

SUL CONCETTO DI NUMERO REALE

e su una teoria elementare di questi numeri

Ha osservato recentemente il Peano che *i matematici non sono tuttora d'accordo sulla definizione migliore degli irrazionali.*⁽¹⁾ La questione, infatti, non va guardata soltanto da un punto di vista strettamente tecnico o formale, ma anco dal punto di vista reale o storico, almeno per chi crede che la matematica non sia soltanto forma ma abbia un fondamento oggettivo.

Dal punto di vista esclusivo della logica formale, l'ultima parola sembra detta dal Russell; il quale non crede che nella matematica pura debbano trovar posto altre definizioni che le nominali (in funzione di costanti logiche), e, seguendo il Pasch, definisce *nominalmente* il numero reale come una classe di razionali o *segmento*: $\sqrt{2}$ p. es., s'identifica con la classe dei razionali (positivi) il cui quadrato è minore di 2.

Una teoria dei numeri reali secondo questa definizione fu esposta magistralmente dal chiarissimo Prof. Cipolla:⁽²⁾ essa è certamente la più perfetta dal punto di vista logico, come quella che non contiene nessun elemento intuitivo e quindi nessun postulato. Si può tuttavia osservare che anco nelle altre teorie il numero reale può ricevere definizioni nominali. Non c'è difficoltà, p. es., a definire nominalmente una *ripartizione* o un *taglio* nel campo dei numeri razionali (Dedekind); dopo, si potrebbe parlare — per quanto strano possa sembrare il linguaggio! — di *somma*, di *prodotto* di più ripartizioni, ecc. Si vedrebbe così che la classe di tutte le ripartizioni contiene una sotto-classe in *isomorfismo aritmetico* — secondo la felice espressione del Cipolla — con la classe dei razionali; e il numero reale, in conclusione, potrebbe esser definito *nominalmente* come una ripartizione nel campo dei razionali. Nella teoria del Weierstrass, invece, potrebbe esser definito come la classe o l'insieme di tutte le serie convergenti di razionali, *equivalenti*⁽³⁾ a una serie data; nella teoria del Peano come la classe di tutte le classi di razionali soddisfacenti a certe proprietà (quelle che

(1) PEANO, « Sulla definizione di limite », (*Atti dell'Acc. Sc. Torino*, aprile 1913).

(2) CIPOLLA, « I numeri reali », (*Periodico di Matematica*, 1909).

(3) Vedi, p. es., ENRIQUES, *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Vol. I, 1912; p. 459 e seguenti.

intuitivamente si esprimono con la frase: *avere lo stesso limite superiore*). Ecc., ecc.

Tutte queste definizioni nominali, che sotto l'aspetto del rigore formale non danno luogo a obiezioni, hanno però l'inconveniente di attribuire all'ente definito — secondo un'osservazione generale del Peano — non pure le sue proprietà, ma altre che non corrispondono all'ordinaria concezione. Secondo la concezione comune, sembra evidente che a ogni numero reale si possa far corrispondere un segmento o un insieme di serie convergenti equivalenti o una ripartizione, ma non sembra già che esso s'identifichi a volta a volta con ciascuno di quegli enti. Ognuna di queste costruzioni logiche darebbe invece una particolare *immagine*, dalla quale più o meno luminosamente traspare l'*idea* di numero reale.

L'osservazione non è sfuggita all'acuta mente del Cipolla, il quale ravvisa nei numeri reali, definiti nei modi accennati, dei numeri reali *concreti*, e giunge al concetto di numero reale *astratto* per mezzo di un'astrazione rispetto alla relazione d'isomorfismo aritmetico in cui si vengono a trovare tutte le possibili classi di reali concreti.

Così, attraverso l'elaborazione critica, si effettua il ritorno alla concezione comune. E ogni numero *reale concreto* 2, p. es., mentre non ha nulla a vedere con un numero *razionale concreto* 2 nè con un numero *naturale concreto* 2, si unifica con essi per mezzo dell'isomorfismo, dando luogo al numero *reale astratto* 2: in conformità col linguaggio ordinario.⁽¹⁾

Ma passiamo a esaminare la questione da un punto di vista meno formale. Nell'insegnamento secondario, p. es., non si può prescindere dal punto di vista psicologico, che è come dire, in fondo, dal processo storico. In effetti, l'origine del concetto di $\sqrt{2}$ — che pare sia stato il primo numero reale considerato dall'umanità! — va rintracciata nel fatto, avvertito ben presto dagli antichi, che, se non esiste razionale il cui quadrato pareggi 2, esistono, però, razionali il cui quadrato differisca da 2 meno di quanto si vuole.

È un noto algoritmo *infinito* — che presto si fa imparare ai ragazzi — permette appunto di trovare successivamente i numeri 1, 1'4, 1'41, 1'414..., i cui quadrati si avvicinano sempre più a 2. Ora quest'algoritmo è assai importante e istruttivo. Esso va ravvicinato, del resto, all'altro più elementare con cui si trovano numeri decimali, approssimati, a meno di $\frac{1}{10}$, di $\frac{1}{100}$..., a una data frazione ordinaria non trasformabile in decimale: messo nella sua vera luce, apre naturalmente la via al concetto di numero irrazionale. Da una parte, infatti, per mezzo dei numeri della successione ben definita

1, 1'4, 1'41, 1'414, 1'4142, 1'41421, ...

⁽¹⁾ Queste idee sono svolte nel corso del CIPOLLA: *Analisi algebrica ed introduzione al Calcolo infinitesimale* (Libreria scientifica D. Capozzi, Palermo), d'imminente pubblicazione.

l'equazione $x^2 = 2$ si può soddisfare sempre, *in pratica*, con tutta l'esattezza desiderabile; ma, *in teoria*, non è ammissibile fissare arbitrariamente i limiti di codesta esattezza: (1) di qui non c'è che un passo per arrivare al concetto d'un numero 1.41421... con infinite cifre decimali; e questo passo lo compie la nostra mente, che crea il nuovo simbolo. Giacchè il "wir erschaffen", del Dedekind si può solo formalmente eliminare, ma non è separabile da ogni pensiero realmente pensato.

La teoria del numero reale, concepito come un numero con infinite cifre decimali, non è che una particolare determinazione, in fondo, della teoria del Weierstrass, quando si considerino, cioè, serie della forma $\sum \frac{a_n}{10^n}$, essendo a_n una cifra. Ma essa, dal punto di vista psicologico, riesce tanto semplice e suggestiva che non ci sembra lecito trascurare questi vantaggi in un insegnamento secondario. Si aggiunga che essa si ricollega naturalmente ai principii delle *approssimazioni numeriche*, tanto importanti in quanto in queste risiede, in definitiva, il maneggio effettivo dei numeri irrazionali.

L'idea di considerare i numeri reali come numeri decimali con infinite cifre si trova esplicitamente espressa dal Tannery. (2) Ma la trattazione dei numeri reali in questo senso va incontro — fatto non insolito! — a qualche difficoltà logica. Il Frattini definisce (nominalmente) il numero reale come *una serie decimale, finita o indefinita, periodica o no*, escludendo quelle serie in cui le cifre sono tutte eguali a 9 da una in poi; ma egli si giova, fin dal principio, della corrispondenza biunivoca tra numeri reali e segmenti rettilinei, ammettendo naturalmente il postulato (geometrico) del Dedekind. La sua è quindi una trattazione piuttosto sintetica, fatta del resto in forma molto elegante e suggestiva. (3)

Il Soschino, poi, ha fatto seguire un'altra pregevole trattazione, completa e indipendente da considerazioni geometriche. (4) Il numero reale è per quest'autore una *determinata* successione di numeri decimali, del tipo

$$a_0, a_0 \cdot a_1, a_0 \cdot a_1 a_2, \dots, a_0 \cdot a_1 a_2 \dots a_n, \dots;$$

dove a_0 rappresenta un intero, e a_1, a_2, \dots rappresentano cifre. Una siffatta successione è anco rappresentata dall'autore con l'unica espressione $a_0 a_1 a_2 a_3 \dots$. Non è escluso che le cifre siano tutte eguali a 9

(1) Neanco da un punto di vista pragmatistico si può sostenere una matematica a sette cifre decimali! A questo proposito rimandiamo all'articolo veramente bello del BOREL: "La continuité mathématique et le continu physique", (*Rivista di Scienza*, Vol. II, n. 11).

(2) TANNERY, *Notions de Mathématiques* (Paris, 1903), pp. 36-38.

(3) FRATTINI, *Lezioni di Algebra, Geometria e Trigonometria per il 2° biennio d'Istituto tecnico*. Vol. I, Cap. I (Paravia, 1911).

(4) SOSCHINO, "I numeri reali considerati come successioni di numeri decimali", (*Periodico di Matematica*, 1911, pp. 225-285).

da una in poi, ma è escluso che a partire da un certo posto siano tutte nulle. L'autore, però, ammette per definizione che sia p. es.

$$3.42 = 3.41999 \dots,$$

ovvero, in generale,

$$a_0 a_1 a_2 \dots a_n = a_0 a_1 a_2 \dots (a_n - 1) [9].^{(1)}$$

Ora quest'eguaglianza non è giustificata nè giustificabile, nella teoria in discorso.

Come ci può essere eguaglianza tra una *successione* (o serie) e un *numero* (decimale finito)?

Il vero è che il numero reale non è una serie. In altre parole, al numero reale $\sqrt{2}$ non si può far corrispondere soltanto la serie

$$1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{1}{10^5} +,$$

ma anco la serie

$$1 + \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} +,$$

che si otterrebbe, col solito algoritmo, in un sistema diadico di numerazione; o qualunque altra serie equivalente. Così

$$3 + \frac{4}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \frac{0}{10^4} + \dots + \frac{0}{10^n} +$$

e

$$3 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \dots + \frac{9}{10^n} +$$

sono due serie equivalenti; ovvero ancora: 3.42 è il *limite* della seconda.

Tuttavia non crediamo che si debba, nell'insegnamento secondario, rinunciare alle serie decimali infinite, ma bisognerà solamente intenderle come semplici *rappresentazioni* dei numeri reali. ⁽²⁾ L'*intuizione*, che è suggerita dalla successione crescente

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \dots,$$

ottenuta col calcolare $\sqrt{2}$ a meno di 1, di $\frac{1}{10}$, ecc., è quella, in fondo, di *limite superiore*, cioè d'un numero più grande di tutti i numeri della successione e il cui quadrato è 2.

⁽¹⁾ SOSCHINO, *Ibidem*, p. 257 in nota.

⁽²⁾ Oppure la via logica da seguire sarebbe questa: studiare *in se stesse* le serie decimali infinite, escludendo (col Soschino) soltanto quelle le cui cifre sono nulle da un certo posto in poi e introducendo come serie nulla la serie $-1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots + \frac{9}{10^n} +$; istituire un calcolo con questi enti e dimostrare che essi costituiscono un corpo rispetto a tutte le operazioni esclusa la divisione. Poi si farebbe vedere, al solito, che le serie decimali periodiche sono in isomorfismo aritmetico con i numeri razionali; ecc., ecc.

E i numeri reali, specialmente in un insegnamento secondario, bisogna appunto considerarli (col Peano) come limiti superiori di classi limitate di razionali. È bene peraltro che i concetti di *massimo*, di *limite superiore* d'una classe numerica si rendano presto familiari agli studenti secondari, molto più che l'argomento è semplice e fecondo: certo più attraente di tanti altri che pur si trattano nelle scuole secondarie (p. es. la teoria delle proporzioni tra grandezze secondo Euclide).

Basta pensare — oggi che si parla di svecchiare i programmi — che il solo concetto di limite superiore porta immediatamente alla definizione di somma d'una serie a termini positivi, a quella d'integrale, di lunghezza d'un arco, di area, ecc. (1)

Orbene: definito il limite superiore d'una classe limitata di razionali (assoluti), si potranno dar subito esempi di classi che ammettono limite superiore e di classi che non ne ammettono. È presto dimostrato p. es. che la classe dei razionali il cui quadrato è inferiore a 2 non ammette limite superiore. Ma allora si potrà osservare che data una classe qualunque u di razionali limitata (superiormente), si può costruire una successione ben definita di numeri decimali nel modo seguente. Si percorra la successione

$$0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

degli interi: allora s'incontrerà necessariamente un numero che *per primo* supera qualunque numero di u , giacchè u è limitata. Sia a il *più grande* intero non superiore a ogni u (cioè minore di qualche u o tutt'al più eguale a qualche u); il che vuol dire che $a+1$ è il *più piccolo* intero superiore a ogni u . Nella successione

$$a, a'1, a'2, \dots, a'9, a+1$$

sia $a'a_1$ il più grande dei numeri non superiore a ogni u . (La cifra a_1 può anco esser eguale a 0). Allora $a'(a_1+1)$ — oppure a_1+1 , se $a_1=9$ — è superiore a qualunque u . Nella successione

$$a'a_1, a'a_11, a'a_12, \dots, a'a_19, a'(a_1+1)$$

sia $a'a_1a_2$ il più grande dei numeri non superiore a ogni u , mentre $a'a_1(a_2+1)$ superi qualunque u ; ecc. ecc. Così continuando, si viene a formare la successione ben definita di numeri decimali

$$(I) \quad a, a'a_1, a'a_1a_2, a'a_1a_2a_3, \dots, a'a_1a_2a_3 \dots a_n, \dots$$

Ora tre casi si posson dare.

1) Essendo s un certo intero, è $a_n=0$ per $n > s$; cioè le cifre decimali dopo la s^{ma} son tutte nulle. In questo caso, il numero ra-

(1) Merita grande attenzione in proposito l'articolo già citato del Peano.

zionale $a^*a_1a_2\dots a_n$ è il massimo e quindi anco il limite superiore della classe u ; giacchè, per la stessa definizione della successione (I), $a^*a_1a_2\dots a_n$ è superato o eguagliato da qualche u : ma essendo per ipotesi $a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = 0$, esso non può essere superato da nessun u ; quindi eguaglia qualche u .

2) Le cifre decimali da un certo posto in poi danno luogo a periodo. P. es., la successione si riduca alla seguente

$$0, 0\cdot7, 0\cdot73, 0\cdot733, \dots 0\cdot733\dots 3, \dots$$

Allora è subito visto che il limite superiore della classe u è la frazione $\frac{11}{15}$, generatrice del numero periodico $0\cdot7333\dots$. E poichè, nella teoria dei razionali, si suole porre per definizione (1)

$$0\cdot7333\dots = \frac{11}{15},$$

potremo dire che $0\cdot7333\dots$ è il limite superiore della classe u . Esso potrà o no esser contenuto in u . Se u p. es. non contiene che decimali finiti, allora il limite superiore, nel caso in discorso, non è in u .

3) Le cifre decimali, finalmente, si seguono senza alcuna periodicità. (2) In questo caso è facile dimostrare che non esiste razionale che sia limite superiore della classe u . (Basta partire dal fatto che ogni razionale dà luogo a un ben determinato numero decimale finito o indefinito periodico.)

Ora noi, in tutti i casi, potremo far corrispondere alla successione (I), ossia in fondo alla classe u , il simbolo

$$a^*a_1a_2\dots a_n\dots,$$

che chiameremo *numero reale*. Questa denominazione appare per ora affatto arbitraria, perchè quel simbolo ha il significato di numero (razionale) solamente quando le cifre decimali, a partire da un certo posto, danno luogo a periodo (costituito da cifre tutte nulle o no); ma essa resterà giustificata non appena avremo fatto vedere che a simboli cosiffatti si possono estendere le ordinarie operazioni di cal-

(1) Le eguaglianze sono

$$0\cdot7333\dots = \frac{14}{15}, 1\cdot999\dots = 2,3\cdot45000\dots = 3\cdot45\dots$$

in cui i secondi membri sono simboli di noto significato, non costituiscono che le definizioni nominali dei primi membri.

(2) È facile dimostrare che il numero decimale cui dà luogo $\sqrt{2}$ non può essere periodico; ma si può anco citare l'esempio $0\cdot47447744777\dots$ in cui la legge è semplicissima: una cifra 4, una cifra 7; due cifre 4, due cifre 7; 3 cifre 4, 3 cifre 7; ecc.

colo. Il che vorrà dire appunto che a quel simbolo corrisponde in ogni caso un ente, che ha valore di numero. ⁽¹⁾

I numeri reali si potranno pure chiamare *numeri decimali con infinite cifre*, e si distingueranno in numeri reali *razionali* e *irrazionali* secondochè sono periodici oppur no.

È da notare che un numero reale presuppone una legge, in virtù della quale resti determinata, in modo non ambiguo e univoco, la sua parte intera a , la cifra dei decimi a_1 , la cifra dei centesimi a_2 , ecc.: in generale la cifra a_n , qualunque sia il posto n . Soltanto in questo caso si può parlare della successione (I). Se, per un esempio, le cifre $a_1, a_2, a_3 \dots$ si pensassero successivamente estratte da un'urna, non si potrebbe parlare di numero reale.

Accenniamo ora rapidamente al modo in cui si può svolgere la teoria dei numeri reali, intesi nel senso anzidetto: dimostreremo che la rappresentazione decimale dei numeri reali, non riesce, in fondo, che a dar forma più intuitiva alla teoria del Peano, giovando anco a superare più facilmente quelle difficoltà di trattazione, che in quest'ultima si sono incontrate soprattutto per quel che riguarda la differenza e il quoto di due reali. ⁽²⁾

* * *

I. Numeri reali. Eguale, maggiore, minore. — I simboli $a'a_1a_2\dots a_n\dots$, o *numeri reali*, corrispondono dunque alle classi limitate di razionali (assoluti). Se tra queste classi intendiamo inclusa quella che contiene il solo elemento 0, avremo in corrispondenza il simbolo $0'000\dots$, ossia il numero reale 0. Il numero reale $a'a_1a_2\dots a_n\dots$ ha per noi un significato ben definito sol quando è periodico, rappresentando allora un certo razionale (*numero reale razionale*); se invece è aperiodico (*numero reale irrazionale*), esso è attualmente privo di significato e non ne riceverà uno se non quando si saranno estese, a questi simboli, in genere, le ordinarie operazioni di calcolo.

Poichè il simbolo $a'a_1a_2\dots(a_n - 1)999\dots$ rappresenta (per definizione) il razionale $a'a_1a_2\dots a_n$, potremo escludere, per maggior semplicità, che le cifre del numero reale $a'a_1a_2\dots a_n\dots$ siano eguali a 9 da un certo posto in poi (mentre non escluderemo che da un certo posto in poi esse siano tutte nulle).

Fatta quest'eccezione, chiameremo *eguali* due numeri reali se sono eguali le loro parti intere, le cifre dei decimi, dei centesimi, ecc., vale a

⁽¹⁾ È superfluo quindi avvertire che col simbolo $a'a_1a_2\dots a_n\dots$ non vogliamo indicare ancora la successione (I), ma qualcos'altro. Del resto, nell'uso comune, quel simbolo è ormai destinato a rappresentare un numero; mentre la successione o serie (I) si può rappresentare col simbolo

$$a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$$

⁽²⁾ Vedi, p. es., EX-LANGHAM, "Sulla teoria dei numeri reali", (Pitagora, Anno XVII, 1910).

dire se sono identici. Di due numeri reali $a \cdot a_1 a_2 \dots a_n \dots$ e $b \cdot b_1 b_2 \dots b_n \dots$ chiameremo *maggiore* il primo e *minore* il secondo, se è $a > b$; oppure se essendo $a = b$ è $a_1 > b_1$; oppure in generale, se essendo $a = b$, $a_1 = b_1, \dots, a_{r-1} = b_{r-1}$, è $a_r > b_r$.⁽¹⁾ Seguono subito per le relazioni $=, >, <$ tra numeri reali le solite proprietà, che esse godono nel caso dei razionali.

Se chiamiamo la (I) *successione fondamentale relativa al numero* $a \cdot a_1 a_2 \dots a_n \dots$, potremo concludere (in virtù soltanto delle definizioni dei segni $=, >, <$):

Il numero reale $a \cdot a_1 a_2 \dots a_n \dots$ è il limite superiore della sua successione fondamentale.

Più generalmente, si può dimostrar subito il seguente teorema:

Ogni classe limitata (superiormente) di numeri reali ammette un limite superiore unico.

Infatti, se u è una siffatta classe, potremo costruire rispetto a essa una successione di numeri razionali decimali analoga alla (I). Allora è evidente che il numero reale $\alpha = a \cdot a_1 a_2 \dots a_n \dots$ non è superato da nessun elemento di u : invero sia $\beta = b \cdot b_1 b_2 \dots b_n \dots > \alpha$, sicchè avremo in generale, per un certo r : $b = a$, $b_1 = a_1, \dots, b_{r-1} = a_{r-1}$, $b_r > a_r$, e quindi $a \cdot a_1 a_2 \dots a_{r-1} (a_r + 1) \leq \beta$; ma poichè, per la legge di formazione della (I), $a \cdot a_1 a_2 \dots a_{r-1} (a_r + 1)$ supera qualunque u , si deduce che β non può essere in u . Sia, in secondo luogo, $\gamma = c \cdot c_1 c_2 \dots c_n \dots < \alpha$, sicchè si avrà in generale, per un certo s , $a = c$, $a_1 = c_1, \dots, a_{s-1} = c_{s-1}$, $a_s > c_s$ e quindi $a \cdot a_1 a_2 \dots a_{s-1} a_s > \gamma$; ma poichè, per la legge di formazione della (I), esiste in u qualche elemento non inferiore al numero $a \cdot a_1 a_2 \dots a_{s-1} a_s$, si deduce che u contiene qualche numero maggiore di γ . Dunque α è il limite superiore di u . c. d. d.

In modo simile si potrebbe provare l'esistenza del limite inferiore d'una classe di numeri reali (assoluti).⁽²⁾

2. Essendo $\alpha = a \cdot a_1 a_2 \dots a_n \dots$ un numero reale, gli elementi della sua successione fondamentale (I) si posson chiamare *valori decimali per difetto* (a meno di 1, di $\frac{1}{10}, \dots$) di α ; mentre gli elementi della successione

$$a + 1, a \cdot (a_1 + 1), a \cdot a_1 (a_2 + 1), \dots, a \cdot a_1 a_2 \dots a_{n-1} (a_n + 1), \dots$$

si posson chiamare *valori decimali per eccesso* (a meno di 1, di $\frac{1}{10}, \dots$) di α .

Dal n. 1 segue subito:

Una condizione necessaria e sufficiente affinchè si abbia $\alpha > \beta$ è che qualche valore decimale per difetto di α superi qualche valore decimale per eccesso di β .

⁽¹⁾ Qui si può far notare che tra due reali diseguali cadono quanti si vogliono reali, e in particolare quanti si vogliono reali razionali.

⁽²⁾ È pure immediata la dimostrazione del teorema: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè due classi (limitate) u e v di reali abbiano lo stesso limite superiore, è che ogni reale minore di qualche u sia minore di qualche v , e viceversa.*

Si potrà anzi dimostrare, più in generale, il teorema seguente, assai utile per la teoria.

Se è $\alpha = a \cdot a_1 a_2 \dots a_n \dots > \beta = b \cdot b_1 b_2 \dots b_n$ e se p è un intero qualunque, si potrà trovare un altro intero q tale che sia

$$\alpha \cdot a_1 a_2 \dots a_q > \beta \cdot b_1 b_2 \dots b_q + \frac{p}{10^q}.$$

Sia, infatti: $a = b$, $a_1 = b_1, \dots, a_{r-1} = b_{r-1}$, $a_r > b_r$; poi sia b_{r+s} la prima cifra diversa da 9 (n. 1) dopo b_r e t il numero delle cifre dell'intero dato p : allora basterà prendere

$$q = r + s + t;$$

giacchè evidentemente

$$\begin{aligned} \beta \cdot b_1 b_2 \dots b_q + \frac{p}{10^q} &< \beta \cdot b_1 b_2 \dots b_q + \frac{10^t}{10^q} = \\ &= \beta \cdot b_1 b_2 \dots b_{r+s-1} (b_{r+s} + 1) \dots b_q < \alpha \cdot a_1 a_2 \dots a_q. \end{aligned}$$

3. Un altro teorema semplicissimo, ma utile, è il seguente:

Siano

$$a_1, a_2, \dots, a_n \dots \quad (1)$$

$$b_1, b_2, \dots, b_n \dots \quad (2)$$

due successioni crescenti ma limitate di razionali, e per $n \geq \nu$ sia $a_n > b_n$ e inoltre $a_n - b_n > c$, essendo c un razionale non nullo; allora il limite superiore della (1) è maggiore del limite superiore della (2).

Potremo supporre che le condizioni $a_n > b_n$, $a_n - b_n > c$ siano verificate a partire da $n = 1$: in caso contrario, si potranno cancellare quanti termini occorre in principio della (1) e i corrispondenti della (2) senza che i limiti superiori di (1) e (2) cambino. Siano ordinatamente λ e μ questi limiti superiori e sia $\mu = m \cdot m_1 m_2 \dots m_n \dots$; si supponga poi

$$c > \frac{1}{10^r},$$

essendo r un conveniente intero. Esistono numeri interi $s > r$ e $t > r$ tali che sia, per l'elemento b_t della (2):

$$b_t \geq m \cdot m_1 m_2 \dots m_r \dots m_s;$$

ma è intanto

$$a_t > b_t + \frac{1}{10^s} \geq m \cdot m_1 m_2 \dots m_r \dots (m_s + 1) > \mu;$$

dunque è $\lambda > \mu$. (*)

(*) Se invece, essendo c un razionale qualunque non nullo, si può trovare in corrispondenza un ν tale che per $n \geq \nu$ sia $a_n - b_n < c$; allora si dimostra facilmente che le due successioni (1) e (2) ammettono lo stesso limite superiore.

4. **Somma e prodotto di quanti si vogliono reali.** — Chiameremo *somma (prodotto)* di quanti si vogliono reali il limite superiore della somma (del prodotto) delle loro successioni fondamentali.

Dalla definizione segue subito che l'addizione o la moltiplicazione dei numeri reali sono operazioni a risultato unico, commutative e associative. (1) La moltiplicazione è poi distributiva rispetto all'addizione. Evidentemente, infine, $\alpha + 0 = \alpha$ (0 è il *termine illusorio* della somma); $\alpha \times 0 = 0$ (*legge d'annullamento del prodotto*).

5. Dimostriamo il seguente teorema:

Secondochè $\alpha \geq \beta$, segue $\alpha + \gamma \geq \beta + \gamma$, e ancora, per γ non nullo, $\alpha\gamma \geq \beta\gamma$.

Sia $\alpha = a \cdot a_1 a_2 \dots a_n \dots$, $\beta = b \cdot b_1 b_2 \dots$, $\gamma = c \cdot c_1 c_2 \dots c_n \dots$; e si supponga, per es., $\alpha > \beta$.

Allora si avrà per un certo intero r (n. 2):

$$a \cdot a_1 a_2 \dots a_r > b \cdot b_1 b_2 \dots (b_r + 1);$$

e se si pone $a \cdot a_1 a_2 \dots a_r - b \cdot b_1 b_2 \dots (b_r + 1) = p$, si avrà evidentemente per ogni $s \geq r$:

$$a \cdot a_1 a_2 \dots a_s - b \cdot b_1 b_2 \dots b_s > p.$$

Si conclude allora (n. 3) che il limite superiore della successione

$$a + c, a \cdot a_1 + c \cdot c_1, \dots, a \cdot a_1 a_2 \dots a_n + c \cdot c_1 c_2 \dots c_n, \dots$$

è maggiore del limite superiore della successione

$$b + c, b \cdot b_1 + c \cdot c_1, \dots, b \cdot b_1 b_2 \dots b_n + c \cdot c_1 c_2 \dots c_n, \dots$$

Dunque $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

Similmente negli altri casi e nel caso del prodotto.

6. Appoggiandosi al teorema dimostrato in fine del n. 2, si deduce subito il seguente.

(1) Che sussista la proprietà commutativa, è ovvio. In quanto alla proprietà associativa, osserviamo quanto segue. Siano i due reali $\alpha = a \cdot a_1 a_2 \dots a_n \dots$, $\beta = b \cdot b_1 b_2 \dots b_n \dots$; la loro somma $\alpha + \beta$ è per definizione il limite superiore della successione

$$\alpha + \beta, a \cdot a_1 + b \cdot b_1, \dots, a \cdot a_1 a_2 \dots a_n + b \cdot b_1 b_2 \dots b_n, \dots$$

Ma in generale la successione fondamentale relativa al numero $\alpha + \beta$ sarà un'altra successione

$$s, s \cdot s_1, \dots, s \cdot s_1 s_2 \dots s_n, \dots;$$

e sarà $s \cdot s_1 s_2 \dots s_n = a \cdot a_1 a_2 \dots a_n + b \cdot b_1 b_2 \dots b_n$ oppure $s \cdot s_1 s_2 \dots s_n = (a \cdot a_1 a_2 \dots a_n + b \cdot b_1 b_2 \dots b_n) \cdot \frac{1}{10^n}$; il che mostra che le due successioni, come sappiamo già (n. 1), hanno lo stesso limite superiore. Ciò posto, se $\gamma = c \cdot c_1 c_2 \dots c_n \dots$, le due successioni di termini generali

$$a \cdot a_1 a_2 \dots a_n + b \cdot b_1 b_2 \dots b_n + c \cdot c_1 c_2 \dots c_n \quad \text{e} \quad s \cdot s_1 s_2 \dots s_n + c \cdot c_1 c_2 \dots c_n$$

ammettono evidentemente lo stesso limite superiore, e quindi $\alpha + \beta + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma$. Ecc. ecc.

Se è $\alpha > \beta + \gamma$, esistono valori decimali per difetto di α maggiori della somma di valori approssimati in egual grado, ma per eccesso, di β e γ .

In altri termini, se $\alpha > \beta + \gamma$, si può trovare un intero q in modo da avere

$$a \cdot a_1 a_2 \dots a_q > b \cdot b_1 b_2 \dots (b_q + 1) + c \cdot c_1 c_2 \dots (c_q + 1).$$

Se invece è $\alpha < \beta + \gamma$, si avrà per un conveniente q :

$$a \cdot a_1 a_2 \dots (a_q + 1) < b \cdot b_1 b_2 \dots b_q + c \cdot c_1 c_2 \dots c_q.$$

Cioè: Se è $\alpha < \beta + \gamma$, esistono valori decimali per eccesso di α minori della somma di valori approssimati in egual grado per difetto di β e γ .

Questi teoremi si estendono facilmente al caso in cui α è maggiore o minore della somma $\beta + \gamma + \delta + \dots + \zeta$ di quanti si vogliano termini.

Teoremi analoghi valgono nell'ipotesi che sia $\alpha \cong \beta \times \gamma \times \delta \times \dots \times \zeta$.

7. Differenza e quoto di due reali. — Si chiama *differenza* di due reali α e β un numero reale che sommato con β dà α . Si chiama *quoto* di due reali α e β , nell'ipotesi che β non sia nullo, un numero reale che moltiplicato per β dà un prodotto eguale ad α .

Dal n. 5 segue immediatamente:

La differenza (il quoto) di due reali, se esiste, è unica (unico).

La differenza di due reali eguali è zero.

Se $\alpha < \beta$, la differenza tra α e β non esiste.

Dimostriamo che se $\alpha > \beta$, la differenza $\alpha - \beta$ esiste.

Infatti, nella successione

$$\beta + 0, \beta + 1, \beta + 2, \dots$$

sia $\beta + c$ il più grande dei numeri non maggiori di α , dimodochè $\beta + (c + 1) > \alpha$. Se è $\beta + c = \alpha$, la differenza tra α e β è l'intero c . Se è invece $\beta + c < \alpha$, si consideri la successione

$$\beta + c, \beta + c \cdot 1, \beta + c \cdot 2, \dots, \beta + (c + 1).$$

Se qualche numero di questa è eguale ad α , il teorema è dimostrato. Se no, continuando con lo stesso procedimento, o si troverà un numero decimale (finito) che sommato con β dà α , o si avranno, qualunque sia il numero naturale n , limitazioni del seguente tipo

$$\begin{aligned} & \beta + c < \alpha < \beta + (c + 1) \\ & \beta + c \cdot c_1 < \alpha < \beta + c \cdot (c_1 + 1) \\ & \beta + c \cdot c_1 c_2 \dots c_n < \alpha < \beta + c \cdot c_1 c_2 \dots (c_n + 1) \\ & \dots \\ & \dots \end{aligned}$$

Ma in questo caso la differenza tra α e β è il numero reale $\gamma = c'c_1c_2 \dots c_n \dots$.

Invero non può essere $\beta + \gamma > \alpha$, chè altrimenti esisterebbe (n. 6) un intero q tale da avere

$$\beta + c'c_1c_2 \dots c_q \geq b'b_1b_2 \dots b_q + c'c_1c_2 \dots c_q > a'a_1a_2 \dots (a_q + 1) > \alpha,$$

contro alle supposte limitazioni. Nè può essere $\beta + \gamma < \alpha$, chè altrimenti esisterebbe (n. 6) un intero q tale da avere

$$\alpha \geq a'a_1a_2 \dots a_q > b'b_1b_2 \dots (b_q + 1) + c'c_1c_2 \dots (c_q + 1) > \beta + c'c_1c_2 \dots (c_q + 1),$$

contro sempre alle limitazioni supposte.

Dunque è $\alpha - \beta = \gamma$.

In modo simile si prova l'esistenza del quoto $\alpha : \beta$, per β non nullo.

O esiste un numero decimale finito che moltiplicato per β dà α , o hanno luogo, per qualunque valore di n , le seguenti limitazioni

$$\begin{aligned} \beta \times c &< \alpha < \beta \times (c + 1) \\ \beta \times c'c_1 &< \alpha < \beta \times c'(c_1 + 1) \\ \dots &\dots &\dots \\ \beta \times c'c_1c_2 \dots c_n &< \alpha < \beta \times c'c_1c_2 \dots (c_n + 1) \\ \dots &\dots &\dots \\ \dots &\dots &\dots \end{aligned}$$

E in questo caso si fa vedere che il numero reale $\gamma = c'c_1c_2 \dots c_n \dots$ è il quoto di α per β .

Dopo ciò, si possono stabilire per le differenze e i quoti di numeri reali tutti i teoremi che valgono per i razionali.

8. Potenza con esponente un numero naturale. — Si definisce come quando la base è razionale, cioè si pone

$$\alpha^0 = 1, \alpha^n = \alpha^{n-1} \alpha;$$

e si dimostra senza nessuna difficoltà che le potenze dei numeri reali godono le stesse proprietà delle potenze dei razionali.

Segue dal n. 5: Se n è un intero non nullo, secondochè $\alpha \geq \beta$, si ha $\alpha^n \geq \beta^n$.

E ancora: Se $\alpha > 1$, α^n cresce con n ; se $\alpha < 1$, α^n decresce col crescere di n . Al solito modo si dimostra poi che se $\alpha > 1$, preso un numero reale qualunque μ , si può trovare un intero n tale che sia $\alpha^n > \mu$; ecc. ecc.

9. Estrazione di radice. — Dato il numero reale α e un intero m non nullo, col solito procedimento si prova che: o esiste un decimale

finito la cui potenza m^{ma} eguagli α , o hanno luogo, per qualunque numero naturale n , limitazioni del tipo

$$\begin{aligned} b^m &< \alpha < (b+1)^m \\ b \cdot b_1^m &< \alpha < b \cdot (b_1+1)^m \\ &\dots &\dots \\ b \cdot b_1 b_2 \dots b_n^m &< \alpha < b \cdot b_1 b_2 \dots (b_n+1)^m \\ &\dots &\dots \\ &\dots &\dots \end{aligned}$$

In questo caso, posto $\beta = b \cdot b_1 b_2 \dots b_n \dots$, si fa vedere (n. 6) che non può essere nè $\beta^m > \alpha$ nè $\beta^m < \alpha$; dunque $\beta^m = \alpha$ ovvero $\beta = \sqrt[m]{\alpha}$.

10. Potenza con esponente un numero razionale assoluto o relativo. — Se m e n sono naturali, il secondo dei quali non nullo, si pone

$$\alpha^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\alpha^m}, \quad \alpha^{+\frac{m}{n}} = \alpha^{\frac{m}{n}};$$

e ancora, purchè α non sia nullo:

$$\alpha^{-\frac{m}{n}} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{m}{n}}.$$

Valgono, come facilmente si vede, le solite regole di calcolo delle potenze.

11. Potenza con esponente un numero reale (assoluto). — Sia dapprima α un numero reale maggiore di 1 e $\beta = b \cdot b_1 b_2 \dots b_n \dots$ un numero reale qualunque. Col simbolo α^β rappresenteremo il numero reale che è limite superiore della successione (in generale crescente ma limitata)

$$\alpha^b, \alpha^{b \cdot b_1}, \dots, \alpha^{b \cdot b_1 b_2 \dots b_n}, \dots$$

Valgono i soliti teoremi di calcolo delle potenze. Per esempio, si dimostra immediatamente che essendo γ un altro numero reale ha luogo l'eguaglianza

$$\alpha^\beta \times \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}.$$

Per dimostrare che è

$$(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma},$$

si osservi in primo luogo che l'eguaglianza si dimostra subito nel caso che uno dei due esponenti, β o γ , sia un numero frazionario. In secondo luogo, se è $\gamma = c \cdot c_1 c_2 \dots c_n \dots$, si osservi che $(\alpha^\beta)^\gamma$ è per definizione il limite superiore della successione

$$(\alpha^\beta)^c, (\alpha^\beta)^{c \cdot c_1}, \dots, (\alpha^\beta)^{c \cdot c_1 c_2 \dots c_n}, \dots$$

ovvero (1° caso) dell'altra identica

$$\alpha^{\beta c}, \alpha^{\beta c \cdot c_1}, \dots, \alpha^{\beta c \cdot c_1 c_2 \dots c_n}, \dots; \tag{a}$$

mentre $\alpha^\beta \gamma$ è il limite superiore della successione

$$\alpha^p, \alpha^{p_1 p_2}, \dots, \alpha^{p_1 p_2 \dots p_n}, \dots, \quad (b)$$

essendo $p_1 p_2 \dots p_n \dots = \beta \gamma$. Ma le successioni formate dagli esponenti di α in (a) e (b) ammettono evidentemente lo stesso limite superiore (n. 6) e quindi anche (a) e (b) ammettono lo stesso limite superiore (cfr. la nota relativa al n. 1).

