare che se p è scelto in modo che le due equazioni

$$\sum_{1}^{n-1}{}_i (b_0 - \varepsilon^{\mu_i} c_0) \varphi_{\mu_i} = npu^{m-\nu} v^\nu, \qquad \varphi_{\mu_n} = 0$$

abbiano una radice $\frac{u}{v} = k$ in comune (se $k = 0$, si porrà $\nu = m$), anche le $n-1$ equazioni

$$\sum_{1}^{n-1}{}_i (b_0 - \varepsilon^{\mu_i} c_0)^\lambda \overset{\lambda}{\varphi}_{\mu_i} = n p^\lambda u^{\lambda(m-\nu)} v^{\lambda\nu}, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n-1),$$

ammettono quella radice. Risolvendo questo sistema rispetto alle $n-1$ quantità

$$(b_0 - \varepsilon^{\mu_i} c_0) \varphi_{\mu_i},$$

ricaviamo

$$(b_0 - \varepsilon^{\mu_i} c_0) \varphi_{\mu_i} = (1 - \varepsilon_1^\omega) p u^{m-\nu} v^\nu,$$

in cui ε_1 indica una radice n^{ma} primitiva dell'unità, ed ω rappresenta uno *qualunque* dei numeri $1, 2, \ldots, n-1$, purchè si ponga $\frac{u}{v} = k$. Ciò dimostra che deve essere $p = 0$ e quindi che l'equazione $\varphi_{\mu_i} = 0$ ammette la radice $\frac{u}{v} = k$. Dunque è identicamente $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n$.

(2) Per $n = 2$, la (8) è condizione sufficiente, affinchè esista una terna di forme binarie, capace di fornire una soluzione dell'equazione indeterminata $x^2 + y^2 = z^2$, per ogni coppia di valori delle variabili. Supponiamo infatti che si abbia

$$2y = (b_0 + c_0) \varphi_1 + (b_0 - c_0) \varphi_2,$$

in cui b_0, c_0 sono quantità costanti e φ_1, φ_2 due forme binarie d'ugual grado pari, senza radici in comune, del tipo

$$\varphi = (u^s + \sum_{1}^{s}{}_i g_i u^{s-i} v^i)^2.$$

Posto

$$2z = (b_0 + c_0) \varphi_1 - (b_0 - c_0) \varphi_2,$$

ricaviamo

$$y^2 - z^2 = (b_0^2 - c_0^2) \varphi_1 \varphi_2,$$

e quindi, se poniamo

$$x^2 = (c_0^2 - b_0^2) \varphi_1 \varphi_2,$$

otteniamo da questa e dalle prime, indicando con ε' uno dei numeri $+1$ e -1,

$$x = \varepsilon' \sqrt{c_0^2 - b_0^2} \cdot \sqrt{\varphi_1 \varphi_2},$$
$$y = \tfrac{1}{2} \{(b_0 + c_0) \varphi_1 - (b_0 - c_0) \varphi_2\},$$
$$z = \tfrac{1}{2} \{(b_0 + c_0) \varphi_1 - (b_0 - c_0) \varphi_2\}.$$

Le tre forme binarie, corrispondenti ad x, y, z che così abbiamo determinato, sono d'ugual grado pari, e manifestamente non hanno alcuna radice in comune. Esse forniscono, per ogni coppia

Possiamo così concludere che *non esiste una terna di forme binarie, che fornisca, per ogni coppia di valori delle variabili, una soluzione dell'equazione indeterminata* $x^n + y^n = z^n$, *se* n *è un numero intero, maggiore di 2.*

5. Corollario. — *Non esiste una terna di polinomi ad una o più variabili, che fornisca, per ogni valore delle variabili, una soluzione dell'equazione indeterminata*

$$x^n + y^n = z^n,$$

in cui n *è un numero intero, maggiore di 2.*

Basterà considerare il caso di una terna di polinomi ad una variabile, giacchè se esiste una terna di polinomi a più variabili, capace di fornire una soluzione della (1) per ogni gruppo di valori delle variabili, attribuendo a tutte le variabili, meno una, un valore determinato, si otterrebbe una terna di polinomi ad una variabile, che darebbe una soluzione dell'equazione per ogni valore della variabile rimasta.

Supponiamo adunque che esista una tale terna di polinomi ad una variabile. Possiamo ammettere che cotesti polinomi siano dello stesso grado, giacchè altrimenti potremmo ridurli allo stesso grado, facendo figurare, con coefficiente nullo, i termini mancanti. Sia pertanto

$$\begin{cases} x = a_0 u^m + a_1 u^{m-1} v + \ldots + a_m, \\ y = b_0 u^m + b_1 u^{m-1} v + \ldots + b_m, \\ z = c_0 u^m + c_1 u^{m-1} v + \ldots + c_m, \end{cases} \tag{10}$$

in cui i coefficienti a, b, c sono quantità costanti e u variabile, una terna di polinomi di m^{mo} grado, capace di fornire, per ogni valore di u, una soluzione dell'equazione (1).

È lecito supporre che i tre polinomi (10), siano primi fra loro, perchè altrimenti potrebbero essere sostituiti da altri tre polinomi di grado inferiore, che si otterrebbero dai primi sopprimendo il fattore comune; la terna dei polinomi risultanti fornirebbe pure una soluzione della (1) per ogni valore della variabile.

In base alla proprietà attribuita, per ipotesi, ai tre polinomi (10), deduciamo che la (1) si trasforma in un'identità, sostituendo ad x, y, z i polinomi corrispondenti; per conseguenza dovrà necessariamente aversi

$$a_0^n + b_0^n = c_0^n. \tag{11}$$

---

di valori di u e v, una soluzione dell'equazione $y^2 - z^2 = -x^2$, cioè dell'equazione $x^2 + y^2 = z^2$. Se, in particolare, supponiamo

$$z' = 1, \quad b_0 = 0, \quad c_0 = 1, \quad \varphi_1 = (u + v)^2, \quad \varphi_2 = (u - v)^2,$$

otteniamo:

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv, \quad z = u^2 + v^2,$$

che sono le note formole d'Eulero.

