SULLA TORSIONE DI ALCUNE CURVE DI UNA SUPERFICIE

Nella presente nota mi propongo di fare, per la torsione delle linee di una superficie passanti per un punto, uno studio analogo, per quanto mi è possibile, a quello relativo alla curvatura.

Per la torsione geodetica esiste in proposito un lavoro; [1] credo però che in questo caso l'analogia può essere spinta oltre, e ciò ricercherò a proposito di quella torsione. (V. n. 4.)

Comincerò con una osservazione preliminare: Sia

$$z = z(x, y) \tag{1}$$

l'equazione della nostra superficie; allora una linea qualunque L di essa si può determinare assegnando la funzione $y = y(x)$ e poi accoppiando a questa equazione la (1) dove al posto di y s'intenda sostituita la sua espressione in x.

Presa così x come variabile indipendente nelle equazioni di L, la sua torsione in un punto P (xyz) si riduce a

$$\tau = \frac{y''z''' - y'''z''}{(1 + y'^2)\, z''^2 + (1 + z'^2)\, y''^2 - 2y'y''z'z''}. \tag{2}$$

Le z', z'', z''' si ricavano dalla (1) derivandola rispetto ad x, e cioè dalle equazioni

$$\left.\begin{array}{ll} z' = p + qy', & z'' = qy'' + r + 2sy' + ty'^2 \\ \multicolumn{2}{l}{z''' = qy''' + 3sy'' + 3ty'y'' + u + 3vy' + 3wy'^2 + ky'^3} \end{array}\right\} \tag{3}$$

dove p, q, r, s, t sono le note mongiane, ed inoltre

$$u = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \qquad v = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \qquad w = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \qquad k = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Dunque il secondo membro della (2), fissato un punto P della superficie, non dipende che dai tre parametri y', y'', y'''.

Ne segue subito che se noi consideriamo un cilindro parabolico $\varphi(xyabcd) = 0$ dove a, b, c, d, dinotano i quattro parametri della sua equazione, potremo sempre (quando si considera una regione sufficientemente piccola di superficie nelle vicinanze di P) determinare questi parametri in modo che siano ordinatamente eguali le y, y', y'', y'''

[1] Pietro Burgatti, "Sulla torsione geodetica delle linee tracciate sopra una superficie". *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, tomo X, pag. 229.

(calcolate nell'ascissa x di P) della curva L e della curva L′ sezione del nostro cilindro con la superficie. Allora anche le z, z', z'', z''' delle due curve saranno ordinatamente eguali in P: basta riflettere che queste quantità si ricavano per le due curve dalle (3) sostituendo per y, y', y'', y''' valori identici per le due curve. Ciò significa che la curva parabolica L′ così determinata ha con L in P un contatto almeno del terz'ordine.

Intanto la (2) ci dice che le due curve L ed L′ hanno in P la stessa torsione, epperò:

La torsione di una curva qualunque di una superficie in un punto P, *è uguale a quella della curva parabolica della superficie che ha in* P, *con la curva data, un contatto almeno del terz'ordine.*

Basta dopo ciò, per la torsione, limitarsi a considerare solamente curve paraboliche della superficie.

I. Variazione della torsione quando y' ed y'' rimangono costanti. — Supponiamo che nella (2) vari solamente y''' ed esaminiamo la torsione delle curve (paraboliche) C della superficie passanti per uno stesso punto P ed aventi ivi un contatto di second'ordine.

Preso il punto come origine del sistema cartesiano, la tangente come asse Ox, e la binormale come asse Oz, sarà $y' = z' = 0$; inoltre, siccome le coordinate direttive della binormale sono proporzionali ai minori di second'ordine della matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y'' & z'' \end{vmatrix} \quad \text{cioè} \quad 0, -z'', y'',$$

vediamo che deve essere:

$$z'' = 0.$$

Allora la (2) si riduce a

$$\tau = \frac{z'''}{y''}$$

ma dalla (3) ricaviamo, nel caso attuale:

$$z''' = qy''' + 3sy'' + u,$$

dunque finalmente

$$\tau = \frac{q}{y''}\, y''' + \left(3s + \frac{u}{y''}\right)$$

e si noti che è $y'' \neq 0$ altrimenti si annullerebbero le tre coordinate direttive della binormale in P. Questa formola mostra che τ è funzione lineare di y''' epperò monotona. Per $q \neq 0$ si annulla solamente per

$$y''' = -\frac{3sy + u}{q}.$$

Dunque: *Se in punto* P *di una superficie è* $q \neq 0$ *le curve* C *passanti per* P *hanno ivi torsione che è funzione lineare di* y'''. *Se poi* $q = 0$, *la torsione delle curve* C *è costante ed eguale a*

$$3s + \frac{u}{y''}.$$

Si noti che in questo caso, poichè $z' = 0$, è anche $p = 0$ epperò la normale alla superficie coincide con l'asse oz cioè con la binormale comune alle curve C in P.

2. Variazione della torsione quando y' ed y''' rimangono costanti. — Qui paragoneremo, analogamente a quello che si fa per le curvature, la torsione τ di una curva Γ qualunque con quella delle curve Γ', ottenute tagliando la superficie con una famiglia di cilindri parabolici passanti per quel punto P e le cui generatrici sono parallele alla normale alla superficie in P.

Preso il punto P come origine del sistema cartesiano, la normale alla superficie in P come asse Pz e la tangente alla curva Γ che si considera, come asse Px, taglieremo la superficie con la famiglia di cilindri parabolici $y = ax^2$ e determiniamo il parametro a in modo che in P siano eguali le y'' di Γ e di Γ'; allora (poichè evidentemente in P le y' delle due curve Γ e Γ' sono eguali), le due curve avranno in P un contatto del 2° ordine: infatti le z' sono entrambe nulle e le z'' sono, per le due curve in base alle (3), eguali ad r. Si noti che anche le z''' di Γ e Γ' risultano eguali perchè entrambe si ricavano dall'equazione della superficie derivandola tre volte di seguito:

$$z''' = 3sy'' + u$$

e sostituendo per y'' valori eguali per le due curve.

Ciò premesso, le coordinate direttive della binormale comune n alle due curve Γ e Γ' sono i minori di 2° ordine della matrice:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y'' & z'' \end{vmatrix} \quad \text{cioè} \quad 0, -z'', y''.$$

La torsione in P alla Γ è data da:

$$\frac{1}{T} = \frac{y''z''' - y'''z''}{y''^2 + z''^2} = \frac{y''z''' - y'''z''}{\sqrt{y''^2 + z''^2}\sqrt{y'''^2 + z'''^2}} \frac{\sqrt{y'''^2 + z'''^2}}{\sqrt{y''^2 + z''^2}}.$$

Consideriamo la retta g uscente da P ed avente per coordinate direttive 0, y''', z''' calcolate, s'intende, in P. Questa retta, poichè ha nulla la prima coordinata direttiva, è perpendicolare all'asse Px, epperò giace sul piano yz che è il piano normale a Γ e Γ' e si ha:

$$\cos(gn) = \frac{y''z''' - y'''z''}{\sqrt{y''^2 + z''^2}\sqrt{y'''^2 + z'''^2}}$$

la formola precedente può dunque scriversi:

$$\frac{1}{T} = \cos(gn) \frac{\sqrt{y'''^2 + z'''^2}}{\sqrt{y''^2 + z''^2}}. \tag{3'}$$

Applichiamo questa formola alla curva Γ'; poichè per questa curva è $y''' = 0$ la retta g relativa coinciderà con la normale N alla superficie, dunque, indicando con $\frac{1}{T'}$ la torsione di Γ' in P, avremo:

$$\frac{1}{T'} = \cos(Nn) \frac{z'''}{\sqrt{y''^2 + z''^2}}$$

da questa e dalla espressione di $\frac{1}{T}$ si ricava:

$$\frac{T'}{T} = \frac{\cos(gn)}{\cos(Nn)} : \frac{z'''}{\sqrt{y'''^2 + z'''^2}} = \frac{\cos(gn)}{\cos(Nn)\cos(Ng)}$$

cioè:

$$T\cos(gn) = T'\cos(Nn)\cos(Ng). \ (^1)$$

Questa è la formola che lega T con T'; essa mostra che per passare da T' a T basta fare, sul piano normale comune alle due curve due proiezioni e cioè proiettare prima sulla normale N alla superficie il raggio di torsione T' preso sulla binormale n a partire da P e poi proiettare questa proiezione sulla binormale comune n ma perpendicolarmente alla retta g: si avrà così il raggio T.

Per esprimere meglio questo risultato consideriamo il piano di equazione $y'''Y + z'''Z = 0$ (a) il quale contiene la tangente comune a Γ e Γ' (asse Px); dico che contiene ancora il centro della sfera osculatrice a Γ in P. Infatti, dette ξ, η, ζ le coordinate di questo centro, dall'equazione

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = R^2$$

derivando tre volte di seguito rispetto ad x si ricava:

$$\begin{aligned} x - \xi + (y-\eta)\,y' + (z-\zeta)\,z' &= 0 \\ (y-\eta)\,y'' + (z-\zeta)\,z'' &= -(1 + y'^2 + z'^2) \\ (y-\eta)\,y''' + (z-\zeta)\,z''' &= -3\,(y'y'' + z'z'') \end{aligned}$$

poi, mettendosi nell'origine dove è

$$x = y = z = 0, \qquad y' = z' = 0,$$

si ha subito:

$$\xi = 0, \qquad \eta y'' + \zeta z'' = 1, \qquad \eta y''' + \zeta z''' = 0$$

quest'ultima già ci avverte che il piano (a) contiene il centro di sfera osculatrice a Γ in P, dunque questo piano è quello individuato dalla tangente comune e dal centro di sfera osculatrice anzidetto; inoltre taglia il piano yz secondo la retta $y'''Y + z'''Z = 0$; ma questa retta

(1) Questa formola suppone $y'' \neq 0$ altrimenti la n coincidendo con l'asse Py, si annullerebbe $\cos(Nn)$ e non sarebbe più lecito dividere membro a membro le due eguaglianze che danno $\frac{1}{T}$ ed $\frac{1}{T'}$.

è perpendicolare alla g, dunque proiettare perpendicolarmente a g equivale a proiettare parallelamente al piano (a).

Noi possiamo allora enunciare così il risultato:

Se si proietta sulla normale alla superficie il raggio di torsione T′ *preso sulla binormale comune a partire da* P *e poi questa proiezione sulla binormale ma parallelamente al piano individuato dalla tangente comune e dal centro di sfera osculatrice a* Γ *in* P, *si ottiene il raggio di torsione* T *di* Γ.

Potremo, dopo ciò, limitarci a studiare la torsione delle curve paraboliche Γ′ nell'origine, dove è $y'''=0$.

Presa la tangente comune come asse Px e la normale alla superficie in P come asse Pz, precisamente come abbiamo fatto al principio di questo numero, l'espressione della torsione diventa:

$$\tau=\frac{y''z'''}{y''^2+z''^2}$$

inoltre le (3) dànno:

$$z''=r, \qquad z'''=3sy''+u,$$

dunque:

$$\tau=\frac{3sy''^2+uy''}{y''^2+r^2} \tag{4}$$

e qui la variabile è la sola y''. Per studiare il variare di τ costruiamoci le derivate prima e seconda (rispetto ad y''); avremo:

$$\tau'=\frac{-uy''^2+6r^2sy''+ur^2}{(y''^2+r^2)^2};$$

$$\tau''=\frac{(y''^2+r^2)\{-2uy''+6r^2s\}-4y''\{-uy''^2+6r^2sy''+ur^2\}}{(y''^2+r^2)^3}.$$

La derivata prima si annulla per i valori (sempre reali)

$$y''_1=\frac{-3r^2s+\sqrt{9r^4s^2+u^2r^2}}{-u}, \qquad y''_2=\frac{-3r^2s-\sqrt{9r^4s^2+u^2r^2}}{-u};$$

siccome la derivata seconda, con la sostituzione di questi valori, si riduce a

$$\pm 2\,\frac{\sqrt{9r^4s^2+u^2r^2}}{(y''^2+r^2)^2}$$

vediamo che y''_1 corrisponde ad un minimo di torsione, mentre y''_2 corrisponde ad un massimo.

Inoltre le coordinate direttive della binormale alla curva Γ'_1 di minima torsione sono:

$$0, \quad -z'', \quad y''_1 \qquad \text{cioè:} \qquad 0, \quad -r, \quad y''_1$$

e così quelle della binormale alla curva Γ'_2 di massima torsione sono:

$$0, \quad -r \quad y''_2.$$

La somma dei prodotti due a due di queste coordinate è $r^2 + y''_1 y''_2$ ma, poichè y''_1 ed y''_2 sono le radici della equazione $\tau' = 0$, il loro prodotto è $-r^2$, dunque quella somma è zero. Epperò: *Fra le curve Γ' ve ne ha una di minima e l'altra di massima torsione; le loro binormali sono ortogonali, quindi la binormale all'una è normale principale all'altra e viceversa; le due curve hanno cioè lo stesso triedro fondamentale; però i piani osculatore e rettificante dell'una sono rispettivamente rettificante ed osculatore dell'altra.*

L'espressione (4) della torsione delle attuali curve Γ' si può presentare sotto un'altra forma che si presta meglio allo studio di qualche proprietà. Introducendo l'angolo α che la binormale n mobile (sul piano yz) fa con l'asse Py avremo:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{y''}{r}$$

donde:

$$y'' = -r \operatorname{tg} \alpha.$$

Sostituendo in (4) risulta:

$$\tau = 3s \operatorname{sen}^2 \alpha - \frac{u}{r} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha.$$

Considerando i due angoli α, $\alpha + \frac{\pi}{2}$ cioè due direzioni ortogonali di binormale avremo, per le corrispondenti torsioni:

$$\tau' = 3s \operatorname{sen}^2 \alpha - \frac{u}{r} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha, \quad \tau'' = 3s \cos^2 \alpha + \frac{u}{r} \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha$$

donde:

$$\tau' + \tau'' = 3s = \text{costante},$$

cioè:

La somma delle torsioni di due curve Γ' che hanno le binormali perpendicolari, è costante epperò eguale alla somma delle torsioni massima e minima (torsioni principali).

Inoltre moltiplicando le espressioni di τ' e τ'' risulta:

$$\tau'\tau'' = \frac{1}{4}\left(9s^2 - \frac{u^2}{r^2}\right) \operatorname{sen}^2 2\alpha - \frac{3us}{2r} \operatorname{sen} 2\alpha \cos 2\alpha.$$

Applichiamo questa formola a due coppie di curve Γ' con le binormali perpendicolari e che si bisechino, allora basta osservare che si passa dall'una coppia all'altra mutando nella formola che precede α in $\alpha + \frac{\pi}{4}$ così avremo per le due coppie di curve Γ':

$$\tau'\tau'' = \frac{1}{4}\left(9s^2 - \frac{u^2}{r^2}\right) \operatorname{sen}^2 2\alpha - \frac{3us}{2r} \operatorname{sen} 2\alpha \cos 2\alpha$$

$$\tau'_1\tau''_1 = \frac{1}{4}\left(9s^2 - \frac{u^2}{r^2}\right) \cos^2 2\alpha + \frac{3us}{2r} \cos 2\alpha \operatorname{sen} 2\alpha$$

dalle quali si deduce:

$$\tau'\tau'' + \tau'_1\tau_1'' = \frac{1}{4}\left(9s^2 - \frac{u^2}{r^2}\right) = \text{costante},$$

cioè:

La somma dei prodotti di torsione di due coppie di curve Γ' *con le binormali perpendicolari e che si bisecano, è costante.*

Per avere un'immagine geometrica della variazione della torsione delle curve Γ' al variare delle binormali, pigliamo il sistema cartesiano come al principio del presente numero, cioè la tangente come asse Px e la normale alla superficie come asse Pz; allora la binormale si sposterà, al variare di y'' sul piano yz e la torsione sarà data dalla (4) cioè, indicando con T il raggio di torsione:

$$\frac{1}{T} = \frac{3sy''^2 + uy''}{r^2 + y''^2}. \tag{4'}$$

Le coordinate direttive della binormale sono $0, -r, y''$; quindi, chiamando, al solito, con α l'angolo della binormale che si considera, con l'asse Py, avremo:

$$\cos\alpha = \frac{-r}{\sqrt{r^2 + y''^2}}, \qquad \text{sen}\,\alpha = \frac{y''}{\sqrt{r^2 + y''^2}}.$$

Ciò premesso, riportiamo su ogni binormale, a partire dall'origine P, una lunghezza $PM = \sqrt{|T|}$ essendo T il raggio di torsione della corrispondente curva Γ'. Allora per trovare il luogo dei punti M del piano yz, osserveremo che le coordinate di M sono:

$$Y = \sqrt{|T|}\,\frac{-r}{\sqrt{r^2 + y''^2}}, \qquad Z = \sqrt{|T|}\,\frac{y''}{\sqrt{r^2 + y''^2}}$$

dalle quali deduciamo:

$$y'' = -r\frac{Z}{Y}, \qquad |T| = Y^2 + Z^2.$$

Sostituendo nella (4) distingueremo i valori di y'' che rendono T positivo da quelli che lo rendono negativo. Per i valori di y'' che rendono T positivo, la (4) dà:

$$3sZ^2 - \frac{u}{r}YZ = 1 \tag{5}$$

invece, per quelli che rendono T negativo, la (4) dà:

$$3sZ^2 - \frac{u}{r}YZ = -1. \tag{6}$$

Le (5) e (6) rappresentano, per $u \neq 0$ due iperboli coniugate i cui assintoti comuni hanno per rapporti direttivi le radici m dell'equazione

$$3rsm^2 - um = 0 \tag{7}$$

uno di questi assintoti è dunque l'asse Py cioè perpendicolare al piano della normale alla superficie e della tangente comune, e l'altro ha per rapporto direttivo $m = \frac{u}{3rs}$. Le (5) e (6) costituiscono il luogo dei punti M. Quando $u = 0$ il numeratore del 2° membro della (4) è di segno costante che si può supporre positivo e la sostituzione delle espressioni di y'' e di $|T|$ nella (4) dà:

$$3sZ^2 = 1$$

cioè due rette perpendicolari alla normale alla superficie ed equidistanti dall'origine; questa coppia di rette costituisce, nel presente caso, il luogo dei punti M. La $PM = \sqrt{|T|}$ mostra che in ogni caso il raggio di torsione T di una curva Γ′ è misurato, in valore assoluto, dal quadrato del semidiametro della conica indicatrice, sulla direzione corrispondente alla binormale di quella curva data.

Da una proprietà notissima relativa ai semidiametri coniugati di una iperbole, possiamo dedurre che:

Se in P *è* $u \neq 0$, *la somma dei raggi di torsione di due curve* Γ′ *le cui binormali sono diametri coniugati nell'iperbole indicatrice, è costante.*

A rigore è opportuno notare che il teorema di Apollonio relativo alla iperbole, parla di differenza di quadrati di semidiametri coniugati; ora è notissimo che di due semidiametri coniugati uno taglia l'iperbole e l'altro no; in altri termini uno corrisponde ad una iperbole (dove la torsione ha un segno) e l'altro corrisponde all'iperbole coniugata (dove la torsione ha il segno opposto) epperò la differenza dei quadrati dei semidiametri coniugati si traduce nella somma dei corrispondenti raggi di torsione.

Le curve Γ′ corrispondenti alle binormali lungo gli assintoti delle iperbole indicatrici, hanno in P torsione nulla perchè le radici della (7) annullano il numeratore del 2° membro di (4), cioè $\frac{1}{T}$. Ma allora P è un punto stazionario per queste curve. Noi abbiam così dimostrato che fra le curve Γ′ ve ne ha due i cui piani osculatori hanno in P un contatto almeno di terz'ordine. Ciò suppone però $u \neq 0$; se $u = 0$ questi due piani osculatori si riducono al piano xy, cioè al piano tangente alla superficie.

3. Variazione della torsione quando y'' ed y''' rimangono costanti. — Paragoneremo ancora la torsione di una curva Γ qualunque con quella delle curve Γ_1 ottenute tagliando la superficie con un'altra famiglia di cilindri parabolici passanti per quel punto P e le cui generatrici sono sempre parallele alla normale alla superficie in P.

Preso il sistema cartesiano come al principio del n. 2, consideriamo la famiglia di cilindri parabolici $y = ax^3$ di parametro a e determiniamo a in modo che in P siano eguali le y''' di Γ e di Γ_1: allora queste due curve avranno in P nulle le y' e le z', cioè avranno la stessa tangente (asse Px); inoltre la stessa z'' perchè entrambe queste derivate sono eguali ad r; se dunque indichiamo con z_1''' la z''' corrispondente a Γ_1 in P, con g_1 la retta g relativa a questa curva, e con $\frac{1}{T_1}$ la torsione, avremo, per la (3')

$$\frac{1}{T_1} = \cos(g_1 y) \frac{\sqrt{y'''^2 + z_1'''^2}}{z''}$$

purchè si rifletta che qui $y'' = 0$ e la binormale n coincide con l'asse Py perchè ha nulla la prima e terza coordinata direttiva.

Da questa formola e dalla (3') si ricava:

$$\frac{T_1}{T} = \frac{\cos(gn)}{\cos(g_1 y)} \frac{\sqrt{y'''^2 + z'''^2}}{\sqrt{y'''^2 + z_1'''^2}} \cdot \frac{z''}{\sqrt{y''^2 + z''^2}}$$

che si può anche scrivere così:

$$\frac{T_1}{T} = \frac{\cos(gn)}{\cos(g_1 y)} \frac{\dfrac{y'''}{\sqrt{y'''^2 + z_1'''^2}}}{\dfrac{y'''}{\sqrt{y'''^2 + z'''^2}}} \frac{z''}{\sqrt{y''^2 + z''^2}}$$

purchè si supponga $y''' \neq 0$; segue:

$$\frac{T_1}{T} = \frac{\cos(gn)}{\cos(g_1 y)} \frac{\cos(g_1 y)}{\cos(gy)} \cos(ny)$$

e finalmente:

$$T_1 \cos(gy) = T \cos(gn) \cos(ny).$$

Questa relazione, che vincola le torsioni delle due curve Γ e Γ_1, può interpretarsi così:

Sia Py la perpendicolare alla tangente comune a Γ e Γ_1 ed alla normale alla superficie in P; se si proietta sulla binormale a Γ e parallelamente al piano determinato dalla tangente comune e dal centro di sfera osculatrice a Γ in P, il raggio di torsione T_1 preso su Py a partire da P, e poi questa proiezione sull'asse Py ma perpendicolarmente alla binormale a Γ, si ottiene il raggio di torsione T di Γ.

Anche qui occorrono due proiezioni per passare da T a T_1 o viceversa. Potremo, dopo ciò, limitarci a studiare la torsione delle curve paraboliche Γ_1 nell'origine, dove è $y'' = 0$, ed importa notare che la condizione $y'' = 0$ si conserva spostandosi la tangente sul piano xy che è il piano tangente, cioè si conserva al variare di y'.

Infatti quella condizione esprime che la binormale alla curva Γ_1, che si considera giace sul piano tangente alla superficie, e questo piano rimane lo stesso.

Pigliamo le rette principali in P come assi Px e Py e la normale alla superficie come asse Pz; allora si ha:

$$p = q = z' = s = 0,$$

e la torsione alla curva Γ_1 in P sarà data da:

$$\frac{1}{T} = \frac{-y'''}{(1+y'^2)(r+ty'^2)} \tag{8}$$

dove ora y' dinota la tangente dell'angolo che la curva Γ_1 mobile fa con una retta principale (asse Px). Questa formola già ci avverte che le torsioni di due curve Γ_1 egualmente inclinate sulle rette principali sono eguali perchè le y' di tali curve non differiscono che pel segno. Inoltre i raggi di torsione delle due curve Γ_1 che toccano le rette assintotiche sono nulli; finalmente delle torsioni corrispondenti alle rette principali una è $-\frac{y'''}{r}$ e l'altra è nulla, ed è questa la sola torsione nulla. Così vediamo anche che: *Fra le curve Γ_1 ne esiste una che ha in* P *col piano osculatare un contatto almeno di terz'ordine.*

Inoltre da

$$-y'''T = (1+y'^2)(r+ty'^2)$$

si deduce derivando rispetto ad y':

$$T' = -\frac{2y'}{y'''}(r+t+2ty'^2), \qquad T'' = -\frac{2}{y'''}(r+t+6ty'^2).$$

La $T'=0$ ammette per radici $y'=0$ e due altre date da

$$y'^2 = -\frac{r+t}{2t}$$

(le quali corrispondono ad una stessa torsione). Sostituendo in T'' vediamo che piglia rispettivamente i valori

$$-\frac{2(r+t)}{y'''} \quad \text{e} \quad \frac{4(r+t)}{y'''}.$$

Ne concludiamo che se $\frac{r+t}{y'''} > 0$ la curva Γ_1 corrispondente ad $y'=0$ ha in P torsione minima mentre la curva Γ_1 corrispondente ad

$$y'^2 = -\frac{r+t}{2t}$$

ha in P torsione massima; il contrario ha luogo quando $\frac{r+t}{y'''} < 0$.

Se poi è $r+t=0$ poichè si annulla per i valori di y' in considerazione, la derivata terza di T bisogna ricorrere alla derivata quarta che ha costantemente il valore $\frac{-24t}{y'''}$, dunque si ha un minimo di torsione quando $t>0$, un massimo quando $t<0$.

Escludo il caso in cui, insieme ad $r+t=0$, si ha $t=0$; allora in P si annullerebbero tutte e cinque le mongiane della nostra superficie.

Per la rappresentazione geometrica sul piano tangente xy pigliamo su ogni tangente, a partire dalla origine P, una lunghezza $PM = \sqrt{|T|}$ indicando T il raggio di torsione della corrispondente curva Γ_1; lasciamo come assi Px, Py le rette principali ed osserviamo che le coordinate X, Y di M verificano le equazioni:

$$\frac{Y}{X} = y', \qquad |T| = x^2 + y^2;$$

sostituendo nella (8) distingueremo i valori di y' che rendono T positivo, da quelli che lo rendono negativo. Quando r e t sono dello stesso segno, allora T piglia sempre valori di segno costante, che può supporsi positivo, ed il luogo dei punti M è la quartica

$$rX^2 + tY^2 - y'''X^4 = 0 \tag{9}$$

la quale, per $t \neq 0$ ha in P un punto isolato, e per $t = 0$ ed $r \neq 0$ ha in P una cuspide la cui tangente è l'asse Py.

Quando r e t sono di segno diverso, allora T piglia valori positivi e negativi; per quei valori di y' che rendono T positivo, si ha la (9); per quelli che rendono T negativo, si ha invece l'altra quartica

$$rX^2 + tY^2 - y'''X^4 = 0 \tag{10}$$

la quale, per $t \neq 0$ ha in P un punto doppio ordinario, e per $t = 0$ ed $r \neq 0$ ha una cuspide con la tangente l'asse Py. Nel primo caso il luogo dei punti M è costituito dalla (9); nel secondo caso consta delle due curve (9) e (10).

La $PM = \sqrt{|T|}$ mostra che in ogni caso il raggio di torsione T di una curva Γ_1 è misurato, in valore assoluto, dal quadrato del semidiametro della curva indicatrice, sulla direzione della tangente a quella curva.

4. Torsione delle geodetiche passanti per P. — Le curve Γ_1 ultimamente considerate, si comportano in P come le geodetiche, perchè, dall'essere $y'' = 0$ segue che è nulla in P la terza coordinata direttiva della binormale a queste curve, dunque la binormale si sposta, come la tangente, sul piano xy che è il piano tangente alla superficie in P; ma allora la normale principale coincide con la normale alla superficie.

L'espressione della torsione si semplifica notevolmente per le geodetiche. Per queste curve però la y''' non è costante (come nelle curve Γ_1), ma si deduce dalla loro equazione differenziale:

$$(1 + p^2 + q^2)\, y'' - (ty'^2 + 2sy' + r)(py' - q) = 0$$

derivandola rispetto ad x; così si ottiene:

$$(1+p^2+q^2)\, y''' + 2y''[p(r+sy') + q(s+ty')] - (py'-q)(ty'^2+2sy'+r)'$$
$$- (ty'^2 + 2sy' + r)[py'' + y'(r+sy') - (s+ty')] = 0.$$

Prendiamo il punto P comune al nostro sistema di geodetiche, come origine del sistema cartesiano, e la normale alla superficie come asse Pz; allora $p = q = 0$; inoltre l'equazione delle geodetiche dà in P: $y'' = 0$ e la derivata:

$$y''' = (r + 2sy' + ty'^2)\,[sy'^2 + (r - t)\,y' - s].$$

Così l'espressione della torsione si riduce a:

$$\tau = \frac{-y'''}{(1 + y'^2)\,z''}$$

e, sostituendo ad y''' il valore scritto sopra e a z'' l'espressione $r + 2sy' + ty'^2$ diventa:

$$\tau = \frac{s + (t - r)\,y' - sy'^2}{1 + y'^2} \qquad (11)$$

ed è questa la formola cui alludevamo. Le derivate prima e seconda di τ rispetto ad y' sono rispettivamente:

$$\tau' = \frac{(t - r) - 4sy' - (t - r)\,y'^2}{(1 + y'^2)^2};$$

$$\tau'' = \frac{-2\,(1 + y'^2)\,(2s + (t - r)\,y') - 4y'\,(t - r - 4sy' - (t - r)\,y'^2)}{(1 + y'^2)^3}.$$

L'equazione $\tau' = 0$ ammette due radici reali: una rende negativa τ'' epperò corrisponde ad un massimo di torsione; l'altra rende positiva τ'' e corrisponde quindi ad un minimo di torsione; poichè il prodotto delle radici di $\tau' = 0$ è -1 ne concludiamo subito che le geodetiche corrispondenti a queste radici sono ortogonali, dunque: *Fra le geodetiche passanti per uno stesso punto di una superficie ve ne ha una di minima e l'altra di massima torsione: esse sono ortogonali, epperò la tangente all'una è binormale all'altra.* (1)

Ed ora cambiamo il triedro cartesiano assumendo come asse Pz sempre la normale alla superficie, e come assi Px e Py rispettivamente le tangenti alle geodetiche di massima e minima torsione; allora l'equazione $\tau' = 0$ deve ammettere una radice zero, dunque $t - r = 0$ e la (11) diventa:

$$\tau = s\,\frac{1 - y'^2}{1 + y'^2}$$

in questa formola ora y' denota la tangente dell'angolo che la geodetica mobile fa con la tangente alla geodetica di massima torsione

(1) Questa ed altre proprietà che enuncio relativamente alla torsione delle geodetiche, sono notissime (V. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, vol. I, pag. 200 (in nota). (Seconda edizione). Ma è necessario che le richiami per aggiungere qualche mia considerazione. Pigliando come assi Px e Py le rette principali, l'equazione $\tau' = 0$, poichè $s = 0$ dà $y' = \pm 1$, cioè le tangenti alle geodetiche di massima e minima torsione sono le bisettrici degli angoli delle rette principali.

(asse Px); chiamando α quest'angolo avremo:

$$y' = \operatorname{tg} \alpha, \qquad \frac{1 - y'^2}{1 + y'^2} = \cos 2\alpha,$$

epperò

$$\tau = s \cos 2\alpha. \tag{12}$$

Le torsioni massima e minima ora si ottengono in corrispondenza ai valori 0, $\frac{\pi}{2}$ di α, esse son dunque:

$$\tau_1 = s, \qquad \tau_2 = -s.$$

Le torsioni di due geodetiche ortogonali si ottengono dalla (12) per i valori α, $\alpha + \frac{\pi}{2}$ dell'angolo; queste torsioni son dunque:

$$\tau' = s \cos 2\alpha, \qquad \tau'' = -s \cos 2\alpha$$

donde: $\tau' = -\tau''$, cioè: *Due geodetiche ortogonali hanno torsioni opposte.*

Inoltre si ha:

$$\tau'\tau'' = -s^2 \cos^2 2\alpha = \tau_1\tau_2 \cos^2 2\alpha;$$

applicando questa formola a due coppie di direzioni ortogonali e che si bisechino mutuamente, bisognerà mutare α in $\alpha + \frac{\pi}{4}$ per passare dall'una coppia all'altra così che, chiamando τ', τ''; τ'_1, τ''_1 le torsioni rispettive di queste coppie, avremo:

$$\tau'\tau'' = \tau_1\tau_2 \cos^2 2\alpha, \qquad \tau'_1\tau''_1 = \tau_1\tau_2 \operatorname{sen}^2 2\alpha$$

donde: $\tau'\tau'' + \tau'_1\tau''_1 = \tau_1\tau_2$ cioè: *La somma dei prodotti di torsione di due coppie di geodetiche ortogonali che si bisecano, è costante od eguale al prodotto delle torsioni principali* (torsioni massima e minima).

La (12) mostra ancora che la torsione geodetica si annulla per $\alpha = \frac{\pi}{4}$ od $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ cioè lungo le direzioni principali; così vediamo che fra le geodetiche passanti per un punto P di una superficie, ve ne ha due (quelle delle direzioni principali) le quali hanno col proprio piano osculatore un contatto almeno di terz'ordine.

Notiamo inoltre che la (12) può scriversi $\tau = s \cos^2 \alpha - s \operatorname{sen}^2 \alpha$, e però, introducendo le torsioni principali, dà:

$$\tau = \tau_1 \cos^2 \alpha + \tau_2 \operatorname{sen}^2 \alpha$$

formola che lega la torsione di una geodetica qualunque del nostro sistema con le torsioni principali τ_1 e τ_2 e con l'angolo di quella geodetica con la geodetica di massima torsione. Essa è analoga a quella di Eulero relativa alle curvature normali. [1]

---

[1] V. Burgatti, *l. c.*, pag. 233.