Facilmente ancora si dimostrano i teoremi

$$(\alpha\beta)^r = \alpha^r \beta^r, \quad (\alpha : \beta)^r = \alpha^r : \beta^r,$$

nell'ipotesi $\alpha > 1, \beta > 1, \frac{\alpha}{\beta} > 1$.

Nel caso in cui è $\alpha < 1$, porremo per definizione

$$\alpha^\beta = 1 : \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\beta;$$

ed è facile verificare che valgono in tutti i casi possibili le note regole di calcolo delle potenze. Si tratti, per es., di dimostrare la formola

$$(\alpha\beta)^r = \alpha^r \beta^r,$$

nel caso $\alpha < 1, \beta > 1, \alpha\beta > 1$. Si ha invero

$$\alpha^r \beta^r = \left[1 : \left(\frac{1}{\alpha}\right)^r\right] \beta^r = \beta^r : \left(\frac{1}{\alpha}\right)^r = \left(\beta : \frac{1}{\alpha}\right)^r = (\beta\alpha)^r. \quad \text{c. d. d.}$$

12. Alle potenze con esponente reale si estendono al solito modo le proprietà accennate al n. 9; vale a dire che α^ξ , per $\alpha > 1$, cresce col crescere di ξ e può superare qualunque numero dato; mentre, per $\alpha < 1$ decresce col crescere di ξ e può diventare inferiore a qualunque reale non nullo. Inoltre, scelto un numero reale qualunque μ , si potrà trovare un numero ξ tale che sia $\alpha^\xi - 1 < \mu$, se $\alpha > 1$; ovvero tale che sia $1 - \alpha^\xi < \mu$, se $\alpha < 1$; e le disuguaglianze precedenti sussistono *a fortiori* se al posto di ξ si sostituisce un numero più piccolo.

13. Estrazione di logaritmo. — Se α e β sono due reali tutti e due maggiori o tutti e due minori di 1, esiste uno e un sol numero reale ξ tale che

$$\alpha^\xi = \beta.$$

Esso si chiama *logaritmo di β nella base α* e si scrive anche

$$\xi = \log_a \beta.$$

Supponiamo dapprima $\alpha > 1, \beta > 1$. Se nella successione crescente

$$\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n, \dots$$

c'è un numero eguale a β , il teorema è dimostrato. Se no, sia α^x il più grande dei numeri della successione minori di β , dimodochè $\alpha^{x+1} > \beta$. Consideriamo la nuova successione

$$\alpha^x, \alpha^{x+1}, \alpha^{x+2}, \dots, \alpha^{x+9}, \alpha^{x+10}.$$

Se in essa esiste un numero eguale a β , il teorema è dimostrato. Se no, sia $\alpha^{x x_1}$ il più grande dei numeri di essa inferiore a β , mentre $\alpha^{x(x_1+1)} > \beta$. Così continuando: o troviamo un decimale finito $x x_1 x_2 \dots x_n$ tale che $\alpha^{x x_1 x_2 \dots x_n} = \beta$; o avremo, per ogni valore di n , delle limitazioni del tipo

$$\begin{aligned} \alpha^x &< \beta < \alpha^{x+1} \\ \alpha^{x x_1} &< \beta < \alpha^{x(x_1+1)} \\ &\dots &\dots &\dots \\ \alpha^{x x_1 x_2 \dots x_n} &< \beta < \alpha^{x x_1 x_2 \dots (x_n+1)} \\ &\dots &\dots &\dots \\ &\dots &\dots &\dots \end{aligned}$$

In quest'ultimo caso il numero $\xi = x x_1 x_2 \dots x_n \dots$ è appunto tale che $\alpha^\xi = \beta$. Infatti, sopponiamo che α^ξ e β abbiano una differenza δ non nulla. È facile vedere intanto che potremo sempre trovare un numero naturale p tale che sia (n. 12):

$$\alpha^{x x_1 x_2 \dots (x_p+1)} - \alpha^{x x_1 x_2 \dots x_p} = \alpha^{x x_1 x_2 \dots x_p} \left(\alpha^{\frac{1}{10^p}} - 1 \right) < \alpha^{x+1} \left(\alpha^{\frac{1}{10^p}} - 1 \right) < \delta;$$

ma allora i due numeri α^ξ e β entrambi compresi tra $\alpha^{x x_1 x_2 \dots x_p}$ e $\alpha^{x x_1 x_2 \dots (x_p+1)}$, avrebbero una differenza più piccola di δ , contro il supposto. Dunque α^ξ e β non possono essere diseguali. S'intende che il numero ξ è unico (n. 12).

Se, invece, $\alpha < 1, \beta < 1$, esiste un numero ξ tale che

$$\left(\frac{1}{\alpha} \right)^\xi = \frac{1}{\beta},$$

da cui

$$\alpha^\xi = \beta.$$

C. MINEO.



SOPRA I MASSIMI E I MINIMI DELLE FIGURE PIANE

(Continuazione — v. fasc. VI, anno XXIX)

7. **Semicerchio e parti del cerchio.** — Nel § 5 ho dato esempi di applicazione immediata di due teoremi fondamentali di STEINER stabiliti nel § 4. Ora vediamo come STEINER sviluppa la sua teoria basandosi sul teorema principale, relativo al cerchio, dedotto dal primo di quei teoremi fondamentali (§ 4).

Cominciamo con i teoremi relativi al semicerchio ed alle parti di un cerchio per passare nel paragrafo seguente ai poligoni.

TEOREMA. — 1°. *Fra tutte le figure, limitate da una linea, arbitraria nella sua forma ma di lunghezza fissa l , e da un segmento rettilineo G lungo a piacere, la massima area appartiene al semicerchio di lunghezza l .*

2°. *Fra tutte le figure della stessa area, limitate da un segmento rettilineo G lungo a piacere e da un'altra linea arbitraria L , quest'ultima linea L ha la minima lunghezza se è un semicerchio.*

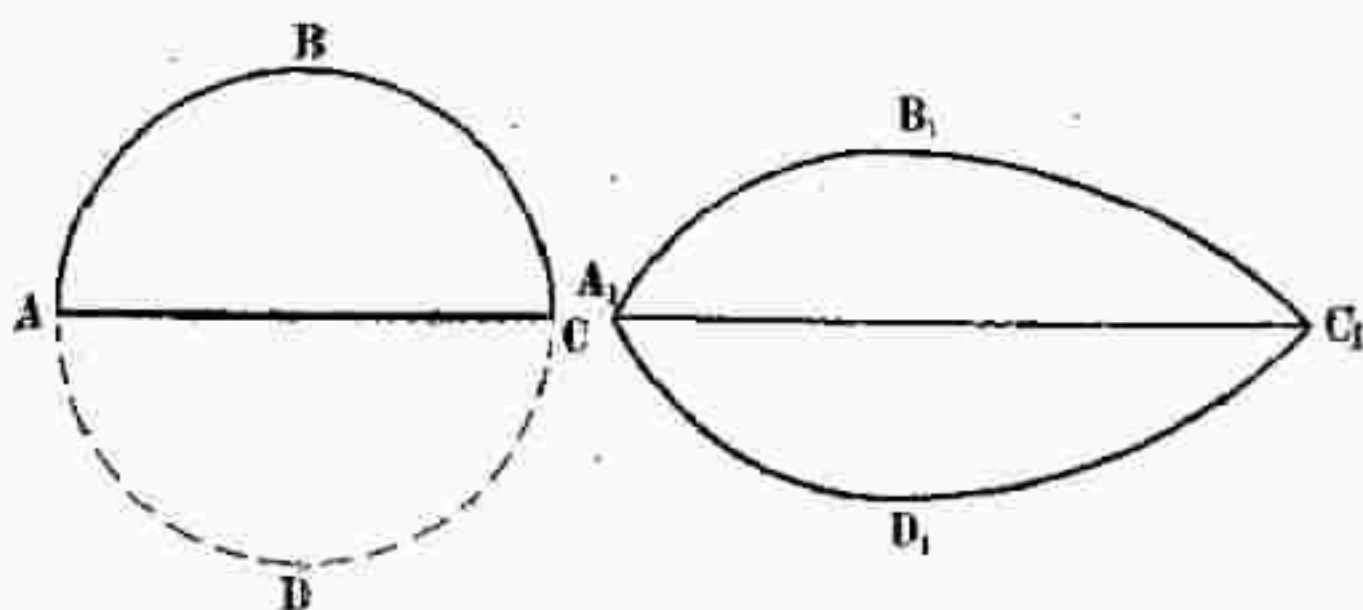


Fig. 8.

DIMOSTRAZIONE. — Siano dati un semicerchio ABC ed un'altra figura qualsiasi $A_1B_1C_1$ (fig. 8), tutti e due soddisfacenti alle condizioni della prima parte del teorema (teorema diretto). Aggiungendo a queste figure le figure ADC e $A_1D_1C_1$, simmetriche ad esse rispetto agli assi AC ed A_1C_1 , otterremo il cerchio $ABCD$ ed un'altra figura $A_1B_1C_1D_1$, ambedue dello stesso perimetro.

In virtù del teorema principale (dimostrato rigorosamente, v. § 4) il cerchio è più grande della seconda figura, cosicchè anche il semicerchio ABC è più grande della figura $A_1B_1C_1$ uguale alla metà di $A_1B_1C_1D_1$.

La parte seconda (inversa) del nostro teorema si dimostra nel modo accennato nel § 6.

TEOREMA. — *Fra tutte le figure limitate da un segmento rettilineo dato a e da una linea L di forma arbitraria, la massima area, quando è data la lunghezza l della linea L , appartiene al segmento di cerchio limitato dalla corda a e dall'arco di lunghezza l ; mentre, quando è fissata l'area S , l'arco di tale segmento di cerchio è più corto di tutte le linee L .*

DIMOSTRAZIONE. — Sia α un segmento di cerchio ed aL qualsiasi altra figura (fig. 9), e supponiamo che l'arco α e la linea L abbiano la stessa lunghezza. Sia β l'arco che insieme con α costituisce l'intero cerchio. Per il teorema principale, il cerchio $\alpha\beta$ ha area maggiore della figura isoperimetrica $L\beta$. Dunque il segmento α ha area maggiore della figura aL .

Ora supponiamo che il segmento di cerchio α e la figura aL abbiano area uguale. Aggiungendo il segmento supplementare $\alpha\beta$,

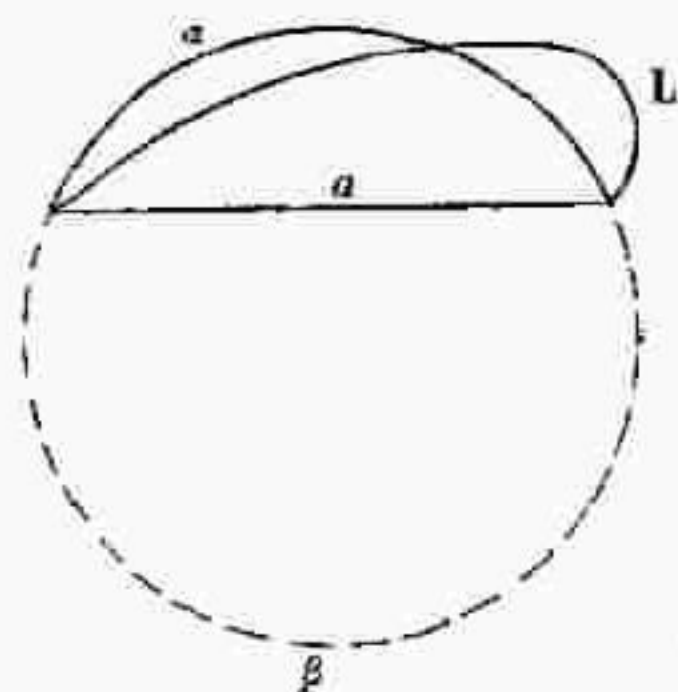


Fig. 9.

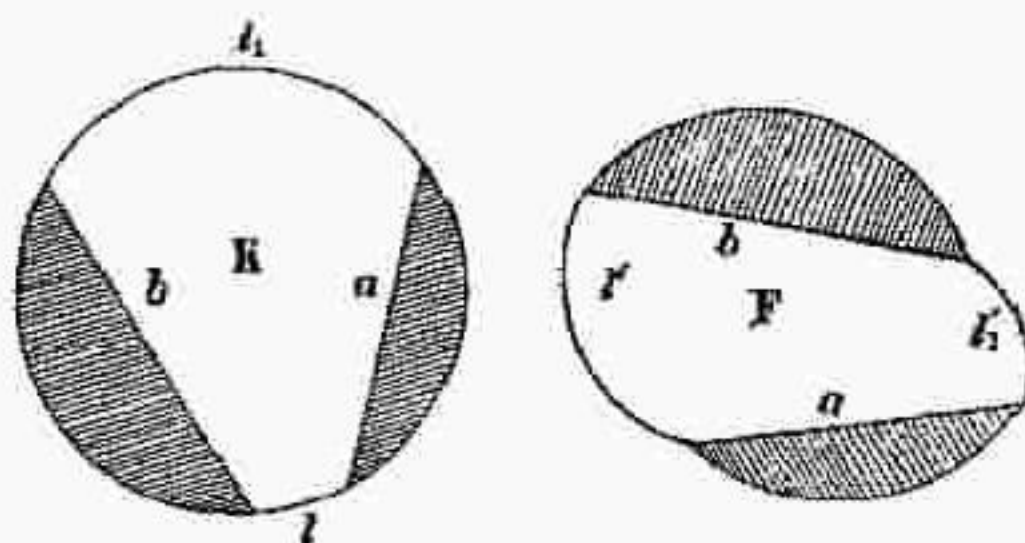


Fig. 10.

vediamo che il cerchio $\alpha\beta$ e la figura $L\beta$ hanno la stessa area, cioè che il perimetro $\alpha + \beta$ del cerchio è minore del perimetro $L + \beta$, cioè $\alpha < L$.

COROLLARIO. — *Se sono dati due punti fissi ΔB appartenenti al contorno di una figura variabile ed è data la lunghezza di una delle due parti in cui essi dividono il contorno, allora questa parte ΔB del contorno deve necessariamente essere un arco di cerchio perchè la figura abbia la massima area possibile.*

In seguito io chiamo, seguendo lo STEINER, *parte del cerchio compresa fra n corde* ogni figura limitata da n corde appartenenti ad un cerchio e da n archi del cerchio i quali uniscono gli estremi di queste.

TEOREMA. — *Fra tutte le figure limitate da due dati segmenti rettilinei a, b e da una o due linee di forma arbitraria, la parte del cerchio, racchiusa fra i segmenti a e b considerati come corde, ha la massima area a parità di perimetro, ed il minimo perimetro a parità di area.*

DIMOSTRAZIONE. — 1°. Sia K la parte del cerchio e F un'altra figura, soddisfacenti tutte e due alle condizioni della prima parte del teorema (fig. 10). Aggiungendo alla figura K i segmenti circolari tratteggiati, avremo il cerchio completo K_1 ; mentre gli stessi segmenti aggiunti alla figura F ci daranno una nuova figura F_1 , isoperimetrica con K_1 . Dunque $K_1 > F_1$ e quindi $K > F$.

Nelle ipotesi della seconda parte del teorema, un'operazione analoga ci fornirà due figure, K_2 (cerchio) e F_2 , di uguale area, cosicchè il perimetro di K_2 sarà minore di quello di F_2 ; evidentemente anche il perimetro di K è minore di quello di F .

NOTA. — La dimostrazione dell'ultimo teorema suppone che esista almeno una parte di cerchio K soddisfacente alle condizioni del teorema (diretto ed inverso). È facile convincersi che, nel caso del teorema diretto, per l'esistenza della parte di cerchio formata dalle date corde a e b ed avente un perimetro dato p , è necessaria e sufficiente la condizione seguente:

$$p - (a + b) > |a - b|.$$

Quanto al teorema inverso, esiste sempre una parte di cerchio compresa fra date corde a , b ed avente l'area data S .

Si può dimostrare anche che la parte di cerchio cercata è sempre *unica* se non si fa distinzione tra figure ottenute l'una dall'altra facendo scorrere gli estremi delle corde lungo la circonferenza.

8. Poligoni iscritti nel cerchio. — Si potrebbe estendere l'ultimo teorema del paragrafo precedente al caso di un numero qualunque n di segmenti dati a_1, a_2, \dots, a_n , e comparare fra loro le figure di ugual perimetro o di uguale area. Ed infatti si può dimostrare che anche in questo caso la *massima area* o il *minimo perimetro* appartiene alla parte di cerchio compresa fra i dati segmenti a_1, a_2, \dots, a_n come corde ed avente dato perimetro o data area, supposto che tale parte di cerchio esista.

Ma invece di esporre la dimostrazione di questo teorema nel caso generale voglio dimostrarlo in un caso speciale, cioè quando il perimetro dato p è uguale alla somma di tutti i segmenti dati:

$$p = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

cosicchè le figure comparate sono dei *poligoni* di dati lati a_1, a_2, \dots, a_n . Il teorema da dimostrare è questo:

TEOREMA. — *Fra tutti i poligoni di dati lati a_1, a_2, \dots, a_n la massima area appartiene al poligono iscrivibile in un cerchio.*

DIMOSTRAZIONE. — Denotiamo con K il poligono avente lati dati a_1, a_2, \dots, a_n ed iscritto in un cerchio C (vedi la nota qui sotto) e con K' qualunque altro poligono costruito cogli stessi lati. Ammettiamo che i poligoni K e K' sieno convessi (vedi § 3). Chiamando σ_1 l'arco di cerchio C sotteso alla corda a_1 che si trova dalla parte opposta del poligono K , applichiamo ai lati a_1, a_2, \dots, a_n di K e di K' i segmenti $a_1\sigma_1, a_2\sigma_2, \dots, a_n\sigma_n$ del cerchio C . Così K si trasforma nel cerchio C stesso, e K' si trasforma in una nuova figura F isoperimetrica col cerchio C . Poichè $F < C$ (§ 4), concludiamo, togliendo i segmenti or ora aggiunti, che $K' < K$.

NOTA. — Per rendere quest'ultima dimostrazione assolutamente rigorosa, bisognerebbe far vedere che esiste un poligono di dati lati a_1, a_2, \dots, a_n iscrivibile in un cerchio. Facciamo la sola ipotesi che ogni segmento dato a_i sia minore della somma di tutti gli altri, perchè altrimenti non sarebbe possibile costruire nessun poligono coi lati dati.

Per dimostrare l'esistenza di un poligono iscrivibile, supponiamo che per es. a_1 sia il più grande (o uno dei più grandi) segmento dato. Preso un cerchio qualunque di raggio $R > \frac{1}{2}(a_2 + a_3 + \dots + a_n)$, conduco da un suo punto A in una direzione determinata (per es. a destra, guardando il centro) la corda AA_1 uguale al segmento a_1 , ed anche nella stessa direzione le corde $AA_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ uguali rispettivamente ai segmenti a_2, a_3, \dots, a_n , e poi nell'altra direzione (a sinistra) le corde $AA'_2, A'_2A'_3, \dots, A'_{n-1}A'_n$ uguali agli stessi segmenti. Poichè per ipotesi $a_1 < a_2 + a_3 + \dots + a_n$, il punto A_n per R abbastanza grande si trova (a destra) al di là del punto A_1 , e d'altra parte gli archi $AA_2 \dots A_n$ e $AA'_2 \dots A'_n$ sono minori del semicerchio. Denotiamo con A_0 il punto della circonferenza diametralmente opposto al punto A e cominciamo a diminuire il raggio R . Allora la lunghezza del cerchio andrà diminuendo, mentre gli archi $A_1A_{i-1}, A_1A'_{i+1}$ andranno aumentando (perchè le loro corde conservano la lunghezza a_{i+1}); quindi gli archi $A_nA_0A'_n, A_1A_0$ diminuiranno *a fortiori*, cosicchè tutti i tre punti A_1, A_n, A'_n andranno avvicinandosi al punto A_0 .

Ora al diminuire di R sono possibili solo tre casi.

1°. Il punto A_1 verrà a coincidere col punto A_0 prima dei punti A_n, A'_n . Ma, poichè al principio A_n era più vicino di A_1 ad A_0 , vi sarà un momento (cioè una grandezza di R) in cui A_1 coinciderà con A_n prima di coincidere con A_0 . In quel momento avremo un poligono $AA_2A_3 \dots A_n$ iscritto nel cerchio ed avente i lati dati (perchè $A_nA = A_1A = a_1$).

2°. I punti A_1, A_n, A'_n verranno nel punto A_0 simultaneamente. Allora in questo momento si avrà il poligono iscritto $AA_2A_3 \dots A_n$ (ovvero $AA'_2A'_3 \dots A'_n$).

3°. I punti A_n, A'_n verranno al punto A_0 prima del punto A_1 . Allora si potrà di nuovo diminuire R ed i punti A_n e A'_n andranno allontanandosi tra loro, cosicchè in un certo momento A'_n verrà a coincidere con A_1 , ed allora il poligono iscritto $AA'_2A'_3 \dots A'_n$ sarà il cercato.

Dunque in tutti i tre casi possibili esiste un poligono iscritto nel cerchio con lati dati.

Ora voglio dimostrare che, quando è dato anche l'ordine dei lati a_1, a_2, \dots, a_n , il poligono iscritto è *unico* (se non si vuole fare la distinzione fra due poligoni simmetrici).

Invero siano K_1 e K_2 due tali poligoni iscritti. Riguardando una volta K_1 ed un'altra volta K_2 come una parte del cerchio e applicando il ragionamento usato nella dimostrazione del teorema precedente, vedremo che sarebbe da una parte $K_1 > K_2$ e dall'altra parte $K_2 > K_1$, se i raggi di due cerchi, nei quali sono iscritti K_1 e K_2 , fossero disuguali. Cosicchè questi raggi devono essere uguali, ed allora K_1 e K_2 non possono esser diversi fra loro.

Notiamo ancora che, alterando l'ordine dei lati d'un poligono iscritto, noi non cambiamo nè il suo perimetro nè la sua area.

9. Poligoni regolari. — LEMMA. — *Se due triangoli differenti hanno uguale base e ugual perimetro, in quel triangolo in cui è maggiore la differenza degli angoli alla base è anche maggiore la differenza dei lati opposti a questi.*

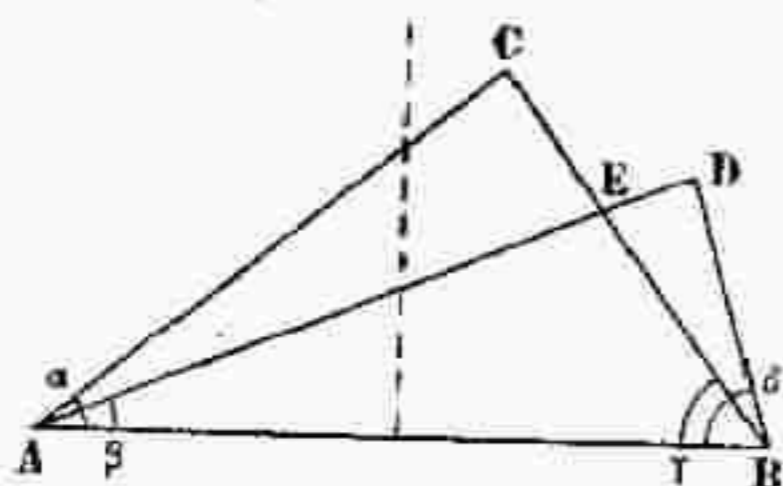


Fig. 11.

medesima parte della perpendicolare nel punto di mezzo della base AB (fig. 11).

Denotiamo con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gli angoli alla base $\widehat{BAC}, \widehat{BAD}, \widehat{ABC}, \widehat{ABD}$, cosicchè $\alpha < \gamma$ e $\beta < \delta$.

Per ipotesi si ha:

$$AC + CB = AD + DB,$$

cosicchè il vertice C si trova fuori del triangolo ADB ed il vertice D fuori del triangolo ACB. Si ha dunque $\alpha > \beta$ ovvero $\alpha < \beta$. Sia $\alpha > \beta$. Si vede che allora dev'essere $\delta > \gamma$, e, poichè $\gamma > \alpha$, si ha:

$$\delta > \gamma > \alpha > \beta,$$

dunque:

$$\delta - \beta > \gamma - \alpha.$$

D'altra parte si ha in questo caso (rappresentato nella fig. 11), essendo E l'intersezione dei lati AD, BC:

$$\begin{aligned} AD + BC &= AE + ED + BE + EC = \\ &= (AE + EC) + (BE + ED) > AC + BD, \end{aligned}$$

ovvero:

$$AD - BD > AC - BC.$$

Se fosse $\alpha < \beta$, si dimostrerebbe in modo analogo che simultaneamente:

$$\delta - \beta < \gamma - \alpha \quad \text{e} \quad AD - BD < AC - BC.$$

Il lemma è così dimostrato. Ma si vede di più che quel triangolo, i cui lati ed i cui angoli alla base hanno le maggiori differenze, ha anche il più grande ed il più piccolo dei quattro angoli $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ alla base comune. Ora secondo il II° teorema fondamentale (§ 4) tale triangolo ha minore area. Si ha così il seguente importante

COROLLARIO. — *Quando i perimetri e le basi di due triangoli sono uguali, quello di essi i cui lati hanno differenza maggiore, ha area minore.*

TEOREMA I. — *Fra tutti gli n-goni isoperimetrici l'n-gono regolare ha la massima area.*

Nel § 5 si sono dimostrati due casi speciali di questo teorema, quelli cioè corrispondenti a $n=3$ ed a $n=4$. Ora possiamo dimostrarlo in tutta la sua generalità fondandoci sull'ultimo corollario e sul teorema sopra i poligoni iscritti (§ 8). Infatti basta far vedere che qualsiasi n -gono con lati disuguali ha area minore di un n -gono equilatero di ugual perimetro, perchè quest'ultimo, secondo il teorema ora citato (§ 8), è minore dell' n -gono *iscrittibile* formato cogli stessi lati, cioè dell' n -gono *regolare*.

Sia dato dunque un n -gono qualunque ABCDE di lati a, b, c, d, e (fig. 11). Voglio dimostrare ch'esso ha area minore di un n -gono isoperimetrico avente tutti i lati di lunghezza α , dove:

$$\alpha = \frac{a + b + c + d + e}{n}.$$

Notiamo prima di tutto che in un poligono convesso si possono scambiare due lati contigui senza alterare il perimetro nè l'area.

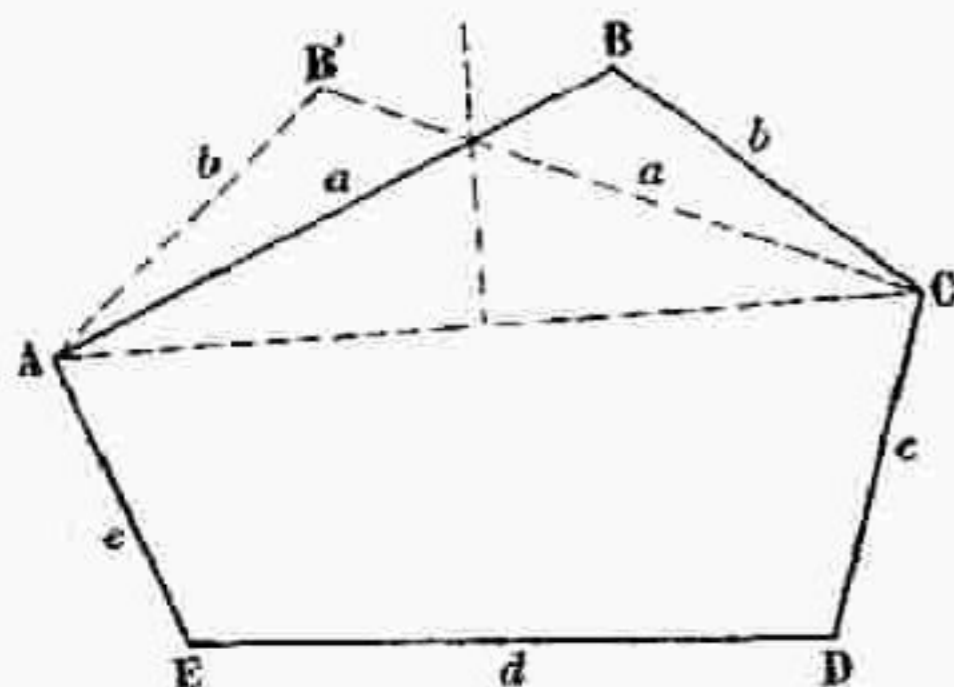


Fig. 12.

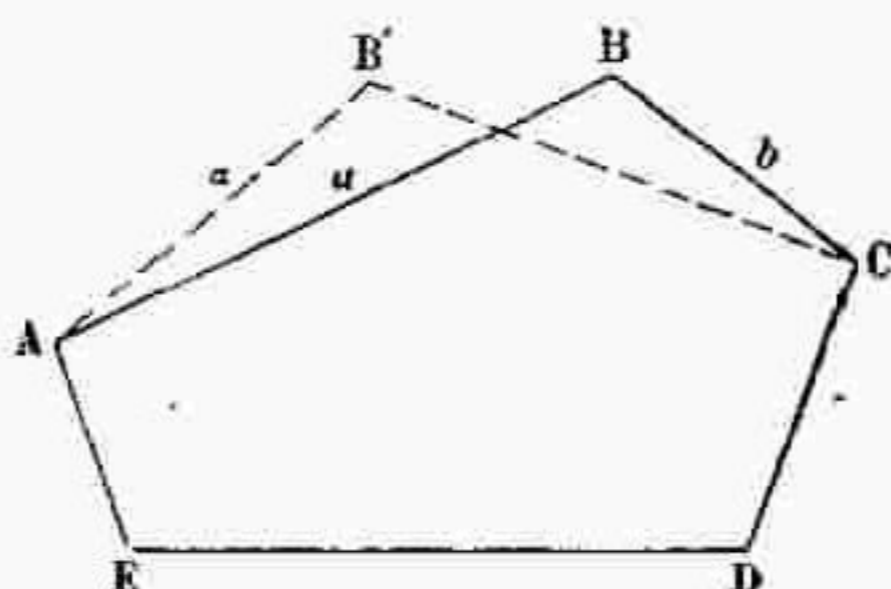


Fig. 13.

Infatti, se facciamo ruotare il triangolo ABC (fig. 12) intorno alla perpendicolare nel punto di mezzo del lato AC, i lati a e b del poligono si scambiano, mentre l'area del triangolo, e quindi anche quella del poligono, rimane inalterata.

Questa proprietà ci dà il mezzo di disporre i lati d'un poligono in un ordine qualsiasi, conservando il suo perimetro e la sua area.

Se non tutti i lati del nostro poligono ABCDE sono eguali tra loro, si troverà sempre almeno un lato maggiore della media aritmetica α ed almeno un lato minore di α . Disponiamo questi due lati l'uno accanto all'altro, e siano nella figura 13 i lati a e b , cosicchè:

$$a > \alpha > b.$$

Invece del triangolo ABC mettiamo il triangolo AB'C dello stesso perimetro ma col lato AB' eguale ad α . Siccome:

$$AB' + B'C = AB + BC \quad \text{e} \quad AB > AB' > BC,$$

si ha:

$$B'C > BC = b, \quad B'C < AB = a,$$

cioè:

$$a > B'C > b.$$

Dunque le lunghezze dei lati AB' e $B'C$ sono comprese fra a e b , sicchè:

$$|AB' - B'C| < a - b.$$

Applicando l'ultimo corollario, vediamo che:

$$\triangle AB'C > \triangle ABC,$$

cioè il nuovo poligono $AB'CDE$ ha lo stesso perimetro ma area maggiore del poligono $ABCDE$, mentre uno dei suoi lati AB' è uguale ad a . Può accadere che sia anche $B'C = a$. Ma se invece è $B'C \geq a$, disponiamo questo lato $B'C$ accanto ad un altro che sia $\leq a$ corrispondentemente, ed allora in modo analogo si può sostituire uno almeno di questi lati con un nuovo lato uguale ad a , conservando il perimetro ed aumentando l'area. Continuando in questo modo, arriveremo ad un poligono, i cui lati saranno tutti uguali ad a , e che avrà ugual perimetro ma area maggiore del poligono primitivo $ABCDE$. E questo, come abbiamo visto, è sufficiente per dimostrare il teorema in questione.

NOTA. — L'idea fondamentale dell'ultima dimostrazione, cioè la sostituzione successiva dei lati con altri uguali alla loro media aritmetica, appartiene al geometra tedesco contemporaneo R. STURM (vedi il suo libro: *Maxima und minima in der elementaren Geometrie*, Leipzig, Teubner, 1910). Questo metodo originale si applica anche, come fa lo stesso STURM, alla dimostrazione del teorema di algebra: *Il prodotto di n fattori positivi di somma costante è massimo quando tutti i fattori sono uguali tra loro.* (Vedi libro citato, pag. 3.)

L'ultimo teorema si riferiva ai poligoni di un numero fisso di lati. Per trovare il poligono di massima area quando il perimetro è dato ma il numero dei lati può assumere valori differenti, basterà confrontare i poligoni regolari dello stesso perimetro, perchè ogni poligono di questa specie, come abbiamo visto, è il più grande rappresentante di tutti i poligoni isoperimetrici dello stesso numero di lati. Ora il paragone fra poligoni regolari di n e di $n+k$ lati (isoperimetrici) si può fare basandosi sopra il seguente

TEOREMA II. — *L'area di un n-gono regolare è minore dell'area di un (n+1)-gono regolare avente lo stesso perimetro.*

DIMOSTRAZIONE. — Sul lato BC dell' n -gono regolare $ABCDEF$ (fig. 14) prendiamo un punto O ed uniamolo ad uno dei vertici più vicini ma non contigui A . Siccome $AB = BC$, si ha che $AB > BO$,

sicchè il triangolo ABO è minore del triangolo *isoscele* AB'O avente la base AO e ugual perimetro (§ 3, Coroll.). Perciò l'*n*-gono regolare ABCDEF è minore dell'*(n + 1)*-gono irregolare isoperimetrico AB'OCDEF, il quale alla sua volta è minore dell'*(n + 1)*-gono regolare di ugual perimetro.

Noi vediamo così che, quando il perimetro è costante, il triangolo equilatero è minore del quadrato, il quale è minore del pentagono regolare, e così via. Riguardando il *cerchio* come poligono regolare di infiniti lati, si potrebbe conchiuderne che il *cerchio* è maggiore di ogni *n*-gono regolare di ugual perimetro.

Ma questo sarebbe un *circolo vizioso*. Infatti, nella successione dei ragionamenti i quali ci hanno condotto a tale conclusione, noi ci siamo basati sul teorema dei poligoni iscritti, e questo è stato dimostrato (§ 8) con l'aiuto del teo-

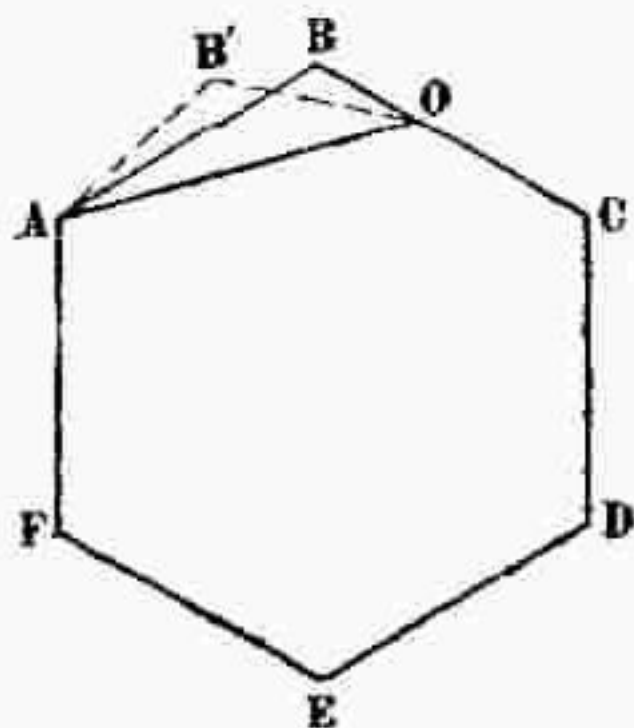


Fig. 14.

