LA SUPERFICIE DI KLEIN CORRISPONDENTE ALLA QUARTICA

$$x^4 + y^4 - 2(x^2 + y^2) = 0$$

L'illustre prof. Klein, in due sue *Memorie*, apparse successivamente nei " Mathematische Annalen ", voll. VII e X, esamina e stabilisce i principî fondamentali per la costruzione di una nuova specie di superficie di Riemann, che l'autore chiama in senso proiettivo, alludendo al modo duale con cui si immagina definita la curva rispetto a quello col quale si opera nella costruzione del Riemann. In omaggio all'autore, per l'originalità del metodo proposto, puramente sintetico, e per brevità, chiamerò nel seguito, superficie di Klein, le superficie di Riemann in senso proiettivo. Di queste trattò brevemente il professor Pascal in una delle sue dotte lezioni al Seminario di Matematica, annesso alla Facoltà omonima dell'Università di Napoli, chiarendone i concetti fondamentali, e facendo soprattutto rilevare, insieme alla eleganza, la difficoltà della costruzione, nel caso di superficie corrispondenti ad equazioni di grado superiore al secondo. Dello stesso argomento trattò il prof. Harnak (" Math. Annalen ", vol. IX), col costruire le superficie di Klein corrispondenti alle curve di 3ª classe, e l'Haskell (" American journal of Mathematic ", vol. 13), che costruì la Kleiniana della speciale curva di 4ª classe, di equazione, in coordinate di rette, $\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0$. Una breve nota sull'interessante argomento si trova nel II vol. del *Repertorio di Matematiche Superiori* (Cap. XVIII, § 5), del Pascal.

Il prof. Ciani, in una sua Nota nei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (anno 1899, vol. XII), tratta di un particolare fascio di quartiche, notevoli per la simmetria della forma. A questo fascio appartiene la quartica di equazione $x^4 + y^4 - (x^2 + x^2) = 0$, di cui costruisco in questo lavoro la corrispondente superficie di Klein, applicando in tutta la sua generalità ed eleganza il metodo di costruzione.

Allo scopo di facilitare la lettura di quanto segue, per chi non voglia ricorrere alle *Memorie* originali del Klein, premetto un rapido riassunto dei principî in esse esposti.

Data una equazione $f(x, y) = 0$, di grado n, si riguardi il piano come luogo della doppia infinità dei suoi punti, e le variabili x ed y come coordinate di rette. Tutte le coppie di valori reali che soddisfano l'equazione saranno rappresentati nel piano da una curva algebrica di classe n, inviluppo delle tangenti corrispondenti a dette coppie di valori reali. Da ogni punto del piano si possono condurre alla curva n tangenti, fra reali ed immaginarie, queste (supporremo qui ed in seguito l'equazione a coefficienti reali) a coppie di immaginarie coniugate.

Ad ogni tangente reale od immaginaria si può, in generale, far corrispondere un punto reale: se la tangente è reale si scelga come corrispondente il suo punto di contatto, se è immaginaria, il punto reale, sezione di detta tangente con la immaginaria coniugata. Questi due principî di corrispondenza, il cui senso sarà pienamente chiarito da due semplicissimi esempi, si accordano in un unico, se si pensa che, quando due tangenti coniugate immaginarie coincidono in una unica reale, il punto di sezione corrispondente è il punto di contatto della tangente reale.

La corrispondenza stabilita cade in difetto, quando si considera il caso di una tangente doppia a punti reali di contatto, o di una tangente doppia isolata, o di una tangente di flesso. Questi tre casi sono eccezionali e non si presentano nel seguito. Per completare questa breve esposizione dirò soltanto che dagli studi del Klein (" Math. Annalen ", vol. VII) risulta che questi tre casi si accordano col principio di corrispondenza su stabilita, se si conviene di far corrispondere alla tangente doppia a punti reali di contatto questi due punti, alla tangente doppia isolata, o alla tangente di flesso, la totalità dei loro punti.

Se ora si immaginano in ciascuna delle diverse porzioni di piano, limitate dai tratti reali della curva inviluppo, tanti fogli sovrapposti quante sono le tangenti immaginarie che da un suo punto vanno alla curva, questo punto verrà ad essere contato tante volte quanti sono i fogli sovrapposti, e perciò tante volte quanti sono i punti di contatto immaginari delle tangenti immaginarie che dal punto si possono condurre alla curva.

I fogli sovrapposti nelle diverse porzioni di piano saranno sempre accoppiati, come le tangenti immaginarie. I fogli delle diverse coppie dovranno immaginarsi connessi lungo i tratti reali della curva, luogo dei punti reali di contatto delle tangenti reali, che inviluppano la curva, perchè ciascuno di tali punti corrisponde ad una coppia di tangenti immaginarie coniugate, coincidenti in un'unica reale, e dovrà riguardarsi come appartenente all'uno ed all'altro foglio di una stessa coppia.

La doppia infinità di punti, che si ottengono dalla corrispondenza stabilita, situati sui diversi fogli sovrapposti delle diverse porzioni di piano, limitati dai tratti reali della curva inviluppo, lungo i quali si connettono due a due, forma una superficie chiusa, ch'è una completa rappresentazione geometrica di tutte le coppie di valori reali ed immaginari che soddisfano l'equazione data.

I seguenti semplicissimi esempi varranno a chiarire quanto più su si è detto.

Si consideri nel piano una ellisse, inviluppo delle sue tangenti reali. I punti del piano che corrispondono alle tangenti immaginarie ricoprono la porzione interna alla curva. Da ogni punto di questa possono condursi alla curva due tangenti immaginarie, e dovrà riguardarsi come doppia: dovremo cioè immaginare una coppia di fogli sovrapposti, connessi lungo la curva, luogo dei punti appartenenti a tutti e due i fogli. Se questi si sdoppiano, si avrà una superficie ellissoidale, di genere zero, che può ridursi ad una sfera.

Consideriamo una curva di terza classe, che sia rappresentata nel piano da due rami chiusi. Da ogni punto del piano, al difuori del ramo esterno della curva, e da ogni punto della porzione limitata dal ramo interno della curva, si possono a questa condurre tre tangenti reali. Dai punti della porzione di piano compresa fra i due rami vanno alla curva due tangenti immaginarie ed una reale. Immaginiamo in essa due fogli sovrapposti e connessi lungo i due tratti reali della curva. Sdoppiando i due fogli, si otterrà una superficie anello, due volte connessa e quindi del genere uno. Se la curva di terza classe è costituita dal solo ramo interno, quando il ramo esterno si pensa a distanza infinita la superficie di Klein corrispondente sarà due volte connessa, una volta a finito lungo il ramo reale, ed una volta all'infinito, del genere uno, e si estenderà oltre ogni limite, simile ad un iperboloide ad una falda.

L'equazione di cui si vuole costruire la superficie di Klein, sia a coefficienti reali; in tal caso, se è soddisfatta da un sistema di valori immaginari delle variabili, sarà del pari soddisfatta dal sistema di valori coniugati ai primi. Ne segue che i fogli sovrapposti nelle diverse porzioni di piano, saranno in ogni caso accoppiati, in modo che uno dei fogli di una coppia è il luogo di quei punti che rappresentano i valori coniugati immaginari di quelli rappresentati nell'altro.

Per distinguere particolarmente i due fogli di una stessa coppia, s'immagini elevata da ogni loro punto la normale, dalla parte esterna alla coppia. Chiamiamo superiore, quello dei due fogli le cui normali ai suoi punti sono rivolti in alto, inferiore, quello le cui normali sono rivolti in basso.

Si può ancora in uno stesso foglio considerare come faccia positiva, quella ch'è rivolta dalla stessa parte delle normali, come negativa l'altra.

Ogni porzione di piano limitata dai tratti reali della curva inviluppo, sarà costituita da un numero pari, che può essere anche nullo, di fogli, dei quali, una metà sarà di fogli superiori, e l'altra metà di fogli inferiori, e ad ognuno dei primi corrisponde un unico e ben determinato foglio dei secondi, e viceversa. Per passare da un foglio superiore al corrispondente foglio inferiore vi sono due possibilità: o che la coppia di fogli che si considera sia tutta limitata da tratti reali della curva, o che si estenda all'infinito. Nel primo caso, nel passaggio di un punto da un foglio superiore al corrispondente foglio inferiore, attraverso un tratto reale di curva, il senso della normale si inverte e dalla faccia positiva dell'uno si passa alla faccia positiva dell'altro; similmente si passa dalla faccia negativa dell'uno alla faccia negativa dell'altro, e quindi la coppia dovrà riguardarsi connessa lungo il tratto reale di curva che la limita.

Attraverso l'infinito, nel passaggio di un punto dal foglio superiore al corrispondente foglio inferiore, il senso della normale nel punto si inverte, e sempre dalla faccia positiva (negativa) del foglio superiore, si passa alla faccia positiva (negativa) del foglio inferiore e viceversa.

Ciò segue da quanto si ammette in Geometria Proiettiva, che cioè la normale ad un punto mobile, sul passaggio del punto attraverso l'infinito ruoti intorno al proprio piede di 180°. Se dunque una coppia di fogli si estende all'infinito, vi si dovrà immaginare una volta connessa.

Costruzione della superficie di Klein corrispondente all'equazione $x^4+y^4-2(x^2+y^2)=0$.

La curva del 4° ordine. — Riguardiamo le variabili x ed y, come coordinate rettangolari di un punto mobile nel piano. La curva descritta è simmetrica rispetto a quattro assi: ai due assi ortogonali coordinati, ed alle loro bisettrici. La curva è inoltre simmetrica rispetto al punto origine delle coordinate.

Scritta l'equazione data nella forma

$$(x^2-1)^2+(y^2-1)^2=2,$$

se ne ricava subito che il massimo valore assoluto che possono assumere rispettivamente x ed y è $\left|\sqrt{1+\sqrt{2}}\right|$.

Le quattro rette

$$x=+\sqrt{1+\sqrt{2}}, \qquad y=+\sqrt{1+\sqrt{2}},$$
$$x=-\sqrt{1+\sqrt{2}}, \qquad y=-\sqrt{1+\sqrt{2}},$$

sono quattro tangenti doppie a punti reali di contatto, e sono lati di un quadrato in cui è rinchiusa tutta la curva.

I punti di contatto di ciascuna delle quattro tangenti sono:

$$\left(\sqrt{1+\sqrt{2}},\ 1\right), \qquad \left(\sqrt{1+\sqrt{2}},-1\right),$$
$$\left(1,\ \sqrt{1+\sqrt{2}}\right), \qquad \left(-1,\sqrt{1+\sqrt{2}}\right),$$
$$\left(-\sqrt{1+\sqrt{2}},\ 1\right), \qquad \left(-1,-\sqrt{1+\sqrt{2}}\right),$$
$$\left(-1,\sqrt{1+\sqrt{2}}\right), \qquad \left(1,-\sqrt{1+\sqrt{2}}\right).$$

Questi punti sono quelli di intersezione della curva con la circonferenza di raggio $r = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, e col centro nel punto origine delle coordinate.

Per la determinazione dei flessi reali della curva, è opportuno ricordare alcune considerazioni del Zeuthen, esposte in una sua *Memoria* sulle curve di 4° ordine (" Math. Ann. ", vol. VII):

" In una curva di 4° ordine, senza punti doppi reali, ogni tangente doppia, con i punti di contatto sullo stesso ramo della curva, determina una concavità, in cui sono contenuti due flessi reali della curva stessa.

" Il doppio numero delle tangenti doppie a punti reali di contatto, è eguale al numero dei flessi reali della curva ".

Ne segue senz'altro, nel nostro caso, che la curva ha otto flessi reali, due per ciascuna delle concavità determinate sulla curva dalle quattro tangenti doppie a punti reali di contatto.

Per determinare con maggiore esattezza tali otto flessi reali, deduciamo nel modo noto, dalla data, l'equazione della curva Hessiana, ch'è la seguente:

$$3x^4y^2 + 3x^2y^4 + 6x^2y^2 - (x^4 + y^4) - (x^2 + y^2) = 0.$$

La curva corrispondente ha in comune con la curva del 4° ordine otto punti reali, accoppiati due a due, le cui coordinate sono le coppie di radici reali, comuni alla equazione data ed alla sua Hessiana:

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{4\sqrt{6}-6}}{2}},\quad \sqrt{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{4\sqrt{6}-6}}{2}}\right),$$

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{4\sqrt{6}-6}}{2}},\quad -\sqrt{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{4\sqrt{6}-6}}{2}}\right),$$

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{4\sqrt{6}-6}}{2}},\quad \sqrt{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{4\sqrt{6}-6}}{2}}\right),$$

$$-\left(\sqrt{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{4\sqrt{6}-6}}{2}},\quad \sqrt{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{4\sqrt{6}-6}}{2}}\right),$$

$$-\left(\sqrt{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{4\sqrt{6}-6}}{2}},\quad \sqrt{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{4\sqrt{6}-6}}{2}}\right),$$

$$-\left(\sqrt{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{4\sqrt{6}-6}}{2}},\quad -\sqrt{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{4\sqrt{6}-6}}{2}}\right),$$

$$-\left(\sqrt{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{4\sqrt{6}-6}}{2}},\quad -\sqrt{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{4\sqrt{6}-6}}{2}}\right),$$

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{4\sqrt{6}-6}}{2}},\quad -\sqrt{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{4\sqrt{6}-6}}{2}}\right).$$

Dalla simmetria della curva rispetto a quattro assi, ed al punto origine delle coordinate, e dall'esame della equazione delle otto tangenti di flesso reali della curva, si deduce facilmente che gli otto punti di flesso sono i vertici di due quadrati eguali e similmente situati rispetto alla curva.

Infine, l'equazione è soddisfatta dai valori $x^2=0$ ed $y^2=0$, ciò che indica essere il punto origine degli assi un punto doppio isolato della curva.

La curva del 4° ordine, corrispondente alla equazione proposta ha la forma indicata dalla figura 1.

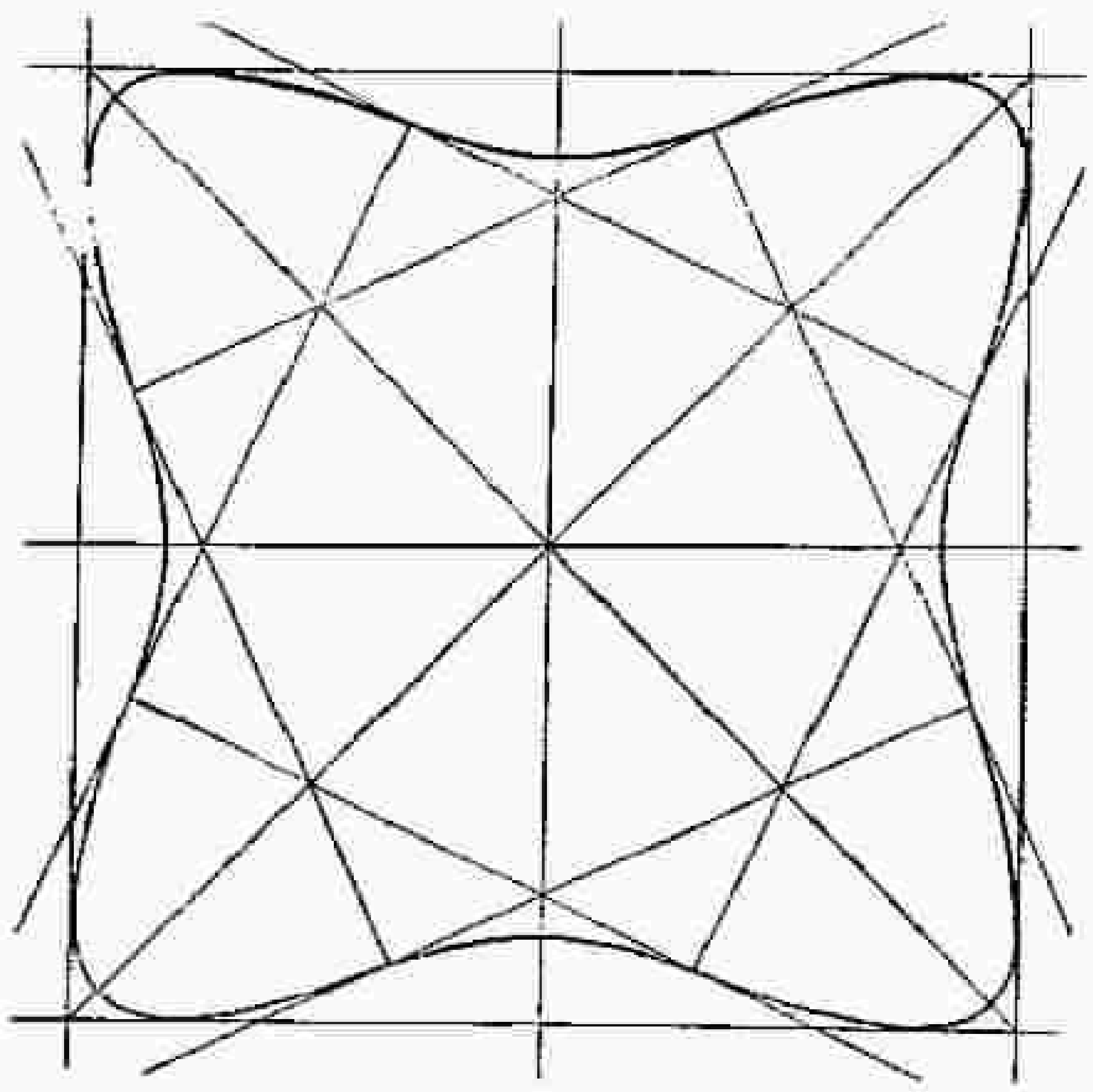

Fig. 1.

La curva di 4ª classe. — Si è già detto più su che per la costruzione della superficie di Klein, bisogna riguardare le variabili dell'equazione proposta, come coordinate di rette, e determinare la corrispondente curva inviluppo.

Da quanto è noto sulle proprietà delle curve reciproche, nel nostro caso, bisognerà determinare la curva della 4ª classe reciproca di quella del 4° ordine, costruita. Tale curva reciproca avrà quattro punti doppi reali, ed otto cuspidi reali, corrispondenti rispettivamente alle quattro tangenti doppie a punti reali di contatto, ed alle otto tangenti di flesso reali, della prima curva. Al punto doppio isolato di questa, corrisponderà nella reciproca una tangente doppia isolata all'infinito. Ai due quadrati della curva del 4° ordine, corrisponderanno nella reciproca due quadrati, egualmente disposti, aventi ciascuno per lati quattro tangenti cuspidali, e per vertici le quattro cuspidi rispettive.

La curva di 4ª classe è anche simmetrica rispetto ai quattro assi di simmetria ed al centro di simmetria della curva del 4° ordine.

Per la determinazione più esatta della curva reciproca sarà di molto vantaggio la scelta della conica base della reciprocità. Tale scelta può farsi in modo che nella determinazione della curva di 4ª classe resti invariato il sistema di coordinate rettangolari, che ci ha già servito nella costruzione della curva del 4º ordine.

Una tale conica è il cerchio immaginario di equazione

$$x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

rispetto al quale, un punto di coordinate x_1, y_1 dell'una curva ha per corrispondente nell'altra reciproca la tangente

$$x_1x + y_1y + 1 = 0, \text{ polare del punto.} \tag{1}$$

Dopo ciò, la curva reciproca che si deve costruire, può determinarsi punto per punto, senza ricorrere alla costruzione geometrica

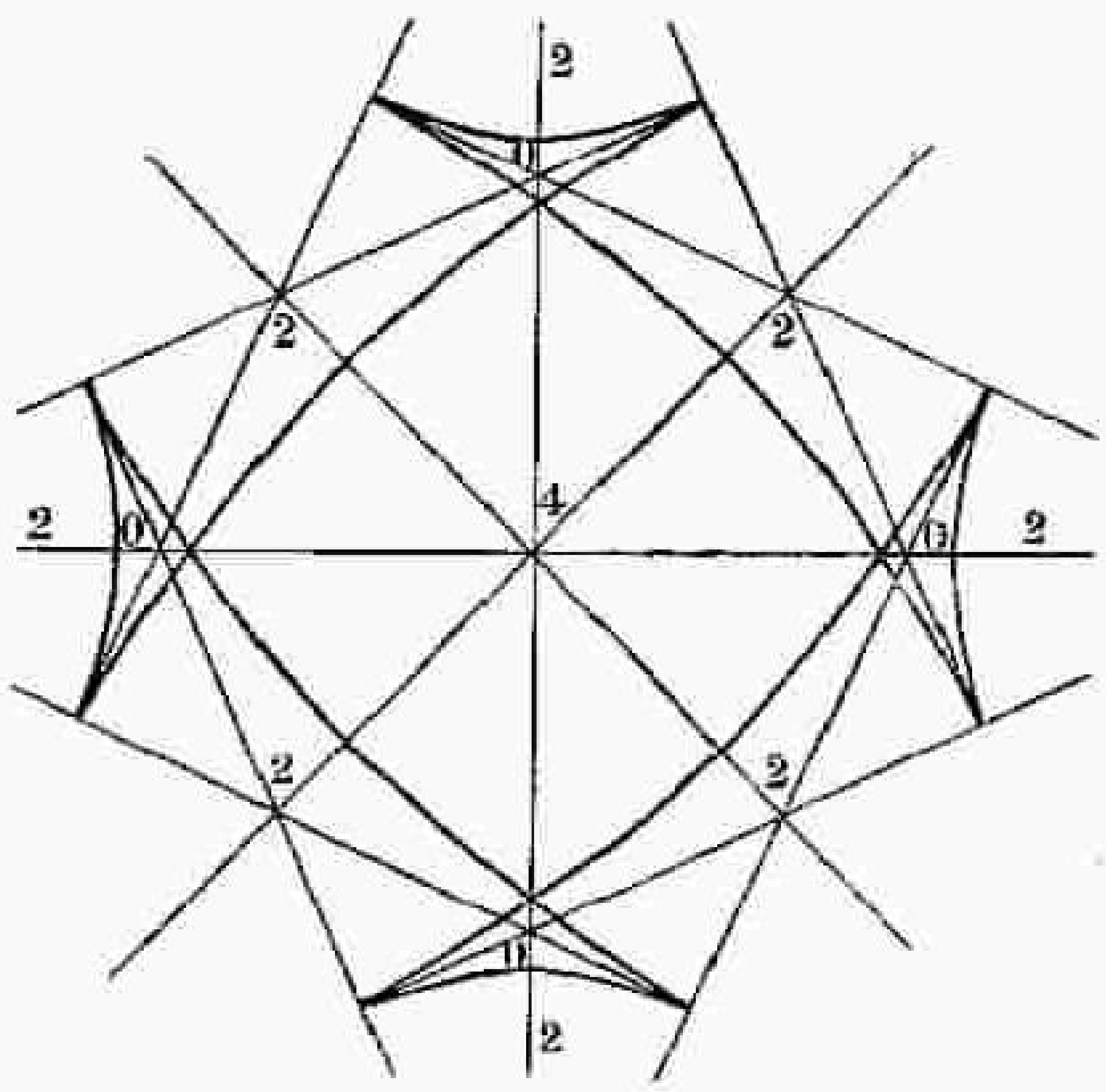

Fig. 2.

diretta, nel modo seguente. Si fissi un punto della curva del 4º ordine, e si cerchi la relativa tangente, nella forma (1), i coefficienti delle variabili sono le coordinate del punto corrispondente nella curva reciproca, che ha la forma rappresentata dalla figura 2.

Disposizione dei fogli. — Il problema della ricerca del numero dei fogli che dovranno immaginarsi sovrapposti nelle diverse porzioni di piano, è identico all'altro: quante tangenti immaginarie si possono condurre alla curva da ogni punto della porzione che si considera? Questo problema si risolve molto facilmente. Si consideri un punto mobile nel piano, nelle vicinanze di un tratto di curva. Il punto si trovi dalla parte cui è rivolta la convessità. In tale posizione si possono tracciare dal punto alla curva due tangenti reali, senza contare le altre, reali od immaginarie, uscenti dal punto stesso. Quando il punto si trova sul tratto di corda che si considera, le due tangenti reali, coincidono in una unica. Attraversato il tratto di curva, il punto si troverà dalla parte del piano, verso cui è rivolta la concavità, e le due tangenti reali coincidenti, nel caso precedente, sono ora scisse in due immaginarie coniugate. Il numero delle restanti tangenti che dal punto vanno alla curva, nel passaggio di tal punto attraverso il tratto di curva, non si altera. Ne segue che nel passaggio di un punto mobile del piano dall'una all'altra banda della curva, il numero delle tangenti immaginarie condotte dal punto alla curva cresce o diminuisce di due unità, a seconda che il punto si trovi nel caso precedente o nel caso opposto. Il numero delle tangenti immaginarie che da ogni punto delle singole porzioni di piano vanno alla curva è eguale al numero dei fogli che dovremo immaginare sovrapposti nella porzione, cui il punto appartiene.

Nel nostro caso, le cifre segnate sulla figura 2, indicano il numero dei fogli sovrapposti nelle diverse porzioni di piano. Da ogni punto delle quattro, interne alle bicuspidali, vanno alla curva soltanto tangenti reali. Dai punti esterni alle quattro bicuspidi, ed al quadrilatero curvilineo che ha per vertici i quattro punti doppi della curva, si possono condurre alla curva due tangenti reali e due immaginarie. Da ogni punto interno al quadrilatero curvilineo, indicato, vanno alla curva 4 tangenti immaginarie, quindi sulla porzione di piano compresa dovremo immaginare quattro fogli sovrapposti, accoppiati. Una coppia è limitata dai quattro lati del quadrilatero, e lungo questi una volta connessa, l'altra coppia, si estende per tutto il piano, meno le porzioni delle quattro bicuspidi, all'infinito. Questa seconda coppia dovrà quindi immaginarsi connessa una volta per ciascuna delle quattro bicuspidi, lungo i tratti reali di curva che la determinano, ed una volta all'infinito. Ciascuno dei quattro punti doppi della curva corrisponde a due tangenti reali, dovrà perciò pensarsi come appartenente nello stesso tempo alle due coppie sovrapposte nella porzione di piano limitata dal quadrilatero curvilineo. La superficie di Klein costruita è sei volte connessa ed estesa all'infinito.

Consideriamo l'equazione

$$x^4 + y^4 - 2(x^2 + y^2) + \varepsilon = 0, \qquad (0 \leqq \varepsilon \leqq 1) \tag{1}$$

che, per $\varepsilon = 0$, si riduce all'equazione considerata

$$x^4 + y^4 - 2(x^2 + y^2) = 0. \tag{2}$$

La curva del 4° ordine, corrispondente alla (1), è costituita (fig. 3) da due rami reali a finito; l'uno interno, è un ovale, l'altro esterno ha forma simile a quello della figura 1, corrispondente alla (2).

La curva reciproca (fig. 4) sarà anche essa costituita da due rami; l'uno interno, ed ha forma simile alla figura 2, l'altro esterno sarà un ovale.

I numeri segnati sulla figura 4, al solito, indicano quante tangenti immaginarie vanno dai punti delle singole porzioni di piano, alla curva inviluppo, e quindi anche il numero dei fogli che vi si immaginano sovrapposti. La superficie di Klein corrispondente sarà tutta

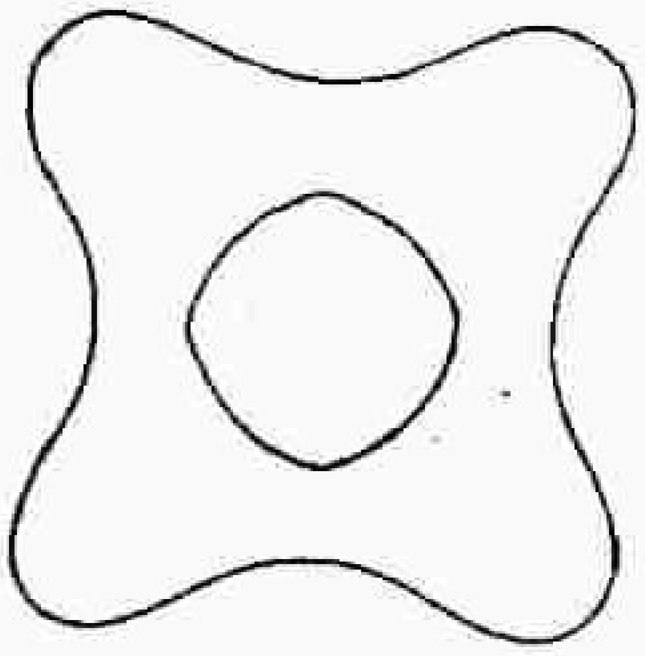

Fig. 3.

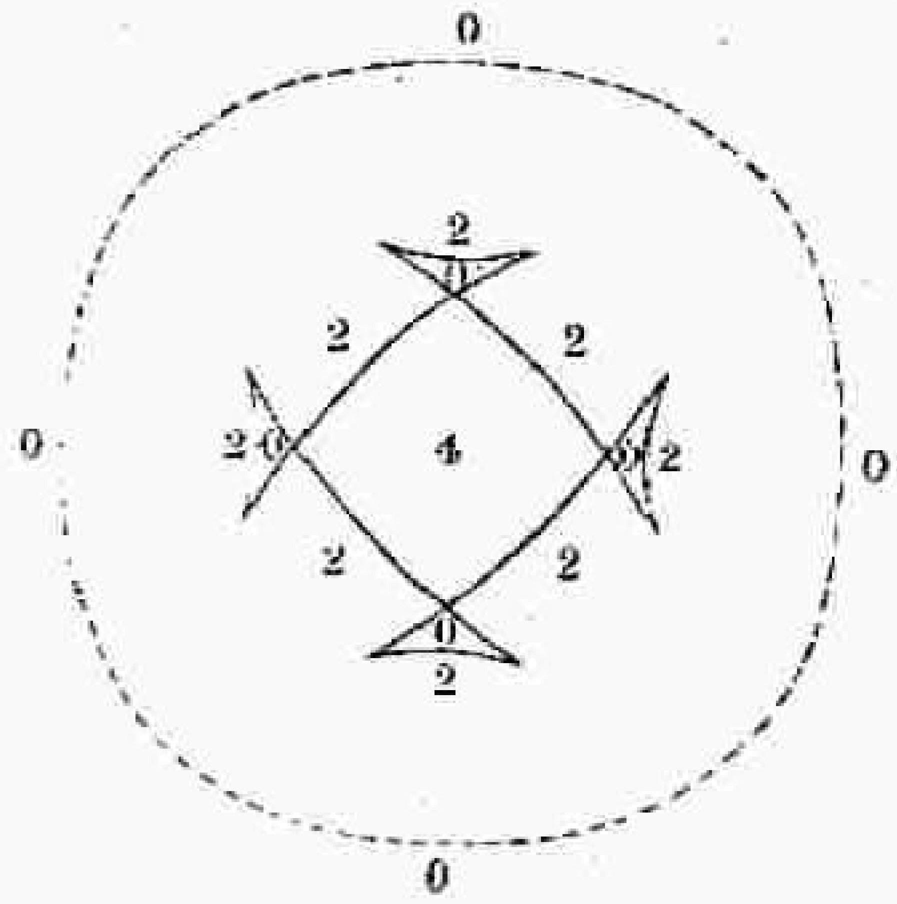

Fig. 4.

a finito e, come la precedente, sei volte connessa. Se nella equazione (1), si fa decrescere con continuità ε fino a zero, l'ovale interno della figura 3, andrà man mano decrescendo, fino a ridursi al punto doppio isolato della curva corrispondente alla equazione (2). Contemporaneamente, l'ovale esterno della figura 4, andrà sempre crescendo, per $\varepsilon = 0$, sarà all'infinito. Col variare di ε per valori positivi e minori di 1, il numero delle volte in cui è connessa la superficie di Klein corrispondente, non varia, ed il genere della superficie è sempre eguale a 3.

Il caso di $\varepsilon = 0$, è un caso particolare della (1), al quale corrisponde una superficie estesa all'infinito. Per ε maggiore di zero e minore di uno, la superficie di Klein corrispondente è finita.

Quando $\varepsilon = 1$, la curva del 4° ordine corrispondente, si scinde in due ellissi.

La curva di 4ª classe reciproca, sarà anche essa scissa in due ellissi, similmente disposti. La superficie di Klein corrispondente, sarà formata da due ellissoidi sovrapposti, senza alcun punto in comune.

Dott. Francesco Tancredi.

LA TAVOLA PITAGORICA A *n* DIMENSIONI

§ 1. — La formazione della Tavola pitagorica a *n* dimensioni.

Si prenda in uno spazio lineare S_n un sistema di n semirette ortogonali $Ox_1\, Ox_2 \ldots Ox_n$ (semirette fondamentali) uscenti da un punto O e fissato un segmento u, lo si riporti un numero p di volte (p naturalmente intero, positivo, grande a nostro piacere, ma finito) su ciascuna delle semirette a partire da O e riferendoci, per esempio, alla prima, si conduca per ciascuno dei punti di divisione l'S_{n-1} parallelo all'S_{n-1} (fondamentale) determinato dalle rimanenti semirette $Ox_2\, Ox_3 \ldots Ox_n$.

Altrettanto si faccia per ciascuna delle altre semirette fondamentali. Ne nascerà una figura limitata da $2n$ S_{n-1} due a due paralleli che diremo *ipercubo* e che rimarrà suddivisa in p^n altri *ipercubi*. Questi ultimi ipercubi sono le *caselle* di quella che poi denomineremo *Tavola pitagorica a* n *dimensioni.*

Se chiamiamo *iperstrato* la parte di S_n compresa tra due S_{n-1} paralleli è subito visto che col procedimento precedente noi otteniamo n sistemi di iperstrati e che ogni casella apparterrà a n iperstrati di differente sistema.

Inversamente è chiaro che n iperstrati di sistema diverso individuano *una sola* casella. Chiameremo r^{mo} sistema di iperstrati l'insieme ∞' di iperstrati determinati dagli S_{n-1} perpendicolari alla semiretta fondamentale Ox_r e diremo che in un qualunque sistema un iperstrato ha per coordinata il numero s se il segmento di retta fondamentale compreso fra i due S_{n-1} che lo determinano è l's^{mo} segmento fra quelli successivamente portati sulla semiretta fondamentale cui essi sono perpendicolari.

Ad ogni casella faremo corrispondere un numero: stabiliremo che questo numero sia il prodotto delle coordinate degli n iperstrati cui essa è comune. Questa corrispondenza non è *biunivoca* perchè mentre a una casella corrisponde un numero determinato, a un numero dato (intero e positivo) corrispondono, almeno in tesi generale, *più* caselle.

La Tavola pitagorica a n dimensioni è così completata ed è chiaro che se noi vorremo determinare il prodotto di n numeri dati (interi e positivi) $a_1\, a_2 \ldots a_n$, basterà che noi prendiamo fra gli iperstrati, per esempio, del primo sistema, quello che ha per coordinata a_1, fra quelli del secondo sistema quello che ha per coordinata a_2 e così di seguito. Questi n iperstrati avranno in comune una casella il cui numero, per la corrispondenza stabilita sopra, sarà il prodotto degli n numeri dati. Evidentemente, se gli n numeri a_1, $a_2, \dots a_n$ non sono tutti uguali fra loro, vi saranno più modi per calcolarne il prodotto, potendosi prendere, per esempio, l'iperstrato di coordinata a_1 invece che nel primo sistema, in uno qualunque degli $n-1$ sistemi rimanenti.

§ 2. — Lo sviluppo di $(a+b)^n$.

