ALCUNE FORMOLE
OTTENIBILI SEMPLICEMENTE
CHE POSSONO SERVIRE AL CALCOLO APPROSSIMATO
DELLE FUNZIONI CIRCOLARI

1. — Si ha:

$$2\operatorname{sen}\frac{x}{2}=\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$2^2\operatorname{sen}\frac{x}{2^2}=2\operatorname{sen}\frac{x}{2}+2^2\operatorname{sen}\frac{x}{2^2}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{2^2}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2^n\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}=2^{n-1}\operatorname{sen}\frac{x}{2^{n-1}}+2^n\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{2^n}\right).$$

Addizionando queste eguaglianze, membro a membro, e sopprimendo i termini comuni a primo e secondo membro, si ottiene:

$$2^n\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}=\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)+2^2\operatorname{sen}\frac{x}{2^2}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{2^2}\right)+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots+2^n\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{2^n}\right).$$

Per essere

$$\left\{\lim\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\right\}=1 \qquad \lim n=\infty$$

avremo quindi

$$a)\quad x=\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)+2^2\operatorname{sen}\frac{x}{2^2}\left(1-\cos\frac{x}{2^2}\right)+\ldots\ldots$$

Ora è

$$\frac{2^m\operatorname{sen}\frac{x}{2^m}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{2^m}\right)}{2^{m-1}\operatorname{sen}\frac{x}{2^{m-1}}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{2^{m-1}}\right)}=\frac{1}{2\cos\frac{x}{2^m}\cdot\left(1+\cos\frac{x}{2^m}\right)}$$

epperò

$$2^n \operatorname{sen}\frac{x}{2^n}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{2^n}\right)=\frac{1}{2\cos\frac{x}{2^n}\left(1+\cos\frac{x}{2^n}\right)}\cdot\frac{1}{2\cos\frac{x}{2^{n-1}}\left(1+\cos\frac{x}{2^{n-1}}\right)}\times\ldots$$

$$\ldots\ldots\times\frac{1}{2\cos\frac{x}{2^2}\left(1+\cos\frac{x}{2^2}\right)}\cdot 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right).$$

Ma, se $\frac{x}{2^{m-2}}$ non supera $\frac{\pi}{2}$, è

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{2\cos\frac{x}{2^m}\left(1+\cos\frac{x}{2^m}\right)}<\frac{1}{2\cos\frac{x}{2^{m-1}}\left(1+\cos\frac{x}{2^{m-1}}\right)}\leqq\frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

onde sarà per ogni arco x non maggiore di $\frac{\pi}{2}$:

$$2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{\left[2\cos\frac{x}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)\right]^{n-1}}>2^n\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}\left(1-\cos\frac{x}{2^n}\right)$$

$$2^n\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}\left(1-\cos\frac{x}{2^n}\right)>2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{4^{n-1}}.$$

Per la *a*) e per ciò che è noto sulle progressioni geometriche decrescenti avremo adunque

$$x>\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{4}{3}$$

$$x<\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{2\cos\frac{x}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}{2\cos\frac{x}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)-1}$$

ossia

$$b)\quad \frac{1}{3}\left(8\operatorname{sen}\frac{x}{2}-\operatorname{sen}x\right)<x<\operatorname{sen}x\cdot\left\{1+\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)-1}\right\}\ ^{*)}$$

*) Mediante le limitazioni:

2. – Si ha:

$$\operatorname{sen}x \cdot \left\{1 + \frac{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right) - 1}\right\} = \operatorname{sen}x \cdot \frac{1 + 2\cos\frac{x}{2}}{\cos x + 2\cos\frac{x}{2}}$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{1 + 2\cos\frac{x}{2}}{\cos x + 2\cos\frac{x}{2}} > \frac{2\cos\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}$$

Da ciò e dal numero precedente risulta che: I valori dati dalla *b*) come limiti dell'arco x sono, rispettivamente, compresi fra il seno e l'arco e fra questo e la sua tangente.

3. – Ponendo nella *b*)

$$x = \frac{\pi}{60}$$

ed osservando essere:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = 0{,}258819045102\ldots$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = 0{,}965925826289\ldots$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = 0{,}3090169943749474\ldots$$

$$\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = 0{,}951056516295\ldots$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^5}{120.32} - \frac{x^7}{5040.128} < \operatorname{sen}\frac{x}{2} < \frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^5}{120.32}$$

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} < \operatorname{sen}x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

si trova che, per x non maggiore di 1, la differenza

$$x - \frac{1}{3}\left(8\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \operatorname{sen}x\right)$$

è minore di $\frac{x^5}{479}$, e quindi anche di $\frac{\operatorname{tang}^5 x}{479}$.

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{60} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{12}\right) = 0,05233595624\ldots.$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{120} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}\frac{\pi}{60}} - \sqrt{1-\operatorname{sen}\frac{\pi}{60}}\right) = 0,026176948\ldots.$$

$$\cos\frac{\pi}{120} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}\frac{\pi}{60}} + \sqrt{1-\operatorname{sen}\frac{\pi}{60}}\right) = 0,999657324\ldots.$$

si trova:

$$3,1415925 < \pi < 3,1415928$$

onde

$$\pi = 3,141592\ldots..$$

4. — Avendo un valore approssimato di π, la b) può servire per la determinazione approssimata, in gradi, dell'arco di cui è dato il seno.

Così, posto

$$\operatorname{sen} x = 0,0001$$

si ha

$$\operatorname{sen} x < x, \quad \operatorname{sen}\frac{x}{2} < 0,00006, \quad 2\cos\frac{x}{2}\left(1 + \cos\frac{x}{2}\right) > 3$$

epperò:

$$0,0001 < x < 0,0001 + \frac{2 \,.\, 0,0001 \,.\, (0,00006)^2}{2}$$

ossia:

$$0,0001 < x < 0,00010000000036$$

Indicando con g la misura in gradi dell' arco il cui seno è 0,0001 e la misura del quale fatta col raggio indicammo con x, avremo:

$$g = \frac{180^\circ \,.\, x}{\pi}$$

onde:

$$\frac{180^\circ \,.\, 0,0001}{3,1415928} < g < \frac{180^\circ \,.\, 0,00010000000036}{3,1415925}.$$

Eseguendo i calcoli si trova:

$$20'',6264 < g < 20'',6265$$

epperò:

$$g = 20'',6264\ldots\ldots$$

5. — Per ciò che precede, e particolarmente per la b), si ha per ogni arco x minore di $\frac{\pi}{2}$:

$$x > \operatorname{sen} x > x - \frac{2\operatorname{sen} x \,.\, \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)-1}.$$

Ma la frazione $\frac{2\operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)-1}$, che è eguale a $\frac{4\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}+\cos x}$, è minore di $\frac{x^3}{2}\cdot\frac{1}{2+\frac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}}}$, e inoltre il rapporto $\frac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}}$, che è eguale alla differenza $\cos\frac{x}{2}-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2}$, diminuisce sempre quando x cresce da 0 a $\frac{\pi}{2}$; perciò, se x non è maggiore di $\frac{\pi}{3}$, si ha

$$\frac{2\operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)-1} < \frac{x^3}{2}\cdot\frac{1}{2+\frac{\sqrt{3}}{3}} < \frac{x^5}{5},$$

e in conseguenza

$$\operatorname{sen} x > x - \frac{x^3}{5}$$

[illegible] della

$$2\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{tg}x - \operatorname{tg}x\, \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$$

[illegible] processo analogo a quello che condusse alla *a*) [illegible] che

$$\left\{\lim \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\right\}_{\lim n = \infty} = 1$$

$$[illegible] \operatorname{tg}x - \operatorname{tg}x \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\, \operatorname{tg}^2\frac{x}{2^2} - 2^2\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}\, \operatorname{tg}^2\frac{x}{2^3} - \ldots.$$

[illegible] — Dal punto D della bisettrice dell'angolo acuto ACB [illegible] le DE, DB perpendicolari ai lati: prolunghiamo [illegible] incontrare in A il lato CA e sulla DE, prolungata, [illegible] DF eguale ad AD.

[illegible] ACB, che è doppio dell'angolo FAE, sia la [illegible] parte di un retto. L'angolo CAB sarà precisamente [illegible] FAE onde sarà

$$ED > 2nFE, \quad BA < 2BD + \frac{1}{2n}\, BD.$$

[illegible] Se con x s'indica un angolo non maggiore della $(n+1)^{ma}$ parte d'un retto, si ha:

$$2\operatorname{tg}\frac{x}{2} < \operatorname{tg}x < \left(2 + \frac{1}{2n}\right)\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

[illegible] — Per l'ultima formula e per la *d*) abbiamo:

$$x < \operatorname{tg}x - \operatorname{tg}x.\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\,.\left[1 + 2\left(\frac{1}{2+\frac{1}{2n}}\right)^3 + 2^2\left(\frac{1}{2+\frac{1}{2n}}\right)^6 + \ldots\ldots\right]$$

$$x > \operatorname{tg}x - \operatorname{tg}x.\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\,.\left[1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2^2\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \ldots\ldots\right]$$

ossia, per ciò che è noto sulle progresssioni decrescenti, e perchè $\operatorname{tg}x\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, avremo:

$$e)\quad \frac{(4n+1)^3}{(4n+1)^3-16n^3}\cdot 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{16n^3\,.\operatorname{tg}x}{(4n+1)^3-16n^3}>x>\frac{8}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\operatorname{tg}x$$

dove supporremo

$$n\overline{\overline{>}}1,\quad (n+1)x\overline{\overline{<}}\frac{\pi}{2}$$

9. — **Partendo dalla**

$$\cot x=2\cot 2x+\operatorname{tg}x$$

e seguendo un processo simile a quello che condusse alla a), si trova:

$$f)\quad \frac{1}{x}=\cot x+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}+\frac{1}{2^3}\operatorname{tg}\frac{x}{2^3}+\ldots\ldots$$

Da questa, per quanto fu detto al numero 7, segue:

$$g)\quad \cot x+\frac{4n+1}{3n+1}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}<\frac{1}{x}<\cot x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\,.$$

Qui pure supporremo

$$n\overline{\overline{>}}1.\quad (n+1)x\overline{\overline{<}}\frac{\pi}{2}.\ (^*)$$

Francesco Giudice.

(*) Le e), g) possono servire agli stessi usi a cui serve la b).

Le a), d), f) hanno i secondi membri convergenti per tutti i valori dell'arco x perchè nei medesimi il rapporto del termine n^{esimo} al termine $(n-1)^{esimo}$, crescendo indefinitamente n ha per limite $\frac{1}{4}$.

La f) è proposta come esercizio di sviluppo in serie da Charles De Comberousse « *Cours de Mathématiques* — Tome 3.e — Algèbre supérieure — première partie — p. 724 ».

PICCOLO CONTRIBUTO
ALLA TEORIA GEOMETRICA DELL'EQUIVALENZA

Il teorema, che serve di fondamento a questa nota è molto antico, benché non ne sia fatto cenno nei nostri trattati di Geometria elementare; fra le dimostrazioni conosciute alcune sono elementari (*), altre riposano sopra teorie della matematica superiore (**); da quella di *Pappo*, qui riprodotta, io mi propongo di dedurre come corollari teoremi noti molto importanti, che finora credo non sieno stati considerati sotto questo aspetto comprensivo e che perciò stimo potranno essere utili nelle nostre scuole secondarie.

Teorema. – *Sia* ABC *un triangolo* (Fig. 1, tav. I), ABDE, ACFG *due parallelogrammi qualunque costruiti su* AB *ed* AC; H *il punto comune a* DE, FG; *la somma dei due paralleg. è equivalente al parallelog. costruito con due segmenti eguali e paralleli a* BC *ed* AH.

Dimostrazione. – Dai punti B e C si conducano le parallele alla HA sino ad incontrare in K ed N le DH ed FH; si unisca K con N e si prolunghi la HA sino ad incontrare in O e in P le KN e BC (***). Dico che si ha

$$\text{paralg. BN} = \text{paralg. BE} + \text{paralg. CG}.$$

Infatti

$$\text{paralg. BE} = \text{paralg. AK} = \text{paralg. KP}$$

$$\text{paralg. CG} = \text{paralg. AN} = \text{paralg. NP}$$

quindi

$$\text{paralg. BE} + \text{paralg. CG} = \text{paralg. KP} + \text{paralg. NP} = \text{paralg. BN}.$$

(*) *Pappi*. — Math. collec., IV, th. I.

(**) *Laisant*. — Introduction à la méthode des quaternions.

(***) Se il punto P non cade fra B e C ma sul prolungamento di BC, il processo della dimostrazione fa vedere che il rettangolo delle BC ed AH sarebbe equivalente alla differenza dei due parallelogrammi.

Corollario 1° – Sopra i lati AB, AC di un triangolo si costruiscano due triangoli qualunque e pei vertici di questi, opposti ad AB ed AC, si conducano le parallele a questi lati fino ad incontrarsi in H; la somma dei due triangoli è equivalente al triangolo avente per lati in grandezza e direzione BC ed AH.

Corollario 2° – Sia A un angolo retto e sui cateti AB ed AC si costruiscano i quadrati ABDE, ACFG. (Fig. 2).

Per il teorema dimostrato la somma dei due quadrati è equivalente al paralg. contenuto dalle BC ed AH; ma il triangolo AEH ≡ ABC quindi HA = BC, inoltre da questa eguaglianza si ricava ancora che la somma dei due angoli BAM, ed ABM è eguale ad un retto e perciò la AH è anche perpendicolare alla BC; allora il paralg. della BC ed AH non è altro che il quadrato della BC e con ciò è dimostrato il teorema di Pitagora.

Corollario 3° – Sia ancora A un angolo retto e si immagini ridotta nulla la distanza della DE alla AB e si costruisca (Fig. 3) il quadrato sul cateto AC; per il teorema generale questo è equivalente al paralg. BN contenuto dalle BC ed AG. Ma se dai vertici N ed A si abbassano le perpendicolari AP, NQ sull'ipotenusa BC si ottengono i due triangoli eguali NQC e CPA perciò

$$NQ = PC$$

e quindi l'altezza del paralg. BN è eguale alla proiezione del cateto AC sull'ipotenusa, e con ciò è dimostrato che il quadrato costruito su di un cateto è equivalente al rettangolo contenuto dall'ipotenusa e dalla proiezione di quel cateto sopra di essa.

Lemma. – *In un triangolo qualunque i due rettangoli contenuti da uno qualunque dei lati di un angolo A e dalla proiezione dell'altro sopra di essi, sono equivalenti.* (*)

(*) Ecco un' altra dimostrazione di questo stesso teorema del quale si

1° Caso. — Sia A un angolo ottuso; BB' perpendicolare ad AC, CC' perpendicolare a BA: si avrà

$$\text{q.d. } BB' + \text{q. } B'C = \text{q. } CC' + \text{q. } BC'$$

ma (*)

$$\text{q.}BC' = \text{q.}AB + \text{q.}AC' + 2\text{retg.}AB.AC'$$

$$\text{q.}B'C = \text{q.}AB' + \text{q.}AC + 2\text{retg.}AB'.AC$$

quindi sostituendo ed osservando che

$$\text{q.}BB' + \text{q.}B'A = \text{q.}AB, \qquad \text{q.}CC' + \text{q.}AC' = \text{q.}AC,$$

si avrà, dopo aver tolto le figure comuni,

$$\text{retg.}AC.AB' = \text{retg.}AB.AC'.$$

2° Caso. — Sia A un angolo acuto, fatte le medesime costruzioni, comunque cadano i punti B' e C' o sui lati o sui loro prolungamenti si ha

$$\text{q.}BC' + \text{q.}CC' = \text{q.}BB' + \text{q.}B'C,$$

---

ripeterà l'enunciato nel modo seguente:

In un triangolo ABC *in cui l'angolo* A *è ottuso* [*fig.* 9ª] (*acuto* [*fig.* 10ª]), *il rettangolo* ABEL *di* AB *e della proiezione* AH *di* AC *su* AB, *è equivalente al rettangolo* CAIN *di* AC *e della proiezione* AM *di* AB *su* AC.

Si prolunghi BA finchè incontri IN in Q e si tiri per C la CO parallela ad AB fino ad incontrare IN, il parallelogrammo risultante AO sarà equivalente al rettangolo AN, ma il parallelogrammo AO è altresì equivalente al rettangolo AD onde i due rettangoli AN, AD (AN, AVDQ) saranno equivalenti. Si trasformi ora il rettangolo AD in un rettangolo equivalente con un lato ugnale ad AH; per ciò fare basta prolungare AC finchè incontri QD in V, tirare VS parallela ad AB e compiere il rettangolo avente per base AH e per altezza QV (o tirare HV e prolungarla finchè incontri QD in Q', quindi Q'A' parallela ad AB, finalmente compiere il rettangolo avente per base VC e per altezza DQ'). E facile ora provare che AS è uguale ad AB (VA' uguale ad AB). Infatti prolungata BM finchè incontri il prolungamento di LA in T, i due triangoli rettangoli TMA, QIA risultano uguali, essendo AM = IA e < MAT = < IAQ, quindi QA è uguale ad AT. Ora i due triangoli TBA, AVQ (TBA, A'VQ') sono pure eguali giacchè AT = AQ (AT = AQ = A'Q') e < ABT = < QVA (< ABT = < MAT = < HVA = < A'VQ'), segue da ciò che AS = QV = AB (VA' = AB). Ma il rettangolo SH è equivalente ad AN (CA' equivalente ad AN), sicchè, essendo uguali i due rettangoli SH, BL (CA', BL), anche i due rettongoli BL, AN saranno equivalenti. (A. Lugli).

(*) *Euclide*. — per *Betti* e *Brioschi*. — Libro 2° prop. IV.ª ma (*)

$$q.BC' = q.AB + q.AC' - 2retg.AB.AC'$$

$$q.B'C = q.AC + q.AB' - 2retg.AC.AB'$$

quindi sostituendo nella prima equivalenza ed osservando che

$$q.AC' + q.C'C = q.AC, \quad q.AB' + q.BB' = q.AB,$$

si otterrà, dopo aver tolto le figure eguali,

$$retg.AB.AC' = retg.AC.AB'.$$

Corollario 4º — Sia ABC un triangolo ottuso in A (Fig. 4) dal vertice A si abbassi la perpendicolare AL sul lato BC e si prolunghi al di là del vertice; prendasi AH = BC, si conducano per H le parallele ad AB ed AC e su questi lati si costruiscano i rettangoli ABDE, ACFG terminati a quelle parallele; si traccino le AP ed AQ proiezioni di ciascuno dei lati AB ed AC sull'altro.

I triangoli AEH, BQC sono eguali per avere eguale l'ipotenusa e l'angolo acuto EAH = QBC perciò sarà AE = BQ e poichè in ogni caso è BQ > AB sarà anche AE > AB.

Si seghi allora dalla AE la EM = AB e si completi il quadrato DM o della AB; il segmento rimanente MA = AQ rappresenta la proiezione di AC sulla AB e però si avrà

$$retg.ABDE = q.AB + retg.AB.AQ \qquad (a)$$

e analogamente

$$retg.ACFG = q.AC + retg.AC.AP. \qquad (b)$$

Ma per il lemma precedente

$$retg.AB.AQ = retg.AC.AP$$

e per il teorema generale

$$retg.ABDE + retg.ACFG = q.BC,$$

quindi sommando membro a membro le (*a*) e (*b*) si avrà

$$q.BC = q.AB + q.AC + 2retg.AC.AP.$$

(*) *Euclide*. — Libro 2º, prop. VII.ª

Corollario [illegible] in A del triangolo ABC sia acuto; fatte le medesime costruzioni si dimostra come nel corollario precedente che i due triangoli AEH, BQC sono eguali, qualunque sia la posizione del punto Q (sul lato AB o sul suo prolungamento), per avere l'ipotenusa eguale per costruzione, ed un angolo acuto eguale.

Ora se il punto L, piede della perpendicolare calata da A sopra BC, cade fra B e C (Fig. 5) sarà sempre AE < AB ed AG < AC; si prolunghino allora le AE ed AG in modo che sia AM = AB ed AN = AC e si completino i quadrati delle AB ed AC; con ciò si è aggiunto a ciascuno dei rettangoli ABDE, ACFG un rettangolo formato da un lato dell'angolo A e dalla proiezione dell'altro sopra di esso, quindi per il lemma precedente e per il teorema generale si ha

q.BC = retg.ABDE + retg.ACFG = q.AB + q.AC − 2retg.AC.AP.

Se il punto L cade sul prolungamento di BC allora si prolunghi la AE di una lunghezza EM = AB e la AG in modo che AN = AC e si completino il rettangolo ed il quadrato (Fig. 6); allora si avrà per il teorema generale

q.BC = retg.ACFG − retg.ABDE (Nota al teorema generale)

ma

retg.ACFG = q AC − retgAC.AP

retg.ABDE = retg.AC.AP − q.AB

quindi sostituendo si ha

q.BC = q.AB + q.AC − 2 retg.AC.AP.

Corollario 6°. — Sia dato il parallelog. AA'HH' (Fig. 7); si costruiscano i quadrati sui quattro lati e si consideri il triangolo ABC determinato dai due lati dei quadrati concorrenti in A; esso è eguale al triangolo AH'H e però si avrà BC = AH, ma per essere l'angolo BAN complementare di HAH' ed anche di ABC ne risulta che AH è anche perpendicolare a BC. Allora se da H si conducono le parallele ai lati AB ed AC, si formeranno due rettangoli ABDE, ACFG la cui somma, per il teorema generale, sarà equivalente al quadrato della diagonale AH.

Analogamente se si considera il triangolo A'B'C' si avrà B'C' eguale e perpendicolare ad A'H', per cui conducendo per H' le parallele alle A'B', A'C' si otterranno due rettangoli A'B'D'E', A'C'F'G' la cui somma sarà equivalente al quadrato della diagonale A'H'.

Ma la somma dei quattro rettangoli considerati forma i quattro quadrati costruiti sui lati del parallelogrammo quindi la somma dei quadrati dei lati di un parallelogrammo è equivalente alla somma dei quadrati delle diagonali.

Osservazione. — Dal corollario precedente si ricava quest'altro teorema che « la somma dei quadrati di due lati di un triangolo è equivalente al doppio della somma dei dei quadrati costruiti sulla metà del terzo lato e sulla mediana ad esso corrispondente ».

Corollario 7º — Sia dato (fig. 8) un quadrangolo inscrivibile AELG; sui lati AE, AG si costruiscano i rettangoli contenuti dai lati opposti e sieno ABDE, ACFG. Il triangolo ABC è eguale ad LEG ed inoltre LA è perpendicolare alla BC; ma l'angolo in H formato dall'incontro delle DE, FG è eguale all'angolo in L del quadrangolo e però il punto H sarà sulla circonferenza ad esso circoscritta ed AH ne sarà il diametro, cosicchè l'angolo ALH è retto e però LH è parallela alla BC.

Ma per il teorema generale la somma dei due rettangoli costruiti è equivalente al parallelogrammo contenuto da rette eguali e parallele a BC ed AH, e questo, per le considerazioni fatte, è equivalente al rettangolo delle diagonali, quindi (teorema di Tolomeo) « il rettangolo delle diagonali di un quadrangolo inscrivibile è equivalente alla somma dei rettangoli contenuti dai lati opposti ».

Alessandria, 7 Dicembre 1887. F. Panizza.

FORMULE SULLE ANNUALITÀ
IN PROGRESSIONE ARITMETICA

Avviene nella pratica che il Calcolatore e più particolarmente il Ragioniere, sieno chiamati a risolvere quistioni relative alle annualità in progressione aritmetica. — In simili casi essi devono ricorrere ad una lunga serie d'operazioni, il che implica sempre una grande perdita di tempo e presenta la facilità di incorrere in errori di conteggio. — Le formule seguenti hanno per iscopo di risolvere tali questioni con sole cinque o sei operazioni aritmetiche.

Formula 1.ª) $\Sigma_1 = \alpha a \pm \frac{d}{q-1}\left(\alpha - \frac{n}{q^n}\right).$

Questa formola esprime il valore presente di annualità in progressione aritmetica, pagabili per n anni alla fine di ciascun anno. Infatti se si indica con a l'annualità da pagarsi alla fine del primo anno, con d la ragione aritmetica con cui crescono o diminuiscono le annualità successive, con r il tasso dell'interesse per ogni lira di capitale, con q la somma $1 + r$ e con Σ_1 il valore richiesto, si ha:

$$\Sigma_1 = \frac{a}{q} + \frac{a \pm d}{q^2} + \frac{a \pm 2d}{q^3} + \dots + \frac{a \pm (n-2)d}{q^{n-1}} + \frac{a \pm (n-1)d}{q^n}$$

in cui ciascun termine rappresenta il valore attuale della corrispondente annualità. Si ha ancora:

$$\Sigma_1 = a\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \dots + \frac{1}{q^n}\right)$$

$$\pm\frac{q}{d}\left(\frac{1}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{3}{q^3} + \dots + \frac{n-2}{q^{n-2}} + \frac{n-1}{q^{n-1}}\right)$$

$$= a\,\frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} \pm \frac{d}{q-1}\left(\frac{q^{n-1} - 1}{q^{n-1}(q-1)} - \frac{n-1}{q^n}\right)$$

$$= a\,\frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} \pm \frac{d}{q-1}\left(\frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} - \frac{n}{q^n}\right)$$

e ponendo $\frac{q^n - 1}{q^n (q - 1)} = \alpha$, coefficiente che trovasi calcolato nei manuali (*), si ha:

$$\Sigma_1 = \alpha a \pm \frac{d}{q-1}\left(\alpha - \frac{n}{q^n}\right)$$

formola che permette di calcolare il valore presente, ecc. con sei operazioni aritmetiche.