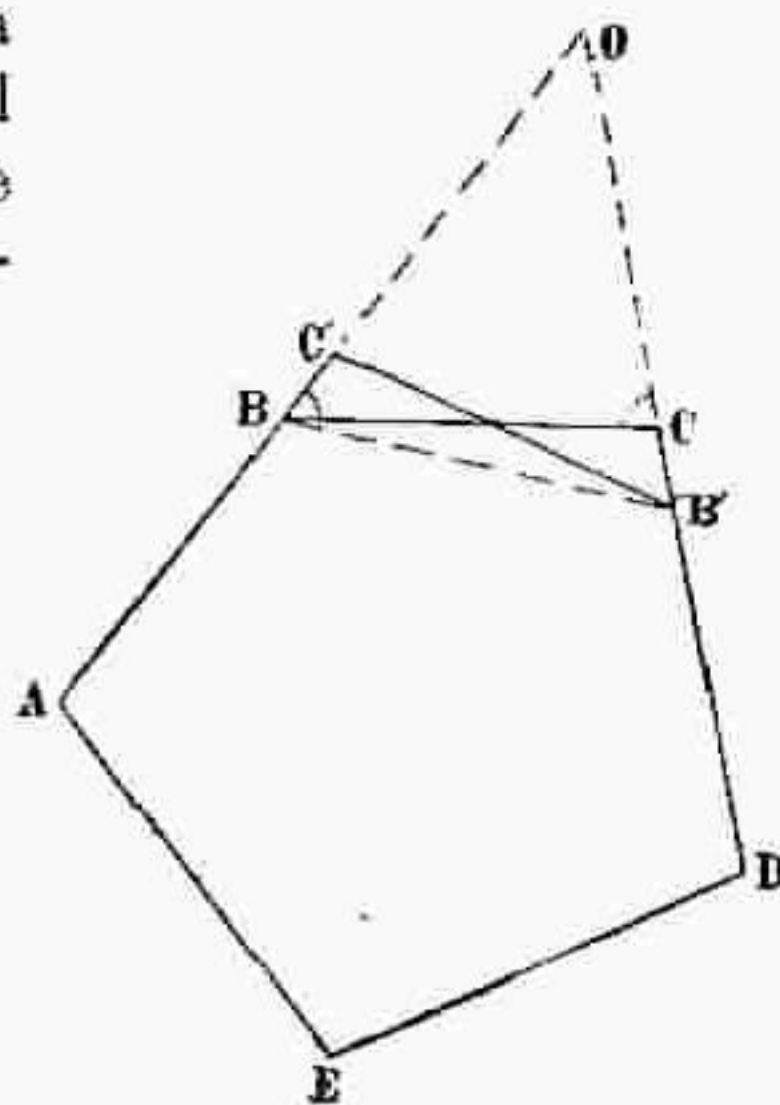


Fig. 15.

rema principale, cioè che il *cerchio* è più grande di ogni altra figura isoperimetrica, quindi anche di ogni poligono regolare isoperimetrico.

Intanto è interessante di notare che a quest'ultima conclusione (il *cerchio* è maggiore di ogni poligono isoperimetrico) si può arrivare anche senza presupporre il teorema principale sopra il *cerchio*, ma facendo invece l'ipotesi (postulato) che *fra tutti gli n-goni di dato perimetro ne esiste uno massimo*.

Ed infatti questo postulato permette, come ora vedremo, di dimostrare immediatamente il primo teorema di questo paragrafo (l'*n*-gono regolare è più grande di ogni *n*-gono irregolare), ed allora i ragionamenti seguenti si applicano senz'altro.

Sia dunque dato un *n*-gono *irregolare* qualsiasi ABCDE; faremo vedere ch'esso non può essere il massimo *n*-gono. Allora, secondo il postulato ammesso, l'*n*-gono regolare sarà il massimo.

Se l'*n*-gono ABCDE avesse dei lati disuguali, esso sarebbe *minore* di un altro *n*-gono con lati uguali, come si è dimostrato sopra (senza ricorrere al teorema principale).

Siano dunque i lati di ABCDE uguali tra loro. Gli angoli A, B, C, D, E non sono uguali tutti tra loro, perchè altrimenti l' n -gono sarebbe regolare. Si troveranno dunque sempre due angoli contigui disuguali, per es. sia $\widehat{ABC} > \widehat{BCD}$ (fig. 15).

Prolunghiamo i lati AB e DC fino all'incontro nel punto O (il quale può essere da una parte o dall'altra, od anche all'infinito, se i lati sono paralleli fra loro). Scambiamo i lati OB, OC, portando i punti B, C rispettivamente in B', C'. Per la disuguaglianza degli angoli ABC e BCD non potrà B'C' coincidere con CB, mentre sarà:

$$BC' = CB', \quad BC = B'C', \quad \triangle BCB' = \triangle BC'B'.$$

Dunque il perimetro e l'area del nuovo n -gono AC'B'DE sono uguali a quelli dell' n -gono ABCDE. Ma ora i lati AC' e C'B' non sono più uguali, perchè $AC' \neq AB$ e $C'B' = CB = AB$. Sostituendo al triangolo AC'B' un nuovo triangolo isoscele di base AB' e di ugual perimetro, aumenteremo l'area dell' n -gono AC'B'DE senza mutarne il perimetro. Dunque l' n -gono primitivo non era il massimo, benchè i suoi lati fossero uguali.

È importante osservare con quanta semplicità si dimostrano quest'ultimo teorema ed il teorema principale sul cerchio (secondo STEINER), quando si ammette il postulato d'esistenza della figura massima.

Limitandomi alle applicazioni accennate del primo metodo di STEINER, dirò qualche parola sulle illustrazioni fisiche delle proprietà delle figure massime.

(Continua)

DMITRI KRYJANOVSKY.

MOMENTI STATICI, MOMENTI D'INERZIA E MOMENTI DI ORDINE SUPERIORE

(Continuazione — v. fasc. VI, anno XXIX).

18. TEOREMA. — L' n^{mo} raggio d'inerzia rispetto ad un piano π è in valore assoluto la media geometrica delle distanze di π dagli n piani dell'involuppo Γ_n ad esso paralleli.

Consideriamo un sistema di assi ortogonali, e sia π un piano parallelo al piano yz , le cui coordinate sono $u, 0, 0$. I piani ad esso paralleli appartenenti all'involuppo Γ_n sono rappresentati dalle equazioni $\alpha_s x + 1 = 0$, dove $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ sono le n radici dell'equazione

$$\Sigma \alpha_i (ux^{(i)} + 1)^n = 0,$$

ovvero

$$u^n \sum a_i x_i^{(n)} + u^{n-1} \binom{n}{1} \sum a_i x_i^{(n-1)} + \dots + \sum a_i = 0.$$

Le distanze $\delta_1, \delta_2 \dots \delta_n$ dell'origine da questi piani sono rispettivamente $\delta_1 = -\frac{1}{\alpha_1}, \delta_2 = -\frac{1}{\alpha_2} \dots \delta_n = -\frac{1}{\alpha_n}$. Dunque

$$\delta_1 \cdot \delta_2 \dots \delta_n = (-1)^n \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = \frac{\sum a_i x_i^{(n)}}{\sum a_i} = \frac{I_n}{\sum a_i}$$

ossia

$$|\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n| = \rho^n$$

$$(30) \quad \rho = \sqrt[n]{|\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n|}.$$

19. TEOREMA. — *L'involuppo dei piani rispetto ai quali è costante il momento di ordine n di un sistema di punti P_i , affetti da coefficienti a_i , è una superficie di classe n oppure $2n$ secondo che n è pari o dispari.*

Se I_n è una costante nota, l'equazione (25) rappresenta un tale involuppo. Supponendo per semplicità gli assi ortogonali e mettendo al posto di k il suo valore (§ 2), tale equazione resa razionale diventa

$$(31) \quad \begin{cases} I_n (u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{n}{2}} = \sum a_i (ux^{(i)} + vy^{(i)} + wz^{(i)} + 1)^n & \text{se } n \text{ è pari} \\ I_n^2 (u^2 + v^2 + w^2)^n = \sum a_i (ux^{(i)} + vy^{(i)} + wz^{(i)} + 1)^{2n} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

In ambedue i casi queste superficie al variare di n costituiscono una schiera individuata dall'involuppo n^{mo} d'inerzia e dall'assoluto (circolo immaginario all'infinito) contato $\frac{n}{2}$ o n volte secondo che n è pari o dispari.

COROLLARIO. — *L'involuppo dei piani rispetto ai quali è costante il momento d'inerzia I_2 di un sistema di punti P_i , affetti da coefficienti a_i , è una quadrica.*

Le infinite quadriche corrispondenti agli ∞^2 valori di I_2 costituiscono un sistema confocale con la prima quadrica d'inerzia.

V. — Momenti d'inerzia rispetto ad un asse o ad un punto.

20. Torniamo ai momenti di 2° ordine o d'inerzia.

D'ora in avanti rappresenteremo sempre il momento d'inerzia ed il raggio d'inerzia rispetto ad un piano o ad una retta o ad un punto con le lettere I e ρ rispettivamente con un indice eguale al simbolo che rappresenta il piano o la retta o il punto.

Così I_π , I_r , I_0 rappresenteranno i momenti d'inerzia e ρ_π , ρ_r , ρ_0 i raggi d'inerzia rispetto al piano π , alla retta r , al punto O ; I_{xy} , I_{rx} rappresentano i momenti d'inerzia rispetto alla retta d'intersezione dei piani x , y e rispetto al punto comune al piano π e alla retta r , ecc.

Nel cap. II e III ci siamo occupati dei momenti e raggi d'inerzia rispetto ad un piano; in molte quistioni pratiche occorre considerare i momenti d'inerzia rispetto ad una retta (asse) o ad un punto (centro). Tali momenti d'inerzia però si deducono facilmente da quelli relativi a piani per mezzo dei teoremi seguenti teoremi.

21. TEOREMA. — *Il momento d'inerzia di un sistema rispetto ad un asse è eguale alla somma dei momenti d'inerzia rispetto a due piani perpendicolari che passano per esso.*

Si prenda la retta data per asse delle z e due piani arbitrari condotti per essa e perpendicolari tra loro per piani xz e yz .

Indicando con d_i la distanza dalla retta considerata di un punto $P_i(x_i, y_i, z_i)$ si ha

$$d_i^2 = x_i^2 + y_i^2,$$

e quindi

$$\sum a_i d_i^2 = \sum a_i x_i^2 + \sum a_i y_i^2,$$

cioè

$$(32) \quad I_{xy} = I_x + I_y.$$

COROLLARIO. — *Quando i coefficienti a_i sono tutti positivi, il raggio d'inerzia rispetto ad un asse è eguale all'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha per cateti i raggi d'inerzia rispetto a due piani perpendicolari qualunque che passino per esso.*

Essendo nel caso considerato

$$I_{xy} = \rho_{xy}^2 \sum a_i, \quad I_x = \rho_x^2 \sum a_i, \quad I_y = \rho_y^2 \sum a_i,$$

dalla eguaglianza (32) si ricava l'altra

$$(33) \quad \rho_{xy}^2 = \rho_x^2 + \rho_y^2,$$

che dimostra la proprietà enunciata.

22. TEOREMA. — *Per ogni retta dello spazio passano due piani coniugati rispetto alla prima quadrica d'inerzia ortogonali fra loro.*

Infatti (§ 12) affinché due piani siano coniugati rispetto alla prima quadrica d'inerzia è necessario e sufficiente che il loro momento di 2° ordine misto sia nullo.

Se si prende per asse z la retta considerata e per assi x , y due rette ad essa perpendicolari condotte per un punto O di z , le equazioni di due piani perpendicolari condotti per z sono

$$\begin{cases} x \cos \alpha + y \sin \alpha = 0 \\ x \cos (90^\circ + \alpha) + y \sin (\alpha + 90^\circ) = 0, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x \cos \alpha + y \sin \alpha = 0 \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0. \end{cases}$$

Il momento misto di 2° ordine rispetto a questi due piani è dunque

$$\begin{aligned} I &= \sum a_i (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha) (-x_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha) \\ &= \cos \alpha \sin \alpha (\sum a_i y_i^2 - \sum a_i x_i^2) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \sum a_i x_i y_i, \end{aligned}$$

ovvero

$$(34) \quad I = \frac{\sin 2\alpha}{2} [\sum a_i y_i^2 - \sum a_i x_i^2] + \cos 2\alpha \cdot \sum a_i x_i y_i.$$

Affinchè questo sia nullo è necessario e sufficiente che sia

$$(35) \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \sum a_i x_i y_i}{\sum a_i x_i^2 - \sum a_i y_i^2}.$$

Si trovano di qui due valori per α (che differiscono di 90°), i quali danno le due direzioni dei piani, condotti per la retta z coniugati rispetto alla prima quadrica d'inerzia e perpendicolari fra loro.

Soltanto nel caso che sia

$$\sum a_i x_i y_i = 0, \quad \sum a_i y_i^2 = \sum a_i x_i^2,$$

si ha dalla (34) $I = 0$ per qualsiasi valore di α e tutte le coppie di piani coniugati condotti per la r sono perpendicolari. Se ne ricavano i seguenti

COROLLARI. — 1°. *Se per una retta passano due coppie di piani coniugati rispetto alla prima quadrica d'inerzia e perpendicolari, tutte le altre coppie di piani coniugati che passano per essa sono perpendicolari, e viceversa due piani perpendicolari passanti per essa sono coniugati.*

2°. *Se per una retta passano due piani coniugati, aventi raggi d'inerzia uguali, tutte le coppie di piani coniugati che passano per essa sono perpendicolari. Il momento d'inerzia rispetto ad una tal retta è eguale al doppio del momento d'inerzia rispetto ad un piano qualsiasi che passa per esso.*

Infatti, essendo $\sum a_i y_i^2 = \sum a_i x_i^2$, si ha

$$I_{xy} = I_x + I_y = 2 I_x$$

ecc. Si deduce anche

$$\rho_{xy}^2 = 2 \rho_x^2,$$

ossia

$$\rho_{xy} = \rho_x \sqrt{2}.$$

23. DEFINIZIONE. — Si chiamano *direzioni principali d'inerzia* relative ad un punto O gli spigoli di un triedro trirettangolo autoconiugato rispetto alla quadrica di Binet ed avente per vertice O .

TEOREMA. — Per ogni punto dello spazio, non appartenente ad una conica focale della quadrica di Binet, esiste una ed una sola terna di direzioni principali d'inerzia. Per ogni punto appartenente ad una conica focale ne esistono ∞' .

È noto che ogni punto dello spazio è vertice di un solo triedro triangolare auto-coniugato rispetto ad una quadrica qualsiasi data; esistono però ∞' punti, detti *fuochi della quadrica*, per ciascuno dei quali passa una retta, detta *asse focale*, tali che ogni coppia di piani perpendicolari condotti per essa, forma col piano perpendicolare alla retta medesima, condotto per quel punto un triedro trirettangolo auto-coniugato rispetto alla quadrica data. La retta coniugata, rispetto alla quadrica, di un asse focale si chiama *direttrice*.

Il luogo dei fuochi è costituito da tre (o due) coniche dette *coniche focali* e l'asse focale corrispondente ad un fuoco è la tangente alla conica focale che passa per quel fuoco.

È pure noto che se un punto è esterno alla quadrica gli spigoli del triedro trirettangolo auto-coniugato suddetto sono gli assi del cono circoscritto avente per vertice quel punto, e che questo cono è di rotazione se il punto considerato è un fuoco.

Più precisamente se la quadrica è centrale e la sua equazione riferita agli assi è

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1,$$

le coniche focali sono rappresentate dalle coppie di equazioni

$$\begin{aligned} x=0, & \quad \frac{y^2}{B-A} + \frac{z^2}{C-A} = 1, \\ y=0, & \quad \frac{x^2}{A-B} + \frac{z^2}{A-C} = 1, \\ z=0, & \quad \frac{x^2}{A-C} + \frac{y^2}{B-C} = 1. \end{aligned}$$

Se la quadrica è un paraboloide e la sua equazione riferita ai piani diametrali principali e al piano tangente nel vertice è

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,$$

le coniche focali sono rappresentate dalle coppie di equazioni

$$\begin{aligned} x=0, & \quad \frac{y^2}{q-p} = 2z-p, \\ y=0, & \quad \frac{x^2}{p-q} = 2z-q. \end{aligned}$$

Gli assi focali sono dunque tutte e sole le rette tali che ogni coppia di piani coniugati condotti per una qualunque di esse sono perpendicolari. Per il § precedente dunque, i momenti d'inerzia ri-

spetto a tutti i piani che passano per un asse focale sono eguali, il momento d'inerzia rispetto all'asse focale è il doppio di quello relativo ad un piano che passa per esso.

Per esempio nel caso in cui la quadrica d'inerzia è un ellissoide immaginario (che è il più comune in pratica) A, B, C sono negativi, la equazione della quadrica si può scrivere

$$\frac{x^2}{-a^2} + \frac{y^2}{-b^2} + \frac{z^2}{-c^2} = 1,$$

e le coniche focali sono

$$x=0, \quad \frac{y^2}{a^2-b^2} + \frac{z^2}{a^2-c^2} = 1,$$

$$y=0, \quad \frac{x^2}{b^2-a^2} + \frac{z^2}{b^2-c^2} = 1,$$

$$z=0, \quad \frac{x^2}{c^2-a^2} + \frac{y^2}{c^2-b^2} = 1.$$

Se $a > b > c$, la prima di queste è un'ellisse reale, la seconda un'iperbole, la terza un'ellisse immaginaria.

COROLLARIO. — Ogni asse focale della prima quadrica d'inerzia gode della proprietà che il momento d'inerzia rispetto ad esso è il doppio del momento d'inerzia rispetto a qualsiasi piano per esso.

24. TEOREMA. — Quando i coefficienti a_i sono tutti dello stesso segno, il raggio d'inerzia di un sistema di punti rispetto ad una retta arbitraria r è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha per cateti il raggio d'inerzia rispetto alla retta r' parallela ad r condotta per il baricentro del sistema e la distanza delle due rette.

Si consideri un sistema ortogonale di assi x', y', z' , che abbia per origine il baricentro del sistema e per asse z' la retta r' ed uno di assi x, y, z ad essi paralleli che abbia per asse z la r .

Le formole di trasformazione delle coordinate sono

$$\begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y' \\ z = c + z' \end{cases}$$

dove a, b, c , sono le coordinate del baricentro rispetto al sistema x, y, z . I momenti d'inerzia rispetto ai piani $x=0, y=0$ sono

$$I_x = \sum a_i x_i^2 = \sum a_i (a + x_i')^2 = a^2 \sum a_i + \sum a_i x_i'^2 = a^2 \sum a_i + I_{x'},$$

$$I_y = \sum a_i y_i^2 = \sum a_i (b + y_i')^2 = b^2 \sum a_i + \sum a_i y_i'^2 = b^2 \sum a_i + I_{y'},$$

perchè $\sum a_i x_i' = 0, \sum a_i y_i' = 0$, passando i piani $x'=0, y'=0$ per il baricentro (§ 2).

Sommando l'equazioni precedenti si ha

$$I_x + I_y = (a^2 + b^2) \sum a_i + I_{x'} + I_{y'},$$

ovvero indicando con δ la distanza delle rette r, r'

$$I_r = \delta^2 \Sigma a_i + I_{r'}$$

e passando ai raggi d'inerzia, nell'ipotesi che le a_i siano tutte di egual segno,

$$(36) \quad \rho_r^2 = \delta^2 + \rho_{r'}^2.$$

25. TEOREMA. — *Il momento d'inerzia rispetto ad un punto è eguale alla somma dei momenti d'inerzia rispetto a tre piani qualunque, perpendicolari fra loro due a due, passanti per quel punto.*

Si prenda il punto dato O come origine di un sistema d'assi ortogonali qualunque.

Indicando con d_i la distanza di un punto $P_i(x_i, y_i, z_i)$ dall'origine O , si ha

$$d_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2,$$

e perciò

$$\Sigma a_i d_i^2 = \Sigma a_i x_i^2 + \Sigma a_i y_i^2 + \Sigma a_i z_i^2,$$

ovvero

$$I_0 = I_x + I_y + I_z.$$

COROLLARI. — 1°. *Quando i coefficienti a_i sono tutti di egual segno, il raggio d'inerzia di un sistema rispetto ad un punto è eguale alla diagonale di un parallelepipedo rettangolo che ha per lati i raggi d'inerzia rispetto a tre piani perpendicolari fra loro due a due passanti per quel punto.*

I coefficienti a_i essendo tutti di egual segno, si ha

$$I_0 = \rho_0^2 \Sigma a_i, \quad I_x = \rho_x^2 \Sigma a_i, \quad I_y = \rho_y^2 \Sigma a_i, \quad I_z = \rho_z^2 \Sigma a_i,$$

e perciò dalla equazione precedente discende l'altra

$$(37) \quad \rho_0^2 = \rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2,$$

che dimostra la proprietà enunciata.

2°. *Quando i coefficienti a_i sono tutti di egual segno, il raggio d'inerzia rispetto ad un punto è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha per cateti i raggi d'inerzia corrispondenti ad una retta qualunque ed al piano ad esso perpendicolare che passano per quel punto.*

Infatti essendo (§ 21, Cor.) $\rho_x^2 + \rho_y^2 = \rho_{xy}^2$ la (37) diventa

$$(38) \quad \rho_0^2 = \rho_{xy}^2 + \rho_z^2.$$

26. TEOREMA. — *Considerando una stella di piani aventi per centro un punto O , se a ciascuno di essi piani π si conduce la perpendicolare per O e su essa, a partire da O , si prendono due segmenti OP, OP' eguali all'inverso del raggio d'inerzia rispetto a π , il luogo dei punti P, P' è una quadrica.*

E noto che ogni punto dello spazio, che non sia un fuoco della prima quadrica d'inerzia, è vertice di un triedro trirettangolo auto-

coniugato rispetto alla quadrica stessa; e ogni fuoco è vertice di infiniti di questi triedri i quali hanno in comune uno spigolo (§ 23).

Si prenda per triedro fondamentale il triedro (o uno dei triedri) suddetto avente per vertice il punto O ; ogni piano π condotto per esso ha una equazione della forma

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0,$$

essendo α, β, γ gli angoli che la normale ad esso fa con gli assi; e la distanza di un punto $P_i(x_i, y_i, z_i)$ da esso è

$$d_i = x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma,$$

perciò il momento d'inerzia I_π rispetto ad esso piano è

$$\begin{aligned} I_\pi &= \sum a_i d_i^2 = \sum a_i (x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma)^2 \\ &= \cos^2 \alpha \sum a_i x_i^2 + \cos^2 \beta \sum a_i y_i^2 + \cos^2 \gamma \sum a_i z_i^2, \end{aligned}$$

perchè $\sum a_i y_i z_i = \sum a_i z_i x_i = \sum a_i x_i y_i = 0$, essendo per ipotesi i piani $x=0, y=0, z=0$ coniugati due a due (§ 12).

L'equazione ottenuta si può anche scrivere sotto la forma

$$I_\pi = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma,$$

ovvero, nel caso che le a_i siano tutte di egual segno,

$$(39) \quad \rho_\pi^2 = \rho_x^2 \cos^2 \alpha + \rho_y^2 \cos^2 \beta + \rho_z^2 \cos^2 \gamma.$$

Se considero l'ellissoide che ha per assi gli assi x, y, z , essendo

$$\frac{1}{\rho_x^2}, \quad \frac{1}{\rho_y^2}, \quad \frac{1}{\rho_z^2},$$

le lunghezze dei corrispondenti semiassi esso è rappresentato dalla equazione

$$\rho_x^2 x^2 + \rho_y^2 y^2 + \rho_z^2 z^2 = 1.$$

chiamando l la lunghezza del semidiametro perpendicolare al piano considerato, le coordinate del suo estremo sono

$$x = l \cos \alpha, \quad y = l \cos \beta, \quad z = l \cos \gamma,$$

e verificano l'equazione dell'ellissoide; perciò si ha

$$l^2 (\rho_x^2 \cos^2 \alpha + \rho_y^2 \cos^2 \beta + \rho_z^2 \cos^2 \gamma) = 1.$$

Confrontando questa equazione con la (39) si ha

$$l = \frac{1}{\rho},$$

come volevasi dimostrare.

DEFINIZIONE. — Chiameremo l'ellissoide del teorema precedente *ellissoide della stella di piani O*, o *ellissoide di Poincot*.

COROLLARIO. — Gli ellissoidi di Poincot in generale non sono di rotazione; soltanto quelli corrispondenti ad un fuoco della prima quadrica d'inerzia sono di rotazione, e il corrispondente asse è la tangente in quel fuoco alla conica focale che passa per esso.

Infatti ogni fuoco è vertice di ∞ triedri trirettangoli auto-coniugati rispetto alla quadrica di Binet, ed aventi in comune uno spigolo che è la tangente in quel fuoco alla conica focale. Tutti questi triedri hanno per spigoli una terna di diametri coniugati rispetto all'ellissoide della stella di piani O, la quale perciò deve essere di rotazione ed avere per asse di rotazione lo spigolo comune a tutti i triedri suddetti.

27. TEOREMA. — Considerando una stella di rette col centro in un punto O, se su ciascuna di esse si prende un segmento eguale all'inverso del raggio d'inerzia relativo a quella retta, il luogo degli estremi costituisce un ellissoide coassiale con quello corrispondente alla stella di piani.

Infatti se una retta r fa con gli assi x, y, z gli angoli α, β, γ e π è il piano perpendicolare ad r in un suo punto O, per la formula (36) si ha

$$\rho_r^2 = \rho_0^2 - \rho_\pi^2$$

ossia

$$\begin{aligned} \rho_r^2 &= \rho_0^2 - (\rho_x^2 \cos^2 \alpha + \rho_y^2 \cos^2 \beta + \rho_z^2 \cos^2 \gamma) \\ &= \rho_0^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (\rho_x^2 \cos^2 \alpha + \rho_y^2 \cos^2 \beta + \rho_z^2 \cos^2 \gamma) \\ &= (\rho_0^2 - \rho_x^2) \cos^2 \alpha + (\rho_0^2 - \rho_y^2) \cos^2 \beta + (\rho_0^2 - \rho_z^2) \cos^2 \gamma, \end{aligned}$$

ossia per la formula (33) del § 21 e (38) del § 25

$$(40) \quad \rho_r^2 = \rho_{yz}^2 \cos^2 \alpha + \rho_{xz}^2 \cos^2 \beta + \rho_{xy}^2 \cos^2 \gamma.$$

Ripetendo la dimostrazione del § precedente, si vede che, se si considera l'ellissoide che ha per assi le rette x, y, z , essendo le lunghezze dei semiassi corrispondenti rispettivamente eguali a

$$\frac{1}{\rho_{yz}}, \quad \frac{1}{\rho_{xz}}, \quad \frac{1}{\rho_{xy}},$$

il semidiametro disposto sulla retta r ha la lunghezza $\frac{1}{\rho_r}$.

DEFINIZIONE. — Chiameremo l'ellissoide del teorema precedente *ellissoide corrispondente alla stella di rette O*.

28. È importante osservare le relazioni che legano: i semiassi dell'ellissoide corrispondenti alle stelle di piani O e i semiassi del-

l'ell
e a

ovv

ce/
pr
as

ellissoide corrispondente alla stella di rette O . Detti a, b, c i primi, a', b', c' i secondi abbiamo trovato

$$\begin{cases} a^2 = \frac{1}{\rho_x^2}, & b^2 = \frac{1}{\rho_y^2}, & c^2 = \frac{1}{\rho_z^2}, \\ a'^2 = \frac{1}{\rho_y^2 + \rho_z^2}, & b'^2 = \frac{1}{\rho_z^2 + \rho_x^2}, & c'^2 = \frac{1}{\rho_x^2 + \rho_y^2}, \end{cases}$$

però

$$\begin{cases} \rho_x^2 = \frac{1}{a^2}, & \rho_y^2 = \frac{1}{b^2}, & \rho_z^2 = \frac{1}{c^2}, \\ \rho_y^2 + \rho_z^2 = \frac{1}{a'^2}, & \rho_z^2 + \rho_x^2 = \frac{1}{b'^2}, & \rho_x^2 + \rho_y^2 = \frac{1}{c'^2}. \end{cases}$$

Se ne deduce

$$\begin{cases} \frac{1}{a'^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}, \\ \frac{1}{b'^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}, \\ \frac{1}{c'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}. \end{cases}$$

Perciò

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} + \frac{1}{c'^2} \right) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Se ne ricava anche

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} + \frac{1}{c'^2} \right), \\ \frac{1}{b^2} &= \frac{1}{2} \left(+\frac{1}{a'^2} - \frac{1}{b'^2} + \frac{1}{c'^2} \right), \\ \frac{1}{c^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} - \frac{1}{c'^2} \right). \end{aligned}$$

Se per esempio $b=c$, è anche $b'=c'$ e viceversa.

COROLLARIO. — *L'ellissoide corrispondente ad una stella di rette di centro O non è in generale di rotazione; soltanto se O è un fuoco della prima quadrica d'inerzia, l'ellissoide suddetto è di rotazione ed ha per asse la tangente in O alla conica focale che passa per quel punto.*

(Continua)

G. LAZZERI.



LA SECONDA IPERSFERA DI LEMOINE

pel pentaedro di ugual momento di S_4

I. Trattando in altro articolo ⁽¹⁾ della prima ipersfera di LEMOINE pel pentaedro di ugual momento, trovammo una famiglia di ipersfere definite dalle equazioni:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{12} = x_{13} = x_{14} = x_{15} \\ \frac{1}{x_{12}} = x_{23} = x_{24} = x_{25} \\ \frac{1}{x_{13}} = \frac{1}{x_{23}} = x_{34} = x_{35} \\ \frac{1}{x_{14}} = \frac{1}{x_{24}} = \frac{1}{x_{34}} = x_{45} \\ \frac{1}{x_{15}} = \frac{1}{x_{25}} = \frac{1}{x_{35}} = \frac{1}{x_{45}} \end{array} \right.$$

che chiamammo *prima famiglia delle ipersfere di TUCKER*: di questa famiglia faceva parte la prima ipersfera di LEMOINE.

Consideriamo ora le equazioni:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x'_{12} = x'_{13} = x'_{14} = x'_{15} \\ \frac{1}{x_{12}} = x'_{23} = x'_{24} = x'_{25} \\ \frac{1}{x_{13}} = \frac{1}{x_{23}} = x'_{34} = x'_{35} \\ \frac{1}{x_{14}} = \frac{1}{x_{24}} = \frac{1}{x_{34}} = x'_{45} \\ \frac{1}{x_{15}} = \frac{1}{x_{25}} = \frac{1}{x_{35}} = \frac{1}{x_{45}} \end{array} \right.$$

Viene spontanea la domanda: definiscono anche le (2) una famiglia di ipersfere?

Bisogna per questo ricordare che posto

$$(2') \quad \left\{ \begin{array}{l} A_i P_{ik} : P_{jk} A_k = x_{jk} \quad (x'_{ik} = x'_{ki}) \\ A_j Q_{ik} : Q_{ik} A_k = x_{ik} \quad (x_{ik} = x_{ki}) \end{array} \right.$$

colla convenzione che l'indice i sia minore dell'indice k , le equazioni che esprimevano le condizioni necessarie e sufficienti, perchè

⁽¹⁾ "Il pentaedro di ugual momento nell' S_4 e la prima ipersfera di LEMOINE" (*Periodico di Matematica*, anno XXIX, fasc. IV, marzo 1914).

i punti P e Q fossero sopra una ipersfera erano:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \frac{l_{12}^2}{(x_{12} + 1)(x'_{12} + 1)} = \\
 & \frac{l_{13}^2 x_{23} x'_{23}}{(x_{13} + 1)(x'_{13} + 1)} = \frac{l_{23}^2 x_{23} x'_{23}}{(x_{23} + 1)(x'_{23} + 1)} = \\
 & \frac{l_{14}^2 x_{23} x'_{23} x_{34} x'_{34}}{(x_{14} + 1)(x'_{14} + 1)} = \frac{l_{24}^2 x_{23} x'_{23} x_{34} x'_{34}}{(x_{24} + 1)(x'_{24} + 1)} = \\
 & \qquad \qquad \qquad = \frac{l_{34}^2 x_{23} x'_{23} x_{34} x'_{34}}{(x_{34} + 1)(x'_{34} + 1)} = \\
 & \frac{l_{15}^2 x_{23} x'_{23} x_{34} x'_{34} x_{45} x'_{45}}{(x_{15} + 1)(x'_{15} + 1)} = \frac{l_{25}^2 x_{23} x'_{23} x_{34} x'_{34} x_{45} x'_{45}}{(x_{25} + 1)(x'_{25} + 1)} = \\
 & \qquad \qquad \qquad = \frac{l_{35}^2 x_{23} x'_{23} x_{34} x'_{34} x_{45} x'_{45}}{(x_{35} + 1)(x'_{35} + 1)} = \frac{l_{45}^2 x_{23} x'_{23} x_{34} x'_{34} x_{45} x'_{45}}{(x_{45} + 1)(x'_{45} + 1)}.
 \end{aligned} \right\} (3) \\
 & \left. \begin{aligned}
 & x_{13} x'_{13} = x_{12} x'_{12} x_{23} x'_{23} \\
 & x_{14} x'_{14} = x_{12} x'_{12} x_{23} x'_{23} x_{34} x'_{34} \\
 & x_{15} x'_{15} = x_{12} x'_{12} x_{23} x'_{23} x_{34} x'_{34} x_{45} x'_{45} \\
 & x_{24} x'_{24} = x_{23} x'_{23} x_{34} x'_{34} \\
 & x_{25} x'_{25} = x_{23} x'_{23} x_{34} x'_{34} x_{45} x'_{45} \\
 & x_{35} x'_{35} = x_{34} x'_{34} x_{45} x'_{45}
 \end{aligned} \right\} (b)
 \end{aligned}$$

purchè fossero soddisfatte le condizioni esposte nel mio teorema fondamentale.

Se prendiamo ora a considerare le (3) e vi facciamo le sostituzioni (2), vediamo che le (3) (b) risultano identicamente verificate stante la loro simmetria nelle x, x' e l'esser esse medesime identicamente verificate nel mio precedente articolo per sostituzione delle (17). E le (3) (a) conducono per l'accennata simmetria alle formule (20) del citato articolo che riportiamo qui sotto:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & a_1 + 1 = \frac{l_{12} \cdot l_{13}}{l_{23}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \\
 & a_2 + 1 = \frac{l_{12} \cdot l_{23}}{l_{13}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \\
 & a_3 + 1 = \frac{l_{13} \cdot l_{23}}{l_{12}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \\
 & a_4 + 1 = \frac{l_{14} \cdot l_{24}}{l_{13}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \\
 & a_5 + 1 = \frac{l_{15} \cdot l_{25}}{l_{12}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.
 \end{aligned} \right\} (4)
 \end{aligned}$$

In esse λ è una funzione simmetrica di secondo grado nelle l : al suo variare si ottengono le ipersfere della seconda famiglia di TUCKER e fra queste si trova la seconda ipersfera di LEMOINE di cui

ci occupiamo. Le formule (18) del citato articolo, che avremmo trovato se avessimo svolto il procedimento, ci avrebbero detto che il pentaedro al quale ci riferiamo è di ugual momento.

Ci resta a trovare il valore di λ che individua la seconda ipersfera di LEMOINE: ciò sarà fatto nei paragrafi successivi.

2. È subito visto che

$$(5) \quad l_{12} \cdot (A_1 Q_{12}) = l_{13} \cdot (A_1 Q_{13}) = l_{14} \cdot (A_1 Q_{14}) = l_{15} \cdot (A_1 Q_{15}).$$

Ciò risulta subito dalle (2') e dalle (4). Ma allora la ipersfera circoscritta al pentaedro si potrà pensare come la corrispondente di un iperpiano parallelo all'iperpiano tangente in A_1 nell'inversione che ha per centro A_1 e per potenza uno dei quattro prodotti precedenti.

Di questi iperpiani paralleli all'iperpiano tangente in A_1 consideriamo quello che passa per il punto di LEMOINE del pentaedro di ugual momento e chiamiamo D il corrispondente di questo punto K nell'inversione. Per metterci in questa ipotesi basterà prendere come potenza d'inversione

$$(A_1 K) \cdot (A_1 D).$$

Dobbiamo tener presente che D si trova sull'ipersfera circoscritta al pentaedro.

Congiungiamo ora il vertice A_1 col punto di LEMOINE K_1 del tetraedro di ugual momento $A_2 A_3 A_4 A_5$: la congiungente passerà per K . Il teorema di Van Aubel esteso al pentaedro ci permetterà di calcolare il rapporto secondo cui K divide $A_1 K_1$. Gli iperpiani che proiettano K sugli spigoli uscenti da A_1 dividono questi spigoli

$$A_1 A_2 \quad A_1 A_3 \quad A_1 A_4 \quad A_1 A_5$$

rispettivamente nei rapporti:

$$\frac{c_2^4}{c_1^4} \quad \frac{c_3^4}{c_1^4} \quad \frac{c_4^4}{c_1^4} \quad \frac{c_5^4}{c_1^4}$$

per cui sarà

$$(6) \quad \frac{A_1 K}{K K_1} = \frac{c_2^4 + c_3^4 + c_4^4 + c_5^4}{c_1^4}.$$

Va ricordato che per le (10) dell'articolo citato è

$$c_1^2 = l_{23} \cdot l_{45} = l_{34} \cdot l_{25} = l_{24} \cdot l_{35}$$

$$c_2^2 = l_{13} \cdot l_{45} = l_{14} \cdot l_{35} = l_{34} \cdot l_{15}$$

e così via.

Dalla formula (6) segue, ponendo

$$(7) \quad (A_1 K) = \frac{S = \sum_i c_i^4}{c_2^4 + c_3^4 + c_4^4 + c_5^4} \cdot (A_1 K_1)$$

e così la ricerca di $(A_1 K)$ viene a dipendere da quella di $(A_1 K_1)$.

