LE PROPRIETÀ DEI NUMERI $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}_h$

derivanti dalla considerazione di speciali combinazioni di elementi dette combinazioni con ripetizione fino ad h e la loro applicazione: 1° allo studio delle tavole generali di addizione per linee, per colonne, per diagonali e circolari di passo h; 2° alla determinazione in funzione di p e di $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$, dell'elemento di posto m nella successione individuata da n numeri iniziali $Q_1, \ldots Q_n$ e dall'equazione ricorrente: $Q_m = p(Q_{m-1} + Q_{m-2} + \ldots + Q_{m-n})$.

In alcune mie ricerche di algebra ho constatata la grande importanza che può avere lo studio di alcuni numeri di natura combinatoria, dei quali sono caso particolare i noti numeri della forma $\binom{m}{n}$. Sembrami quindi assai opportuno pubblicare un'esposizione completa delle proprietà di tali numeri. Allo scopo di rendere evidente l'importanza della loro introduzione, espongo anche una mia teoria generale delle tavole di addizione per linee, per colonne, per diagonali e circolari, di passo dato. Le proprietà delle tavole di addizione sono importanti perchè possono venire in soccorso nella trattazione di questioni nelle quali ricorrono processi operativi che sono o possono ridursi ad una serie di addizioni eseguite linearmente o circolarmente muovendo dai termini di una successione data. Mi occupo da ultimo di alcune successioni di numeri delle quali sono caso particolare quelle dette di Leonardo Pisano; anche il poco che pubblico su queste successioni basta a mostrare l'importanza dello studio dei nuovi numeri combinatori.

Aggiungo che i numeri $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}_h$ sono considerati in questo lavoro più specialmente dal punto di vista del loro significato combinatorio; però, muovendo da esso, è dimostrato che possono considerarsi come coefficienti delle potenze di x nello sviluppo in serie dell'espressione $(1 + x + \ldots + x^h)^m$. Pertanto a proprietà di tali numeri si accenna in taluni libri di algebra, ove si tratta dello sviluppo delle potenze dei polinomi. Le poche proprietà già note sono qua indicate come tali e riportate colle loro dimostrazioni; delle altre non ho trovato cenno presso alcun autore e neppure mi costa che l'importante significato combinatorio dei numeri $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}_h$ sia stato finora rilevato.

PARTE PRIMA

I. — Alcune formule introduttorie.

1. Sia $\ldots 0, 0, a_1, a_2, \ldots a_i, 0, 0 \ldots$ una successione di numeri formata da zeri iniziali in numero illimitato, seguiti da i numeri $a_1, a_2, \ldots a_i$ sui quali non facciamo alcuna ipotesi e da zeri finali in numero illimitato. Poniamo:

$$\ldots + 0 + 0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_i + 0 + 0 + \ldots = S_0.$$

Sia h un intero positivo non nullo e dalla suddetta successione deduciamone un'altra sommando ciascun numero con gli h che lo precedono a sinistra. Indicando con S_1 la somma degli elementi della nuova successione, avremo:

$$\begin{aligned} \ldots + 0 + 0 + a_1 + (a_1 + a_2) + \ldots + (a_1 + a_2 + \ldots + a_h) + \\ + (a_2 + a_3 + \ldots + a_{h+1}) + \ldots + (a_{i-h+1} + \ldots + a_{i-1} + a_i) + \\ + (a_{i-h+2} + \ldots + a_i) + \ldots + (a_{i-1} + a_i) + a_i + 0 + \ldots = S_1 \end{aligned}$$

(ritenendo in generale $a_r = 0$ se $r \leqslant 0$ oppure se $r > i$).

Ora è chiaro che ciascuna delle a si trova in S_1, come addendo di somma precisamente $h + 1$ volte, epperò sarà:

$$S_1 = (h + 1) . S_0.$$

Se si opera in modo analogo sulla successione

$$\ldots 0, 0, a_1, (a_1 + a_2), \ldots, (a_{i-1} + a_i), a_i, 0, 0, \ldots$$

già dedotta dalla data e si indica con S_2 la somma dei numeri della nuova successione così formata, risulterà:

$$S_2 = (h + 1) S_1 = (h + 1)^2 S_0$$

e così continuando, fino ad ottenere k successioni dopo la data, ed indicando con S_k la somma dei numeri dell'ultima di esse avremo:

$$S_k = (h + 1)^k . S_0. \tag{1}$$

In particolare se $S_0 = 1$, sarà

$$S_k = (h + 1)^k. \tag{1'}$$

Es. Sia $\ldots 0, 0, 1, 0, 0 \ldots$ la successione iniziale talchè $S_0 = 1$. Si ponga $h = 2$. Le successioni da considerare sono:

$$\begin{array}{l} \ldots 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0, \ldots \\ \ldots 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0, \ldots \\ \ldots 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ 0, \ldots \\ \ldots 0,\ 0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 7,\ 6,\ 3,\ 1,\ 0,\ 0, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

e si ha:

$$S_0 = 1; \quad S_1 = 3^1 = 3; \quad S_2 = 3^2 = 9; \quad S_3 = 3^3 = 27, \ldots$$

Di esse la 1^a, comprende un solo termine non nullo, la 2^a ne comprende 3, la 3^a ne comprende 5, ... l'n^{ma} ne comprende $2n - 1$. (¹)

2. Sia ancora la successione $\ldots 0, 0, a_1, a_2, \ldots a_i, 0, 0, \ldots$ considerata precedentemente e poniamo:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \pm a_i = d.$$

Se $\ldots 0, 0, a_1, (a_1 + a_2), (a_1 + a_2 + a_3), \ldots a_i, 0, 0, \ldots$ è ancora la successione dedotta dalla data sommando ogni elemento con gli h precedenti, se h è dispari, si avrà:

$$a_1 - (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2 + a_3) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + \ldots \pm a_i = 0$$

giacchè, tolte le parentesi, risulta che ciascuna delle a è presa lo stesso numero di volte col segno $+$ e col segno $-$. Se invece h è pari, sarà:

$$a_1 - (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2 + a_3) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + \ldots \pm a_i = d$$

giacchè, tolte le parentesi, e fatte le riduzioni si ottiene

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \pm a_i.$$

Siffatto ragionamento si può ripetere assumendo quale successione iniziale, nel caso ad es. $h = 1$, la

$$\ldots 0, 0, a_1, (a_1 + a), \ldots (a_{i-1} + a_i), a_i, 0, 0, \ldots$$

Adunque:

Per h *dispari la somma algebrica dei termini di ognuna delle successioni dedotte dalla iniziale (sommando ciascuna volta ogni elemento con gli* h *precedenti) presi alternativamente col segno $+$ e $-$, a partire dal 1° termine non nullo, è nulla; per* h *pari essa è costante ed ha il valore che corrisponde alla successione iniziale.*

In particolare se la successione iniziale è la $\ldots 0, 0, 1, 0, 0 \ldots$ e se h è pari la suddetta somma algebrica vale sempre **1**. (²)

3. Muovendo ancora dalla successione $\ldots 0, 0, a_1, \ldots a_i, 0, 0 \ldots$ costruiamone altre $k - 1$ col processo solito. L'ultima di esse conterrà $i + h(k - 1)$ termini tra il gruppo di zeri a destra e quello a sinistra; ciò accade perchè ogni successione contiene tra i due gruppi di zeri h termini più della precedente.

(¹) Se $h = 1$ le successioni che si ottengono a partire dalla $\ldots 0, 0, 1, 0, 0, \ldots$ sono quelle costituenti le orizzontali del noto triangolo di Tartaglia. Adunque la somma dei numeri della $(k+1)^a$ orizzontale di esso, vale 2^k. Ciò è conseguenza della legge di formazione delle successioni e non è affatto necessario per dimostrare tale proprietà ricorrere allo sviluppo di $(a+b)^k$ e supporre poi $a = b = 1$, come si fa comunemente.

(²) Se $h = 1$ e la successione iniziale è la $\ldots 0, 0, 1, 0, 0, \ldots$ si conclude: la somma dei numeri di una qualsiasi orizzontale del triangolo di Tartaglia presi alternativamente col segno $+$ e $-$ è zero. Non c'è bisogno per dimostrare tale proprietà ricorrere allo sviluppo di $(a+b)^k$ e supporre poi $a = 1$; $b = -1$, come si fa comunemente.

Sia q il quoziente ed r il resto della divisione di $i + h(k-1)$ per $h+1$. Indichiamo con

$$b_1, \ldots b_{h+1}, \; b_{h+2}, \ldots b_{2(h+1)}, \; b_{2(h+1)+1}, \ldots b_{q(h+1)}, \; b_{q(h+1)+1}, \ldots b_{q(h+1)+r}$$

la suddetta ultima successione. Scomponendola in gruppi di $h+1$ termini da sinistra a destra (l'ultimo gruppo potendo contenere $r < h+1$ termini), *la somma dei termini primi dei singoli gruppi, vale quella dei termini secondi, terzi ... e tutte queste somme valgono* $(h+1)^{k-2} . S_0$.

Si ha cioè:

$$b_i + b_{i+(h+1)} + b_{i+2(h+1)} + \ldots + b_{i+s(h+1)} = (h+1)^{k-2} . S_0 \qquad (2)$$

per $i = 1, 2, \ldots h+1$, s essendo, in corrispondenza di ciascun valore di i, il maggior intero tale che $i + s(h+1) \leqslant q(h+1) + r$.

Infatti rapporto alla 1ª successione dedotta dalla $\ldots 0, a_1, \ldots a_i, 0 \ldots$ ognuna di tali somme vale S_0; perciò rapporto alla 2ª successione dedotta dalla $\ldots, 0, a_1, \ldots a_i, \ldots 0$ ognuna delle somme vale la somma dei termini della successione precedente, cioè: $(h+1) S_0 \ldots$; in generale ciascuna volta il valore costante delle somme è la somma dei termini della successione precedente e questa somma, se l'ultima successione ottenuta è la $(k-1)^a$ dopo la data (e quindi la precedente è la $(k-2)^a$ dopo la data) vale, per la (1), $(h+1)^{k-2} . S_0$.

Se la successione $b_1, \ldots b_{q(h+1)+r}$ si scompone in gruppi $h+1$ termini da destra a sinistra si ha pure:

$$b_i + b_{i-(h+1)} + b_{i-2(h+1)} + \ldots + b_{i-s(h+1)} = (h+1)^{k-2} . S_0 \qquad (2')$$

per $i = q(h+1) + r, \; q(h+1) + r - 1, \ldots q(h+1) + r - h$, s essendo, in corrispondenza di ciascun valore di i, il maggior intero tale che $i - s(h+1) > 0$.

II. — Proprietà del simbolo combinatorio $\left\{ {m \atop n} \right\}_h$.

Chiamiamo combinazioni con ripetizione fino ad h di m elementi diversi, n ad n, o di classe n, i gruppi formati scegliendo comunque uno o più fra gli elementi dati e ripetendo ciascuno degli elementi scelti h volte al più (cioè una, o due, o tre, ... o h volte) in modo da avere in tutto n elementi, senza che ciascuno degli elementi scelti debba essere ripetuto lo stesso numero di volte; ritenendo inoltre che due distinte di tali combinazioni debbano differire o per qualche elemento oppure, qualora contengano gli stessi elementi, per il modo col quale essi sono ripetuti. Per es. se gli elementi dati sono tre a, b, c e $n = 4$, $h = 3$ le combinazioni in questione sono:

aabc, *abbc*, *abcc*, *aaab*, *aaac*, *bbba*, *bbbc*, *ccca*,
cccb, *aabb*, *aacc*, *bbcc*,

in numero di 12.

Per $h=1$ si hanno le comuni combinazioni semplici di m elementi n ad n, e per $h=n$ si hanno le comuni combinazioni con ripetizione di m elementi n ad n. In queste ciascun elemento può essere ripetuto fino ad n volte. Indichiamo col simbolo $\left\{ m \atop n \right\}_h$ il numero delle combinazioni n ad n di m elementi diversi con ripetizione fino ad h e chiamiamo m numeratore ed n denominatore di esso. Il numero h si dirà *indice di moltiplicità* delle suddette combinazioni. I numeri m, n, h sono adunque per loro natura positivi, interi, non nulli inoltre dev'essere $mh \geqslant n$ giacchè se fosse $mh < n$, anche ripetendo ognuno degli m elementi dati h volte, quante cioè ne sono al più possibili, non potrebbe formarsi alcun gruppo di n elementi. Deve aversi evidentemente $h \leqslant n$. Saremo in seguito condotti a dar significato ad $\left\{ m \atop n \right\}_h$, quando $h > n$ ponendo

$$\left\{ m \atop n \right\}_h = \left\{ m \atop n \right\}_n ; \qquad (h > n). \tag{1}$$

Si ha evidentemente

$$\left\{ m \atop n \right\}_1 = \binom{m}{n} \tag{2}$$

$$\left\{ m \atop n \right\}_n = \binom{m+n-1}{n} \tag{3}$$

giacchè se $h=n$ il simbolo $\left\{ m \atop n \right\}_n$ rappresenta il numero delle comuni combinazioni con ripetizione n ad n di m elementi, ed è noto che esso vale $\binom{m+n-1}{n}$.

È ancora evidentemente:

$$\left\{ m \atop 1 \right\}_h = m ; \qquad \left\{ m \atop mh \right\}_h = 1. \tag{4}$$

Passiamo ora in rivista le principali proprietà del simbolo $\left\{ m \atop n \right\}_h$:

I. Si ha:

$$\left\{ m \atop n \right\}_h = \left\{ m \atop mh-n \right\}_h \tag{5}$$

Infatti se ripetiamo h volte ognuno degli m elementi $a_1 \ldots, a_m$, abbiamo la successione:

$$a \ldots a_1, a_2, \ldots a_2, \ldots a_m \ldots a_m .$$

Per avere una delle combinazioni di essi n ad n con ripetizione fino ad h, basta scegliere comunque n elementi di tale successione.

I rimanenti costituiscono evidentemente una combinazione di classe $mh-n$ dei suddetti m elementi, con ripetizione fino ad h;

viceversa ad ognuna di tali combinazioni ne corrisponde una d classe n; adunque i due numeri $\begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}_h$, $\begin{Bmatrix} m \\ mh-n \end{Bmatrix}_h$ sono uguali:

Se $n = mh$ la (5) diventa:

$$\begin{Bmatrix} m \\ mh \end{Bmatrix}_h = \begin{Bmatrix} m \\ mh - mh \end{Bmatrix}_h = \begin{Bmatrix} m \\ 0 \end{Bmatrix}_h .$$

Ma come abbiamo visto (4) è: $\begin{Bmatrix} m \\ mh \end{Bmatrix}_h = 1$. Adunque siamo condott a ritenere

$$\begin{Bmatrix} m \\ 0 \end{Bmatrix}_h = 1. \qquad (6)$$

2. Delle combinazioni in questione, quelle che non contengono un dato elemento sono evidentemente in numero di $\begin{Bmatrix} m-1 \\ n \end{Bmatrix}_h$; quelle che lo contengono una, due, ... h volte sono rispettivamente in numero di $\begin{Bmatrix} m-1 \\ n-1 \end{Bmatrix}_h$, $\begin{Bmatrix} m-1 \\ n-2 \end{Bmatrix}_h$, ... $\begin{Bmatrix} m-1 \\ n-h \end{Bmatrix}_h$.

Adunque:

$$\begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}_h = \begin{Bmatrix} m-1 \\ n \end{Bmatrix}_h + \begin{Bmatrix} m-1 \\ n-1 \end{Bmatrix}_h + \begin{Bmatrix} m-1 \\ n-2 \end{Bmatrix}_h + \ldots + \begin{Bmatrix} m-1 \\ n-h \end{Bmatrix}_h . \qquad (7)$$

Se $m = 1$, ed $h = n$, tale relazione diventa:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ h \end{Bmatrix}_h = \begin{Bmatrix} 0 \\ h \end{Bmatrix}_h .$$

E poichè $\begin{Bmatrix} 1 \\ h \end{Bmatrix}_h = 1$, riterremo:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ h \end{Bmatrix}_h = 1. \qquad (8)$$

La proprietà rappresentata dalla (7) permette di costruire facilmente gli specchi dei valori del simbolo $\begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}_h$. Ad ogni valore di h corrisponde uno di questi specchi che diremo *triangolo delle* $\{\ \}_h$, o *corrispondente all'indice* h, e che indicheremo con T_h. Evidentemente il triangolo T_1 è il noto triangolo di Tartaglia. Ecco il prospetto de' triangoli $T_1, T_2, \ldots$

$$T_1 \equiv \begin{array}{c|cccccccc}
 & 1^a & 2^a & 3^a & 4^a \ldots\ldots & & & & \\
\hline
1^a & 1 = \binom{0}{0} & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & & & & \\
2^a & 1 & 1 & 0 & 0 \ldots\ldots & & & & \\
3^a & 1 & 2 & 1 & 0 \ldots\ldots & & & & \\
\vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & & \\
(m+1)^a & \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \ldots\ldots & \binom{m}{m}, & 0, & 0 \ldots &
\end{array}$$

$$
T_2 \equiv \begin{array}{r|llllll}
 & 1^a & 2^a & 3^a \; \ldots \; (n+1)^a \ldots & & & \\
\hline
1^a & \genfrac\{\}{0pt}{}{0}{0}_2 = 1, & 0, & 0 \; \ldots\ldots\ldots & & & \\
2^a & 1, & 1, & 1, \; 0 \; \ldots\ldots & & & \\
3^a & 1, & 2, & 3, \; 2, \; 1, \; 0 \ldots & & & \\
\vdots & \ldots & \ldots & \ldots & & & \\
(m+1)^a & \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{0}_2, & \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{1}_2, & \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{2}_2 \ldots\ldots \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{n}_2, \ldots \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{2m}_2, \; 0, \; 0, \ldots & & & \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & & &
\end{array}
$$

$$
T_h \equiv \begin{array}{r|llll}
 & 1^a & 2^a & 3^a \ldots (h+)^{ma} \; \ldots \; (n+1)^a & \\
\hline
1^a & \genfrac\{\}{0pt}{}{0}{0}_h = 1, & 0, & 0, \ldots & \\
2^a & \genfrac\{\}{0pt}{}{1}{0}_h = 1, & \genfrac\{\}{0pt}{}{1}{1}_h = 1, & \genfrac\{\}{0pt}{}{1}{2}_h \ldots \genfrac\{\}{0pt}{}{1}{h}_h = 1, \; 0, \; 0, \ldots & \\
3^a & \genfrac\{\}{0pt}{}{2}{0}_h, & \genfrac\{\}{0pt}{}{2}{1}_h \ldots\ldots\ldots & \genfrac\{\}{0pt}{}{2}{2h}_h, \; 0, \; 0, \ldots & \\
\vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
(m+1)^a & \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{0}_h, & \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{1}_h \ldots\ldots\ldots & \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{n}_h, \ldots \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{mh}_h, \; 0, \; 0 \ldots &
\end{array}
$$

Osservando il triangolo T_h è agevole constatare:

1° la 1^a orizzontale contiene un primo elemento uguale ad 1 e tutti i rimanenti sono zeri;

2° la seconda orizzontale contiene $h+1$ elementi iniziali uguali ad 1, e tutti i rimanenti sono zeri;

3° segue dalla (7) che: un qualsiasi elemento di un'orizzontale si ottiene sommando quello che gli sta sopra con gli h elementi a sinistra di quest'ultimo, appartenenti all'orizzontale sovrastante a quella considerata. Perciò i triangoli T_1, T_2, ... si costruiscono facilmente.

T_1 ovvero triangolo delle $\{\ \}_1$; è il triangolo dei coefficienti binomiali

1	0	0	0	0	0...						
1	1	0	0	0	0...						
1	2	1	0	0	0...						
1	3	3	1	0	0...						
1	4	6	4	1	0...						
1	5	10	10	5	1	0	0...				
1	6	15	20	15	6	1	0	0...			
1	7	21	35	35	21	7	1	0...			
1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0...	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0...

T_2 ovvero triangolo dei $\{\ \}_2$

1	0	0	0	0	0...										
1	1	1	0	0	0	0...									
1	2	3	2	1	0	0...									
1	3	6	7	6	3	1	0	0...							
1	4	10	16	19	16	10	4	1	0	0...					
1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1	0	0...			
1	6	21	50	90	126	141	126	90	50	21	6	1	0	0...	
1	7	28	77	161	266	357	393	357	266	161	77	28	7	1	0...
. . .															

T_3 ovvero triangolo dei $\{\ \}_3$

1	0	0	0...										
1	1	1	1	0	0	0...							
1	2	3	4	3	2	1	0	0	0...				
1	3	6	10	12	12	10	6	3	1	0	0	0...	
1	4	10	20	31	40	44	40	31	20	10	4	1	0...
. . .													

T_4 ovvero triangolo dei $\{\ \}_4$

1	0	0	0...														
1	1	1	1	1	0	0	0	0...									
1	2	3	4	5	4	3	2	1	0	0	0	0...					
1	3	6	10	15	18	19	18	15	10	6	3	1	0	0	0	0...	
1	4	10	20	35	52	68	80	85	80	68	52	35	20	10	4	1	0...
. . .																	

ecc., ecc.

4°. Ogni orizzontale di T_4 è una successione numerica; tenuto conto della proprietà precedente e dei risultati esposti al § 1°, si ha:

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{ {m \atop 0} \right\}_h + \left\{ {m \atop 1} \right\}_h + \left\{ {m \atop 2} \right\}_h + \ldots + \left\{ {m \atop mh} \right\}_h = (h+1)^m \\
&\left\{ {m \atop 0} \right\}_h - \left\{ {m \atop 1} \right\}_h + \left\{ {m \atop 2} \right\}_h - \ldots \pm \left\{ {m \atop mh} \right\}_h = 1; \qquad h \text{ pari} \\
&\left\{ {m \atop 0} \right\}_h - \left\{ {m \atop 1} \right\}_h + \left\{ {m \atop 2} \right\}_h - \ldots \pm \left\{ {m \atop mh} \right\}_h = 0; \qquad h \text{ dispari}
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Inoltre:

$$\left\{ {m \atop i} \right\}_h + \left\{ {m \atop i+h+1} \right\}_h + \left\{ {m \atop i+2(h+1)} \right\}_h + \ldots + \left\{ {m \atop i+s(h+1)} \right\}_h = (h+1)^{m-1}$$

per $i=0,1,\ldots h$, essendo s il maggiore intero tale che:

$$i+s(h+1)\leqslant mh+1$$

e:

$$\begin{Bmatrix} m \\ mh+1-i\end{Bmatrix}_h+\begin{Bmatrix} m \\ mh+1-i-(h+1)\end{Bmatrix}_h+$$
$$+\begin{Bmatrix} m \\ mh+1-i-2(h+1)\end{Bmatrix}_h+\cdots+\begin{Bmatrix} m \\ mh+1-i-s(h+1)\end{Bmatrix}_h=h+1)^{m-1}$$

per $i=0,1,\ldots h$, essendo s il maggior intero tale che:

$$mh+1-i-s(h+1)\geqslant 0$$

ovvero:

La somma dei numeri della $(m+1)^{ma}$ *orizzontale vale* $(h+1)^m$.

La somma algebrica dei numeri di una orizzontale qualsiasi presi alternativamente col segno + e — vale 1 *o zero secondochè* h *è pari o dispari.*

Supponendo la successione dei primi $mh+1$ *termini della* $(m+1)^a$ *orizzontale, in gruppi di* $h+1$ *numeri da sinistra a destra o viceversa, la somma dei termini primi di tali gruppi, vale la somma dei termini secondi, terzi,... e tutte queste somme valgono* $(h+1)^{m-1}$.

5°. Per la (5) si verifica che in ciascuna orizzontale i due termini estremi non nulli, o due termini non nulli equidistanti da essi, sono uguali.

6°. Per le (2) e (3) si verifica che gli elementi non nulli delle prime $h+1$ verticali di T_h sono ordinatamente uguali a quelli delle corrispondenti verticali di T_1; varia però il numero degli zeri iniziali sovrastanti il primo elemento non nullo.

Da ciò risulta che una orizzontale di T_h ha comuni con quella di T_{h-1} avente lo stesso numero d'ordine, i primi h elementi. Segue pertanto, qualunque sia m:

$$\begin{Bmatrix} m \\ n\end{Bmatrix}_h=\begin{Bmatrix} m \\ n\end{Bmatrix}_{h-1}=\begin{Bmatrix} m \\ n\end{Bmatrix}_{h-2}=\cdots=\begin{Bmatrix} m \\ n\end{Bmatrix}_n$$

per $n=0,1,2,\ldots h-1$.

Adunque per un dato valore di h le espressioni che interessano sono quelle di $\begin{Bmatrix} m \\ h\end{Bmatrix}_h$, $\begin{Bmatrix} m \\ h+1\end{Bmatrix}_h$, $\begin{Bmatrix} m \\ h+2\end{Bmatrix}_h\cdots$, giacchè per $0\leqslant h-k<h$ si ha:

$$\begin{Bmatrix} m \\ h-k\end{Bmatrix}_h=\begin{Bmatrix} m \\ h-k\end{Bmatrix}_{h-k}$$

perciò appunto abbiamo dapprima stabilita la (1).

7°. Per le (2) e (3) si verifica che i primi $h+1$ elementi della orizzontale m^{ma} valgono rispettivamente

$$\binom{m-2}{0},\ \binom{m-1}{1},\ \binom{m}{2},\ldots\binom{m+h-2}{h}.$$

8°. Essendo n ed h due interi positivi non nulli, si indichi con $E' \frac{n}{h}$ il quoto di n ed h, quando n è divisibile per h, oppure la parte intera di esso quoto aumentata di 1 quando n non è divisibile per h. Si può asserire che: nella $(n+1)^{ma}$ verticale di T_h al primo elemento non nullo sono sovrapposti $E' \frac{n}{h}$ zeri.

9°. I numeri della verticale $(n+1)^{ma}$ di T_h costituiscono, qualunque sia h, una progressione d'ordine n, tale cioè che le differenze n^{me} dei suoi elementi sono costanti e non nulle. Più precisamente tali differenze valgono uno.

Per dimostrare tali proprietà osserviamo anzi tutto che essa vale per i numeri di T_1 che sono i coefficienti binomiali; rapporto a tali coefficienti essa è una proprietà ben nota. Adunque essa vale per le prime $h+1$ verticali di T_h poichè esse, come abbiamo già osservato, coincidono, salvo gli zeri iniziali, colle prime $h+1$ verticali di T_1.

Volendo dimostrarla per le rimanenti verticali, fissiamo un valore di h; p. es. supponiamo $h=2$. Siano $u_0, u_1, u_2, \ldots$; $v_0, v_1, v_2, \ldots$ due successioni numeriche. Costruiamo una successione $w_0, w_1, w_2, \ldots$ assumendo:

$$\begin{aligned}
w_0 &= 0\\
w_1 &= u_0 + v_0 + w_0\\
w_2 &= u_1 + v_1 + w_1\\
w_0 &= u_2 + v_2 + w_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Disponiamo i numeri delle tre successioni in quest'ordine:

$$\begin{matrix}
u_0 & v_0 & w_0\\
u_1 & v_1 & w_1\\
u_2 & v_2 & w_2\\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{matrix}$$

e formiamo le differenze degli elementi dell'ultima verticale. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\Delta w_0 &= w_1 - w_0 = u_0 + v_0\\
\Delta w_1 &= w_2 - w_1 = (u_1 + v_1 + w_1) - (u_0 + v_0 + w_0) = \Delta u_0 + \Delta v_0 + \Delta w_0\\
\Delta w_2 &= w_3 - w_2 = (u_2 + v_2 + w_2) - (u_1 + v_1 + w_1) = \Delta u_1 + \Delta v_1 + \Delta w_1\\
&\vdots\\
\Delta w_n &= \Delta u_{n-1} + \Delta v_{n-1} + \Delta w_{n-1}
\end{aligned}$$

quindi:

$$\begin{aligned}
\Delta^2 w_0 &= \Delta u_0 - \Delta w_0\\
\Delta^2 w_1 &= \Delta w_2 - \Delta w_1 = \Delta^2 u_0 + \Delta^2 v_0 + \Delta^2 w_0\\
&\vdots\\
\Delta^2 w_n &= \Delta^2 u_{n-1} + \Delta^2 v_{n-1} + \Delta^2 w_{n-1}
\end{aligned}$$

ed in generale:

$$\Delta^i w_n = \Delta^i u_{n-1} + \Delta^i v_{n-1} + \Delta^i w_{n-1}$$

perciò:

$$\Delta^{i+1}w_{n-1} = \Delta^i w_n - \Delta^i w_{n-1} = \Delta^i u_{n-1} + \Delta^i v_{n-1}.$$

Ora se $u_0, u_1, u_2, \ldots$ è una progressione d'ordine $i-1$, e $v_0, v_1, v_2, \ldots$ una progressione d'ordine i, sarà $\Delta^i u_n = 0$, qualunque sia n, epperò:

$$\Delta^{i+1}w_{n-1} = \Delta^i v_{n-1} = \text{cost.}$$

cioè $w_0, w_1, w_2, \ldots$ sarà una progressione di ordine $i+1$.

Ora considerando ad es. il triangolo T_2, le prime tre verticali sono progressioni rispettivamente di ordine 0, 1, 2 quindi la 4^a, 5^a, ... (inclusi in esse gli zeri iniziali) sono progressioni rispettivamente dell'ordine 3, 4, ... colla costante uguale ad uno. Analogo ragionamento potrebbe farsi sul triangolo T_3 ecc.

3. Si ha la relazione:

$$\left\{ {m \atop n} \right\}_h = \sum_{p_1,\ldots p_q} \binom{m}{p_1}\binom{m-p_1}{p_q}\cdots\binom{m-p_1-\ldots-p_{q-1}}{p_q} =$$

$$= \sum_{p_1,\ldots p_q} \cdot \frac{|\underline{m}}{|\underline{p_1}\;|\underline{p_2}\ldots|\underline{p_q}\;|\underline{(m-p_1-p_2-p_q)}} \quad (10),$$

il segno Σ intendendosi esteso a tutti i sistemi di valori positivi interi non nulli delle $p_1, \ldots p_q$ tali che sia possibile associare ad uno di essi un secondo sistema di numeri positivi interi non nulli $k_1, k_2, \ldots, k_q$, in modo da avere

$$p_1k_1 + p_2k_2 + \ldots + p_qk_q = n$$
$$k_1, k_2, \ldots, k_q \leqslant h; \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_q \leqslant m$$

epperò:

$$q \leqslant m$$

ritenendo però identici, e quindi equivalenti ad un solo, due sistemi delle k tali che i prodotti pk ad essi corrispondenti siano, salvo l'ordine, i medesimi; p. es.

$$\underset{p_1\,k_1}{1.3} + \underset{p_2\,k_2}{1.2} + \underset{p_3\,k_3}{2.4} + \underset{p_4\,k_4}{2.1} \equiv \underset{p_1\,k_1}{1.2} + \underset{p_2\,k_2}{2.1} + \underset{p_3\,k_3}{2.4} + \underset{p_4\,k_4}{1.3}.$$

Infatti in corrispondenza di una particolare coppia di sistemi delle p e k possiamo avere una combinazione di m elementi diversi n ad n con ripetizione fino ad h scegliendo p_1 elementi e ripetendo ciascuno di essi k_1 volte, poi p_2 elementi tra i rimanenti e ripetendo ognuno k_2 volte ... infine p_q elementi fra gli ultimi rimasti e ripetendo ognuno k_q volte. Ora p_1 elementi si possono scegliere fra gli m dati in $\binom{m}{p_1}$ modi: altri p_2 elementi possono scegliersi tra i rimanenti $m-p_1$ elementi in $\binom{m-p_1}{p_2}$ modi ecc.... ed è chiaro che esaurite tutte le coppie di sistemi delle p e k, sono esaurite tutte le suddette combinazioni. Risulta pure evidente che per una data coppia utile di sistemi delle p e k i prodotti $p_1 k_1, \ldots, p_q k_q$ devono differire o per qualche fattore o per l'ordine degli stessi fattori.

Es. Si voglia calcolare il valore di $\left\{\begin{matrix}6\\5\end{matrix}\right\}_3$. Si dovrà aversi:

$$\begin{array}{ll}
p_1 k_1 + p_2 k_2 + p_3 k_3 + p_4 k_4 + p_5 k_5 + p_6 k_6 & = 5 \\
5 \,.\, 1 & = 5 \\
3 \,.\, 1 + 1 \,.\, 2 & = 5 \\
1 \,.\, 3 + 2 \,.\, 1 & = 5 \\
2 \,.\, 2 + 1 \,.\, 1 & = 5 \\
1 \,.\, 3 + 1 \,.\, 2 & = 5.
\end{array}$$

Epperò:

$$\left\{\begin{matrix}6\\5\end{matrix}\right\}_3 = \binom{6}{5} + \binom{6}{3}\binom{3}{1} + \binom{6}{1}\binom{5}{2} + \binom{6}{2}\binom{4}{1} + \binom{6}{1}\binom{5}{1} = 216.$$

La (10) permette di esprimere il valore di $\left\{\begin{matrix}m\\n\end{matrix}\right\}_h$ mediante numeri della forma $\binom{r}{s}$, ma evidentemente non è sempre di comoda e rapida applicazione.

Per es. per $n + 1$ si ha:

$$\begin{array}{l}
p_1 \; k_1 = 1 \\
1 \,.\, 1 = 1.
\end{array}$$

Pertanto:

$$\left\{\begin{matrix}m\\1\end{matrix}\right\}_h = \binom{m}{1} = m.$$

Per $n = 2$, si ha:

$$\begin{array}{l}
p_1 \; k_1 = 2 \\
1 \,.\, 2 = 2 \\
2 \,.\, 1 = 2.
\end{array}$$

Quindi:

$$\left\{\begin{matrix}m\\2\end{matrix}\right\}_h = \binom{m}{1} + \binom{m}{2} = m + \binom{m}{2}.$$

E per $n = 3$, risulta:

$$\begin{array}{ll}
p_1 k_1 = 3\,; & p_1 \; k_1 + p_2 k_2 = 3 \\
3 \,.\, 1 = 3 & 1 \,.\, 1 + 1 \,.\, 2 = 3 \\
1 \,.\, 3 = 3 & 1 \,.\, 2 + 1 \,.\, 1 = 3.
\end{array}$$

Quindi:

$$\left\{\begin{matrix}m\\3\end{matrix}\right\}_h = \binom{m}{1} + \binom{m}{3} + 2\binom{m}{1}\binom{m-1}{1} = m\,(2m-1) + \binom{m}{3} \quad \text{ecc.} \ldots$$

Invece della (10) ci si può servire della seguente:

$$\left\{ {m \atop n} \right\}_h = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{h+1}} \frac{|\underline{m}}{|\underline{\alpha_1}\, |\underline{\alpha_2} \ldots |\underline{\alpha_{h+1}}} \qquad (10')$$

intendendo il segno Σ esteso a tutti i sistemi di valori positivi interi anche nulli delle $\alpha_1, \ldots \alpha_{h+1}$ tali che:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{h+1} = m$$
$$\alpha_2 + 2\alpha_3 + \ldots + h\alpha_{h+1} = n.$$

Ed invero se $\alpha_a, \alpha_b, \ldots \alpha_l$ sono le α non nulle appartenenti ad uno di tali sistemi di valori, e sono in numero di q, avremo:

$$(a-1)\,\alpha_a + (b-1)\,\alpha_b + \ldots + (l-1)\,\alpha_l = n$$

e posto:

$$p_1 = \alpha_a, \quad p_2 = \alpha_b, \ldots p_q = \alpha_l; \quad k_1 = a-1, \quad k_2 = b-1, \ldots k_q = l-1$$

sarà:

$$p_1 k_1 + p_2 k_2 + \ldots + p_q k_q = n$$

ed inoltre, evidentemente:

$$p_1, p_2, \ldots p_q \leqslant m; \qquad k_1, k_2, \ldots k_q \leqslant h.$$

Ponendo infine

$$\alpha_1 = m - (\alpha_a + \alpha_b + \ldots + \alpha_l)$$

sarà pure:

$$\alpha_1 + \alpha_a + \ldots + \alpha_l = m.$$

Adunque ad un sistema di valori delle α, quale si richiede per l'applicazione della (10'), ne corrisponde uno delle p e k, quale si richiede per l'applicazione della (10). Viceversa le relazioni precedenti fanno corrispondere ad ogni sistema di valori delle p e k un sistema di valori delle α. Perciò le (10) e (10') sono equivalenti.

Dalla (10)' si deduce una importante consegnenza. Dalla nota formola dello sviluppo della potenza m^{ma} di un polinomio si ha:

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^h)^m + \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{h+1}} \frac{|\underline{m}}{|\underline{\alpha_1}\, |\underline{\alpha_2} \ldots |\underline{\alpha_{h+1}}}\, x^{\alpha_2 + 2\alpha_3 + \ldots + h\alpha_{h+1}}$$

il segno Σ essendo esteso a tutti i sistemi di valori positivi interi, anche nulli, delle $\alpha_1, \ldots \alpha_{h+1}$ tali che:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{h+1} = m.$$

Adunque per avere nello sviluppo di $(1 + x + \ldots + x^h)^m$ in serie di potenze di x il coefficiente di x^n, basta scegliere $\alpha_1, \ldots \alpha_{h+1}$ per modo che $\alpha_2 + 2\alpha_3 + \ldots + h\alpha_{h+1} = n$. Tal coefficiente è adunque il numero $\left\{ {m \atop n} \right\}_h$. Abbiamo pertanto:

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^h)^m = \left\{ {m \atop 0} \right\}_h + \left\{ {m \atop 1} \right\}_h x + \left\{ {m \atop 2} \right\}_h x^2 + \ldots + \left\{ {m \atop mh} \right\}_h x^{mh}$$

ovvero:

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^h)^m = \sum_0^{mh}{}_n \left\{ {m \atop n} \right\}_h x^n. \tag{10''}$$

I numeri $\binom{m}{n}$, ovvero $\left\{ {m \atop n} \right\}_1$, si dicono come è noto *coefficienti binomiali.*

I numeri $\left\{ {m \atop n} \right\}_2$ potranno chiamarsi *coefficienti trinomiali*... ed in generale i numeri $\left\{ {m \atop n} \right\}_h$ potranno chiamarsi *coefficienti polinomiali.* [1]

Se nella (10″) si suppone $x = \pm 1$ si ritrovano le proprietà significate dalle prime tre delle (9). Non è dunque necessario, per dimostrarle ricorrere alla formula dello sviluppo della potenza di un polinomio.