Formula 2) $\Sigma_2 = \frac{a}{q^0} + \frac{a \pm d}{q} + \frac{a \pm 2d}{q^2} + \ldots\ldots + \frac{a \pm (n-1)d}{q^{n-1}} = \Sigma_1\, q.$

In questa formola si sono conservate le notazioni precedenti, e Σ_2 esprime il valore attuale di annuità in progressione aritmetica, pagabili per n anni al principio di ciascun anno.

Formula 3) $\Sigma_3 = \gamma a \pm \frac{d}{q-1}(\gamma - n).$

Questa formola esprime l'ammontare alla fine di n anni, di annuità in progres. aritm., versate e messe a frutto alla fine di ciascun anno.

Facendo uso delle precedenti notazioni ed indicando con Σ_3 l'ammontare suddetto, si ha:

$$\Sigma_3 = aq^{n-1} + (a \pm d)q^{n-2} + (a \pm 2d)q^{n-3} + \ldots\ldots + (a \pm (n-2)d)q + (a \pm (n-1)d)q^0$$
$$= a(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1) \pm d(q^{n-2} + 2q^{n-3} + \ldots + (n-2)q + (n-1)q^0)$$

od anche:

$$\Sigma_3 = a\frac{q^n-1}{q-1} \pm d\left(\frac{1-q^{n-1}}{1-q} + \frac{1-q^{n-2}}{1-q} + \ldots + \frac{1-q^2}{1-q} + \frac{1-q}{1-q}\right)$$

$$= a\frac{q^n-1}{q-1} \pm \frac{d}{q-1}\left(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q^2 + q - (n-1)\right)$$

$$= a\frac{q^n-1}{q-1} \pm \frac{d}{q-1}\left(\frac{q^n-1}{q-1} - n\right).$$

Ponendo $\frac{q^n-1}{q-1} = \gamma$, coefficiente che trovasi calcolato nei manuali, si ha:

(*) Vedi p. es. Colombo.

$$\sum_3 = \gamma a \pm \frac{d}{q-1}(\gamma - n).$$

Formula 4):

$$\sum_4 = aq^n + (a \pm d)q^{n-1} + (a \pm 2d)q^{n-2} + \ldots + (a \pm (n-2)d)q^2 + (a \pm (n-1)d)q$$

ossia $\sum_4 = \sum_3 q$. Questa formola serve a calcolare l'ammontare alla fine di n anni, di annuità in progressione aritmetica, versate e messe a frutto al principio di ciascun anno.

Si notino le seguenti relazioni semplicissime fra le quattro formole esposte.

$$\sum_2 = \sum_1 q$$
$$\sum_3 = \sum_1 q^n = \sum_2 q^{n-1}$$
$$\sum_4 = \sum_3 q = \sum_2 q^n = \sum_1 q^{n+1}.$$

È bene anche notare che si perviene agli stessi risultati applicando, nei quattro differenti casi, la formola che si ricava nella ricerca del termine sommatorio dei prodotti che si ottengono moltiplicando i termini corrispondenti di due progressioni, l'una aritmetica e l'altra geometrica, e cioè la formola:

$$\sum = a_1 q_1 \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) \pm \frac{dq_1}{1-q}\left[\frac{q(1-q^{n-1})}{1-q} - (n-1)\, q^n\right]$$

in cui a_1 e d rappresentano rispettivamente il primo termine e la ragione della progressione aritmetica; q_1 e q il primo termine e la ragione della progressione geometrica; n il numero dei termini comune ad entrambe.

Un esempio chiarirà meglio in quali casi può tornar utile l'impiego di queste formole ed il modo di applicarle.

Problema. – Un Consorzio attualmente ha un debito di Lire 164000 rappresentato da 820 obbligazioni al portatore di Lire 200 ognuna, fruttifere il 5 %, oltre la tassa di ricchezza mobile a proprio carico in ragione del 13,6224 % sul reddito e la tassa di circolazione in ragione di L. 0,60 ‰, più L. 1 sulle prime mille lire.

Questo debito si estingue in 41 anni, pagando annualmente L. 4000 ovvero 20 obbligazioni, gli interessi maturati e la tassa di ricchezza mobile corrispondente ad essi, nonchè la tassa di circolazione sull'ammontare del debito. Viene quindi alla fine di ogni anno a ridursi la somma degli interessi e delle tasse, proporzionatamente alla diminuzione che subisce il capitale.

Ora il Consorzio potrebbe riscattare le 820 obbligazioni a L. 192, ovvero pagando L. 15744 e avrebbe trovato il sovventore della somma che la cederebbe a questa condizione: Estinzione in 50 anni, verso il pagamento di tante rate annuali, ciascuna di L. 9446, 40, comprendendo in esse, frutto, quota d'ammortamento, tassa ricchezza mobile, ecc..

Si chiede se al Consorzio convenga fare il riscatto delle sue obbligazioni accettando le condizioni del mutuo, oppure se gli torni più vantaggioso mantenere l'estinzione come attualmente ha fissato coi pesi relativi; e a quanto ascende l'utile o la perdita che risulta dalla liquidazione del prestito fatta, come sopra si è detto, per contanti.

Soluzione. — Per sapere quale di questi due contratti sia il più conveniente, bisogna portarli sopra una base di confronto comune. Nel caso che si considera, questa base di confronto non può essere che l'attualità, o l'ammontare delle somme che si sborserebbero nei due casi, alla fine del periodo più lungo.

Prendiamo prima per base di confronto l'attualità e proponiamoci di trovare il valore attuale del debito del Consorzio ed il valore attuale di quello che incontrerebbe accettando l'offerta del sovventore.

1° Contratto. — Valore attuale del debito del Consorzio:

Anno	Obbligazioni in circolazione	Importo delle obbligazioni estinte in ciascun anno	Interessi annui		Tassa di ricchezza mobile		Tassa di circolaz.		Importo delle diverse annualità		Differenza costante fra due annualità successive
1887	820	4000	8200	00	1117	036	99	40	13416	436	229.664
1888	800	4000	8000	00	1089	792	97	00	13186	792	(*)
1889	780	4000	7800	00	1062	547	94	60	12957	147	

(*) La differenza 229,644 nel nostro caso si può trovare anche in un altro modo. Indicando con *a* l'importo delle obbligazioni che si estinguono

In questo caso si ha:

$$a = \text{L. } 13416{,}436;\ d = 229{,}644;\ n = 41;\ q = 1{,}05.$$

Nei manuali si trova:

$$\overline{1{,}05}^{41} = 7{,}39198815 \quad \text{e} \quad \alpha = 17{,}29436.$$

Applicando la formola 1) si ha:

$$\Sigma_1 = 17{,}29436 \times 13416{,}436 - 4592{,}88 \left(17{,}29436 - \frac{41}{7{,}39198815}\right)$$

$$= 232028{,}674 - 53956{,}327 = 178072{,}347.$$

2° Contratto. — Valore attuale del debito che il Consorzio incontrerebbe accettando l'offerta del sovventore.

Qui bisogna far uso della formula $C = \alpha a = \dfrac{q^n - 1}{q^n(q-1)}\, a.$

Si trova:

$$C = \frac{9446{,}40 \times 10{,}46739979}{11{,}46739979 \times 0{,}05} = \text{L. } 172452{,}77.$$

Il guadagno attuale che avrebbe il Consorzio accettando l'offerta del sovventore per riscattare le sue obbligazioni sarebbe di L. 5619,577. Questa somma impiegata agli interessi composti per cinquant'anni, deve dare l'utile che si ha alla fine di questo periodo.

Indicando con c questo utile si ha:

$$c = aq^n = 5619{,}57 \times 11{,}46739979 \qquad c = \text{L. } 64443{,}14.$$

Ora per controllare quest'ultimo risultato e per vedere il modo d'applicazione della formola 3) prendiamo per base di confronto l'ammontare delle somme che si sborserebbero nei due casi, alla fine del periodo più lungo.

---

ogni anno, con r l'interesse di una lira di capitale, con b la tassa di ricchezza mobile per ogni lira di reddito, con c quella di circolazione per ogni lira di capitale e con x la differenza cercata si ha:

$$x = a\,(r + br + c).$$

In questo caso

$$x = 4000\,(0{,}05 + 0{,}136224 \times 0{,}05 + 0{,}0006) = 229{,}644.$$

1° Contratto: $\sum_3 = 127{,}839763 \times 13416{,}436 - 4592{,}88 \times 86{,}839763$,
giacchè nei manuali si trova

$$\gamma = \frac{\overline{1{,}05}^{41} - 1}{1{,}05 - 1} = 127{,}839763.$$

Eseguendo le operazioni si ha:

$$\sum_3 = 1316309{,}388.$$

Alla fine di cinquant'anni questo capitale ammonterebbe a:

$$\sum = 1316309{,}388 \times \overline{1{,}05}^9 = 2042027{,}90.$$

2° Contratto. — Impiegando la formola $\gamma = a\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ si ha:

$$\gamma = \frac{9446{,}40 \times 10{,}46739070}{0{,}05} = 1977584{,}76.$$

L'utile che avrebbe il Consorzio alla fine dei cinquant'anni, accettando l'offerta del sovventore e riscattando le sue obbligazioni sarebbe ancora di L. 2042027,90 — 1977584,76 = L. 64443,14.

MOLLINI ING. MAURELIO.

ESERCIZI PER LA SCUOLA
ARITMETICA

Divisibilità dei numeri.

1. Qual'è la forma generale dei numeri che divisi per 7 danno per resto 3?
2. Qual'è la forma generale dei numeri che divisi per 7 danno per resto 3 e per 9 danno per resto 7?

3. Qual'è la forma generale dei numeri che divisi per 5 danno per resto 2, divisi per 6 danno per resto 5 e per 9 danno per resto pure 5?
4. Qual'è la forma generale dei numeri che divisi per 5 danno per resto 2, per 7 danno per resto 4, per 9 danno per resto 5 e sono inoltre divisibili esattamente per 8?
5. Dimostrare che la forma generale dei numeri che divisi per 5, 7, 9 danno per resti rispettivamente i numeri r_1, r_2, r_3 è:

$$315.k + 126.r_1 + 225.r_2 + 280.r_3,$$

dove k rappresenta un intero qualunque.
6. In qualsiasi sistema di numerazione, la condizione di disibilità di un numero per un divisore della base diminuita dell'unità è che sia divisibile per questo divisore la somma dei valori assoluti delle cifre del numero.

Così ad es. avendosi $10^4 - 1 = 9999 = 3^2.11.101$ e considerando il numero 137057 riferito al sistema di numerazione di base 10^4, si avrà che il numero stesso sarà divisibile per 101 se $7057 + 13$ è divisibile per 101.
7. In qualsiasi sistema di numerazione, la condizione di divisibilità di un numero per un divisore della base aumentata dell'unità è che sia divisibile per questo divisore la differenza fra la somma delle cifre di posto impari e quella delle cifre di posto pari.

Così avendòsi $10^4 + 1 = 10001 = 73.137$, il numero 2524997 sarà divisibile per 73 e 137 se è divisibile per questi numeri la differenza $4997 - 252$.
8. Indicando con $a, b, c, d, e, f, \ldots$ ordinatamente le cifre di un numero a cominciare da quella delle unità, dimostrare che se

$$(a + 3b + 2c) - (d + 3e + 2f) + \ldots\ldots$$

è divisibile per 7, lo stesso accade per il numero dato.

Applicare il teorema precedente a verificare che i numeri 63483; 7483273; 84325164, sono divisibili per 7.

9. Indicando con a la cifra delle unità di un numero e con b il numero che si deduce da esso sopprimendo la cifra a, dimostrare che se la quantità $b-2a$ o $2a-b$, secondochè $b \gtreqless 2a$, è divisibile per 7, anche il numero dato è divisibile per 7.

Dedurre dalla regola precedente che il numero 34125 è divisibile per 7 poichè formando la successione di numeri $3412-10=3402$; $340-4=336$, $33-12=21$, l'ultimo di questi è divisibile per 7.

10. Indicando, come precedentemente, con a la cifra delle unità di un numero e con b la parte rimanente di questo numero, se $b+4a$ è divisibile per 13, anche il numero dato è divisibile per 13.

Il numero 47346 è divisibile per 13 poichè, formando la serie dei numeri: $4734+24=4758$; $475+32=507$; $50+28=78$; $7+32=39$, l'ultimo di questi è divisibile per 13.

11. Indicando con a, b, c, d, e, f,.... ordinatamente le cifre di un numero cominciando da quella a delle unità, dimostrare che essendo divisibile per 13 la quantità:

$$(a+10b+9c)-(d+10e+9f)+\ldots\ldots,$$

anche il numero dato è divisibile per 13.

Verificare che i numeri 74854; 2647350; 864752100 sono divisibili per 13.

12. Indicando con a la cifra delle unità di un numero e con b la rimanente parte di questo numero, se $b+2a$ è divisibile per 19, anche il numero dato è divisibile per 19.

Il numero 62035 è divisibile per 19 poichè nella serie dei numeri $6203 + 10 = 6213$; $621 + 6 = 627$; $62 + 14 = 76$; $7 + 12 = 19$; l'ultimo è divisibile per 19.

13. Rappresentando con a il numero formato dalle due prime cifre a destra di un numero dato e con b la parte di questo che si ottiene sopprimendo a, si hanno le seguenti proprietà:

1° Se $a + 2b$ è divisibile per 7, anche il numero dato è divisibile per 7.

2° Se $a - 2b$ o $2b - a$, secondochè $a > 2b$ od $a < 2b$, è divisibile per 17, anche il numero dato è divisibile per 17.

3° Se $a + 8b$ è divisibile per 23, anche il numero dato è divisibile per 23.

4° Se $7a + 4b$ è divisibile per 29, anche il numero dato è divisibile per 29.

5° Se $5a + 4b$ è divisibile per 31, anche il numero dato è divisibile per 31.

6° Se $b - 3a$ o $3a - b$, secondochè $b \gtreqless 3a$, è divisibile per 43, anche il numero dato è divisibile per 43.

7° Se $a + 6b$ è divisibile per 47, anche il numero dato è divisibile per 47.

8° Se $6b - a$ o $a - 6b$, secondochè $6b \gtreqless a$, è divisibile per 53, anche il numero dato è divisibile per 53.

Così ad es: — il numero 34125 è divisibile per 7 perchè l'ultimo dei numeri $682 + 25 = 707$; $14 + 7 = 21$, è divisibile per 7 — il numero 58684 è divisibile per 17 perchè l'ultimo dei numeri $1172 - 84 = 1088$, $88 - 20 = 68$, è divisibile per 17 — il numero 74773 è divisibile per 23 poichè nella serie dei numeri $73 + 5976 = 6049$; $49 + 480 = 529$, $29 + 40 = 69$, l'ultimo è divisibile per 23 — il numero 942906 è divisibile per 29 poichè nella serie dei numeri $37716 + 42 = 37758$; $1508 + 406 = 1914$; $76 + 98 = 174$, l'ultimo è divisibile per 29 — il numero 1007934 è divisibile per 31 perchè formando la serie dei numeri $40316 + 170 = 40486$; $1616 + 430 = 2046$; $80 + 230 = 310$, l'ultimo è divisibile per 31 — il numero 139793 è divisibile per 43 perchè l'ultimo dei numeri $1397 - 279 = 1118$; $54 - 11 = 43$, è divisibile per 43 — il numero 152797 è divisibile per 47, poichè nella serie dei numeri $9162 + 97 = 9259$; $552 + 59 = 611$; $36 + 11 = 47$, l'ultimo è divisibile per 47 — il numero 172303 è divisibile per 53 poichè nella serie dei numeri $10338 - 3 = 10335$; $618 - 35 = 583$; $83 - 30 = 53$, l'ultimo è divisibile per 53.

14. Indicando con a la cifra delle unità di un numero e con b la parte rimanente di esso, se $4a + 3b$ è divisibile per 37, anche il numero dato è divisibile per 37.

Il numero 126577 è divisibile per 37 poichè nella serie dei numeri $37071 + 28 = 37099$; $11397 + 36 = 11433$; $3429 + 12 = 3441$; $1032 + 4 = 1036$, $809 + 24 = 333$, $99 + 12 = 111$; $33 + 4 = 37$, l'ultimo è divisibile per 37.

15. Indicando con a il numero formato dalle prime tre cifre a destra di un numero dato e con b la parte rimanente di questo numero, se $2b - 5a$ o $5a - 2b$, secondochè $2b \gtreqless 5a$, è divisibile per 41 o 61 anche il numero dato è divisibile per 41 o 61.

Il numero 1330491 è divisibile per 41 poichè $2660 - 2455 = 205$, è divisibile per 41 — il numero 4484232 è divisibile per 61, poichè nella serie dei numeri $8968 - 1160 = 7808$; $4040 - 14 = 4026$; $130 - 8 = 122$, l'ultimo è divisibile per 61.

16. Indicando con a il numero formato dalle prime quattro cifre a destra di un numero dato e con b la parte rimanente di questo numero, che si ottiene sopprimendo a, se $b - 2a$ o $2a - b$, secondochè $b \gtreqless 2a$, è divisibile per 59, anche il dato numero è divisibile per 59.

Il numero 136585 è divisibile per 59, poichè nella serie dei numeri $13170 - 13 = 13157$, $6314 - 1 = 6313$, l'ultimo è divisibile per 59.

Riepilogando si può formare la seguente tabella delle condizioni di divisibilità di un numero pei numeri primi 7, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 61.

a unità del numero, b parte rimanente	se $b - 2a$ o $2a - b$	è divisibile per	7	lo stesso accade	del num°
	se $b + 4a$	»	13	»	»
	se $b + 2a$	»	19	»	»
	se $4a + 3b$	»	37	»	»
a numero formato da unità e decine, b parte rimanente	se $a + 2b$	»	7	»	»
	se $2b - a$ o $a - 2b$	»	17	»	»
	se $a + 8b$	»	23	»	»
	se $7a + 4b$	»	29	»	»
	se $5a + 4b$	»	31	»	»
	se $b - 3a$ o $3a - b$	»	43	»	»
	se $a + 6b$	»	47	»	»
	se $6b - a$ o $a - 6b$	»	53	»	»
a numero formato da da unità, dec., cent., b parte restante.	se $2b - 5a$ o $5a - 2b$	»	41 o 61	»	»

A. Lugli.

DIMOSTRAZIONE DEL 2° DEI TEOREMI PROPOSTI a Pag. 156. (Periodico, 1887).

Se un triangolo ABC *ruota intorno ad un punto* O *del suo piano, e sia* A'B'C' *una qualunque delle posizioni che esso prende in questa rotazione; se inoltre* a, b, c *sono i punti d'incontro dei lati corrispondenti dei due triangoli* ABC *ed* A'B'C', *si hanno le seguenti proprietà:*

1.° *Se il punto* O *è il centro del cerchio circoscritto al triangolo* ABC, *sarà anche il punto d'incontro delle altezze del triangolo* abc.

2.° *Se il punto* O *è il punto d'incontro delle altezze del triangolo* ABC, *sarà anche il centro del cerchio inscritto nel triangolo* abc.

3.° *Se il punto* O *è il centro del cerchio inscritto nel* *triangolo* ABC, *sarà anche il centro del cerchio circoscritto al triangolo* abc.

4.° *Se il punto* O *è situato sulla circonferenza circoscritta al triangolo* ABC, *i punti* a, b, c *saranno in linea retta, cioè i triangoli* ABC *e* A′B′C′ *saranno omologici.*

A. Sauve.

Dimostrazione del Prof. *G. Riboni.* (*)

1.° Poichè l'arco $AA' = CC'$, il triangolo CbA' è isoscele e la perpendicolare condotta da b su CA', cadendo nel punto medio di questa, passerà per O. Si è ridotti così a dimostrare che ac è parallela a CA', perchè allora la perpendicolare anzidetta è l'altezza del triangolo abc relativamente ad ac. – I punti a, c, B, B′ e C′, A′, B, B′ essendo sopra una circonferenza, e B′, a, C′ per diritto, gli angoli Bca, $BA'C'$ supplementari dello stesso angolo $BB'a = BB'C'$ saranno uguali, ossia $< BcB' + B'ca = BA'B' + B'A'C + CA'C'$, ma $< BcB' = BA'B' + cBA' = BA'B' + CA'C'$, onde $< B'ca = B'A'C$. Le ac, $A'C$ sono perciò parallele c.d.d. – Similmente per le altre due altezze.

2.° Basterà dimostrare che bO è bisettrice dell'angolo abc. – Tanto i punti c, A′, A, O che c, A′, A, b sono in una circonferenza, ossia la circonferenza $cA'A$ passa per b e per O: perciò $< cAO = cbO$. Similmente si dimostra $< aCO = abO$ e poichè $< cAO = aCO$, perchè entrambi complementari dell'angolo ABC, è pure $< cbO = abO$ ossia Ob è bisettrice dell'$< abc$ c.d.d. – Similmente dicasi di cO, aO.

3.° Come precedentemente si ha che i cinque punti O, c, A′, A, b sono in una circonferenza e poichè $< cAO = bAO$, gli archi bO e cO di questa circonferenza saranno uguali e quindi anche le corde corrispondenti, cioè O è equidistante da b e c. – Similmente si dimostra che $Ob = Oa = Oc$, ossia O è il centro del cerchio circoscritto al triangolo abc.

(*) Dimostrazioni analoghe, salvo l'aggiunta relativa al 4.° caso, vennero inviate dai Signori *J. Beyens*, *F. Viaggi*.

4º Per essere $<cBa = cB'a$ (come supplementi degli angoli uguali ABC, A'B'C') i quattro punti c, B', B, a sono in una circonferenza, inoltre per essere $<OBc = OB'c$ (per l'eguaglianza dei triangoli OBA, OB'A') i quattro punti O, c, B', B sono in una circonferenza che è quella precedente e contiene quindi anche a. Così i cinque punti O, c, b, A, A' e O, a, C, C', b sono in una circonferenza. – Ora $< aOb = BOA$, perchè entrambi supplementari di ACB, togliendo l'angolo comune B0b rimane $< aOB = bOA$, ma $< aOB = acB$ e $< bOA = bcA$, perciò $<acB = bcA$ e poichè cB e cA sono in linea retta, anche ca e cb saranno in linea retta c.d.d.

Giova ora studiare, relativamente a questo caso, la legge del movimento dei centri e degli assi d'omologia del triangolo iniziale colle sue posizioni successive, al che servono i seguenti teoremi:

Iº *Il luogo dei centri d'omologia è la circonferenza circoscritta al triangolo* ABC *e precisamente per ogni nuova posizione* A'B'C' *del triangolo* ABC *il centro d'omologia dei due triangoli è il secondo punto d'intersezione delle circonferenze circoscritte ad* ABC *ed* A'B'C' (*il primo punto d'intersezione è sempre* O).

Infatti siano A'B'C', A''B''C'' (fig. 11ª, tav. I) due nuove posizioni del triangolo ABC. È chiaro che $<OBB' = OAA'$ ed anche $<OBB'' = OAA''$ e sottraendo: $<B'BB'' = A'AA''$, da cui, chiamando M ed M' i centri di omologia di ABC con A'B'C' ed A''B''C'', si deduce facilmente che $<AMB = AM'B$, cioè il centro d'omologia è vertice d'un angolo costante i cui lati passano per A e B. D'altra parte se si ritorna il triangolo nella posizione iniziale le AA' e BB' (formanti quest'angolo di grandezza costante) diventano le tangenti in A e B agli archi descritti dai medesimi punti A e B col centro O: il loro angolo è perciò uguale ad $<AOB$: e quindi anche $<AMB = AOB$, dunque il punto M si muove sull'arco AOB capace dell'$<$ AOB. Ruotando il triangolo nel senso opposto, il punto M descrive l'arco rimanente AB. Il centro d'omologia si muove così sulla circonferenza ABC. — Di più si osservi che si può considerare come posizione iniziale il triangolo $A'B'C'$ ed allora con analogo ragionamento si proverebbe che il centro d'omologia di ABC ed $A'B'C'$ deve appartenere alla circonferenza $A'B'C'$, perciò il centro stesso sarà l'intersezione delle due circonferenze c.d.d.