3. Facciamo qui una parentesi e riferiamoci per un momento al tetraedro isodinamico $A_1A_2A_3A_4$ dell'articolo segnato in nota ⁽¹⁾ conservando le notazioni in quello usate e osserviamo che la potenza di K rispetto alla sfera circoscritta è data da $(A_1K) \cdot (KD)$. Ma

$$(KD) = (A_1D) - (A_1K),$$

per cui sarà:

$$p(K) = (A_1K) \cdot \{(A_1D) - (A_1K)\} = \\ = (A_1K) \cdot (A_1D) - (A_1K)^2.$$

Ora la (19) dà

$$(A_1K) \cdot (A_1D) = \frac{3p^4 \cdot s_1}{s\sigma_1^3}$$

e le (8), (18) danno:

$$(A_1K)^2 = 3 \frac{s_1^3}{s^2} \cdot \left\{ \frac{p^4}{\sigma_1^2} - \frac{P_1^6}{\sigma_1^4} \right\}$$

e quindi:

$$p(K) = \frac{3 \cdot s_1}{\sigma_1^2 \cdot s} \cdot \left\{ p^4 - \frac{s_1 p^4}{s} + \frac{s_1 P_1^6}{s\sigma_1^2} \right\} \\ = \frac{3 \cdot s_1}{\sigma_1^2 \cdot s} \cdot \left\{ \frac{p^4}{s} (s - s_1) + \frac{s_1 P_1^6}{s\sigma_1^2} \right\} \\ = \frac{3 \cdot s_1}{\sigma_1^2 \cdot s} \cdot \left\{ \frac{p^4 \cdot R_1 \sigma_1}{s} + \frac{s_1 P_1^6}{s\sigma_1^2} \right\} \\ = \frac{3 \cdot s_1}{\sigma_1^2 \cdot s^2} \cdot \left\{ \frac{p^4 \cdot P_1^3}{4} + \frac{s_1 P_1^6}{\sigma_1^2} \right\} \\ = \frac{3s_1 P_1^3}{\sigma_1^2 \cdot s^2} \cdot \left\{ \frac{p^4}{4} + \frac{s_1 P_1^3}{\sigma_1^2} \right\}.$$

Ma è

$$P_1^3 \cdot s_1 = \frac{p^4 \cdot \sigma_1^2}{4},$$

per cui infine:

$$(8) \quad p(K) = \frac{3}{8} \cdot \frac{p^8}{s^2}.$$

La parentesi è chiusa.

4. Se applichiamo la precedente formula (8) alla ricerca della potenza del punto K_1 rispetto alla sfera circoscritta ad $A_2A_3A_4A_5$, troviamo per essa l'espressione

$$(9) \quad \frac{3}{8} \cdot \frac{c_1^8}{z^2}$$

dove z rappresenta l'espressione:

$$(10) \quad \frac{1}{4} \{ l_{23} \cdot l_{24} \cdot l_{34} + l_{23} \cdot l_{35} \cdot l_{35} + l_{24} \cdot l_{35} \cdot l_{45} + l_{34} \cdot l_{25} \cdot l_{45} \}.$$

⁽¹⁾ * La terza sfera di LEMOINE per il tetraedro isodinamico o di ugual momento. Questo articolo deve essere pubblicato nel *Bollettino di Matematica* del prof. CONTI.

Ora la potenza di K_1 rispetto alla sfera circoscritta ad $A_2A_3A_4A_5$ è anche data dal prodotto $(A_1K_1) \cdot (K_1D)$ e allora dalla relazione

$$(A_1K_1) \cdot (K_1D) = \frac{3}{8} \cdot \frac{c_1^8}{z^2}.$$

Seguirà

$$(11) \quad (K_1D) = \frac{3}{8} \cdot \frac{c_1^8}{z^2} \cdot \frac{1}{(A_1K_1)}.$$

Questa formula ci fa conoscere (K_1D) una volta noto (A_1K_1) .
E siccome è

$$(A_1D) = (A_1K) + (K_1D) = (A_1K_1) + \frac{3}{8} \cdot \frac{c_1^8}{z^2} \cdot \frac{1}{(A_1K_1)},$$

la potenza

$$(A_1K) \cdot (A_1D)$$

verrà data dalla formula

$$(12) \quad (A_1K) \cdot (A_1D) = \frac{c_2^4 + c_3^4 + c_4^4 + c_5^4}{S} \cdot \left\{ (A_1K_1)^2 + \frac{3}{8} \cdot \frac{c_1^8}{z^2} \right\} = \\ = \frac{C_1}{S} \cdot \left\{ (A_1K_1)^2 + \frac{3}{8} \cdot \frac{c_1^8}{z^2} \right\}$$

posto per brevità

$$c_1 = S - c_1^4.$$

Ora per una formula trovata nel mio articolo sulla prima ipersfera di LEMOINE è

$$l_{ik}^2 c_i^4 \cdot c_k^4 = p^{10}.$$

Da questo segue che ogni l_{ik} si può esprimere per le c per mezzo della formula

$$(13) \quad l_{ik} = \frac{p^5}{c_i^2 \cdot c_k^2}.$$

Facendo uso di questa, l'espressione di z diverrà:

$$(14) \quad z = \frac{1}{4} \left\{ \frac{p^{15}}{c_2^4 c_3^4 c_4^4} + \frac{p^{15}}{c_2^4 c_3^4 c_5^4} + \frac{p^{15}}{c_3^4 c_4^4 c_5^4} + \frac{p^{15}}{c_2^4 c_4^4 c_5^4} \right\} = \\ = \frac{p^{15} \cdot c_1^4 \cdot (c_3^4 + c_3^4 + c_4^4 + c_5^4)}{4 \cdot p^{20}} = \frac{C_1 c_1^4}{4 \cdot p^6}.$$

E così si troverà

$$(15) \quad \frac{3}{8} \cdot \frac{c_1^8}{z^2} = \frac{3}{8} \cdot \frac{c_1^8 \cdot 16 \cdot p^{10}}{C_1^2 \cdot c_1^8} = \frac{6 \cdot p^{10}}{C_1^2}$$

per cui la (12) si potrà scrivere:

$$(16) \quad (A_1K) \cdot (A_1D) = \frac{C_1}{S} \cdot \left\{ (A_1K_1)^2 + \frac{6 \cdot p^{10}}{C_1^2} \right\}.$$

Siamo adesso ridotti alla ricerca di (A_1K_1) e a questo scopo si presta benissimo la seconda formula del teorema di STEWART per l' n -edro di S_{n-1} , che abbiamo dimostrato in questo pregevole giornale.

Poichè i vertici $A_1A_2A_3A_4A_5$ del nostro pentaedro di ugual momento sono carichi di masse $c_1^4 c_2^4 c_3^4 c_4^4 c_5^4$, la formula a cui alludiamo darà:

$$(17) \quad (A_1K_1)^2 = \frac{l_{12}^2 \frac{c_2^4}{c_1^4} + l_{13}^2 \frac{c_3^4}{c_1^4} + l_{14}^2 \frac{c_4^4}{c_1^4} + l_{15}^2 \frac{c_5^4}{c_1^4}}{c_2^4 + c_3^4 + c_4^4 + c_5^4} - \frac{l_{23}^2 \frac{c_2^4 \cdot c_3^4}{c_1^8} + l_{24}^2 \frac{c_2^4 c_4^4}{c_1^8} + l_{25}^2 \frac{c_2^4 c_5^4}{c_1^8} + l_{34}^2 \frac{c_3^4 c_4^4}{c_1^8} + l_{35}^2 \frac{c_3^4 c_5^4}{c_1^8} + l_{45}^2 \frac{c_4^4 c_5^4}{c_1^8}}{\left\{ \frac{c_2^4}{c_1^4} + \frac{c_3^4}{c_1^4} + \frac{c_4^4}{c_1^4} + \frac{c_5^4}{c_1^4} \right\}^2}$$

Esaminiamo separatamente ciascuna delle due frazioni del secondo membro della (18). Quanto alla prima essa può scriversi:

$$\frac{(l_{12}^2 c_2^4 + l_{13}^2 c_3^4 + l_{14}^2 c_4^4 + l_{15}^2 c_5^4) c_1^4}{c_1^4 \cdot C}$$

ovvero per la (12')

$$\frac{4p^{10}}{c_1^4 \cdot C_1}$$

Quanto poi alla seconda osserviamo che soppresso il c_1^8 e tenuto conto della (12') essa diventa:

$$\frac{6 \cdot p^{10}}{C_1^2}$$

La (11) potrà quindi scriversi brevemente così

$$(18) \quad (A_1K_1)^2 = \frac{4p^{10}}{c_1^4 \cdot C_1} - \frac{6p^{10}}{C_1^2}$$

Sostituendo ora nella (16) i valori dati dalle (15) e (18) otterremo, dopo le semplificazioni:

$$(19) \quad (A_1K) \cdot (A_1D) = \frac{4p^{10}}{S \cdot c_1^4}$$

5. Conosciuta così la potenza d'inversione, è facile calcolare il valore di λ . Invero, dall'essere per le (5), per esempio:

$$l_{12} \cdot (A_1Q_{12}) = \frac{4 \cdot p^{10}}{S \cdot c_1^4},$$

segue per le (2') e (4)

$$(20) \quad \frac{l_{23}}{l_{12} l_{13}} \cdot \sqrt{\lambda} = \frac{4 \cdot p^{10}}{S c_1^4}$$

E poichè per la (13) il primo membro della (20) può scriversi, riduzioni fatte,

$$\sqrt{\lambda} \cdot \frac{p^5}{c_1^4},$$

la (30) diverrà:

$$\sqrt{\lambda} \cdot \frac{p^5}{c_1^4} = \frac{4 \cdot p^{10}}{S \cdot c_1^4}$$

da cui si ricava

$$(21) \quad \sqrt{\lambda} = 4 \cdot \frac{p^5}{S}, \quad \lambda = 16 \cdot \frac{p^{10}}{S^2},$$

espressione manifestamente simmetrica e di secondo grado nella λ .

Tenendo conto di questa espressione di λ le equazioni (4) si potranno scrivere:

$$(22) \quad \begin{cases} a_1 + 1 = \frac{S}{4 \cdot c_1^4} \\ a_2 + 1 = \frac{S}{4 \cdot c_2^4} \\ a_3 + 1 = \frac{S}{4 \cdot c_3^4} \\ a_4 + 1 = \frac{S}{4 \cdot c_4^4} \\ a_5 + 1 = \frac{S}{4 \cdot c_5^4} \end{cases}$$

Riassumendo potremo dire:

“ Se per il punto di LEMOINE di un pentaedro di ugual momento si conducono gli iperpiani paralleli agli iperpiani tangenti nei vertici alla ipersfera circoscritta, questi iperpiani segano gli spigoli del pentaedro in 20 punti appartenenti a un'ipersfera di equazioni (22). Questa è l'ipersfera seconda di LEMOINE e fa parte della seconda famiglia delle ipersfere di TUCKER (2) o (4) e corrisponde al valore (21) del parametro λ ”.

Facciamo vedere che il tetraedro $Q_{12} Q_{13} Q_{14} Q_{15}$ è regolare. Si ha infatti, per esempio:

$$(Q_{12} Q_{13})^2 = (A_1 Q_{12})^2 + (A_1 Q_{13})^2 - 2 (A_1 Q_{12}) \cdot (A_1 Q_{13}) \cos \widehat{A_2 A_1 A_3}.$$

Ma è

$$\begin{cases} (A_1 Q_{12}) = 4l_{12} \frac{c_2^4}{S} \\ (A_1 Q_{13}) = 4l_{13} \cdot \frac{c_3^4}{S} \\ 2 \cos \widehat{A_2 A_1 A_3} = \frac{l_{12}^2 + l_{13}^2 - l_{23}^2}{l_{12} l_{13}} \end{cases}$$

per cui sostituendo e semplificando:

$$(23) \quad (Q_{12} Q_{13}) = 4 \cdot \frac{p^6}{S}.$$

Altri quattro tetraedri regolari esistono e li lasciamo ricercare al buon lettore: essi hanno il lato misurato dalla (23).

E. PICCIOLI.

L'EQUAZIONE INTRINSECA

delle curve che giacciono sopra una ipersuperf. cilindrica di rotazione in S_n .

Prendiamo una curva C dello spazio (lineare) con n dimensioni S_n , una curva cioè che possieda $n - 1$ raggi di curvatura $R_1 R_2 R_3 \dots R_{n-1}$. Indichiamo con

$$(\alpha_{11}, \alpha_{12} \dots \alpha_{1n}), (\alpha_{21}, \alpha_{22} \dots \alpha_{2n}) \dots (\alpha_{p1}, \alpha_{p2} \dots \alpha_{pn}) \dots (\alpha_{n1}, \alpha_{n2} \dots \alpha_{nn})$$

i coseni direttivi della *tangente*, *normale principale*, ... della $(p - 1)$ -normale, ... della $(n - 1)$ -normale rispettivamente e chiamiamo $x_1 x_2 \dots x_n$ le coordinate di un punto generico X della curva C , ed $y_1 y_2 \dots y_n$ quelle di un punto *fisso* Y dello spazio, punto che colla direzione $a_1 a_2 \dots a_n$ individua una retta a dello spazio medesimo.

Limitandoci per brevità allo spazio con quattro dimensioni, dopo che l'estensione agli spazi di dimensione superiore non offrirà difficoltà alcuna, prendiamo a considerare il seguente determinante del quarto ordine:

$$(1) \quad m_{ik} = \begin{vmatrix} x_1 - y_1 & x_2 - y_2 & x_3 - y_3 & x_4 - y_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \alpha_{i3} & \alpha_{i4} \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \alpha_{k3} & \alpha_{k4} \end{vmatrix} \quad (m_{ik} = -m_{ki}).$$

Questo determinante rappresenta quello che si chiama *momento* dell' S_2 principale della curva determinato dalle direzioni i -esima e k -esima uscente dal punto X rispetto alla retta a .

Se teniamo presenti le formole del sig. BRUNEL, che sono l'estensione delle ordinarie formole di FRENET-SERRET:

$$\frac{d\alpha_{11}}{ds} = \frac{\alpha_{21}}{R_1}, \quad \frac{d\alpha_{21}}{ds} = \frac{\alpha_{31}}{R_2} - \frac{\alpha_{11}}{R_1},$$

$$\frac{d\alpha_{31}}{ds} = \frac{\alpha_{41}}{R_3} - \frac{\alpha_{21}}{R_2}, \quad \frac{d\alpha_{41}}{ds} = -\frac{\alpha_{31}}{R_3}$$

dove s indica l'arco della curva a partire da un'origine determinata, troviamo, ricordando la regola di derivazione dei determinanti:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dm_{12}}{ds} = \frac{m_{12}}{R_2}, & \frac{dm_{23}}{ds} = -\frac{md_{13}}{R_1} + \frac{m_{24}}{R_3} + \cos \theta_4 \\ \frac{dm_{13}}{ds} = \frac{m_{23}}{R_1} - \frac{m_{12}}{R_2} + \frac{m_{14}}{R_3}, \\ \frac{dm_{24}}{ds} = -\frac{md_{23}}{R_3} + \frac{m_{34}}{R_2} - \frac{m_{14}}{R_1} - \cos \theta_3 \\ \frac{dm_{14}}{ds} = \frac{m_{24}}{R_1} - \frac{m_{13}}{R_3}, & \frac{dm_{34}}{ds} = -\frac{md_{24}}{R_2} + \cos \theta_2 \end{cases}$$

dove con θ_i si indica in generale la misura dell'angolo che la direzione positiva della direzione principale i -esima della curva forma colla direzione positiva dell'asse a .

Si vede ora facilmente che la somma dei quadrati de' sei determinanti (1) è uguale al quadrato della matrice:

$$\begin{vmatrix} x_1 - y_1 & x_2 - y_2 & x_3 - y_3 & x_4 - y_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

ossia al quadrato della distanza del punto X della curva dall'asse a : si ha cioè:

$$(3) \quad m_{12}^2 + m_{13}^2 + m_{14}^2 + m_{23}^2 + m_{24}^2 + m_{34}^2 = d^2,$$

d stando a rappresentare questa distanza.

Derivando la (3) nell'ipotesi di d costante si trova, tenendo presente le formole (2):

$$(4) \quad m_{23} \cos \theta_4 - m_{24} \cos \theta_3 + m_{34} \cos \theta_2 = 0.$$

Questa relazione è soddisfatta per tutte e sole quelle curve che appartengono ai cilindri di rivoluzione a $n-1$ dimensioni di S_n .

Facciamo ora una seconda posizione, poniamo:

$$(5) \quad \begin{cases} N_1 = m_{33} \cos \theta_2 + m_{42} \cos \theta_3 + m_{23} \cos \theta_4 \\ N_2 = m_{11} \cos \theta_3 + m_{13} \cos \theta_4 + m_{24} \cos \theta_1 \\ N_3 = m_{12} \cos \theta_4 + m_{24} \cos \theta_1 + m_{41} \cos \theta_2 \\ N_4 = m_{23} \cos \theta_1 + m_{31} \cos \theta_2 + m_{12} \cos \theta_3 \end{cases}$$

Tenendo presenti le formole di BRUNEL si riconosce subito che N_1, N_2, N_3, N_4 soddisfanno al sistema di equazioni differenziali:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dN_1}{ds} = -\frac{N_2}{R_1} + \text{sen}^2 \theta_1 \\ \frac{dN_2}{ds} = \frac{N_1}{R_1} - \frac{N_3}{R_2} + \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \\ \frac{dN_3}{ds} = \frac{N_2}{R_2} - \frac{N_4}{R_2} - \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_3 \\ \frac{dN_4}{ds} = \frac{N_3}{R_3} + \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_4 \end{cases}$$

Se in queste formule facciamo $N_1 = 0$ — ciò che corrisponde a supporre che la curva di cui si tratta sia sopra una ipersuperficie cilindrica di rivoluzione S_n — troviamo successivamente:

$$(7) \quad \begin{cases} N_2 = R_1 \cdot \text{sen}^2 \theta_1, \\ N_3 = \left\{ -\frac{dN_2}{ds} + \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \right\} \cdot R_2 \\ N_4 = \left\{ \frac{N_2}{R_2} - \frac{dN_3}{ds} - \cos \theta_1 \cos \theta_3 \right\} R_3, \end{cases}$$

e infine, eliminando le N_i , una relazione del tipo:

$$(8) \quad f_1(s) = A_{11} \cos^2 \theta_1 + A_{12} \cos^2 \theta_2 + A_{13} \cos^2 \theta_3 + \\ + A_{14} \cos^2 \theta_4 + \dots + A_{1 \cdot n} = 0$$

essendo le A_{1s} — in numero di *undici* — determinate funzioni di R_1 , R_2 , R_3 e delle loro derivate rispetto all'arco s , facilmente calcolabili.

Derivando la (8) rispetto ad s troviamo una relazione:

$$(9) \quad f_2(s) = A_{21} \cos^2 \theta_1 + A_{22} \cos^2 \theta_2 + \dots + A_{2 \cdot n} = 0$$

dove anche qui le A_{2s} sono funzioni di R_1 , R_2 , R_3 e delle A_{1s} .

Proseguiamo la derivazione fino a trovare *undici* equazioni della forma (8) o (9): queste equazioni saranno omogenee, lineari in $\cos^2 \theta_1$, $\cos^2 \theta_2, \dots, 1$, e la loro coesistenza richiederà l'annullarsi del determinante dei coefficienti. Si ha dunque:

* *L'equazione*

$$(10) \quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1 \cdot n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2 \cdot n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{11 \cdot 1} & A_{11 \cdot 2} & \dots & A_{11 \cdot n} \end{vmatrix} = 0,$$

— espresse le A per le R_1, R_2, R_3 — rappresenta l'equazione intrinseca delle curve di cui si tratta.

Il procedimento seguito per la determinazione dell'equazione intrinseca delle linee giacenti sul cilindro di rotazione a 3 dimensioni di S_4 è manifestamente applicabile alla ricerca dell'equazione intrinseca delle linee del cilindro di rotazione a $(n - 1)$ dimensioni di S_n :

il numero delle derivazioni occorrenti diventa allora $\frac{n^2 + n + 2}{2}$.

Lasciamo svilupparlo al cortese lettore.

ENRICO PICCIOLI.



LA RISOLVENTE DELLA EQUAZIONE $\sqrt[2k+1]{A} + \sqrt[2k+1]{B} + \sqrt[2k+1]{C} = 0$

Questa Nota è il risultato dello studio della questione particolare 4217, pag. 251, vol. XX, anno 1913 dell'*Intermédiaire des Math.*¹³

TEOREMA. — La risolvente della equazione irrazionale

$$\sqrt[2k+1]{A} + \sqrt[2k+1]{B} + \sqrt[2k+1]{C} = 0$$

è la equazione

$$\begin{aligned} (\Sigma A)^{2k+1} + \alpha_2 A^2 B^2 C^{2k-3} - \alpha_1^{2k+1} ABC^{2k-1} + \\ + \alpha_1^{2k} \alpha_2 ABC^{2k-2} \Sigma A - \alpha_1^{2k-3} \alpha_2^2 (\Sigma A)^2 ABC^{2k-3} + \dots \\ \dots + (-1)^{k+1} \alpha_k \alpha_1 \alpha_2^k (\Sigma A)^k ABC^{k-1} = 0 \end{aligned} \quad (E)$$

in cui $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sono i coefficienti

$$\frac{2k+1}{1}, \quad \frac{(2k+1)(2k-2)}{1 \cdot 2}, \quad \frac{(2k+1)(2k-3)(2k-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots$$

della identità di Waring

$$\begin{aligned} x^{2k+1} + y^{2k+1} = (x+y)^{2k+1} - \frac{2k+1}{1} (x+y)^{2k-1} xy + \\ + \frac{(2k+1)(2k-2)}{1 \cdot 2} (x+y)^{2k-3} x^2 y^2 - \dots + (-1)^k (2k+1) (x+z) x^k y^z \quad (w) \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. — Poniamo nella (w) $x+y = -z$ e si ha

$$\begin{aligned} x^{2k+1} + y^{2k+1} z^{2k+1} - \alpha_1 z^{2k-1} xy + \alpha_2 z^{2k-3} x^2 y^2 - \alpha_3 z^{2k-5} x^3 y^3 + \dots \\ \dots + (-1)^k \alpha_k z x^k y^k = 0. \end{aligned} \quad (P)$$

Ed ora in questa facciamo dapprima

$$x = \sqrt[2k+1]{A}, \quad y = \sqrt[2k+1]{B}, \quad z = \sqrt[2k+1]{C}$$

e si ha

$$\begin{aligned} A + B + C - \alpha_1 \sqrt[2k+1]{ABC^{2k-1}} + \alpha_2 \sqrt[2k+1]{A^2 B^2 C^{2k-3}} - \alpha_3 \sqrt[2k+1]{A^3 B^3 C^{2k-5}} + \dots \\ \dots + (-1)^k \alpha_k \sqrt[2k+1]{A^k B^k C} = 0, \end{aligned}$$

e poi nella stessa (P) poniamo

$$x = \Sigma A, \quad y = \alpha_2 \sqrt[2k+1]{A^2 B^2 C^{2k-3}}, \quad z = -\alpha_1 \sqrt[2k+1]{ABC^{2k-1}}$$

e si ha la (E).

APPLICAZIONI. — Per $k=1$, è $\alpha_1=3$, $\alpha_2=\dots=\alpha_k=0$ e la risolvante della equazione $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C} = 0$ è

$$(\Sigma A)^3 - 27ABC = 0.$$

Per $k=2$, è $\alpha_1=5$, $\alpha_2=5$, $\alpha_3=\dots=\alpha_k=0$ e la risolvante della equazione $\sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B} + \sqrt[5]{C} = 0$ è

$$(\Sigma A)^5 + 5^5 A^2 B^2 C - 5^5 ABC^3 + 5^4 ABC^2 \Sigma A - 5^4 ABC \Sigma A = 0$$

che si riduce all'altra (trovata dal ch.^{mo} prof. D'ARCAIS, loc. cit. Int.)

$$(\Sigma A)^5 - 625 ABC [(\Sigma A)^2 - 5 \Sigma AB] = 0.$$

Per $k=3$, si ha $\alpha_1=7$, $\alpha_2=14$, $\alpha_3=7$, $\alpha_4=\dots=\alpha_k=0$ e la risolvante della equazione $\sqrt[7]{A} + \sqrt[7]{B} + \sqrt[7]{C} = 0$ è

$$(\Sigma A)^7 + 2^7 \cdot 7^7 A^2 B^2 C^3 - 7^7 ABC^5 + 2 \cdot 7^7 ABC^4 \Sigma A - 2^3 \cdot 7^6 ABC^3 (\Sigma A)^2 + 2^2 \cdot 7^6 ABC^2 (\Sigma A)^3 = 0.$$

QUESTIONE. — È noto il teorema: Se α è una radice reale della equazione

$$(\sum_1^3 f_i)^3 - 27 f_1 f_2 f_3 = 0$$

ed è verificata almeno una delle disuguaglianze

$$f_1(\alpha) \mp f_2(\alpha) \mp f_3(\alpha),$$

α è radice della equazione

$$\sqrt[3]{f_1} + \sqrt[3]{f_2} + \sqrt[3]{f_3} = 0.$$

(V. *Supplemento al Periodico*, a. II, pag. 17). Ora io propongo ai Lettori del *Periodico* la ricerca di un teorema analogo per la equazione

$$\sqrt[2k+1]{f_1} + \sqrt[2k+1]{f_2} + \sqrt[2k-1]{f_3} = 0.$$

G. CANDIDO.

SULLA EQUAZIONE (1) $\sum_1^k \alpha_i^2 = y^p$

LEMMA. — Supponiamo che si abbiano n binomi $\alpha_i^2 + \beta_i^2$ e che di questi almeno due possano prendere la forma $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2$; allora la espressione

$$(2) \quad (\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2) \dots (\alpha_n^2 + \beta_n^2),$$

si può mettere sotto la forma $\sum_1^k q_i^2$.

Il numero k si può scrivere uguale a $2^{\lambda_1} + 2^{\lambda_2} + \dots + 2^{\lambda_i}$ in due secondo che k è pari o dispari $\lambda_i \neq 0$ od $= 0$ rispettivamente.

Supponiamo che k sia pari e per fissare le idee, supponiamo $k = 2^{\lambda_1} + 2^{\lambda_2}$ allora la (2) dà

$$\alpha_1^2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2) \dots (\alpha_n^2 + \beta_n^2) + \beta_1^2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2) \dots (\alpha_n^2 + \beta_n^2).$$

Ora la espressione

$$\alpha_1^2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2) \dots (\alpha_n^2 + \beta_n^2),$$

si può scrivere

$$(\alpha_1^{2^{\lambda_1}} + \beta_1^{2^{\lambda_1}}) \dots (\alpha_{\lambda_1}^{2^{\lambda_1}} + \beta_{\lambda_1}^{2^{\lambda_1}}),$$

e questa sviluppata dà $\sum_1^{2^{\lambda_1}} q_i^2$. Analogamente si procede per ricavare $\sum_1^{2^{\lambda_2}} q_i^2$ dalla espressione $\beta_1^2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2) \dots (\alpha_n^2 + \beta_n^2)$.

Supponiamo che k sia dispari. Evidentemente per la ipotesi fatta se $k = 3$ si prende l'unico binomio $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$, e la espressione ridotta a quest'ultimo fattore è la somma di 3 quadrati. Se $k = 5$, si ha

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + \beta^2) (\alpha_1^2 + b_1^2 + c_1^2) &= \alpha^2 (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + \beta^2 (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2), \\ &= \alpha^2 (\alpha_1^2 + \beta_1^2) + \beta^2 (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2), \\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + A_5^2. \end{aligned}$$

Supponiamo verificata la cosa sino $2l - 1$ e cioè che sia

$$(\alpha_1^2 + \beta_1^2) (\alpha_2^2 + \beta_2^2) \dots (\alpha_{2l-1}^2 + \beta_{2l-1}^2) = \sum_1^{2^{2l-1}} p_i^2$$

e allora

$$\begin{aligned} (\alpha_1^2 + \beta_1^2) \dots (\alpha_n^2 + \beta_n^2) (\alpha_n^2 + \beta_n^2) &= (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2) \sum_1^{2^{2l-1}} p_i^2, \\ &= (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \sum_1^{2^{2l-2}} p_i^2 + (a_n p_{2^{2l-1}})^2 + \\ &\quad + (b_n p_{2^{2l-1}})^2 + (c_n p_{2^{2l-1}})^2, \end{aligned}$$

ossia in totale $\sum_1^{2^{2l+1}} q_i^2$, ed il Lemma è completamente dimostrato.

Ciò premesso, per affermare che la (1) è risolubile basta far vedere che è possibile costruire la (2), non solo, ma costruirla in modo che sia uguale ad un'altra y^p . Per far ciò serviamoci della identità

$$(3) \quad (m - n) (m + n) (m^2 + n^2) \dots (m^{2^{r-1}} + n^{2^{r-1}}) = m^{2^r} - n^{2^r}.$$

Questa, mediante le posizioni $m = a^2 + b^2$, $n = a^2 - b^2$, diviene

$$\begin{aligned} [(2ab(a^2 + b^2))^2 + (2ab(a^2 - b^2))^2] [(a^2 + b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2] \dots \\ \dots [a^2 + b^2]^{2^{r-1}} + [a^2 + b^2]^{2^{r-1}} = (a^2 + b^2)^{2^r} - (a^2 - b^2)^{2^r}. \end{aligned}$$

Evidentemente le espressioni

$$[(a^2 + b^2)^{2i} + (a^2 - b^2)^{2i}]^p$$

rispondono alle ipotesi del Lemma epperò la (1) ammette le infinite soluzioni che si possono ottenere ponendo

$$q_i = x_i \quad \text{ed} \quad y = (a^2 + b^2)^{2n-1} - (a^2 - b^2)^{2n-1}.$$

QUESTIONE. — *Risolvere la equazione*

$$\sum a_i x_i^2 = ay^p.$$

OSSERVAZIONE. — La questione precedente che propongo a' Lettori del *Periodico* è stata studiata in molti casi particolari. Il caso $a_i = 1$ ($i = 1, \dots, n$) può essere facilmente studiato per quanto si è stabilito sopra.

NOTA. — Servendosi di quanto innanzi abbiamo accennato si può fare la ricerca sullo spezzamento in somme di quadrati della potenza di un numero. Qualche risultato particolare — di quelli molto più generali che così si ottengono — è stato già enunciato dal CATALAN e da altri. Accenno a qualcuno di questi casi.

In virtù di quanto si è detto innanzi si vede subito che il numero $(a^2 + b^2)^{2\lambda}$ è somma di $2^m + 1$ quadrati con $m = 1, 2, \dots, \lambda - 1$. In particolare, ponendo $a = \alpha + \beta$ e $b = \alpha - \beta$ si ha la proposizione. " Il numero $[2(\alpha^2 + \beta^2)]^{2\lambda}$ è la somma di tre quadrati „. Questa proposizione fu comunicata dal CATALAN al BUONCOMPAGNI colla lettera del 15 dicembre 1880.

Ponendo

$$(a^2 + b^2)^{2\mu} = \alpha_1^2 + \beta_1^2,$$

si ha

$$(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = (a^2 + b^2)^{2\mu - 2\lambda},$$

ciò dimostra in generale che i numeri $(a^2 + b^2)^{2\mu}$ sono sempre decomponibili nella somma di 4 quadrati. Ciò era stato trovato per casi particolari dal sig. BARISIEN (*Matematiche pure ed applicate*, vol. 1°, pag. 183).

Seguendo lo stesso ordine di idee si può dimostrare con (restrizione semplicissima) il teor. generale: *La potenza n^{mn} di un numero è somma di quattro quadrati.*

G. CANDIDO.

BIBLIOGRAFIA

Prof. E. MOUGIN [Liceo di Roanne (Francia)], *Tavole dei logaritmi a 5 cifre decimali*. Fratelli Bocca, Milano.

Queste tavole, che sono poco conosciute in Italia, meriterebbero invece una notevole diffusione per i loro pregi non comuni: esattezza, chiarezza, piccolo volume, prezzo modicissimo; e perchè, secondando i lodevoli pertinaci sforzi di parecchi scienziati francesi (fra i quali l'illustre prof. LAISANT), servono anche a divulgare l'uso della divisione centesimale del quadrante.

Le tavole sono otto. Una ha i logaritmi di tutti i numeri da 1 a 10.000. Altre due tavole hanno i logaritmi delle funzioni goniometriche, di primo in primo: una per la divisione sessagesimale del quadrante, l'altra per la divisione centesimale. Due tavolette suppletive servono per il calcolo dei logaritmi del seno e della tangente degli angoli piccoli: minori di 4° per la divisione sessagesimale, minori di 5° per la centesimale. Altre due tavole contengono di 10 in 10 primi, sempre con 5 cifre decimali, i valori naturali delle funzioni goniometriche. L'ottava tavola serve per la conversione delle ampiezze degli angoli dall'uno all'altro sistema di divisione del quadrante.

In tutte le tavole sono indicati i casi nei quali conviene prendere il valore approssimato per eccesso; in tutte sono inoltre indicate le differenze tavolarie e vi sono i prospetti per la ricerca rapida delle parti proporzionali.

Per l'ingegnosa disposizione della materia una così abbondante raccolta di dati è contenuta tutta in un volumetto di sole 56 facciate di $\text{cm}^2 21 \times 19$, che costa soltanto L. 1,50 (pagamento anche in francobolli e nessuna spesa di porto, per le ordinazioni fatte direttamente all'Autore). Un'edizione ridotta, priva delle tavole per la divisione centesimale, costa L. 1; la sola tavola coi logaritmi dei numeri costa 50 centesimi.

La bella, disinteressata opera dell'egregio prof. MOUGIN merita incoraggiamento da parte dei Colleghi italiani, che, consigliando ai loro alunni l'uso di queste tavole, faranno cosa assai lodevole e molto utile per le nostre scuole.

P. C.

Il 29 Ottobre è morto nella natia Palermo il

Prof. Dott. GIOVAN BATTISTA GUCCIA

Nobile dei Marchesi di Ganzaria.

Nato nel 1855, si laureò a Roma nel 1880, e nel 1889 fu nominato professore di geometria superiore nell'Università di Palermo. — Valoroso cultore degli studi geometrici, egli era universalmente noto in Italia ed all'estero come fondatore del fiorentissimo "Circolo Matematico di Palermo", i *Rendiconti* del quale egli dirigeva fin dal 1885.

Alla memoria del valoroso scienziato, insegnante e giornalista, il *Periodico di Matematica* invia un rispettoso e riverente saluto.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 23 Novembre 1914

MOMENTI STATICI, MOMENTI D'INERZIA E MOMENTI DI ORDINE SUPERIORE

(Continuazione — vedi fascicolo precedente).

VI. — Momenti di un sistema piano.

29. Se è dato un sistema di punti tutti situati in un piano π , occorre soprattutto nei casi pratici studiarne il momento rispetto alle rette e ai punti del piano stesso.

È evidente che, la distanza di un punto del piano π da una retta r o da un punto O di esso piano, essendo eguale alla distanza del punto stesso dal piano condotto per r o dalla retta condotta per O perpendicolare a π , i momenti rispetto ad una retta r si riducono ai momenti rispetto ad un piano perpendicolare a π ed i momenti rispetto ad un punto O si riducono ai momenti rispetto ad una retta perpendicolare a π .

Se dunque prendiamo il piano π per piano xy ($z=0$) basterà porre in tutte le formule trovate fin qui tutte le z nulle per avere le proprietà relative ai momenti del sistema piano di punti.

Tuttavia gioverà ripetere i principali enunciati, specialmente relativi ai momenti di 1° e 2° ordine che sono quelli che capitano nelle applicazioni.

30. TEOREMA. — *L'inviluppo delle rette di un piano rispetto alle quali è nullo il momento statico di un sistema di punti dati nel piano stesso è generalmente un punto (baricentro).*

Preso un sistema di assi x, y che fanno l'angolo θ , se indichiamo con $P_1(x_1, y_1)$ i punti del sistema, con u, v le coordinate plückeriane di una retta r e poniamo

$$(41) \quad k^2 = \frac{\text{sen}^2 \theta}{u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta},$$

(ovvero $k^2 = \frac{1}{u^2 + v^2}$, se $\theta = 0$) la distanza di P_1 dalla retta r è

$$d_1 = k (ux_1 + vy_1 + 1),$$

e il momento statico del sistema rispetto a r è

$$(42) \quad M = k (u \sum \alpha_i x_i + v \sum \alpha_i y_i + \sum \alpha_i).$$

L'involuppo delle rette di momento nullo rispetto al sistema dato è rappresentato dall'equazione

$$(43) \quad u \cdot \sum a_i x_i + v \sum a_i y_i + \sum a_i = 0.$$

Se $\sum a_i \neq 0$ questo rappresenta il punto di coordinate

$$x_0 = \frac{\sum a_i x_i}{\sum a_i}, \quad y_0 = \frac{\sum a_i y_i}{\sum a_i}.$$

Se $\sum a_i = 0$, l'equazione diventa

$$u \cdot \sum a_i x_i + v \sum a_i = 0,$$

ed esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè la retta u, v sia parallela alla retta

$$(44) \quad \frac{x}{\sum a_i x_i} = \frac{y}{\sum a_i y_i},$$

cioè rappresenta il punto all'infinito di questa retta.

Se contemporaneamente

$$\sum a_i x_i = 0, \quad \sum a_i y_i = 0, \quad \sum a_i = 0,$$

la (43) risulta indeterminata.

COROLLARIO 1°. — Il baricentro di un sistema piano è un punto a distanza finita se $\sum a_i \neq 0$, un punto a distanza infinita se $\sum a_i = 0$.

2°. Se $\sum a_i \neq 0$, il momento statico del sistema rispetto ad una retta qualunque del piano è eguale al momento statico del baricentro, affetto da coefficiente $\sum a_i$, rispetto alla retta stessa.