Per la rappresentazione geometrica pigliamo il sistema cartesiano come al principio del presente numero, cioè la normale alla superficie come asse Pz, così che la tangente alla geodetica mobile si sposterà sul piano xy e la torsione sarà data dalla formola (11) cioè:

$$\frac{1}{T}=\frac{s+(t-r)y'-sy'^2}{1+y'^2}.$$

Introducendo l'angolo α della geodetica mobile con l'asse Px, questa formola diventa

$$\frac{1}{T}=s\cos^2\alpha+(t-r)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-s\operatorname{sen}^2\alpha. \tag{13}$$

Ciò premesso riporteremo su ogni tangente, a partire da P, una lunghezza $PM=\sqrt{|T|}$ indicando con T il raggio di torsione della corrispondente geodetica; allora per trovare il luogo dei punti M del piano xy osserveremo che le coordinate di M sono:

$$X=\sqrt{|T|}\cos\alpha,\qquad Y=\sqrt{|T|}\operatorname{sen}\alpha$$

donde:

$$\cos\alpha=\frac{X}{\sqrt{|T|}},\qquad \operatorname{sen}\alpha=\frac{Y}{\sqrt{|T|}},\qquad |T|=X^2+Y^2;$$

sostituendo nella (13) distingueremo i valori di α che rendono positivo il secondo membro da quelli che lo rendono negativo, si trova così che il luogo dei punti M si compone delle due iperboli equilatere complementari:

$$s(X^2-Y^2)+(t-r)XY=1,\quad s(X^2-Y^2)+(t-r)XY=-1 \tag{14}$$

la prima corrisponde ai valori di α che rendono positivo T, l'altra a quelli che lo rendono negativo.

I rapporti direttivi degli assintoti comuni delle due iperboli (14) sono le radici m dell'equazione:

$$sm^2-(t-r)m-s=0$$

essa mostra che quando si pigliano come assi Px e Py le rette principali della superficie, poichè è allora $s=0$, queste due radici si riducono ai rapporti direttivi degli assi stessi, dunque gli assintoti comuni delle iperboli (14) sono le rette principali.

L'equazione della involuzione di diametri coniugati delle iperboli (14) si riduce nell'attuale sistema di assi x, y, semplicemente alla simmetria $m+m'=0$ [1] che mostra come due diametri qualsiasi simmetrici rispetto alle rette principali sono coniugati. Quindi, dal teorema di Apollonio sui diametri coniugati segue: *La somma*

---

[1] È questa simmetria la involuzione di cui parla il BURGATTI in principio della sua Memoria (V. *l. c.*, pag. 230).

dei raggi di torsione di due geodetiche qualsiansi isocline sulle linee di curvatura è costante purchè si rifletta che, in base alla relazione $PM = \sqrt{|T|}$, il raggio di torsione della geodetica corrispondente ad una direzione, è uguale al quadrato del semidiametro della iperbole indicatrice, lungo quella direzione stessa e inoltre, se un diametro taglia un'iperbole, il simmetrico (rispetto ad una retta principale) taglia la iperbole coniugata, dove la torsione ha segno contrario.

5. Calcolo della torsione geodetica principale. — Chiameremo così il valore assoluto delle torsioni massima e minima.

Queste torsioni corrispondono ai massimi e minimi della funzione (2) di y' quando per z', z'', z''' si sostituiscono le espressioni (3) e per y'' ed y''' quelle che si ottengono dall'equazione differenziale delle geodetiche e dalla sua derivata, cioè:

$$y'' = \frac{A\,(py' - q)}{P}$$

$$y''' = \frac{BP\,(py' - q) + AP\,\{sy'^2 + (r - t)\,y' - s\} - A\,(py' - q)\,\{pr + 4qs + 2y'\,(2qt - ps) - 3pty'^2\}}{P^2}$$

dove

$$A = r + 2sy' + ty'^2, \quad B = u + 3vy' + 3wy'^2 + ky'^3, \quad P = 1 + p^2 + q^2.$$

Fatte queste sostituzioni la (2) dopo qualche semplifica, diventa:

$$\tau = \frac{\alpha y'^2 + \beta y' + \gamma}{P\,\{(1 + q^2)\,y'^2 + 2pqy' + (1 + p^2)\}} = \frac{N}{D} \tag{15}$$

dove, per brevità, si è posto:

$$\alpha = pqt - s\,(1 + q^2); \ \beta = t\,(1 + p^2) - r\,(1 + q^2); \ \gamma = s\,(1 + p^2) - pqr.$$

La (15) può scriversi:

$$\{\alpha - P\,(1 + q^2)\,\tau\}\,y'^2 + \{\beta - 2Ppq\tau\}\,y' - \{\gamma + P\,(1 + p^2)\,\tau\} = 0 \tag{16}$$

derivando la stessa (15) ed eguagliando a zero la derivata (rispetto ad y'), si ha:

$$D\,(2\alpha y' + \beta) - 2NP\,((1 + q^2)\,y' + pq) = 0$$

dividendo per D e ponendo per $\frac{N}{D}$ il valore τ (massimo o minimo di torsione), si trova:

$$y' = \frac{2Ppq\,\tau - \beta}{2\,\{\alpha - P\,(1 + q^2)\,\tau\}} \tag{I}$$

donde:

$$2\,\{\alpha - P\,(1 + q^2)\,\tau\}\,y'^2 = -\,y'\,(\beta - 2Ppq\tau);$$

sostituendo nella (16) e ricavando poi y' risulta:

$$y' = \frac{2\,\{\gamma + P\,(1 + p^2)\,\tau\}}{\beta - 2\,pqP\tau} \tag{II}$$

confrontando i due valori di y' risulta infine, a riduzione fatta, l'equazione di secondo grado in τ:

$$4P^8\tau^2 - \{t(1+p^2) - r(1+q^2)\}^2 - \\ -4\{pqt - s(1+q^2)\}\{pqr - s(1+p^2)\} = 0 \quad (17)$$

le cui radici sono le torsioni geodetiche principali.

È notevole il fatto che il numeratore di τ^2 nella (17) coincide col discriminante dell'equazione (in y') delle linee di curvatura, anzi le espressioni in parentesi { } sono addirittura i coefficienti dell'equazione differenziale delle linee di curvatura.

Pigliando, per un momento, come asse Pz la normale alla superficie in P ed assi Px, Py le rette principali ($p = q = s = 0$) le due torsioni principali si riducono a $+\frac{r-t}{2}$, $-\frac{r-t}{2}$; siccome le curvature principali, nell'attuale sistema, sono r, t, ne deduciamo che: *le torsioni principali sono eguali, in valore assoluto alla semidifferenza delle curvature principali*, e che: *la differenza delle torsioni principali in ogni punto di una superficie, è uguale alla differenza delle curvature principali.*

Da ciò deduciamo che, indicando con τ_1 il prodotto delle torsioni principali, e con ρ_1 e ρ_2 le curvature principali in P, si ha:

$$\tau_1 = -\left(\frac{r-t}{2}\right)^2 = -\left\{\left(\frac{r+t}{2}\right)^2 - rt\right\}$$

e quindi la formola:

$$\tau = \sqrt{H^2 - K},$$

che esprime la torsione principale per mezzo della curvatura media H e totale K.

Da quel che abbiamo detto segue ancora che, se in un punto di una superficie, sono nulli i raggi principali di torsione, saranno eguali quelli di curvatura e viceversa; ma allora quel punto è punto circolare (ombellico) della superficie.

6. Linee di torsione. [1] — Lasciandoci guidare dalla analogia con le curvature normali, chiameremo *linee di torsione*, di una superficie, quelle che hanno, in ciascun punto, per tangente, una delle due direzioni delle torsioni principali, cioè una bisettrice degli angoli delle rette principali. Queste linee non sono dunque che delle trajettorie semi-ortogonali delle linee di curvatura.

Per trovarne l'equazione differenziale, osserveremo che i valori (I) e (II) di y' ricavati sono quelli che rendono massima o minima la torsione τ e quindi questi valori, insieme al valore di z' dato dalle (3)

[1] Queste linee furono studiate, da un altro punto di vista, e con altro nome, da EISENHART: "Three particular Systems of lines on a Surface" (Transactions of the *American Mathematical Society*, vol. V, 1904, pagg. 421-437).

ed all'unità sono le coordinate direttive della tangente ad una linea di torsione. Eliminando τ fra le (I) e (II) si trova:

$$\{2\alpha pq-\beta(1+q^2)\}y'^2+2\{\alpha(1+p^2)-\gamma(1+q^2)\}y'+$$
$$+\beta(1+p^2)-2pq\gamma=0$$

e, sostituendo ad α, β, γ le loro espressioni, si può scrivere:

$$\begin{aligned}&\{(p^2q^2-P)t-2pq(1+q^2)s+(1+q^2)^2r\}y'^2-\\ &-2\{pq(1+p^2)t-2(1+p^2)(1+q^2)s+pq(1+q^2)r\}y'+\\ &+\{(p^2q^2-P)r-2pq(1+p^2)s+(1+p^2)^2t\}=0.\end{aligned}\qquad (A)$$

Questa è l'equazione differenziale delle linee di torsione. In base ad essa si ha un'equazione del tipo

$$\Phi(xyc)=0 \qquad \text{(con } c \text{ costante arbitraria)}$$

che, insieme all'equazione della superficie, determina, per ogni valore fissato di c, la corrispondente linea di torsione.

Per ogni punto della superficie passano sempre due linee di torsione, le quali si tagliano sempre ad angolo retto, e ciò per l'ortogonalità delle direzioni principali.

Andiamo ora ad esaminare alcune proprietà fondamentali delle linee di torsione. [1]

Tutte le normali in un punto P ad una linea di torsione (che tocca ivi una bisettrice degli angoli delle rette principali) si projettano evidentemente, sul piano tangente in P, lungo l'altra bisettrice, che è normale alla prima, epperò formano angoli eguali con le rette principali. Viceversa, se ogni normale in ogni punto P di una linea della superficie è egualmente inclinata sulle rette principali, essa sta sul piano normale che ha per traccia sul piano tangente in P una bisettrice degli angoli delle rette principali, e quindi la tangente a quella curva è l'altra bisettrice. Dunque: *Le linee di torsione sono caratterizzate dal fatto che tutte le normali ad esse sono sempre egualmente inclinate sulle rette principali della superficie.*

Le torsioni geodetiche delle due linee di torsione che passano per un punto di una superficie coincidono, per la definizione stessa, con le torsioni principali, quindi, da quanto abbiam detto al n. 5 segue che la torsione geodetica di una linea di torsione in ogni punto è uguale alla semidifferenza delle curvature principali in quel punto.

Pigliamo per un momento, per asse Pz la normale alla superficie nel punto P che si considera (origine) e per assi Px e Py le rette principali, allora la curvatura normale ad una linea della superficie è data da

$$\rho=\frac{r+ty'^2}{1+y'^2}$$

---

[1] La maggior parte di queste proprietà sono state enunciate da Eisenhart nel lavoro citato; è necessario però che io le richiami per aggiungervi qualche po' del mio.

e per una linea di torsione ($y' = \pm 1$) questa curvatura diventa:

$$\rho = \frac{r + t}{2}.$$

Ma anche la curvatura media H della superficie in P, nell'attuale sistema cartesiano, è data da $\frac{r+t}{2}$ dunque:

La curvatura normale di una linea di torsione in ciascun punto, eguaglia la curvatura media della superficie in quel punto.

Siffatta proprietà caratterizza le linee di torsione. Infatti la curvatura normale di una linea in ciascun punto è data da:

$$\rho = \frac{r + 2sy' + ty'^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,[(1 + q^2)\,y'^2 + 2pqy' + (1 + p^2)]}.$$

La curvatura media della superficie è data da:

$$\frac{(1 + q^2)\,r - 2pqs + (1 + p^2)\,t}{2\,(1 + q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

eguagliando queste due espressioni si ricade sull'equazione differenziale delle linee di torsione. Dunque tanto vale dire che una linea di una superficie tocca in ciascun punto, una bisettrice degli angoli delle rette principali, quanto dire che la curvatura normale pareggia la curvatura media della superficie.

Ne segue che per ottenere il raggio di curvatura normale di una linea di torsione in un punto, basta projettare nel piano osculatore alla linea, il segmento di normale alla superficie, eguale alla media armonica dei raggi di curvature principali.

Pigliando come asse Pz la normale alla superficie, e come assi x ed y le rette principali, la formola (11) della torsione geodetica in P diventa:

$$\tau = \frac{(t - r)\,y'}{1 + y'^2}$$

e. per la nostra linea ($y' = \pm 1$) è:

$$\tau = \frac{t - r}{2}$$

mentre abbiam visto che

$$\rho = \frac{t + r}{2};$$

da queste segue

$$t = \rho + \tau, \qquad r = \rho - \tau$$

oppure:

$$t = \rho - \tau, \qquad r = \rho + \tau.$$

Siccome nell'attuale sistema coordinato r e t sono le curvature principali, possiamo dire che in ogni caso: *Le curvature principali in un* *punto di una superficie si ottengono sommando e sottraendo la curvatura normale e la torsione geodetica di una linea di torsione passante per quel punto.*

Passiamo a cercare le linee di torsione in alcune superficie.

In quelle ad area minima, le linee assintotiche, essendo, in ogni punto ortogonali, le loro direzioni coincidono con le bisettrici delle rette principali, epperò le linee di torsione sono linee assintotiche.

Siccome poi fra le superficie di rotazione il solo catenoide è di area minima, ne concludiamo che fra la superficie di rotazione il solo catenoide ha per linee di torsione linee assintotiche.

Fra le superficie rigate l'elicoide a piano direttore è, come è notissimo, la sola superficie minima (teor. di Catalan) epperò fra le rigate il solo elicoide a piano direttore ha per linee di torsione linee assintotiche.

Ritornando alle superficie di rotazione, osserviamo che le rette principali in ogni punto sono le tangenti al meridiano ed al parallelo di quel punto, dunque le linee di torsione incontrano, in ogni punto, sotto un angolo di 45° il meridiano ed il parallelo passanti per quel punto, cioè sono lossodromiche semi-ortogonali.

Sopra ogni superficie sviluppabile poichè ogni generatrice è linea di curvatura, le linee di torsione di un sistema sono trajettorie semi-ortogonali delle generatrici.

Nel cilindro le linee di torsione sono eliche, epperò geodetiche; nel cono semplicemente eliche. Nell'elicoide, poichè quelle linee coincidono con le assintotiche, sono le generatrici e le sezioni della superficie con una famiglia di cilindri circolari coassiali alla superficie stessa. Ritornando alle superficie sviluppabili, enuncio una proprietà delle linee di torsione di un sistema:

La tangente in un punto di una linea di torsione (di un sistema) di una superficie sviluppabile, fa con la normale principale allo spigolo di regresso nel corrispondente punto centrale, un angolo di 45°; la normale principale allo spigolo di regresso in un punto è, per conseguenza, parallela ad una delle rette principali nel corrispondente punto della superficie. (¹)

Poichè l'angolo della tangente a T e della normale principale allo spigolo di regresso Γ è anche l'angolo del piano normale a T in P col piano rettificante a Γ in Q, possiamo anche dire che:

Il piano normale alla linea di torsione in un punto, è inclinato a 45° sul piano rettificante allo spigolo di regresso nel corrispondente punto centrale.

(¹) Questo risultato non è che un caso particolare di un teorema sulle linee isocline alle generatrici di una superficie sviluppabile (*Giornale di Matematiche di Battaglini*, vol. L, 1912 (3° della 3ª serie)). Lì dimostro che: Se una linea T di una superficie sviluppabile incontra le generatrici sotto un angolo costante α, la tangente ad essa in un punto forma, con la normale principale allo spigolo di regresso nel corrispondente punto centrale, un angolo che è il complemento di α.

Osserviamo ancora che il piano normale a T in P è inclinato a 45° sulla generatrice PQ, dunque la normale principale QR allo spigolo di regresso in Q farà pure un angolo di 45° con questo piano. Perciò:

La generatrice e la normale principale allo spigolo di regresso in un punto Q sono inclinate a 45° sul piano normale alla linea di torsione T nel punto P corrispondente di Q e si proiettano quindi, su quel piano, lungo una stessa retta.

7. Equazione differenziale delle linee di torsione in coordinate curvilinee. — Basta, per ottenere questa equazione, eguagliare le espressioni della curvatura normale e della curvatura media, cioè: [1]

$$-\frac{\mathrm{D}du^2+2\mathrm{D}'du\,dv+\mathrm{D}''dv^2}{\mathrm{E}du^2+2\mathrm{F}du\,dv+\mathrm{G}dv^2}=\frac{2\mathrm{FD}'-\mathrm{ED}''-\mathrm{GD}}{2(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)}$$

per ottenere:

$$\{\mathrm{G}(\mathrm{ED}''-\mathrm{DG})-2\mathrm{F}(\mathrm{FD}''-\mathrm{D}'\mathrm{G})\}\,dv^2-2\{-2\mathrm{EGD}'+\mathrm{F}(\mathrm{DG}+\mathrm{ED}'')\}\,du dv$$
$$+\{\mathrm{E}(\mathrm{DG}-\mathrm{ED}'')-2\mathrm{F}(\mathrm{FD}-\mathrm{D}'\mathrm{E})\}\,du^2=0.$$

Il primo membro di questa equazione è il jacobiano della prima forma fondamentale e della forma che, eguagliata a zero, dà l'equazione delle linee di curvatura. Dunque:

L'equazione differenziale delle linee di torsione si ottiene eguagliando a zero il jacobiano della prima forma fondamentale e del jacobiano tra la prima e la seconda forma fondamentale.

L'equazione precedente prova che, se si pigliano come linee u, v il sistema (ortogonale) delle linee di torsione, deve aversi $\mathrm{F}=0$, $\mathrm{ED}''=\mathrm{DG}$ e viceversa.

Allora la prima e la seconda forma fondamentale si riducono rispettivamente ad

$$\mathrm{E}du^2+\mathrm{G}dv^2,\qquad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{E}}(\mathrm{E}du^2+\mathrm{G}dv^2)+2\mathrm{D}'du dv.$$

Invece il jacobiano tra la prima forma e la seconda si riduce semplicemente a $\mathrm{D}'(\mathrm{E}du^2-\mathrm{G}dv^2)$.

I teoremi generali relativi alla rappresentazione di una superficie su un'altra ci dicono che le direzioni delle bisettrici degli angoli retti ruotanti attorno un punto di una superficie, che corrispondono ai massimi e minimi di deformazione angolare, sono le direzioni principali; da ciò deduciamo subito che: In qualsiasi rappresentazione di una superficie su un'altra, le direzioni delle linee di torsione corrispondono alla massima e minima deformazione dell'angolo retto.

Inoltre, come è noto, è costante la somma di quadrati dei moduli lineari di due direzioni ortogonali, ed è uguale alla somma dei qua-

---

[1] BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, vol. 1, pag. 130 e 134.

drati dei moduli delle direzioni principali, e due direzioni simmetriche rispetto alle direzioni principali, hanno lo stesso modulo lineare. Da ciò segue che:

Il quadrato del modulo lineare sulla direzione di una linea di torsione è uguale alla semisomma dei quadrati dei moduli sulle direzioni principali.

Vediamo in quali superficie il sistema delle linee di torsione risulta isotermo.

Consideriamo una superficie dove il sistema delle linee di curvatura u, v è isotermo e siano u, v parametri isometrici relativi a questo sistema; avremo allora, per l'elemento lineare $ds^2 = \mathrm{A}\,(du^2 + dv^2)$ dove A è una funzione di u, v.

Se indichiamo con (α, β) il sistema delle linee di torsione in quella superficie, queste linee hanno le equazioni $u - v = \text{cost.}$ $u + v = \text{cost.}$ perchè sono bisettrici delle linee di curvatura; la trasformazione di coordinate (u, v) nelle (α, β) può dunque scriversi così:

$$u + v = 2\alpha, \qquad u - v = 2\beta$$

cioè:

$$u = \alpha + \beta, \qquad v = \alpha - \beta$$

e quindi:

$$ds^2 = \mathrm{A}\,(du^2 + dv^2) = 2\mathrm{A}\,(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

Ne concludiamo subito che:

Il sistema delle linee di torsione risulta isotermo in tutte le superficie dove è isotermo quello delle linee di curvatura.

Cerchiamo da ultimo le equazioni cui verificano le coordinate cartesiane x, y, z di un punto di una superficie, espresse mediante i parametri u, v di due linee di torsione.

Noi abbiamo già osservato che se il sistema coordinato (u, v) è quello delle linee di torsione deve aversi: $\mathrm{F} = 0$, $\mathrm{ED}'' = \mathrm{DG}$ e viceversa.

Ciò premesso osserviamo che le derivate seconde delle coordinate x, y, z si esprimono mediante le derivate prime ed i coseni direttori X, Y, Z della normale alla superficie, con le formole: (¹)

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{DX}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{D'X}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{D''X}$$

e le analoghe in y, z: qui i simboli $\begin{Bmatrix} rs \\ t \end{Bmatrix}$ di Cristoffel si riferiscono

(¹) BIANCHI, *l. c.*, pag. 116.

alla prima forma fondamentale. Ne segue subito che, se u, v sono linee di torsione, deve aversi dapprima

$$G\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - E\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \left[G\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - E\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\right]\frac{\partial x}{\partial u} + \left[G\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} - E\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\right]\frac{\partial x}{\partial v}$$

ed analogamente per y e z.

Si può osservare che anche il quadrato ρ della distanza del punto x, y, z dall'origine verifica questa equazione.

Invero da $\rho = \Sigma x^2$ segue:

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = 2\Sigma x\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial v} = 2\Sigma x\frac{\partial x}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} = 2\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + 2\Sigma x\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 2E + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial \rho}{\partial u} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial \rho}{\partial v} + 2D\Sigma xX$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\partial v} = 2\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + 2\Sigma x\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = 2F + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial \rho}{\partial n} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial \rho}{\partial v} + 2D'\Sigma xX$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} = 2\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + 2\Sigma x\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 2G + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial \rho}{\partial u} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial \rho}{\partial v} + 2D''\Sigma xX$$

e sostituendo nella equazione che precede, si vede che è verificata purchè si tenga presente che $ED'' = DG$.

Ci rimane a tener conto della condizione $F = 0$. Per ciò cominceremo coll'osservare che le x, y, z verificano una medesima equazione del tipo

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\partial v} = A\frac{\partial \varphi}{\partial u} + B\frac{\partial \varphi}{\partial v} + C\varphi \qquad (a)$$

purchè la superficie non sia un cono col vertice nell'origine. (¹)

Infatti scrivendo che la (a) è soddisfatta da x, y, z si ha un sistema di Cramer in A, B, C perchè il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & x \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & y \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & z \end{vmatrix}$$

non è nullo, ed infatti (²)

$$\sqrt{EG - F^2} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{dv} & X \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & Y \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial v} & Z \end{vmatrix}$$

(¹) G. Sannia, "Linee isocline rispetto alle linee di curvatura ", *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, tomo XXV, 1908, pag. 287.

(²) Bianchi, *l. c.*, pag. 115.

e, moltiplicando per verticali:

$$\Delta\sqrt{EG-F^2}=\begin{vmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ \Sigma x\frac{\partial x}{\partial u} & \Sigma x\frac{\partial x}{\partial v} & \Sigma xX \end{vmatrix}=(EG-F^2)\,\Sigma xX$$

da cui

$$\Delta=\sqrt{EG-F^2}\,\Sigma xX.$$

Ne segue subito che Δ non è nullo perchè ΣxX è la distanza dell'origine al piano tangente alla superficie nel punto xyz e nelle attuali ipotesi questa distanza è diversa da zero. Ciò premesso abbiamo:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\partial v}=2\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+2\Sigma x\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=2F+2\Sigma x\left(A\frac{\partial x}{\partial u}+B\frac{\partial x}{\partial v}+Cx\right)$$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\partial v}=2F+A\frac{\partial\rho}{\partial u}+B\frac{\partial\rho}{\partial v}+2C\rho.$$

Dunque la condizione $F=0$ equivale alla seguente:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\partial v}=A\frac{\partial\rho}{\partial u}+B\frac{\partial\rho}{\partial v}+2C\rho. \tag{18}$$

Viceversa supponiamo che x, y, z, ρ verifichino un'equaz. del tipo

$$a\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-b\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}=\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\beta\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \tag{19}$$

e ρ inoltre la (18). Allora si ha subito $F=0$; inoltre per la compatibilità delle equazioni (19) si ha:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial y}{\partial v^2} & \frac{\partial y}{du} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^3 z}{\partial u^3} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} & \frac{\partial^2\rho}{\partial v^2} & \frac{\partial\rho}{\partial u} & \frac{\partial\rho}{\partial v} \end{vmatrix}=0$$

sostituendo per le derivate di ρ i valori trovati (¹) e poi togliendo dall'ultima riga le precedenti moltiplicate rispettivamente per x, y, z, risulta:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ 2E & 2G & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

(¹) Cioè rispettivamente:

$$2E+2\Sigma x\frac{\partial^2 x}{\partial u^2},\quad 2G+2\Sigma x\frac{\partial^2 x}{\partial v^2},\quad 2\Sigma x\frac{\partial x}{\partial u},\quad 2\Sigma x\frac{\partial x}{\partial v}.$$

donde subito $ED'' - GD = 0$, dunque le linee u, v sono linee di torsione epperò:

Le coordinate cartesiane ortogonali x, y, z *di un punto mobile di una superficie, espresse in funzione dei parametri* u, v *di due linee di torsione, e* $\rho = \Sigma x^2$ *verificano un'equazione del tipo* (19); *di più* ρ *verifica ancora un'equazione del tipo* (18). *E viceversa.*

8. Linee caratteristiche. (¹) — Riesce ora naturale la domanda: Quali linee della superficie si ottengono eguagliando a zero l'jacobiano tra la seconda forma fondamentale e il jacobiano delle prime due forme?

L'equazione differenziale di queste linee è:

$$\begin{aligned}\{D(ED''-DG)-2D'(ED'-FD)\}\,du^2 &+ \\ +2\{D(FD''-D'G)-D''(ED'-FD)\}\,du\,dv &+ \\ +\{2D'(FD''-D'G)-D''(ED''-DG)\}\,dv^2 &= 0. \qquad (20)\end{aligned}$$

Pigliamo, per semplicità, come linee coordinate u, v il sistema delle linee di curvatura; allora $F = D' = o$ e la (20) si riduce a (²)

$$D\,du^2 - D''dv^2 = 0. \qquad (21)$$

Le espressioni della curvatura normale, media e totale sono ora rispettivamente: (³)

$$\frac{1}{R} = -\frac{D\,du^2 + D''dv^2}{E\,du^2 + G\,dv^2},\quad H = -\frac{ED'' + GD}{2\,EG},\quad K = \frac{DD''}{EG}.$$

Dunque la curvatura normale in un punto di una linea in quistione è:

$$\frac{1}{R} = -\frac{2\,DD''}{ED'' + GD}.$$

Epperò: *La curvatura normale in ciascun punto di una linea caratteristica pareggia il rapporto delle curvature totale e media della superficie in quel punto.*

Questa proprietà caratterizza le linee attuali. Invero eguagliando la curvatura normale al rapporto tra la curvatura totale e media cioè:

$$-\frac{D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2}{E\,du^2 + 3\,F\,du\,dv + G\,dv^2} = \frac{2\,(DD'' - D'^2)}{2\,FD' - ED'' - GD}$$

si ricade sull'equazione (20), dunque tanto vale dire la proprietà enunciata quanto dire che la linea è caratteristica.

Dalla (21) deduciamo subito che per un punto della superficie, *che sia ellittico*, passano sempre due linee caratteristiche, in generale non ortogonali, ma isocline sulle linee di curvatura.

(¹) Queste linee sono state considerate, da un altro punto di vista, da PUCCI: " Dell'angolo caratteristico e delle linee caratteristiche di una superficie (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, vol. V. 1889, 1º semestro, pp. 501-507) che ha dato loro questo nome, da REINA: " Di alcune proprietà delle linee caratteristiche " (Ibid., pagg. 881-885) e da EISENHART (*l. c.*).

(²) Noto, di passaggio, la forma semplicissima alla quale si riduce, nell'attuale sistema coordinato, l'equazione differenziale delle linee di torsione: $E\,du^2 - G\,dv^2 = 0$.

(³) BIANCHI, *l. c.*, pagg. 130-134.

Le linee caratteristiche non esistono dunque che sulle superficie a punti ellittici, laddove mancano le assintotiche.

L'equazione cartesiana delle linee caratteristiche si può ottenere con le note formule di passaggio. (1) Così si trova:

$$\begin{aligned}&[2s\{pqt - s(1+q^2)\} - t\{(1+p^2)t - r(1+q^2)\}]\,y'^2\\ &\quad + 2[r\{pqt - s(1+q^2)\} - t\{(1+p^2)s - pqr\}]\,y'\\ &\quad + r[(1+p^2)t - (1+q^2)r] - 2s[(1+p^2)s - pqr] = 0. \qquad (a)\end{aligned}$$

Pigliando il punto O in considerazione come origine del sistema, la normale alla superficie come asse Oz e le rette principali come assi Ox ed Oy, questa equazione si riduce ad

$$y' = \frac{r}{t};$$

allora le formole (a) e (11) dànno:

$$\rho = \frac{2rt}{r+t}, \qquad \tau = \frac{(t-r)\sqrt{rt}}{t+r}.$$

Da queste si deduce dapprima:

$$\frac{\rho}{\tau} = \frac{2\sqrt{rt}}{t-r}, \quad \text{poi:} \quad tr = \rho^2 + \tau^2, \quad \frac{t+r}{2} = \frac{\rho^2+\tau^2}{\rho}.$$

Dunque: *La somma dei quadrati della curvatura normale e torsione geodetica di una linea caratteristica in un punto, è eguale alla curvatura totale della superficie in quel punto* (2) *e questa somma, divisa per la curvatura normale, è uguale alla curvatura media della superficie nello stesso punto.*

Di più la equazione della indicatrice di Dupin nell'attuale sistema cartesiano è

$$rX^2 + tY^2 = 1$$

epperò l'involuzione di diametri coniugati ad essa relativa è:

$$tmm' + r = 0$$

dove m, m' dinotano i coefficienti angolari di due direzioni coniugate. Ma allora risulta subito che le due direzioni

$$\sqrt{\frac{r}{t}}, \quad -\sqrt{\frac{r}{t}}$$

delle linee caratteristiche sono coniugate.

(1) Bianchi, *l. c.*, pag. 144.

(2) Altrove ho dimostrato (*Periodico di Matematica*, di G. Lazzeri, anno XXVIII, fasc. II), che questa somma è il quadrato del limite del rapporto tra l'angolo delle normali principali in O ed in un punto vicino della geodetica che tocca la linea in O, e l'arco corrispondente; limite che si può proporre come misura di una terza curvatura per le linee gobbe. Le linee caratteristiche hanno dunque, in ogni punto, questa terza curvatura geodetica eguale alla radice quadrata della curvatura totale, cioè del prodotto delle curvature principali. Si confronti questa proprietà con l'altra, relativa alle assintotiche, espressa dal teorema di Enneper.

Dunque: *Le linee caratteristiche corrispondono alle direzioni coniugate ed isocline sulle linee di curvatura.*

Ritornando al sistema coordinato u, v costituito dalle linee di curvatura noteremo una semplice relazione che intercede fra l'angolo α di una linea caratteristica con la linea delle v e l'angolo u' corrispondente, nella rappresentazione sferica di Gauss, all'angolo u di una linea di torsione con la linea delle v. Infatti è noto che tra u e u' intercede la relazione

$$\operatorname{tg} u' = \sqrt{\frac{Eg}{eG}} \operatorname{tg} u \tag{a}$$

dove e, g sono i nuovi parametri E, G, sulla superficie sferica. Anzi questi sono legati ad E e G dalle relazioni [1]

$$-e = KE + HD, \quad -g = KG + HD''$$

essendo, nell'attuale sistema coordinato (delle linee di curvatura)

$$K = \frac{DD''}{EG}, \quad H = -\frac{ED'' + GD}{EG}.$$

Nel caso attuale è $u = 45°$, dunque

$$\operatorname{tg} u' = \sqrt{\frac{Eg}{eG}}$$

e, con breve calcolo si trova:

$$\operatorname{tg} u' = \frac{ED''}{GD}. \tag{21$'$}$$

Inoltre si ha, per formola nota:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{dv}{du}$$

ma per l'equazione (21) delle linee caratteristiche, è:

$$\frac{dv}{du} = \sqrt{\frac{D}{D''}}$$

dunque

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{GD}{ED''}}$$

epperò:

$$\operatorname{ctg} u' = \operatorname{tg}^2 \alpha$$

che è la relazione cui alludevamo.

Nella rappresentazione sferica di Gauss l'angolo caratteristico (delle linee caratteristiche) si trasforma nel supplementare perchè è l'angolo di due direzioni coniugate in punti ellittici. [2]

---

[1] V. Bianchi, *l. c.*, pag. 149.
[2] V. Bianchi, *l. c.*, pag. 150.