Supponiamo che uno dei numeri $a_1 a_2 \dots a_n$ di cui si deve calcolare il prodotto, per esempio a_1, sia la somma (aritmetica) dei numeri $m, n, \dots p$. Allora il prodotto cercato sarà la somma dei prodotti $ma_2 \dots a_n$, $na_2 \dots a_n$, $\dots$ $pa_2 \dots a_n$. Volendo far ricorso alla precedente tavola pitagorica, si potrebbe procedere in questo modo: prendere nel primo sistema gli iperstrati di coordinate $m, n \dots p$ e negli altri sistemi quelli di coordinate $a_2 \dots a_n$ e considerare poi le caselle comuni agli ultimi $n-1$ iperstrati e a ciascuno di quelli di coordinate $m, n, \dots p$: la somma dei numeri corrispondenti alle diverse caselle sarebbe il prodotto richiesto. Se invece di uno fossero due i numeri scomposti nella somma di più altri si procederebbe in modo analogo e si verrebbe a concludere che basterebbe segnare nel 1° sistema, per esempio, gli iperstrati corrispondenti agli addendi in cui è scomposto a_1 e nel secondo sistema gli iperstrati corrispondenti ai numeri in cui è scomposto a_2 e sommare i numeri che corrispondono alle caselle inviluppate dal sistema di iperstrati così ottenuti. Analogamente pel caso di tre o più fattori decomposti nella somma di due o più addendi.

Ciò posto, facciamo un caso particolare: supponiamo che gli n fattori $a_1 a_2 \dots a_n$ siano uguali fra loro e uguali ad $a+b$ e cerchiamo di calcolare il loro prodotto, ossia lo sviluppo di $(a+b)^n$. Segnati in ciascun sistema i due iperstrati di coordinate a e b andiamo a vedere quali sono i numeri delle caselle inviluppate dal sistema che così si ottiene. Dovremo considerare le caselle comuni agli iperstrati di cui

n	coordinate	sono	uguali	ad a	e	0	uguali	a	b
$n-1$	"	"	"	"	"	1	"	"	"
$n-2$	"	"	"	"	"	2	"	"	"
$n-r$	"	"	"	"	"	r	"	"	"
0	"	"	"	"	"	n	"	"	"

Nel primo gruppo si trova evidentemente una sola casella il cui numero è a^n; nel secondo si trovano tante caselle quante sono le combinazioni di n oggetti presi 1 ad 1 cioè $\binom{n}{1}$ e tutte hanno per numero $a^{n-1}.b$; nel terzo gruppo vi saranno $\binom{n}{2}$ caselle di numero $a^{n-2}.b^2$ ecc.; nel gruppo $(r+1)^{mo}$ vi saranno $\binom{n}{r}$ caselle di numero $a^{n-r}.b^r$ e così di seguito, per cui potremo scrivere:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}.b + \binom{n}{2} a^{n-2}.b^2 + \ldots$$
$$\ldots \binom{n}{r} a^{n-r}.b^r + \ldots \binom{n}{n} b^n$$

che è la formula del binomio dimostrata per a, b, n interi e positivi.

Siccome poi le caselle inviluppate sono in numero di 2^n, potremo scrivere:

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{r} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

§ 3. — La funzione $N_r(P)$.

Formata la Tavola pitagorica a n dimensioni come abbiamo esposto al § 1, viene spontanea la domanda:

Quante volte un dato numero intero e positivo P figura in detta Tavola?

Per risolvere questo problema conviene riferirci per un momento alla tavola pitagorica ordinaria. Alla domanda fattaci sopra potremo allora rispondere subito così: Un numero P figura nella tavola pitagorica ordinaria tante volte quanti sono i divisori di P. Ora il numero dei divisori di P si rappresenta con *Lambert* con $\theta(P)$ dunque P figura $\theta(P)$ volte nella tavola pitagorica ordinaria.

Di questa proprietà — la quale potrà avere un certo valore dal lato didattico venendosi a dare per mezzo di essa un significato concreto al problema puramente astratto di determinare il numero dei divisori di un numero dato — lasciamo al lettore la facile verifica e procediamo alla *tavola pitagorica a tre dimensioni*. Il primo strato non è altro che la tavola pitagorica ordinaria, come è facile verificare, mentre nel secondo, dietro la legge di formazione, avremo i numeri della tavola medesima moltiplicati per 2, nel terzo quelli del primo strato, ossia della tavola pitagorica ordinaria, moltiplicati per 3 e così via. Cosicchè per vedere quante volte P figura in questa tavola, basterà osservare che se P è multiplo di 2 si troverà nel 2° strato tante volte quante $\frac{P}{2}$ è nel 1°; se P è multiplo di 3, si troverà nel 3° strato tante volte quante $\frac{P}{3}$ è contenuto nel primo e così di seguito, trovandosi P solamente in quelli strati la cui coordinata è un divisore di P. Se dunque i divisori di P disposti in ordine crescente fossero, per esempio:

$$1, \quad a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad P,$$

il numero delle volte che P figurerebbe nella tavola pitagorica a tre dimensioni sarebbe la somma dei numeri indicanti quante volte P e ciascuno de' suoi divisori (P escluso) figurano nell'ordinaria tavola pitagorica. Come caso ancor più particolare consideriamo il numero 18: i suoi divisori sono

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 6, \quad 9, \quad 18$$

di cui il primo comparisce nella Tavola pitagorica ordinaria una volta, il 2° 2 volte, il 3° 2 volte, il 4° 4 volte, il 5° 3 volte, l'ultimo 6 volte. Possiamo dire che il 18 figura nella tavola pitagorica a tre dimensioni *18 volte.*

Passando alla tavola pitagorica a quattro dimensioni osserviamo che il primo iperstrato contiene quella a tre dimensioni, il secondo contiene i numeri di questa stessa moltiplicati per 2 e così via. Cosicchè un numero P sarà contenuto in questa tavola a 4 dimensioni tante volte quante P e ciascuno de' suoi divisori (escluso P) saranno contenuti in quella a 3 dimensioni.

Il ragionamento è generale e si potrà dunque concludere:

Un numero P *figura nella tavola pitagorica a* n *dimensioni tante volte quante* P *e i divisori suoi, escluso* P, *figurano in quella a* $n-1$ *dimensioni.*

Se col simbolo $N_n(P)$ indichiamo il numero delle volte che P comparisce nella tavola pitagorica a n dimensioni e i divisori di P sono, disposti in ordine crescente:

$$1, \quad a, \quad b, \quad c \ \ldots \ c_1, \quad b_1, \quad a_1, \quad P,$$

in virtù del resultato ottenuto precedentemente, si potrà scrivere la formula:

$$N_n(P) = N_{n-1}(P) + N_{n-1}(a_1) + \ldots + N_{n-1}(a) + N_{n-1}(1).$$

§ 4. — L'espressione della funzione $N_r(P)$.

Immaginiamo il numero P decomposto, ciò che è sempre possibile, nel prodotto delle potenze de' suoi fattori primi e supponiamo in primo luogo che sia

$$P = p^\alpha. \qquad (p \text{ primo})$$

Avremo allora:

$$N_2(p^\alpha) = \alpha + 1 = \binom{\alpha+1}{1}.$$

Per avere $N_3(p^\alpha)$ faremo ricorso alla formula (1) del § precedente che in questo caso diventa:

$$N_3(p^\alpha) = N_2(p^\alpha) + N_2(p^{\alpha-1}) + \ldots + N_2(1)$$

e siccome

$$N_2(p^\alpha) = \binom{\alpha+1}{1}, \qquad N_2(p^{\alpha-1}) = \binom{\alpha}{1} \ldots N_2(1) = \binom{1}{1},$$

troveremo:

$$N_3(p^\alpha) = \binom{\alpha+1}{1} + \binom{\alpha}{1} + \ldots + \binom{1}{1}.$$

Se teniamo presente la relazione generale:

$$\binom{m}{p} = \binom{m-1}{p-1} + \binom{m-2}{p-1} + \binom{m-3}{p-1} + \ldots + 1,$$

la precedente formula potrà anche scriversi

$$N_3(p^\alpha) = \binom{\alpha+2}{2}.$$

Così procedendo si troverebbe:

$$N_4(p^\alpha) = \binom{\alpha+3}{3}, \qquad N_5(p^\alpha) = \binom{\alpha+4}{4} \ldots$$

e in generale:

$$N_r(p^\alpha) = \binom{\alpha+r-1}{r-1}.$$

Poniamo ora

$$P = p^\alpha \cdot q^\beta \qquad (p,\ q \text{ primi}).$$

Avremo

$$N_2(P) = (\alpha+1)(\beta+1) = \binom{\alpha+1}{1} \cdot \binom{\beta+1}{1} \tag{2}$$

e quindi per trovare $N_3(P)$ basterà calcolare quanti sono i divisori di P e de' suoi divisori.

Ora i divisori di P si ottengono tutti moltiplicando i numeri della linea

$$1 \quad p \quad p^2 \ldots p^\alpha$$

per quelli della linea

$$1 \quad q \quad q^2 \ldots q^\beta$$

e saranno dati dal quadro qui sotto:

$$\left\{\begin{array}{llll} 1 & p & p^2 \ldots & p^\alpha \\ q & q \cdot p & qp^2 \ldots & q \cdot p^\alpha \\ q^2 & q^2 p & q^2 p^2 \ldots & q^2 \cdot p^\alpha \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q^\beta & q^\beta \cdot p & q^\beta p^2 \ldots & q^\beta p^\alpha \end{array}\right.$$

Le somme delle N_2 relative ai numeri della prima orizzontale è per la formula (2):

$$\binom{0+1}{1}\cdot\binom{0+1}{1}+\binom{1+1}{1}\cdot\binom{0+1}{1}+\binom{2+1}{1}\cdot\binom{0+1}{1}+\ldots$$
$$\ldots+\binom{\alpha+1}{1}\cdot\binom{0+1}{1}.$$

La somma di quelle relative alla seconda orizzontale è

$$\binom{0+1}{1}\cdot\binom{1+1}{1}+\binom{1+1}{1}\cdot\binom{1+1}{1}+\binom{2+1}{1}\cdot\binom{1+1}{1}+\ldots$$
$$\ldots+\binom{\alpha+1}{1}\cdot\binom{1+1}{1}.$$

Così continuando si trova che la somma delle N_2 relative alla colonna ultima è

$$\binom{0+1}{1}\cdot\binom{\beta+1}{1}+\binom{1+1}{1}\cdot\binom{\beta+1}{1}+\binom{2+1}{1}\cdot\binom{\beta+1}{1}+\ldots$$
$$\ldots+\binom{\alpha+1}{1}\cdot\binom{\beta+1}{1}.$$

Eseguendo la somma di queste somme e osservando che nella prima si può mettere a fattore comune $\binom{0+1}{1}$, nella seconda $\binom{1+1}{1}$ e nell'ultima $\binom{\beta+1}{1}$ otterremo come resultato finale

$$\left\{\binom{0+1}{1}+\binom{1+1}{1}+\binom{2+1}{1}+\ldots+\binom{\alpha+1}{1}\right\}\cdot$$
$$\cdot\left\{\binom{0+1}{1}+\binom{1+1}{1}+\ldots+\binom{\beta+1}{1}\right\}=\binom{\alpha+2}{2}\cdot\binom{\beta+2}{2}.$$

Se passiamo a calcolare $N_4(P)$, $N_5(P)$ ecc. troviamo:

$$N_4(P)=\binom{\alpha+3}{3}\cdot\binom{\beta+3}{3},\qquad N_5(P)=\binom{\alpha+4}{4}\cdot\binom{\beta+4}{4}\ldots$$

per cui si potrebbe dimostrare che in generale sussiste la formula:

$$N_r(P)=\binom{\alpha+r-1}{r-1}\cdot\binom{\beta+r-1}{r-1}.$$

E col medesimo procedimento indicato qui sopra si potrebbe passare al caso generale e far vedere che quando fosse:

$$P=p^\alpha\,.\,q^\beta\,.\,r^\gamma\ldots\qquad (p,\ q,\ r \text{ primi}),$$

sussisterebbe una formula analoga alla precedente e precisamente:

$$N_n(p^\alpha\,.\,q^\beta\,.\,r^\gamma\ldots)=\binom{\alpha+n-1}{n-1}\cdot\binom{\beta+n-1}{n-1}\cdot\binom{\gamma+n-1}{n-1}\ldots\quad(3)$$

ovvero

$$N_n(p^\alpha . q^\beta . r^\gamma \ldots) = \binom{\alpha+n-1}{\alpha} . \binom{\beta+n-1}{\beta} . \binom{\gamma+n-1}{\gamma} \ldots$$

Questa è l'espressione generale di $N_n(P)$.

La formula

$$N_r(p_\alpha) = \binom{\alpha+r-1}{r-1}$$

ci permette di esprimere qualunque simbolo $\binom{m}{q}$ per mezzo della funzione N. Si ha invero

$$\binom{m}{q} = N_{q+1}(p^{m-q}).$$

Così tutte le formule di analisi combinatoria si tradurranno in altrettante relazioni fra le funzioni N. Notiamone alcune.

1°. La formula ultima del § 2 si potrà scrivere così:

$$2^n - 2 = N_2(p^{n-1}) + N_3(p^{n-2}) + N_4(p^{n-3}) + \ldots + N_n(p).$$

Da questa si può trarre il resultato:

L'espressione

$$N_n(p) + N_{n-1}(p^2) + \ldots + N_2(p^{n-1})$$

è un numero pari *qualunque sia il numero primo* p.

2°. La formula

$$\binom{n}{k} + \binom{k+1}{n} = \binom{n+1}{k+1}$$

ci dà la relazione:

$$N_{k+1}(p^{n-k}) + N_{k+2}(p^{n-k-1}) = N_{k-2}(p^{n-k}).$$

Facendo in questa $k = n-2$ otterremo l'altra:

$$N_n(p^2) - N_{n-1}(p^2) = N_n(p).$$

3°. La formula

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

dà l'altra

$$N_{k+1}(p^{n-k}) = N_{n-k-1}(p^k)$$

da cui, per $k=1$:

$$N_2(p^{n-1}) = N_n(p)$$

e siccome

$$N_2(p^{n-1}) = n,$$

seguirà che

$$N_n(p) = n,$$

cioè che ogni numero primo comparirà nella tavola pitagorica a n dimensioni n volte. Inversamente si potrebbe far vedere che se un numero comparisce n volte solamente nella detta tavola, è primo.

La formula (3) ci dice che la funzione N soddisfa alla legge

$$N_r(p^\alpha \cdot q^\beta \cdot r^\gamma \ldots) = N_r(p^\alpha) \cdot N_r(q^\beta) \cdot N_r(r^\gamma) \ldots$$

sempre supponendo p, q, r numeri primi.

Da questa segue in particolare:

$$N_r(p^{k\alpha}) = [N_r(p^\alpha)]^k.$$

Ci piace da ultimo riportare che il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ N_2(p^{m-1}) & N_2(p^m) & \ldots & N_2(p^{m+n-2}) \\ N_3(p^{m-1}) & N_3(p^m) & \ldots & N_3(p^{m+n-2}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ N_n(p^{m-1}) & N_n(p^m) & \ldots & N_n(p^{m+n-2}) \end{vmatrix}$$

è uguale all'*unità*.

Lasciamo al lettore di trarre altre conseguenze in proposito.

§ 5. — Il prolungamento della Tavola pitagorica a n dimensioni.

Si può prolungare la tavola pitagorica a n dimensioni dietro le considerazioni seguenti che portano una leggerissima necessaria modificazione nella formazione della tavola medesima data nel paragrafo 1.

Immaginiamo lo spazio a n dimensioni solcato da n sistemi di iperstrati costituiti ciascuno dagli iperpiani di un fascio che sono situati alla distanza u. Supposto che questi n sistemi siano due a due perpendicolari tra loro, da essi lo spazio medesimo rimarrà diviso in ipercubi di spigolo u. Per dare un numero a ciascuno di essi fissiamone in primo luogo uno come *ipercubo zero* e consideriamo gli n iperstrati che passano per esso e che lo individuano. Se prendiamo k $(k < n)$ di tali iperstrati, che chiameremo *fondamentali*, essi avranno in comune uno strato che diremo strato a k dimensioni: il loro numero sarà dato dalle combinazioni di n oggetti presi k a k e sarà quindi $\binom{n}{k}$. Uno strato a k dimensioni sarà poi individuato da k strati a una dimensione.

Consideriamo uno qualunque degli $\binom{n}{1}$ strati a una dimensione e assegnamo a ciascuno degli ∞' ipercubi in esso contenuti un numero: 1, 2, 3 ecc. successivamente a quelli situati dalla stessa parte dell'ipercubo zero (che definirà il verso positivo dello strato), e $-1, -2, -3$ ecc. a quelli situati dalla parte opposta (che definirà il verso negativo dello strato medesimo), cosicchè ipercubi simmetrici rispetto all'ipercubo zero avranno numeri simmetrici.

Dati n numeri $a_1\, a_2 \ldots a_n$, preso in uno degli n strati a una dimensione l'ipercubo di numero a_1, in un secondo strato l'ipercubo di numero a_2 e così di seguito, se $a_1 a_2 \dots a_n$ sono numeri positivi, all'ipercubo comune agli n iperstrati di coordinate $a_1\ a_2 \dots a_n$ attribuiremo il numero $a_1 a_2 \dots a_n$ analogamente a quanto si fece nel § 1 per la tavola pitagorica a n dimensioni *semplice*. Conveniamo poi che a ipercubi disposti *simmetricamente* rispetto ad *uno* degli iperstrati fondamentali corrispondano *numeri simmetrici*: la tavola pitagorica è così prolungata.

Se dei dati numeri $a_1 a_2 \dots a_n$ ne supponiamo *uno*, per es. a_1, negativo, invece dell'ipercubo sopra trovato dovremo prendere quello simmetrico rispetto all'iperstrato determinato dagli $n-1$ strati a una dimensione su cui abbiamo scelto gli ipercubi di numeri

$$a_2\ a_3 \dots a_n$$

e quindi, in base alla convenzione fatta, il prodotto degli n numeri risulterà negativo: se, in generale, k di essi sono negativi, osservando che la simmetria rispetto a uno strato a $n-k$ dimensioni è manifestamente scomponibile in k simmetrie rispetto agli iperstrati a cui detto strato è comune, si vedrà subito che il prodotto avrà segno positivo o negativo secondochè k è pari o dispari. È dunque chiaro che nella tavola pitagorica prolungata vien mantenuta la legge che il prodotto di più numeri è positivo o negativo secondo che è pari o dispari il numero dei fattori negativi.

Per la nuova tavola seguiteranno a valere le proprietà enunciate per l'altra. Varrà in particolare la formula per lo sviluppo di $(a-b)^n$ purchè in ciascuno degli n strati a una dimensione si prendano a nel verso positivo e $-b$ nel verso negativo. Si otterrà così:

$$(a-b)^n = a^n - \binom{n}{1} a^{n-1}.b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + (-1)^n b^n .$$

Il numero degli ipercubi è anche qui 2^n: quello degli ipercubi aventi un numero positivo è

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n} \quad \text{se } n \text{ è pari,}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n-1} \quad \text{se } n \text{ è dispari;}$$

quello degli ipercubi aventi un numero negativo è

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} \quad \text{se } n \text{ è pari,}$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} \quad \text{se } n \text{ è dispari.}$$

Ma se scambiamo sopra *uno* (o sopra un numero dispari di) strato a una dimensione i versi positivo e negativo fra loro, ogni ipercubo della tavola pitagorica prolungata cambia il suo numero col suo simmetrico: gli ipercubi di una specie sono dunque tanti quanti quelli dell'altra e si avrà la relazione già da noi dimostrata geometricamente: [1]

$$1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0. \qquad (4)$$

Se poi conveniamo che gli iperstrati, che abbiamo chiamato fondamentali, non facciano parte della tavola pitagorica prolungata, [2] sarà facile riconoscere che la nuova funzione $N'_n(P)$ è data da

$$N'_n(P)=2^{n-1}.\,N_n(P).$$

Notiamo da ultimo che la formula (4), ove si tenga presente che in virtù della convenzione $\binom{m}{0}=1$ si può ritenere che il simbolo

$$N_1(p^m)$$

abbia il valore 1, conduce alla relazione:

$$N_1(p^n)-N_2(p^{n-1})+N_3(p^{n-2})+\ldots+(-1)^{k-1}N_k(p^{n-k+1})= \\ (-1)^{n-1}.\,N_n(p)=0.$$

E. Piccioli.

DI UN'ESTENSIONE DEGLI ALGORITMI ALGEBRICI

al calcolo formale vettoriale

La fisonomia più spiccata dei moderni studî vettoriali è quella che loro deriva da quanto di simbolico e di formale v'ha in essi: e questa, oltre che rispondere ai fini stessi che il calcolo vettoriale si propone, conferisce ad esso una freschezza e una venustà veramente notevoli, riunendo in insieme armonico ed ordinato la massa informe dei principî sparsi qua e là nelle applicazioni a servizio di queste e sollevandola all'altezza di un metodo autonomo ed unificato. E l'importanza diretta e assoluta di questo assurge per esempio a tale, da togliere ogni valore al calcolo ausiliario e indiretto delle coordinate

(1) Confronta la mia nota “Criterio per riconoscere se siano o no congruenti due figure simmetriche rispetto ad un S_k di S_n”, pubblicata nel *Periodico di Matematica*. Vol. XVII, pag. 313 (1902).

(2) Il lettore giudicherà da sè, dopo fatta la figura in un caso particolare, dell'opportunità di questa convenzione.

e da comprendere, come un capitolo speciale delle sue applicazioni, i principi fondamentali della geometria analitica. [1]

La base di questi metodi formali è tutta nella definizione di vettore: esso va considerato come un ente a sè che nulla ha di comune coi numeri ordinari fuor che il concetto di misura del suo modulo, e si adopera ad indicarlo un simbolo ben diverso da quello adottato per gli ordinari numeri algebrici (comunemente la lettera " **a** „ carattere grassetto) attribuendo ad esso, per così dire, tutto il significato di un numero *sui generis* poichè rappresenta convenzionalmente in sè i tre elementi caratteristici del vettore: la grandezza, la direzione, il senso.

Questo simbolo vettoriale dà luogo alle *operazioni formali*, così dette perchè hanno la forma medesima delle operazioni corrispondenti dell'algebra scalare ordinaria: i valori o moduli dei vettori che entrano in esse, e i quali altro non sono che ordinari numeri algebrici, dànno poi luogo a particolari relazioni algebrico-geometriche o *relazioni scalari* che caratterizzano le operazioni formali. Così ad esempio la diagonale **r** del parallelogrammo costruito su due vettori **a** e **b** presi come lati, è il risultato dell'operazione formale detta *somma* (o anche risultante) dei due vettori dati e si indica con la notazione

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \tag{1}$$

che è analoga a quella del calcolo ordinario. Tuttavia in fatto il valore r di **r** (essendo r in generale un numero essenzialmente positivo o in particolare nullo detto modulo del vettore dato) non è la somma dei valori a e b dei vettori addendi (o componenti) ma si ottiene mediante l'equazione scalare corrispondente alla (1):

$$r^2 = a^2 + 2ab\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + b^2 \tag{2}$$

nella quale è posto:

$$\text{ang}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Dalla (2) si deduce che r varia da $(a - b)$ ad $(a + b)$ quando $(\mathbf{a} \, . \, \mathbf{b})$ varia da 180° a 0°.

Quanto abbiamo detto induce a ritenere che per i vettori, e quindi per le quantità concrete da essi rappresentate (forze, velocità, celerità ecc.) non c'è concetto possibile di somma al di fuori di quello che conduce alla regola del parallelogrammo, epperò tali grandezze non si possono sommare (associare, aggregare) in modo diverso e per conseguenza a questa prima e più semplice fra le operazioni sui vettori altra indicazione e scrittura e segno operativo non si convengono che quelli dell'algebra ordinaria. Il che, per altro, conferisce ai segni operativi considerati a parte una generalità maggiore,

[1] Cfr. Burali-Forti e Marcolongo, *Elementi di calcolo vettoriale*, Bologna, 1909, prefazione; pag. 13, § 11; pag. 24, § 5; pag. 39, § 6 e segg. ecc.

perchè l'esempio mostra in particolare che il concetto di somma non è subordinato a quello ordinario di numero ed è come tale un risultato immutabile e invariato in se stesso ma è un concetto più universale e generale che nasce dalla necessità di aggregare più enti e di aggregarli nel solo modo o nei modi che la natura di essi consente e rende possibili. Ciò che espresso in concetti comuni verrà per esempio a dire che non è assoluto il risultato $7 + 3 = 10$, poichè esso può variare da 4 a 10 se 7 e 3 sono le misure rispettive di due vettori ad angolo e se quest'angolo varia da 180° a 0°.

I presenti metodi vettoriali indagano fino a qual punto gli algoritmi operativi dell'analisi algebrica e infinitesimale, inerenti agli ordinari simboli numerici a, si possono estendere al calcolo vettoriale ossia ai simboli **a**. E in questa nota è estesa appunto al calcolo vettoriale la formola algebrica:

$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2 + \\ + 2m_1m_2 + 2m_1m_3 + \ldots + 2m_1m_n + \ldots + 2m_{n-1}m_n = \\ = \sum_1^n{}_i\, m_i^2 + 2\,\Sigma_{r,s}\, a_r a_s$$

$$\begin{cases} r = 1, & s = 2, 3, \ldots n \\ r = 2, & s = 3, 4, \ldots n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ r = n - 1, & s = n \end{cases}$$

che dà il quadrato di un polinomio. La maniera semplicissima di ricavarla permetterà di mostrare che la perfetta rispondenza tra le operazioni formali e le relazioni scalari proprie ad esse, non è affatto casuale ma ha un significato e un contenuto precisi che si conservano sempre inalterati e che permettono il passaggio dalle formole vettoriali alle scalari e quello inverso.

Avendo di già accennato alla somma di due vettori ricordiamo che la loro *differenza* è l'operazione definita dalla forma

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} \tag{3}$$

ed è rappresentata in grandezza, direzione e senso dal lato che chiude il triangolo costruito sui due vettori **a** e **b** presi come lati. Si può pure dire che il vettore minuendo è la somma di **d** e dell'altro dei vettori dati, poichè è facile costruire un parallelogrammo che fornisce la relazione

$$\mathbf{a} = \mathbf{d} + \mathbf{b}$$

che consegue dalla (3). La (3) conduce poi alla relazione scalare corrispondente:

$$d^2 = a^2 - 2ab\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + b^2 \tag{4}$$

che si ottiene senz'altro applicando al lato d del triangolo sopradetto il teorema del coseno o di Carnot.

La somma di più vettori rimane definita mediante l'applicazione successiva della regola del parallelogrammo; essa si indica con la notazione:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n = \sum_1^n{}_i \, \mathbf{a}_i \tag{5}$$

ed è rappresentata in grandezza, direzione e senso dal lato che chiude la poligonale ottenuta conducendo successivamente, a partire dall'estremo del primo dei vettori dati i vettori uguali (equipollenti) ai rimanenti $n-1$. È questa la regola del poligono dei vettori che comprende in particolare il caso di $n=3$ vettori non complanari (regola del parallelepipedo) e quello del parallelogrammo che si ha per $n=2$ e che è espresso dalle formole (1) e (2). La relazione scalare corrispondente alla (5) è [1]:

$$\begin{aligned} r^2 &= a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + \\ &+ 2a_1a_2 \cos(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + 2a_1a_3 \cos(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3) + \ldots + 2a_1a_n \cos(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_n) = \\ &= \sum_1^n{}_i \, a_i^2 + 2\Sigma_{r,s} \, a_r a_s \cos(\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_s) \end{aligned} \tag{6}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} r=1, & s=2,3,\ldots,n \\ r=2, & s=3,4,\ldots,n \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ r=n-1, & s=n \end{array} \right.$$

che comprende in particolare la (2).

Facciamo finalmente menzione di un'altra operazione formale di due vettori ad angolo $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Essa è il *prodotto interno* o *scalare* [2] definito dalla relazione scalare

$$p = ab \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \tag{7}$$

e a differenza delle operazioni precedenti non conduce a un vettore ma ad una quantità scalare p, che tuttavia viene indicata con la notazione formale $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ o $\mathbf{ab}$, onde si pone per convenzione:

$$p = \mathbf{ab}. \tag{8}$$

Se in queste due formole si pone $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, $a = b$, e si osserva che allora è $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1$ si ottiene

$$\mathbf{a}^2 = a^2 \tag{9}$$

ove si convenga indicare con $\mathbf{a}^2$ l'espressione $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{aa}$. La (9) dà il *quadrato interno di un vettore* ed esprime che esso è uno scalare uguale al quadrato del modulo. Il prodotto interno gode della pro-

---

[1] Una dimostrazione analitica di questa formola si può trovare nel *Corso di Meccanica razionale* dello STURM (trad. Vito Eugenio, Napoli, 1871), a pag. 10 del primo volume.

[2] BURALI-FORTI e MARCOLONGO, op. cit., pag. 31, § 3.

prietà distributiva rispetto alla somma ed è espressa dalla relazione formale

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n)(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \ldots + \mathbf{b}_n) = \\ = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 + \ldots + \mathbf{a}_1\mathbf{b}_n + \\ + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_n + \\ + \ldots \ldots \ldots \ldots + \mathbf{a}_n\mathbf{b}_n.\end{aligned} \qquad (10)$$

Essa dà *il prodotto interno di due somme* e in essa alle due parentesi del primo membro si possono sostituire le risultanti corrispondenti $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

La formola che vogliamo dedurre si ottiene dalle note posizioni qui ricordate. Infatti se nella (6) si pone

$$\begin{cases} r^2 = \mathbf{r}^2 \\ a_i^2 = \mathbf{a}_i^2 \\ a_r a_s \cos(\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_s) = \mathbf{a}_r\mathbf{a}_s \end{cases} \qquad (11)$$

si otterrà:

$$\mathbf{r}^2 = \Sigma_1^n{}_i\, \mathbf{a}_i^2 + 2\, \Sigma_{r,s} \mathbf{a}_r\mathbf{a}_s \qquad (12)$$

e sostituendo ad $\mathbf{r}$ il valore dato dalla (5) si ha:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n)^2 = \mathbf{a}_1^2 + \mathbf{a}_2^2 + \ldots + \mathbf{a}_n^2 + \\ + 2\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3 + \ldots + 2\mathbf{a}_1\mathbf{a}_n + \ldots + 2\mathbf{a}_{n-1}\mathbf{a}_n = \\ = \Sigma_1^n{}_i\, \mathbf{a}_i^2 + 2\, \Sigma_{r,s}\, \mathbf{a}_r\mathbf{a}_s\end{aligned} \qquad (13)$$

$$\begin{cases} r = 1, & s = 2, 3, \ldots, n \\ r = 2, & s = 3, 4, \ldots, n \\ \ldots & \ldots \\ r = n - 1, & s = n. \end{cases}$$

È questa la formola che si voleva porre, la quale è perfettamente analoga a quella ricordata a pag. 21. Essa dà il *quadrato interno di una somma* ossia il quadrato di un polinomio i cui termini sono vettori e ci dice che esso si ottiene con la stessa legge di formazione che vige nel calcolo algebrico. La (13) si ottiene pure come caso particolare della (10) ponendo

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i \; (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

ciò che è facile verificare calcolando sui simboli vettoriali come su numeri algebrici. Trasformando in modo analogo la (2) e la (4) mediante le (7), (8) e (9), si deducono le note formole particolari [1]:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}^2$$
$$(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}^2.$$

---

(1) Cfr. Burali-Forti e Marcolongo. op. cit. pag. 33.

E con ragionamenti del tutto analoghi si ottiene anche la seguente:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2$$

che dà il *prodotto interno della somma di due vettori per la loro differenza.*

Ciò che più caratterizza il calcolo fatto è che dalla formola scalare (6) siamo passati alla relazione vettoriale (13) adoperando le convenzioni note. In modo analogo si può passare dalla (6) alla (5): infatti sostituendo al secondo membro della (12) il primo membro della (13) si avrà:

$$\mathbf{r}^2=(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\ldots+\mathbf{a}_n)^2$$

da cui estraendo la radice si ha proprio la (5). Viceversa dalla (5) si può passare alla (6): basta infatti elevare a quadrato la (5) con la regola (13) e ai termini dello sviluppo sostituire le (11) lette in senso inverso. Concluderemo quindi col dire che *le operazioni formali e le relazioni scalari relative si trasformano fra loro mutuamente.*

Questa notevole corrispondenza si mantiene inalterata nello studio analitico dei vettori sugli assi cartesiani. Poichè in esso ai vettori dati vanno sostituite le loro componenti sugli assi, così alle relazioni scalari subentrano delle particolari relazioni algebriche che contengono i moduli di esse componenti ovvero le coordinate degli estremi dei vettori dati.

Considerando la (5) diciamo $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ le componenti cartesiane ortogonali di $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{Z}_i$ le analoghe componenti di $\mathbf{a}_i$: allora una formola analoga alla (5) sarà evidentemente:

$$\mathbf{X}+\mathbf{Y}+\mathbf{Z}=\sum_1^n{}_i\,(\mathbf{X}_i+\mathbf{Y}_i+\mathbf{Z}_i) \qquad (14)$$

ed una formola analoga alla (6) dovrà certo contenere i tensori X, Y, Z, X_i, Y_i, Z_i, ovvero i valori di essi espressi mediante le coordinate degli estremi con relazioni della forma:

$$\begin{cases} X=x'-x \\ Y=y'-y \\ Z=z'-z \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} X_i=x'_i-x_i \\ Y_i=y'_i-y_i \\ Z_i=z'_i-z_i. \end{cases}$$

Troviamo la relazione scalare analoga alla (6). Basta perciò ricordare le relazioni algebriche valide sugli assi:

$$X=\Sigma_i\, X_i; \qquad Y=\Sigma_i\, Y_i; \qquad Z=\Sigma_i\, Z_i.$$

Elevando queste a quadrato si avrà:

$$\begin{aligned} X^2&=\Sigma_i\, X_i^2+2\,\Sigma_{r,s}\, X_rX_s \\ Y^2&=\Sigma_i\, Y_i^2+2\,\Sigma_{r,s}\, Y_rY_s \\ Z^2&=\Sigma_i\, Z_i^2+2\,\Sigma_{r,s}\, Z_rZ_s \end{aligned}$$

e sommando ordinatamente membro a membro in senso verticale si ottiene infine:

$$X^2+Y^2+Z^2=\Sigma_i\,(X_i^2+Y_i^2+Z_i^2)+2\,\Sigma_{r,s}\,(X_rX_s+Y_rY_s+Z_rZ_s).\quad(15)$$

È questa la formola scalare corrispondente alla (6), e le (14) e (15) si corrispondono alla loro volta. Come dalla (5) si passa alla (14), così dalla (6) si passa alla (15). Sappiamo infatti che in assi cartesiani ortogonali valgono le relazioni:

$$r^2=X^2+Y^2+Z^2\quad(16)$$
$$a_i^2=X_i^2+Y_i^2+Z_i^2\quad(17)$$

e che inoltre essendo:

$$\frac{X_r}{a_r}\,\frac{X_s}{a_s}+\frac{Y_r}{a_r}\,\frac{Y_s}{a_s}+\frac{Z_r}{a_r}\,\frac{Z_s}{a_s}=\cos(a_r,a_s)$$

risulta:

$$X_rX_s+Y_rY_s+Z_rZ_s=a_ra_s\cos(\mathbf{a}_r,\mathbf{a}_s).\ ^{(1)}\quad(18)$$

Per le (16), (17) e (18) la (15) si trasforma nella (6) e quindi nella (13), nella (5) o nella (14) come si voleva.