II.° *Gli assi d'omologia dei medesimi triangoli inviluppano una parabola, alla quale il triangolo* ABC *è circoscritto, e di cui il punto* O *è il fuoco.*

Infatti se cab e $c'a'b'$ sono gli assi d'omologia del triangolo ABC coi triangoli $A'B'C'$, $A''B''C''$, si osservi che per essere i punti c, B, O, a su una circonferenza segue $\angle cOa = cBa$ e per la stessa ragione $\angle c'Oa' = cBa$ onde $\angle cOa = c'Oa'$: si ha dunque l' $\angle cOa$ di grandezza costante che ruota intorno al vertice: allora i fasci $[O.\ c,\ c' \ldots..]$ ed $[O.a,\ a', \ldots]$ sono proiettivi e proiettive anche le punteggiate $c, c' \ldots.$ ed $a, a' \ldots.$ Le congiungenti i punti corrispondenti, ca, $c'a' \ldots$ inviluppano per conseguenza una conica che è tangente alle rette AB, BC su cui giacciono le punteggiate stesse. Similmente, considerando le punteggiate $a, a' \ldots$ $b, b' \ldots.$, si mostrerebbe come la stessa conica è tangente alla AC. Questa conica poi è una parabola perchè dopo un mezzo giro intorno ad O il triangolo ABC diventa simmetrico della sua posizione iniziale e perciò l'asse d'omologia, tangente alla conica, è all'infinito. Da ultimo si osservi che l' $\angle cOa$ sotteso dalla porzione ca di tangente mobile compresa fra le tangenti fisse AB e BC è uguale ad $\angle ABC$ e quindi supplementare dell' $\angle CBD$ che si ottiene prolungando in D il lato AB, il quale è l'angolo delle due tangenti fisse (*), e di più il punto O è sul cerchio circoscritto al triangolo ABC (formato da tre tangenti alla parabola (**); dunque il punto O è il fuoco della parabola stessa c.d.d.

(*) V. Salmon. — *Trattato delle sezioni coniche*. Cap. XII, n.° 223, corol. 3.°
(**) Idem — Cap. XII, n.° 223, corol. 4.°

QUISTIONI PROPOSTE

1. Dati in un piano due triangoli ABC, DEF ed un punto, se le rette congiungenti questo punto con i vertici A, B, C, D, E, F segano i lati rispettivamente opposti ad essi nei punti A', B', C', D', E', F', i tre punti nei quali le rette AD, BE, CF tagliano ordinatamente le rette A'D', B'E', C'F' sono situati in una stessa retta.

2. Dati due tetraedri ABCD, EFGH ed un punto, se le rette congiungenti questo punto con i vertici A, B, C, D, E, F, G, H segano le facce rispettivamente opposte ad essi nei punti A', B', C', D', E', F', G', H', i quattro punti nei quali le rette AE, BF, CG, DH tagliano ordinatamente le rette A'E', B'F', C'G', D'H' sono situati in uno stesso piano.

F. Nicoli.

3. Dimostrare che, se un emisfero è diviso in due parti equivalenti da un piano parallelo alla sua base, il rapporto della distanza del piano segante dalla base al raggio della sfera è eguale a 2 sen10°.

4. Risolvere il sistema di equazioni

$$x - yz = a\ \sqrt{1-y^2}\ \sqrt{1-z^2}$$

$$y - zx = b\ \sqrt{1-z^2}\ \sqrt{1-x^2}$$

$$z - xy = c\ \sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-y^2}$$

5. Sia dato un triangolo sferico, e si costruisca un altro triangolo sferico coi vertici nei punti medii dei lati del primo. Se la somma degli angoli del primo triangolo è eguale a 360°, ciascun lato del secondo è di 90.° E se il secondo triangolo ha un lato di 90°, la somma dei tre angoli del primo è eguale a 360°.

D. Besso.

6. Dato un triangolo si conducano le bisettrici dei suoi angoli BAC, CBA, ACB, e sui loro prolungamenti si prendano i punti A_1 B_1 C_1 ad un'eguale distanza x dai lati BC,CA,AB e in modo che i segmenti AA_1, BB_1, CC_1 sieno attraversati dai corrispondenti lati BC, CA, AB. Esprimere la distanza x in funzione dei lati del triangolo ABC e dell'area del triangolo $A_1B_1C_1$.

F. Verde.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Die Elemantargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene, systematisch und kritisch behandelt von D.r Otto Rausenberger. Leipzig, 1887, p. VI e 236.

È opinione del Sig. Rausenberger che i trattati recenti di Geometria elementare non siano che nuove edizioni, aumentate e migliorate, degli *Elementi* di Euclide; i moderni secondo lui non fecero che apportare qualche lieve contribuzione al contenuto, qualche piccolo miglioramento nella distribuzione delle materie, qualche semplificazione in certe dimostrazioni. Noi invece crediamo che, se ciò è vero per molti, non è vero per tutti i libri che vennero pubblicati in questi ultimi anni; e siamo sicuri che se il Sig. Rausenberger cercherà più accuratamente nella letteratura della dotta sua patria o nella nostra, troverà dei lavori che il geometra Greco non riconoscerebbe certamente come emanazioni della sua grande Opera.

La consuetudine di seguire tanto fedelmente il metodo antico è, secondo il precitato scienziato, da biasimarsi perchè con ciò la Geometria appare, non come un tutto organico, ma piuttosto come un agglomeramento di teoremi e problemi succedentisi in un ordine logico bensì, ma non tale che renda palese essere essi sufficienti a risolvere tutte le principali questioni che appartengono alla teoria a cui si riferiscono. A nostro avviso in questa affermazione vi è qualche cosa di vero, ma essa non è totalmente conformealla verità; chè in molti casi è evidente che i trattatisti pensarono di potersi dispensare dal cementare le varie proposizioni con osservazioni opportune lasciando questo còmpito alla parola del maestro o alla meditazione individuale. – Col libro di cui più sopra sta scritto il titolo, l'A. si è proposto di ovviare all'inconveniente testè accennato; e noi vogliamo segnalarlo all'attenzione di quei lettori di questo *Periodico* che occupano qualche cattedra nell'insegnamento secondario, sicuri che la lettura di esso renderà loro più facile lo svelare gli intimi legami che si possono dimostrare fra varie parti della Geometria elementare.

Non già che noi dividiamo totalmente i modi di vedere dell'A. chè in certi punti della sua esposizione è troppo evidente la tendenza del suo spirito a ricorrere a considerazioni analitiche; p. es. la distinzione fra relazione algebrica e relazione trascendente che ricorre assai spesso, la considerazione speciale di certe quantità come radici di equazioni algebriche, la introduzione degli infinitesimi di varii ordini e simili, non sarebbero certamente da adottarsi nelle scuole in cui vengono insegnati i rudimenti della Geometria perchè non verrebbero certamente compresi.

Nè questi sono gli unici elementi di disaccordo fra noi e il Sig. Rausenberger, ma per brevità omettiamo gli altri.

Invece ci sembra consigliabile seguirlo nell'introdurre la Trigonometria piana come un capitolo della Geometria metrica piana e la Trigonometria sferica come uno della Geometria metrica dello spazio; infatti lo scopo ultimo di queste discipline non è forse di risolvere certe questioni che si presentano spontanee accanto a quelle che l'ordinaria Geometria risolve ma la cui soluzione richiede mezzi di cui essa non dispone? Il farne, come si suole, due dottrine a parte, non è quindi stabilire delle divisioni contrarie alla natura delle cose?

Un altro vantaggio che molti trarranno dallo studio del libro del Sig. Rausenberger è la conoscenza di certi complementi importanti che i moderni fecero alle parti più elementari della Geometria; citeremo come esempio le ricerche di Geometria non euclidea (a proposito della quale l'A. fa alcune critiche, che ci sembrano fondate, al noto sistema di G. Bolyai) e l'estensione della teoria dei poliedri a poliedri molteplicemente connessi. — Ma anche qui però non crediamo che l'A. abbia saputo conservare una giusta misura; chi crederebbe, ad esempio, di trovare nel libro di cui parliamo dopo l'esposizione della teoria degli elementi all'infinito quale è considerata dall'ordinaria Geometria di posizione, un cenno del modo in cui si sogliono considerare distribuiti tali elementi nella rappresentazione geometrica dei numeri complessi? e chi non si meraviglierà di incontrare anche le coordinate baricentriche e la nozione che il teorema sull'esagono inscritto in due rette è caso particolare, non solo del teorema di Pascal, ma anche di quello che dice: tre cubiche piane aventi otto punti comuni ne hanno in conseguenza un nono?

Malgrado queste mende, malgrado la redazione ineguale, in certi punti inesatta ed evidentemente affrettata, noi crediamo che il libro del Sig. Rausenberger potrà essere utile a molti, specialmente per l'azione suggestiva che ci sembra avere sui lettori. Vi sono certe parti della Scienza che, per esser state da noi studiate in un'epoca della nostra vita in cui lo spirito critico non era peranco sufficientemente sviluppato, e per non esser poi state il soggetto di nuove meditazioni, vengono considerate in un modo unico a cui non pensiamo ad apportare le modificazioni che uno studio rinnovato manifesterebbe necessarie; quindi la lettura di un libro che obblighi a ripensarvi, che insegni spesso a rimediare ai difetti che in quelle parti della Scienza esistono, sarà certamente opportuno per chiunque opini essere i metodi per istudiare una disciplina suscettibili di progresso quanto la disciplina stessa.

Genova, 18 Novembre 1887.

GINO LORIA.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des Mathématiques publié par *Gustav Eneström*. Stockholm, 1887; N. 4.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche pubblicato da *B. Boncompagni*. Tomo XX. Marzo, Aprile 1887. Roma.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane pubblicato per cura del professore *G. Battaglini*. Volume XXV. Settembre e Ottobre. Napoli, 1887.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy*, Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe. 3e série. Onzième année. N. 11, 12. Paris, 1887; douzième année: N. 1, Paris 1888.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par *H. Vuibert*. 12e Année. N. 4, 5, 6, 7, 8, 9. Paris, M. Nony et C.ie, 17 Rue des Écoles, 1887.

Iornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo *D.r F. Gomes Teixeira*. Professor na Escola Polytechnica do Porto. Vol. VIII, n. 2. Coimbra, 1887.

Le Scuole Secondarie eco dell'Associazione nazionale fra gl'insegnanti delle scuole secondarie. Anno V. N. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Milano 1877.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome septième: novembre, décembre, 1877: Tome huitième: janvier 1888.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). — Anno XXV, 1886. — Serie 2.a Vol. 1. 1887. Napoli.

Rivista didascalica. Organo della società didascalica italiana. — Anno I, Novembre, Dicembre 1887, fasc. 8, 9, 10. Roma, 1887.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XIX. N. 18 al 24. Firenze, 1887.

Amodeo F. — Sopra un particolare connesso (2, 2) con due punti singolari e due rette singolari.

Beltrami (E.) — Sulla teoria delle onde (Rendiconti Ist.o Lomb.o 1886) — Sulle funzioni sferiche d'una variabile (id. id. 1877). — Sulle funzioni complesse (id. id. id.) — Intorno ad alcuni problemi di propagazione del calore. Bologna, 1887.

Casorati F. — Sopra le *coupures* del Sig. Hermite, i *Querschnitte* e le superficie di Riemann, ed i concetti d'integrazione sì reale che complessa (Annali di Matematica 1887).

Dainelli U. — Sulla rettificazione della cicloide (1881) — Sopra la velocità e l'accelerazione d'un punto soggetto ad una forza centrale. Bologna 1884. Sul movimento di un punto pesante sopra rette inclinate nel vuoto e senz'attrito. Bologna 1886. — Del moto di un punto materiale libero sollecitato da una forza diretta costantemente ad una retta fissa. Bologna 1877.

De Longchamps G. — Sur le trifolium (Journal de mathématiques spéciales, 1887). — Rapprochement entre la Trisectrice de Mac-Laurin et la Cardioïde (1877) — Sur une trisectrice remarquable (Mathesis, 1888).

D'Ocagne M. — Les cordonnées parallèles de points (Nouvelles annales de Mathématiques, 1877). — Sur une quartique unicursale (1886). — Sur les courbes algébriques de degré quelconque (Paris 1887). — Monographie de la symédiane.

Guccia G. B. — Théorème sur les pointes singuliers des surfaces algébriques (1887).

Guimaraes R. — Semelhança e rectificação dos arcos ellipticos. Porto, 1887.

Jamet V. — Essai d'une nouvelle théorie élémentaire des logarithmes. — Paris, Librairie Nony e C, 1888.

Jung G. — Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche di genere qualunque (Annali di matematica, 1888).

Martini T. — Sulla velocità del suono nei liquidi. — Venezia, 1886.

Riccardi P. — Saggio di una bibliografia euclidea. Parte I e II, (Rendiconti R. Acc. Bologna, 1877).

(Il seguito al prossimo fascicolo).

Errata-Corrige. — In luogo del numero 3330667 nella penultima e sestultima linea a pag. 174 del Vol. II, 1887, si legga 333667.

In luogo del fattore $\frac{q}{d}$ nella terzultima formola a pag. 14 di questo fascicolo, leggasi $\frac{d}{q}$.

SULL'ESTRAZIONE DI RADICE
APPROSSIMATA
DAI NUMERI ARITMETICI

1. Dalla

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a})\,(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}\times\sqrt[n]{a}+\dots\dots+\sqrt[n]{a^{n-1}})}{(\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a})\,(\sqrt[n]{b^{n-1}}+\sqrt[n]{b^{n-2}}\times\sqrt[n]{a}+\dots\dots+\sqrt[n]{a^{n-1}})}$$

si ricava

$$\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}+(\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a})\times\frac{x-a}{b-a}\times\frac{(\sqrt[n]{b^{n-1}}+\dots\dots+\sqrt[n]{a^{n-1}})}{(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\dots\dots+\sqrt[n]{a^{n-1}})}.$$

Da quest'ultima, supposto

$$0<a<x<b$$

segue la limitazione:

$$\alpha)\quad \sqrt[n]{a}+(\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a})\,\frac{x-a}{b-a}<\sqrt[n]{x}<\sqrt[n]{a}+(\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a})\,\frac{x-a}{b-a}\,\frac{\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{n-1}}}.$$

Parimenti dalla

$$\frac{b-x}{b-a}=\frac{(\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{x})\;(\sqrt[n]{b^{n-1}}+\dots\dots+\sqrt[n]{x^{n-1}})}{(\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a})\;(\sqrt[n]{b^{n-1}}+\dots\dots+\sqrt[n]{a^{n-1}})}$$

segue la

$$\beta)\quad \sqrt[n]{b}-(\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a})\,\frac{b-x}{b-a}<\sqrt[n]{x}<\sqrt[n]{b}-(\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a})\,\frac{b-x}{b-a}\,\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}}$$

2. Se $\sqrt[n]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$ sono numeri razionali, che limitano $\sqrt[n]{x}$; partendo da quelli si possono ottenere due nuovi limiti per questa quantità.

Le formole α) *e* β) *danno lo stesso limite inferiore*, essendo

$$\left[\sqrt[n]{a}+(\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a})\;\frac{x-a}{b-a}\right]-\left[\sqrt[n]{b}-(\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a})\,\frac{b-x}{b-a}\right]=0.$$

Il valore di esso limite inferiore, *che è maggiore di* $\sqrt[n]{a}$, come si vede immediatamente nella α), risponderebbe all'ipotesi che le differenze dei numeri fossero proporzionali a quelle delle loro potenze dello stesso grado.

Il limite superiore dato dalla β) *è minore di* $\sqrt[n]{b}$. Quello dato dalla α) può risultare maggiore.

3. Pongasi

$$D = \sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a}$$

$$D_1 = \left[\sqrt[n]{a} + (\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a})\frac{x-a}{b-a}\frac{\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{n-1}}}\right] - \left[\sqrt[n]{a} + (\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a})\frac{x-a}{b-a}\right]$$

$$D_2 = \left[\sqrt[n]{b} - (\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a})\frac{b-x}{b-a}\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}}\right] - \left[\sqrt[n]{b} - (\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a})\frac{b-x}{b-a}\right]$$

$$\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}} = 1 - \omega \quad \text{epperò} \quad \frac{\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{n-1}}} = 1 + \frac{\omega}{1-\omega}$$

e si avrà:

$$\gamma) \qquad D_1 = D \times \frac{x-a}{b-a} \times \frac{\omega}{1-\omega}$$

$$\delta) \qquad D_2 = D \times \frac{b-x}{b-a} \times \omega$$

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{x-a}{b-x} \times \frac{1}{1-\omega} = \frac{x-a}{b-x} : \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}}.$$

Ora, il limite superiore dato dalla α) è minore, eguale o maggiore, di quello dato dalla β) secondo che D_1 è minore, eguale o maggiore di D_2, onde segue che: *Il limite superiore dato dalla* α) *è minore, eguale o maggiore, di quello dato dalla* β) *secondo che* $\frac{x-a}{b-x}$ *è minore, eguale o maggiore, di* $\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}}$.

Essendo

$$\omega = 1 - \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}}, \quad \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}} > \frac{a}{b}$$

segue che: *Se è* $\frac{x-a}{b-x} \overline{\gtrless} \frac{a}{b}$, *la* α) *dà un limite superiore più piccolo di quello che dà la* β).

E segue ancora $\omega < \frac{b-a}{b}$, epperò

$$\gamma') \qquad D_1 < D \times \frac{x-a}{a}$$

$$\delta')\,^{(*)} \qquad D_2 < D \times \frac{b-x}{b}.$$

4. Da quanto precede si riconosce che entrambe le formule α) e β) si prestano al calcolo approssimato delle radici aritmetiche. Usando le medesime si può impicciolire indefinitamente l'intervallo comprendente $\sqrt[n]{x}$. Le formule γ) e δ) fanno conoscere a priori la riduzione che si viene a portare a tale intervallo. Qualunque sia la formula che si vuol usare, occorre calcolare $\sqrt[n]{a^{n-1}}$ e $\sqrt[n]{b^{n-1}}$, quantità razionali come lo sono per supposto $\sqrt[n]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$. Conviene adoperare la α), oppure la β), secondo che $\frac{x-a}{b-x}$ è minore, oppure maggiore, di $\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}}$. Sarebbe indifferente usare l'una o l'altra se fosse $\frac{x-a}{b-x} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}}$.

5. Per mettere in evidenza la grande convenienza pratica delle formule date sopra, le applichiamo a due esempi.

Calcolo approssimato di $\sqrt[3]{97}$.

In questo caso è $x = 97 \quad n = 3$. Ponendo nella β)

$$a = 4^3 = 64 \quad b = 5^3 = 125$$

si trova

$$4{,}54\ldots. < \sqrt[3]{97} < 4{,}70\ldots..$$

(*) Il nuovo intervallo, comprendente $\sqrt[n]{x}$, che si ottiene applicando la α), oppure la β), ha all'intervallo precedente rapporto minore dell'errore relativo che si commetterebbe prendendo x per a, oppure per b.

Ponendo nella β)

$$a = 4{,}5^3 = 91{,}125 \quad b = 4{,}6^3 = 97{,}336$$

si trova

$$4{,}5945\ldots. < \sqrt[3]{97} < 4{,}5948\ldots\ldots$$

Ponendo, ancora nella β)

$$a = 4{,}594^3 = 96{,}955616584 \quad b = 4{,}595^3 = 97{,}018944875$$

si trova

$$4{,}5947008\ldots\ldots < \sqrt[3]{97} < 4{,}5947009\ldots..$$

È
$$4{,}5947009^3 = 97{,}0000004935580081 21729$$

onde
$$\sqrt[3]{97} = 4{,}5947008\ldots\ldots$$

Si riconosce dalla δ') che la β) darebbe ora, in una volta, $\sqrt[3]{97}$ con almeno sedici cifre decimali esatte.

Calcolo approssimato di $\sqrt{78963}$.

In questo caso è $x = 78963 \quad n = 2$. Ponendo nella β)

$$a = 200^2 = 40000 \quad b = 300^2 = 90000$$

si trova

$$277{,}926 < \sqrt{78963} < 285{,}284.$$

Ponendo nella α)

$$\alpha = 280^2 = 78400 \quad b = 290^2 = 84100$$

si trova

$$280{,}987\ldots. < \sqrt{78963} < 281{,}022\ldots.$$

Ponendo nella α)

$$a = 281^2 = 78961 \quad b = 281{,}01^2 = 78966{,}6201$$

si trova

$$281{,}0035586\ldots.. < \sqrt{78963} < 281{,}0035587\ldots..$$

È
$$281{,}0035587^2 = 78963{,}00000206434569$$

onde
$$\sqrt{78963} = 281{,}0035586\ldots..$$

Dalla δ') si riconosce che la β) darebbe ora, in una volta, $\sqrt{78963}$ con almeno diciotto cifre decimali esatte.

Voghera, 11 settembre 1887.

Prof. Francesco Giudice.

COSTRUZIONE DI TRIANGOLI ISOBARICENTRICI CON UN DATO

Il Sig. Besso in una sua nota « Su alcune proprietà del triangolo » ed il Sig. Pesci in un'altra « Trasversali nel triangolo » entrambe pubblicate in questo Periodico (Anno II, Fascicolo I e III) hanno indicato come sia possibile costruire geometricamente triangoli aventi lo stesso centro di gravità di un dato.

In questa Nota io mi propongo di estendere la serie dei triangoli isobaricentrici con un dato e costruibili geometricamente, dimostrando il seguente teorema:

« Se sopra i lati di un triangolo ed esternamente ad esso si costruiscono triangoli simili e similmente disposti, i tre vertici di questi, opposti ai tre lati, formano un triangolo isobaricentrico col dato ».

Sia ABC il triangolo dato, ed A_1, B_1, C_1 i vertici dei triangoli simili, opposti rispettivamente a BC, CA, AB; indico con α gli angoli in A_1, B_1, C_1 e con β, γ gli altri due; con a, b, c la misura dei lati opposti ad A, B, C. Dai punti A, A_1, B_1, C_1, si abbassino le perpendicolari Aa', A_1a_1, B_1b_1, C_1c_1, sul lato BC; basterà, per una nota proprietà del baricentro, dimostrare che la somma algebrica delle tre perpendicolari A_1a_1 B_1b_1 C_1c_1 è eguale ad Aa', poichè ripetendo allora la dimostrazione per gli altri lati AB ed AC resterà provato che i triangoli ABC, $A_1B_1C_1$ hanno lo stesso centro di gravità.

Ora si ha

$$B_1b_1 = B_1C.\mathrm{sen}(C+\beta), \qquad B_1C = \frac{b\,\mathrm{sen}\gamma}{\mathrm{sen}\alpha}$$

quindi

$$B_1b_1 = \frac{b\,\mathrm{sen}\gamma(\mathrm{sen}C\cos\beta + \cos C\,\mathrm{sen}\beta)}{\mathrm{sen}\alpha}$$

ma $b\,\mathrm{sen}\,C = Aa'$, quindi

$$(1)\qquad B_1b_1 = \frac{Aa'.\mathrm{sen}\gamma\cos\beta + b\cos C.\mathrm{sen}\gamma.\mathrm{sen}\beta}{\mathrm{sen}\alpha}.$$

In modo analogo si ha

$$C_1c_1 = C_1B.\mathrm{sen}(B+\gamma), \quad C_1B = \frac{c\,\mathrm{sen}\beta}{\mathrm{sen}\alpha}$$

$$(2)\qquad C_1c_1 = \frac{Aa'.\mathrm{sen}\beta\cos\gamma + c\,\mathrm{sen}\beta.\mathrm{sen}\gamma\cos B}{\mathrm{sen}\alpha}$$

sommando la (1) e la (2) si ha

$$(3)\qquad B_1b_1 + C_1c_1 = \frac{Aa'.\mathrm{sen}\alpha + \mathrm{sen}\beta\,\mathrm{sen}\gamma.a}{\mathrm{sen}\alpha} = Aa' + \frac{a\,\mathrm{sen}\beta\,\mathrm{sen}\gamma}{\mathrm{sen}\alpha}.$$

Ma dal triangolo BCA_1 si ha

$$A_1a_1 = A_1B.\mathrm{sen}\beta, \quad A_1B = \frac{a\,\mathrm{sen}\gamma}{\mathrm{sen}\alpha}$$

quindi

$$(4)\qquad A_1a_1 = \frac{a\,\mathrm{sen}\gamma\,\mathrm{sen}\beta}{\mathrm{sen}\alpha}.$$

Sottraendo la (4) dalla (3) risulta

$$B_1b_1 + C_1c_1 - A_1a_1 = Aa'.$$

Corollario 1º – Colla medesima costruzione si può dal triangolo $A_1B_1C_1$ dedurne un nuovo e così via indefinitamente.

Corollario 2º – Se dai vertici del triangolo A,B,C si conducono le parallele ai lati opposti, si forma un triangolo che ha lo stesso centro di gravità del dato, poichè allora i tre triangoli costruiti sopra i lati sono eguali, si potranno anche dividere per metà e poi di nuovo suddividere indefinitamente i lati del triangolo dato, e si arriverà così come caso limite al baricentro comune.

Corollario 3º – Se sopra i lati di un triangolo si costruiscono triangoli isosceli collo stesso angolo al vertice, i tre vertici formano un triangolo isobaricentrico col dato.

Corollario 4.° — Se sopra i tre lati di un triangolo, esternamente ad esso, si costruiscono tre archi di cerchi capaci del medesimo angolo ($\leqq 90°$), i loro centri determinano un triangolo isobaricentrico col dato.

Alessandria 1° Luglio, 1887.

Prof. F. Panizza.

SOPRA UN TEOREMA DELLA DIVISIONE ALGEBRICA

Il prof. Sadun ha dato nel fascicolo sesto (anno II) di questo *Periodico* una dimostrazione rigorosa del teorema: Il resto della divisione del polinomio

$$P_n = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + dx^2 + ex + f$$

per $x - y$ è $ay^n + by^{n-1} + \ldots + dy^2 + ey + f$. Mi sembra che questo teorema possa anche dimostrarsi nel modo seguente che ha il vantaggio di dare al tempo stesso e la forma del resto e quella del quoziente nella divisione di P_n per $x - y$.