9. Linee ad immagini sferiche ortogonali. [1] — Consideriamo la terza forma fondamentale

$$e du^2 + 2 f du dv + g dv^2$$

i cui coefficienti sono legati a quelli delle altre due forme delle relazioni: [2]

$$-e = \mathrm{KE} + \mathrm{HD}, \quad -f = \mathrm{KF} + \mathrm{HD}', \quad -g = \mathrm{KG} + \mathrm{HD}''$$

essendo:

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{DD}'' - \mathrm{D}'^2}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}, \quad \mathrm{H} = \frac{2\,\mathrm{FD}' - \mathrm{ED}'' - \mathrm{GD}}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}.$$

Ne segue:

$$-e = \frac{2\,\mathrm{FDD}' - \mathrm{D}'^2\mathrm{E} - \mathrm{D}^2\mathrm{G}}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}, \quad -f = \frac{\mathrm{DD}''\mathrm{F} - \mathrm{DD}'\mathrm{G} + \mathrm{FD}'^2 - \mathrm{ED}'\mathrm{D}''}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}$$

$$-g = \frac{2\,\mathrm{FD}'\mathrm{D}'' - \mathrm{D}''^2\mathrm{E} - \mathrm{D}'^2\mathrm{G}}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}.$$

Ciò premesso, è lecita la domanda: Quali linee della superficie si ottengono eguagliando a zero il jacobiano tra la terza forma fondamentale ed il jacobiano delle prime due?

Pigliando, per semplicità, per sistema coordinato, quello delle linee di curvatura, poichè $\mathrm{F} = \mathrm{D}' = 0$ l'equazione differenziale delle nostre linee si riduce a:

$$\mathrm{D}^2\mathrm{G} du^2 - \mathrm{D}''^2\mathrm{E} dv^2 = 0 \tag{22}$$

che mostra anzitutto come quelle linee siano isocline sulle linee di curvatura (in questo senso che per ogni punto della superficie passano sempre [3] due di queste linee, le quali sono egualmente inclinate sulle linee di curvatura). [4]

Chiamiamo con l queste linee ed osserviamo che:

$$\mathrm{tg}\,(lv) = \sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{E}}}\,\frac{dv}{du} = \frac{\mathrm{GD}}{\mathrm{ED}''}.$$

Per la (21)' si può scrivere:

$$\mathrm{cotg}\, u' = \mathrm{tg}\,(lv),$$

dunque: *L'angolo che una linea* l *fa con una linea di curvatura è il complemento dell'angolo dell'immagine sferica di una linea di torsione con l'immagine sferica di una linea di curvatura.*

---

[1] Queste linee sono state considerate da Eisenhart nel citato lavoro.

[2] V. Bianchi, *l. c.*, pag. 149.

[3] Perchè i coefficienti E, G della (22) sono positivi.

[4] Nel sistema delle linee di curvatura l'equazione dell'involuzione di tangenti coniugate è $m' = -\frac{\mathrm{D}}{m\mathrm{D}''}$ (ove m ed m' dinotano i coefficienti differenziali di quelle direzioni); per una linea di torsione si ha, come abbiam visto $m = \sqrt{\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}}}$; dunque: $m' = \pm\frac{\mathrm{D}\sqrt{\mathrm{G}}}{\mathrm{D}''\sqrt{\mathrm{E}}}$, cioè le direzioni delle linee ad immagini sferiche ortogonali sono le coniugate delle direzioni delle linee di torsione.

Tra l'angolo (lv) di una linea l con la linea delle v ed il suo corrispondente nella sfera di Gauss passa, come è noto, la relazione:

$$\operatorname{tg}(lv)' = \sqrt{\frac{\mathrm{E}g}{e\mathrm{G}}}\operatorname{tg}(lv); \quad \text{ma} \quad \operatorname{tg}(lv) = \frac{\mathrm{GD}}{\mathrm{ED}''};$$

inoltre si è visto, che:

$$\sqrt{\frac{\mathrm{E}g}{e\mathrm{G}}} = \frac{\mathrm{ED}''}{\mathrm{GD}};$$

ne segue subito:

$$\operatorname{tg}(lv)' = 1.$$

Dunque: *l'angolo delle immagini sferiche delle due linee* l *passanti per ciascun punto è retto.*

La curvatura normale di una linea l è, nell'attuale sistema: (¹)

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = -\frac{\mathrm{D}+\mathrm{D}''\left(\frac{dv}{du}\right)^2}{\mathrm{E}+\mathrm{G}\left(\frac{dv}{du}\right)^2} = \frac{\mathrm{DD}''(\mathrm{D}''\mathrm{E}+\mathrm{DG})}{\mathrm{D}''^2\mathrm{E}^2+\mathrm{D}^2\mathrm{G}^2} = \frac{\frac{\mathrm{DD}''}{\mathrm{EG}}\left(-\frac{\mathrm{D}''\mathrm{E}+\mathrm{DG}}{2\,\mathrm{EG}}\right)}{\frac{\mathrm{D}''^2+\mathrm{D}^2\mathrm{G}^2}{2\,\mathrm{E}^2\mathrm{G}^2}}$$

e, indicando con K, H, C rispettivamente le curvature totali, media e quella di Casorati può scriversi:

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{KH}}{\mathrm{C}}.$$

Dunque: *la curvatura normale in ogni punto di una linea* l *è quarta proporzionale dopo la curvatura di Casorati, la media e la totale.*

Questa proprietà caratterizza le linee l. Invero costruendo l'espressione $\frac{\mathrm{KH}}{\mathrm{C}}$ nel caso di un sistema curvilineo u, v qualunque si trova:

$$\frac{(\mathrm{DD}''-\mathrm{D}'^2)(2\,\mathrm{FD}'-\mathrm{ED}''-\mathrm{GD})}{(2\,\mathrm{FD}'-\mathrm{ED}''-\mathrm{GD})^2-2\,(\mathrm{DD}''-\mathrm{D}'^2)(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)};$$

ed uguagliando questa espressione a quella della curvatura normale si ricade, con un semplice calcolo, nell'equaz. differenziale delle linee l.

10. Le linee di torsione e caratteristiche nei punti circolari della superficie. — In questi punti si ha, come è noto:

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2} \tag{23}$$

epperò come era da prevedersi, l'equazione differenziale cartesiana delle linee di torsione diventa illusoria annullandosi tutti i suoi coefficienti. Ma anche l'equazione differenziale cartesiana delle linee caratteristiche diventa, in quei punti, illusoria; infatti si vede su-

---

(¹) BIANCHI, *l. c.*, pag. 130.

bito, colle (23), che nei punti circolari si annullano tutti i coefficienti della (a). (¹)

Per decidere quello che accade in questi punti relativamente a queste linee, io mi servirò dei risultati dell'Analisi dell'attuale singolarità presentata dai coefficienti di un'equazione differenziale di 1° ordine e secondo grado; analisi fatta dal signor Picard. (²) Lo stesso Autore ha fatto applicazione di quella Analisi alla ricerca delle linee di curvatura passanti per un ombellico.

Supponiamo che l'ombellico sia all'origine e pigliamo lo sviluppo di z sotto la forma:

$$z = \frac{1}{2} k (x^2 + y^2) + \frac{1}{6} (ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3) + \ldots$$

avremo allora:

$$\begin{aligned} p &= kx + \frac{1}{2} (ax^2 + 2bxy + cy^2) + \ldots \\ q &= ky + \frac{1}{2} (bx^2 + 2cxy + dy^2) + \ldots \\ r &= k + ax + bx + \ldots \\ s &= \qquad bx + cy + \ldots \\ t &= k + cx + dy \ldots \text{(³)} \end{aligned}$$

L'equazione differenziale (A) della proiezione sul piano xy delle linee di torsione diventa:

$$(fx + gy + \ldots) y'^2 + 2 (bx + cy + \ldots) y' - (fx + gy + \ldots) = 0,$$

dove si sono scritti solamente i termini al primo grado in x ed y ed inoltre è posto:

$$a - c = 2f, \quad b - d = 2g.$$

Ponendo $y = tx$ si ottiene l'equazione ai coefficienti angolari delle tangenti alle curve integrali nell'origine: (⁴)

$$(f + gt)(t^2 - 1) + 2t(b + ct) = 0. \qquad (24)$$

Questa equazione si ottiene, come abbiamo detto ponendo nell'equazione differenziale $y = tx$.

(¹) I punti circolari sono caratterizzati, come è notissimo, dal fatto che in essi le curvature principali sono eguali; ed è facile vedere che l'annullarsi della torsione principale li caratterizza.— Infatti annullando la torsione principale data dalla (17) si ha:

$$(1 + p^2)^2 (1 + q^2)^2 \left[\frac{t}{1 + q^2} - \frac{r}{1 + p^2}\right]^2 + 4p^2q^2 (1 + p^2)(1 + q^2) \left[\frac{t}{1 + q^2} - \frac{s}{pq}\right] \left[\frac{r}{1 + p^2} - \frac{s}{pq}\right] = 0.$$

Dividendo per $(1 + p^2)(1 + q^2)$ si può trasformare l'equazione così:

$$(1 + p^2 + q^2) \left[\frac{t}{1 + q^2} - \frac{r}{1 + p^2}\right]^2 + p^2q^2 \left[\frac{t}{1 + q^2} + \frac{r}{1 + p^2} - \frac{2s}{pq}\right]^2 = 0$$

ed allora si vede che per l'annullarsi della torsione principale, le (23) sono condizioni necessarie e sufficienti.

(²) Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 223 e seg.

(³) Picard, *l. c.*, t. III, pag. 231.

(⁴) Picard, *l. c.*, pag. 225.

Eseguendo questa sostituzione si ha:

$$xt' = \frac{-t(f+gt)-(b+ct)\pm\sqrt{(b+ct)^2+(f+gt)^2}}{f+gt} \tag{25}$$

dove si sono trascurati i termini in x inutili per la discussione (giacchè spariscono nell'origine). Il secondo membro dell'eguaglianza scritta si annulla, come si sa, per tre valori di t, che sono le radici dell'equazione (24).

Sia α una di queste radici; bisogna trovare il segno della derivata del secondo membro della (25) per $t=\alpha$. Basta, poichè α annulla il numeratore, prendere la derivata del numeratore e dividerla per $f+gt$.

Si osservi che, dall'uguaglianza ottenuta ponendo eguale a zero il numeratore del 2° membro della (25) si ricava:

$$\pm\sqrt{(b+c\alpha)^2+(f+g\alpha)^2}=\alpha(f+g\alpha)+b+c\alpha;$$

se dunque si divide la derivata del numeratore della (25) per $f+gt$ e poi si pone $t=\alpha$ si ottiene:

$$-1-\frac{\alpha g+c}{f+g\alpha}+\frac{(b+c\alpha)c+(f+g\alpha)g}{(f+g\alpha)[\alpha(f+g\alpha)+b+c\alpha]}=$$
$$=-1+\frac{-2(c+g\alpha)[\alpha(f+g\alpha)+b+c\alpha]+2c(b+c\alpha)+2g(f+g\alpha)}{2(f+g\alpha)[\alpha(f+g\alpha)+b+c\alpha]}$$

inoltre la (24) dà

$$2\alpha(b+c\alpha)=-(f+g\alpha)(\alpha^2-1) \tag{α}$$

dunque, sostituendo nella precedente espressione si ottiene, dopo soppresso a numeratore e denominatore, il fattore $f+g\alpha$:

$$-1+\frac{-2\alpha(c+g\alpha)+g(\alpha^2+1)}{2[\alpha(f+g\alpha)+b+c\alpha]}. \tag{26}$$

Facendo unica frazione ed eliminando $b+c\alpha$ per mezzo della (α) risulta, con un breve calcolo:

$$\frac{-2g\alpha^3-(2c+f)\alpha^2-f}{(f+g\alpha)(\alpha^2+1)}. \tag{27}$$

Se questa espressione è positiva, si hanno infiniti integrali tangenti alla retta $y=\alpha x$; se è negativa non ve ne è che uno. [1]

Si ha dunque, secondo i casi, una sola linea di torsione od una infinità di linee di torsione passanti per un ombellico ed aventi per tangenti una delle direzioni date dall'equazione di terzo grado (24).

Un caso particolare semplicissimo è quello in cui $f=0$. L'equazione (24) è allora:

$$gt(t^2-1)+2t(b+ct)=0.$$

---

[1] PICARD, *l. c.*, pag. 233.

Abbiamo dunque la radice $t=0$ e la corrispondente espressione, di cui si deve ricercare il segno, si riduce $a-1+\frac{g}{2b}$ come risulta subito dalla (26).

Supponiamo, per esempio $\frac{g}{2b}<1$; noi avremo allora un solo integrale tangente alla retta $y=0$; se dippiù, come è possibile l'equazione $g(t^2-1)+2(b+ct)=0$ che dà le rimanenti radici della (23), ha le sue radici immaginarie, noi avremo l'esempio di un ombellico pel quale passa una sola linea di torsione.

Facciamo una applicazione alle superficie di secondo grado. — Si riconosce facilmente che, pigliando come piano zx il piano principale passante per l'ombellico, l'equazione della superficie può scriversi:

$$z+\mathrm{A}(x^2+y^2)+\mathrm{A}''z^2+2\mathrm{B}''zx=0,$$

e si ha, per conseguenza, uno sviluppo della forma:

$$z=\frac{k}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{6}(ax^3+axy^2)+\ldots\text{ (1)}$$

Si ha dunque, riferendosi all'espressione di z del caso generale:

$$b=d=0, \qquad c=\frac{a}{3}$$

e per conseguenza:

$$g=0, \qquad f=\frac{a}{3}\,.$$

Con questa sostituzione l'equazione (24) diventa:

$$3t^2-1=0;$$

una radice è dunque infinita e le altre due sono:

$$t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

L'espressione di cui bisogna esaminare il segno è qui:

$$-\frac{3\alpha^2+1}{\alpha^2+1},$$

che è sempre negativa; quindi si hanno tre integrali: uno tangente alla retta $x=0$ cioè all'asse $0y$, uno tangente alla retta $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$ ed un altro tangente alla retta $y=-\frac{x}{\sqrt{3}}$.

Il risultato dell'Analisi del Sig. Picard è dunque, nel caso attuale:

Per un ombellico di una superficie di 2° grado passano sempre tre linee di torsione; una di esse ha direzione normale al piano principale

(1) PICARD, *l. c.*, pag. 233, 234.

passante per l'ombellico, e le altre due sono isocline su questo piano, un angolo di 30°.

Quest'ultima conclusione risulta dal fatto che le rette $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ed $y = \frac{-x}{\sqrt{3}}$ sono inclinate sull'asse $0x$ di 30°.

Passando alle linee caratteristiche osserveremo che, in base alle epressioni di p, q, r, s, t, l'equazione differenziale della projezione di queste linee sul piano xy cioè la (a) si scrive:

$$(fx + gy + \ldots)\, y'^2 - 2\,(bx + cy + \ldots)\, y' - (fx + gy + \ldots) = 0,$$

dove si sono omessi, i termini in x, y di grado superiore al primo ed inoltre si è posto al solito

$$a - c = 2f, \qquad b - d = 2g.$$

E qui non si ha che a ripetere il ragionamento precedente; anzi basterà mutare nell'equazione delle linee di torsione solamente b e c in $-b, -c$ così che per decidere se, corrispondentemente ad una radice $t = \alpha$ dell'equazione $(f + gt)(t^2 - 1) - 2(b + ct)\, t = 0$ si ha un solo integrale od infiniti integrali tangenti nell'origine alla retta $y = \alpha x$, basta esaminare il segno dell'espressione:

$$\frac{-2g\alpha^3 + (2c - f)\,\alpha^2 - f}{(f + g\alpha)(\alpha^2 + 1)}.$$

Facendone applicazione alle quadriche dobbiamo supporre, come sopra si è visto

$$b = d = 0, \qquad c = f = \frac{a}{3}, \qquad g = 0.$$

L'equazione (24) ai coefficienti angolari delle tangenti alle curve integrali all'origine è qui $t^2 + 1 = 0$; una radice è dunque infinita e le altre due sono immaginarie.

L'espressione di cui bisogna esaminare il segno è qui ancora:

$$-\frac{3\alpha^2 + 1}{\alpha^2 + 1}$$

che è sempre negativa; si ha dunque un solo integrale tangente nell'origine alla retta $x = 0$, cioè una sola linea caratteristica la quale tocca, nell'origine l'asse $0y$. Il risultato è perciò: *Per un ombellico di una superficie di 2° grado passa una sola linea caratteristica, la quale è normale al piano principale della superficie.*

R. Occhipinti.

IL CONCETTO DI NUMERO REALE

1. Per *totalità* o *insieme* noi intenderemo un sistema di oggetti o di elementi di qualunque specie, così definito che per ogni arbitrario oggetto si possa stabilire se esso appartiene o no al sistema.

Se per ogni coppia a e b di elementi di un insieme si possono definire delle proprietà H possedute sempre da *uno* di quegli elementi quando si confronti con l'altro, e si ha:

1° le proprietà H sono indipendenti dalla particolare coppia di elementi che si considera;

2° se l'elemento a possiede le proprietà H rispetto a b e b le possiede rispetto a c, a possiede le proprietà H rispetto a c;

in queste ipotesi l'insieme si dice *ordinato*.

In un insieme ordinato M si prendano due elementi a e b. Se a è l'elemento che rispetto a b possiede le proprietà H, si dirà: a *più grande di* b *o maggiore di* b, b *più piccolo di* a *o minore di* a, e si scriverà $a > b$ o $b < a$. Se $a > b$ e $b > c$ sarà $a > c$.

Che esistano degli insiemi che possono essere ordinati, e in diversa maniera, lo indica l'esperienza p. es. le dita della mano, i punti di una linea retta, i raggi di un fascio, ecc. ecc. La quistione poi se ci possano essere anche degli insiemi non ordinabili appartiene alla teoria trascendentale degli insiemi ed è fuor di luogo l'occuparsene. (¹)

2. Se A e B sono due insiemi finiti (²) si verifica sempre uno dei tre seguenti casi:

o A è equivalente a B (A = B)
o A è equivalente ad una parte A′ di B (A < B)
o B „ „ „ „ „ B′ di A (A > B)

intendendo di chiamare A′ parte di B (B′ parte di A) quando ogni elemento di A′ (di B′) è nel tempo stesso un elemento di B (di A) ed esiste almeno un elemento di B (di A) non contenuto in A′ (in B′).

Se B è equivalente ad una parte di A allora vi sono degli elementi che appartengono ad A e non a B. Essi fanno parte di un

(¹) Bibliografia: *Encyklopädie der elementar mathematik* di H. Weber e I. Wellstein, *Formulaire de Matematique*, T. I e II.

(²) Vedi per la definizione di insiemi finiti H. Weber, ivi.

insieme C che chiamiamo complemento di B rispetto ad A; per indicare questa relazione scriviamo:

$$A = B + C \tag{1}$$

e leggiamo A = alla somma di B con C.

I numeri naturali concepiti come segni intimamente connessi ad ogni insieme A e ad ogni suo equivalente A′ vengono ad essere ordinati secondo la grandezza e veramente secondo il carattere di grandezza comune quando, essendo a, b i numeri connessi rispettivamente agli insiemi A, B, si ponga

$$\begin{array}{lcl} a = b & \text{se} & A = B \\ a > b & \text{se} & A > B \\ a < b & \text{se} & A < B. \end{array}$$

Le proprietà H che deve possedere un elemento a per essere maggiore di un elemento b possono per la (1) ridursi all'unica:

a deve risultare la somma di b e di un altro elemento.

I punti di una retta formano un insieme ordinato, perchè presi due punti a e b di una retta fra di essi vi è sempre quello che giace p. e. a destra, e quindi la proprietà H che deve possedere un elemento a di detto insieme per essere maggiore di un elemento b possono ridursi all'unica: il punto a deve giacere alla destra del punto b.

Se fra tre elementi a, b e c di un insieme ordinato si ha

$$a > b > c$$

l'elemento b si dice compreso fra gli elementi a e c.

3. Un insieme ordinato M si dice *discreto* se, preso un suo qualunque elemento a che non sia nè il più grande (massimo) nè il più piccolo (minimo) degli elementi M, ne esistano altri due b_1 e b_2, tali che fra gli elementi b_1 e b_2 non è compreso che l'elemento a, e se a è il massimo (minimo) ne esista uno b, tale che fra gli elementi a e b non è compreso nessun elemento di M. L'insieme dei numeri naturali è discreto.

4. Un insieme ordinato si dice *denso* se presi due suoi qualunque elementi ne esiste sempre un terzo compreso tra essi.

Diamo un esempio di insieme denso. Si consideri la totalità delle coppie di numeri naturali, indichiamo con $m:n$ o $\frac{m}{n}$ un elemento qualunque di tale totalità e chiamiamolo *frazione*. Diciamo *uguali* due frazioni $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ se si verifica l'uguaglianza

$$mq = pn.$$

Formiamo ora l'insieme il cui elemento qualunque è costituito da tutte le frazioni uguali ad una data. Questo insieme è ordinato:

difatti se μ e μ' sono due suoi elementi e $\frac{m}{n}$ è una qualunque frazione di μ e $\frac{m'}{n'}$ una qualunque frazione di μ', sarà o sempre $mn' > m'n$ o sempre $mn' < m'n$, e possiamo quindi convenire per proprietà H, che deve possedere μ rispetto a μ' questa unica: deve essere $mn' > m'n$.

L'insieme ora definito è denso. Difatti se h è un arbitrario numero naturale, fra le frazioni di μ e di μ' vi sono rispettivamente

$$\frac{hmn'}{hnn'} \quad \text{e} \quad \frac{hm'n}{hn'n};$$

per essere $mn' > m'n$ si potrà pensare per h un tal numero naturale che fra hmn' e $hm'n$ risulti compreso un numero naturale p. Allora la frazione $p : hnn'$ o $\frac{p}{hnn'}$ e le sue eguali dànno un elemento del nostro insieme evidentemente compreso fra μ e μ'.

5. Una divisione di un insieme ordinato M in due parti A e B tali che ogni elemento a di A è minore di ogni elemento b di B è chiamata una *sezione* in M ed è indicata con (A, B) o $\frac{A}{B}$. Può ottenersi una tale sezione prendendo un elemento μ di M e ponendo nella classe A tutti gli elementi di M minori di μ e nella classe B tutti gli elementi di M maggiori di μ, ponendo infine μ o nella classe A o nella classe B. Si ottengono così, propriamente, due sezioni secondo che si considera μ come appartenente alla classe A o alla classe B, ma *noi supporremo sempre due tali sezioni come identiche.*

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una sezione (A, B) possa ottenersi nel modo testè indicato è che o A contenga un elemento massimo o B un elemento minimo μ. Può presentarsi il caso (e ne daremo tra breve un esempio) che nè A possieda un elemento massimo nè B un elemento minimo. Nel caso che data una sezione $\frac{A}{B}$ o la classe A ha un elemento massimo o la classe B un elemento minimo μ, si dice che μ produce la sezione (AB).

Un insieme denso M si dirà *continuo* se ogni sezione in esso è prodotta da un suo determinato elemento.

Si possono costruire insiemi in cui si verifichi la densità e non la continuità o in cui si verifichino densità e continuità. È quello che vogliam mostrare.

Diciamo R l'insieme costruito alla fine del num. precedente, il cui elemento qualunque μ è costituito dalla totalità delle frazioni uguali ad una data. Fin d'ora per brevità per indicare che la frazione $\frac{a}{b}$ è fra quelle di μ, scriveremo $\mu = \frac{a}{b}$ o $\frac{a}{b} = \mu$.

Diremo che μ è quadrato se fra le frazioni di μ ve n'è una i cui due termini sono quadrati (di numeri naturali). Se è $\mu = m : n$, intenderemo per quadrato di μ e la designeremo con μ^2, quell'elemento di R rappresentato dalla totalità delle frazioni eguali a $m^2 : n^2$. Per cui se μ è quadrato esisterà un elemento μ_1 di R per cui è $\mu_1^2 = \mu$.

Se è $\mu = m : n$ ed m ed n sono primi tra di loro e non sono entrambi quadrati, μ non sarà quadrato, non esisterà cioè in R alcun elemento il cui quadrato è μ.

Supponiamo di essere in tale ipotesi per μ e facciamo una sezione (A, B) in R, ponendo nella classe A tutti gli elementi di R il cui quadrato è minore di μ, e nella classe B tutti gli altri elementi di R. È evidente che la divisione di R nelle due classi A e B costituisce effettivamente una sezione, cioè che ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B; noi ora dimostreremo che nè in A v'è un elemento massimo, nè in B un elemento minimo, e sarà dopo ciò dimostrato che l'insieme denso R non è continuo.

Per ciò prendiamo un qualunque elemento $a = p : q$ di A e dimostriamo che esiste sempre un elemento a' di A maggiore di a. È $np^2 < mq^2$; prendiamo un arbitrario numero naturale y e scegliamo un altro numero naturale x per modo che sia

$$x > y$$

e

$$x\,(mq^2 - np^2) > ny\,(2p + 1),$$

si avrà

$$x^2\,(mq^2 - np^2) > nxy\,(2p + 1) > n(2xyp + y^2)$$

e quindi anche

$$mq^2x^2 > n\,(px + y)^2.$$

Si ponga

$$a' = (px + y) : qx$$

e ne seguirà

$$a' > a \qquad \text{e} \qquad a'^2 < \mu.$$

È così dimostrato che in A non vi è elemento massimo; con analogo procedimento si dimostrerà che in B non vi è elemento minimo.

Dall'insieme denso e non continuo R si può però prendere le mosse per costruire un insieme denso e continuo. Perciò consideriamo l'insieme S di tutte le sezioni in R. Noi ci proponiamo di dimostrare che questo insieme S è denso e continuo. Ma facciamo vedere innanzi tutto che l'insieme S è ordinato.

Consideriamo perciò due elementi $\alpha = (A, B)$, $\alpha' = (A'B')$ di S; dovrà certamente avvenire uno dei seguenti fatti: o A è una parte di A' o A' è una parte di A, poichè se un elemento a appartiene ad A ogni elemento più piccolo di a appartiene ad A. Se A è una parte di A' converremo di considerare α come minore di α'.

L'insieme S è dunque ordinato.

Fra gli elementi di S vi sono le sezioni prodotte in R da ciascun elemento di R; queste particolari sezioni converremo di chiamarle *sezioni razionali*. Sostituendo a ciascun elemento di R la sezione razionale da esso prodotta avremo l'insieme delle sezioni razionali, ed evidentemente se per due elementi μ e μ' di R è $\mu < \mu'$ per le sezioni (M, N), (M'N') da essi rispettivamente prodotte, sarà, nel senso testè convenuto $(M, N) < (M', N')$. L'insieme S contiene come parte l'insieme delle sezioni razionali e poichè questo insieme è denso altrettanto potrà dirsi dell'insieme S.

L'insieme S è continuo. Indichiamo colle lettere **A**, **B** ... le parti di S. Sia (**A**, **B**) una sezione in S, vogliamo dimostrare l'esistenza di un elemento $\alpha = (A, B)$ di S che produce in S la sezione (**A**, **B**), cioè tale che ogni elemento α' di S minore di α è di **A**, e che ogni elemento β' di S maggiore di α è di **B**. Formiamo perciò le due classi A e B di R, ponendo in A tutti gli elementi di R che producono sezioni razionali di **A** ed in B tutti gli altri elementi di R.

Le due classi A e B costituiscono evidentemente una sezione $\alpha = (A, B)$ in R. Faremo vedere che ogni elemento α' di S minore di α è di **A**. Difatti, se è $\alpha < \alpha'$, vi sarà un elemento μ di A non contenuto in A'. E indicando con μ anche la sezione in R prodotta da μ, si avrà $\alpha' < \mu < \alpha$. Ma μ appartenendo ad A, la sezione μ da esso prodotta apparterrà ad **A** e quindi, essendo $\alpha' < \mu$, anche α' apparterrà ad **A** ecc.

6. Un insieme ordinato M goda delle seguenti proprietà:

1°. Da due qualunque elementi a e b di M (che possono anche coincidere con uno unico) può esser sempre dedotto, con un processo stabilito indipendente dai particolari elementi a e b, uno ed un solo nuovo elemento di M più grande di a e più grande di b in modo che, indicando con $a+b$ questo nuovo elemento si abbia

$$a+b=b+a$$

e indicando con c un terzo elemento di M,

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

L'elemento $a+b$ si dice *somma* degli elementi a e b o anche ottenuto da a aggiungendogli b o da b aggiungendogli a.

2°. Indichiamo con ma la somma di m elementi uguali ad a. L'elemento ma si dice dedotto da a moltiplicandolo per il numero naturale m od anche multiplo di a secondo il numero naturale m. Per ogni coppia di elementi a e b si può sempre trovare un numero naturale m per modo che sia $ma > b$.

3°. Dati due qualunque elementi a e c di M per i quali sia $c > a$ esiste uno ed un solo elemento b di M per cui sia $a+b=c$. L'elemento b si dice la *differenza* fra c ed a o anche il *resto* della *sottrazione* di a e c e si indica con $c - a$.

In queste ipotesi l'insieme ordinato si dice *misurabile*. Dalla 1ª e 3ª proprietà segue che se uno dei sommandi di una somma aumenta aumenterà la somma. Si ha anche:

$$m(a + b + c + \ldots) = ma + mb + mc + \ldots$$
$$m(a - b) = ma - mb \text{ ecc.}$$

In un insieme misurabile non vi è elemento massimo come segue dalla seconda proprietà. In un insieme denso e misurabile M non vi è elemento minimo; poichè se a fosse l'elemento minimo in M e b un arbitrario elemento, fra b e $b + a$ non potrebbe esser compreso nessun elemento di M, infatti da

$$b < c < b + a$$

si dedurrebbe in virtù della misurabilità di M che

$$a' = c - b$$

è più piccolo di a. Si ha anche inversamente che un insieme misurabile M senza elemento minimo è denso. Difatti se c ed a sono due arbitrari elementi di M, ed è, p. e., $c = a + b$, tutti gli elementi di M eguali alla somma $a + b'$, dove è $b' < b$ sono compresi fra a e c.

Per un insieme continuo M le ipotesi necessarie alla sua misurabilità possono essere semplificate, poichè alla 3ª ipotesi può essere sostituita la seguente ulteriore proprietà della somma:

Se uno dei sommandi aumenta la somma aumenta. Siano infatti a e c due elementi di un insieme continuo M per il quale si sia definita la somma godente delle proprietà enunciate in 1ª e di quest'ultima proprietà, e sia $c > a$; si otterrà allora una sezione (A, B) in M, quando ogni elemento x di M per cui è

$$a + x \leqslant c$$

si pone in A, e ogni elemento per cui è

$$a + x > c$$

in B. Questa sezione sarà prodotta da un elemento b di M per il quale si avrà $a + b = c$.

I numeri naturali formano, secondo la definizione, un insieme misurabile, in cui esiste un elemento minimo, l'elemento 1. L'insieme R è altresì misurabile, poichè esso ha le proprietà 1ª, 2ª e 3ª quando si intenda per somma di μ e μ' l'elemento di R di cui una frazione è ottenuta nel modo seguente:

Essendo

$$\mu = \frac{a}{b}, \qquad \mu' = \frac{a'}{b'}$$

è

$$\mu + \mu' = \frac{ab' + a'b}{bb'}.$$

In R non esiste un elemento minimo.

Chiamando *lunghezza* l'insieme dei segmenti rettilinei dello spazio eguali ad un dato (uguali nel senso che con un movimento si possono sovrapporre), chiamando *massa* l'insieme delle quantità di materia eguali ad una data (uguali nel senso che due di esse verifichino lo stato d'equilibrio poste nei due piatti di una bilancia), l'insieme delle lunghezze, l'insieme delle masse forniscono altrettanti esempi di insiemi ordinati, continui e misurabili. A giustificare pienamente la continuità e la misurabilità di tali insiemi occorrono nuovi postulati frutti della nostra intuizione. La misurabilità di un insieme si può stabilire con una definizione di somma che non è in generale unica. (1)

7. Vogliamo dimostrare che l'insieme continuo S delle sezioni in R è misurabile.

Premettiamo che se $\alpha = (A, B)$ è un elemento arbitrariamente dato di R, si può sempre determinare un elemento a' di A, tale che l'elemento $b' = a' + \mu$ sia di B. Scelti, infatti, due elementi a e b di A e B si può determinare un numero naturale m per modo che sia

$$m\mu > b - a,$$

cioè che $a + m\mu$ sia un elemento di B. Se h è il più piccolo numero naturale per cui $a + m\mu$ è contenuto in B, l'elemento

$$a' = a + (h-1)\mu$$

è di A, mentre che

$$b' = a' + \mu$$

è di B.

Intendiamo per somma

$$(A, B) + (A', B') = (A'', B'') \qquad \text{o} \qquad \alpha + \alpha' = \alpha''$$

---

(1) Siano a e β due lunghezze, diremo $\alpha > \beta$ se il segmento b di β è sovrapponibile su di una parte del segmento a di α. L'insieme della lunghezza è dunque ordinato. Intendiamo per somma γ di due lunghezze α e β la lunghezza determinata dal segmento c che è il terzo lato del triangolo che ha per lati a e b comprendenti un angolo fissato λ tale che $\frac{\pi}{2} \leqq \lambda \leqq \pi$. Si può facilmente osservare che con tale definizione di somma vengono verificate le proprietà 1ª, 2ª, 3ª. Difatti poichè è

$$\frac{\pi}{2} \leqq \lambda \leqq \pi \text{ sarà } \quad \gamma > \alpha \text{ e} > \beta$$

si verifica poi che

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \qquad (\alpha + \beta) + \delta = \alpha + (\beta + \delta).$$

La 3ª proprietà è di immediata verifica — occorre dimostrare la seconda proprietà — necessita per questo ammettere il seguente postulato.

