Su alcune tavole di addizione per diagonali di passo 1, dedotte dal quadrato aritmetico di Fermat, ed in particolare su quella dell'esagono aritmetico di Delannoy.

Esponendo la teoria generale delle tavole di addizione (¹) ho chiamato *tavola di addizione per diagonali* uno specchio di numeri ottenuto nel seguente modo. È assegnata una prima linea, detta *entrata orizzontale*, di n numeri $a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n}$, (l'ultimo dei quali diverso da zero) seguiti da zeri in numero illimitato, ed una prima colonna, detta *entrata verticale*, costituita da numeri qualsiansi $a_{11}, a_{21} \dots a_{m1}$. Si completano la 2ª, 3ª,... linea per modo che ciascun elemento (il 1° eccettuato) valga la somma di quello che è alla sua sinistra e di altri h appartenenti alla diagonale $\nearrow$ che si stacca da quest'ultimo, oppure la somma di quello che è alla sua sinistra e di tutti quelli che appartengono alla diagonale $\nearrow$ che si stacca da quest'ultimo, se essi sono in numero minore di h. Il numero positivo, intero, non nullo h si chiama *passo* della tavola. Converremo di indicare che uno specchio di numeri composto di linee e colonne è una tavola per diagonali, scrivendole entro un angolo retto a lati doppi e scrivendo il valore del passo al di sopra del lato orizzontale. (²)

Chiamasi *quadrato aritmetico di Fermat* (³) una tavola per diagonali del passo $h=1$, avente l'entrata orizzontale e la verticale costituite da numeri tutti uguali ad uno. Essa è adunque la seguente:

$$
\overset{h=1}{\begin{array}{||lllllll}
\hline\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 \\
1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & 84 \\
1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & 210 \\
1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 & 462 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}}
=
\overset{h=1}{\begin{array}{||llll}
\hline\hline
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \dots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \dots \\
\vdots & & & \\
\vdots & & & \\
a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} \dots
\end{array}}
$$

Ciascun elemento della 2ª, 3ª,... linea (il 1° eccettuato) si ottiene adunque sommando quello che è alla sua sinistra con quello che gli

---

(¹) Cfr. *Periodico di Matematica*, Fasc. Marzo-Aprile, 1916.

(²) In tal modo è pure precisato che si tratta di tavole di addizione per diagonali, nel citato mio lavoro.

(³) È questo il nome che ha in LUCAS, *Théorie des nombres*, Cap. VII (*Les échiquiers arithmétiques*).

sta sopra. Indicando con a_{ij} l'elemento generico di essa, appar nente alla i^a linea ed alla j^a colonna, si ha: (1)

$$a_{ij} = \binom{i+j-2}{i-1} = \binom{i+j-2}{j-1}.$$

Come è noto il numero a_{ij} esprime in quanti modi si può and da a_{11} ad a_{ij} percorrendo un cammino composto di tratti diretti ternativamente nei sensi $\rightarrow$ e $\downarrow$ oppure $\downarrow$ e $\rightarrow$.

In questa nota mi propongo di far rilevare le proprietà più i portanti di alcune tavole di addizione per diagonali del passo $h =$ che si deducono dal quadrato aritmetico di Fermat. Sono tav interessanti, perchè fanno parte di esse alcune configurazioni nun riche chiamate *triangolo, pentagono, esagono, di Delannoy*, che ne mostrata l'importanza applicandone le proprietà alla risoluzione problemi di aritmetica. Di esse si parla brevemente in Lucas, cit., cap. VII. E propriamente della tavola della quale fa parte l'es gono che intendo trattare, e quanto a quella del pentagono ne par essendo ciò necessario per trattare di quella dell'esagono. Natur mente non sono tanto i poligoni di Delannoy che sono qua studi quanto piuttosto le tavole delle quali essi fanno parte. Quanto l'esagono ed alla tavola della quale esso è parte, la trattazione espongo completa, con aggiunte nuove, il poco che ne è scritto n l'opera del Lucas. Sono recate le opportune correzioni alle formole Lucas, che sono errate, e ne è data l'interpretazione esatta. Al considerazioni riguardano la distribuzione degli zeri, dei term uguali ecc.

***

1. Immaginiamo due quadrati di Fermat sovrapposti e consideria le diagonali identiche spostate rispetto alla principale $\swarrow$ 1, 2, 6, 20 di r posti rispettivamente nei sensi $\rightarrow$ ed $\downarrow$. Una di esse adun è sottostante alla diagonale principale di r posti, l'altra è a des di essa di r posti. Facciamo compiere ad uno dei quadrati una t slazione verso l'alto di r posti, e poi una verso destra ancora d posti. Dopo ciò la diagonale del quadrato mobile, sottostante a principale di r posti, viene a sovrapporsi a quella del fisso, ch spostata rispetto alla principale di r posti verso destra. Toglie allora dai termini del quadrato fisso quelli del quadrato mobile sono venuti loro a sovrapporsi, abbiamo ancora una tavola di ad zione per diagonali del passo $h = 1$, nella quale evidentemente diagonale principale $\searrow$ risulterà composta di zero, poichè ogni t

(1) V. per la dimostrazione la citata teoria generale delle tavole di addizione.

mine di essa è la differenza di due numeri eguali venuti a sovrapporsi. Tale diagonale verrà chiamata *diagonale nulla*. Essa divide la tavola in due regioni, l'una di numeri positivi, l'altra di numeri negativi. La prima, astrazione fatta dagli zeri delle prime r linee, è un *pentagono di Delannoy di lato* r. Quando $r=1$, le suddette diagonali dei due quadrati di Fermat venute a sovrapporsi, sono quelle contigue alla principale; il pentagono suol chiamarsi allora *triangolo di Delannoy*. Riportiamo, poichè ci saranno utili in seguito, le tavole dei pentagoni di lato $r=4$ ed $r=3$.