Riteniamo come dimostrato che la trasformazione $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$ (A e B polinomi interi in x ed R di grado inferiore a B) non possa farsi che in un sol modo, e ammettiamo che sia

$$(1)\quad P_n = \{ax^{n-1} + (ay+b)x^{n-2} + \ldots + (ay^{n-1} + by^{n-2} + \ldots + dy + e)\}(x-y)$$
$$+ ay^n + by^{n-1} + \ldots + dy^2 + ey + f.$$

Vogliamo dimostrare che questa legge di formazione del quoziente e del resto della divisione di P_n per $x - y$ si verifica anche per il polinomio

$$P_{n+1} = ax^{n+1} + bx^n + \ldots + dx^3 + ex^2 + fx + g$$

del grado $(n+1)$.esimo Moltiplicando i due membri della (1) per x e aggiungendo poi g, si ha

$$P_{n+1} = \{ax^n + (ay+b)\,x^{n-1} + \ldots + (ay^{n-1} + by^{n-2} + \ldots + dy + e)\,x\}(x-y)$$

$$+ (ay^n + by^{n-1} + \ldots + dy^2 + ey + f)\,x + g.$$

Aggiungendo e togliendo al secondo membro

$$ay^{n+1} + by^n + \ldots + dy^3 + ey^2 + fy,$$

avremo, fatte le riduzioni, $P_{n+1} =$

$$= \{ax^n + (ay+b)x^{n-1} + \ldots + (ay^{n-1} + by^{n-2} + \ldots + dy + e)x + ay^n + by^{n-1} + \ldots + dy^2 + ey + f\}(x-y)$$

$$+ ay^{n+1} + by^n + \ldots + dy^3 + ey^2 + fy + g \qquad \text{c.d.d.}$$

La legge di formazione, facile a verificarsi per $n = 1,2$ etc. vale quindi per qualunque valore di n.

Un'altra dimostrazione rigorosa per la forma del resto, si ha pure alla pag. 86 nella *Theorie der analytischen Functionen* del Prof. Biermann; però questa presuppone noto il quoziente $\dfrac{x^n - y^n}{x - y}$, nè può ricavarsene la forma del quoziente di P_n per $x - y$.

Giulio Giuliani.

ESERCIZI PER LA SCUOLA

Sul concetto di limite.

1. Cosa avviene delle frazioni $y = \frac{n}{n+10}$, $z = \frac{n+10}{n}$ quando si danno ad n valori sempre più grandi? Assegnare un valore di n pel quale ciascuna delle differenze $1-y$, $z-1$ sia minore di $\frac{1}{1000000}$. Si può dare ad n un valore tale che queste differenze sieno minori di qualunque numero arbitrariamente piccolo?

2. Cosa avviene delle frazioni $\frac{1000}{n}$, $\frac{n}{1000}$, quando si danno ad n valori sempre più grandi? Si può dare ad n un valore tale che la prima di esse sia minore di $\frac{1}{10^{50}}$?

3. Cosa avviene delle frazioni $\frac{n}{a}$, $\frac{a}{n}$, $\frac{n+a}{n}$ quando si danno ad n valori sempre più grandi, nell' ipotesi che a sia indipendente da n?

4. Cosa avviene delle frazioni $\frac{n^2}{n}$, $\frac{\sqrt{n}}{n}$, $\frac{n+\sqrt{n}}{n}$, quando si danno ad n valori sempre più grandi?

5. Cosa avviene delle frazioni $\frac{x}{a}$, $\frac{a}{x}$, $\frac{x+a}{x}$ quando si danno ad x valori sempre più piccoli, nell' ipotesi che a sia indipendente da x? Si può dare ad x un valore tale che la frazione $\frac{0,000000001}{x}$ risulti maggiore di 10^{30}?

6. Cosa avviene del quoziente $\frac{x+2x^3}{2x+x^3}$ quando si danno ad x valori sempre più piccoli?

7. Assegnare un valore di x pel quale la differenza $\frac{x+2x^3}{2x+x^3} - \frac{1}{2}$ sia minore di $\frac{1}{1000000}$.

8. Cosa avviene del quoziente $\frac{1-x^2}{1-x^3}$ quando si danno ad x valori sempre più vicini ad 1?

9. Provare che, se x è positivo e minore di 1, la differenza $\frac{1-x^2}{1-x^3} - \frac{2}{3}$ è positiva; ed assegnare un valore di x pel quale essa sia minore di $\frac{1}{10000}$. Si può dare ad x un valore tale che quella differenza risulti minore di $\frac{1}{10^{1000}}$?

10. Cosa avviene dei quozienti $\frac{(1-x)^2}{1-x^3}$, $\frac{1-x^2}{(1-x)^3}$ quando si danno ad x valori sempre più vicini ad 1?

11. Cosa avviene del prodotto $x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$ quando si danno ad x valori sempre più piccoli?

12. La stessa quistione pei due prodotti $x^3\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$, $x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$.

13. Cosa avviene della differenza $(x+2)^3-(x+1)^3$ quando si danno ad x valori sempre più grandi?

14. La stessa quistione per le due differenze $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$, $\sqrt{x+1000000}-\sqrt{x}$.

15. La stessa quistione per la differenza $\sqrt{x^2+x}-x$.

16. Cosa avviene della differenza $(a+h)^2-a^2$ quando si danno ad h valori sempre più piccoli nell'ipotesi che a sia indipendente da h? Si può dare ad h un valore tale che quella differenza sia minore di $\frac{1}{10^{10}}$?

17. La stessa quistione per le differenze $(a+h)^3-a^3$, $\sqrt{a+h}-\sqrt{a}$.

18. La stessa quistione per la differenza $\frac{1}{1-a+h} - \frac{1}{1-a-h}$.

Cosa avviene quando a è eguale ad 1.

19. Cosa avviene dei quozienti $\frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$, $\frac{(a+h)^3 - a^3}{h}$,

$\frac{(a+h)^m - a^m}{h}$, quando si danno ad h valori sempre più piccoli, nell' ipotesi che a sia indipendente da h ed m sia un intero positivo pure indipendente da h?

20. La stessa quistione pei quozienti $\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$, $\frac{\sqrt[3]{a+h}-\sqrt[3]{a}}{h}$.

21. Trovare una potenza di 1,0001 la quale sia maggiore di 600.

22. Provare che la potenza 8192^{ma} di 0,999 è minore di 0,0004.

23. Mediante l'identità

$$a^n - 1 = (a-1)\,(1 + a + a^2 + \ldots. + a^{n-1})$$

provare che, quando a è maggiore di 1 e indipendente da n, la potenza a^n si può rendere grande quanto si voglia, purchè si attribuisca ad n un valore abbastanza grande.

24. Assegnare un valore di n pel quale la potenza $(1{,}000001)^n$ sia maggiore di 1000000.

25. Dimostrare che, se b è minore di 1 e indipendente da n, la potenza n^{ma} di b si può rendere arbitrariamente piccola purchè si attribuisca ad n un valore abbastanza grande.

26. Cosa avviene della somma $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$ quando si danno ad n valori sempre più grandi ed x è indipendente da n? Distinguere i casi di $0 < x < 1$, $x = 1$, $x > 1$, $-1 < x < 0$, $x < -1$, ed $x = -1$.

27. Dimostrare che la somma $\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots + \frac{1}{2.3\ldots n}$ è sempre minore di 1.

28. Dimostrare che la potenza $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, in cui n significa un numero intero e positivo, è sempre minore di 3.

29. Dimostrare che la differenza $\sqrt[8192]{51678}-1$ è minore di $\frac{1}{500}$.

30. Trovare un valore di n pel quale la differenza $1-\sqrt[n]{0,0000157}$ sia minore di $\frac{1}{100000}$.

31. Provare che, se a è maggiore di 1, posto $\sqrt[n]{a}-1=d$, si ha $d<\frac{a}{n}$ (23).

32. Dimostrare che se a e b sono indipendenti da n, ma il primo numero sia maggiore e il secondo minore dell'unità, ciascuna delle due differenze $\sqrt[n]{a}-1$ e $1-\sqrt[n]{b}$ è positiva, e si può rendere arbitrariamente piccola purchè si attribuisca ad n un valore abbastanza grande.

33. Provare che, per $n>10$, si ha $\frac{10^n}{1.2.3\ldots n}<\frac{10^{10}}{1.2.3\ldots10}\left(\frac{10}{11}\right)^{n-10}$

34. Si può dare ad n un valore tale che il valore corrispondente della frazione $\frac{10^n}{1.2.3\ldots n}$ sia minore di $\frac{1}{1000000}$?

35. Provare che, se a è indipendente da n, la frazione $\frac{a^n}{1.2.3\ldots n}$ si può rendere piccola quanto si voglia, purchè si attribuisca ad n un valore abbastanza grande.

36. Mediante la disuguaglianza $(\sqrt{a})^n>1+n(\sqrt{a}-1)$, che vale per $a>1$, dimostrare che il quoziente $\frac{n}{a^n}$ è minore di $\frac{1}{n(\sqrt{a}-1)^2}$. Cosa avviene di quel quoziente quando si danno ad n valori sempre più grandi, nell'ipotesi che a sia indipendente da n?

37. Ricavare una formola per la somma $1+2+3+\ldots+n$ mediante le n eguaglianze che si deducono dalla

$(a+1)^2 - a^2 = 2a + 1$, ponendovi prima $a = 1$, poi $a = 2$, ecc. e in ultimo $a = n$.

Dimostrare poi che il quoziente $\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$ è maggiore di $\dfrac{1}{2}$ ed assegnare il valore della differenza per n=1000000. Si può dare ad n un valore tale che quella differenza sia minore di $\dfrac{1}{10^{1000000}}$?

38. Ricavare una formola per la somma $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ dalle n eguaglianze che sono comprese nella $(a+1)^3-a^3=3a^2+3a+1$, per $a=1, =2, =3, \ldots =n$.

39. Dimostrare che la differenza $\dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3} - \dfrac{1}{3}$ è positiva e minore di $\dfrac{1}{n}$.

40. Ricavare una formola per la somma $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$ mediante le n eguaglianze che si deducono dalla $(a+1)^4 - a^4 = 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$ attribuendo ad n successivamente i valori $1, 2, 3, \ldots n$.

41. Dimostrare che la differenza $\dfrac{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}{n^4} - \dfrac{1}{4}$ è positiva; ed assegnare un valore di n pel quale essa sia minore di $\dfrac{1}{1000000}$.

42. Dimostrare che, per b positivo ed h intero e positivo, si hanno le diseguaglianze

$$(b+1)^{h+1} - b^{h+1} < (h+1)(b+1)^h, \quad (b+1)^{h+1} - b^{h+1} > (h+1)\, b^h$$

43. Mediante le precedenti diseguaglianze dimostrare che la differenza $\dfrac{1^h+2^h+3^h+\ldots+n^h}{n^{h+1}} - \dfrac{1}{h+1}$ è positiva, e che essa è minore di

$$\frac{1}{h+1}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{h+1} - 1 - \frac{1}{n^{h+1}}\right\}$$

44. Dimostrare: 1) che la differenza $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{h+1}-1-\frac{1}{n^{h+1}}$ è minore di $\frac{2^{h+1}-2}{n}$; 2) che la differenza $\frac{1^h+2^h+3^h+\ldots+n^h}{n^{h+1}}-\frac{1}{h+1}$ è minore di $\frac{2^h-1}{n}$.

45. Assegnare un valore di n pel quale la differenza $\frac{1^7+2^7+3^7+\ldots+n^7}{n^8}-\frac{1}{8}$ sia minore di $\frac{1}{1000000000}$.

46. Cosa avviene di ciascun termine del quoziente $\frac{1^{13}+2^{13}+3^{13}+\ldots+n^{13}}{n^{14}}$, e cosa avviene del quoziente stesso, quando si danno ad n valori sempre più grandi?

47. Cosa avviene di ciascun termine della somma

$$\frac{1^9}{n^{10}}+\frac{2^9}{n^{10}}+\frac{3^9}{n^{10}}+\ldots+\frac{n^9}{n^{10}},$$

e cosa avviene della somma stessa, quando si attribuiscano ad n valori sempre più grandi?

48. Cosa avviene di ciascun termine della somma

$$\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^3}+\frac{3}{n^3}+\ldots+\frac{n}{n^3},$$

e cosa avviene della somma stessa, quando si danno ad n valori sempre più grandi?

49. Cosa avviene di ciascun termine della somma

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}+\frac{2}{n\sqrt{n}}+\frac{3}{n\sqrt{n}}+\ldots\ldots+\frac{n}{n\sqrt{n}}$$

e cosa avviene della somma stessa, quando si attribuiscono ad n valori sempre più grandi?

50. I numeri $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ dipendono da n, e in modo che, per n abbastanza grande, si possono rendere piccoli quanto si voglia. Cosa si può dire della somma $a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n$?

51. Sieno x ed y due numeri i i quali dipendano dal numero n ed A e B due numeri indipendenti da n, e si supponga che il valore assoluto di ciascuna delle differenze $x - A$, $y - B$ si possa rendere piccolo quanto si voglia, purchè si attribuisca ad n un valore abbastanza grande. Dimostrare che la stessa proprietà spetta alle differenze $(x + y) - (A + B)$, $(x - y) - (A - B)$, $xy - AB$.

52. Nella stessa ipotesi, e supponendo inoltre che B sia diverso da zero, dimostrare che il valore assoluto della differenza $\frac{x}{y} - \frac{A}{B}$ si può rendere piccolo quanto si voglia purchè si attribuisca ad n un valore abbastanza grande.

53. Mediante le diseguaglianze $\alpha \cos\alpha < \operatorname{sen}\alpha < \alpha$, provare che la differenza $1 - \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$ è positiva e che essa si può rendere piccola quanto si voglia, purchè si attribuisca ad α un valore abbastanza piccolo. Assegnare un valore di α pel quale questa differenza sia minore di $\frac{1}{1000000}$.

54. Dimostrare che la differenza $\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\alpha} - 1$ ha la stessa proprietà.

55. Cosa avviene del quoziente $\frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}$ quando si danno ad x valori sempre più piccoli, nell'ipotesi che a sia indipendente da x?

56. Cosa avviene del prodotto $n \operatorname{sen}\left(\frac{a}{n}\right)$ quando si danno ad n valori sempre più grandi, nell'ipotesi che a sia indipendente da n?

57. Cosa avviene delle differenze

$$\operatorname{sen}(a + h) - \operatorname{sen}(a - h), \quad \cos(a - h) - \cos(a + h),$$

quando si danno ad h valori sempre più piccoli, nell'ipotesi che a sia indipendente da h?

58. La stessa quistione per la differenza $\tang(a-h)-\tang(a+h)$. Esaminare il caso in cui a è eguale ad un multiplo dispari di $\frac{\pi}{2}$.

59. Cosa avviene dei quozienti

$$\frac{\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen}a}{h}, \quad \frac{\cos(a+h)-\cos a}{h}$$

quando si attribuiscono ad h valori sempre più piccoli ed a è indipendente da h?

60. La stessa quistione pel quoziente $\frac{\tang(a+h)-\tang a}{h}$ nell'ipotesi che a non sia un multiplo dispari di $\frac{\pi}{2}$.

61. Posto $z=\operatorname{sen} y$, assegnare due valori di y, entrambi maggiori di 1000000, e tali che per uno di essi sia z positivo, e, per l'altro, sia z negativo.

62. Cosa avviene di $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ quando si danno ad x valori sempre più piccoli? E cosa avviene, nella stessa ipotesi, del prodotto $x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$?

63. Ricavare una formola per la somma

$$S=\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}(2\beta)+\operatorname{sen}(3\beta)+\ldots+\operatorname{sen}(n\beta)$$

moltiplicando i due membri dell'eguaglianza per $2\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)$, e poi trasformando i prodotti di seni in differenze di coseni.

64. In modo analogo ricavare una formola per la somma

$$\cos\beta+\cos(2\beta)+\cos(3\beta)+\ldots+\cos(n\beta).$$

65. Cosa avviene del quoziente

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{n}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{2a}{n}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{3a}{n}\right)+\ldots+\operatorname{sen}\left(n\frac{a}{n}\right)}{n}$$

quando si danno ad n valori sempre più grandi nell'ipotesi che a sia indipendente da n?

6. La stessa quistione pel quoziente

$$\frac{\cos\left(\frac{a}{n}\right)+\cos\left(\frac{2a}{n}\right)+\cos\left(\frac{3a}{n}\right)+\ldots+\cos\left(\frac{na}{n}\right)}{n}$$

7. Mediante le n diseguaglianze che si deducono dalla $\operatorname{sen}\alpha<\alpha$, quando in luogo di α si pongano successivamente i numeri $\frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \frac{3a}{n} \ldots . \frac{na}{n}$, dimostrare che $\cos a$ non può essere minore di $1-\frac{a^2}{2}$.

8. Per mezzo del precedente teorema dimostrare, in modo analogo, che $\operatorname{sen} a$ non può essere minore di $a-\frac{a^3}{6}$.

9. Appoggiandosi all'ultimo teorema dimostrare, in modo analogo, che $\cos a$ non può essere maggiore di $1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{24}$.

0. Dimostrare in modo analogo: 1) che $\operatorname{sen} a$ non può essere maggiore di $a-\frac{a^3}{6}+\frac{a^5}{120}$; 2) che $\cos a$ non può essere minore di $1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{24}-\frac{a^6}{720}$.

1. A quali risultati si perviene quando si prosegua nella via indicata? Dimostrare che ciascuna delle differenze

$$\operatorname{sen} a-\left(a-\frac{a^3}{1.2.3}+\frac{a^5}{1.2.3.4.5}-\ldots .-\frac{a^{4n-1}}{1.2.3\ldots(4n-1)}\right)$$

$$\cos a-\left(1-\frac{a^2}{1.2}+\frac{a^4}{1.2.3.4}-\ldots ..-\frac{a^{4n-2}}{1.2.3\ldots(4n-2)}\right)$$

è positiva, e si può rendere piccola quanto si voglia, purchè si attribuisca ad n un valore abbastanza grande.

2. Dato un triangolo, si costruisca un secondo triangolo coi lati eguali alle mediane del primo, poi un terzo triangolo coi lati eguali alle mediane del secondo, e così si prosegua. Assegnare il rapporto della somma delle aree

primi n triangoli così costruiti all'area del primo di ... A qual numero si avvicina sempre più questo rap... quando si danno ad n valori sempre più grandi?

... cono retto è inscritta una sfera; una seconda ... tangente alla prima ed alla superficie conica; una ... sfera è tangente alla seconda ed alla superficie ...; ecc. ecc. Trovare il rapporto della somma dei ... delle prime n sfere così costruite al volume della ... di esse. A qual numero si avvicina sempre più ... rapporto quando si attribuiscono ad n valori sem... più grandi?

...trare che, se A è indipendente da n, e se hanno ... le diseguaglianze

$$2 - \frac{1}{n} < A < 2 + \frac{1}{n},$$

...que sia l'intero positivo n, dev'essere $A = 2$.

... U e V due numeri dipendenti da n ed A un nu... indipendente da n. Se le diseguaglianze $U < A < V$ ...mo qualunque sia n, e se esiste un numero L ... che ciascuna delle due differenze $L - U$, $V - L$ si ... rendere piccola quanto si voglia, purchè si attri... ad n un valore abbastanza grande, dev'essere $A = L$.

... $ABB'A'$ un trapezio con gli angoli retti in A e B, $BB' > AA'$, ... H_1, H_2, ... H_{n-1} i punti del lato AB che divi... questo lato in n parti eguali, e M_1, M_2,....M_{n-1} ... punti in cui le perpendicolari ad AB condotte per H_1, H_2,.... H_{n-1} incontrano il lato $A'B'$. Si calcoli la ... delle aree dei rettangoli *inscritti* che hanno per ... segmenti AH_1, H_1H_2, ... $H_{n-1}B$ e per altezze le AA', H_1M_1, ... $H_{n-1}M_{n-1}$; e la somma delle aree dei rettangoli *circoscritti* che hanno quelle stesse basi, e per altezze le H_1M_1, H_2M_2,....BB'. Si confrontino poi le due somme coll' area del trapezio, e da tale confronto si deduca il valore di quest'area.

7. La stessa quistione nell'ipotesi che i segmenti AH_1, H_1H_2, H_2H_3 .... $H_{n-1}B$ sieno proporzionali ai numeri 1, 2, 3, ... n.

8. La stessa quistione nell' ipotesi che, posto $AB = c$ e $q = \sqrt[n]{c+1}$, i punti H_1, H_2, ... H_{n-1} sieno determinati dalle formole

$$AH_1 = q - 1,\ H_1H_2 = q^2 - q,\ H_2H_3 = q^3 - q^2, \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots H_{n-2}H_{n-1} = q^{n-1} - q^{n-2},\ H_{n-1}B = q^n - q^{n-1}$$

9. Dimostrare che, comunque sieno scelti i punti H_1, H_2...H_{n-1}, purchè ciascuno dei segmenti AH_1, H_1H_2, ... $H_{n-1}B$ si possa rendere arbitrariamente piccolo quando si prende n abbastanza grande, la differenza fra l'area del trapezio e la somma delle aree dei rettangoli inscritti si può rendere piccola quanto si voglia.

80. Sia A un punto della base minore di un dato tronco di piramide triangolare e B la sua projezione sul piano della base maggiore, e sieno H_1, H_2, ... H_{n-1} i punti che dividono la AB in n parti eguali. Da questi punti si conducano i piani paralleli alle basi, e in ciascuno degli n tronchi che ne risultano si costruisca un prisma, una base del quale sia la base minore del tronco, e uno spigolo laterale del quale sia parte d'uno degli spigoli laterali del tronco dato, di guisa che l' altra base del prisma sia contenuta nella base maggiore del tronco corrispondente; si costruiscano poi altrettanti prismi di altezze eguali a quelle dei tronchi con gli spigoli laterali paralleli a quelli dei precedenti, e una base di ciascuno di questi altri prismi sia la base maggiore del corrispondente tronco. Valutare la somma dei volumi dei prismi *inscritti* e la somma dei volumi dei prismi *circoscritti*; e dal confronto di queste somme col volume del tronco di piramide dedurre la formola che dà la misura di questo volume.

81. La stessa quistione nell' ipotesi che i segmenti AH_1, H_1H_2, ...$H_{n-1}B$ sieno proporzionali ai numeri 1, 2, ... n.

... quistione nell' ipotesi che, posto AB $= a$ e ..., i punti H_1, H_2, ... H_{n-1} sieno determinati ... formole

$$H_1H_2 = q^2 - q, \quad H_2H_3 = q^3 - q^2, \ldots \ldots H_{n-1}B = q^n - q^{n-1}$$

... un segmento sferico a due basi una delle quali ... circolo massimo. Dai punti che dividono l'altezza ... parti eguali sono condotti piani paralleli alle basi; ... ciascuno dei segmenti sferici così ottenuti è *inscritto* ... un cilindro retto una base del quale è la base minore ... del segmento, ed a ciascuno degli stessi segmenti è ... circoscritto un cilindro retto una base del quale è la ... base maggiore di quel segmento. Valutare la somma dei ... volumi dei cilindri inscritti e la somma dei volumi dei ... cilindri circoscritti; e dal confronto di queste due somme ... col volume del segmento sferico ricavare la formola che ... ne dà la misura.

... Da un punto d'una generatrice d'un cilindro retto, ... il punto in cui essa incontra la circonferenza della ... base della quale O sia il centro e COD il diametro perpendicolare ad OB. Valutare il volume del corpo compreso ... fra il piano ACD, il semicircolo CBD e la superficie cilindrica (Scomporre quel corpo mediante piani paralleli ... al piano OAB condotti pei punti che dividono il diametro COD in $2n$ parti eguali).

... la misura di quella porzione della superficie ... cilindrica che è compresa fra il piano CAD e la semicirconferenza CBD.

... OA, OB due raggi d'un circolo fra loro perpendicolari, D sia un punto dell'arco BA e C il piede della perpendicolare da esso condotta al raggio OA. Diviso il ... segmento BDCO in n parti mediante rette fra loro equidistanti e perpendicolari ad OA, si costruiscano gli n ... rettangoli *inscritti* e gli n rettangoli *circoscritti*. Posto ... OC $= c$ si esprima in funzione di a, c, n la somma delle aree dei rettangoli inscritti e la somma delle aree dei rettangoli circoscritti, e si confrontino le due somme coll'area del segmento. Cosa avviene del quoziente

$$\frac{\sqrt{a^2-\frac{c^2}{n^2}}+\sqrt{a^2-\frac{2^2c^2}{n^2}}+\sqrt{a^2-\frac{3^2c^2}{n^2}}+\ldots+\sqrt{a^2-\frac{n^2c^2}{n^2}}}{n}$$

quando si attribuiscono ad n valori sempre più grandi?

87. Un circolo ruota intorno ad una retta situata nel suo piano e che non l'attraversa. Valutare il volume del corpo che da tale rotazione viene generato.

88. Valutare il volume del corpo generato dalla rotazione d'un segmento di circolo intorno alla sua corda.

89. In un piano è data una retta Oa e in essa un punto O. Dai punti della Oa si conducano le perpendicolari a questa retta da una stessa banda di essa, e si prendano su queste perpendicolari segmenti proporzionali ai quadrati delle loro distanze dal punto O: sia OB un pezzo della curva luogo dei punti estremi di quei segmenti, e il punto B corrisponda alla perpendicolare condotta dal punto A della Oa, e sia C il punto in cui la parallela ad Oa condotta per B incontra la perpendicolare alla Oa passante per O. Valutare: 1) l'area OAB; 2) il volume del corpo generato dalla rotazione del segmento OBC intorno alla OC.