Dalla (10″) deriva una proprietà notevole dei numeri $\left\{ {m \atop n} \right\}_h$. Si ha:

$$(1 + x + \ldots + x^h)^{m+p} = (1 + x + \ldots + x^h)^m\,(1 + x + \ldots + x^h)^p =$$
$$= \sum_0^{mh}{}_i \left\{ {m \atop i} \right\}_h x^i \,.\, \sum_0^{ph}{}_j \left\{ {p \atop j} \right\} x^j.$$

D'altronde:

$$(1 + x + \ldots + x^h)^{m+p} = \sum_0^{(m+p)h}{}_r \left\{ {m+p \atop r} \right\}_h x^r$$

Uguagliando i coefficienti ei x^r nei secondi membri, risulta:

$$\left\{ {m+p \atop r} \right\}_h = \left\{ {m \atop 0} \right\}_h \left\{ {p \atop r} \right\}_h + \ldots + \left\{ {m \atop i} \right\}_h \left\{ {p \atop r-i} \right\}_h + \ldots + \left\{ {m \atop r} \right\}_0 \left\{ {p \atop 0} \right\}_h \tag{10'''}$$

vale a dire: *Se ai primi* r + 1 *numeri della* $(m + 1)^a$ *orizzontale di* T_h *si fanno corrispondere i primi* r + 1 *della* $(p + 1)^a$ *e si moltiplicano il* 1°, 2°,... *ultimo della* 1ª *serie per l'ultimo, penultimo,.., delle* 2° *ri-*

---

(1) Il LUCAS nella *Théorie des nombres*, Cap. 1°, n. 6, es. II, considerando i numeri del triangolo T_2, non dal punto di vista del loro significato combinatorio, osserva che quelli della $(m + 1)^a$ orizzontale sono i coefficienti delle potenze di x nello sviluppo di $(1 + x + x^2)^m$.

Le espressioni di $\left\{ {m \atop 1} \right\}_h$, $\left\{ {m \atop 2} \right\}_h$, ... dedotte dalla (10), trovansi anche in G. BELLACCHI, *Lezioni di Algebra complementare*, lez.ª X. L'autore trattando della potenza m^{ma} di un polinomio, si occupa della potenza m^{ma} del polinomio $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ ed indica con A_i il coefficiente di x^i nello sviluppo in serie di potenze di x dell'espressione $(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)^m$. Cambiando n in h, i in n e posto $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 1$, A_i diventa $\left\{ {m \atop n} \right\}_h$. Non è però rilevato il significato combinatorio dei numeri $\left\{ {m \atop n} \right\}_h$.

spettivamente, la somma dei prodotti ottenuti vale l'$(r+1)^a$ *della orizzontale* $(m+p+1)^a$. Daremo in seguito di tale proprietà una dimostrazione indipendente dalla formola della potenza di un polinomio.

La $(10'')$ è importante anche perchè in dipendenza di essa possono trovarsi facilmente relazioni ricorrenti che fanno dipendere $\left\{{m \atop n}\right\}_h$ da $\left\{{m \atop n-1}\right\}_h, \ldots \left\{{m \atop 0}\right\}_h$ e permettono quindi di ottenere convenienti espressioni di $\left\{{m \atop 1}\right\}_h, \left\{{m \atop 2}\right\}_h, \ldots$ (1)

1°. Posto $X = 1 + x + \ldots + x^h$

$$Y = X^m = \left\{{m \atop 0}\right\}_h + \left\{{m \atop 1}\right\}_h + \ldots + \left\{{m \atop i}\right\}_h x^i + \ldots + \left\{{m \atop mh}\right\}_h x^{mh}$$

si ha, derivando rapporto ad x:

$$mX^{m-1}X' = Y'$$

e moltiplicando per X:

$$mYX' = XY'.$$

Uguagliando i coefficienti di x^n negli sviluppi in serie di potenze di x dei due membri, risulta:

$$m(n+1)\left\{{m \atop 0}\right\}_h + mn\left\{{m \atop 1}\right\}_h + m(n-1)\left\{{m \atop 2}\right\}_h + \ldots$$
$$\ldots + 3m\left\{{m \atop n-2}\right\}_h + 2m\left\{{m \atop n-1}\right\}_h + m\left\{{m \atop n}\right\}_h = (n+1)\left\{{m \atop n+1}\right\}_h +$$
$$+ n\left\{{m \atop n}\right\}_h + (n-1)\left\{{m \atop n-1}\right\}_h + \ldots + 2\left\{{m \atop 2}\right\}_h + \left\{{m \atop 1}\right\}_h$$

ovvero, tenuto conto che $\left\{{m \atop 0}\right\}_h = 1$, e dopo aver cambiato n in $n-1$:

$$\left\{{m \atop n}\right\}_h = \frac{1}{n}\Big[m - n + 1\left\{{m \atop n-1}\right\}_h + [2(m+1)-n]\left\{{m \atop n-2}\right\}_h +$$
$$+ [3(m+1)-n]\left\{{m \atop n-3}\right\}_h \ldots + [(n-2)(m+1)-n]\left\{{m \atop 2}\right\}_h +$$
$$+ [(n-1)(m+1)-n]\left\{{m \atop 1}\right\}_h + [n(m+1)-n]\left\{{m \atop 0}\right\}_h\Big]. \qquad (10^v)$$

---

(1) Le due relazioni ricorrenti tra $\left\{{m \atop n}\right\}_h \cdot \left\{{m \atop n-1}\right\}_h, \ldots \left\{{m \atop 0}\right\}_h$ che qua esponiamo non sono nuove. Le dimostrazioni che ne diamo, trovansi in G. BELLACCHI, *Lezioni di Algebra elementare*, vol. II, lez.^{e} XVII, n. 117, eserc. n. 4, II parte. Al n. 117 trovasi la relazione tra i coefficienti A_0, $A_1, \ldots A_l$ di $X^m = (a_0 + a_1x + \ldots a_nx^n)^m = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_{mn}x^{mn}$ che, per $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 1$, rinviene alla (10^v). Alla relazione che conduce alla formula (10^v) si accenna nell'esercizio n. 4 (II parte) della lez.^{e} XVII.

Risulta ad es.:

$$\genfrac\{\}{0pt}{}{m}{1}_h = m; \qquad \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{2}_h = \frac{m(m-1)}{2} + m \quad \text{ecc.}$$

2°. L'identità (10''), poichè $1 + x + \ldots + x^h = \dfrac{1 - x^{h+1}}{1 - x}$, può scriversi:

$$(1 - x^{h+1})^m = (1 - x)^m \left[\genfrac\{\}{0pt}{}{m}{0}_h + \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{1}_h x + \ldots + \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{mh}_h x^{mh} \right].$$

Sviluppando $(1 - x^{h-1})^m$ ed $(1 - x)^m$ in serie di potenze di x, indi eguagliando i coefficienti di x^n nei due membri, risulta la relazione

$$\binom{m}{n} - \binom{m}{n-1} \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{1}_h + \binom{m}{n-2} \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{2}_h - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} \binom{m}{1} \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{n-1}_h + (-1)^n \binom{m}{0} \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{n}_h = \begin{cases} (-1)^{k-n} \dbinom{m}{k} \\ 0 \end{cases}$$

nella quale si porrà $(-1)^{k-n} \dbinom{m}{k}$ al 2° membro, se $n = k(h+1)$, cioè se n è multiplo di $h+1$, e si porrà 0 se n non è multiplo di $h+1$.

Moltiplicando i due membri per $(-1)^{n+1}$, si ha:

$$\left.\begin{array}{l}
\genfrac\{\}{0pt}{}{m}{n}_h = \dbinom{m}{1} \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{n-1}_h - \dbinom{m}{2} \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{n-2}_h + \ldots \\
\qquad\qquad \ldots + (-1)^n \dbinom{m}{n-1} \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{1}_h + (-1)^{n+1} \dbinom{m}{n} + (-1)^k \dbinom{m}{k} \\
\text{se } n = k(h+1), \text{ e:} \\
\genfrac\{\}{0pt}{}{m}{n}_h = \dbinom{m}{1} \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{n-1}_h + \dbinom{m}{2} \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{n-2}_h + \ldots \\
\qquad\qquad \ldots + (-1)^n \dbinom{m}{n-1} \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{1}_h + (-1)^{n+1} \dbinom{m}{n} \\
\text{se } n \neq k(h+1).
\end{array}\right\} \quad (10^{VI})$$

Per es. se $n = 1, 2, 3 \ldots$ risulta:

$$\genfrac\{\}{0pt}{}{m}{1}_h = \binom{m}{1} = m$$

$$\genfrac\{\}{0pt}{}{m}{2}_h = \binom{m}{1} \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{1}_h - \binom{m}{2} = m^2 - \frac{m(m-1)}{2} = \frac{m(m+1)}{2}$$

$$\genfrac\{\}{0pt}{}{m}{3}_2 = \binom{m}{1} \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{2}_2 - \binom{m}{2} \genfrac\{\}{0pt}{}{m}{1}_2 + \binom{m}{3} - \binom{m}{1} = m \frac{m(m+1)}{2} -$$
$$- \frac{m(m-1)}{2} m + \frac{m(m-1)(m-2)}{6} - m = \frac{m(m-1)(m+4)}{6}.$$

4. Indichiamo con $a, b, \ldots l$ gli m elementi differenti dati. Supponiamo scritte tutte le loro combinazioni di classe n con ripetizione fino ad h. Avremo scritto in tutto $n \left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}_h$ lettere e poichè evidentemente ciascuna lettera è stata scritta lo stesso numero di volte, esso dovrà valere $\frac{n}{m} \left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}_h$. Ora tra le suddette combinazioni ve ne sono $\left\{ \begin{matrix} m-1 \\ n-1 \end{matrix} \right\}_h$ che contengono una delle lettere, p. es. la lettera a, una sola volta; ve ne sono $\left\{ \begin{matrix} m-1 \\ n-2 \end{matrix} \right\}_h$ che la contengono due volte,... infine $\left\{ \begin{matrix} m-1 \\ n-h \end{matrix} \right\}_h$ che la contengono h volte.

Adunque la lettera a è stata scritta complessivamente $\left\{ \begin{matrix} m-1 \\ n-1 \end{matrix} \right\}_h + 2 \left\{ \begin{matrix} m-1 \\ n-2 \end{matrix} \right\}_h + \ldots + h \left\{ \begin{matrix} m-1 \\ n-h \end{matrix} \right\}_h$ volte. Risulterà pertanto:

$$\frac{n}{m} \left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}_h = \left\{ \begin{matrix} m-1 \\ n-1 \end{matrix} \right\}_h + 2 \left\{ \begin{matrix} m-1 \\ n-2 \end{matrix} \right\}_h + 3 \left\{ \begin{matrix} m-1 \\ n-3 \end{matrix} \right\}_h + \ldots + h \left\{ \begin{matrix} m-1 \\ n-h \end{matrix} \right\}_h \ldots \quad (11)$$

Se in questa relazione sostituiamo ad $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}_h$ l'espressione data dalla (7), poi cambiamo m in $m+1$, abbiamo, dopo semplici trasformazioni:

$$\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}_h = \frac{1}{n} \Big[(m-n+1) \left\{ \begin{matrix} m \\ n-1 \end{matrix} \right\}_h + [2(m+1)-n] \left\{ \begin{matrix} m \\ n-2 \end{matrix} \right\}_h + $$
$$+ [3(m+1)-n] \left\{ \begin{matrix} m \\ n-3 \end{matrix} \right\}_h + \ldots + [h(m+1)-n] \left\{ \begin{matrix} m \\ n-h \end{matrix} \right\}_h \Big]. \quad (12)$$

Le (11) e (12) permettono di esprimere $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}_h$ mediante numeri della stessa forma coi denominatori $n-1, n-2, \ldots, n-h$.

Se nella (12) si sostituisce ad $\left\{ \begin{matrix} m \\ n-h \end{matrix} \right\}_h$ l'espressione che da essa si ottiene cambiando n in $n-h$, poi nella relazione ottenuta si sostituisce ad $\left\{ \begin{matrix} m \\ n-2h \end{matrix} \right\}_h$ l'espressione che si ha dalla (12) cambiando n in $n-2h \ldots$ e così via, quante volte è possibile, si ha:

$$\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}_h = \sum_{1}^{h-1}{}_{k_1} \frac{k_1(m+1)-n}{n} \left\{ \begin{matrix} m \\ n-k_1 \end{matrix} \right\}_h +$$
$$+ \sum_{1}^{h-1}{}_{k_2} \frac{h(m+1)-n}{n} \, \frac{k_2(m+1)-(n-h)}{n-h} \left\{ \begin{matrix} m \\ n-h-k_2 \end{matrix} \right\}_h +$$
$$+ \sum_{1}^{h-1}{}_{k_3} \frac{h(m+1)-n}{n} \, \frac{h(m+1)-(n-h)}{n-h} \, \frac{k_3(m+1)-(n-2h)}{n-2h} \left\{ \begin{matrix} m \\ n-2h-k_3 \end{matrix} \right\}_h + \ldots$$

ovvero:

$$\begin{aligned}\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = \sum_1^p i \Bigg[& \frac{h(m+1)-n}{n} \frac{h(m+1)-(n-h)}{n-h} \cdots \\ & \cdots \frac{h(m+1)-[n-(i-2)h]}{n-(i-2)h} \sum_1^{h-1} k_i \frac{k_i(m+1)-[n-(i-1)h]}{n-(i-1)h} \left\{\begin{matrix} m \\ n-(i-1)h-k_i \end{matrix}\right\}_h \Bigg] + \\ & + \left\{\begin{array}{l} \dfrac{h(m+1)-n}{n} \dfrac{h(m+1)-(n-h)}{n-h} \cdots \\ \qquad \cdots \dfrac{h(m+1)-[n-(p-1)h]}{n-(p-1)h} \left\{\begin{matrix} m \\ n-ph \end{matrix}\right\}_h \quad \text{se } n = ph \\ \sum_1^r k_{p+1} \dfrac{h(m+1)-n}{n} \dfrac{h(m+1)-(n-h)}{n-h} \cdots \\ \qquad \cdots \dfrac{h(m+1)-[n-(p-1)h]}{n-(p-1)h} \dfrac{k_{p+1}(m+1)-(n-ph)}{n-ph} \left\{\begin{matrix} m \\ n-ph-k_{p+1} \end{matrix}\right\}_h \\ \qquad\qquad \text{se } n = ph + r; \quad r < h \end{array}\right. \end{aligned} \cdots \quad (13)$$

la quale fa dipendere $\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_h$ da $\left\{\begin{matrix} m \\ n-1 \end{matrix}\right\}_h$, $\left\{\begin{matrix} m \\ n-2 \end{matrix}\right\}_h$, $\ldots \left\{\begin{matrix} m \\ 0 \end{matrix}\right\}_h$, eccettuati $\left\{\begin{matrix} m \\ n-h \end{matrix}\right\}_h$, $\left\{\begin{matrix} m \\ n-2h \end{matrix}\right\}_h$, $\ldots \left\{\begin{matrix} m \\ n-(p-1)h \end{matrix}\right\}_h$ e se $r \neq 0$ anche $\left\{\begin{matrix} m \\ n-ph \end{matrix}\right\}_h$, epperò è comoda per trovare le espressioni $\left\{\begin{matrix} m \\ 1 \end{matrix}\right\}_h$, $\left\{\begin{matrix} m \\ 2 \end{matrix}\right\}_h \ldots$ Da essa si deduce se $n < h$:

$$\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = \sum_1^n k_1 \frac{k_1(m+1)-n}{n} \left\{\begin{matrix} m \\ n-k_1 \end{matrix}\right\}_h; \qquad n < h \ldots \qquad (13')$$

e quindi per $n = 1, 2, \ldots$ risulta:

$$\left\{\begin{matrix} m \\ 1 \end{matrix}\right\}_h = m$$

$$\left\{\begin{matrix} m \\ 2 \end{matrix}\right\}_h = \frac{m(m-1)}{2} + \frac{2m}{2} = \frac{m(m+1)}{2} \quad \text{ecc.}$$

Si ha ad es. riguardo al numero $\left\{\begin{matrix} 5 \\ 8 \end{matrix}\right\}_3$:

$$\begin{aligned}\left\{\begin{matrix} 5 \\ 8 \end{matrix}\right\}_3 = & \left[\frac{6-8}{8}\left\{\begin{matrix} 5 \\ 7 \end{matrix}\right\}_3 + \frac{12-8}{8}\left\{\begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix}\right\}_3\right] + \\ & + \left[\frac{18-8}{8} \cdot \frac{6-5}{5}\left\{\begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix}\right\}_3 + \frac{18-8}{8}\,\frac{12-5}{5}\left\{\begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix}\right\}_3\right] + \\ & + \left[\frac{18-8}{8}\,\frac{18-5}{5}\,\frac{6-2}{2}\left\{\begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix}\right\}_3 + \frac{18-8}{8}\,\frac{18-5}{5}\,\frac{12-2}{2}\left\{\begin{matrix} 5 \\ 0 \end{matrix}\right\}_3\right].\end{aligned}$$

Come vedesi, nel 2° membro non compaiono $\left\{\begin{matrix} 5 \\ 8-5 \end{matrix}\right\}_3$, $\left\{\begin{matrix} 5 \\ 8-2.3 \end{matrix}\right\}_3$.

Sostituendo a $\left\{\begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix}\right\}_3$, $\left\{\begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix}\right\}_3$, $\left\{\begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix}\right\}_3$, $\left\{\begin{matrix} 5 \\ 0 \end{matrix}\right\}_3$ i loro valori, si trova appunto $\left\{\begin{matrix} 5 \\ 8 \end{matrix}\right\}_3 = 155$.

Dalla (11) può dedursi una relazione a quattro termini che costituisce una importante proprietà del simbolo $\begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}_h$.

Passando a fattore nel 2° membro il divisore m del primo, si ha:

$$n \begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}_h = m \left[\begin{Bmatrix} m-1 \\ n-1 \end{Bmatrix}_h + 2 \begin{Bmatrix} m-1 \\ n-2 \end{Bmatrix}_h + \ldots + h \begin{Bmatrix} m-1 \\ n-h \end{Bmatrix}_h \right]$$

e cambiando in questa n in $n-1$:

$$(n-1) \begin{Bmatrix} m \\ n-1 \end{Bmatrix}_h = m \left[\begin{Bmatrix} m-1 \\ n-2 \end{Bmatrix}_h + 2 \begin{Bmatrix} m-1 \\ n-3 \end{Bmatrix}_h + \ldots + h \begin{Bmatrix} m-1 \\ n-h-1 \end{Bmatrix}_h \right].$$

Sottraendo membro a membro, risulta:

$$n \begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}_h - (n-1) \begin{Bmatrix} m \\ n-1 \end{Bmatrix}_h =$$
$$= m \left[\begin{Bmatrix} m-1 \\ n-1 \end{Bmatrix}_h + \begin{Bmatrix} m-1 \\ n-2 \end{Bmatrix}_h + \ldots + \begin{Bmatrix} m-1 \\ n-h \end{Bmatrix}_h - h \begin{Bmatrix} m-1 \\ n-h-1 \end{Bmatrix}_h \right]$$

ovvero tenuto conto della (7):

$$n \begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}_h - (n-1) \begin{Bmatrix} m \\ n-1 \end{Bmatrix}_h = m \left[\begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}_h - \begin{Bmatrix} m-1 \\ n \end{Bmatrix}_h - h \begin{Bmatrix} m-1 \\ n-h-1 \end{Bmatrix}_h \right]$$

ovvero:

$$\begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}_h = \frac{1}{m-n} \left| m \begin{Bmatrix} m-1 \\ n \end{Bmatrix}_h + hm \begin{Bmatrix} m-1 \\ n-h-1 \end{Bmatrix}_h - (n-1) \begin{Bmatrix} m \\ n-1 \end{Bmatrix}_h \right| \ldots \quad (14)$$

Le formole (11), (12) rinvengono per $h=1$ a note proprietà del simbolo $\binom{m}{n}$. La (14), per $h=1$, diventa:

$$\binom{m}{n} = \frac{m}{m-n} \binom{m-1}{n} + \frac{m}{m-n} \binom{m-1}{n-2} - \frac{n-1}{m-n} \binom{m}{n-1},$$

la quale, dopo trasformazioni, può scriversi:

$$n \binom{m}{n} + (n-1) \binom{m}{n-1} + (n-2) \binom{m}{n-2} =$$
$$= (m+n-1) \binom{m-1}{n-1} + (n-1) \binom{m-1}{n-2} + m \binom{m-1}{n-3} \quad (15)$$

notevole relazione fra tre numeri $\binom{m}{n}$, $\binom{m}{n-1}$ e $\binom{m}{n-2}$ ed altri tre $\binom{m-1}{n-1}$, $\binom{m-1}{n-2}$, $\binom{m-1}{n-3}$ che da essi si ottengono diminuendo di un'unità il numeratore ed il denominatore.

5. Considerando ancora la (12) si vede subito che essa si pres bene al calcolo di $\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_h$ in funzione di m.

Per $n=1$; $h=1$, si ha:

$$\left\{\begin{matrix} m \\ 1 \end{matrix}\right\}_1 = m = \frac{m}{|\underline{1}}.$$

Per $n=2$; $h=1,2$, si ha:

$$\left\{\begin{matrix} m \\ 2 \end{matrix}\right\}_1 = \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{|\underline{2}} = \frac{m^2-m}{|\underline{2}}$$

$$\left\{\begin{matrix} m \\ 2 \end{matrix}\right\}_2 = \binom{m+1}{2} = \frac{m(m+1)}{|\underline{2}} = \frac{m^2+m}{|\underline{2}}.$$

Per $n=3$ occorre supporre separatamente $h=1,2,3$ ed in ger rale per ciascun valore di n si supporrà separatamente $h=1,2,..$ e si calcolerà l'espressione di $\left\{\begin{matrix} m \\ 3 \end{matrix}\right\}_h$ servendosi delle espressioni ot nute precedentemente. Si ottiene in tal modo:

$$\begin{matrix} n=3 \\ h=1,2,3 \end{matrix} \left\{ \begin{aligned} \left\{\begin{matrix} m \\ 3 \end{matrix}\right\}_1 &= \frac{m(m-1)(m-2)}{|\underline{3}} = \frac{m^3-3m^2+2m}{|\underline{3}} \\ \left\{\begin{matrix} m \\ 3 \end{matrix}\right\}_2 &= \frac{m(m-1)(m+4)}{|\underline{3}} = \frac{m^3+3m^2-4m}{|\underline{3}} \\ \left\{\begin{matrix} m \\ 3 \end{matrix}\right\}_3 &= \frac{m(m+1)(m+2)}{|\underline{3}} = \frac{m^3+3m^2+2m}{|\underline{3}} \end{aligned} \right.$$

$$\begin{matrix} n=4 \\ h=1,2,3,4 \end{matrix} \left\{ \begin{aligned} \left\{\begin{matrix} m \\ 4 \end{matrix}\right\}_1 &= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{|\underline{4}} = \frac{m^4-6m^3+11m^2-6}{|\underline{4}} \\ \left\{\begin{matrix} m \\ 4 \end{matrix}\right\}_2 &= \frac{m(m-1)(m^2+7m-6)}{|\underline{4}} = \frac{m^4+6m^3-13m^2+6}{|\underline{4}} \\ \left\{\begin{matrix} m \\ 4 \end{matrix}\right\}_3 &= \frac{m(m-1)(m^2+7m+18)}{|\underline{4}} = \frac{m^4+6m^3+11m^2-18}{|\underline{4}} \\ \left\{\begin{matrix} m \\ 4 \end{matrix}\right\}_4 &= \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{|\underline{4}} = \frac{m^4+6m^3+11m^2+6}{|\underline{4}} \end{aligned} \right.$$

ecc. ecc.

In generale risulta che $\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_h$ è esprimibile mediante una frazio che ha per denominatore $|\underline{n}$ e per numeratore un polinomio razion intero di grado n mancante del termine di grado zero; in que polinomio il coefficiente di m^n è 1, la somma dei coefficienti è ze se $h < n$, e vale $|\underline{n}$ se $h = n$. Ed invero se $m = 1$, si ha $\left\{ 1 \atop n \right\}_n = 1$, dimodochè se ad es. in $\left\{ m \atop 4 \right\}_4$ si pone $m = 1$, risulterà:

$$\left\{ 1 \atop 4 \right\}_4 = \frac{1 + 6 + 11 + 6}{|\underline{4}} = 1;$$

adunque $1 + 6 + 11 + 6 = 4!$ Se invece $h < n$ è $\left\{ 1 \atop n \right\}_h = 0$, talchè se ad es. in $\left\{ m \atop 4 \right\}_3$ si pone $m = 1$, risulterà:

$$\left\{ 1 \atop 4 \right\}_3 = \frac{1 + 6 + 11 - 18}{|\underline{4}} = 0$$

e quindi $1 + 6 + 11 + 18 = 0$. Possiamo anche osservare che i coefficienti del numeratore della frazione esprimente il valore di $\left\{ m \atop h \right\}_h$ sono tutti positivi e valgono la somma dei prodotti 1 ad 1, 2 a 2, 3 a 3... dei numeri $1, 2, \ldots, h-1$ (eccettuato il coefficiente di m_h che vale 1); infine i coefficienti del numeratore della frazione uguale ad $\left\{ m \atop n \right\}_1$ hanno alternativamente i segni $+$ e $-$ ed in valore assoluto sono uguali ai coefficienti del numeratore della frazione uguale a $\left\{ m \atop n \right\}_n$. Volendo calcolare rapidamente i coefficienti del numeratore della frazione che esprime il valore di $\left\{ m \atop n \right\}_h$, si può procedere così.

Vogliasi trovare la frazione uguale a $\left\{ m \atop 5 \right\}_3$. Dalla (12), supponendo $n = 5$, $h = 3$, risulta:

$$\left\{ m \atop 5 \right\}_3 = \frac{1}{5}\left[[m + (1-5)] \left\{ m \atop 4 \right\}_3 + [2m + (2-5)] \left\{ m \atop 3 \right\}_3 + [3m + (3-5)] \left\{ m \atop 2 \right\}_3 \right]$$

ovvero, tenuto conto delle espressioni già trovate di $\left\{ m \atop 4 \right\}_3$, $\left\{ m \atop 3 \right\}_3$, $\left\{ m \atop 2 \right\}_2$ (giacchè $\left\{ m \atop 2 \right\}_3 = \left\{ m \atop 2 \right\}_2$):

$$\left\{ m \atop 5 \right\}_3 = \frac{1}{5}\left[\frac{[m + (1-5)]\,(m^4 + 6m^3 + 11m^2 - 18m)}{|\underline{4}} + \right.$$
$$\left. + \frac{[2m + (2-5)]\,(m^3 + 3m^2 + 2m) \,.\, 4}{|\underline{4}} + \frac{[3m + (3-5)]\,(m^2 + m) \,.\, 3 \,.\, 4}{|\underline{4}} \right].$$

Nel caso generale in luogo dei moltiplicatori

$$m + (1-5), \quad [2m + (2-5)]\,4, \quad [3m + (3-5)]\,3 \,.\, 4, \ldots$$

compariranno i moltiplicatori

$$m+(1-n),\ [2m+(2-n)](n-1),\ [3m+(3-n)](n-1)(n-2)\ .$$
$$[hm+(h-n)](n-1)(n-2)\dots(n-h+1).$$

Ponendo attenzione a quanto accade sviluppando i numeratori d frazioni chiuse nella parentesi { } del 2° membro, risulta il proce seguente: si collochino in una prima orizzontale i coefficienti già colati riferentisi a $\left\{ {m \atop n-1} \right\}_h$ in una seconda quelli riferentisi a $\left\{ {m \atop n-} \right.$ moltiplicati per $(n-1)$, in una terza quelli di $\left\{ {m \atop n-3} \right\}_h$ moltipli per $(n-1)(n-2),\dots$ in una h^{ma} quelli di $\left\{ {m \atop n-h} \right\}_h$ moltiplicati $(n-1)(n-2)\dots(n-h+1)$; nella 1ª orizzontale ci saranno ad que $n-1$ numeri, nella 2ª ve ne saranno $n-2,\dots$ nella h^{ma} $(n-h)$ aggiunga a ciascuna orizzontale uno zero iniziale ed uno finale. Si

$$\begin{array}{rcccccl|cc} & & & & & & & 1^{\circ}\text{ molt.}^{re} & 2^{\circ}\text{ molt.}^{re} \\ 0, & \lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \dots\dots\dots & \lambda_{1,n-1}, & 0 & & 1-n & 1 \\ & 0 & \lambda_{21}, & \dots\dots\dots & \lambda_{2,n-2}, & 0 & & 2-n & 2 \\ & & \dots & \dots\dots\dots & \dots & . & & \vdots & \vdots \\ & & & 0, & \lambda_{h1}, \dots \lambda_{h,n-h}, & 0 & & h-n & h \end{array}$$

le h orizzontali ed in corrispondenza di ognuna di esse si consider le coppie di numeri 1° 2°; 2° 3°; 3° 4°, ..., penultimo ultimo, e rappo ad ogni coppia si moltiplichi il 1° numero per il 1° moltiplicat ed il 2° per il 2°, quali si vedono scritti (i moltiplicatori) a des della orizzontale considerata, e si sommino i due prodotti. Si disp gano le somme così ottenute su una nuova orizzontale. Così operai rapporto ad ognuno delle h orizzontali suddette se ne ricavano altr ognuna di queste contiene evidentemente un numero di più de corrispondente di quelle.

Si dispongano infine i numeri delle nuove h orizzontali in m che siano in colonna gli ultimi, i penultimi, i terzultimi,... di es e si sommi per verticali; le somme così ottenute sono i coefficie di $m^n, m^{n-1}, m^{n-2},\dots m^2, m$ nel numeratore della frazione uguale ad $\left\{ {n \atop n} \right.$

Volendo ad es. l'espressione di $\left\{ {m \atop 5} \right\}_3$ osserviamo anzitutto che i co ficienti (nei numeratori) relativi a $\left\{ {m \atop 4} \right\}_3$, $\left\{ {m \atop 3} \right\}_3$, $\left\{ {m \atop 2} \right\}_3 = \left\{ {m \atop 2} \right\}_2$, sono

$$\begin{array}{cccccl} 1, & 6, & 11, & -18 & \text{coefficienti di} & \left\{ {m \atop 4} \right\}_3 \\ & 1, & 3, & 2 & \text{"} \quad \text{"} & \left\{ {m \atop 3} \right\}_3 \\ & & 1, & 1 & \text{"} \quad \text{"} & \left\{ {m \atop 2} \right\}_3 \end{array}$$

e quindi lo specchio delle λ e dei rispettivi moltiplicatori sarà:

$$\begin{array}{cccccc|ll}
 & & & & & & 1^{\circ}\text{ molt.}^{\text{re}} & 2^{\circ}\text{ molt.}^{\text{re}} \\
0 & 1 & 6 & 11 & -18 & 0 & 1-n=1-5=-4; & 1 \\
 & 0, & 1.4, & 3.4, & 2.4 & 0 & 2-5=-3; & 2 \\
 & & 0, & 1.3.4, & 1.3.4, & 0 & 3-5=-2; & 3.
\end{array}$$

Il secondo gruppo di 3 orizzontali, sarà:

$$0(-4)+1.1;\ 1(-4)+6.1;\ 6(-4)+11.1;$$
$$11(-4)+(-18).1;\ (-18)(-4)+0.1;$$
$$0(-3)+4.2;\ (-3).4+12.2;\ (-3).12+8.2;\ (-3).8+0.2;$$
$$0.(-2)+12.3;\ 12.(-2)+12.3;\ (-2).12+0.3$$

ovvero:

$$\begin{array}{lccccc}
 & 1 & 2 & -13 & -62 & +72 \\
 & & 8 & 12 & -20 & -24 \\
 & & & 36 & 12 & -24 \\ \hline
\text{e sommando per verticali} & 1 & 10 & +35 & -70 & +24.
\end{array}$$

Adunque:

$$\left\{ {m \atop 5} \right\}_5 = \frac{m^5+10m^4+35m^3-70m^2+24m}{\underline{|5}},$$

Come 2° es. volendo l'espressione di $\left\{ {m \atop 4} \right\}_4$, si avrebbe:

$$\begin{array}{l}
1^{\circ}\text{ gruppo di orizzontali}
\end{array}
\left\{\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 3 & 2 & 0 & & \\
 & 0 & 3 & 3 & 0 & & \\
 & & 0 & 6 & 0 & & \\
 & & & 0 & 6 & 0 &
\end{array}\right|
\begin{array}{cc}
1^{\circ}\text{ molt.}^{\text{re}} & 2^{\circ}\text{ molt.}^{\text{re}} \\
-3 & 1 \\
-2 & 2 \\
-1 & 3 \\
0 & 4
\end{array}$$

$$2^{\circ}\text{ gruppo di orizzontali}
\left\{\begin{array}{cccc}
1 & 0 & -7 & -6 \\
 & 6 & 0 & -6 \\
 & & 18 & -6 \\
 & & & 24 \\ \hline
1 & 6 & 11 & 6.
\end{array}\right.$$

Epperò:

$$\left\{ {m \atop 4} \right\}_4 = \frac{m^4+6m^3+11m^2+6m}{\underline{|4}}.$$

(Continua)

N. Traverso.

SULLE CONICHE CIRCOSCRITTE A UN TRIANGOLO

1. Riferiamoci a un sistema di assi cartesiani ortogonali e rispet ad essi siano

$$(1)\qquad \begin{cases} a_1\, b_1 & \text{le coordinate di un punto } A_1 \\ a_2\, b_2 & \text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad A_2 \\ a_3\, b_3 & \text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad A_3. \end{cases}$$

Sia P_{23} un punto della retta A_2A_3 e sia:

$$(2)\qquad A_2P_{23} : P_{23}A_3 = x_{23}.$$

Se con ξ, η indichiamo le coordinate cartesiane di P_{23} la dará luogo alle

$$(3)\qquad \frac{\xi - a_2}{a_3 - \xi} = x_{23}, \qquad \frac{\eta - b_2}{b_3 - \eta} = x_{23}$$

da cui seguono le altre

$$(4)\qquad \xi = \frac{a_3\, x_{23} + a_2}{x_{23} + 1}, \qquad \eta = \frac{b_3\, x_{23} + b_2}{x_{23} + 1}.$$

La x_{23} prende il nome di *coordinata baricentrica* di P_{23} rispe ai punti fondamentali A_2 e A_3. Il punto A_2 ha per coordinata ba centrica 0, il punto A_3 ha per coordinata baricentrica ∞, il pu medio di A_2A_3 ha per coordinata 1.

Congiungiamo ora A_1 con P_{23} e sulla congiungente prendiamo punto P_{123} di coordinate cartesiane x, y e supponiamo che que punto P_{123} sia proiettato da A_2 e da A_3 sulle rette A_1A_3, A_1A_2 punti P_{13} e P_{12} tali che:

$$(5)\qquad \begin{cases} A_1\, P_{12} : P_{12}\, A_2 = x_{12} \\ A_1\, P_{13} : P_{13}\, A_3 = x_{13}. \end{cases}$$

I numeri x_{12} x_{13} e x_{23} non sono indipendenti: il teorema di *C* ci dice che essi soddisfano la relazione

$$(6)\qquad x_{12} \,.\, x_{23} = x_{13}.$$

Il teorema di *Van Aubel* ci dà allora la formula

$$(7)\qquad A_1\, P_{123} : P_{123}\, P_{23} = x_{12} + x_{13}.$$

Con questa e coll'aiuto della (4) si perviene facilmente alle

$$(8)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a_3 x_{13} + a_2 x_{12} + a_1}{x_{13} + x_{12} + 1} \\[2ex] y = \dfrac{b_3 x_{13} + b_2 x_{12} + b_1}{x_{13} + x_{12} + 1}. \end{cases}$$

Le x_{12}, x_{13}, x_{23}, legate dalla relazione (6), sono le *coordinate baricentriche* del punto P_{123} rispetto ai *punti fondamentali* A_1, A_2, A_3. Diamo ora qui sotto le coordinate baricentriche di ognuno di questi punti:

$$(9)\quad \begin{cases} A_1) & x_{12}=0 & x_{13}=0 & x_{23} \text{ qualunque} \\ A_2) & x_{12}=\infty & x_{13} \text{ qualunque} & x_{23}=0 \\ A_3) & x_{12} \text{ qualunque} & x_{13}=\infty & x_{23}=\infty. \end{cases}$$

2. Per trovare l'equazione della retta in coordinate baricentriche osserviamo che se x, y sono legate da un'equazione lineare, altrettanto accade per x_{13}, x_{12} e l'equazione cercata avrà la forma

$$(10)\quad A'_3 \,.\, x_{13} + A'_2 \,.\, x_{12} + A'_1 = 0;$$

equazione che assumerà diversi aspetti a seconda delle condizioni a cui si sottopone la retta. Se, per es., passa per A_2, sarà della forma

$$(11)\quad x_{14} + \lambda x_{12} = 0$$

e al variar di λ rappresenterà il fascio di centro A_1.