La corrispondenza mostrata conduce a qualche rilievo non inutile. Risulta infatti che l'essenza stessa del calcolo vettoriale è contenuta in relazioni scalari algebriche o analitiche, come ad es. la (6) e la (15): ciò che appare evidente quando si pensi che il concetto di numero e di vettore, per quanto diversi, sono inseparabili e anzi quello è del tutto contenuto in questo. Di tali relazioni quindi è da tener conto, e non soltanto secondario, in una trattazione completa. Il calcolo formale deriva poi dalla necessità, altrove accennata, di dare forma addittiva, sottrattiva o moltiplicativa a tali relazioni poichè esse esprimono il risultato di aggregazioni di natura speciale (regola del parallelegrammo, del poligono, ecc.) che stanno alle operazioni puramente algebriche come le quantità speciali (velocità, forze, ecc.) che ad esse dànno luogo stanno alle ordinarie quantità scalari.

Salvatore Augusto Toscano.

[1] Questa non è altro che l'espressione analitica del prodotto interno: $ab=XX'+YY'+ZZ'$ che è la forma analitica, scalare e formale, corrispondente alle formole (7) ed (8).

SUL TRIANGOLO PODARIO E ANTIPODARIO

1. Siano P_1, P_2, P_3 i piedi sui lati BC, CA, AB del triangolo ABC delle tre isocline condotte da P, punto del piano di ABC. Il triangolo $P_1P_2P_3$ è allora, com'è noto, il *triangolo copodario* di P rispetto ad ABC. La circonferenza determinata da quegli stessi tre punti è a sua volta la *circonferenza copodaria* di P. È noto pure che se a ciascuno dei triangoli AP_2P_3, BP_3P_1, CP_1P_2 circoscriviamo le circonferenze, le tre circonferenze passano per uno stesso punto. Ciò risulta evidente osservando che se P' è il punto comune alle due prime, è (¹)

$$P_2\widehat{P}P_3 = \pi - \widehat{A}, \qquad P_3\widehat{P}P_1 = \pi - \widehat{B},$$

per cui è pure

$$P_3\widehat{P}P_1 = 2\pi - (\pi - \widehat{A}) - (\pi - B) = \widehat{A} + \widehat{B} = \pi - \widehat{C},$$

per cui il quadrilatero P_1PP_2C è inscrittibile.

I lati di ABC sottendono in P gli angoli

$$B\widehat{P}C = \widehat{A} + \widehat{P}_1, \qquad C\widehat{P}A = \widehat{B} + \widehat{P}_2, \qquad A\widehat{P}B = \widehat{C} + \widehat{P}_3,$$

ma queste relazioni devono essere parzialmente modificate se P è esterno ad ABC. Se, essendo tale, è, ad esempio, compreso nell'angolo C, poichè i quadrilateri P_2P_3AP, P_3P_1BP sono inscrittibili, è

$$P\widehat{P_3}P_1 = P\widehat{B}P_1, \qquad P\widehat{P_3}P_2 = P\widehat{A}P_2$$

e per somma,

$$\widehat{P}_3 = P\widehat{A}P_2 + P\widehat{B}P_1 = \widehat{C} + A\widehat{P}B,$$

ossia

$$A\widehat{P}B = \widehat{P}_3 - \widehat{C}.$$

Di più, essendo

$$\widehat{A} + A\widehat{C}P = B\widehat{P}C + A\widehat{B}P,$$

è pure

$$\widehat{A} - B\widehat{P}C = A\widehat{B}P - A\widehat{C}P.$$

I quadrilateri PP_3BP e P_1P_2CP sono entrambi inscrittibili, per cui

$$A\widehat{B}P = P_3\widehat{P}_1P, \qquad A\widehat{C}P = P_2\widehat{P}_1P.$$

e sostituendo nell'eguaglianza precedente,

$$\widehat{A} - B\widehat{P}C = P_3\widehat{P}_1P - P_2\widehat{P}_1P = \widehat{P}_1,$$

e dunque,

$$B\widehat{P}C = \widehat{A} - \widehat{P}_1, \quad C\widehat{P}A = \widehat{B} - \widehat{P}_2.$$

(¹) Si prega il lettore di fare la semplicissima figura.

Perchè il punto P è invariabilmente legato alla serie dei triangoli $P_1P_2P_3$, ne segue che se un vertice di uno di essi P_1, ad es., si sposta percorrendo il lato BC, anche P_2 si sposta, ed il suo luogo geometrico è la retta del lato CA.

Tutti i punti del piano ABC che hanno date relazioni con $P_1P_2P_3$, e che usiamo chiamare *notevoli*, si spostano anch'essi secondo linee rette. Così se $P_1P_2P_3$ è dato, i triangoli P_1PP_2, P_2PP_3, P_3PP_1 sono determinati. Se PP_1 fa un angolo θ con BC, anche PP_2 e PP_3 faranno lo stesso angolo con CA e AB rispettivamente, ed in $P_1P_2P_3$ abbiamo, come già si è detto, il triangolo copodario di P rispetto ad ABC. Se è $\theta = 90^\circ$, allora PP_1 è perpendicolare a BC e quindi anche PP_2 e PP_3 sono perpendicolari a CA e AB, e la circonferenza di centro P e raggio PP_1 è evidentemente tangente a BC. Allora $P_1P_2P_3$ è il minimo fra i triangoli che possono venir inscritti in ABC ed è il triangolo *podario* di P rispetto ad ABC: la circonferenza ad esso circoscritta è la *circonferenza podaria* del punto P stesso. Se poi P coincide coll'ortocentro H del triangolo dato, nel qual caso PP_1, PP_2, PP_3 sono segmenti delle tre altezze, il triangolo $P_1P_2P_3$ e la circonferenza ad esso circoscritta sono rispettivamente il *triangolo ortico* e la *circonferenza ortica* di ABC. Il triangolo $P_1P_2P_3$ è in questo caso il triangolo di perimetro minimo fra tutti quelli che possono venir inscritti in ABC.

Se il triangolo $P_1P_2P_3$ è equilatero, se ne calcola con tutta facilità il lato λ: su BC, CA, AB tracciamo segmenti di circonferenza capaci degli angoli $A + 60^\circ$, $B + 60^\circ$, $C + 60^\circ$ rispettivamente e P sia il punto comune ad essi: ponendo $PA = x$, $PB = y$, $PC = z$, è

$$\lambda = x \operatorname{sen} A = y \operatorname{sen} B = z \operatorname{sen} C,$$

e ponendo $P\widehat{C}A = \varphi$,

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} = \frac{z}{x} = \frac{\operatorname{sen}(60^\circ + B + \varphi)}{\operatorname{sen} C \operatorname{sen}(60^\circ + B)},$$

per cui,

$$\cot\varphi = \frac{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} C \cos(60^\circ + B)}{\operatorname{sen} C \operatorname{sen}(60^\circ + B)}.$$

Da questa ricaviamo

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\operatorname{sen} C \operatorname{sen}(60^\circ + B)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 C - 2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos(60^\circ + B)}}.$$

Ma è

$$\lambda = z \operatorname{sen} C = \frac{b \operatorname{sen} C \operatorname{sen}(60^\circ + B + \varphi)}{\operatorname{sen}(60^\circ + B)} = \frac{b \operatorname{sen} A \operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}(60^\circ + B)},$$

per cui in ultimo,

$$\lambda = \frac{2R \,.\, \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 C - 2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos(60^\circ + B)}}.$$

2. Il triangolo $P_1P_2P_3$ sia il triangolo dato e pei suoi tre vertici conduciamo le perpendicolari a P_1P, P_2P, P_3P rispettivamente: il triangolo ABC che così si ottiene è il triangolo antipodario di P rispetto a $P_1P_2P_3$. È noto che fra tutti i triangoli che si possono circoscrivere a $P_1P_2P_3$ il triangolo ABC è il massimo.

Le rette dei segmenti AP, BP, CP incontrino la circonferenza (O) circoscritta ad ABC in L, M, N [1]: il triangolo LMN è il *triangolo delle corde* di P rispetto ad ABC. Il quadrilatero PP_1CP_2 che è ciclico, dà,

$$P\widehat{P_1}P_2 = P\widehat{C}A, \qquad \text{ossia} \qquad N\widehat{C}A = N\widehat{L}A,$$
$$P\widehat{P_1}P_3 = P\widehat{B}A, \qquad \text{ossia} \qquad M\widehat{B}A = M\widehat{L}A,$$

e dunque $\widehat{P} = \widehat{L}$.

Si riconosce in modo analogo che è $\widehat{P_2} = \widehat{M}$, $\widehat{P_3} = \widehat{N}$, e dunque il triangolo podario ed il triangolo delle corde di uno stesso punto sono triangoli direttamente simili.

Sia P′ l'isogonale o inverso [2] di P e siano $P'_1P'_2P'_3$ e L′M′N′ il suo triangolo podario ed il suo triangolo delle corde rispettivamente. Il quadrilatero $P'P'_1BP'_3$ essendo inscrittibile, dà,

$$P'\widehat{P'_1}P'_3 = P'\widehat{B}P'_3 = M\widehat{B}A = M'\widehat{L'}A,$$

ed essendo inscrittibile anche il quadrilatero AL′N′C, è

$$P'\widehat{P'_1}P'_2 = P'\widehat{C}P'_2 = N'\widehat{L'}A,$$

e dunque ne concludiamo che

$$\widehat{P'_1} = P'\widehat{P'_1}P'_2 - P'\widehat{P'_1}P'_3 = \widehat{L'} = \widehat{L}.$$

In modo analogo deduciamo che è $\widehat{M'} = \widehat{M}$, $\widehat{N'} = \widehat{N}$, e che dunque anche i due triangoli $P'_1P'_2P'_3$ e L′M′N′ sono direttamente simili, e che perciò L′M′N′ ed LMN sono simili inversamente. Così i triangoli podari di due punti inversi sono simili inversamente.

Si noti che se p_1, p_2, p_3 sono i lati di $P_1P_2P_3$,

$$p_1 = x \operatorname{sen} A, \qquad p_2 = y \operatorname{sen} B, \qquad p_3 = z \operatorname{sen} C,$$

e che essendo $\widehat{P_1} = \widehat{L}$, $\widehat{P_2} = \widehat{M}$, $\widehat{P_3} = \widehat{N}$, come sopra si è mostrato, è

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} L : \operatorname{sen} M : \operatorname{sen} N &= p_1 : p_2 . p_3 \\ &= MN : NL : LM \\ &= ax : by : cz. \end{aligned}$$

Per conseguenza, se poniamo $AP' = x'$, $BP' = y$, $CP' = z$, è pure,

$$\operatorname{sen} L : \operatorname{sen} M : \operatorname{sen} N = ax' : by' : cz'.$$

---

[1] Si faccia la figura.

[2] *Inversi* perchè se (a, b, c) sono le coordinate di P, quelle di P′ sono $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$.

Così, i lati del triangolo podario d'un punto, e quindi anche quelli del suo triangolo delle corde, sono proporzionali ai rettangoli dei lati corrispondenti in ABC e delle distanze dai vertici del punto considerato.

Se Δ_1 è l'area di $P_1P_2P_3$, è

$$2\Delta_1\, p_2p_3 \text{ sen } L = yz \text{ sen } L \text{ sen } B \text{ sen } C,$$

e se Δ è l'area di ABC, poichè

$$2\Delta = 4R^2 \text{ sen } A \text{ sen } B \text{ sen } C,$$

relazione ben nota, ove R è il raggio di (O), è

$$\Delta_1 : \Delta = yz : 4R^2 = \text{sen } L : \text{sen } A.$$

Ora siccome è

$$z = PM \, . \, \frac{\text{sen } A}{\text{sen } L},$$

ed è

$$\Delta_1 : \Delta = \pi : 4R^2,$$

con π indicando la potenza di P rispetto ad (O), così

$$\Delta_1 = \Delta \, . \, \frac{\pi}{4R^2}.$$

Possiamo ottenere un'altra espressione di questa stessa area in funzione della distanza d di P da O. Conduciamo il segmento BL e notiamo che

$$\widehat{P}_2 = B\widehat{P}A - \widehat{C} = B\widehat{P}A - A\widehat{L}B = P\widehat{B}L;$$

perciò è

$$2\Delta_1 = p_2p_1 \text{ sen } P_3 = p_2p_1 \text{ sen } PBL,$$

e sostituendo i valori di p_2 e p_1 già noti, e facendo y sen PBL=PL sen L, abbiamo,

$$\begin{aligned} 2\Delta_1 &= xy \text{ sen } A \text{ sen } B \text{ sen } PBL \\ &= x \, . \, PL \text{ sen } A \text{ sen } B \text{ sen } C \end{aligned}$$

e dunque

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}(R^2 - d^2) \text{ sen } A \text{ sen } B \text{ sen } C.$$

Da questa formuletta deduciamo una conseguenza già evidente per sè stessa: facciamo $R = d$, ed allora P è sulla circonferenza (O), l'area del triangolo podario è nulla ed i suoi tre vertici sono punti di una stessa retta. Ritroviamo così la ben nota proposizione:

" se da un punto della circonferenza circoscritta al triangolo si conducono le perpendicolari ai tre lati, i piedi di essi sono punti di una stessa retta. È la *retta di Simson*, o *di Wallace*, come meglio si vuole rispetto ad ABC ".

Questo caso nel quale P_1, P_2, P_3 sono punti della stessa retta è evidentemente il caso limite di un triangolo inscritto in ABC: è allora $\widehat{P} = 0$, $\widehat{P_3} = 0$, $C\widehat{P}A = \widehat{P_2} - \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{B}$, cioè $\widehat{P_2} = 180^\circ$. Da ciò possiamo anche dedurre il noto *teorema di Tolomeo*: infatti, poichè

$$P_2P_3 : P_3P_1 : P_1P_2 = a \,.\, PA : b \,.\, PB : c \,.\, PC,$$

e poichè, se i tre punti sono sulla stessa retta, è

$$P_1P_2 + P_2P_3 = P_1P_3,$$

è

$$a \,.\, PA + c \,.\, PC = b \,.\, PB.$$

Come caso particolare il punto P considerato appartenga alla *retta di Lemoine* di ABC: le sue coordinate normali essendo

$$a\,(m - n), \qquad b\,(n - l), \qquad c\,(l - m),$$

quelle del suo inverso P′ sono

$$a\alpha\,(m - n) = b\beta\,(n - l) = c\gamma\,(l - m).$$

Le direzioni AP′, BP′, CP′ sono rispettivamente perpendicolari ai lati P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 del triangolo podario di P, e perciò sono anche perpendicolari ai lati B′C′, C′A′, A′B′ del triangolo complementare, o dei punti medi, di ABC. Il luogo geometrico di P′ è dunque l'iperbole rettangola di ABCP la cui equazione è

$$\begin{vmatrix} \alpha^{-1} & \beta^{-1} & \gamma^{-1} \\ \cos A & \cos B & \cos C \\ a(m - n) & b(n - l) & c(l - m) \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$\beta\gamma\,(la - mc \cos B - nb \cos C) + \ldots = 0.$$

Osservazione. — Se è Δ'_1 l'area del triangolo podario di P′ è, come per P,

$$\Delta'_1 = \Delta \,.\, \frac{\pi'}{4R^2},$$

indicando con π' la potenza di P′ rispetto ad (O), e da questa e dalla sua corrispondente deduciamo la relazione nota

$$\Delta_1 : \Delta'_1 = \pi : \pi',$$

e cioè che le aree dei triangoli podari di due punti inversi rispetto ad uno stesso triangolo sono fra loro come le loro potenze rispetto alla stessa circonferenza circoscritta.

3. È interessante determinare la potenza di P rispetto ad (O) in funzione delle sue coordinate baricentriche (α, β, γ). Poichè tali coordinate sono grandezze proporzionali alle aree dei triangoli determinati da P e dai vertici di ABC, e cioè ad ah_1, bh_2, ch_3, se con h_1, h_2, h_3 indichiamo le altezze di tali triangoli, abbiamo,

$$\frac{ah_1}{\alpha}=\frac{bh_2}{\beta}=\frac{ch_3}{\gamma}=\frac{2\Delta}{\alpha+\beta+\gamma},$$

per cui

$$\Delta_1=\frac{1}{2}\,(h_2h_3 \operatorname{sen} A+h_1h_3 \operatorname{sen} B+h_1h_2 \operatorname{sen} C)$$
$$=\frac{4\Delta^2}{2(\alpha+\beta+\gamma)^2}\cdot\frac{a\,.\,\beta\gamma}{2R\,.\,bc}+\ldots$$
$$=\frac{\Delta^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}\cdot\frac{a^2\beta\gamma+b^2\gamma\alpha+c^2\alpha\beta}{R\,.\,abc};$$

e dunque, essendo

$$\pi=\frac{4R\,.\,\Delta_1}{\Delta},$$

è

$$\pi=\frac{a^2\beta\gamma+b^2\gamma\alpha+c^2\alpha\beta}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}.$$

Col sostituire in questa formuletta le rispettive coordinate, possiamo esprimere le potenze dei varî punti notevoli del piano di ABC rispetto alla circonferenza (O).

Se P coincide con I, centro della circonferenza inscritta in ABC è $\alpha=a$, $\beta=b$, $\gamma=c$, per cui, se r è il raggio di (I),

$$\pi=\frac{abc}{a+b+c}=2R\,.\,r.$$

Se P coincide con H, ortocentro di ABC, è $\alpha=\operatorname{tg} A,\ldots$, per cui,

$$\pi=\frac{a^2 \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C+b^2 \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A+c^2 \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}{(\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C)^2}=$$
$$=8R^2\,.\cos A\cos B\cos C.$$

Se P coincide col punto simediano K, è $\alpha=a^2$, $\beta=b^2$, $\gamma=c^2$, per cui

$$\pi=\frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

Calcoliamo l'area Δ' del triangolo podario di questo punto K: notiamo intanto che esso è il baricentro del proprio triangolo podario, per cui P_3PS è una mediana. Facciamo $PS=ST$: abbiamo il parallelogrammo PP_1TP_2 ed i due triangoli PP_1T, P_1TP_2 che sono simili giacchè hanno i lati mutualmente perpendicolari, per cui, se poniamo u_1, u_2, u_3 per PP_1, PP_2, PP_3, è $PT=PP_3=u_3$, $P_1T=PP_2=u_2$, per cui,

$$\frac{PP_1T}{\Delta}=\frac{u_1^2+u_2^2+u_3^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Ma è

$$PP_1T = PP_1P_2 = \frac{1}{3} P_1P_2P_3,$$

per cui

$$\Delta' = 3\Delta \frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Ma essendo le distanze di K dai lati a, b, c nel rapporto stesso di questi lati, è

$$\frac{u_1}{a} = \frac{u_2}{b} = \frac{u_3}{c} = \frac{au_1}{a^2} = \frac{bu_2}{b^2} = \frac{cu_3}{c^2},$$

per cui,

$$\frac{u_1}{a} = \frac{au_1 + bu_2 + cu_3}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2\Delta}{a^2 + b^2 + c^2},$$

e valori analoghi per $\frac{u_2}{b}, \frac{u_3}{c}$. Dunque è

$$u_1 = \frac{2a\Delta}{a^2 + b^2 + c^2}, \qquad u_2 = \frac{2b\Delta}{a^2 + b^2 + c^2}, \qquad u^3 = \frac{2c\Delta}{a^2 + b^2 + c^2},$$

valori che sostituiti nell'espressione di Δ' dànno,

$$\Delta' = \frac{12\Delta^3}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

4. Se P coincide col baricentro G di ABC, è $\alpha = \beta = \gamma$, per cui,

$$\pi = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{4}{9}\Delta . \cot \omega,$$

con ω indicando l'angolo di Brocard di ABC.

Quando P va a coincidere col primo punto di Brocard Ω e ne indichiamo con $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ il triangolo podario rispetto ad ABC, notiamo che è

$$\widehat{A} + \widehat{\Omega}_1 = B\widehat{\Omega}C = 180^0 - \widehat{C} = \widehat{A} + \widehat{B},$$

per cui è $\widehat{\Omega}_1 = \widehat{B}$, come, per la stessa ragione è, $\widehat{\Omega}_2 = \widehat{C}$, $\widehat{\Omega}_3 = \widehat{A}$. I due triangoli ABC e $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ sono perciò simili.

Analogamente, se Ω' è il secondo punto di Brocard di ABC, è $\widehat{\Omega'}_1 = \widehat{C}$, $\widehat{\Omega'}_2 = \widehat{A}$, $\Omega'_3 = \widehat{B}$.

Per determinare il raggio ρ della circonferenza podaria di Ω basta notare che è

$$\Omega_2\Omega_3 = x \,\text{sen}\, A = 2R . \text{sen}\, \omega . \frac{b}{a} \text{sen}\, A,$$

per cui è

$$\rho = R \,\text{sen}\, \omega,$$

relazione che mostra come il rapporto lineare dei due triangoli $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ e ABC è quello di sen $\omega : 1$, ossia che $\Delta_1 : \Delta = \text{sen}^2\omega$.

Da queste relazioni possiamo anche dedurre l'espressione della potenza di Ω rispetto ad (O): poichè

$$\pi = \Delta_1 . \frac{4R^2}{\Delta},$$

è pure,

$$R^2 - \overline{O\Omega}^2 = \pi = 4R^2 \operatorname{sen}^2\omega.$$

Di qui ricaviamo pure il valore della distanza di Ω dal centro O della circonferenza circoscritta

$$O\Omega = R\sqrt{1 - 4\operatorname{sen}^2\omega}.$$

Osservazione. — Siano A_1, B_1, C_1 i punti nei quali le rette dei segmenti $A\Omega$, $B\Omega$, $C\Omega$ incontrano i lati a, b, c rispettivamente. E, giacchè Ω è interno al triangolo,

$$\frac{\Omega A_1}{AA_1} + \frac{\Omega B_1}{BB_1} + \frac{\Omega C_1}{CC_1} = 1.$$

Perciò è pure,

$$\frac{AA_1}{AA_1} + \frac{BB_1}{BB_1} + \frac{CC_1}{CC_1} = 3,$$

e da questa sottraendo l'eguaglianza precedente

$$\frac{A\Omega}{AA_1} + \frac{B\Omega}{BB_1} + \frac{C\Omega}{CC_1} = 2,$$

relazioni facili da dimostrare. Esse sussistono pure per Ω', come per ogni altro punto del piano ABC, interno ad esso.

5. Possiamo anche osservare che $A\widehat{\Omega}B = 180^0 - \widehat{B} = \widehat{C} + \widehat{\Omega}_1$ e dunque $\widehat{\Omega}_1 = \widehat{A}$ e che analogamente è $\widehat{\Omega}_2 = \widehat{B}$, $\widehat{\Omega}_3 = \widehat{C}$, essendo $\widehat{\Omega}_1, \ldots$ gli angoli del triangolo podario di Ω rispetto ad ABC. Ora, giacchè il quadrilatero $A\Omega_3\Omega_1\Omega$ è inscrittibile, è $\Omega\widehat{A}B = \Omega\widehat{\Omega_3}\Omega_1 = \omega$, per cui Ω è il primo punto di Brocard del proprio triangolo podario. Analogamente Ω' è secondo punto di Brocard del proprio triangolo podario.

Osservando inoltre che è

$$C\widehat{\Omega_1}\Omega_2 = A\widehat{\Omega_3}\Omega_1 = B\Omega_1\Omega_2 = 90^0 - \omega,$$

e che

$$B\widehat{\Omega'_3}\Omega'_2 = A\widehat{\Omega'_2}\Omega'_1 = C\widehat{\Omega'_1}\Omega'_3 = 90^0 - \omega,$$

ne segue che i lati dei due triangoli podari dei due punti di Brocard d'un triangolo sono isoclini sui lati di questo.

Essendo poi

$$A\widehat{\Omega_3}\Omega_1 = A\widehat{\Omega'_2}\Omega'_1,$$

per cui $\Omega_1\Omega'_1\Omega'_2\Omega_3$ è un quadrilatero inscrittibile, come analogamente lo sono i quadrilateri $\Omega_2\Omega'_2\Omega'_3\Omega_1$ e $\Omega_3\Omega'_3\Omega'_1\Omega_2$, ne segue che i sei punti Ω_i

sono punti della stessa circonferenza. Dunque i due punti di Brocard hanno comune la circonferenza podaria.

Essendo i triangoli podari dei punti di Brocard simili ed inscritti nella stessa circonferenza, sono eguali e quindi hanno eguali le aree. Infatti i triangoli $\Omega\Omega_2\Omega_3$ e ABC sono simili (n. 1) per cui,

$$\Omega\Omega_1\Omega_3 : \Omega BC = \overline{\Omega\Omega_1}^2 : \overline{\Omega B}^2 = \operatorname{sen}^2\omega,$$

$$\Omega\Omega_2\Omega_3 : \Omega CA = \Omega\Omega_3\Omega_1 : \Omega AB = \operatorname{sen}^2\omega,$$

per cui,

$$\Omega_1\Omega_2\Omega_3 = \Omega'_1\Omega'_2\Omega'_3 = ABC \,.\, \operatorname{sen}^2\omega.$$

Da quanto precede siamo condotti ai seguenti corollari:

1°. *Se i due punti* P *e* P' *sono inversi e sono punti di uno stesso diametro di* (O) *(quali i due punti* Ω, Ω' *di Brocard), hanno comune la circonferenza podaria che è tangente alla circonferenza di Eulero di* ABC.

2°. *Le circonferenze podarie di tutti i punti della retta* OP *passano per uno stesso punto.*

3°. *Le circonferenze di Eulero dei triangoli determinati da* P *coi tre vertici di* ABC *e le circonferenze podarie di* P *rispetto ad* ABC, *di* A *rispetto a* PBC, *ecc., s'intersecano in uno stesso punto.*

4°. *Le circonferenze podarie di tutti i punti della retta del segmento* OI *hanno in comune il punto di Feuerbach* [1] $\left(\frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{a-b}\right)$ *di* ABC.

5°. *Le circonferenze podarie di tutti i punti della retta determinata da* O *e dal punto di Lemoine* K *hanno in comune il punto di Steiner* $\left(\frac{1}{a(b^2-c^2)}, \frac{1}{b(c^2-a^2)}, \frac{1}{c(a^2-b^2)}\right)$.

6°. *Le circonferenze podarie di tutti i punti della retta del segmento* HO *passano pel punto di Eulero* [2] $\left(\frac{a}{b^2-c^2}, \frac{b}{c^2-a^2}, \frac{c}{a^2-b^2}\right)$.

6. Chiameremo $Q_1Q_2Q_3$ il triangolo antipodario di P rispetto al triangolo di ABC. Sui segmenti PQ_1, PQ_2, PQ_3 quali diametri descriviamo le circonferenze (O_1), (O_2), (O_3), ognuna delle quali passerà per due dei vertici di ABC.

Le direzioni AP, BP, CP incontrino ancora queste circonferenze in A_1, B_1, C_1 rispettivamente. Fatta la figura deduciamo le seguenti relazioni d'angoli,

$$B\widehat{A_1}C = B\widehat{Q_1}C, \quad A_1\widehat{B}C = \widehat{A_1P}C = A\widehat{Q_2}C, \quad A_1\widehat{C}B = A\widehat{P}B = A\widehat{Q_3}B$$

---

(1) *Punto di Feuerbach* del triangolo è il punto di tangenza della circonferenza inscritta e della corrispondente circonferenza dei punti medi (pedale del baricentro).

(2) *Punto di Eulero* è invece il punto di un'altezza del triangolo che è equidistante dall'ortocentro e dal vertice corrispondente. In ogni triangolo si hanno quindi tre punti di Eulero.

ed anche,

$$B_1\widehat{A}C = B\widehat{Q_1}C, \quad C\widehat{B_1}A = A\widehat{Q_2}C, \quad A\widehat{C}B_1 = A\widehat{Q_3}B,$$

$$C_1\widehat{A}B = B\widehat{Q_1}C, \quad C_1BA = A\widehat{Q_2}C, \quad A\widehat{C_1}B = A\widehat{Q_3}B,$$

per cui è

$$B_1\widehat{A}C = C_1\widehat{A}B, \quad C\widehat{B}A = C_1\widehat{B}A, \quad A\widehat{C}B_1 = A\widehat{C_1}B.$$

Poichè PQ_1 è diametro di (O_1), è $P\widehat{B}Q_1 = 90^0$ e perciò il segmento APA_1 che è perpendicolare tanto a A_1Q_1 che a Q_2AQ_3, è di lunghezza eguale a quella della perpendicolare condotta da Q_1 su Q_2Q_3. Lo stesso può dirsi per gli altri segmenti analoghi. Ora pel teorema di Tolomeo,

$$PA_1 \, . \, BC = PB \, . \, CA_1 + PC \, . \, BA_1 \, ;$$

ma è

$$BC : CA_1 : BA_1 = \operatorname{sen} \varphi_1 : \operatorname{sen} \varphi_2 : \operatorname{sen} \varphi_3,$$

per cui è pure

$$PA_1 \operatorname{sen} \varphi_1 = PB \operatorname{sen} \varphi_2 + PC \operatorname{sen} \varphi_3,$$

od anche,

$$AA_1 \operatorname{sen} \varphi_1 = AP \operatorname{sen} \varphi_1 + BP \operatorname{sen} \varphi_2 + CP \operatorname{sen} \varphi_3.$$

Se con Δ_2 indichiamo l'area del triangolo $\varphi_1\varphi_2\varphi_3$ antipodario di P e se A′, B′, C′ sono i punti medi dei lati ABC, è

$$O_1A' = \frac{a}{2} \cot \varphi_1 \, ,$$

ed intendendo *triangolo* colla notazione t,

$$t \, . \, O_1BC = \frac{a^2}{4} \cot \varphi_1 \, .$$

Ma O_1 è il punto medio del segmento $P\varphi_1$: quindi,

$$t \, . \, Q_1O_1B_1 = t \, . \, PO_1B, \quad t \, . \, Q_1O_1C = t \, . \, PO_1C$$

e per somma abbiamo il quadrilatero

$$\begin{aligned} Q_1BPC &= 2 \, . \, (t \, . \, O_1BC + t \, . \, PBC) \\ &= 2 \, . \left(\frac{a^2}{4} \cot \varphi_1 + t \, . \, PBC \right) . \end{aligned}$$

Espressioni analoghe si ottengono pei due altri quadrilateri, e poichè la somma delle loro aree è l'area Δ_2 di $\varphi_1\varphi_2\varphi_3$, così

$$\Delta_2 = \frac{1}{2} \left(a^2 \cot \varphi_1 + b^2 \cot \varphi_2 + c^2 \cot \varphi_3 + 4\Delta \right) .$$

Se ρ_2 è il raggio della circonferenza antipodaria di P rispetto ad ABC è, come di solito,

$$4\rho^2_2 \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 \operatorname{sen} \varphi_3 = 2\Delta_2,$$

per cui,

$$\rho_3 = \sqrt{\frac{\Delta_2}{2 \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 \operatorname{sen} \varphi_3}}.$$

OSSERVAZIONE. — Poichè

$$\Delta_1 = \frac{2\Delta^2}{2\Delta_2}, \qquad \text{è pure,} \qquad \Delta_1 \Delta_2 = \Delta^2,$$

e l'area d'ogni triangolo ABC è medio geometrico fra le aree dei triangoli podario e antipodario di ogni punto del suo piano.

7. Se il punto P è interno ad ABC, è il punto pel quale si verifica la relazione

$$x \operatorname{sen} \varphi_1 + y \operatorname{sen} \varphi_2 + z \operatorname{sen} \varphi_3 = \textit{minimo}.$$

Ed infatti, se ammettiamo che un altro punto P′ soddisfi pur esso alla stessa relazione e conduciamo $P'Q'_1$, $P'Q'_2$, $P'Q'_3$ rispettivamente perpendicolari ai lati q_1, q_2, q_3 di $Q_1Q_2Q_3$, abbiamo,

$$\begin{aligned} xq_1 + yq_2 + zq_3 &= t \,.\, Q_1Q_2Q_3 \,.\, 2\Delta \\ &= P'Q'_1 \,.\, q_1 + P'Q'_2 \,.\, q_2 + P'Q'_3 \,.\, q_3 \\ &< AP' \,.\, q_1 + BP' \,.\, q_2 + CP \,.\, q_3, \end{aligned}$$

e dunque,

$$x \operatorname{sen} \varphi_1 + y \operatorname{sen} \varphi_2 + z \operatorname{sen} \varphi_3 < AP' \operatorname{sen} \varphi_1 + BP' \operatorname{sen} \varphi_2 + CP' \operatorname{sen} \varphi_3.$$

Il punto del piano ABC che soddisfa a questa condizione di minimo è un *centro isogonico* del triangolo. Esso è, come è noto, il punto comune alle *circonferenze di Torricelli* di ABC, cioè alle circonferenze circoscritte ai triangoli equilateri costruiti sui lati di ABC, tutti esterni (1° *centro isogonico*) o tutti interni (2° *centro isogonico*) (1) ed è

$$A\widehat{P}B = B\widehat{P}C = C\widehat{P}A = 120^\circ.$$

---

(1) Il punto P è il punto del piano del triangolo ABC che soddisfa al ben noto problema proposto da FERMAT a TORRICELLI: " *Trovare nel piano di ABC il punto P pel quale la somma* PA + PB + PC *è un minimo* ". — TORRICELLI a sua volta proponeva lo stesso problema al VIVIANI sotto quest'altra forma: " *Nessuno degli angoli d'un triangolo essendo maggiore di* 120°, *determinare il punto del suo piano pel quale la somma delle distanze dai vertici è un minimo* ". — Può consultarsi una delle risoluzioni date da VIVIANI nell'*Appendice* ai suoi *De maximis et minimis* (1659, pagg. 144, 150): in essa è dimostrato che se sui lati di ABC si costruiscono esternamente i tre triangoli equilateri, i segmenti che uniscono i vertici esterni ai vertici rispettivamente opposti del triangolo dato s'intersecano nel punto cercato.

Una semplice costruzione è pur quella data da TH. SIMPSON (*Doctrine and Application of Fluxions*, § 36, 1750): " su BC descrivasi l'arco di circonferenza capace dell'angolo di 120° e si completi la circonferenza $BC\varphi$; conducasi $A\varphi$ (essendo φ il punto medio dell'arco $B\varphi C$) a segare la circonferenza in P: questo è il punto richiesto ". — Più lungi, al § 431, egli tratta pure il problema più generale: " Dati tre punti A, B, C, determinare la posizione di un quarto punto P dello stesso piano, tale che se lo si unisce ai tre punti, la somma $a \,.\, PA + b \,.\, PB + c \,.\, PC$, ove a, b, c son numeri dati, sia un minimo ". — La stessa questione fu pure trattata da N. FUSS (*Nova Acta Acad. Petropolitanae*, XI, 325-328, 1798) nella memoria *De minimis quibusdam geometricis, ope principii statici inventis*. In tale occasione egli, ponendo $PA + PB + PC = p$, dà la relazione,

$$AP = \frac{1}{3} p + \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{3p}$$

Poichè i triangoli BCA_1, CAB_1, BAC_1 sono equilateri,

$$\overline{AA_1}^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos(B + 60^\circ),$$
$$= 2\Delta(\cot\omega + \sqrt{3}),$$

essendo sempre ω l'angolo di Brocard di ABC. Dunque, poichè è

$$x + y + z = AA_1 = minimo,$$

è

$$AA_1 = x + y + z = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\Delta.\sqrt{3}.$$

Si dimostra facilmente osservando la figura:

1° che è $AQ_1 = BQ_2 = CQ_3$;

2° che le circonferenze circoscritte ai triangoli equilateri esterni passano per lo stesso punto P, come quelle circoscritte ai tre triangoli equilateri interni passano per P';

3° che i lati esterni Q_2A, Q_3A sono sulla stessa retta e tali pure sono Q_3B e Q_1B, Q_1C e Q_2C. Lo stesso avviene pei triangoli descritti interni ad ABC;

4° che ogni lato del triangolo ABC è visto da P sotto un angolo stesso;

5° che il teorema sussiste anche quando i triangoli costruiti sui lati di ABC sono simili ad un altro triangolo dato, per modo che ognuno degli angoli adiacenti al vertice A sia eguale all'angolo C; che ciascuno degli angoli adiacenti a B sia eguale ad A e che ciascuno di quelli adiacenti a C sia eguale a B;

6° che si può sempre costruire il triangolo ABC, quando i vertici Q_1, Q_2, Q_3 dei tre triangoli equilateri sian noti: basta infatti de-

---

e le due altre analoghe, e le altre,

$$BP.CP + CP.AP + AP.BP = \frac{4\Delta}{\sqrt{3}},$$

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = \frac{2\Delta}{\sqrt{3}},$$

$$AP + BP + CP = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\Delta.\sqrt{3}}.$$

Lo stesso problema fu pure trattato da LHUILIER nei suoi *Éléments d'analyse géométrique*, pag. 252-255 (1809) e si ritrova pure accennato da NEWTON nel 26° lemma del 1° libro della sua *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (2ª ed., 1813), nel quale egli dice: "*Trianguli specie et magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem positione datas, quae non sunt omnes parallelae, singulos et singulae ponere*".