Se ora nei tre polinomi (10) sostituiamo $\frac{u}{v}$ ad u, essendo v un'indeterminata, possiamo scrivere

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{v^m}(a_0 u^m + a_1 u^{m-1} v + \ldots + a_m v^m), \\ y = \frac{1}{v^m}(b_0 u^m + b_1 u^{m-1} v + \ldots + b_m v^m), \\ z = \frac{1}{v^m}(c_0 u^m + c_1 u^{m-1} v + \ldots + c_m v^m), \end{array}\right. \tag{10'}$$

e otteniamo così una terna di funzioni, che fornisce una soluzione della (1) per ogni coppia di valori di u e v, purchè sia $v \neq 0$.

Consideriamo le tre forme binarie

$$\left\{\begin{array}{l} x' = a_0 u^m + a_1 u^{m-1} v + \ldots + a_m v^m, \\ y' = b_0 u^m + b_1 u^{m-1} v + \ldots + b_m v^m, \\ z' = c_0 u^m + c_1 u^{m-1} v + \ldots + c_m v^m. \end{array}\right. \tag{12}$$

Le (10') dimostrano che queste tre forme binarie forniscono pure una soluzione della (1) per ogni coppia di valori di u e v, purchè sia $v \neq 0$. Ma si può facilmente convincersi che anche per le coppie di valori di u e v nelle quali è $v = 0$, le (12) forniscono soluzioni per la (1). Infatti, per $v = 0$, otteniamo

$$x' = a_0 u^m, \qquad y' = b_0 u^m, \qquad z' = c_0 u^m,$$

le quali, in base alla (11), dànno una soluzione della (1) per ogni valore di u.

La terna di forme binarie (12) fornirebbe adunque una soluzione dell'equazione (1) per ogni coppia di valori di u e v, il che è assurdo.

L. Carlini.

PICCOLE NOTE

Sul calcolo delle altezze dei segmenti sferici.

A me sembra inopportuna l'attuale esclusione delle equazioni cubiche dai programmi per le scuole secondarie. Il loro studio sarebbe utilissimo come applicazione delle nozioni sui radicali, sui numeri complessi, sulle funzioni goniometriche; e potrebbe alla sua volta dare luogo ad utili ed interessanti applicazioni.

Ecco sull'argomento un esercizio che non mi sembra privo d'interesse.

***

1. Sia data una sfera omogenea di densità d, galleggiante sopra un liquido di densità d'; posto $\rho = \frac{d}{d'}$, si ha, com'è noto, $0 < \rho < 1$.

Immaginando continuato entro la sfera il piano di livello del liquido, la parte di sfera sommersa è un segmento sferico (ad una base). Preso, per semplicità, il raggio della sfera come segmento unitario, sia h la lunghezza dell'altezza di tale segmento. Tale numero è manifestamente compreso fra 0 e 2.

Potendosi, con sufficiente approssimazione, trascurare il peso dell'aria spostata (dalla parte di sfera che emerge), sappiamo dal principio d'Archimede: che, se $\rho = \frac{1}{2}$, sta sommerso nel liquido esattamente un emisfero, cioè $h = 0$; e che altrimenti sta sommerso più o meno di un emisfero, cioè $h >$ oppure < 1, secondo che $\rho >$ oppure $< \frac{1}{2}$.

Proponiamoci di trovare una formula la quale, in ogni caso, dato il valore di ρ fornisca quello di h.

2. Essendo

$$\tfrac{4}{3}\pi d,$$

il peso di tutta la sfera e [1]

$$\tfrac{1}{3}\pi h^2 (3 - h)\, d'$$

quello del liquido spostato, il ricordato principio d'Archimede dà

$$\tfrac{1}{3}\pi h^2 (3 - h)\, d' = \tfrac{4}{3}\pi d;$$

donde

$$h^2 (3 - h) = 4\rho, \qquad h^3 - 3h^2 + 4\rho = 0. \tag{1}$$

Poniamo $h = 1 + k$; ossia indichiamo con k la distanza del centro della sfera dal livello dell'acqua, presa questa distanza col segno $+$ quando il centro sta sotto ($h > 1$, $\rho > \frac{1}{2}$), col segno $-$ quando sta sopra.

Dalla (1) si ha ovviamente

$$k^3 - 3k + 4\rho - 2 = 0; \tag{2}$$

donde si vede che invece di h conviene proporsi di trovare k, riducendosi allora il problema alla risoluzione dell'equazione cubica

$$x^3 - 3x + 4\rho - 2 = 0, \tag{3}$$

che è priva del termine contenente il quadrato dell'incognita (forma normale).

3. Essendo

$$0 < h < 2 \qquad \text{e} \qquad k = h - 1,$$

abbiamo la limitazione:

$$-1 < k < 1.$$

D'altra parte, posto

$$f(x) = x^3 - 3x + 4\rho - 2,$$

si ha

$$f(-\infty) < 0, \quad f(-1) = 4\rho > 0, \quad f(1) = -4(1 - \rho) < 0, \quad f(\infty) > 0;$$

donde si vede che, variando $f(x)$ con continuità, vi sono tre numeri reali per i quali $f(x)$ è zero, ossia che le soluzioni della (3) sono tutte tre reali: una minore di -1, una compresa fra -1 ed 1, una maggiore di 1.

Converrà dunque ricordare le formule risolutive sotto forma trigonometrica e vedere quale fra le tre soluzioni è compresa fra -1 ed 1. Sarà essa il cercato valore di k.

---

[1] ENRIQUEZ-AMALDI, *Elementi di geometria*, IV ediz., pag. 594.