Per trovare l'equazione del cerchio osserviamo che se x, y soddisfanno l'equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

le x_{13}, x_{12} soddisfano un'equazione del tipo:

$$(12)\quad Ax_{13}^2 + Bx_{12}^2 + Cx_{13}\,x_{12} + Dx_{13} + Ex_{12} + F = 0$$

dove:

$$(13)\quad \begin{cases} A = a_3^2 + b_3^2 + a \,.\, a_3 + b \,.\, b_3 + c \\ B = a_2^2 + b_2^2 + a \,.\, a_2 + b \,.\, b_2 + c \\ C = 2a_2a_3 + 2b_2b_3 + a \,.\, (a_2 + a_3) + b \,.\, (b_2 + b_3) + 2c \\ D = 2a_1a_3 + 2b_1b_3 + a \,.\, (a_1 + a_3) + b \,.\, (b_1 + a_3) + 2c \\ E = 2a_1a_2 + 2b_1b_2 + a \,.\, (a_1 + a_2) + b \,.\, (b_1 + b_2) + 2c \\ F = a_1^2 + b_1^2 + aa_1 + b \,.\, b_1 + c. \end{cases}$$

Questi sei coefficienti non sono fra loro indipendenti: si hanno infatti le seguenti relazioni nelle quali l_{12}, l_{13}, l_{23} indicano le lunghezze dei lati del triangolo $A_1A_2A_3$:

$$(14)\quad \begin{cases} A + B - C = (a_2 - a_3)^2 + (b_2 - b_3)^2 = l_{23}^2 \\ A + F - D = (a_1 - a_3)^2 + (b_1 - b_3)^2 = l_{13}^2 \\ B + F - E = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = l_{12}^2. \end{cases}$$

Da queste si ricava:

$$(15)\quad \begin{cases} C = (A + B) - l_{23}^2 \\ D = (A + F) - l_{13}^2 \\ E = (B + F) - l_{12}^2 \end{cases}$$

per cui all'equazione (12) potrà darsi la forma

$$(16)\quad (A \,.\, x_{13} + B \,.\, x_{12} + F) \,.\, (x_{13} + x_{12} + 1) = \\ = l_{23}^2 \,.\, x_{13} \,.\, x_{12} + l_{13}^2 \,.\, x_{13} + l_{12}^2 \,.\, x_{12}.$$

Questa è l'equazione del cerchio: i coefficienti A, B, F potranno essere determinati a seconda delle condizioni che s'impongono al cerchio.

Se si vuole che il cerchio passi per i punti A_1, A_2, A_3 si trova che A, B, F devono essere zero e allora l'equazione (16) diventa

$$l_{23}^2 \,.\, x_{12} \,.\, x_{13} + l_{13}^2 \,.\, x_{12} + l_{12}^2 \,.\, x_{13} = 0 \tag{17}$$

che rappresenta il cerchio circoscritto al triangolo $A_1A_2A_3$.

Un cerchio che passa per i punti comuni ai cerchi di equazioni (16) e (17) è manifestamente di equazione

$$(Ax_{13} + Bx_{12} + F) \,.\, (x_{13} + x_{12} + 1) = 0. \tag{18}$$

Questa si spezza nelle equazioni

$$x_{13} + x_{12} + 1 = 0, \qquad Ax_{13} + Bx_{12} + F = 0 \tag{19}$$

la prima delle quali rappresenta la *retta all'infinito* mentre la seconda rappresenta quello che si chiama *asse radicale* del cerchio (16) e del cerchio circoscritto.

In generale, dato il cerchio di coefficienti A, B, F e quello di coefficienti A′, B′, F′, l'asse radicale di questi cerchi avrà per equazione:

$$(A - A') \,.\, x_{13} + (B - B') \,.\, x_{12} + F - F' = 0. \tag{20}$$

Vogliamo far vedere come sono legati i coefficienti A, B, F dell'equazione del cerchio (16) alle potenze dei vertici A_1, A_2, A_3 rispetto al cerchio medesimo.

Seghiamo a questo scopo il cerchio (16) con la retta A_1A_2 di cui l'equazione è $x_{13} = 0$. Avremo, per determinare le coordinate baricentriche delle intersezioni col cerchio, l'equazione di secondo grado

$$(Bx_{12} + F) \,.\, (x_{12} + 1) = l_{12}^2 x_{12} \tag{21}$$

che, ridotta alla forma normale

$$Bx_{12}^2 - (l_{12}^2 - B - F) \,.\, x_{13} + F = 0,$$

dà per la somma S e per il prodotto P delle radici

$$S = \frac{l_{13} - B - F}{B}, \qquad P = \frac{F}{B}. \tag{22}$$

E siccome la potenza di A_1 rispetto al cerchio è data dalla formula:

$$p_1^2 = l_{12}^2 \cdot \frac{P}{P + S + 1},$$

sarà per le (22)

$$p_1^2 = F. \tag{23}$$

Se osserviamo che indicando con p_2^2 la potenza di A_2 rispetto al cerchio (16) essa è data da

$$p_2^2 = \frac{l_{12}^2}{R + S + 1},$$

troveremo facilmente

$$(24) \qquad p_2^2 = B;$$

analogamente si trova

$$(25) \qquad p_3^2 = A,$$

per cui l'equazione (16) potrà scriversi

$$(26) \qquad (p_3^2 x_{13} + p_2^2 x_{12} + p_1^2) . (x_{13} + x_{12} + 1) = \\ = l_{23}^2 . x_{12} . x_{13} + l_{12}^2 . x_{12} + l_{13}^2 . x_{13} .$$

Segue di qui che un cerchio concentrico al cerchio circoscritto ha per equazione

$$(27) \qquad p^2 . (x_{13} + x_{12} + 1)^2 = l_{23}^2 x_{12} . x_{13} + l_{12} x_{12} + l_{13}^2 x_{13}$$

dove p^2 indica la potenza di uno dei vertici del triangolo rispetto al cerchio che si considera.

3. In questo numero ci occuperemo del problema di *Simpson* e a tale scopo osserveremo che una retta parallela alla retta di equazione (10) ha per equazione:

$$(28) \qquad A'_3 x_{13} + A'_2 x_{12} + A' + \lambda . (x_{13} + x_{12} + 1) = 0,$$

per cui l'equazione di una retta perpendicolare, per esempio, alla retta A_2A_3 si troverà scrivendo prima l'equazione della retta che contiene l'altezza del triangolo $A_1A_2A_3$ che esce da A_1 e ricorrendo poi alla (28).

Ora l'equazione della retta che esce da A_1 e normalmente alla retta A_2A_3 è:

$$(29) \qquad D_{12}^2 x_{13} - D_{13}^2 x_{12} = 0$$

dove si è posto

$$(30) \qquad \begin{cases} D_{12}^2 = l_{13}^2 + l_{23}^2 - l_{12}^2 \\ D_{13}^2 = l_{12}^2 + l_{23}^2 - l_{13}^2 \\ D_{23}^2 = l_{12}^2 + l_{13}^2 - l_{23}^2 . \end{cases}$$

per cui una retta parallela a quella di equazione (29) sarà

$$(31) \qquad D_{12}^2 x_{13} - D_{13}^2 x_{12} + \lambda . (x_{13} + x_{12} + 1) = 0.$$

Ponendo che essa deve contenere il punto di coordinate baricentriche x'_{12} x'_{13} x'_{23} potremo determinare λ e trovare l'equazione della retta che passa per detto punto e normalmente ad A_2A_3 sotto la forma

$$(32) \qquad \frac{D_{12}^2 . x_{13} - D_{13}^2 . x_{12}}{x_{13} + x_{12} + 1} = \frac{D_{12}^2 . x'_{13} - D_{13}^2 . x'_{12}}{x'_{13} + x'_{12} + 1} .$$

Cerchiamo le coordinate baricentriche del punto ove la (32) incontrata dalla retta A_2A_3: basterà fare

$$x_{13} = x_{12} = \infty$$

ricordando che $\frac{x_{13}}{x_{12}}$ è uguale ad x_{23}.

Troveremo

$$\frac{D_{12}^2 . x_{23} - D_{13}^2}{x_{23}+1} = \frac{D_{12}^2 . x'_{13} - D_{13}^2 . x'_{12}}{x'_{13} + x'_{12} + 1},$$

equazione che ci darà per le coordinate del punto:

$$(33) \qquad x_{23} = \frac{2 . l_{23}^2 . x'_{13} + D_{13}^2}{2 . l_{23}^2 . x'_{12} + D_{12}^2} \qquad x_{12} = \infty, \quad x_{13} = \infty.$$

Così pure, osservando che:

$$(34) \qquad D_{12}^2 . x_{13} - D^2_{23} = 0, \qquad D_{13}^2 . x_{12} - D_{23}^2 = 0$$

sono le equazioni delle perpendicolari per A_2 e A_3 rispettivament alle rette A_1A_3 e A_1A_2, perverremo a trovare le coordinate bar centriche dei piedi della perp. abbassate sulle rette medesime d punto di coordinate x'_{12}, x'_{13}, x'_{23} con procedimento analogo:

$$(35) \qquad x_{13} = \frac{2\, l_{13}^2\, x'_{13} + D_{23}^2 . x'_{12}}{2\, l_{13}^2 + D_{12}^2\, x'_{12}} \qquad x_{12} = 0, \qquad x_{23} = \infty$$

$$(36) \qquad x_{12} = \frac{D_{23}^2\, x'_{13} + 2\, l_{12}^2 . x'_{12}}{2\, l_{12}^2 + D_{13}^2 . x'_{13}} \qquad x_{13} = 0, \qquad x_{23} = 0.$$

Proponiamoci ora la questione: qual'è il luogo geometrico del pun x'_{12}, x'_{13}, x'_{23} quando i punti (33) (35) (36) appartengono a una retta?

Pel teorema di Menelao dovrà aversi la relazione

$$(37) \qquad x_{12} . x_{23} . \frac{1}{x_{13}} = -1$$

e questa, per le (33) (35) (36), si muterà nell'altra

$$(38) \quad \frac{D_{23}^2\, x'_{13} + 2 l_{12}^2\, x'_{12}}{2\, l_{12}^2 + D_{13}^2 . x'_{13}} . \frac{2\, l_{23}^2\, x'_{13} + D_{13}^2}{2\, l_{23}^2\, x'_{12} + D_{12}^2} . \frac{2\, l_{13}^2 + D_{12}^2\, x'_{12}}{2\, l_{13}^2\, x'_{13} + D_{23}^2\, x'_{12}} = -1.$$

Sviluppando questa equazione si giunge a un'equazione del tip

$$(38') \quad M x'^2_{12}\, x'_{13} + N . x'_{12}\, x'^2_{13} + P x'^2_{12} + Q x'^2_{13} + R x'_{12} + S x'_{13} + \\ + T x'_{12} . x'_{13} = 0,$$

dove:

$$(39) \qquad \begin{cases} M = N = 16 . l_{23}^2 . \Delta^2 \\ P = R = 16 . l_{12}^2 . \Delta^2 \\ Q = S = 16 . l_{13}^2 . \Delta^2 \\ T = \sigma^2 . \Delta^2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{c} \Delta \text{ area del tr. } A_1A_2A_3 \\ \sigma^2 = l_{12}^2 + l_{13}^2 + l_{23}^2 \end{array} \right),$$

l'espressione di T essendosi potuta scrivere con l'aver riguardo all'eguaglianza

$$D_{12}^2 . D_{13}^2 . D_{23}^2 + 8\, l_{12}^2 . l_{23}^2 . l_{13}^2 = 16 . \Delta^2 . \sigma^2, \tag{40}$$

le altre avendo riguardo all'uguaglianze:

$$\begin{aligned} 2\, l_{23}^2 . D_{23}^2 + D_{12}^2 . D_{13}^2 &= 2\, l_{12}^2\, D_{12}^2 + D_{13}^2 . D_{23}^2 = \\ &= 2\, l_{13}^2\, D_{13}^2 + D_{12}^2\, D_{23}^2 = 16 . \Delta^2. \end{aligned} \tag{41}$$

L'equazione in discorso viene in seguito alle (39), a spezzarsi nelle equazioni:

$$\begin{cases} l_{23}^2\, x_{12}\, x_{13} + l_{13}^2 x_{12} + l_{12}^2\, x_{13} = 0 \\ x_{13} + x_{12} + 1 = 0, \end{cases} \tag{42}$$

la prima delle quali coincide con la (17). Si ha dunque che, facendo astrazione dalla retta all'infinito, il luogo geometrico dei punti le cui proiezioni ortogonali sulle rette dei lati di un triangolo sono *collineari*, è il cerchio circoscritto al triangolo.

È facile scrivere l'equazione della retta di *Simpson* relativa al punto $x'_{12}\, x'_{13}\, x'_{23}$ del cerchio circoscritto. Basta prendere l'equazione generale

$$A'_3\, x_{13} + A'_2\, x_{12} + A'_1 = 0$$

e imporre alla corrispondente retta il passaggio per i punti di coordinate (35) e (36): verremo a determinare i rapporti A'_3, A'_2 colle:

$$\begin{cases} -\dfrac{A'_3}{A'_1} = \dfrac{2 . l_{13}^2 + D_{12}^2 . x'_{12}}{2 . l_{13}^2\, x'_{13} + D_{23}^2 . x'_{12}} \\[2ex] -\dfrac{A'_2}{A'_1} = \dfrac{2 . l_{12}^2 + D_{13}^2 . x'_{13}}{D_{23}^2 . x'_{13} + 2\, l_{12}^2 . x'_{12}}. \end{cases} \tag{43}$$

L'equazione domandata sarà:

$$x_{13} \cdot \frac{2\, l_{13}^2 + D_{12}^2 . x'_{12}}{2 . l_{13}^2\, x'_{13} + D_{23}^2 . x'_{12}} + x_{12} \cdot \frac{2\, l_{12}^2 + D_{13}^2 . x'_{13}}{D_{23}^2 . x'_{13} + 2\, l_{12}^2 . x'_{12}} = 1; \tag{44}$$

le x'_{12}, x'_{13} soddisfanno l'equazione (17).

4. Da un punto del piano $x'_{12}\, x'_{13}\, x'_{23}$ conduciamo le parallele alle mediane e calcoliamo le coordinate baricentriche dei punti ove queste parallele segano le rette dei lati su cui le mediane sono state calate.

La mediana uscente da A_1 ha per equazione

$$x_{12} = x_{13} \tag{45}$$

e la parallela ad essa condotta per il punto suddetto ha per equazione:

$$\frac{x_{12} - x_{13}}{x_{13} + x_{12} + 1} = \frac{x'_{12} - x'_{13}}{x'_{13} + x'_{12} + 1}. \tag{46}$$

Questa retta è incontrata dalla retta $A_2 A_3$ in un punto di coordinate

$$x_{23} = \frac{2x'_{13} + 1}{2x'_{12} + 1}, \qquad x_{12} = \infty, \qquad x_{13} = \infty. \tag{47}$$

Così pure, essendo:

(48) $$x_{13} = 1$$

l'equazione della mediana uscente da A_3, quella della parallela a detta mediana passante pel solito punto sarà:

(49) $$\frac{x_{13} - 1}{x_{13} + x_{12} + 1} = \frac{x'_{13} - 1}{x'_{13} + x'_{12} + 1}$$

e le coordinate del punto ove essa incontra la retta A_1A_3 saranno:

(50) $$x_{13} = \frac{x'_{12} + 2x'_{13}}{x'_{12} + 2}, \qquad x_{12} = 0, \qquad x_{23} = \infty.$$

E le coordinate dell'altro punto analogo sulla retta A_1A_2 saranno:

(51) $$x_{12} = \frac{2x'_{12} + x'_{13}}{x'_{13} + 2}, \qquad x_{13} = 0, \qquad x_{23} = 0.$$

Qual'è il luogo geometrico del punto x'_{12}, x'_{13} quando i tre punti (47) (50) e (51) sono allineati? Dovremo scrivere che è verificata la (37), il che porta all'equazione

(52) $$\frac{2x'_{12} + x'_{13}}{x'_{13} + 2} \cdot \frac{2 \,.\, x'_{13} + 1}{2x'_{12} + 1} \cdot \frac{2 + x'_{12}}{x'_{12} + 2x'_{13}} = -1.$$

Sviluppandola si trova un'equazione del tipo (38') dove

(53) $$\begin{cases} M = N = P = Q = R = S = 6, \\ T = 18. \end{cases}$$

Segue che essa si spezza nelle due:

(54) $$\begin{cases} x_{13} + x_{12} + 1 = 0 \\ x_{12}\, x_{13} + x_{12} + x_{13} = 0. \end{cases}$$

La prima equazione è quella della retta all'infinito; la seconda rappresenta una curva del second'ordine perchè da una retta generica è segata in *due* punti; però non è una circonferenza, invero non è possibile identificare la seconda delle (54) con l'equazione (16). Si tratta dunque di una conica della quale facilmente possiamo determinare la natura. Tagliamola con la retta all'infinito, cioè consideriamo le soluzioni del sistema

(55) $$\begin{cases} x_{12} \,.\, x_{13} + x_{12} + x_{13} = 0 \\ x_{13} + x_{12} + 1 = 0; \end{cases}$$

troveremo in x_{12} (x_{13}) l'equazione

(56) $$x_{12}^2 + x_{12} + 1 = 0 \qquad (x_{13}^2 + x_{13} + 1 = 0)$$

che non ha radici reali. La nostra equazione è dunque quella di una *ellisse*. Concludiamo con *Cesàro*:

« Il luogo geometrico dei punti del piano di un triangolo tali che « le parallele da essi condotte alle mediane seghino le corrispondenti

" basi in punti collineari, è una ellisse che passa per i vertici del " triangolo „. (*Ellisse di Steiner*).

Andiamo a determinare qualche altro punto di questa ellisse e consideriamo la mediana che esce dal vertice A_2: essa ha per equazione $x_{12} = x_{13}$. Ponendo x_{12} al posto di x_{13} nell'equazione

(57) $$x_{12}\,x_{13} + x_{12} + x_{13} = 0,$$

si trova:

$$x_{12}^2 + 2x_{12} = 0,$$

da cui:

$$x_{12} = 0\,, \qquad x_{12} = -2.$$

La prima di queste soluzioni dice che l'ellisse passa per A_1; quanto alla seconda, se prolunghiamo il lato A_1A_2 di un segmento uguale ad A_1A_2 e congiungiamo l'estremo con A_3, poi prolunghiamo il lato A_1A_3 di un segmento uguale ad A_1A_3 e congiungiamo l'estremo con A_2, le due congiungenti s'incontrano in un punto P_1 dell'ellisse. Abbiamo così tre nuovi punti P_1, P_2, P_3 per cui passa la curva.

Cerchiamo ora l'equazione della tangente in un vertice del triangolo alla ellisse e consideriamo perciò una retta del fascio di centro A_1 di equazione $x_{13} = \lambda \,.\, x_{12}$.

Sostituendo nella (57) avremo l'equazione:

$$\lambda \,.\, x_{12}^2 + \lambda \,.\, x_{12} + x_{12} = 0$$

che ha per soluzioni

$$x_{12} = 0$$

e

(58) $$x_{12} = -\frac{\lambda + 1}{\lambda}.$$

Questo secondo punto coinciderà col primo se $\lambda = -1$, nel qual caso la retta del fascio assume l'equazione

(59) $$x_{13} = -x_{12}$$

e rappresenta la parallela ad A_2A_3 per A_1. Se dunque per i vertici del triangolo $A_1A_2A_3$ conduciamo le parallele ai lati opposti, la nostra ellisse sarà tangente ai lati del nuovo triangolo nei loro punti medi.

Possiamo enunciare questo resultato così:

" L'ellisse che tocca i lati di un triangolo nei piedi delle mediane " è il luogo dei punti tali che le parallele alle mediane medesime " tagliano in punti collineari i lati del triangolo mediano traversati " dalle mediane corrispondenti „.

L'equazione della retta che contiene i punti (47), (50) e (51) — retta che distingueremo col nome di *retta* r_0 — è la seguente:

(60) $$\frac{x'_{12} + 2}{2x'_{13} + x'_{12}} \,.\, x_{13} + \frac{x'_{13} + 2}{2x'_{12} + x'_{13}} \,.\, x_{12} = 1.$$

Il cerchio circoscritto e l'ellisse di *Steiner* hanno tre punti in c mune e ivi non si toccano, perchè le tangenti al cerchio circoscrit nei vertici sono antiparallele dei lati opposti: avranno dunque quarto punto in comune. Per trovarne le coordinate consideria l'equazione

$$x_{13} = \lambda \, . \, x_{12}$$

e determiniamo λ in modo da soddisfare le equazioni delle due cur L'equazione dell'ellisse ci ha già fornito

$$x_{12} = - \frac{\lambda + 1}{\lambda};$$

poniamo questo valore nell'equazione del cerchio circoscritto e tr veremo:

(61) $$\lambda = \frac{l_{12}^2 - l_{23}^2}{l_{23}^2 - l_{13}^2} = x'_{23}$$

e con questa:

(62) $$x'_{12} = \frac{l_{13}^2 - l_{12}^2}{l_{12}^2 - l_{23}^2}, \qquad x'_{13} = \frac{l_{12}^2 - l_{13}^2}{l_{13}^2 - l_{23}^2}.$$

Le (61) (62) dànno le coordinate baricentriche del *punto di Stein*

5. Proponiamoci qui di risolvere il problema più generale:

" Qual'è il luogo geometrico dei punti del piano tali che cond
" cendo da ciascuno d'essi le parallele a tre ceviane concorrent
" punti ove esse incontrano i lati corrispondenti giacciano sopra u
" stessa retta? ".

Conduciamo perciò da A_1 la ceviana A_1P_{23}, da A_2 la A_2P_{13} da A_3 la A_3P_{12} e poniamo:

(63) $$\begin{cases} A_1P_{12} : P_{12}A_2 = m_{12} : n_{12} \\ A_2P_{23} : P_{23}A_3 = m_{23} : n_{23} \\ A_3P_{13} : P_{13}A_1 = m_{13} : n_{13} \end{cases}$$

con:

(64) $$m_{12} \, . \, m_{23} \, . \, m_{13} = n_{12} \, . \, n_{23} \, . \, n_{13} \, .$$

Troviamo poi l'equazione delle tre ceviane e scriviamo que delle 3 parallele ad esse condotte per il punto $x'_{12}, x'_{13}, x'_{23}$. Le co dinate baricentriche del punto comune alla parallela alla ceviana A_1 e alla retta A_2A_3 sono:

(65) $$x_{23} = \frac{(m_{23} + n_{23}) \, . \, x'_{13} + m_{23}}{(m_{23} + n_{23}) \, . \, x'_{12} + n_{23}}, \qquad x_{13} = \infty, \qquad x_{12} = \infty;$$

quelle del punto comune alla parallela alle ceviane A_2P_{13} e a retta A_1A_3 sono:

(66) $$x_{13} = \frac{(m_{13} + n_{13}) x'_{13} + n_{13} x'_{12}}{(m_{13} + n_{13}) + m_{13} x'_{12}}, \qquad x_{12} = 0, \qquad x_{23} = \infty;$$

quelle del punto comune alla parallela alla ceviana A_3P_{12} e alla retta A_1A_2 sono

$$(67)\qquad x_{12} = \frac{(m_{12}+n_{12})\,x'_{12} + m_{12}\,.\,x'_{13}}{(m_{12}+n_{12}) + n_{12}\,.\,x'_{13}}, \qquad x_{13}=0, \qquad x_{23}=0.$$

Se andiamo a scrivere che i punti (65) (66) e (67) sono collineari, cioè che le loro coordinate baricentriche soddisfanno l'equazione di una retta, si trova l'equazione (37) che si traduce nella

$$(68)\qquad \frac{(m_{12}+n_{12})\,x'_{12} + m_{12}\,x'_{13}}{(m_{13}+n_{12}) + n_{12}\,.\,x'_{13}} \cdot \frac{(m_{23}+n_{23})\,.\,x'_{13} + m_{23}}{(m_{23}+n_{23})\,.\,x'_{12} + n_{23}} \cdot \frac{(m_{13}+n_{13}) + m_{13}\,.\,x'_{13}}{(m_{13}+n_{13})\,x'_{13} + n_{13}\,.\,x'_{12}} = -1.$$

Sviluppando la (68) si ha un'equazione della forma (38') nella quale:

$$(69)\qquad \begin{cases} M = N = (m_{23}+n_{23})\,.\,(m_{12}\,.\,m_{13} + n_{12}\,.\,n_{13} + n_{12}\,.\,m_{13}) \\ S = Q = (m_{13}+n_{13})\,.\,(m_{12}\,.\,m_{23} + n_{12}\,.\,n_{23} + n_{23}\,.\,m_{12}) \\ R = P = (m_{12}+n_{12})\,.\,(m_{13}\,.\,m_{23} + n_{13}\,.\,n_{23} + n_{13}\,.\,m_{23}) \\ \qquad\qquad T = M + S + R. \end{cases}$$

Tanto ci basta per riconoscere che il primo membro della (38') è divisibile per $x'_{13} + x'_{12} + 1$ e che si spezza in due fattori

$$(70)\qquad Mx'_{12}\,x'_{13} + S\,.\,x'_{13} + R\,.\,x'_{12}, \qquad x'_{13} + x'_{12} + 1.$$

Astrazion fatta dal secondo fattore, che conduce alla retta all'infinito, si ottiene così una curva del second'ordine come facente parte del luogo cercato: essa ha l'equazione:

$$Mx'_{12}\,x'_{13} + Sx'_{13} + Rx'_{12} = 0$$

e, secondo le (69):

$$(71)\qquad \begin{cases} (m_{23}+n_{23})\,.\,(m_{12}\,.\,m_{13} + n_{12}\,.\,n_{13} + n_{12}\,.\,m_{13})\,.\,x'_{12}\,.\,x'_{13} + \\ (m_{13}+n_{13})\,.\,(m_{12}\,.\,m_{23} + n_{12}\,.\,n_{23} + n_{23}\,.\,m_{12})\,.\,x'_{13} + \\ (m_{12}+n_{12})\,.\,(m_{13}\,.\,m_{23} + n_{13}\,.\,n_{23} + n_{13}\,.\,m_{23})\,.\,x'_{12} = 0. \end{cases}$$

Siccome nel fare questo calcolo non si è tenuto conto alcuno della (64), segue che possono scegliersi a nostro piacere *tre* direzioni nel piano del triangolo fondamentale: il luogo del punto pel quale accade che le parallele per esso alle direzioni scelte seghino le rette dei lati del triangolo — in ordine prestabilito — in punti collineari è una curva del second'ordine. Essa si riduce a un cerchio quando

$$M = l_{23}^2, \quad S = l_{13}^2, \quad R = l_{12}^2,$$

nel qual caso si trova il cerchio circoscritto al triangolo dato. L'equa-
zione della retta che contiene le intersezioni è

$$(72)\qquad \frac{(m_{13}+n_{13})+m_{13}\,.\,x'_{12}}{(m_{12}+n_{13})\,.\,x'_{13}+n_{13}\,.\,x'_{12}}\,.\,x_{13}+\frac{(m_{12}+n_{12})+n_{12}\,.\,x'_{13}}{(m_{12}+n_{13})\,x'_{12}+m_{12}\,.\,x'_{13}}\,.\,x_{12}=$$

dove le x'_{12} x'_{13} soddisfano la (71).

La curva (71) ha tre punti comuni col cerchio circoscritto: c
procedimento analogo a quello usato nel paragrafo precedente
possono avere le coordinate baricentriche del quarto punto d'inte
sezione. Sono:

$$(73)\qquad \begin{cases} x_{23}=\dfrac{R\,.\,l_{23}^2-M\,.\,l_{12}^2}{M\,.\,l_{13}^2-S\,.\,l_{23}^2} \\ x_{13}=\dfrac{S\,.\,l_{12}^2-R\,.\,l_{13}^2}{M\,.\,l_{13}^2-S\,.\,l_{23}^2} \\ x_{12}=\dfrac{S\,.\,l_{12}^2-R\,.\,l_{13}^2}{R\,.\,l_{23}^2-M\,.\,l_{12}^2} \end{cases}$$

6. La (71) per particolari valori delle m e delle n dà luogo a
una infinità di coniche passanti per i vertici del triangolo fondamen
tale: vediamone alcune.

Poniamo:

$$(74)\qquad \begin{cases} m_{12}=n_{23}=l_{13} \\ m_{23}=n_{13}=l_{12} \\ m_{13}=n_{12}=l_{23}\,. \end{cases}$$

La corrispondente conica ha per equazione:

$$(75)\qquad l_{23}\,.\,(l_{12}+l_{13})\,.\,x_{12}\,.\,x_{13}+l_{13}\,.\,(l_{12}+l_{23})\,.\,x_{13}+l_{12}\,.\,(l_{13}+l_{23})\,.\,x_{12}=0.$$

Se da un punto di questa, qualunque esso sia, conduciamo l
parallele alle bisettrici *interne* del triangolo, le intersezioni coi cor
rispondenti lati sono sopra una retta r_1 di equazione:

$$(76)\qquad \frac{(l_{12}+l_{23})+l_{23}\,.\,x'_{12}}{(l_{12}+l_{23})\,x'_{13}+l_{12}\,.\,x'_{12}}\,.\,x_{13}+\frac{(l_{13}+l_{23})+l_{23}\,.\,x'_{13}}{(l_{13}+l_{23})\,.\,x'_{12}+l_{13}\,.\,x'_{13}}\,x_{12}=1$$

(retta r_1

Le coordinate baricentriche del punto ove la conica (75) incontr
il cerchio circoscritto sono:

$$(77)\qquad \begin{cases} x_{23}=\dfrac{l_{12}}{l_{13}}\cdot\dfrac{l_{23}-l_{12}}{l_{13}-l_{23}} \\ x_{12}=\dfrac{l_{13}}{l_{23}}\cdot\dfrac{l_{12}-l_{13}}{l_{23}-l_{12}}\,. \\ x_{13}=\dfrac{l_{12}}{l_{23}}\cdot\dfrac{l_{12}-l_{13}}{l_{13}-l_{23}}\,. \end{cases}$$

Poniamo invece:

$$(78)\qquad \begin{cases} m_{12}=n_{23}=l_{13}^2 \\ m_{23}=n_{13}=l_{12}^2 \\ m_{13}=n_{12}=l_{23}^2\,; \end{cases}$$

la curva corrispondente ha per equazione:

$$(79)\quad l_{23}^2 . (l_{12}^2 + l_{13}^2) . x_{12} . x_{13} + l_{13}^2 . (l_{12}^2 + l_{23}^2) . x_{13} + l_{12}^2 (l_{13}^2 . l_{23}^2) . x_{12} = 0.$$

Se da un punto di questa si conducono le parallele alle *simediane* del triangolo fondamentale, le intersezioni coi corrispondenti lati sono sopra una retta r_2 di equazione:

$$(80)\quad \frac{(l_{12}^2 + l_{23}^2) + l_{23}^2 . x'_{12}}{(l_{13}^2 + l_{23}^2) . x'_{13} + l_{12}^2 . x'_{12}} . x_{13} + \frac{(l_{13}^2 + l_{23}^2) + l_{23}^2 . x'_{13}}{(l_{13}^2 + l_{23}^2) . x'_{12} + l_{13}^2 . x'_{13}} . x_{12} = 1.$$

Le coordinate baricentriche del punto ove questa conica incontra il cerchio circoscritto sono:

$$(81)\quad \begin{cases} x_{23} = \dfrac{l_{12}^2}{l_{13}^2} . \dfrac{l_{23}^2 - l_{12}^2}{l_{13}^2 - l_{23}^2} \\ x_{13} = \dfrac{l_{12}^2}{l_{23}^2} . \dfrac{l_{12}^2 - l_{13}^2}{l_{13}^2 - l_{23}^2} \\ x_{12} = \dfrac{l_{13}^2}{l_{23}^2} . \dfrac{l_{12}^2 - l_{13}^2}{l_{23}^2 - l_{12}^2} . \end{cases}$$

Le formule (74), (78) rientrano nelle:

$$(82)\quad \begin{cases} m_{12} = n_{23} = l_{13}^p \\ m_{23} = n_{13} = l_{13}^p \\ m_{13} = n_{12} = l_{23}^p \end{cases}$$

che conducono a una conica di equazione:

$$(83)\quad l_{23}^p . (l_{12}^p + l_{13}^p) . x_{12} x_{13} + l_{13}^p . (l_{12}^p + l_{23}^p) . x_{13} + \\ + l_{12}^p . (l_{13}^p + l_{23}^p) . x_{12} = 0.$$

La corrispondente retta r_p ha per equazione:

$$(84)\quad \frac{(l_{23}^p + l_{12}^p) + l_{23}^p . x'_{12}}{(l_{23}^p + l_{12}^p) . x'_{13} + l_{12}^p . x'_{12}} . x_{13} + \frac{(l_{13}^p + l_{23}^p) + l_{23}^p . x'_{13}}{(l_{12}^p + l_{23}^p) . x'_{12} + l_{13}^p . x'_{13}} . x_{12} = 1,$$

le coordinate baricentriche del punto ove la precedente incontra il cerchio circoscritto sono:

$$(85)\quad \begin{cases} x_{23} = \dfrac{l_{12}^p}{l_{13}^p} . \dfrac{l_{23}^p - l_{12}^p}{l_{13}^p - l_{23}^p} \\ x_{13} = \dfrac{l_{12}^p}{l_{23}^p} . \dfrac{l_{12}^p - l_{13}^p}{l_{13}^p - l_{23}^p} \\ x_{12} = \dfrac{l_{13}^p}{l_{23}^p} . \dfrac{l_{12}^p - l_{13}^p}{l_{23}^p - l_{12}^p} . \end{cases}$$

7. In questo paragrafo vogliamo determinare le coordinate baricentriche del centro della (71) che terremo sotto la forma:

$$(86)\quad \mathrm{M} . x_{12} . x_{13} + \mathrm{S} . x_{13} + \mathrm{R} . x_{12} = 0,$$

e che supporremo non sia una parabola.

Indichiamo queste coordinate con $y_{13}\ y_{12}$ e conduciamo ad A una retta parallela e passante per il centro: l'equazione di que retta sarà:

$$\frac{x_{13}}{x_{13}+x_{12}+1}=\frac{y_{13}}{y_{13}+y_{12}+1}$$

ovvero

$$x_{13}=\frac{y_{13}}{y_{12}+1}\cdot x_{12}+\frac{y_{13}}{y_{12}+1}. \tag{87}$$

Sostituendo nella (86) per x_{13} la sua espressione per x_{12} d dalla (87) otterremo un'equazione di secondo grado in x_{12}:

$$Mx_{12}^2\,y_{13}+x_{12}\,.\,\{My_{13}+S\,.\,y_{13}+R\,.\,(y_{12}+1)\}+Sy_{13}=0 \tag{88}$$

dalla quale segue, indicando con x'_{12} e x''_{12} le radici,

$$\begin{cases} x'_{12}\,.\,x''_{12}=\dfrac{S}{M} \\ x'_{12}+x''_{12}=-\dfrac{My_{13}+Sy_{13}+R\,.\,(y_{12}+1)}{My_{13}}. \end{cases} \tag{89}$$

Consideriamo ora sopra la retta A_1A_2 i tre punti P'_{12}, P_{12} e di coordinata baricentrica x'_{12}, y_{12}, x''_{12} e scriviamo la condizi perchè il punto intermedio sia il punto di mezzo del segmento P'_{12}P Avremo:

$$(A_1P_{12})-(A_1P'_{12})=(A_1P''_{12})-(A_1P_{12})$$

ovvero

$$2\,.\,(A_1P_{12})=(A_1P'_{12})+(A_1P''_{12}). \tag{90}$$

Questa può scriversi:

$$\frac{2y_{12}}{y_{12}+1}=\frac{x'_{12}}{x'_{12}+1}+\frac{x''_{12}}{x''_{12}+1} \tag{91}$$

o anche

$$\frac{2y_{12}}{y_{12}+1}=\frac{2x'_{12}\,x''_{12}+(x'_{12}+x''_{12})}{x'_{12}\,.\,x''_{12}+(x'_{12}+x''_{12})+1}. \tag{92}$$

Tenendo conto delle (89) si trova dopo lievi calcoli

$$(M-S)\,.\,y_{13}-R\,.\,y_{12}+R=0 \tag{93}$$

che è un'equazione a cui debbono soddisfare le coordinate del cen

In modo analogo, condotta per il centro la parallela ad A_1 essa avrà l'equazione:

$$x_{12}=\frac{y_{12}}{y_{13}+1}\cdot x_{13}+\frac{y_{12}}{y_{13}+1} \tag{94}$$

e la sostituzione in (86) darà luogo a un'equazione di 2° grado in x_{13}:

$$(95) \qquad My_{12} . x_{13}^2 + x_{13} . \{ My_{12} + Ry_{12} + S . (y_{13} + 1) \} + Ry_{12} = 0$$

dalla quale segue, indicando con x'_{13}, x''_{13} le radici:

$$(96) \qquad \begin{cases} x'_{13} . x''_{13} = \dfrac{R}{M} \\ x'_{13} + x''_{13} = - \dfrac{My_{12} + Ry_{12} + S . (y_{13} + 1)}{M . y_{12}} . \end{cases}$$

E siccome la (91) si trasforma nell'altra:

$$(97) \qquad \frac{2y_{13}}{y_{13} + 1} = \frac{x'_{13}}{x'_{13} + 1} + \frac{x''_{13}}{x''_{13} + 1} ,$$

tenendo presenti le (96), perverremo a una seconda relazione a cui soddisfanno le coordinate del centro:

$$(98) \qquad (M - R) y_{12} - S . y_{13} + S = 0.$$

Risolvendo il sistema:

$$(99) \qquad \begin{cases} (M - S) . y_{13} - R . y_{12} + R = 0 \\ (M - R) . y_{12} - S . y_{13} + S = 0 \end{cases}$$

si trovano come coordinate del centro:

$$(100) \qquad \begin{cases} y_{12} = \dfrac{S . (R + M - S)}{M . (R - M + S)} \\ y_{13} = \dfrac{R . (S + M - R)}{M . (S - M + R)} \\ y_{23} = \dfrac{R . (S + M - R)}{S . (R + M - S)} . \end{cases}$$

Facciamo $M = R = S = 1$; otterremo il baricentro come centro dell'ellisse di *Steiner*.