90. Valutare il volume del corpo generato dalla rotazione del segmento OCB intorno alla CB.

91. È dato un circolo del quale O è il centro, AA', BB' sono due diametri fra loro perpendicolari. Sia MM' una qualunque delle corde perpendicolari al diametro A'A la quale incontri quel diametro nel punto P, e si prendano in essa a partire da P, e dalle due bande del diametro, due segmenti eguali PR, PR' in modo che il rapporto di ciascuno di essi a PM sia eguale al rapporto

[illegible] minore di OA, ad OA. Valutare [illegible] che è il luogo dei punti R, R′

[illegible] della curva considerata al nu- [illegible] da una stessa banda del dia- [illegible] delle perpendicolari da essi [illegible]: 1) il volume del corpo ge- [illegible] del segmento $LQL'Q'$ intorno al [illegible] del corpo limitato dalla su- [illegible] dalla rotazione dell'intera curva [illegible]

[illegible] b e altezza a viene diviso, me- [illegible] lati, in mn rettangoli eguali, [illegible] base l'm^a parte di b e, per [illegible] n. Si faccia la somma dei pro- [illegible] di questi rettangoli per la di- [illegible] interno qualunque dalla base, [illegible] somma all'area dell'intero ret- [illegible] questo rapporto quando i nu- [illegible] sempre più grandi?

[illegible] triangolo in n parti eguali, e dai [illegible] tante parallele alla base, si [illegible] trapezii, altrettanti rettangoli, [illegible] prodotti dell'area di ciascun [illegible] d'un suo punto interno qua- [illegible] avviene del rapporto di questa [illegible] quando si attribuiscono ad n [illegible]

[illegible] trapezio.

[illegible] piramide triangolare in n parti [illegible] condotti altrettanti piani [illegible] risultanti tronchi inscritti al- [illegible] la somma dei prodotti del vo- [illegible] la distanza d'un suo punto [illegible] base. Cosa avviene del rapporto di questa somma al volume della piramide quando si attribuiscono ad n valori sempre più grandi?

97. Dai punti che dividono in n parti eguali un segmento sferico ad una base sono condotti piani paralleli alla base, e, negli $n-1$ segmenti a due basi così ottenuti, sono inscritti altrettanti cilindri retti. Si valuti la somma dei prodotti del volume di ciascuno di questi cilindri per la distanza di un suo punto interno qualunque dal piano, parallelo alla base del segmento, e passante pel centro della sfera. Cosa avviene del rapporto di questa somma al volume del segmento, quando si attribuiscono ad n valori sempre più grandi?

98. Sieno N ed N′ due punti d'una data circonferenza di centro O situati nel quadrante determinato dai raggi OA e OB, e sieno P e P′ i piedi delle perpendicolari condotte da quei due punti su OA, R il punto in cui la NN′ prolungata incontra la OA, e T il punto in cui la stessa OA è incontrata dalla tangente alla circonferenza nel punto N. Dimostrare che l'angolo TNR si può rendere piccolo quanto si voglia, purchè sia abbastanza piccolo il segmento PP′.

99. Sia N un punto della curva OB, considerata al n.° 89, N′ sia un altro suo punto, P e P′ sieno i piedi delle perpendicolari condotte da quei due punti sulla Oa, ed R il punto in cui la NN′ prolungata incontra la Oa. Dimostrare che esiste una retta NT passante per N, tale che l'angolo RNT si possa rendere piccolo quanto si voglia quando sia abbastanza piccolo il segmento PP′. Trovare la distanza del punto O dal punto T in cui quella retta incontra la Oa.

100. Dimostrare che la curva considerata al n.° 91 ha la stessa proprietà, per ogni suo punto N, ed assegnare la distanza del punto O dal punto T, in cui la retta NT incontra il diametro AA′.

D. Besso.

QUISTIONI PROPOSTE

... *che, se un emisfero è diviso*
... *un piano parallelo alla sua*
... *distanza del piano segante dalla*
... *è eguale a* 2sen10°. (D. Besso).

... ulio Laudati Losapio, studente

... due parti equivalenti da un
... si vuol dimostrare che il rap-
... essendo d la distanza del piano
... raggio della sfera. Chiamando
... minore del segmento di sfera,
... di raggio R, e con V_s il vo-
... mo dalla geometria che

$$\ldots \frac{\pi r^2 d + \pi R^2 d}{2}.$$

... alla 4ª parte del volume della
... divide l'emisfero in due parti
... stabilire l'equazione:

$$\ldots \frac{\pi R^2 d}{2} = \frac{\pi R^3}{3};$$

... tori e dividendo ambi i mem-

$$\ldots \frac{d}{R} + 3\frac{d}{R} = 2$$

... quindi $\frac{r}{R} = \cos\alpha$,

$$\ldots \operatorname{sen}\alpha + 1 = 0 \qquad (1).$$

... dal Sig. *Leogrande Vincenzo*, studente
... *Beyens*, *R. Badia* e *F. Panizza*.

Ponendo in quest' ultima equazione sen$\alpha = 2x$, e quindi dividendo ambo i membri per 8, otteniamo:

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0. \qquad (2)$$

Ora quest'equazione è della forma $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{b}{4} = 0$, nella quale il nostro b è $\frac{1}{2}$; e noi sappiamo dalla trigonometria che se b è in valore assoluto non maggiore di 1, e quindi si ponga $b = \text{sen}\beta$, le radici della (2) sono date da $x' = \text{sen}\frac{\beta}{3}$, $x'' = \text{sen}\left(60° - \frac{\beta}{3}\right)$, $x''' = -\,\text{sen}\left(60° + \frac{\beta}{3}\right)$.

Nel caso nostro essendo $b = \frac{1}{2}$, e quindi sen $\beta = \frac{1}{2}$, e sapendo che l'arco del 1° quadrante il cui seno è $\frac{1}{2}$ è uguale a 30°, si deduce che il nostro β è uguale a 30°, e quindi le radici della (1) sono:

$$x' = \text{sen}10°,\ \ x'' = \text{sen}50°,\ \ x''' = -\,\text{sen}70°.$$

Donde ancora, per aver posto sen$\alpha = 2x$, sarà: sen$\alpha = 2\text{sen}10°$.

Gli altri valori sen$\alpha = 2\text{sen}50°$, sen$\alpha = -\,2\text{sen}70°$ non rispondono alla nostra questione, giacchè 2sen50° e $-$2sen70° sono in valore assoluto maggiori di 1. – Resta quindi dimostrato che senα ossia $\frac{d}{R} = 2\text{sen}10°$; il che è quanto si voleva.

Il Sig. Cap. *J. Beyens* osserva che il teorema può essere generalizzato: Se il rapporto del segmento ad una base all'emisfero è $\frac{m}{n}$, si trova che il rapporto dell'altezza di quello a due basi al raggio è eguale a $2\text{sen}\frac{1}{3}\left(\text{arsen}\frac{n-m}{n}\right)$.

(4) (pag. 28) *Sia dato un triangolo sferico e si costruisca un altro triangolo sferico coi vertici nei punti medi dei lati del primo. Se la somma degli angoli del primo triangolo è uguale a 360°, ciascun lato del secondo è di 90°. E se il secondo triangolo ha un lato di 90°, la somma dei tre angoli del primo è eguale a 360°.* (D. Besso).

...one del prof. *R. Badia* (*).

...on A, B, C gli angoli del primo triangolo, con ... essi opposti, con a' quello fra i lati del se... che ha per estremi i punti di mezzo dei lati ... A + B + C = 2P, si ha:

$$\cos a' = \cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} + \text{sen}\frac{b}{2}\text{sen}\frac{c}{2}\cos A$$

$$\ldots\frac{\ldots(P-A)\cos(P-C)}{\text{sen}A\,\text{sen}C} \qquad \text{sen}\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-B)}{\text{sen}A\,\text{sen}C}}$$

$$\ldots\frac{\ldots(P-A)\cos(P-B)}{\text{sen}A\,\text{sen}B} \qquad \text{sen}\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos P\cos(P-C)}{\text{sen}A\,\text{sen}B}}$$

...che cos(P − A) è positivo e che cosP è nega... dalle (β)

$$\ldots\frac{\cos(P-A)}{\text{sen}A}\cos\frac{a}{2}, \qquad \text{sen}\frac{b}{2}\,\text{sen}\frac{c}{2} = -\frac{\cos P}{\text{sen}A}\cos\frac{a}{2},$$

...nella (α)

$$\ldots\frac{\cos\frac{a}{2}}{\text{sen}A}\left\{\cos(P-A) - \cos P\right\} = \cos\frac{a}{2}\,\text{sen}P.$$

... la somma degli angoli del primo triangolo è ... sarà $\cos a' = 0$ e quindi $a' = 90°$. E quando sia ... essere $\cos\frac{a}{2}\,\text{sen}P = 0$ e in conseguenza A+B+C=360.°

...due teoremi risulta, come osserva il Sig. Cap. ... seguente corollario:

...mezzo dei lati d'un triangolo sferico sono i ... triangolo sferico, il quale, o non ha alcun ... oppure ha tutti e tre i lati di 90°.

... *Dato un triangolo si conducano le biset... angoli* BAC, CBA, ACB, *e sui loro prolun... prendano i punti* A_1, B_1, C_1 *ad un'eguale di... lati* BC, CA, AB *e in modo che i segmenti ... sieno attraversati dai corrispondenti lati*

(*) ...dimostrazione venne inviata dal Sig. Cap. *J. Beyens.*

BC, CA, AB. *Esprimere la distanza* x *in funzione dei lati del triangolo* ABC *e dell'area del triangolo* $A_1B_1C_1$. (F. Verde).

Soluzione del Prof. *R. Badia.*

Si indichino, con O il punto comune alle tre bisettrici, con A_0, B_0, C_0 i punti nei quali esse incontrano ordinatamente i lati BC, CA, AB, con a, b, c i numeri che misurano questi lati, con α l'angolo sotto il quale la bisettrice AA_1 taglia il lato BC e pongasi

$$a + b + c = 2p$$

$$\text{area ABC} = S\,; \quad \text{area } A_0B_0C_0 = S_0\,; \quad \text{area} A_1B_1C_1 = S_1\,.$$

Conducansi, per O, una retta parallela a BC e da A_1 una perpendicolare a questa retta. Per le relazioni fondamentali esistenti tra gli elementi di un triangolo rettangolo e per una relazione notissima che esiste tra il raggio del cerchio inscritto in un triangolo, l'area ed il perimetro di questo, si avrà evidentemente

$$x = OA_1 \operatorname{sen}\alpha - \frac{S}{p}\,; \quad \frac{S}{p} = OA_0 \operatorname{sen}\alpha$$

quindi

$$x = \frac{S}{p} \cdot \frac{OA_1}{OA_0} - \frac{S}{p}.$$

È chiaro che, ripetendo lo stesso ragionamento rispetto alle altre due bisettrici, si otterrebbero espressioni analoghe della x, le quali differirebbero da questa soltanto per lo scambio dei segmenti OA_1, OA_0 con i segmenti OB_1, OB_0 ed OC_1, OC_0. Ma x non varia, qualunque sia la bisettrice che si considera, S e p sono costanti, dunque deve essere

$$\frac{OA_1}{OA_0} = \frac{OB_1}{OB_0} = \frac{OC_1}{OC_0}$$

ossia i triangoli $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$ sono omotetici e perciò simili. Sostituendo pertanto al rapporto dell'omotetia quello delle radici quadrate delle loro aree si avrà

$$x = \frac{S}{p}\sqrt{\frac{S_1}{S_0}} - \frac{S}{p} \qquad (1)$$

L'espressione di S_0 per mezzo dei lati del triangolo ABC si può ottenere trovando prima quelle dei segmenti OA_0, OB_0,

OC_0 e sommando quindi le aree dei tre triangoli nei quali è diviso da questi segmenti il triangolo $A_0B_0C_0$.

Dalle relazioni

$$\frac{A_0C}{BA_0} = \frac{b}{c} \qquad \frac{A_0C}{b} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}A}{\operatorname{sen}\alpha}$$

eliminando i segmenti nei quali la bisettrice divide il lato BC, si ottiene

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b+c}{a}\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{bc}}$$

e quindi, per mezzo della seconda delle relazioni richiamate in principio,

$$OA_0 = \frac{a}{b+c}\sqrt{\frac{bc\,(p-a)}{p}}.$$

Deducendo da questa le espressioni analoghe di OB_0 e di OC_0, ed osservando che

$$\operatorname{sen}(B_0OC_0) = \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(B+C) = \cos\tfrac{1}{2}A$$
$$\operatorname{sen}(A_0OC_0) = \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A+C) = \cos\tfrac{1}{2}B$$
$$\operatorname{sen}(A_0OB_0) = \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A+B) = \cos\tfrac{1}{2}C$$

si trova

$$S_0 = S\frac{2abc}{(a+b)\,(b+c)\,(c+a)}.$$

Sostituendo nella (1) si avrà x in funzione di a, b, c, S, S_1, e quindi anche in funzione di a, b, c, S_1.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

D. Amanzio. — *Trattato di Aritmetica teorica.* — Stabilimento tipografico di Aniello Eugenio, Napoli, 1887. — p. 500 — prezzo: L. 3,50.

A ragione l'A. ha intitolato questo suo libro trattato di aritmetica teorica, in quanto esso è condotto con scrupoloso rigore. Il medesimo non è poi da considerare come un rimpasto degli ordinari manuali d'aritmetica, ma è un libro la cui individualità apparisce presto spiccata al lettore. È con un senso di compiacenza sincera che ne teniamo parola poichè, come altra volta avemmo occasione di dichiarare, la pubblicazione del Sig. Amanzio è una prova di più che ogni dì si fa maggiormente viva quella corrente che induce persone di coltura elevata ad interessarsi del progresso delle nostre scuole, preparando per esse dei libri che onorano non solo chi li ha compilati ma ben anche il nostro paese. Ed invero chi esamini con occhio imparziale il largo tributo portato alla nostra letteratura scolastica in breve volgere d'anni, in materia di scienze (e con ciò non si esclude che altrettanto avvenga nell'altre materie), è condotto senz'altro a riconoscere che non è più il caso di essere tributari pei bisogni delle nostre scuole alle colte nazioni d'oltralpe, ma si trova in casa nostra ciò che ci abbisogna ed anche più di questo.

Per tornare al libro il cui titolo è scritto avanti, diremo che esso è singolarmente pregevole sotto due rispetti, il primo de'quali è l'estesa collezione di esercizi che terminano ciascun paragrafo, la cui scelta non saprebbesi abbastanza elogiare, sia per l'originalità degli esercizi stessi, sia perchè l'A. ha ivi condensato molte importanti proprietà dei numeri. Si potrebbe soltanto osservare che taluno dei medesimi riuscirà difficilmente accessibile ad un lettore inesperto, ma in fondo l'A. non ne è responsabile una volta che ha giustamente chiamato *teorico* il suo libro ed appartiene al professore che questo adottasse per la propria scuola il rimuovere quelle difficoltà da reputarsi insormontabili per l'alunno.

L'altro riguardo che rende il libro del Prof. Amanzio degno dell'attenzione degli insegnanti è ancor più importante e consiste a nostro modo di vedere nella trattazione ch'egli ha fatto dei *numeri irrazionali* seguendo i concetti svolti dal chiarissimo prof. Dini nella sua importantissima opera: *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, concetti sviluppati altresì in altre opere ragguardevoli straniere, come ad es. i: *Grundlagen der Analysis* del Signor Lipschitz, uno dei cultori delle moderne teoriche dell'analisi rigorosa nella dotta Germania.

Una tale trattazione, in parte rispondente ad un bisogno mente sentito, abbraccia il terzo libro, esteso per oltre un centinaio di pagine e ci sembra metta conto parlarne con qualche diffusione.

L'A. introduce nella medesima i *sistemi di due classi di grandezze* definendo come tali « due serie di grandezze una crescente, l'altra decrescente, tali che ogni grandezza della prima serie sia minore di qualunque grandezza della seconda, e che sia sempre possibile trovare una grandezza nell'una ed una grandezza nell'altra in modo che la differenza fra queste due grandezze sia minore di una quantità piccola quanto si vuole, ma non nulla » e subito dopo il concetto di *grandezza di separazione o confine* delle due classi chiamandola « una grandezza non minore di nessuna delle grandezze della prima serie, nè maggiore di nessuna delle grandezze della seconda serie, e che può essere avvicinata indefinitamente dalle grandezze di una almeno delle due serie ». Partendo da queste definizioni l'A. dimostra quindi che « un sistema di due classi di grandezze ammette sempre un confine ed un solo », poi che « ogni grandezza incommensurabile con l'unità si può sempre considerare come confine di due classi di grandezze commensurabili con l'unità ». Considera in seguito i corrispondenti *sistemi di due classi di numeri* e il *numero di separazione o confine* di due serie di numeri, il che lo conduce alla definizione del numero *irrazionale* ossia di quel « numero di separazione di due classi per le quali non esiste alcun numero intero o frazionario che ne segni il confine ». – Sviluppa in seguito, ampliando i concetti accennati dal prof. Dini nella citata opera, i criteri d'eguaglianza e disuguaglianza dei numeri irrazionali, considerandoli originati nell'accennato modo, e quindi le operazioni con numeri irrazionali; finalmente applica le cose precedenti alla dimostrazione di alcune proprietà elementari appartenenti alle frazioni decimali con un numero illimitato di cifre decimali.

Una cosa non abbiamo trovato nel libro di cui si tratta che ci parebbe meritevole di attuazione, ossia un'esplicita separazione della teoria del minimo comune multiplo da quella dei numeri primi, analoga a quella che si suol fare riguardo al massimo comun divisore, e la quale abbiamo cercato invano nelle opere scolastiche d'aritmetica che sono a nostra

:onoscenza. A questa separazione risponde la seguente dimostrazione del

Teorema. — Il minimo comune multiplo di due numeri a e b è uguale al prodotto di uno di essi pel quoziente lella divisione dell'altro pel loro massimo comun divisore m.

Dimostra. — Ponendo $a = ma_1$, $b = mb_1$ è chiaro intanto :he il prodotto ma_1b_1 è multiplo comune di a e b; per provare ora che esso è il minimo dei multipli comuni, si applichi ai numeri dati il processo necessario per trovare il oro m. c. d., ottenendo così la serie seguente dei

dividendi	divisori	quozienti	resti
a	b	q_1	r_1
b	r_1	q_2	r_2
. . .	. . .	. . .	. . .
r_{n-3}	r_{n-2}	q_{n-1}	r_{n-1} $(=m)$
r_{n-2}	m	q_n	0

e quindi le eguaglianze:

$$a=b.q_1+r_1,\ b=r_1.q_2+r_2, \ldots\ldots\ r_{n-3}=r_{n-2}.q_{n-1}+r_{n-1},\ r_{n-2}=mq_n$$

la cui, moltiplicando per un numero arbitrario n, si deducono e altre:

$$an = bq_1n + r_1n,\ bn = r_1q_2n + r_2n, \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots r_{n-3}\,n = r_{n-2}\,q_{n-1}\,n + r_{n-1}\,n,\ r_{n-2}\,n = mq_nn.$$

Pongasi ora la condizione che il multiplo na di a sia inche multiplo di b, le eguaglianze precedenti dimostrano he anche r_1n, r_2n, ... $r_{n-2}n$, $r_{n-1}n = mn$ sono multipli di b e poichè $b = mb_1$ segue che, se na è multiplo di b, anche mn è multiplo di mb_1 e quindi n multiplo di b_1, ssia n multiplo di $b : m$. Ma il più semplice multiplo di b_1 b_1 stessa, onde il minimo multiplo na di a divisibile per b, sarà ab_1 c.d.d.

Corollario. Ogni multiplo di due numeri a e b è anche nultiplo del loro m.c.m.

Termineremo questa rivista avvertendo il lettore che, nolto opportunamente, l'A. ha aggiunto alle solite materie lei trattati di aritmetica razionale anche un § in cui sviluppa i più elementari teoremi sulle congruenze, ricavandone n uno successivo i caratteri ordinari di divisibilità, ciò che li permette di aggiungere una serie d'importanti esercizi lcuni dei quali non avrebbero trovato altrimenti conveniente ede nel suo libro.

A. Lugli.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane pubblicato per cura del professore *G. Battaglini*. Volume XXV. Novembre e Dicembre 1887, Vol. XXVI. Gennaio e Febbraio. Napoli, 1888.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy*, Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe 3e série. Douzième année. N. 2, 3. Février, Mars. Paris, 1888.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par *H. Vuibert*. 12e Année. N. 10, 11, 12, 13. Paris, M. Nony et C.ie, 17 Rue des Écoles, 1888.

Le Scuole Secondarie eco dell'Associazione nazionale fra gl'insegnanti delle scuole secondarie. Anno V. N. 8, 9, 10, 11, 12, 13. Milano 1888.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome huitième: février, mars, avril 1888.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). — Serie 2.a Vol. 2. — Gennaio e Febbraio 1888.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XX. N. 1, 2, 3, 4, 5, 6. Firenze, 1888.

ARZELA' (C.) — Sulla teoria delle funzioni analitiche. Bologna 1888.

BACHELET (A.) — Nozioni di geometria elementare. — G. B. Paravia e Comp., 1888.

BARDELLI (G.) — Proprietà stereometriche di un sistema di forze (Rendiconti del R. Ist. Lomb. 1888).

FAZZARI (G.) — Alcuni teoremi sulle coniche. Napoli, 1884. — Momenti d'inerzia di un sistema di masse rispetto a rette nello spazio. Napoli, 1886. Alcuni teoremi di massimi e minimi relativi alle coniche (Giornale di Battaglini. 1887).

GIUDICE (F.) — Sopra la determinazione di funzioni d'una variabile definite per mezzo d'una equazione con due variabili. Un osservazione relativa alla costante che compare negli svilnppi in serie delle funzioni circolari (Rend. del Circolo matematico di Palermo, Tomo II, 1887). — Trigonometria rettilinea ad uso delle Scuole liceali. — Torino, Ermanno Loescher, 1887: L. 1,50.

PEANO (G.) — Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva. Torino, Bocca, 1888.

PINCHERLE (S.) — Sopra certi integrali definiti (Rend. R. Acc. dei Lincei, 1888) — Sur une généralisation des fonctions eulériennes (1888).

SADUN (E.) — Sulla risoluzione in numeri positivi, interi o nulli, delle equazioni:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n = r, \quad 1\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \ldots + n\lambda_n = n$$

(Annali di Matematica, 1887).

SANNIA (A.) e D'OVIDIO (E.) — Elementi di Geometria. 7a edizione riveduta e corretta, Napoli, Libreria di B. Pellerano, 1888.

SOARDI (O.) — Sopra un caso particolare di ammortamento. Roma 1888.

SQUARZINA (G.) — Dell'insegnamento dell'aritmetica del sistema metrico e della geometria nelle scuole elementari. Faenza, 1887.

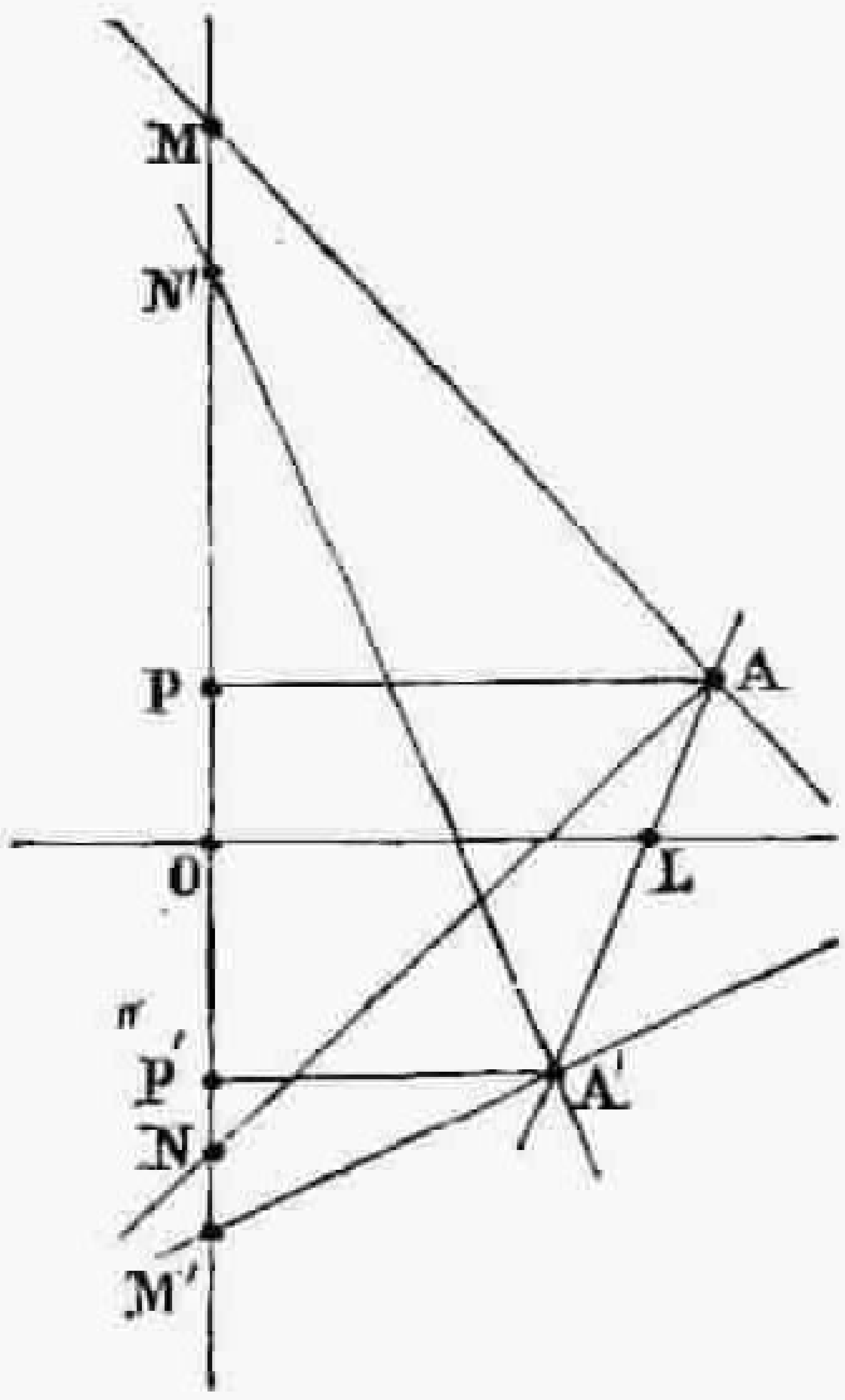
TEIXEIRA F. GOMES. — Curso de Analyse infinitesimal (Calculo differencial). Porto, Typographia occidental, 1887.