4. Data l'equazione cubica $x^3 + px + q = 0$ avente tutt'e tre le soluzioni reali, i loro valori sono, com'è noto,

$$x_1 = 2\sqrt[3]{r}\,.\cos\frac{\alpha}{3}, \quad x_2 = 2\sqrt[3]{r}\,.\cos\left(\frac{\alpha}{3}+120^0\right), \quad x_3 = 2\sqrt[3]{r}\,.\cos\left(\frac{\alpha}{3}+240^0\right),$$

dove

$$r = \sqrt{\frac{p^3}{27}} \qquad \text{ed} \qquad \alpha = \text{arc cos}\,\frac{-q}{2r}.$$

Nel nostro caso abbiamo

$$p = -3 \qquad \text{e} \qquad q = 4\rho - 2;$$

e quindi

$$r = \sqrt{\frac{-27}{27}} = 1, \qquad \alpha = \text{arc cos}\,\frac{2-4\rho}{2} = \text{arc cos}\,(1-2\rho),$$

$$x_1 = 2\,.\cos\frac{\alpha}{3}, \quad x_2 = 2\,.\cos\left(\frac{\alpha}{3}+120^0\right), \quad x_3 = 2\,.\cos\left(\frac{\alpha}{3}+240^0\right).$$

Essendo $0^0 \leqslant \alpha \leqslant 180^0$, si ha

$$0^0 \leqslant \frac{\alpha}{3} \leqslant 60^0, \qquad 240^0 \leqslant \frac{\alpha}{3} + 240^0 \leqslant 300^0, \qquad -\frac{1}{2} \leqslant \cos\left(\frac{\alpha}{3}+240^0\right) \leqslant \frac{1}{2};$$

e quindi

$$-1 \leqslant x_3 \leqslant 1.$$

La soluzione che vale pel nostro problema è dunque x_3; ossia il valore k cercato è

$$k = 2\,.\cos\left(\frac{\alpha}{3}+240^0\right) = -2\,.\cos\left(\frac{\alpha}{3}+60^0\right).$$

dove

$$\alpha = \text{arc cos}\,(1-2\rho).$$

5. Da tali formule vediamo: che quando $\rho < \frac{1}{2}$, si ha

$$1-2\rho > 0, \quad 0^0 < \alpha < 90^0, \quad 60^0 < \frac{\alpha}{3} + 60^0 < 90^0, \quad k < 0, \quad h < 1;$$

che quando $\rho = \frac{1}{2}$; si ha

$$1-2\rho = 0, \quad \alpha = 90^0, \quad \frac{\alpha}{3} + 60^0 = 90^0, \quad k = 0, \quad h = 1;$$

che quando $\rho > \frac{1}{2}$, si ha

$$1-2\rho < 0, \quad 90^0 < \alpha < 180^0, \quad 90^0 < \frac{\alpha}{3} + 60^0 < 120^0, \quad k > 0, \quad h > 1;$$

risultati tutti conformi alle risultanze sperimentali suaccennate.

Per evitare i coseni negativi, se $\rho > \frac{1}{2}$ e quindi $1-2\rho < 0$, conviene porre $\beta = \text{arc cos}\,(2\rho - 1)$. Si ha allora

$$\alpha = 180^0 - \beta, \qquad \frac{\alpha}{3} + 60^0 = 120^0 - \frac{\beta}{3},$$

$$k = -2\,.\cos\left(120^0 - \frac{\beta}{2}\right) = 2\,.\cos\left(\frac{\beta}{3} + 60^0\right).$$

6. Applichiamo le formule trovate a due esempi.

Sia la sfera di sughero e il liquido sia acqua. Abbiamo allora:

$$d = 0{,}24, \qquad d' = 1, \qquad \rho = 0{,}24 < \frac{1}{2};$$

$$1 - 2\rho = 0{,}52, \quad \alpha = \text{arc cos } 0{,}52 = 58°40', \quad \frac{\alpha}{3} + 60° = 79°33'20'',$$

$$k = -2 \,.\, \cos 79°33'20'' = -2 \,.\, 0{,}1813 = -0{,}3626, \quad h = 1 - 0{,}3626 = 0{,}6374.$$

Sia la sfera d'acciaio e il liquido sia mercurio. Abbiamo allora:

$$d = 7{,}8, \qquad d' = 13{,}6, \qquad \rho = \frac{7{,}8}{13{,}6} = 0{,}57 > \frac{1}{2};$$

$$2\rho - 1 = 0{,}14, \quad \beta = \text{arc cos } 0{,}14 = 81°37'8'', \quad \frac{\beta}{3} + 60° = 87°19'3'',$$

$$k = 2 \,.\, \cos 87°19'3'' = 2 . 0{,}0468 = 0{,}0936, \qquad h = 1{,}0936.$$

*
* *

7. Si abbia una sfera, il cui raggio prenderemo ancora come segmento unitario, e la si tagli con un piano che ne divida il volume in un dato rapporto $\frac{m_1}{m_2}$.

Le formule del num. 4 ci dànno facilmente le altezze h_1 ed h_2 dei due segmenti sferici così ottenuti.

Infatti, siccome i volumi

$$\frac{1}{3}\pi h_1{}^2(3 - h_1), \qquad \frac{1}{3}\pi h_2{}^2(3 - h_2), \qquad \frac{4}{3}\pi$$

sono manifestamente proporzionali ai numeri m_1, m_2, $m_1 + m_2$, così si ha

$$\frac{1}{3}\pi h_1{}^2(3 - h_1) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{4}{3}\pi,$$

donde

$$h_1{}^2(3 - h_1) = 4\frac{m_1}{m_1 + m_2}, \qquad h_1{}^3 - 3h_1{}^2 + 4\frac{m_1}{m_1 + m_2} = 0.$$

Confrontando tale formula colla (1), si vede che essa ne differisce solo perchè c'è h_1 invece di h ed $\frac{m_1}{m_1 + m_2}$ invece di ρ; sicchè dai num. 2 e 4 risulta:

$$h_1 = 1 - 2 \,.\, \cos\left(\frac{\alpha}{3} + 60°\right),$$

con

$$\alpha = \text{arc cos}\left(1 - \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) = \text{arc cos}\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}.$$

Essendo $h_1 + h_2 = 2$, si ha poi, senz'altro,

$$h_2 = 1 + 2 \,.\, \cos\left(\frac{\alpha}{3} + 60°\right).$$

8. Supponiamo ora di dividere la sfera in più parti eguali con dei piani paralleli. Le formule precedenti ci dànno ovviamente le altezze dei segmenti sferici che così si ottengono.