Passiamo alla (75): il suo centro ha per coordinate

$$(101) \qquad \begin{cases} y_{12} = \dfrac{l_{12} + l_{23}}{l_{12} + l_{13}} \\ y_{13} = \dfrac{l_{13} + l_{23}}{l_{13} + l_{12}} \\ y_{23} = \dfrac{l_{13} + l_{23}}{l_{12} + l_{23}} . \end{cases}$$

La (79) ha come centro il punto:

$$(102) \qquad \begin{cases} y_{12} = \dfrac{l_{12}^2 + l_{23}^2}{l_{12}^2 + l_{13}^2} \\ y_{13} = \dfrac{l_{13}^2 + l_{23}^2}{l_{13}^2 + l_{12}^2} \\ y_{23} = \dfrac{l_{13}^2 + l_{23}^2}{l_{12}^2 + l_{23}^2} \end{cases}$$

e la (83) ha come centro il punto:

$$(103)\qquad \begin{cases} y_{12} = \dfrac{l_{12}^p + l_{23}^p}{l_{13}^p + l_{13}^p} \\ y_{13} = \dfrac{l_{13}^p + l_{23}^p}{l_{13}^p + l_{12}^p} \\ y_{23} = \dfrac{l_{13}^p + l_{23}^p}{l_{12}^p + l_{23}^p}. \end{cases}$$

8. Volendo in questo paragrafo trattare la questione da un punt di vista più generale, supponiamo che siano

$$A \equiv (\alpha_{13}\,\alpha_{12}) \qquad B \equiv (\beta_{13}\,\beta_{12}) \qquad \text{e} \qquad C \equiv (\gamma_{13}\,\gamma_{12})$$

tre punti *allineati* del piano del triangolo $A_1A_2A_3$ di riferimento,

$$P \equiv (\xi_{13}\,\xi_{12})$$

un punto generico del piano medesimo. L'equazione della retta co tenente A, B, C è:

$$(104)\qquad \begin{vmatrix} x_{13} & x_{12} & 1 \\ \alpha_{13} & \alpha_{12} & 1 \\ \beta_{13} & \beta_{12} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

dove $x_{13}\ x_{12}\left(\text{e}\ \ x_{23} = \dfrac{x_{13}}{x_{12}}\right)$ sono le coordinate correnti di un pun della retta e

$$(105)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{13} & \alpha_{12} & 1 \\ \beta_{13} & \beta_{12} & 1 \\ \gamma_{13} & \gamma_{12} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

rappresenta la condizione imposta sopra che A, B, C siano allinea L'equazione della retta PA è

$$(106)\qquad \begin{vmatrix} x_{13} & x_{12} & 1 \\ \xi_{13} & \xi_{12} & 1 \\ \alpha_{13} & \alpha_{12} & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

per trovare la coordinata baricentrica x_{23} del punto P_{23} ove es incontra la retta fondamentale A_2A_3 osserviamo che quest'equazio si può scrivere anche:

$$(107)\qquad \begin{vmatrix} x_{23} & 1 & \dfrac{1}{x_{12}} \\ \xi_{13} & \xi_{12} & 1 \\ \alpha_{13} & \alpha_{12} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Facendo in questa $x_{12} = \infty$, segue:

$$(108)\qquad x_{23} = \frac{\xi_{13} - \alpha_{13}}{\xi_{12} - \alpha_{12}}.$$

Analogamente, detta x_{12} la coordinata baricentrica del punto P_{12} ove la retta A_1A_2 è incontrata dalla PC e x_{13} quella del punto P_{13} ove la PB incontra la A_1A_3, si trova:

$$(109)\quad \begin{cases} x_{12} = \dfrac{\xi_{13}\gamma_{12} - \xi_{12}\gamma_{13}}{\xi_{13} - \gamma_{13}} \\ x_{13} = \dfrac{\xi_{12}\beta_{13} - \xi_{13}\beta_{12}}{\xi_{12} - \beta_{12}} . \end{cases}$$

Scriviamo che i tre punti P_{12}, P_{13}, P_{23} sono in linea retta: la condizione è rappresentata dalla:

$$(110)\quad x_{12} . x_{23} + x_{13} = 0$$

che si trasforma in quest'altra

$$(111)\quad (\xi_{13}\gamma_{12} - \xi_{12}\gamma_{13}) . (\xi_{13} - \alpha_{13}) . (\xi_{12} - \beta_{12}) + \\ + (\xi_{12} . \beta_{13} - \xi_{13}\beta_{12}) . (\xi_{13} - \gamma_{13}) . (\xi_{13} - \alpha_{12}) = 0.$$

Sviluppandola troveremo un'equazione del tipo:

$$(112)\quad A . \xi_{13}^2 . \xi_{12} + B . \xi_{13} . \xi_{12}^2 + C . \xi_{13}^2 + D . \xi_{12}^2 + E . \xi_{13} . \xi_{12} + \\ + F . \xi_{13} + G . \xi_{12} = 0$$

dove:

$$(113)\quad \begin{cases} A = \gamma_{12} - \beta_{12} & B = \beta_{13} - \gamma_{13} \\ C = \beta_{12} . (\alpha_{13} - \beta_{12}) & D = \gamma_{13} . (\alpha_{13} - \beta_{13}) \\ F = \beta_{12} . (\alpha_{13}\gamma_{12} - \alpha_{12}\gamma_{13}) & G = \gamma_{13} . (\alpha_{12}\beta_{13} - \alpha_{13}\beta_{12}) \\ \quad E = 2\beta_{12}\gamma_{13} - \alpha_{13}\gamma_{12} - \alpha_{12}\beta_{13} . \end{cases}$$

Questo luogo del *terzo* ordine si spezza nella retta dei punti A, B, C e in una conica circoscritta al triangolo fondamentale; la retta ha l'equazione:

$$(114)\quad x_{13}(\alpha_{12} - \beta_{12}) + x_{12} . (\beta_{13} - \alpha_{13}) + (\alpha_{13}\beta_{12} - \alpha_{12}\beta_{13}) = 0.$$

Resta a far vedere che si possono determinare M, S, R in modo che il primo membro della precedente e l'espressione:

$$(115)\quad Mx_{12}\, x_{13} + S . x_{13} + Rx_{13}$$

— che uguagliata a zero rappresenta l'equazione di una conica circoscritta al triangolo fondamentale — diano per prodotto il primo membro della (112).

Avremo:

$$(116)\quad \begin{cases} M . (\alpha_{12} - \beta_{12}) = A = \gamma_{12} - \beta_{12} \\ M . (\beta_{13} - \alpha_{13}) = B = \beta_{13} - \gamma_{13} \end{cases}$$

$$(117)\quad \begin{cases} S . (\alpha_{12} - \beta_{12}) = C . \beta_{12} . (\alpha_{13} - \gamma_{12}) \\ S . (\alpha_{13}\beta_{12} - \alpha_{12}\beta_{13}) = \beta_{12} . (\alpha_{13}\gamma_{12} - \alpha_{12}\gamma_{13}) \end{cases}$$

$$(118)\quad \begin{cases} R . (\beta_{13} - \alpha_{13}) = D = \gamma_{13} . (\alpha_{13} - \beta_{13}) \\ R . (\alpha_{13}\beta_{12} - \alpha_{12}\beta_{13}) = \gamma_{13} . (\alpha_{12}\beta_{13} - \alpha_{13}\beta_{12}) \end{cases}$$

$$(119)\quad M . (\alpha_{13}\beta_{12} - \alpha_{12}\alpha_{13}) + R . (\alpha_{12} - \beta_{12}) + S . (\beta_{13} - \alpha_{13}) = \\ = 2\beta_{12}\gamma_{13} - \alpha_{13}\gamma_{12} - \alpha_{12}\beta_{13} .$$

Le (116) danno per M:

$$(120) \qquad M = \frac{\gamma_{12} - \beta_{12}}{\alpha_{12} - \beta_{12}}, \qquad M = \frac{\gamma_{13} - \beta_{13}}{\alpha_{13} - \beta_{13}}$$

e le due espressioni dei secondi membri resultano uguali per es
zero il determinante (105).

Le (117) danno concordemente

$$(121) \qquad S = -\gamma_{13}.$$

Le (118) danno per R:

$$(122) \qquad R = \beta_{12} \, . \, \frac{\alpha_{12} - \gamma_{12}}{\alpha_{12} - \beta_{12}}, \qquad R = \beta_{12} \, . \, \frac{\alpha_{13}\gamma_{12} - \alpha_{12}\gamma_{13}}{\alpha_{13}\beta_{12} - \alpha_{12}\beta_{13}}$$

e anche queste due espressioni risultano uguali per essere ze
determinante (105).

Resta a verificarsi la (119). Osserviamo perciò che si ha:

$$(123) \qquad R \, . \, (\alpha_{12} - \beta_{12}) + S(\beta_{13} - \alpha_{13}) = -\gamma_{13} \, . \, (\alpha_{12} - \beta_{12}) + \\ + \beta_{12} \, . \, (\gamma_{13} - \alpha_{13}) = 2\,\beta_{12}\gamma_{13} - \alpha_{12}\gamma_{13} - \alpha_{13}$$

per cui ci resta a far vedere che

$$M \, . \, (\alpha_{13}\beta_{12} - \alpha_{12}\beta_{13}) - \alpha_{12}\gamma_{13} - \alpha_{13}\beta_{12} = -\alpha_{13}\gamma_{12} - \alpha_{12}\beta_{13} \, .$$

Ora questa può scriversi:

$$(M - 1) \, . \, (\alpha_{13}\beta_{12} - \alpha_{12}\beta_{13}) = \alpha_{12}\gamma_{13} - \alpha_{13}\gamma_{12}$$

ed è vera per essere:

$$M - 1 = \frac{\beta_{12} - \gamma_{12}}{\alpha_{12} - \beta_{12}}$$

e per essere zero il solito determinante (105).

L'equazione della conica ridotta a forma intera è:

$$(124) \qquad (\gamma_{12} - \beta_{12})\,\xi_{13} \, . \, \xi_{12} - \gamma_{13} \, . \, (\alpha_{12} - \beta_{12}) \, . \, \xi_{12} + \beta_{12} \, . \, (\alpha_{12} - \gamma_{12}) \, . \, \xi_{13} =$$

Quando detta conica rappresenta una ellisse o una iperbole
coscritta al triangolo di riferimento, il suo centro si troverà r
rendo alle formule (100) facendovi le debite sostituzioni.

E. Piccioli.

UNA OSSERVAZIONE SOPRA DUE RELAZIONI POLIGONOMETRICHE

1. Si dimostra che, se è possibile costruire un poligono piano o gobbo coi lati paralleli alle n rette $1, 2, 3 \ldots n$, vale la relazione [1]

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(12) & \cos(13) \ldots \cos(1n) \\ \cos(21) & 1 & \cos(23) \ldots \cos(2n) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos(n1) & \cos(n2) & \cos(n3) \ldots \quad 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(I)}$$

Dimostrerò che la condizione posta non è necessaria per $n \geqslant 4$ cioè che la (1) vale sempre per $n > 3$.

Per la dimostrazione distinguiamo infatti due casi. Supponiamo in primo luogo che vi siano quattro delle rette p. es. 1, 2, 3, 4 non parallele ad un piano. Allora è possibile costruire un quadrangolo gobbo coi lati a_1, a_2, a_3, a_4 paralleli ad esse. [2] Proiettiamolo sui suoi lati e sulle $n-4$ rimanenti rette. Avremo le n equazioni:

$$\begin{array}{l} a_1 \qquad\qquad + a_2 \cos(12) + a_3 \cos(13) + a_4 \cos(14) = 0, \\ a_1 \cos(21) + a_2 \qquad\qquad + a_3 \cos(23) + a_4 \cos(24) = 0, \\ a_1 \cos(31) + a_2 \cos(32) + a_3 \qquad\qquad + a_4 \cos(34) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_1 \cos(n1) + a_2 \cos(n2) + \ldots\ldots\ldots + a_4 \cos(n4) = 0. \end{array} \qquad (1)$$

Esse sono soddisfatte da valori non tutti nulli delle a_1, a_2, a_3, a_4; dovranno quindi essere zero i minori di quarto ordine estratti dalla matrice dei coefficienti. Ma questa è formata dalle prime quattro colonne di (1).

Se sviluppiamo quindi il determinante (1) colla regola di Laplace facendo la somma dei prodotti dei minori di quarto ordine contenuti nella matrice formata dalle prime quattro colonne per i rispettivi minori aggiunti, essendo i primi eguali a zero, vediamo che il determinante è zero. [3]

Se il caso anzidetto non è possibile dovranno le rette essere a tre a tre parallele ad un piano. Scegliamone una terna e siano p. es. le 1, 2, 3. Si potrà allora costruire un triangolo coi lati a_1, a_2, a_3

[1] BALTZER, *Elementi di Geometria*, tradotti da LUIGI CREMONA, Parte 6ª, § 6, num. 8.
[2] BALTZER, *luogo citato*.
[3] V. p. es. CAPELLI, *Ist. Analisi Algebrica*, Cap. IV, § 8.

paralleli ad esse. Proiettamolo sui suoi lati e sulle rimanenti $n -$
rette. Otterremo le n equazioni:

$$\begin{array}{l}
a_1 \qquad\qquad + a_2 \cos(12) + a_3 \cos(13) = 0, \\
a_1 \cos(21) + a_2 \qquad\qquad + a_3 \cos(23) = 0, \\
a_1 \cos(31) + a_2 \cos(32) + a_3 \qquad\qquad = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_1 \cos(n1) + a_2 \cos(n2) + a_3 \cos(n3) = 0.
\end{array} \qquad (2$$

Per il solito ragionamento dovranno essere nulli tutti i minori d terzo ordine estratti dalla matrice dei coefficienti. Lo sviluppo d Laplace, eseguito scegliendo la matrice delle prime tre colonne, dimo stra che anche in questo caso è vera la (I).

2. Il Baltzer [1] dimostra pure che, sotto le condizioni poste a n. 1, vale la relazione: (per $n > 3$):

$$\begin{vmatrix}
\cos(p1) & \cos(p2) & \cos(p3) \ldots \cos(pn) \\
\cos(21) & 1 & \cos(23) \ldots \cos(2n) \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
\cos(n1) & \cos(n2) & \cos(n3) \ldots \quad 1
\end{vmatrix} = 0. \qquad (I$$

Anche in questo caso non è necessaria la condizione posta pe la validità della (II). Il ragionamento è identico al precedente. I si stemi di equazioni (1) o (2) (secondo il caso) fanno vedere che vi in (II) una matrice i cui determinanti di ordine massimo sono zer cosicchè lo sviluppo del determinante colla regola di Laplace d come risultato zero.

Si può dare alla (II) la forma simmetrica seguente. Date le $n +$ rette $\alpha, \beta, 1, 2, \ldots n$, si ha:

$$\begin{vmatrix}
\cos(\alpha\beta) & \cos(\alpha 1) & \cos(\alpha 2) \ldots \cos(\alpha n) \\
\cos(\beta 1) & 1 & \cos(12) \ldots \cos(1n) \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
\cos(\beta n) & \cos(n1) & \cos(n2) \ldots \quad 1
\end{vmatrix} = 0. \qquad (I$$

che varrà per quanto s'è detto per $n > 2$.

[1] *Luogo citato*, § 6, num. 9.

Dott. R. Serini.

CORREZIONI ED AGGIUNTE AD ALCUNE NOTE PRECEDENTI

1. Nella mia Nota " Contributo allo studio del quadrangolo piano incompleto " (*Periodico*, anno XXX, fasc. III, marzo 1915), la questione iniziale dev'essere posta così:

Trovare la condizione affinchè esista un tetragono (piano o gobbo) nel quale la somma algebrica delle facce, eguali a quelle date, sia nulla.

2. **Sulle equazioni bireciproche.** — Nel *Periodico* (anno 1909, volume XXIV, pag. 172) stabilii il seguente teorema:

Tutte le equazioni bireciproche sono comprese nella equazione

$$(x^2+x+1)^i\,(x^2-x+1)^j\,\mathrm{F}\,(x^4+3x^2+1,\ x^3+x)=0$$

in cui F *è una funzione intera ed omogenea di*

$$x^4+3x^2+1$$

ed

$$x^3+x$$

ed i *e* j *sono o* 0 *od* 1, *separatamente o contemporaneamente.*

Nella nota storica che precedeva la ricerca dichiarai che il chiarissimo prof. Pellet per il primo avea dato un teorema sulle dette equazioni e soggiungevo che questo teorema doveva essere modificato, se pure errori tipografici non ne aveano alterato la dizione notevolmente. Il teorema nella prima forma era questo:

Le equazioni reciproche, di cui le trasformate, ponendo

$$t=x+x^{-1},$$

sono egualmente reciproche, sono della forma

$$(x^2+x+1)^n\,(x^2-x+1)^{n'}\,\mathrm{F}\,[(x+1)^4\,(x-1)^4]=0$$

dove F *è una funzione intera ed omogenea di* $(x+1)^4$ *ed* $(x-1)^4$.

In seguito ho riscontrato che la dizione era stata già riconosciuta inesatta dallo stesso Autore e modificata nella F, e cioè questa funzione è

$$\mathrm{F}\,[(x^2+x+1)^2,\ (x^2-x+1)^2].$$

Dopo di ciò si vede che il teor. del chiarissimo prof. Pellet e il mio sono una stessa cosa, giacchè una funzione omogenea di X^2 ed Y^2

è anche funzione omogenea di $X^2 - Y^2$ ed $X^2 + Y^2$ e viceversa. ponendo:

$$X = x^2 + x + 1,$$
$$Y = x^2 - x + 1,$$

si ha

$$X^2 - Y^2 = 4x(x^2 + 1),$$
$$X^2 + Y^2 = 2(x^4 + 3x^2 + 1).$$

Ciò che dimostra la identità delle due F di cui nella Nota in scorso.

3. Nella mia Nota " Sulla equazione $\sum_1^k x_i^2 = y^p$ " (*Periodico*, lume XXX, fasc. I, novembre 1914) ho dimostrato che di que indeterminata si possono dare infinite soluzioni — ecco un'altra mostrazione (¹) più semplice — notando però che quella già dat condotta mediante un algoritmo che può servire per lo studic molte altre questioni.

Il teorema rimane dimostrato se riusciamo a far vedere che per

$$(\sum_1^k a_i^2)^p = \sum_1^k A_i^2.$$

Pertanto ci è nota la identità

$$(\sum_1^k a_i^2)^2 = (-a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2)^2 + (2a_1a_2)^2 + \ldots + (2a_1 a_k)^2,$$

e, giovandoci di questa e mediante successive elevazioni a quadı si ha:

$$(\sum_1^k a_i^2)^{2^\alpha} = \sum_1^k A_i^2.$$

Ora, se $p = 2n + 1$, è identicamente

$$(\sum_1^k a_i^2)^p = [a_1 (\sum_1^k a_i^2)^n]^2 + [a_1 (\sum_1^k a_i^2)^n]^2 + \ldots + [a_k (\sum_1^k a_i^2)^n]^2,$$

e se $p = 2^\alpha (2n + 1)$ si ha

$$(\sum_1^k a_i^2)^p = [(\sum_1^k a_i^2)^{2^\alpha}]^{2n+1} = (\sum_1^k A_i^2)^{2n+1} = \sum_1^k B_i^2$$

ed il teorema è completamente dimostrato.

(¹) Estratta da' miei *Appunti di Algebra*.

G. CANDIDO.

PICCOLE NOTE

Sulle inversioni nelle permutazioni.

1. Per sapere quante siano le permutazioni di n elementi che hanno λ inversioni, basta vedere in quanti modi si possono determinare $n-1$ numeri, positivi o nulli:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$$

e rispettivamente non superiori ad

$$1, 2, \ldots, n-1$$

e tali che si abbia sempre (¹)

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} = \lambda.$$

Indicheremo questo numero con $I_{n,\lambda}$.

2. D'altra parte si sa (²) che il numero:

$$C^{(\lambda)}(a_1^{\alpha_1}, a_2^{\alpha_2}, \ldots, a_m^{\alpha_m})$$

è quello delle combinazioni, λ a λ, degli m oggetti:

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

nelle quali: l'oggetto a_1 può comparire fino ad α_1 volte, l'oggetto α_2 fino ad α_2 volte..., coincide col numero dei sistemi di valori interi, positivi o nulli, delle

$$q_1, q_2, \ldots, q_m$$

che soddisfano l'equazione indeterminata:

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_m = \lambda \qquad (q_\rho = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_\rho;\ \rho = 1, 2, \ldots, m).$$

3. Paragonando i teoremi dei due articoli precedenti, si ha evidentemente:

$$I_{n,\lambda} = C^{(\lambda)}(a_1^{1}, a_2^{2}, \ldots, a_{n-1}^{n-1}).$$

Questa formula ci dà una notevole espressione combinatoria del numero $I_{n,\lambda}$. Si potrà dire, p. es., che $I_{7,4}$ è il numero dei numeri di quattro cifre (da scegliersi fra le cifre: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) che godono delle seguenti proprietà:

1°) le cifre del numero non presentano mai inversioni;

2°) una stessa cifra non può comparire, nel numero, più volte di quanto è il suo valore (così, p. es., 3 non potrà comparire che: 0, 1, 2, 3 volte).

(¹) A. Capelli, *Istituzioni di Analisi Algebrica*. 4ª Ed. (Napoli, 1909). Es. 4°, p. 77.
(²) E. Netto, *Lehrbuch der Combinatorik*. (Leipzig. 1901). Cap. I, § 15°.

A. Palomby.

PROBLEMI[1]

(Continuazione — Vedi fascicolo VI, anno XXX).

201. Sia AB un diametro del circolo c di centro O, M un punto di c e C un punto qualunque del piano di c. La retta che passa per i centri dei circoli circoscritti ai triangoli MAC, MBC inviluppa una conica di fuoco O.

202. Dimostrare che

$$\lim_{\lambda=1} \frac{\lambda^{n-1}[n\lambda-(n+1)]-\lambda+2}{(\lambda-1)^2}=\frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

203. Dimostrare l'identità

$$\begin{vmatrix} x^4+y^4-a^4 & 4 & 2 & 0 \\ x^5+x^5-a^5 & 5a & 5a & 0 \\ x^6+y^6-a^6 & 6a^2 & 9a^2 & 2 \\ x^7+y^7-a^7 & 7a^3 & 14a^3 & 7a \end{vmatrix}=0,$$

quando

$$x+y=a.$$

204. La retta variabile

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & a\operatorname{tg}\alpha & 1 \\ a\operatorname{tg}45^\circ-\alpha & a & 1 \end{vmatrix}=0,$$

inviluppa, al variare di α, il circolo $x^2+y^2-a^2=0$.

205. Sia P un punto di un'*asteroide* (ipocicloide a 4 regressi),

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

C il corrispondente centro di curvatura e Q, Q' due punti tali che

$$\frac{QP}{QC}=\frac{Q'P}{Q'C}=\frac{1}{k}.$$

Dimostrare che il luogo dei punti Q, Q' si compone di due curve unicursali le cui aree sono

$$U=\frac{3\pi a^2(k^2+8k+4)}{8(k+1)^2}, \qquad U'=\frac{3\pi a^2(k^2-8k+4)}{8(k-1)^2}.$$

---

[1] In massima non pubblicheremo le risoluzioni di questi problemi favoritici dal Comandante BARISIEN, ma accetteremo volentieri le osservazioni e generalizzazioni che i nostri lettori vorranno inviarci.

(Si verifica che se

1°) $k = 0$ $\qquad U = U' = \dfrac{3\pi a^2}{2}$,

Q, Q' si confondono col centro di curvatura C: la sestica è allora la sviluppata dell'asteroide.

2°) $k = \infty$ $\qquad U = U' = \dfrac{3\pi a^2}{8}$.

Q, Q' diventa allora l'asteroide data.

3°) $k = 1$, Q è il punto medio di PC e l'area del luogo di Q è

$$U = \frac{39\pi a^2}{32}.$$

4°) $k = 2$. Ciascuno dei punti Q, O' diventa il circolo $x^2 + y^2 = a^2$.
Si trova allora

$$U = \pi a^2, \qquad U' = 3\pi a^2.$$

La curva Q' è descritta tre volte.)

206. Sia P un punto di una cardioide, C il centro di curvatura corrispondente, Q, Q' due punti tali che

$$\frac{QC}{QP} = \frac{Q'C}{Q'P} = \frac{1}{k}.$$

Dimostrare che il luogo dei punti Q, Q' si compone di due quadriche unicursali e calcolare le loro aree.

Casi particolari di $k = 0$, $k = \infty$, $k = 1$, $k = 3$.

(Le coordinate parametriche d'un punto P della cardioide essendo

$$x_p = a\cos\theta\,(1 + \cos\theta), \qquad y_p = a\,\text{sen}\,\theta\,(1 + \cos\theta),$$

quelle di C sono

$$x_c = \frac{a}{3}(1 + \cos\theta)(2 - \cos\theta), \qquad y_c = \frac{a}{3}\,\text{sen}\,\theta\,(1 - \cos\theta),$$

quelle di Q (interno a PC) sono

$$x_q = \frac{a}{3(k+1)}(1 + \cos\theta)\,[2k - (k - 3)\cos\theta],$$

$$y_q = \frac{a\,\text{sen}\,\theta}{3(k+1)}\,[k + 3 - (k - 3)\cos\theta],$$

quelle di Q' (esterno a PC) sono

$$x_{q'} = \frac{a}{3(k-1)}(1 + \cos\theta)\,[2k - (k + 3)\cos\theta],$$

$$y_{q'} = \frac{a\,\text{sen}\,\theta}{3(k-1)}\,[k - 3 - (k + 3)\cos\theta].$$

Le aree U e U' di queste due curve sono

$$U = \frac{\pi a^2(k^2 + 2k + 9)}{6(k+1)^2}, \qquad U' = \frac{\pi a^2(k^2 - 2k + 9)}{6(k-1)^2}.$$

Casi particolari. — 1°) $k=0$. $\quad U = U' = \dfrac{3\pi a^2}{2}$.

Si trova la cardioide.

2°) $k=\infty$. $\quad U = U' = \dfrac{\pi a^2}{6} = \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{3\pi a^2}{2}\right)$.

Si trova l'evoluta della cardioide.

3°) $k=1$. Il luogo del punto medio di PC

$$U = \frac{\pi a^2}{2}.$$

4°) $k=3$. Si trova allora

$$U = \frac{\pi a^2}{4}, \qquad U' = \frac{\pi a^2}{2} = 2\left(\frac{\pi a^2}{4}\right).$$

Q e Q' descrivono il circolo $x^2+y^2-ax=0$, Q' lo percorre 2 volte.)

(Continua) E.-N. Barisien.

QUISTIONI PROPOSTE

811. Sul diametro FG di un cerchio di centro A sono dati punti B, C equidistanti dal centro stesso.

Determinare un punto M della periferia in modo che risulti m sima la differenza fra i due angoli AMB, AMC.

P. Frisi.

812. Le tre sestiche

$$(x^2+y^2)^2(b^2x^2+a^2y^2) = 2(a^2-b^2)^2x^2y^2,$$
$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)(b^2x^2+a^2y^2)^2 = (a^2-b^2)^2(b^2x^2-a^2y^2)^2,$$
$$(a^2+b^2)(a^4x^2+b^4y^2)(a^6x^2+b^6y^2)^2 = a^2b^2(a^2-b^2)^2(a^6x^2-b^6y^2)^2$$

hanno la stessa area $\pi(a-b)^2$. E.-N. Barisien.

813. Supponendo che la funzione $f(x)$ e tutte le sue derivate si continue nell'intervallo $(a, a+x)$, trovare la somma della serie:

$$[f(a+x)-f(a)]+\left[f'(a+x)-\left(1+\frac{1}{1!}\right)f'(a)\right]x+\ldots$$
$$\ldots+\left[f^{(n)}(a+x)-\left(1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)f^{(n)}(a)\right]x^n+\ldots$$

F. Nedelcu.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 29 Dicembre 1915

LE PROPRIETÀ DEI NUMERI $\left\{ {m \atop n} \right\}_h$

derivanti dalla considerazione di speciali combinazioni di elementi dette combinazioni con ripetizione fino ad h e la loro applicazione: 1° allo studio delle tavole generali di addizione per linee, per colonne, per diagonali e circolari, di passo h; 2° alla determinazione in funzione di p e di $Q_1, Q_2, \dots Q_n$, dell'elemento di posto m nella successione individuata da n numeri iniziali $Q_1, \dots Q_n$ e dall'equazione ricorrente: $Q_m = p(Q_{m-1} + Q_{m-2} + \dots + Q_{m-n})$.

(Continuazione della parte I — Vedi fascicolo precedente)

---

6. Abbiamo già notato che la (10) ci permette di esprimere il valore di $\left\{ {m \atop n} \right\}_h$ mediante coefficienti binomiali, ma non è sempre di rapida applicazione. Per altra via possiamo arrivare ad esprimere $\left\{ {m \atop n} \right\}_h$, mediante coefficienti binomiali. Intanto si ha come è noto:

$$\left\{ {m \atop n} \right\}_h = \left\{ {m+n-1 \atop n} \right\}; \qquad n \leqslant h.$$

Se $n = h + 1$, la (11) ci permette di scrivere:

$$\left\{ {m \atop h+1} \right\}_h = \frac{m}{h+1} \left[\binom{m+h-2}{h} + 2\binom{m+h-3}{h-1} + \right.$$
$$\left. + 3\binom{m+h-4}{h-2} + \dots + h\binom{m-1}{1} \right].$$

La somma chiusa in [ ], vale

$$\binom{m+h}{h} - h\binom{m-1}{0} - \binom{m}{0} \text{ [1]}$$

---

[1] Si ha la relazione (v. per la dimostrazione una mia nota: " Su alcune notevoli formole di analisi combinatoria, *Periodico di Matematica*, fasc. III, Anno XXIX, gennaio 1914; formola (2)')

$$\binom{p}{i} + 2\binom{p-1}{i-1} + 3\binom{p-2}{i-2} + \dots + (k+1)\binom{p-k}{i-k} = \binom{p+2}{i} - (k+1)\binom{p-k}{i-k-1} - \binom{p-k+1}{i-k-1}$$

e da questa ponendo $p = m + h - 2$; $k = h - 1$, e cambiando i in h, si ha appunto:

$$\binom{m+h-2}{h} + 2\binom{m+h-3}{h-1} + \dots + h\binom{m-1}{1} = \binom{m+h}{h} - h\binom{m-1}{0} - \binom{m}{0}.$$

quindi:

$$\left\{{m \atop h+1}\right\}_h = \frac{m}{h+1}\left[\binom{m+h}{h}-(h+1)\right]$$

od anche

$$\left\{{m \atop h+1}\right\}_h = \binom{m+h}{h+1} - m. \qquad (1$$

Per $n = h+2$, si ha:

$$\left\{{m \atop h+2}\right\}_h = \frac{m}{h+2}\left[\left\{{m-1 \atop h+1}\right\}_h + 2\left\{{m-1 \atop h}\right\}_h + \ldots + h\left\{{m-1 \atop 2}\right\}_h\right]$$

e quindi, se $h \geqslant 2$, tenuto conto della (16) e (3):

$$\left\{{m \atop h+2}\right\}_h = \frac{m}{h+2}\left[\binom{m+h-1}{h+1} - (m-1)\right] +$$
$$+ \frac{m}{h+2}\left[2\binom{m+h-2}{h} + 3\binom{m+h-3}{h-1} + \ldots + h\binom{m}{2}\right]$$

Ma

$$2\binom{m+h-2}{h} + 3\binom{m+h-3}{h-1} + \ldots + h\binom{m}{2} =$$
$$= 2\binom{m+h-1}{h} + \binom{m+h-1}{h-1} - \binom{m+1}{1} - h\binom{m}{1}. \ (^1$$

Pertanto si ha con facili trasformazioni:

$$\left\{{m \atop h+2}\right\}_h = \binom{m+h+1}{h+2} - m^2; \qquad h \leqslant 2. \qquad (1$$

Se poi $h = 1$ si ha:

$$\left\{{m \atop 3}\right\}_1 = \binom{m}{3} = \binom{m+2}{3} - m^2$$

talchè la (17) è vera per ogni valore di h.

In modo analogo possono trattarsi i casi $n = h+3$, $h+4$,. Ma senza ricorrere alla (11) possiamo in altra maniera arrivare esprimere il valore di $\left\{{m \atop n}\right\}$ mediante coefficienti binomiali.

Sia dapprima $n < 2(h+1)$. Le combinazioni n ad n di m eleme diversi con ripetizione fino ad h coincidono, se $h = n$, colle sol combinazioni con ripetizione di m elementi n ad n (cioè le combi zioni con ripetizione fino ad n) e se $h < n$, si possono ottenere queste eliminando quelle fra esse che contengono uno o più eleme ripetuti più di h volte, e quindi almeno $h+1$ volte. Ora se si c siderano quelle di tali ultime combinazioni che contengono un ce elemento α ripetuto ad es. $h+1$ volte, si riconosce che possono o nersi tutte senza omissione o ripetizione associando l'elemento α pr

(1) Cfr. nota cit formola (3). Basta supporre $a=2$; $b=1$; $p=m+h-2$, $k=h-2$ e c biare i in h.

$h+1$ volte con gli elementi di una delle comuni combinazioni con ripetizione di m elementi $n-(h+1)$ ad $n-(h+1)$, giacchè se l'elemento α fosse in una di esse ripetuto anche $n-(h+1)$ volte, risulterebbe poi ripetuto in tutto $n-(h+1)+(h+1)=n$ volte e si avrebbe appunto una combinazione con ripetizione di m elementi n ad n contenente n volte l'elemento α. Ma essendo α uno qualunque degli m elementi dati, segue che quelle delle comuni combinazioni con ripetizione di m elementi n ad n che contengono almeno un elemento ripetuto almeno $h+1$ volte, sono in numero di $m\binom{m+n-(h+1)-1}{n-(h+1)}$, quante cioè ne indica il prodotto di m per il numero delle comuni combinazioni con ripetizione di m elementi, $n-(h+1)$ ad $n-(h+1)$. Avremo adunque:

$$\begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}_h = \binom{m+n-1}{n} - m\binom{m+n-h-2}{n-h-1}\ ; \quad n < 2(h+1) \qquad (18)$$

se $n-(h+1) < h+1$ ovvero $n < 2(h+1)$.

In particolare

$$\begin{Bmatrix} m \\ h+k \end{Bmatrix}_h = \binom{m+h+k-1}{h+k} - m\binom{m+k-2}{k-1}; \quad h > k-2. \qquad (18')$$

La (18) comprende evidentemente come casi particolari le (16) e (17) e molte altre che potrebbero dedursi con processo laborioso dalla (11).

Se $n \geqslant 2(h+1)$, ricorrendo alla (11) che contiene

$$\begin{Bmatrix} m-1 \\ n-1 \end{Bmatrix}_h, \quad \begin{Bmatrix} m-1 \\ n-2 \end{Bmatrix}, \ldots$$

potremo sostituire ad essi le espressioni date dalla (18), purchè sia

$$n-1, \qquad n-2, \ldots < 2(h+1)$$

ovvero

$$(n-1) < 2(h+1),$$

ed avremo ancora $\begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}_h$ espresso mediante coefficienti binomiali. Se $n=2(h+1)$ si arriva più direttamente ad una opportuna formola col seguente ragionamento. Supponiamo, per fissar le idee che gli m elementi dati siano a, b, c, d, e e sia $h=2$; $n=2(h+1)=6$. Si tratta di determinare il valore di $\begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \end{Bmatrix}_2$. Le comuni combinazioni con ripetizione dei cinque elementi a, b, c, d, e, sei a sei, sono in numero di $\binom{5+6-1}{6} = \binom{10}{6}$. Dobbiamo da queste toglier quelle che contengono uno o più degli elementi dati ripetuto più di $h=2$ volte, cioè almeno tre volte.