CONTRIBUZIONE
ALLA TEORIA DELLE CONICHE

Credo non riuscirà discaro ai colleghi, lettori del Periodico, il conoscere alcuni teoremi interessanti intorno alle coniche, che conducono alla costruzione geometrica più semplice ed elegante che per avventura possa desiderarsi dei centri e dei raggi di curvatura di queste celebri curve, così notevoli per sè e per le molteplici loro applicazioni. Ci serviamo, per la dimostrazione, dei principi, e delle cognizioni più ovvie di Geometria Proiettiva, che ormai si possono dire alla portata di tutti gli studiosi delle Matematiche.

Teorema. – I segmenti determinati sopra una corda di una conica da un asse, stanno fra loro in ragione reciproca dei segmenti determinati sull'altro asse dalle tangenti negli estremi della corda, ed in ragione diretta dei segmenti di questo stesso asse determinati dalle normali negli estremi medesimi.

Dimostrazione. – Siano OX, OY gli assi di una conica, A ed A′ due punti della medesima, AM ed A′M′, AN ed A′N′ le tangenti e le normali nei detti punti: sia infine tracciata anche la corda AA′, incontrata dall'asse OX in L, e le due rette AP, A′P′ parallele all' asse stesso. Nella involuzione determinata sull' asse OY dalle coppie di rette coniugate ortogonali, i punti M, N, ed M′ N′ sono conjugati ed O è il punto centrale, onde OM.ON = OM′.ON′,



ossia $\dfrac{OM}{OM'} = \dfrac{ON'}{ON}$. (1)

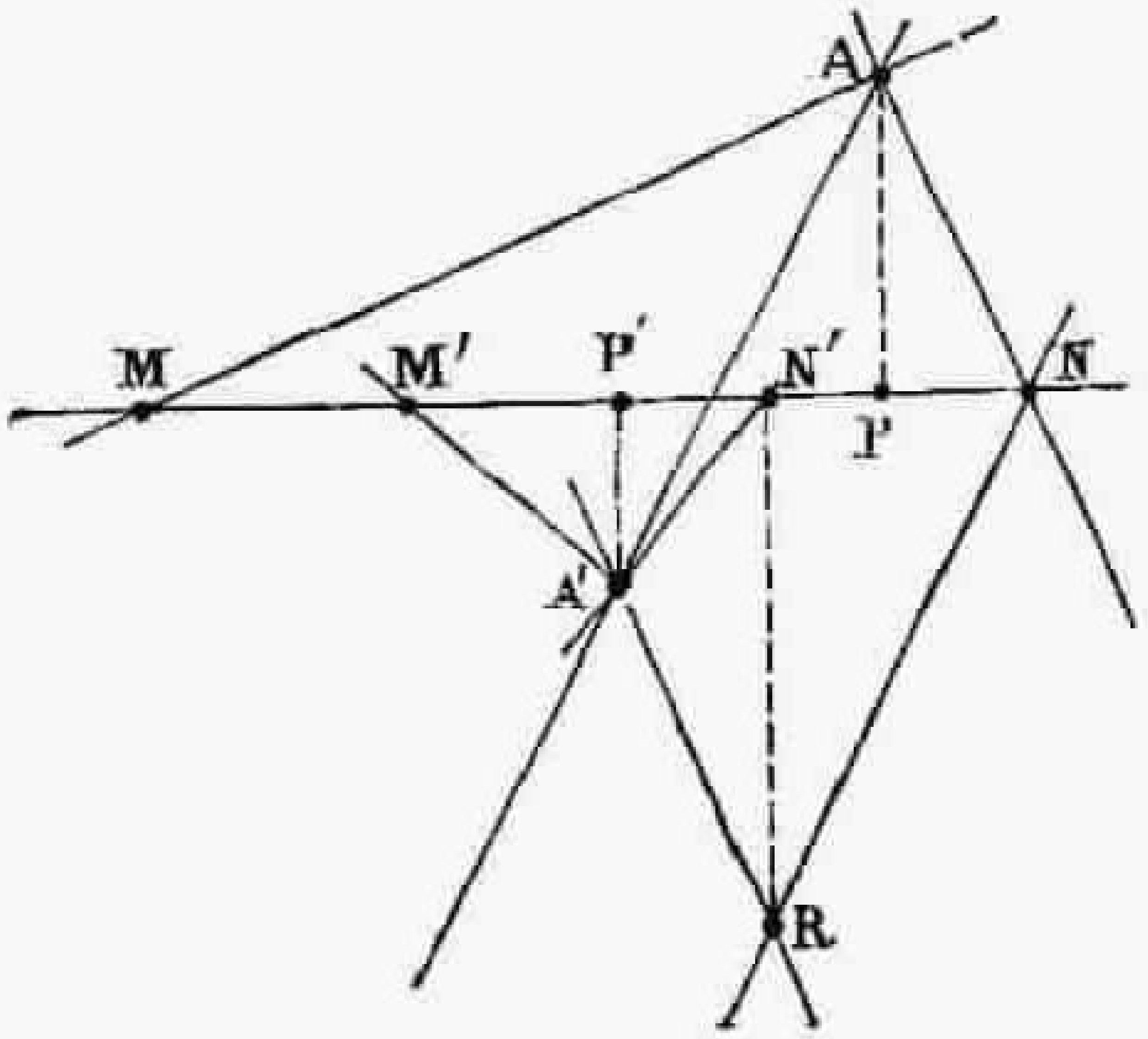
Nell' altra involuzione determinata sullo stesso asse OY dalle coppie di punti conjugati rispetto alla conica, i punti M e P, come pure i M' e P' sono coniugati, ed O è sempre il punto centrale, laonde $OM.OP = OM'.OP'$ od anche $\frac{OM}{OM'} = \frac{OP'}{OP}$ (2). Ma si ha pure evidentemente $\frac{OP'}{OP} = \frac{LA'}{LA}$, per cui infine sarà $\frac{LA'}{LA} = \frac{OM}{OM'} = \frac{ON'}{ON}$ come si era asserito.

Corollario. – Dal teorema ora dimostrato deriva che la conica che tocca le 5 rette OY, OX, AN, A'N', AA' è una parabola, perchè le punteggiate proiettive determinate su due di esse, cioè sulle OY ed AA', dalle altre tre, sono fra di loro simili, avendosi per il detto $\frac{ON}{LA} = \frac{ON'}{LA'} =$ Costante; si ha dunque il teorema: « *le normali in due punti di una conica, la corda che unisce questi punti, e gli assi determinano una parabola, che è toccata dalle* 5 *rette* ».

Corollario 2.° – Se il punto A' è infinitamente vicino ad A, la retta AA' è la tangente nel punto A, ed il punto d'incontro delle due normali infinitamente vicine è il punto di contatto della AN colla parabola inviluppata dalle 5 rette del corollario precedente; segue adunque la proposizione: « *la tangente e la normale in un punto di una conica ed i due assi, toccano una determinata parabola, il cui punto di contatto colla normale è il centro di curvatura della conica data nel punto che si considera* ».

Teorema. – Le normali in due punti di una parabola, la corda che unisce i due punti e l'asse, toccano una nuova parabola il cui asse è perpendicolare a quello della parabola data.

Dimostrazione. – Siano ancora A, A' due punti di una parabola, il cui asse è MN: e sia condotta la corda AA', nonchè le tangenti AM, A'M' e le normali AN, A'N' nei punti A ed A'. I punti M ed N, come pure M' ed N' sono equidistanti dal fuoco: sarà quindi $MM' = N'N$, vale a dire che « il segmento determinato sull'asse di una parabola dalle tangenti in due punti di essa, è uguale a quello compreso fra le normali nei punti stessi ». Condotte le AP, A'P' perpendicolari all'asse, i punti M e P come pure i due M' e P' sono quindi equidistanti dal vertice della parabola, onde MM'=P'P, e quindi anche N'N=P'P



e PN=P'N', ossia « nella parabola la sotto-normale è costante, ed uguale al doppio della distanza fra il fuoco ed il vertice, od anche uguale al raggio di curvatura della parabola nel vertice » e ciò perchè per il vertice la sotto-normale è uguale alla distanza di questo punto, da quello in cui l'asse è incontrato dalla normale nel punto infinitamente vicino al vertice stesso. — Ora le 4 tangenti AA', A'N', N'N, AN determinano una parabola, e la direzione dei diametri si ottiene conducendo A'R parallela ad AN, ed NR parallela ad AA', e congiungendo N' con R; ma la PN è la proiezione normale sull'asse della AN uguale e parallela ad A'R, per cui la P'N' sarà la proiezione della stessa A'R, ossia la N'R sarà perpendicolare all'asse, come volevano dimostrare.

Corollario. — Se A' si suppone infinitamente vicino ad A, si ha il teorema: « *la tangente e la normale in un punto di una parabola, e l'asse di questa, toccano una certa parabola avente per tangente al vertice l'asse della parabola data: il punto di contatto della parabola così determinata colla normale, è il centro di curvatura della curva data nel punto che si considera* ».

Scolio. — Dalle cose dette si ricava appunto quel metodo

La correlazione che io mi propongo di far notare consiste in ciò che, dato un teorema sulla somma, collo scambio di somma in prodotto, di termine in fattore, di multiplo in potenza, di coefficiente in esponente, si ha un teorema sulla moltiplicazione; oppure, dato un teorema sulla sottrazione, collo scambio di sottraendo in dividendo, sottrattore in divisore e resto in quoziente, si ha un teorema della divisione. La dimostrazione dei secondi teoremi si ricava colla stessa legge di correlazione dalla dimostrazione dei primi, in modo che dimostrati i primi non vi è bisogno di fare una diversa dimostrazione per i secondi.

In questa nota io ho disposti i teoremi in due colonne, ponendo l'uno a fianco all'altro i teoremi correlativi, e mi sono limitato a dare le dimostrazioni dei teoremi a sinistra, quando la correlazione è perfetta. Di alcuni teoremi per brevità non ho dato dimostrazione, per altri intendo di riferirmi a quella che trovasi per essi nell' aritmetica del prof. G. Moreno o in quella del prof. D. Amanzio. (*)

Una correlazione àvvi pure fra i teoremi della somma e quelli della sottrazione, e quindi fra quelli della moltiplicazione e della divisione, ma le dimostrazioni più che correlative sono inverse, e quindi non hanno molta affinità, salvo in qualche caso che ho citato a suo luogo; mi limito perciò a notare volta per volta i teoremi che si corrispondono in tal modo.

Il vantaggio di ridurre le dimostrazioni dei teoremi non è il solo che si ricava da questa nota, con questo metodo si trovano già fatti i teoremi che riguardano la moltiplicazione e la divisione delle frazioni, quando si sia dimostrato che la frazione è uguale ad un quoziente. Ma vi è ancora dippiù, l'ordine assegnato ai teoremi e le dimostrazioni date sono tali che si possono applicare senz'altra mo-ficazione [eccetto che per il teorema *e*) del n. 2] ai teoremi

(*) V. Moreno. — Aritmetica, 8ª ediz. Napoli 1886 = Amanzio. — Trattato di Aritmetica teorica, Napoli 1887.

sopra i numeri frazionari. E così resta semplificata con molto vantaggio degli alunni, la teoria dei numeri frazionari, che si studia nella quinta classe ginnasiale.

I.

Operazioni dirette.

1. S' intende per *somma di più numeri* il risultato che si ottiene aggiungendo al primo numero le unità contenute nel secondo, al numero ottenuto le unità contenute nel terzo, e così di seguito fino all' ultimo numero.

I numeri che compongono la somma diconsi *termini*.

Postulato. – Ammetteremo solamente che una serie di più unità disposte in fila si può contare da sinistra verso destra, o da destra verso sinistra senza che il risultato cambi.

2. Teorema 1.° a). – *La somma di due termini non si altera se si scambia l'ordine dei termini.*

Difatti $3 + 4 = (1 + 1 + 1) + 1 + 1 + 1 + 1$ e leggendo da destra a sinistra $= 4 + 3$.

Coroll. – Con analoga dimostrazione si ha: *La somma di più termini non si altera se si scrivono i termini nell'ordine inverso.*

b) *La somma di più termini è indipendente dall'ordine dei primi due termini.*

1. S'intende per *prodotto di più numeri* il risultato che si ottiene moltiplicando il primo numero per il secondo, il risultato ottenuto per il terzo, e così di seguito fino all'ultimo numero.

I numeri che compongono il prodotto diconsi *fattori*.

Postulato. – Ammetteremo che un quadro rettangolare di unità disposte per linee orizzontali e verticali, si possa contare per orizzontali, o per verticali senza che il risultato cambi (*)

2. Teorema 1.° a). *Il prodotto di due fattori non si altera se si scambia l'ordine dei fattori.*

Difatti
$$3 \times 4 = \begin{array}{l} 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 \end{array}$$
e leggendo per verticali $= 4 \times 3$

b) *Il prodotto di più fattori è indipendente dall'ordine dei primi due fattori.*

(*) Le operazioni a sinistra si possono considerare come eseguite negli

Dico che $3 + 4 + 5 + 6 = 4 + 3 + 5 + 6$. Difatti $3 + 4 = 4 + 3$, ed aggiungendo prima 5, poi 6 a queste due somme eguali si hanno pure somme eguali.

c). *La somma di più termini è indipendente dall'ordine dei due ultimi termini.*

Difatti $5 + 2 + 3 + 4$ pel Corol. del teor. *a*) $= 4+3+2+5$ e pel teor. *b*) $= 3 + 4 + 2 + 5$ e pel corol. $= 5 + 2 + 4 + 3$.

c). *Il prodotto di più fattori è indipendente dall'ordine dei due ultimi fattori.*

Difatti indicando con P il prodotto dei fattori che precedono i due ultimi, si ha $5 \times 2 \times 3 \times 4 = P \times 3 \times 4$

$$\begin{aligned} = P + P + P \\ P + P + P \\ P + P + P \\ P + P + P \end{aligned}$$

e leggendo per verticali $= P \times 4 \times 3 = 5 \times 2 \times 4 \times 3$.

d). *La somma di più termini non cambia se s'inverte l'ordine di due termini intermedî consecutivi.*

d). *Il prodotto di più fattori non cambia se s'inverte l'ordine di due fattori intermedî consecutivi.*

Dico che $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 2 + 3 + 5 + 4 + 6$. Difatti $2 + 3 + 4 + 5 = 2 + 3 + 5 + 4$ pel teor. *c*), ed aggiungendo 6 a queste somme eguali, si hanno pure somme eguali.

e). *La somma di più termini è indipendente dall'ordine dei termini.*

3. Teorema 2° – *In una somma di più termini si può a due o più termini sostituire la loro somma effettuata.*

Coroll. – *In una somma di più termini si può ad uno dei termini, che sia la somma di più numeri, sostituire questi numeri come termini.*

e). *Il prodotto di più fattori è indipendente dall'ordine dei fattori.*

3. Teorema 2° – *In un prodotto di più fattori si può a due o più fattori sostituire il loro prodotto effettuato.*

Coroll. – *In un prodotto di più fattori si può ad uno dei fattori, che sia il prodotto di più numeri, sostituire questi numeri come fattori.*

---

spazii ad una dimensione, e quelle di destra negli spazii a due dimensioni; sotto questo punto di vista si possono ritenere correlativi i postulati e le dimostrazioni dei teor. *a*) e *c*) del n. 2. Se le operazioni di destra si considerano eseguite negli spazii ad una dimensione si adotterà per questi teoremi la dimostrazione fondata sul teorema del n. 10 e si annulla il postulato di destra.

4. Teorema 3°. — *Per aggiungere ad una somma un numero basta aggiungerlo ad uno dei termini della somma.*

4. Teorema 3°. — *Per moltiplicare un prodotto per un numero basta moltiplicare uno dei fattori del prodotto pel numero.*

Difatti $(2 + 3 + 4 + 5) + 7 = 2 + 3 + 4 + 5 + 7$ e pel teorema 2° $= 2 + (3 + 7) + 4 + 5$.

5. Teorema 4°. — *Per aggiungere ad un numero una somma si possono aggiungere successivamente al numero i termini della somma nell'ordine che piace.*

5. Teorema 4°. — *Per moltiplicare un numero per un prodotto si può moltiplicare il numero successivamente per i fattori del prodotto nell'ordine che piace.*

Difatti $2 + (3 + 4 + 5)$ per il corol. del teor. 2° $= 2 + 3 + 4 + 5$

6. Teorema 5°. — *La somma di più somme è eguale ad un'unica somma che ha per termini tutti i termini di ciascuna somma data.* (*)

6. Teorema 5° — *Il prodotto di più prodotti è eguale ad un unico prodotto che ha per fattori i fattori di ciascun prodotto dato.*

Difatti $(2 + 3) + (4 + 5 + 6) + (7 + 8 + 9)$ pel corollario del teor. 2° $= 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$.

7. Dicesi *multiplo* di un numero la somma di due o più *termini* tutti eguali a quel numero.

Il termine dicesi *base* del numero oppure *moltiplicando*; il numero che rappresenta quanti termini sono nella somma dicesi *moltiplicatore* o *coefficiente*.

7. Dicesi *potenza* di un numero il prodotto di due o più *fattori* tutti eguali a quel numero.

Il fattore dicesi *base* della potenza; il numero che rappresenta quanti fattori sono nel prodotto dicesi *esponente*.

(*) I teoremi a sinistra dei n. 2, 3, 4, 5, 6 collo stesso ordine e con identiche dimostrazioni si possono tradurre nei teoremi sulla somma di più segmenti, e di più angoli della Geometria, evitando in tal modo l'inconveniente di dover fare del teorema del n. 3 la distinzione pel caso in cui i termini sono consecutivi e pel caso in cui non lo sono. (V. Il primo libro di Euclide, esposto dal prof. E. D'Ovidio, § 9, 6° e 10°).

Il multiplo di un numero si dice anche *prodotto* del *moltiplicando* pel *moltiplicatore*.

Invece di scrivere $3+3+3+3+3$ si scriverà in modo abbreviato 3×5 ovvero 3.5.

8. Teorema 6.° – *La somma di due o più multipli della stessa base è un multiplo della stessa base che ha per coefficiente la somma dei coefficienti di ciascun multiplo.*

Invece di scrivere $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ si scriverà in modo abbreviato 3^5.

8. Teorema 6.° – *Il prodotto di due o più potenze della stessa base, è una potenza della stessa base che ha per esponente la somma degli esponenti di ciascuna potenza.*

Difatti $8 \times 2 + 8 \times 3 + 8 \times 4 = (8+8) + (8+8+8) + (8+8+8+8)$ e pel teorema 5.° $8+8+8+8+8+8+8+8+8 = 8 \times (2+3+4)$.

9. Teorema 7.° Viceversa. – *Il multiplo di un numero si può scomporre in una somma di più multipli dello stesso numero, i cui coefficienti abbiano per somma il coefficiente del multiplo dato.*

Ovvero: *Il prodotto di un numero per una somma è eguale alla somma dei prodotti del numero per ciascun termine della somma.*

10. Teorema 8.° – *Un multiplo di una somma è eguale alla somma degli stessi multipli dei suoi singoli termini.*

Ovvero: *Il prodotto di una somma per un numero è eguale alla somma dei prodotti del numero per ciascun termine della somma.*

9. Teorema 7.° – Viceversa. *La potenza di un numero si può scomporre nel prodotto di più potenze dello stesso numero, i cui esponenti abbiano per somma l'esponente della potenza data.*

10. Teorema 8.° – *La potenza di un prodotto è eguale al prodotto delle stesse potenze dei suoi singoli fattori.*

Difatti $(8+6+4)\times 3=(8+6+4)+(8+6+4)+(8+6+4)$ e per il teorema 5° $=8+6+4+8+6+4+8+6+4$ e per il teorema 2° $=(8+8+8)+(6+6+6)+(4+4+4)=8\times 3+6\times 3+4\times 3$,

11. Teorema 9° — Viceversa: *La somma di più multipli che hanno lo stesso coefficiente è eguale ad un unico multiplo che ha per base la somma delle basi, e per coefficiente lo stesso coefficiente.*

12. Teorema 10° — *Il prodotto di una somma per una somma è eguale alla somma dei prodotti di ciascun termine del moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore.* (*)

11. Teorema 9° — Viceversa: *Il prodotto di più potenze che hanno lo stesso esponente è eguale ad un'unica potenza che ha per base il prodotto delle basi, e per esponente lo stesso esponente.*

12. Teorema 10° — *La potenza che ha per base un prodotto e per esponente una somma è eguale al prodotto delle potenze di ciascun fattore della base elevato ad un esponente eguale a ciascun termine dell'esponente.*

(*Il seguito al prossimo fascicolo*).

F. Amodeo.

PROPRIETA' DELLE CIRCONFERENZE CONCENTRICHE RISPETTO ALL'EQUIVALENZA GEOMETRICA

1. — Sia ABC un triangolo acutangolo in C e BD la sua altezza relativa al lato AC, si avrà:

$$q(AB)=q(BC)+q(AC)-2r\,(CA,\ CD).$$

Si descriva la circonferenza ABD, di centro O, e conducasi la CO, mediana del triangolo ABC rispetto al lato AB, segue:

$$q(BC)+q(AC)=2q(CO)+2q(AO)\,;$$

(*) I teoremi dei n. 8, 9, 10, 11, 12 possono considerarsi come teoremi della moltiplicazione ed allora essi non avrebbero teoremi correlativi a sinistra, e dovrebbero precedere il teorema 1° a destra.

onde, a motivo dell'eguaglianza precedente, si ha:

$$r(CA, CD) = q(CO) - q(AO) = q(CA_1),$$

dove CA_1 rappresenta la tangente condotta da C alla circonferenza ABD.

Possiamo dunque enunciare il noto teorema:

Se da un punto esterno ad una circonferenza si conducono a questa quante si vogliono secanti, è costante il rettangolo di una di esse e della sua parte esterna, ed è equivalente al quadrato della tangente condotta dallo stesso punto alla circonferenza.

2. – Sia ABC un triangolo ottusangolo in C e BD la sua altezza relativa al lato AC, si avrà:

$$q(AB) = q(BC) + q(AC) + 2r(CA, CD).$$

Si descriva la circonferenza ABD, di centro O, e conducasi la CO mediana del triangolo ABC rispetto al lato AB, segue:

$$q(BC) + q(AC) = 2q(CO) + 2q(AO)$$

quindi, sostituendo nell'eguaglianza precedente:

$$r(CA, CD) = q(AO) - q(CO) = q(CA_1),$$

dove CA_1 rappresenta la metà della corda perpendicolare a CO.

Cioè il noto teorema:

Se per un punto interno ad una circonferenza si conducono a questa quante si vogliono corde, è costante il rettangolo dei segmenti di una di esse compresi fra il punto e la circonferenza, ed è equivalente al quadrato della metà della corda che risulta divisa per metà dal punto stesso.

3. – Dai teoremi precedenti segue immediatamente che:

Due circonferenze concentriche godono della proprietà che, conducendo per un punto qualunque di una qualunque di esse una retta fino ad avere due punti in comune coll'altra, il rettangolo dei due segmenti è costante.

Di analoga proprietà godono anche due sfere concentriche.

4. – Siano due circonferenze di comune centro O; nella circonferenza minore si conduca un diametro qualunque AB e si congiungano i punti A e B con un punto qualunque C della circonferenza maggiore; condotta la mediana BO, si avrà:

$$q(AC) + q(BC) = 2q\,(AO) + 2q(CO).$$

Analogamente nella circonferenza maggiore si conduca un diametro qualunque $A'B'$ e si congiungano i punti A' e B' con un punto qualunque C' della circonferenza minore, condotta la mediana $C'O$, si avrà:

$$q(A'C') + q(B'C') = 2q(A'O) + 2q(C'O);$$

e poichè $AO = C'O$ e $CO = A'O$, si ha il teorema:

Due circonferenze concentriche godono della proprietà che, conducendo da un punto qualunque di una qualunque di esse due rette fino a terminare in due punti diametralmente opposti dell' altra, la somma dei quadrati dei due segmenti è costante.