Postulato di Archimede. — La seconda proprietà è verificata per la somma corrispondente al valore π di λ (somma ordinaria).

Il postulato di Dedekind, infine, afferma appunto la continuità dell'insieme delle lunghezza.

la sezione in R che si ottiene quando si pone in A″ ogni elemento a'' di R se esiste un elemento a in A e un elemento a' in A′ tali che si abbia

$$a'' \leqslant a + a'.$$

Nel fatto (A″B″), è una sezione; poichè, se a'' è contenuto in A″ varrà lo stesso per ogni elemento di R minore di a'', e esistono elementi di R che sono contenuti in A″ ed elementi che non lo sono: ogni elemento $a + a'$ è contenuto in A″ e ogni elemento $b + b'$ è contenuto in B″. Inoltre α'' è più grande di α e di α'. Poichè A″ contiene un elemento arbitrario di R in A′, si può scegliere un elemento a di A per modo che l'elemento $a + a'$ di A″ sia contenuto in B, quindi A è una parte di A″ ecc... Si può altresì dimostrare che

$$\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha$$

che

$$(\alpha + \gamma) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

e che se uno dei sommandi di una somma aumenta, aumenta la somma.

Si verifica immediatamente la seconda proprietà. Osserveremo ancora che due elementi μ e μ' di R producono due sezioni in R che sommate danno la sezione prodotta da $\mu + \mu'$.

8. Si abbia un insieme continuo e misurabile M e si consideri la totalità formata quando si prende come elemento una coppia di elementi di M.

Noi indicheremo con uno dei simboli $\frac{a}{b}$ o $a:b$ una tale coppia e distingueremo il simbolo $a:b$ dal simbolo $b:a$. Nel simbolo $a:b$ chiameremo a il numeratore b il denominatore. Ogni coppia $a:b$ posto che l'insieme da esse costituito sia ordinato e reso misurabile nel modo che stiamo per indicare, sarà da noi chiamato *rapporto*.

Supponiamo dapprima che esistono due numeri naturali m ed n pei quali sia $na = mb$ come è, p. es. il caso se a e b sono due numeri naturali o due lunghezze commensurabili. Allora se p e q sono due altri numeri naturali, sarà

$$qa = pb,$$

se è

$$mq = np$$

ed allora soltanto.

Poichè da $na = mb$ segue:

$$qna = qmb$$

e se quindi è

$$qa = qb$$

si ha

$$pnb = qmb$$

e conseguentemente:

$$pn = qm.$$

La coppia di numeri naturali p e q è quindi completamente determinata se si vuole che sia $qa = pb$ e che p e q siano primi tra loro. Allora, se h è un numero naturale qualunque si potrà porre

$$m = hp, \qquad n = hq.$$

Nel caso ora considerato chiameremo razionale il rapporto $a:b$ e conveniamo che esso rapporto non esprima altro che la frazione $m:n$ o $p:q$. Ogni frazione si può quindi considerare come il rapporto dei suoi due termini.

Chiameremo *numero razionale* la totalità dei rapporti eguali ad un dato. L'insieme dei numeri razionali non è altra cosa che l'insieme R da noi già studiato, per cui l'insieme dei numeri razionali e ordinato, denso e misurabile secondo le regole già stabilite.

Della totalità dei numeri razionali fanno parte i numeri naturali o numeri intieri quando si convenga che il rapporto $m:1$ non sia altro che il numero naturale m.

Ma ritorniamo a considerare un qualunque insieme continuo e misurabile M e prendiamo due suoi elementi a e b.

Come segue dalla misurabilità di M si possono trovare due numeri naturali m ed n tali che si abbia $na > mb$; soddisfatta questa diseguaglianza diremo che il rapporto $a:b$ è più grande del rapporto razionale $m:n$ e scriveremo

$$\frac{a}{b} > \frac{m}{n}$$

e manifestamente, se è $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$ è anche $\frac{a}{b} > \frac{p}{q}$. Analogamente, se è $n'a < m'b$ si scriverà

$$\frac{a}{b} < \frac{m'}{n'}$$

e da

$$\frac{m'}{n'} < \frac{p'}{q'} \qquad \text{segue} \qquad \frac{a}{b} < \frac{p'}{q'}.$$

Se è $a:b > m:n$, si possono trovare infiniti numeri razionali $m_1:n_1$ tali che si abbia

$$\frac{a}{b} > \frac{m_1}{n_1} > \frac{m}{n}$$

si possono cioè fra $a:b$ e $m:n$ inserire infiniti numeri razionali.

Per dimostrare ciò, si scelga un arbitrario numero intiero k, e si determini il mumero h in modo che si abbia

$$h(na - mb) > kb,$$

allora è

$$\frac{a}{b} > \frac{hm+k}{hn} > \frac{m}{n}.$$

Ed analogamente se è

$$n'a < m'b, \qquad h'(m'b - n'a) > k'a$$

si avrà

$$\frac{a}{b} < \frac{h'm'}{h'n' + k'} < \frac{m'}{n'}$$

Se $a:b$ e $\alpha:\beta$ sono due rapporti che per brevità indichiamo con e ed ε; i di cui elementi possono o no appartenere ad uno stesso insieme, troviamo che possono presentarsi i seguenti due casi possibili:

1° Fra e ed ε non giace alcun rapporto razionale.

2° Fra e ed ε giace un rapporto razionale.

Nel 1° caso diremo che i due rapporti e ed ε sono uguali.

Due rapporti eguali ad un terzo sono eguali fra loro. Sia $e = \varepsilon$ e $e' = \varepsilon$ dico che sarà $e = e'$. Difatti se, μ essendo un numero razionale, fosse

$$e < \mu < e'$$

ne seguirebbe, se $\varepsilon = \mu$, l'esistenza fra e ed ε e fra ε ed e' di infiniti numeri razionali, se $\varepsilon > \mu$ l'esistenza fra ε ed e del numero razionale μ, se $\varepsilon < \mu$, l'esistenza fra ε ed e' del numero razionale μ.

Nel 2° caso diremo i due rapporti e ed ε *disuguali*. Può accadere o

$$e < \mu < \varepsilon \qquad \alpha)$$

o

$$e > \mu' > \varepsilon \qquad \beta)$$

e questi due casi si escludono poichè da

$$e < \mu < \varepsilon, \qquad \varepsilon < \mu'$$

segue $\mu < \mu'$ e conseguentemente $e < \mu'$.

La relazione α) o β) resta inalterata se e ed ε vengono sostituiti da rapporti eguali. Poichè se è

$$\mu < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad \mu \geqq \varepsilon',$$

fra ε e ε' è compreso un rapporto razionale ed ε e ε' non sono eguali.

Nel caso α) dico *e più piccolo o minore di* ε, nel caso β) *e più grande di* ε.

Fra due diversi rapporti si possono inserire un numero arbitrario di rapporti razionali.

La totalità dei rapporti eguali ad un dato sarà da noi chiamata *numero. Il numero è quindi un nome od un segno per indicare una determinata totalità i di cui elementi sono tutti i rapporti uguali ad uno di essi.*

Sotto questo concetto di numero sono compresi i rapporti razionali e conseguentemente anche i numeri naturali che insieme formano i numeri razionali.

I numeri i di cui rapporti non sono razionali si chiamano *numeri irrazionali.*

Si può dimostrare l'esistenza di rapporti non razionali: ad esempio se b è il lato di un quadrato e a la diagonale, se b è il lato di un triangolo equilatero e a l'altezza ecc. ecc.; non potrà mai essere

$$ma = nb$$

con m, ed n interi.

I numeri formano un insieme ordinato. Si dirà che il numero α è maggiore di β se un rapporto a di α è maggiore di un rapporto b di β: ne seguirà che ogni rapporto di α sarà maggiore di ogni rapporto di μ.

La continuità e la misurabilità dell'insieme dei numeri risulta immediatamente dalle considerazioni svolte ai num. 5 e 7.

C. Rossi.

PROBLEMI [1]

(Continuaz. — Vedi fasc. V, a. XXVIII)

56. L'area compresa fra la cubica

$$(x - \lambda y)\,[(x - \lambda y)^2 + y^2] - ay^2 = 0$$

ed il suo asintoto è indipendente da λ ed eguale a quella della cissoide retta

$$x^2\,(x^2 + y^2) - ay^2 = 0,$$

cioè

$$\frac{3\pi a^2}{4}.$$

57. Il luogo del punto P, incontro delle perpendicolari a due semidiametri coniugati di un'ellisse nei loro estremi è una sestica unicursale di cui l'area è equivalente alla somma dell'area dell'ellisse e del quadruplo della sua sviluppata. Dare l'equazione cartesiana del luogo.

(Se $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ è l'equazione dell'ellisse, quella del luogo di P è

$$2(a^2x^2 + b^2y^2 - a^4 - b^4)\,[(a^2x^2 - b^2y^2 - a^4 + b^4)^2 + 4a^2b^2x^2y^2] + \\ + c^4\,(a^2x^2 - b^2y^2 - a^4 + b^4)^2 = 0.)$$

58. Si consideri il circolo che ha per centro un punto M variabile di un'ellisse e che passa per il centro O di questa, e siano P, Q i punti

[1] In massima non pubblicheremo le risoluzioni di questi problemi favoriteci dal Comandante Barisien, ma accetteremo volentieri le osservazioni o generalizzazioni che i nostri lettori vorranno inviarci.

d'incontro di essa colla tangente in M all'ellisse e P', Q' i punti d'incontro colla normale.

1°. Le aree limitate dalle curve, luoghi di P e Q, sono equivalenti al cerchio di Monge dell'ellisse.

2°. La somma delle aree delle curve, luoghi di P', Q', è equivalente al doppio dell'area dello stesso cerchio di Monge.

59. Il luogo del punto medio del segmento che ha per estremi i centri di curvatura d'una ellisse corrispondenti agli estremi di due diametri coniugati è una sestica la cui area è la metà di quella della sviluppata della ellisse.

60. Se l'area di una ellisse e della sua evoluta sono E e D, quella della seconda evoluta dell'ellisse è $\frac{5D^2}{2E} + 4D$.

61. L'area della curva

$$[2(x^2+y^2)-R^2]^2(x^2+y^2)=R^4x^2$$

è

$$\frac{\pi R^2}{2}+R^2.$$

62. Si consideri l'ellisse che ha per fuochi F, F' i punti medi dei due semiassi maggiore OA, OA'.

Sia r la retta d'Eulero del triangolo MFF' (dove M rappresenta un punto mobile dell'ellisse). Le tre curve seguenti

1° inviluppo di r,

2° luogo della proiezione dal centro dell'ellisse su r,

3° luogo del polo di r rispetto all'ellisse;

sono tre sestiche unicursali le cui aree sono rispettivamente

$$S_1=\frac{47\,\pi a^2}{288\sqrt{3}},\quad S_2=\frac{\pi a^2(864+331\sqrt{3})}{792\sqrt{3}},\quad S_3=\frac{45\pi a^2\sqrt{2}}{8}.$$

63. Le iperboli d'Apollonio relative ai diversi punti di un'ellisse inviluppano una *curva-croce* k. Se S_E, S_D sono le aree della ellisse e della sua sviluppata, S_K l'area compresa fra la *curva-croce* e i suoi asintoti si ha la relazione

$$\frac{S_K\,.\,S_D}{S_E^2}=\frac{3}{2\pi}.$$

64. Sia O il centro di un'ellisse, M un punto variabile su questa, MN la normale in M, r la retta che passa per M ed è simmetrica di OM rispetto ad MN. Se il rapporto degli assi è $\frac{b}{a}>\frac{1}{\sqrt{2}}$ la sestica inviluppo di r è una curva chiusa la cui area è

$$S=\frac{6\pi abc^4}{\sqrt{(2a^2-b^2)(2b^2-a^2)}\left\{a^2+b^2+r\sqrt{(2a^2-b^2)(2b^2-a^2)}\right\}}.$$

65. Sia M un punto fisso di una ellisse, S un punto variabile sulla normale in M, e P, Q, R i piedi delle normali condotti da S all'ellisse.

1°. I centri dei circoli di Joachimsthal relativi ad M sono sopra una retta r.

2°. Se il punto M si sposta sull'ellisse, la retta r è normale a un'ellisse concentrica e omotetica a quella data, col rapporto di omotetia $\frac{1}{2}$.

3°. Il luogo dei centri dei circoli di Joachimsthal relativi ai diversi punti M è un'ellisse.

66. Si consideri un'ellisse di centro O tale che il rapporto dei semiassi sia $\sqrt{2}$, e tutti i triangoli che hanno per vertici un punto M dell'ellisse e gli estremi del diametro coniugato ad OM. Il luogo dei punti di Lemoine di tutti questi triangoli è una sestica unicursale: l'area della quale ha all'area dell'ellisse il rapporto $\frac{6}{7\sqrt{35}}$.

67. Sia ABC uno dei triangoli d'area massima inscritti in un'ellisse di centro O. Si consideri l'iperbole tangente in A all'ellisse e che passa per B, C ed O. Dimostrare che:

1°. Il luogo del centro dell'iperbole suddetta è un'ellisse.

2°. Gli asintoti dell'iperbolo sono paralleli a due diametri coniugati dell'ellisse data.

3°. L'inviluppo di questi asintoti è un'ellisse.

68. Siano CA, CB due corde ortogonali condotte per un punto C di un circolo e si consideri la parabola che passa per A, B ed è tangente in C al circolo.

1°. L'inviluppo di questa parabola è un circolo.

2°. L'asse di questa parabola passa per un punto fisso.

3°. Il luogo dei vertici di questa parabola è una *concoide di Sluze.*

4°. L'inviluppo delle tangenti nel vertice di questa parabola è una parabola.

5°. L'inviluppo delle direttrici è una parabola.

6°. Il luogo dei fuochi è una retta.

7°. Il luogo del punto d'incontro dell'asse colla direttrice è una concoide di Sluze.

69. Sia A un vertice di una conica e P un punto dell'asse passante per A, MM′ una corda variabile passante per P. Il luogo dell'ortocentro del triangolo AMM′ è una conica o una retta secondo che la conica data è centrale a parabola.

(Continua) E.-N. Barisien.

RISOLUZIONE DELLA QUISTIONE 803

803. *Posto:*

$$\varphi_i = a_i x + b_i y + c_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

si indichi con Δ_i *il minore complementare dell'elemento* e_i *nel determinante*

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}.$$

Si dimostri che le tre diagonali del quadrilatero che ha per lati le rette di equazioni:

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \varphi_3 = 0, \qquad \varphi_4 = 0;$$

hanno per equazioni:

$$\Delta_1\varphi_1 + \Delta_2\varphi_2 = 0, \qquad \Delta_1\varphi_1 + \Delta_3\varphi_3 = 0, \qquad \Delta_1\varphi_1 + \Delta_4\varphi_4 = 0.$$

A. Gandini.

Risoluzione del sig. V. Costa, R. U. di Pisa.

L'equazione della diagonale appartenente al fascio di rette determinato dai lati φ_1, φ_2, è com'è noto:

$$\varphi_1 + \lambda\varphi_2 = 0, \tag{1}$$

La questione è dunque ridotta a dimostrare che $\lambda = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$.

Dalla (1) si trae:

$$\lambda = -\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}. \tag{2}$$

Intanto, poichè tale diagonale deve passare pel punto d'intersezione degli altri due lati del quadrilatero, φ_3, φ_4, la (1) dev'essere sodisfatta dalle coordinate di questo punto d'intersezione, le quali sono, com'è facile vedere:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_3 & b_4 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix}}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_3 \\ c_4 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix}}.$$

Sostituendo nella (2) si ricava con facile calcolo, $\lambda = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$.

In modo perfettamente analogo si procede per le altre due diagonali.

Altre risoluzioni dei sigg. **I. Csada** di *Modor* (Ungheria); **J. Barinaga**, R. U. di *Madrid* (Spagna); **J. Rose** di *Charleroi* (Belgio).

QUISTIONI PROPOSTE

807. Si consideri un circolo di centro O e raggio r, e l'asteroide che ha per punti di regresso gli estremi di due diametri AB, CD ortogonali di detto circolo. Siano E, F i punti di mezzo degli archi AC, CB del circolo, ed M il punto d'incontro del circolo tangente internamente con E al circolo dato e di raggio $\frac{r}{4}$ col circolo di diametro EF. Il circolo di centro O e di raggio OM incontra l'asteroide in otto punti reali. Dimostrare che le tangenti in questi punti all'asteroide sono anche normali alla curva.

808. È dato un circolo c ed una sua tangente fissa t. Essendo P la proiezione su t di un punto M mobile su c, dimostrare che l'inviluppo dei circoli di diametro MP è una curva, la cui area è $\frac{3}{4}$ di quella del cerchio c.

E.-N. Barisien.

809. Un filo flessibile e inestendibile omogeneo è fissato in due punti A, B, ed ogni elemento ds di esso è soggetto all'azione della gravità e ad una forza orizzontale situata nel piano verticale che passa per AB, proporzionale alla proiezione di ds sulla verticale. Trovare la linea lungo la quale si dispone il filo.

810. Due punti P, P' percorrono due linee in un piano c, c' con velocità costanti v, v', e in ogni istante la retta PP' fa angoli costanti con le tangenti alle curve stesse nei punti P, P'. Trovare tutte le coppie di linee c, c' che possano verificare la detta condizione.

G. L.

BIBLIOGRAFIA

Dott. Guido Ascoli. — *Complementi di geometria* per gli Istituti tecnici. — Livorno, Raffaello Giusti, 1913.

È nota la difficoltà della scelta di un buon testo in cui siano svolte le parti complementari di Matematica prescritte dai programmi per il 2° biennio degli istituti tecnici. La ragione della scarsezza di buoni testi dipende in gran parte dalla natura frammentaria dei programmi stessi, che impedisce di riunire in un tutto armonico le varie teorie, e dalla impossibilità di svolgere compiutamente con mezzi elementari alcuni argomenti che hanno la loro sede naturale nelle Matematiche superiori.

I *Complementi di geometria* del dott. G. Ascoli è un libro che a me sembra meriti di essere segnalato all'attenzione degli studiosi per la chiarezza dell'esposizione, per il rigore dei metodi e perchè in esso l'A. è riuscito, con un ordinamento più logico e naturale della materia, ad attenuare il difetto di frammentarietà insito nei programmi.

Trattandosi di un' opera che, come l'egregio A. dichiara nella prefazione, non ha pretese di novità scientifica, darò un rapido cenno del suo contenuto, soffermandomi su quelle parti che dal lato didattico mi sembrano meglio riuscite.

Nel 1° Capitolo l'A. svolge la teoria della similitudine, definita come corrispondenza che conserva i rapporti delle distanze. Enunciate le prime proprietà, con opportuno ampliamento delle figure la corrispondenza viene estesa a tutti i punti dei loro piani o dello spazio, con che la dimostrazione delle proprietà ulteriori viene notevolmente semplificata. Poi, con un appello alla intuizione, l'A. pone la nozione di *verso* degli angoli, dei triangoli, dei triedri e distingue i due tipi di similitudine (diretta e inversa) fra i sistemi sovrapposti. Dalle proprietà generali della similitudine, o supponendo il parallelismo fra una o due coppie di segmenti omologhi, o uguagliando ad 1 il rapporto di similitudine, o imponendo l'esistenza di elementi uniti, l'A. fa discendere in modo semplice e naturale quelle della omotetia e dei vari tipi di congruenza (simmetrie, rotazioni, traslazioni ecc.). Il Capitolo si chiude con alcune opportune considerazioni tendenti a chiarire il concetto astratto di movimento.

Nel Cap 2°, dedicato alla geometria dei cerchi del piano, vengono esposti in modo chiaro ed elegante i problemi relativi ai contatti circolari, compreso quello celebre di Apollonio, nella risoluzione dei quali interviene la considerazione dei centri di omotetia e degli assi radicali.

Nel Cap. 3° (Proprietà segmentarie) l'A. dimostra i teoremi di Menelao e di Ceva e ne deduce alcune proposizioni della geometria del triangolo, le proprietà armoniche del quadrilatero completo, e il teorema di Desargues sui triangoli omologici.

La geometria sulla sfera (Cap. IV) viene svolta facendo sistematicamente uso di soli elementi appartenenti alla sup. sferica.

Il teorema fondamentale della somma degli angoli del triangolo sferico vien dato, seguendo un metodo dovuto al Levi, con considerazione di sole figure sferiche ed astraendo dal concetto intuitivo di estensione.

Ne segue la nozione di eccesso sferico, che viene estesa anche ai poligoni sferici non convessi purchè decomponibili in parti poligonali convesse e si dimostra che l'eccesso della somma è uguale alla somma degli eccessi delle singole parti. L'equivalenza dei poligoni sferici è definita come decomponibilità in parti poligonali rispettivamente uguali. Mediante il teorema relativo all'eccesso della somma si deduce che le tre ipotesi di equivalenza, prevalenza e suvvalenza fra due poligoni, conducendo a una ugaglianza o a disuguaglianze fra i loro eccessi, si escludono a vicenda.

Poi, usando di una opportuna trasformazione di un triangolo in un quadrilatero birettangolo isoscele, si giunge alla conseguenza che una delle tre ipotesi è necessaria e alla dimostrazione del teorema che due poligoni di uguale eccesso sono equivalenti. Infine vien dato il criterio di equivalenza per differenza.

Nella teoria dei poliedri convessi (Cap. V) l'A. non si discosta dalle trattazioni consuete. Sono solo da rilevare alcune utili osservazioni tendenti a chiarire ciò che è di essenziale nelle ipotesi che conducono alla celebre formula di Eulero, e a mostrare come questa sia applicabile anche a superficie poliedriche (di genere zero) che comprendono come casi particolari i poliedri convessi.

Le coniche (Cap. VI) sono studiate come sezioni del cono rotondo. Per quanto tale metodo abbia acquistato un assetto ormai definitivo, tuttavia la trattazione che ne dà l'A. presenta non pochi pregi didattici, per la chiarezza della forma, per il modo come sono raggruppate le numerose proprietà delle tre specie di curve, per la giusta proporzione data alle singole parti della teoria.

Alle coniche segue un capitolo in cui vengono esposte le proprietà della trasformazione per raggi vettori reciproci, argomento non prescritto dai programmi, ma che trova il suo posto legittimo in un libro di Complementi di Geometria elementare, perchè può dare occasione a numerose e svariate applicazioni e perchè è bene che i giovani si abituino da tempo al concetto fecondo della trasformazione.

In una Appendice vengono infine dati gli elementi di Geometria descrittiva col metodo di Monge.

Ritengo che questo libro serva egregiamente all'educazione del gusto geometrico, e che con esso il dott. Ascoli abbia compiuto opera utile alla Scuola.

C. Rosati.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 12 Dicembre 1913.

SULLE CONGRUENZE OMOGENEE E SIMMETRICHE

con un numero primo di variabili

1. Le proposizioni del CATALAN e del LIONNET, contenute nella Nota del prof. CONCINA " Di una proprietà dei numeri primi „ (*Periodico di matematica*, 1912), come pure gli stessi teoremi del FERMAT e del WILSON, si possono riguardare quali immediate conseguenze di un unico principio, che è il seguente:

Se una funzione omogenea, simmetrica, intera e a coefficienti interi dei numeri $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *primi con l'intero positivo* m *e inferiori ad* m, *è anch'essa un numero primo con* m, *il grado di omogeneità della funzione dev'essere multiplo dell'esponente minimo a cui* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *appartengono* (mod. *m*), *vale a dire del minimo esponente* i *pel quale si verifica:*

$$\alpha^i \equiv 1; \quad \beta^i \equiv 1; \quad \gamma^i \equiv 1 \ldots \quad (\text{mod. } m).$$

Che un tal minimo esponente debba esistere si dimostra facilmente senza ricorso al teorema del Fermat, il qual ultimo, per quanto noto, mi piace anzi di dedurre qui appresso quale conseguenza dell'enunciata proposizione.

Aggiungo in fine un teorema, che mi sembra notevole, circa le congruenze omogenee e simmetriche di modulo primo p e nelle quali il numero delle variabili è un divisore primo di $(p-1)$.

Sia ω un numero primo con m ed inferiore ad m. È ovvio che tra i resti (in numero finito) delle potenze

$$\omega \quad \omega^2 \quad \omega^3 \ldots$$

(mod. m), due almeno debbono essere eguali. Sia dunque:

$$\omega^h \equiv \omega^{h'} \; (h' > h).$$

Si avrà pure, per essere ω primo col modulo:

$$\omega^{h'-h} \equiv 1.$$

Ciò prova che, per ogni ω, vi è un qualche esponente ε, differente da zero, che rende soddisfatta la congruenza:

$$\omega^\varepsilon \equiv 1.$$

Vi è quindi anche un qualche esponente δ, e sia pure un comune multiplo degli ε relativi a tutte e singole le ω, per il quale si verificano le congruenze:

$$\alpha^\delta \equiv 1; \quad \beta^\delta \equiv 1; \ldots$$

Il minimo δ è appunto i.

Ogni δ è multiplo di i. Se infatti il resto della divisione $\delta : i$ non fosse nullo, si chiami r, e dicasi q il quoziente della divisione, così da avere:

$$\delta = iq + r \; (0 < r < i).$$

Per essere $\alpha^\delta \equiv 1$, e d'altra parte:

$$\alpha^\delta \equiv \alpha^{iq+r} \equiv \alpha^{iq} \,.\, \alpha^r \equiv \alpha^r,$$

sarà pure: $\alpha^r \equiv 1$. E similmente: $\beta^r \equiv 1$; $\gamma^r \equiv 1$; ecc. I numeri α, β, $\gamma, \ldots$ apparterrebbero quindi a un esponente minore di i, contro l'ipotesi.

Sia

$$\mathrm{F}\,(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$$

una funzione simmetrica, omogenea, intera e a coefficienti interi, dei numeri primi con m ed inferiori ad m, e sia g il grado di omogeneità della funzione. Se ad $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ si sostituiscono proporzionalmente $k\alpha$, $k\beta$, $k\gamma, \ldots$ si ottiene, a cagione dell'omogeneità:

$$\mathrm{F}\,(k\alpha, k\beta, \ldots) \equiv k^g \mathrm{F}\,(\alpha, \beta, \ldots).$$

D'altra parte, e ciò per la simmetria, se il fattore k è primo con m e inferiore ad m, il valore della funzione (mod. m) non sarà mutato, perchè i resti (mod. m) dei prodotti: $k\alpha$, $k\beta, \ldots$ coincidono, salvo l'ordine, con α, $\beta, \ldots$. Si avrà quindi:

$$\mathrm{F}\,(k\alpha, k\beta, \ldots) \equiv \mathrm{F}\,(\alpha, \beta, \ldots).$$

E per confronto:

$$k^g \mathrm{F}\,(\alpha, \beta, \ldots) \equiv \mathrm{F}\,(\alpha, \beta, \ldots),$$

ovvero:

$$(k^g - 1)\, \mathrm{F}\,(\alpha, \beta, \ldots) \equiv 0.$$

Se quindi $\mathrm{F}\,(\alpha, \beta, \ldots)$ è un numero primo con m, giusta il supposto della proposizione da cui s'inizia la presente Nota, si avrà pure:

$$k^g - 1 \equiv 0.$$

E poichè k, tra i numeri primi con m e inferiori ad m è qualunque, ne segue che g dev'essere multiplo dell'esponente minimo i a cui detti numeri appartengono.

Teorema del Fermat. — Indicato come si suole con $\varphi(m)$ il numero dei numeri primi con m e inferiori ad m, una funzione omogenea e simmetrica di $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ è il prodotto $\alpha\beta\gamma\ldots$. Di più, esso è primo con m e del grado $\varphi(m)$ di omogeneità. Perciò $\varphi(m)$ è multiplo di i. E poichè, detto a un numero qualunque primo con m e inferiore ad m, a^i è congruo all'unità, si conclude che anche:

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \quad (\text{mod. } m),$$

(teorema del Fermat).

Se il modulo è un numero primo p, *il numero* i *non è che* $(p-1)$. Con procedimento elementare, come per le equazioni, [1] si dimostra infatti che una congruenza di modulo primo non può ammettere un numero di radici superiore a quello che è segnalato dal suo grado. Ciò premesso, si consideri la congruenza binomia

$$x^{p-1} \equiv 1 \quad (\text{mod. } p).$$

Pel già dimostrato teorema del Fermat, essa ha $(p-1)$ radici, e sono i numeri: 1, 2, 3, ... $(p-1)$. Ora, l'esponente minimo i a cui essi appartengono, non può essere che $(p-1)$. Perchè, se fosse minore di $(p-1)$, la congruenza $x^i \equiv 1$ avrebbe un numero di radici maggiore del suo grado.

Corollario. — *Se il grado di una funzione omogenea, simmetrica, intera e a coefficienti interi dei numeri* $1, 2, 3, \ldots (p-1)$ *non è multiplo di* $(p-1)$, *il valore della funzione è divisibile per* p.

Perchè, se (mod. p) la funzione non fosse nulla, il suo valore sarebbe un numero primo con p. Perciò il grado sarebbe multiplo di $(p-1)$, contro l'ipotesi. In particolare: *Se* n *non è multiplo di* $(p-1)$,

$$1^n + 1^n + 4^n + \ldots + (p-1)^n$$

è divisibile per p (v. Concina, l. c.).

Teorema del Wilson. — Si consideri il prodotto

$$2 . 3 . 4 \ldots p.$$

Esso è certamente divisibile per p. Si scriva:

$$(1+1)(1+2)(1+3)\ldots[1+(p-1)] \equiv 0 \quad (\text{mod. } p).$$

Se qui il primo membro s'immagina sviluppato e ordinato per le potenze decrescenti dell'unità, si vede che, astrazion fatta dal termine 1^{p-1} e dall'altro

$$1 . 2 . 3 \ldots (p-1),$$

i coefficienti di 1^{p-2}, di 1^{p-3} ecc., sono funzioni simmetriche dei numeri 1, 2, 3, ... $(p-1)$, e che inoltre il grado di omogeneità di ciascuno è minore di $(p-1)$. Detti coefficienti sono quindi tutti divisibili per p, sì che la precedente congruenza diviene:

$$1 + 1 . 2 . 3 \ldots (p-1) \equiv 0 \quad (\text{mod. } p),$$

---

[1] Si imiti ad esempio la dimostrazione contenuta nelle mie *Lezioni di algebra, geometria e trigonometria*, pel secondo biennio degl'Istituti tecnici, vol. II, pag. 12-13.

ovvero:

$$1 . 2 . 3 \ldots (p-1) \equiv -1 \quad (\text{mod. } p),$$

(teorema del Wilson).

2. Se il modulo p è dispari, e perciò della forma $2k+1$, ogni congruenza simmetrica e omogenea a 2 variabili x ed y, il grado della quale non sia multiplo di 2, è risolubile con valori delle variabili differenti da zero e tra loro. (¹) Basta porre:

$$x \equiv \mathbf{1};\; y \equiv p-\mathbf{1}.$$

Questa proprietà si estende a qualsiasi congruenza con un numero primo q di variabili. Così: Rispetto a ogni modulo primo della forma $3k+1$, una congruenza simmetrica e omogenea a 3 variabili, il grado della quale non sia multiplo di 3, è risolubile con valori delle variabili, differenti da zero e tra loro. Ad esempio, per $x \equiv 2$; $y \equiv 5$; $z \equiv 6$, la congruenza:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 13).$$

In generale: *Se* q *è un divisore primo di* (p — 1), *ogni congruenza simmetrica e omogenea di* q *variabili e di modulo* p, *è risolubile con valori delle variabili differenti da zero e a due a due tra loro, salvo il caso che il grado della congruenza sia divisibile per* q.

Sia infatti

$$f(x, y, z, \ldots) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

la congruenza. Alle q variabili $x, y, \ldots$ si sostituiscano q distinte lettere tratte dalla serie

$$r_1 \;\; r_2 \;\; r_3 \ldots r_{p-1}$$

e ciò si faccia in tutti i modi possibili. Considerando che la f è simmetrica, il numero dei valori formalmente diversi che essa prende in tal modo, è dato dalla formola:

$$\mathrm{N} = \binom{p-1}{q} = \frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-q)}{1 . 2 . 3 \ldots q}.$$

Si moltiplichino i detti valori fra loro. Il prodotto P sarà, rispetto alle r, simmetrico, omogeneo e del grado $n\mathrm{N}$, dove n indica il grado della f rispetto alle sue variabili. Dico ora, che se q è divisore di $(p-1)$ e se n non è multiplo di q, il prodotto $n\mathrm{N}$ non è multiplo di $(p-1)$. Perchè, se fosse altrimenti, l'espressione

$$\frac{n\mathrm{N}}{p-1} = \frac{n(p-2)(p-3)\ldots(p-q)}{1 . 2 . 3 \ldots q}$$

(¹) Non così se il grado è pari: La congruenza $xy \equiv 0$, per esempio, con x ed y differenti da zero (mod. p) è impossibile. L'altra: $x^2 + y^2 \equiv 0$, che si può scrivere: $x^2 \equiv -y^2$, esige che (-1) sia resto quadratico, e che quindi il modulo abbia la forma $4k-1$; ecc.

si ridurrebbe a un intero: il suo numeratore sarebbe divisibile pel denominatore, e quindi anche per q. Ora q è primo: esso dunque dividerebbe qualche fattore del numeratore. Invece q non divide il primo fattore per ipotesi: nè meno divide alcuno dei seguenti, perchè tra i q numeri consecutivi

$$(p-1),\ (p-2), \dots (p-q)$$

non ve n'ha che un solo divisibile per q, e questo per l'ipotesi fatta è il primo, che però manca nel numeratore della frazione.