Se vogliamo formare queste ultime prendendo un elemento p. es. a tre volte ed associando il gruppo aaa con una delle comuni combinazioni con ripetizione degli elementi b, c, d, e tre a tre, formia bensì una delle combinazioni con ripetizione 6 a 6 degli element b, c, d, e, ma alcune di esse sono state tolte due volte p. es. la aaa apparirà tolta una seconda volta sotto la forma $bbb\,aaa$; il num delle combinazioni tolte due volte è dunque $\binom{5}{2}$. Si ha pertant

$$\left\{ 5 \atop 6 \right\}_2 = \binom{5+6-1}{6} - 5\binom{5+3-1}{3} + \binom{5}{2} = 45$$

ed in generale

$$\left\{ m \atop 2(h+1) \right\}_h = \binom{m+2h+1}{2(h+1)} - m\binom{m+h}{h+1} + \binom{m}{2}.$$

Analogo ragionamento si può fare quando n supera $2(h+1)$ è minore di $3(h+1)$, talchè se $2(h+1) < n < 3(h+1)$, si ha:

$$\left\{ m \atop n \right\}_h = \binom{m+n-1}{n} - m\binom{m+n-(h+1)-1}{n-(h+1)} + \\ + \binom{m}{2}\binom{m+n-2(h+1)-1}{n-2(h+1)}.$$

E per $3(h+1) \leqslant n < 4(h+1)$, si avrebbe:

$$\left\{ m \atop n \right\}_h = \binom{m+n-1}{n} - m\binom{m+n-(h+1)-1}{n-(h+1)} + \\ + \binom{m}{2}\binom{m+n-2(h+1)-1}{n-2(h+1)} - \binom{m}{3}\binom{m+n-3(h+1)-}{n-3(h+1)}$$

ed in generale:

$$\left\{ m \atop n \right\}_h = \sum_0^q {}_i (-1)^i \binom{m}{i}\binom{m+n-i(h+1)-1}{n-i(h+1)}$$

od anche:

$$\left\{ m \atop n \right\}_h = \sum_0^q {}_i (-1)^i \binom{m}{i}\binom{m+n-i(h+1)-1}{m-1}$$

q essendo il quoziente della divisione di n per $h+1$. (1)

---

(1) Per altra via si arriva allo stesso risultato in BELLACCHI. *Lezioni di algebra*, volum lezione XVII, Es. n. 4. — Ivi posto

$$(1 + x + \ldots + x^{p-1})^m = \left(\frac{1-x^p}{1-x}\right)^m = (1-x)^{-m}(1-x^p)^m$$

sviluppando questo prodotto in serie di potenze di x ed eguagliando il coefficiente di x^n ad $\left\{ m \atop n \right\}$ si trova appunto un'espressione che colle nostre notazioni, e per $p - 1 = h$, coincide con q data dalla (19'). Si osserva pure che i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi sviluppo di $(1 + x + \ldots + x^{p-1})^m$ in serie di potenze di x sono uguali, che quelli riferentisi potenza $(m+1)^{ma}$ valgono, il 1°, la somma dei primi due, dei primi tre ... di quelli rifere alla potenza m^{ma}; come già sappiamo

$$\left\{ m+1 \atop n \right\}_h = \left\{ m \atop n \right\}_h + \left\{ m \atop n-1 \right\}_h + \ldots + \left\{ m \atop n-h \right\}_h$$

e se $n \leqslant h+1$,

$$\left\{ m+1 \atop n \right\}_h = \left\{ m \atop n \right\}_h + \left\{ m \atop n-1 \right\}_h + \ldots + \left\{ m \atop 0 \right\}_h.$$

7. Si possono avere altre espressioni di $\genfrac\{\}{0pt}{}{m}{n}_h$, comode in molti casi per calcolarne il valore. Conveniamo anzitutto che in espressioni quali $\genfrac\{\}{0pt}{}{x}{r}_h$, $\genfrac\{\}{0pt}{}{y_2}{r}_h$, $\genfrac\{\}{0pt}{}{z'}{r}$ ... nelle quali il numeratore è una delle ultime lettere dell'alfabeto, anche munita di indici, apici ecc.... essa rappresenti il minor numero positivo intero tale che $xh \geqslant r$.

Indicando con $\mathrm{E}'\frac{r}{h}$ il quoto di r per h, quando r è divisibile per h, oppure la parte intera di esso quoto aumentata di uno, quando r non è divisibile per h, cioè ponendo $\mathrm{E}'\frac{r}{h} = \mathrm{E}\frac{r}{h}$ se r è divisibile per h; $\mathrm{E}'\frac{r}{h} = \mathrm{E}\frac{r}{h} + 1$ se r non è divisibile per h, abbiamo evidentemente: $x = \mathrm{E}'\frac{r}{h}$.

1°. Ciò posto sommando la (7) con quelle che da essa si ottengono cambiando m in $m-1$, $m-2, \ldots x$, si ha per $n > 0$:

$$\begin{aligned}\genfrac\{\}{0pt}{}{m}{n}_h = &\left[\genfrac\{\}{0pt}{}{m-1}{n-1}_h + \genfrac\{\}{0pt}{}{m-2}{n-1}_h + \ldots + \genfrac\{\}{0pt}{}{x_1}{n-1}_h\right] + \\ &+ \left[\genfrac\{\}{0pt}{}{m-1}{n-2}_h + \genfrac\{\}{0pt}{}{m-2}{n-2}_h + \ldots + \genfrac\{\}{0pt}{}{x_2}{n-2}_h\right] + \\ &\ldots + \left[\genfrac\{\}{0pt}{}{m-1}{n-h}_h + \genfrac\{\}{0pt}{}{m-2}{n-h}_h + \ldots + \genfrac\{\}{0pt}{}{x_h}{n-h}_h\right]\end{aligned}$$

ovvero, poichè ad es. la 1ª parentesi [ ] del 2° membro racchiude tutti i termini non nulli della n^a verticale di T_h, da $\genfrac\{\}{0pt}{}{\mathrm{E}'\frac{n-1}{h}}{n-1}_h$ fino ad $\genfrac\{\}{0pt}{}{m-1}{n-1}$:

$$\genfrac\{\}{0pt}{}{m}{n}_h = \sum_{0}^{h-1}{}_j \sum_{0}^{m-1}{}_i \genfrac\{\}{0pt}{}{i}{n-1-j} = \sum_{0}^{h-1}{}_j \sum_{\mathrm{E}'\frac{n-1-j}{h}}^{m-1}{}_i \genfrac\{\}{0pt}{}{i}{n-1-j}_h. \tag{20}$$

2°. Cambiando nella 1ª della (20) n in $n-1$, e sottraendo la relazione ottenuta dalla precedente, si ha per $n > 1$

$$\begin{aligned}\genfrac\{\}{0pt}{}{m}{n}_h = &\left[\genfrac\{\}{0pt}{}{m}{n-1}_h + \genfrac\{\}{0pt}{}{m-1}{n-1}_h + \ldots + \genfrac\{\}{0pt}{}{x}{n-1}_h\right] - \\ &- \left[\genfrac\{\}{0pt}{}{m-1}{n-h-1}_h + \genfrac\{\}{0pt}{}{m-2}{n-h-1}_h + \ldots + \genfrac\{\}{0pt}{}{y}{n-h-1}_h\right]\end{aligned}$$

ovvero:

$$n > 1$$

$$\begin{aligned}\genfrac\{\}{0pt}{}{m}{n}_h &= \sum_{0}^{m}{}_i \genfrac\{\}{0pt}{}{i}{n-1}_h - \sum_{0}^{m-1}{}_i \genfrac\{\}{0pt}{}{i}{n-h-1}_h = \\ &= \sum_{\mathrm{E}'\frac{n-1}{h}}^{m}{}_i \genfrac\{\}{0pt}{}{i}{n-1}_h - \sum_{\mathrm{E}'\frac{n-h-1}{h}}^{m-1}{}_i \genfrac\{\}{0pt}{}{i}{n-h-1}_h\end{aligned} \tag{21}$$

Per $n=1$ si ha invece:

$$\begin{Bmatrix} m\\ 1\end{Bmatrix}_h = \begin{Bmatrix} m\\ 0\end{Bmatrix}_h + \begin{Bmatrix} m-1\\ 0\end{Bmatrix}_h + \dots + \begin{Bmatrix} 1\\ 0\end{Bmatrix}_h = m. \qquad (21')$$

La (21) per $n=1$ darebbe $\begin{Bmatrix} m\\ 1\end{Bmatrix}_h = m+1$, perchè si ha $x=0$, e nella 1ª [ ] trovansi $m+1$ termini uguali ad uno.

3°. Supposto sempre $n>1$, sommando la 1ª delle (21) con quella che da essa si ottengono cambiando m in $m-1$, $m-2, \dots m-s$, s essendo il maggior intero positivo non nullo, tale che $n-sh \geqq 0$, talchè $s = \mathrm{E}\,\dfrac{n}{h}$, e corrispondentemente n in $n-h$, $n-2h, \dots n-sh$ si ha:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} m\\ n\end{Bmatrix}_h = &\left[\begin{Bmatrix} m\\ n-1\end{Bmatrix}_h + \dots + \begin{Bmatrix} x\\ n-1\end{Bmatrix}_h\right] + \\ &-\left[\begin{Bmatrix} m-1\\ n-h\end{Bmatrix}_h + \begin{Bmatrix} m-2\\ n-2h\end{Bmatrix}_h + \dots + \begin{Bmatrix} m-s\\ n-sh\end{Bmatrix}_h\right] - \\ &-\left[\begin{Bmatrix} m-s-1\\ n-(s+1)h-1\end{Bmatrix}_h + \begin{Bmatrix} m-s-2\\ n-(s+1)h-1\end{Bmatrix}_h + \dots + \begin{Bmatrix} y\\ n-(s+1)h-1\end{Bmatrix}_h\right].\end{aligned}$$

Essendo $s = \mathrm{E}\,\dfrac{n}{h}$, sarà $n-sh<h$ ed anche: $n-(s+1)h-1<0$ perciò i termini chiusi entro l'ultima [ ] del 2° membro sono nulli Abbiamo adunque per $n-sh>1$:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} m\\ n\end{Bmatrix}_h = &\left[\begin{Bmatrix} m\\ n-1\end{Bmatrix}_h + \dots + \begin{Bmatrix} x\\ n-1\end{Bmatrix}_h\right] - \\ &-\left[\begin{Bmatrix} m-1\\ n-h\end{Bmatrix}_h + \begin{Bmatrix} m-2\\ n-2h\end{Bmatrix}_h + \dots + \begin{Bmatrix} m-s\\ n-sh\end{Bmatrix}_h\right]; \quad n-sh>1.\end{aligned}$$

I termini $\begin{Bmatrix} m-1\\ n-h\end{Bmatrix}_h \dots$ si possono scrivere $\begin{Bmatrix} m-1\\ mh-h\end{Bmatrix}_h \dots$; talchè risulta:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} m\\ n\end{Bmatrix}_h = &\left[\begin{Bmatrix} m\\ n-1\end{Bmatrix}_h + \dots + \begin{Bmatrix} x\\ n-1\end{Bmatrix}_h\right] - \\ &-\left[\begin{Bmatrix} m-1\\ mh-n\end{Bmatrix}_h + \dots + \begin{Bmatrix} m-s\\ mh-n\end{Bmatrix}_h\right]; \quad n-sh>1. \qquad (22)\end{aligned}$$

Se $h=1$, si ha $s=n$ ed $n-sh=0$. In tal caso la (22) riduces ad una proprietà nota dei coefficienti binomiali. (1)

---

(1) Essa appunto diventa:

$$\binom{m}{n} = \left[\binom{m}{n-1} + \dots + \binom{n-1}{n-1}\right] - \left[\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n-2} + \dots + \binom{m-n}{0}\right] = \\ = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-2}{n-1} + \dots + \binom{n-1}{n-1}$$

L'ipotesi $n-sh=1$ è possibile soltanto se $h>1$. Sia adunque $n-sh=1$; $h>1$. Scrivendo tutte le relazioni che si devono sommare per avere la (22), le ultime due sono

$$\left\{\begin{matrix} m-(s-1) \\ n-(s-1)h \end{matrix}\right\}_h = \left[\left\{\begin{matrix} m-(s-1) \\ n-(s-1)h-1 \end{matrix}\right\}_h + \dots + \left\{\begin{matrix} z \\ n-(s-1)h-1 \end{matrix}\right\}_h\right] - \left[\left\{\begin{matrix} m-s \\ n-sh-1 \end{matrix}\right\}_h + \dots + \left\{\begin{matrix} z' \\ n-sh-1 \end{matrix}\right\}_h\right]$$

$$\left\{\begin{matrix} m-s \\ n-sh \end{matrix}\right\}_h = \left\{\begin{matrix} m-s \\ n-sh-1 \end{matrix}\right\}_h + \dots + \left\{\begin{matrix} 1 \\ n-sh-1 \end{matrix}\right\}_h = \left\{\begin{matrix} m-s \\ 0 \end{matrix}\right\}_h + \dots + \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right\}_h$$

perchè bisogna ottenere la 2ª di esse dalla (21') anzichè dalla (21). Mentre il 2º membro di questa contiene $m-s$ termini uguali ad 1, la 2ª parentesi del 2º membro della 1ª contiene $m-s+1$ termini uguali ad uno, giacchè $z'=0$. Si ha pertanto:

$$\left.\begin{aligned} \left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_h = \left[\left\{\begin{matrix} m \\ n-1 \end{matrix}\right\}_h + \dots + \left\{\begin{matrix} x \\ n-1 \end{matrix}\right\}_h\right] - \\ - \left[\left\{\begin{matrix} m-1 \\ mh-n \end{matrix}\right\}_h + \left\{\begin{matrix} m-2 \\ mh-n \end{matrix}\right\}_h + \left\{\begin{matrix} m-s \\ mh-n \end{matrix}\right\}_h\right] - 1 \\ n-sh=1; \quad h>1 \end{aligned}\right\} \dots \quad (22')$$

Quando $n-sh=0$, $h>1$, l'ultima delle relazioni sommate per avere la (22) è

$$\left\{\begin{matrix} m-s \\ 0 \end{matrix}\right\}_h = 1$$

anzichè: $\left\{\begin{matrix} m-s \\ 0 \end{matrix}\right\}_h = \left\{\begin{matrix} m-s \\ -1 \end{matrix}\right\}_h + \dots + \left\{\begin{matrix} z \\ -1 \end{matrix}\right\}_h = 0.$

La 2ª [ ] della penultima di esse è preceduta dal segno meno e vale zero, epperò non elimina il 2º membro dell'ultima, poichè esso vale uno. Si ha pertanto se $s>1$:

$$\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_h = \left[\left\{\begin{matrix} m \\ n-1 \end{matrix}\right\}_h + \dots + \left\{\begin{matrix} x \\ n-1 \end{matrix}\right\}_h\right] - \left[\left\{\begin{matrix} m-1 \\ n-1 \end{matrix}\right\}_h + \dots + \left\{\begin{matrix} m-(s-1) \\ n-(s-1)h \end{matrix}\right\}_h\right] - \left\{\begin{matrix} m-s \\ n-sh \end{matrix}\right\}_h + 1$$

e se $s=1$, si ha:

$$\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_h = \left[\left\{\begin{matrix} m \\ n-1 \end{matrix}\right\}_h + \dots + \left\{\begin{matrix} x \\ n-1 \end{matrix}\right\}_h\right] - \left\{\begin{matrix} m-1 \\ n-h \end{matrix}\right\}_h + 1$$

E poichè $\left\{\begin{matrix} m-s \\ n-sh \end{matrix}\right\}_h = \left\{\begin{matrix} m-s \\ 0 \end{matrix}\right\} = 1$, risulta per $n-sh=0$; $s >$

$$\left.\begin{matrix} \left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_h = \left[\left\{\begin{matrix} m \\ n-1 \end{matrix}\right\}_h + \dots + \left\{\begin{matrix} x \\ n-1 \end{matrix}\right\}_h\right] - \\ \left[\left\{\begin{matrix} m-1 \\ mh-n \end{matrix}\right\}_h + \dots + \left\{\begin{matrix} m-s+1 \\ mh-n \end{matrix}\right\}_h\right] \\ n-sh=0; \quad s>1. \end{matrix}\right\} \quad (2$$

E per $n-sh=0$, $s=1$, poichè $n=h$, risulta:

$$\left\{\begin{matrix} m \\ h \end{matrix}\right\}_h = \left\{\begin{matrix} m \\ h-1 \end{matrix}\right\}_h + \dots + \left\{\begin{matrix} x \\ h-1 \end{matrix}\right\}_h \qquad (2$$

ovvero

$$\binom{m+h-1}{h} = \binom{m+h-2}{h-1} + \binom{m+h-3}{h-1} + \dots + \binom{h-1}{h-1}$$

od anche posto $m+h-1=p$:

$$\binom{p}{h} = \binom{p-1}{h-1} + \binom{p-2}{h-1} + \dots + \binom{h-1}{h-1}$$

formula ben nota e valida anche per $h=1$.

Le (22), (22'), (22") possono anche scriversi

$$\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_h = \sum_{0}^{m}{}_i \left\{\begin{matrix} i \\ n-1 \end{matrix}\right\}_h - \sum_{s}^{m-1}{}_i \left\{\begin{matrix} i \\ mh-n \end{matrix}\right\}_h - \left\{\begin{matrix} 0\,;\ n-sh>1 & (22) \\ 1\,;\ n-sh=1 & (22') \\ -1\,;\ n-sh=0\,;\ s>1 & (22'') \end{matrix}\right.$$

oppure:

$$\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_h = \sum_{E'\frac{n-1}{h}}^{m}{}_i \left\{\begin{matrix} i \\ n-1 \end{matrix}\right\}_h - \sum_{E'\frac{mh-n}{h}}^{m-1}{}_i \left\{\begin{matrix} i \\ mh-n \end{matrix}\right\}_h - \left\{\begin{matrix} 0\,;\ ns-h>1 & (22) \\ 1\,;\ n-sh=1 & (22') \\ -1\,;\ n-sh=0\,;\ s>1 & (22'') \end{matrix}\right. \qquad (2$$

Infatti il termine $\left\{\begin{matrix} m-s \\ mh-n \end{matrix}\right\}_h$ è il 1° termine non nullo de $(mh-n+1)^a$ verticale di T_h. Ed invero il soprastante $\left\{\begin{matrix} m-s- \\ mh-n \end{matrix}\right.$ si può scrivere $\left\{\begin{matrix} m-s-1 \\ n-(s+1)h \end{matrix}\right\}_h$, che vale zero, poichè essendo $s = E$ - sarà $n-(s+1)h<0$.

Rechiamo qualche esempio che mostri come applicando le (22), (22'), (22'') si possano trovare convenienti espressioni di $\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_h$. Si vogliano ad es. le espressioni di $\left\{\begin{matrix} m \\ h+1 \end{matrix}\right\}_h$, $\left\{\begin{matrix} m \\ h+2 \end{matrix}\right\}_h, \ldots$, supposto $h>1, m>1$, giacchè se $h=1$, esse valgono rispettivamente $\binom{m}{2}, \binom{m}{3}, \ldots$ e se $m=1$, si ha: $\left\{\begin{matrix} 1 \\ n \end{matrix}\right\}_h = 1$ per $h \geqslant n$, ed $\left\{\begin{matrix} 1 \\ n \end{matrix}\right\}_h = 0$ per $h<n$. Per $h>1$ ed $n=h+1$, la $n-sh \geqslant 0$ diventa $(h+1)-sh \geqslant 0$. Si ha $s=0$ ed $(h+1)-1 \,.\, h = 1$. Abbiamo pertanto dalla (22'):

$$\left\{\begin{matrix} m \\ h+1 \end{matrix}\right\}_h = \left\{\begin{matrix} m \\ h \end{matrix}\right\}_h + \left\{\begin{matrix} m-1 \\ h \end{matrix}\right\}_h + \ldots + \left\{\begin{matrix} 1 \\ h \end{matrix}\right\}_h - \left\{\begin{matrix} m-1 \\ 1 \end{matrix}\right\}_h - 1$$

ovvero:

$$\left\{\begin{matrix} m \\ h+1 \end{matrix}\right\}_h = \binom{m+h-1}{h} + \binom{m+h-2}{h} + \ldots$$
$$\ldots + \binom{h}{h} - (m-1) - 1 = \binom{m+h}{h+1} - m,$$

che coincide colla (16), già trovata. Essa vale anche per $h=1$, perchè si ha:

$$\left\{\begin{matrix} m \\ 2 \end{matrix}\right\}_1 = \binom{m}{2} = \binom{m+1}{2} - m.$$

Se $n=h+2$, la $n-sh \geqslant 0$, diventa: $(h+2)-sh \geqslant 0$. Per $h>2$ essa è verificata da $s=1$, e risulta $(h+2)-1 \,.\, h = 2 > 1$. Pertanto dalla (22) si ha:

$$\left\{\begin{matrix} m \\ h+2 \end{matrix}\right\}_h = \left\{\begin{matrix} m \\ h+1 \end{matrix}\right\}_h + \ldots + \left\{\begin{matrix} 2 \\ h+1 \end{matrix}\right\}_h - \left\{\begin{matrix} m-1 \\ 2 \end{matrix}\right\}_h =$$
$$= \left[\binom{m+h}{h+1} - m\right] + \ldots + \binom{h+2}{h+1} - \binom{m}{2} =$$
$$= \left[\binom{m+h}{h-1} + \binom{m+h+1}{h+1} + \ldots + \binom{h+1}{h+1}\right] -$$
$$-(1+2+\ldots+m) - \binom{m}{2} =$$
$$= \binom{m+h+1}{h+2} - \binom{m+1}{2} - \binom{m}{2} = \binom{m+h+1}{h+2} - m\binom{m}{1}$$

che coincide colla (17). Si è già visto che la (17) vale per $h \geqslant 2$. Ora se $n=h+2$ ed $h=2$, si ha $s=2$ ed $n-sh=0$.

Applicando la (22'') si ritrova per $\left\{\begin{matrix} m \\ 4 \end{matrix}\right\}_2$ l'espressione data dalla (17)

in corrispondenza di $h=2$. Anche per $h=1$ l'espressione trov
di $\left\{ {m \atop h+2} \right\}_h$ ci dà il vero valore di $\left\{ {m \atop 3} \right\}_1$. Infatti risulta:

$$\left[\left\{ {m \atop h+2} \right\}_h\right]_{h=1} = \left\{ {m \atop 3} \right\}_1 = \binom{m}{3} = \binom{m+2}{3} - m^2.$$

Per il caso $n=h+3$, si trova un processo analogo a quello
guito nei casi $n=h+1$, $h+2$:

$$\left\{ {m \atop h+3} \right\}_h = \binom{m+h+2}{h+3} - m\binom{m+1}{2}; \qquad h \geqslant 2, \qquad \text{ecc., ecc.}$$

8. Altre proprietà e sviluppi notevoli dei numeri $\left\{ {m \atop n} \right\}_h$ si rit
vano applicando ad essi i principî del calcolo delle differenze. A
uopo ricordiamo che se $u_0, u_1, \ldots u_m$ è una successione di nume
sono $\Delta^0 u_0 = u_0$, $\Delta^1 u_0 = u_1 - u_0$, $\Delta^2 u_0, \ldots$ le differenze 0^a, 1^a, $2^a, \ldots$
termine iniziale u_0 si hanno le relazioni:

$$u_m = \sum_0^m{}_i \binom{m}{i} \Delta^i u_0$$

$$(-1)^m \Delta^m u_0 = \sum_0^m{}_i (-1)^i \binom{m}{i} u_i$$

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_m = \sum_0^m{}_i \binom{m+1}{i+1} \Delta^i u_0. \qquad ($$

Quest'ultima, se $u_0, u_1, \ldots u_m$ è una progressione d'ordine $n \leqslant$
talchè le differenze n^o dei suoi termini sono uguali e non null
le $(n+1)^e$, $(n+2)^e, \ldots$, sono nulle, può scriversi:

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_m = \sum_0^n{}_i \binom{m+1}{i+1} \Delta^i u_0 \ldots \qquad ($$

Indichiamo con ν il quoto di $n \geqslant 1$ per h, quando $n = hq$, opp
la parte intera di esso aumentata di uno, cioè poniamo

$$\nu = \mathrm{E}\frac{n}{h} + 1 = \mathrm{E}'\frac{n}{h}$$

quando n non è divisibile per h. Abbiamo visto (n. 2, proprietà
che i numeri appartenenti alla verticale $(n+1)^a$ di un qualsiasi tr
golo T_h costituiscono una progressione d'ordine n colle differenze
uguali ad uno. Sono i numeri $\left\{ {0 \atop n} \right\}_h$, $\left\{ {1 \atop n} \right\}_h \ldots \left\{ {m \atop n} \right\}_h \ldots$ e sappiamo (
proprietà 8^a), che i primi ν di essi sono zeri. Consideriamo le
ferenze degli elementi appartenenti alle verticali di un qualsiasi
p. es. a T_3. Esse trovansi calcolate nei seguenti specchi per le
ticali 2^a, 3^a, 4^a, 5^a, 6^a.

2ª vert.		3ª vert.			4ª vert.				5ª vert.					6ª vert.					
	Δ		Δ	Δ^2		Δ	Δ^2	Δ^3		Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4		Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
0	1	0	1	1	0	1	2	1	0	0	0	3	1	0	0	2	6	4	1
1	1	1	2	1	1	3	3	1	0	3	6	4	1	0	2	8	10	5	1
2	1	3	3	1	4	6	4	1	3	9	10	5	1	2	10	18	15	6	1
3	1	6	4	1	10	10	5	1	12	19	15	6	1	12	28	33	21	⋮	⋮
4	1	10	5	1	20	15	6	1	31	34	21	⋮	⋮	40	61	54	⋮	⋮	⋮
5	1	15	6	1	35	21	⋮	⋮	65	55	⋮	⋮	⋮	101	115	⋮	⋮	⋮	⋮
6	1	21	7	1	56	⋮	⋮	⋮	120	⋮	⋮	⋮	⋮	216	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Ora si vede subito, rapporto ad una qualsiasi di tali verticali, che le differenze del 1° numero, che è uno zero, sono numeri del triangolo T_2 e precisamente, se ci riferiamo ad es. alle differenze del 1° zero della 6ª verticale, abbiamo:

$$0=\left\{\begin{matrix}0\\5\end{matrix}\right\}_2;\quad \Delta 0=0=\left\{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right\}_2;\quad \Delta^2 0=2=\left\{\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right\}_2;\quad \Delta^3 0=6=\left\{\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right\}_2;$$

$$\Delta^4 0=4=\left\{\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right\}_2;\quad \Delta^5 0=1=\left\{\begin{matrix}5\\0\end{matrix}\right\}_0.$$

Questi numeri 0, 0, 2, 6, 4, 1, cioè il 1° elemento della 6ª verticale di T_3 e le sue differenze 1ª, ... 5ª, sono disposti lungo una diagonale del triangolo T_2, la quale va dal 6° elemento della 1ª orizzontale al 1° della 6ª. Concludiamo dunque a posteriori:

Se $0=\left\{\begin{matrix}0\\n\end{matrix}\right\}_h$ è il primo numero della verticale $(n+1)^a$ di un T_h, le sue differenze 1ª, 2ª, ... n^{ma}, se lo si considera come appartenente alla progressione d'ordine n costituita dai numeri di tal verticale, valgono

$$\Delta^0\left\{\begin{matrix}0\\n\end{matrix}\right\}_h=0;\quad \Delta^1\left\{\begin{matrix}0\\n\end{matrix}\right\}_h=0;\quad \Delta^2\left\{\begin{matrix}0\\n\end{matrix}\right\}_h=0;\quad \ldots\ \Delta^{\nu-1}\left\{\begin{matrix}0\\n\end{matrix}\right\}_h=0;$$

$$\Delta^{\nu}\left\{\begin{matrix}0\\n\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\nu\\n-\nu\end{matrix}\right\}_{h-1};\quad \Delta^{\nu+1}\left\{\begin{matrix}0\\n\end{matrix}\right\}_h=\left\{\begin{matrix}\nu+1\\n-\nu-1\end{matrix}\right\}_{h-1};\ldots$$

$$\ldots\Delta^{n-1}\left\{\begin{matrix}0\\n\end{matrix}\right\}_h=\left\{\begin{matrix}n-1\\1\end{matrix}\right\}_{h-1};\quad \Delta^{n}\left\{\begin{matrix}0\\n\end{matrix}\right\}_h=\left\{\begin{matrix}n\\0\end{matrix}\right\}_{h-1}=1$$

ovvero:

$$\left.\begin{matrix}\Delta^{i}\left\{\begin{matrix}0\\n\end{matrix}\right\}_h=0,\quad i<\nu;\quad \Delta^{i}\left\{\begin{matrix}0\\n\end{matrix}\right\}_h=\left\{\begin{matrix}i\\n-i\end{matrix}\right\}_{h-1},\quad \nu\leq i\leq n\ldots\\ \Delta^{i}\left\{\begin{matrix}0\\n\end{matrix}\right\}_h=0;\qquad i>n.\end{matrix}\right\}\qquad (23)$$

Ora poichè nei suddetti specchi delle differenze ogni numero vale la somma del soprastante e di quello che è a destra di questo, avremo:

$$\Delta^{r}\left\{\begin{matrix}m\\n\end{matrix}\right\}_h=\Delta^{r}\left\{\begin{matrix}m-1\\n\end{matrix}\right\}_h+\Delta^{r+1}\left\{\begin{matrix}m-1\\n\end{matrix}\right\}_h\qquad (24)$$

che lega le Δ degli elementi di un T_h. Pertanto le differenze degli [e]lementi di una verticale qualunque di un T_h si possono ottenere f[acil]mente. Pes es. volendo calcolare le differenze degli elementi 0, [0, 2,] 12, 40,... della 6^a verticale di T_3 si dispongono su una prima [oriz]zontale, come mostra il sottostante specchio, il 1^o di essi, che è zero, e le sue differenze 1^a, 2^a, 3^a, 4^a, 5^a, 6^a, ... che valgono 0, [2, 6,] 4, 1, 0, ... e sono numeri di T_2 (come risulta dalla (23)), e su [una] prima verticale degli zeri, quanti occorrono:

	0	0	2	6	4	1	0	0...					
	0	**0**	2	8	10	5	1	0	0...				
	0	0	**2**	10	18	15	6	1	0	0...			
$\nu=2$	0	0	0	**12**	28	33	21	7	1	0	0...		
$n=6$	0	0	0	0	**40**	61	54	28	8	1	0	0...	
$h=3$	0	0	0	0	0	**101**	115	82	36	9	1	0	0.
	0	0	0	0	0	0	**216**	197	118	45	10	1	0
	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

si completano poi le altre orizzontali collocando nella i^{ma}, $i-1$ [zeri] iniziali nei primi $i-1$ posti, ed in ciascuno dei posti successiv[i i^o,] $(i+1)^o$, ... la somma del numero sovrastante e di quello a si[nistra] di quest'ultimo nell'orizzontale $(i-1)^a$.

Allora gli elementi 1^o, 2^o, 3^o, 4^o ... rispettivamente delle ori[zzon]tali 1^a, 2^a, 3^a, 4^a ... (stampati in carattere grassetto) sono i n[umeri] della 6^a verticale di T_3, ed i numeri che seguono uno di essi [nella] stessa orizzontale sono le sue differenze 1^o, 2^o, 3^o, ... Per es. [nella] 4^a orizzontale il 1^o numero non nullo 12 è il valore di $\left\{ {3 \atop 5} \right\}_3$ e [si ha]

$$\Delta^0 12 = 12\,;\ \Delta^1 12 = 28\,;\ \Delta^2 12 = 33\,;\ \Delta^3 12 = 21\,;\ \Delta^4 12 = 7\,;\ \Delta^5 1[2 \ldots]$$

Nel caso generale, avuto riguardo alla (23) che dà i valori [delle] differenze di $\left\{ {0 \atop n} \right\}_h$, cioè del primo numero della verticale (n [...]) di T_h, lo specchio suddetto diventa:

$$\begin{array}{l}
\nu \text{ zeri}
\left\{
\begin{array}{llllll}
\overbrace{\left\{ {0 \atop n} \right\}_{h-1} = 0, & \left\{ {1 \atop n-1} \right\}_{h-1}, \ldots & \left\{ {\nu-1 \atop n-\nu+1} \right\}_{h-1}}^{\nu \text{ zeri}} & \left\{ {\nu \atop n-\nu} \right\}_{h-1}, \ldots & \left\{ {n-1 \atop 1} \right\}_{h-1} & \left\{ {n \atop 0} \right\}_{h-1} = 1 \\
0 & \mathbf{0} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & & & & \\
\vdots & & & & & \\
0 & 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \mathbf{0} & & & &
\end{array}
\right. \\
\quad 0 \qquad\quad 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \left\{ {\nu \atop n} \right\}_h,\ \Delta \left\{ {\nu \atop n} \right\}_h,\ \Delta^2 \left\{ {\nu \atop n} \right\}_h, \ldots\ \Delta^n \left\{ {\nu \atop n} \right\}_h = 1 \\
\quad 0 \qquad\quad 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\
\quad 0 \qquad\quad 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\
\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
\quad \underbrace{0 \qquad\quad 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. 0,}_{} \quad \left\{ {m \atop n} \right\}_h,\ \Delta \left\{ {m \atop n} \right\}_h,\ \Delta^2 \left\{ {m \atop n} \right\}_h \\
\quad 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 0 \;.\;.\;.\; m \text{ zeri} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 0 \\
\quad 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 0 \\
\quad 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\; 0 \\
\;.
\end{array}$$

Osserviamo ora che quando muovendo da una successione di numeri $a_{11} \ldots a_{1n}$, si forma una tavola di addizione, in modo che ogni termine della 2ª, 3ª, ... linea valga la somma di quello che gli è sovrapposto e di quello che è a sinistra di quest'ultimo, colla condizione inoltre che i termini iniziali $a_{21}, a_{31} \ldots$ della 2ª, 3ª ... linea siano uguali ad a_{11}, l'elemento generico a_{ij} della tavola risulta funzione lineare di $a_{11}, \ldots a_{1n}$, e precisamente si ha:

$$a_{ij} = \binom{i-1}{j-1} a_{11} + \binom{i-1}{j-2} a_{12} + \ldots + \binom{i-n}{j-n} a_{1n}. \text{ (}^1\text{)} \qquad (25)$$

Supponiamo ora che la $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots$ siano i numeri appartenenti alla 1ª orizzontale del suddetto specchio, cioè poniamo:

$$a_{1i} = \begin{Bmatrix} i-1 \\ n-i+1 \end{Bmatrix}_{h-1} = \Delta^{i-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ n \end{Bmatrix}_h$$

talchè sono nulli i primi ν di essi e quelli che seguono l'$(n+1)^{\circ}$. Avremo:

$$a_{m+1,\, m+j+1} = \Delta^j \begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}_h$$

perchè nello specchio in questione $\Delta^j \begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}_h$ appartiene all'orizzontale $(m+1)^a$ ed alla verticale $(m+j+1)^a$. Epperò, tenendo conto della citata espressione di a_{ij} in funzione di $a_{11}, a_{12} \ldots$, risulta:

$$\Delta^j \begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}_h = \binom{m}{m+j} \Delta^0 \begin{Bmatrix} 0 \\ n \end{Bmatrix}_h + \binom{m}{m+j-1} \Delta^1 \begin{Bmatrix} 0 \\ n \end{Bmatrix}_h +$$
$$+ \binom{m}{m+j-2} \Delta^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ n \end{Bmatrix}_h + \ldots + \binom{m}{m+j-n} \Delta^n \begin{Bmatrix} 0 \\ n \end{Bmatrix}_h$$

e poichè

$$\Delta^0 \begin{Bmatrix} 0 \\ n \end{Bmatrix}_h = \Delta^1 \begin{Bmatrix} 0 \\ n \end{Bmatrix}_h = \ldots = \Delta^{\nu-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ n \end{Bmatrix}_h = 0,$$

avremo:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta^j \begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}_h = \sum\limits_{0}^{n-\nu}{}_i \binom{m}{m+j-\nu-i} \Delta^{\nu+i} \begin{Bmatrix} 0 \\ n \end{Bmatrix}; \text{ se } n \leqslant m+j \text{ non si hanno termini nulli nel 2° membro} \\ \text{oppure:} \\ \Delta^j \begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}_h = \sum\limits_{0}^{m+j-\nu}{}_i \binom{m}{m+j-\nu-i} \Delta^{\nu+i} \begin{Bmatrix} 0 \\ n \end{Bmatrix}_h; \text{ se } n \geqslant m+j \text{ non si hanno termini nulli nel 2° membro} \end{array}\right\} \qquad (26)$$

talchè risulta:

$$\Delta^j \begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}_h = 0; \qquad j > n \qquad (26')$$

ciò che d'altronde è conseguenza del fatto che i termini della $(n+1)^a$ verticale di T_h formano una progressione d'ordine n.

(1) Dimostreremo in seguito, esponendo la teoria delle tavole di addizione, una formola più generale dalla quale la suddetta deriva.

Abbiamo così la differenza j^a di $\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_h$ espressa mediante le dif
renze ν^a, $(\nu+1)^a, \ldots n^a$ di $\left\{\begin{matrix} 0 \\ n \end{matrix}\right\}_h$. Tenuto conto delle (23) possiar
anche scrivere:

$$\left.\begin{matrix} \Delta^j \left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_h = \sum\limits_{0}^{n-\nu}{}_i \begin{pmatrix} m \\ m+j-\nu-i \end{pmatrix} \left\{\begin{matrix} \nu+i \\ n-\nu-i \end{matrix}\right\}_{h-1}; & \text{se } n \leqslant m+j \text{ non si hanno termini nulli nel 2° membro} \\ \Delta^j \left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_h = \sum\limits_{0}^{m+j-\nu}{}_i \begin{pmatrix} m \\ m+j-\nu-i \end{pmatrix} \left\{\begin{matrix} \nu+i \\ n-\nu-i \end{matrix}\right\}_{h-1}; & \text{se } n \geqslant m+j \text{ non si hanno termini nulli nel 2° membro} \end{matrix}\right\} \quad (2$$

Poichè sappiamo esprimere la j^a differenza di $\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_h$; possiamo a
plicare le (I), (II), (III), (IV) supponendo che u_0, $u_1 \ldots$ siano i n
meri $\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_h$, $\left\{\begin{matrix} m+1 \\ n \end{matrix}\right\}_h$, $\left\{\begin{matrix} m+2 \\ n \end{matrix}\right\}_h \ldots$ consecutivi sulla verticale $(n+$
di T_h.