Su questo importante problema può pure consultarsi AZZARELLI: *Atti d. Nuovi Lincei*, 1886, LHUILIER, TEDENAT, STURM e GERGONNE: *Annales de Mathématiques*, t. I, pag. 285, 297, 375; t. XIV, pag. 13; t. XX, pag. 300. — CATALAN: *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, pag. 228. — DESBOVES: *Questions de Géométrie*. — STEINER: *Oeuvres complètes*, t. II, pag. 16, 95, 729. — BERTRAND: *Journal de Mathématiques* (de Liouville), t. VIII, pag. 158.

Si ha una nuova serie d'importanti proposizioni quando i triangoli costruiti sui lati di ABC sono simili ad un dato triangolo. I due punti P e P' sono allora rispettivamente *il primo ed il secondo metapolo del triangolo dato*.

scrivere sui lati di $Q_1Q_2Q_3$ i triangoli equilateri $Q_1Q_2Q'_3$, $Q_1Q_3Q'_2$, $Q_2Q_3Q'_1$, ed i punti medi dei segmenti $Q_1Q'_1$, $Q_2Q'_2$, $Q_3Q'_3$ sono i vertici A, B, C del triangolo domandato.

8. Essendo ancora ABQ_3, ACQ_2, BCQ_1 i triangoli descritti esternamente sui lati di ABC, ABQ'_3, ACQ'_2, BCQ'_1 quelli descritti internamente, i punti comuni ai lati delle due terne di triangoli sono punti della circonferenza (O) circoscritta ad ABC.

Ed infatti, se AQ_2 incontra AQ_1 in T, è, per quanto già si è detto, $\widehat{CAT} = \widehat{CBT} = 60°$, per cui A, B, C, T sono punti della stessa circonferenza.

Conduciamo $Q_1Q'_1$: poichè questo segmento è perpendicolare a BC nel suo punto medio A', è

$$\begin{aligned}\overline{AQ_1}^2 + \overline{AQ'_1}^2 &= 2\,.\,\overline{AA'}^2 + 2\,.\,\overline{A'Q_1}^2 = 2\,.\,\overline{AA'}^2 + 6\,.\,\overline{A'B}^2\\ &= 2\,.\,\overline{AA'}^2 + 2\,.\,\overline{A'B}^2 + 4\,.\,\overline{A'B}^2\\ &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2.\end{aligned}$$

Valori analoghi si hanno per $\overline{BQ_2}^2 + \overline{BQ'_2}^2$ e $\overline{CQ_3}^2 + \overline{CQ'_3}^2$; dunque,

$$\begin{aligned}\overline{AQ_1}^2 + \overline{AQ'_1}^2 = \overline{BQ_2}^2 + \overline{BQ'_2}^2 &= \overline{CQ_3}^2 + \overline{CQ'_3}^2\\ &= \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2.\end{aligned}$$

Osservazione. — Se G è il baricentro di ABC, è

$$\overline{GO}^2 + \overline{GP}^2 + \overline{GP'}^2 = R^2.$$

Dal vertice A conduciamo AS perpendicolare su $Q_1Q'_1$: è allora,

$$\begin{aligned}\overline{AQ_1}^2 - \overline{AQ'_1}^2 = \overline{Q_1S}^2 - \overline{Q'_1S}^2 &= (Q_1S + Q'_1S)(Q_1S - Q'_1S)\\ &= 2\,.\,A'Q\,.\,2\,.\,A'S = 2\sqrt{3}.A'B\,.\,2\,.\,A'S\\ &= 4\Delta\sqrt{3} = \frac{abc}{R}\cdot\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Lo stesso valore si ottiene per le differenze $\overline{BQ_2}^2 - \overline{BQ'_2}^2$ e $\overline{CQ_3}^2 - \overline{CQ'_3}^2$: dunque,

$$\overline{AQ_1}^2 - \overline{AQ'_1}^2 = \overline{BQ_2}^2 - \overline{BQ'_2}^2 = \overline{CQ_3}^2 - \overline{CQ'_3}^2 = 4\Delta\,.\sqrt{3}.$$

Dalle precedenti eguaglianze deduciamo anche,

$$\overline{AQ_1}^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2 + \frac{abc}{R}\sqrt{3}\right),$$

$$AQ'_1 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2 - \frac{abc}{R}\sqrt{3}\right),$$

dalle quali,

$$\overline{AQ_1}^2 \cdot \overline{AQ'_1}^2 = \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\cdot\frac{a^2b^2c^2}{R^2}$$

$$= \frac{1}{4}(a^4+b^4+c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2c^2)$$

$$-\frac{3}{4}(-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2)$$

$$= a^4+b^4+c^4-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2,$$

e dunque,

$$\overline{AQ_1}^2 \cdot \overline{AQ'_1}^2 = (a^2-b^2)(a^2-c^2)+(b^2-c^2)^2.$$

Analoghi valori, si hanno per $\overline{BQ_2}^2 \cdot \overline{BQ'_2}^2$ e per $\overline{CQ_3}^2 \cdot \overline{CQ'_3}^2$.
La figura dà inoltre

$$AP = AB\frac{\operatorname{sen} AB\varphi_1}{\operatorname{sen} 120^\circ} = \frac{2c}{\sqrt{3}}\cdot\frac{b}{B\varphi_2}\operatorname{sen}(A+60^\circ)$$

$$AP' = AB\frac{\operatorname{sen} AB\varphi'_1}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{2c}{\sqrt{3}}\cdot\frac{b}{B\varphi_2}\operatorname{sen}(A-60^\circ);$$

ma è $AQ_1 = BQ_2$, $AQ'_1 = BQ'_2$, dunque, dopo riduzioni,

$$AQ_1 \cdot AP = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} + \frac{abc}{2R\cdot\sqrt{3}},$$

$$AQ'_1 \cdot AP' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} + \frac{abc}{2R\cdot\sqrt{3}}.$$

Chiamiamo O_1, O_2, O_3 i centri delle circonferenze circoscritte ai triangoli BCQ_1, CAQ_2, ABQ_3 e O'_1, O'_2, O'_3 quelli delle circonferenze circoscritte ai triangoli BCQ'_1, CAQ'_2, ABQ'_3: allora i segmenti Q_1, Q_3, Q_3 sono i diametri della circonferenza della prima terna e Q_1O_1, Q_2O_2, Q_3O_3 quelli della seconda. Per accertarci di ciò basta notare che è $\widehat{BO'_1C} = 120^\circ$, per cui O'_1 è sulla circonferenza circoscritta a BCQ_1 e $Q_1O'_1$ è perpendicolare a BC nel suo punto medio.

Le direzioni PA, PB, PC formano angoli di 120° fra loro: ora, poichè O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 sono rispettivamente perpendicolari ad esse, così formano fra loro angoli di 60°. Dunque il triangolo $O_1O_2O_3$ è equilatero, e pur tale è $O'_1O'_2O'_3$.

È poi,

$$O_2O_3 = \frac{CQ_3}{\sqrt{3}} - \frac{AQ_1}{\sqrt{3}} = \frac{3\cdot GP'}{\sqrt{3}} = GP'\cdot\sqrt{3},$$

$$O'_2O'_3 = \frac{CQ_3}{\sqrt{3}} = \frac{AQ'_1}{\sqrt{3}} = \frac{3\cdot GP}{\sqrt{3}} = GP\cdot\sqrt{3},$$

e quindi GP e GP′ sono i raggi delle circonferenze circoscritte ai triangoli $O'_1O'_2O'_3$ ed $O_1O_2O_3$ rispettivamente.

Da O_1, O_2, O_3 conduciamo le perpendicolari su BC: se d_1, d_2, d_3 sono le lunghezze di esse ed è h_1 l'altezza AH_1 di ABC corrispondente a BC, è

$$d_1 = -\frac{a}{\sqrt{3}}, \quad d_2 = \frac{h_1}{2} + \frac{b}{\sqrt{3}} \cos C, \quad d_3 = \frac{h_1}{2} + \frac{c}{\sqrt{3}} \cos B;$$

ma è

$$b \cos C + c \cos B = a,$$

quindi,

$$d_1 + d_2 + d_3 = \frac{h_1}{\sqrt{3}} (b \cos C + c \cos B - a) = h_1.$$

Dalla figura abbiamo pure,

$$\begin{aligned} 3 \,.\, \overline{GP}^2 &= (\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2) - (\overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2) \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{abc}{2R\sqrt{3}} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} - \frac{abc}{2R.\sqrt{3}} = \frac{\overline{Q'_1A}^2}{3}, \end{aligned}$$

ossia $GP = \frac{1}{3} AQ'_1$, ed analogamente, $GP' = \frac{1}{3} AQ_1$.

Mostreremo in ultimo che se il triangolo dato ha i lati in progressione aritmetica, anche le distanze di P dai tre vertici sono tali. E infatti,

$$\begin{aligned} a^2 &= y^2 + z^2 - 2yz \cos 120^\circ = y^2 + z^2 + yz, \\ b^2 &= z^2 + x^2 - 2zx \cos 120^\circ = z^2 + x^2 + zx, \\ c^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos 120^\circ = x^2 + y^2 + xy, \end{aligned}$$

ora, poichè $a^2 + c^2 = 2b^2$, è

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + yz = 2(z^2 + x^2 + zx),$$

ossia,

$$y^2 + \frac{1}{2}(x + z)\, y - \frac{1}{2}(z + x)^2 = 0,$$

equazione le cui radici sono

$$y' = \frac{1}{2}(z + x), \qquad y'' = -(z + x),$$

e trascurando la seconda,

$$y = \frac{1}{2}(z + x),$$

e x, y, z sono in progressione aritmetica.

La seconda radice deve esser trascurata giacchè contradice alla 1ª e alla 3ª delle equazioni del sistema su stabilito, e ciò a meno che il triangolo dato sia equilatero. Ed infatti tali due equazioni dànno

$$(z-x)(x+y+z)=a^2-c^2;$$

ma se è

$$y=-(z+x), \qquad \text{ossia} \qquad x+y+z=0,$$

è allora $a=c$, ossia $a=b=c$ e il triangolo è equilatero.

C. Alasia.

PICCOLE NOTE

Armonizzante di due forme-determinanti.

Sieno dati i due determinanti:

$$a_x^n = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n(n-1)+1} & x_{n(n-1)+2} & \dots & x_{n^2} \end{vmatrix} \qquad u_\alpha^n = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_{n+1} & u_{n+2} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n(n-1)+1} & u_{n(n-1)+2} & \dots & u_{n^2} \end{vmatrix}$$

che noi considereremo come forme dei loro n^2 elementi di ordine n. Ci proponiamo di trovare il valore numerico del loro armonizzante a_α^n.

Osserviamo anzitutto che i coefficienti delle due forme differenti da zero, sono in numero di $|\underline{n}$ e sono alternativamente eguali a $+1$ e -1 e simbolicamente sono rappresentati da prodotti a fattori differenti fra loro.

Se noi sviluppiamo a_α^n, lo sviluppo verrà a contenere tanti termini quante sono le combinazioni con ripetizione di n^2 elementi della classe n e ciascun termine si comporrà (a meno del coefficiente polinomiale) di due prodotti, uno di tutti fattori a, in numero di n, e quindi rappresenterà un coefficiente di a_x^n, l'altro di tutti fattori α in numero di n e rappresenterà un coefficiente simile al primo, ma di u_α^n; ne viene che per i valori particolari che hanno i coefficienti delle forme date e per il modo con cui l'armonizzante risulta formato, di termini differenti da zero nello sviluppo ne resteranno $|\underline{n}$ composti ciascuno di due fattori (a meno del coefficiente polinomiale) od entrambi eguali a $+1$ od entrambi eguali a -1 e quindi tali che il loro prodotto è sempre 1.

Vediamo ora i valori dei coefficienti polinomiali. Poichè i coefficienti delle forme date che sono differenti da zero sono rappresentati simbolicamente da prodotti di fattori tutti differenti fra loro, ne viene che questi coefficienti polinomiali sono tutti eguali fra loro e precisamente eguali a $|\underline{n}$, onde

$$a_\alpha^n = (|\underline{n})^2.$$

L. Tenca.

QUISTIONI PROPOSTE

799. Indicando con R ed r i raggi sferici del circolo circoscritto e del circolo inscritto a un triangolo sferico qualunque, e con d la distanza sferica dei loro centri sferici, dimostrare che

$$\operatorname{sen}(R+r+d)\operatorname{sen}(-R+r+d)\operatorname{sen}(R-r+d)\operatorname{sen}(R+r-d)=$$
$$=-\operatorname{sen}^4 r\cos^4 R-\operatorname{sen}^2 r\cos^2 R\operatorname{sen}2R\operatorname{sen}2r.$$

G. Pesci.

800. Essendo $x_1, x_2, \ldots x_n$ variabili positive, trovare il minimo della funzione

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{\sqrt{x_n\sqrt{x_{n-1}\ldots\sqrt{x_3\sqrt{x_2x_1}}}}}.$$

F. Nedelcu.

NECROLOGIO

Il 17 luglio moriva improvvisamente a Parigi per un colpo apoplettico

ENRICO POINCARÉ.

La sua perdita è un lutto per la Francia e per tutto il mondo civile, che vede spengersi uno degl'ingegni più poderosi che abbiano onorato da molti anni l'intelletto umano. Come da una sorgente di luce inesauribile dalla mente geniale e feconda di lui son sgorgate per lunghi anni senza tregua innumerevoli opere su tutti i rami della matematica e delle sue applicazioni alla meccanica e alla fisica, e sulla filosofia delle scienze.

Ernesto Lebon dedicò a Poincaré un volume della sua bella raccolta *Savants du jour*, pubblicato nel 1909, dando su di esso precise e dettagliate notizie biografiche e bibliografiche. Da esso si rileva che il numero degli scritti di Poincaré ascendeva a quell'epoca a *436*; e questa meravigliosa attività è continuata fino alla morte dell'illustre scienziato. I giornali *Scientia* e *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, (citiamo soltanto i Periodici Italiani) negli ultimi fascicoli pubblicati contengono due notevolissimi ed importanti articoli di lui. Nel primo, di carattere filosofico, col titolo " *La logique de l'infini* " l'A. discute colla forma brillante ed arguta che gli era solita, i varî modi di concepire l'uso dell'infinito in matematica secondo due scuole diverse che egli chiama dei *pragmatisti* e dei *cantoriani*.

Nel secondo intitolato " *Sur un théorème de géométrie* " dichiara che essendosi accorto che l'esistenza delle soluzioni periodiche del problema dei tre corpi (per il caso di masse grandi) dipende dall'esattezza o falsità di un certo teorema di geometria, il cui enunciato è semplicissimo, egli si è affaticato per due anni inutilmente attorno allo studio di questo teorema, riuscendo soltanto a verificare che è vera in tutti i numerosi casi particolari che ha esaminato.

" Non ho mai presentato al pubblico un lavoro così incompiuto ", egli scrive, ed aggiunge " sembra che in queste condizioni, io dovrei " astenermi da ogni pubblicazione finchè io non avessi risoluto la " questione; ma dopo gli inutili sforzi che io ho fatto durante il corso " di lunghi mesi, mi è parso che il più saggio fosse di lasciar ma- " turare il problema, riposandomi per qualche anno; ciò andrebbe " benissimo, se io fossi sicuro di poterlo riprendere un giorno; *ma* " *alla mia età non posso risponderne* ". Sembra che con spirito profetico sentisse non lontana la fine ed ha lasciato il lavoro incompiuto quasi in eredità ai cultori della matematica come fonte di future ricerche. Così, come osserva giustamente il Masson, egli è nato, è vissuto, è morto matematico; la funzione vitale del suo cervello è stata d'inventare e risolvere dei casi in matematica; tutta la sua vita è stata dedicata alla scienza ed è trascorsa tranquilla e senza scosse, senza partecipazione alla vita politica del suo paese. La sua storia, osserva lo stesso Masson, è la sua bibliografia.

Nato a Nancy il 29 aprile 1854, studiò nel Liceo della città nativa, mostrandosi superiore ai condiscepoli in tutte le materie d'insegnamento. Baccelliere in lettere e scienze nel 1871, licenziato in scienze nel 1876, dottore di matematiche a Parigi nel 1879, fu nominato ingegnere delle miniere nel 1879, ma passò subito dal Ministero dei lavori a quello dell'istruzione e incaricato dell'insegnamento di Analisi all'Università di Caen di dove passò nel 1881 all'Università di Parigi dove iniziò quei mirabili corsi su tutti i rami della matematica, che raccolti in volumi poderosi costituiscono insieme alle altre sue pubblicazioni un monumento perenne alla sua gloria.

Ecco i titoli dei principali corsi professati alla Sorbona, distinti per materia:

Analisi matematica:

Calcolo delle probabilità (1893-94).

Meccanica analitica e meccanica celeste:

1\. I. *Cinematica e Meccanismi* (1885-86).
II. *Potenziale e Meccanica dei fluidi* (1885-86).
2\. *Figure d'equilibrio d'una massa fluida* (1900).
3\. *I metodi nuovi della meccanica celeste.*
Tomo I. Soluzioni periodiche. Non esistenza di integrali uniformi. — Soluzioni asintotiche (1892).
Tomo II. Metodi di Newcomb, Gyldén, Lindstedt et Bohlin (1894).
„ III. Invarianti integrali. — Soluzioni periodiche di secondo grado. — Soluzioni doppiamente asintotiche (1899).
4\. *Lezioni di meccanica celeste.*
Tomo I. Teoria generale delle perturbazioni planetarie (1905).
„ II. Parte 1. Sviluppo della funzione perturbatrice (1907).
„ II. Teoria delle curve (1909).
5\. *Lezioni sulle ipotesi cosmogoniche* (1911-12).

Fisica matematica:

1\. *Capillarità* (1888-89).
2\. *Lezioni sulla teoria dell'elettricità* (1890-91).
3\. *Teoria del potenziale Newtoniano* (1894-95).
4\. *Teoria dei turbini* (1891-92).
5\. *Teoria analitica della propagazione del calore* (1893-94).
6\. *Termodinamica* (1888-89).
7\. *Teoria matematica della luce.*
Tomo I. (1887-88).
„ II. Nuovi studi sulla diffrazione. — Teoria della dispersione di Helmlotz (1891-92).
8\. *Le oscillazioni elettriche* (1892-93).
9\. *Elettricità ed ottica.*
Tomo I. Le teorie di Maxwell e la teoria elettromagnetica della luce (1888-89).
„ II. Le teorie di Helmoltz e le esperienze di Herz (1889-90).
10\. *Elettricità ed ottica.*
La luce e le teorie elettrodinamiche (1888-90-99).
11\. *La teoria di Maxwell e le oscillazioni Hertziane. La telegrafia senza fili* (1899).

Enrico Poincaré, è quasi superfluo il dirlo, apparteneva a tutte le più grandi Accademie scientifiche del mondo; ma, ciò che è più degno di nota, il 5 marzo 1908 fu eletto membro della Accademia Francese, succedendo al poeta Sully Prudhomme. Tale onore l'Accademia di Francia riserba soltanto a quelli fra i membri della sorella cadetta ed emula, l'Accademia delle scienze, che hanno saputo elevarsi nell'estimazione universale per meriti veramente eccezionali. Hanno avuto questo altissimo onore prima del Poincaré, *Fontenelle, Maupertuis, Buffon, D'Alembert, Condorcet, Bertrand, Pasteur, Laplace, Cuvier, Fourier, J. B. Dumas, Berthelot* e pochissimi altri.

Dal discorso pronunciato dal direttore dell'Accademia Francese FEDERICO MASSON, pronunciato nella seduta del 28 gennaio 1909 in occasione del ricevimento di E. Poincaré ci piace riportare le seguenti parole dirette al nuovo illustre membro:

" Ovunque voi andiate nel mondo, voi siete certo di trovare dei
" confratelli che si onorano tanto più di celebrare la vostra venuta
" in quanto che ricevono l'apparenza di aver capito i vostri lavori.
" In Francia voi siete *il maestro* per chiunque partecipa agli studi
" matematici; voi presentate nel nostro paese l'unico esempio di una
" superiorità unanimemente riconosciuta, e la vostra riputazione, fatta
" fin dagli inizi dai vostri camerati della scuola politecnica, soste-
" nuta dai vostri colleghi della Sorbona, diffusa dai vostri colleghi
" della Accademia delle scienze, proclamata plebiscitariamente dai
" sapienti di tutta l'Europa, si è stabilita come un assioma ".

Il *Periodico*, che si è onorato della collaborazione dell'illustre estinto, porge alla sua memoria un riverente tributo di ammirazione e di rimpianto.

K.

Con la morte di

CESARE ARZELÀ

la Scienza ha perduto un grande Cultore, la scuola ha perduto un grandissimo Maestro! Poichè Egli riteneva che per coprire degnamente il proprio ufficio il Professore universitario pari obblighi avesse rispetto alla Scienza ed alla Scuola, entrambi li accolse con pari entusiasmo e con pari fortuna.

Cesare Arzelà si compiaceva di avere appartenuto per parecchi anni all'insegnamento secondario: fu difatti ai Licei di Macerata e Savona e agli Istituti tecnici di Como e di Firenze; e conservava sempre vivo l'interessamento e l'amore alla Scuola media, tanto da desiderare, anche negli ultimi mesi di Sua vita, quando lentamente andava spegnendosi, di essere chiamato a far parte delle Commissioni esaminatrici dei concorsi, " per le quali " — Egli stesso diceva — " credo di avere come *vecchio troupier* qualche titolo di preferenza ".

Ed alla Scuola media, anche durante la Sua carriera universitaria, Egli ha data in molteplici modi la sapiente opera Sua: con il compilare prima (1882) e migliorare poi di continuo il *Trattato d'Algebra* ed i *Complementi*, che meritarono subito, e conservano tuttora, larga diffusione nei Licei e negli Istituti; col partecipare con attività e con scrupoloso senso di equità alle Commissioni per i concorsi; col disimpegnare con altrettanto zelo e spirito di sana giustizia le funzioni di Ispettore e di Commissario ad esami; e soprattutto con il creare nella Sua Scuola e con il Suo esempio degli ottimi insegnanti.

Più volte, esprimendogli i miei dubbi circa l'efficacia degli invocati corsi di Metodologia per la formazione di buoni insegnanti, Egli ebbe ad esprimermi il Suo convincimento che solo sull'esempio di buoni maestri può il giovane plasmare la propria personalità di futuro insegnante.

Ed il suo esempio era meravigliosamente efficace! Chi ha avuta la fortunata occasione di assisterlo nell'insegnamento, sa quanta fosse la Sua preoccupazione di esporre con semplicità, con chiarezza, con colorito la lezione; e, per quanto questa fosse pensata nei suoi minimi dettagli, appariva, il più delle volte, una improvvisazione; le frequenti riprese che di qualche definizione o dimostrazione difficile o di capitale importanza, nella stessa lezione o nelle successive, Egli andava facendo, non erano mai delle sole ripetizioni, ma erano continue dilucidazioni, approfondimenti di concetti, raffronti fecondi, graduali aggiunte di rigore, che si succedevano con squisita arte didattica. Così era conquisa l'attenzione del sempre numeroso uditorio, dalle menti del quale le difficoltà degli argomenti — che dal Maestro non erano celate, ma opportunamente fatte risaltare — venivano vinte col minimo sforzo, si sarebbe quasi indotti a dire, spontaneamente.

Nell'Università di Pisa conseguì la laurea e nell'annessa Scuola normale superiore l'abilitazione all'insegnamento della matematica; dopo due anni d'insegnamento medio, tornò a Pisa per seguire le lezioni che il Dini professava sulla teoria delle funzioni di variabile reale, teoria sulla quale si svolse quasi completamente di poi l'attività scientifica dell'Arzelà. Tornò all'insegnamento medio dal 1873 al 1878, fu poscia professore d'Algebra a Palermo e, dall'80 fino alla Sua morte, di Calcolo all'Ateneo bolognese, ove pure, dall'84 in poi, ebbe l'incarico dell'Analisi superiore.

Sperimentò per primo nella Scuola la fusione del Calcolo differenziale ed integrale e ne ottenne così buoni risultati che sempre la mantenne e tradusse nel suo bel libro di Calcolo, malauguratamente rimasto incompleto.

Diamo, in fondo, una nota delle pubblicazioni dell'Arzelà: rileviamo qui che uno dei risultati più importanti, al quale Egli ha legato, nella storia della Scienza, imperituramente il Suo nome, è la dimostrazione da Lui fatta che condizione necessaria e sufficiente acciò che una serie di funzioni continue abbia per somma una funzione continua, è che la serie sia dotata della *convergenza uniforme a tratti*, o, *convergenza quasi uniforme*, come si dice ora col Borel, il quale, nel suo libro sulle funzioni di variabile reale, ha lumeggiato l'importanza del teorema suddetto.

Interessantissimi sono i lavori sulle " Funzioni di linee ", le teorie svolte nei quali l'Arzelà applica alla dimostrazione dell'esistenza dell'integrale delle equazioni differenziali ordinarie, con un minimo di condizioni, al calcolo delle variazioni, al problema di Dirichlet-Riemann. L'importanza dei predetti lavori appartenenti al Calcolo funzionale è stata riconosciuta ed illustrata da valenti matematici francesi.

Ci piace di riportare qualche periodo con cui un illustre Suo Collega, il Pincherle, nella Commemorazione fatta dell'Arzelà alla Regia Accademia delle Scienze di Bologna, sintetizza l'opera scientifica di Lui: " La produzione scientifica di Cesare Arzelà rispecchia le qualità caratteristiche del Suo ingegno prevalentemente critico, della Sua mente dotata di squisito senso analitico e di singolare acume. Spesso l'ho sentito accennare alla sua predilezione per quegli studi che richiedono " un minimo di erudizione, un massimo di penetrazione ". Egli non vagheggiava le grandi costruzioni sintetiche, non cercava i raffronti fra regioni lontane della scienza speculativa. A Lui piaceva invece di assodare il terreno su cui si svolge l'indagine matematica; si ingegnava a precisare sempre meglio le condizioni che assicurano la solubilità del problema, la validità dell'algoritmo; voleva che alle condizioni spesso troppo larghe, di cui si accontenta il ricercatore comune, altre ne fossero sostituite, più ristrette, più esaurienti che fosse possibile; e più d'una volta l'acutezza del suo ingegno gli permise di ritrovare le circostanze necessarie e sufficienti essenziali per il fatto che formava oggetto della Sua ricerca ".

L'Arzelà era membro della Società di Scienze naturali ed economiche di Palermo e della R. Accademia delle Scienze di Bologna, socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei e della Società matematica di Charkoff, era uno dei XL della Società Italiana delle Scienze ed aveva nel 1907 ottenuto il premio Reale per la matematica.

La morte ha colto l'Arzelà in età non ancora avanzata; ma a chi aveva dimestichezza con Lui è sembrato che abbia colpito non un uomo di 65 anni, ma un giovane, tanto Egli si era mantenuto, fin quasi all'ultimo, giovanilmente forte e nel corpo e nello spirito e nella mente.

F. Sibirani.

Elenco delle pubblicazioni di Cesare Arzelà.

1. *Nota sopra alcune applicazioni di una formula data da Jacobi*, " Giornale di Mat, T. IX. — 2. *Sviluppo in serie ordinate secondo le potenze decrescenti della variabile di* **n** *funzioni algebriche definite da altrettante equazioni a coefficienti determinati*, Ibid., T. XI. — 3. *Deformazione di un ellissoide omogeneo, elastico, isotropo*, Ibid. T. XII. — 4. *Sopra la teoria dell'eliminazione algebrica*, Ibid., T. XV. — 5. *Teoria dei limiti e dei numeri irrazionali*, Firenze. — 6. *Un'osservazione intorno ai massimi e minimi di una funzione reale di una variabile reale*, " Giornale di Scienze Naturali ed Economiche " di Palermo. — 7. *Un'os-*

servazione intorno alle serie di funzioni, " Rendic. Acc. delle Sc. ", Bologna, 1883. — 8. *Sui prodotti infiniti,* " Mem. Accad. Scienze ", Bologna, S. IV. T. IV. — 9. *Intorno alla continuità della somma di infinite funzioni continue,* " Rendic. Accad. Sc. ", Bologna, 1884. — 10. *Sulla integrazione per serie,* Bologna. — 11. *Un teorema intorno alle serie di funzioni,* " Rend. Accad. Lincei ", S. 4, T. 1. — 12. *Sull'integrabilità di una serie di funzioni,* Ibid. — 13. *Sulla integrazione per serie,* Ibid. — 14. *Sopra una certa estensione di un teorema relativo alle serie trigonometriche,* Ibid. — 15. *Sui prodotti infiniti,* " Rendic. Accad. Sc. ", Bologna, 1886. — 16. *Sugli integrali di funzioni che oltre alla variabile d'integrazione contengono altra variabile,* Ibid., 1888. — 17. *Sulla teoria delle funzioni analitiche,* Ibid., 1888. — 18. *Funzioni di linee,* " Rendic. Accad. Lincei S. 5, T. 5. — 19. *Sugli integrali doppi,* " Mem. Acc. Sc. ", Bologna, S. V, T. II. — 20. *Sulle serie doppie trigonometriche,* Ibid., S. V, T. IV. — 21. *Sulle funzioni di linee,* Ibid. — 22. *Sull'integrabilità delle equazioni differenziali ordinarie,* Ibid. S. V, T. V. — 23. *Sull'esistenza degli integrali nelle equazioni differenziali ordinarie,* Ibid., S. V, T. VI. — 24. *Sull'integrazione per serie,* " Rend. Accad. Lincei ", 1897. — 25. *Sul principio di Dirichlet,* " Rendic. Accad. ", Bologna, 1897. — 26. *Sulla rappresentazione approssimata delle funzioni analitiche,* 1898. — 27. *Sulle serie di funzioni* (in due parti), " Mem. Accad. ", Bologna, S. V, T. VIII e traduzione in tedesco di I. T. Pohl e B. Rauchberger, " Monatsheft für Math. und Physik, T. 16. — 28. *Sull'integrazione per sostituzione* " Rendic. Accad. ", Bologna, 1900. — 29. *Estensione di un criterio di convergenza dato da Riemann,* Ibid., 1901. — 30. *Sul secondo teorema della media per gli integrali doppi,* " Mem. Accad. Sc. ", Bologna, S. V, T. X. — 31. *Sulle serie di funzioni di variabile reale,* " Rendic. Accad. ", Bologna, 1902. — 32. *Sulle serie di funzioni analitiche,* Ibid, 1903 e traduzione in inglese in " Ann. of Mathemetics ", S. II, T. 5. — 33. *Sull'inversione di un sistema di funzioni,* " Rendic. Accad. ", Bologna, 1903. — 34. *Sulle serie di funzioni ugualmente oscillanti,* Ibid., 1904. — 35. *Sulle funzioni di due variabili a variazione limitata,* Ibid., 1905. — 36. *Sull'integrabilità di una serie di funzioni integrabili,* Ibid., 1906. — 37. *Sulle funzioni di due variabili a variazione limitata,* Ibid., 1907. — 38. *Sul limite di un integrale doppio,* Ibid., 1907. — 39. *Esistenza degli integrali nelle equazioni a derivate parziali,* " Mem. Acc. " Bologna, S. VI, T. III. — 40. *Sul teorema di E. Borel,* " Rendic. Accad. ", Bologna, 1909. — 41. *Su alcune questioni di calcolo funzionale,* " Mem. Acc. ", Bologna, S. VI, T. VII. — 42. *Variazioni deboli e forti delle funzioni,* " Rendic. Accad., Bologna, 1911. — 43. *Trattato d'Algebra Elementare* (tre edizioni), Firenze, Le Monnier. — 44. *Complementi d'Algebra Elementare ad uso degli Istituti Tecnici,* Ibid. — 45. *Aritmetica razionale* in collaborazione con G. Ingrami. — 46. *Lezioni di Calcolo infinitesimale* date nella R. Università di Bologna, Vol. I (Parte 1ª ed un fasc. della Parte 2ª), Firenze, Le Monnier, 1901.

ERRATA-CORRIGE. — Nel fasc. VI, anno XXVII, pag. 275, problema 27 *invece di* Chostes *leggasi* Chasles.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 5 Settembre 1912.

SOPRA UNA CLASSE SPECIALE DI CISSOIDALI

Consideriamo in un piano due curve γ_1, γ_2 e un punto O. Prendiamo, su ogni retta l passante per O, un punto P tale, che il raggio vettore OP sia eguale alla differenza $OP_2 - OP_1$ dei raggi vettori dei punti P_2, P_1 in cui la retta l incontra γ_2 e γ_1.

Il luogo dei punti P si chiama, com'è noto, *cissoidale* di γ_1 e γ_2 rispetto al polo O.

Mi propongo di far notare una classe speciale di tali curve che serve a generalizzare il problema della duplicazione del cubo. Farò vedere come, con procedimento analogo a quello seguìto per risolvere, con la cissoide di Diocle, il problema di Delo, si possa trovare l'equazione di una curva che risolve il problema della duplicazione d'una potenza qualunque, deducendo qualche proprietà in cui rientrano quelle della cissoide retta che non dipendano dalla speciale forma della sua equazione. Si presenta interessante poi un caso particolare relativo all'iperbole.

1. Il problema che si vuol risolvere è il seguente: *dato un segmento costruirne un altro tale che la potenza* n-esima *del numero che lo misura sia* λ-pla *della potenza* n-esima *del numero che misura il primo.*

Preso il segmento dato come unità di misura e detto x il numero che misura il segmento incognito, si tratta di risolvere geometricamente l'equazione

$$x^n = \lambda.$$

Riferendoci a un sistema d'assi cartesiani ortogonali, poniamo, sulla retta $x = a$, $\overline{AM} = \lambda$, e, sull'asse delle y, $\overline{ON} = \lambda^n$.

Le due rette AN e OM, che hanno per equazioni rispettivamente

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda^n} = 1, \qquad \frac{x}{a} = \frac{y}{\lambda},$$

s'incontrano in un punto P di coordinate

$$x = \frac{a\lambda^{n-1}}{1 + \lambda^{n-1}}, \quad y = \frac{\lambda^n}{1 + \lambda^{n-1}} \tag{1}$$

che, al variare di λ, descrive la curva cercata, di cui le (1) possono riguardarsi come le equazioni parametriche.

2. Eliminando dalle (1) il parametro λ si ha l'equazione generale della curva in coordinate cartesiane:

$$x\,(x^{n-1} + a^{n-1}\,y^{n-1}) - a^n\,y^{n-1} = 0. \tag{2}$$

Cangiamo $n-1$ in n; la (2) diventa

$$x\,(x^n + a^n y^n) - a^{n+1} y^n = 0. \tag{3}$$

che, per n negativo e uguale a $-m$, si trasforma nell'altra

$$x^m + a^m y^m - a x^{m-1} = 0. \tag{4}$$

È facile vedere che la curva (3) è la cissoidale della (4) rispetto all'origine delle coordinate e alla retta $x = a$.