Si può osservare che detta somma costante, essendo equivalente al doppio della somma dei quadrati dei raggi, è pure equivalente alla somma dei due quadrati inscrittibili nelle stesse circonferenze.

Di analoga proprietà godono anche due sfere concentriche.

5. – Considerando due circonferenze concentriche, è chiaro che tutti i punti della minore, ed essi soli, godono della proprietà di dividere le corde della maggiore in modo che il rettangolo dei due segmenti sia equivalente ad un quadrato determinato; mentre tutti i punti della maggiore, ed essi soli, godono della proprietà che le secanti da essi condotte alla minore e le rispettive parti esterne contengono un rettangolo equivalente allo stesso quadrato; se dunque tre circonferenze di comune centro O sono tali che, conducendo da un punto P della circonferenza intermedia la tangente alla stessa fino ad incontrare in Q la maggiore, e conducendo pure da P la tangente PR alla minore, riescano uguali le due tangenti PQ e PR, si avrà per una secante

qualunque AB la cui origine è un punto A della maggiore e che interseca la media in B e C:

$$r(AB,\ AC) = q(PQ),$$

per una corda qualunque $C'B'$ della media intersecante la minore in A':

$$r(A'B',\ A'C') = q(PR),$$

e quindi:

$$r(AB, AC) = r(A'B',\ A'C'),$$

e si potrà enunciare il teorema:

Data una circonferenza, il luogo geometrico dei punti (del piano) tali che, conducendo per uno di essi una retta qualunque fino ad avere due punti in comune colla circonferenza, il rettangolo dei due segmenti compresi fra detto punto e la circonferenza sia equivalente al quadrato di un dato segmento, è in generale un sistema di due circonferenze concentriche alla data, l'una interna e l'altra esterna. Il raggio della circonferenza interna è cateto di un triangolo rettangolo avente per ipotenusa e per cateto rispettivamente il raggio della circonferenza data ed il segmento dato; il raggio della circonferenza esterna è ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti il raggio della circonferenza data ed il segmento dato.

Se il segmento dato è minore del raggio della circonferenza data, il luogo geometrico dei punti in discorso è, come si è detto, il sistema delle due circonferenze sopra accennate; se il segmento è uguale al raggio della circonferenza data, la circonferenza interna si riduce al centro; se infine il segmento dato è maggiore del raggio della circonferenza data, la circonferenza interna non esiste.

Si può osservare che, condotta per un punto A'' della circonferenza intermedia una secante qualunque $A''B''$ alla circonferenza minore, intersecante la media in C'', e condotta per un punto A''' della circonferenza intermedia una corda qualunque $B'''C'''$ alla circonferenza maggiore, si ha sempre:

$$r(A''B'',\ A''C'') = q(PR)$$

$$r(A'''B''',\ A'''C''') = q\ (PQ)$$

e quindi:

$$r(A''B'',\ A''C'') = r(A'''B''',\ A'''C''')\ ;$$

il che ci dice che la circonferenza intermedia gode rispetto alle altre due della stessa proprietà di cui godono le altre due rispetto alla prima.

Il teorema vale anche per tre sfere concentriche aventi i raggi nelle condizioni anzidette.

6. — Se data una circonferenza qualunque di centro O e di raggio OA che chiameremo r, si conduce in A la tangente AA_1 uguale ad un dato segmento a, si conduce OA_1 e s'innalza ad essa la perpendicolare $A_1A_2 = a$, si conduce la OA_2, e così di seguito, ovvero fatto centro in A con raggio uguale ad a si descrive una circonferenza ed a questa si conduce la tangente OA', fatto centro in A' con raggio uguale ad a si descrive una circonferenza ed a questa si conduce la tangente OA'', e così di seguito, le circonferenze di centro O e di raggio OA, OA_1, OA_2,......, OA', OA''...... si trovano a tre a tre prese consecutivamente nelle condizioni indicate dal teorema precedente.

Le lunghezze dei raggi OA sono date dalla formula $R = \sqrt{r^2 + na^2}$ quando si faccia successivamente n uguale a $0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots -1,\ -2,\ -3, \ldots\ldots$. Mentre però per n positivo non dobbiamo porre alcuna limitazione, altrettanto non si può dire pei valori negativi i quali evidentemente dovranno soddisfare alla condizione $r^2 + na^2 \geq 0$. È chiaro infine che quando a^2 sia una parte aliquota di r^2, e solo in questo caso, R potrà divenire nullo.

Analogo ragionamento può farsi per una serie di sfere concentriche aventi i raggi nelle condizioni anzidette.

Diego Dott. Fellini.

NOTA

SUI POLIEDRI REGOLARI E SEMI-REGOLARI CONVESSI

Negli ordinari trattati di Geometria si suole dimostrare nel capitolo sui poliedri, colla definizione e con teoremi molto semplici, che non possono esistere più di cinque specie di poliedri regolari. In alcuni poi (Legendre – Sannia e D'Ovidio) si costruiscono questi cinque poliedri e con ciò si conchiude che realmente esistono cinque soli poliedri regolari.

Ora in nessuno di quei trattati elementari si usa dar ragione del numero delle facce di cotesti poliedri e giustificarne il nome avuto; che se la costruzione implicitamente determina cotesto numero, non mi pare però razionale l'arbitrarietà che si presenta all'origine della questione. È ben vero che il Baltzer nella sua eccellente Stereometria toccò in modo generale questo argomento stabilendo molte relazioni fra il numero delle facce, dei vertici e degli spigoli di un poliedro qualunque e deducendone importanti conseguenze, ma quella trattazione per la soverchia generalità esce dai limiti di un insegnamento secondario e per la soverchia concisione poco si addatta a una mente giovane. D'altra parte questo argomento dei poliedri regolari e semi-regolari mi sembra molto conforme allo scopo che deve avere l'insegnamento della matematica, specialmente nelle scuole secondarie classiche, poichè oltre ad esercitare la fantasia geometrica, mette in chiaro come da semplici definizioni e poche verità dimostrate si possa arrivare ad importanti risultati.

Io mi propongo con questa nota di colmare questa lacuna, dimostrando con mezzi molto elementari quanti e quali sieno i poliedri possibili regolari e semi-regolari convessi. A fondamento di queste ricerche sta la formula di Eulero $f + v = s + 2$ e il teorema che in un poliedro qualunque il numero degli spigoli è la metà di quello degli angoli piani.

Poliedri regolari (Platonici).

Le facce dei poliedri regolari non possono essere che triangoli equilateri, o quadrati o pentagoni regolari, i primi possono riunirsi intorno a un vertice a tre a tre, a quattro a quattro, a cinque a cinque, i secondi e i terzi di necessità a 3 a 3, dovendo la somma degli angoli piani di un angoloide essere minore di 4 retti.

1° Caso

Triangoli equilateri a 3 a 3 intorno a un vertice.

Se x è il numero delle facce, $3x$ dovrà essere il numero degli angoli piani, $\frac{3x}{2}$ quello degli spigoli, x quello dei vertici, e questi valori posti nella formola di Eulero danno

$$2x = \frac{3x}{2} + 2, \quad x = 4.$$

Poliedro regolare a 4 facce, 4 vertici, 6 spigoli. – *Tetraedro regolare.*

2° Caso.

Triangoli equilateri a 4 a 4 intorno a un vertice.

facce	angoli piani	spigoli	vertici
x	$3x$	$\frac{3x}{2}$	$\frac{3x}{4}$

$$x + \frac{3x}{4} = \frac{3x}{2} + 2, \quad x = 8.$$

Poliedro regolare ad 8 facce triangolari, 12 spigoli, 6 vertici. – *Ottaedro regolare.*

3° Caso

Triangoli equilateri a 5 a 5 intorno a un vertice

facce	angoli piani	spigoli	vertici
x	$3x$	$\frac{3x}{2}$	$\frac{3x}{5}$

$$x + \frac{3x}{5} = \frac{3x}{2} + 2, \quad x = 20$$

Poliedro regolare a 20 facce triangolari, 30 spigoli, 12 vertici. – *Icosaedro regolare.*

4° Caso

Quadrati a 3 a 3 intorno a un vertice.

facce	angoli piani	spigoli	vertici
x	$4x$	$2x$	$\frac{4x}{3}$

$$x + \frac{4x}{3} = 2x + 2, \quad x = 6$$

Poliedro regolare a 6 facce quadrate, 12 spigoli, 8 vertici. – *Esaedro regolare o Cubo.*

5° Caso

Pentagoni regolari a 3 a 3 intorno a un vertice

facce	angoli piani	spigoli	vertici
x	$5x$	$\frac{5x}{2}$	$\frac{5x}{3}$

$$x + \frac{5x}{3} = \frac{5x}{2} + 2, \quad x = 12$$

Poliedro regolare a 12 facce pentagone regolari, 30 spigoli, 20 vertici. – *Dodecaedro regolare.*

Francesco Panizza.

(Il seguito al prossimo fascicolo).

ESERCIZI PER LA SCUOLA

Sui pentagoni regolari (*).

1. Nel Pentagono regolare convesso ogni angolo è diviso in tre parti eguali dalle diagonali che partono dal suo vertice.
2. Dei due angoli adiacenti che formano le diagonali del P.*r.c.* alla loro reciproca intersezione, uno eguaglia l'angolo del Pentagono, l'altro ne è i due terzi.
3. Le diagonali del P.*r.c.* si dividono due a due in parti disuguali, di cui la maggiore eguaglia il lato.
4. La congiungente il punto d'incontro di due diagonali del P.*r.c.* col vertice per cui non passano codeste diagonali, passa per il centro del Pentagono (centro della circonferenza inscritta o circoscritta).
5. Determinare colla sola riga il centro di un dato P.*r.c.*
6. Nel P.*r.c* le diagonali si dividono due a due in sezione aurea, il cui segmento maggiore eguaglia il lato.
7. La parte minore della sezione aurea (interna) fatta sul segmento somma della diagonale e del lato di un P.*r.c.* eguaglia il lato stesso.
8. Il segmento che si ottiene aggiungendo alla differenza tra la diagonale ed il lato di un P.*r.c.* la parte maggiore della sezione aurea (**) fatta su di essa differenza, eguaglia il lato del Pentagono.
9. Costruire il P.*r.c.* *a*) dato il lato, oppure *b*) data la diagonale, oppure *c*) data la somma o la differenza della diagouale e del lato.

(*) « **ABCDE** è un Pentagono regolare convesso (**P.***r.c.*); le sue diagonali formano il **P.***r.* stellato (**P.***r.st.*) **AFBGCH**.... che ha per lati esse diagonali. Chiameremo *inviluppo* e *corpo* della stella rispettivamente i Pentag.$r^{i}.c^{i}$ **ABCDE**, **FGHIK**: *angoli salienti* o semplicemente *salienti* gli angoli **FBG**, **GCH**, **HDI**...., ed *angoli rientranti* o semplicemente *rientranti* gli angoli **AFB**, **BGC**, **CHD**,....; *punte* della stella i triangoli isosceli che hanno per angolo al vertice i salienti e per basi i lati del corpo. Considerando poi quali diagonali del Pent.*st.* le congiungenti due vertici non messi sullo stesso lato, le indicheremo coi simboli Dg^{s}, Dg^{r}, Dg^{rs} a seconda che uniscono i vertici di due salienti, o di due rientranti, o di un saliente e di un rientrante ».

(**) Senz'altra ind:cazione intendasi « sezione aurea interna ».

10. La diagonale di un P.r.c. eguaglia il segmento maggiore della sezione aurea esterna fatta sul lato.

11. Su AD, segmento maggiore della sezione aurea di AB, si è costruito il triangolo isoscele ADE cogli altri due lati eguali ad AB. Si è prolungato DA del segm. AG = AB, ed EA del segm. AF = AD, e centro nei punti G, E si sono descritti due archi di raggio AB le cui intersezioni sono A ed H. Dimostrare che HEDFG è il P.r.c. di lato AB.

12. Costruire il P.r.st. a) dato il Perimetro, oppure b) data la Dg^s, oppure c) data la Dg^r, oppure d) uno qualunque dei segmenti determinati su ciascun lato dalla reciproca loro intersezione.

13. In una circonferenza, il cui centro è O, prolungato il raggio OA della sua metà da A in L, e descritto su OL quale diametro la circonferenza, si è portata su LO da L in M la distanza del punto L dalle intersezioni delle due circonferenze. Prolungato poscia OL, dall'altra parte del centro, di OF = OM, si è condotta la corda BC perpendicolare ad AF nel suo punto medio. Dimostrare che ciascuno degli archi (minori) AB, AC è quinta parte della circonferenza.

14. Indicando r il valore del raggio della circonferenza data nell' esercizio precedente, dimostrare che i valori delle corde AB, BC, sono rispettivamente $\frac{1}{2}r\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $\frac{1}{2}r\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

15. Dividere una circonferenza data in 5 parti eguali.

16. Se r e ρ indicano i raggi di due Pent.$r'c'$ di cui uno è quello formato dalle diagonali dell'altro, si hanno le relazioni $\rho^2 + r^2 = 3r\rho$, $(\rho - r)^2 = r\rho$.

17. Dato un segmento, determinarne un altro tale che il rettangolo dei due equivalga il quadrato della loro differenza. Quante soluzioni ammette il Problema?

18. Costruiscasi il triangolo rettangolo con un cateto eguale al raggio di un dato P.r.st. e coll'ipotenusa eguale a tre metà dello stesso raggio. La differenza tra l'ipotenusa e l'altro cateto eguaglia il raggio del corpo del P.r.st.

dato, e la somma eguaglia il raggio dell'altro P.r.st formato prolungando i lati dell'inviluppo in quello dato.

19. Il quadrato del raggio d'un P.*r.c.* equivale il rettangolo del raggio dell'altro P.*r.c.* formato dalle diagonali del primo, e del raggio del P.*r.st.* formato prolungando i lati in quello dato.

20. Divisa una circonferenza in 5 parti eguali, se si conducono le rette per ogni due dei punti di divisione, il luogo delle intersezioni reciproche di queste rette è il sistema di tre circonferenze concentriche, quella di mezzo essendo la data, i cui tre raggi formano una proporzione continua.

21. Inscritto in una circonferenza il P.*r.c.* ABCDE, determinata l'intersezione L del prolungamento di due lati non consecutivi AE, CD, e l'intersezione D delle diagonali AD, EC che passano per gli estremi di codesti lati, dimostrare che la circonferenza è il luogo dei punti tali che il rapporto delle distanze di ciascuno di essi alle intersezioni suaccennate è costante.

22. Il diametro di una circonferenza il quale passa per il punto d'incontro di due diagonali del P.*r.c.* inscritto, è diviso armonicamente da questo punto e dall'intersezione coi due lati che terminano agli estremi di quello a cui esso diametro è perpendicolare.

23. Coi dati dell'esercizio 21 dimostrare che i punti di contatto delle tangenti condotte per L alla circonferenza, sono le intersezioni colla circonferenza stessa della perpendicolare in D alla DL.

24. Costruire il P.*r.c.* *d*) dato il raggio *e*) dato l'apotema.

25. Costruire il P.*r.st.* *e*) dato il raggio, *f*) dato l'apotema, *g*) dato il raggio del corpo.

26. Ad una data circonferenza inscrivere e circoscrivere i Pentagoni regolari convessi e stellati.

27. Centro un vertice A del P.*r.c.* ABCDE, e raggio la distanza tra A e DC si è descritta la circonferenza. Di-

mostrare che l'arco FG di questa circonferenza compreso fra le intersezioni colle diagonali AD, AC è la decima parte della circonferenza.

28. Il rapporto tra il lato ed il raggio del Dec *r.c.* eguaglia quello tra la diagonale ed il lato del P.*r.c.*

29. Nel Dec.*r.c.* il lato eguaglia il segmento maggiore della sezione aurea fatta sul raggio; ed il segmento maggiore della sezione aurea fatta sul lato eguaglia la differenza tra il lato stesso ed il raggio.

30. Il raggio d'un circolo eguaglia il segmento maggiore della sezione aurea esterna fatta sulla corda corrispondente all'angolo al centro di 36°.

31. Dividere una data circonferenza in 10 parti eguali.

32. Costruire il Dec.*r.c.* *a*) dato il lato, *b*) dato il raggio, *c*) data la somma o la differenza del lato e del raggio.

33. Costruire il P.*r.st.* *h*) data la Dg.^{re}, *i*) data l'altezza delle punte.

34. Nel P.r.c. ABCDE, prolungato un lato DC del segmento CM tale che DC + CM = diagonale, e preso sulla perpendicolare AN a DC il punto H in maniera che AH = NM, si tagli in K il prolungamento di DM con la circonferenza di centro O, punto medio di HN, e di raggio OA. Provare che NK è il lato del quadrato equivalente al Pent. dato.

35. Un P.*r.st.* è equivalente al rettangolo del semiperimetro del corpo per il raggio.

36. Costruire il P.*r.* convesso o stellato equivalente ad un dato poligono qualunque.

37. Se *a* ed *r* indicano rispettivamente l'apotema ed il raggio di un P.*r.c.* si ha

$$\text{Perimetro} = 10a\sqrt{5-2\sqrt{5}} = \tfrac{5}{2}\,r\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\text{Diagonale} = a\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \tfrac{1}{2}\,r\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$\text{Raggio} = a(\sqrt{5}-1)$$

$$\text{Apotema} = \tfrac{1}{4}r(\sqrt{5}+1)$$

38. Se α e ρ indicano ordinatamente apotema e raggio d'un P.*r.st.* si ha

$$\text{Perimetro} = \tfrac{5}{2}\,\rho\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 10\alpha\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

$$\text{Dg}^{s} = \tfrac{1}{2}\,\rho\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \alpha\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$\text{Dg}^{r} = \rho\sqrt{5-2\sqrt{5}} = \alpha\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\text{Dg}^{rs} = \tfrac{1}{2}\,\rho(5-\sqrt{5}) = 2\alpha\sqrt{5}$$

$$\text{lato delle Punte} = \rho\sqrt{5-2\sqrt{5}} = \alpha\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\text{lato del Corpo} = \tfrac{1}{2}\,\rho\sqrt{50-22\sqrt{5}} = 2\alpha\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

$$\text{Raggio} \quad \text{»} \quad = \tfrac{1}{2}\,\rho(3-\sqrt{5}) = \alpha(\sqrt{5}-1)$$

$$\alpha = \tfrac{1}{4}\,\rho(\sqrt{5}-1)$$

39. Verificare le seguenti relazioni tra gli elementi dei Pentagoni regolari (a ed r indicando apotema e raggio dei convessi, α e ρ gli elementi omonimi degli stellati) valutando in decimali, a meno di $\frac{1}{10^7}$ in difetto, quelle formole, dedotte da proprietà geometriche le quali danno ciascun elemento in funzione diretta del raggio o dell'apotema.

$$\text{P.}r.c.\left\{\begin{array}{ll} \text{Perimetro} & = r.5{,}8778525 = a.7{,}2654252 \\ \text{Diagonale} & = r.1.9021130 = a.2{,}3511410 \\ \text{Apotema} & = r.0{,}8090169 \\ \text{Raggio} & = \ldots\ldots = a.1{,}2360679 \\ \text{Area} & = r^2.2{,}3776412 = a^2 3{,}6327126 \end{array}\right.$$

$$
\text{P.}r.st.\left\{
\begin{array}{r}
\text{Perimetro} = \rho.9{,}5105651 = \alpha.30{,}7768353 \\
\text{D}g^{s} = \rho.1{,}1755705 = \alpha\,.\ 3{,}8042260 \\
\text{D}g^{r} = \rho.0{,}7265425 = \alpha\,.\ 2{,}3511410 \\
\text{D}g^{rs} = \rho.1{,}3819660 = \alpha\,.\ 4{,}4721359 \\
\text{Apotema} = \rho\ 0{,}3090169 \qquad\qquad\qquad \\
\text{Raggio} = \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \ \alpha\,.\ 3{,}2360679 \\
\text{Altezza delle punte} = \rho.0{,}6909830 = \alpha.\ 2{,}2360679 \\
\text{Lato del Corpo} = \rho.0{,}4490279 = \alpha.\ 1.4530850 \\
\text{Raggio del Corpo} = \rho.0{,}3819660 = \alpha.\ 1{,}2360679 \\
\text{Area del Corpo} = \rho^2.0{,}3468932 = \alpha\,.\ 3{,}6327126 \\
\text{Area d'ogni punta} = \rho^2.0{,}1551353 = \alpha.\ 1{,}6245984 \\
\text{Area totale} = \rho^2.1{,}1225699 = \alpha.11{,}7557050.
\end{array}\right.
$$

G. Scoto.

RISPOSTA ALLE QUISTIONI 1, 2, 4 PROPOSTE A PAG. 28.

(1) *Dati in un piano due triangoli* ABC, DEF *ed un punto, se le rette congiungenti questo punto con i vertici* A, B, C, D, E, F *segano i lati rispettivamente opposti ad essi nei punti* A′, B′, C′, D′, E′, F′, *i tre punti nei quali le rette* AD, BE, CF *tagliano ordinatamente le rette* A′D′, B′E′, C′F′ *sono situati in una stessa retta.*

F. Nicoli.

Dimostrazione del Prof. *F. Viaggi.*

Sia P il punto preso nel piano; i due quadrangoli PABC, PDEF considerati come appartenenti a due sistemi piani σ, σ' sovrapposti, individuano la proiettività tra i due sistemi, nella quale P è punto unito, e quindi sono prospettive le coppie di punteggiate PAA′....., PDD′....., PEE′..... ; PCC′.....,

PFF'..... E però basterà dimostrare che i tre centri di prospettiva sono in linea retta.

Sieno J, J_1, J_2 i punti limiti delle punteggiate PAA', PBB', PCC' e I', I'_1, I'_2 i punti limiti delle punteggiate corrispondenti: i punti J, J_1, J_2 sono sulla retta limite di σ, e I', I'_1, I'_2 su quella di σ'.

Al punto all'infinito di JJ_1J_2, considerato come appartenente a σ, corrisponde il punto all'infinito di $I'I'_1I'_2$; perciò le rette condotte da P parallelamente a JJ_1 e $I'I'_1$ sono corrispondenti nei sistemi σ, σ' e quindi sezionando i fasci proiettivi $P(ABC....)$, $P(DEF....)$ rispettivamente con le rette JJ_1 e $I'I'_1$ si hanno le punteggiate JJ_1J_2 e $I'I'_1I'_2$..... simili, come quelle in cui i punti all'infinito si corrispondono.

Essendo esse simili, i punti medi delle congiungenti i punti corrispondenti sono allineati, e allineati sono pure i simmetrici di P rispetto a tali punti medi, ossia proprio i centri di prospettiva delle punteggiate.

(2) *Dati due tetraedri* ABCD, EFGH *ed un punto, se le rette congiungenti questo punto con i vertici* A, B, C, D, E, F, G, H *segano le facce rispettivamente opposte ad essi nei punti* A', B', C', D', E', F', G', H', *i quattro punti nei quali le rette* AE, BF, CG, DH *tagliano ordinatamente le rette* $A'E'$, $B'F'$, $C'G'$, $D'H'$ *sono situati in uno stesso piano.*

F. Nicoli.

Dimostrazione del Prof. *F. Viaggi.*

Sia P il punto scelto nello spazio: i due pentagoni gobbi PABCD, PEFGH considerati come appartenenti a due spazi Σ, Σ' individuano la proiettività, nella quale P è punto unito e quindi sono prospettive le coppie di punteggiate PAA'...., PEE'....; PBB'...., PFF'....; PCC'...., PGG'....; PDD'...., PFF'.... . Perciò basterà dimostrare che i quattro centri di prospettiva sono in uno stesso piano.

Sieno J, J_1, J_2, J_3 i punti limiti delle punteggiate PA...., PB...., PC...., PD.... e I', I'_1, I'_2, I'_3 i punti limiti delle corrispondenti: i punti J, J_1, J_2, J_3 sono sul piano limite di Σ, e gli altri sul piano limite di Σ'.

Alla retta all'infinito del piano $JJ_1J_2J_3$. considerato come appartenente allo spazio Σ, corrisponde la retta all'infinito del piano $I'I'_1I'_2I'_3$, perciò i piani paralleli a tali piani limiti condotti per P sono corrispondenti negli spazi Σ, Σ', dunque sezionando le stelle proiettive P(ABCD....), P(EFGH....) rispettivamente coi piani $JJ_1J_2J_3$ e $I'I'_1I'_2I'_3$, si hanno i sistemi piani $JJ_1J_2J_3$...., $I'I'_1I'_2I'_3$.... simili, come quelli in cui le rette all'infinito si corrispondono. Essendo essi simili, i punti medi delle congiungenti i punti corrispondenti sono su uno stesso piano, e in uno stesso piano pure i simmetrici del punto P rispetto a tali punti medi, ossia proprio i centri di prospettiva delle punteggiate.

(4). — *Risolvere il sistema di equazioni*

$$x - yz = a\sqrt{1-y^2}\,\sqrt{1-z^2}$$
$$y - zx = b\sqrt{1-z^2}\,\sqrt{1-x^2}$$
$$z - xy = c\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}$$

D. Besso.

Risoluzione del Prof. *F. Viaggi* (*).