Risultati semplici ed interessanti si hanno supponendo $m=$
Posto adunque:

$$u_0 = \left\{\begin{matrix} 0 \\ n \end{matrix}\right\}_h; \qquad u_1 = \left\{\begin{matrix} 1 \\ n \end{matrix}\right\}_h; \ldots u_m = \left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_h,$$

applicando la (I) si trova:

$$\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_h = \left\{\begin{matrix} 0 \\ n \end{matrix}\right\}_h + \binom{m}{1} \Delta \left\{\begin{matrix} 0 \\ n \end{matrix}\right\}_h + \binom{m}{2} \Delta^2 \left\{\begin{matrix} 0 \\ n \end{matrix}\right\}_h + \ldots + \binom{m}{m} \Delta^m \left\{\begin{matrix} 0 \\ n \end{matrix}\right\}_h$$

e poichè, per la (23),

$$\left\{\begin{matrix} 0 \\ n \end{matrix}\right\}_h = \Delta \left\{\begin{matrix} 0 \\ n \end{matrix}\right\}_h = \ldots = \Delta^{\nu-1} \left\{\begin{matrix} 0 \\ n \end{matrix}\right\}_h = 0$$

possiamo scrivere:

$$\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_h = \sum_{\nu}^{m}{}_j \binom{m}{j} \Delta^j \left\{\begin{matrix} 0 \\ n \end{matrix}\right\}_h$$

ed infine:

$$\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_h = \sum_{\nu}^{m}{}_j \binom{m}{j} \left\{\begin{matrix} j \\ n-j \end{matrix}\right\}_{h-1} \quad (2$$

che permette di sviluppare $\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_h$ mediante numeri della stessa for
di indice $h-1$. Essa vale per $h > 1$. Per $h=1$, essa diventa

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{n} \left\{\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix}\right\}_0$$

che è vera se si ritiene $\left\{\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix}\right\}_h = 1$. Siamo così condotti a stabilire

$$\left\{\begin{matrix} m \\ 0 \end{matrix}\right\}_h = 1; \qquad m \geqslant 0 \quad ($$

dopodichè possiamo ritenere la (27) valida per ogni h positivo inte

Osserviamo ancora che quando $\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_h$ non è zero, si ha $mh \geqslant n$ e quindi $m \geqslant \frac{n}{h}$, epperò: $m \geqslant \nu$. Quando $m > n$ i termini del 2° membro corrispondenti ad $j = n+1,\ n+2, \ldots m$ sono nulli, quindi la formola può scriversi:

$$\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_h = \sum_{\nu}^{n}{}_j \binom{m}{j} \left\{\begin{matrix} j \\ n-j \end{matrix}\right\}_{h-1}; \qquad m > n \tag{27'}$$

Le (27), (27') permettono di esprimere $\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_h$ per mezzo di coefficienti binomiali. Si ha dalla (27) per $h = 2$:

$$\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_2 = \sum_{\nu}^{m}{}_j \binom{m}{j} \binom{j}{n-j} \tag{29}$$

$$\left(\nu = \frac{n}{2} \text{ se } n \text{ è pari; } \nu = \frac{n+1}{2} \text{ se } n \text{ è dispari}\right).$$

Per $h = 3$ risulta:

$$\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_3 = \sum_{\nu}^{m}{}_j \binom{m}{j} \sum_{\nu'}^{n-j}{}_i \binom{j}{i} \binom{n-j-i}{i} \tag{30}$$

$$\left(\begin{matrix} \nu = \frac{n}{3} \text{ se } n \text{ è multiplo di 3; } \nu = \mathrm{E}\frac{n}{3} + 1 \text{ se } n \text{ non è multiplo di 3} \\ \nu' = \frac{n-j}{2} \text{ se } n-j \text{ è pari; } \nu' = \frac{n-j+1}{2} \text{ se } n-j \text{ è dispari.} \end{matrix}\right)$$

E per $h = 4$:

$$\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}_4 = \sum_{\nu}^{m}{}_j \binom{m}{j} \sum_{\nu'}^{j}{}_i \binom{j}{i} \sum_{\nu''}^{i}{}_r \binom{i}{r} \binom{r}{n-j-i-r}$$

$$\left(\begin{matrix} \nu = \mathrm{E}'\frac{n}{4} \text{ (cioè } \nu = \frac{n}{4} \text{ se } n \text{ è multiplo di 4; } \nu' = \mathrm{E}\frac{n}{4} + 1 \text{ se } n \\ \text{non è multiplo di 4); } \nu' = \mathrm{E}'\frac{n-j}{3};\ \nu'' = \mathrm{E}'\frac{\nu-j-i}{2}. \end{matrix}\right)$$

ecc.... [1]

---

[1] Come è già stato osservato nelle *Lezioni di Algebra complementare*, vol. II, di G. BELLACCHI l'autore alla lezione X si occupa dei coefficienti $A_0, A_1, A_2 \ldots$ delle potenze x^0, x, x^2, nello sviluppo di $(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)^m$ in serie di potenze di x. Esaminando il caso $n = 2$, conclude le formole che servono ad esprimere A_{2i} ed A_{2i+1}. Per $n = 2$; $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, si ha:

$$A_{2i} = \left\{\begin{matrix} m \\ 2i \end{matrix}\right\}_2; \qquad A_{2i+1} = \left\{\begin{matrix} m \\ 2i+1 \end{matrix}\right\}_2$$

e le formole suddette diventano:

$$\left\{\begin{matrix} m \\ 2i \end{matrix}\right\}_2 = \sum_{0}^{m-i}{}_u \binom{m}{i+u} \binom{i+u}{2u}; \qquad \left\{\begin{matrix} m \\ 2i+1 \end{matrix}\right\}_2 = \sum_{1}^{m-i}{}_u \binom{m}{i+u} \binom{i+u}{2u-1} \tag{α}$$

Applicando alla successione $u_0 = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ n \end{matrix} \right\}_h$, $u_1 = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ n \end{matrix} \right\}_h$, ... la (II),

$$(-1)^m \Delta^m \left\{ \begin{matrix} 0 \\ n \end{matrix} \right\}_h = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ n \end{matrix} \right\}_h - \binom{m}{1} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ n \end{matrix} \right\}_h + \binom{m}{2} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ n \end{matrix} \right\}_h - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^m \binom{m}{m} \{$$

È facile constatare che ad esse rinviene la (29). Ponendo in questa $n = 2i$, risult

epperò:

$$\left\{ \begin{matrix} m \\ 2i \end{matrix} \right\}_2 = \sum_i^m{}_j \binom{m}{j} \binom{j}{2i-j} = \sum_0^{m-i}{}_j \binom{m}{j+i} \binom{j+i}{2i-j-i} = \sum_0^{m-i}{}_u \binom{m}{i+u} \binom{i+u}{i-u} = \sum_0^{m-i}{}_u \binom{m}{i+u} \Big(\begin{matrix} i+ \\ 2 \end{matrix}$$

Se $n = 2i + 1$, si ha $\nu = i + 1$ e risulta:

$$\left\{ \begin{matrix} m \\ 2i+1 \end{matrix} \right\}_2 = \sum_{i+1}^m{}_j \binom{m}{j} \binom{j}{2i-j+1} = \sum_1^{m-i}{}_j \binom{m}{j+i} \binom{j+1}{i-j+1} =$$

$$= \sum_1^{m-i}{}_u \binom{m}{u+i} \binom{u+i}{i-u+1} = \sum_i^{m-i}{}_u \binom{m}{u+i} \Big(\begin{matrix} u- \\ 2u \end{matrix}$$

Alle suddette espressioni di $\left\{ \begin{matrix} m \\ 2i \end{matrix} \right\}_2$, $\left\{ \begin{matrix} m \\ 2i+1 \end{matrix} \right\}_2$ si arriva, seguendo il metodo dell'au nendo $(1 + x + x^2)^m = [1 + x(1 + x)]^m$, sviluppando colla formola del binomio, e nando i coefficienti di x^{2i} ed x^{2i+1}.

Per $n = 3$ ed $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$, si ha $A_{2i} = \left\{ \begin{matrix} m \\ 2i \end{matrix} \right\}_3$. L'autore della citata op vendosi delle espressioni già trovate di A_{2i} ed A_{2i+1} quando $n = 2$, trova una formola c $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$, diventa:

$$\left\{ \begin{matrix} m \\ 2i \end{matrix} \right\}_3 = \sum_0^i{}_\nu \binom{m}{2i-2\nu} \sum_0^\nu{}_u \binom{2i-2\nu}{\nu+u} \binom{\nu+u}{2u} + \sum_0^i{}_\nu \binom{m}{2i-2\nu-1} \sum_0^{\nu+1}{}_u \binom{2i-2\nu-1}{\nu+u} \Big(\begin{matrix} \nu+u \\ 2u-1 \end{matrix}$$

Ecco un esempio che mostra come restano distribuiti i medesimi numori, quando si le formole (β) e (30). Si debba calcolare il valore di $\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix} \right\}_3 = \left\{ \begin{matrix} 5 \\ 2,3 \end{matrix} \right\}_3$. Posto $m = 5$; $i =$ rapporto alla formola (β):

ν;	1ª sommatoria del 2º membro	ν;	2ª sommatoria del 2º membro
0	0	0	$\binom{5}{5} \left[\binom{5}{1} \binom{1}{1} \right]$ =
1	$\binom{5}{4} \left[\binom{4}{1} \binom{1}{0} + \binom{4}{2} \binom{2}{2} \right] = 50$	1	$\binom{5}{3} \left[\binom{3}{2} \binom{2}{1} + \binom{3}{3} \binom{3}{3} \right] =$
2	$\binom{5}{2} \left[\binom{2}{2} \binom{0}{0} \right] = 10$	2	0
3	0	3	0

$$\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix} \right\}_3 = 60 \qquad +$$

Si ha rapporto alla (30):

j;	$\nu' = E' \frac{n-j}{2}$;	valori del 2º membro
$\nu = 2$	2	$\binom{5}{2} \left[\binom{2}{2} \binom{2}{2} \right] = 10$
3	2	$\binom{5}{3} \left[\binom{3}{2} \binom{2}{1} + \binom{3}{3} \binom{3}{0} \right] = 70$
4	1	$\binom{5}{4} \left[\binom{4}{1} \binom{1}{1} + \binom{4}{2} \binom{2}{0} \right] = 50$
$m = 5$	1	$\binom{5}{5} \left[\binom{5}{1} \binom{1}{0} \right] = 5$

; $\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix} \right\}_3 =$

[illegible] poichè $\Delta^m \left\{ 0 \atop n \right\}_h = \left\{ m \atop n-m \right\}_{h-1}$ e $\left\{ 0 \atop n \right\}_h = \left\{ 1 \atop n \right\}_h = \ldots = \left\{ \nu-1 \atop n \right\}_h = 0$:

$$\sum_{\nu}^{m}{}_{i} (-1)^i \binom{m}{i} \left\{ i \atop n \right\}_h = (-1)^m \left\{ m \atop n-m \right\}_{h-1} \qquad (32)$$

che esprime una notevole proprietà dei primi $m+1$ numeri (dei quali i primi ν sono nulli) della $(n+1)^a$ verticale di T_h.

Casi particolari interessanti si hanno se $n=m$ od $n<m$, il 2° membro riducendosi rispettivamente a $(-1)^m$ e 0.

Se $h=1$, $\nu=n$, ed $n<m$, si ha:

$$\sum_{n}^{m}{}_{i} (-1)^i \binom{m}{i} \binom{i}{n} = 0; \qquad n<m \qquad (33)$$

che è una formola nota.

Se $m=n$, $h=1$, $\nu=n$, si ha:

$$(-1)^m = \left\{ m \atop 0 \right\}_0 = (1)^m \binom{m}{m} \binom{m}{m}.$$

Epperò siamo ancora indotti a ritenere $\left\{ m \atop 0 \right\}_0 = 1$, per $m \geqq 0$.

Applichiamo infine la (III) alla ricerca di un'espressione della somma di $q+1$ termini consecutivi di una qualsiasi verticale, p. es. la m^a, di T_h.

Posto $u_0 = \left\{ m \atop n \right\}_h$; $u_1 = \left\{ m+1 \atop n \right\}_h$; $\ldots u_p = \left\{ m+p \atop n \right\}_h$, risulta dalla (III):

$$\left.\begin{array}{ll} \Sigma_i \left\{ m+i \atop n \right\}_h = \sum_{0}^{p}{}_{j} \binom{p+1}{j+1} \Delta^j \left\{ m \atop n \right\}_h; & p \gtreqless n \\ & \text{se } p \leqq n \text{ non si hanno termini nulli nel 2° membro} \\ \Sigma_i \left\{ m+i \atop n \right\}_h = \sum_{0}^{n}{}_{j} \binom{p+1}{j+1} \Delta^j \left\{ m \atop n \right\}_h; & p \geqq n \end{array}\right\} \qquad (34)$$

e quindi per le (26"):

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma_i \left\{ m+i \atop n \right\} = \sum_{0}^{p}{}_{j} \binom{p+1}{j+1} \sum_{0}^{n-\nu}{}_{i} \binom{m}{m+j-\nu-i} \left\{ \nu+i \atop n-\nu-i \right\}_{h-1} \\ \Sigma_i \left\{ m+i \atop n \right\}_h = \sum_{0}^{p}{}_{j} \binom{p+i}{j+1} \sum_{0}^{m+j-\nu}{}_{i} \binom{m}{m+j-\nu-i} \left\{ \nu+i \atop n-\nu-i \right\}_{h-1} \end{array}\right\}; \quad p \lesseqgtr n \qquad (35)$$

Se $p>n$, sappiamo che $\Delta^{n+1} \left\{ m \atop n \right\}_h = \ldots = \Delta^p \left\{ m \atop n \right\}_h = 0$; epperò risulta:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma_i \left\{ m+i \atop n \right\}_h = \sum_{0}^{n}{}_{j} \binom{p+1}{j+1} \sum_{0}^{n-\nu}{}_{i} \binom{m}{m+j-\nu-i} \left\{ \nu+i \atop n-\nu-i \right\}_{h-1} \\ \Sigma_i \left\{ m+i \atop n \right\}_h = \sum_{0}^{n}{}_{j} \binom{p+1}{j+1} \sum_{0}^{m+j-\nu}{}_{i} \binom{m}{m+j-\nu-i} \left\{ \nu+i \atop n-\nu-i \right\}_{h-1} \end{array}\right\}; \quad p \geqq n \qquad (35')$$

In particolare se $m=0$, tenuto conto che $\begin{Bmatrix}0\\n\end{Bmatrix}_h = \ldots = \begin{Bmatrix}\nu-1\\n\end{Bmatrix}_h =$ risulta:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_0^p{}_i \begin{Bmatrix}i\\n\end{Bmatrix}_h = \sum_\nu^p{}_i \begin{Bmatrix}i\\n\end{Bmatrix}_h = \sum_\nu^p{}_i \binom{p+1}{i+1} \Delta^i \begin{Bmatrix}0\\n\end{Bmatrix}_h = \qquad p \gtrless n\\
&\qquad = \sum_\nu^p{}_i \binom{p+1}{i+1} \begin{Bmatrix}i\\n-i\end{Bmatrix}_{h-1}; \quad \text{se } p \leqslant n \text{ il } 2^\circ \text{ membro non contiene termini nulli}\\
&\sum_0^p{}_i \begin{Bmatrix}i\\n\end{Bmatrix}_h = \sum_\nu^p{}_i \begin{Bmatrix}i\\n\end{Bmatrix}_h = \sum_\nu^p{}_i \binom{p+1}{i+1} \Delta^i \begin{Bmatrix}0\\n\end{Bmatrix}_h =\\
&\qquad = \sum_\nu^n{}_i \binom{p+1}{i+1} \begin{Bmatrix}i\\n-i\end{Bmatrix}_{h-1}; \qquad p \geqslant n
\end{aligned}\right\} \quad (\ldots$$

Le (34), (35), (35'), (36) possono tornar utili nello studio delle pr[...] prietà dei numeri $\begin{Bmatrix}m\\n\end{Bmatrix}_h$. Possiamo ad es. servirci della 1ª delle ([...] e dedurre dalle formole (20; 2ª), (21; 2ª), (22$^{\text{IV}}$; 2° gruppo) le seguen[...]

$$\begin{Bmatrix}m\\n\end{Bmatrix}_h = \sum_0^{h-1}{}_j \sum_{E'\frac{n-1-j}{h}}^{m-1}{}_i \binom{m}{i+1} \begin{Bmatrix}i\\n-1-j-i\end{Bmatrix}_{h-1} \quad (\ldots$$

$$\begin{Bmatrix}m\\n\end{Bmatrix}_h = \sum_{E'\frac{n-1}{h}}^{m}{}_i \binom{m+1}{i+1} \begin{Bmatrix}i\\n-1-i\end{Bmatrix}_{h-1} - \sum_{E'\frac{n-h-1}{h}}^{m-1}{}_i \binom{m}{i+1} \begin{Bmatrix}i\\n-h-1-i\end{Bmatrix}_{h-1} \quad (\ldots$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix}m\\n\end{Bmatrix}_h = &\sum_{E'\frac{n-1}{h}}^{m}{}_i \binom{m+1}{i+1} \begin{Bmatrix}i\\n-1-i\end{Bmatrix}_{h-1} -\\
&- \sum_{E'\frac{mh-n}{h}}^{m-1}{}_i \binom{m}{i+1} \begin{Bmatrix}i\\mh-n-i\end{Bmatrix}_{h-1} - \begin{cases} 0; & n-sh>1 \\ 1; & n-sh=1 \\ -1; & n-sh=0 \\ & s>1. \end{cases}
\end{aligned}$$

che servono ad esprimere il numero $\begin{Bmatrix}m\\n\end{Bmatrix}_h$ di indice h, in funzione[...] numeri di indice $h-1$.

9. Si consideri una qualunque orizzontale p. es. la $(p+1)^a$ [...] triangolo T_h, contenente $ph+1$ numeri non nulli,

$$\begin{Bmatrix}p\\0\end{Bmatrix}_h, \begin{Bmatrix}p\\1\end{Bmatrix}_h, \ldots \begin{Bmatrix}p\\ph\end{Bmatrix}_h, 0, 0 \ldots$$

Supponendoli contati da sinistra verso destra, sarà $\begin{Bmatrix}p\\k-1\end{Bmatrix}_h$ il k[...] essi, ed avrà il valor zero, se $k-1>ph$. Si supponga ora ampl[...] l'orizzontale a sinistra del 1° termine $\begin{Bmatrix}p\\0\end{Bmatrix}_h = 1$, mediante zeri in [...] mero illimitato, ai quali siano attribuiti i posti o numeri d'or[...]

0, -1, $-2, \ldots$ talchè il k^o di essi, supposti contati da destra verso sinistra, avrà il posto $-(k-1)$. Si considerino tali zeri come valori di $\left\{ {p \atop -1} \right\}_h$, $\left\{ {p \atop -2} \right\}_h, \ldots$ ed in generale il termine $\left\{ {p \atop -k} \right\}_h$, avente il posto o numero d'ordine $-(k-1)$, valga zero per ogni valore positivo intero non nullo di k. L'orizzontale $(p+1)^a$ si può dunque scrivere:

$$\begin{array}{cccccccccl} \ldots\left\{ {p \atop -3} \right\}_h, & \left\{ {p \atop -2} \right\}_h, & \left\{ {p \atop -1} \right\}_h, & \left\{ {p \atop 0} \right\}_h, & \ldots & \left\{ {p \atop ph} \right\}_h, & \left\{ {p \atop ph+1} \right\}_h, & \left\{ {p \atop ph+2} \right\}_h, & \ldots & \text{simboli} \\ \ldots 0, & 0, & 0, & 1, & \ldots\ldots & 0, & 0, & 0 & \ldots & \text{valori} \\ \ldots(-2)^o & (-1)^o, & 0^o, & 1^o, & \ldots & (ph+1)^o, & (ph+2)^o, & (ph+3)^o, & \ldots & \text{posti} \end{array}$$

Ciò posto, per valori positivi interi uguali o disuguali di m e p, e qualunque sia l'intero q positivo o negativo, si ha la relazione:

$$\sum_{0}^{mh}{}_j \left\{ {m \atop j} \right\}_h \left\{ {p \atop j+q} \right\}_h = \left\{ {m+p \atop mh+q} \right\}_h \text{ [1]} \tag{42}$$

vale a dire:

Se si considerano gli mh + 1 *numeri non nulli della* $(m+1)^a$ *orizzontale di un triangolo* T_h *e si assumono come corrispondenti di essi nella orizzontale* $(p+1)^a$, *coincidente colla* 1^a $(p=m)$ *o diversa da essa* $(p \neq m)$, mh + 1 *numeri consecutivi qualunque, intendendosi che se nei due gruppi di* mh + 1 *numeri essi sono considerati in un dato senso, per esempio da sinistra a destra, al* 1^o *del* 1^o *gruppo corrisponda il* 1^o *del* 2^o, *al* 2^o, *il* $2^o, \ldots$ *e si sommano i prodotti ottenuti moltiplicando ciascun numero del* 1^o *gruppo per il corrispondente del* 2^o *si ottiene il numero avente il posto o numero d'ordine* $(mh+q)^o$ *della* $(m+p+1)^a$ *orizzontale,* q *essendo il posto o numero d'ordine del* 1^o *numero a sinistra di quelli consecutivi scelti sulla orizzontale* $(p+1)^a$ *ed intendendo che i numeri* q *e* mh + q *indichino posti o numeri d'ordine di elementi dell'orizzontale* $(m+p+1)^a$ *secondo la convenzione precedentemente stabilita riguardo ai posti occupati dagli elementi di un'orizzontale qualsiasi.* [2]

E poichè sulla $(m+p+1)^{ma}$ *orizzontale l'elemento di posto* $(mh+q)$ *è uguale a quello di posto* $[(m+p)h+1]-(mh+q)+1$, *vale a dire di posto* $ph-q+2$, (*giacchè i due elementi sono equidistanti dagli estremi non nulli di essa oppure sono i termini estremi non nulli*), *possiamo anche dire che la suddetta somma vale il termine di posto* $ph-q+2$ *della* $(m+p+1)^a$ *orizzontale.*

---

(1) Questa formola rinviene, come sarà rilevato in seguito, alla $(10''')$, ma è qua dimostrata altrimenti.

(2) Dimodochè i posti 1^o, $2^o, \ldots$ degli elementi dei due gruppi di $mh+1$ numeri scelti sulle orizzontali $(m+1)^a$ e $(p+1)^a$, supposti contati da sinistra a destra, non hanno nulla a che fare col posti o numeri d'ordine di essi elementi considerati come appartenenti alle suddette orizzontali indefinitamente estese a destra ed a sinistra.

Se poi si suppongono le orizzontali di T_h scritte in modo ch
trovino in colonna i numeri di esse che occupano lo stesso p
secondo la convenzione già fatta, risulta che:

La somma ottenuta nel modo sopra indicato vale il numero
$(m+p+1)^a$ *orizzontale sottostante al moltiplicatore dell'ultimo*
dotto (sono moltiplicandi i numeri della ozizzontale $(m+1)^a$ *e molt*
catori quelli della $(p+1)^a$*) ottenuto moltiplicando l'ultimo numero*
nullo della $(m+1)^a$ *orizzontale (cioè l'ultimo non nullo a destra)*
il corrispondente della $(p+1)^a$, *(cioè l'ultimo a destra dei numeri*
su essa quali moltiplicatori).

I seguenti schemi illustrano la proprietà rappresentata dalla
in alcuni casi particolari. In ognuno di essi i due fattori di uno s
prodotto sono i primi, secondi, terzi,... numeri stampati in cara
grassetto della 1^a e 2^a linea; la somma dei prodotti è il numero s
pato in carattere grassetto della 3^a linea. Gli schemi si riferis
tutti a numeri del Triangolo T_2.

0	0	0	0	1	2	3	2	1	0	0			$m=p=2$; (
0	0	0	0	1	2	3	2	1	0	0			$m+p+1=$
0	0	0	0	1	4	10	16	19	16	10			$mh+q=5$
0	0	0	0	1	2	3	2	1	0	0			$m=p=2$; q
0	0	0	0	1	2	3	2	1	0	0			$m+p+1=5$
0	0	0	0	1	4	10	16	19	16	10			$mh+q=5$
0	0	0	0	1	3	6	7	6	3	1	0	0...	$m=3$; p $q=3$
0	0	0	0	1	2	3	2	1	0	0	0	0...	$m+p+$
0	0	0	0	1	5	15	30	45	51	45	30	15...	$mh+q=$
		0	0	1	1	1	0	0					$m=1$; p $q=-2$
0	0	0	0	1	2	3	2	1					$m+p+$
0	0	0	0	1	3	6	7	6					$mh+q=$
−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5					numeri d'o

Dimostreremo la (42) anzitutto nel caso $m \neq p$ e ci riferiremo
scuna volta, per semplificare il ragionamento, a particolari v
di m, p, h. Riferiamoci al triangolo T_2, cioè supponiamo $h=2$, s

$$a',\ b',\ c',\ d',\ e',\ d',\ c',\ b',\ a',\ 0,\ 0, \ldots$$
$$a,\ b,\ c,\ b,\ a,\ 0,\ 0, \ldots$$
$$a'',\ b'',\ c'',\ d'',\ e'',\ f'',\ g'',\ f'',\ e'',\ d'',\ c'',\ b'',\ a'',\ 0,\ 0, \ldots$$

le orizzontali 5ª, 3ª, e 7ª di T_2. Supponiamo che il teorema rappresentato dalla (42) valga per le orizzontali 5ª e 3ª, cioè per $m=4$, $p=2$. Moltiplicando i numeri non nulli della 5ª per altrettanti consecutivi qualunque della 3ª e sommando i prodotti corrispondenti, si hanno i numeri dell'orizzontale $(4+2+1)^a$ cioè della 7^{ma}. Si può facilmente verificare, applicando la (42) per $q=0, 1, 2, 3, \ldots$ che si vengono in tal modo ad ammettere le seguenti relazioni distinte:

$$
\begin{aligned}
&a'a' = a'' \\
&a'b + b'a = b'' \\
&a'c + b'b + c'a = c'' \\
&a'b + b'c + c'b + d'a = d'' \\
&aa' + b'b + c'c + d'b + e'a = e'' \\
&b'a + c'b + d'c + e'b + d'a = f'' \\
&c'a + d'b + e'c + d'b + c'a = g''.
\end{aligned}
$$

Si prova subito che operando in modo analogo sui numeri delle orizzontali 5ª e 4ª, oppure 6ª e 3ª, si ottengono quelli dell'8ª. Operiamo ad es. sulle orizzontali 5ª e 4ª. Poniamo adunque

$$m = 5 - 1 = 4; \qquad p = 4 - 1 = 3; \qquad h = 2.$$

Saranno:

$$
\begin{gathered}
a',\ b',\ c',\ d',\ e',\ d',\ c',\ b',\ a',\ 0,\ 0, \\
a,\quad a+b,\quad a+b+c,\quad 2b+c,\quad a+b+c,\quad a+b,\quad a,\quad 0,\quad 0\ldots
\end{gathered}
$$

le orizzontali 5ª e 4ª, e sarà:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
a'',\ a''+b'',\ a''+b''+c'',\ b''+c''+d'',\ c''+d''+e'',\ d''+e''+f'', \\
e''+f''+g'',\ 2f''+g'',\ e''+f''+g'',\ d''+e''+f'', \\
b''+c''+d'',\ a''+b''+c'',\ a''+b'',\ a''
\end{array}
\right.
$$

la 8ª orizzontale. Moltiplicando i nove numeri non nulli della 5ª orizzontale, per nove consecutivi qualunque della 4ª, p. es. per i primi nove (il che equivale a supporre $q=1$), si ha:

$$
\begin{gathered}
a'a + b'(a+b) + c'(a+b+c) + d'(2b+c) + e'(a+b+c) + \\
+ d'(a+b) + c'a = (a'a+b'b+c'c+d'b+e'a) + (b'a+c'b+d'c+e'b+d'a) + \\
+ (c'a + d'b + e'c + d'b + c'a) = e'' + f'' + g''
\end{gathered}
$$

cioè si ottiene il numero di posto $mh+q=9$ della orizzontale $(m+p+1)^a$, ossia della 8ª orizzontale. Analoga dimostrazione può farsi per altri valori di p. Adunque se la (42) vale per due diverse orizzontali, vale anche per una di esse e per la successiva dell'altra; ora si constata subito che essa vale per le prime orizzontali di un qualsiasi triangolo T_h: adunque deve ritenersi vera in generale per $m+p$.

Supponendo $p = m + 1$, potremo dire che se la (42) è vera per orizzontali differenti $(m+1)^a$ ed $[(m+1)+1]^a$, ed è vera anche le $[(m+1)+1]^a$ ed $[(m+1)+1]^a$, cioè per due orizzontali identic essa dunque vale per m e p uguali o disuguali.

Si prova facilmente che le (42) e (10''') rinvengono l'una all'alt Invero la (42) può scriversi:

$$\sum_{0}^{mh}{}_j \begin{Bmatrix} m \\ mh - j \end{Bmatrix}_h \begin{Bmatrix} p \\ j + q \end{Bmatrix}_h = \begin{Bmatrix} m + p \\ mh + q \end{Bmatrix}_h$$

ovvero posto $mh + q = s$:

$$\sum_{0}^{s-q}{}_j \begin{Bmatrix} m \\ mh - j \end{Bmatrix}_h \begin{Bmatrix} p \\ j + q \end{Bmatrix}_h = \begin{Bmatrix} m + p \\ s \end{Bmatrix}_h$$

dalla quale, cambiando j in $j - q$, risulta:

$$\sum_{0}^{s}{}_j \begin{Bmatrix} m \\ s - j \end{Bmatrix}_h \begin{Bmatrix} p \\ j \end{Bmatrix}_h = \begin{Bmatrix} m + p \\ s \end{Bmatrix}_h$$

che è appunto la (10''').

Dalla (42) se $q = 0$, $p = m$ si ha quest'altra importante proprie

$$\sum_{0}^{mh}{}_j \left[\begin{Bmatrix} m \\ j \end{Bmatrix}_h \right]^2 = \begin{Bmatrix} 2m \\ mh \end{Bmatrix}_h. \qquad ($$

Osserviamo infine che per $h = 1$, le (42) (43) rinvengono a p prietà note dei coefficienti binomiali.

(Continua) N. TRAVERSO.

CENTRO DI CURVATURA DI UNA CONICA IN UN SUO PUNTO

1. La normale nel punto M (x_1, y_1) di una conica a centro equazione

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

contiene il punto P (x_0, y_0) se si ha

$$(y_1 - y_0) \frac{x_1}{a^2} \mp (x_1 - x_0) \frac{y_1}{b^2} = 0;$$

cioè i piedi delle normali condotte dal punto (x_0, y_0) alla (1) appartengono all'iperbole equilatera (iperbole di Apollonio)

$$xy\left(\frac{1}{a^2} \mp \frac{1}{b^2}\right) - \frac{y_0}{a^2}\,x \pm \frac{x_0}{b^2}\,y = 0$$

(i segni superiori si riferiscono all'ellisse, gli inferiori all'iperbole). L'iperbole d'Apollonio passa per il punto P, per il centro O della conica data, e per i punti all'infinito dei suoi assi. Tutto ciò è notissimo.

È chiaro che se due delle normali condotte da P alla conica hanno i loro piedi infinitamente vicini ad un punto M, P è il centro di curvatura della conica in M. Ma se ciò avviene l'iperbole di Apollonio tocca in M la conica data.

Scriviamo appunto che la tangente in (x_1, y_1) alla conica data coincide con la tangente nello stesso punto all'iperbole di Apollonio.

Le equazioni di queste due rette sono

$$\frac{x_1 x}{a^2} \pm \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

$$\left(\frac{1}{a^2} \mp \frac{1}{b^2}\right)(xy_1 + yx_1) - \frac{y_0}{a^2}(x + x_1) \pm \frac{x_0}{b^2}(y + y_1) = 0\,;$$

per la condizione posta deve aversi

$$\frac{\left(\frac{1}{a^2} \mp \frac{1}{b^2}\right) y_1 - \frac{y_0}{a^2}}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{\left(\frac{1}{a^2} \mp \frac{1}{b^2}\right) x_1 \pm \frac{x_0}{b^2}}{\pm\frac{y_1}{b^2}} = \frac{y_0\,x_1}{a^2} \mp \frac{x_0\,y_1}{b^2}\,.$$

Queste due equazioni risolute rispetto a x_0, y_0, tenendo conto che x_1, y_1 soddisfano all'equazione (1), danno le coordinate del centro di curvatura della conica in $M(x_1, y_1)$:

$$x_0 = \frac{a^2 \mp b^2}{a^4}\,x_1^3\,, \qquad y_0 = -\,\frac{a^2 \mp b^2}{b^4}\,y_1^3\,.$$

Una costruzione grafica del centro di curvatura in M si ha subito considerando che detto centro deve trovarsi, oltre che sulla normale in M alla conica, sulla iperbole di Apollonio ad essa tangente. Questa iperbole è determinata perchè se ne conoscono quattro punti (il centro O della conica, i punti all'infinito dei suoi assi, che diremo A_∞, B_∞, ed il punto M) e la tangente in M. L'intersezione della normale in M con l'iperbole d'Apollonio, cioè il centro di curvatura cercato X, si trova applicando il teorema di Pascal all'esagono degenere XMMABO; la costruzione da farsi può essere così enunciata:

Si costruisca un triangolo rettangolo avente per lati la tangente in e la parallela per M *ad uno degli assi, il vertice rettangolo sulla ta gente e sull'altro asse: la congiungente il terzo vertice con* O *taglia normale nel punto richiesto* X.

Considerando l'altra disposizione XMMOAB dei vertici dell'e gono si ha la costruzione seguente: [1]

Il triangolo rettangolo avente il vertice rettangolo nel punto ove normale in M *incontra uno degli assi e un lato sulla normale, un condo vertice sulla* MO *e il terzo lato parallelo all'altro asse ha per te vertice il centro di curvatura cercato.*

Altri enunciati si avrebbero considerando altre disposizioni vertici dell'esagono.

2. Segue per es. dalla prima costruzione indicata che:

Il luogo dei centri di curvatura delle coniche circoscritte ad un tangolo in un suo vertice, è una curva del terzo ordine passante pe vertice fissato, per il centro del rettangolo, per i punti all'infinito d sue mediane e per il punto all'infinito in direzione ortogonale alla c giungente il vertice con il centro.

3. Sia invece data la parabola di equazione

$$y^2 = 2px$$

i piedi delle normali ad essa condotte dal punto $P(x_0, y_0)$ appart gono all'iperbole equilatera di equazione

$$xy + (p - x_0)\, y - py_0 = 0$$

che passa per P ed ha per asintoto l'asse della parabola.

Per trovare le coordinate del centro di curvatura (ripetend ragionamento del n. 1) basterà scrivere che le rette di equazio

$$yy_1 - p\,(x + x_1) = 0$$

$$xy_1 + yx_1 + (p - x_0)\,(y + y_1) - 2py_0 = 0$$

coincidono. Perciò

$$-\frac{p}{y_1} = \frac{y_1}{x_1 - x_0 + p} = \frac{-px_1}{p\,(y_1 - 2y_0) - x_0\, y_1},$$

da cui

$$x_0 = 3x_1 + p\,, \qquad y_0 = -\frac{y_1^3}{p^2}$$

---

[1] Data da K. H. SCHELLBACH (1843) che vi pervenne in modo differente (cfr. *Encycl. des Sciences Mathématiques*, t. III, v. 3, fasc. 1). Queste costruzioni cadono in difetto per tici: ma in tal caso se ne hanno altre immediate.

che sono le coordinate richieste del centro di curvatura in M (x_1, y_1). La costruzione grafica di esso si riduce ad una semplice applicazione del teorema di Pascal, che può enunciarsi:

Si costruisca un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa sulla normale in M, *il cateto uscente da* M *parallelo all'asse della parabola e il vertice rettangolo sulla parallela alla tangente condotta per il punto ove la normale incontra l'asse: il terzo vertice è il centro di curvatura in* M.

Costruzioni analoghe si ricaverebbero applicando diversamente il teorema di Pascal.

4. La considerazione dell'iperbole d'Apollonio nella ricerca del centro di curvatura può anche servire per la risoluzione di alcuni problemi costruttivi di una conica quando fra gli elementi noti di essa vi sia un punto col centro di curvatura ivi. Risolveremo come esempio i tre problemi seguenti:

a) *Costruire una conica dati un punto* M *col centro di curvatura in esso,* X, *ed un asse.*

L'iperbole d'Apollonio relativa al punto M è determinata dal punto M e dalla tangente ivi (normale ad MX), dal punto X e dai punti all'infinito degli assi (noti). L'intersezione dell'iperbole d'Apollonio con l'asse (la quale si determina linearmente) è il centro della conica richiesta. Ora si procede con mezzi noti.

b) *Costruire una conica dato il suo centro* O, *un punto* M *col centro di curvatura ivi* X.