Dimostrato che il grado di P non è divisibile per $(p-1)$, si sostituiscano alle r i differenti resti (mod. p): ponganssi ad esempio:

$$r_1 = 1 \qquad r_2 = 2 \dots r_{p-1} = p-1.$$

Si ottiene in tal modo una funzione P′ dei $(p-1)$ resti, omogenea e simmetrica, e che, per avere il grado non divisibile per $(p-1)$, dà luogo alla congruenza:

$$P' \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Ma P′ è il prodotto degli N valori che assume la funzione $f(x, y, z, \dots)$ quando ad $x, y, z, \dots$ si sostituiscano tutte le possibili combinazioni di q resti (mod. p). Perciò, ricordando che se un numero primo divide un prodotto deve dividere uno almeno dei fattori, si deduce che, per una almeno di dette combinazioni, $f(x, y, z, \dots)$ diverrà nulla (mod. p), c. b. d.

G. Frattini.

GENERALIZZAZIONE D'UN TEOREMA SUI DETERMINANTI

Un notissimo ed importante teorema sui determinanti dice:

Se un determinante di ordine n *è nullo, ma di caratteristica* n — 1, *i minori complementari d'una colonna sono proporzionali ai corrispondenti minori d'un'altra colonna.*

Questo teorema può anche enunciarsi dicendo:

Se un determinante di ordine n *è nullo, ma di caratteristica* n — 1, *allora i minori del massimo ordine d'una matrice di* n — 1 *colonne, sono proporzionali ai corrispondenti minori del massimo ordine d'ogni altra matrice di* n — 1 *colonne.*

Ci proponiamo di generalizzare quest'ultimo enunciato, col seguente, che ho cercato invano in parecchi trattati sulla teoria dei determinanti e che pure mi sembra degno di nota:

Teorema. — *Se un determinante di ordine* n *è nullo, ed ha la caratteristica* p ≤ n — 1, *allora i minori di ordine* p *d'una matrice di* p *colonne sono proporzionali ai corrispondenti minori d'ordine* p *d'ogni altra matrice di* p *colonne.*

Per $p=n-1$ si ha il noto teorema precedente.

Questo teorema vale naturalmente anche per le linee, potendosi scambiare le linee colle colonne. Per intenderci brevemente, chiameremo *minori di una colonna* in una matrice, i determinanti del massimo ordine nella matrice che si ottiene, cancellando questa colonna. Un minore di una colonna si dirà *corrispondente* a un minore di un'altra colonna, quando questo è formato colle stesse linee di quelle.

Ciò posto premettiamo il seguente

LEMMA. — *Se in una matrice di* p + 1 *colonne ed* n *linee con*

$$p+1 \leqslant n,$$

sono nulli tutti i minori del massimo ordine p + 1, *allora i minori d'una colonna sono proporzionali ai minori corrispondenti d'un'altra colonna.*

Invero sia la matrice

$$M = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1p} & a_{1,p+1} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2p} & a_{2,p+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{np} & a_{n,p+1} \end{matrix} \right\| .$$

Cancelliamo ad es. la colonna h^{ma} e, nella matrice residua, consideriamo il minore A delle p linee $\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_p$ e il minore B delle p linee $\sigma_1\ \sigma_2 \dots \sigma_p$, che potremo qui brevemente rappresentare coi simboli

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \dots & \alpha_{h-1} & \alpha_h & \dots & \alpha_p \\ 1 & 2 \dots & h-1 & h+1 & \dots & p+1 \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \dots & \sigma_{h-1} & \sigma_h & \dots & \sigma_p \\ 1 & 2 \dots & h-1 & h+1 & \dots & p+1 \end{pmatrix}$$

ove in prima linea poniamo gl'indici delle linee e in seconda linea quelli delle colonne.

Cancelliamo poi la colonna k^{ma} e, nella matrice residua, consideriamo il minore A′ delle p linee stesse $\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_p$ e il minore B′ delle p linee stesse $\sigma_1\ \sigma_2 \dots \sigma_p$; cioè:

$$A' \begin{pmatrix} \alpha_1 & \sigma_2 \dots & \alpha_{k-1} & \alpha_k & \dots & \alpha_p \\ 1 & 2 \dots & k-1 & k+1 & \dots & p+1 \end{pmatrix}$$

$$B' \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \dots & \sigma_{k-1} & \sigma_k & \dots & \sigma_p \\ 1 & 2 \dots & k-1 & k+1 & \dots & p+1 \end{pmatrix}.$$

Poichè h e k sono due colonne scelte a piacere, il teorema sarà dimostrato quando si provi che:

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}.$$

Infatti, in virtù dell'ipotesi, il sistema di n equazioni lineari e omogenee con $p+1$ incognite, che può formarsi colle n linee di M, coesiste per valori non tutti nulli delle incognite. (¹) Potremo perciò limitarci a risolvere il sistema di sole $p+1$ equazioni, formato con $p+1$ linee, scelte a piacere fra le n linee di M.

Scegliamo ad es. le $p+1$ linee 1, α_1, α_2, ... α_p, cioè il sistema

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1h}x_h + \ldots a_{1k}x_k + \ldots + a_{1,p+1}x_{p+1} = 0 \\ a_{\alpha_1 1}x_1 + a_{\alpha_1 2}x_2 + \ldots a_{\alpha_1 h}x_h + \ldots a_{\alpha_1 k}x_k + \ldots + a_{\alpha_1 p+1}x_{p+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{\alpha_p 1}x_1 + a_{\alpha_p 2}x_2 + \ldots + a_{\alpha_p h}x_h + \ldots + a_{\alpha_p k}x_k + a_{\alpha_p p+1}x_{p+1} = 0. \end{array}$$

Sappiamo che sempre a causa dell'ipotesi, le soluzioni

$$x_1 x_2 \ldots x_{p+1}$$

sono proporzionali agli aggiunti della prima linea.

Ora l'aggiunto dell'elemento a_{1h} è precisamente $A.(-1)^{1+h}$, e l'aggiunto dell'elemento a_{1k} è precisamente $A'(-1)^{1+k}$, onde sarà

$$\frac{x_h}{x_k} = \frac{A(-1)^{1+h}}{A'(-1)^{1+k}} = \frac{A}{A'}(-1)^{h-k}. \qquad (1)$$

Scegliamo poi invece le $p+1$ linee 1, σ_1, σ_2, ... σ_p e consideriamo l'analogo sistema che a queste linee corrisponde. Evidentemente in questo sistema, l'aggiunto di a_{1h} sarà precisamente

$$B(-1)^{1+h}$$

e l'aggiunto di a_{1k} sarà

$$B'(-1)^{1+k},$$

onde consegue:

$$\frac{x_h}{x_k} = \frac{B(-1)^{1+h}}{B'(-1)^{1+k}} = \frac{B}{B'}(-1)^{h-k}. \qquad (2)$$

Da (1) e (2) segue immediatamente

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$$

da ciò ne segue il lemma.

Stabilito il quale, sarà molto facile dimostrare il teorema. Supponiamo dunque che nel determinante di ordine n:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

siano nulli tutti i minori, a partire da quelli di massimo ordine $n-1$, fino a quelli di ordine $p+1$ inclusi.

(¹) Cfr. CAPELLI, *Istituzioni di analisi algebrica*, pag. 242, art. 543.

Consideriamo le due matrici

$$A = \begin{Vmatrix} a_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} & \dots & a_{1\alpha_p} \\ a_{2\alpha_1} & a_{2\alpha_2} & \dots & a_{2\alpha_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n\alpha_1} & a_{n\alpha_2} & \dots & a_{n\alpha_p} \end{Vmatrix} \qquad B = \begin{Vmatrix} a_{1\beta_1} & a_{1\beta_2} & \dots & a_{1\beta_p} \\ a_{2\beta_1} & a_{2\beta_2} & \dots & a_{2\beta_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n\beta_1} & a_{n\beta_1} & \dots & a_{n\beta_p} \end{Vmatrix}$$

ottenute prendendo una volta le p colonne $\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_p$ e un'altra volta le p colonne $\beta_1\,\beta_2\dots\beta_p$.

Siccome le α e le β sono $2p$ colonne scelte a piacere, il teorema sarà dimostrato, quando avremo fatto vedere che i minori di ordine p ricavati dalla A sono proporzionali ai corrispondenti minori di ordine p ricavati dalla B.

Due ipotesi possono farsi:

1ª o le colonne $\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_p$ sono tutte diverse dalle colonne

$$\beta_1\,\beta_2\dots\beta_p,$$

il che importa $p \leq \frac{n}{2}$;

2ª o le colonne $\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_p$ coincidono in parte colle colonne

$$\beta_1\,\beta_2\dots\beta_p,$$

e questo succederà sempre quando $p > \frac{n}{2}$.

1° Caso. — Supponiamo che le colonne $\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_p$ siano tutte diverse dalle colonne $\beta_1\,\beta_2\dots\beta_p$.

Consideriamo le p matrici di $p+1$ colonne, che si ottengono prendendo nel determinante D

la prima	volta le $p+1$ colonne				$\alpha_1\;\alpha_2\dots\alpha_p\;\beta_1$
„ seconda	„	„	„	„	$\alpha_2\;\alpha_3\dots\beta_1\;\beta_2$
„ terza	„	„	„	„	$\alpha_3\;\alpha_4\dots\beta_2\;\beta_3$
. . . . .	. . .				. . . . .
„ p^{ma}	„	„	„	„	$\alpha_p\;\beta_1\dots\beta_{p-1}\;\beta_p$

e cioè, scrivendo per semplicità solo gl'indici degli elementi:

$$M_1 = \begin{Vmatrix} 1\alpha_1 & 1\alpha_2 & \dots & 1\alpha_p & 1\beta_1 \\ 2\alpha_1 & 2\alpha_2 & \dots & 2\alpha_p & 2\beta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n\alpha_1 & n\alpha_2 & \dots & n\alpha_p & a\beta_1 \end{Vmatrix} \qquad M_2 = \begin{Vmatrix} 1\alpha_2 & 1\alpha_3 & \dots & 1\beta_1 & 1\beta_2 \\ 2\alpha_2 & 2\alpha_3 & \dots & 2\beta_1 & 2\beta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n\alpha_2 & n\alpha_3 & \dots & n\beta_1 & n\beta_2 \end{Vmatrix}$$

$$M_3 = \begin{Vmatrix} 1\alpha_3 & 1\alpha_4 & \dots & 1\beta_2 & 1\beta_3 \\ 2\alpha_3 & 2\alpha_4 & \dots & 2\beta_2 & 2\beta_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n\alpha_3 & n\alpha_4 & \dots & n\beta_2 & n\beta_3 \end{Vmatrix} \dots M_p = \begin{Vmatrix} 1\alpha_p & 1\beta_1 & \dots & 1\beta_{p-1} & 1\beta_p \\ 2\alpha_p & 2\beta_1 & \dots & 2\beta_{p-1} & 2\beta_p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n\alpha_p & n\beta_1 & \dots & n\beta_{p-1} & n\beta_p \end{Vmatrix}.$$

Le matrici $M_1\, M_2 \ldots M_p$ così ottenute, hanno, per ipotesi, nulli tutti i minori del massimo ordine $p+1$; quindi, pel lemma premesso, in ciascuna di esse, i minori della prima colonna sono proporzionali ai minori dell'ultima colonna. D'altra parte i minori della prima colonna di M_1 sono eguali ai minori dell'ultima colonna di M_2; e quelli della prima colonna di M_2 sono eguali ai minori dell'ultima colonna di M_3 ecc.; i minori infine della prima colonna di M_{p-1} sono eguali ai minori dell'ultima colonna di M_p.

Ne segue subito con facile ragionamento che i minori dell'ultima colonna di M_1 sono pure proporzionali ai minori della prima colonna di M_p.

Ora i minori dell'ultima colonna di M_1 altro non sono che i minori della matrice A; i minori della prima colonna di M_p altro non sono che i minori della matrice B; dunque è vero quanto volevamo dimostrare.

2° Caso. — Supponiamo ora che le colonne $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_p$ coincidano in parte colle colonne $\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_p$ e precisamente

$$\alpha_{s_1} = \beta_{t_1}, \quad \alpha_{s_2} = \beta_{t_2}, \ \ldots, \ \alpha_{s\mu} = \beta_{t\mu} \qquad (\mu \leqslant p-1). \tag{3}$$

In tal caso nelle matrici $M_1\, M_2 \ldots M_p$ verrebbero ad apparire due o più colonne eguali. Per evitare questo, nella successione totale delle $2p$ colonne

$$\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_p\, \beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_p$$

cancelliamo le colonne $\beta_{t_1}\, \beta_{t_2} \ldots \beta_{t\mu}$ e, nella successione residua, cambiamo l'ordine delle α, portando le μ colonne singolari

$$\alpha_{s_1}\ \alpha_{s_2} \ldots \alpha_{s\mu}$$

dopo le altre α; otterremo così la successione delle $2p - \mu$ colonne

$$\begin{gathered}\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{s_1-1}\, \alpha_{s_1+1} \ldots \alpha_{s_2-1}\, \alpha_{s_2+1} \ldots \alpha_{s\,\mu-1}\, \alpha_{s\,\mu+1} \ldots \alpha_p\, \alpha_{s_1}\, \alpha_{s_2} \ldots \\ \ldots \alpha_{s\mu}\, \beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_{t_1-1}\, \beta_{t_1+1} \ldots \beta_{t_2-1}\, \beta_{t_2+1} \ldots \beta_{t\,\mu-1}\, \beta_{t\,\mu+1} \ldots \beta_p,\end{gathered} \tag{4}$$

che sono tutte diverse.

Consideriamo ora le $p-\mu$ matrici di $p+1$ colonne, che si ottengono, prendendo nel determinante D:

la prima volta le $p+1$ colonne della successione (4), che vanno dalla prima alla $(p+1)^{ma}$, cioè da α_1 fino a β_1;

la seconda volta le $p+1$ colonne della successione (4), che vanno dalla seconda alla $(p+2)^{ma}$, cioè da α_2 fino a β_2;

la terza volta le $p+1$ colonne della successione (4), che vanno dalla terza alla $(p+3)^{ma}$, cioè da α_3 fino a β_3;

. . . .

la $(p-\mu)^{ma}$ volta le $p+1$ colonne che vanno dalla $(p-\mu)^{ma}$ alla $(2p-\mu)^{ma}$, cioè da α_p fino a β_p,

e che potremo indicare con $N_1, N_2, \ldots, N_{p-\mu}$.

In particolare, scrivendo anche qui per semplicità solo gl'indici degli elementi, sarà:

$$N_1 = \left\| \begin{matrix} 1\alpha_1\, 1\alpha_2 \ldots 1\alpha_{s_1-1}\, 1\alpha_{s_1+1} \ldots 1\alpha_{s_2-1}\, 1\alpha_{s_2+1} \ldots 1\alpha_{s_\mu-1}\, 1\alpha_{s_\mu+1} \ldots \\ \qquad \ldots 1\alpha_p\, 1\alpha_{s_1}\, 1\alpha_{s_2} \ldots 1\alpha_{s_\mu}\, 1\beta_1 \\ 2\alpha_1\, 2\alpha_2 \ldots 2\alpha_{s_1-1}\, 2\alpha_{s_1+1} \ldots 2\alpha_{s_2-1}\, 2\alpha_{s_2+1} \ldots 2\alpha_{s_\mu-1}\, 2\alpha_{s_\mu+1} \ldots \\ \qquad \ldots 2\alpha_p\, 2\alpha_{s_1}\, 2\alpha_{s_2} \ldots 2\alpha_{s_\mu}\, 2\beta_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ n\alpha_1\, n\alpha_2 \ldots n\alpha_{s_1-1}\, n\alpha_{s_1+1} \ldots n\alpha_{s_2-1}\, n\alpha_{s_2+1} \ldots n\alpha_{s_\mu-1}\, n\alpha_{s_\mu+1} \ldots \\ \qquad \ldots n\alpha_p\, n\alpha_{s_1}\, n\alpha_{s_2} \ldots n\alpha_{s_\mu}\, n\beta_1 \end{matrix} \right\|$$

ed

$$N_{p-\mu} = \left\| \begin{matrix} 1\alpha_p\, 1\alpha_{s_1}\, 1\alpha_{s_2} \ldots 1\alpha_{s_\mu}\, 1\beta_1\, 1\beta_2 \ldots 1\beta_{t_1-1}\, 1\beta_{t_1+1} \ldots 1\beta_{t_2-1}\, 1\beta_{t_2+1} \ldots \\ \qquad \ldots 1\beta_{t_\mu-1}\, 1\beta_{t_\mu+1} \ldots 1\beta_p \\ 2\alpha_p\, 2\alpha_{s_1}\, 2\alpha_{s_2} \ldots 2\alpha_{s_\mu}\, 2\beta_1\, 2\beta_2 \ldots 2\beta_{t_1-1}\, 2\beta_{t_1+1} \ldots 2\beta_{t_2-1}\, 2\beta_{t_2+1} \ldots \\ \qquad \ldots 2\beta_{t_\mu-1}\, 2\beta_{t_\mu+1} \ldots 2\beta_p \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ n\alpha_p\, n\alpha_{s_1}\, n\alpha_{s_2} \ldots n\alpha_{s_\mu}\, n\beta_1\, n\beta_2 \ldots n\beta_{t_1-1}\, n\beta_{t_1+1} \ldots n\beta_{t_2-1}\, n\beta_{t_2+1} \ldots \\ \qquad \ldots n\beta_{t_\mu-1}\, n\beta_{t_\mu+1} \ldots n\beta_p \end{matrix} \right\| .$$

Ragionando su queste matrici, che sono ora a colonne tutte diverse, come si è fatto nel 1° caso, segue pure qui che: i minori dell'ultima colonna di N_1 sono proporzionali ai minori della prima colonna di $N_{p-\mu}$.

Ma in virtù delle (3), i minori dell'ultima colonna di N_1 coincidono, salvo gli stessi spostamenti di colonne, coi minori della matrice A; i minori della prima colonna di $N_{p-\mu}$ coincidono, salvo gli stessi spostamenti di colonne, coi minori della matrice B: dunque anche in questo caso è vero quanto volevamo dimostrare.

L. Tocchi.

INFINITO E INFINITESIMO IN MATEMATICA APPLICATA

Come è noto la teoria delle equazioni consente di dare veste matematica a molti problemi pratici sì da render possibili, col sussidio del calcolo algebrico risoluzioni teoricamente esatte; ciononostante, malgrado questa esattezza teorica, la risoluzione non può *praticamente* attuarsi se non in modo più o meno grossolanamente approssimato.

Per persuadersene basta pensare che gli ordinari strumenti di misura non possono, per la loro stessa natura, rivelare quantità incommensurabili; come potranno essi dunque verificare esattamente la soluzione di un problema quando, come in moltissimi casi, la formola risolutrice contiene simboli di operazioni irrazionali?

E, in ogni caso, i suddetti strumenti non possono fornire della quantità misurata un valore rigorosamente preciso; la *perfezione* di uno strumento di misura non consiste nella sua attitudine a rivelarci la *vera misura* di un ente concreto, bensì nella sua attitudine a fornire il massimo grado di approssimazione che la tecnica oggi consente.

Intesa in questo senso la soluzione pratica di un problema è chiaro come essa possa *sempre* porsi sotto forma decimale; ed è chiaro come ciò sia conveniente, data la facilità che i numeri decimali conferiscono ai calcoli numerici. Si tratterà di determinare un numero decimale che differisca *abbastanza poco* dalla soluzione teoricamente esatta.

Ciò posto si presenta spontanea la domanda: A qual patto l'errore commesso nella valutazione approssimata dall'incognita può dirsi *abbastanza piccolo*, ovvero *trascurabile*, o *praticamente infinitesimo?*

Mi propongo di far vedere che un tale criterio è *relativo* alla questione che si studia ed all'intento pratico che si vuol conseguire, e ne trarrò occasione per chiarire il significato che i vocaboli *infinitesimo* e *infinito* assumono in pratica ben diverso da quello che loro compete nella matematica pura.

Prendiamo le mosse dal seguente:

1. PROBLEMA. — *Un serbatoio si riempie in quaranta secondi* $\left(\frac{1}{90}\text{ di ora}\right)$ *quando siano aperti due rubinetti; il minore impiegherebbe da solo un minuto* $\left(\frac{1}{60}\text{ di ora}\right)$ *più del maggiore. Quanto tempo impiegherebbe da solo il minore?*

Indicandosi con x il tempo richiesto, espresso in m., il problema s'intavola nell'equazione:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-\frac{1}{60}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{90}\right)}$$

da cui:

$$(60x-1)+60x=90x\,.\,(60x-1)$$

(espressione moltiplicatrice $x\,.\,(60x-1)$ che si annulla solo per $x=0,\ x=\frac{1}{60}\Big)$.

Indi:

$$5400x-210x+1=0;$$

formola risolutrice:

$$x=\frac{210\pm\sqrt{22500}}{10800}=\frac{210\pm 150}{10800}=\begin{cases}\frac{1}{30}\\ \frac{1}{180}\end{cases}.$$

Va esclusa la soluzione $x=\frac{1}{30}$ perchè praticamente inattuabile; il rubinetto maggiore dovrebbe infatti riempire il recipiente in ore $\frac{1}{180}-\frac{1}{90}$, dovrebbe cioè rendere pieno il recipiente quaranta secondi prima che si cominci a versare! Resta la $x=\frac{1}{180}$; l'una e l'altra, del resto, sostituite nelle equazioni precedenti, le rendono identicamente soddisfatte. Si faccia la prova.

Si ponga invece:

Un serbatojo si riempie in 50 secondi quando siano aperti due rubinetti; il minore impiegherebbe da solo un minuto più del maggiore. Quanto tempo impiegherebbe da solo il minore?

Il problema s'intavola nell'equazione.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-\frac{1}{60}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{80}\right)} \tag{1}$$

da cui:

$$(60x-1)+60x=80x\,.\,(60x-1);$$

indi:

$$4800x^2-200x+1=0 \tag{2}$$

$$x=\frac{200\ \pm\sqrt{20800}}{9600}.$$

Da meno di 0,0001 *per eccesso* si ha:

$$\sqrt{20800}=144,2225,$$

Esclusa una soluzione praticamente inattuabile si ha press'a poco:

$$x=\frac{200+144,2225}{9600}=\frac{344,2225}{9600}.$$

L'errore commesso nel radicale viene nel calcolo di x, diviso per 9600; se il primo era minore di 0,001, il secondo pare minore di $\frac{0.0001}{9600}$ e, *a fortiori*, minore di 0,0001.

Se dunque noi calcoliamo il quoziente $\frac{344,2225}{9600}$ a meno di 0,0001 *per difetto* commetteremo due errori: l'uno per eccesso, l'altro per difetto entrambi minori di 0,0001; l'errore complessivo, essendo la differenza fra essi, sarà necessariamente esso pure minore di 0,0001.

Trovandosi, a meno di 0,0001 per difetto:

$$344,2225:9600=0,0358$$

si commetterà, ponendo $x = 0{,}0358$ un errore minore di un decimillesimo di ora ossia minore di un minuto secondo. A meno di un secondo sarà dunque: $x = 0{,}0358 = 0^h, 2', 8''$ e frazione di secondo.

L'approssimazione sembra più che sufficiente; il tempo cercato è valutato alla massima approssimazione che possa acconsentire un ordinario orologio; valutare il radicale con più di quattro cifre decimali sarebbe un giuochetto privo di qualsiasi valore pratico.

Eppure: sostituendo nel primo membro della (1); avremo:

$$\frac{1}{0{,}0358} + \frac{1}{0{,}0358 - \frac{1}{60}} = \frac{60 \,.\, 0{,}0358 - 1 + 60 \,.\, 0{,}0358}{0{,}0358 \,.\, (60 \,.\, 0{,}0358 - 1)} = \frac{3{,}296}{0{,}0410985}$$

che non è già l'inverso di $\frac{1}{80}$, bensì l'inverso di un numero minore di 0,1247. Se dunque il rubinetto minore impiegasse a riempire il recipiente il tempo espresso dalle soluzioni approssimate i due rubinetti versando insieme impiegherebbero non 50 secondi, ma meno di $\frac{1257}{10000}$ di ora, ossia meno di 45 secondi.

Ci si affaccia subito l'idea di avere sbagliato il procedimento; ma questo dubbio si rimuove pensando all'esempio precedente, dove, dopo lo stesso procedimento, si verificava identicamente esatto il risultato. Ciò che sfavorisce il secondo risultato di fronte al precedente sarà dunque l'inesattezza commessa nel calcolo del radicale; inesattezza minore di 0,0001 che pur ci pareva praticamente insignificante.

Un errore insensibile nel calcolo dell'incognita provoca un errore sensibilissimo dell'uguaglianza. Per avere fra i due membri un divario insensibile bisognerebbe spingere più oltre l'approssimazione nel radicale; per es., calcolando il radicale a meno di 0,000,000,001, si ottiene un risultato che differisce da 50 secondi per meno di un minuto terzo.

2. Considerazioni varie. — Immaginiamo che il direttore di un ospedale disponga di un bagno del volume di due metri cubi e voglia far costruire due rubinetti l'uno per l'acqua calda, l'altro per la fredda; e supponiamo che la cura esiga appunto le condizioni poste nel nostro secondo problema.

Immaginiamo egli intavoli il problema come dianzi e concluda dicendo al lattoniere: Mi faccia un rubinetto che versi 2 m^3 d'acqua in $0^h, 2', 8''$ e un altro che versi 2 m^3 d'acqua in $0^h, 1', 8''$. Il lattoniere, certo, sorpreso di tanta precisione, probabilmente risponderà: Non posso garantire una costruzione così precisa. Eppure, se anche un lattoniere di abilità eccezionale eseguisse rigorosamente gli ordini del medico questo resterebbe deluso nelle sue aspettative. Il calcolo precedente mostra che il recipiente sarebbe già pieno quando secondo il desiderio del medico dovrebbe essere ancora vuota più della decima parte. Il medico dovrà dunque rifare il suo calcolo approssimando il radicale di 0,000,000,001 e cercare un altro fantastico lattoniere ancor più abile che possa garantire la portata dei rubinetti fino a $\frac{1}{1,000,000,000}$ di ora (circa $\frac{1}{300,000}$ di secondo!).

Da ciò concluderemo che il dispositivo ideato dal medico è praticamente irrealizzabile; se è proprio necessario per la cura che le modalità del versamento siano così regolate, noi lo consiglieremo a cambiare la tecnica del suo piano, ossia a procacciarsi per altra via lo stesso risultato terapeutico.

Problemi teoricamente risolubili e praticamente irrealizzabili s'incontrano ad ogni piè sospinto in ogni branca della matematica applicata. Voglio dare un esempio grossolano ed evidente.

Si prenda un oggetto di forma conica circolare retta (trottola) e lo si metta sul tavolo in posizione verticale facendolo poggiare sul vertice; come la più elementare esperienza ci fa prevedere, il cono cadrà.

Si ripeta l'esperimento imprimendo al cono con le palme un rapido movimento di rotazione intorno all'asse; finchè il movimento si mantiene rapido il cono si reggerà verticalmente. La spiegazione è facile.

Consideriamo anzitutto il caso della quiete. Le molecole del cono pesano; quelle dell'asse gravitano sul punto d'appoggio e non alterano l'equilibrio; le altre sollecitano il cono, quali in un senso, quali in un altro; poichè l'oggetto non è del tutto omogeneo nè per forma (imperfettamente conica) nè per densità, da una parte si ha sollecitazione maggiore; questa prevale sulle altre e da questa parte il cono cade. La caduta dipende da questo e *non da altro*; per persuadersene basta considerare il caso della rotazione.

In tal caso, mentre il cono sta per cadere dalla parte più densa (o più sporgente) quest'ultimo passa rapidamente da banda opposta e determina una sollecitazione in senso opposto alla precedente; sollecitazione che per un istante equilibra la precedente e nell'istante successivo determinerebbe, dalla banda opposta, la caduta. Ma la rotazione continua: il cono si è rapidamente voltato e nuovamente disposto nella posizione iniziale; la sollecitazione si è nuovamente invertita; indi nuovo equilibrio, nuova inversione e così via.

Quando la velocità di rotazione va smorzandosi il cono *tarda* ad invertire la sua posizione e per un po' *accenna* a cadere dalla parte più densa (o più sporgente), finchè la rotazione ne lo raddrizza; al moto di rotazione s'accoppia dunque una specie di moto di rivoluzione. Finalmente la lentezza diventa tale che l'inversione non arriva in tempo ad impedire la caduta: e il cono cade.

Da tutto ciò risulta (*questa è la conclusione cui volevo giungere*), che, se il nostro oggetto fosse omogeneo in densità e perfettamente conico (a simmetria raggiata) esso resterebbe, sul vertice, in equilibrio. Eppure, si provi a costruire un cono con tanta cura da poter poggiare sul vertice! dovrebbe ben meravigliarci se constatassimo la riuscita di un tale esperimento; e, se riuscisse, saremmo indotti ad attribuirlo al caso o all'attrito del tavolo più che alla precisione della nostra tecnica. Con quali mezzi un falegname potrebbe verificare se da una parte la massa ecceda o non ecceda, per es., di un centimilligrammo? e, anche lo potesse, se constatasse una tale differenza qual pialla potrebbe eliminarla con tanta precisione, in quantità e in forma da non provocare il tracollo dalla parte opposta?

Il nostro medico bizzarro, fiducioso nelle sue deduzioni teoriche, potrebbe ostinarsi a voler avere un provino di forma conica ritto sul vertice, rimandando dal chincagliere quei provini che non soddisfano a questa condizione; ma qui resterebbe ancor più deluso.

Prima un lattoniere sovrumanamente abile avrebbe potuto soddisfarlo. Spingendo la cura della sua costruzione oltre il miliardesimo di secondo il lattoniere avrebbe potuto dare al medico l'illusione di esser riuscito riempiendo la piscina se non in 50 secondi, in 49'', 59''' e frazione di terzo (sicchè il divario sfugga all'orologio). Qui invece occorrerebbe non un chincagliere *molto* più abile dei soliti, ma *infinitamente* più abile; non un chincagliere che garantisse il rigore geometrico del cono a meno di una frazione impercettibile di mm. e l'omogeneità fisica a meno di una frazione impercettibile di mg.; ma un chincagliere che garantisse un rigore geometrico *assoluto* ed una omogeneità assoluta. Un difetto di simmetria per quanto piccolo, per quanto inavvertibile dai sensi umani basterebbe a determinare la caduta.

Non l'opera umana, ma il caso può far sì che l'oggetto sia *assolutamente* conico; ed un caso infinitamente poco probabile, tanto è vero che oggi, domani e sempre un oggetto conico poggiato su di un piano pel vertice ed abbandonato a se stesso cade (a meno che, vien voglia di aggiungere, la punta incuneandosi nel piano non si scavi una culletta; ma allora il piano... non sarebbe più un piano).

Al nostro medico consiglieremo dunque anche qui di cambiare l'apparato tecnico e gli proporremo un economico piedistallo che il più umile fabbro sa costruire.

Tornando al nostro problema osserveremo che se è vero che il medico potrebbe essere soddisfatto dal lattoniere eccezionale ciò sarebbe solo in grazie della sua ignoranza solo perchè una differenza di tempo minore di 1''' non sarebbe rivelata dal suo orologio e ben difficilmente si troverebbe un ammalato così sensibile da risentirne un danno nella cura. Guai se così fosse, guai se crescendo l'abilità del lattoniere, crescessero ugualmente le sensibilità dell'orologio, degli ammalati, dell'occhio medico scrutatore; l'uno moltiplicherebbe i suoi sforzi e la sua precisione, l'altro la sua severità ed incontentabilità. E malgrado l'abilità sovrumana del lattoniere il problema sarebbe ancora praticamente insolubile.

Anche qui però può provvedere il caso. Mentre il lattoniere sovrumano garantisce a meno, per es., di $\frac{1}{10^{80}}$ di secondo, il caso può scegliere, nell'intervallo che la tecnica consente, proprio la soluzione del problema.

3. Quantità praticamente infinitesime. — Le precedenti osservazioni mostrano con quante cautele debbano usarsi, nelle applicazioni della matematica, le parole: *trascurabile, infinitamente piccolo, infinitesimo*; come le parole: *immenso, infinitamente grande, infinito*, e simili. Esse sono *relative* alla natura della questione proposta, al fenomeno che in quel momento si studia.

Poggiamo un oggetto cilindrico sulla sua base; con un chiodo attacchiamo alla sommità, da una banda, un peso; se il peso è abbastanza rilevante il cilindro si ribalterà; ma se il peso è di un mg., no. Il peso di un mg., sarà a quegli effetti *trascurabile* o *infinitesimo*, perchè non basterà a vincere le circostanze che ostacolano la caduta. E se posassimo un milligrammo sopra un cono che per caso fosse perfettamente simmetrico e si mantenesse in equilibrio sul vertice? esso (a parte l'attrito) basterebbe a determinare il ribaltamento come vi potrebbe bastare l'alito di una mosca; nessuna forza, per quanto piccola, è trascurabile rispetto a questo fenomeno; rispetto a questo fenomeno cause insensibili bastano a suscitare effetti sensibilissimi.

In generale si dirà che *in un dato fenomeno una quantità si comporta come infinitesima* quando essa è già così piccola che un suo ulteriore impiccolimento non recherebbe, nell'andamento di *quel* fenomeno, differenza sensibile.