Sia O il polo e OA l'asse polare. Si conduca per O una trasversale qualunque $y = x \operatorname{tg} \varphi$ che seghi la curva (4) in P_1 e la retta $x = a$ in M. Preso $\rho = OP = OM - OP_1$ si ha

$$\rho = \frac{a}{\cos\varphi}\left(1 - \frac{x_1}{a}\right),$$

dove x_1, ascissa di P_1, è data da

$$x_1 = \frac{a}{1 + a^m \operatorname{tg}^m \varphi}.$$

Sostituendo questo valore nell'espressione di ρ, si trova

$$a^{m+1}\frac{\operatorname{sen}^m \varphi}{\cos\varphi} = \rho\,(a^m \operatorname{sen}^m \varphi + \cos^m \varphi), \tag{5}$$

che è la (3) in coordinate polari con n positivo e uguale a m.

È evidente che se si cangia, nella costruzione precedente, l'ufficio della curva (4) e della retta $x = a$ prendendo $OP = OP_1 - OM$, si ottiene la stessa cissoidale in una posizione simmetrica con la precedente rispetto al punto O.

3. Enunciamo qualche proprietà che discende immediatamente dalle equazioni (3), (4), rammentando da prima qualcuno dei teoremi generali sulle cissoidali. Chiameremo, per brevità, *generatrice* la curva rappresentata dalla (4) e *cissoidale* quella rappresentata dalla (3) e distingueremo con l'indice 1 tutto quanto si riferisce alla generatrice.

Le curve rappresentate dalle equazioni (3) e (4) si trasformano facilmente in due altre, di equazioni più semplici, che godono delle stesse proprietà di quelle, e di cui ci si potrebbe servire in quel che segue.

Posto nella (3) $a = \frac{h}{k}$, essa diventa

$$k^n x^n + h^n y^n = \frac{h^{n+1}}{k} \cdot \frac{y^n}{x}. \tag{3'}$$

Eseguendo la trasformazione (affinità) definita dalle relazioni

$$\frac{x}{X}=\frac{l}{k}, \qquad \frac{y}{Y}=\frac{l}{h},$$

si ottiene, dalla (3') l'equazione:

$$X(X^n+Y^n)-\frac{h}{l}y^n=0. \tag{3''}$$

Analogamente per la generatrice:

$$X^n+Y^n-\frac{h}{l}X^{n-1}=0; \tag{4'}$$

nelle quali l è una lunghezza arbitraria che potrebbe supporsi eguale all'unità.

Riscriviamo ora le equazioni (3), (4) sotto questa forma:

$$x(x^n+a^ny^n)-a^{n-1}y=0 \tag{5}$$

$$y^n+a^ny^n-ax^{n-1}=0, \tag{6}$$

dove n è intero e positivo.

Si ha, come è noto, e come si verifica subito

$$\begin{cases} x=a-x_1 \\ y=a\operatorname{tg}\varphi-y_1, \end{cases} \tag{7}$$

essendo (x, y), (x_1, y_1) le coordinate de' due punti P, P_1 in cui una trasversale qualunque incontra le curve.

Conducendo per P, P_1 due parallele all'asse y, queste incontreranno rispettivamente in Q_1, Q la generatrice e la cissoidale. Si riconosce facilmente che Q e Q_1 sono allineati con l'origine.

Il rapporto tra le aree de' due triangoli OQP_1 *e* OQ_1P *è uguale alla n-esima potenza del rapporto tra' coefficienti angolari delle trasversali.*

In vero se $y=mx$, $y=m_1x$ sono le equazioni delle rette OP, OQ, si ha, per l'area Δ del triangolo OQP_1,

$$\Delta=\frac{a^{n+2}}{2}\cdot\frac{m^n(m_1-m)}{(1+m^n)(1+m_1^n)}.$$

e, per l'area Δ_1 del triangolo OQ_1P, un'espressione analoga ottenuta evidentemente cambiando il segno al secondo membro e scrivendo m al posto di m_1 e viceversa:

$$\Delta_1=-\frac{a^{n-2}}{2}\cdot\frac{m_1^n(m-m_1)}{(1+m_1^n)(1+m^n)}.$$

Risulta:

$$\frac{\Delta}{\Delta_1}=\left(\frac{m}{m_1}\right)^n. \tag{8}$$

4. Dalla relazione $\rho=OM-OP_1$ si ha

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=\frac{d}{d\varphi}.OM-\frac{d}{d\varphi}.OP_1. \tag{9}$$

Il primo membro di questa eguaglianza rappresenta la sottonormale polare della cissoidale in P e i due termini del secondo membro rappresentano: il primo la sottonormale polare della retta AM in M. e il secondo la sottonormale polare della generatrice in P_1.

Si ha quindi un mezzo assai semplice per costruire la normale alla cissoidale in P quando sia tracciata la generatrice.

Un'altra maniera di costruire la tangente alla cissoidale in un punto (x, y) risulta dal teorema di G. de Longchamps: [1] *la retta che passa per O e per il punto* (x, y) *della cissoidale incontra la retta* $x = a$ *in un punto equidistante da quelli in cui quest'ultima è incontrata dalla tangente alla cissoidale in* (x, y) *e dalla tangente alla generatrice in* (x, y_1).

5. Determiniamo ora le tangenti che si possono condurre alle cissoidale (3) da un punto dato (α, β).

Esse toccheranno la curva nei punti d'intersezione della cissoidale con la *polare* del punto (α, β), rappresentata dall'equazione

$$\alpha\,[(n+1)\,x^n + a^n y^n] + n a^n \beta\,(x-a)\,y^{n-1} - a^{n+1} y^n = 0. \qquad (10)$$

Eliminando $x - a$ fra la (3) e la (10) si ottiene l'equazione

$$a^n y^{n+1}(\alpha - a) + (n+1)\,\alpha y x^n - n\beta x^{n-1} = 0, \qquad (11)$$

che rappresenta $n+1$ rette passanti per l'origine (punto n-plo della curva) e per gli $n+1$ punti di contatto delle tangenti richieste.

D'altra parte si riconosce facilmente che questi $n+1$ punti determinano una curva dello stesso tipo della generatrice e di cui l'equazione si trova subito nel modo seguente.

Moltiplicando il primo membro della (3) per $n\,(n+1)\,\alpha\beta$, e il primo membro della (10) per $(n+1)\,\alpha y + n\beta x$ e sommando membro con membro le equazioni ottenute si ha:

$$\alpha^2 (n+1)^2 x^n + a^n \alpha\,(n+1)\,(\alpha - a)\,y^n +$$
$$+ n a^n \beta\,(\alpha - a)\,x y^{n-1} + n^2 a^n \beta^2 (x-a)\,x y^{n-2} = 0.$$

Per avere l'equazione della curva cercata basta sostituire nella precedente espessione ad y^n il valore

$$\frac{x\,(x^n + a^n y^n)}{a^{n+1}}$$

dato dalla (3); si ottiene così l'equazione

$$(x^n + a^n y^n)\,(\alpha - a)\,\alpha\,(n+1) + a^{n+1} n\beta\,(\alpha - a)\,y^{n-1} +$$
$$+ a\alpha^2 (n+1)^2 x^{n-1} + n^2 \beta^2 a^{n+1} (x-a)\,y^{n-2} = 0, \qquad (12)$$

che rappresenta una curva, del tipo della generatrice, che taglia la cissoidale in $n+2$ punti.

---

[1] Association française, Congrès de Grenoble 1885.

Sostituiamo ora nel primo e nell'ultimo termine della (12) $x^n + a^n y^n$ e $x - a$ coi rispettivi valori dati dalla (3). Si trova l'equazione

$$[a^n y^{n-1} (\alpha - a) + \alpha (n+1) x^n y - n\beta x^{n+1}] [\alpha (n+1) y + n\beta x] = 0$$

che rappresenta $n+2$ rette di cui $n+1$ coincidono con quelle definite dalla (11) e l'altra di equazione

$$\alpha (n+1) y + n\beta x = 0 \tag{13}$$

passa per il punto $(n+2)^{mo}$.

Se ora sostituiamo, ancora nell'equazione (12), al posto di $x^n + a^n y^n$ e $x - a$ i rispettivi valori dati dall'equazione

$$\text{(4 ripetuta)} \qquad x^n + a^n y^n - a x^{n-1} = x^{n-1}(x-a) + a^n y^n = 0$$

della generatrice, si ottiene l'equazione seguente

$$\alpha(\alpha - a)(n+1) x^{2n-2} + n\beta a^n (\alpha - a) x^{n-1} y^{n-1} + \\ + \alpha^2 (n+1)^2 x^{2n-2} - n^2\beta^2 a^{2n} y^{2n-2} = 0,$$

che si può scrivere

$$(\alpha - a) x^{n-1} [n a^n \beta y^{n-1} + \alpha(n+1) x^{n-1}] + \\ + [\alpha(n+1) x^{n-1} + n a^n \beta y^{n-1}] [\alpha(n+1) x^{n-1} - n a^n \beta y^{n-1}] = 0,$$

ossia

$$[n a^n \beta y^{n-1} + \alpha(n+1) x^{n-1}] [a^n n \beta y^{n-1} + \{a - (n+2)\} x^{n-1}] = 0,$$

che ci dice che la generatrice della cissoidale e la curva rappresentata dalla (12) si tagliano in $2n-2$ punti posti sulle rette

$$\begin{cases} \alpha(n+1) x^{n-1} + n a^n \beta y^{n-1} = 0 \\ n a^n \beta y^{n-1} + \{a - (n+2)\} x^{n-1} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Concludiamo che, per determinare le tangenti che da un punto dato (α, β) si possono condurre alla cissoidale basta cercare il punto in cui la retta (13) taglia la cissoidale e i punti in cui le rette (14) tagliano la generatrice. La curva, dello stesso tipo della generatrice, passante per questi punti, determina, con le sue intersezioni con la cissoidale, le tangenti richieste. [1]

6. Proponiamoci ora di calcolare l'area della superficie compresa fra la curva, l'asse x e una parallela all'asse y.

Distinguiamo, al solito, i due casi.

I. *Cissoidale.* — Indicando con S l'area su definita, si ha:

$$S = \int_0^x y\,dx = \frac{1}{a} \int_0^x x^{\frac{n+1}{n}} (a - x)^{-\frac{1}{n}} dx.$$

Ora, posto

$$x = z^n, \tag{15}$$

[1] Cfr. per la cissoide di DIOCLE, una nota di J. WALKER in *Proceedings of the London Mathematical Society*, t. II, p. 161.

si ha

$$\frac{1}{a}\int x^{\frac{n+1}{n}}(a-x)^{-\frac{1}{n}}dx=\frac{n}{a}\int z^{2n}(a-z^n)^{-\frac{1}{n}}dz,$$

e, per una nota formola di calcolo [1]

$$\frac{n}{a}\int z^{2n}(a-z^n)^{-\frac{1}{n}}dz=$$

$$=\frac{1}{a}\left[-\frac{1}{2}z(a-z^n)^{\frac{n-1}{n}}\left(z^n+a\frac{n+1}{n}\right)\right]+\frac{n+1}{2n}a\int(a-z^n)^{-\frac{1}{n}}dz.$$

Quindi, l'area A della superficie compresa tra la cissoidale, l'asse x e l'assintoto $x=a$, è data da

$$A=\frac{n}{a}\int_0^{\sqrt[n]{a}}z^{2n}(a-z^n)^{-\frac{1}{n}}dz=\frac{n+1}{2n}a\int_0^{\sqrt[n]{a}}(a-z^n)^{-\frac{1}{n}}dz: \quad (16)$$

e osserviamo che ha sempre un valore finito finchè $\frac{1}{n}<1$ e diventa infinita per $\frac{1}{n}\geqslant 1$. [2]

II. *Generatrice.* — Indicando con S_1 l'area della superficie compresa tra la curva, l'asse x e una parallela all'asse y, si ha:

$$S_1=\int_0^x yxd=\frac{1}{a}\int_0^x x^{\frac{n-1}{n}}(a-x)^{\frac{1}{n}}dx. \quad (17)$$

Per potere arrivare ad avere, in questo caso, per tutta l'area A_1 della superficie compresa tra la curva e l'asse x, una espressione analoga alla (16) in modo da poterle insieme confrontare, trasformiamo convenientemente la funzione da integrare.

Scriviamo la (17) sotto la forma

$$S_1=\frac{1}{a}\int_0^x\frac{x(a-x)^{\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{n}}}dx.$$

Ponendo

$$a-x=z^n,$$

l'integrale indefinito si trasforma nell'altro

$$-\frac{n}{a}\int z^n(a-z^n)^{\frac{n-1}{n}}dz.$$

E quindi:

$$\frac{n}{a}\int z^n(a-z^n)^{\frac{n-1}{n}}=\frac{1}{a}\left[-\frac{1}{2}z(a-z^n)^{\frac{2n-1}{n}}\right]+\frac{1}{2}\int(a-z^n)^{\frac{n-1}{n}}dz.$$

---

[1] DINI, *Analisi infinitesimale*, II, p. 71.
[2] DINI, *op. cit.*, II, p. 103.

L'area A_1 è data da:

$$A_1 = \frac{n}{a}\int_0^{\sqrt[n]{a}} z^n (a - z^n)^{\frac{n-1}{n}}\, dz = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[n]{a}} (a - z^n)^{\frac{n-1}{n}}\, dz. \tag{18}$$

Si ha ora

$$\frac{n+1}{2n}\, a \int_0^{\sqrt[n]{a}} (a - z^n)^{-\frac{1}{n}}\, dz - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[n]{a}} (a - z^n)^{\frac{n-1}{n}}\, dz =$$

$$= \frac{a}{2n}\int_0^{\sqrt[n]{a}} (a - z^n)^{-\frac{1}{n}}\, dz + \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[n]{a}} z^n (a - z^n)^{-\frac{1}{n}}\, dz,$$

ossia

$$\frac{n+1}{2n}\, a \int_0^{\sqrt[n]{a}} (a - z^n)^{-\frac{1}{n}}\, dz - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[n]{a}} (a - z^n)^{\frac{n-1}{n}}\, dz =$$

$$= \frac{a}{n}\int_0^{\sqrt[n]{a}} (a - z^n)^{-\frac{1}{n}}\, dz.$$

E rammentando le (16) e (18), possiamo scrivere

$$A - A_1 = \frac{2}{n+2} A,$$

da cui

$$A = \frac{n+2}{n-1} A_1. \tag{19}$$

Cioè: *l'area della superficie compresa tra la cissoidale, l'assintoto e l'asse* x *è uguale a* $\frac{n+1}{n-1}$ *volte l'area della superficie racchiusa dalla curva generatrice e dall'asse delle ascisse.*

La proprietà dimostrata vale per qualunque valore reale di n.

Per convincercene procediamo in altro modo. Ripigliamo le equazioni (7)

$$\text{(7 ripetute)} \qquad \begin{cases} x = a - x_1 \\ y = a \,.\, \mathrm{tg}\, \varphi - y_1. \end{cases}$$

Differenziando la prima e moltiplicando l'equazione ottenuta membro con membro con la seconda si ha:

$$y dx - y_1 dx_1 = - a \,.\, \mathrm{tg}\, \varphi dx_1.$$

Integrando da $x = 0$ ad $x = a$ si trova

$$\int_0^a y dx - \int_a^0 y_1 dx_1 = - a \int_a^0 \mathrm{tg}\, \varphi dx_1 = - a \int_a^0 \frac{y_1}{x_1} dx_2 + C,$$

ossia

$$A + A_1 = a \int_0^a \frac{y_1}{x_1} dx_1 + C.$$

Ora

$$a \int_0^a \frac{y_1}{x_1}\, dx_1 = \int_0^a \sqrt[n]{\frac{a - x_1}{x_1}}\, dx.$$

o anche, ponendo

$$a - x_1 = z^n,$$

$$\int_0^a \sqrt[n]{\frac{a - x_1}{x_1}}\, dx_1 = n \int_0^{\sqrt[n]{a}} (a - z^n)^{-\frac{1}{n}}\, dz = a \int_0^{\sqrt[n]{a}} (a - z^n)^{-\frac{1}{n}}\, dz.$$

e quindi, rammentando la (16), poichè la costante d'integrazione si riconosce facilmente essere nulla, si può scrivere:

$$\mathrm{A} + \mathrm{A}_1 = \frac{2n}{n+1}\, \mathrm{A},$$

e, infine,

$$\mathrm{A} = \frac{n+1}{n-1}\, \mathrm{A}_1.$$

7. Per le curve che si stanno studiando ci sarà utile verificare il teorema di Sluse (¹) che dice *che i volumi generati dalla rotazione delle due curve attorno alla retta* $\mathrm{x} = a$ *sono eguali.*

Il volume del solido generato dalla superficie S quando la cissoidale ruota attorno all'assintoto si può calcolare per mezzo della formola

$$v = \pi \int_0^y (a - x)^2\, dy = \pi\, [(a - x)^2 y + 2 \int_0^x y\, (a - x)\, dx].$$

Per avere in particolare il volume V del solido generato da tutta la superficie A nella stessa rotazione, definiamo l'integrale precedente da 0 ad a. Si ha:

$$\mathrm{V} = 2\pi \int_0^a y\, (a - x)\, dx = \frac{2\pi}{a} \int_0^a x^{\frac{n+1}{n}} (a - x)^{\frac{n-1}{n}}\, dx.$$

che si può anche scrivere:

$$\mathrm{V} = \frac{2\pi}{a} \int_0^a x^{\frac{n+1}{n}} (a - x)^{-\frac{1}{n}}\, dx - \frac{2\pi}{a} \int_0^a x^{\frac{2n+1}{n}} (a - x)^{-\frac{1}{n}}\, dx.$$

Ora è

$$\int_0^a x^{\frac{2n+1}{n}} (a - x)^{-\frac{1}{n}}\, dx = \frac{2n+1}{n} \int_0^a x^{\frac{n+1}{n}} (a - x)^{-\frac{1}{n}}\, dx;$$

quindi, sostituendo e rammentando la (16),

$$\mathrm{V} = 2\pi a \,.\, \frac{n-1}{3n}\, \mathrm{A}. \tag{20}$$

(¹) Questo teorema, comunicato da Sluse ad Huygens per il caso della cissoide di Diocle, è stato generalizzato per qualunque cissoidale dal Massau (*Mathesis*, 1886, pp. 245 e 275).

Analogamente, per il volume v_1 generato dalla superficie S_1 quando la generatrice ruota attorno alla retta $x = a$, si trova,

$$v_1 = \pi \int_0^y (a-x)^2\, dy = \pi \left[y(a-x) + \frac{2}{a} \int_0^x x^{\frac{n-1}{n}} (a-x)^{\frac{n+1}{n}}\, dx \right].$$

E in particolare, il volume V_1 generato dalla superficie A_1 nella stessa rotazione è dato da:

$$V_1 = \frac{2\pi}{a} \int_0^a x^{\frac{n-1}{n}} (a-x)^{\frac{n+1}{n}}\, dx =$$

$$= \frac{2\pi}{a} \int_0^a x^{\frac{n-1}{n}} (a-x)^{\frac{1}{n}}\, dx - \frac{2\pi}{a} \int_0^a x^{\frac{2n-1}{n}} (a-x)^{\frac{1}{n}}\, dx.$$

Si ricava l'espressione, [1]

$$V_1 = 2\pi a \,.\, \frac{n+1}{3n} A_1, \tag{21}$$

e quindi, per la (19)

$$V = V_1. \tag{22}$$

8. Le formole (20), (21) sono notevoli non solo perchè ci dànno i volumi proposti in funzione delle aree delle superfici generatrici, ma anche perchè ci permettono di calcolare le ascisse x_0, x'_0 dei baricentri delle superfici rispettivamente comprese fra la cissoidale, l'assintoto e l'asse x; e fra la curva generatrice e lo stesso asse. Segue dal teorema di Guldino:

$$\begin{cases} x_0 = a - a\dfrac{n-1}{3n} = a\dfrac{2n+1}{3n}, \\ x'_0 = a - a\dfrac{n+1}{3n} = a\dfrac{2n-1}{3n}. \end{cases} \tag{23}$$

Per mezzo di queste formole si trovano facilmente le espressioni che ci dànno i volumi W, W_1 generati rispettivamente dalle superfici A, A_1, quando le due curve ruotano attorno all'asse y. Applicando ancora il teorema di Guldino si trova:

$$\begin{cases} W = 2\pi \,.\, x_0 \,.\, A = 2\pi a \,.\, A \,.\, \dfrac{2n+1}{3n}, \\ W_1 = 2\pi \,.\, x'_0 \,.\, A_1 = 2\pi a \,.\, A_1 \,.\, \dfrac{2n-1}{3n}; \end{cases} \tag{24}$$

dalle quali si deduce

$$W = \frac{2n^2+3n+1}{2n^2-3n+1} W_1; \tag{25}$$

e quindi ancora

$$\begin{cases} V = \dfrac{n-1}{2n+1} W, \\ V_1 = \dfrac{n+1}{2n-1} W_1, \end{cases} \tag{26}$$

---

[1] Quest'espressione di V_1 risulta del resto direttamente dalla (20) nella quale si faccia n negativo, ciò che porta a cangiare anche A in A_1.

9. Sarebbe ora interessante studiare la forma delle curve pei varî valori dell'indice n e qualche caso particolare notevole. Spero di poter completare la presente nota con un'altra in cui mi occuperò più specialmente della topologia delle curve in discorso. Per ora mi limito a mettere in vista qualche proprietà dell'iperbole che discende dalle considerazioni precedentemente svolte.

Per $n=2$, l'equazione (3) diventa

$$x(x+ay)-a^2y=0,$$

che rappresenta un'iperbole, *cissoidale delle rette*

$$x=a, \qquad x+ay-a=0.$$

In generale, assunto sempre il polo nell'origine delle coordinate, la cissoidale di due rette qualsiansi di equazioni

$$\begin{cases} y=m_1x+n_1 \\ y=m_2x+n_2 \end{cases} \tag{27}$$

è un'iperbole di cui si trova subito l'equazione

$$m_1m_2x^2-(m_1+m_2)xy+y^2+(n_2m_1-n_1m_2)x+(n_1-n_2)y=0. \tag{28}$$

Le due rette generatrici son parallele o coincidono con gli assintoti della conica.

Inversamente un'iperbole di equazione

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+y^2+2a_{13}x+2a_{23}y=0 \tag{29}$$

si può sempre costruire come cissoidale di due rette delle quali è facile trovare le equazioni.

Confrontando la (29) con la (28) si hanno, per determinare m_1, n_1; m_2, n_2, le quattro equazioni

$$\begin{cases} a_{11}=m_1m_2, \\ -2a_{12}=m_1+m_2, \\ 2a_{13}=n_2m_1-n_1m_2; \\ 2a_{23}=n_1-n_2, \end{cases} \tag{30}$$

che forniscono i valori

$$\begin{cases} m_1=-a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}} \\ n_1=a_{23}+\dfrac{a_{13}-a_{12}a_{23}}{\sqrt{a_{12}^2-a_{11}}} \\ m_2=-a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}} \\ n_2=\dfrac{a_{13}-a_{12}a_{23}}{\sqrt{a_{12}^2-a_{11}}}-a_{23}. \end{cases} \tag{31}$$

Se le due rette (27) sono parallele, si ha: $m_1=m_2$; e quindi, per le (30), è nullo il discriminante Δ della (29).

L'iperbole, com'è evidente, si riduce a una coppia di rette parallele alle date.

Se le due rette (27) sono perpendicolari, l'iperbole è equilatera. Allora, poichè è

$$m_1 m_2 + 1 = 0, \qquad m_1 + m_2 = 0,$$

per le prime due delle (30) si trova, ricordando che $a_{22} = 1$, la nota condizione:

$$I = a_{11} + a_{22} - 2a_{12} = 0.$$

Teorema. — *La tangente all'iperbole in un punto* (α, β) *taglia la retta* $y = m_2 x + n_2$ *in un punto tale che il segmento compreso fra esso e il punto d'incontro delle due rette generatrici è dimezzato dalla trasversale uscente dall'origine la quale passa per il punto* (α, β).

Si ha così un metodo semplicissimo per costruire la tangente in un punto all'iperbole.

Si deduce poi immediatamente che *la congiungente il punto d'incontro delle due generatrici con l'origine delle coordinate è tangente ivi all'iperbole.*

Raffaele Leonardi.

RICERCHE PROIETTIVE

sulle linee tracciate in una superficie immersa in uno spazio a più dimensioni

Scopo di questo lavoro è lo studio di alcune proprietà proiettive infinitesimali di superficie di spazi a n dimensioni (S_n), specialmente per quel che riguarda le linee che in esse si possono tracciare, secondo l'indirizzo seguìto dal prof. Segre nella sua nota: " Su una classe di superficie degl'iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine ". [1]

La massima parte delle proprietà che invocherò si trova in questa nota; alcune però erano già state dimostrate sinteticamente dal Del Pezzo. [2]

Ad alcune fra le proprietà dimostrate nella nota del Segre era però già stato condotto da considerazioni metriche Eugenio Elia Levi nel suo " Saggio sulla teoria delle superficie a due dimensioni immerse in un iperspazio ". [3]

---

(1) *Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino*, 1907, XLII.

(2) " Sugli spazi tangenti a una superficie o a una varietà immersa in uno spazio a più dimensioni " (*Acc. delle Scienze di Napoli*, anno 1886).

(3) *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa*, 1905.

Chiamiamo $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ le coordinate omogenee di punto in uno S_n. Per avere in esso una superficie, poniamo le x ([1]) funzioni di due parametri (essenziali) che chiameremo u e v.

Facciamo sempre su queste funzioni l'ipotesi che siano derivabili quante volte occorre. Indicheremo le derivazioni rispetto ad u e a v, o coi soliti simboli, o scrivendo le lettere u, v al piede delle lettere che indicano le funzioni da derivarsi, tante volte, quante sono le derivazioni da farsi.

I. — Sezioni iperpiane con punti multipli e spazi r-tangenti.

1. Incominciamo col ricercare analiticamente quale sia la dimensione del minimo spazio, ogni iperpiano passante pel quale, taglia una data superficie secondo curve aventi un dato punto della superficie come punto r-plo.

I punti comuni a un iperpiano di coordinate proiettive omogenee

$$\xi_1, \quad \xi_2, \dots \xi_{n+1}$$

e alla superficie (varietà a 2 dimensioni, che indicheremo col simbolo V_2) che si considera, sono quelli che sodisfanno alla:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \xi_i X_i = 0$$

ove, in luogo di X, si leggano le funzioni di u e v, che dànno le coordinate dei punti della V_2. Talvolta scriveremo più succintamente la formola precedente col simbolo

$$(\xi, X) = 0. \tag{1}$$

Fissiamo un punto di coordinate x, della superficie. Ammessa la sviluppabilità in serie di Taylor delle funzioni X di u e v, avremo

$$X = x + x_u\, du + x_v\, dv + \dots$$

e allora la (1) si muta nella:

$$\begin{aligned}
&(\xi, x) + \\
&(\xi, x_u)\, du + (\xi, x_v)\, dv + \\
&\frac{1}{2}\left[(\xi, x_{uu})\, du^2 + 2(\xi, x_{uv})\, du\, dv + (\xi, x_{vv})\, dv^2\right] + \\
&\frac{1}{6}\left[(\xi, x_{uuu})\, du^3 + 3(\xi, x_{uuv})\, du^2\, dv + 3(\xi, x_{uvv})\, du\, dv^2 + (\xi, x_{vvv})\, dv^3\right] \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\frac{1}{r!}\left[\left(\xi, \frac{\partial^r x}{\partial u^r}\right) du^r + r\left(\xi, \frac{\partial^r x}{\partial u^{r-1}\partial v}\right) du^{r-1}\, dv + \dots + \left(\xi, \frac{\partial^r x}{\partial v^r}\right) dv^r\right] + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

([1]) In una formola contenente le x senz'indice, intenderemo riassunte le formole che s'ottengono dando a x i valori $1, 2, \dots n+1$.

dove du e dv sono i differenziali di u e v, presi sulla linea d'intersezione. (1)

Se vogliamo che la linea d'intersezione abbia nel punto di coordinate x, r tangenti, cioè vi passi con r rami (distinti o, in parte, coincidenti) dovremo supporre che nell'equazione manchino i termini aventi per coefficienti:

$$\begin{array}{c}
(\xi\,,\,x) \\
(\xi\,,\,x_u)\,; \qquad (\xi\,,\,x_v) \\
(\xi\,,\,x_{uu})\,, \qquad (\xi\,,\,x_{uv})\,, \qquad (\xi\,,\,x_{vv}) \\
(\xi\,,\,x_{uuu})\,, \qquad (\xi\,,\,x_{uuv})\,, \qquad (\xi\,,\,x_{uvv})\,, \qquad (\xi\,,\,x_{vvv}) \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\left(\xi\,,\,\dfrac{\partial^{r-1}x}{\partial u^{r-1}}\right),\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\left(\xi\,,\,\dfrac{\partial^{r-1}x}{\partial v^{r-1}}\right)
\end{array}$$

perchè allora il gruppo di termini, la cui somma uguagliata a 0 ci dà l'equazione delle tangenti, sarà di grado r.

Così imponiamo all'iperpiano ξ

$$1+2+3+\ldots+r=\frac{r\,(r+1)}{2}$$

condizioni, che saranno distinte se fra le varie derivate parziali di x non vi saranno relazioni lineari. Escluso questo caso, ξ sarà dunque obbligato a passare per uno spazio a $\dfrac{r\,(r+1)}{2}-1$ dimensioni, ossia, per uno $S_{\frac{(r-1)(r-2)}{2}}$ che chiameremo col Del Pezzo (2) spazio *r-tangente alla superficie nel punto* x.

Ricordiamo che questo spazio è individuato dai punti che hanno per coordinate le derivate di x fino alle $(r-1)^{\text{esime}}$. Sicchè lo spazio r-tangente è anche lo spazio nel quale sono immerse tutte le varietà di S_{r-1} osculatori alle curve regolari della superficie passanti per il punto che si considera. Infatti l'r-1^{esimo} spazio osculatore di una qualsiasi curva della nostra V_2, ottenuta ponendo v funzione di u, possiamo considerare come individuato dai punti

$$x,\quad x',\quad x''\ldots x^{(r-1)}$$

ove s'indichino con gli apici le derivazioni rispetto ad u. Allora si vede che le coordinate di questi punti risultano combinazioni lineari delle derivate parziali rispetto ad u e v (fino alle r-1^{esime}) di x, e i coefficienti della combinazione sono le derivate di v rispetto ad u, elevate a varie potenze e moltiplicate per numeri interi.

(1) S'intende che ci limitiamo a considerare punti infinitamente vicini a x, nel senso che si dà in geom. differenziale a questa frase.

(2) Nota citata, p. 7.

Nello sviluppo di $x^{(r)}$ la parte che dipende da $\frac{dv}{du}$ è:

$$\frac{\partial^r x}{\partial u^r} + r\,\frac{\partial^r x}{\partial u^{r-1}\partial v}\,v' + \ldots + \frac{\partial^r x}{\partial v^r}\,v'^r\,.$$

Dunque per ogni valore intero di r si ha da considerare una r-*ica normale* nello S_r dei punti di coordinate:

$$\frac{\partial^r x}{\partial u^r}\,,\quad \frac{\partial u^{r-1}\,\partial v}{\partial^r x}\,,\ldots$$

Queste curve godono di notevoli proprietà, interessanti nello studio delle linee della V_2. Esse non degenerano che nel caso in cui lo spazio in cui sono immerse sia di dimensione minore di r. Ma noi escludiamo per ora questo caso.

In generale i gruppi delle r tangenti in un punto sono tali che, fissate r tangenti a caso, si trova un iperpiano che sega la superficie secondo una linea avente quelle tangenti. Infatti du è coordinata proiettiva nel fascio delle tangenti in x alle linee della superficie; formiamo allora l'equazione:

$$\mathrm{A}\,du^r + r\mathrm{B}\,du^{r-1}\,dv + \ldots = 0 \tag{1}$$

e scriviamo che quest'equazione deve coincidere con la:

$$\left(\xi\,,\frac{\partial^r x}{\partial u^r}\right)du^r + r\left(\xi\,,\frac{\partial^r x}{\partial u^{r-1}\,\partial v}\right)du^{r-1}\,dv + \ldots = 0\,. \tag{2}$$

Le proporzioni che dovremo porre fra i coefficienti della (1) e della (2) ci dicono che l'iperpiano ξ deve passare per certi r punti dello spazio dei punti:

$$\frac{\partial^r x}{\partial u^r}\,,\quad \frac{\partial^r x}{\partial u^{r-1}\,\partial v}\,,\ldots\,\frac{\partial^r x}{\partial v^r}$$

che è lo spazio $(r+1)$ tangente. Il piano ξ così determinato non contiene questo spazio $(r+1)$ tangente, a meno che fra i punti di questo non passino legami lineari tali, che il piano ξ, obbligato a passare per r punti dello spazio $(r+1)$ tangente, lo contenga. Ma allora le tangenti alla sezione iperpiana sarebbero $r+1$, sicchè in tal caso non si potrebbe prendere una sezione iperpiana con sole r date tangenti.

Più precisamente, generalizzando una dimostrazione del Segre, [1] vediamo subito che, *se le coordinate dei punti di una superficie sodisfano alle derivate parziali di* r$^{\text{esimo}}$ *ordine, le* r.$^{\text{ple}}$ *di tangenti in ogni punto, devono esser apolari con una* r.$^{\text{pla}}$ *fissa*. Sicchè le *r*.$^{\text{ple}}$ non saranno ∞^r, ma formeranno un sistema lineare ∞^{r-1}.

---

[1] Nota citata, p. 35.

Se le equazioni differenziali sono h e distinte, e sono anche distinte le equazioni che ci dànno le r.ple di tangenti a cui le altre devono essere apolari, il sistema riuscirà ∞^{r-h}. Ma dire che queste equazioni *non* siano distinte, equivale a dire che esiste una loro combinazione lineare identicamente sodisfatta. Allora operiamo questa medesima combinazione lineare colle date equazioni differenziali. Otterremo una nuova equazione differenziale che manca dei termini con le derivate $r$esime, ossia le x sodisferanno ad un'equazione differenziale di ordine $r-1$, al più. Dunque, per la validità della proporzione ora vista, bisognerà ammettere che gli spazi tangenti fino allo $r-1$esimo abbiano precisamente la dimensione richiesta dalla formola di Del Pezzo.

Ritorneremo su ciò pel caso di $r=2$.

Se in particolare le equazioni differenziali sono precisamente r, essendovi una sola forma di $r$esimo grado apolare con r date distinte, tutte le sezioni iperpiane con punto $r$ple avranno le medesime r tangenti.

2. Incominciamo coll'applicare tutto ciò al caso di $r=2$.

Nella nota del Segre è considerato il caso delle superficie Φ, soluzioni di un'equazione differenziale alle derivate parziali di 2° ordine. Quando esiste una tal equazione, il piano tangente π, individuato dai punti x, x_u, x_v, taglia il piano dei punti x_{uu}, x_{uv}, x_{vv}, che indicheremo con χ. Nel piano χ sta la conica:

$$y = y_{uu} + 2x_{uv}\, v' + x_{vv}\, v'^2. \tag{1}$$

Allora si presenta un'involuzione nel fascio delle tangenti alle linee della superficie nel punto X che si considera. (¹)

Quest'involuzione non è altro che l'apolarità considerata in generale poco fa. Essa ha per immagine, nella conica (1) l'involuzione che ha per polo il punto comune a π e χ. Se il piano π taglia il piano χ in un punto della conica (1), l'involuzione degenera.