Noi ci limiteremo a considerare i casi in cui i piani sono 2, 3 e 4 e le parti eguali sono quindi, rispettivamente, 3, 4 o 5.

9. Se i piani sono 2, ciascuno d'essi divide manifestamente il volume della sfera nel rapporto $\frac{1}{2}$.

Posto, nelle formule del num. 7, $m_1 = 1$ ed $m_2 = 2$, si ha:

$$\alpha = \text{arc cos}\,\frac{1}{3} = 70^\circ 31' 43'' ; \qquad \frac{\alpha}{3} + 60^\circ = 83^\circ 30' 34'' ;$$

$$\cos 83^\circ 40' 34'' = 0{,}1116 ; \qquad h_1 = 1 - 2 \,.\, 0{,}1116 = 1 - 0{,}2232 = 0{,}7760.$$

I due segmenti esterni hanno dunque l'altezza di 0,7768; l'altezza del segmento interno è $2 - 2 \,.\, 0{,}7768 = 2 - 1{,}5536 = 0{,}4464$.

10. Se i piani sono 3, ciascuno degli esterni divide il volume della sfera nel rapporto $\frac{1}{3}$; e l'altezza di ciascuno dei segmenti esterni ci è data dal num. 7 ove si calcoli h_1 ponendo $m_1 = 1$, $m_2 = 3$.

Avremo:

$$\alpha = \text{arc cos}\,\frac{2}{4} = 60^\circ ; \qquad \frac{\alpha}{3} + 60^\circ = 80^\circ ;$$

$$\cos 80^\circ = 0{,}1736 ; \qquad h_1 = 1 - 2 \,.\, 0{,}1736 = 1 - 0{,}3472 = 0{,}6528.$$

Le altezze dei segmenti esterni e dei segmenti medi sono dunque, rispettivamente: 0,6528 ed $1 - 0{,}6528 = 0{,}3472$.

11. Infine, se i piani sono 4, ciascuno degli esterni divide il volume delle sfere nel rapporto $\frac{1}{4}$; e l'altezza dei segmenti esterni la si ha in modo analogo al precedente, ponendo nel num. 7, $m_1 = 1$, $m_2 = 4$. Abbiamo allora:

$$\alpha = \text{arc cos}\,\frac{3}{5} = 53^\circ 7' 49'' ; \qquad \frac{\alpha}{3} + 60^\circ = 77^\circ 42' 36'' ;$$

$$\cos 77^\circ 42' 36'' = 0{,}2129 ; \qquad h_1 = 1 - 2 \,.\, 0{,}2129 = 1 - 0{,}4258 = 0{,}5742.$$

Ciascuno dei piani interni divide invece il volume della sfera nel rapporto $\frac{2}{3}$. Sicchè avremo questa volta:

$$m_1 = 2 \quad \text{ed} \quad m_2 = 3 ; \quad \alpha = \text{arc cos}\,\frac{1}{5} = 78^\circ 27' 47'' ; \quad \frac{\alpha}{3} + 60^\circ = 86^\circ 9' 16'' ;$$

$$\cos 86^\circ 9' 16'' = 0{,}0671 ; \qquad h_1 = 1 - 2 \,.\, 0{,}0671 = 1 - 0{,}1342 = 0{,}8658.$$

Le altezze dei cinque segmenti sono dunque, ordinatamente:

$$0{,}5742 ; \qquad 0{,}8658 - 0{,}5742 = 0{,}2916 ;$$

$$2 - 2 \,.\, 0{,}8658 = 2 - 1{,}7316 = 0{,}2684 ; \qquad 0{,}2916 ; \qquad 0{,}5742.$$

P. Cattaneo.

RISOLUZIONE DELLA QUISTIONE 790.

790. *Le parabole che sono bitangenti ad una parabola data ed hanno il fuoco sulla parabola stessa, sono anche tangenti alla direttrice di questa.*

E.-N. Barisien.

1ª. Risoluzione del prof. R. Gatti, R. S. Comm. di Feltre.

Consideriamo una delle parabole bitangenti alla data; siano M, N i punti d'incontro distinti delle due curve.

Assumendo come asse delle x la tangente in M, comune alle due curve, e come asse delle y la normale, le loro equazioni siano la seguenti:

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2gx = 0 \tag{1}$$
$$(\alpha' x + \beta' y)^2 + 2g'x = 0 \tag{2}$$

Sommando queste due equazioni rispettivamente moltiplicate per g' e $-g$, si ha

$$(\alpha^2 g' - \alpha'^2 g)\, x^2 + 2\,(\alpha\beta g' - \alpha'\beta' g)\, xy + (\beta^2 g' - \beta'^2 g)\, y^2 = 0.$$

Essendo le curve tangenti anche in N, deve dunque aversi:

$$(\alpha\beta g' - \alpha'\beta' g)^2 = (\alpha^2 g' - \alpha'^2 g)\,(\beta^2 g' - \beta'^2 g),$$

cioè

$$gg'\,(\alpha'\beta - \alpha\beta')^2 = 0. \tag{3}$$

Dobbiamo ora ricordare un noto risultato.

Data la parabola (2) e dette λ e μ le coordinate del suo fuoco, si ha che

$$\lambda = -\frac{g'}{2\,(\alpha'^2 + \beta'^2)}, \qquad \mu = -\frac{\alpha' g'}{2\,(\alpha'^2 + \beta'^2)\,\beta'}.$$

Esprimendo che il punto (λ, μ) deve appartenere alla parabola (1) si ha, con un calcolo facile,

$$g'^2\,(\alpha\beta' + \alpha'\beta)^2 = 4gg'\beta'^2\,(\alpha'^2 + \beta'^2). \tag{4}$$

Non riesce, poi, difficile dimostrare che l'equazione della direttrice della parabola (1) è $\beta x - \alpha y = \dfrac{g}{2\beta}$.