Per es.: Un minuto secondo è infinitesimo rispetto alle indicazioni di un orologio ordinario perchè, se un fenomeno, invece di compiersi in 1″ si compie in meno di 1″, l'orologio non avverte tale diminuizione. Ma la stessa quantità 1″, interpretata come periodo d'azione dei rubinetti di cui sopra, non è infinitesima rispetto al tempo di riempimento dei rubinetti simultaneamente versanti; il difetto di 1″ in uno di essi provoca una differenza di oltre 5 secondi nel tempo di riempimento; attenuando questo già insensibile difetto di 1″ la seconda differenza *sensibilmente* decresce fino a sparire.

4. Quantità praticamente infinite. — *In un dato fenomeno* si dice che *una quantità si comporta come infinita* quando essa è già così grande che un suo ulteriore ingrandimento non recherebbe, in quel fenomeno, differenza sensibile.

Per es.: Si sospendano a due fili due pallini di piombo; i fili si dispongono verticalmente; che significa verticalmente? significa che i loro prolungamenti s'incontrerebbero nel centro della terra; ciò nonostante all'occhio più sensibile i fili appaiono paralleli; se ciò non avviene è per qualche circostanza perturbatrice. Perchè questo? perchè, il punto d'incontro essendo remotissimo, le verticali sono *quasi* parallele, sensibilmente parallele. Un ulteriore allontanamento del centro della terra, già lontanissimo, ossia un ulteriore ingrandimento del raggio terrestre non recherebbe differenza sensibile nella mutua inclinazione dei fili; anche se la terra divenisse una sfera di raggio infinito (ossia un piano) nessuno avvertirebbe la diminuzione della convergenza. Il fenomeno è indifferente a qualsiasi ingrandimento, mentre risentirebbe in modo sensibile un eventuale notevole impiccolimento. Se il raggio della terra divenisse dieci milioni di volte maggiore nessuno se ne accorgerebbe dall'esame dei fili che continuerebbero *a parer* paralleli; se divenisse dieci milioni di volte minore (poco più di 1 m.) si vedrebbero benissimo ad occhio nudo convergere le due verticali.

In questo fenomeno il raggio della terra si comporta dunque come infinito.

Ebbene: apriamo invece un libro di meccanica celeste; l'autore parlerà di un punto P attratto da un punto Q e questi *punti* P, Q... saranno il Sole, la Terra, gli altri pianeti. Come si spiega? Si spiega pensando che in questo fenomeno il raggio di un pianeta si comporta come infinitesimo.

Se il raggio terrestre si riducesse in ragione di 10 milioni (ferma restando la massa) nessun fenomeno di meccanica celeste muterebbe perciò il suo corso; nessuno può prevedere invece che cosa accadrebbe se divenisse 10 milioni di volte più grande.

Il medesimo raggio terrestre che in fenomeno di *fisica sperimentale* (terrestre) si comporta come infinito, in un fenomeno di *fisica celeste*, si comporta come infinitesimo; così $\frac{1}{1000}$ di mg., infinitesimo, (di solito) in un fenomeno di fisica sperimentale, può divenire infinito in un fenomeno di *fisica chimica* ove sia paragonato a una molecola.

La fisica celeste e la fisica chimica, presentano quantità *matematicamente finite* (soddisfacenti cioè al postulato d'Archimede) ma *praticamente infinite o infinitesime.*

5. I due tipi di problemi algebrici. — In generale i problemi algebrici ad una incognita si distinguono in due tipi. Alcuni dicono: *Si vuol raggiungere un dato intento; si determini una quantità* x (che dipende dal nostro arbitrio) *in modo da raggiungere questo intento.* Altri dicono: *È noto che fra certe quantità* (indipendenti alla nostra volontà) *sussiste una certa relazione; date tutte all'infuori di una, si determini questa.*

I calcoli del medico per regolare la cura al modo opportuno appartengono al 1° tipo; ma la stessa equazione può interpretarsi come un problema del 2° tipo.

Immaginiamo che il medico, avendo acquistato i rubinetti abbia constatato con l'orologio alla mano che con essi il recipiente si riempie come l'enunciato dice, e che un tale, per curiosità, richieda la loro portata. Per rispondere egli dovrebbe intavolare la stessa equazione; ma il problema da lui risolto apparterrebbe evidentemente al 2° tipo.

Orbene; se il medico rispondesse: Il rubinetto minore impiega 2 minuti, 8 secondi e frazioni di secondo. La curiosità del suo amico sarebbe più che soddisfatta. Il curioso richiedeva la conoscenza obbiettiva dell'intervallo di tempo; e questa gli è fornita a meno di un secondo, ossia con tutta la precisione che gli ordinari orologi comportano.

Gli è che nei problemi del 2° tipo, mirandosi alla *conoscenza di una quantità* si richiede una soluzione approssimata a meno degli errori d'osservazione e non più; nei problemi del 1° tipo, mirandosi invece al *raggiungimento di un intento* si chiede una approssimazione che renda insensibile non già il divario fra un valor vero e un valore approssimato, bensì il divario fra i due membri di un'eguaglianza condizionale.

E poichè lo stesso quesito può interpretarsi, a seconda delle contingenze, come appartenente all'uno e all'altro tipo, si può dire che:

Per lo stesso problema (esaminato da punti di vista diversi) *una soluzione sufficientemente approssimata in vista di un dato scopo, può non esserlo in vista di certi altri.*

E se poi constatassimo coll'orologio *precisamente* 2', 8'', troveremmo contraddizione fra il valore calcolato $\frac{200+\sqrt{20800}}{9600}$ e il valore misurato (differente dal primo) $\frac{2}{60}+\frac{8}{3600}$? No; era ben da prevedersi che un orologio non avrebbe potuto indicare esattamente $\frac{200+\sqrt{20800}}{9600}$ perchè su di esso non si potranno mai leggere irrazionali, perchè insomma, per il suo stesso congegno, esso non può indicare che *frazioni* di ora.

Concluderemo invece: Il medico col suo orologio rilevò due misure; la prima di *circa* 50 secondi $\left(\frac{1}{60}\text{ di ora}\right)$, la seconda di circa un minuto $\left(\frac{1}{60}\text{ di ora}\right)$; noi ne rilevammo una terza di *circa* 2', 8'' $\left(\frac{2}{60}+\frac{8}{3600}\right)$; più di così dagli orologi non si potè avvertire.

Esistono (per il ragionamento che conduce a intavolare l'equazione): un t vicinissimo a $\frac{1}{80}$, un t' vicinissimo a $\frac{1}{60}$, un t'' vicinissimo a $\frac{2}{60}+\frac{8}{3600}$ tali che:

$$\frac{1}{t''}+\frac{1}{t''-t'}=\frac{1}{t};$$

indi

$$t''^2-(2t+t').t''+tt'=0,$$

ossia:

$$t'' = \frac{(2t + t') \pm \sqrt{(2t + t')^2 - 4tt'}}{2}.$$

Essendo

$$t \text{ circa } \frac{1}{80}, \; t' \text{ circa } \frac{1}{60}, \; t'' \text{ circa } \frac{2}{60} + \frac{8}{3600}$$

è *circa* $\frac{2}{60} + \frac{8}{3600}$ eguale a

$$\frac{\left(2 \cdot \frac{1}{180} + \frac{1}{60}\right) \pm \sqrt{\left(2 \cdot \frac{1}{80} + \frac{1}{60}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{80} \cdot \frac{1}{60}}}{2}$$

o, a riduzioni eseguite dovrà essere *circa* $\frac{2}{60} + \frac{8}{3600}$ eguale a

$$\frac{200 \pm \sqrt{20800}}{9600}.$$

Ed infatti, per la determinazione $+$, il divario fra le due espressioni, risulta minore di 0,000,001.

In tutte le applicazioni della matematica i dati di fatto sono solo approssimati, sono generalmente misure valutate o coi nostri sensi, o con strumenti che ne acutizzano il potere *fino a un certo punto.*

Quando noi rileviamo certe misure e, operando su queste, calcoliamo certe altre, gli errori inevitabili dei dati si traducono in errori, più o meno sensibili, delle quantità calcolate.

Per aver fiducia nel risultato, *quando questa fiducia non ci sia suggerita dall'intuizione, dall'esperienza o da qualsiasi riprova o conferma* (il che avviene il più delle volte) è necessario tener ben presente entro quali limiti possa variare l'errore dei dati e *dedurne* entro quali limiti possa variare quello delle quantità calcolate. Il trascurare questo in questioni empiriche può essere ben fatto; ma in questioni un po' complesse può condurre ad errore.

E. Senigaglia.

SUL PROBLEMA DI RIPARTIZIONE

In recenti lavori (1) sono stati incontrati o studiati di proposito alcuni numeri notevoli, i quali, alcuni anni or sono, mi si erano presentati nello studiare il seguente problema combinatorio di ripartizione.

(1) Vedi, ad es., in questo stesso *Periodico*, la Nota di L. Galvani, " Di alcune identità analitiche ed aritmetiche ", (Vol. XXVII, p. 202) e un lavoro di V. Melfi-Molè, Vol. XXVI.

Dati m *oggetti qualsiasi (distinti, identici o solo in parte distinti), determinare il numero dei modi differenti secondo cui è possibile dividerli (ripartirli) in* n *parti o gruppi, essendo* $n \leqq m$. [1]

Era però sin qui sfuggito alla mia attenzione un lavoro di M. D'OCAGNE, nel quale sin dal 1887 si tratta dei numeri in discorso in modo abbastanza compiuto. In questa Nota io mi propongo di ricollegare le mie ricerche (che risolvono fra l'altro un problema proposto dallo stesso D'OCAGNE) a quelle preesistenti sull'argomento nell'Analisi; riprendo poi anche a considerare il problema della ripartizione con elementi non tutti distinti, e miglioro il calcolo dei valori relativi a tali ripartizioni, determino alcune leggi che regolano la variazione di essi e pongo infine in vista alcuni casi notevoli di ripartizione.

Mi sembrano non prive d'interesse queste ricerche, che conducono, come si vedrà anche dai soli risultati che si riportano in questo lavoro, sia a generalizzare formole già note, sia a mostrare l'unica genesi combinatoria di fatti da doversi ritenere sin qui come differenti e senza alcun nesso fra di loro.

1. Definizione combinatoria dei numeri $K_{m,p}$. - Notazioni adottate nel presente lavoro. — M. D'OCAGNE, in una importante Monografia, raccoglie le principali proprietà e relazioni analitiche relative ad alcuni numeri notevoli, con i quali si erano a varie riprese incontrati anche altri analisti, fra i quali lo stesso Autore ricorda CATALAN, CESÀRO e SCHLÖMILCH. [2] Di questi numeri, che indica con $K_{m,p}$ dà la seguente definizione formale:

$$\begin{cases} K_{m,1} = K_{m,m} = 1 \\ K_{m,p} = K_{m-1,p-1} + p\, K_{m-1,p} . \end{cases} \tag{1}$$

L'analogia della relazione ricorrente (1) a quella di Stifel per le combinazioni ($C_{m,p} = C_{m-1,p-1} + C_{m-1,p}$) dovette, fra l'altro, condurre l'Autore a proporre di trovare, per i numeri $K_{m,p}$, *une définition combinatoire analogue à celle des nombres du triangle de Pascal, c'est-à-dire de trouver certain genre de fonctions combinatoires dont ils fissent précisément connaitre le dénombrement.* [3]

L. D. H. PICQUET, che si era occupato di questi numeri, rispose che dai numeri $K_{m,i}$ derivano alcuni numeri $N_{m,i}$ definiti dalla relazione:

$$N_{m,i} = m(m-1) - (m-i+1) K_{m,i} ,$$

---

(1) Cfr. "Principi di analisi combinatoria con applicazioni a problemi di decomposizione e di partizione dei numeri" (*Giornale di Matematiche di Battaglini*, vol. 45°, 1907, e 47°, 1909).

(2) Cfr. M. D'OCAGNE, "Sur une classe de nombres remarquables" (*American Journal of Mathematics*, 1887, pag. 353). Questo lavoro è dovuto evidentemente sfuggire ad L. GALVANI, che, nella sua Nota citata, prende persino le mosse da concetti già riportati in esso, che non è poi ricordato in alcun punto dall'Autore.

(3) Cfr. *Intermédiaire des mathématiciens*, anno 1894, questione 124ma. In questa stessa annata è inserita la risposta di L. D. H. PICQUET alla questione proposta dal D'OCAGNE.

i quali hanno un significato in una questione di probabilità. Chè la risposta del PICQUET non sia soddisfacente alla questione del D'OCAGNE è facile vederlo, bastando anche limitarsi ad osservare che in tal modo non si vengono a definire direttamente i numeri $K_{m,i}$.

La risposta al quesito del D' OCAGNE, contenuta, a mia insaputa, nel citato lavoro del 1907, è la seguente:

Indica $K_{m,p}$ *il numero dei modi differenti secondo cui è possibile ripartire* m *oggetti distinti in* p *gruppi, o, che è lo stesso, su* p *posti identici.*

Per la definizione stessa si ha:

$$K_{m,1} = K_{m,m} = 1,$$

e si passa poi a dimostrare facilmente, come abbiamo fatto nei nostri lavori, la relazione

$$K_{m,p} = K_{m-1,p-1} + pK_{m-1,p}.$$

Noi abbiamo indicato con $R_{m,p}$ il numero delle ripartizioni di m oggetti distinti in p parti, o della classe p^{ma}, e conserveremo, alla vece del K, il simbolo R, più rispondente alla natura stessa dei numeri che rappresentano.

Se gli m oggetti da ripartirsi non sono tutti distinti, e se propriamente quelli di essi che non si ripetono sono in numero di t, mentre altri p, differenti fra di loro e dai precedenti t, si ripetono in tutto rispettivamente per $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$ volte ciascuno, rappresenteremo con

$$R_{t_{\alpha_1,\, \alpha_2 \ldots \alpha_p}, n}$$

il numero delle ripartizioni della classe n^{ma} degli oggetti dati. (¹)

Si ha evidentemente:

$$t + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = m.$$

Così ad es., dati 8 oggetti delle seguenti composizioni:

$$a_1\ a_2\ a_3\ a_3\ a_4\ a_4\ a_4\ a_4\,; \qquad a_1\ a_1\ a_1\ a_2\ a_2\ a_2\ a_2\ a_2\,;$$
$$a_1\ a_1\ a_1\ a_1\ a_1\ a_1\ a_1\ a_1\,,$$

i numeri delle ripartizioni in 4 gruppi, o su 4 posti identici, degli oggetti dati sono rappresentati da

$$R_{2_{2,4}},_4\,; \qquad R_{0_{3,5}},_4\,; \qquad R_{0_8},_4\,.$$

Manteniamo anche in questo lavoro la convenzione di segnare un tratto al disopra dei numeri indicanti gruppi d'oggetti d'indeterminata composizione, e ricordiamo che il valore di

$$R_{t_{\alpha_1,\, \alpha_2 \ldots \alpha_p}, n}$$

è indipendente dall'ordine di ripetizione degli oggetti.

(¹) Avvertiamo che alla notazione $R_{t_{\alpha_1,\, \alpha_2 \ldots \alpha_p}, n}$ veniamo in questo modo a dare un significato un po' diverso di quello che aveva nei precedenti miei lavori.

2. Espressione di $R_{t_{\alpha_1,\,\alpha_2\dots\alpha_p},\,n}$. — 1°. In questa prima parte il valore di $R_{t_{\alpha_1,\,\alpha_2\dots\alpha_p},\,n}$ lo esprimeremo mediante ripartizioni fra oggetti che si ripetono per un numero di volte inferiore ad α_1, o ad $\alpha_2 \dots$, o ad α_p.

Tutte le $R_{t_{\alpha_1,\,\alpha_2\dots\alpha_p},\,n}$ ripartizioni fra gli m oggetti

$$a_1\, a_2 \dots a_t\, \underset{(1)}{a_{t+1}}\, \underset{(2)}{a_{t+1}} \dots \underset{(\alpha_1)}{a_{t+1}}\, \underset{(1)}{a_{t+2}} \dots \underset{(\alpha_2)}{a_{t+2}} \dots \underset{(1)}{a_{t+p}} \dots \underset{(\alpha_p)}{a_{t+p}} \qquad (2)$$

distribuiamole in due gruppi; e cioè poniamo in un gruppo quelle che hanno un certo oggetto che si ripete, ad es. a_{t+1}, solo in qualche posto, ed in un secondo tutte quelle altre che non contengono a_{t+1} mai solo in alcuno dei posti.

Le ripartizioni del 1° gruppo sono in numero di

$$R_{t_{\alpha_1-1,\,\alpha_2\dots\alpha_p},\,n-1},$$

perchè ponendo a_{t+1} solo in un posto, si possono poi ripartire i rimanenti oggetti in tutti i modi possibili sui posti rimasti.

Le ripartizioni del 2° gruppo possono contenere a_{t+1} rispettivamente in n, $n-1$, $n-2, \dots, 1$ posti.

Dopo avere collocato su ciascuno degli n posti una volta a_{t+1}, i rimanenti $m-n$ oggetti potranno ripartirsi sugli stessi n posti, in un numero di modi differenti dato da $R_{t_{\alpha_1-n,\,\alpha_2\dots\alpha_p},\,n}$. Questo numero indica dunque la totalità delle ripartizioni del 2° gruppo che hanno a_{t+1} in tutti gli n posti.

Stabiliamo ora il numero di quelle che appartenendo al 2° gruppo, contengono a_{t+1} solo in h posti.

Per maggior chiarezza rappresentiamo nel quadro

$$\begin{array}{cccccc} a_{t+1} & a_{t+1} & a_{t+1} & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (1) & (2) & (h) & (1) & (2) & (n-h) \end{array}$$

n posti identici; su ciascuno di certi h tra essi, e siano, ad es., i primi h, trovasi un oggetto a_{t+1}.

Sugli $n-h$ posti rimanenti può trovarsi ripartita una combinazione qualsiasi di $n-h$, o $n-h+1, \dots$, o $m-\alpha_1$ oggetti diversi da a_{t+1}, ossia una combinazione qualsiasi di q oggetti,

$$n-h \leqslant q \leqslant m-\alpha_1,$$

presi dai seguenti:

$$a_1\, a_2 \dots a_t\, \underset{(1)}{a_{t+2}}\, \underset{(2)}{a_{t+2}} \dots \underset{(\alpha_2)}{a_{t+2}} \dots \underset{(1)}{a_{t+p}} \dots \underset{(\alpha_p)}{a_{t+p}} \qquad (3)$$

che sono in numero di $m-\alpha_1$.

Ora, q oggetti d'indeterminata composizione si ripartono su $n-h$

posti in $R_{\overline{q}}$, $n-h$ modi differenti, ed essendo $C_{t_{\alpha_2,\ldots\alpha_p},q}$ (¹) il numero di tutte le combinazioni q a q che possono formarsi con gli oggetti (3), si avranno sugli $n-h$ posti che si considerano

$$C_{t_{\alpha_2,\ldots\alpha_p},q}\,R_{\overline{q},n-h}$$

ripartizioni distinte; ciascuna di queste, potendosi i rimanenti $m-h-q$ oggetti non ancora collocati ripartire sui primi h posti in

$$R_{\overline{m-h-q},h} = R_{t_{\alpha_1-h,\alpha_2\ldots\alpha_p}-\overline{q},h}$$

modi differenti, trovasi in $R_{t_{\alpha_1-h,\alpha_2\ldots\alpha_p}-\overline{q},h}$ ripartizioni distinte delle $R_{t_{\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_p},n}$ ed in tutto dunque si hanno

$$C_{t_{\alpha_2\ldots\alpha_p},q}\quad R_{\overline{q},n-h}\quad R_{t_{\alpha_1-h,\alpha_2\ldots\alpha_p}-\overline{q},h}\ (^2)$$

ripartizioni del 2° gruppo, che contengono degli a_{t-1} sui primi h posti e q oggetti, differenti da a_{t+1}, sui rimanenti $n-h$.

Facendo variare q da $n-h$ ad $m-\alpha_1$ si ha l'espressione

$$\sum_{q=n-h}^{q=m-\alpha_1} C_{t_{\alpha_2\ldots\alpha_p},q}\quad R_{\overline{q},n-h}\quad R_{t_{\alpha_1-h,\alpha_2,\ldots\alpha_p}-\overline{q},h}$$

per il numero totale delle ripartizioni contenenti degli a_{t+1} in h posti; finalmente facendo variare h da $n-1$ ad 1 si avrà la totalità delle ripartizioni del 2° gruppo che contengono a_{t+1} in $n-1$, $n-2,\ldots$, 2 e 1 posti.

Riassumendo dunque si ha:

$$R_{t_{\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_p},n} = R_{t_{\alpha_1-1,\alpha_2\ldots\alpha_p},n-1} + R_{t_{\alpha_1-n,\alpha_2\ldots\alpha_p},n} + \\ + \sum_{h=n-1}^{h=1}\ \sum_{q=n-h}^{q=m-\alpha_1} C_{t_{\alpha_2\ldots\alpha_p},q}\quad R_{\overline{q},n-h}\quad R_{t_{\alpha_1-h,\alpha_2\ldots\alpha_p}-\overline{q},h}, \qquad (4)$$

e si può anche scrivere, convenendo che $R_{0,0}=1$ e ricordando che è in ogni caso $R_{\overline{m},0}=0$,

$$R_{t_{\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_p},n} = R_{t_{\alpha_1-1,\alpha_2\ldots\alpha_p},n-1} + \\ + \sum_{h=n}^{h=1}\ \sum_{q=n-h}^{q=m-\alpha_1} C_{t_{\alpha_2\ldots\alpha_p},q}\quad R_{\overline{q},n-h}\quad R_{t_{\alpha_1-h,\ldots\alpha_p}-\overline{q},h}. \qquad (4')$$

(¹) Per quanto riguarda il calcolo e lo sviluppo di $C_{t_{\alpha_2,\ldots\alpha_p},q}$ veggasi: "Sulle combinazioni con elementi non tutti distinti" (*Giornale di Matematiche di Battaglini*, 1908).

(²) Questa notazione simbolica va dunque intesa nel senso che, determinata la composizione delle $C_{t_{\alpha_2,\ldots\alpha_p},q}$, bisognerà moltiplicare il numero di quelle appartenenti ad uno stesso tipo, per il valore di $R_{\overline{q},n-h}$, in cui il sistema di composizione dei q oggetti sia identico a quello delle combinazioni che si considerano; tale prodotto va poi moltiplicato per il valore di

$$R_{t_{\alpha_1-h,\alpha_2\ldots\alpha_p}-\overline{q},h}$$

essendo i q oggetti, che si tolgono da tutti gli m, composti come quelli precedentemente considerati in $R_{\overline{q},n-h}$.

Analoghe espressioni si sarebbero ricavate quando si fosse considerato un oggetto che si ripete diverso da a_{t+1}.

In particolare, si suppongono nella (4′) identici tutti gli m oggetti dati. Si ha allora:

$$t = 0, \quad \alpha_1 = m, \quad \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0$$

ed è quindi

$$R_{t_{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p}, n} = R_{0_m, n}; \quad R_{t_{\alpha_1 - 1, \alpha_2 \ldots \alpha_p}, n-1} = R_{0_{m-1}, n-1};$$

dei termini della sommatoria del 2° membro della stessa (4′) ha significato solo quello relativo al valore di $h = n$, che è dato da

$$C_{0,0}\ R_{0,0}\ R_{0_{m-n}, n} = R_{0_{m-n}, n}.$$

Si ricava perciò la seguente relazione

$$R_{0_m, n} = R_{0_{m-1}, n-1} + R_{0_{m-n}, n}.\ (^1) \tag{5}$$

Si osservi intanto che se

$$m - n < n, \quad R_{0_{m-n}, n} = 0,$$

ed allora dalla (5) si trae:

$$R_{0_m, n} = R_{0_{m-1}, n-1}.$$

Analogamente, se fosse $(m-1) - (n-1) = m - n < n - 1$ si avrebbe

$$R_{0_{m-1}, n-1} = R_{0_{m-2}, n-2},$$

e così continuando si troverebbe

$$R_{0_m, n} = R_{0_{m-1}, n-1} = R_{0_{m-2}, n-2} = \ldots = R_{0_{m-\lambda}, n-\lambda} + R_{0_{m-(\lambda+1)}, n-(\lambda+1)},$$

se si avesse

$$\begin{cases} m - n < n - \lambda + 1 \\ m - n = n - \lambda. \end{cases}$$

Dall'ultima di queste due relazioni si ricava

$$m = 2n - \lambda,$$

ed è quindi, ponendo $n - \lambda = k$,

$$R_{0_{m-\lambda}, n-\lambda} = R_{0_{2(n-\lambda)}, n-\lambda} = R_{0_{2k}, k}.$$

Si ha perciò:

$$R_{0_{2k}, k} = R_{0_{2k+1}, k+1} = R_{0_{2k+2}, k+2} = \ldots = R_{0_m, n},$$

---

(1) Questa legge di ricorrenza è stata già notata da EULERO nel discorrere della partizione dei numeri (cfr. *Introductio in analysin infinitorum*, tom. I, cap. XVI, n. 318, pag. 216. Losanna, 1748). Abbiamo poi già altre volte osservato che la partizione dei numeri corrisponde a quella con oggetti identici.

essendo

$$m=2k+\lambda\,, \qquad n=k+\lambda\,.$$

Si osservi peraltro che per qualsiasi valore intero di μ, avendosi sempre

$$(2k+\mu)-(k+\mu)<k+\mu\,,$$

si avrà anche

$$\mathrm{R}_{o_{2k+\mu},\,k+\mu}=\mathrm{R}_{o_{2k},\,k} \qquad (\mu=1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Il valore *costante* di queste infinite ripartizioni di elementi identici lo abbiamo altra volta indicato con α_k e chiamato *numero singolare*.(¹)

2°. Esprimiamo ora $\mathrm{R}_{t_{a_1},\, a_2 \ldots a_p,\, n}$ mediante ripartizioni con oggetti, che non si ripetono, in numero inferiore ad t.

Procedendo in modo analogo a quello tenuto nel 1° caso, distribuiamo anche questa volta in 2 gruppi le ripartizioni della classe n^{ma} degli oggetti (2); e, cioè, poniamo in un gruppo quelle che hanno uno degli t oggetti, ad es. a_1, solo in qualche posto e in un secondo gruppo quelle altre che non contengono a_1 mai solo nel posto in cui trovasi.

Le ripartizioni del 1° gruppo sono in numero di

$$\mathrm{R}_{(t-1)_{a_1},\, a_2 \ldots a_p,\, n-1}\,.$$

Quelle del 2° hanno, sugli $n-1$ posti che non contengono a_1, ripartita una combinazione qualsiasi rispettivamente di

$$n-1,\quad n,\quad n+1,\ldots,\quad m-2$$

oggetti diversi da a_1, ossia una combinazione qualsiasi di q oggetti $(n-1 \leqslant q \leqslant m-2)$ presi dai seguenti

$$a_2\ a_3\ \ldots\ a_t\ \underset{(1)}{a_{t+1}}\ \underset{(2)}{a_{t+1}}\ \ldots\ \underset{(\alpha_1)}{a_{t+1}}\ \ldots\ \underset{(1)}{a_{t+p}}\ \underset{(2)}{a_{t+p}}\ \ldots\ \underset{(\alpha_p)}{a_{t+p}}\,. \tag{6}$$

Ora, q oggetti qualsiasi si ripartono su $n-1$ posti, in $\mathrm{R}_{\overline{q},\, n-1}$ modi differenti, cosicchè essendo $\mathrm{C}_{(t-1)_{a_1} \ldots a_p,\, q}$ il numero delle combinazioni q a q degli oggetti (6), vi saranno in tutto

$$\mathrm{C}_{(t-1)_{a_1} \ldots a_p,\, q}\, \mathrm{R}_{\overline{q},\, n-1}$$

ripartizioni del 2° gruppo che contengono q oggetti diversi da a_1 su $n-1$ posti.

Facendo variare q da $n-1$ ad $m-2$ si ricava che la totalità delle ripartizioni del 2° gruppo è data da

$$\sum_{q=n-1}^{q=m-2} \mathrm{C}_{(t-1)_{a_1},\, a_2 \ldots a_p,\, q}\, \mathrm{R}_{\overline{q},\, n-1}$$

(¹) *Principi* ecc. *l. c.*, § I. n. 3.

ed infine si ha

$$R_{t_{\alpha_1,\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_p},\,n} = R_{(t-1)_{\alpha_1,\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_p},\,n-1} + \sum_{n=q-1}^{q=m-2} C_{(t-1)_{\alpha_1,\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_p},\,q}\, R_{\bar{q},\,n-1}\,. \quad (7)$$

Osservando che $C_{(t-1)_{\alpha_1,\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_p},\,m-1} = 1$, la formola precedente può anche scriversi:

$$R_{t_{\alpha_1,\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_p},\,n} = \sum_{q=n-1}^{q=m-1} C_{(t-1)_{\alpha_1,\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_p},\,q}\, R_{\bar{q},\,n-1}\,. \quad (7')$$

E se nella (7') si suppongono, in particolare, distinti tutti gli oggetti, allora è $t = m$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0$, e le

$$C_{(t-1)_{\alpha_1,\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_p},\,q}$$

divengono le ordinarie combinazioni fra oggetti differenti e si perviene perciò alla formola

$$R_{m,\,n} = \sum_{q=n-1}^{q=m-1} C_{m-1,\,q}\, R_{q,\,n-1}\,. \text{ (}^1\text{)} \quad (8)$$

Esempio. — Calcoliamo il valore di $R_{3_4,\,4}$. Possiamo in questo caso servirci della (4') o della (7').

Con la (7') si ha:

$$R_{3_4,\,4} = C_{2_4,\,6}\, R_{\bar{6},\,3} + C_{2_4,\,5}\, R_{\bar{5},\,3} + C_{2_4,\,4}\, R_{\bar{4},\,3} + C_{2_4,\,3}\, R_{\bar{3},\,3}\,.$$

I valori e le composizioni delle combinazioni sono dati da

$$C_{2_4,\,6} = (1)_{1,1,4}\,; \quad C_{2_4,\,5} = (1)_{1,1,3} + (2)_{1,4}\,; \quad C_{2_4,\,4} = (1)_{1,1,2} + (2)_{1,3} + (1)_4$$

$$C_{2_4,\,3} = (1)_{1,1,1} + (2)_{1,2} + (1)_3\,;$$

ed allora (²)

$$C_{2_4,\,6}\, R_{\bar{6},3} = R_{2_4,3} = 14; \quad C_{2_4,\,5}\, R_{\bar{5},3} = R_{2_3,3} + 2R_{1_4,3} = 8 + 2 . 4 = 16$$

$$C_{2_4,\,4}\, R_{\bar{4},3} = R_{2_2,3} + 2R_{1_3,3} + R_{0_4,3} = 4 + 2 . 2 + 1 = 9\,;$$

$$C_{2_4,\,3}\, R_{\bar{3},3} = R_{3,3} + 2 . R_{1_2,3} + R_{0_3,3} = 1 + 2 + 1 = 4.$$

Riassumendo:

$$R_{3_4,\,4} = 14 + 16 + 9 + 4 = 43.$$

(¹) Questa formola è data da d'Ocagne nella Memoria "Quelques propriétés des nombres $K_m^{(p)}$" (*American Journal of Mathematics*, 1891, pag. 145). Si può peraltro dedurre immediatamente dalle due formole:

$$R_{m,\,n} = n\, R_{m-1,\,n} + R_{m-1,\,n-1} \quad (1)$$

$$R_{m-1\,.\,n} = \frac{1}{n}\left[C_{m-1,\,m-2}\; R_{m-2,\,n-1} + C_{m-1,\,m-3}\; R_{m-3,\,n-1} + \ldots + C_{m-1,\,n-1}\; R_{n-1,\,n-1}\right] \quad (2)$$

sostituendo nella (1) il valore di $n\, R_{m-1,\,n}$ ricavato dalla (2). Per la seconda di queste formole si vegga anche la Nota "Le ripartizioni semplici" (*Bollettino di Matematica*, 1912).

(²) Per i primi valori di $R_{\overline{m},\,n}$ si vegga il quadro annesso in fine al presente lavoro.

3. Comportamento dei valori di $R_{t_{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p}, n}$ al variare del sistema di ripetizione degli oggetti. — Lo studio della (4') ci condurrà anche a stabilire delle norme sulla variazione dei valori di $R_{t_{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p}, n}$.

Supponiamo che la differenza fra il numero degli oggetti e quello dei posti sia eguale a d, ossia che si abbia

$$m - n = d \tag{9}$$

ed inoltre che uno degli oggetti, ad es. α_{t+1}, si ripeta in tutto $2d$ volte, in modo che sia

$$\alpha_1 = 2d. \tag{9'}$$

Dalle precedenti relazioni si ricava

$$m - \alpha_1 = n - d,$$

ossia

$$t + \alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_p = n - d.$$

Per $h < d$,

$$n - h > n - d,$$

e ricordando che è $q \geqslant n - h$, si ha a fortiori

$$q > n - d,$$

ossia

$$q > l + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p.$$

Nella (4') si avrà cosicchè in ogni caso $C_{t_{\alpha_2 \ldots \alpha_p}, q} = 0$, e saranno cioè nulli tutti i termini della sommatoria corrispondenti a valori di $h < d$.