A ogni punto della conica (1) corrisponde uno e un sol valore di v' e quindi una tangente nel fascio χ. Due punti della conica, corrispondenti nell'involuzione, son dunque tali che derivano da uno stesso S_3 luogo di S_2 osculatori a linee aventi una medesima tangente; dunque i punti corrispondenti nell'involuzione sono anche segati nella conica dagli S_3, che da π ne proiettano i punti.

3. Se π e χ hanno un punto comune, l'involuzione è degenere, perchè il punto $(\pi\chi)$ corrisponde a tutti gli altri.

Allora ad ogni S_3 luogo di S_2 osculatori corrisponde uno e un sol punto della conica (oltre il punto singolare), al quale corrisponde lo S_3 che proietta da π la tangente alla conica sul punto stesso.

(¹) Segre, nota cit., p. 8.

Allora i due S_3 corrispondenti alle tangenti, che il Segre chiama caratteristiche, si riducono ad uno solo, tangente alla conica in $(\pi\chi)$.

A questo punto corrisponde l'unica tangente caratteristica, dunque nel punto che si considera, le due linee caratteristiche sono tangenti; se il fatto si verifica per tutta la superficie si ha un solo sistema di caratteristiche.

Se ne deduce che in questo caso l'equazione di Laplace, traduzione analitica del fatto che π e χ s'incontrino è parabolica.

A questo risultato si arriva anche analiticamente.

Affinchè π incontri χ, bisogna che esista una direzione v', tale che il corrispondente punto y della conica (1) sia anche un punto di π, cioè le sue coordinate siano combinazione lineare di quelle dei 3 punti x, x_u, x_v; cioè devono aversi certi numeri v' λ, μ, ν, ρ, tali che:

$$x_{uu} + 2x_{uv}\, v' + x_{vv}\, v'_2 = \rho\,(\lambda x + \mu x_u + \nu x_v),$$

ossia le x devono sodisfare a una medesima equazione differenziale alle derivate parziali di 2° ordine della forma:

$$\frac{d^2x}{du^2} + 2\mathrm{A}\,\frac{d^2x}{dudv} + \mathrm{A}\,\frac{d^2x}{dv^2} = \mathrm{B}\,\frac{dx}{du} + \ldots + \mathrm{C}\,\frac{dx}{dv} + \mathrm{D}\,x = 0$$

nella quale riterremo per ora non possa essere

$$\mathrm{B} = \mathrm{C} = \mathrm{D} = 0$$

perchè questi 3 numeri sono (a meno di un fattore non nullo) le tre coordinate omogenee di λ, μ, ν, considerati prima. Ora quest'equazione è manifestamente parabolica.

Consideriamo allora due tangenti coniugate nell'involuzione di cui le caratteristiche sono tangenti doppie. Ma ora le caratteristiche coincidono, dunque di quelle due tangenti, una coincide pure con l'unica caratteristica, l'altra è qualunque.

Poichè le x sono almeno 5 (senza di che questa ricerca non avrebbe senso) sarà in generale impossibile determinare A, B, C, D in modo da formare un'equazione del tipo di quella scritta, cui obbediscono le coordinate dei punti di una superficie generica data; ma essa sarà valida per certi punti di certe superficie. Sulle Φ [1] vi sarà una linea di punti per cui π e χ s'incontrano; la linea ove l'equazione

$$a\,\frac{d^2x}{du^2} + b\,\frac{d_2x}{dudv} + \ldots + fx = 0,$$

è parabolica; questa linea è rappresentata entro la superficie dall'equazione

$$b^2 - 4ac = 0$$

fra u e v (da cui dipendono a, b e c).

---

[1] SEGRE, nota cit., p. 13.

Tutto ciò vale, finchè non si annullano, nell'equazione differenziale, i tre coefficienti di $\frac{dx}{du}$, $\frac{dx}{dv}$, x, come accadrebbe p. es., se si volesse applicare questo risultato alle rigate che sodisfano alla $\frac{d^2x}{du^2}=0$. Ma ogni restrizione si può togliere osservando che, se si ha un'equazione differenziale fra le sole derivate seconde, il piano χ si riduce a una retta, e la conica, alla retta stessa contata due volte, sulla quale si avrà l'involuzione corrispondente a quella delle tangenti. Includendo questo caso avremo:

Se i piani π, χ, relativi al punto X, s'incontrano in un punto della conica y, tutti gli iperpiani tangenti alla V_2 nel punto X, la tagliano secondo una curva con punto doppio, e una delle due tangenti in esso è fissa.

Dunque, sebbene il piano χ dipenda dalle coordinate curvilinee u, v che si sono scelte, la proprietà di incontrare π conduce ad una proprietà della superficie.

Viceversa è evidente che se si ha una tangente fissa, l'involuzione sulla conica deve degenerare e (se χ è un piano) π e χ devono incontrarsi in un punto della conica. In tal caso si può trasformare e semplificare l'equazione di Laplace. Infatti si prenda come

$$v = \text{costante}$$

la direzione fissa. Le tangenti alle sezioni iperpiane risultano apolari (armoniche) alla:

$$A dv^2 = 0$$

quindi l'equazione di Laplace prende la forma

$$A\frac{d^2x}{du^2} + E\frac{dx}{du} + F\frac{dx}{dv} + Gx = 0.$$

Di qui risulta che π e χ s'incontrano nel punto di coordinate $\frac{d^2x}{du^2}$, il quale appartiene alla conica.

4. Passiamo ora al caso di due distinte equazioni differenziali di 2° ordine:

$$(0)\begin{cases} A\frac{d^2x}{du^2} + B\frac{d^2x}{dudv} + \ldots + F\,x = 0 \\ A'\frac{d^2x}{du^2} + B'\frac{d^2x}{dudv} + \ldots + F'\,x = 0. \end{cases}$$

Se la superficie che si considera è immersa in un iperspazio, è una sviluppabile, se le coordinate dei suoi punti sodisfano a due equazioni (0) distinte. [1]

[1] SEGRE, nota cit., pag. 15.

Le coppie di tangenti alle sezioni iperpiane con punto doppio devono essere apolari alle due:

$$\begin{cases} \mathrm{A}dv^2 - \mathrm{B}dudv + \mathrm{C}du^2 = 0 \\ \mathrm{A}'dv^2 - \mathrm{B}'dudv + \mathrm{C}'du^2 + 0 \end{cases} \tag{1}$$

ossia devono essere armoniche a tutte le coppie del fascio da esse individuato. Dico che le (1) son distinte sempre, se son distinte le (0). Infatti, se le (1) non fossero distinte, le x sodisferebbero ad un'equazione:

$$\mathrm{M}\frac{dx}{du} + \mathrm{N}\frac{dx}{dv} + \mathrm{P}x = 0$$

la quale ci direbbe che in quel punto della superficie i tre punti di coordinate $\frac{dx}{du}, \frac{dx}{dv}$, x non individuano il piano tangente, il che escludiamo. Dunque, nel caso di $r = 2$, basta sapere che le (0) sono distinte, per concludere che tutti gl'iperpiani passanti per il piano tangente segano la V^2 secondo le due medesime tangenti.

Se la V_2 è in uno spazio di dimensione maggiore di 3, le (1) non possono esser generali, perchè ogni iperpiano passante per il piano tangente alla superficie sviluppabile di cui necessariamente si tratta, la taglia secondo una linea che ha due tangenti coincidenti nella generatrice passante per il punto di contatto: dunque le coppie del fascio (1) hanno un elemento comune che è quella tangente doppia fissa. Le 2 equazioni (1) dovranno avere i coefficienti legati dalla:

$$4\,(\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC})\,(\mathrm{B}'^2 - \mathrm{A}'\mathrm{C}') - (\mathrm{AC}' + \mathrm{A}'\mathrm{C} - 2\mathrm{BB}')^2 = 0.$$

Se ciò non accade, la superficie non può esser sviluppabile, ed è quindi una V_2 di S_3, segata da ogni suo piano tangente in una linea con 2 certe tangenti (assintotiche).

Ciò premesso dimostreremo l'importante teorema:

Se tutti gli iperpiani passanti per il piano tangente ad una superficie, la segano secondo una curva avente un punto doppio con due tangenti fisse, la superficie è immersa in uno spazio a tre dimensioni.

Infatti, si abbiano per ogni iperpiano tangente ξ due tangenti fisse. L'equazione:

$$(\xi, x_{uu})\,du^2 + 2\,(\xi, x_{uv})\,dudv + (\xi, x_{vv})\,dv^2 = 0$$

che ci darebbe le tangenti, dovrà coincidere con un'equazione:

$$\mathrm{M}du^2 + 2\mathrm{N}dudv + \mathrm{P}dv^2 = 0$$

i cui coefficienti non dipendano da ξ. Avremo dunque le:

$$(\xi, x_{uu}) : \mathrm{M} = (\xi, x_{uv}) : \mathrm{N} = (\xi, x_{vv}) : \mathrm{P}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} (\xi, \mathrm{N}x_{uu} - \mathrm{M}x_{uv}) &= 0 \\ (\xi, \mathrm{P}x_{uu} - \mathrm{M}x_{vv}) &= 0 \\ (\xi, \mathrm{P}x_{uv} - \mathrm{N}x_{vv}) &= 0 \end{aligned}$$

le quali ci dicono, che ogni iperspazio ξ, che passi per i punti di coordinate x, x_u, x_v, passa pure per i tre punti di coordinate:

$$\mathrm{N}x_{uu} - \mathrm{M}x_{uv}, \qquad \mathrm{P}x_{uu} - \mathrm{M}x_{vv}, \qquad \mathrm{P}x_{uv} - \mathrm{N}x_{vv}$$

i quali stanno in conseguenza nel piano x, x_u, x_v. Dunque il piano tangente alla superficie ha tre punti (generalmente allineati) a comune col piano χ; perciò i due piani stanno in uno S_3 e quindi le coordinate dei punti della V_2 sodisfano a due distinte equazioni differenziali. Ma la V_2 non è una sviluppabile, perchè non è tagliata da ogni iperpiano tangente secondo una curva con cuspide (ma con 2 tg. distinte, per ipotesi); dunque la V_2 giace in uno S_3.

5. Alcune di queste proprietà si possono estendere facilmente al caso di $r > 2$. Anzitutto, se una superficie è tale che tutti gl'iperpiani r tangenti la tagliano secondo curve aventi nel punto r^{plo} una tangente fissa, assunta la direzione di essa, come direzione $dv = 0$, le r^{ple} saranno apolari alla forma $dv^r = 0$ e quindi l'equazione differenziale prenderà la forma:

$$\mathrm{A}\frac{d^r x}{du^2} + \mathrm{H}\frac{d^{r-1}x}{du^{2-1}} + \ldots = 0$$

cioè avrà un solo termine con derivate di r^{esimo} ordine. Dunque il punto di coordinate $\frac{d^r x}{du^r}$ sta nello spazio r-tangente; questo punto è dunque comune allo spazio r-tangente e allo spazio dei punti che hanno per coordinate le derivate r^{esime}; anzi questo punto si trova sulla r^{ica} normale corrispondente al valore $v' = 0$ del parametro da cui dipendono i punti della curva stessa.

Se tutti gli iperspazi ξ r-tangenti segano la superficie secondo curve con le medesime r tangenti nel punto di contatto, l'equazione

$$\left(\xi, \frac{d^r x}{du^r}\right) du^r + r\left(\xi, \frac{d^r x}{du^{r-1}dv}\right) du^{r-1}dv + \ldots = 0$$

dovrà equivalere a una certa equazione

$$\mathrm{M}du^r + r\mathrm{N}du^{r-1}dv + \ldots = 0 \tag{1}$$

con coefficienti non dipendenti da ξ (purchè ξ passi per lo spazio r-tangente). Concluderemo, ragionando come poc'anzi, che ogni iperspazio passante per lo spazio r-tangente, passa per i punti:

$$\mathrm{M}\frac{d^r x}{du^{r-1}dv} - \mathrm{N}\frac{d^r x}{du^r} \text{ ecc.} \ldots \tag{2}$$

Dunque lo S_r dei punti che hanno per coordinate le derivate r^{esime}, incontra secondo lo S_{r-1} dei punti (2) lo spazio r-tangente (a $\frac{(r-1)(r-2)}{2}$ dimensioni). Allora i punti di coordinate,

$$x, \frac{dx}{du}, \ldots \quad \frac{d^r x}{du^r}, \ldots \quad \frac{d^r x}{dv_r}$$

non individuano uno $S_{\frac{r(r+3)}{2}}$, ma solamente uno $S_{\frac{r(r+1)}{2}}$, ossia si hanno $\frac{r(r+3)}{2} - \frac{r(r+1)}{2} = r$ equazioni differenziali di r^{esimo} ordine fra le x.

E poichè avevamo già dimostrato il teorema inverso, concluderemo dicendo:

Dire che tutte le sezioni iperpiane con punto r.$^{\text{plo}}$ *hanno le medesime tangenti, è lo stesso che dire che le coordinate dei punti della superficie sono legate da* r *equazioni differenziali lineari, alle derivate parziali di* r$^{\text{esimo}}$ *ordine* (dalle quali non si possa dedurre nessuna equazione di $(r - 1^{\text{esimo}})$ ordine).

Per queste superficie lo spazio $(r+1)$ tangente ha solo una dimensione di più che lo spazio r-tangente, e lo si ottiene proiettando quest'ultimo da un punto avente per coordinate le derivate r^{esime}, e non appartenente allo spazio r-tangente.

In generale le sezioni iperpiane con punto r^{plo} hanno r-tangenti distinte; ma ne coincidono due se il discriminante della

$$\left(\xi, \frac{d^r x}{du^r}\right) du^r + \ldots = 0 \tag{1}$$

è nullo. Si vede subito che due tangenti coincidono quando l'iperpiano segante passa per lo spazio r-tangente ed è tangente alla linea rappresentata parametricamente ponendo

$$x = \frac{d^r x}{du^r} + r\, \frac{d^r x}{du^{r-1} dv} v' + \ldots \tag{2}$$

Anzi, una sezione iperpiana con punto $r.^{\text{plo}}$ ha per tangenti le r rette corrispondenti agli r punti che l'iperpiano che la produce ha di comune con la curva (2).

In generale: *lo studio delle proprietà dei punti multipli delle sezioni iperpiane si riduce allo studio delle intersezioni di un iperpiano con le curve* (2).

II. — Superficie di S_n luogo di curve immerse in S_r $(r > n)$.

1. Una superficie luogo di curve piane si ottiene ponendo

$$x_i = \lambda\varphi_i + \mu\psi_i + \nu\chi_i$$

dove λ, μ, ν son funzioni di due parametri u e v e φ, ψ, χ di uno solo v. In ciascun punto X della superficie φ, ψ, χ prendono $3(n-1)$ valori, che sono le coordinate di 3 punti Φ, Ψ, X nel piano dei quali sta il punto X. Al variare di u (fissato v) le λ, μ, ν prendono ∞' valori, che sono le coordinate proiettive (essendo Φ, Ψ, X punti di riferimento) dei punti della superficie che stanno nel piano $\Phi \Psi X$.

Se λ, μ, ν non dipendessero da v, tutte le curve della superficie sarebbero proiettivamente equivalenti, e la superficie verrebbe a essere come una generalizzazione delle superficie di traslazione. Le linee $v =$ cost. sono piane e si ottengono facendo variare la sola u, sicchè si prevede che le derivate parziali delle x fatte rispetto a u dovranno darci sempre coordinate di punti contenuti nel piano $\Phi\Psi X$, sicchè le dimensioni degli spazi in cui sono immerse le successive varietà di spazi osculatori subiranno degli abbassamenti.

Più precisamente troviamo che i punti

$$x, \; x_u, \ldots \frac{d^h x}{du^h}$$

stanno tutti quanti nel piano $\Phi\Psi X$, sicchè il luogo degli S_h osculatori, anzichè essere immerso in uno spazio a $\frac{h(h+3)}{2}$ dimensioni, è immerso in uno spazio di dimensione

$$\frac{h(h+3)}{2} - (h-2) = \frac{h(h-1)}{2} + 2.$$

Si avranno dunque $h-2$ equazioni differenziali alle derivate parziali di h^{esimo} ordine.

Una superficie luogo di curve immerse in S_h è data ponendo:

$$x_i = \sum_{l=1}^{h+1} \lambda_l \varphi_{i,l} \qquad (i = 1, \ldots n+1)$$

ove le λ sono funzioni di u e v e le φ della sola v.

Di qui si ricava

$$\frac{d^s x_i}{du^s} = \sum_{l=1}^{h+1} \frac{d^s \lambda_l}{du^s} \varphi_{il}$$

dunque gli $r+1$ punti che hanno per coordinate

$$x, x_u, x_{uu} \ldots \frac{d^r x}{du^r}$$

stanno nello S_h dei punti di coordinate:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{h+1}.$$

Dunque gli spazi k-tangenti ($k > h+1$) avranno $k-h-1$ dimensioni meno di quel che dovrebbero; saranno cioè spazi a $\frac{k(k-1)}{2} + h$ dimensioni. Di qui si deducono come casi particolari le proprietà già note delle superficie luogo di S_1 e S_2.

2. Consideriamo la semplice infinità di piani in cui giacciono le curve piane d'una superficie luogo di curve piane. Due piani infinitamente vicini (successivi, come si suol dire) sono incidenti, se esiste un punto le coordinate del quale siano contemporaneamente della forma

$$\lambda\varphi_i + \mu\psi_i + \nu\chi_i$$

e della forma

$$\lambda_1\varphi_{1i} + \mu\psi_{1i} + \nu_1\chi_{1i}$$

dove le φ e le φ_1 sono calcolate per due piani successivi. Dovranno dunque potersi determinare dei coefficienti λ_2, μ_2, ν_2, tali che si abbia lo stesso punto, prendendo per coordinate:

$$\lambda_2(\varphi_i - \varphi_{1i}) + \mu_2(\psi_i - \psi_{1i}) + \nu_2(\chi_i - \chi_{1i}) \qquad (1)$$

oppure:

$$\lambda\varphi_i + \mu\psi_i + \nu\chi_i . \qquad (2)$$

Dividiamo le coordinate (omogenee) (1) per $v - v_1$ e passiamo al limite, facendo avvicinare il 2° piano al 1° (e quindi v_1 a v); troveremo che uno stesso punto deve aver le coordinate combinazioni lineari di

$$\varphi'_i,\ \psi'_i,\ \chi'_i \qquad \text{e di} \qquad \varphi_i,\ \psi_i,\ \chi_i .$$

Dunque i sei punti di coordinate $\varphi_i, \psi_i, \chi_i, \varphi'_i, \varphi'_i, \chi'_i$ stanno su due piani che s'incontrano, e perciò in uno S_4.

Perciò: *almeno due distinte equazioni differenziali alle derivate parziali di 3° ordine legano le coordinate dei punti della superficie luogo di curve piane se i piani di due linee successive s'incontrano.*

3. La ricerca dell'equazione differenziale di 3° ordine a cui sodisfanno le coordinate dei punti d'una superficie luogo di curve piane ci condurrà a una proprietà notevole.

La coesistenza delle:

$$-x_i + \lambda\varphi_i + \mu\psi_i + \nu\chi_i = 0$$

$$-x_{u,i} + \frac{d\lambda}{du}\psi_i + \frac{d\mu}{du}\psi_i + \frac{dv}{du}\chi_i = 0$$

$$-x_{uu,i} + \frac{d^2\lambda}{du^2}\varphi_i + \frac{d^2\mu}{du^2}\psi_i + \frac{d^2v}{du^2}\chi_i = 0$$

$$-x_{uuu,i} + \frac{d^2\lambda}{du^3}\varphi_i + \frac{d^2\mu}{du^2}\psi_i + \frac{d^2v}{du^2}\chi_i = 0$$

porta a annullare il determinante dei coefficienti e dei termini noti:

$$\begin{vmatrix} x & x_u & x_{uu} & x_{uuu} \\ \lambda & \dfrac{d\lambda}{du} & \dfrac{d^2\lambda}{du^2} & \dfrac{d^3\lambda}{du^3} \\ \mu & \dfrac{d\mu}{du} & \dfrac{d^2\mu}{du^2} & \dfrac{d^3\mu}{du^3} \\ \nu & \dfrac{dv}{du} & \dfrac{d^2v}{du^2} & \dfrac{d^3v}{du^3} \end{vmatrix} = 0 .$$

Dunque le terne di tangenti alle sezioni iperpiane con punto triplo sono apolari alla terna:

$$dv^3 \begin{vmatrix} \lambda & \frac{d\lambda}{du} & \frac{d^2\lambda}{du^2} \\ \mu & \frac{d\mu}{du} & \frac{d^2\mu}{du^2} \\ \nu & \frac{d\nu}{du} & \frac{d^2\nu}{du^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Se il determinante non è nullo, questa terna è definita ed è formata da $dv = 0$ tre volte; e poichè λ, μ, ν sono coordinate proiettive dei punti delle curve piane che generano la superficie, potremo concludere: *Le terne di tangenti alle sezioni iperpiane con punto triplo di una superficie luogo di curve piane (ma non rigata) contengono la tangente alla curva piana passante per il punto che si considera.*

Terminerò per ora con un cenno sulle rigate.

Si può dimostrare, seguendo la via suggerita dalle precedenti considerazioni generali che *le sezioni iperpiane con punto r.plo di una rigata hanno come tangenti la retta della rigata passante per il punto che si considera (la qual retta conta per $r-1$) ed un'altra retta qualunque fra le tangenti alla superficie in quel punto.*

Ciò si deduce anche dal fatto che l'r.ica normale, più volte considerata è, in questo caso, una retta. E poichè un iperpiano r-tangente taglia una retta in un sol punto, si potrà imporre ad una sezione iperpiana con punto r.plo di aver una sola tangente, da fissarsi ad arbitrio, fra le ∞^1 esistenti.

Emilio Artom.

LE IDENTITÀ DI TIPO

$$\prod_1^k (a_{k1}^2 + \alpha a_{k2}^2) = A_{k1}^2 + \alpha A_{k2}^2$$

1. La notissima identità

$$(a_{11}^2 + \alpha a_{12}^2)(a_{21}^2 + \alpha a_{22}^2) = (a_{11}a_{21} \pm \alpha a_{12}a_{22})^2 + \alpha(a_{11}a_{22} \mp a_{12}a_{21})^2 \quad (1)$$

applicata successivamente ad un numero qualunque di fattori e sempre in modo analogo alla (1) (conservando cioè lo stesso ordine di successione nel doppio segno e nelle basi dei quadrati) dà, in generale ed in forma ricorrente:

$$\begin{aligned} A^2_{k1} + \alpha A^2_{k2} &= (A^2_{k-1,1} + \alpha A^2_{k-1,2})_{k-2} (a^2_{k1} + \alpha a^2_{k2}) = \\ &= (A_{k-1,1} a_{k1} \pm \alpha A_{k-1,2} a_{k2})^2_{k-1} + \alpha (A_{k-1,1} a_{k2} \mp A_{k-1,2} a_{k-1})^2_{k-1} \end{aligned} \qquad (2)$$

dove chiameremo $(\ )_n$ *parentesi di grado* n.

Dalla (2), previa sostituzione delle a alle A ed applicazione della proprietà distributiva della moltiplicazione (pur conservando le varie parentesi per via del doppio segno), si scorge che:

1°. I segni superiori ed inferiori, contenuti nelle parentesi dello stesso grado (il più piccolo possibile), si corrispondono; sono invece indipendenti quelli contenuti in parentesi di grado diverso. Le due parentesi di grado massimo (che comprendono le basi dei due quadrati) sono separate dal segno semplice $+$.

2°. Il fattore costante α segue immediatamente il segno $+$ sempre e solo quando questi è semplice o di posto superiore.

3°. Tutti i segni $+$ e $-$, contenuti nelle parentesi dello stesso grado, si susseguono costantemente in modo alternato.

4°. I termini sono in numero di 2^k e ciascuno è composto di k fattori (si esclude α).

5°. I primi indici formano, in ogni termine, la successione ordinata dei numeri naturali da 1 a k; i secondi indici, in due termini qualsiasi, formano distribuzioni diverse degli elementi 1 e 2, o per il numero di ciascuno di essi o per l'ordine in cui sono disposti.

6°. Qualunque sia la specie di distribuzione dei secondi indici in ciascun termine, dalle 2^{k-1} distribuzioni di $A_{k-1,1}$ ed $A_{k-1,2}$ si ottengono quelle di A_{k1} ed A_{k2} aggiungendo prima l'elemento 1 a quelle di $A_{k-1,1}$, quindi l'elemento 2 a quelle di $A_{k-1,2}$, poscia ancora l'elemento 2 a quelle di $A_{k-1,1}$ ed infine l'elemento 1 a quelle di $A_{k-1,2}$.

7°. L'operazione precedente si compie pure quando dalle $D'_{2,k-1}$ (1) si vogliono ottenere le $D'_{2,k}$; per $k = 1,2$ i secondi indici formano appunto, e ciò è una semplice constatazione di fatto, le $D'_{2,1}$ e $D'_{2,2}$ rispettivamente.

Dalle preesposte considerazioni si ricavano i seguenti teoremi:

Teorema I. — *Il prodotto*

$$(a^2_{11} + \alpha a^2_{12})(a^2_{21} + \alpha a^2_{22}) \ldots (a^2_{k1} + \alpha a^2_{k2})$$

è scomponibile in 2^{k-1} *modi, generalmente distinti, in una forma simile ai fattori.*

Teorema II. — *I termini di* A_{k1} *ed* A_{k2} *hanno la forma*

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ki_k} \qquad (3)$$

(1) $D'_{r,s}$ = disposizioni con ripetizione di r elementi ad s ad s.

essendo i secondi indici estesi a tutte e sole le disposizioni con ripetizione degli elementi 1 *e* 2 *a* k *a* k.

2. Per l'ordine di successione dei termini (ossia delle disposizioni dei secondi indici), le considerazioni già fatte ci forniscono il quadro

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & \ldots \\
1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & \ldots \\
1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & \ldots \\
1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \ldots \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots
\end{array} \tag{4}$$

la cui regola di formazione è la seguente:

Nella prima orizzontale si scrivono alternativamente i numeri 1 e 2. Nella n^{esima} orizzontale ($n > 1$) si scrivono di seguito: 2^{n-2} elementi 1, 2^{n-1} elementi 2, altri 2^{n-2} elementi 1; si hanno in tutto 2^n elementi i quali costituiscono un periodo.

I numeri della n^{esima} verticale (a cominciare dall'alto) costituiscono i secondi indici (a partire da sinistra) dell'n^{esimo} termine.

Facendo $n = k$ ed arrestando il quadro alla verticale di posto 2^k (l'ultima orizzontale sarà allora composta di un solo periodo) si ha la successione ordinata dei termini componenti le quantità

$$A_{k1} \quad \text{ed} \quad A_{k2}\,.$$

Ad es. la settima verticale dà il termine

$$a_{11}\, a_{22}\, a_{31}\, a_{42}\, a_{51}\, a_{61} \ldots . \tag{5}$$

Per ciò che riguarda le parentesi, e quindi anche la scelta dei segni ed il collocamento del fattore α, si ha che, a partire dal primo termine, ogni gruppo di due termini è compreso da una parentesi di grado 1, ogni gruppo di 4 da una parentesi di grado 2, ed in generale ogni gruppo di 2^n termini è compreso da una parentesi di grado n. (¹)

Come esempio a schiarimento di quanto si è detto diamo lo sviluppo di

$$A^2_{41} + \alpha A^2_{42}\,. \text{ (}^2\text{)}$$

Si ha intanto il quadro:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

(¹) È ovvio che se per le A risultassero valori negativi, per il fatto dell'innalzamento a quadrato le stesse quantità possono prendersi positivamente.

(²) Quistione n. 1142 del *Supplemento al Periodico di Matematica*, anno XIV, fasc. IV, proposta dal prof. C. Alasia.

Quindi:

$$\begin{aligned}A^2_{41} + \alpha A^2_{42} &= (a^2_{11} + \alpha a^2_{12})(a^2_{21} + \alpha a^2_{22})(a^2_{31} + \alpha a^2_{32})(a^2_{41} + \alpha a^2_{42}) = \\ &= \{[(a_{11}a_{21}a_{31}a_{41} \pm \alpha a_{12}a_{22}a_{31}a_{41}) \pm \alpha(a_{11}a_{22}a_{32}a_{41} \mp a_{12}a_{21}a_{32}a_{41})] \pm \\ &\pm \alpha[(a_{11}a_{21}a_{32}a_{42} \pm \alpha a_{12}a_{22}a_{32}a_{42}) \mp (a_{11}a_{22}a_{31}a_{42} \mp a_{12}a_{21}a_{31}a_{42})]\}^2 + \\ &+ \alpha\{[(a_{11}a_{21}a_{31}a_{42} \pm \alpha a_{12}a_{22}a_{31}a_{42}) \pm \alpha(a_{11}a_{22}a_{32}a a_{42} \mp a_{12}a_{21}a_{32}a_{42})] \\ &\mp [(a_{11}a_{31}a_{32}a_{41} \pm \alpha a_{12}a_{22}a_{32}a_{41}) \mp (a_{11}a_{22}a_{31}a_{41} \mp a_{12}a_{21}a_{31}a_{41})]\}^2 .\end{aligned}$$

Sdoppiando i segni si hanno $2^3 = 8$ scomposizioni.

3. Se i primi indici delle a sono eguali, la (2) prende la forma

$$A^2_{k1} + \alpha A^2_{k2} = (a_1^2 + \alpha a_2^2)^k \qquad (7)$$

ed il termine (3) diventa

$$a_1^{n_1}\, a_2^{n_2}$$

dove $n_1 + n_2 = k$, indicando n_1 ed n_2 il numero dei fattori rispettivamente eguali ad a_1 ed a_2. Poichè i fattori col secondo indice eguale diventano eguali, nel quadro (4) il numero degli elementi 1 o 2 di una verticale corrisponderà all'esponente delle potenze di a_1 ed a_2 rispettivamente.

Così il termine (5) diventa:

$$a_1^{4+\ldots}\, a_2^{2+\ldots}$$

Il numero delle scomposizioni distinte del primo membro della (7) è allora minore di 2^{k-1}. Ciò è evidente; infatti, dall'esame del quadro (4), si scorge che ad eccezione dei termini a_1^k ed a_2^k, tutti gli altri si ripetono, essendovene precisamente $\binom{k}{1}$ eguali ad $a_1 a_2^{k-1}$, $\binom{k}{2}$ eguali ad $a_1^2 a_2^{k-2}$, ed in generale $\binom{k}{n}$ eguali ad $a_1^n a_2^{k-n}$.

Ne segue quindi che, procedendosi allo sdoppiamento dei segni, alcune scomposizioni si ripetono.

Il numero delle scomposizioni distinte, contando anche la $P^2 + 0^2$ per $k = 2h$, è uguale a

$$E\left(\frac{k}{2}\right) + 1,$$

dove $E\left(\frac{k}{2}\right)$ è la parte intera del quoziente $\frac{k}{2}$. [1]

[1] La verità dell'asserto discende dalla considerazione del sistema

$$x_0^2 = \binom{k}{0}$$

$$y_0^2 + 2x_0x_1 = \binom{k}{1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

che risulta dall'applicazione del principio d'identità alla

$$(x_0 a_1^k + x_1 \alpha a_1^{k-2} a_2^2 + \ldots)^2 + \alpha(y_0 a_1^{k-1} a_2 + y_1 \alpha a_1^{k-3} a_2^3 + \ldots)^2 = (a_1^2 + \alpha a_2^2)^k.$$

ESEMPI. — Per $k=2, 3, 4, 5$, si hanno le scomposizioni:

$$
\begin{aligned}
(a_1^2+\alpha a_2^2)^2 &= (a_1^2+\alpha a_1^2)^2+\alpha\,.\,0^2\\
&= (a_1^2-\alpha a_2^2)^2+\alpha\,(2a_1a_2)^2\\
(a_1^2+\alpha a_2^2)^3 &= (a_1^3+\alpha a_1a_2^2)^2+\alpha\,(a_1^2a_2+\alpha a_1^3)^2\\
&= (a_1^3-3\alpha a_1a_2^2)^2+\alpha\,(3a_1^2a_2-\alpha a_2^3)^2\\
(a_1^2+\alpha a_2^2)^4 &= (a_1^4+2\alpha a_1^2a_2^2+\alpha^2a_2^4)^2+\alpha\,.\,0^2\\
&= (a_1^4-\alpha^2a_2^4)^2+\alpha\,(2a_1^3a_2+2\alpha a_1a_2^3)^2\\
&= (a_1^4-6\alpha a_1^2a_2^2+\alpha^2a_1^4)^2+\alpha\,(4a_1^3a_2-4\alpha a_1a_2^3)^2\\
(a_1^2+\alpha a_2^2)^5 &= (a_1^5-2\alpha a_1^3a_2^2-3\alpha^2a_1a_2^4)^2+\alpha(3a_1^4a_2+2\alpha a_1^3\,a_2^3-\alpha^2a_2^5)^2\\
&= (a_1^5+2\alpha a_1^3a_2^2+\alpha^2a_1a_2^4)^2+\alpha\,(a_1^4a_2+2\alpha a_1^2a_2^3+\alpha^2a_2^5)^2\\
&= (a_1^5-10\alpha a_1^3a_2^2+5\alpha^2a_1a_2^4)^2+\alpha(5a_1^4a_2-10\alpha a_1^2a_2^3+\alpha^2a_2^5)^2.
\end{aligned}
$$

L'ultima scomposizione, per ogni valore di k, è la più interessante, perchè se a_1 e a_2 sono primi tra loro anche A_{k1} ed A_{k2} sono primi tra loro.

Inoltre la scomposizione medesima si può ottenere direttamente dalla (7). Infatti, scomponendo i due membri di essa nei loro fattori complessi si ha:

$$(A_{k1}+iA_{k2}\sqrt{\alpha})\,(A_{k1}-iA_{k2}\sqrt{\alpha})=(a_1+ia_2\sqrt{\alpha})^k\,(a_1-ia_2\sqrt{\alpha})^k.$$

Ponendo separatamente

$$
\begin{aligned}
A_{k1}+iA_{k2}\sqrt{\alpha} &= (a_1+ia_2\sqrt{\alpha})^k=\\
&= a_1^k+i\binom{k}{1}a_1^{k-1}a_2\sqrt{\alpha}+i^2\binom{k}{2}a_1^{k-2}a_2^2(\sqrt{\alpha})^2+\dots\\
&\qquad\dots+i^{k-1}\binom{k}{k-1}a_1\,a_2^{k-1}(\sqrt{\alpha})^{k-1}+i^ka_2^k(\sqrt{\alpha})^k\\
A_{k1}-iA_{k2}\sqrt{\alpha} &= (a_1-ia_2\sqrt{\alpha})^k=\\
&= a_1^k-i\binom{k}{1}a_1^{k-1}a_2\sqrt{\alpha}+i^2\binom{k}{2}a_1^{k-2}a_2^2(\sqrt{\alpha})^2-\dots\\
&\qquad\dots+(-1)^{k-1}i^{k-1}\binom{k}{k-1}a_1\,a_2^{k-1}(\sqrt{\alpha})^{k-1}+(-1)^k\,i^k\,a_2^k(\sqrt{\alpha})^k
\end{aligned}
$$

si ottiene, sommando e sottraendo, sopprimendo i fattori comuni e sostituendo ad i il suo valore numerico:

$$A_{k1}=a_1^k-\binom{k}{2}\alpha a_1^{k-2}a_2^2+\dots\begin{cases}\dots\pm\alpha^{\frac{k}{2}}a_2^k & \text{(per } k \text{ pari)}\\ \dots\pm\alpha^{\frac{k-1}{2}}ka_1a_2^{k-1} & \text{(per } k \text{ dispari)}\end{cases}$$

$$A_{k2}=ka_1^{k-1}a_2-\binom{k}{3}\alpha a_1^{k-3}a_2^3+\dots\begin{cases}\dots\mp\alpha^{\frac{k-2}{2}}ka_1a_2^{k-1} & \text{(per } k \text{ pari)}\\ \dots\mp\alpha^{\frac{k-1}{2}}a_2^k & \text{(per } k \text{ dispari).}\end{cases}$$

dove i segni superiori ed inferiori si corrispondono e va scelto il primo o l'altro secondo che k è della forma

$$\begin{array}{cccl} 4h & \text{o} & 4h+2 & \text{(per } k \text{ pari)} \\ 4h+1 & \text{o} & 4h+3 & \text{(per } k \text{ dispari).} \end{array}$$

4. Sono casi notevoli i due che si presentano nel porre $\alpha=1$ ed $\alpha=-1$; la (2) dà allora rispettivamente le scomposizioni in somma e differenza di due quadrati.