Dal porre eguale a 1 il valore assoluto d'una delle incognite si ottengono le seguenti soluzioni

$$\left.\begin{array}{c|c|c|c|c} x & +1 & -1 & -1 & +1 \\ y & +1 & -1 & +1 & -1 \\ z & +1 & +1 & -1 & -1 \end{array}\right\} \text{(I)}.$$

valide quali che siano i valori delle costanti; e le altre subordinate a valori speciali di qualche costante:

$$\left.\begin{array}{lll} x = 1 & y = z = \frac{0}{0}, & \text{se } a = 1; \\ x = -1 & y = -z = \frac{0}{0}, & \text{se } a = -1; \end{array}\right\} \text{(II)}$$

(*) Altre soluzioni furono inviate dai Signori *J. Beyens*, *R. Badia*, *A. de Zeltiry*, *A. Massa*, *M. Rocchetti*.

e analoghe.

Risolute le equazioni rispetto alle costanti, si ha:

$$a=\frac{x-yz}{\sqrt{1-y^2}\,\sqrt{1-z^2}},\quad b=\frac{y-zx}{\sqrt{1-z^2}\,\sqrt{1-x^2}},\quad c=\frac{z-xy}{\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}}$$

e di quì:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{1-a^2}&=\frac{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2+2xyz}}{\sqrt{1-y^2}\,\sqrt{1-z^2}},\\ \sqrt{1-b^2}&=\frac{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2+2xyz}}{\sqrt{1-z^2}\,\sqrt{1-x^2}},\\ \sqrt{1-c^2}&=\frac{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2+2xyz}}{\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}}.\end{aligned}\right\}\ (\alpha)$$

Dalle sei ultime equazioni si deducono le

$$a+bc=\frac{x(1-x^2-y^2-z^2+2xyz)}{(1-x^2)\,\sqrt{1-y^2}\,\sqrt{1-z^2}},\quad \sqrt{1-b^2}\,\sqrt{1-c^2}=\frac{1-x^2-y^2-z^2+2xyz}{(1-x^2)\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}},$$

dalle quali si ha la 1ª delle seguenti e analogamente le altre:

$$x=\frac{a+bc}{\sqrt{1-b^2}\,\sqrt{1-c^2}};\quad y=\frac{b+ca}{\sqrt{1-c^2}\,\sqrt{1-a^2}},\quad z=\frac{c+ab}{\sqrt{1-a^2}\,\sqrt{1-b^2}}.\quad \text{(III)}$$

In generale (I) e (III) danno le soluzioni del sistema proposto. Le (III) sono state ottenute nella tacita ipotesi che nessuno dei binomi $1-a^2$, $1-b^2$, $1-c^2$ sia zero. Se è nullo uno o due dei binomi, ma non tutti e tre, i valori delle incognite (conf. (α)) debbono annullare il polinomio $1-x^2-y^2-z^2+2xyz$, ma insieme almeno uno dei binomi $1-x^2$, $1-y^2$, $1-z^2$; dunque (I), (III) danno le soluzioni del sistema.

Se sono nulli tutti e tre i binomi $1-a^2$, $1-b^2$, $1-c^2$, oltre le soluzioni (I), (II) il sistema ammette anche le soluzioni di $1-x^2-y^2-z^2+2xyz=0$ che non annullino alcuno dei binomi $1-x^2$, $1-y^2$, $1-z^2$.

QUISTIONI PROPOSTE

7. — È dato il volume complessivo delle pareti laterali e del fondo di un vaso della forma di un parallelepipedo retto rettangolo, e sono date la grossezza uniforme delle pareti e la grossezza uniforme del fondo. Determinare le dimensioni del vaso in modo che sia massima la sua capacità.

8. — Se un pentagono ha la proprietà che le congiungenti i vertici ai punti di mezzo dei lati rispettivamente opposti passino per uno stesso punto, e sieno in questo punto divise in modo che il rapporto delle sue distanze da un vertice e dal punto di mezzo del lato opposto sia eguale per tutte, quel pentagono è regolare.

9. — Se due triangoli diseguali hanno cinque elementi eguali, il rapporto del maggiore dei tre lati al minore è, in ciascuno dei due triangoli, minore di $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

10. — Esiste un triangolo nel quale il centro del circolo circoscritto e il punto d'incontro delle altezze sieno ambedue situati sulla circonferenza inscritta?

D. Besso.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Giulio Giuliani. — Elementi di Algebra ad uso dei Licei e degli Istituti tecnici. — Torino — Ermanno Loescher — 1887.

Intorno a questo libro, che per il contenuto e per l'ordine col quale gli argomenti vi son trattati non si discosta notevolmente dagli altri che sono in uso nelle nostre scuole, mi limiterò a fare alcune poche osservazioni.

Il § 1 « Numeri positivi e negativi », può esser posto a confronto colla Nota « sopra i numeri negativi » che 'illustre professor *Betti* ha aggiunto al trattato del *Bertrand*; na è da dubitare se, come fa il *Giuliani*, sia felice la sostituzione del concetto puramente geometrico di determinare listanze di punti sopra una linea retta, all'altro elementare più generico di contare in avanti e indietro una moltitudine di oggetti disposti in linea. Oltredichè l'insigne nostro Maestro nell'affermare che « l' introduzione nell' algebra di numeri ai quali si attribuiscono proprietà di convenzione e che non hanno significato, *può* far nascere qualche difficoltà in chi comincia lo studio di questa scienza e *non sembrare* abbastanza giustificata dallo scopo di render più semplici alcuni resultati », ha, se non erro, avuto in mira di opporsi all' *abuso* delle convenzioni che talvolta si suol fare nella teoria dei numeri negativi, ma non di chiudere l'adito a chi voglia tenere una via di mezzo, la quale consiste nel proporsi d'estendere il concetto di numero al fine di dar significato all'operazione $a - b$ quando a è minore di b, traendo esempio da quanto già è stato fatto per introdurre i numeri frazionari. Assicurata così ai nuovi numeri (da chiamarsi poi *negativi*) una definizione esclusivamente aritmetica, sarà ammissibile qualunque metodo che si voglia adottare per rendere intuitive sia la possibilità della introduzione, sia le leggi che devono regolare il calcolo coi numeri negativi.

Per dar esempio (n.° 11) del metodo di dimostrazione per *induzione da* n *ad* n + 1, non trovo convenientemente scelto il teorema del binomio di Newton, se non si spiega il passaggio dai coefficienti interi ottenuti mediante le moltiplicazioni successive, a quelli espressi sotto forma di quozienti. — Al principio del § 4 (n.° 13) ove si tratta della divisione di due monomi sarebbero necessari maggiori schiarimenti per evitare che sia frainteso il confronto fatto dall' A. tra le lettere nell'algebra e i numeri primi nell'aritmetica.

Nè tutti forse approveranno (n° 15) la sostituzione di formule e d'uguaglianze ai ragionamenti semplici e rigorosi coi quali si dimostrano ordinariamente i due teoremi che servono di fondamento alla divisione dei polinomi. V'ha anche qualche obiezione a fare, e in senso assoluto e per l' esempio scelto, quando afferma che il quoziente di 45948 diviso per 547 si deduce da quello dei due polinomi corrispondenti per

$x - 10$, se vero è che insieme colle *analogie* vanno notate anche le *differenze* tra la divisione aritmetica e la divisione dei polinomi. Sorvolo sul n° 16 che contiene la censurata dimostrazione relativa alla divisione d'un polinomio per $x-a$, perchè l'A. stesso, con una sua recente pubblicazione, dà promessa di modificarla, e passo senz'altro al § 10 in cui si tratta dei principii fondamentali della teoria delle equazioni. Mi piace il teorema del n° 43 dal quale discende il *metodo di paragone o di confronto* per la risoluzione d'un sistema d'equazioni: noto soltanto che si potrebbero risolvere *tutte* le equazioni rispetto ad x, anzichè limitarsi alle prime due. Anche a ciò che riguarda le soluzioni negative delle equazioni di primo grado converrebbe dar maggior rilievo di quel che l'A. non faccia col parlarne brevemente nella risoluzione di due semplici problemi.

Esaurite, nella prima metà del libro, le questioni che si riferiscono alle equazioni e diseguaglianze di primo grado, si presenta la teoria dei numeri irrazionali trattata così ampiamente e rigorosamente da far deplorare che vi si trovi qualche *lapsus calami*, come l'ennunciato del teorema (n.° 52): « Se *a non è* potenza n^{esima} di un *altro* numero, *non esiste* nessun numero *b*, nè intero nè fratto che sia radice n^{esima} di *a* », dov'è evidente che la tesi è inclusa nell'ipotesi. Così pure non è generalmente vero quanto leggesi a pag. 55, cioè che « se i due numeri $\alpha = (A, A')$,, $\beta = (B, B')$ sono irrazionali, uno solo o tutti e due, si chiamerà somma dei due numeri α e β il numero (*irrazionale*) definito dalle due classi $A + B$, $A' + B'$ » potendo in infiniti casi la somma di due numeri irrazionali essere razionale. Queste son però lievi mende, tolte le quali rimane, come ho già detto, una teorica svolta esattamente anche nei minimi particolari. Ma si può domandare: Conviene veramente il presentarla ai principianti con tanta generalità e sì gran copia di notazioni e di diseguaglianze? Ed è poi necessario, per non contravvenire al rigore, di mettersi per una via così scabrosa? A me pare di no. La dimostrazione che vi sono infiniti numeri che non ammettono radice d'un determinato indice n, insieme coll'altra dell'esistenza di numeri razionali la cui potenza n^{esima} differisce da un numero, che non è potenza n^{esima}, di una quantità piccola ad arbitrio, è fondamento sufficiente per intraprendere la spiegazione dell'algoritmo mediante il quale si determinano le radici dei numeri. E colla *costruzione effettiva* delle due serie di numeri razionali, si giungerà in modo naturale alla *conclusione* che tali serie debbono essere prese per *definizione* del simbolo $\sqrt[n]{}$ nei casi in cui esso sarebbe privo di significato. A questo punto poi potrebbe opportunamente essere richiamato quanto di analogo pei numeri razionali viene ad esser fatto, per esempio, nella teoria delle frazioni periodiche: e da tale ravvicinamento scaturirebbe di per sè chiaro il concetto di definire un numero mediante classi d'infiniti altri numeri. Poche e semplici considerazioni dovrebbero pure bastare per avviare con sicurezza gli alunni alle operazioni di calcolo coi numeri irrazionali, e molti invece e bene scelti dovrebbero essere gli esempi, senza i quali si corre il rischio di aver deficienti nell'applicazione anche coloro che sono riusciti a rendersi sufficiente ragione della teoria.

Dopo quanto ho detto dei numeri negativi è facile argomentare che anche per i numeri complessi preferisco che si domandi alla geometria una *rappresentazione* anzichè la *definizione*: osservo, ad ogni modo, che nè l'una nè l'altra posson dirsi complete se si tralascia d'introdurvi le funzioni trigonometriche.

Non pretendo che il valente A. concordi in tutte queste mie opinioni, e mi terrò pago se, pubblicando una nuova edizione del suo libro, mostrerà di averle tenute in qualche conto.

ELCIA SADUN.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des Mathématiques publié par *Gustav Eneström.* Stockholm, 1888; N. 1.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche pubblicato da *B. Boncompagni.* Tomo XX. Maggio—Settembre 1887. Roma.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane pubblicato per cura del professore *G. Battaglini.* Volume XXVI. Marzo-Aprile, Napoli, 1888.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy*, Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe, 3e série. Douzième année. N. 4, 5, 6. Avril, Mai, Juin. Paris, 1888.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par *H. Vuibert*. 12e Année, N. 14, 15, 16, 17, 18. Paris, M. Nony et C.ie, 17 Rue des Écoles, 1888.

Iornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo *D.r F. Gomes Teixeira*. Professor na Escola Polytechnica do Porto. Vol. VIII, n. 3 e 4. Coimbra, 1888.

Le Scuole Secondarie eco dell'Associazione nazionale fra gl'insegnanti delle scuole secondarie. Anno V. N. 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21. Milano 1888.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome huitième: mai, juin 1888.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). — Serie 2.a Vol. 2. — Marzo—Maggio 1888.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. — Tomo II. Fascicoli 1, 2, 3.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XX. N. 7, 8, 9 e 10. Firenze, 1888.

Agamennone (G.) — Il terremoto nel vallo cosentino del 3 dicembre 1887. (Rend. R. Accademia Lincei, 1888).

Agamennone (G.) e Cancani (A.) — Contributo alla storia ed allo studio dell'igrometria. — Annali della Meteo. italiana. — Parte I. — 1885.

Amanzio (D.) — Aritmetica pratica ad uso delle scuole ginnasiali e tecniche e dei collegi militari. Cav. A. Morano, editore. Napoli 1886. — Prezzo L. 3.

—— Sette lezioni di algebra ad uso degli alunni d'Istituto tecnico. B. Pellerano, editore. Napoli 1881. — Prezzo L. 2,80.

—— Sullo sviluppo in serie delle radici di un'equazione algebrica di grado qualunque (Rendiconti dell'Acc. delle Scienze. Napoli 1877). — Di alcune trasformazioni del simbolo d'operazione $V\frac{d}{dx} \cdot U\frac{d}{dx} \cdots Z\frac{d}{dx} \cdot Y\frac{d}{dx} \cdot X\frac{d}{dx}$ e proprietà di alcuni determinanti che derivano da queste trasformazioni (Gior. di Battaglini. Vol. XXI). — Intorno ad una funzione isobarica (Atti dell'Acc. Pontoniana. Vol. XVII). — Sopra alcune formole (Gior. di Battaglini. Vol. XV).

Bernardi (G.) — Tavole dei quadrati e dei cubi dei numeri interi da 1 a 1000, con un teorema nuovo sopra la radice quadrata e sulla radice cubica. — Parma, tip. Ferrari e Gamberini, 1888. — Prezzo L. 1,50.

Bertini (E.) — Sopra alcuni teoremi fondamentali delle curve piane algebriche (Rend. Ist. lomb. 1888).

Bettazzi (R.) — Sulla derivata totale delle funzioni di due variabili reali e sull'inversione delle derivazioni (Gior. di Battaglini. Vol. XXVI). — Su una corrispondenza fra un gruppo di punti ed un continuo ambedue lineari (Annali Matema. 1888).

Casorati (F.) — Sopra le *coupures* del Sig. Hermite, i *Querschnitte* e le superficie di Riemann, ed i concetti d'integrazione sì reale che complessa. Articolo secondo (Annali matema. 1888).

Frattini (G.) — Aritmetica pratica ad uso delle scuole elementari del Regno. — Parte I, 2a ediz. — G. B. Paravia e C.a — Prezzo: L. 0,40.

Jung (G.) — Sulla riduzione all'ordine minimo dei sistemi lineari di genere qualunque (Rend. Ist. Lomb. 1888). — A propos des deux récents Communications de M. J. Bertrand « Sur la probabilité du tir à la cible » (Comptes rendus, Avril 1888).

Maggi (G. A.) — Sulla propagazione libera e perturbata delle onde luminose in un mezzo isotropo (Annali mat. 1888).

(Il seguito al prossimo fascicolo).

SULL'APPROSSIMAZIONE DELL'ORDINARIA INTERPOLAZIONE NELLE TAVOLE DI LOGARITMI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE

Mi propongo in questa nota di determinare per via elementare un limite superiore dell'errore derivante dall'ordinario metodo d'interpolazione nelle tavole logaritmiche delle funzioni goniometriche.

I.

1. Premetterò alcuni teoremi, che servono a determinare un limite superiore dell'errore, di cui è affetto il logaritmo di un numero a, il suo logaritmo-seno e logaritmo-tangente, essendo noto di a un valore a' approssimato a meno di α.

Qualsiasi l'intero positivo m e il numero $x<\frac{1}{m}$, si ha sempre:

$$(1)\qquad 1+mx<(1+x)^m<\frac{1}{1-mx}\qquad (*)$$

(*) Dall'identità

$$a^m-b^m=(a-b)\,(a^{m-1}+a^{m-2}b+\ldots\ldots+b^{m-1})$$

si ricava, supponendo $a>b$:

$$a^m-b^m>mb^{m-1}(a-b)\qquad (1$$

$$a^m-b^m<ma^{m-1}(a-b)\qquad (2$$

ossia:

$$b^m>a^{m-1}\,(a-m\,(a-b))$$

Posto nella (1) $b=1$, $a=1+x$, si ottiene

$$(1+x)^m>1+mx.$$

L'altra limitazione della potenza $(1+x)^m$ si ottiene ponendo nella (2)

$$a=1,\ \ b=\frac{1}{1+x},\ m=n+1;$$

si ha così

$$\frac{1}{(1+x)^{n+1}}>1-(n+1)\,\frac{x}{1+x}$$

la quale, dopo averne moltiplicati i due membri per $(1+x)$, quando sia $nx<1$, si potrà porre, dividendo per $1-nx$, sotto la forma

$$(1+x)^n<\frac{1}{1-nx}$$

Indicando con μ un numero positivo qualunque e con r un intero positivo > 1, si ha dalla (1)

$$\left(1+\frac{1}{r\mu}\right)^r > 1+\frac{1}{\mu}$$

e quindi,

$$(2) \qquad \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu < \left(1+\frac{1}{r\mu}\right)^{r\mu}$$

Nel caso di μ intero, si ha dalla (1)

$$\left(1+\frac{1}{r\mu}\right)^\mu < \frac{r}{r-1};$$

epperciò sarà

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu < \left(\frac{r}{r-1}\right)^r,$$

qualunque sia l'intero r, purchè maggiore di 1. Posto $r = 1001$ risulterà

$$(3) \qquad \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu < \left(\frac{1001}{1000}\right)^{1001} < 2{,}73$$

Se μ è compreso fra gli interi consecutivi n ed $n+1$ sarà $r\mu$ compreso fra rn e $rn+r$, e posto $r\mu = \rho n$, sarà

$$r < \rho < r+1,$$

nell'ipotesi di $r < n$. In conseguenza si avrà dalla (2)

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu < \left\{\left(1+\frac{1}{n\rho}\right)^n\right\}^\rho;$$

ma dalla (1) risulta

$$\left(1+\frac{1}{n\rho}\right)^n < \frac{\rho}{\rho-1},$$

perciò sarà

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu < \left(1+\frac{1}{\rho-1}\right)^\rho$$

o anche

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu < \left(\frac{r}{r-1}\right)^{r+1}$$

Supposto $\mu > 1001$, si potrà prendere $r = 1001$ e quindi

$$(4) \qquad \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu} < \left(\frac{1001}{1000}\right)^{1002} < 2{,}73.$$

Infine se è $\mu < 1001$, ma maggiore di 1, sarà $1001\mu > 1001$ e quindi in forza della (2)

$$(5) \qquad \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu} < \left(1+\frac{1}{1001\mu}\right)^{1001\mu} < \left(\frac{1001}{1000}\right)^{1002} < 2{,}73.$$

Dalle (3) (4) (5) risulta che, qualunque sia il numero positivo $h < 1$, si ha

$$(1+h)^{\frac{1}{h}} < 2{,}73$$

dalla quale, prendendo il logaritmo nel sistema a base 10, risulta

$$\log_{10}(1+h) < \frac{9}{20}\,h < \frac{1}{2}\,h.$$

2. Se a' è un valore approssimato di a a meno di α, si ha per definizione

$$a' - \alpha < a < a' + \alpha$$

o

$$a'\left(1-\frac{\alpha}{a'}\right) < a < a'\left(1+\frac{\alpha}{a'}\right)$$

od anche, essendo per $\frac{\alpha}{a'} < 1$

$$1+\frac{\alpha}{a'} < \frac{1}{1-\frac{\alpha}{a'}},$$

$$a' : \frac{a'}{a'-\alpha} < a < a' . \frac{a'}{a'-\alpha}.$$

Dalle quali, prendendo i logaritmi in un sistema di base maggiore dell'unità, si ricava

$$\log a' - \log\frac{a'}{a'-\alpha} < \log a < \log a' + \log\frac{a'}{a'-\alpha}$$

e poichè

$$\frac{a'}{a'-\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{a'-\alpha},$$

è

$$\log_{10} a' - \frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{a'-\alpha} < \log_{10} a < \log_{10} a' + \frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{a'-\alpha}.$$

Siamo così in grado di enunciare il teorema: « *Se* a' è *un valore approssimato di* a *a meno di* α, *sarà* *log*a' *un valore approssimato di log*a *a meno di* $\log\frac{a'}{a'-\alpha}$, *i logaritmi essendo presi in un sistema di base superiore a* 1, *o anche, quando sieno presi nel sistema a base* 10, *a meno di* $\frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{a'-\alpha}$ ».

3. Perchè $\log_{10} a'$ sia un valore approssimato di $\log_{10} a$ a meno di $\frac{1}{10^m}$, basterà determinare α in modo che in valore assoluto soddisfi alla disuguaglianza

$$\frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{a'-\alpha} < \frac{1}{10^m}$$

la quale, poichè $a' > a - \alpha$, è verificata a maggiore ragione quando sia

$$\frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{a-2\alpha} < \frac{1}{10^m}$$

o

$$\alpha < \frac{2}{10^m+4}\cdot a,$$

e, poichè

$$\frac{2}{10^m+4} > \frac{1}{10^m},$$

basterà che sia

$$\alpha < \frac{1}{10^m}\cdot a.$$

A questa si soddisfa evidentemente prendendo α minore di una unità dell'ordine della $(m+1)^{esima}$ cifra di a. In generale è dunque *necessario conoscere una cifra di più nel numero di quelle che vogliansi avere nella mantissa del logaritmo*.

4. Il Ch. Prof. Davide Besso (*) ricercò per via elementare un limite dell'errore nel calcolo del logaritmo d'un numero dato, non compreso nella tavola, e del numero corrispondente ad un logaritmo dato, coll'ordinario metodo di interpolazione. Egli dimostrò il seguente teorema che richiamo dovendolo applicare in seguito:

« 1.º *Dati i logaritmi dei numeri* a *e* a + d *a meno di* g, *l'errore totale del logaritmo di un numero, compreso fra* a *e* a + d, *calcolato colla solita proporzione, è sempre minore di*:

$$\mathrm{g} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{a}} \log\left(1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{a}}\right) \text{ ».}$$

Per quanto abbiamo detto al n° 1 la limitazione dell'errore nel calcolo del logaritmo di un numero dato, risultante dal teorema precedente, può prendersi sotto la forma

$$g + \frac{1}{2} \frac{d^2}{a^2}.$$

Noteremo ancora esplicitamente, che la parte g di detta limitazione è dovuta solo agli errori di cui sono affetti $\log(a+d)$ e $\log a$ della tavola; mentre l'altra parte di essa è dovuta all'applicazione del principio della parte proporzionale.

5. Sia a' un valore approssimato di a $\left(a < \frac{\pi}{2}\right)$, a meno di α, sia, cioè,

$$a' - \alpha < a < a' + \alpha,$$

sarà

$$\operatorname{sen}(a' - \alpha) < \operatorname{sen} a < \operatorname{sen}(a' + \alpha)$$

(*) Sulla approssimazione dell'ordinaria interpolazione nelle tavole di logaritmi. Annuario del R. Istituto Tecnico di Roma 1883.

od anche

$$\operatorname{sen}a' - \{\operatorname{sen}a' - \operatorname{sen}(a'-\alpha)\} < \operatorname{sen}a < \operatorname{sen}a' + \{\operatorname{sen}(a'+\alpha) - \operatorname{sen}a'\},$$

donde ricavasi

$$\operatorname{sen}a' - 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\left(a'-\frac{\alpha}{2}\right) < \operatorname{sen}a < \operatorname{sen}a' + 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\left(a'+\frac{\alpha}{2}\right)$$

e poichè

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2} \text{ e } \cos\left(a'-\frac{\alpha}{2}\right) > \cos\left(a'+\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\operatorname{sen}a' - \alpha\cos\left(a'-\frac{\alpha}{2}\right) < \operatorname{sen}a < \operatorname{sen}a' + \alpha\cos\left(a'-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Da qui rilevasi, che $\operatorname{sen}a'$ è un valore di $\operatorname{sen}a$, approssimato a meno di $\alpha\cos\left(a'-\frac{\alpha}{2}\right)$.

Dal n.° 2 risulta quindi che $\log_{10}\operatorname{sen}a'$, sarà un valore di $\log_{10}\operatorname{sen}a$, approssimato a meno di

$$\frac{1}{2}\,\frac{\alpha\cos\left(a'-\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}a' - \alpha\cos\left(a'-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

e quindi, essendo

$$\operatorname{sen}\left(a'-\frac{\alpha}{2}\right) < \operatorname{sen}a',$$

a meno anche di

$$\frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{\operatorname{tang}\left(a'-\frac{\alpha}{2}\right) - \alpha}.$$

6. Sia sempre

$$a' - \alpha < a < a' + \alpha$$

con $a' < \frac{\alpha}{2}$, sarà

$$\operatorname{tang}(a'-\alpha) < \operatorname{tang}a < \operatorname{tang}(a'+\alpha)$$

od anche

$$\operatorname{tang}a' - \{\operatorname{tang}a' - \operatorname{tang}(a'-\alpha)\} < \operatorname{tang}a < \operatorname{tang}a' + \{\operatorname{tang}(a'+\alpha) - \operatorname{tang}a'\}$$