3°. Il momento statico di un sistema piano di punti P_i affetti da coefficienti a_i , tali che sia $\sum a_i = 0$, è nullo quando è nullo rispetto a due rette non parallele del piano stesso.

Dimostrazioni simili a quelle del § 2.

31. TEOREMA. — Se un sistema piano ha momento nullo rispetto a tre rette del piano non concorrenti in un punto, ha momento nullo rispetto a qualunque altra retta del piano.

Siano u_s, v_s ($s = 1, 2, 3$) le coordinate di tre rette rispetto alle quali è nullo il momento statico del sistema di punti, per i quali cioè

$$u_s \sum a_i x_i + v_s \sum a_i y_i + \sum a_i = 0.$$

Il determinante

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix}$$

non può essere nullo, perchè per ipotesi le tre rette non passano per un punto; e perciò, affinchè il sistema precedente sia verificato, è necessario che sia

$$\sum a_i x_i = 0, \quad \sum a_i y_i = 0, \quad \sum a_i = 0,$$

32. TEOREMA. — *L'involuppo delle rette di un piano rispetto alle quali è nullo il momento d'inerzia di un sistema di punti P_i del piano stesso affetti da coefficienti a_i è una conica, che ha per centro il baricentro del sistema dei punti P_i .*

Il momento d'inerzia rispetto ad una retta $r(u, v)$ colle notazioni precedenti è

$$(45) \quad I = \sum a_i d_i^2 = K^2 \cdot \sum a_i (ux_i + vy_i + 1)^2,$$

ossia, ponendo,

$$(46) \quad \begin{cases} \sum a_i x_i^2 = \alpha_{11}, & \sum a_i x_i y_i = \alpha_{12}, & \sum a_i y_i^2 = \alpha_{22}, \\ \sum a_i x_i = \alpha_{13}, & \sum a_i y_i = \alpha_{23}, & \sum a_i = \alpha_{33}, \end{cases}$$

si ha

$$(47) \quad I = k^2 \cdot f(u, v),$$

dove

$$(48) \quad f(u, v) = \alpha_{11} u^2 + 2 \alpha_{12} uv + \alpha_{22} v^2 + 2 \alpha_{13} u + 2 \alpha_{23} v + \alpha_{33}.$$

Le rette per le quali è $I=0$ devono dunque verificare l'equazione

$$f(u, v) = 0,$$

ossia inviluppano una conica. Il centro di questa conica è $x_0 = \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{33}}$,

$y_0 = \frac{\alpha_{23}}{\alpha_{33}}$, cioè il baricentro del sistema.

DEFINIZIONE. — La conica involuppo delle rette rispetto alle quali è nullo il momento d'inerzia rispetto ad un dato sistema piano di punti P_i si chiama *prima conica d'inerzia* o *conica di Binet*.

33. DEFINIZIONE. — Dato un sistema piano di punti P_i affetti da coefficienti a_i , si chiama *centro relativo ad una retta r* il baricentro dei punti stessi affetti da coefficienti proporzionali ai loro momenti statici rispetto a quella retta.

TEOREMA. — *Dato un sistema piano di punti, le rette di un piano e i loro centri relativi si corrispondono in generale in una polarità che ha per conica fondamentale la prima conica d'inerzia.*

Sieno u, v le coordinate plückeriane di una retta r rispetto a due assi y , che formano fra loro l'angolo θ , e quindi

$$k(ux + vy + 1) = 0,$$

sia la sua equazione sotto forma normale, essendo

$$k = \frac{\text{sen } \theta}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta}}.$$

Il momento statico di un punto $P_i(x_i, y_i)$, affetto dal coefficiente a_i , rispetto a questa retta è

$$m_i = a_i \cdot k \cdot (ux_i + vy_i + 1),$$

e quindi il centro R coniugato ad r rispetto ad un sistema di n punti P_i affetti dai coefficienti a_i cioè il baricentro dei punti stessi affetti dai coefficienti m_i è rappresentato dall'equazione

$$u' \sum m_i x_i + v' \sum m_i y_i + \sum m_i = 0,$$

ossia

$$u' (\alpha_{11}u + \alpha_{12}v + \alpha_{13}) + v' (\alpha_{21}u + \alpha_{22}v + \alpha_{23}) + (\alpha_{31}u + \alpha_{32}v + \alpha_{33}) = 0.$$

Fra le rette (u, v) ed i loro centri relativi (x, y) esiste dunque una corrispondenza univoca individuata dalle formole

$$(49) \quad \begin{cases} \mu x = \alpha_{11}u + \alpha_{12}v + \alpha_{13}, \\ \mu y = \alpha_{21}u + \alpha_{22}v + \alpha_{23}, \\ \mu = \alpha_{31}u + \alpha_{32}v + \alpha_{33}. \end{cases}$$

Se poniamo

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix},$$

e indichiamo che A_{hk} il minore complementare di α_{hk} in questo determinante (supposto $A \neq 0$) si trova che le formole inverse delle (49) sono

$$(50) \quad \begin{cases} vu = A_{11}x + A_{12}y + A_{13}, \\ vu = A_{21}x + A_{22}y + A_{23}, \\ v = A_{31}x + A_{32}y + A_{33}, \end{cases}$$

ove $v = \frac{A}{\mu}$.

Le formole (49), (50) dimostrano che, se $A \neq 0$, fra le rette del piano ed i loro centri coniugati esiste una corrispondenza proiettiva ed involutoria, ossia una polarità.

Eliminando μ, u, v fra le (49) e la

$$(51) \quad ux + vy + 1 = 0,$$

(condizione necessaria e sufficiente perchè il punto (x, y) appartenga alla retta (u, v)) si trova l'equazione della conica fondamentale (luogo dei punti auto-coniugati) in coordinate di punti, ed eliminando invece v, x, y fra le (50) e la (51) si ottiene l'equazione della conica fondamentale medesima in coordinate di rette, cioè considerata come involuppo delle rette auto-coniugate.

Tali equazioni sono

$$2) \quad \begin{cases} f(u, v) = \alpha_{11}u^2 + 2\alpha_{12}uv + \alpha_{22}v^2 + 2\alpha_{13}u + 2\alpha_{23}v + \alpha_{33} = 0, \\ F(x, y) = A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2 + 2A_{13}x + 2A_{23}y + A_{33} = 0. \end{cases}$$

34. Supponiamo $\alpha_{33} \neq 0$; e prendiamo per assi due diametri coniugati della conica d'inerzia. L'equazione di questa deve, come è noto, ridursi a tre soli termini, e deve essere $\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$.

Perciò le (52) si riducono a

$$3) \quad \begin{cases} \alpha_{11}u^2 + \alpha_{22}v^2 + \alpha_{33} = 0, \\ \frac{x^2}{\alpha_{11}} + \frac{y^2}{\alpha_{22}} + \frac{1}{\alpha_{33}} = 0, \end{cases}$$

Le equazioni (49) (50) della polarità divengono

$$\begin{cases} \mu x = \alpha_{11}u, \\ \mu y = \alpha_{22}v, \\ \mu = \alpha_{33}, \end{cases} \quad \begin{cases} \nu u = \frac{x}{\alpha_{11}}, \\ \nu v = \frac{y}{\alpha_{22}}, \\ \nu = \frac{1}{\alpha_{33}}. \end{cases}$$

dalle quali, si trova

$$4) \quad \begin{cases} x = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{33}} u \\ y = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{33}} v \end{cases} \quad (55) \quad \begin{cases} u = \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{11}} x, \\ v = \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{22}} y. \end{cases}$$

DEFINIZIONE. — Si chiama *seconda conica d'inerzia* o *conica centrale* un sistema piano di punti P_i affetti da coefficienti a_i , per i quali $a_i \neq 0$, la conica base della polarità prodotta di quella esistente a tre rette e centri relativi e della simmetria rispetto al baricentro.

Prendendo per assi due diametri coniugati della prima conica d'inerzia, le coordinate dell'antipolo P' della retta $r(u, v)$ e cioè del simmetrico del polo P di essa rispetto al baricentro sono eguali a quelle del polo cambiate di segno, perciò fra le coordinate di una retta r e quelle del suo antipolo P' devono esistere le relazioni:

$$5) \quad \begin{cases} x = -\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{33}} u, \\ y = -\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{33}} v, \end{cases} \quad (57) \quad \begin{cases} u = -\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{11}} x, \\ v = -\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{22}} y. \end{cases}$$

La retta r e il punto P' si corrispondono dunque in un'altra polarità di cui la conica fondamentale è rappresentata in coordinate cartesiane e polari dalle equazioni

$$6) \quad \begin{cases} \alpha_{11}u^2 + \alpha_{22}v^2 - \alpha_{33} = 0, \\ \frac{x^2}{\alpha_{11}} + \frac{y^2}{\alpha_{22}} - \frac{1}{\alpha_{33}} = 0, \end{cases}$$

che si ottengono l'una eliminando x, y fra la (51) e le (56), l'altra eliminando u, v fra la (51) e le (57).

Si può osservare che la prima conica d'inerzia è il luogo dei punti *auto-coniugati* e l'involuppo delle rette *auto-coniugate* nella polarità che intercede fra le rette del piano e i centri relativi, e la 2^a conica d'inerzia è il luogo dei punti coniugati e l'involuppo delle rette coniugate rispetto alla polarità stessa e simmetrici rispetto al baricentro.

35. Dalle equazioni trovate per le due coniche d'inerzia si vede che, quando $\alpha_{33} = \Sigma \alpha_i \neq 0$, possono darsi i seguenti casi.

a) $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}$ sono tutte dello stesso segno. Posto

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{33}} = a^2, \quad \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{33}} = b^2,$$

le equazioni delle due coniche (53) e (58) divengono

$$1^{\text{a}} \text{ conica d'inerzia } \left\{ \begin{array}{l} a^2 u^2 + b^2 v^2 + 1 = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ ellisse imaginaria,}$$

$$2^{\text{a}} \text{ conica d'inerzia } \left\{ \begin{array}{l} a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ ellisse reale.}$$

b) α_{11}, α_{22} hanno segno contrario a quello di α_{33} . Posto

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{33}} = -a^2, \quad \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{33}} = -b^2,$$

avremo

$$1^{\text{a}} \text{ conica d'inerzia } \left\{ \begin{array}{l} a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ ellisse reale,}$$

$$2^{\text{a}} \text{ conica d'inerzia } \left\{ \begin{array}{l} a^2 u^2 + b^2 v^2 + 1 = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ ellisse imaginaria.}$$

c) α_{11} e α_{22} hanno segno contrario; se per esempio α_{22} ha il segno di α_{33} , si può porre

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{33}} = -a^2, \quad \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{33}} = b^2,$$

ed avremo

$$1^{\text{a}} \text{ conica d'inerzia } \left\{ \begin{array}{l} a^2 u^2 - b^2 v^2 - 1 = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ iperbole,}$$

$$2^{\text{a}} \text{ conica d'inerzia } \left\{ \begin{array}{l} -a^2 u^2 + b^2 v^2 + 1 = 0 \\ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ iperbole;}$$

le due iperboli sono coniugate.

36. Nel caso in cui è $\alpha_{23} = \Sigma a_i = 0$, ma $A \neq 0$, la conica d'inerzia è una parabola, perchè, mancando il termine noto della sua equazione in coordinate plückeriane essa è verificata da $u = 0, v = 0$, cioè la conica è tangente alla retta all'infinito.

Prendendo per asse x un diametro (o l'asse) della parabola e per asse della y la tangente parallela alle corde coningate ad esso, l'equazione della parabola deve ridursi alla forma

$$y^2 = 2px;$$

perciò deve essere

$$\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{33} = 0,$$

e l'equazione in coordinate plückeriane e cartesiane è

$$\begin{cases} \alpha_{23} v^2 + 2\alpha_{13} u = 0, \\ \frac{y^2}{\alpha_{22}} + \frac{2x}{\alpha_{13}} = 0, \end{cases}$$

L'equazioni della reciprocità fra le rette del piano ed i centri relativi diventano

$$\begin{cases} \mu x = \alpha_{13}, \\ \mu y = \alpha_{23} v, \\ \mu = \alpha_{13} u, \end{cases}$$

ossia

$$(59) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{u}, \\ y = \frac{\alpha_{23} v}{\alpha_{13} u}, \end{cases} \quad (60) \quad \begin{cases} u = \frac{1}{x}, \\ v = \frac{\alpha_{13} y}{\alpha_{23} x}, \end{cases}$$

37. Per discutere a priori la natura della 1^a conica d'inerzia occorre, com'è noto, ricorrere ai tre invarianti assoluti, i quali sono

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad I = \alpha_{11} + \alpha_{22} - 2\alpha_{12} \cos \theta.$$

Se al posto delle α_{hi} poniamo i loro valori dati dalle (46), si trova

$$A = \begin{vmatrix} a_1 x_1 & a_2 x_2 & \dots & a_n x_n \\ a_1 y_1 & a_2 y_2 & \dots & a_n y_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} a_1 x_1 & a_2 x_2 & \dots & a_n x_n \\ a_1 y_1 & a_2 y_2 & \dots & a_n y_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{vmatrix}.$$

$$I = \Sigma a_i (x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \theta).$$

Poniamo

$$T_{hkl} = \begin{vmatrix} x_h & x_k & x_l \\ y_h & y_k & y_l \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$T_{hk} = \begin{vmatrix} x_h & x_k \\ y_h & y_k \end{vmatrix},$$

$$d_i^2 = x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \theta,$$

cioè, essendo O l'origine delle coordinate, indichiamo

con T_{hkl} il doppio dell'area del triangolo $P_h P_k P_l$,
 " T_{hk} " " " " " " " $OP_h P_k$,
 " d_i la distanza OP_i .

Avremo

$$A = \sum a_h \cdot a_k \cdot a_m \cdot T_{hkm},$$

$$A_{33} = \sum a_h a_k T_{hk},$$

$$I = \sum a_i d_i^2.$$

È noto che dai segni di questi tre invarianti, si giudica la natura della conica, come si vede dal seguente quadro:

$A_{33} > 0$	$A \cdot I < 0$	ellisse reale
	$A = 0$	coppia di rette immaginarie
	$A \cdot I > 0$	ellisse immaginaria
$A_{33} < 0$	$A \neq 0$	iperbole
	$A \neq 0, I = 0$	iperbole equilatera
	$A = 0$	coppia di rette reali
$A_{33} = 0$	$A \neq 0$	parabola
	$A = 0$	coppia di rette

38. TEOREMA. — *Affinchè il centro B relativo ad una retta b appartenga ad una retta c è necessario e sufficiente che il momento di 2° ordine del sistema rispetto alle due rette b, c sia nullo.*

Ripetasi la dimostrazione del § 12.

39. Abbiamo già detto che si chiama *raggio d'inerzia* di un sistema piano di punti P_i affetti da coefficienti a_i , la somma dei quali non sia nulla, la distanza d alla quale deve essere collocato un punto,

affetto dal coefficiente a_1 , dalla retta r affinchè abbia un momento d'inerzia eguale a quello del sistema dato rispetto ad r . In altre parole il raggio d'inerzia rispetto ad una retta r è dato dall'eguaglianza

$$\rho^2 = \frac{\sum a_i d_i^2}{\sum a_i}.$$

TEOREMA 1°. — Se $\sum a_i \neq 0$, il raggio d'inerzia rispetto ad una retta r che passa pel baricentro è eguale alla distanza da essa dell'estremo del diametro coniugato alla r rispetto ad una delle coniche d'inerzia.

TEOREMA 2°. — Il raggio d'inerzia rispetto ad una retta r , che non passa pel baricentro, è la media geometrica delle distanze del polo di r e del baricentro dalla retta medesima.

TEOREMA 3°. — Il raggio d'inerzia rispetto ad una retta r che non passa pel baricentro è uguale all'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha per cateti il raggio d'inerzia rispetto alla retta r' parallela ad r condotta pel baricentro e la distanza h di queste due rette.

Dimostrazioni identiche a quelle del § 13.

(Continua)

G. LAZZERI.

SOPRA I MASSIMI E I MINIMI DELLE FIGURE PIANE

(Continuazione e fine — vedi fascicolo precedente).

10. *Illustrazioni fisiche.* — In stretta relazione con le proprietà geometriche sopra studiate stanno certi fenomeni fisici, i quali ci appaiono, se non come dimostrazioni, almeno come *illustrazioni* delle dette proprietà. Così per esempio il teorema principale di STEINER può esser illustrato col seguente esperimento ben noto ai fisici.

Immergiamo un filo metallico, piegato p. es. in forma d'un rettangolo, in una soluzione di sapone e ritiriamolo: il rettangolo sarà coperto da uno strato sottile di soluzione. Ora prendiamo un filo di seta e, legandone le estremità, mettiamolo sopra la membrana, dopo averlo bagnato; il nodo si muove prendendo delle forme qualunque. Se ora rompiamo la membrana interna al nodo, p. es. con una punta scaldata, il nodo assume subito la forma esatta d'un cerchio (fig. 16).

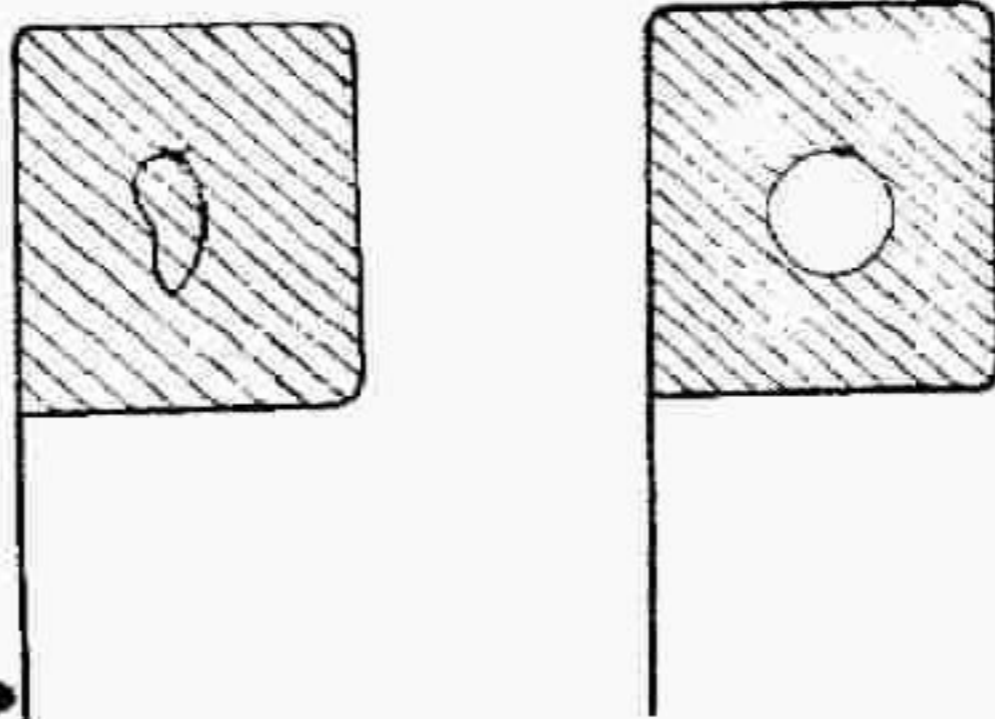


Fig. 16.

Questo fenomeno si può spiegare così: in forza della tensione superficiale la membrana fuori del nodo si stringe, e nello stesso tempo l'area del foro aumenta, perchè la somma di quest'area e dell'area della membrana esterna è costante essendo uguale all'area del contorno metallico. Siccome la forma primitiva del nodo può esser qualsivoglia e la forma finale è sempre il cerchio, ne concludiamo che l'area del cerchio è maggiore dell'area di ogni altra figura isoperimetrica.

In modo analogo si possono illustrare anche altri teoremi sopra gli isoperimetri. Così, p. es., per illustrare (o verificare) il corollario del § 7, prendiamo due fiammiferi di legno AB e CD (fig. 17), leghiamo insieme con fili flessibili le estremità A e C, B e D, e mettiamo questa figura ABCD nella soluzione di sapone.

Ritirandola dal liquido e tenendo i fiammiferi a una distanza minore della lunghezza di AC o BD, vediamo che i fili AC e BD prendono la forma di *archi di cerchio*, alla quale forma corrisponde la *minima area* della membrana ABDC.

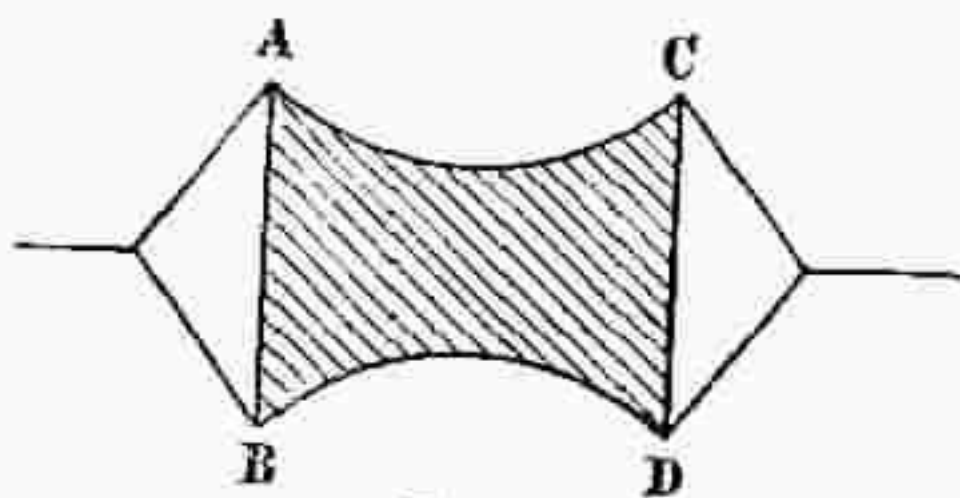


Fig. 17.

Nell'anno 1866 SCHOENTIES propose il seguente esperimento per verificare il teorema di STEINER sopra le figure limitate dai dati segmenti rettilinei a, b, c, \dots e dalle linee di forma arbitraria ma di lunghezza complessiva fissa L (cfr. § 7).

Si prendono dei pezzi di paglia di lunghezze rispettive a, b, c, \dots , poi vi si fa passare dentro un filo, la cui lunghezza superi di L la lunghezza $a + b + c + \dots$, si bagna questo contorno e si mette sopra la membrana descritta nel primo esperimento. Quando si rompe la membrana interna a questa figura, subito il suo contorno prende la forma d'una "parte di cerchio rinchiusa fra a, b, c, \dots come corde", cioè le parti di filo fra le paglie assumono la forma di archi d'uno stesso cerchio e le paglie ne formano le corde.

Il numero delle illustrazioni di questo genere può essere aumentato, ma noi ci limitiamo a quelle descritte sopra. Più numerose ed importanti sono le illustrazioni fisiche delle proprietà di massimo e di minimo relative alle figure nello spazio (p. es. le note figure di PLATEAU); ma queste proprietà stanno fuori del tema del presente articolo.

II. Dimostrazione del teorema principale dovuta a Edler. — Nel § 2 ho accennato il difetto principale di tutte le dimostrazioni date da STEINER per il teorema sopra il cerchio. STEINER ammette come evidente l'esistenza della figura massima. Ora voglio riprodurre due dimostrazioni rigorose del detto teorema.

La prima di queste dimostrazioni fu data da EDLER, e si trova nelle "Mitteilungen der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen", (a. 1882). EDLER fa uso del *quinto metodo* dello stesso STEINER. Questo metodo si basa sopra i seguenti *tre lemmi*.

LEMMA I. — *Il triangolo isoscele ha perimetro minore di ogni altro triangolo della stessa base e della stessa altezza.*

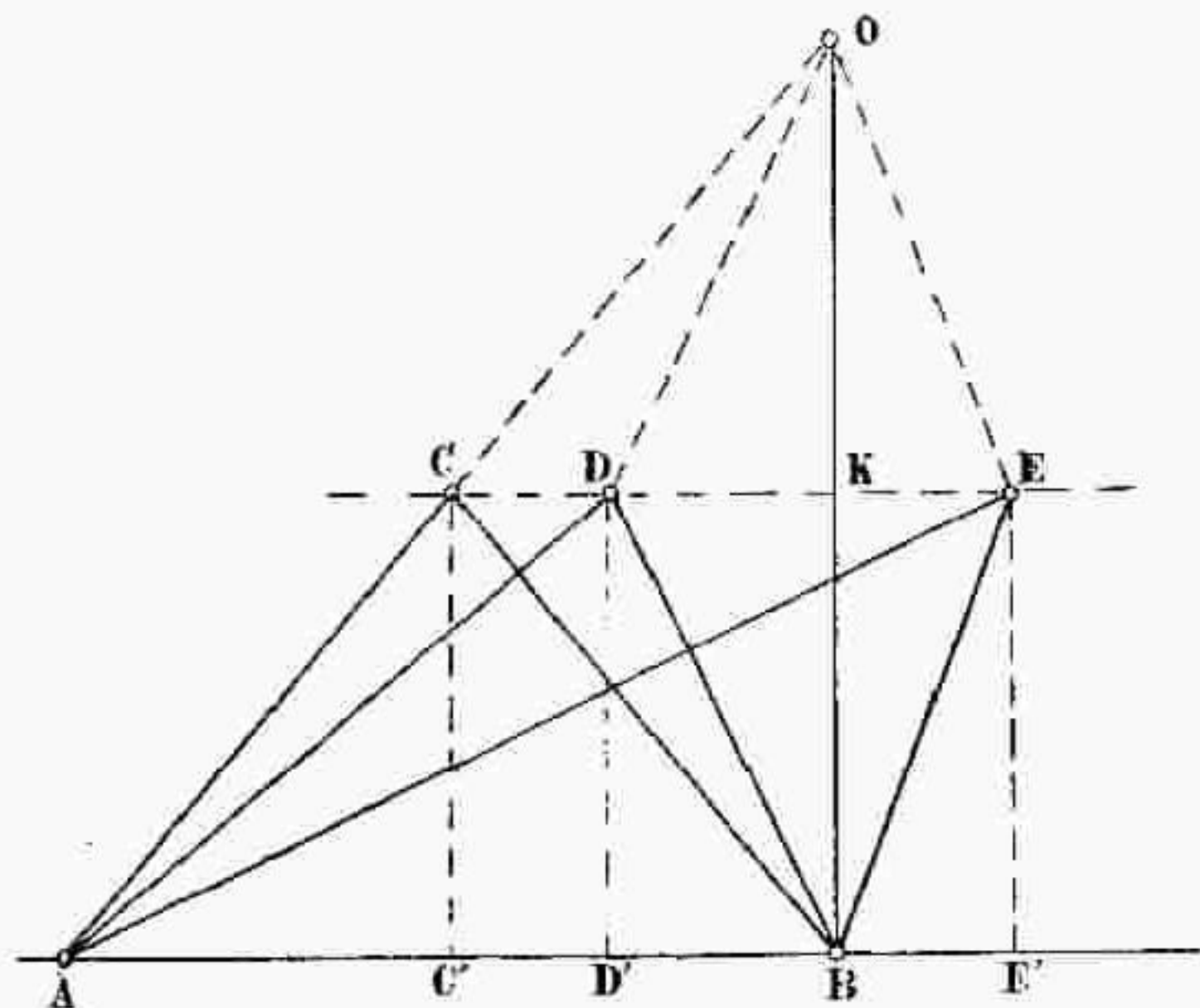


Fig. 18.

Sia infatti il triangolo isoscele ACB ed un altro triangolo non isoscele ADB colla medesima base AB e con altezze uguali CC', DD' (fig. 18).

Prolunghiamo la perpendicolare ad AB nel punto B fino all'incontro nel punto O col prolungamento del lato AC.

Il triangolo CBO è isoscele, perciò la retta CD divide la base OB nel punto K in due parti uguali, cosicchè:

$$BD = DO,$$

e:

$$AC + CB = AC + CO = AO,$$

$$AD + DB = AD + DO = \text{spezzata } ADO.$$

Ma siccome il segmento AO è più corto della spezzata ADO, vediamo che il perimetro del triangolo isoscele è minore di quello del triangolo non isoscele.

Sia ancora un altro triangolo AEB di egual altezza EE'.

Siccome:

$$BE = EO,$$

si ha:

$$AE + EB = AE + EO = \text{spezz. AEO} > \text{spezz. ADO},$$

supposto:

$$C'D' < C'E'.$$

Dunque:

Se due triangoli ADB , AEB hanno la medesima base AB ed uguali altezze DD' , EE' , quello (ABE), la cui altezza (EE') è più distante dal punto di mezzo C' della base comune, ha perimetro maggiore.

LEMMA II. — *Fra tutti i trapezi di basi ed altezze uguali il perimetro minimo appartiene al trapezio isoscele.*

Mettiamo, per la dimostrazione, due trapezi — uno isoscele $ACDB$ ed uno non isoscele $AEFB$ — sopra una base comune AB

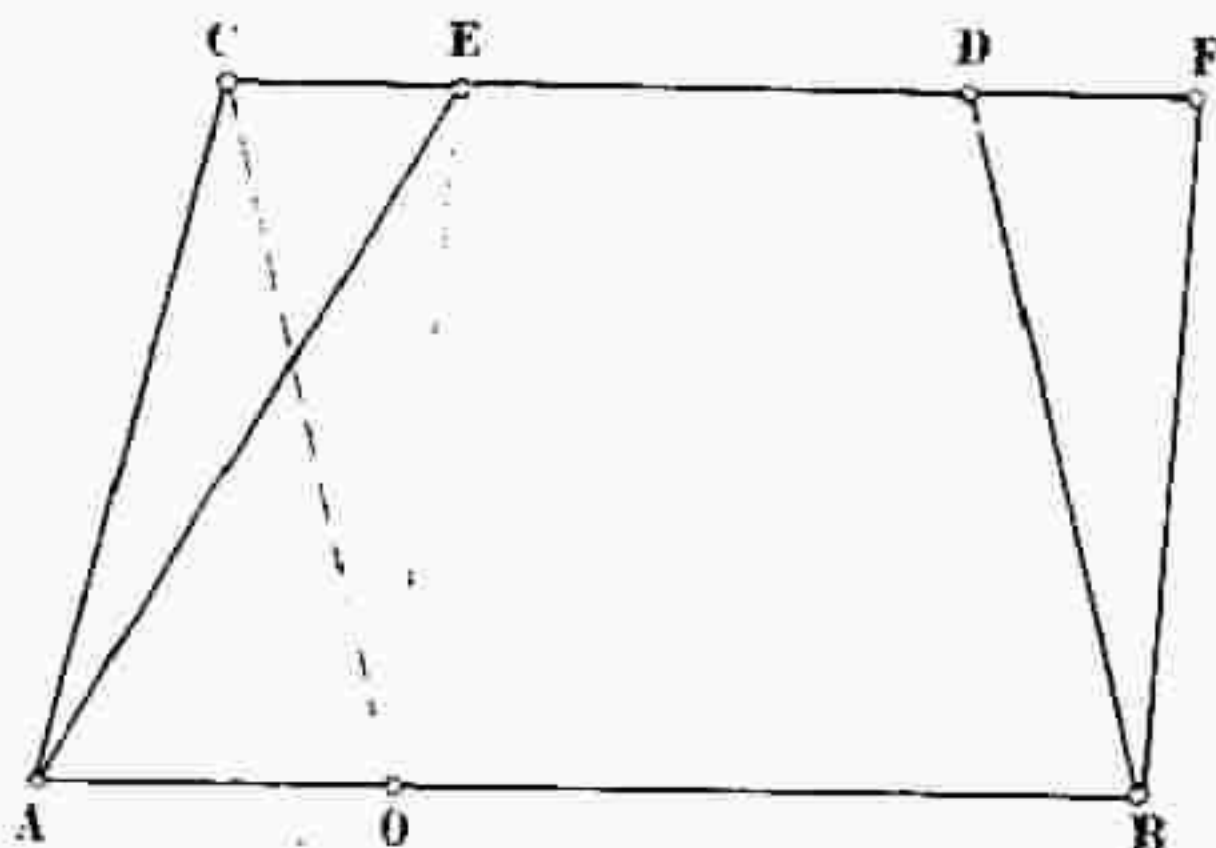


Fig. 19.

(fig. 19). Siccome per ipotesi $CD = EF$, la retta CO , parallela a DB , e la retta EO , parallela a FB , incontreranno la base AB nel medesimo punto O .

Poichè le somme $AC + DB$ e $AE + FB$ sono uguali rispettivamente alle somme $AC + CO$ e $AE + EO$ dei lati dei triangoli ACO e AEO di base comune AO e di uguale altezza, e poichè il triangolo ACO è isoscele, per il primo lemma, la prima somma è minore della seconda, c. d. d.

LEMMA III. — *Fra tutti i triangoli aventi uguali la base e l'angolo opposto, al triangolo isoscele appartiene la massima area.*

Infatti tutti i triangoli da comparare fra loro possono esser iscritti nel medesimo cerchio, ed allora è evidente che al triangolo isoscele appartiene la massima altezza e quindi la massima area.

Ora passiamo alla dimostrazione stessa di EDLER; essa si divide in tre parti.

1°. Ogni poligono irregolare è minore di un poligono regolare di egual perimetro.

Sia $ABCDE$ un n -gono *irregolare* (fig. 20). Per tutti i vertici conduciamo delle rette parallele tra loro: AA_1, BB_1, \dots in una direzione qualunque, purchè non parallela ad alcuno dei lati del poligono. Queste parallele dividono il poligono in due triangoli ed in parecchi trapezi. Il numero totale di queste parti del poligono al massimo è

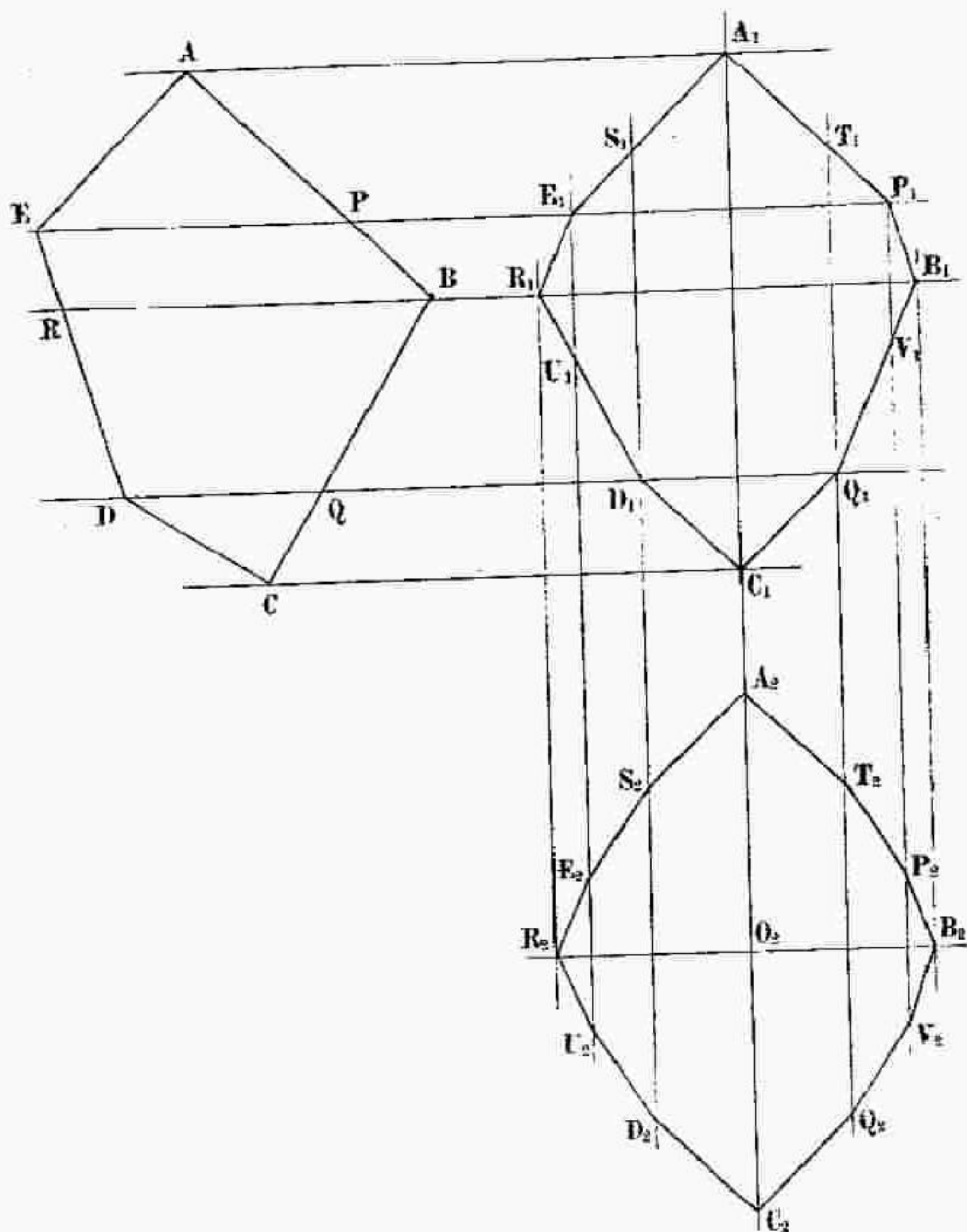


Fig. 20.

uguale a $(n - 1)$, ma può essere anche minore se almeno una parallela passa per *due* vertici simultaneamente. Conduciamo per un punto qualunque A_1 della retta AA_1 la retta A_1C_1 perpendicolare alla retta AA_1 . Spostiamo poi i segmenti EP, RB, DQ lungo le rette a cui appartengono, in modo che nelle nuove posizioni E_1P_1, R_1B_1, D_1Q_1 essi sieno bisecati dalla retta A_1C_1 .