Esprimendo che tale direttrice deve essere tangente alla parabola (2), si è condotti alla relazione:

$$g'^2\alpha\beta = gg'\beta'\,(\alpha\alpha' + \beta\beta'). \tag{5}$$

Intanto, supponendo $gg' \neq 0$, dalla (3) si ricava:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}; \tag{6}$$

e tenendo presente questa, la (4) diventa:

$$g'\alpha^2 = gg'\,(\alpha'^2 + \beta'^2); \tag{7}$$

e da questa si deduce subito, anche in virtù della (6), la (5).

2ª **Risoluzione del prof. R. Gatti, R. S. Comm. di Feltre.**

Premessa la formola (3) e quelle che dànno le coordinate del fuoco, si osservi che, nell'ipotesi $gg' \neq 0$, si hanno le due relazioni:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'},$$
$$\alpha\lambda - \beta\mu = 0.$$

Si vede così che variando N, il fuoco della parabola (2) descrive la retta $\alpha x - \beta y = 0$.

Dunque, data una parabola non degenere, fra le parabole del pari non degeneri, bitangenti ad essa in un punto fisso M ed in un altro variabile, una sola ha il fuoco sulla parabola data: tale fuoco è l'intersezione, differente da M, della retta $\alpha x - \beta y = 0$ con detta parabola.

Supponendo intanto $g \neq 0$, se si vuole considerare il caso $g' = 0$, si vede subito che qualunque parabola degenere, uscente da M, soddisfa la condizione della bitangenza e quella relativa al fuoco.

Possiamo, perciò, dire che, supponendo $g \neq 0$, vi sono infinite parabole che sono bitangenti alla data in un punto fisso M ed in un altro variabile ed hanno il fuoco su di essa; fra esse una sola non è degenere.

Le degeneri evidentemente sono tangenti alla direttrice di tale parabola.

Occupiamoci dunque di quella non degenere.

Trovando l'intersezione, differente da M, della retta $\alpha x - \beta y = 0$ con la parabola (1) ed esprimendo che tale punto deve coincidere col fuoco della (2), con un calcolo facile, si è condotti alla (7).

Nota. — Consideriamo il caso $g = 0$. Si vede facilmente che i parametri α', β' delle parabole non degeneri, passanti per M, origine delle coordinate, tangenti in esso all'asse delle x, e che hanno il fuoco sulla retta $\alpha x + \beta y = 0$, soddisfano la relazione:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = -\frac{\beta}{\beta'}.$$

BIBLIOGRAFIA

S. Ortu Carboni. — *Raccolta di problemi d'Applicazione dell'Algebra alla Geometria*, ad uso delle Scuole secondarie e medie superiori, 2ª ediz. riveduta e ampliata. Livorno, R. Giusti, 1912.

Questo libro fu già benevolmente accolto dagli insegnanti fin dalla sua prima edizione e non gli mancarono giudizi favorevoli. La seconda edizione è stata riveduta ed ampliata dall'A. in modo da sodisfare sempre meglio alle esigenze della scuola; e gliene va data lode.

Se un simile tipo di libro non può essere adottato nelle scuole come libro di testo può però venire consigliato con sicuro vantaggio agli alunni dei licei, degli istituti tecnici ed agli aspiranti a scuole militari. L'A. si propone " di " guidare gradatamente gli studiosi, che, forniti di sufficiente cultura matema- " tica, vogliano, con vantaggio impareggiabile, cimentarsi nel risolvere da sè " questioni elementari „; ci pare che la graduazione non poteva essere migliore.

Nell'introduzione, dopo " uno sguardo agli elementi della teoria delle funzioni " e delle equazioni algebriche „ e un " richiamo sintetico della discussione generale delle radici di un'equazione di " 2° grado „, passa ad " alcuni cenni sui " massimi e minimi di funzioni algebriche „ e poi dà " norme ed esempi per la " risoluzione dei problemi geometrici mediante l'algebra e per la loro discussione „.

Ogni paragrafo s'inizia con l'indicazione delle formule fondamentali a cui si deve far ricorso nella risoluzione degli esercizi contenenti nel paragrafo stesso.

Quando ne è il caso, l'A. fa seguire all'enunciato degli esercizi richiami, osservazioni, note ed opportuni accenni alla loro risoluzione.

L'ultimo paragrafo contiene poi, con altri esercizi, alcuni temi ministeriali proposti agli esami di licenza nella sezione fisico-matematica degli istituti tecnici.

L. Tenca.

Dott. ADRASTO CALEGARI. — *Brevi nozioni di Calcolo infinitesimale*, con 12 figure. Manuali Giusti, XXII. Livorno, R. Giusti, 1912.

Questo manualetto, secondo l'A., potrebbe servire di complemento ai trattati di matematica che vengono scritti ad uso dei chimici e naturalisti e che contengono troppo scarse notizie di calcolo infinitesimale.

Dato l'indirizzo che tante parti delle scienze moderne hanno preso, è certamente utile che la coltura dei chimici e dei naturalisti si arricchisca di brevi e chiare nozioni di calcolo, nozioni in alcune delle quali potrebbero benissimo essere iniziati anche i giovani delle scuole secondarie superiori. (v. Atti Congresso di Firenze " Mathesis „).

Questo libro si limita alle nozioni più importanti e fondamentali *dando sempre largo campo alla intuizione*; il che ci fa pensare che, se può essere utile agli studenti di chimica pura e di scienze naturali, non è al certo consigliabile agli studenti di matematiche perchè per essi i fondamenti del calcolo devono esser posti in modo rigoroso.

Naturalmente in un piccolo manuale non si può pretendere di trovare cose nuove per ciò che si riferisce alla materia; come l'A. stesso avverte nella prefazione, egli si è molto servito degli eccellenti manuali del prof. Pascal.

L'edizione è abbastanza accurata; le sviste che pur vi abbiamo notate sono compatibili in una prima edizione.