L'iperbole d'Apollonio relativa ad M è determinata dai punti O, M, X, dalla tangente in M (normale ad MX) e dall'essere equilatera: passa quindi per l'ortocentro H del triangolo MOX. Per avere gli assi della conica basta determinare le intersezioni dell'iperbole d'Apollonio con la retta all'infinito.

Un'applicazione opportuna del metodo noto conduce alla costruzione seguente:

Si descriva il cerchio che ha per diametro OH, *e si considerino le sue intersezioni col diametro passante per* M; *le rette che le proiettano da* O *sono gli assi richiesti.*

c) *Costruire una parabola dato un suo punto col centro di curvatura ivi e la direzione dell'asse.*

L'iperbole d'Apollonio è individuata: con un'applicazione del teorema di Pascal si ha quell'asintoto dell'iperbole che ha la direzione data; esso è l'asse della parabola. La costruzione continua in modo noto.

E. Bompiani.

VARIAZIONI DELLA FUNZIONE

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}, \quad a \neq 0, \quad a' \neq 0$$

Lo studio dei massimi e minimi della funzione di cui voglia occuparci si suol fare, astraendo dai procedimenti fondati su nozi di Calcolo differenziale, col noto metodo della funzione inversa. (

Ci proponiamo ora di rintracciare, senza uscire dal campo pu mente elementare, i massimi e minimi della funzione indicata titolo di questa Nota, con un metodo diretto che mette anche be in luce il modo di comportarsi di y al variare della x. Premettia nei primi cinque numeri quelle nozioni che possono giovare ad lettura più spedita del seguito.

1. Date le equazioni $ax^2 + bx + c = 0$, $a'x^2 + b'x + c' = 0$, indicar con γ e δ le radici della seconda, condizione necessaria e sufficie affinchè le due equazioni abbiano almeno una radice comune (e qui i due primi membri almeno un fattore lineare in x comune), è

$$(a\delta^2 + b\delta + c)(a\gamma^2 + b\gamma + c) = 0$$

la quale facilmente si trasforma nella

$$(a\gamma\delta - c)^2 + [a(\gamma + \delta) + b][b\gamma\delta + c(\gamma + \delta)] = 0$$

e sostituendo a $\gamma + \delta$ e $\gamma\delta$ le loro espressioni in funzione di a', l e moltiplicando per a'^2 i due membri dell'eguaglianza risultante ottiene

$$(ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) = 0$$

la quale esprime anche la condizione necessaria e sufficiente affin siano reali ed eguali le radici dell'equazione

$$(ab' - a'b)x^2 + 2(ac' - a'c)x + (bc' - b'c) = 0.$$

2. Supponiamo ora che sia

$$(ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) < 0$$

la quale esprime la condizione necessaria e sufficiente affinchè si complesse coniugate le radici dell'equazione

$$(ab' - a'b)x^2 + 2(ac' - a'c)x + (bc' - b'c) = 0.$$

---

(1) In una conferenza tenuta nella scorsa primavera il prof. Mauro Picone sollevò delle ol zioni a questo metodo; di qui l'origine della presente Nota.

Facendo i passaggi inversi a quelli del n. 1, la nostra relazione si trasforma nella

$$(a\delta^2 + b\delta + c)(a\gamma^2 + b\gamma + c) < 0. \tag{2}$$

Allora si vede che non può essere nè $\gamma = m + ni$, $\delta = m - ni$, nè $\gamma = \delta$, poichè risulta subito che in tali casi il primo membro dell'ultima diseguaglianza si trasforma o nel prodotto di due complessi coniugati o nel quadrato di un numero reale e che perciò la diseguaglianza stessa non può aver luogo. Ne segue che se si verifica la (1), le radici γ, δ di $a'x^2 + b'x + c' = 0$ sono reali e distinte. Allora dalla (2) risulta che i fattori del primo membro sono di segno contrario e che perciò uno ha segno opposto a quello di a (il che prova che $ax^2 + bx + c = 0$ ha radici reali e distinte e che uno dei due numeri γ, δ è compreso tra queste) e l'altro ha il segno di a (il che prova che il rimanente dei due numeri γ e δ è esterno all'intervallo delle radici della $ax^2 + bx + c = 0$).

Dunque quando ha luogo la (1) le equazioni $ax^2 + bx + c = 0$, $a'x^2 + b'x + c' = 0$ ammettono entrambi radici reali e distinte e quelle dell'una sono separate da quelle dell'altra. Viceversa poi se ciò accade ha evidentemente luogo la (2) e perciò la (1).

3. Prendiamo le due equazioni

$$a'x^2 + b'x + c' = 0 \qquad (ab' - a'b)\,x^2 + 2\,(ac' - a'c)\,x + (bc' - b'c) = 0$$

e formiamo l'espressione

$$\begin{aligned} \mathrm{E} = {} & [(ab' - a'b)\,c' - a'\,(bc' - b'c)]^2 - \\ & - [(ab' - a'b)\,b' - a'\,(2ac' - 2a'c)]\,[(2ac' - 2a'c)\,c' - b'\,(bc' - b'c)] \end{aligned}$$

il cui annullarsi è (n. 1) condizione necessaria e sufficiente affinchè le due equazioni abbiano almeno una radice comune. Facilmente si verifica che è anche

$$\mathrm{E} = -(b'^2 - 4a'c')\,[(ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)\,(bc' - b'c)].$$

Di qui deduciamo:

I. Se una delle due equazioni ha una radice doppia è $\mathrm{E} = 0$ e quindi (n. 1) le due equazioni hanno una radice in comune.

II. Viceversa se le due equazioni hanno una radice comune, dovendo essere $\mathrm{E} = 0$, sarà nullo almeno uno dei fattori della seconda espressione di E, e perciò almeno una delle due equazioni ha una radice doppia.

III. Se entrambi le equazioni hanno radici reali e distinte, risulta $\mathrm{E} < 0$, come si vede osservando la seconda espressione di E, e perciò (n. 2) le radici di una delle due equazioni sono separate da quelle dell'altra. Osserviamo ancora, facendo una breve digressione, che presa una retta segnata e fissato su di essa un punto O come origine delle ascisse, se sono M, N i punti aventi per asc le radici γ, δ della prima delle nostre due equazioni e P, Q q aventi per ascisse le radici α, β dell'altra, risultano M, N sepa armonicamente da P, Q. Per questo basta verificare che è

$$\frac{PM}{PN} = -\frac{QM}{QN}, \quad \text{cioè} \quad \frac{\gamma-\alpha}{\delta-\alpha} = -\frac{\gamma-\beta}{\delta-\beta},$$

ossia, liberando dai denominatori e riducendo:

$$2\gamma\delta + 2\alpha\beta = (\alpha+\beta)(\gamma+\delta).$$

Sostituendo a $\gamma\delta, \alpha\beta, \gamma+\delta, \alpha+\beta$ le loro espressioni in funzione coefficienti delle date equazioni, si trova facilmente che quest'eg glianza ha luogo. Se poi è $ab' - a'b = 0$, sempre nell'ipotesi ch $a'x^2 + b'x + c' = 0$ abbia radici reali e distinte, la seconda ha la radice $\frac{b'c - bc'}{2(ac' - a'c)}$ e questa è compresa tra γ e δ, anzi è uguale loro semisomma. Difatti avendosi dall'ipotesi fatta $b = \frac{ab'}{a'}$, ris

$$\frac{b'c - bc'}{2(ac' - a'c)} = \frac{b'c - \frac{ab'c'}{a'}}{2(ac' - a'c)} = -\frac{b'}{2a'} = \frac{\gamma+\delta}{2}$$

e di qui si vede pure che nell'ipotesi fatta se la $a'x^2 + b'x + c'$ ha una radice doppia, e quindi eguale a $-\frac{b'}{2a'}$, questa coincide l'unica radice della seconda delle considerate equazioni.

4. Siano α, β radici reali e distinte $(\alpha > \beta)$ dell'equazione

$$mx^2 + nx + p = 0$$

e siano x_1, x_2 due numeri reali qualunque. Si ha:

$$mx_1x_2 + \frac{n}{2}(x_1 + x_2) + p = \frac{m}{2}(x_1 - \alpha)(x_2 - \beta) + \frac{m}{2}(x_1 - \beta)(x_2 -$$

come facilmente si vede sviluppando il secondo membro e sostitu ad $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ le loro espressioni in funzione dei coefficienti dell'e zione. Allora per $x_1 > x_2 \geqslant \alpha$ o per $x_2 < x_1 \leqslant \beta$ i due addendi secondo membro, e quindi anche il primo membro, hanno il s di m, se invece x_1, x_2 appartengono all'intervallo (α, β), detto s è contrario a quello di m; ciò anche accade in particolare $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$.

5. Sia α la radice dell'equazione $nx + p = 0$, cioè $\alpha = -\frac{p}{n}$ o s x_1, x_2 due numeri reali qualunque. Si ha:

$$\frac{n}{2}(x_1 + x_2) + p = \frac{n}{2}(x_1 - \alpha) + \frac{n}{2}(x_2 - \alpha)$$

donde vedesi che per $x_1 > x_2 \geqslant \alpha$ i due addendi del secondo membro, e perciò anche il primo membro, hanno il segno di n, mentre per $x_2 < x_1 \leqslant \alpha$ detto segno è contrario a quello di n.

6. Dopo queste premesse veniamo ad occuparci della

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}.$$

Escluderemo sempre il caso che sia

$$(ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) = 0,$$

chè allora i termini della y hanno (n. 1) almeno un fattore in x comune e quindi la y o si riduce ad una costante (se entrambi i fattori in x in cui possono decomporsi i due termini sono eguali) o ad una frazione avente i termini lineari rispetto alla x e non ammette perciò nè massimi nè minimi. Notiamo ancora che il limite a cui tende y per x tendente sia a $-\infty$ che a $+\infty$ è sempre $\frac{a}{a'}$.

Se x_1, x_2 sono due numeri reali ($x_1 > x_2$), *nessuno dei quali annulli il denominatore*, indicando con y_1, y_2 i valori che essi fanno assumere alla y, avremo:

$$y_1 - y_2 = \frac{(x_1 - x_2)\left[(ab' - a'b)\,x_1x_2 + (ac' - a'c)(x_1 + x_2) + (bc' - b'c)\right]}{(a'x_1^2 + b'x_1 + c')(a'x_2^2 + b'x_2 + c')}.$$

Le coppie di valori che dovremo considerare per x_1, x_2 saranno esterne da una stessa parte dell'intervallo delle radici (se reali e distinte) dell'equazione $a'x^2 + b'x + c' = 0$ o interne a detto intervallo, perciò i due fattori del denominatore sono sempre di ugual segno (e ciò anche se dette radici sono o eguali o complesse) e quindi il loro prodotto è positivo; anche $x_1 - x_2$ è positivo e per conseguenza il segno di $y_1 - y_2$ coincide con quello di

$$(ab' - a'b)\,x_1x_2 + (ac' - a'c)(x_1 + x_2) + (bc' - b'c). \qquad (1)$$

Supponiamo in primo luogo che la $a'x^2 + b'x + c' = 0$ abbia radici *complesse*. Allora la y non diventa mai infinita e l'equazione

$$(ab' - a'b)\,x^2 + 2\,(ac' - a'c)\,x + (bc' - b'c) = 0 \qquad (2)$$

ha radici reali e distinte non potendo essere

$$(ac' - a'c)^2 - (bc' - b'c)(ab' - a'b) \leqslant 0$$

[non eguale a 0 per l'ipotesi fatta sopra, non minore di 0 in virtù del n. 2]; siano esse α, β e sia $\alpha > \beta$. Applicando a (2), (1) le conclusioni del n. 4, si vede subito che se è $ab' - a'b > 0$ la (1) è positiva per $x_2 < x_1 \leqslant \beta$, negativa per $\beta \leqslant x_2 < x_1 \leqslant \alpha$, positiva $\alpha \leqslant x_2 < x_1$ e perciò la y è crescente nell'intervallo $(-\infty, \beta)$, dec scente in (β, α), crescente in $(\alpha, +\infty)$. Il contrario accade $ab' - a'b < 0$.

Se poi è $ab' - a'b = 0$, la (1) e la (2) diventano rispettivamer

$$(ac' - a'c)(x_1 + x_2) + (bc' - b'c) = 0$$
$$2(ac' - a'c)x + (bc' - b'c) = 0.$$

Indicando con α la radice di (2') e applicando il n. 5, si vede se è $ac' - a'c > 0$ la (1') è negativa per $x_2 < x_1 \leqslant \alpha$ e positiva $\alpha \leqslant x_2 < x_1$, e quindi la y è decrescente in $(-\infty, \alpha)$, crescente $(\alpha, +\infty)$. Il contrario accade per $ac' - a'c < 0$. Va escluso il c $ac' - a'c = 0$ in virtù dell'ipotesi posta al principio di questo pa grafo. Concludendo abbiamo (nelle ipotesi fatte):

I. $ab' - a'b > 0$ la y parte da $\frac{a}{a'}$ (per $x = -\infty$) e va crescendo a raggiungere il massimo per $x = \beta$, poi diminu fino a raggiungere il minimo per $x = \alpha$ e in cresce fino ad $\frac{a}{a'}$ (per $x = +\infty$), essendo α, β le dici della (2).

II. $ab' - a'b < 0$ la y parte da $\frac{a}{a'}$ e va decrescendo fino a raggi gere il minimo per $x = \beta$, poi cresce fino a r giungere il massimo per $x = \alpha$ e infine decr fino ad $\frac{a}{a'}$.

III. $ab' - a'b = 0$ 1° $ac' - a'c > 0$ la y è decrescente nell'interv $(-\infty, \alpha)$ partendo da $\frac{a}{a'}$ e ragg gendo il minimo per $x = \alpha$, d di che cresce fino ad $\frac{a}{a'}$, essen la radice della (2').

2° $ac' - a'c < 0$ la y parte da $\frac{a}{a'}$ e cresce fino a giungere il massimo per $x =$ poi va decrescendo fino ad $\frac{a}{a'}$.

7. Supponiamo ora che la $a'x^2 + b'x + c' = 0$ abbia radici *re distinte* γ, δ e sia $\gamma > \delta$, cosicchè la y acquista valore infinito $x = \gamma$ e per $x = \delta$, di modo che la funzione si scinde in tre r dati rispettivamente dai valori che assume negli intervalli $(-\alpha$ (δ, γ), $(\gamma, +\infty)$.

In primo luogo sia

$$(ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) < 0,$$

cioè la (2) del n. 6 abbia radici complesse. Allora (n. 2) anche la

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ha radici reali (siano μ, ν e poniamo $\mu > \nu$) e separate dalle γ, δ, cosicchè potrà presentarsi solo uno dei seguenti casi

$$\gamma > \mu > \delta > \nu, \quad \mu > \gamma > \nu > \delta.$$

Ora abbiamo:

$$\begin{aligned}(ab' - a'b)\, x_1 x_2 + (ac' - a'c)(x_1 + x_2) + (bc' - b'c) = \\ = aa' \left[\left(\frac{b'}{a'} - \frac{b}{a} \right) x_1 x_2 + \left(\frac{c'}{a'} - \frac{c}{a} \right)(x_1 + x_2) + \left(\frac{b}{a}\frac{c'}{a'} - \frac{b'}{a'}\frac{c}{a} \right) \right].\end{aligned}$$

Sostituendo a $\frac{b}{a}, \frac{b'}{a'}, \frac{c}{a}, \frac{c'}{a'}$ le loro espressioni in funzione delle radici delle rispettive equazioni, si vede che quest'espressione si può porre sotto una qualsiasi delle seguenti forme:

$$\begin{aligned}
&1^a \qquad aa'[(\delta - x_2)(\gamma - \mu)(x_1 - \nu) + (\gamma - x_1)(\delta - \nu)(x_2 - \mu)] \\
&2^a \qquad aa'[(\delta - x_2)(\gamma - \nu)(x_1 - \mu) + (\gamma - x_1)(\delta - \mu)(x_2 - \nu)] \\
&3^a \qquad aa'[(\delta - x_1)(\gamma - \mu)(x_2 - \nu) + (\gamma - x_2)(\delta - \nu)(x_1 - \mu)] \\
&4^a \qquad aa'[(\delta - x_1)(\gamma - \nu)(x_2 - \mu) + (\gamma - x_2)(\delta - \mu)(x_1 - \nu)].
\end{aligned}$$

Allora se è $\gamma > \mu > \delta > \nu$, si vede che la (1) del n. 6 ha il segno contrario a quello di aa' (ed è quindi y decrescente per $aa' > 0$, crescente per $aa' < 0$) quando x_1, x_2 sono valori qualunque presi entrambi in uno degli intervalli $(-\infty, \delta)$, (δ, γ), $(\gamma, +\infty)$, il che si vede dalla 1^a delle quattro espressioni scritte sopra se è

$$x_1 > x_2 > \gamma \;\text{ o }\; \gamma > x_1 \geqq \mu \geqq x_2 > \delta \;\text{ o }\; \mu \geqq x_1 > x_2 > \delta \;\text{ o }\; \nu \geqq x_1 > x_2,$$

dalla 2^a se è

$$\gamma > x_1 > x_2 \geqq \mu \quad \text{o} \quad \delta > x_1 > x_2 \geqq \nu,$$

dalla 3^a se è

$$\delta > x_1 \geqq \nu \geqq x_2.$$

Se poi è $\mu > \gamma > \nu > \delta$, la (1) del n. 6 ha il segno di aa' se x_1, x_2 sia una coppia di valori presi entrambi in uno di detti intervalli (in ciascuno dei quali y è perciò sempre crescente o decrescente, secondo che è $aa' > 0$ o $aa' < 0$), il che si vede dalla 1^a delle quattro espressioni considerate se è

$$x_1 > x_2 \geqq \mu \;\text{ o }\; \gamma > x_1 > x_2 \geqq \nu \;\text{ o }\; \gamma > x_1 \geqq \nu \geqq x_2 > \delta \;\text{ o }\; \delta > x_1 > x_2,$$

dalla 2ª se è

$$\mu \geqslant x_1 > x_2 > \gamma \quad \text{o} \quad \nu \geqslant x_1 > x_2 > \delta,$$

dalla 3ª se è

$$x_1 \geqslant \mu \geqslant x_2 > \gamma.$$

In ogni caso adunque la y in nessuno dei tre intervalli amme massimi o minimi. Concludendo abbiamo: Se la massima delle dici γ, δ, μ, ν appartiene al denominatore della y ed è $aa' > 0$, pure se la massima di dette radici appartiene al numeratore e $aa' < 0$, la funzione va da $\frac{a}{a'}$ a $-\infty$ in $(-\infty, \delta)$, da $+\infty$ a $-\infty$ (δ, γ) e da $+\infty$ ad $\frac{a}{a'}$ in $(\gamma, +\infty)$; se la massima delle radici partiene al denominatore della y ed è $aa' < 0$, oppure se la m sima delle radici appartiene al numeratore ed è $aa' > 0$, la funzi va da $\frac{a}{a'}$ a $+\infty$ in $(-\infty, \delta)$, da $-\infty$ a $+\infty$ in (δ, γ) e da $-\infty$ ad in $(\gamma, +\infty)$.

8. Fermo restando che $a'x^2 + b'x + c' = 0$ abbia radici reali e stinte, poniamo ora che anche la (2) del n. 6 abbia radici rea distinte e siano α, β $(\alpha > \beta)$. Allora (n. 3, III) le radici delle equazioni si separano a vicenda e perciò si avrà solo uno dei guenti casi

$$-\infty \quad \delta \quad \beta \quad \gamma \quad \alpha \quad +\infty$$
$$-\infty \quad \beta \quad \delta \quad \alpha \quad \gamma \quad +\infty.$$

Nel primo caso per x_1, x_2 compresi in $(-\infty, \delta)$ la (1) del (applicando il n. 4 come nel n. 6) ha sempre lo stesso segn $ab' - a'b$ e quindi in tutto codesto intervallo la y è crescente o crescente secondo che è $ab' - a'b > 0$ o $ab' - a'b < 0$. Quando x_1 sono entrambi in (δ, γ), la (1) del n. 6 (sempre per il n. 4) h segno di $ab' - a'b$ per $x_2 < x_1 \leqslant \beta$ e contrario per $x_1 > x_2 \geqslant \beta$, la y è crescente in (δ, β) e decrescente in (β, γ) se è $ab' - a'b$ ed ha un massimo in β; il contrario avviene per $ab' - a'b < 0$.

Quando poi x_1, x_2 sono entrambi in $(\gamma, +\infty)$, si vede, sempre stesso modo, che la (1) del n. 6 ha il segno contrario a quell $ab' - a'b$ in (γ, α) ed eguale in $(\alpha, +\infty)$, cosicchè la y per $ab' - a'b$ è decrescente in (γ, α) e crescente in $(\alpha, +\infty)$ ed ha un minimo i il contrario avviene per $ab' - a'b < 0$.

Nel secondo caso per x_1, x_2 compresi in $(-\infty, \delta)$ la (1) del ha in $(-\infty, \beta)$ il segno di $ab' - a'b$ e contrario in (β, δ), cos per $ab' - a'b > 0$ la y è crescente in $(-\infty, \beta)$ e decrescente in ed ha un massimo in β; il contrario avviene per $ab' - a'b < 0$.

Per x_1, x_2 compresi in (δ, γ) la (1) del n. 6 ha segno oppos quello di $ab' - a'b$ in (δ, α) ed uguale in (α, γ), quindi la y

$ab' - a'b > 0$ è decrescente in (δ, α), crescente in (α, γ) ed ha un minimo in α; il contrario accade per $ab' - a'b < 0$. Infine in $(\gamma, +\infty)$ la y è sempre crescente o sempre decrescente secondo che è

$$ab' - a'b > 0 \quad \text{o} \quad ab' - a'b < 0.$$

Concludendo abbiamo: Se le due equazioni

$$a'x^2 + b'x + c' = 0 \qquad (ab' - a'b)\, x^2 + 2\,(ac' - a'c)\, x + (bc' - b'c) = 0$$

ammettono radici reali e distinte, allora:

I. Se la massima radice appartiene alla seconda

per $ab' - a'b > 0$ la y in $(-\infty, \delta)$ cresce da $\frac{a}{a'}$ a $+\infty$; in (δ, γ) ha due rami (riferendoci alla rappresentazione grafica) diretti a $-\infty$ e passa per un massimo in α; in $(\gamma, +\infty)$ ha il ramo sinistro diretto a $+\infty$ e il destro ad $\frac{a}{a'}$ e passa per un minimo in α.

per $ab' - a'b < 0$ la y in $(-\infty, \delta)$ decresce da $\frac{a}{a'}$ a $-\infty$; in (δ, γ) ha due rami diretti a $+\infty$ e passa per un minimo in α; in $(\gamma, +\infty)$ ha il ramo sinistro diretto a $-\infty$ e il destro ad $\frac{a}{a'}$ e passa per un massimo in α.

II. Se la massima radice appartiene alla prima delle due equazioni considerate

per $ab' - a'b > 0$ la y in $(-\infty, \delta)$ ha il ramo sinistro diretto ad $\frac{a}{a'}$ e il destro a $-\infty$ e passa per un massimo in β; in (δ, γ) ha due rami diretti a $+\infty$ e passa per un minimo in α; in $(\gamma, +\infty)$ è sempre crescente ed ha il ramo sinistro diretto a $-\infty$ e il destro ad $\frac{a}{a'}$.

per $ab' - a'b < 0$ la y in $(-\infty, \delta)$ ha il ramo sinistro diretto ad $\frac{a}{a'}$ e il destro a $+\infty$ e passa per un minimo in β; in (δ, γ) ha due rami diretti a $-\infty$ e passa per un massimo in α; in $(\gamma, +\infty)$ è sempre decrescente da $+\infty$ ad $\frac{a}{a'}$.

Se poi è $ab' - a'b = 0$, indicando con α la radice della (2') del n. 6, essa (n. 3 in fine) è compresa tra γ, δ, anzi è uguale alla loro semisomma.

Consideriamo allora la successione $-\infty$, δ, α, γ, $+\infty$. Per x_1, compresi in $(-\infty, \delta)$ la y [n. 5 applicato a (1'), (2') del n. 6] ha segno contrario a quello di $ac'-a'c$, quindi è decrescente p $ac'-a'c>0$, crescente per $ac'-a'c<0$. Per x_1, x_2 compresi in $(\delta,$ si ha che sono in (δ, α), la y ha segno contrario a quello di $ac'-$ ed uguale in (α, γ), quindi la y è decrescente in (δ, α), crescen in (α, γ) ed ha un minimo in α; il contrario accade per $ac'-a'c<$ Infine quando x_1, x_2 sono in $(\gamma, +\infty)$ si vede che la y è crescen per $ac'-a'c>0$, decrescente per $ac'-a'c<0$. Concludendo abbiam

III. per $ab'-a'b=0$, se è $ac'-a'c>0$ la y in $(-\infty, \delta)$ decres da $\frac{a}{a'}$ a $-\infty$; in (δ, γ) due rami rivolti a $+\infty$ ammette un minimo in α; $(\gamma, +\infty)$ ha il ramo sinist rivolto a $-\infty$ e il dest ad $\frac{a}{a'}$.

se è $ac'-a'c<0$ la y in $(-\infty, \delta)$ cresce da a $+\infty$; in (δ, γ) ha due ra rivolti a $-\infty$ e ammette massimo in α; in $(\gamma, +\infty)$ il ramo sinistro rivolto a $+$ e il destro ad $\frac{a}{a'}$.

9. Poniamo ora che la $a'x^2+b'x+c'=0$ abbia una radice dop (perciò reale) e sia γ. Allora (n. 3, I), posto $ab'-a'b \neq 0$, questa dice coincide con una delle radici α, β della

$$(ab'-a'b)x^2+2(ac'-a'c)x+(bc'-b'c)=0$$

la quale ha perciò radici reali. Allora avrà luogo l'uno o l'altro seguenti casi:

$$-\infty \quad \gamma=\beta \quad \alpha \quad +\infty$$

$$-\infty \quad \beta \quad \gamma=\alpha \quad +\infty$$

Nel primo caso al solito modo si vede che la y in $(-\infty, \gamma=\beta$ sempre crescente per $ab'-a'b>0$, decrescente per $ab'-a'b<0$; $(\gamma=\beta, \alpha)$ è decrescente per $ab'-a'b>0$ e crescente in $(\alpha, +\infty)$ ha un minimo in α; il contrario accade per $ab'-a'b<0$. Nel seco caso la y per $ab'-a'b>0$ è crescente in $(-\infty, \beta)$, decrescente $(\beta, \gamma=\alpha)$ ed ha un massimo in β; il contrario accade per $ab'-a'b<$

in $(\gamma = \alpha, +\infty)$ la y è crescente per $ab' - a'b > 0$, decrescente per $ab' - a'b < 0$. Concludendo abbiamo:

I. Se la $a'x^2 + b'x + c' = 0$ ha una radice doppia e questa coincide con la minore delle radici della (1) n. 9, allora

per $ab' - a'b > 0$ la y in $(-\infty, \gamma = \beta)$ cresce da $\frac{a}{a'}$ a $+\infty$; in $(\gamma = \beta, +\infty)$ ha il ramo sinistro diretto a $+\infty$ e quello destro ad $\frac{a}{a'}$ ed ammette un minimo in α.

per $ab' - a'b < 0$ la y in $(-\infty, \gamma = \beta)$ decresce da $\frac{a}{a'}$ a $-\infty$; in $(\gamma = \beta, +\infty)$ ha il ramo sinistro diretto a $-\infty$ e il destro ad $\frac{a}{a'}$ ed ammette un massimo in α.

II. Se la $a'x^2 + b'x + c' = 0$ ha una radice doppia e questa coincide con la maggiore delle radici della (1) n. 9, allora

per $ab' - a'b > 0$ la y in $(-\infty, \gamma = \alpha)$ ha il ramo sinistro diretto ad $\frac{a}{a'}$ e il destro a $-\infty$ e passa per un massimo in β; in $(\gamma = \alpha, +\infty)$ la funzione cresce da $-\infty$ ad $\frac{a}{a'}$.

per $ab' - a'b < 0$ la y in $(-\infty, \gamma = \alpha)$ ha il ramo sinistro diretto ad $\frac{a}{a'}$ e il destro a $+\infty$ e passa per un minimo in β; in $(\gamma = \alpha, +\infty)$ la funzione decresce da $+\infty$ ad $\frac{a}{a'}$.

Se poi è $ab' - a'b = 0$, indicando con α la radice della (2') del n. 6, essa (n. 3, III in fine) coincide con γ, si ha cioè: $-\infty, \gamma = \alpha, +\infty$. Allora come nel caso analogo del n. 6 si vede che la y per $ac' - a'c > 0$ è decrescente in $(-\infty, \gamma = \alpha)$ e crescente in $(\gamma = \alpha, +\infty)$; il contrario avviene per $ac' - a'c < 0$. Perciò abbiamo:

III. Se la $a'x^2 + b'x + c' = 0$ ha una radice doppia γ ed è $ab' - a'b = 0$, allora

per $ac' - a'c > 0$ la y in $(-\infty, \gamma)$ va da $\frac{a}{a'}$ a $-\infty$ ed in $(\gamma, +\infty)$ da $-\infty$ ad $\frac{a}{a'}$

per $ac' - a'c < 0$ la y in $(-\infty, \gamma)$ va da $\frac{a}{a'}$ a $+\infty$ ed in $(\gamma, +\infty)$ da $+\infty$ ad $\frac{a}{a'}$.

10. Conclusione. — Data una funzione y della forma da noi c siderata, per decidere subito sul suo modo di variare, si proced come segue. Si formi e si risolva l'equazione

$$(ab' - a'b)x^2 + 2(ac' - a'c)x + (bc' - b'c) = 0.$$

Se questa ha radici eguali, i due termini della y hanno alm un fattore lineare in x in comune e la y si riduce o ad una costa o a termini di primo grado in x. Se detta equazione ha radici c plesse, si risolveranno le

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

che in tal caso hanno radici reali e quelle di ciascuna separate quelle dell'altra, e si applicherà la conclusione del n. 7. Se poi cod equazione non ha nè radice doppia, nè radici complesse, si risolv essa e la

$$a'x^2 + b'x + c' = 0$$

e secondo che le radici di quest'ultima sono complesse o reali e stinte o eguali, si applicheranno le conclusioni (I, II, III) rispett mente dei n.i 6, 8, 9.

F. Palatini.

LA SECONDA SFERA DI LEMOINE

pel tetraedro isodinamico o di egual momento

1. Riferendoci sempre al tetraedro isodinamico o di egual mento pel quale abbiamo già studiato la *prima* [1] e la *terza* [2] s di *Lemoine*, conduciamo per K i piani paralleli a quelli delle fa essi produrranno nel tetraedro quattro sezioni triangolari. Fa vedere che i *primi cerchi di Lemoine* di questi triangoli apparten a una medesima sfera.

In altre parole, condotte per K le parallele alle rette degli sp del tetraedro e determinati i punti d'incontro di queste con le f dimostreremo che i *dodici* punti così ottenuti sono sopra una s che sarà detta *seconda sfera di Lemoine.*

Consideriamo il piano per K parallelo al piano $A_1A_3A_4$ e chiamo con K_2 il punto di *Lemoine* del triangolo $A_1A_3A_4$: la pot

(1) Vedasi il *Bollettino* del prof. Conti, 1913, p. 70.

(2) Vedasi il *Periodico* del prof. Lazzeri, 1915, p. 262.

di K rispetto al cerchio di *Lemoine* della sezione starà alla potenza di K_2 rispetto al cerchio di *Lemoine* di $A_1A_3A_4$ come il quadrato di A_2K al quadrato di A_2K_2.

Ma è:

$$(1) \qquad (A_2K)^2 : (A_2K_2)^2 = s_2^2 : s^2,$$

per cui la potenza di K rispetto al cerchio di *Lemoine* della sezione si otterrà da quella di K_2 rispetto al cerchio di *Lemoine* di $A_1A_3A_4$ moltiplicando questa per $\left(\frac{s_2}{s}\right)^2$.

Ora, per note formule di geometria del triangolo la potenza K_2 rispetto al cerchio di *Lemoine* di $A_1A_3A_4$ è espressa da:

$$(2) \qquad \frac{l_{13}^2 \,.\, l_{14}^2 \,.\, l_{34}^2}{(l_{13}^2 + l_{14}^2 + l_{34}^2)^2}$$

e quindi la potenza cercata sarà data da:

$$(3) \qquad \left\{\frac{s_2}{s} \cdot \frac{l_{13} \,.\, l_{14} \,.\, l_{34}}{l_{13}^2 + l_{14}^2 + l_{34}^2}\right\}^2.$$

È facile vedere che questa espressione è la stessa qualunque sia la faccia a cui da K si conduce il piano parallelo. Si ha infatti:

$$(4) \qquad s_2 \,.\, l_{13} \,.\, l_{14} \,.\, l_{34} = \frac{p_4^2}{4} \cdot \{l_{13}^2 + l_{14}^2 + l_{34}^2\}$$

come il lettore può facilmente verificare, e allora l'espressione (3) assume il valore

$$(5) \qquad \frac{p^8}{16s^2}.$$

Il punto K avendo ugual potenza rispetto ai quattro cerchi di *Lemoine* delle sezioni, ne segue che detti cerchi appartengono a una stessa sfera.

Resta così provata l'esistenza della *seconda sfera* di *Lemoine*.

Facciamo ora una convenzione. Le parallele agli spigoli A_1A_2, A_1A_3 e A_1A_4 uscenti da K incontrino la faccia $A_2A_3A_4$ rispettivamente in A'_2, A'_3 e A'_4; quelle condotte agli spigoli A_2A_3, A_2A_4, A_2A_1 incontrino la faccia $A_1A_3A_4$ in A''_3, A''_4, A''_1 e così via. Nella faccia $A_1A_3A_4$ avremo i punti $A''_1A''_3A''_4$ vertici di un triangolo omotetico ad $A_1A_3A_4$; questi due triangoli avranno per centro di omotetia il punto K_2 che è allineato con A_2 e con K. Anche il tetraedro $A_1A_2A_3A_4$ e il tetraedro $KA''_1A''_3A''_4$ sono omotetici rispetto a K_2 e sono corrispondenti A_2K_2 e K_2K: avremo dunque:

$$(6) \qquad A_iA_l : A''_iA''_l = A_2K_2 : K_2K$$

i ed l essendo numeri scelti fra 1, 3, 4.

E poichè è:

$$(7) \qquad A_2K : KK_2 = s_2 : R_2 a_2,$$

sarà:

$$(8) \qquad A_2K_2 : K_2K = s : R_2 a_2.$$

Dunque il rapporto di omotetia tra $A_1A_3A_4$ e $A''_1A''_3A''_4$ è

$$\frac{s}{R_2 a_2}.$$

2. Facendo ora della geometria nella faccia $A_1A_3A_4$ procediamo calcolare la potenza del punto A_1 rispetto al cerchio che passa p i punti $A''_1A''_3A''_4$.