Il nuovo poligono $A_1P_1B_1Q_1C_1D_1R_1E_1$ è dotato dell'*asse di simmetria* A_1C_1 , e la sua *area* è uguale a quella del poligono primitivo, perchè

i triangoli ed i trapezi che compongono l'uno e l'altro poligono sono uguali tra loro, avendo basi eguali ed altezze uguali.

Ma il *perimetro* del nuovo poligono è *minore* di quello del primitivo. Infatti, in forza del lemma I, i perimetri dei triangoli isosceli $A_1P_1E_1$, $C_1D_1Q_1$, non sono maggiori di quelli dei triangoli APE , CDQ , sicchè:

$$\begin{aligned} A_1P_1 + A_1E_1 &\leq AP + AE, \\ C_1D_1 + C_1Q_1 &\leq CD + CQ; \end{aligned}$$

ed in forza del lemma II si ha in modo analogo:

$$E_1R_1 + B_1P_1 \leq ER + BP, \text{ ecc.}$$

Ma il segno di uguaglianza non può aver luogo in tutte queste formole simultaneamente se il poligono primitivo non era già simmetrico per rapporto alla perpendicolare in A ad AA_1 . Ed in quest'ultimo caso basterebbe cambiare la direzione delle parallele tanto poco quanto si vuole per distruggere questa simmetria. Ne concludiamo che si può sempre scegliere la direzione delle parallele in modo che almeno in una delle relazioni precedenti si abbia il segno $<$, ed allora, sommando tutte le uguaglianze e disuguaglianze, troveremo che il perimetro del secondo poligono è *minore* di quello del primo.

Siccome ogni triangolo e trapezio del primo poligono fornisce *due* lati per il nuovo poligono, concludiamo che quest'ultimo avrà un numero *pari* di lati ed al massimo $2(n-1)$ lati.

Operando col secondo poligono come col primo e conducendo le parallele nella direzione dell'asse di simmetria A_1C_1 , otteniamo un *terzo poligono* $A_2T_2 \dots S_2$ con *due assi* ortogonali di simmetria A_2C_2 , B_2R_2 . Siccome il secondo poligono, tenuto conto della sua simmetria, si decompone al massimo in $2(n-2)$ parti (triangoli e trapezi), il terzo avrà al massimo $4(n-2)$ lati; ma il fattore 4 entra necessariamente in forza della doppia simmetria. L'area del terzo poligono è uguale a quella del secondo, mentre il suo perimetro non è maggiore del perimetro di esso.

Trasformiamo ora a parte il *quadrante* $O_2A_2T_2P_2B_2$ (fig. 21).

La retta A_2B_2 lo divide nel triangolo $O_2A_2B_2$ e nel poligono $A_2T_2P_2B_2$. Facendo scorrere A_2 e B_2 lungo i lati O_2A_2 e O_2B_2 , portiamo questo poligono in una posizione $A_3T_3P_3B_3$ tale che sia $O_3A_3 = O_3B_3$.

Per il lemma III, il triangolo $O_3A_3B_3$ è maggiore del triangolo $O_2A_2B_2$, a meno che quest'ultimo non fosse già isoscele.

Per mezzo della P_3W_3 , parallela alla A_3B_3 , trasformiamo la figura $A_3T_3P_3B_3$ nella $A_4W_4T_4P_4B_4$ *simmetrica* rispetto alla bisettrice O_4T_4 dell'angolo retto $A_4O_4B_4$. L'area della figura rimane durante queste trasformazioni invariata, mentre il perimetro *non aumenta*. Aggiungendo all'ultima figura il triangolo $O_4A_4B_4$, uguale al triangolo $O_3A_3B_3$,

otteniamo il quadrante $O_2A_2W_2T_2P_2B_2$, la cui area non è minore di quella del quadrante primitivo, mentre la lunghezza della spezzata $A_2W_2T_2B_2$ non è maggiore di quella della spezzata $A_1T_1P_1B_1$. Il nuovo quadrante ha l'asse di simmetria O_2T_2 ed i lati della spezzata $A_2W_2...B_2$ sono al più $2(n-3)$.

Trasformiamo al modo descritto anche gli altri 3 quadranti del terzo poligono; allora i 4 quadranti trasformati costituiranno insieme

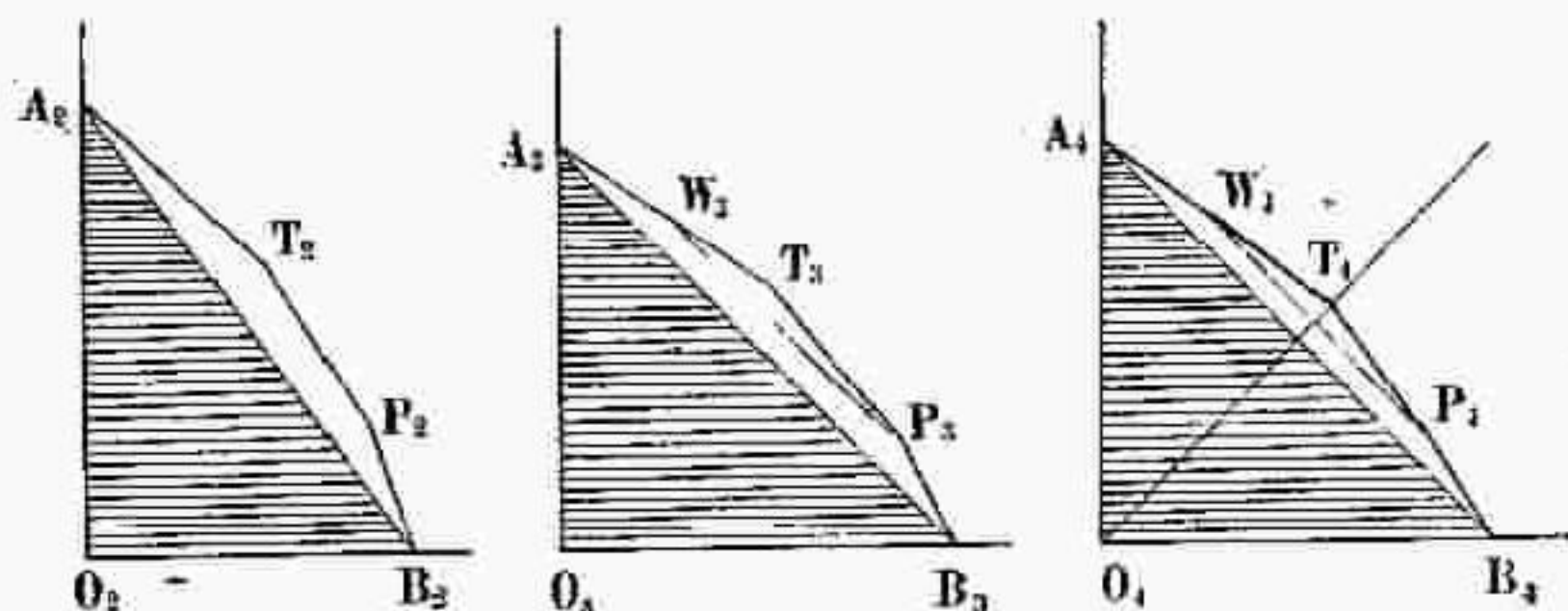


Fig. 21.

un quarto poligono dotato di 4 assi di simmetria; esso avrà al massimo $8(n-3)$ lati; la sua area non sarà minore ed il perimetro non sarà maggiore di quelli del terzo poligono.

Trasformiamo gli ottanti $O_4A_4W_4T_4$ etc. in modo analogo e così otteniamo un quinto poligono con 8 assi di simmetria. Continuando in questo modo, veniamo a formare una successione di poligoni con:

$$0, 1, 2, 2^2, 2^3, \dots$$

assi di simmetria rispettivamente e con un numero di lati uguale al massimo a:

$$n, 2(n-1), 2^2(n-2), 2^3(n-3), 2^4(n-4), \dots$$

Qui i fattori $2, 2^2, 2^3, \dots$ entrano necessariamente in forza della simmetria, mentre i secondi fattori possono essere minori degli scritti. Ora si vede che dopo al massimo $n-1$ operazioni analoghe alla descritta il secondo fattore sarà uguale ad 1, cioè si avrà un poligono con 2^k assi di simmetria e con 2^{k+1} lati, dove $k \leq n-2$, cosicchè tra ogni coppia di assi consecutivi si troverà un lato del poligono. Resta da spostare questi lati in tal modo che essi facciano angoli uguali cogli assi (fig. 22);

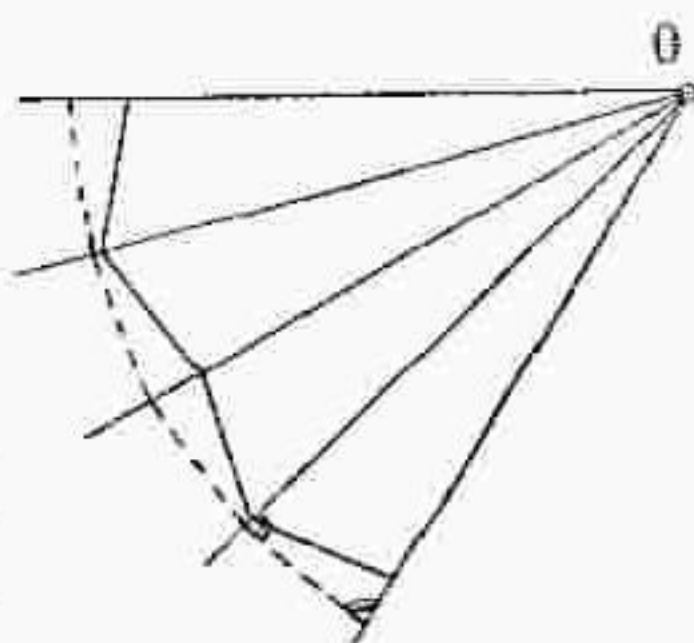


Fig. 22.

allora l'area del poligono aumenterà di nuovo (vedi III lemma) e noi avremo un poligono regolare con 2^{n-1} lati al massimo, il quale avrà area non minore, ma perimetro minore certamente del primitivo poligono irregolare.

Ora basta costruire un poligono simile all'ultimo (regolare) ed isoperimetrico primo per avere un poligono regolare maggiore del primitivo, ma dello stesso perimetro.

2°. Ora voglio dimostrare, seguendo EDLER, che ogni poligono regolare è minore del cerchio di egual perimetro.

Siano P e K un poligono regolare ed il cerchio dello stesso perimetro p ; siano R il raggio del cerchio K' iscritto in P e R'

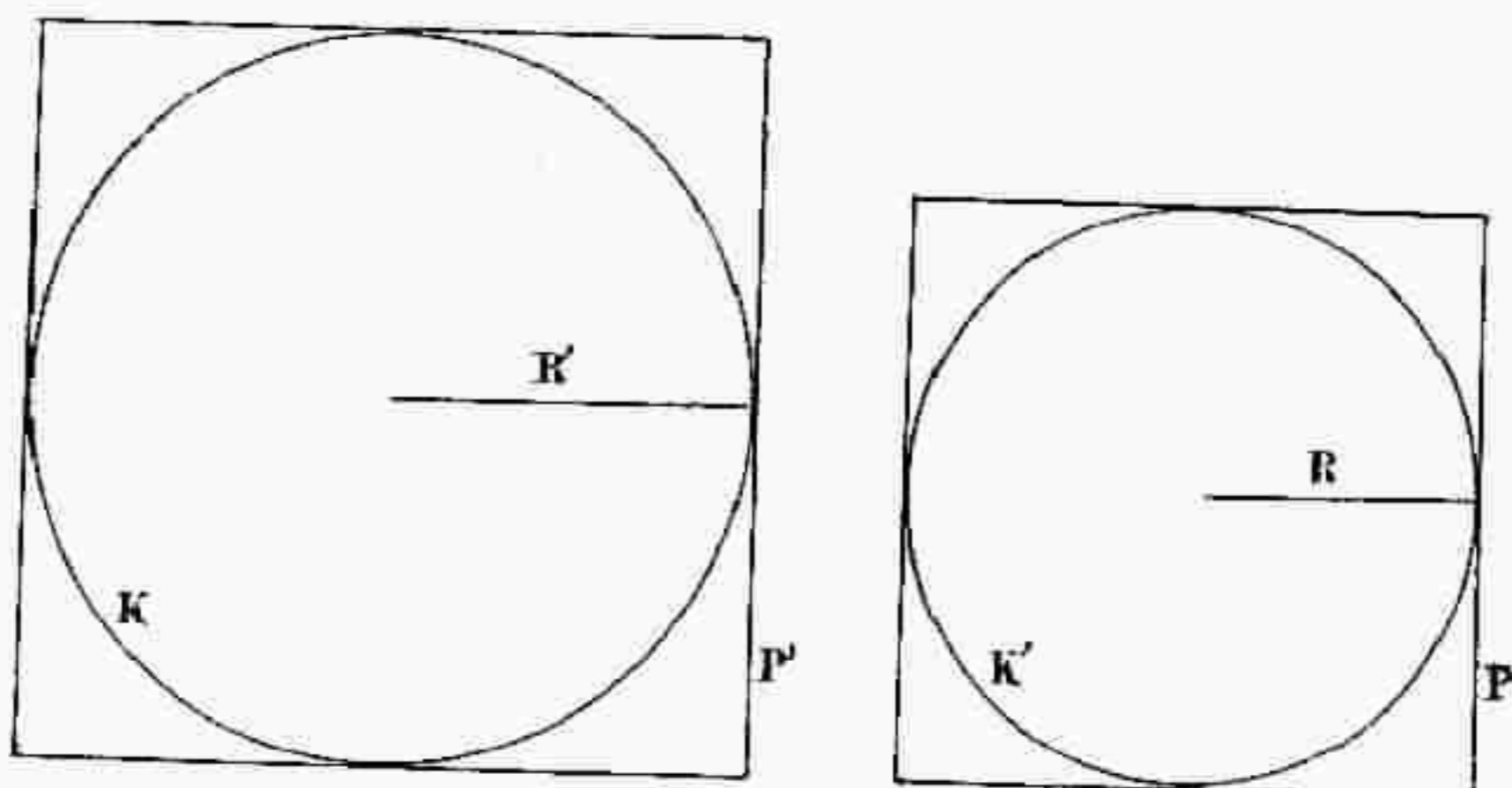


Fig. 23.

il raggio del cerchio K (fig. 23). Sia P' un poligono simile a P circoscritto a K , e denotiamo con p' il perimetro di P' .

Le aree P e K hanno il rapporto seguente:

$$P : K = \frac{1}{2} pR : \frac{1}{2} p'R' = R : R'.$$

D'altra parte, siccome la figura P' è circoscritta al cerchio K , si ha:

$$p' > p.$$

Ma in forza della similitudine abbiamo:

$$R : R' = p : p',$$

cosicchè:

$$R : R' < 1,$$

e:

$$P < K.$$

3°. Ora noi possiamo dimostrare che ogni figura piana è minore del cerchio isoperimetrico.

Sia data la figura qualsiasi F diversa dal cerchio K , tutti e due di egual perimetro p . Come abbiamo visto nel § 4, STEINER ha dato un metodo per costruire una figura convessa F' maggiore della figura F , ma dello stesso perimetro p ; sia $F' - F = d$, dove $d > 0$. Nella

figura F' iscriviamo un poligono P con lati tanto piccoli che la differenza $F' - P$ sia minore di d ; per questo è sufficiente che tutti i punti del perimetro di F' siano distanti dai lati corrispondenti di P meno di $\frac{d}{p}$ (fig. 24). Infatti, se p' è il perimetro di P , allora la differenza $F' - P$ sarà minore di $p' \cdot \frac{d}{p}$ ed a fortiori minore di $p \cdot \frac{d}{p} = d$, perchè $p' < p$.

Dunque:

$$F' - F = d, \quad F' - P < d,$$

quindi:

$$F < P,$$

mentre:

$$p > p'.$$

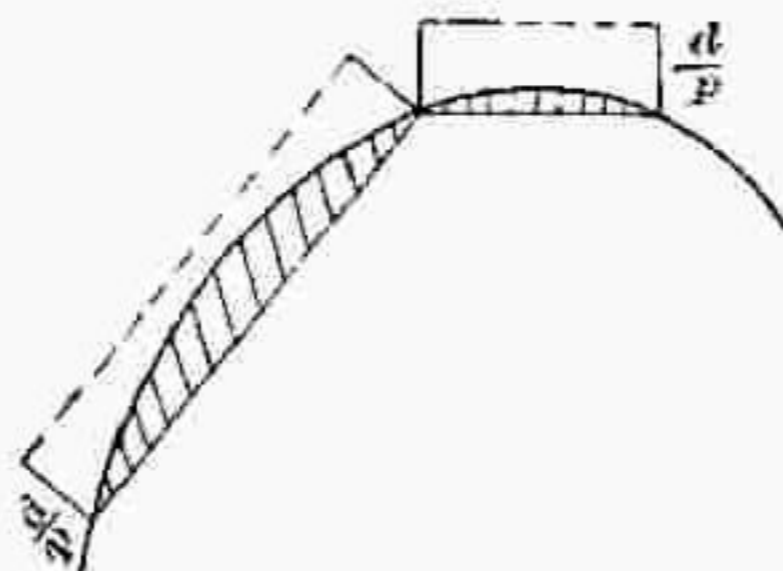


Fig. 24.

Ma, come si è dimostrato (vedi 1°), il poligono P è minore d'un poligono regolare P' dello stesso perimetro p' .

Quest'ultimo poligono P' è (vedi 2°) minore del cerchio K' di perimetro p' .

Ma siccome:

$$p' < p,$$

si ha che:

$$K' < K;$$

dunque:

$$F < P < P' < K' < K,$$

cioè:

$$F < K.$$

c. d. d.

12. Dimostrazione di Carathéodory. — Per la dimostrazione di EDLER è caratteristico che per paragonare una figura col cerchio egli introduce degli elementi intermedi di paragone e cioè i poligoni regolari ed irregolari.

Invece CARATHÉODORY non fa nessun uso delle proprietà dei poligoni, e considera tutte le figure piane dello stesso perimetro come elementi di uno stesso aggregato.

Ma mentre i ragionamenti di EDLER non lasciano mai il terreno della geometria elementare, corrispondendo così allo spirito stesso delle memorie di STEINER, CARATHÉODORY invece fa uso di qualche nozione e teorema della teoria degli aggregati e delle funzioni continue. Io riproduco qui sotto la dimostrazione di CARATHÉODORY, (1) trasformandola in modo che l'ordine delle idee appaia forse più naturale.

(1) Vedi *Mathem. Annalen*, Bd. 69. Nello stesso volume si trova un'altra dimostrazione del teorema di STEINER, dovuta a SEUDY.

Denotiamo come *classe A* l'aggregato di tutte le figure piane di perimetro 2π .⁽¹⁾ Ogni figura di questa classe può esser rinchiusa completamente nell'interno d'un cerchio di raggio π , il cui centro sia un punto qualunque del perimetro della figura considerata (fig. 25). Ne segue che ogni figura della classe A è minore del detto cerchio, cioè l'insieme delle aree delle figure A è limitato superiormente; perciò esiste un *limite superiore* di queste aree; sia esso $2I$.

Ora consideriamo la *classe B* di tutte le figure piane limitate da un segmento rettilineo qualunque e da una linea di lunghezza π e di forma arbitraria. Dimostriamo che I è il *limite superiore* delle aree di tutte le figure della classe B.

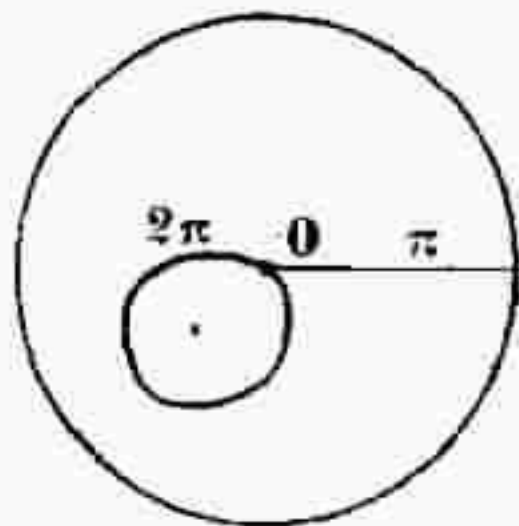


Fig. 25.

Infatti supponiamo che l'area di una figura F di questa classe sia maggiore di I . Riunendo due figure uguali F lungo i loro lati rettilinei, avremo una figura doppia F' con perimetro 2π , cioè della classe A, e di area maggiore di $2I$; ma questo è impossibile, perchè $2I$ è il limite superiore per la classe A. Perciò nessuna figura della classe B ha area maggiore di I .

D'altra parte, sia dato un numero positivo ϵ piccolo a piacere; allora nella classe A si troverà una figura P di area maggiore di $(2I - 2\epsilon)$. Per mezzo di una corda, la quale divida il perimetro di P in due parti eguali, taglio la P in due figure Q' e Q'' , che apparterranno alla classe B. Allora almeno una di queste due figure avrà area maggiore di $(I - \epsilon)$. Ne concludiamo che I è il limite superiore per le aree delle figure della classe B.

Supponiamo che nella classe B esista una figura massima, cioè di area I . Allora, riunendo questa figura a sè stessa come prima, avremo una figura di perimetro 2π e di area $2I$, cioè una figura *massima* della *classe A*. Di più, se la figura massima di classe B è un *semicerchio*, il *cerchio* sarà la figura massima per la classe A. Perciò per il nostro scopo basta dimostrare che il *semicerchio di lunghezza π* ha area maggiore di ogni altra figura della classe B.

Ma, cercando la massima figura della classe B, possiamo lasciare da parte tutte le figure *concave*, perchè si può trasformare ogni tale figura in una *convessa*, appartenente alla stessa classe B, ma d'area maggiore (§ 3). Per questa ragione il numero I è anche il limite superiore per le sole figure *convesse* della classe B.

Ora ricordiamo il metodo di STEINER (§ 4) per aumentare l'area di ogni figura convessa della classe B *diversa dal semicerchio*, e calcoliamo il valore di questo aumento d'area.

(1) Il valore assoluto del perimetro non ha, si capisce, nessuna importanza dal punto di vista logico. Però la scelta del valore 2π contribuisce all'eleganza della dimostrazione.

Preso sull'arco AB (fig. 26) un punto M tale che:

$$\theta = \widehat{AMB} \neq \frac{\pi}{2},$$

rendiamo quest'angolo *retto* mantenendo costanti le lunghezze di AM, BM. La nuova figura A₁M₁B₁ appartiene ancora alla classe B, e la sua area è aumentata di

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2} r_1 r_2 - \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin \theta = \\ &= \frac{1}{2} r_1 r_2 (1 - \sin \theta) > 0, \end{aligned}$$

dove

$$r_1 = AM,$$

$$r_2 = BM.$$

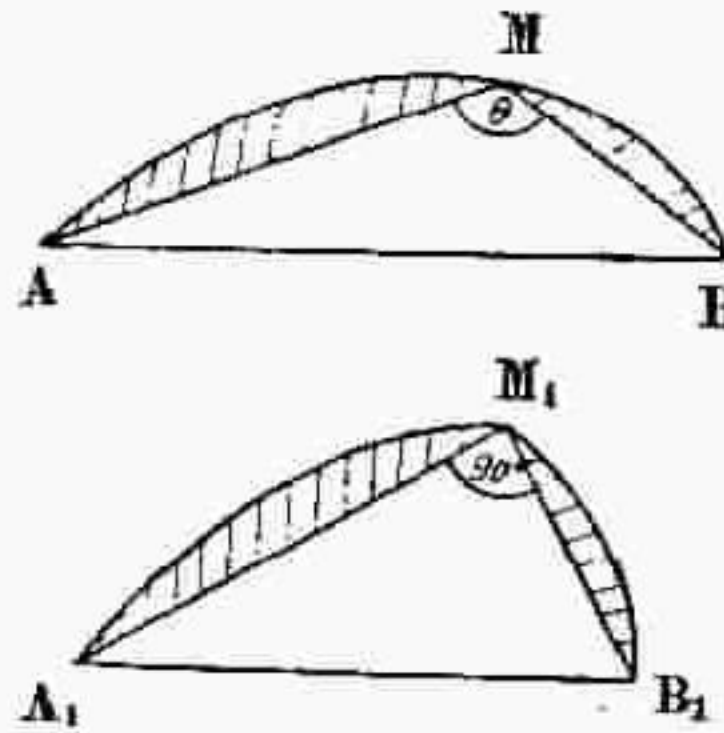


Fig. 26.

Dunque la figura massima della classe B, *se esiste*, è il semicerchio di raggio 1 (perchè il suo arco ha lunghezza π). Se invece la figura massima non esiste, allora si può formare una successione F_1, F_2, \dots di figure convesse della classe B, le cui aree I_1, I_2, \dots abbiano per limite I: $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I$.

Ma, come vedremo, da questo fatto segue a sua volta l'esistenza della figura massima.

Sovrapponiamo le figure F_1, F_2, \dots , in modo che le parti rettilinee A_1B_1, A_2B_2, \dots dei loro contorni cadano sopra una stessa retta

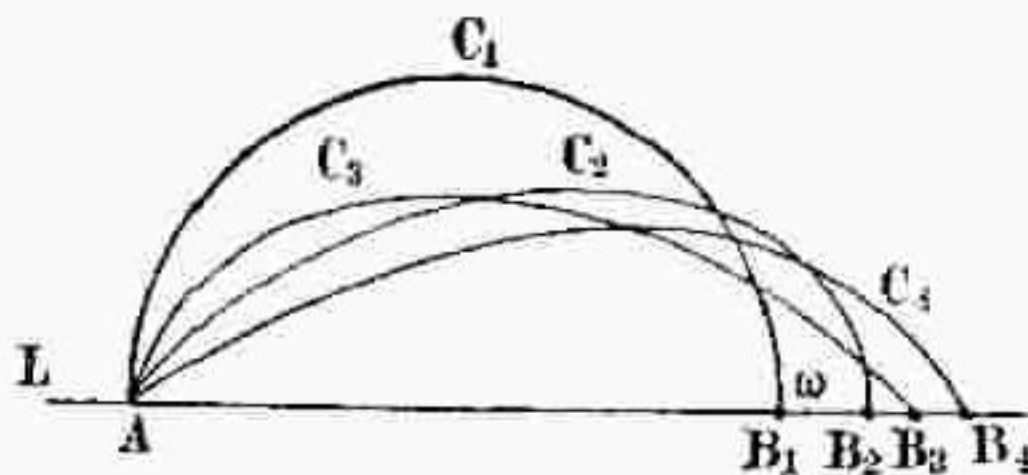


Fig. 27.

LL' , i punti A_1, A_2, \dots coincidano in uno stesso punto A, e le parti curvilinee C_1, C_2, \dots si trovino da una stessa parte di LL' , come si vede nella figura 27.

Siccome le lunghezze dei segmenti AB_1, AB_2, \dots sono minori di π , esiste almeno un punto limite ω dei punti B_1, B_2, \dots , cosicchè in ogni intorno di ω si trova un'infinità di punti B_n . Nell'insieme B_1, B_2, \dots scelgo un insieme parziale B'_1, B'_2, \dots avente ω come *unico* punto limite. I punti B'_1, B'_2, \dots appartengano alle figure F'_1, F'_2, \dots contenute nella successione F_n . Sia I'_n l'area di F'_n , e sia l la lunghezza del segmento $A\omega$.

Sopra il segmento $A\omega$ come diametro costruisco il semicerchio Q . Presa arbitrariamente una quantità positiva ε , costruisco due altri semicerchi Γ_1 e Γ_2 , concentrici con Q , sopra i diametri SS' e TT' di lunghezze $l+2\varepsilon$ e $l-2\varepsilon$ (fig. 28).

Siccome ω è l'unico punto limite dei punti B'_n , esiste un numero N tale che per ogni $n > N$ si ha $B'_n\omega < \frac{\varepsilon}{2}$.

D'altra parte, ad ogni punto M della parte curvilinea C'_n della

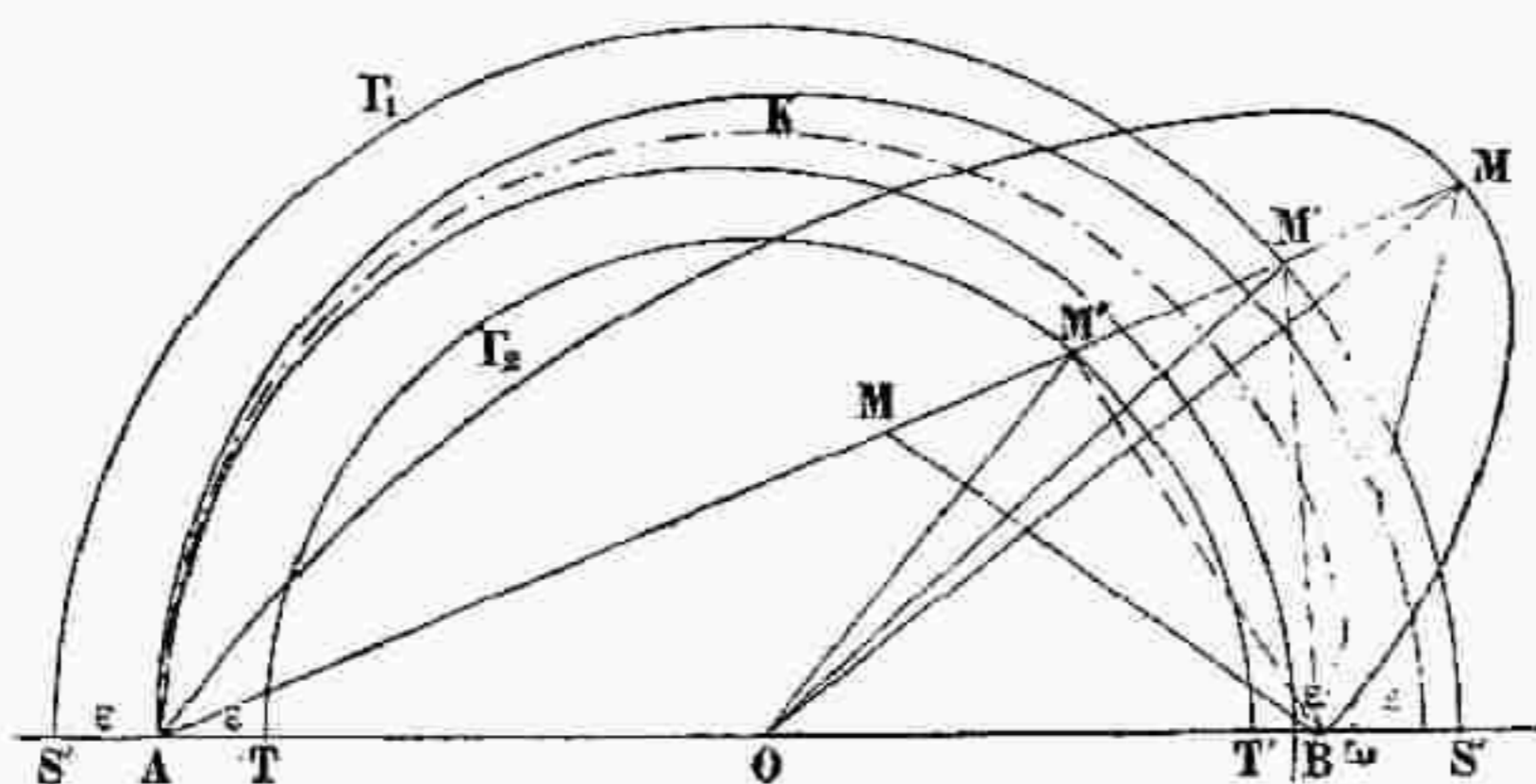


Fig. 28.

figura F'_n corrisponde un valore definito dell'angolo $\theta = \widehat{AMB}'_n$, e perciò anche un valore definito dell'espressione:

$$\Delta = \frac{1}{2} r_1 r_2 (1 - \text{sen } \theta).$$

Si può dimostrare che l'angolo $\theta = \widehat{AMB}'_n$ differisce dall'angolo retto più di una quantità fissa (positiva) α , cioè:

$$\left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| > \alpha > 0,$$

se $n > N$ e se il punto M si trova fuori della mezza corona K limitata dagli archi Γ_1 e Γ_2 e dai segmenti ST e ST' .

Infatti, se il punto M si trova fuori di K , esso è fuori del semicerchio Γ_1 od entro il semicerchio Γ_2 .

Nel primo caso l'angolo $\theta = \widehat{AMB}'_n$ è minore dell'angolo acuto $\widehat{AM'B}'_n$, nel secondo caso θ è maggiore dell'angolo ottuso $\widehat{AM'B}'_n$, dove M' è il punto d'incontro di AM con Γ_1 o con Γ_2 . Perciò il valore di $\left| \theta - \frac{\pi}{2} \right|$ rimane per i punti M esterni a K sempre maggiore del limite inferiore dei valori di $\left| \theta - \frac{\pi}{2} \right|$ corrispondenti ai punti M' dell'arco Γ_1 o Γ_2 .

Ma quando il punto M' si muove lungo uno di questi archi ed il punto B si muove sulla retta LL' , l'angolo $\theta = \widehat{AM'B}$ e l'espressione $\left| \theta - \frac{\pi}{2} \right|$ rappresentano delle *funzioni continue* di due argomenti: la distanza ωB (col suo segno) e l'angolo $\widehat{AOM'}$. Perciò, se questi argomenti percorrono rispettivamente tutti i valori dei due intervalli finiti e chiusi:

$$-\frac{\varepsilon}{2} \leq \omega B \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \theta \leq \widehat{AOM'} \leq \pi,$$

allora, per un teorema noto, la funzione continua $\left| \theta - \frac{\pi}{2} \right|$ raggiunge, su ciascuna delle curve Γ_1, Γ_2 , il suo *limite inferiore*, che sarà perciò il suo *valore minimo*. Dunque, se questo valore minimo fosse uguale a zero, per es. per la curva Γ_1 , allora per un certo sistema di valori di ωB e di $\widehat{AOM'}$ sarebbe $\theta = \frac{\pi}{2}$, cioè esisterebbe sulla LL' un punto B^* , distante da ω meno di $\frac{\varepsilon}{2}$, e sull'arco Γ_1 un punto M^* tale, che l'angolo $\widehat{AM^*B^*}$ sarebbe *retto*. Ma questo non è possibile, giacchè l'angolo $\widehat{AMB^*}$ è retto soltanto per i punti M giacenti sul cerchio di diametro AB^* , e questo cerchio non ha nessun punto comune nè con Γ_1 , nè con Γ_2 (essendo $\omega B^* < \frac{\varepsilon}{2}$). Ne concludiamo che questi valori minimi per Γ_1 e Γ_2 sono *positivi* tutti e due. Sia α il più piccolo di essi; quando M è fuori di K e $n > N$, si ha:

$$\left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| > \alpha > 0,$$

cosicchè:

$$\text{sen } \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) < \cos \alpha,$$

e:

$$\Delta = \frac{1}{2} r_1 r_2 (1 - \text{sen } \theta) > \frac{1}{2} \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon}{2} (1 - \cos \alpha),$$

ovvero:

$$\Delta > \eta, \quad \text{dove} \quad \eta = \frac{1}{4} \varepsilon^2 (1 - \cos \alpha).$$

Siccome le figure F'_n appartengono alla successione delle figure F_n e le aree di queste ultime tendono verso I , concludiamo che esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} I'_n$ ed è uguale a I .

Ma questo vuol dire che, data la quantità $\eta > 0$, si può trovare un numero N' tale che, ogni volta che $n > N'$, si ha:

$$I - I'_n < \eta.$$

Se nello stesso tempo è $n > N$, la parte curvilinea C'_n della figura F'_n si troverà tutt'intera nell'interno di K . Infatti, se C'_n

avesse qualche punto M' fuori di K , la sua area I'_n potrebbe esser aumentata della quantità Δ , la quale è maggiore di η (siccome $n > N$), e la nuova figura apparterebbe alla stessa classe B .

Ma allora l'area di questa figura, maggiore di $I'_n + \eta$, sarebbe a fortiori maggiore di I , siccome $I - I'_n < \eta$, e questo è assurdo, poichè I è il limite superiore per le aree della classe B .

Ne concludiamo che, scelto un $\varepsilon > 0$, per n abbastanza grande ($n > N$, $n > N'$) la differenza delle aree della figura F'_n e del semicerchio Q (di diametro $A\omega$) è minore dell'area della mezza corona K .

Ma siccome quest'ultima area di K converge verso zero insieme ad ε , ne segue che le aree I'_n hanno per $n = \infty$ un limite uguale all'area di Q . E siccome d'altra parte $\lim_{n \rightarrow \infty} I'_n = I$, concludiamo che l'area del semicerchio Q è uguale a I .

Ora resta a dimostrare che Q appartiene alla classe B ; ne seguirà che Q è la figura massima per questa classe e che il cerchio è la massima figura nella classe A .

Siccome la figura F'_n è convessa, la linea $ASF'_nS'B'_n$ è più lunga della linea C'_n di lunghezza π , e la linea $TAC'_nB'_nT$ è più lunga di Γ_n , cosicchè a fortiori:

$$\varepsilon + \frac{l + 2\varepsilon}{2} \pi + 2\varepsilon > \pi, \quad \varepsilon + \pi + 2\varepsilon > \frac{l - 2\varepsilon}{2} \pi,$$

ovvero:

$$(l + 2\varepsilon)\pi + 6\varepsilon > 2\pi > (l - 2\varepsilon)\pi - 6\varepsilon.$$

Siccome il primo ed il terzo membro di questa disuguaglianza hanno per *limite comune*, quando ε tende a zero, il valore $l\pi$, questo valore è uguale al secondo membro 2π , cosicchè la lunghezza dell'arco di Q , cioè $\frac{l\pi}{2}$, è uguale a π , ed il semicerchio Q appartiene alla classe B . c. d. d.