Osserviamo pure che per $\alpha=-1$ i doppi segni non si succedono più in modo alternato; diventano tutti negativi i superiori e positivi gl'inferiori.

5. Quanto abbiamo esposto nei precedenti numeri si può applicare alla risoluzione di parecchie questioni interessanti. (1)

Accenneremo alle cinque seguenti.

I. Determinare infinite soluzioni intere dell'equazione indeterminata:

$$x^2+\alpha y^2=cz^n .$$

Se c è della forma $p^2+\alpha q^2$, posto

$$x=pr \pm \alpha qs , \qquad y=ps \mp qr$$

e sostituendo, l'equazione data si trasforma nell'altra

$$r^2+\alpha s^2=z^n$$

che è soddisfatta da

$$r=\mathrm{A}_{n1} , \qquad s=\mathrm{A}_{n2} , \qquad z=a_1{}^2+\alpha a_2{}^2.$$

II. Determinare il più piccolo numero scomponibile in 2^n modi distinti in una somma di due quadrati primi tra loro, nessuno dei quali sia nullo.

Poichè ogni numero primo della forma $4p+1$ è sempre ed in un sol modo scomponibile nella somma di due quadrati, basterà eseguire il prodotto dei primi $n+1$ numeri primi di detta forma, ed applicare poscia le regole svolte. (2)

Essendo, ad es.,

$$5, \quad 13, \quad 17, \quad 29, \ldots$$

i primi numeri della forma voluta, sarà:

$$5=2^2+1^2$$
$$5 \,.\, 13=(2^2+1^2)\,(3^2+2^2)=1^2+8^2=4^2+7^2$$

---

(1) Le questioni che seguono vennero tutte e ripetutamente proposte nell' *Intermédiaire des Mathématiciens.*

(2) Semplici considerazioni forniscono i valori che devono assumere gli $n+1$ numeri a_i perchè il prodotto

$$2^{a_1} \,.\, 5^{a_2} \,.\, 13^{a_3} \ldots .$$

sia scomponibile in un numero ϱ di modi distinti in somma di due quadrati compreso dalla limitazione

$$2^{n-1} < \varrho < 2^n .$$

$$5 . 13 . 17 = (2^2 + 1^2)(3^2 + 2^2)(4^2 + 1^2) =$$
$$= 4^2 + 33^2 = 9^2 + 32^2 = 12^2 + 31^2 = 23^2 + 24^2$$

$$5 . 13 . 17 . 29 = (2^2 + 1^2)(3^2 + 2^2)(4^2 + 1^2)(5^2 + 2^2) =$$
$$= 2^2 + 179^2 = 19^2 + 178^2 = 46^2 + 173^2 = 67^2 + 166^2 =$$
$$= 74^2 + 163^2 = 86^2 + 157^2 = 109^2 + 142^2 = 122^2 + 131^2 .$$

III. Determinare il più piccolo quadrato scomponibile in 2^n modi distinti in una somma di due quadrati.

Dovendo risolvere intanto il sistema

$$x^2 = y_1^2 + z_1^2 = y_2^2 + z_2^2 = \dots y_{2^n}^2 + z_{2^n}^2$$

basterà porre

$$y_1 = p_1^2 - q_1^2 \qquad z_1 = 2p_1q_1$$
$$y_2 = p_2^2 - q_2^2 \qquad z_2 = 2p_2q_2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

da cui

$$x = p_1^2 + q_1^2 = p_2^2 + q_2^2 = \dots = p_{2^n}^2 + q_{2^n}^2$$

la quale ha per soluzione minima

$$x = 5 . 13 \dots h$$

love h è l' $(n + 1)^{\text{esimo}}$ numero primo della forma $4p + 1$.

Così: per $n = 0$ si ha

$$x = 5 , \qquad p_1 = 2 , \qquad q_1 = 1 ,$$

facendo le debite sostituzioni nelle y e z:

$$5^2 = 3^2 + 4^2 .$$

Per $n = 1$ si ha

$$x = 5 . 13$$

pperò

iindi:

$$p_1 = 8 , \quad q_1 = 1 , \quad p_2 = 7 , \quad q_2 = 4 ,$$

$$65^2 = 16^2 + 63^2 = 33^2 + 56^2 .$$

Per $n = 2$ si ha

$$x = 5 . 13 . 17 = 1105,$$

allora:

$$1105^2 = 47^2 + 1104^2 = 264^2 + 1073^2 = 576^2 + 943^2 = 744^2 + 817^2 .$$

IV. Determinare la più piccola potenza $(p + 1)^{\text{esima}}$ scomponibile 2^p modi diversi in una somma di due quadrati.

Dal prodotto

$$(a_{11}^2 + a_{12}^2)(a_{21}^2 + a_{22}^2) \dots (a^2_{p+1,1} + a^2_{p+1,2})$$

›tterranno le 2^p scomposizioni

$$b_1^2 + c_1^2 = b_2^2 + c_2^2 = \dots$$

erò:

$$(b_1^2 + c_1^2)(b_2^2 + c_2^2) \dots = \prod_{k=1}^{k=p+1} (a_{k1}^2 + a_{k2}^2)^{p+1}$$

dove il primo membro offre 2^p scomposizioni (perchè, pur essendo eguali i fattori, sono in generale diverse le basi dei quadrati) e la soluzione minima corrisponde alla scelta dei numeri 5, 13, 17, ... per i fattori del secondo membro.

V. Determinare il più piccolo numero scomponibile in due modi diversi in una somma di due biquadrati.

Dall'esame dei numeri A_{k1} ed A_{k2} pei tre primi valori 2, 3 e 4 di k, previo raccoglimento del fattore a_{11} nei polinomi formati dalle diverse scomposizioni, si scorge che, affinchè A_{k1} e A_{k2} siano alla loro volta quadrati, la più semplice condizione è che pure a_{11} sia quadrato. Applicando quindi artifici notissimi e semplici di analisi indeterminata, si trova il numero richiesto ponendo $k = 4$ e scegliendo come fattori di $A_{41}^2 + A_{42}^2$ i numeri:

$$41, \quad 113, \quad 241, \quad 569.$$

Si ottiene così:

$$\begin{aligned} 41 \,.\, 113 \,.\, 241 \,.\, 569 &= (4^2+5^2)(7^2+8^2)(4^2+15^2)(13^2+20^2) = \\ &= 24281^2 + 6764^2 = 23591^2 + 8876^2 = \\ &= 16039^2 + 19444^2 = 11929^2 + 22204^2 = \\ &= 21401^2 + 13316^2 = 15449^2 + 19916^2 = \\ &= 3481^2 + 24964^2 = 17689^2 + 17956^2. \end{aligned}$$

Ma dalle due ultime scomposizioni si ha:

$$3481 = 59^2 \qquad 24964 = 158^2$$
$$17689 = 133^2 \qquad 17956 = 134^2$$

quindi la notevole identità:

$$59^4 + 158^4 = 133^4 + 134^4.$$

F. Ferrari.

SULLA CURVATURA DELLE LINEE GOBBE

Si può studiare per le linee gobbe, oltre la flessione e torsione, una terza curvatura la quale si definirà come il limite del rapporto fra l'angolo delle normali principali in due punti e l'arco compreso, quando uno dei punti tende all'altro.

Siano

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t)$$

le equazioni parametriche della linea Γ (che supponiamo regolare) (¹); $P(x, y, z)$ e Q due punti di essa, n ed n' le rispettive normali prin-

(¹) V. G. Bagnera, *Lezioni di Calcolo Infinitesimale*, Parte I, pag. 160.

cipali e Δs la lunghezza d'arco PQ. Le coordinate direttive della normale principale n sono, come è noto, i minori A, B, C di second'ordine della matrice

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ x' & y' & z' \end{Vmatrix}$$

(il secondo preso col segno cambiato) ed in questa, a, b, c indicano i minori di second'ordine della matrice:

$$\begin{Vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{Vmatrix}$$

(il secondo preso col segno cambiato). Come coordinate direttive della normale principale n' possiamo assumere

$$A+\Delta A\,, \qquad B+\Delta B\,, \qquad C+\Delta C$$

ed allora chiamando ω l'angolo delle n, n' avremo:

$$\operatorname{sen}\omega = \frac{\sqrt{\begin{Vmatrix} A & B & C \\ A+\Delta A & B+\Delta B & C+\Delta C \end{Vmatrix}^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{(A+\Delta A)^2+(B+\Delta B)^2+(C+\Delta C)^2}}\,.$$

Se si indica con Δt l'incremento del parametro t quando si passa da P a Q potremo scrivere l'eguaglianza che precede così:

$$\frac{\operatorname{sen}\omega}{\omega}\cdot\frac{\omega}{\Delta s} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left(B\dfrac{\Delta C}{\Delta t}-C\dfrac{\Delta B}{\Delta t}\right)^2+\left(C\dfrac{\Delta A}{\Delta t}-A\dfrac{\Delta C}{\Delta t}\right)^2+\left(A\dfrac{\Delta B}{\Delta t}-B\dfrac{\Delta A}{\Delta t}\right)^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{(A+\Delta A)^2+(B+\Delta B)^2+(C+\Delta C)^2}} : \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Passando al limite per Δt tendente a zero si ha facilmente:

$$\lim\frac{\omega}{\Delta s} = \frac{\sqrt{(BC'-CB')^2+(CA'-AC')^2+(AB'-BA')^2}}{(A^2+B^2+C^2)\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\,. \qquad (1)$$

Questa è l'espressione della curvatura cui alludevamo in principio. Noi la indicheremo con $\frac{1}{S}$ e per darle una forma più semplice, osserveremo che:

$$BC'-CB' =$$
$$= (cx'-az')(ay''+a'y'-bx''-b'x')-(ay'-bx')(cx''+c'x'-az''-a'z') =$$
$$= ac\,(x'y''-x''y')+a^2\,(y'z''-y''z')-ab\,(x'z''-x''z')+$$
$$+\,x'y'\,(a'c-ac')+x'^2\,(bc'-b'c)+x'z'\,(ab'-a'b) =$$
$$= ac^2+a^3+ab^2+x'y'\,(a'c-ac')+x'^2\,(bc'-b'c)+x'z'\,(ab'-a'b)$$

e, per note formole [1] risulta:

$$BC' - CB' = c^2 + a^3 + ab^2 + x'y'^2 D + x'^3 D + x'z'^2 D$$

dove D rappresenta il wronskiano delle x', y', z'. L'espressione precedente può scriversi:

$$BC' - CB' = x'D(x'^2 + y'^2 + z'^2) + a(a^2 + b^2 + c^2);$$

analogamente si trova:

$$CA' - AC' = y'D(x'^2 + y'^2 + z'^2) + b(a^2 + b^2 + c^2)$$
$$AB' - BA' = z'D(x'^2 + y'^2 + z'^2) + c(a^2 + b^2 + c^2).$$

Elevando a quadrato, poi sommando e tenendo presente che per l'ortogonalità delle due direzioni x', y', z' (tangente) ed a, b, c (binormale) è

$$ax' + by' + cz' = 0, \tag{2}$$

si ottiene:

$$(BC' - CB')^2 + (CA' - AC')^2 + (AB' - BA')^2 =$$
$$= D^2(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3 + (a^2 + b^2 + c^2)^3.$$

Inoltre $A^2 + B^2 + C^2$ dinota il quadrato della matrice:

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ x' & y' & z' \end{matrix} \right\|.$$

Moltiplicando questa matrice per se stessa e badando alla (2) risulta dunque:

$$A^2 + B^2 + C^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Sostituendo nella (1) troviamo;

$$\frac{1}{S} = \sqrt{\left(\frac{D}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}}$$

ossia in virtù di ben note formole:

$$\frac{1}{S} = \sqrt{\left(\frac{1}{T}\right)^2 + \left(\frac{1}{R}\right)^2} \tag{3}$$

dove $\frac{1}{R}$ ed $\frac{1}{T}$ rappresentano rispettivamente la flessione e torsione di Γ in P.

Per ottenere la terza curvatura $\frac{1}{S}$ basta dunque *comporre* le prime due curvature. Per le curve piane $\left(\frac{1}{T} = 0\right)$ la curvatura $\frac{1}{S}$ coincide con $\frac{1}{R}$.

R. Occhipinti.

---

[1] V. G. Bagnera, *loc. cit.* Parte II, pag. 42.

IL POLIGONO p-VOLTE GOBBO DELLO SPAZIO LINEARE con $p+2$ dimensioni

Definizione. — *Presi in uno spazio lineare* S_{p+2} $p+3$ *punti* indipendenti $A_1A_2A_3 \ldots A_{p+3}$, *tali cioè che* $p+2$ qualunque *di essi non appartengano a un* S_p, *se congiungiamo* A_1 *con* A_2, A_2 *con* A_3 *ecc.* A_{p+2} *con* A_{p+3} *e* A_{p+3} *con* A_1, *otteniamo una figura che chiameremo* poligono p-volte gobbo *di cui i punti dati sono i* vertici *e* $A_1A_2, A_2A_3 \ldots A_{p+3}A_1$ *sono i* lati.

In particolare se $p=1$ si ha il quadrilatero gobbo di S_3 che per uniformità di linguaggio chiameremo *quadrilatero semplicemente gobbo*.

Per ottenere un poligono p-volte gobbo basterà prendere in un S_2 dell'S_{p+2} un poligono piano $A_1A_2A_3 \ldots A_{p+3}$ e condurre per uno de' suoi vertici, per esempio per A_1, le p diagonali $A_1A_3, A_1A_4, \ldots A_1A_{p+2}$. Tenuto poi fisso il triangolo $A_1A_2A_3$ faremo ruotare il poligono adiacente attorno alla diagonale A_1A_3 di un angolo ω_1, differente da 180°, indi tenuta fissa la figura $A_1A_2A_3A_4$ — che è un poligono semplicemente gobbo di S_3 — faremo ruotare il poligono adiacente di un angolo ω_2 differente da 180° attorno alla diagonale A_1A_4 e così tenendo fissa la figura $A_1A_2A_3A_4A_5$ — che è un poligono 2-volte gobbo di S_4 — faremo ruotare la figura adiacente attorno alla diagonale A_1A_5 di un angolo ω_3 differente da 180°. Questa operazione si potrà ripetere p-volte e l'ultima consisterà nel far ruotare il triangolo $A_{p+3}A_{p+2}A_1$ di un angolo ω_p sempre differente da 180°, attorno alla diagonale A_1A_{p+2}. Il poligono così ottenuto sarà manifestamente p-volte gobbo.

Ciò posto, noi ci proponiamo di estendere a questo poligono un noto teorema relativo al quadrilatero gobbo e che per l'S_3 si può enunciare così:

Se i lati AB, BC, CD, DA di un quadrilatero gobbo ABCD sono tagliati da un piano rispettivamente nei punti M, N, P, Q sussiste la relazione:

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} = +1.$$

e reciprocamente.

Questo teorema si dimostra (anche quando, più generalmente, il piano tagli i prolungamenti dei lati) facendo ricorso al teorema di Menelao.

Per estendere questo teorema riferiamoci dapprima al poligono 2-volte gobbo dell'S_4. Dimostreremo che

" Condizione necessaria e sufficiente perchè essendo $P_{i,i+1}$ un punto

« della retta che contiene il lato A_iAA_{i+1} (¹) esista un S_3 che contiene « i punti $P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{45}$ e P_{51} è che sia soddisfatta la relazione:

$$\frac{A_1P_{12}}{P_{12}A_2}\cdot\frac{A_2P_{23}}{P_{23}A_3}\cdot\frac{A_3P_{34}}{P_{34}A_4}\cdot\frac{A_4P_{45}}{P_{45}A_5}\cdot\frac{A_5P_{51}}{P_{51}A_1}=-1 \text{ ».} \tag{1}$$

La condizione è *necessaria*. Supponiamo infatti che esista un tale S_3 e consideriamo l'S_2 determinato dai punti P_{12}, P_{23}, P_{34} e l'S_1 determinato dai punti P_{45} e P_{51}. Questi due spazi giacendo in un S_3 avranno in comune un punto. D'altra parte l'S_2 suddetto e la retta A_1A_4 non potendo appartenersi (giacchè se così fosse, sarebbero in un S_2 i quattro punti A_1, A_2, A_3, A_4, contro il supposto) avranno essi pure un punto in comune, ed avranno pure un punto in comune anche la retta A_1A_4 e la retta $P_{51}P_{45}$ perchè giacenti entrambe nell'S_2 determinato dai punti A_1, A_4, A_5. Tali tre spazi dunque (cioè l'S_2 determinato da P_{12}, P_{23} e P_{34}, l'S_1 dei punti A_1 e A_4 e l'S_1 dei punti P_{51}, P_{45}) avendo due a due un unico punto comune passeranno per lo stesso punto, e quindi l'S_2 passerà pel punto comune alle rette A_1A_4 e $P_{51}P_{45}$. Diciamo P questo punto.

Ora, pel teorema noto relativo al quadrilatero gobbo, esistendo un S_2 che contiene i punti $P_{12} P_{23} P_{34}$ P, si avrà dalla figura $A_1A_2A_3A_4$:

$$\frac{A_1P_{12}}{P_{12}A_2}\cdot\frac{A_2P_{23}}{P_{23}A_3}\cdot\frac{A_3P_{34}}{P_{34}A_4}\cdot\frac{A_4P}{PA_1}=+1.$$

D'altra parte il triangolo $A_1A_4A_5$ tagliato dalla trasversale $PP_{51}P_{45}$ dà, applicando il teorema di Menelao:

$$\frac{A_1P}{PA_4}\cdot\frac{A_4P_{45}}{P_{45}A_5}\cdot\frac{A_5P_{51}}{P_{51}A_1}=-1,$$

per cui moltiplicando le due precedenti uguaglianze membro a membro e semplificando, si troverà precisamente la formola (1).

La condizione è *sufficiente*. Supponiamo che la formula (1) sia soddisfatta. Se non esiste un S_3 contenente i punti $P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{45}$ e P_{51}, sia Q il punto ove l'S_3 determinato dai primi quattro sega la retta A_1A_5. Si avrà allora necessariamente:

$$\frac{A_1P_{12}}{P_{12}A_2}\cdot\frac{A_2P_{23}}{P_{23}A_3}\cdot\frac{A_3P_{34}}{P_{34}A_4}\cdot\frac{A_4P_{45}}{P_{45}A_5}\cdot\frac{A_5Q}{QA_1}=-1.$$

Confrontando questa relazione con la (1) segue

$$\frac{A_5P_{51}}{P_{51}A_1}=\frac{A_5Q}{QA_1}$$

di cui si ricava che Q coincide con P_{51}.

(¹) Conveniamo che A_r, dove r è maggiore di $p+3$, rappresenti il vertice A_s del poligono per cui si ha:

$$r\equiv s \pmod{p+3}.$$

Andiamo ora a studiare il poligono 3 volte gobbo $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ dell'S_5. Con considerazioni del tutto analoghe a quelle fatte per il poligono 2 volte gobbo dell'S_4 si proverebbe che l'S_3 determinato dai punti P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{45} passa per il punto P comune alla retta A_1A_5 e alla retta $P_{56}P_{61}$. Applicando allora il teorema precedente al poligono 2-volte gobbo $A_1A_2A_3A_4A_5$ e il teorema di Menelao al triangolo $A_1A_5A_6$, si troverà facilmente:

$$\frac{A_1P_{12}}{P_{12}A_2}\cdot\frac{A_2P_{23}}{P_{23}A_3}\cdot\frac{A_3P_{34}}{P_{34}A_4}\cdot\frac{A_4P_{45}}{P_{45}A_5}\cdot\frac{A_5P_{56}}{P_{56}A_6}\cdot\frac{A_6P_{61}}{P_{61}A_1}=+1;$$

condizione di cui si potrà dimostrare la sufficienza in modo analogo a quello seguito sopra.

Risulta ora chiaro da quanto precede che la relazione che si troverebbe per il poligono 4 volte gobbo dell'S_5 avrebbe come secondo membro l'unità *negativa*, mentre si troverebbe l'unità *positiva* come secondo membro dellla analoga relazione per il poligono 5 volte gobbo dell'S_7.

Possiamo dunque enunciare in tutta la sua generalità il

Teorema. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè preso sulla retta di un lato generico A_iA_{i+1} del poligono p-volte gobbo di S_{p-2} un punto $P_{i,i+1}$, i punti $P_{12}\,P_{23}\,P_{34}\ldots P_{p+3.1}$ appartengano a un medesimo S_{p+1} è che sia soddisfatta la relazione:*

$$\frac{A_1P_{12}}{P_{12}A_2}\cdot\frac{A_2P_{23}}{P_{23}A_3}\cdots\frac{A_{p+3}P_{p+3.1}}{P_{p+3.1}A_1}=(-1)^{p+3}$$

$p+3$ indicando il numero dei vertici del poligono che si considera.

Osservazione I. — Supponiamo p dispari: allora il poligono ha un numero *pari* di lati e l'unità che figura nel secondo membro è positiva. Abbiamo manifestamente:

Negli spazi di dimensione dispari i punti di mezzo dei lati del poligono appartengono a un iperpiano.

Questo è un caso particolare dell'altro:

Se percorrendo il perimetro del poligono in un determinato verso, si divide ciascun lato nel rapporto delle potenze m-esime delle misure dei lati adiacenti, i punti di divisione appartengono a un iperpiano.

Notiamo ancora le due conseguenze:

Presa a considerare una qualunque coppia di lati opposti, se percorrendo il perimetro in un determinato verso, se ne divide uno nel rapporto $\frac{m}{n}$ e l'altro nel rapporto $\frac{n}{m}$, le congiungenti i punti di divisione appartengono a un iperpiano.

Un iperpiano parallelo alle rette di $\frac{p+1}{2}$ coppie di lati opposti divide i lati della rimanente coppia in parti proporzionali.

Osservazione II. — Supponiamo p pari, nel qual caso i lati sono in numero dispari e l'unità che figura al secondo membro è negativa. Sussistono i teoremi:

Se, astrazion fatta da un lato l, *si dividono per metà i lati rimanenti, i punti medi appartengono a un* S_{p+1} *parallelo alla retta del lato* l.

Questo è un caso particolare del resultato seguente che riportiamo solo per l'S_4:

Se nel pentagono $A_1A_2A_3A_4A_5$ *2 volte gobbo è*:

$$\frac{A_1P_{12}}{P_{12}A_2} = \frac{A_4P_{34}}{P_{34}A_3}, \qquad \frac{A_2P_{23}}{P_{23}A_3} = \frac{A_5P_{45}}{P_{45}A_4},$$

l'S_3 *dei punti* $P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{45}$ *è parallelo alla retta* A_1A_5.

Enrico Piccioli.

BIBLIOGRAFIA

Intorno a un trattato di Matematica finanziaria. (S. Ortu-Carboni, *Matematica finanziaria.* — Paravia, Torino, 1907).

Può taluno meravigliarsi che io parli di questo libro tanto tempo dopo la sua pubblicazione; ma chi avrà la pazienza di leggere queste righe comprenderà facilmente che il loro scopo non è quello solo delle solite recensioni, bensì di trattare — sopra un esempio — di una questione che mi sembra di grande importanza per l'indirizzo di tutti gli studi di matematica applicata. È questo interesse che io annetto alla quistione, appena accennata sopra una rivista di Studi attuariali, [1] che mi fa sperare di ottenere facilmente dal lettore l'assoluzione da un'accusa che, anche più facilmente, può venirgli fatto, in sulle prime, di tributarmi: di riaccendere, cioè, dopo quattro anni una polemica, appena abbozzata, fra l'autore del libro e l'autore d'una sua recensione.

Il dott. P. Michel nel fascicolo del marzo 1908 del citato *Bollettino*, dopo aver lodata la pubblicazione del prof. Ortu-Carboni ed espresso il parere che sarebbe stato conveniente maggiore estensione alle teorie introduttorie di matematica, per farne più largo uso nella trattazione della materia, scrive: Infine, per dovere di critico, debbo rilevare che in qualche punto si trovano delle tenui inesattezze di indole puramente matematica, ma d'altronde non è in lavori di natura applicativa come questo che si deve sottilizzare troppo in quistioni di rigore matematico.

Il prof. Ortu-Carboni, nel fascicolo dello stesso *Bollettino* dell'agosto successivo, in un articolo " Criteri unilaterali di giudizio sui trattati di Matematica

[1] *Bollettino dell'Associazione Italiana per l'incremento della Scienza degli Attuari.*

finanziaria „ vuole dimostrare l'opportunità di avere contenuto in limiti ristretti le teorie introduttive di matematica generale e di non aver usato nella trattazione della materia (come invece avrebbe desiderato il Michel) dei procedimenti uniformi basati sul Calcolo infinitesimale, nè del graficismo che avrebbe potuto fornire la Geometria analitica.

Egli dice, in sostanza, che le persone a cui, nella Scuola o fuori, è dedicato il libro non hanno cognizioni di matematica sufficienti per seguire la trattazione della matematica finanziaria basata sopra teorie che non siano fra le più elementari; e che perciò, se avesse fatto sistematico uso dell'analisi, avrebbe fatto opera pressochè inutile, giacchè non sarebbe stata compresa che da pochissimi. In quanto all'accenno del dott. Michel alle *tenui inesattezze di indole puramente matematica*, il prof. Ortu-Carboni si limita a dire, in una parentesi *“ l'egregio critico non ha avuto la cortesia di farci conoscere! „*

E, secondo me, il Michel ha proprio avuto il torto di non farle conoscere all'Autore; giacchè la sua risposta avrebbe avuto certo altra intonazione, e più interesse (almeno dal mio punto di vista, per quanto unilaterale, secondo l'Ortu-Carboni) perchè avrebbe fatta propria, credo, la scusa che il Michel stesso, da critico oltremodo cortese, mette innanzi colle parole *“ non è in lavori di natura applicativa come questo che si deve sottilizzare troppo in quistioni di rigore matematico „*.

Ecco il nocciolo della quistione! In che modo si deve intendere che in lavori di natura applicativa non si deve sottilizzare troppo in quistioni di rigore? Mi pare assai interessante fissarne bene l'interpretazione.

Secondo me, ciò dovrebbe significare che in lavori di matematica applicata non sia necessario scendere, ad ogni momento, a *dimostrare* la legittimità dei procedimenti usati; che dovendo ricorrere necessariamente all'approssimazione, si possa *talvolta* trascurare la *esposizione* della valutazione del grado e la determinazione del campo di sua validità, quando le dimostrazioni relative avrebbero bisogno di sviluppi eccessivamente lunghi o troppo difficili. Codeste lacune, imperdonabili in un lavoro di matematica pura, possono essere giustificate in lavori e libri di matematica applicata, a patto che la *mancanza del rigore* non sia da attribuirsi ai procedimenti usati, ma solo alla loro esposizione.

Chi usa di serie e di passaggi al limite deve necessariamente sapere se la serie sia convergente e di quale natura di convergenza si tratti, acciò su di essa possa operare in determinati modi; deve sapere se siano verificate le dovute restrizioni perchè il passaggio al limite sia legittimo: chi usa dell'approssimazione dovrà accertarsi che la sostituzione di una espressione approssimata alla vera porterà effettivamente ad una approssimazione nel risultato; dovrà dire, quando sia possibile, se l'approssimazione sia per eccesso o per difetto. [1]

Il libro dell'Ortu-Carboni non contiene lo svolgimento di nuove ricerche, ma la esposizione, con fini anche didattici, delle teorie note e di più larga applicazione della Matematica finanziaria: la compilazione di un Trattato siffatto ha esigenze più severe di quella di una Nota o di una Memoria. Nel primo capitolo sono svolti alcuni complementi di Matematica, necessarî per la intelligenza del libro. Nella prefazione l'A. dice che questi non debbono essere giudicati sotto

[1] Che il segno dell'approssimazione sia un elemento utilissimo è subito visto quando si rifletta che conoscendo due valori numerici approssimati l'uno per difetto e l'altro per eccesso, le cifre comuni nella loro espressione decimale sono certo cifre esatte del valore cercato: si conosce in tal modo anche un confine superiore per l'errore commesso.

l'esclusivo aspetto scientifico per intensità e rigore d'esposizione. Parrebbe del mio parere; ma, purtroppo, non è la mancanza di rigore nell'esposizione quello che il Michel chiama con eufemismo le lievi inesattezze; sono degli spropositi, alcuni dei quali grossolani, che producono doloroso stupore in chi rifletta che sono stati commessi da una persona cui ha arriso la fortuna di giungere all'insegnamento superiore!

Ne indicherò qualcuno: il lettore giudicherà se, unilateralmente fin che si voglia, non si ha il diritto di giudicare anche sotto l'aspetto matematico un libro... che è pur sempre di Matematica.

In un trattato di siffatta natura, io credo che si possa utilmente limitare a dare poche definizioni ed in forma non generale, vale a dire convenienti solo alla classe di enti che nel libro saranno presi in esame; ci si può limitare ad enunciare alcune proposizioni collo stesso sacrificio della generalità ed ometterne anche la dimostrazione: ma mi pare che non sia giustificabile mai il dare definizioni errate, enunciati incompleti, od imprecisi, od oscuri, dimostrazioni illusorie o false. E ciò è tanto più dannoso quando il libro è destinato alla Scuola ed a persone che non conoscono, nè apprenderanno poi, la Matematica.

Alla pagina 14 è detto che $\frac{b}{a}$ è una frazione propria perchè si suppone $a > b$; allora $\frac{-7}{2}$ è una frazione propria. Alla pagina seguente è detto

$$1 + b + b^2 + \ldots + b^n < \frac{1}{1-b}$$

senza dir niente di b: il numero 19, in cui è riportata la formula precedente, porta il titolo " Sviluppi approssimati di $(1+x)^n$, quando $x < 1$ " sempre perchè l'A. par che creda che i numeri negativi non siano fra quelli che sono minori di 1.

Alla pagina 16 è detto: " una successione di termini (reali) [1] $u_1, u_2, \ldots u_n \ldots$ in numero illimitato, formati con una determinata legge, dicesi *serie*, (serie infinita) ". Ma la *serie* è un'operazione, non una successione! Mentre a pagina 16 si indica una serie con " $u_1, u_2, u_3 \ldots u_n \ldots$ " 10 righe sotto è scritto " la serie $1 + x + x^2 + \ldots$ "

Al numero 25 della pagina 19 l'A. vuole dimostrare: " quando i termini di una serie non hanno lo stesso segno, essa sarà convergente se, prendendo tutti i termini collo stesso segno, si ottiene una serie convergente " e fa questo ragionamento: " Infatti essendo S'_n la somma dei primi n termini positivi ed S''_n quella dei primi n termini negativi della serie data, avremo

$$S'_n - S''_n = S_m.$$

Ora per ipotesi $S'_n + S''_n$ ha un limite finito S, per $n = \infty$: onde, in virtù di un noto teorema dei limiti, S'_n ed S''_n ammettono entrambe limiti finiti: in conseguenza, anche $S'_n - S''_n$, cioè S_m ammetterà un limite finito (minore che quello di $S'_n + S''_n$) ".

Prima di tutto o S''_n rappresenta la somma dei valori assoluti dei primi n termini negativi, oppure bisogna scambiare $S'_n - S''_n$ con $S'_n + S''_n$. Poi c'è da supporre che l'A. abbia voluto dire delle cose diverse assai da quelle che ha

[1] Che cosa sta a fare quella parola *reali*?

scritto: forse ha voluto sommare i primi n termini positivi ed i rimanenti $m - n$ negativi, in modo da ricomporre colle due somme parziali la somma dei primi m termini della serie data. Altrimenti, aver dimostrato che $S'_n - S''_n$ ha un limite finito per $n = \infty$, che cosa importa? La dimostrazione dell'A. inaugura lo strabiliante procedimento di dimostrare la convergenza di una serie provando che UNA successione di somme di un numero indefinitamente crescente di termini ha limite finito!

Pericolosa assai è l'asserzione che avendo $S'_n + S''_n$ limite finito, *in virtù di un noto teorema dei limiti*, debbano averlo singolarmente S'_n ed S''_n. Nessun lettore, ignaro d'Analisi, può pensare che il noto teorema non sia questo: " se esiste finito il limite di $a_n + b_n$ per $n = \infty$, esistono finiti i limiti di a_n e b_n " che non sussiste; poichè nessuno potrà credere che questo lettore, che conosce poco la Matematica, abbia tanta penetrazione da comprendere che il teorema vale qualora si aggiunga che a_n e b_n sono positivi. [1]

Lasciando da parte che la dimostrazione della convergenza della serie binominale mediante il criterio del n. 24 contiene una lacuna non tanto facile a colmarsi dal giovane studioso, veniamo ad esaminare il n. 27. Esso comincia con un lemma che è interessante di riportare nella sua integrità.

Se due serie

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots u_n + \dots$$
$$S' = u'_0 + u'_1 + u'_2 + \dots u'_n + \dots$$

sono convergenti (essendo a termini positivi o non perdendo esse la convergenza allorchè si rendono i loro termini positivi), *la serie*

$$(u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots)(u'_0 + u'_1 + \dots u'_n + \dots)$$

è pure convergente ed ha per somma SS'.

Ma in virtù di quale definizione, l'A. chiama serie l'espressione

$$(u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots)(u'_0 + u'_1 + \dots + u_n + \dots)?$$

Se non avesse così tosto dimenticata la sua definizione, non si sarebbe accorto che i termini in numero illimitato, formati con una determinata legge sono poco visibili?

Ma esilaranti sono le due righe che seguono: *Nelle Matematiche superiori se ne dà la dimostrazione che non si ritiene opportuno riportare qua.* In Nota poi è detto " Lo studioso può leggerla ed anche, volendo, approfondire questa teoria (qua appena accennata) con lo studio d'uno dei pregievoli trattati di Algebra elementare del Cappelli, del Pincherle, del Pascal ecc. ".

Ma bisogna proprio arrivare alle Matematiche superiori e non basta fermarsi a quelle elementarissime, per dimostrare questa proposizione " Se $a = a'$ e $b = b'$ è $ab = a'b'$ " alla quale si riduce sostanzialmente il lemma?

Con le citate opere l'A. non deve avere troppa dimestichezza se da esse non è riuscito ad apprendere la teoria della moltiplicazione delle serie. Invero non

[1] Poichè l'A. sa che ai più dei lettori si affacciano per la prima volta questi concetti tutt'altro che facili, perchè non ha cura di scrivere in modo da non essere facilmente frainteso? L'enunciato della proposizione, poco felice anche per la sintassi, può lasciare nell'inesperto lettore il dubbio che per la convergenza della serie sia necessaria la convergenza assoluta: bastava un'inversione nel periodo a renderlo più preciso. Così alla pagina 513 l'enunciato " una funzione $f(x)$ è finita e continua in un intervallo se la derivata $f'(x)$ è sempre finita in quell'intervallo " è formulato in modo da lasciar supporre sia necessaria la derivabilità per la continuità di una funzione.

può conoscerla chi scrive (oltre quel lemma): " Poichè queste due serie binomiali sono convergenti, sarà per il lemma precedente

$$f(m)\,f(m') = \left[1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \ldots\right]\left[1 + \binom{m'}{1}x + \binom{m'}{2}x^2 + \ldots\right]. \quad (1)$$

Di qui evidentemente

$$f(m)\,f(m') = 1 + \left[\binom{m}{1} + \binom{m'}{1}\right]x + \left[\binom{m}{2} + \binom{m}{1}\binom{m'}{1} + \binom{m'}{2}\right]x^2 + \ldots \quad (2)$$

La (1) si può scrivere manifestamente anche se le due serie non sono dotate della conseguenza assoluta, essendo un'identità; ed il passaggio alla (2), anzichè evidente, è il contenuto di quella proposizione che è dimostrata nei pregevoli trattati citati e che l'A. ha creduto di aver così leggiadramente semplificata!