Per $h = d$, sarà non nullo l'unico termine corrispondente al valore di $q = n - h = n - d$, che è

$$C_{\overline{n-d}, n-d} \cdot R_{\overline{n-d}, n-d} \cdot R_{\overline{d}, d} = 1.$$

Finalmente per $h > d$, per qualunque valore di $q\,(q \geqslant n - h)$ si avrà:

$$m - q - h \leqslant m - (n - h) - h,$$

ossia

$$m - q - h \lessgtr d,$$

ed a fortiori

$$m - q - h < h,$$

e sarà quindi sempre

$$R_{\overline{m-q-h}, h} = R_{t_{\alpha_1 - h \ldots \alpha_p} - \overline{q}, h} = 0.$$

Riassumendo, nelle ipotesi (9) e (9') sono nulli nella (4') tutti i termini della sommatoria, tranne però quello corrispondente alle posizioni

$$\begin{cases} h = d \\ q = n - h, \end{cases}$$

il cui valore è eguale ad 1. Si ha perciò:

$$R_{t_{(2d)_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p}, n} = R_{t_{(2d-1)_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p}, n-1} + 1. \tag{10}$$

Sulla scorta dell'analisi precedente è facile ora vedere che per

$$m-n=d\,; \qquad \alpha_1<2d$$

non sono nulli nella (4') più termini della sommatoria e che quindi per valori interi e positivi di λ compatibili con quelli di α_1 e di n, si ha:

$$\mathrm{R}_{t_{(2d-\lambda)_1,\,\alpha_2\ldots\alpha_p},\,n-\lambda}=\mathrm{R}_{t_{(2d-\lambda-1)_1,\,\ldots,\,\alpha_p},\,n-\lambda-1}+\mathrm{N} \tag{11}$$

essendo N un numero intero maggiore di 1.

Dalle (10) e (11) consegue che

$$\mathrm{R}_{t_{(2d)_1,\,\alpha_2\ldots\alpha_p},\,n}>\mathrm{R}_{t_{(2d-1)_1,\,\alpha_2\ldots\alpha_p},\,n-1}>\ldots>\mathrm{R}_{t_{(2d-r)_1,\,\ldots\,\alpha_p},\,n-r}\,,$$

avendo indicato con r il maggior valore che può assumere λ.

D'altra parte, per

$$m-n=d\,; \qquad \alpha_1>2d\,,$$

sempre nella stessa (4') sono nulli tutti i termini della sommatoria, e si ha cioè:

$$\mathrm{R}_{t_{(2d+\mu)_1,\,\alpha_2\ldots\alpha_p},\,n+\mu}=\mathrm{R}_{t_{(2d+\mu-1)_1,\,\alpha_2\ldots\alpha_p},\,n+\mu-1} \quad (\mu=1,2,3,\ldots).$$

I risultati precedenti permettono di enunciare il seguente

TEOREMA I. — *Se in* $\mathrm{R}_{t_{\alpha_1,\,\alpha_2\ldots\alpha_p},\,n}$ *il numero* m *degli oggetti ed il numero* n *dei posti variano contemporaneamente, assumendo tutti i valori interi possibili, ma in modo che resti costante la differenza*

$$m-n=d\,,$$

e se la variazione, per quanto riguarda gli oggetti, avviene nel numero di volte secondo cui si ripete uno di essi, ad es. lo h^{mo} *di quelli che si ripetono, il massimo valore che raggiunge*

$$\mathrm{R}_{t_{\alpha_1\ldots\alpha_h\ldots\alpha_p},\,n}$$

lo si ha quando $\alpha_h=2d$.

Indicando con n' *il valore di* n *corrispondente a quello di* 2d *per* α_h, *si ha precisamente:*

$$\mathrm{R}_{t_{\alpha_1\ldots(2d)_h\ldots\alpha_p},\,n'}>\mathrm{R}_{t_{\alpha_1\ldots(2d-\lambda)_h\ldots\alpha_p},\,n'-\lambda}$$

per tutti i valori di λ *compatibili con quelli di* 2d *e di* n', *e poi*

$$\mathrm{R}_{t_{\alpha_1\ldots(2d)_h\ldots\alpha_p},\,n'}=\mathrm{R}_{t_{\alpha_1\ldots(2d+\mu)_h\ldots\alpha_p},\,n'+\mu} \quad (\mu=1,2,3,\ldots).$$

Ora non potendo α_h assumere un valore inferiore a 2, il minimo valore che prende $\mathrm{R}_{t_{\alpha_1,\,\alpha_2\ldots\alpha_h\ldots\alpha_p},\,n}$ al variare simultaneo di α_h e di n è dato da $\mathrm{R}_{t_{\alpha_1\ldots(2)_h\ldots\alpha_p},\,n-(\alpha_h-2)}$, il quale non è nullo se

$$n>\alpha_h-2.$$

In quest'ultima ipotesi sono quindi diversi da zero i $2d-1$ valori distinti di $\mathrm{R}_{t_{\alpha_1\ldots\alpha_h\ldots\alpha_p},\,n}$ corrispondenti rispettivamente a quelli di $2, 3, 4, \ldots, 2d$ per α_h.

Se fosse invece

$$n = \alpha_h - q \,(q = 2, 3, \ldots, \alpha_h - 1),$$

allora diminuendo di $\alpha_h - q$ i posti e di altrettanto gli oggetti, si avrebbe:

$$R_{t_{\alpha_1, \ldots (q)_h, \ldots \alpha_p}, 0} = 0,$$

e sarebbero quindi diversi da zero solo i valori corrispondenti a quelli di $q+1$, $q+2$, ... $2d$ per α_h, e cioè in tutto questa volta $R_{t_{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p}, n}$ assumerebbe $2d - q$ valori distinti.

Si può dunque enunciare, a complemento del I, il seguente

Teorema II. — *Se nell'espressione $R_{t_{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p}, n}$ il numero degli oggetti e quello dei posti variano nelle condizioni enunciate nel Teorema I, il numero dei valori distinti che essa assume è dato da $2d-1$, se $n > \alpha_h - 2$, ed è dato da $2d - q$, se*

$$n = \alpha_h - q \,(q = 2, 3, \ldots \alpha_h - 1).$$

Tali valori propriamente costituiscono, per $n > \alpha_h - 2$, la successione:

$$R_{t_{\alpha_1, \ldots (2)_h \ldots \alpha_p}, n-(\alpha_h-2)} < R_{t_{\alpha_1 \ldots (3)_h \ldots \alpha_p}, n-(\alpha_h-3)} < \ldots$$
$$\ldots < R_{t_{\alpha_1, \ldots (2d)_h \ldots \alpha_p}, n-(\alpha_h-2d)}$$

e per

$$n = \alpha_h - q \,(q = 2, 3. \ldots, \alpha_h - 1)$$

l'altra successione

$$R_{t_{\alpha_1, \ldots (q+1)_h \ldots \alpha_p}, 1} < R_{t_{\alpha_1 \ldots (q+2)_h \ldots \alpha_p}, 2} < \ldots$$
$$\ldots < R_{t_{\alpha_1 \ldots (2d)_h \ldots \alpha_p}, 2d-q}.$$

Per completare le ricerche, rimane a considerare il caso in cui possano variare tutti i p indici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, supponendo però sempre che la variazione avvenga contemporaneamente nel numero dei posti, in modo che resti costante la differenza $m - n = d$.

È chiaro anzitutto, dopo quanto si è detto innanzi, che il massimo valore di $R_{t_{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p}, n}$ lo si ha per

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 2d,$$

e cioè, è dato da

$$R_{t_{(2d)_1, \ldots, (2d)_p}, n'}$$

avendo indicato con n' il valore di n corrispondente a quello di $2d$ per ciascuno indice.

Si ha poi, per qualsiasi valore intero o nullo di $\mu, \ldots, \eta$,

$$R_{t_{(2d)_1, \ldots, (2d)_p}, n'} = R_{t_{(2d+\mu)_1, \ldots, (2d+\eta)_p}, n'+\mu+\ldots+\eta}.$$

Tutti i valori di $R_{t_{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p}, n}$ si ottengono facendo percorrere a ciascuno dei p indici

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$$

i $2d-1$ valori

$$2,\ 3,\ \dots,\ 2d. \tag{12}$$

Se si considerano le combinazioni con ripetizione p a p dei $2d-1$ numeri (12), a ciascuna di esse, assunta come sistema di ripetizione degli oggetti nell'espressione $R_{t_{\alpha_1}\dots\alpha_p,\,n}$, corrisponderà, se compatibile con il valore di n, un ben determinato valore dell'espressione stessa. Così non può dirsi per le disposizioni con ripetizione p a p degli stessi numeri (12), poichè il valore di $R_{t_{\alpha_1}\dots\alpha_p,\,n}$ è indipendente dall'ordine nel quale si ripetono gli oggetti (n. 1). Ora, ad ognuna delle suddette combinazioni con ripetizione corrisponderà effettivamente un valore di $R_{t_{\alpha_1}\dots\alpha_p,\,n}$ se

$$n > (\alpha_1-2)+(\alpha_2-2)+\dots+(\alpha_p-2),$$

perchè in tal caso si avrebbe

$$R_{t_{(2)_1,\dots,(2)_p},\ n-[(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_p)-2p]} \neq 0,$$

e quindi differenti da zero sarebbero anche gli altri valori maggiori di questo, che è il minimo.

Se fosse invece

$$n=(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_p)-q\ [q=2p,\ 2p+1,\dots(\alpha_1+\dots+\alpha_p)-1],$$

diminuendo di $(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_p)-q$ il numero dei posti e di altrettanto il sistema di ripetizione degli oggetti, si ridurrebbero a zero i posti e rimarrebbe, per gli oggetti, un sistema di indici aventi per somma q.

Tale valore di $R_{t_{\alpha_1}\dots\alpha_p,\,n}$ sarebbe nullo e nulli sarebbero anche evidentemente i valori delle espressioni in cui la somma degli indici fosse inferiore a q.

Si perviene perciò al seguente

Teorema III. — *Se in* $R_{t_{\alpha_1},\,\alpha_2\dots\alpha_p,\,n}$ *il numero* m *degli oggetti ed il numero* n *dei posti variano contemporaneamente, assumendo tutti i valori interi possibili, ma in modo che resti costante la differenza*

$$m-n=d,$$

e se la variazione, per quanto riguarda gli oggetti, avviene negli indici

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_p,$$

il massimo valore che prende $R_{t_{\alpha_1}\dots\alpha_p,\,n}$ *lo si ha per*

$$\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_p=2d,$$

ed è dato cioè da

$$R_{t_{(2d)_1,\,(2d)_2,\dots,(2d)_p},\,n'}$$

avendo indicato con n′ *il valore di* n *corrispondente a quello di* 2d *per ciascuno dei* p *indici.*

Si ha poi:

$$R_{t_{(2d)_1,\ldots,(2d)_p},\,n'} = R_{t_{(2d-\mu)_1,\ldots,(2d+\eta)_p},\,n'+\mu+\ldots+\eta}$$

$$(\mu,\ldots,\eta = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Se è

$$n > \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p - 2p,$$

$R_{t_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p},\,n}$ *compreso il massimo, assume* $\binom{2d+p-2}{p}$ *valori distinti, corrispondenti rispettivamente ai sistemi di ripetizione degli oggetti che possono formarsi dalle combinazioni con ripetizione* p *a* p *dei* $2d-1$ *numeri*

$$2,\ 3,\ \ldots\ 2d.$$

Se è invece

$$n = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p) - q,\ [q = 2p,\ 2p+1,\ \ldots,\ (\alpha_1 + \ldots + \alpha_p) - 1]$$

sono nulli i valori di $R_{t_{\alpha_1\ldots\alpha_p},\,n}$ *corrispondenti ai sistemi di ripetizione formati dalle stesse combinazioni precedenti, ma in cui la somma di tutti i* p *indici sia eguale o inferiore a* q. *Del numero di questi sistemi bisogna diminuire* $\binom{2d+p-2}{p}$, *per avere la totalità dei valori distinti che assume questa volta* $R_{t_{\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_p},\,n}$.

Nei seguenti quadri può osservarsi la variazione di alcuni valori di ripartizioni.

$n=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9 ...
$m=3$	1	3	1						
2_2	1	5	4	1					
2_3	1	7	8	4	1				
2_4	1	9	14	9	4	1			
2_5	1	11	21	17	9	4	1		
2_6	1	13	30	29	18	9	4	1	
2_7	1	15	40	45	32	18	9	4	1
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

$n=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9 ...
$m=1_3$	1	3	2	1					
$0_{3,2}$	1	5	6	3	1				
$0_{3,3}$	1	7	11	8	3	1			
$0_{3,4}$	1	9	18	16	9	3	1		
$0_{3,5}$	1	11	26	28	18	9	3	1	
$0_{3,6}$	1	13	37	44	34	19	9	3	1
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

4. Alcuni casi notevoli di ripartizione. — Molta analogia al problema *Euleriano* della ripartizione di oggetti tutti identici, presenta il caso in cui gli oggetti distinti da ripartirsi sono 2, uno dei quali, ad es. il 1°, a_1, non si ripete, mentre l'altro, a_2, si ripete per un numero qualsiasi di volte.

Si tratta, in altri termini, di considerare le ripartizioni corrispondenti alla notazione $\mathrm{R}_{1_m, n}$.

Distinte tutte le $\mathrm{R}_{1_m, n}$ in quelle che hanno a_2 solo in qualche posto ed in quelle altre che lo stesso a_2 non contengono mai solo in alcuno dei posti, si tolga da ciascuna delle prime un posto con l'oggetto a_2 che contiene e rimangono le $\mathrm{R}_{1_{m-1}, n-1}$ ripartizioni fra i rimanenti oggetti; togliendo invece nelle seconde una sola volta a_2 da ciascuno degli $n-1$ posti che non contengono il 1° oggetto, a_1, rimangono le $\mathrm{R}_{1_{m-(n-1)}, n}$ ripartizioni fra gli oggetti rimasti. Si ha perciò:

$$\mathrm{R}_{1_m, n} = \mathrm{R}_{1_{m-1}, n-1} + \mathrm{R}_{1_{m-(n-1)}, n} \tag{13}$$

la quale formola è analoga alla (7) del n. 3, e cioè a quella di *Eulero.*[1]

Successivamente, per la stessa (13), si ottiene:

$$\left.\begin{array}{l}
\mathrm{R}_{1_{m-1}, n-1} = \mathrm{R}_{1_{m-2}, n-2} + \mathrm{R}_{1_{m-n+1}, n-1} \\
\mathrm{R}_{1_{m-2}, n-2} = \mathrm{R}_{1_{m-3}, n-3} + \mathrm{R}_{1_{m-n-1}, n-2} \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\mathrm{R}_{1_{m-(n-2)}, 2} = \mathrm{R}_{1_{m-(n-1)}, 1} + \mathrm{R}_{1_{m-n+1}, 2} \\
\mathrm{R}_{1_{m-(n-1)}, 1} = \mathrm{R}_{1_{m-n}, 0} + \mathrm{R}_{1_{m-n+1}, 1}
\end{array}\right\} \tag{14}$$

E sommando le (14) con la (13):

$$\mathrm{R}_{1_m, n} = \mathrm{R}_{1_{m-n+1}, n} + \mathrm{R}_{1_{m-n-1}, n-1} + \ldots + \mathrm{R}_{1_{m-n-1}, 1}. \tag{15}$$

Per il Teorema I del n. 4, ponendo

$$(1 + m) - n = d, \tag{16}$$

il massimo valore che raggiunge $\mathrm{R}_{1_m, n}$ (al variare simultaneo di m ed n in modo da rimanere costante la differenza (16)) è dato da

$$\mathrm{R}_{1_{2d}, n'},$$

essendo n' il valore di n corrispondente a quello di $2d$ per m.

Dalla (16), per $m = 2d$, si ricava $n' = d + 1$, dimodochè può dirsi che:

È dato da $\mathrm{R}_{1_{2d}, d+1}$ *il massimo valore che raggiunge* $\mathrm{R}_{1_m, n}$ *al variare di* m *ed* n *in modo da restare costante ed eguale a* d *il valore della differenza* $(1 + m) - n$.

---

[1] Come della (13), così anche di altre relazioni che diamo nel seguito esistono i risultati correlativi nel problema di EULERO, e già enunciati nel classico cap. XVI innanzi ricordato.

Sviluppando con la (15):

$$R_{1_{2d},\,d+1} = R_{1_d,\,d+1} + R_{1_d,\,d} + \ldots + R_{1_d,\,1} \tag{17}$$

$$R_{1_{d-1}},\,\lambda = R_{1_{d-\lambda},\,\lambda} + R_{1_{d-\lambda},\,\lambda-1} + \ldots + R_{1_{d-\lambda},\,1}\,. \tag{18}$$

Le relazioni precedenti permettono di costruire con facilità un quadro dei valori di $R_{1_m,\,n}$.

Nel seguente quadro il valore di $R_{1_m,\,n}$ è nell'incrocio della $(m-2)^{ma}$ orizzontale con la n^{ma} verticale.

	$n=1$	2	3	4	5	6	7	8	.	$d+1$
$m=1_2$	1	2	1							
1_3	1	3	2	1						
1_4	1	4	4	2	1					
1_5	1	5	6	4	2	1				
1_6	1	6	9	7	4	2	1			
7_7	1	7	12	11	7	4	2	1		
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1_d	$R_{1_d,\,1}$	$R_{1_d,\,2}$	$R_{1_d,\,3}$	.	.	.	.	.	.	$R_{1_d,\,d+1}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Tenendo presente la (17) si ha:

La somma dei termini della $(d-1)^{ma}$ *orizzontale dà il valore di*

$$R_{1_{2d},\,d+1}.$$

E per la (18):

Il valore di $R_{1_d,\,\lambda}$, *termine* λ^{mo} *della* $(d-1)^{ma}$ *orizzontale, è uguale alla somma dei primi* λ *termini dell'orizzontale* $(d-\lambda+1)^{ma}$.

Per calcolare dunque i valori dei termini di una orizzontale d'ordine qualsiasi, ad es. p^{mo}, osservisi innanzi tutto che il 1^0 è uguale sempre ad **1**, e basta poi, per ottenere i valori del 2^0 termine, del 3^0, ecc., sommare rispettivamente i primi due termini dell'orizzontale d'ordine $(p-1)^{mo}$, i primi tre di quella d'ordine $(p-2)^{mo}$. Per valori un po' grandi di d si può peraltro servirsi più utilmente della formola di ricorrenza n. 13.

Con procedimento analogo a quello tenuto per stabilire la (13) si può dimostrare la formola

$$R_{1_m,\,n} = R_{0_m,\,n-1} + R_{1_{m-1},\,n} \tag{19}$$

e da questa, procedendo poi come si è fatto per stabilire la (15), si ricava:

$$R_{1_m,\,n} = R_{0_m,\,n-1} + R_{0_{m-1},\,n-1} + \ldots + R_{0_{n-1},\,n-1}\,. \tag{20}$$

La (20) esprime $R_{1_m,\,n}$ mediante i valori relativi a ripartizioni con oggetti tutti identici, e cioè, in altri termini, mediante i *coefficienti di Eulero*.

Questo grande *Analista*, che fu primo ad occuparsi della partizione dei numeri, trovò che il valore di $R_{2_m, n}$ è dato dal coefficiente di x^m nello sviluppo della funzione razionale

$$\frac{x^n}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)}.$$

Egualmente semplice è la funzione generatrice dei numeri $R_{1_m, n}$; propriamente $R_{1_m, n}$ per $n > 1$, dà il coefficiente di x^{m+1} nello sviluppo della funzione

$$\frac{x^n}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^{n-1})}.$$

Si ha cioè:

$$\frac{x^n}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^{n-1})} =$$
$$= R_{1_{n-1}, n}\, x^n + R_{1_n, n}\, x^{n+1} + R_{1_{n+1}, n}\, x^{n+2} + \ldots.$$

Per $n = 1$, la funzione generatrice dei numeri $R_{1, n}$ è data da

$$\frac{x}{1-x}.$$

Terminiamo col rilevare che nel caso di 3 oggetti distinti, dei quali solo uno si ripeta, la relazione analoga alla (13) sarebbe espressa da

$$R_{2_m, n} = R_{2_{m-1}, n-1} + R_{2_{m-(n-2)}, n} + R_{1_{m-(n-1)}, n} - R_{1_{m-(n-2)}, n} \qquad (21)$$

e che relazioni più complesse sussistono quando gli oggetti che non si ripetono sono in numero superiore a 2.

Il valore di $R_{2_m, n}$ esprime anche il coefficiente di x^{m+2}, per $n > 2$. nello sviluppo di

$$\frac{x^n\,[(1+x)+x+x^2+\ldots+x^{n-2}]}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^{n-1})}.$$

Nei casi di $n = 1$, $n = 2$, le funzioni generatrici sono date rispettivamente da

$$\frac{x}{1-x}, \qquad \frac{x^2(1+x)}{(1-x)^2}.$$

Tavola dei primi valori di $R_{\overline{m}, n}$.

$m =$	$n=1$	2	3	4	5	6	7
1	1						
0_2	1	1					
2	1	1					
0_3	1	1	1				
1_2	1	2	1				
3	1	3	1				
0_4	1	2	1	1			
1_3	1	3	2	1			
$0_{2,2}$	1	4	3	1			
2_2	1	5	4	1			
4	1	7	6	1			
0_5	1	2	2	1	1		
1_4	1	4	4	2	1		
$0_{2,3}$	1	5	6	3	1		
2_3	1	7	8	4	1		
$2_{1,2}$	1	8	11	5	1		
3_2	1	11	16	7	1		
5	1	15	25	10	1		
0_6	1	3	3	2	1	1	
1_5	1	5	6	4	2	1	
$0_{2,4}$	1	7	10	7	3	1	
$0_{3,3}$	1	7	11	8	3	1	
2_4	1	9	14	9	4	1	
$1_{2,3}$	1	11	20	14	5	1	
$0_{2,2,2}$	1	13	26	19	6	1	
3_3	1	15	30	20	7	1	
$2_{2,2}$	1	17	39	27	8	1	
4_2	1	23	53	41	11	1	
6	1	31	90	65	15	1	
0_7	1	3	4	3	2	1	1

S. Minetola.

TEORIE INTRINSECHE DEI NUMERI RELATIVI

I. — Introduzione.

1. Fra le varie generalizzazioni del concetto di numero, i numeri frazionari e i numeri irrazionali hanno richiamato maggiormente l'attenzione degli studiosi, gli uni per la loro importanza pratica, gli altri per la loro importanza teorica.

Sono sorte così numerose teorie che considerano i numeri razionali e reali sotto svariati punti di vista. Il fiorire degli studi logico-critici sui fondamenti della matematica ha dato un grande impulso alla formulazione di queste teorie.

Le varie teorie relative ai razionali possono dividersi in tre gruppi principali.

a) **Teorie formali.** — Introducono le frazioni come enti necessari a render possibile in ogni caso la sottrazione (1ª teoria), o come coppie d'interi (2ª) [Stolz-Tannery].

b) **Teorie genetiche-analitiche.** — Danno una definizione nominale delle frazioni, senza ricorrere a concetti estranei alla logica e all'aritmetica. Tralasciando il metodo difettoso che considera le frazioni come somme di parti aliquote di 1 (3ª); si hanno le seguenti teorie:

4ª Le frazioni come operatori su numeri (Méray-Peano);

5ª Le frazioni come relazioni fra coppie d'interi (Russell-Mineo);

6ª Le frazioni come classi di coppie (Padoa);

7ª Le frazioni come classi di operazioni (Bindoni).

c) **Teorie genetiche-sintetiche.** — Danno una definizione nominale delle frazioni, ma ricorrono a concetti estranei all'aritmetica, in generale al concetto di grandezza. Qui si hanno le teorie:

8ª Le frazioni come operatori su grandezze (Burali-Forti);

9ª Le frazioni come sistema di simboli biunivocamente corrispondente a una classe razionale di grandezze (Bettazzi);

10ª Le frazioni come simboli atti a esprimere il valore degli aggregati (Capelli).

2. Fra queste 10 teorie meritano sotto l'aspetto logico particolare considerazione le *teorie intrinseche*, cioè quelle che conservano al segno $=$ il significato logico di identità. Esse sono tre e cioè:

a) Quella che considera le frazioni come relazioni fra numeri interi. Questa teoria accennata in poche righe dal Russell, *The principles of Mathematics*, pp. 149-50, e dal Couturat, *Les principes des Mathèmatiques*, pp. 79-80; è stata svolta dal prof. C. Mineo in questo *Periodico*, "I numeri razionali secondo Bertrand Russell", Anno XXV, fasc. V.

b) La teoria che considera le frazioni come classi di coppie. È quella che fu esposta dal prof. A. PADOA nella lezione premiata durante il II Congresso di " Mathesis ".

c) La teoria che considera le frazioni come classi di operazioni. Questa teoria che si ricava da quella degli operatori di Peano col trasformare la definizione per postulati in definizione nominale, è stata accennata dal prof. A. BINDONI in un articolo " Sui numeri razionali ", pubblicato sul *Bollettino di matematica*, Anno IX, nn. 8-9-10.

3. Per i numeri relativi si possono costruire altrettante teorie analoghe alle precedenti, eccettuata la teoria che considera le frazioni come somme di parti aliquote dell'unità.

Lo scopo del presente scritto è di mostrare appunto come si possano stabilire anche per i relativi delle teorie intrinseche simili a quelle ricordate.

II. — La teoria relativista dei numeri relativi.

4. Cominciamo dalla teoria che si basa sul concetto di relazione, e premettiamo perciò alcune nozioni riguardo a questo concetto.

PROPOSIZIONE 1. — La *relazione* è un'idea primitiva. (1)

DEFINIZIONE 1. — Se x, y sono due enti qualunque, il simbolo $x\mathrm{R}y$ si legge *x ha con y la relazione* R, x si dice *antecedente*, *y conseguente* della R; l'insieme degli antecedenti si dice *dominio*, l'insieme degli antecedenti e dei conseguenti si dice *campo* della R.

PROPOSIZIONE 2. — Se R è una relazione $x\mathrm{R}y$ *è una proposizione*, per tutte le coppie di valori x, y (vera per alcune, falsa per altre).

PROPOSIZIONE 3. — *Ogni relazione* R *ammette un'unica inversa* $\overline{\mathrm{R}}$.

Esempî: La relazione $>$ ha per inversa $<$, la relazione *è padre* ha per inversa *è figlio*, ecc.

PROPOSIZIONE 4. — *Principio di identità per le relazioni*: Dati due individui x, y, vi è fra essi almeno una relazione che non esiste fra nessuna altra coppia d'individui.

DEFINIZIONE 2. — *Inclusione fra relazioni*: Una relazione R_1 si dice contenuta un'altra R_2, quando da $x\mathrm{R}_1y$ segue $x\mathrm{R}_2y$:

$$\mathrm{R}_1 \supset \mathrm{R}_2 :=: x\mathrm{R}_1y \,.\supset_{x,y}.\, x\mathrm{R}_2y.$$

DEFINIZIONE 3. — *Uguaglianza:*

$$\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2 :=: \mathrm{R}_1 \supset \mathrm{R}_2 \,.\, \mathrm{R}_2 \supset \mathrm{R}_1 .$$

Due relazioni si dicono uguali quando ciascuna di esse sussiste fra tutte le coppie di enti fra le quali sussiste l'altra.

---

(1) A. PADOA ha definito la relazione e ha dimostrato le proposizioni primitive ad essa relative " Che cos'è una Relazione? ", *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 1905-906, ma noi per semplicità seguiamo il RUSSELL.

DEFINIZIONE 4. — Date due relazioni R_1, R_2, chiameremo ***prodotto relativo*** di esse, e lo indicheremo con $R_1 * R_2$, la relazione che vi è fra x e z quando xR_1y e yR_2z.

Esempî: La relazione ***zio*** è il prodotto relativo di *fratello* e *padre*.

Il prodotto relativo in generale non è *commutativo*; per es.: padre del fratello, non è lo stesso che fratello del padre.

DEFINIZIONE 5. — Si dice ***potenza*** di una relazione il prodotto relativo di due o più relazioni identiche a essa.

Il numero delle relazioni che figurano nel prodotto si dice *esponente*. La potenza n^{ma} di una relazione R si indica con R^n.

Si pone anche:

$$R^0 = \overline{R^0} = 1 \qquad \text{(identità)}$$
$$R^1 = R.$$

5. Classifica delle relazioni. — DEFINIZIONE 6. — Una relazione si dice *simmetrica* quando è uguale all'inversa.

Esempî: Uguale, fratello, ecc.

Si dice *non simmetrica* se non è sempre uguale all'inversa, *asimmetrica* se non lo è mai; per es.: $>$, *padre*, ecc.

DEFINIZIONE 7. — Una relazione R si dice *transitiva* se è uguale al suo quadrato relativo.

Esempî: $=$, $>$, $<$.

Una relazione di cui il quadrato non sia sempre, o non sia mai, uguale alla relazione stessa si dice rispettivamente *non transitiva* e *intransitiva*.

DEFINIZIONE 8. — Diremo che la relazione è *univoca* quando a ogni antecedente corrisponde un conseguente e uno solo, cioè si ha:

$$xRy \,.\, xRz :\supset: y \equiv z.$$

La diremo *reciproca* se è univoca la sua inversa, *biunivoca* quand'è univoca e reciproca.

6. Ciò posto supponiamo data la serie N_0 dei numeri interi:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \ldots$$

Fra ogni numero di questa serie e il successivo esiste una relazione ben determinata che si suole esprimere dicendo che il primo numero *precede* il secondo. Indicando tale relazione con P e il successivo di un numero a con $a + 1$, avremo:

$$aPb \,.\!=\!.\, b = a + 1. \qquad \text{(Def.)}$$

Fra b e a sussiste allora la relazione inversa $\overline{P}$ che si indica dicendo b *segue* a; ossia si ha:

$$b\overline{P}a \,.\!=\!.\, b = a + 1.$$

Diremo che fra due numeri N_0, a, b, esiste la relazione P^m quando b segua a di m posti nelle serie I, cioè porremo:

$$aP^m b \, .=. \, b = a + m \qquad \text{(Def.)} \tag{1}$$

dove segue:

$$b\overline{P^m}a \, .=. \, b = a + m. \tag{2}$$

7. Siano adesso c, n altri due N_0 tali che:

$$cP^n b \, .=. \, b\overline{P^n}c \, .=. \, b = c + n. \tag{3}$$

Fra a e c sussisterà allora una relazione che è il prodotto relativo delle due P^m, $\overline{P^n}$, ossia da (1), (3) segue la proposizione:

$$aP^m{}_*\overline{P^n}c. \tag{4}$$

Reciprocamente dalla (4) segue $a + m = c + n = b$.

Infatti se ha luogo la (4) esiste [4, Def. 4] un numero x tale che si ha simultaneamente: $aP^m x$, $x\overline{P^n}c$, ossia per le (1), (2) e (3):

$$x = a + m, \qquad x = c + n,$$

donde la tesi.

Si può scrivere pertanto:

$$aP^m{}_*\overline{P^n}c \, .=. \, a + m = c + n. \tag{5}$$

8. La relazione $P^m{}_*\overline{P^n}$ è perfettamente determinata dai numeri m, n, inoltre se $n = 0$ coincide con P^m, se $m = 0$ con $\overline{P^n}$ [4, Def. 5].

Al simbolo $P^m{}_*\overline{P^n}$ sostituiremo quello più semplice ed espressivo $n - m$, che leggeremo n meno m; e chiameremo *rapporto aritmetico* la particolare relazione che esso rappresenta. Il numero n si dice *primo termine* o *antecedente* del rapporto, m si chiama *secondo termine* o *conseguente*.

Porremo dunque:

$$P^m{}_*\overline{P^n} = n - m \qquad \text{(Def.)} \tag{6}$$

e quindi

$$P^m = 0 - m, \qquad \overline{P^n} = n - 0 \tag{7}$$

e la (5) diverrà:

$$a\,(n - m)\,c \, .=. \, a + m = c + n, \tag{8}$$

" Dire che fra a e c vi è il rapporto aritmetico $n - m$, equivale a dire che $a + m = c + n$ ".

9. Teorema. — Se h è un N_0, $n - m$ e $(n + h) - (m + h)$ rappresentano rapporti uguali, cioè si ha:

$$n - m = (n + h) - (m + h). \tag{9}$$

Infatti se x, y è una coppia di numeri tali che $x\,(n - m)\,y$, si ha per la (8)

$$x + m = y + n$$

e quindi

$$x + m + h = y + n + h,$$

e poichè:

$$x+m+h=y+n+h\,.=.\,x([n+h]-[m+h])\,y,$$

si vede che fra x e y sussiste anche il rapporto:

$$([n+h]-[m+h]).$$

Reciprocamente si dimostra che se x, y è una coppia di numeri tali che $x([n+h]-[m+h])\,y$, fra x e y vi è anche il rapporto $n-m$ e quindi si conclude [4, Def. 3] che le relazioni $n-m$, $(n+h)-(m+h)$ sono identiche.

10. In virtù della (9) potremo sempre trasformare un rapporto aritmetico in un altro avente un termine uguale a zero (*rapporto ridotto*). I rapporti aritmetici della forma $h-0$ li diremo *numeri positivi*, quelli della forma $0-k$ *numeri negativi*; complessivamente *numeri relativi*.

Questi numeri possono anche rappresentarsi più semplicemente, sottointendendo il termine 0, con $h, -k$ rispettivamente.

Quando interessi distinguere i numeri positivi degli interi, si può premettere loro il segno $+$. Si hanno così le ordinarie notazioni dei numeri con segno.