L. TENCA.

V CONGRESSO

DELLA SOCIETÀ ITALIANA PER IL PROGRESSO DELLE SCIENZE

ROMA — 12 Ottobre 1911

Nell'anno in cui l'Italia tutta concorde commemora solennemente il cinquantenario della proclamazione di Roma a sua capitale intangibile, Roma soltanto poteva essere sede dell'annuale Congresso della *Società italiana per il progresso delle scienze* ed argomento principale del Congresso doveva essere, necessariamente, la confortante constatazione di grandi progressi che l'Italia ha fatti anche nelle Scienze, in questi ultimi cinquant'anni.

Così fu infatti; donde la speciale importanza e il maggiore interesse che il Congresso di quest'anno offriva in confronto a quelli degli scorsi anni.

Il Congresso fu inaugurato la mattina del *12 ottobre* (*giovedì*) nell'Aula magna della Sapienza con efficaci parole del Rettore dell'Università, del Sindaco di Roma, del Ministro della P. I., del Presidente della Società e con un dotto, eloquente discorso del senatore prof. RIGHI sopra *La nuova fisica*.

Nelle *mattine* successive si tennero, al solito, i *discorsi generali a Classi riunite*. Fra essi riuscirono particolarmente interessanti ai cultori delle Scienze matematiche quelli dei proff. CASTELNUOVO, VACCA ed ENRIQUEZ aventi rispettivamente per titolo: *Sull'evoluzione delle misure di spazio e di tempo, La scienza nell'estremo oriente, Che cosa è la filosofia?*

I *discorsi di Classe* si tennero nei *pomeriggi*. Fra essi sono da segnalarsi, pei Lettori del *Periodico*, quelli dei proff. U. AMALDI, LAURICELLA, E. BIANCHI, CORBINO che trattarono del contributo dato nell'ultimo cinquantennio dagli italiani alla *Geometria*, alla *Teoria delle funzioni e delle equazioni integrali*, all'*Astronomia*, all'*Elettrologia*; e sono da segnalarsi i discorsi dei proff. LEVI CIVITA e V. REINA, aventi per titolo *Estensione ed evoluzione della Fisica matematica* e *Le misure gravimetriche italiane*.

Numerose ed interessanti furono le *comunicazioni di sezione*,... che però ci sembrano a priori fuori di luogo in tali Congressi, la cui mira dovrebbe essere soltanto la coordinazione, la volgarizzazione, la sintesi scientifica. Come fu osservato da parecchi, bisogna guardarsi dal pericolo di trasformare la Società in una nuova Accademia: ce ne sono già tante! Tale pericolo di snaturare l'indole della Società sarebbe, credo, più facilmente evitabile rendendo i Congressi biennali. Già si nota, giova riconoscerlo sinceramente, un po' di stanchezza nei soci; nonostante la solennità e le attrattive del Congresso di quest'anno non furono molti i soci intervenuti; il loro numero va ogni anno diminuendo. Tuttavia più di 100 (cento) furono le comunicazioni presentate! *Cavete academiam!*

Nel pomeriggio di *sabato 14* il Rettore dell'Università diede un *ricevimento* nel giardino della villa Corsini, ora *Orto botanico*; ed un altro solenne fu offerto nella sera di *Lunedì 16* dal Sindaco di Roma nel *Campidoglio*: serata indimenticabile, nella quale si volle quasi che la Scienza andasse a porgere riverente omaggio alla maestà della Storia e allo splendore dell'Arte.

Il giorno *15, domenica*, non si tenne alcuna adunanza, e i Congressisti andarono parte ad Ostia, parte a Tivoli, parte in giro per la città od a visitare le esposizioni.

Il Congresso si chiuse *mercoledì 18*. Alla mattina vi fu la solenne *inaugurazione*, nella Scuola d'applicazione per gli ingegneri, del *ricordo marmoreo* all'illustre e compianto matematico prof. VALENTINO CERRUTI, per molti anni direttore della Scuola. Alla sera si tenne la *seduta di chiusura* e si fecero le *elezioni alle cariche sociali*.

A *presidente* riuscì eletto il *prof. senatore* SCIALOIA; fra le altre elezioni sono, per noi, a segnalarsi quelle del *prof.* GARBASSO a *vicepresidente*, del *prof.* CORBINO a *presidente di sezione*, dei *proff.* LEVI CIVITA e VACCA a *membri del comitato scientifico*. I *proff.* STRINGHER e FOLGHERAITER furono riconfermati nelle loro cariche di *amministratore* e di *economo-cassiere*.

A *sede del VI Congresso*, per l'anno venturo, fu scelta per acclamazione *Genova*, su proposta del prof. ISSEL. E coi soliti discorsi di ringraziamento, di saluto, di commiato, ecc. il *Congresso* fu dichiarato *chiuso*, lasciando in tutti gli intervenuti il più gradito ricordo.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 23 Novembre 1911

SULLA COSTRUZIONE DI UN OROLOGIO SOLARE VERTICALE

alla Villa Palmieri (Firenze)

---

1. In questo stesso *Periodico* ebbi occasione di pubblicare, alcuni anni or sono, (1) un breve studio concernente "Il problema generale degli orologi solari piani, risoluto trigonometricamente „ nel quale dopo aver date le formule gnomoniche relative ad un *quadro* comunque disposto rispetto all'orizzonte e dopo averne dedotte quelle corrispondenti a tutte le posizioni particolari, passai ad applicare le formule stesse alla costruzione ipotetica di un orologio solare su di un piano assegnato. (2) Il lavoro veniva così a presentare carattere in parte teorico e in parte pratico; ma quest'ultimo, a dire il vero, era più apparente che reale come io stesso ho avuto occasione di constatare nella effettiva costruzione di un orologio verticale effettuata poco tempo fa. Infatti, la determinazione degli elementi fondamentali d'indole astronomico-topografica relativi al quadro, i quali si suppongono sempre conosciuti in uno studio teorico, presenta, al caso pratico, qualche difficoltà. Inoltre, la preparazione del piano dell'orologio; il collocamento dello gnomone e la determinazione precisa della sua altezza; spesso le dimensioni imposte dal quadro; l'effettivo tracciamento di tutti gli elementi gnomonici ricavati graficamente o numericamente da quelli fondamentali; infine la dipintura e la decorazione del quadrante, sono altrettante piccole questioni ed operazioni che possono mettere alquanto in imbarazzo coloro che per la prima volta si accingono alla costruzione d'un orologio solare. Stimo perciò opportuno, come parte veramente pratica del lavoro precedentemente ricordato, l'esporre ora qui, con tutte le necessarie particolarità, le operazioni effettuate, i procedimenti seguìti, i modelli di calcolo adottati e le varie operazioni materiali compiute dall'inizio sino alla fine, per la costruzione di uno di tali orologi, da me eseguita nei mesi di gennaio e febbraio u. s. alla Villa Palmieri nei dintorni di Firenze. (3)

---

(1) Vol. XXII, fasc. I, 1906.