Notiamo che da quest'ultimo risultato ($l = 2$) segue che ω è l'unico punto limite dei punti B_n di ogni successione di figure F_n le cui aree tendono a I .⁽¹⁾

⁽¹⁾ Il presente articolo fu stampato per la prima volta in russo nel *Messaggero di Fisica Sperimentale e Matematica Elementare* di Odessa (anno 1911-12). Durante la stampa della presente traduzione italiana l'autore ha preso conoscenza di un articolo interessantissimo del Dr. O. CHIAINI, dedicato alla "Teoria elementare degli isoperimetri", ed inserito nel volume II delle *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, raccolte e coordinate da FEDERICO ENRIQUES, Bologna, N. Zanichelli, 1914. In questo lavoro il lettore troverà, oltre le questioni d'isoperimetria piana a cui noi ci siamo limitati, anche quelle relative all'isoperimetria sulla sfera e nello spazio.

LE IPERSFERE CHE TOCCANO GLI S_1 DEGLI SPIGOLI DI UN PENTAEDRO IN S_4

I. In un mio articolo pubblicato in questo pregevole Giornale (*) trovai che fatte le posizioni:

$$\begin{cases} A_i P_{ik} : P_{ik} A_k = x'_{ik} & (x'_{ik} = x'_{ki}) \\ A_i Q_{ik} : Q_{ik} A_k = x_{ik} & (x_{ik} = x_{ki}), \end{cases}$$

con la convenzione che l'indice i fosse *minore* dell'indice k , le condizioni *necessarie e sufficienti* perchè i punti P e Q appartenessero a un'ipersfera erano:

$$(\alpha) \left\{ \begin{aligned} & \frac{l_{12}^2}{(x_{12} + 1) \cdot (x'_{12} + 1)} = \\ & = \frac{l_{13}^2 x_{23} x'_{23}}{(x_{13} + 1) \cdot (x'_{13} + 1)} = \frac{l_{23}^2 x_{23} x'_{23}}{(x_{23} + 1) \cdot (x'_{23} + 1)} = \\ & = \frac{l_{14}^2 x_{23} x'_{23} x_{34} x'_{34}}{(x_{14} + 1) \cdot (x'_{14} + 1)} = \frac{l_{24}^2 x_{23} x'_{23} x_{34} x'_{34}}{(x_{24} + 1) \cdot (x'_{24} + 1)} = \frac{l_{34}^2 x_{23} x'_{23} x_{34} x'_{34}}{(x_{34} + 1) \cdot (x'_{34} + 1)} = \\ & = \frac{l_{15}^2 x_{23} x'_{23} x_{34} x'_{34} x_{45} x'_{45}}{(x_{15} + 1) \cdot (x'_{15} + 1)} = \frac{l_{25}^2 x_{23} x'_{23} x_{34} x'_{34} x_{45} x'_{45}}{(x_{25} + 1) \cdot (x'_{25} + 1)} = \\ & = \frac{l_{35}^2 x_{23} x'_{23} x_{34} x'_{34} x_{45} x'_{45}}{(x_{35} + 1) \cdot (x'_{35} + 1)} = \frac{l_{45}^2 x_{23} x'_{23} x_{34} x'_{34} x_{45} x'_{45}}{(x_{45} + 1) \cdot (x'_{45} + 1)}. \end{aligned} \right.$$

$$(\beta) \left\{ \begin{aligned} x_{13} \cdot x'_{13} &= x_{12} x'_{12} \cdot x_{23} x'_{23} \\ x_{14} \cdot x'_{14} &= x_{12} x'_{12} \cdot x_{23} x'_{23} \cdot x_{34} x'_{34} \\ x_{15} \cdot x'_{15} &= x_{12} x'_{12} \cdot x_{23} x'_{23} \cdot x_{34} x'_{34} \cdot x_{45} x'_{45} \\ x_{24} x'_{24} &= x_{23} x'_{23} \cdot x_{34} x'_{34} \\ x_{25} x'_{25} &= x_{23} x'_{23} \cdot x_{34} x'_{34} x_{45} x'_{45} \\ x_{35} x'_{35} &= x_{34} x'_{34} \cdot x_{45} x'_{45}. \end{aligned} \right.$$

Soddisfatte le (α) e (β) si potrà concludere — in base a un teorema che dimostrai nel "Pitagora", che i punti P e Q sono sopra un'ipersfera quando si sia verificato che per ogni faccia triangolare i punti *interni* ai lati — e quindi quelli *esterni* ai lati — sono in numero *pari*.

Vogliamo servirci di queste equazioni per studiare se e quando esistano ipersfere tangenti agli S_1 degli spigoli del pentaedro $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ dello spazio con quattro dimensioni. Poniamo perciò

(*) "Il pentaedro di ugual momento e la prima ipersfera di Lemoine in S_4 ". Anno XXIX, fasc. IV, marzo 1914.

nelle (α) e nelle (β) $x'_{ik} = x_{ik}$. Esse conducono allora alle seguenti formole

$$(\alpha') \left\{ \begin{aligned} a_{12} \frac{l_{12}}{x_{12} + 1} &= a_{13} \frac{l_{13}x_{23}}{x_{13} + 1} = a_{23} \cdot \frac{l_{23}x_{33}}{x_{23} + 1} = a_{14} \cdot \frac{l_{14}x_{23}x_{34}}{x_{14} + 1} = \\ &= a_{24} \frac{l_{24}x_{23}x_{34}}{x_{24} + 1} = a_{34} \cdot \frac{l_{34}x_{23}x_{34}}{x_{34} + 1} = a_{15} \cdot \frac{l_{14}x_{23}x_{34}x_{45}}{x_{15} + 1} = \\ &= a_{24} \cdot \frac{l_{25}x_{23}x_{34}x_{45}}{x_{25} + 1} = a_{35} \cdot \frac{l_{25}x_{23}x_{34}x_{45}}{x_{35} + 1} = a_{45} \cdot \frac{l_{45}x_{23}x_{34}x_{45}}{x_{45} + 1} = \lambda. \end{aligned} \right.$$

$$(\beta') \left\{ \begin{aligned} x_{13} &= x_{12} \cdot x_{23}; \quad x_{14} = x_{12}x_{23}x_{34}; \quad x_{15} = x_{12} \cdot x_{23} \cdot x_{34} \cdot x_{45} \\ x_{24} &= x_{23} \cdot x_{34}; \quad x_{25} = x_{23} \cdot x_{34} \cdot x_{45}; \quad x_{35} = x_{34} \cdot x_{45}. \end{aligned} \right.$$

Nelle (α') con a_{ik} si vuole indicare l'unità, positiva o negativa, e con λ una funzione lineare delle l_{ik} .

Quanto alle (β') se si osserva che sono ottenute dalle (β) con un procedimento di estrazione di radice quadrata, può domandarsi perchè siano esenti dall'incertezza del segno. Si osservi in proposito che tre di esse — che contengono tre sole delle x_{ik} — ne sono esenti perchè se uno dei membri fosse negativo, il teorema di Menelao invertito esprimerebbe che i corrispondenti punti sarebbero allineati e allora non esisterebbe un'ipersfera contenente loro e gli altri punti Q.

Delle rimanenti poi, la seconda, la terza e la quinta possono scriversi rispettivamente:

$$x_{14} = x_{12} \cdot x_{34}, \quad x_{15} = x_{14} \cdot x_{45}, \quad x_{25} = x_{24} \cdot x_{45},$$

e sotto questa forma si può loro applicare il ragionamento precedente.

Andiamo ora a ricavare dalle (α') i valori delle x_{ik} in funzione di λ .

La prima dà

$$(1) \quad x_{12} = \frac{a_{12}l_{12} - \lambda}{\lambda},$$

e la terza:

$$(2) \quad x_{23} = \frac{\lambda}{a_{23}l_{23} - \lambda}.$$

Allora la seconda dà

$$(3) \quad x_{13} = \frac{a_{13}l_{13} - a_{23}l_{23} + \lambda}{a_{23}l_{23} - \lambda}.$$

La quinta, se osserviamo che $x_{23} \cdot x_{34}$ può rimpiazzarsi con x_{24} , dà:

$$(4) \quad x_{24} = \frac{\lambda}{a_{24}l_{24} - \lambda}.$$

Allora la quarta fornisce il valore di x_{14} :

$$(5) \quad x_{14} = \frac{a_{14}b_{14} - a_{24}b_{24} + \lambda}{a_{24}b_{24} - \lambda}.$$

Passiamo all'ottava equazione nella quale per $x_{28}x_{34}x_{46}$ possiamo porre x_{26} : allora si ricava:

$$(6) \quad x_{26} = \frac{\lambda}{a_{26}b_{26} - \lambda}.$$

Si può allora ricavare x_{16} :

$$(7) \quad x_{16} = \frac{a_{16}b_{16} - a_{26}b_{26} + \lambda}{a_{26}b_{26} - \lambda}.$$

La x_{34} si ricava dalla sesta tenendo conto della (2):

$$(8) \quad x_{34} = \frac{a_{34}b_{34} - a_{24}b_{24} + \lambda}{a_{34}b_{34} - \lambda}.$$

La nona dà

$$(9) \quad x_{36} = \frac{a_{36}b_{36} + \lambda - a_{26}b_{26}}{a_{26} \cdot b_{36} - \lambda}$$

e la decima

$$(10) \quad x_{46} = \frac{a_{46}b_{46} + \lambda - a_{26}b_{26}}{a_{26}b_{46} - \lambda}.$$

Trovati così dalle (α') i valori delle x_{ik} occorre fare la sostituzione nelle (β').

La prima delle (β') dà:

$$(11) \quad \lambda = \frac{a_{13}b_{13} + a_{23}b_{23} - a_{13}b_{13}}{2}$$

e la quarta dà:

$$(12) \quad \lambda = \frac{a_{24}b_{24} + a_{23}b_{23} - a_{34}b_{34}}{2}$$

Eguagliando i membri delle (11) e (12) si trova:

$$(13) \quad a_{13}b_{13} + a_{34}b_{34} = a_{13}b_{13} + a_{24}b_{24}.$$

La seconda può scriversi:

$$x_{14} = x_{13} \cdot x_{24}$$

e sotto questa forma dà, con la sostituzione:

$$(14) \quad \lambda = \frac{a_{13}b_{13} - a_{14}b_{14} + a_{24}b_{24}}{2}.$$

Confrontando questo valor di λ con (11) o (12) si completano le (13) che diventano così:

$$(15) \quad a_{13}b_{13} + a_{24}b_{24} = a_{12}b_{12} + a_{23}b_{23} = a_{14}b_{14} + a_{25}b_{25}.$$

Passiamo ora alla quinta e facciamo le sostituzioni: avremo senz'altro:

$$(16) \quad a_{24}b_{24} + a_{25}b_{25} = a_{23}b_{23} + a_{45}b_{45}.$$

La terza può scriversi:

$$x_{15} = x_{13} \cdot x_{25}$$

e allora dà:

$$(17) \quad \lambda = \frac{a_{13}b_{12} - a_{15}b_{15} + a_{25}b_{25}}{2}.$$

Dal confronto della (11) e (17) segue:

$$(18) \quad a_{15}b_{15} + a_{22}b_{22} = a_{25}b_{25} + a_{13}b_{13}$$

e da quello della (14) e (17) segue:

$$(19) \quad a_{14}b_{14} + a_{25}b_{25} = a_{15}b_{15} + a_{24}b_{24}.$$

Confrontando poi la (12) e la (17) e tenendo conto della (16) si trova:

$$(20) \quad a_{24}b_{24} + a_{15}b_{15} = a_{12}b_{12} + a_{45}b_{45}$$

per mezzo della quale le (19) vengono completate così:

$$(21) \quad a_{14}b_{14} + a_{25}b_{25} = a_{15}b_{15} + a_{24}b_{24} = a_{12}b_{12} + a_{45}b_{45}.$$

Le (15), (21) danno, uguagliando le due espressioni $a_{24}b_{24} - a_{12}b_{12}$ che da esse si traggono:

$$(22) \quad a_{13}b_{13} + a_{45}b_{45} = a_{24}b_{24} + a_{15}b_{15}.$$

La sesta delle (β) dà:

$$\frac{a_{35}b_{35} - a_{25}b_{25} + \lambda}{a_{25}b_{25} - \lambda} = \frac{a_{24}b_{24} - a_{24}b_{24} + \lambda}{a_{24}b_{24} - \lambda} \cdot \frac{a_{45}b_{45} - a_{25}b_{25} + \lambda}{a_{25}b_{25} - \lambda};$$

questa semplificata e per la soppressione del divisore comune $a_{25}b_{25} - \lambda$ e perchè per le (21), (14) è

$$a_{24}b_{24} - \lambda = a_{45}b_{45} - a_{25}b_{25} + \lambda,$$

dà

$$(23) \quad a_{35}b_{25} + a_{24}b_{24} = a_{25}b_{25} + a_{24}b_{24};$$

che serve a completare le (16) così:

$$24) \quad a_{34}l_{24} + a_{25}l_{25} = a_{23}l_{23} + a_{45}l_{45} = a_{25}l_{35} + a_{24}l_{24}.$$

Ricavando dalle (21) (24) le espressioni di $a_{45}l_{45} - a_{24}l_{24}$ si trova:

$$25) \quad a_{15}l_{15} + a_{23}l_{23} = a_{13}l_{13} + a_{35}l_{35},$$

che serve a completare le (18) così:

$$26) \quad a_{15}l_{15} + a_{23}l_{23} = a_{12}l_{12} + a_{35}l_{35} = a_{25}l_{25} + a_{13}l_{21}.$$

Restano da completare le (22) e per questo basta ricavare $a_{12}l_{12} - a_{25}l_{25}$ dalle (21) (26) e confrontare le due espressioni. Si trovano così le:

$$27) \quad a_{13}l_{13} + a_{45}l_{45} = a_{34}l_{24} + a_{15}l_{15} = a_{14}l_{14} + a_{25}l_{25}.$$

Come prima conclusione delle nostre ricerche possiamo dire che pentaedro in discorso non è un *qualunque* pentaedro; esso rientra nella categoria dei pentaedri notevoli e i suoi spigoli sono legati alle relazioni seguenti:

$$(28) \quad \begin{cases} 1) & a_{23}l_{23} + a_{45}l_{45} = a_{24}l_{24} + a_{35}l_{35} = a_{25}l_{25} + a_{24}l_{34} \\ 2) & a_{13}l_{13} + a_{45}l_{45} = a_{14}l_{14} + a_{35}l_{35} = a_{15}l_{15} + a_{24}l_{34} \\ 3) & a_{12}l_{12} + a_{45}l_{45} = a_{14}l_{14} + a_{25}l_{25} = a_{15}l_{15} + a_{24}l_{24} \\ 4) & a_{13}l_{13} + a_{35}l_{35} = a_{13}l_{13} + a_{25}l_{25} = a_{15}l_{15} + a_{23}l_{23} \\ 5) & a_{12}l_{12} + a_{24}l_{34} = a_{13}l_{13} + a_{24}l_{24} = a_{14}l_{14} + a_{23}l_{23} \end{cases}$$

2. Andiamo ora ad esaminare i segni delle a_{ik} .

1° Caso, in cui le a_{ik} sono tutte positive. In questo caso le (28) dicono che i tetraedri che fanno parte del pentaedro sono tetraedri di *Durrande*; il pentaedro stesso lo chiamammo *pentaedro di Durrande* (1) vedemmo che per esso esiste un'ipersfera che tocca internamente tutti gli spigoli. Del resto ci si persuade di ciò calcolando i valori delle x_{ik} dati dalle (1) (2) ecc. fino alla (10) e tenendo conto dei valori di λ .

In questo caso esiste dunque un'ipersfera contenente i 20 punti Q.

2° Caso, in cui *una sola* delle a_{ik} è negativa. È indifferente la scelta di questa e noi potremo supporre che sia, per esempio, a_{12} . terza delle (28) dà:

$$-l_{12} + l_{45} = l_{14} + l_{25} = l_{15} + l_{24}$$

non può sussistere giacchè da questa si ricava successivamente:

$$\begin{aligned} l_{45} &= l_{12} + l_{14} + l_{25}, \\ l_{45} &> l_{14} \\ l_{45} - l_{14} &= l_{12} + l_{25} \end{aligned}$$

1) Vedasi la mia nota "L'n-edro di Durrande in un S_{n-1} lineare", inserita in questo *Periodico di Matematica*, Anno XXVII, fasc. V, 1912.

e, ponendo mente al triangolo $A_1A_4A_5$ prima e $A_1A_3A_5$ dopo:

$$l_{15} > l_{45} - l_{14} > l_{19} + l_{25}$$

risultato assurdo.

Non esiste alcuna ipersfera contenente i punti Q.

3° Caso, in cui due a_{ik} sono negative. Se i corrispondenti spigoli fanno parte del medesimo tetraedro, potranno essere o due spigoli concorrenti o due spigoli opposti. Se opposti, es.: l_{35}, l_{45} , le:

$$-l_{33} - l_{45} = l_{34} + l_{35} = l_{35} + l_{34}$$

non possono sussistere; nè possono sussistere, per quanto abbiamo visto nel 2° caso, le

$$l_{33} - l_{45} = l_{34} - l_{35} = l_{35} + l_{34}$$

se gli spigoli in discorso sono l_{45} e l_{35} .

E neppure può suppersi, senza giungere a un assurdo, che sieno negative due a tali che i corrispondenti spigoli appartengano a tetraedri diversi, perchè due tali spigoli o non hanno alcun vertice in comune, come ad esempio $l_{ik}l_{mn}$, e allora appartengono al tetraedro $A_iA_kA_mA_n$ del quale costituiscono una coppia di spigoli opposti, ovvero hanno un vertice in comune e allora appartengono a uno stesso tetraedro: in ogni caso valgono le considerazioni precedenti.

Neppure in questo caso esiste un'ipersfera contenente i punti Q.

4° Caso, in cui tre delle a_{ik} sono negative. Se i corrispondenti spigoli appartengono al medesimo tetraedro potranno: o avere a comune un vertice o giacere sulla medesima faccia, oppure formare una terna costituita da due spigoli opposti e da uno dei rimanenti. Nel primo sottocaso se gli spigoli sono $l_{12}l_{13}l_{14}$, le (1) e le (5) delle (28) possono sussistere, non già le rimanenti; se siamo nel secondo, e gli spigoli sono $l_{23}l_{24}l_{34}$, si può soddisfare alle (1), (5) ma non alle altre delle (28); se siamo nel terzo e gli spigoli sono $l_{12}l_{34}l_{13}$, nessuna può sussistere.

Se i tre spigoli non appartengono al medesimo tetraedro, due di essi debbono avere un vertice in comune; siano, per esempio, l_{12} e l_{13} , l'altro non può essere altro che l_{45} , ma in tal caso si vede subito che le (28) non possono sussistere.

Anche in questo quarto caso non esiste dunque una ipersfera che contenga i punti Q.

Nel 5° caso, in cui quattro delle a_{ik} sono negative, si giunge ad analoghe conclusioni — ormai il lettore ha preso familiarità col procedimento che si è seguito fin qui — a meno che i quattro corrispondenti spigoli escano da uno stesso vertice, nella quale ipotesi esiste un'ipersfera che tocca i detti spigoli esternamente e gli altri sei internamente. Se ci riferiamo agli spigoli $l_{12}l_{13}l_{14}l_{15}$, se supponiamo cioè che $a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}$ siano negativi, dalle (1) (3) (5) (7) segue che $x_{12}x_{13}x_{14}x_{15}$

sono negative, mentre le altre sei hanno segno positivo. Si osservi che nella medesima ipotesi il tetraedro opposto al vertice A_1 è di *Durrande*, gli altri hanno costanti le differenze degli spigoli opposti. È chiaro che se invece quello opposto ad A_7 fosse di *Durrande* e gli altri avessero costanti le differenze degli spigoli opposti, esisterebbe un'ipersfera tangente esternamente agli spigoli uscenti da A_2 e internamente agli altri sei e così via.

Il 6° caso, in cui cinque delle a_{ik} son negative, non porta ad alcuna ipersfera, come il lettore potrà facilmente verificare.

Il 7° caso, in cui sei delle a_{ik} sono negative, si riconduce al 5° cambiando segno a tutti i termini che compariscono nelle (28) e porta alle solite ipersfere di cui sopra.

L'8° caso, il nono e il decimo, in cui rispettivamente sette, otto, nove delle a_{ik} son negative, non conduce all'esistenza di alcuna ipersfera; l'undicesimo riporta all'ipersfera di *Durrande* di cui al primo caso.

Riassumendo: " Se le misure degli spigoli del pentaedro soddisfanno alle relazioni:

$$(29) \begin{cases} l_{12} + l_{34} = l_{23} + l_{14} = l_{13} + l_{24} \\ l_{12} + l_{35} = l_{13} + l_{25} = l_{23} + l_{15} \\ l_{13} + l_{45} = l_{14} + l_{25} = l_{15} + l_{24} \\ l_{13} + l_{45} = l_{14} + l_{25} = l_{15} + l_{34} \\ l_{23} + l_{45} = l_{24} + l_{35} = l_{25} + l_{34} \end{cases}$$

esiste un'ipersfera che tocca internamente tutti gli spigoli. Se soddisfanno a una delle (29), per esempio alla

$$(30) \begin{cases} l_{12} + l_{34} = l_{13} + l_{24} = l_{23} + l_{14} \text{ e alle altre} \\ l_{12} - l_{35} = l_{13} - l_{25} = l_{23} - l_{15} \\ l_{12} - l_{45} = l_{14} - l_{25} = l_{24} - l_{15} \\ l_{13} - l_{45} = l_{14} - l_{35} = l_{24} - l_{15} \\ l_{23} - l_{45} = l_{24} - l_{35} = l_{34} - l_{25} \end{cases}$$

esiste un'ipersfera che tocca esternamente gli spigoli uscenti dal vertice A_5 e internamente tutti i rimanenti.

Complessivamente si hanno sei ipersfere, ma la esistenza di una esse — almeno nel caso generale — implica l'inesistenza delle tre cinque.

Il cortese lettore vorrà estendere allo spazio S_{n-1} il precedente risultato e perverrà così all'esistenza di $n + 1$ ipersfere, ciascuna delle quali — almeno in generale — non può esistere che da sola.

ENRICO PICCIOLI.



SULLA TERZA CURVATURA GEODETICA delle linee di una superficie

In altra mia nota⁽¹⁾ ho definito *terza curvatura geodetica* in un punto di una linea di una superficie, quella che risulta componendo la flessione $\frac{1}{R}$ e la torsione $\frac{1}{T}$ della geodetica, che tocca la linea in quel punto, ossia l'espressione:

$$\frac{1}{S} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2}}. \quad (1)$$

Nella presente nota stabilisco una formola pel calcolo di detta curvatura, del tutto simile a quella di Eulero per le curvature normali, ed espongo qualche altra proprietà, che credo non del tutto priva d'interesse, specialmente dal lato della semplicità.

1. Prendiamo a linee parametriche sulla superficie, le linee di curvatura; allora, se $E, F, G; D, D', D''$ dinotano i coefficienti della prima e seconda forma fondamentale sarà $F = D' = 0$ e se sostituiamo in (1) le notissime espressioni della curvatura normale e della torsione geodetica, avremo:

$$\frac{1}{S^2} = \frac{EG \left\{ D + D'' \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \right\}^2 + (GD - ED'')^2 \left(\frac{dv}{du} \right)^2}{EG \left\{ E + G \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \right\}^2}.$$

Inoltre se α dinota l'angolo della direzione che si considera, con una linea (v) di curvatura, si ha:

$$\left(\frac{dv}{du} \right)^2 = \frac{E}{G} \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (2)$$

epperò la formola precedente può scriversi, con semplici trasformazioni:

$$\frac{1}{S^2} = \frac{D''^2}{G^2} \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{D^2}{E^2} \operatorname{cos}^2 \alpha.$$

Ma i rapporti $-\frac{D''}{G}, -\frac{D}{E}$ misurano⁽²⁾ nell'attuale sistema curvilineo le curvature principali $\frac{1}{r_1}$ ed $\frac{1}{r_2}$; ne segue dunque la formola:

$$\frac{1}{S^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{r_1^2} + \frac{\operatorname{cos}^2 \alpha}{r_2^2} \quad (3)$$

⁽¹⁾ *Periodico di Matematica*, Livorno, *Su una terza curvatura delle linee di una superficie*, Anno XXVIII, fasc. V, maggio 1913.

⁽²⁾ BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, Vol. I, pag. 131.

che è quella cui alludevo; essa permette di calcolare la terza curvatura geodetica lungo una direzione, per mezzo delle curvature principali e dell'angolo della direzione con una linea di curvatura, e prova subito le seguenti proposizioni:

La somma dei quadrati delle terze curvature geodetiche lungo due direzioni, che fanno con le linee di curvatura angoli uguali, è costante. In particolare: è costante la somma dei quadrati delle terze curvature geodetiche lungo due direzioni ortogonali.

La somma dei quadrati delle terze curvature geodetiche lungo due direzioni isogone ⁽¹⁾ è costante.

2. Cerchiamo la relazione che lega le terze curvature geodetiche lungo due direzioni coniugate. Ricordiamo che affinché i due elementi lineari d e δ spiccati dal punto (u, v) della superficie, sieno coniugati, occorre e basta che sia:

$$Ddu\delta u + D''dv\delta v = 0.$$

Inoltre, se α, α' sono gli angoli di queste direzioni con una linea di curvatura, avremo per la (2):

$$\frac{D}{E} + \frac{D''}{G} \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha' = 0$$

e per le formule delle curvature principali risulta:

$$\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha' = 0$$

donde:

$$\operatorname{tg} \alpha' = - \frac{\frac{1}{r_2} \cos \alpha}{\frac{1}{r_1} \operatorname{sen} \alpha}$$

e, servendosi della (3) si ha:

$$\operatorname{sen} \alpha' = \frac{-\frac{1}{r_2} \cos \alpha}{\frac{1}{S}}, \quad \cos \alpha' = \frac{\frac{1}{r_1} \operatorname{sen} \alpha}{\frac{1}{S}}.$$

Sostituendo nella (3) avremo la terza curvatura geodetica $\frac{1}{S'}$, lungo la direzione α' coniugata della α , cioè:

$$\frac{1}{S'^2} = \frac{1}{r_1^2 r_2^2} \frac{1}{S^2}$$

⁽¹⁾ *Periodico di Matematica*, l. c.

ossia:

$$\frac{1}{S} \cdot \frac{1}{S'} = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2}.$$

È dunque costante il prodotto delle terze curvatures geodetiche lungo due direzioni coniugate, e questa costante è la curvatura totale della superficie nel punto in considerazione.

3. La (3) ci permette di costruire, come per le curvatures normali, la indicatrice delle terze curvatures geodetiche al variare della direzione α . Basta fissare sul piano tangente come assi cartesiani ξ , η le tangenti alle linee di curvatura e poi staccare sopra ogni direzione a partire dal punto O che si considera, un segmento OP uguale al raggio S di terza curvatura geodetica, lungo quella direzione:

$$OP = S \quad (4)$$

allora per le coordinate ξ , η del punto P avremo le espressioni

$$\xi = S \sin \alpha, \quad \eta = S \cos \alpha$$

e sostituendo in (3) risulta:

$$\frac{\xi^2}{r_1^2} + \frac{\eta^2}{r_2^2} = 1$$

cioè il luogo degli estremi P è una ellisse che ha per centro il punto in considerazione O e per semi-assi i raggi principali di curvatura. La (4) poi ci mostra che il raggio di terza curvatura geodetica lungo una direzione è uguale al semidiametro della ellisse indicatrice, lungo quella direzione.

Così vediamo che lungo le direzioni principali si ha il massimo e minimo di terza curvatura geodetica e che questo massimo e minimo è dato dalle curvatures principali.

4. Calcoliamo ora le terze curvatures geodetiche lungo le direzioni più notevoli.

Lungo una direzione di assintotica (se il punto O è iperbolico) la terza curvatura geodetica è uguale alla radice quadrata della curvatura totale cambiata di segno (teorema di Enneper).⁽¹⁾

Lungo una linea caratteristica (se il punto O è ellittico) quella curvatura è uguale alla radice quadrata della curvatura totale.⁽²⁾

Lungo una direzione di linea di torsione si ha $\alpha = 45^\circ$ epperò la (3) dà:

$$\frac{1}{S^2} = \frac{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}}{2}$$

⁽¹⁾ *Periodico di Matematica*, l. c.

⁽²⁾ *Periodico di Matematica*, Anno XXIX, fasc. 1, Settembre 1913.

ioè:

La terza curvatura geodetica lungo una direzione di linea di torsione è uguale alla radice quadrata della curvatura di Casorati.

E lungo una delle linee ad immagini sferiche ortogonali ⁽¹⁾ poiché è:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{GD}{ED''} = \frac{r_1}{r_2},$$

sulta per la (3):

$$S^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2}$$

oè:

Il quadrato del raggio di terza curvatura geodetica lungo una direzione delle linee ad immagini sferiche ortogonali è uguale alla media aritmetica dei quadrati dei raggi principali.

R. OCCHIPINTI.

RELATIONE INTER MEDIO ARITHMETICO ET GEOMETRICO ⁽²⁾

(Historia).

“ Valore medio geometrico inter plure quantitate ⁽³⁾ es minore de medio arithmetico correspondente „.

In forma symbolico:

Si a_1, a_2, \dots, a_n es quantitates, et non es

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n,$$

re

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Aut, si nos eleva ad potestate n :

$$a_1 a_2 \dots a_n < \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^n.$$

Id es: “ producto de n quantitates es minore de potestate n de ore medio arithmetico inter illos; subsiste aequalitate in solo u que quantitates es aequale inter se „.

Aut sub alio forma:

“ Producto de n quantitates que habe dato summa es maximo ando quantitates es aequale „.

⁽¹⁾ Periodico di Matematica, l. c.

⁽²⁾ In latino sine flexione.

⁽³⁾ Quantitate significa in praesente scripto “ numero reale positivo „.

Pro $n = 2$ demonstratione es simplice; nam

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

quantitate positivo.

Pro $n = 3$, differentia

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 - abc$$

pote es decomposito in summa de quantitates positivo (Formul. pag. 87, Prop. 15.9) (1)

$$2[(a+b+c)^3 - 27abc] = (a-b)^2(a+b+7c) + (b-c)^2(7a+b+c) + (c-a)^2(a+7b+c).$$

Sed isto formula es complicato, et complicatione cresce cum numero de quantitates.

Multo diffuso es demonstratione sequente, reproducto ab BERTRAND, *Algebra*, cap. IX:

Si quantitates (per ex., in numero de 3) a, b, c non es aequale, tunc:

$$abc < \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot c$$

et summa de tres factores

$$\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c$$

vale $a+b+c$: ergo producto abc quando summa $a+b+c$ es constante dato, non es maximo, si factores non es aequale.

Sed isto propositione non es invertibile sub forma: producto es maximo, si factores es aequale.

CAUCHY, *Analyse algébrique*, pag. 459, da demonstratione sequente:

Si numero de factores es 4, resulta:

$$ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \quad cd < \left(\frac{c+d}{2}\right)^2$$

$$abcd < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \left(\frac{c+d}{2}\right)^2$$

et

$$\frac{a+b}{2} \times \frac{c+d}{2} < \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2$$

ergo

$$abcd < \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4.$$

(1) Formul. indica *Formulario mathematico* de G. Peano, editio V, 1903.

Pro 8, 16 etc. factores et factores in numero de 2^n , demonstratione es simile.

Si nos habe 3 quantitates a, b, c , tunc

$$abc \left(\frac{a+b+c}{3} \right) < \left(\frac{4(a+b+c)}{3 \times 4} \right)^4,$$

id es

$$abc \left(\frac{a+b+c}{3} \right) < \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^4,$$

et suppresso factore

$$\left(\frac{a+b+c}{3} \right),$$

resulta propositione

$$abc < \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3.$$

Et in modo simile pro factores in numero arbitrario. Sed introductione de factores, que debe es suppresso, es artificiale.

Plure alio demonstratione resulta ex combinatione de identitates scripto in Formulario citato.

Uno combinatione es facta in libro: CATANIA, *Trattato di aritmetica ed algebra*, pag. 180-372.

In praesente scripto me da demonstratione que me crede plus simplice.

DEMONSTRATIONE.

LEMMA I. — Si n es numero integro superiore ad 1, et si x es quantitate positivo, aut es negativo inter -1 et 0 , tunc

$$(1+x)^m > 1+mx.$$

Nam, pro $m=2$, nos habe

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x;$$

et supposito propositione vero pro uno valore de m , si nos multiplica per $1+x$, resulta

$$(1+x)^{m+1} > (1+mx)(1+x) = 1+(m+1)x + mx^2 > 1+(m+1)x;$$

ergo propositione vale pro esponente consecutivo, et resulta veritate generale de propositione.

LEMMA II. — Si m, n , es numero integro positivo, et si x es quantitate positivo minore de n , tunc:

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n < 1.$$

In vero, ex lemma I, si nos scribe $\frac{x}{mn}$ in loco de x , resulta

$$\left(1 + \frac{x}{mn}\right)^n > 1 + \frac{x}{m} \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{x}{mn}\right)^m > 1 - \frac{x}{n}.$$

Nos eleva isto duo aequalitate ad potestate m et n , et multiplica inter se:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{mn}\right)^{mn} &> \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \\ \left(1 - \frac{x}{mn}\right)^{mn} &> \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \\ \left[\left(1 + \frac{x}{mn}\right) \left(1 - \frac{x}{mn}\right)\right]^{mn} &> \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Sed primo membro es minore de 1, nam

$$(1+x)(1-x) = 1-x^2 < 1;$$

ergo resulta lemma.

LEMMA III. — Si m, n es numero rationale positivo aut numero reale positivo, et si x es quantitate positivo minore de n , semper es:

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n < 1.$$

In vero, si m et n es rationale, pote es posito sub forma:

$$m = \frac{p}{r}, \quad n = \frac{q}{r}$$

ubi p, q, r es integro. Ex lemma II resulta:

$$\left(1 + \frac{x}{p}\right)^p \left(1 - \frac{x}{q}\right)^q < 1.$$

Si nos pone rx in loco de x et eleva ad potestate $\frac{1}{r}$, resulta propositione.

Transitu de rationales ad irrationales, resulta ex definitione de irrationales.

Isto propositione significa que si nos habe duo numeros

$$1 + \frac{x}{m} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{x}{n},$$

et valore medio arithmetico de illos, cum respectivo pondere m et n vale 1, tunc producto de potestates m et n de illos duo numeros es minore de potestate $m+n$ de medio arithmetico.

Limitatione, que valore medio arithmetico es 1, pote es suppresso et resulta:

THEOREMA. — Si a, b es quantitates positivo differente inter se, et si m, n es numeros positivo integro, aut rationale, aut irrationale, resulta:

$$a^m b^n < \left(\frac{ma + nb}{m + n} \right)^{m+n}.$$

In vero, quantitates a et b pote es expresso cum valore medio arithmetico $\frac{ma + nb}{m + n}$ et differentia $a - b$, ut seque:

$$a = \frac{ma + nb}{m + n} \left[1 + \frac{1}{m} \frac{mn(a - b)}{ma + nb} \right]$$

$$b = \frac{ma + nb}{m + n} \left[1 - \frac{1}{n} \frac{mn(a - b)}{ma + nb} \right].$$

Si nos multiplica isto duo identitate, elevato ad potestates m et n , et pro lemma ultimo, resulta theorema.

THEOREMA. — Si a, b, c es quantitates positivo, et si m, n, p es numeros positivo integro, aut rationale, aut irrationale, et non es

$$a = b = c,$$

resulta:

$$a^m b^n c^p < \left(\frac{ma + nb + pc}{m + n + p} \right)^{m+n+p}.$$

In vero, per theorema praecedente:

$$a^m b^n < \left(\frac{ma + nb}{m + n} \right)^{m+n} \quad (1)$$

et

$$\left(\frac{ma + nb}{m + n} \right)^{m+n} \times c^p < \left(\frac{ma + nb + pc}{m + n + p} \right)^{m+n+p} \quad (2)$$

Ex (1) et (2) resulta theorema.

Uno ex signos $<$ in (1) et (2) non exclude aequalitate, si p. ex. $a = b$; sed semper uno signo es $<$.

In modo simile pro numero majore de factores.

APPLICATIONES. — Si m et n es quantitates positivo, resulta:

$$\left(1 + \frac{1}{m} \right)^m < \left(1 + \frac{1}{m+n} \right)^{m+n}.$$

In vero

$$\left(1 + \frac{1}{m} \right)^m = \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m \times 1^n,$$

ergo es minore de potestate $m + n$ de valore medio arithmetico de basi $1 + \frac{1}{m}$, 1 , cum pondere m , n ; id es de

$$\frac{m + 1 + n}{m + n} = 1 + \frac{1}{m + n}.$$

Ergo expressione $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, pro m positivo, cresce cum m , que pote sume valores integro, aut fracto, aut irrationale.

(Demonstratione de isto propositione, que occurre in Serret, et in multitudine de alios libros de analysi infinitesimali, et fundato super evolutione de binomio $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, vale solo pro m integro, et es plus complicato).