Se M indica quel punto che A_1K_2 ha in comune con A_3A_4, il te rema di *Stewart* applicato al triangolo $A_1A_3A_4$ darà:

$$(9) \qquad l_{34} \,.\, (A_1M)^2 = (A_3M) \,.\, l_{14}^2 + (A_4M) \,.\, l_{13}^2 - (A_3M) \,.\, (A_4M) \,.\, l_{34}$$

ove:

$$(10) \qquad (A_3M) = l_{34} \,.\, \frac{l_{13}^2}{l_{13}^2 + l_{14}^2}, \qquad (A_4M) = l_{34} \,.\, \frac{l_{14}^2}{l_{13}^2 + l_{14}^2}.$$

Segue sostituendo:

$$(11) \qquad (A_1M)^2 = \frac{l_{13}^2 \,.\, l_{14}^2}{(l_{13}^2 + l_{14}^2)^2} \,.\, \{2 l_{13}^2 + 2\, l_{14}^2 - l_{34}^2\}$$

e ponendo per l_{34} il valore $\frac{p^2}{l_{12}}$:

$$(12) \qquad (A_1M)^2 = \frac{l_{13}^2 \,.\, l_{14}^2}{(l_{13}^2 + l_{14}^2)^2} \,.\, \{2\, l_{12}^2 (l_{13}^2 + l_{14}^2) - p^4\} \,.\, \frac{1}{l_{12}^2}.$$

Ma il teorema di *Van Aubel* dà:

$$(13) \qquad A_1K_2 : K_2M = l_{13}^2 + l_{14}^2 : l_{34}^2$$

per cui:

$$(14) \qquad (A_1K_2) = (A_1M)\, \frac{l_{13}^2 + l_{14}^2}{l_{13}^2 + l_{14}^2 + l_{34}^2}.$$

Sostituendovi per (A_1M) il suo valore fornito dalla (12).

$$(15) \qquad (A_1K_2) = \frac{l_{13} \,.\, l_{14}}{l_{12}} \,.\, \sqrt{2(l_{13}^2 + l_{14}^2) l_{12}^2 - p^4} \,.\, \frac{1}{l_{13}^2 + l_{14}^2 + l_{34}^2}$$

e ponendo $\frac{p^2}{l_{12}}$ invece di l_{34}:

$$(16) \qquad (A_1K_2) = l_{12} \,.\, l_{13} \,.\, l_{14} \,.\, \frac{\sqrt{2 l_{12}^2 (l_{13}^2 + l_{14}^2) - p^4}}{(l_{13}^2 + l_{14}^2)\, l_{12}^2 + p^4}.$$

Prolunghiamo ora A_1M ad incontrare la circonferenza circoscritta ad $A_1A_3A_4$ in R: è

$$(A_1M) . (MR) = (A_3M) . (A_4M)$$

da cui:

$$(MR) = \frac{(A_3M) . (A_4M)}{(A_1M)} . \tag{17}$$

Sarà allora:

$$(A_1R) = (A_1M) + (MR) = (A_1M) + \frac{(A_3M) . (A_4M)}{(A_1M)} = \frac{(A_1M)^2 + (A_3M) . (A_4M)}{(A_1M)} . \tag{18}$$

Ma il numeratore di questa frazione è, per la (9), uguale a

$$\{(A_3M) l_{14}^2 + (A_4M) l_{13}^2\} : l_{34}.$$

In conseguenza:

$$(A_1R) = \frac{(A_3M) l_{14}^2 + (A_4M) l_{13}^2}{l_{34} . (A_1M)} = \frac{2 l_{12} l_{13} l_{14}}{\sqrt{2 l_{12}^2 (l_{13}^2 + l_{14}^2) - p^4}} . \tag{19}$$

Ora, poichè A_1K_2 e A''_1K_2 sono segmenti corrispondenti, sarà

$$A_1K_2 : A''_1K_2 = s : R_2a_2 . \tag{20}$$

Segue:

$$A_1K_2 : A''_1K_2 - A''_1K_2 = s : s_2$$

e quindi:

$$(A_1A''_1) = (A_1K_2) - (A''_1K_2) = \frac{s_2}{s} (A_1K_2). \tag{21}$$

Per la (16) si ha allora:

$$(A_1A''_1) = \frac{s_2}{s} . l_{12} . l_{13} . l_{14} . \frac{\sqrt{2 l_{12}^2 (l_{13}^2 + l_{14}^2) - p^4}}{l_{12}^2 . (l_{13}^2 + l_{14}^2) + p^4} . \tag{22}$$

Essendo poi:

$$\frac{s_2 . l_{12} . l_{13} . l_{14}}{l_{12}^2 (l_{13}^2 + l_{14}^2) + p^4} = \frac{p^2}{4} , \tag{23}$$

si trova:

$$(A_1A''_1) = \frac{p^2}{4s} . \sqrt{2 l_{12}^2 . (l_{13}^2 + l_{14}^2) - p^4} . \tag{24}$$

È ora facile il calcolo della potenza di A_1 rispetto al cerchio $A''_1A''_3A''_4$ e per questo basta chiamare R'' il corrispondente di R nell'omotetia sopra considerata e osservare che R'' giace sulla circonferenza circoscritta ad $A''_1A''_3A''_4$ e che si ha:

$$A_1R : A''_1R'' = s : R_2a_2 \tag{25}$$

da cui:

$$(A''_1R'') = \frac{R_2 a_2}{s} \cdot (A_1R) = \frac{p^2 l_{13}^2 \cdot l_{14}^2}{2s \cdot \sqrt{2l_{12}^2 \cdot (l_{13}^2 + l_{14}^2) - p^4}} \cdot \tag{26}$$

La potenza di A_1 sarà misurata da:

$$(A_1A''_1) \cdot \{(A_1A''_1) + (A''_1R'')\} \tag{27}$$

e sarà quindi uguale a:

$$\frac{p^2 \cdot \sqrt{2l_{12}^2(l_{13}^2 + l_{14}^2) - p^4}}{4s} \cdot$$
$$\cdot \left\{ \frac{p^2 \cdot \sqrt{2l_{12}^2(l_{13}^2 + l_{14}^2) - p^4}}{4s} + \frac{p^2 \cdot l_{13}^2 \cdot l_{14}^2}{2s\sqrt{2l_{12}^2(_{13}^2 + l_{14}^2) - 1}} \right.$$

e successivamente a:

$$\frac{p^4}{16s^2} \cdot \{2l_{12}^2(l_{13}^2 + l_{14}^2) + 2l_{13}^2 l_{14}^2 - p^4\},$$
$$\frac{p^4}{16s^2} \cdot \{2(l_{12}^2 l_{13}^2 + l_{12}^2 l_{14}^2 + l_{13}^2 l_{14}^2) - p^4\},$$
$$\frac{p^4}{16s^2} \cdot \left\{2p^4 \cdot \frac{s_1}{R_1 a_1} - p^4\right\}$$

e infine a:

$$\frac{p^8}{16s^2} \cdot \left\{2 \cdot \frac{s_1}{R_1 a_1} - 1\right\} \cdot \tag{28}$$

È ovvio trascrivere le espressioni delle potenze relative agli tre vertici.

3. Detti P_{12} e Q_{12} i punti comuni alla seconda sfera di *Lem* alla retta A_1A_2 — punti che potranno essere reali e distinti, cidenti, o immaginari coniugati — e detto X_{12} il punto med P_{12}, Q_{12} — punto che sarà sempre reale — avremo:

$$(A_1X_{12})^2 - (A_2X_{12})^2 = p_1^2 - p_2^2 \tag{29}$$

ovvero

$$\{(A_1X_{12}) + (A_2X_{12})\} \cdot \{(A_1X_{12}) - (A_2X_{12})\} = p_1^2 - p_2^2$$

o anche:

$$l_{12}\{(A_1X_{12}) - (A_2X_{12})\} = p_1^2 - p_2^2 \tag{30}$$

per essere

$$(A_1X_{12}) + (A_2X_{12}) = l_{12}.$$

Segue allora:

$$(A_1X_{12}) = \frac{l_{12}^2 + p_1^2 - p_2^2}{2l_{12}} \cdot \tag{31}$$

E se poniamo:

$$(A_1P_{12}) = x \quad (P_{12}X_{12}) = y \tag{32}$$

vedremo subito che x e y soddisfano alle equazioni:

$$(33)\qquad \begin{cases} x + y = \dfrac{l_{12}^2 + p_1^2 - p_2^2}{2 l_{12}} \\ x(x + 2y) = p_1^2 \end{cases}$$

e x, $x + 2y$ sono radici dell'equazione:

$$(34)\qquad z^2 - \frac{l_{12}^2 + p_1^2 - p_2^2}{2 l_{12}} . z + p_1^2 = 0$$

da cui si trae, ponendo:

$$(35)\qquad s_{12} = l_{12}^4 + p_1^4 + p_2^4 - 2 . l_{12}^2 . p_1^2 - 2 l_{12}^2 p_2^2 - 2 p_1^2 p_2^2 :$$

$$z = \frac{1}{2 l_{12}} . \left\{ l_{12}^2 + p_1^2 - p_2^2 \pm \sqrt{s_{12}} \right\} .$$

Senza nulla togliere alla generalità possiamo porre:

$$(36)\qquad \begin{cases} (A_1 P_{12}) = \dfrac{1}{2 l_{12}} . \left\{ l_{12}^2 + p_1^2 - p_2^2 + \sqrt{s_{12}} \right\} , \\ (A_1 Q_{12}) = \dfrac{1}{2 l_{12}} . \left\{ l_{12}^2 + p_1^2 - p_2^2 - \sqrt{s_{12}} \right\} . \end{cases}$$

È subito visto che $\sqrt{s_{12}}$ rappresenta la lunghezza del segmento P_{12}, Q_{12} incercetto dalla nostra sfera sullo spigolo $A_1 A$ moltiplicata per l_{12}.

Lasciamo al lettore di calcolare altri elementi della figura.

E. Piccioli.

PROBLEMI[1]

(Continuazione — Vedi fascicolo I).

207. Il quadrato iscritto nell'asteroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, i cui lati hanno la lunghezza $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$, ha i suoi lati tangenti e normali all'asteroide stesso.

208. Due circoli di raggi costanti si spostano in guisa che il loro centro rimanga sulla retta X e che il loro asse radicale sia sempre l'asse Y. Trovare l'inviluppo delle tangenti comuni.

---

(1) In massima non pubblicheremo le risoluzioni di questi problemi favoritici dal Comandante Barisien, ma accetteremo volentieri le osservazioni e generalizzazioni che i nostri lettori vorranno inviarci.

209. Se MN è una corda della ellisse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ n
male nel punto M di coordinate $(a\cos\varphi,\ b\,\mathrm{sen}\,\varphi)$ e NP, NQ le al
due corde normali condotte per N, l'area del triangolo PQM è

$$S = \frac{ab\left(a^2\,\mathrm{sen}^2\varphi - b^2\cos^2\varphi - \frac{a^2b^2}{c^2}\right)\sqrt{a^4\,\mathrm{sen}^2\varphi + b^4\cos^2\varphi - \frac{a^4b^4}{c^4}}}{a^4\,\mathrm{sen}^2\varphi + b^4\cos^2\varphi}$$

210. Essendo dato un trapezio isoscele ABCD, si descrivano c
archi di circolo capaci degli angoli 2α e α che abbiano per co
rispettivamente le basi AB, CD. Trovare il luogo dei punti d'
contro delle circonferenze alle quali appartengono i detti archi quan
varia α. Caso in cui il trapezio diventa un rettangolo.

211. Quale relazione deve esistere fra i coefficienti A, B, C, D d
l'equazione

$$(x^2 + y^2)^2 + A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

affinchè rappresenti: 1° una conchiglia di Pascal; 2° una cardioi

212. Dimostrare, senza fare la divisione, che

$$f(x) = 7x^7 - 8x^6 - x + 2$$

è divisibile per $x^2 - 2x + 1$.

213. Essendo M un punto variabile sopra una ellisse di asse A
si descrive il circolo c tangente ad AB che ha per centro M e da
e B si conduca le altre due tangenti in tali circoli.

Si domanda:

1° il luogo del punto di durata di questa tangente;

2° il luogo dei punti di contatto di questa col circolo c.

214. Essendo P un punto qualunque nel piano di una ellisse
centro O, dimostrare che esistono sull'ellisse sei punti M tali c
la retta simmetrica di MP, rispetto alla normale in M passa per

Discutere e dimostrare che in particolare, se P è un fuoco d
l'ellisse, nessun dei sei punti M è reale.

215. Dati due punti A, B ed una retta XY, si prendano su que
due punti P, Q tali che:

1° l'angolo APX sia il doppio dell'angolo BQY;

2° l'angolo APY sia il doppio dell'angolo BQY.

Trovare in questi due casi il luogo del punto d'incontro de
retta AP e BQ, e di quello delle rette AQ, BP.

216. Essendo O il punto doppio di una conchiglia di Pasc
T_1, T_2, T_3, T_4 i punti di contatto della curva colle tangenti co
dotte da un punto M, trovare il luogo dei punti M, tali che la
settrice degli angoli formati dall'asse di simmetria delle curve co
rette OT_1, OT_2, OT_3, OT_4 sia armonico.

217. Si considerino l'ellisse e l'iperbole aventi per equazioni

$$\text{(E)} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \qquad \text{(H)} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2=0$$

e siano P, Q i punti di contatto delle tangenti all'ellisse (E) condotte da un punto M dell'iperbole (H). Si conduca per P la retta simmetrica di PM e per Q la retta simmetrica di QM rispetto agli assi. Queste due rette s'incontrano in un punto dell'asse minore di (E).

218. Quando due coniche hanno in un fuoco comune, le coordinate dei loro quattro punti d'incontro dipendono da due equazioni di 2° grado. Dimostrare che due corde comuni a queste due coniche passano per il punto comune alle due direttrici relative al fuoco comune.

219. Se (α, β) sono le coordinate di un punto P del piano della parabola $y^2-2px=0$, dimostrare che l'espressione $\beta^2-2p\alpha$ è una funzione dell'area del triangolo che ha per vertici il punto P e i punti di contatto delle tangenti condotte da P alla parabola.

220. In un piano sono date due rette Oa, Ob ed un punto P fissi. Se M è il punto comune alle perpendicolari ad x, y nei punti ove queste sono incontrate da una retta r per P, il luogo di M è una iperbole.

Se le rette Oa, Ob variano restando fisse le loro bisettrici, si trovino:

1° il luogo del centro dell'iperbole;
2° il luogo dei suoi vertici;
3° il luogo dei suoi fuochi;
4° il luogo dei punti d'incontro dei suoi asintoti colle rette Oa, Ob.

221. Sia O il centro di una ellisse, M un punto variabile su di essa, T, N i punti d'incontro della tangente e della normale in M con la perpendicolare ad OM condotta per O.

1°. Il luogo del punto T è una *curva croce*.

2°. Il luogo del punto N è una sestica, di cui l'area è $\frac{1}{3}$ dell'area delle sviluppate dell'ellisse.

222. Si considerino i due punti di coordinate

$$\text{(A)} \begin{cases} x=a\cos^3\varphi, \\ y=a\,\mathrm{sen}^3\varphi, \end{cases} \qquad \text{(B)} \begin{cases} x=a\cos^5\varphi, \\ y=a\,\mathrm{sen}^5\varphi, \end{cases}$$

φ essendo variabile. Trovare: 1° l'area compresa fra le due curve luoghi di (A) e (B); 2° l'area della curva inviluppo della retta AB.

223. Il luogo dei vertici e quello dei fuochi delle coniche circoscritte a una losanga, sono due quartiche. Il luogo dei punti d'incontro degli assi di queste coniche col loro cerchio di Monge è una sestica.

224. Si sa che se da un punto M di un ellisse si conducono
rette egualmente inclinate sulla tangente in M, le quali incont
l'ellisse in P, Q, la retta PQ passa per un punto fisso T della
gente. Trovare il luogo di questo punto quando M percorre l'el
data.

225. Dimostrare che

$$\int_{\infty}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^6}\,dx = \frac{6\sqrt{2}+\mathrm{L}(2\sqrt{2}+3)}{4}.$$

226. Sono date due semirette $0x$, $0y$ e la bisettrice r del
angolo. Due parabole hanno r per asse e sono tangenti ad x
in A l'altro in B. La retta che passa per i punti d'incont
queste due parabole passa per il punto medio di AB.

227. Se FM è un raggio vettore focale variabile di una e
e P è il punto d'incontro della normale in M con la perpendi
ad FM condotta per F, il luogo di P è una quartica di area $\pi a \frac{(a^2}{}$
(a, b essendo i semiassi dell'ellisse data).

228. Se N è il punto d'incontro dell'asse maggiore di una e
con la normale ad essa da un punto M, e P il simmetrico di
spetto ad M, Q il simmetrico di M rispetto ad N, il luogo d
una ellisse, e il luogo di Q un'altra ellisse.

(Le coordinate di M essendo ($a\cos\varphi$, $b\,\mathrm{sen}\varphi$) quelle di N sono $\left(\frac{c^2}{a}\cos\right.$
e quelle di P

$$x = 2a\cos\varphi - \frac{c^2}{a}\cos\varphi = \frac{(a^2+b^2)}{a}\cos\varphi, \qquad y = 2b\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

Il luogo di P è dunque l'ellisse

$$\frac{a^2x^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1.$$

Per il luogo di Q si trova

$$\frac{a^2x^2}{(a^2-2b^2)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.)$$

229. Le due equazioni

$$r = \frac{a\cos\theta}{1+\mathrm{sen}^2\theta}, \qquad r = \frac{a\cos\theta}{1+\mathrm{sen}\,\theta}$$

rappresentano un'ellisse ed una strofoide. Calcolare l'area co
fra le due curve.

(Si trova

$$\mathrm{U} = a^2\left[\frac{\pi(2\sqrt{2}+1)}{4\sqrt{2}} - 2\right] = 0{,}127 \times a^2.)$$

230. Trovare l'ordine e l'area della curva inviluppo della retta

$$x \operatorname{sen} 3\alpha - y \cos 3\alpha = a \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha$$

al variare di α.

231. Siano B un estremo del raggio minore di un'ellisse, M un punto variabile su di esso, T ed N i punti d'incontro della perpendicolare a BM in B con la tangente e la normale in M.

1°. Il luogo di T è una cubica; si domanda l'area compresa fra essa e il suo asintoto. Se il rapporto degli assi è $\sqrt{2}$, la detta curva diventa la sviluppabile di una parabola.

2°. Il luogo di N è una quartica; si domanda l'area di questa curva.

3°. Il luogo del punto medio P di MN è una quartica; se ne domanda l'area.

(Si trova

1°. $\text{Area} = \dfrac{3\pi a^4 b^3}{(2b^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}$. 2°. $\text{Area} = \dfrac{\pi (a^4 + b^4)}{2ab}$. 3°. $\text{Area} = \dfrac{\pi c^4}{8ab}$.)

232. La curva

$$r = \frac{a \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta}{3 \cos^2 \theta + 4 \operatorname{sen}^2 \theta}$$

ha per area

$$\frac{\pi a^2}{4(2 + \sqrt{3})^2}.$$

Calcolare il massimo di r.

(Ponendo $\dfrac{dr}{d\theta} = 0$ si trova

$$4 \operatorname{tg}^4 \theta - 3 \operatorname{tg}^2 \theta - 6 = 0,$$

da cui

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{3 + \sqrt{105}}{8}, \qquad \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{\sqrt{105} - 9}{2}, \qquad \cos^2 \theta = \frac{11 - \sqrt{105}}{2}.$$

Il valore massimo di r è allora, fatte le riduzioni,

$$r = \frac{a}{4\sqrt{2}} \sqrt{359 - 35\sqrt{105}}.\ )$$

233. Trovare l'area e l'ordine della curva inviluppo della retta

$$x \cos m\alpha + y \operatorname{sen} m\alpha = \mathrm{R} \cos \alpha,$$

(ove m rappresenta un numero intero e positivo).

(Continua)

E.-N. BARISIEN.

QUISTIONI PROPOSTE

814. Trovare l'inviluppo della retta

$$[bc(b+c)^2-ak]\,x+[c(b+c)-a\lambda]^2\,y-[bc(b+c)^2-ak]\,\lambda-$$
$$-[c(b+c)-a\lambda]\,[k-b(b+c)\,\lambda]=$$

al variare di λ.

Trovare il luogo dei punti d'incontro di questo inviluppo l'iperbole $axy+k=0$ quando varia k.

Determinare k in funzione di a, b, c in modo che l'inviluppo de retta data sia tangente alla retta

$$[b(b+c)-a(a-cd)]\,x+[c(b+c)-a(a-bd)]\,y-$$
$$-(b+c)\,[b(a-bd)+c(a-cd)]+2a(a-bd)(a-cd)=$$

e trovare le coordinate del punto di contatto.

815. Se

$$a+b+c=\alpha+\beta+\gamma \quad \text{a} \quad \frac{\alpha}{b+c}=\frac{\beta}{a+c}=\frac{\gamma}{a+b},$$

si ha

$$\frac{1}{4}\,\Sigma(b^2+ab+bc-ca)(c^2+bc+ca-ab)\equiv-\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & 0 & \gamma & \beta \\ \beta & \gamma & 0 & \alpha \\ \gamma & \beta & \alpha & 0 \end{vmatrix}$$

F. Nedelcu.

RISOLUZIONE DELLA QUISTIONE 813

813. *Supponendo che la funzione* f(x) *e tutte le sue derivate siano cont nell'intervallo* (a, a + x), *trovare la somma della serie:*

$$[f(a+x)-f(a)]+[f'(a+x)-\left(1+\frac{1}{1!}\right)f'(a)\,x]+\dots$$
$$\dots+[f^{(n)}(a+x)-\left(1+\frac{1}{1!}\right)f^{(n)}(a)]\,x^n+$$

F. Nedelcu.

Risoluzione del proponente.

La funzione $f(x)$ e le sue derivate essendo continue nell'intervallo $(a, a+x)$, si ha per lo sviluppo di Taylor

$$f(a+x) = f(a) + \frac{x}{1!}f'(a) + \frac{x^2}{2!}f''(a) + \ldots\ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a) + \ldots$$

$$f'(a+x) = \qquad f'(a) + \frac{x}{1!}f''(a) + \ldots + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-2)}(a) + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a) + \ldots$$

$$f''(a+x) = \qquad f''(a) + \ldots + \frac{x^{n-3}}{(n-3)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n)}(a) + \ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n-1)}(a+x) = \qquad f^{(n-1)}(a) + \frac{x}{1!}f^{(n)}(a) + \ldots$$

$$f^{(n)}(a+x) = \qquad f^{(n)}(a) + \ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Sommando queste eguaglianze dopo averle moltiplicate per $1, x, x^2, \ldots x^{n-1}, x^n, \ldots$ rispettivamente, si ha

$$f(a+x) + xf'(a+x) + x^2f''(a+x) + \ldots + x^{n-1}f^{(n-1)}(a+x) + x^nf^{(n)}(a+x) + \ldots$$
$$= f(a) + \left(1 + \frac{1}{1!}\right)xf'(a) + \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right)x^2f''(a) + \ldots$$
$$\ldots + \left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\right)x^{n-1}f^{(n-1)}(a) + \left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots \frac{1}{n!}\right)x^nf^{(n)}(a) + \ldots$$

e trasportando tutto nel primo membro si ha

$$[f(a+x) - f(a)] + [f'(a+x) - \left(1 + \frac{1}{1!}\right)f'(a)]x + \ldots$$
$$\ldots + [f^{(n)}(a+x) - \left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots \frac{1}{n!}\right)f^{(n)}(a)]x^n + \ldots = 0.$$

Dunque la somma della serie data è zero.

BIBLIOGRAFIA

Annuaire pour l'an 1916 publié par le Bureau des Longitudes. Paris, Gauthier-Villars & C.

È uscito questo interessante annuario, che, come sempre, racchiude in piccolo volume una grande quantità di notizie e tavole scientifiche veramente preziose. Quest'anno, dopo i dati relativi al calendario ed alla astronomia, contiene i dati fisici e chimici secondo la redazione del 1914; però tutti gli articoli sono stati riveduti con molta cura e vi sono stati introdotti miglioramenti di dettaglio.

Il volume si chiude con una interessante Notizia di Bigourdan su *La pressione barometrica media ed il regime dei venti in Francia*, ed una bella necrologia del Comandante Emilio Guyou, morto il 25 agosto 1915, che era il decano dei componenti il Bureau des Longitudes, scritta da Picard.

Avviamento alla risoluzione dei problemi di Aritmetica e Geometri metrica, ad uso delle scuole medie inferiori di PAOLO CATTANEO Casa Editrice G. B. Petrini di Giovanni Gallizio, Torino, 1915. — Prezzo L. 1,50.

Questo volumetto che mi sembra un utilissimo libro sussidiario per l'inse gnamento della Aritmetica pratica e Geometria metrica, si divide in tre parti *Problemi di Aritmetica, Problemi di Geometria metrica, Elementi di calcolo appro simativo.*

Scopo dell'A. è di offrire un manualetto che possa servire ad integrare l'oper dell'insegnante nel guidare gli alunni alla risoluzione dei problemi in quello stadi difficile dell'insegnamento che precede lo studio dell'Algebra. Si tratta di un raccolta accurata di esercizî e problemi svolti con ordine e chiarezza e accomp gnati da osservazioni, note e norme utilissime anche per determinare il grado approssimazione dei resultati. Per varî problemi sono indicate diverse risoluzion per alcuni sulle frazioni si danno anche schemi geometrici che aiutano a scopri la via da seguire per giungere alla soluzione. La generalizzazione dei casi part colari, mediante il passaggio dalla risoluzione numerica a quella letterale, è chi rita efficacemente con opportuni esempî; ed è messo bene in evidenza il vantagg che offre la risoluzione letterale su quella numerica sia per l'impostazione d problema sia per la maggiore approssimazione dei resultati che si ottengono.

Ogni gruppo di problemi è seguito da un certo numero di questioni propos e sul tipo di queste l'insegnante potrà agevolmente formularne altre.

L'ultima parte del lavoro, nella quale l'A. tratta sistematicamente delle appro simazioni, contiene alcune regole per stabilire il grado di approssimazione d valori di espressioni numeriche, nelle quali i numeri dati sono valori approssima per difetto o per eccesso. E di queste regole l'A. ci offre infine una interessan applicazione all'estrazione di radice quadrata, una notevole abbreviazione del regola ordinaria che consiste nella determinazione di parecchie cifre della radi mediante due sole divisioni dopo averne ottenute alcune con la regola comun Naturalmente la questione di determinare il grado di approssimazione che de bono avere i dati di un'operazione affinchè il resultato acquisti un grado approssimazione prestabilito non viene considerata dall'A., essendo quasi semp di soluzione troppo difficile e perciò inopportuna per gli alunni a cui dedica suo lavoretto.

Concludo questa mia breve recensione richiamando l'attenzione degli egre Colleghi delle scuole medie sopra questo utile lavoro del prof. P. Cattaneo, lavo che per la cura con cui fu redatto e per le questioni, spesso trascurate ne scuola, che tratta con abilità e precisione si raccomanda da sè al lettore. Co insegnante di liceo-ginnasio giudico questo libro assai opportuno per gli alu del ginnasio superiore, i quali avendo ultimato il corso di matematica prati possono trovarvi una buona guida nelle esercitazioni che non debbono essere terrotte durante il biennio che divide lo studio dell'aritmetica pratica da que dell'algebra nel liceo-ginnasio.

Prof. UMBERTO CONCINA.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 7 Febbraio 1916

LE PROPRIETÀ DEI NUMERI $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}_h$

derivanti dalla considerazione di speciali combinazioni di elementi dette combinazioni con ripetizione fino ad h e la loro applicazione: 1° allo studio delle tavole generali di addizione per linee, per colonne, per diagonali e circolari, di passo h; 2° alla determinazione in funzione di p e di $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$, dell'elemento di posto m nella successione individuata da n numeri iniziali $Q_1, \ldots Q_n$ e dall'equazione ricorrente: $Q_m = p(Q_{m-1} + Q_{m-2} + \ldots + Q_{m-n})$.

(Continuazione — Vedi fascicoli I e II)

PARTE SECONDA.

Applicazioni dei numeri $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}_h$.

Teoria generale delle tavole di addizione

I. — Tavole di addizione per linee.

Siano date una prima linea ad orizzontale di n numeri $a_{11} \ldots a_{1n}$ ed una prima colonna o verticale di m numeri $a_{11}, \ldots a_{m1}$. Siano esse la 1ª linea e la prima colonna dello specchio di numeri

$$\begin{array}{c} h \\ \begin{array}{|llcl} \hline a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{mn} \end{array} \end{array}$$

ottenuto completando ciascuna linea, a cominciare dalla 2ª, in modo che ogni elemento di essa valga la somma di quello che gli sta sopra e di altri h a sinistra di quest'ultimo, oppure la somma di quello che gli sta sopra e di tutti quelli che sono alla sinistra di quest'ultimo, quando essi siano in numero minore di h. Un tale specchio verrà chiamato *tavola di addizione per linee od orizzontali.* La 1ª lin si dirà *1ª entrata* od *entrata orizzontale*, e la 1ª colonna si dirà *2ª* *trata* od *entrata verticale*. Il numero positivo intero non nullo h ve detto *passo* della tavola. Rappresenteremo una tavola chiudend gli elementi tra due tratti rettilinei ad angolo retto e scrivend passo al disopra del tratto orizzontale.

Ci proponiamo di trovare l'espressione dell'elemento generico della tavola in funzione degli elementi delle entrate. [1] È opport che ci occupiamo dapprima delle tavole che hanno l'entrata vertic costituita da elementi tutti uguali. Supporremo anche che l'entr orizzontale contenga n numeri qualsiasi $a_{11}, \ldots a_{1n}$, l'ultimo dei quali diverso da zero, seguiti da zeri in numero illimitato. Trovata l'espr sione di a_{ij} in funzione di $a_{11}, \ldots a_{1n}$, basterà supporre $i \leqslant m$, $j \leqslant$ perchè essa possa riferirsi ai soli elementi di una tavola di m li ed n colonne.

È intanto evidente che: *Il triangolo* T_h *è una tavola di pass coll'entrata orizzontale* 1, 0, 0, ... *e la verticale* 1, 1, 1, ...

Dalle proposizioni introduttorie (parte I) risulta poi:

In una tavola di addizione per linee, avente l'entrata verticale co tuita da numeri uguali e l'orizzontale costituita da n *numeri* $a_{11}, \ldots$ *l'ultimo dei quali non nullo, seguiti da zeri in numero illimitato:*

1°. *La* i^{ma} *linea comprende* $n + h(i-1)$ *numeri iniziali, che pos essere anche tutti diversi da zero, seguiti da zeri in numero illimit*

2°. *Se* $S = a_{11} + \ldots + a_{1n}$ *è la somma dei primi* n *elementi dell'ent orizzontale, la somma dei primi* $n + h(i-1)$ della i^{ma} *linea* $S \cdot (h+1)^{i-1}$.

3°. *Se percorrendo la successione* $a_{11}, \ldots a_{1n}$ *dell'entrata orizzon in un dato senso, da destra verso sinistra o da sinistra verso destr*

---

[1] Un primo studio sulle tavole di addizione si trova in *Théorie des nombres* di E. Luc cap. 1°, n. 5 (Tableau de sommes). Al n. 6 (Généralisation du tableau de somme et de la su Fibonacci) si accenna appena alle tavole di addizione di ordine superiore. L'ordine di una t cui allude il Lucas è appunto il numero $h + 1$. Uno studio più completo delle tavole di addi trovasi al cap. VIII (Théoremes généraux sur le calcul de sommes et de differences). Le t studiate dal Lucas sono quelle che noi diremmo di passo $h = 1$. In esse gli elementi dell'e verticale sono indicati con $u_0, u_1, u_2 \ldots$ e quelli dell'orizzontale con $u_0, \Sigma u_0, \Sigma^2 u_0, \ldots$: ci elemento (il 1° escluso) delle orizzontali 2ª, 3ª, ... si ottiene sommando quello che gli sta con quello a sinistra di quest'ultimo. Le proprietà studiate dal Lucas riguardano le relazio i termini di una linea o di una colonna, o di una diagonale; la ricerca dell'espressione de mento generico $\Sigma^p u_q$ in funzione degli elementi $u_0, u_1, u_2 \ldots$; $\Sigma u_0, \Sigma^2 u_0 \ldots$ delle entr trattata parzialmente. Rientra in tale trattazione il teorema “ *se si moltiplicano* p + 1 *termin secutivi di una linea di una tavola di addizione per i coefficienti dello sviluppo di* $(1+x)^p$, *si o quale somma dei prodotti, il termine della tavola situato sulla colonna cui appartiene l'ultin suddetti* p + 1 *termini e sulla diagonale* ↘ *che si stacca dal 1° di essi* ”. Questo teorema è i tante, ma non ci permette ancora di esprimere un qualunque elemento a_{ij} di una tavola di zione in funzione degli elementi delle entrate. Ora evidentemente la ricerca di tale espre è la più importante di quante si riferiscono ad uno studio generale delle tavole di addizio linee. La questione può risolversi per le tavole di passo $h = 1$, senza che occorra intr nuovi numeri combinatori diversi dai coefficienti binomiali. Se $h > 1$, compaiono nella su espressione i numeri della forma $\left\{ {m \atop n} \right\}_h$, ed è appunto per mostrarne l'importanza, che preoccupiamo di ricercare la suddetta espressione.

attribuiscono agli elementi di essa i segni + e — alternativamente (oppure — e +) e si indica con d *la somma algebrica dei numeri così ottenuti, operando nello stesso modo sulla successione dei primi* $n+h(i-1)$ *elementi della orizzontale* i^{ma}, *la somma algebrica che ne risulta vale* d *se* h *è pari e vale zero se* h *è dispari.*

4°. *Se percorrendo la successione dei primi* $n+h(i-1)$ *elementi della* i^{ma} *linea, da destra verso sinistra o da sinistra verso destra, si scompone in gruppi di* $h+1$ *elementi, l'ultimo gruppo potendo anche contenerne un numero minore, e si sommano gli elementi primi, i secondi, i terzi, ... dei singoli gruppi, le somme ottenute valgono tutte* $S(h+1)^{i-2}$, S *essendo la somma degli elementi dell'entrata orizzontale.*

Studiamo ora un caso particolare. Sia $h=1$ ed $a, b, c, 0, 0, \ldots$ l'entrata orizzontale. Si ha la tavola:

$h=1$

a	b	c	0	0	0	0	0
a	$a+b$	$b+c$	c	0	0	0	0
a	$2a+b$	$a+2b+c$	$b+2c$	c	0	0	0
a	$3a+b$	$3a+3b+c$	$a+3b+3c$	$b+3c$	c	0	0
a	$4a+b$	$6a+4b+c$	$4a+6b+4c$	$a+4b+6c$	$b+4c$	c	0
a	$5a+b$	$10a+5b+c$	$10a+10b+5c$	$5a+10b+10c$	$a+5b+10c$	$b+5c$	c
a	$6a+b$	$15a+6b+c$	$20a+15b+6c$	$15a+20b+15c$	$6a+15b+20c$	$a+6b+15c$	$b+6c$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Ogni elemento è funzione lineare, a coefficienti positivi interi, di a, b, c. Consideriamo una linea qualunque p. es. la 7ª e contemporaneamente la 7ª linea di T_1, del triangolo cioè dei coefficienti binomiali. Formiamo coi numeri di tale 7ª linea i seguenti gruppi: 1°; 1°, 2°; 1°, 2°, 3°; 2°, 3°, 4°; 3°, 4°, 5°; 4°, 5°, 6°; 5°, 6°, 7°; 6°, 7°; 7°, che sono i gruppi; 1; 1, 6; 1, 6, 15; 6, 15, 20; 15, 20, 15; 20, 15, 6; 15, 6, 1; 6, 1; 1. Ebbene il 1°, 2°, 3°, ... di tali gruppi comprende i coefficienti di a, b, c dei termini ultimo, penultimo, terzultimo, ... della 7ª linea della tavola.

Ciò si verifica a partire dalla 3ª linea della tavola, poichè è la 3ª linea di T_1 quella che contiene tanti numeri quanti sono gli elementi dell'entrata della tavola, precedenti la successione illimitata degli zeri finali. Rapporto alla 2ª linea di T_1, formati i gruppi di numeri 1; 1, 1; 1, 1; 1, cogli elementi 1°; 1°, 2°; 1°, 2° (per la 2ª volta); 2°, si hanno ancora i gruppi dei coefficienti dei termini ultimo, penultimo, ... della 2ª linea della tavola. Adunque il gruppo 1, 1 comprendente tutti i numeri non nulli della 2ª linea di T_1, è stato ripetuto due volte. Si noti però che 1, 1 del 1° gruppo (1, 1) sono coefficienti di a e b ed 1, 1 del 2° gruppo (1, 1) sono coefficienti di b e c. Questo fatto è generale: se l'entrata orizzontale comprende n, elementi precedenti la successione illimitata degli zeri finali, in una linea avente un numero d'ordine minore di n, vi è un certo numero di ter nei quali la successione dei coefficienti è la stessa, ed è quell numeri non nulli della corrispondente linea di T_1. In genera si ha una tavola

$$\begin{array}{l} \hspace{12em} h \\ \hline a_{11} \quad a_{12} \dots a_{1n} \quad 0, \quad 0, \dots \\ a_{21} \quad a_{22} \dots a_{2n} \dots\dots\dots a_{2,n+h}, \quad 0, \quad 0, \dots \\ a_{31} \quad a_{32} \dots a_{3n} \dots\dots\dots a_{3,n+h}, \dots\dots\dots a_{3,n+2h}, \quad 0 \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

del passo $h \lesseqgtr n$, con entrata orizzontale $a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n}, 0, 0,$ verticale $a_{11} = a_{21} = a_{31} = a_{41} = \dots$ risulta:

$$a_{i,j} = \lambda^{(h)}_{i,j,1}\, a_{11} + \lambda^{(h)}_{i,j,2}\, a_{12} + \dots + \lambda^{(h)}_{i,j,n}\, a_{1n}$$

ed in generale

$$\lambda^{(h)}_{i,j,r} = \begin{Bmatrix} i-1 \\ j-r \end{Bmatrix}_h; \qquad r \leqslant n$$

ritenendo al solito $\begin{Bmatrix} i-1 \\ j-r \end{Bmatrix}_h = 1$, se $j-r=0$, e $\begin{Bmatrix} i-1 \\ j-r \end{Bmatrix}_h = 0$, se $j-$

I coefficienti $\lambda^{(h)}_{i,j,r}$ sono dunque numeri di T_h. In particola $h=1$, risulta $\lambda^{(1)}_{i,j,r} = \begin{Bmatrix} i-1 \\ j-r \end{Bmatrix}_1 = \binom{i-1}{j-r}$, epperò:

$$a_{ij} = \binom{i-1}{j-1} a_{11} + \binom{i-1}{j-2} a_{12} + \dots + \binom{i-n}{j-n} a_{1n}.$$

Osserviamo che se nella successione dei primi $n+(i-1)h$ meri della i^{ma} linea di una tavola di passo h, a_{ij} ed a_{ik} sono ter estremi od equidistanti dagli estremi, è: $j+k = n+(i-1)h$ Nelle espressioni di a_{ij} e a_{ik}, le successioni dei coefficienti λ co gono gli stessi numeri ma in ordine inverso, vale a dire:

$$\lambda^{(h)}_{i,j,r} = \lambda^{(h)}_{i,k,n-(r-1)}.$$

Ed invero, avendosi:

$$\lambda^{(h)}_{i,j,r} = \begin{Bmatrix} i-1 \\ j-r \end{Bmatrix}_h; \qquad \lambda^{(h)}_{i,k,n-(r-1)} = \begin{Bmatrix} i-1 \\ k-n+(r+1) \end{Bmatrix}_h$$

risulta

$$\begin{Bmatrix} i-1 \\ j-r \end{Bmatrix}_h = \begin{Bmatrix} i-1 \\ (i-1)h-(j-r) \end{Bmatrix}_h = \begin{Bmatrix} i-1 \\ k-n+(r-1) \end{Bmatrix}_h.$$

Ci occorre ora, prima di passare al caso generale, trattare tavole che hanno l'entrata orizzontale con un primo elemento lunque e coi rimanenti uguali a zero, e la verticale costituit munque. La tavola seguente è del passo $h=2$.