(2) Fu supposto come quadro una delle faccie triangolari della piramide ottagona che fa da copertura al Battistero di Firenze.

(3) Questa antica e sontuosa Villa s'incontra a mezzo cammino, circa, percorrendo la Via Boccaccio che dalla Barriera delle Cure conduce a S. Domenico di Fiesole.

Per coloro ai quali potesse interessare qualche notizia storica, riporto, quì appresso, le due

§ 1. — Preparazione del Quadro e dello Gnomone.

2. Come piano dell'orologio venne destinata una parte del muro di una delle facciate interne del cortile e precisamente di quella che presenta lo stesso orientamento della facciata esterna principale. Detta parte è a $12^m,60$ dal piano del cortile e rimane compresa fra l'ultima finestra e le bozze che terminano lo spigolo West del fabbricato. Lo spazio assegnato fu tassativamente stabilito entro una delle formelle ($2^m,27 \times 1^m,11$) che decorano la suddetta facciata interna.

La superficie mal pari del muro, venne regolarizzata con un primo intonaco grezzo in sostituzione di quello vecchio, e successivamente con un secondo a grana molto fine e, per quanto fosse possibile, in piano verticale. (¹)

Affinchè il disegno dell'orologio, o almeno la parte più importante di esso, rimanesse compresa entro i limiti assegnati, venne determinata la conveniente altezza dello gnomone nel seguente modo:

1°. Si determinò in $43° 47' 46''$ la latitudine della Villa Palmieri deducendola graficamente, con riferimento alle graduazioni marginali, dalla Carta Topografica al 10000 dei *Dintorni di Firenze* rilevata dall'Ist. Geogr. Militare.

2°. Si assunse, grossolanamente, il valore di $9°$ per la *declinazione* (occidentale) del muro, ricavandolo per mezzo di una bussola e

---

epigrafi situate ai due lati della porta d'ingresso della facciata Nord della Villa, e le altre tre che si trovano sotto l'ampio loggiato interno della parte Sud.

— *Queste case | ove fuggendo i pericoli della pestilenza | che disertava Firenze nel MCCCXXXXVIII | trasse a novellare lietamente | l'amena brigata | per cui si ebbe il Decamerone | il maggiore esempio di eloquenza italiana | Matteo Palmieri nel MCCCCLXVIII ingrandiva | e Palmiro Palmieri due secoli appresso | riduceva a signorile palagio | aggiuntovi decoro di ornamenti e domestico tempio.*

— *La Villa | che fama da Giovanni Boccaccio | e dai Palmieri ebbe nome | acquistava nel MDCCCXXIIII | Maria Farhill inglese | amica ad ogni gloria italiana | e dopo trent'anni la donava per testamento | a Maria Antonietta di Borbone | Granduchessa di Toscana | la quale con animo riconoscente | della gentile donatrice e del prezioso legato | volle serbata memoria.*

— *Alessandro | Conte di Grawford | nell'anno 1875 comprò questa Villa Palmieri da S. A. I. la Granduchessa | Maria Antonietta di Toscana | Vi morì 1888.*

— *Margherita | Vedova di Alessandro conte di Grawford | passò gli anni dal 1880 al 1905 | in questa sua amata tenuta | prendendo sommo piacere | ad abbellire ed ornare la Villa ed il parco.*

— *Vittoria Regina d'Inghilterra | fu qui ospite | della Contessa Margherita di Grawford | ammirando questi luoghi ameni | godette alcune settimane di riposo | nella primavera degli anni 1889 e 1893 | e ristorando la propria salute | potè tornare con forze rinnovate | alle gravi cure del suo vasto impero.*

La storica Villa mercè la munificenza del suo nuovo proprietario, l'americano Mr. James W. Ellsvorth, si è oggi arricchita di nuovi pregi artistici per l'opera intelligente dell'Ing. Arch. G. Castellucci.

(¹) Sarebbe stato certamente preferibile il sostituire alla superficie del muro una lastra di marmo ben levigata, sulla quale le osservazioni ed il tracciamento dell'orologio solare avrebbero potuto effettuarsi con maggior precisione. Ma non si ritenne opportuna questa sostituzione perchè il disegno dell'orologio sul muro si reputò più in armonia colla decorazione della facciata.

anche dall'orientamento che nella carta anzidetta, presentava il *rettangolino* indicante la Villa.

3°. Coi due dati precedenti e nella supposizione di uno gnomone di 10 cm., è stato disegnato sulla carta, con metodo puramente grafico, (1) un orologio solare completo (*linee orarie e iperbole di declinazione*).

Il disegno è stato poi racchiuso in un rettangolo, simile a quello della formella suddetta, in modo da contenere la parte del quadrante che ha maggiore interesse, tenendo conto che le ore più distanti dalla meridiana possono anche essere tralasciate come quelle che, pel fenomeno della rifrazione astronomica, hanno un minor grado di precisione, e tenendo conto altresì della distanza (circa 22 metri) dell'orologio dal punto del cortile più adattato per la lettura delle indicazioni orarie, la quale distanza può fornire un giusto criterio su quanto è conveniente di escludere delle parti estreme del disegno affinchè le singole parti rimanenti, da tracciarsi sul quadro, presentino la necessaria grandezza per poter essere ben osservate ed apprezzate dal punto di osservazione.