11. Condizione necessaria perchè sussista la proposizione $x(n-m)y$ quando $n-m$ è un rapporto ridotto è che sia:

$$x=n+k, \qquad y=m+k,$$

dove k è un certo intero.

Infatti per la (8) si ha:

$$x+m=y+n.$$

Ora se $m=0$, essendo

$$x=n+y, \qquad y=m+y,$$

la proporzione è vera $(k=y)$; se poi $n=0$, essendo

$$y=m+x, \qquad x=n+x$$

la proporzione è pure vera $(k=x)$.

Corollario. — Da questo teorema e da quello del n. 9 segue che: se $n-m$ è un rapporto ridotto, da $x(n-m)y$ si deduce $n-m=x-y$.

12. Teorema. — Criterio di uguaglianza di due rapporti:

$$n-m=q-p \leftrightharpoons .\, n+p=m+q. \tag{10}$$

Infatti se $n-m=q-p$, qualunque siano x, y, se fra essi sussiste il rapporto $n-m$, sussiste anche $q-p$ e reciprocamente, quindi per la (8) si ha

$$x+m=y+n, \qquad x+p=y+q$$

nello stesso tempo.

Sommando membro a membro, dopo aver invertito la prima uguaglianza, e riducendo si ha:

$$n+p=m+q.$$

Dunque la condizione è necessaria.

Dalla $n+p=m+q$ segue poi per la (8):

$$q\,(n-m)\,p. \tag{11}$$

Ora se $n-m$ è ridotto si ha (n. 11) $n-m=q-p$, se $n-m$ non è ridotto sia $n'-m'$ il rapporto ridotto ad esso uguale. Avremo per la (11) $q\,(n'-m')\,p$ e quindi per il Corollario precedente:

$$q-p=n'-m'=n-m. \qquad \text{(c. d. d.)}$$

13. Disuguaglianza. - Operazioni. — Arrivati a questo punto non vi è di meglio a fare che seguire i metodi formali. [1]

Definiremo pertanto la disuguaglianza, la somma e il prodotto dei rapporti nel modo seguente:

$$n-m \gtreqless q-p \,.=.\, n+p \gtreqless m+q \tag{12}$$
$$(n-m)+(q-p)=(n+q)-(m+p) \tag{13}$$
$$(n-m)\,(q-p)=(nq+mp)-(np+mq). \tag{14}$$

Da queste definizioni seguono le note regole delle operazioni, quando si adotti la notazione ridotta (n. 10).

Le proprietà formali si stabiliscono senza difficoltà. La sottrazione e la divisione si considerano al solito come operazioni inverse.

14. I numeri interi positivi e negativi si sono introdotti indicando con $+n$ l'operazione che corrisponde alla relazione $\overline{P}^n$, e con $-m$ quella che corrisponde alla relazione P^m, ossia indicando con $+n$, e con $-m$ le operazioni di avanzare di n posti o di retrocedere di m posti nella serie:

$$\ldots, -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

In modo analogo si possono introdurre i razionali positivi e negativi come operazioni sui razionali assoluti. Avendo definito a suo tempo la disuguaglianza e l'addizione dei razionali assoluti, si sa che se la frazione a è minore di b esiste una frazione c tale che:

$$a+c=b.$$

La frazione positiva $+c$ indicherà l'operazione colla quale da a si passa a b, e la frazione $-c$ l'operazione inversa colla quale da b si passa ad a. [2]

---

(1) MINEO, *art. cit.*, p. 236. — PADOA, *art. cit.*, n. 7.
(2) L. COUTURAT, *op. cit.*, pag. 80.

Non è difficile determinare le relazioni corrispondenti a queste operazioni. Se le frazioni a, b hanno lo stesso denominatore n, tali relazioni non differiscono da quelle sopra considerate per i relativi interi, perchè si tratterà in ogni caso di avanzare o retrocedere nella serie delle frazioni di denominatore n.

III. — I relativi come classi di coppie.

15. Conveniamo di indicare con lettere a, b, c, i numeri razionali assoluti che già conosciamo e con ciascuna scrittura del tipo (a, b) una coppia di tali numeri, che per brevità diremo *coppia* senz'altro.

Poniamo quindi la

DEFINIZIONE. — a_1, b_1 *è proporzionale aritmeticamente ad* a_2, b_2 *quando:*

$$a_1 + b_2 = a_2 + b_1. \tag{1}$$

La relazione di proporzionalità aritmetica così definita è *riflessiva, simmetrica, transitiva.*

Infatti:

1) $a_1 . b_1$ è proporzionale aritmeticamente ad a_1, b_1, perchè $a_1 + b_1 = a_1 + b_1$ per la proprietà riflessiva dell'uguaglianza.

2) Se

a_1, b_1 è proporzionale aritmeticamente ad a_2, b_2,

anche

a_2, b_2 " " " " " a_1, b_1,

perchè ciò equivale a dire che se $a_1 + b_2 = a_2 + b_1$ allora $a_2 + b_1 = a_1 + b_2$ e questo è vero per la proprietà simmetrica dell'uguaglianza.

3) Se

a_1, b_1, è aritmeticamente proporzionale ad a_2, b_2,

e

a_2, b_2, " " " " " " a_3, b_3,

allora

a_1, b_1, " " " " " " a_3, b_3,

Infatti essendo per ipotesi:

$$a_1 + b_2 = a_2 + b_1, \qquad a_2 + b_3 = a_3 + b_2,$$

sommando membro a membro si ha:

$$a_1 + b_2 + a_2 + b_3 = a_2 + b_1 + a_3 + b_2$$

ossia:

$$a_1 + b_3 = a_3 + b_1.$$

16. Ciò premesso, data una coppia a, b stabiliamo di rappresentare colla scrittura $a - b$ che si legge: a meno b, *l'insieme delle coppie aritmeticamente proporzionali ad* a, b.

Si ha il teorema (Criterio di uguaglianza):
La condizione necessaria e sufficiente perchè sia

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2 \tag{2}$$

è che a_1, b_1 sia aritmeticamente proporzionale ad a_2, b_2, cioè (1)

$$a_1 + b_2 = a_2 + b_1.$$

1) La condizione è necessaria. Infatti per la proprietà riflessiva della proporzionalità, la coppia a_1, b_1, appartiene ad $a_1 - b_1$ quindi per l'ipotesi anche ad $a_2 - b_2$, cioè è proporzionale ad a_2, b_2.

2) La condizione è sufficiente. Infatti se a_1, b_1 è proporzionale aritmeticamente ad a_2, b_2, una coppia qualunque a_3, b_3 proporzionale ad a_1, b_1 è anche proporzionale (per la proprietà transitiva della proporzionalità) ad a_2, b_2 e reciprocamente, onde si vede che $a_1 - b_1$ ed $a_2 - b_2$ rappresentano lo stesso insieme di coppie, cioè:

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2.$$

Se chiamiamo *numero relativo* ogni simbolo della forma $a_1 - b_1$ si è così dimostrato il noto criterio di uguaglianza dei relativi nelle teorie formali.

17. Da questo criterio di uguaglianza si deduce subito che:

$$(a + m) - (b + m) = a - b \tag{3}$$

$$(a - m) - (b - m) = a - b. \tag{4}$$

La (4) permette di trasformare ogni numero relativo in un relativo uguale avente un termine nullo. Basta perciò sottrarre da ambo i termini del relativo il minore dei due. I numeri relativi $a - b$, si possono pertanto distinguere in 3 categorie:

1) per $a = b$ si ha $a - b = 0 - 0$,
2) „ $a > b$ „ $a - b = a - b,\ 0$,
3) „ $a < b$ „ $a - b = 0,\ b - a$.

I numeri della prima categoria, tutti uguali fra loro, li chiameremo *zero relativo* e li indicheremo brevemente con 0; quelli della seconda li diremo *numeri positivi*, e, ponendo $a - b = p$, li indicheremo brevemente con p (o anche $+p$ per distinguerli dai numeri assoluti), quelli della terza li diremo *negativi* e li indicheremo brevemente con $-p$ (ponendo $p = b - a$).

È facile poi dal criterio generale del n. 16 dedurre i criteri particolari di uguaglianza noti per i relativi.

La disuguaglianza si può definire con la formula:

$$a_1 - b_1 \gtreqless a_2 - b_2 . = . a_1 + b_2 \gtreqless a_2 + b_1 .$$

Quanto alle operazioni dirette si possono definire convenzionalmente con quelle stesse formule che ne esprimono le regole pratiche: (n. 13).

IV. — I relativi come classi di operazioni.

18. Si può avere infine una teoria intrinseca dei numeri relativi anche partendo dal concetto di *operatore*. In quest'ordine d'idee un *relativo* $a - b$ sarà da riguardarsi come *il concetto che si forma per astrazione dalla considerazione delle operazioni composte delle due* $+ a$, $- b$, *applicate a numeri interi o razionali convenienti,* [1] *ma del resto qualunque.*

Tale *concetto* in estensione può definirsi come *la classe di tutte le operazioni* x (che trasformano R in R) *tali che: 1° esista un* R, y *tale che* y + a — b *sia ancora un* R *e* y + x = y + a — b: *2° se* u *e* u + a — b *sono degli* R *si abbia* u + x = u + a — b.

In simboli:

$$a, b \varepsilon \mathrm{R} \,.\, \supset :\, a - b = \mathrm{R}, \mathrm{R} \frown x \bar{\varepsilon}\, [1^{\circ}\, \exists \mathrm{R} \frown y \bar{\varepsilon}\, (y + a - b)\, \varepsilon \mathrm{R} \,.\, y + x = \\ = y + a - b \,.\, 2^{\circ}\, u \varepsilon \mathrm{R} \,.\, u + a - b\, \varepsilon \mathrm{R} \,.\, \supset .\, u + x = u + a - b]; \text{ [2]}$$

o più semplicemente:

$$a, b \varepsilon \mathrm{R} \,.\, \supset :\, a - b = \mathrm{R}, \mathrm{R} \frown x \bar{\varepsilon}\, [\exists \mathrm{R} \frown y \bar{\varepsilon}\, (y + a - b)\, \varepsilon \mathrm{R} \,.\, y + x =_{y} y + a - b].$$

Dopo ciò la classe dei relativi r si definisce così:

$$r = x \bar{\varepsilon}\, [\exists\, (a, b)\, \bar{\varepsilon}\, (a, b \varepsilon \mathrm{R} \,.\, x = a - b)].$$

19. Per dare un saggio anche di questa teoria dimostreremo il *criterio di uguaglianza:*

$$a - b = c - d \,.=.\, a + d = b + c.$$

1) Sia $a - b = c - d$ ed x un'operazione appartenente ad entrambi i relativi, allora prendendo come valore di y, $b + d$ (che conviene al nostro caso) si ha:

$$(b + d) + (a - b) = b + d + x, \qquad (b + d) + (c - d) = b + d + x$$

cioè:

$$(b + d) + (a - b) = (b + d) + (c - d)$$

e infine:

$$a + d = b + c.$$

2) Sia $a + d = b + c$ ed x un'operazione appartenente ad $a - b$. Avremo allora:

$$(b + d) + a - b = (b + d) + c - d \quad \text{e} \quad (b + d) + a - b = (b + d) + x,$$

onde:

$$(b + d) + c - d = (b + d) + x. \tag{α}$$

---

[1] A numeri n tali cioè che da $a + n$ si possa sottrarre b.

[2] Scrivo per chiarezza $\bar{\varepsilon}$ $\bar{\iota}$ in luogo dei simboli del Formulario $\ni$, $\imath$.

D'altra parte se u è un qualunque altro R tale che $u+c-d$ sia pure un R, si ha:

$$u+c-d=(u+c-d)+a+d-b-c=u+a-b=u+x,$$

ossia:

$$u+c-d=u+x. \tag{β}$$

Da (α) e (β) segue che l'operazione x appartiene a $c-d$, e poichè analogamente si dimostra che ogni operazione appartenente a $c-d$ appartiene anche ad $a-b$ si ha la tesi:

$$a-b=c-d.$$

V. — Considerazioni critiche e didattiche.

20. È diventato uso generale di tutti coloro che espongono qualche nuovo metodo per i fondamenti dell'aritmetica, quello di celebrare il metodo stesso sotto l'aspetto scientifico e sotto l'aspetto didattico. Seguendo quest'uso, dovrei anch'io mettermi a dimostrare adesso che le teorie intrinseche che ho abbozzato, sono preferibili ad ogni altra sotto l'aspetto scientifico, o *almeno non più difficili delle ordinarie* sotto l'aspetto didattico.

Preferisco francamente risparmiare al lettore questa noia, tantopiù che di questa eccellenza, soprattutto didattica, dubito assai io stesso.

Poichè, per esser chiaro ed esplicito, io convengo col prof. Burali-Forti quando asserisce che: *dell'* $=$ *ne è dato il significato, una volta per tutte e per tutti gli enti, dalla definizione di Leibniz*; $\mathrm{x}=\mathrm{y}$ *solo quando, qualsiasi proprietà di* x *è altresì proprietà di* y; (1) e convengo anche col prof. A. Padoa quando aggiunge che per conseguenza: *due frazioni* $\frac{\mathrm{a}_1}{\mathrm{b}_1}$, $\frac{\mathrm{a}_2}{\mathrm{b}_2}$, *tali che* $\mathrm{a}_1\mathrm{b}_2=\mathrm{a}_2\mathrm{b}_1$, *potranno dirsi equivalenti, ma eguali non potranno dirsi, se non si vuole costringere il linguaggio a dire quanto non può e non deve*; (2) ma sono anche pienamente d'accordo col prof. Bindoni quando osserva che: " La storia della matematica e le pratiche applicazioni che si fanno delle frazioni ci assicurano che la frazione è un'operazione da eseguire su grandezze, e quindi per le frazioni interessa la loro equivalenza e non la loro uguaglianza logica ". (3) Questa considerazione vale anche per i relativi, anzi a maggior ragione, perchè l'ordinario criterio di uguaglianza: " Due relativi sono uguali quando hanno ugual valore assoluto e ugual segno ", si ricollega direttamente al concetto logico di uguaglianza fra numeri assoluti, senza bisogno di ricorrere a teorie intrinseche.

---

(1) Burali-Forti, " Sulle definizioni mediante coppie ", *Bollettino di matem.*, Anno VIII, pag. 241.
(2) A. Padoa, *art. cit.*, pag. 71.
(3) A. Bindoni, " I numeri razionali ", *cit.*, pag. 207. — Mi consta che il chiarissimo professore Enriques è della stessa opinione.

Pertanto io ritengo che le teorie intrinseche abbiano un grande valore logico, ma che non convenga introdurle nella scuola appunto per questa loro perfezione logica. La facoltà d'astrazione e la facoltà raziocinatrice della nostra intelligenza va affinandosi coll'esercizio, e non si può presentare ai ragazzi delle nostre scuole, che sono alle prese colle prime difficoltà della matematica, una teoria costituita a posteriori coi risultati di studi secolari.

A. Natucci.

PICCOLE NOTE

Un'applicazione delle formule di Girard. — Se identicamente

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)$$

ed $a_r = 0$ quando $r > n$ ed

$$s_r = \alpha_1^r + \alpha_2^r + \ldots + \alpha_n^r,$$

allora identicamente

$$s_m + a_1 s_{m-1} + a_2 s_{m-2} + \ldots + a_{m-1} s_1 + m a_m = 0$$

per cui, se $(-1)^r a_r$ è somma dei prodotti delle quantità $0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ad r ad r ed s_m è somma delle potenze m^{me} delle medesime quantità, allora identicamente

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots a_{m-1} & m a_m + s_m \\ 1 & a_1 & a_2 \ldots a_{m-2} & (m-1) a_{m-1} \\ 0 & 1 & a_1 \ldots a_{m-3} & (m-2) a_{m-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 & a_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ponendo $-y$ e b per a_1 ed s_m s'ottiene un'equazione di grado m in y che ha radici date dalla formula

$$y = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son determinate dal sistema d'equazioni

$$\alpha_1^m + \alpha_2^m + + \ldots + \alpha_n^m = b, \qquad \Sigma \alpha_1 \alpha_2 = a_2,$$
$$\Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -a_3, \ldots, \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} = (-1)^{n-1} a_{n-1}, \qquad \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = (-1)^n a_n.$$

Per il caso particolare

$$n = 2, \qquad a_2 = q$$

si riconosce così che le m radici sono date dalla formula

$$y = \alpha + \beta$$

dove α e β son determinate dalle due equazioni

$$\alpha^m + \beta^m = b, \qquad \alpha\beta = q$$

cioè si riconosce che: [1]

[1] V. Serret. *Algèbre supérieure*, t. I, p. 450. Paris. 1885. — G. Candido. *La formula di Waring e sue notevoli applicazioni*, p. 38. Tipografia editrice Salentina. Lecce, 1903.

Le m *radici dell'equazione*

$$y^m - my^{m-2}q + \ldots + (-1)^r \frac{m}{r}\binom{m-r-1}{r-1} y^{m-2r}q^r + \ldots = b$$

sono date dalla formula

$$y = \alpha + \frac{q}{\alpha},$$

dove

$$\alpha = \sqrt[m]{\frac{b + \sqrt{b^2 - 4q^m}}{2}},$$

ossia

$$\alpha = \sqrt[m]{\frac{b + \lambda}{2}},$$

e λ *è una qualunque delle due radici quadrate di* $b^2 - 4q^m$.

F. GIUDICE.

BIBLIOGRAFIA

Dott. RINALDO PITONI, *Storia della Fisica*. S. T. E. N.. Torino, 1913.

Quando nel 1911 il prof. R. PITONI pubblicò coi tipi della S. T. E. N. la *Storia della Chimica* di Sir EDOARDO THORPE, fece opera utile per avere con tanta chiarezza volgarizzato dei concetti che facevano ben apprezzare lo sviluppo, lento ma proficuo, degli studi sulla tramutazione della materia fatto dagli alchimisti dapprima e giù giù fino ai moderni scopritori degli ultimi elementi radioattivi.

La esposizione chiara e ben ordinata rese piacevole la lettura del bel volume, che suscitò nei lettori vivo il desiderio di poter leggere al più presto anche una *Storia della Fisica*. Ed ecco che ora la speranza si realizza e la collezione della *Storia delle Scienze*, edita con tanta diligenza dalla S. T. E. N., si arricchisce di quest'altro nuovo volume.

La fisica come tutti sanno è la disciplina più vasta e più importante della cultura moderna; conoscere la storia di essa è utile non solo agli scienziati ma anche a coloro che amano aumentare il proprio sapere. Perciò non solo ai fisici, ma anche agli studiosi in genere dovrà tornare di sommo gradimento la lettura della *Storia della Fisica* scritta con sobrietà di linguaggio, con chiarezza di vedute, con sintesi sicura, dal chiaro prof. RINALDO PITONI, preside del R. Liceo di Massa.

Colla lettura di questo prezioso volume si correggono le proprie nozioni su scoperte d'invenzioni che comunemente sono attribuite agli uni piuttosto che agli altri, perchè è raro che ogni singolo individuo si possa occupare di verificare. con documenti originali alla mano, la verità dei fatti.

Cosicchè troviamo in questo nitido ed elegante volume delle preziose osservazioni sull'invenzione dell'orologio a pendolo; sul *cavaliere* della bilancia, rivendicato ai Romani (od ai loro maestri), sul *Sunto dell'ottica di Tolomeo* fatto da G. B. Venturi che nessuno storico della scienza più cita; sulla ruota del Savart rivendicata al bolognese Vittorio Stancari; sulla scoperta delle leggi del moto fatta dal Galilei, le di cui esperienze in proposito ben pochi ricordano; su molte cose dell'Accademia del Cimento; sui lavori del Pistoj di Siena a conferma delle osservazioni del Newton in riguardo alla trasformazione dell'energia luminosa in termica; sulle esperienze del Morosi, che precederono quelle del Mayer e del Joule sulla trasformazione del lavoro meccanico in calore; ecc., ecc.

In questa opera storica coscienziosa e metodica sono citati i più noti scienziati nostri senza ombra di esagerazione e vi si trovano delle pagine bellissime che devono essere costate non poca fatica all'A. per lunghe e laboriose ricerche.

Da una calma e completa lettura di questa opera di volgarizzazione ci siamo convinti che nulla di meglio è stato fino ad ora fatto in Italia, nè all'Estero pel metodo e per lo spirito acuto di osservazione.

Perciò la raccomandiamo caldamente ai giovani e, . . . lo diciamo pure francamente, anche ai non giovani.

Prof. Vittorio Boccara.

Zoretti. — *Leçons de mathématiques générales.* Avec une Préface de P. Appel. Paris, Gauthier-Villars, 1914.

Questo libro pubblicato in elegante veste tipografica dalla nota casa editrice Gauthier-Villars, non è precisamente destinato ai matematici puri, ma a tutti coloro (e sono il maggior numero) per i quali le matematiche sono un mezzo e non un fine.

L'illustre decano della facoltà di scienze di Parigi, prof. Appel, così lo presenta ai lettori:

« È un fatto ben conosciuto che il baccalaureato, considerato dal punto di vista « scientifico, malgrado la sua pretensione di essere il primo grado dell'insegna- « mento superiore, non è nemmeno un certificato di capacità a ricevere questo « insegnamento ».

« Un baccelliere non è capace di seguire i corsi di calcolo differenziale e di « calcolo integrale, nè quelli di meccanica razionale e di astronomia, nè quelli di « fisica generale, e nemmeno quelli di chimica generale per poco che il profes- « sore voglia dare qualche nozione di energetica ».

« Per colmare questa lacuna, le facoltà di scienze hanno dovuto creare un « insegnamento preparatorio allo studio delle scienze matematiche e delle scienze « fisiche, insegnamento sanzionato da un certificato di studi superiori di matema- « tiche generali e preparatorie. . . ».

« L'insegnamento nuovo, già organizzato in tutte le facoltà di scienze ha atti- « rato un gran numero di studenti, i quali hanno dovuto riconoscere che una base « matematica solida è indispensabile ad ogni studio scientifico serio, teorico o « pratico. Futuri matematici, futuri fisici, futuri ingegneri elettricisti, meccanici « o chimici, conduttori di ponti e strade, giovinette che si dedicano all'insegna- « mento pubblico, si formano ai corsi di matematiche generali. Le materie di « questo nuovo insegnamento sono imposte dalla natura delle cose. Sono le ma- « terie dei corsi di matematiche speciali, insegnate con maggiore elevazione e « flessibilità, con maggior numero di applicazioni e di esercizî numerici, senza la

" preoccupazione di concorsi artificiali in vista dei quali, come diceva Giuseppe " Bertrand, si *prepara* invece di *istruire* „.

E dopo aver detto che altri trattati di matematiche generali sono stati già pubblicati, e che il prof. Zoretti (ben noto per le sue sapienti ricerche sulla teoria delle funzioni) era particolarmente indicato per scrivere un libro di questo genere in ragione delle sue attitudini personali e della pratica fatta insegnando nei licei e nelle università, aggiunge:

" Ecco come egli ha concepito l'insegnamento delle matematiche generali nelle " facoltà. Quest'insegnamento si dirige ad un pubblico vario per le sue origini, per " la sua mentalità, per i suoi bisogni e per i suoi destini; fra gli uditori si tro- " vano futuri ingegneri, studenti di scienze sperimentali uscenti in generale dal " Liceo, giovinette munite del diploma di compimento degli studi secondari e gio- " vani usciti dall'insegnamento primario che si dedicano al professorato, candidati " ai gradi delle Scuole di farmacia, delle facoltà di medicina ed anche delle facoltà " di legge. Il libro deve dunque non sacrificare alcuna di queste categorie, e questa " condizione è difficile a realizzarsi, perchè le conoscenze utili agli uni e agli altri " differiscono per l'estensione e per la loro natura. Il signor Zoretti ha risoluto " la quistione trattando il programma *maximum*, ma in maniera che i diversi " capitoli siano indipendenti gli uni dagli altri quanto è possibile „.

In base a questi concetti l'autore ha procurato di scansare le difficoltà di carattere teorico, ricorrendo spesso alla intuizione e ad immagini concrete, ed ha sacrificate le teorie generali che non hanno applicazioni in fisica e in meccanica, pur conservando quel giusto rigore senza del quale qualsiasi insegnamento matematico è privo di efficacia. Ha poi curato la scelta degli esercizi in guisa che essi non costituiscano un complemento di teoria, ma servano ad abituare i giovani a bene applicare le teorie svolte.

Per dare idea esatta del contenuto del libro, dopo di aver parlato dei criteri ai quali esso è informato, riproduciamo l'indice delle materie.

K.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 17 Gennaio 1914.

SU ALCUNE NOTEVOLI FORMOLE DI ANALISI COMBINATORIA

Mi propongo in questa breve nota di dimostrare alcune formole che permettono di trasformare la somma dei prodotti dei termini di una progressione aritmetica per numeri che si ottengono dal noto simbolo $\binom{m}{n}$ diminuendo od aumentando di una, due, ... unità od il solo numeratore (m), oppure ambedue i termini. Esse sono una generalizzazione di formole conosciute, e potendo occorrerne l'applicazione in ricerche di analisi combinatoria, credo utile farle conoscere.

Dalla formola nota:

$$1+\binom{p}{1}+\binom{p+1}{2}+\binom{p+2}{3}+\ldots+\binom{p+i-2}{i-1}+$$
$$+\binom{p+i-1}{i}+\ldots+\binom{p+k-1}{k}=\binom{p+k}{k}$$

e dalla analoga

$$1+\binom{p}{1}+\ldots+\binom{p+i-2}{i-1}=\binom{p+i-1}{i-1}$$

si ha, sottraendo membro a membro:

$$\binom{p+i-1}{i}+\binom{p+i}{i+1}+\ldots+\binom{p+k-1}{k}=$$
$$=\binom{p+k}{k}-\binom{p+i-1}{i-1}.$$

E da questa, sostituendo $p+1-i$ a p:

$$\binom{p}{i}+\binom{p+1}{i+1}+\ldots+\binom{p+k-i}{k}=\binom{p+k-i+1}{k}-\binom{p}{i-1}$$

e cambiando k in $k+i$, indi moltiplicando per a:

$$a\binom{p}{i}+a\binom{p+1}{i+1}+\ldots+a\binom{p+k}{i+k}=$$
$$=a\binom{p+k+1}{i+k}-a\binom{p}{i-1}.$$

Cambiando in questa i in $i+1$, $i+2, \dots i+k$ e corrispondentemente k in $k-1$, $k-2, \dots 0$ e p in $p+1$, $p+2, \dots p+k$, indi moltiplicando le relazioni ottenute per b, si hanno le k relazioni:

$$b\binom{p+1}{i+1}+\dots+b\binom{p+k}{k+i}=b\binom{p+k+1}{k+i}-b\binom{p+1}{i}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b\binom{p+k}{k+i}=b\binom{p+k+1}{k+i}-b\binom{p+k}{i+k-1}$$

e sommandole colla precedente:

$$a\binom{p}{i}+(a+b)\binom{p+1}{i+1}+(a+2b)\binom{p+2}{i+2}+\dots$$
$$\dots+(a+kb)\binom{p+k}{i+k}=(a+kb)\binom{p+k+1}{k+i}- \qquad (1)$$
$$-a\binom{p}{i-1}-b\binom{p+k+1}{k+i-1}+b\binom{p+1}{i-1}.$$

È questa la prima delle formole che volevamo ottenere. Da essa, supponendo $a=1$, $b=0$, $i=0$ e cambiando p in $p-i$ si ha quella dalla quale siamo partiti.

In particolare se $b=1$ è:

$$a\binom{p}{i}+(a+1)\binom{p+1}{i+1}+\dots+(a+k)\binom{p+k}{i+k}=$$
$$=(a+k)\binom{p+k+1}{k+i}-a\binom{p}{i-1}-\binom{p+k+1}{k+i+1}+\binom{p+1}{i-1}. \qquad (1')$$

E se $a=b=1$ è:

$$\binom{p}{i}+2\binom{p+1}{i+1}+\dots+(k+1)\binom{p+k}{i+k}=$$
$$=(k+1)\binom{p+k+1}{k+i}-\binom{p+k+1}{k+i+1}+\binom{p}{i-2}. \qquad (1'')$$

Dalla (1) cambiando b in $-b$, indi $p+k$ in p' e conseguentemente p in $p'-k$, poi $i+k$ in j e conseguentemente k in $j-i$ e ponendo infine $a-kb=a'$ si ha:

$$a'\binom{p'}{j}+(a'+b)\binom{p'-1}{j-1}+(a'+2b)\binom{p'-2}{j-2}+\dots$$
$$\dots+(a'+kb)\binom{p'-k}{j-k}=a'\binom{p'+1}{j}-(a'+kb)\binom{p'-k}{j-k-1}+$$
$$+b\binom{p'+1}{j-1}-b\binom{p'-k+1}{j-k-1}$$

e sostituendo a ad a', p a p', i ad j:

$$a\binom{p}{i}+(a+b)\binom{p-1}{i-1}+(a+2b)\binom{p-2}{i-2}+\ldots$$
$$\ldots+(a+kb)\binom{p-k}{i-k}=a\binom{p+1}{i}-(a+kb)\binom{p-k}{i-k-1}+$$
$$+b\binom{p+1}{i-1}-b\binom{p-k+1}{i-k-1} \qquad (2)$$

che è la seconda delle formole in questione.

In particolare se $a=b=1$ è:

$$\binom{p}{i}+2\binom{p-1}{i-1}+3\binom{p-2}{i-2}+\ldots+(k+1)\binom{p-k}{i-k}=$$
$$=\binom{p+2}{i}-(k+1)\binom{p-k}{i-k-1}-\binom{p-k+1}{i-k-1}. \qquad (2')$$

Dalla formola nota

$$\binom{p}{i}=\binom{p-1}{i-1}+\binom{p-2}{i-1}+\ldots+\binom{p-k}{i-1}+$$
$$+\binom{p-k-1}{i-1}+\ldots+\binom{i-1}{i-1}$$

e dalla analoga

$$\binom{p-k}{i}=\binom{p-k-1}{i-1}+\binom{p-k-2}{i-1}+\ldots+\binom{i-1}{i-1}$$

si ha, cambiando p in $p+1$, q in $q+1$, e sottraendo poi membro a membro:

$$\binom{p}{i}+\binom{p-1}{i}+\binom{p-2}{i}+\ldots+\binom{p-k+1}{i}=$$
$$=\binom{p+1}{i+1}-\binom{p-k+1}{i+1}.$$

Moltiplicando questa per a, poi cambiando k in $k-1, k-2, \ldots 1$, e moltiplicando le $k-1$ relazioni ottenute per b, si hanno le k seguenti relazioni:

$$a\binom{p}{i}+a\binom{p-1}{i}+\ldots+a\binom{p-k+2}{i}+a\binom{p-k+1}{i}=$$
$$=a\binom{p+1}{i+1}-a\binom{p-k+1}{i+1}$$

$$b\binom{p}{i}+b\binom{p-1}{i}+\ldots+b\binom{p-k+2}{i}=b\binom{p+1}{i+1}-b\binom{p-k}{i+1}$$

. . . .

$$b\binom{p}{i}=b\binom{p+1}{i+1}-b\binom{p}{i+1}$$

e sommandole:

$$[a+(k-1)b]\binom{p}{i}+[a+(k-2)b]\binom{p-1}{i}+\dots$$
$$\dots+(a+b)\binom{p-k+2}{i}+a\binom{p-k+1}{i}=$$
$$=[a+(k-1)b]\binom{p+1}{i+1}-a\binom{p-k+1}{i+1}-b\binom{p+1}{i+2}+b\binom{p-k}{i+2}.$$

Ponendo in questa $a+(k-1)b=a'$, indi cambiando b in $-b$, si ha:

$$a'\binom{p}{i}+(a'+b)\binom{p-1}{i}+(a'+2b)\binom{p-2}{i}+\dots$$
$$\dots+[a'+(k-1)b]\binom{p-k+1}{i}=a'\binom{p+1}{i+1}-$$
$$-[a'+(k-1)b]\binom{p-k+1}{i+1}+b\binom{p+1}{i+2}-b\binom{p-k}{i+2}$$

e cambiando i in $i+1$ ed a' in a:

$$a\binom{p}{i}+(a+b)\binom{p-1}{i}+(a+2b)\binom{p-2}{i}+\dots$$
$$\dots+(a+kb)\binom{p-k}{i}=a\binom{p+1}{i+1}-(a+kb)\binom{p-k}{i+1}+$$
$$+b\binom{p+1}{i+2}-b\binom{p-k+1}{i+2} \qquad (3)$$

che è la 3ª formola. Da essa supponendo $a=1$, $b=0$, $k=p-i$ e cambiando poi p in $p-1$ ed i in $i-1$, si ha quella dalla quale siamo partiti.

In particolare se $a=b=1$ è:

$$\binom{p}{i}+2\binom{p-1}{i}+3\binom{p-2}{i}+\dots+(k+1)\binom{p-k}{i}=$$
$$=\binom{p+2}{i+2}-(k+1)\binom{p-k}{i+1}-\binom{p-k+1}{i+2}. \qquad (3')$$

Dalla (3) cambiando $p-k$ in p' e conseguentemente p in $p'+k$, poi $a+kb$ in a', infine b in $-b$ si ha:

$$a'\binom{p'}{i}+(a'+b)\binom{p'+1}{i}+(a'+2b)\binom{p'+2}{i}+\dots$$
$$\dots+(a'+kb)\binom{p'+k}{i}=(a'+kb)\binom{p'+k-1}{i+1}-$$
$$-a'\binom{p'}{i+1}-b\binom{p'+k+1}{i+2}+b\binom{p+1}{i+2}$$