Il n. 29 porta il titolo " Limite di $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha$, per $\alpha < 1$ ", ripetuto nell'indice. Supposto che il proto abbia invertito il segno di disuglianza, neanche " limite di $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha$ per $\alpha > 1$ " vuol dir niente: è chiaro che bisogna dire " limite superiore di $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha$ " oppure " limite di $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha$ per $\alpha = \infty$ ". Una confusione in questi concetti mi sembra abbastanza grave!

A pag. 25, stabilita l'eguaglianza

$$\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha = 2 + \frac{1 - \frac{1}{\alpha}}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)}{3!} + \ldots$$

l'A. scrive: " Per conseguenza, siccome $\frac{1}{\alpha}, \frac{2}{\alpha}$ convergono a zero, mentre α converge all'infinito:

$$\lim_{\alpha=\infty}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \text{"}.$$

Per chi conosce l'Analisi, quel " per conseguenza " vale... ciò che vale: su per giù quel che vale l'" evidentemente " di poco fa; per chi non lo conosce (come è delle persone a cui il libro è destinato) non può essere la causa di formidabili spropositi? Chi non si sentirà autorizzato da quel " per conseguenza ", e dall'" in virtù delle note proprietà dei limiti " usato a pagina 26 e dall'" evidentemente " della pagina 27 a passare al limite nei termini di una qualunque serie e a ritenere più che vero che il limite della somma di infiniti termini sia la somma dei limiti? Il non mettere in guardia lo studioso che certi procedimenti sono legittimi solamente sotto delle condizioni restrittive, non è solo trascurare il rigore matematico, è una colpa... puramente matematica, si intende, tanto più grave quanto più ignaro di Matematica è il lettore.

A pag. 27 è detto che lo sviluppo

$$l(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

è valido per $x < 1$; e se fosse $x \leqslant -1$? E le serie (15) (15') (15'') della pag. 28 dove convergono?

Nel n. 45 si vuol dare dall'A. una definizione di interpolazione: ma dubito assai che chi non sa cosa essa sia, possa comprenderne l'essenza da queste righe alquanto oscure: “ Quando, conoscendo alcuni termini di una successione, se ne trovano degli altri, compresi o no fra i dati, si dice che si *interpolano* tali valori (intermedî o no); e chiameremo appunto *interpolazione* ogni procedimento col quale, essendo noto un certo numero di termini d'una successione, se ne determinano degli altri della stessa successione (posti o no fra i dati) „. Poi l'A. aggiunge “ Se la legge, con cui varia una funzione, è nota ed è espressa algebricamente con una formula, si sa determinare il valore della funzione corrispondente ad un valore della variabile. Perciò, conoscendo una successione di valori della funzione, si possono trovare quanti si vogliano termini di tale successione (compresi o no fra i dati) „. Che cosa importa di conoscere una successione di valori della funzione per averne degli altri? non basta la sua espressione algebrica? E se la successione si conosce, ci vuole l'interpolazione per trovare dei termini di *tale* successione?

Tutto il paragrafo “ Formule di interpolazione „ non pecca di troppa chiarezza ed esattezza: al n. 48 è detto “ quando, in particolare, gli h termini dati e quello cercato costituiscono una successione di $h+1$ valori equidistanti „ per dire, nientemeno, che sono valori assunti da una funzione in punti di ascisse costituenti una progressione aritmetica.

E poichè dagli spropositi siamo passati alle imprecisioni e nebulosità, merita conto di rilevare la definizione di derivata ad uso di chi sa poco anche la matematica elementare:

“ Se $y=f(x)$ è una funzione continua della variabile indipendente x ed h è un incremento infinitesimo di x,

$$\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\text{, ossia il rapporto }\frac{dy}{dx}\text{ di differenziali (a meno di un infinitesimo di 2° ordine)}$$

chiamasi derivata di y o di $f(x)$ rispetto ad x; indicasi con uno dei simboli

$$f(x),\ y',\ Df(x)\ „\ (^1).$$

Quale portentoso sussidio all'intelligenza del concetto di derivata portano le parole “ ossia il rapporto $\frac{dy}{dx}$ di differenziali „!

Concetto più semplice, certamente noto al lettore del libro, non è vero? E la parentesi, ammettendo che esprimesse qualcosa di vero, come spiega bene? Anche l'ordine di infinitesimo che concetto semplice e alla mano del lettore!?

Per fortuna il prof. Ortu-Carboni ci ha ammannite le lezioni di Calcolo, insieme con le applicazioni, in sole 10 pagine.

A pagina 87 è detto che dei numeri $\binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \binom{n}{4}, \ldots$ ove n, non intero, è maggiore di 1, quelli di posto dispari sono positivi e quelli di posto pari sono negativi: ciò è falso; basta pensare che se $n>p$ i numeri $\binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \ldots \binom{n}{p}$ sono tutti positivi. Ad onor del vero, ciò non infirma la notissima conclusione.

Alla pagina 511 è detto “ Se di una funzione si conosce lo sviluppo in serie di potenze, il suo integrale indefinito può esprimersi con una serie dello stesso tipo „ ma non è mai stato detto come una funzione possa esprimersi mediante

(1) E perchè non con $\frac{dy}{dx}$ che l'A. usa poi?

una serie di potenze, e quando si dà la formula di Mac-Laurin non si accenna neanche lontanamente all'intervallo di validità. Quando non si voglia o possa dire le cose se non che in questa forma, quanto meglio è tacerle.

Crederei d'aver assolto al compito che mi era proposto: rilevare che con la scusa di trattare di matematica applicata c'è chi maltratta la matematica in modo poco decoroso.

Ma solo per meritare qualche attenuante alla grave colpa della unilaterità di giudizio, darò prova d'aver letto il resto del libro.

A pagina 103 l'interpolazione fatta in d) porta sempre ad un valore approssimato *per difetto*, poichè $0 < \frac{x - x_0}{4} < 1$. Così è assai facile riconoscere — come era assai utile accennarlo nel libro — che la determinazione del tempo (pag. 107), del tasso (pag. 115), del valore attuale (pag. 121) con l'interpolazione per parti proporzionali conduce a valori approssimati rispettivamente *per difetto, per difetto, per eccesso.* (1)

Ai problemi trattati nel § 2 del Cap. II sarebbe stato utile aggiungere quello relativo al tasso variabile con continuità in progressione aritmetica o geometrica, il che è possibile fare con metodi elementari. (2)

Il valore attuale determinato a pagina 168 mediante interpolazione è approssimato *per eccesso*; il calcolo della durata (pag. 238) può farsi anche con l'interpolazione per parti proporzionali, ottenendo un valore approssimato *per eccesso.*

Alla pagina 248 poteva essere utilmente accennato ad un metodo di Gauss per risolvere l'equazione trinomia (33'): codesto metodo in " *Praxis der Gleichungen*, C. Runge, Leipzig, 1900 " è appunto applicato alla determinazione del tasso della rendita.

A pagina 250, si può osservare che l'interpolazione per parti proporzionali può farsi anche in vari altri modi, per ciascuno dei quali si può dire di quale natura è l'approssimazione ottenuta. (3)

Una dimostrazione assai più semplice della formula di Baily (pag. 258) di quelle citate dal Marie, Brasilier, ecc., trovasi in un articolo del prof. E. Mortara: " La determinazione del saggio delle annualità ", *Rivista di Ragioneria*, anno VI, 1906.

L'approssimazione a cui dà luogo l'uso dei termini (48), (49), (51) della pagina 162 è *per eccesso.*

Le formule (14) e (16) della pagina 326 sono errate: vanno così corrette

$$_{(m)}A = (n - m)k_1 r^{m-1} = \frac{(n - m)Kr^{m-1}}{r^n - 1} = \frac{(n - m)C}{r^{n-m+1}} = (n - m)Cv^{n-m+1}$$

$$_{(m)}U = V_{\overline{n-m}|} - (n - m)Cv^{n-m+1}.$$

Al n. 253 l'A. avrebbe potuto con molta utilità riportare il teorema del professor Peano (4): *Un capitale investito in rendita cresce con un tasso d'interesse continuo uguale all'interesse nominale diviso per il corso medio.* Codesto teorema che può dimostrarsi con metodo elementare (5), mostra la grande importanza pra-

(1) Cfr. T. Boggio, *Lezioni di Matematica finanziaria*, 2ª ediz., Genova, 1906-07, pag. 64 e segg.
(2) Ibidem, pag. 76 e segg.
(3) Ibidem, pag. 274 e segg.
(4) G. Peano, *Studio delle basi sociali della Cassa* ecc., Torino, 1901.
(5) T. Boggio, Ibid., pag. 95 e segg.

tica dell'interesse continuo. Coloro che sostituiscono il tasso di interesse discontinuo al tasso d'interesse continuo, commettono un errore relativo che è all'incirca, uguale alla metà del tasso discontinuo; (¹) tale errore è dunque tutt'altro che trascurabile.

F. Sibirani.

V CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI

CAMBRIDGE — 21-28 Agosto 1912

SEDUTA INAUGURALE.

La seduta inaugurale del Congresso fu tenuta alle ore 10, del 22 Agosto.

Sir G. H. Darwin, presidente della Società filosofica di Cambridge, aprì la seduta col seguente discorso:

Quattro anni or sono al nostro Congresso in Roma la Società Filosofica di Cambridge si procurò l'onore di invitare il Congresso Internazionale dei Matematici a tenere la sua prossima riunione a Cambridge.

Ed ora io, quale Presidente della Società, ho il piacere di darvi qui il benvenuto. Lascierò al Vice Cancelliere, che parlerà dopo di me, l'esprimervi il sentimento dell'Università, e mi limiterò al mio dovere quale rappresentante della nostra Società Scientifica.

La Scienza delle Matematiche è adesso sì vasta e già tanto specializzata che può esser messo in dubbio se esista oggi qualcuno pienamente competente per comprendere la ricerca matematica in tutti i suoi vari rami. Io, almeno, sento quanto sono mal preparato a rappresentare la nostra Società in quanto riguarda quel vasto campo di cognizioni che classifichiamo per matematiche pure. Debbo dirvi francamente che quando dò un'occhiata a certi scritti di alcune per-

(¹) T. Boggio, Ibid., pag. 101.

sone che sono in questa sala, mi sento molto nelle condizioni in cui mi troverei se fossero scritte in sanscrito.

Ma se esiste nel mondo un luogo in cui un Presidente così unilaterale del corpo che ha l'onore di darvi il benvenuto non sia interamente fuori del proprio posto, questo è forse Cambridge. È vero che in passato sono esistiti a Cambridge grandi matematici puri, quali Cayley e Sylvester; ma possiamo certamente vantarci senza orgoglio superfluo che la nostra Università abbia avuto parte cospicua nel progresso delle matematiche applicate. Newton fu gloria del genere umano; pure noi, gente di Cambridge, siamo superbi ch'egli sia stato qui Professore. Ma per quanto concerne la parte avuta da Cambridge mi riferisco piuttosto agli uomini degli ultimi cent'anni, quali Airy, Adams, Maxwell, Stokes, Kelvin, ed altri astri minori, i quali hanno tracciato le linee per le ricerche in matematiche applicate che furono studiate in questa Università. Vi sono poi anche altri, quali il nostro cancelliere Lord Rayleigh, che fortunatamente sono ancora con noi.

Fino a poche settimane or sono esisteva un uomo che, solo fra tutti i matematici, avrebbe potuto occupare il mio posto con la certezza di esserne degno; voglio dire Enrico Poincaré. Fu proprio in Roma or fanno quattr'anni che vedemmo la prima cupa ombra di quella sua malattia, ora terminata sì fatalmente. Voi ricordate il malessere che provammo quando la sua voce passò dall'uno all'altro. " Poincaré è malato „. Avevamo sperato potere nuovamente sentire dalla sua bocca alcuni indirizzi luminosi, quali ne avea dati in Roma; ma ciò non doveva essere, e la perdita fatta dalla Francia con la sua morte colpisce il mondo intero.

Fu nel 1900 che, quale presidente della R. Società Astronomica, ebbi la fortuna di porgere a Poincaré la medaglia della Società, e tentai allora di dare un apprezzamento della sua opera sulla teoria delle onde, sopra le figure di equilibrio dei fluidi rotanti e sul problema dei tre corpi. Nella prefazione al terzo volume delle mie opere riunite provai nuovamente a descriverlo quale mio Santo protettore per quanto riguarda gli scritti contenuti in quel volume. Mi torna vivamente alla memoria quale grand'uomo egli era, allorchè rifletto che alle persone capaci di apprezzare pienamente anche metà del suo lavoro sembra una stella di prima grandezza.

È uno studio interessante il tentare di analizzare la differenza nella struttura delle menti dei matematici puri e dei matematici applicati. Sono certo di non offendere la reputazione degli psicologi di mezzo secolo fa, dicendo che, allorquando essi avevano analizzato con successo il modo in cui lavoravano le menti loro, credevano aver risoluto il problema che avevano dinnanzi agli occhi. Ma Sir Francis Galton dimostrò che tale opinione è erronea. Egli fece osservare che per alcuni le imagini visive formano il più potente strumento di pensiero, mentre per altri ciò non avviene. Tali imagini visive sono spesso curiose ed illogiche; essendo probabilmente basate sovente sopra impressioni infantili, esse formano le ruote del meccanismo di molte menti. Il geometra puro dev'essere dotato di grande potere visivo, e quest'idea è confermata dal mio ricordo della difficoltà nel raggiungere concetti chiari della geometria dello spazio, finchè la pratica nell'arte visiva non abbia reso capaci a dipinger chiaramente l'analogia tra le linee e le superficie. L'analitico puro conta probabilmente meno sulle imagini visive, o per lo meno i suoi disegni non hanno carattere geometrico. Dubito che il matematico si rivolga naturalmente ad un ramo od all'altro della nostra scienza secondo la conformazione della propria mente ed il meccanismo con cui egli lavora.

Vorrei che Galton, morto recentemente, potesse esser qui per raccogliere dai grandi matematici adesso adunati un resoconto introspettivo del modo in cui le loro menti lavorano. Piacerebbe sapere se gli studiosi della teoria dei gruppi si dipingono gruppetti di punti, oppure pecore pascolanti in un campo. Coloro che si occupano della teoria dei numeri collegano colori, oppure caratteri buoni o cattivi coi più bassi numeri ordinali ed in quali forme sono disposti i numeri successivi. Quanto ho detto sembrerà pura sciocchezza ad alcuni qui presenti, altri ripenseranno ciò che vedono, e qualcuno forse sarà conscio per la prima volta delle sue proprie imagini visive.

Le menti dei matematici puri ed applicati probabilmente tendono pure a differire una dall'altra nel senso della bellezza estetica. Poincaré ha bene osservato nel suo " Science et Méthode „ (p. 57):

" Ci si può meravigliare di vedere invocare la sensibilità a proposito
" di dimostrazioni matematiche, che sembra non possano interessare
" che l'intelligenza. Ciò equivarrebbe a dimenticare il sentimento
" della bellezza matematica, dell'armonia dei numeri e delle forme,
" dell'eleganza geometrica. È un vero sentimento estetico che tutti
" i matematici conoscono. Ed è veramente della sensibilità „.

E scrive ancora:

" Le combinazioni utili sono precisamente le più belle, cioè quelle
" che possono meglio eccitare questa sensibilità speciale che tutti i
" matematici conoscono, ma che i profani ignorano al punto che
" essi sono spesso tentati di sorriderne „.

C'è naturalmente ogni gradazione tra una classe di menti e l'altra, ed in alcune il senso estetico è dominante in altre subordinato.

A proposito dello straordinario interesse psicologico dell'esame di Poincaré, nel capitolo che ho già citato, noterò il modo nel quale procedeva accingendosi a risolvere un problema matematico. Egli descrive l'inconscio lavorio della mente, pel quale le sue conclusioni apparivano al suo spirito quali rivelazioni di un altro mondo. Credo che siamo stati tutti consci di qualcosa di simile, e come Poincaré abbiamo altresì trovato che non sempre le rivelazioni erano attendibili.

Tanto il matematico puro che l'applicato vanno in cerca della verità, ma il primo cerca la verità in sè stessa ed il secondo verità per l'universo in cui viviamo. Per alcuni la verità astratta ha il maggiore incanto, in altri domina l'interesse pel nostro universo. In entrambi i campi vi è spazio per un progresso indefinito, ma mentre nelle matematiche pure ogni nuova scoperta è un guadagno, nelle applicate non è sempre facile trovar la direzione in cui far progressi, poichè la scelta delle condizioni essenziali al problema porge un compito preliminare, e poi sorgono le difficoltà puramente matematiche. Così almeno mi sembra, che sia più facile trovar campo per ricerche vantaggiose nelle matematiche pure che nelle applicate. Naturalmente se consideriamo un'investigazione in matematiche applicate come un esercitazione in analisi, la scelta corretta delle condizioni essenziali è immateriale, ma se la scelta è stata sbagliata i resultati perdono quasi tutto il loro interesse. Posso illustrare quanto voglio dire riportandomi alla celebre ricerca di Lord Kelvin sul raffreddamento della terra. Egli non era nè poteva essere a cognizione della radioattività dei materiali di cui è formata la terra, e credo sia ora generalmente riconosciuto che le conclusioni da lui dedotte circa l'età della terra non possono venir mantenute; pure l'investigazione matematica resta esatta.

La formula appropriata del problema da risolvere è una delle difficoltà che maggiormente assediano il matematico applicato, e allorch'egli ha raggiunto un'esatta visione interna rimane pur troppo spesso il fatto che il suo problema è al di là della soluzione matematica. Al profano il problema dei tre corpi sembra così semplice ch'egli apprende con sorpresa che non può venir completamente risolto; eppure noi sappiamo quali prodigi di abilità matematica gli sono stati dedicati. Il mio lavoro in proposito non può dirsi contenga affatto tale abilità, a meno che pure non chiamate abilità il procedimento di un demolitore di case che colpisca una porta di sicurezza colla dinamite invece di aprire la serratura. È quindi per forza bruta che questo problema tanto interessante è stato costretto a cedere alcuni suoi segreti, e, per grande che sia il lavoro che è costato, credo ne sia valsa la pena. Forse anche questo lavoro ha servito ad incoraggiare altri, come Stirmer, [1] a simili calcoli, quali il calcolo delle orbite degli elettroni intorno alla terra, offrendo così una spiegazione di alcuni fenomeni d'aurora boreale. Ridurre al minimo i diritti di questo metodo oscuro, che può quasi *suscitare la derisione dei matematici puri*, ha servito a gettar luce sulle celebri generalizzazioni di Hill e Poincaré.

---

[1] *Videnskabs Selskab.* Christiania, 1904.

Chiedo quindi grazia pel matematico applicato e vorrei domandarvi di considerare benevolmente le difficoltà con cui combatte. Se i nostri metodi mancano spesso di eleganza, e non soddisfano che poco il senso estetico di cui ho già parlato, pure sono onesti tentativi di strappare i segreti dell'universo in cui viviamo.

Siamo qui riuniti per considerare la scienza matematica in ogni suo ramo. La specializzazione è diventata una necessità del lavoro moderno ed i rapporti che avranno luogo tra di noi in questa settimana serviranno a farci comprendere il lavoro che vien fatto in campi diversi dal nostro. I giornali e le letture che udrete serviranno a questo scopo, ma forse le conversazioni personali al di fuori delle adunanze regolari riusciranno anche più utili „.

Il prof. R. F. Scott vice-cancelliere della Università di Cambridge pronunziò un altro discorso per dare il benvenuto ai congressisti in nome della sua Università e collegi annessi. Il prof. Hobson, segretario del Comitato organizzatore, comunicò che i congressisti presenti alle ore 20 del giorno 21 erano 670 così repartiti:

Austria	19	Germania	70	Portogallo	3
Belgio	4	Giappone	3	Romania	5
Brasile	4	Gran Brettagna	250	Russia	38
Bulgaria	1	Grecia	5	Serbia	1
Canadà	4	India	3	Spagna	25
Chilì	1	Italia	38	Stati Uniti	82
Danimarca	5	Messico	1	Svezia	13
Egitto	2	Norvegia	4	Svizzera	9
Francia	52	Olanda	9	Ungheria	19

ADUNANZE GENERALI.

Alle ore 14,30 dello stesso giorno 22 ebbe luogo la prima adunanza generale nella quale su proposta di Mittag-Leffler ed Enriques fu eletto presidente il prof. G. H. Darwin, e su proposta di questo furono nominati Lord Rayleigh, presidente onorario; W. von Dyck, L. Fejer, R. Jujiswa, I. Hadamard, V. Iensen, P. A. Mach Mahon, G. Mittag-Leffler, E. H. Moore, F. Rudio, P. H. Schoute, M. S. Smoluchowski, V. A. Steklov, V. Volterra, vicepresidenti; E. W. Hobson, A. E. H. Love, segretari.

Il prof. Greenhill rese conto dell'opera compiuta dalla *Commissione internazionale per l'insegnamento matematico*, nominata dal precedente Congresso di Roma (1908); quindi furono fatte le seguenti letture:

Enriques. — *Il significato della critica dei principi nello sviluppo delle matematiche.*

Brown. — *Periodicity in the Solar System.*

Il giorno 23 alle ore 15,30 ebbero luogo le seguenti letture:

LANDAU. — *Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion.*
GALITZIN. — *The principles of istrumental seismology.*

Il giorno 24 a ore 15,30 furon fatte le seguenti letture:

BOREL. — *Définition et domaine d'existence des fontions monogènes uniformes.*
WHITE. — *The place of matematics in engineering practiche.*

Il giorno 27 a ore 15,30 furon fatte le seguenti letture:

BOCHER. — *Boundary problems in one dimension.*
LARMOR. — *The dynamics of radiation.*

Lo stesso giorno 27 a ore 21 ebbe luogo la seduta finale del Congresso. In essa fu stabilito di tenere il 6° Congresso a Stoccolma nel 1916, e gli Ungheresi espressero il desiderio che il successivo si riunisca a Buda-Pest.

ADUNANZE DELLE SEZIONI.

Il Congresso, come il precedente tenuto a Roma nel 1908, era diviso in quattro sezioni:

Sezione I. — *Aritmetica, Algebra, Analisi.*
" II. — *Geometria.*
" III. (*a*) — *Meccanica, Fisica matematica, Astronomia.*
" III. (*b*) — *Economia, Scienza attuariale, Statistica.*
" IV. — *Filosofia e Storia.*

Queste sezioni tennero ogni giorno adunanze separate, nelle quali furono lette numerose comunicazioni; tanto numerose che non crediamo conveniente darne qui l'elenco.

In generale è stato osservato che non solo queste comunicazioni, ma anche alcune di quelle delle adunanze generali riguardavano problemi specialissimi, e che potevano interessare ben pochi uditori.

Crediamo che sarebbe molto utile che gli organizzatori dei futuri Congressi si preoccupassero di questa tendenza dannosa che toglie interesse ai Congressi internazionali e stabilissero di limitare le comunicazioni e discussioni ai soli argomenti che, rivestendo una certa generalità, possono interessare un numero ragguardevole di matematici.

Molto lodato è stato l'ordine con cui tutto era stato disposto, e la cortesia ed ospitalità dei matematici inglesi verso i colleghi stranieri.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 1° Novembre 1912.

SOPRA UN SISTEMA Σ DI SUPERFICIE P DI S_n

(Continuaz. e fine — Vedi fasc. VI, Anno XXVII)

Le V_3 che contengono tre sistemi ∞^1 di superficie P.

19. L'S_3 osculatore ad una curva della V_3 in un punto x_i è determinato dai punti:

$$\begin{aligned}
x_i &= f_i(u) + \varphi_i(v) + \psi_i(w),\\
dx_i &= f'_i(u)du + \varphi'_i(v)dv + \psi'_i(w)dw,\\
d^2x_i &= f''_i(u)(du)^2 + \varphi''_i(v)(dv)^2 + \psi''_i(w)(dw)^2\\
&\quad + f'_i(u)d^2u + \varphi'_i(v)d^2v + \psi'_i(w)d^2w,\\
d^3x_i &= f'''_i(u)(du)^3 + \varphi'''_i(v)(dv)^3 + \psi'''_i(w)(dw)^3 +\\
&\quad 3\,(f''_i(u)dud^2u + \varphi''_i(v)dvd^2v + \psi''_i(w)dwd^2w) +\\
&\quad f'_i(u)d^3u + \varphi'_i(v)d^3v + \psi'_i(w)d^3w.
\end{aligned}$$

Fissiamo la tangente e l'S_2 osculatore, ossia fissiamo i differenziali parziali primi e secondi dei parametri u, v, w; indi poniamo:

$$\begin{aligned}
Y_i &= f'''_i(u)(du)^3 + \varphi'''_i(v)(dv)^3 + \psi'''_i(w)(dw)^3,\\
Z_i &= 3\,(f''_i(u)dud^2u + \varphi''(v)dvd^2w + \psi''_i(w)dwd^2w),\\
T_i &= Y_i + Z_i;
\end{aligned}$$

allora si ha:

$$d^3x_i = T_i + f'_i(u)d^3u + \varphi'_i(v)d^3v + \psi'_i(w)d^3w,$$

quindi il punto d^3x_i varia nell'S_3 determinato dai punti:

$$T_i,\ f'_i(u),\ \varphi'_i(v),\ \psi'_i(w).$$

Dunque: *gli* S_3 *osculatori alle curve per* x_i, *aventi la stessa tangente e lo stesso* S_2 *osculatore, si ottengono proiettando dall'*S_2 *osculatore i punti di un* S_3 *che ha con esso il punto* dx_i *a comune; costituiscono quindi una doppia infinità che riempie l'*S_5 *determinato dai punti:* x_i, d^2x_i, $f'_i(u)$, $\varphi'_i(v)$, $\psi'_i(w)$, T_i.

Variando l'S_2 osculatore, ossia i differenziali secondi, variano i punti

$$T_i = Y_i + 3\,(f''_i(u)d^2udu + \varphi''_i(v)d^2vdv + \psi''_i(w)d^2wdw),$$

e

$$d^2x_i = X_i + f'_i(u)d^2u + \varphi'_i(v)d^2v + \psi'_i(w)d^2w;$$

il primo varia nell'S_3 $(f''_i(u), \varphi''(v), \psi''_i(w), Y_i)$: il secondo nell'$S_3$ $(f'_i(u), \varphi'_i(v), \psi'_i(w), X_i)$; dunque l'$S_5$ suddetto, quando resta fissa la sola tangente, si ottiene proiettando dal π_3 tangente i punti T_i e d^2x_i di due S_3

che, avendo il punto x_i a comune, stanno nell'S_8 $(f'_i(u), \varphi'_i(v), \psi'_i(w), f''_i(u), \varphi''_i(v), \psi''_i(w), Y_i)$. Se indichiamo con x_1, x_2, x_3: y_1, y_2, y_3, le coordinate proiettive non omogenee di quei due punti nei rispettivi S_3, tra esse passano le relazioni:

$$x_1 = ay_1\,,$$
$$x_2 = by_2\,,$$
$$x_3 = cy_3\,;$$

quindi quegli S_5 proiettano le rette che congiungono le coppie di punti omologhi in un'omografia fra due S_3; sono perciò ∞^3 e riempiono l'S_7 $(x_i, Y_i, f'_i(u), \varphi'_i(v), \psi'_i(w), f''_i(u), \varphi''_i(v), \psi''_i(w))$.

In ogni S_5 vi sono ∞^2 S_3 osculatori; si deduce che gli S_3 osculatori alle curve della V_3, quando hanno la stessa tangente, sono ∞^5.

Se varia la tangente, dei punti che determinano l'S_7 precedente, varia solo Y_i in un piano, perciò quell'S_7 assume ∞^2 posizioni nell'S_9

$$[x_i, f'_i(u), \varphi'_i(v), \psi'_i(w), f''_i(u), \varphi''_i(v), \psi''_i(w), f'''_i(u), \varphi'''_i(v), \psi'''_i(w)].$$

Si conclude che gli S_3 osculatori a tutte le curve della V_3 per x_i sono ∞^7 in generale.

Consideriamo la V_3 rappresentata da:

$$x_i = f_i(u) + f_i(v) + \psi_i(w).$$

Il punto (u, v, w) coincide col punto (v, u, w). Le Pu e le Pv costituiscono un solo sistema e per ogni punto x_i escono due superficie caratteristiche appartenenti ad esso. Sicchè le superficie caratteristiche della V_3 si ripartiscono in due soli sistemi: $(u$ o $v = \text{cost.})$, $(w = \text{cost.})$.

Così pure formano due soli sistemi le linee parametriche, perchè le (wu) coincidono con le (vw).

Delle tre superficie F legate alla V_3 (cfr. paragr. 10), la

$$x_i = f_i(u_1) - f_i(u_2)$$

coincide con la

$$x_i = \varphi_i(v_1) - \varphi_i(v_2),$$

così pure coincidono le linee:

$$x_i = f'_i(u), \qquad x_i = \varphi'_i(v).$$

Sia

$$x_i = f_i(u_\alpha) + f_i(v) + \psi_i(w) \quad \text{una} \quad Pu.$$

Per $v = u_\alpha$ si ha

$$x_i = 2f_i(u_\alpha) + \psi'_i(w), \tag{14}$$

quindi quella Pu ha comune la linea rappresentata dalle (14) con la superficie P di equazioni:

$$x_i = 2f_i(v) + \psi_i(w); \tag{15}$$

di più le due superficie sono tangenti lungo quella linea, poichè i piani

$$[f_1(u_a)+f_1(v)+\psi_1(w),\quad f'_1(v),\quad \psi'_1(w)],$$
$$[2f_1(u)+\psi_1(w),\quad f'(v),\quad \psi'_1(w)]$$

coincidono per $v=u_a$.

La $\mathrm{P}u_a$ è generica, quindi tutte le $\mathrm{P}u$ sono tangenti lungo una linea variabile alla superficie (15), la quale risulta come inviluppo delle superficie caratteristiche di un sistema. Essa appartiene alla V_3 ma non è una superficie caratteristica.

Sia $x_i=f_i(u)+f_i(v)+\psi_i(w)$ una $\mathrm{P}w$; essa ha comune con la (15) la linea

$$x_i=2f_i(u)+\psi_i(w_a) \tag{16}$$

che è una sua linea parametrica, quindi le superficie caratteristiche del sistema $w=$ cost. incontrano la superficie (15) nelle sue linee coordinate di un sistema. Le linee coordinate dell'altro sistema sono le linee di contatto con le $\mathrm{P}u$.

Osserviamo che la (16) è tangente in ogni suo punto a due linee coniugate dal sistema $u=$ cost. sulla $\mathrm{P}w$, quindi in ogni suo punto la tangente è coniugata di se stessa, perciò la linea è un'assintotica. Possiamo dunque dire che *la superficie* P *inviluppata dalle* Pv *interseca le* Pw *secondo linee che sono assintotiche per queste superficie.*

L'S_3 tangente alla V_3 in un punto x_i è determinato dai punti: x_i, $f'_i(u)$, $\varphi'_i(v)$, $\psi'_i(w)$.

Se x_i varia lungo una (vw), l'S_3 tangente varia attorno alla retta $(f'_i(v),\ \psi'_i(w))$; per ogni valore di u diverso da v, si ha un S_3 determinato; ma per $u=v$, $f'_i(u)$ ed $f'_i(v)$ coincidono, quindi l'S_3 non è determinato. Il punto per cui ciò avviene lo diciamo *singolare* per la V_3.

Sopra ogni linea coordinata del sistema (vw) *vi è uno di tali punti ed è l'intersezione della linea con la superficie* (15).

Infatti, se la linea è la (v_1w_1),

$$x_i=f_i(u)+f_i(v_1)+\psi_i(w_1),$$

per $u=v_1$ si ha:

$$x_i=2f_i(v_1)+\psi_i(w_1),$$

e questo è un punto della superficie (15).

Sulle linee (uv) non vi sono in generale di tali punti se u è diverso da v, perchè, comunque vari w, le $\psi'_i(w)$ non coincideranno con le $f'_i(u)$ o con le $f'_i(v)$, nè saranno loro proporzionali.

Se la linea è una (uu), allora tutti i suoi punti presentano la singolarità suddetta.

Le (uu) costituiscono uno dei sistemi di linee coordinate della superficie (15), quindi: *i punti della* V_3 *nei quali non risulta determinato l'*S_3 *tangente sono tutti e solo i punti di questa superficie.*

20. Consideriamo la V_3: $x_i = f_i(u) + f_i(v) + f_i(w)$.

Le superficie caratteristiche di tale V_3 formano un solo sistema, tale che per ogni punto ne escono tre che s'intersecano due a due secondo le linee coordinate per quel punto.

Le tre superficie F legate alla V_3 coincidono, e così pure coincidono le linee $x_i = f'_i(u)$; $x_i = \varphi'_i(v)$; $x'_i = \psi'_i(w)$.

$$x_i = f_i(u) + f_i(v) + f_i(w_1) \tag{17}$$

sia una superficie caratteristica generica, essa è tangente lungo la linea

$$x_i = f_i(u) + 2f_i(w_1),$$

alla superficie

$$x_i = f_i(u) + 2f_i(v). \tag{18}$$

Infatti, il piano tangente alla (17) in un punto x_i è determinato dai punti:

$$f_i(u) + f_i(v) + f_i(w), \quad f_i(u), \quad f_i(v);$$

il piano tangente alla (18) è determinato dai punti:

$$f_i(u) + 2f_i(v), \quad f'_i(u), \quad f'_i(v);$$

e questi due piani coincidono per $v = w_1$.

Ancora, le due superficie suddette si tagliano secondo la linea

$$x_i = 2f_i(u) + f_i(w_1),$$

che è un'assintotica della Pw_1 (cfr. paragr. 20).

Quindi, *la superficie* (18) *è tangente lungo una linea ad ogni superficie caratteristica, di più l'interseca secondo un'assintotica della superficie stessa.*

La linea $x_i = 3f_i(u)$ è un'assintotica della superficie (18).

Infatti, per un suo punto corrispondente ad $u = v = w = u_1$, escono due lineè coniugate della superficie:

$$x_i = 2f_i(u_1) + f_i(u), \qquad x_i = 2f_i(u) + f_i(u_1),$$

le quali sono tangenti alla $x_i = 3f_i(u)$ nel punto comune, perciò, la tangente in ogni punto di detta linea essendo coniugata di se stessa, la linea è un'assintotica.

Siccome le linee coniugate suddette sono le linee coordinate della (18), possiamo dire: *Le linee coordinate della superficie* (18) *ne inviluppano un'assintotica.*

$$x_i = f_i(u) + f_i(v_1) + f_i(w_1)$$

sia una (vw). Variando x_i lungo questa linea, l'S_3 tangente varia attorno alla retta $f'_i(v_1)$, $f'_i(w_1)$ che è una corda della linea

$$x_i = f'_i(u).$$

Per $u = v_1$ o per $u = w_1$ i punti:

$$f_i(u) + f_i(v) + f_i(w), \quad f'_i(u), \quad f'_i(v), \quad f'_i(w)$$