In modo analogo:

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m \times 1^n < \left(\frac{m - 1 + n}{m + n}\right)^{m+n} = \left(1 - \frac{1}{m + n}\right)^{m+n}.$$

Et si nos sume reciprocos:

$$\left(\frac{m}{m - 1}\right)^m > \left(\frac{m + n}{m + n - 1}\right)^{m+n}.$$

Ergo functione $\left(\frac{m}{m - 1}\right)^m$, aut $\left(1 + \frac{1}{m - 1}\right)^m$, aut $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}$ decresce quando m cresce per valores positivo. Et

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \times \left(1 - \frac{1}{n + 1}\right)^{n+1} < 1$$

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Ergo omni valore de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ es minore de omni valore de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}$; et si nos indica limite supero de valores de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ et limite infero de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ cum e , resulta pro m reale positivo:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < e < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}.$$

PAOLINA QUARRA.

SULLE DEFINIZIONI DI ENTI ASTRATTI E SUL CONCETTO DI NUMERO REALE

In alcuni miei appunti che comunicai, or'è un anno, all'egregio collega Dott. E. SENIGAGLIA, svolsi una teoria aritmetica dei numeri reali, in cui il numero reale è definito " nominalmente ", mediante una *serie decimale illimitata* e in cui la classe dei numeri reali generalizza e comprende la sottoclasse dei numeri razionali. Detta teoria anche fosse da me cercata indipendentemente da ogni altra traccia, non si discosta essenzialmente dagli svolgimenti analoghi dello STOLZ,⁽¹⁾ del SOSCHINO⁽²⁾ e del MINCO nel suo ultimo articolo.⁽³⁾

Tuttavia il mio svolgimento trovava ispirazione e guida in alcune idee teoriche che io premetteva ad esso, e le quali oggi — in occasione dell'articolo del MINCO — credo di pubblicare senza alcuna pretesa, nella forma precisa in cui le comunicai al prof. SENIGAGLIA, sperando che esse valgano, ad ogni modo, a richiamare l'attenzione dei giovani studiosi di un interessante campo di indagini critiche.

E. M.

Quando si vuol definire una *nuova classe v* di enti astratti per un determinato " algoritmo ", vi può essere una certa arbitrarietà nell'individuare tale classe, potendo servire una qualunque di più classi Φ , classe di classi, legate da una corrispondenza univoca e reciproca.

In tal caso il procedimento *logico preferibile* è quello di scegliere di individuare una classe particolare tra le Φ , la più semplice possibile, e di assumerla a rappresentare la classe v , cioè di assumerla come classe v .

Talora possono aversi delle difficoltà nell'individuare la classe v , per esempio se si vuole che la classe v sia un'estensione di classe Φ considerata, ovvero se si pongono altre particolari condizioni.

Così ad esempio, definendo secondo il PASCH ed il RUSSELL, il numero reale quale un " segmento numerico ", che è una classe di numeri razionali, la nuova classe Q dei numeri reali non comprende la classe dei numeri razionali R da cui si parte, ma comprende una sottoclasse R' in corrispondenza univoca e reciproca con la classe dei numeri razionali R .⁽⁴⁾ Ora, ciò può considerarsi non consigliabile

⁽¹⁾ *Allgemeine Arithmetik*, Lipsia, 1885. Vedi pure: *Theoretische Arithmetik* di STOLZ e GMEINER, 2^a ed., Lipsia 1902. Né il SOSCHINO, né il MINCO, citano lo STOLZ.

⁽²⁾ *Periodico di Matematica*, 1911, anno XXVI.

⁽³⁾ *Period. di Mat.*, fasc. 1^o Nov. 1914.

⁽⁴⁾ Per una chiara esposizione della teoria dei numeri reali trattati come " segmenti numerici ", veda: M. CIPOLLA, *I numeri reali*, in *Periodico di Mat.*, 1909, anno XXV.

teoricamente (benchè non dia luogo ad obiezioni logiche), e può nella pratica causare inconvenienti, come fu messo in evidenza dal BURALI-FORTI, dal CATANIA e da altri.

Tal volta per introdurre una nuova classe v si ricorre alla cosiddetta *definizione per astrazione*, che consiste essenzialmente in questo procedimento: ⁽¹⁾

Si derivano gli elementi della classe v mediante una funzione (logica) φ degli elementi di una classe nota u , stabilendo che se a, b sono elementi della u , si ha

$$\varphi(a) = \varphi(b)$$

quando e solo quando axb , essendo α una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva tra gli elementi della u .

In tal caso, si può osservare — come noi altrove dimostrammo — che la classe v e la funzione φ non rimangono individuate, essendo solo definita l'eguaglianza $\varphi(a) = \varphi(b)$; ma ciò può essere sufficiente per costruire la teoria della nuova classe.

Così fa il PEANO nella definizione di numero reale quale "limite superiore" di una classe di numeri razionali. ⁽²⁾

Taluno — il CANTOR, seguito dall'ENRIQUES ⁽³⁾ — ammette che la classe v possa considerarsi determinata dalla u dicendo che l'elemento della v rappresenta il *concetto generale (astratto)* degli elementi della u legati dalla relazione α . Ma che cos'è questo "concetto generale"? Come lo si definisce logicamente?

Altri — il RUSSELL, preceduto dal PIERI — considera quali elementi della v le classi di elementi della u legati due a due dalla relazione α , ottenendo così una definizione nominale per v . ⁽⁴⁾

Altri infine — il BURALI-FORTI — si propone di ottenere l'esistenza e la individuazione della classe v , mediante la classe u e la relazione α , con un *postulato* di comodo, sotto le determinate condizioni. ⁽⁵⁾

Sono accettabili questa definizione "per astrazione", nelle forme del PEANO, del CANTOR, del RUSSELL, del BURALI-FORTI?

Senza volere qui approfondire un esame, che in parte abbiamo fatto altrove (loc. cit.), ecco senz'altro il nostro modestissimo pensiero:

⁽¹⁾ Per le cose qui dette, e per qualche citazione relativa vedasi la nostra Nota: *Le definizioni per astrazione e la classe di Russell*, Rend. del Circolo Matematico di Palermo, adunanza 24 Nov. 1912, t. XXXV, 1913. A questa Nota fa seguito una breve *Aggiunta* da noi pubblicata a parte. Ancona, Tip. Marchetti, 1913.

⁽²⁾ G. PEANO, *Formulario Mathematico*, Torino, 1908. Si veda pure dello stesso A.: *Sulla definizione di limite*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, ad. 13 Aprile 1913, v. 48.

⁽³⁾ F. ENRIQUES, *Questioni riguardanti le Matematiche elementari*, Bologna, 1912, vol. I, Art. 90. "I numeri reali".

⁽⁴⁾ Non si confonda questo tipo generale di definizione del RUSSELL con la definizione del RUSSELL di numero reale quale "segmento numerico", a cui accennammo più sopra.

⁽⁵⁾ G. BURALI-FORTI, *Gli enti astratti definiti come enti relativi ad un campo di nozioni*, Rend. dell'Acc. dei Lincei, ad. 17 Nov. 1912, vol. XXI.

Le definizioni " per astrazione ", nella forma del RUSSELL e del PIERI non danno luogo, in sè, ad obiezioni logiche; ma possono presentare talora degli inconvenienti pratici.

Le definizioni " per astrazione ", nella forma del PEANO possono essere accettate, sempre che si dica esplicitamente che si rinuncia ad individuare la classe v (come nella così detta definizione " per postulati ").

Le definizioni " per astrazione ", nella forma del CANTOR, e anche nell'ultima forma proposta dal BURALI-FORTI, ci pare — allo stato attuale della quistione — che debbano essere evitate. (1)

EUGENIO MACCAFERRI.

OSSERVAZIONI RELATIVE ALLA TEORIA DELLE CURVE PIANE

I.

Per determinare i flessi di una curva piana rappresentata dall'equazione polare

$$r = f(\theta),$$

invece di ricorrere alla relazione

$$y'' = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r' \cos \theta - r \sin \theta)^2},$$

si può servirsi direttamente del raggio di curvatura ρ , quando questo si presenti sotto una forma tale che ne ponga in evidenza la dipendenza dalla distanza p fra il polo e la tangente alla curva. Infatti, dalla

$$p = r^2 \frac{d\theta}{ds} = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

segue

$$\frac{dp}{dr} = r \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ossia

$$r \frac{dr}{dp} = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''} = \rho.$$

(1) Da quanto è qui esposto deriva la mia preferenza ad una teoria dei numeri reali che non richiedesse definizioni per astrazione di qualunque forma, e presentasse i numeri reali quali un'estensione dei numeri razionali.

Esempio:

$$b^2 = \frac{r}{r-a} \quad \text{ossia} \quad r = a \frac{\theta^2}{\theta^2 - 1};$$

si ha

$$\frac{dp}{d\theta} = - \frac{2a\theta(\theta^2 - 5)}{(\theta^4 - 2\theta^2 + 5)^{\frac{3}{2}}}, \quad r \frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{d(r^2)}{d\theta} = - \frac{2a^2\theta^3}{(\theta^2 - 1)^3},$$

$$r \frac{dr}{dp} = \rho = \frac{a\theta^2(\theta^4 - 2\theta^2 + 5)^{\frac{3}{2}}}{(\theta^2 - 1)^2(\theta^4 - 6\theta^2 + 5)} = \frac{a\theta^2(\theta^4 - 2\theta^2 + 5)}{(\theta^2 - 1)^2(\theta^2 - 5)}$$

Per $\theta^2 = 3 \pm 2$, quest'ultima espressione, cioè il raggio di curvatura, diviene infinita. Abbiamo, quindi, quattro flessi; due all'infinito per $\theta^2 = 1$, cioè su due rette formanti con l'asse polare gli angoli $\pm 57^\circ.17'.44''$, 8; gli altri al finito per $\theta^2 = 5$ cioè su due rette formanti con l'asse polare; gli angoli $\pm 286^\circ.28'.44''$, 7.

La curva comincia nel punto $r = 0$, $\theta^2 = 0$ dell'asse polare; i punti di culminazione sono tali che $\theta = \arctg \frac{\theta^2 - 1}{2}$ ossia $\operatorname{tg} \theta = \frac{a}{2(r-a)}$. Siccome quando θ tende a ∞ , r tende a a e r' a 0 e siccome l'angolo compreso fra il raggio vettore e la tangente tende ad un angolo retto, così la curva ha la proprietà di tendere a toccare il cerchio avente il centro nel polo e per raggio a ; questo è pertanto un *cerchio asintotico* della curva.

II. (1)

L'equazione $y = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$, se x e y sono coordinate cartesiane, rappresenta una curva costituita di due rami, i quali si estendono all'infinito in direzioni differenti. Il secondo ramo sega l'asse delle x nel punto ove $x = +1$ sotto l'angolo $r = \arctg \frac{3}{2}$ e l'asse delle ordinate nel punto $y = -1$, che è un flesso. Oltre a questo la curva possiede altri due flessi, cioè $x = -1 \mid y = -\infty$ e $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \mid y = -\frac{1}{3}$; non si è tenuto alcun conto del contegno di y''' .

La curva $yx^3 - x^3 + y + 1 = 0$ non ha centro nè punti isolati. Parallelamente agli assi coordinati ha due asintoti $x = -1$ e $y = +1$; a destra y non può crescere oltre 1 perchè $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$.

Due ordinate y rispetto a due punti equidistanti dall'origine hanno valori reciproci, ma dello stesso segno e sono negative quando x è compreso fra -1 e $+1$.

(1) Il lettore dimostri per proprio esercizio i seguenti enunciati.

L'area della porzione di piano compresa fra la curva e gli assi coordinati è espressa da

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} - \left(1 - \frac{2}{3} \log 2\right).$$

I punti di contatto delle tangenti condotte alla curva data da un punto fisso $\xi | \eta$ del suo piano appartengono alla curva

$$(\eta - 1)x^3 + 3(y - 1)\xi x^2 + 3(y + 1)x + \eta + 1 = 0;$$

siccome le loro ascisse sono determinate dall'equazione

$$(\eta - 1)x^6 + 2(\eta + 3)x^3 - 6\xi x^2 + \eta + 1 = 0,$$

così quelle tangenti sono al massimo sei.

ARMINIO WITTSTEIN.

PICCOLE NOTE

Una dimostrazione delle formule del calcolo combinatorio.

Non mi consta che si sia ancora pensato ad ottenere le note formule che esprimono il numero delle disposizioni e delle combinazioni di n elementi a k basandosi sul noto teorema: *La probabilità che si verifichino contemporaneamente alcuni avvenimenti indipendenti è data dal prodotto delle probabilità che presentano i singoli avvenimenti.*

Questo teorema non richiede che una brevissima e facile dimostrazione per la quale basta la semplice definizione di probabilità, e da esso, come tosto si vedrà, quelle formule si ottengono immediatamente e con grande facilità.

È evidente intanto che se alcuni avvenimenti presentano tutti la stessa probabilità di verificarsi e questa probabilità è rappresentata da $\frac{1}{m}$, gli avvenimenti, in tutto, sono m .

Vogliasi ora dimostrare la formula:

$$D_{nk} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Infatti dati gli n elementi a_1, a_2, \dots, a_n , la probabilità che il primo elemento di una disposizione a k , a k , scelta a caso, sia ad esempio, a_{r_1} è $\frac{1}{n}$. Ammesso poi che a_{r_1} sia realmente il primo elemento, la probabilità che il secondo elemento sia a_{r_2} è $\frac{1}{n-1}$; così seguitando la probabilità che il k^{esimo} elemento sia a_{r_k} è $\frac{1}{n-k+1}$.

Quindi la probabilità che la disposizione fissata sia $a_{r_1}, a_{r_2}, \dots, a_{r_k}$ è

$$\frac{1}{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)},$$

il che è quanto dire che vi sono in tutto $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ disposizioni (c. d. d.).

Considerando ora le disposizioni con ripetizione, per dimostrare la formula

$$D_{nk} = n^k$$

ragioneremo in modo analogo.

La probabilità che il primo elemento di una disposizione sia a_{r_1} è $\frac{1}{n}$. La probabilità che il secondo elemento sia a_{r_2} (qui notisi che potrebbe anche essere $r_1 = r_2$) è pure $\frac{1}{n}$; così seguitando la probabilità che il k^{esimo} elemento sia a_{r_k} è sempre $\frac{1}{n}$.

Ne deduciamo che la probabilità che la disposizione fissata sia $a_{r_1}, a_{r_2}, \dots, a_{r_k}$ è $\frac{1}{n^k}$ il che è quanto dire che vi sono in tutto n^k disposizioni⁽¹⁾ (c. d. d.).

La formula

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!},$$

si dimostra pure colla massima semplicità.

Dati gli n elementi già accennati la probabilità che a_{r_1} entri in una combinazione, data a caso, è $\frac{k}{n}$ se le combinazioni sono a k , a k . Ammesso poi che a_{r_1} entri proprio nella combinazione, la probabilità che in essa sia pure a_{r_2} deve essere, evidentemente, $\frac{k-1}{n-1}$; così seguitando si vede che la probabilità che nella combinazione entri a_{r_k} è $\frac{1}{n-k+1}$; quindi la probabilità che la combinazione fissata sia $a_{r'_1}, a_{r'_2}, a_{r'_3}, \dots, a_{r'_k}$ (in cui r'_1, r'_2, \dots, r'_k è una permutazione qualunque di r_1, r_2, \dots, r_k) è data da

$$\frac{k!}{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)},$$

il che è quanto dire che vi sono in tutto $\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$ combinazioni c. d. d.

(1) Questo numero si può anche arguire subito in un altro modo al quale pure non credo si sia pensato: Si sa che il numero formato dall'unità seguita da k zeri ed avente per base n rappresenta il numero n^k . Ora tutti i numeri da 0 fino a $n^k - 1$ si possono scrivere con k cifre, se si nota che quelli che si scrivono che meno di k cifre possono pure, preponendo degli zeri, scriversi con k cifre. Ma è evidente che tutti questi n^k numeri si scrivono disponendo, con ripetizione, in tutti i modi, gli n numeri di una cifra 0, 1, 2, ..., (n-1) a k , a k e quindi dovrà aversi $D_{nk} = n^k$ (c. d. d.).

La notte fra il 17 e il 18 dicembre scorso si è spento in Roma uno dei più antichi e stimati collaboratori del *Periodico di Matematica*.

GEMINIANO PIRONDINI

no studioso di una tempra e di una tenacia veramente eccezionali a trascorso la sua esistenza, avendo di mira due soli ideali la famiglia e la scienza matematica; e sebbene la sua giornata sia terminata avanti di giungere a fine egli ha chiuso gli occhi colla coscienza serena, sapendo di avere bene speso il tempo che il destino gli aveva assegnato, di avere lasciata luminosa traccia della sua intelligente operosità.

La lunga lista delle pubblicazioni che pubblichiamo, che vanno dal 1884, due anni dopo la laurea, fino al suo importante *Essai d'une théorie analytique des lignes non euclidiennes* che si sta pubblicando in vari anni negli *Annales de l'Académie Polytechnique de Porto*, è una dimostrazione della sua vasta cultura scientifica, del suo fervido amore per gli studi matematici, della costanza e della fede con cui ha perseguito durante tutta la vita il suo ideale scientifico. Pubblicandola qui, crediamo di rendere il migliore omaggio alla memoria del compianto collaboratore ed amico.

E ciò tanto più in quanto crediamo che egli fosse conosciuto e apprezzato assai meno di quel che meritasse. Di carattere chiuso e poco espansivo, eccessivamente modesto, sdegnoso delle folle e dei rumori mondani, egli è vissuto in un ambiente ristretto, non ha fatto mai nulla per mettersi in evidenza; ritenendosi equamente compensato dal suo lavoro mai interrotto con la libera docenza in geometria analitica ottenuta a Parma nel 1901 e col posto di professore all'Istituto tecnico di Roma nel 1906.

Sulla sua carriera abbiamo alcune sommarie notizie. Egli era nato a Parma il 3 ottobre 1857, ma fece gli studi universitari a Pisa dal 1878 al 1882 e conseguì la laurea nel 1882 con pieni voti assoluti, il diploma di abilitazione della Scuola Normale Superiore nel 1883.

Nel 1883, entrò per concorso nel ruolo degli insegnanti dell'Istituto tecnico col grado di reggente e fu destinato a Reggio Calabria. Nell'85 fu promosso titolare di 3^a classe e nell'86 fu trasferito a Parma, di dove si mosse solo nel 1906 per andare a Roma.

Intanto però fu promosso *per merito* titolare di 2^a classe nell'89 e sempre *per merito* titolare di 1^a classe nel 93; vinse nel 95 il concorso per la cattedra nell'Istituto Tecnico di Milano; nel 1896 ebbe il premio Ministeriale per le scienze matematiche conferito dalla R. Accademia dei Lincei; un altro premio dello stesso governo ebbe nel '95, e nel 1904 fu nominato socio della R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena.

Con animo commosso il *Periodico* si associa al dolore della moglie e dei figli al cui affetto è stato troppo presto rapito il loro caro; ed alla memoria dell'antico amico, del collaboratore affezionato porge un mesto ed affettuoso saluto.

G. L.

Elenco delle pubblicazioni di Geminiano Pirondini.

1. *Sulle superficie a linee di curvatura piana.* * Battaglini „, 1884.
2. *Sulle linee di curvatura e sulle superficie che ammettono un'evoluta comune.* * Battaglini „, 1884.
3. *Rettifica di un teorema a dimostrazione di alcuni teoremi geometrici.* * Battaglini „, 1885.
4. *Studi geometrici relativi specialmente alle superficie gobbe.* * Battaglini „, 1885.
5. *Teoremi geometrici.* Parma, Battei, 1886.
6. *Note géométrique.* * N. Annales „, 1886.
7. *Sur les helicoides.* * N. Annales „, 1887.
8. *Sulle superficie rigate.* * Battaglini „, 1887.
9. *Sulla similitudine delle curve.* * Annali di Matematica „, 1887.
10. *Sulle linee a doppia curvatura.* * Battaglini „, 1888.
11. *Teorema relativo alle linee di curvatura delle superficie e sue applicazioni.* * Annali di Matem. „, 1888.
12. *Sur les surfaces de révolution.* * N. Annales „, 1888.
13. *Studio sulle superficie elicoidali.* * Annali di Matematica „, 1888.
14. *Sugli involtupi di piani e di sfere.* * Accademia delle scienze di Bologna „, 1889.
15. *Sopra alcune superficie e curve.* * Battaglini „, 1889.
16. *Sul problema di trovare la linea di cui è dato il luogo dei centri di curvatura.* * Annali di Matematica „, 1889.
17. *Sulla trasformazione per raggi vettori reciproci.* * Battaglini „, 1889.
18. *Sulla costruzione delle linee dello spazio.* * Accademia delle Scienze di Napoli „, 1889.
19. *Sur les lignes sphériques.* * Journal de Teixeira „, 1889.
20. *Sulla teoria delle superficie di rivoluzione.* * Annali di Matematica „, 1890.
21. *Sur les trajectoires orthogonales d'une ligne mobile.* * Nouvelles Annales „, 1890.
22. *Intorno a due superficie rigate che si presentano nello studio delle linee a doppia curvatura.* * Battaglini „, 1890.
23. *Sulle linee a triplice curvatura nello spazio euclideo a quattro dimensioni.* * Battaglini „, 1890.
24. *Sulle superficie di traslazione.* * Annali di Matematica „, 1890.
25. *Di una particolare trasformazione geometrica.* * Accademia delle Scienze di Napoli „, 1890.

26. *Sulle linee di stringimento e di allargamento di un sistema di curve.* * Accademia di Bologna „, 1891.
27. *Sulle linee d'ombra d'alcune superficie.* * Battaglini „, 1891.
28. *Intorno ad alcune questioni relative alle sviluppate successive di una linea ma.* * Accademia di Napoli „, 1891.
29. *Sur le contact et l'osculation des lignes entre elles.* * Journal de Teixeira „, 1891.
30. *Sur la détermination des lignes, dans le rapport de la courbure à la torsion mées de l'arc.* * Crelles Journal „, 1890.
31. *Sur la conique osculatrice des lignes planes.* * Journal de Teixeira „, 1890.
32. *Nota intorno alle superficie modonate.* * Battaglini „, 1892.
33. *Sulle linee, nelle quali il rapporto di curvatura alla torsione è una funzione l'arco.* * Annali di Matematica „, 1892.
34. *Alcuni teoremi sulle superficie sviluppabili.* * Annali di Matem. „, 1892.
35. *Ligne d'intersection d'une surface de révolution avec un cylindre quelconque et les génératrices sont parallèles à l'axe.* * El Progreso Matemat. „, 1892.
36. *Contatto e ortogonalità di due elicoïdi.* * Rivista di Matematica „, 1892.
37. *Intorno a una famiglia notevole di linee piane.* * Battaglini „, 1893.
38. *Intorno alle indicatrici sferiche delle linee dello spazio.* * Rivista di Matematica „, 1893.
39. *Alcune formole relative alle linee tracciate sopra una superficie e loro applicazioni.* * Annali di Matematica „, 1893.
40. *Sur une famille remarquable de lignes planes.* * Mathésis „, 1894.
41. *Simmetria ortogonale rispetto a una superficie di rivoluzione.* * Annali di Matematica „, 1894.
42. *Sur les surfaces réglées.* * Journal de Teixeira „, 1895.
43. *Sur quelques propriétés de l'hyperbole.* * Mathésis „, 1895.
44. *Di alcune superficie che ammettono un sistema di linee uguali e un secondo sistema di linee uguali o simili.* * Annali di Matematica „, 1896.
45. *Simmetria ortogonale rispetto a una linea qualunque.* * Battaglini „, 96-97-98-99.
46. *Sur les trajectoires isogonales des génératrices d'une surface développable.* * Crelles Journal „, 1897.
47. *Alcune proprietà della sviluppante di cerchio.* * Periodico di Mat. „, 1897.
48. *Una questione geometrica.* * Annali di Matematica „, 1899.
49. *Quelques propriétés de surfaces moulures.* * Journal Lionville „, 1897.
50. *Sur le cylindre orthogonal à quelques surfaces.* * Journal de Teixeira „, 1898.
51. *Projection orthogonale à quelques surfaces.* * Journal de Teixeira „, 1898.
52. *Proiezione stereografica e sua applicazione allo studio delle linee sferiche.* * Periodico di Matematica „, 1899.
53. *Sur la spirale logarithmique.* * Mathésis „, 1899.
54. *Sur quelques lignes liées à l'hélice cylindrique.* * Crelles Journal „, 1899.
55. *Sur les lignes cylindriques.* * El Progreso Matem. „, 1899.
56. *Una corrispondenza speciale fra i punti di due linee piane.* * Battaglini „, 1900.
57. *Sur un cas particulier du Théorème de Maclaurine et Braikewridge.* * Mathésis „, 1900.
58. *Symétrie orthogonale par rapport à un cylindre quelconque.* * N. Annales „, 1900.
59. *Quelques applications de courbures intrinsèques.* * El Progreso Matem. „, 1900.
60. *Quelques propriétés remarquables de l'hyperbole.* * Journal de Mat. spéciales „, 1900.
61. *Risoluzione di due questioni geometriche.* * Annali di Matematica „, 1900.

62. *Sur quelques propriétés des coniques.* * Journal de Teixeira „, 1901.
63. *Sur les cylindres et les cônes passant par une ligne.* * Crelles Journal „, 1901.
64. *Une nouvelle démonstration d'un théorème de Lancret et de sa réciproque.* * Mathésis „, 1901.
65. *Di alcune forme che si presentano nello studio delle linee.* * Battaglini „, 1901.
66. *Le linee e le superficie, nelle quali un agente fisico qualunque ha un'intensità data da una legge arbitraria.* * Battaglini „, 1902.
67. *Generalizzazione di alcune proprietà dell'elica cilindro-conica ordinaria.* * Le Matematiche „, 1902.
68. *Sur les normales d'une hélicoïde.* * N. Annales „, 1902.
69. *Symétrie tangentielle par rapport à une surface de révolution.* * Journal de Lionville „, 1902.
70. *Nota sulle superficie di Monge.* * Accademia di Modena „, 1902.
71. *Intégration d'une équation différentielle du deuxième ordre.* * Mathésis „, 1903.
72. *Proprietà caratteristiche di alcune linee piane e a doppia curvatura.* * Le Matematiche „, 1903.
73. *Integrazione geometrica di alcune equazioni differenziali.* * Annali di Matematica „, 1903.
74. *Sulle evolute successive di un cerchio.* * Periodico di Matematica „, 1903.
75. *Sui fasci d'elicoidi, aventi l'asse in comune.* * Battaglini „, 1904.
76. *Della simmetria obliqua rispetto a un asse o a un piano.* Parma, Rossi Ubaldi, 1904.
77. *Una speciale trasformazione geometrica dello spazio.* Parma, Rossi Ubaldi, 1904.
78. *Osservazioni relative all'integrazione delle equazioni differenziali delle varie specie.* Parma, Rossi Ubaldi, 1905.
79. *Contributo alla teoria delle serie.* Parma, Rossi Ubaldi, 1905.
80. *Nuovo metodo per costruire delle funzioni continue a spazi lacunari.* Parma, Rossi Ubaldi, 1905.
81. *Di un nuovo metodo per studiare le linee descritte sopra una superficie con estensione alle linee dell'iperspazio.* * R. Acc. di Scienze, Lett., Arti di Modena „, 1906.
82. *Contributo alle teorie delle caustiche e delle anticaustiche.* * Giornale di Battaglini „, 1907.
83. *Una speciale trasformazione geometrica nel piano con applicazioni.* * Accademia di Modena „, 1907.
84. *Sur la théorie générale des radiales et des antiradiales.* * Giornale di Crelle „, 1907.
85. *Metodo generale per determinare la famiglia di linee non euclidee, nelle quali la curvatura e la torsione hanno un rapporto, funzione nota dell'arco.* * Accademia di Modena „, 1903.
86. *Essai d'une théorie analytique des lignes non euclidiennes.* * Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto „, 1909, et suivants. 1^{re} partie: lignes planes. — 2^{me} partie: lignes de l'espace. — 3^{me} partie: lignes tracées sur une surface.

GIULIO LAZZERI — Direttore-responsabile

Finito di stampare il 28 Gennaio 1915

SULL'USO DEL TEOREMA DI FOURIER-BUDAN

nella discussione dei problemi

I metodi comunemente usati nell'insegnamento secondario per la discussione di problemi di 2° grado presentano alcuni inconvenienti: principale fra essi, quello di non lasciar prevedere alcuna generalizzazione, nemmeno per i casi più semplici⁽¹⁾, e che spesso ricorrono alle matematiche elementari, di equazioni superiori al 2° grado.

È quindi consigliabile, anche per stabilire una più stretta connessione tra gli studi secondari e quelli universitari, adoperare i metodi generali dell'Analisi algebrica, tentando solo un'opera di semplificazione e di adattamento alla scuola secondaria.

Da tale punto di vista mi sembra che per la discussione dei problemi possa essere preferito il metodo che conduce al teorema di Fourier-Budan. L'ordine da scegliere può essere il seguente (V. *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*. Bd. I°): regola di Cartesio, teorema sul numero delle radici maggiori di α , teorema di Fourier. Dimostrerò dapprima questi teor. per equaz. di 1° e 2° grado con considerazioni estremamente facili ed elementari. Accennerò poi come possa giungere a risultati generali, esponendo dimostrazioni (sia per la regola di Cartesio che per il teor. di Fourier) che mi sembrano più semplici di quelle ben note (Gauss, Laguerre, Fourier, ecc.) conosciute nei trattati più in uso.

Per la enunciazione rigorosa del teor. di Fourier (che in molti trattati di Analisi alg. lascia alquanto a desiderare per quanto riguarda le radici che possono cadere negli estremi dell'intervallo considerato) ho tenuto presente la recente memoria di HURWITZ *Ueber den Satz von Budan-Fourier*. *Mathematische Annalen* 1912, Bd. 71 (584). Non ho fatto invece uso alcuno dell'articolo di F. GIUDICE, *Rivista di Battaglini*, 1912, pg. 188; ma volendo sarebbe ben facile dare una dimostrazione dell'osservazione ivi contenuta.

Infine, per quanto riguarda l'applicazione ai problemi di 2° grado, ho dato alcune norme pratiche ed esempi per il caso che i coeff. dell'equazione contengano dei parametri. Mostarerò in ultimo come, per equaz. di 2° grado, si potrebbe dedurre immediatamente il teorema di Sturm.

⁽¹⁾ TARTIRVILLE ad es. considera solo il caso delle equaz. biquadratiche. V. *Théorie des équations et disequations du 2° degré*. Paris.

È penetrato ormai nell'insegnamento secondario il concetto di derivata. D'altronde, per togliere ogni scrupolo, basterà osservare che a noi occorre soltanto l'uso della derivata di un polinomio in x , che potrebbe quindi esser definito, in una scuola secondaria, per mezzo della regola di formazione.

1. È ben noto cosa s'intenda per variazione o permanenza di segno fra due termini consecutivi di una successione. Le successioni da noi considerate sono sempre finite ed avranno l'ultimo termine diverso da zero. Facciamo una volta per sempre una convenzione circa i termini nulli, e cioè che non si debba di essi tener calcolo alcuno nel contare le variazioni. Si può anche, il che è affatto equivalente, attribuire ai termini nulli il segno del primo termine successivo non nullo. Il numero delle variazioni ottenute nei modi ora indicati è lo stesso. Per quanto si è detto, potremo ora parlare sempre del segno di un termine qualunque della successione.

2. Sia un'equazione di 1° grado a coefficienti reali;

$$f(x) = ax + b = 0; \quad a \neq 0.$$

Se x' è la radice (reale) si ha:

$$f(x) = a(x - x'); \quad f'(x) = a \neq 0,$$

e quindi

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = x - x'.$$

Si deduce di qui che a seconda che $f(x)$ è nullo, ha lo stesso segno od ha segno opposto di $f'(x)$, sarà x' rispettivamente uguale, minore, maggiore di x . Se consideriamo dunque un valore α di x , si concluderà che soltanto nel caso che la successione dei segni di $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$ presenti una variazione la radice x' sarà maggiore di α . Può enunciarsi quindi il seguente:

TEOREMA I. — Il numero delle radici di un'equazione $f(x) = 0$, di 1° grado, maggiori di α è uguale al numero delle variazioni di segno nella successione $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$.

3. Si abbiano ora due numeri reali α , β , dove $\alpha < \beta$, e si consideri il teor. I° rispetto a questi due numeri. Si avrà immediatamente il seguente:

TEOREMA II (di FOURIER-BUDAN). — Se si considerano le due successioni $f(x)$, $f'(x)$; $f(\beta)$, $f'(\beta)$, si avrà: 1°) il numero delle variazioni della prima successione non è mai inferiore a quello della seconda; 2°) il numero delle radici reali di $f(x) = 0$ comprese nell'intervallo $(\alpha\beta)$, l'estremo inferiore escluso, è uguale alla differenza tra le variazioni della prima successione e quelle della seconda.

4. Passiamo ora alle equazioni di 2° grado a coeff. reali. Sia dunque:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0; \quad a \neq 0.$$

Avrà:

$$f(x) = 2ax + b; \quad f''(x) = 2a \neq 0.$$

Sia dapprima il discriminante $\Delta > 0$, e siano allora $x' < x''$ le due radici reali.

Si ha, posto

$$M = -\frac{b}{2a} = \frac{x' + x''}{2},$$

$$f(x) = a(x - x')(x - x''); \quad f'(x) = 2a(x - M).$$

Allora

$$\frac{f(x)}{f''(x)} = \frac{1}{2}(x - x')(x - x''); \quad \frac{f'(x)}{f''(x)} = x - M.$$

Si osservi di più che

$$x' < M < x''.$$

Queste tre relazioni sono sufficienti per stabilire il teor. cercato. premetta infatti la seguente osservazione. Si consideri una successione di tre termini, con quelli estremi non nulli. Se questi hanno stesso segno, si avranno due variazioni quando il termine medio segno opposto, zero variazioni negli altri casi; se invece gli estremi hanno segno opposto si ha sempre una sola variazione. Se infine uno degli estremi fosse nullo, il numero delle variazioni si dedurrebbe dalla considerazione degli altri due termini. Dopo ciò, per mezzo delle relazioni stabilite precedentemente, si incominci a confrontare i segni di $f(x)$, $f'(x)$ e poi quelli di $f''(x)$, $f'''(x)$, tenendo sempre presente la terza relazione. In tal modo si otterrà facilmente (posto α sia un valore di x): a seconda che

$$\alpha < x'; \quad x' \leq \alpha < x''; \quad x'' \leq \alpha,$$

la successione $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$ si hanno risp. due, una, zero variazioni. Allora, osservando che in una successione di tre termini non possono aversi più di due variazioni, si conclude che anche per le equazioni di 2° grado a radici reali distinte è verificato il teor. I°.

5. Sia ora

$$\Delta = 0;$$

ora

$$x' = x'' = M.$$

si ha:

$$f(x) = a(x - x')^2; \quad f'(x) = 2a(x - x'); \quad f''(x) = 2a \neq 0.$$

Allora

$$\frac{f(x)}{f''(x)} = \frac{1}{2}(x - x')^2; \quad \frac{f'(x)}{f''(x)} = x - x'.$$

Da queste intanto appare che $f(x)$ ed $f'(x)$ non possono avere segno opposto e che se è nullo $f(x)$ deve esser nullo anche $f'(x)$. Si dedurrà poi, ponendo $x = \alpha$ che, a seconda che $\alpha < x'$, $x' \leq \alpha$, nella successione $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$, si hanno risp. due o zero variazioni. Per l'osservazione fatta prima circa ai segni di $f(x)$, $f'(x)$ ed all'annullamento simultaneo di $f(x)$, $f'(x)$ si vede che i soli casi possibili, sono che nella successione in esame si abbiano o zero o due variazioni. Si dedurrà allora che il teor. II° è vero anche in questo caso, purchè nel contare le radici si tenga calcolo del loro grado di molteplicità.

6. Sia infine $\Delta < 0$. Sappiamo, in tal caso, che $f(x)$ non può annullarsi per nessun valore reale di x e che $f(x)$, $f'(x)$ hanno sempre lo stesso segno. È di più:

$$\frac{f'(x)}{f''(x)} = x - M,$$

dove

$$M = -\frac{b}{2a}.$$

Si otterrà ancora, per $x = \alpha$, che la successione $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$ ha due o zero variazioni a seconda che

$$\alpha < M, \quad M \leq \alpha.$$

Dal momento che si è ora supposto che non esistano radici reali, il teor. I° non vale più: è facile vedere come dovrà essere modificato.

7. Riassumendo quanto è stato detto nei tre casi ora considerati, si avrà dunque, analogamente a quanto è stato visto per le equazioni di 1° grado il seguente:

TEOREMA I. — *Il numero delle radici reali dell'equazione di 2° grado $f(x) = 0$, (tenuto calcolo del loro grado di molteplicità) maggiori di α , non può superare il numero delle variazioni della successione $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$; e, se ne è inferiore, ne differisce per un numero pari. Ciò avverrà solo nel caso di radici complesse e per $\alpha < M$.*

Nella pratica sarà conveniente applicare il teor. ora veduto, come anche il seguente, soltanto nel caso che l'equazione abbia radici reali, seguendo le norme che porremo in ultimo. Più tardi si dirà ancora come convenga praticamente determinare il numero delle variazioni della successione anzidetta nel caso che i coeff. dell'equaz. contengano dei parametri.

8. Si abbiano ora due numeri reali α , β , dove $\alpha < \beta$ e si consideri il teor. I° per ciascuno dei numeri α , β . Se l'equazione di 2° grado è a radici reali (distinte o coincidenti), si ricava immediatamente un teor. analogo al teor. II°. Se l'equaz. è invece a radici complesse, da quanto è stato detto precedentemente, e posto sempre

$$M = -\frac{b}{2a},$$