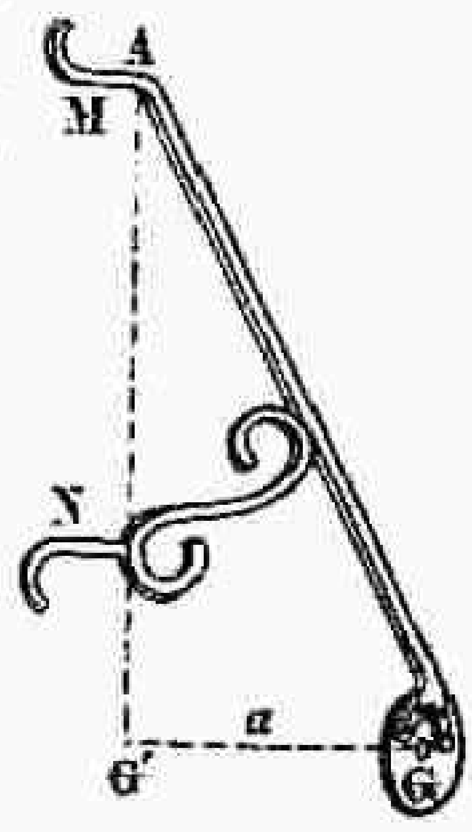

Fig. 1.

4°. Le lunghezze di tutte le linee del disegno, al quale abbiamo precedentemente accennato, sono direttamente proporzionali all'altezza dello gnomone; se ne deduce che assegnando ai lati del rettangolo che limita questo disegno, le dimensioni di quelli del quadro, potremo risalire al valore dell'altezza da darsi al gnomone, altezza che, a calcoli fatti, si trovò essere di circa 29 cm.

5°. Dopo ciò si è costruito lo gnomone con ferro rettangolare di mm. 8×15 di lati e della forma rappresentata dalla fig. 1, in modo che la distanza a del disco dalla linea ideale AG' che serve di base al triangolo gnomonico AGG', fosse molto prossimamente eguale all'altezza precedentemente determinata e che l'inclinazione dell'asta AG sulla stessa linea ideale AG', risultasse eguale, presso a poco, alla colatitudine del luogo. (2)

Il disco (gnomonico in lamina di ferro di mm. 2,5 di spessore, lavorato al tornio) ha il diametro di 10 cm. ed è raccomandato,

---

(1) Cenni sufficienti intorno a questo genere di costruzioni si trovano anche fra i vari problemi enunciati a pag. 76-77 e risoluti a pag. 131-134 dei miei *Problemi di Geografia matematica elementarmente risoluti* (vol. 99-100 della *Biblioteca degli Studenti*, Livorno, Giusti, 1904).

(2) Come indice orario ha importanza il solo foro gnomonico; ma se l'asta venisse posta nella direzione dell'asse del mondo, allora concorrerebbe anch'essa (però non collo stesso grado di precisione del foro gnomonico) alla determinazione dell'ora, giacchè la sua ombra si proietterebbe sempre secondo una linea oraria. Questa disposizione, quindi, potrebbe essere utile per fornire l'ora nei casi in cui il foro gnomonico si proietta fuori dei limiti dell'orologio; ma poichè quest'ultimo vantaggio si manifesta per le ore che sono più lontane da quella meridiana (per le quali l'orologio è sempre meno preciso) e perchè il collocamento dell'asta nella esatta direzione dell'asse del mondo non può ottenersi che con osservazioni ed operazioni alquanto più complicate, così si è creduto opportuno di rinunziare al piccolo vantaggio precedentemente accennato.

con tre piccoli buloni, al vertice e ai due estremi di una forca ad angolo retto colla quale termina, ripiegandosi, l'asta gnomonica. Porta al centro un foro di 9 mm. di diametro, a bordo tagliente, affinchè risulti più nitido il circolo luminoso che serve da indice orario. Questa grandezza del foro è quella che è stata ritenuta come la più opportuna per poter scorgere bene dal luogo d'osservazione le indicazioni orarie.

Il piano del detto disco, anzichè in posizione parallela all'equatore, come si usa ordinariamente, è stato posto parallelamente al piano dell'orologio solare, la quale disposizione ci è sembrata preferibile perchè il quadro non presenta una grande deviazione rispetto al *1° verticale* e perchè il foro gnomonico si proietta sul piano dell'orologio secondo un'immagine luminosa assai più prossima alla circolare.

6°. Costruito sul luogo un comodo ponte per potervi liberamente e comodamente lavorare, venne murato, a cemento, il gnomone sul piano quadro per mezzo delle staffe M ed N, in modo che la linea AG' fosse su di una verticale del muro; che il piede della perpendicolare abbassata dal centro del foro gnomonico sul quadro, cadesse, approssimativamente, nel punto corrispondente a quello già determinato sul disegno; che la lunghezza a di questa perpendicolare fosse molto prossima ai 29 cm. già determinati per l'altezza dello gnomone e che, infine, il disco resultasse col suo piano parallelo (ciò che si verifica col filo a piombo) a quello del quadro.

§ 2. — Determinazione della declinazione del Quadro.

I. — Operazioni preliminari.

3. Per questa determinazione si fecero le seguenti operazioni preliminari: [1]

1°. Venne proiettato il centro del foro gnomonico sul quadro per mezzo di un'asticciola d'acciaio (di circa 3^{mm} di diametro) terminata in punta e scorrevole, a sfregamento dolce, lungo la parte centrale di un cilindretto d'ottone lungo 3^{cm} il quale essendo leggermente conico e di conveniente diametro, poteva rimanere sufficientemente fissato per attrito nel foro gnomonico.

La perpendicolarità dell'asticciola rispetto al quadro si è ottenuta col sussidio di due buone squadre.

[1] Diciamo una volta per tutte, che ogni punto preso e determinato sul quadro e segnato colla punta del compasso o con altro, è stato sempre reso più facilmente riconoscibile rafforzandolo con una punta di lapis e circondandolo con un cerchietto pure in lapis. Furono adoprati lapis alquanto duri e le linee vennero tracciate col sussidio di una riga lunga oltre i due metri, ben dritta, tagliata da un asse di abeto ben stagionato, dello spessore di un centimetro.