$\overbrace{\quad\quad}^{r=4}$ $h=1$

$r=4$ (prime 4 linee)

0	0	0	0	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
0	0	0	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	[illegible]
0	0	0	0	−1	−3	−6	−10	−15	−21	−28	−36	−45
0	0	0	0	−1	−4	−10	−20	−35	−56	−84	−120	
1	1	1	1	0	−4	−14	−34	−69	−125	−209		
1	2	3	4	4	0	−14	−48	−117	−242			
1	3	6	10	14	14	0	−48	−48	−117			
1	4	10	20	34	48	48	0	−165	−572			
1	5	15	35	69	117	165	165	0	−572			
1	6	21	56	125	242	407	572	572	0			
1	7	28	84	209	451	858	1330	1902		0		
1	8	36	120	329	780	1638	2968	4870			0	
1	9	45	165	494	1274	1912	4880	9750				0

Tavola del pentagono di lato $r=4$

$\overbrace{\quad\quad}^{r=3}$ $h=1$

$r=3$ (prime 3 linee)

0	0	0	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
0	0	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9	−10	−11	
0	0	0	−1	−3	−6	−10	−15	−21	−28	−36	−45	−55		
1	1	1	0	−3	−9	−19	−34	−55	−83	−119	−164			
1	2	3	3	0	−9	−28	−62	−117	−200	−319				
1	3	6	9	9	0	−28	−90	−297	−407					
1	4	10	19	28	28	0	−90	−297	−704					
1	5	15	34	62	90	90	0	−297	−1001					
1	6	21	55	117	207	297	297	0	−1001					
1	7	28	83	200	407	704	1001	1001	0					
1	8	36	119	319	726	1430	2431	3432		0				
1	9	45	164	428	1209	2639	5070	8502			0			

Tavola del pentagono di lato $r=3$.

Un pentagono di lato r appartiene adunque ad una tavola per diagonali di passo $h=1$, nella quale l'entrata orizzontale contiene r zeri iniziali seguiti da termini tutti uguali a -1, e la verticale contiene r zeri iniziali seguiti da termini tutti uguali ad 1. Perciò tale tavola si può costruire senza ricorrere ad alcun quadrato di Fermat. In essa due termini simmetrici rispetto alla diagonale principale nulla, hanno segno contrario ed ugual valore assoluto. Ogni termine del pentagono è positivo, e rappresenta, come è noto, il numero dei modi coi quali si può dal termine 1 della $(r+1)^a$ lin della prima colonna della tavola arrivare al termine dato con un mino formato da tratti diretti alternativamente nei sensi $\rightarrow$ oppure $\downarrow$ e $\rightarrow$, senza passare per alcun zero della diagonale r

Ciò posto indichiamo con a_{ij} il termine generico del quadra Fermat e con $b_{ij}^{(r)}$ il termine generico della tavola del pentago lato r. Nel suddetto trasporto di un quadrato mobile di Ferm uno fisso, al termine a_{ij} $(j>r)$ di questo viene a sovrapporsi il mine $a_{i+r,\,j-r}$ del mobile, e poichè ai termini delle prime r col del quadrato fisso non è venuto a sovrapporsi alcun termine del bile, le prime r colonne della tavola ottenuta, astrazione fatta da zeri iniziali di ciascuna, sono identiche alle prime r colonne del drato di Fermat. Indicando adunque con $b_{i,j}^{(r)}$ il termine gen delle tavole del pentagono di lato r, avremo:

$$b_{i+r,j}^{(r)}=a_{ij}-a_{i+r,j-r}$$

epperò:

$$b_{i,j}^{(r)}=a_{i-r,j}-a_{i,j-r}$$

quindi per le (1):

$$b_{ij}^{(r)}=\binom{i+j-r-2}{i-r-1}-\binom{i+j-r-2}{i-1}$$

oppure

$$b_{ij}^{(r)}=\binom{i+j-r-2}{j-1}-\binom{i+j-r-2}{j-r-1}$$

oppure

$$b_{ij}^{(r)}=\binom{i+j-r-2}{i-r-1}-\binom{i+j-r-2}{j-r-1}$$

Per $i>r$ ed $j\leqslant i$, si hanno i termini del pentagono propria detto. Esso comprende i termini di ognuna delle linee $(r+1)^a$, $(r+$ dal 1° fino allo zero, incluso, della diagonale nulla.

Risulta evidentemente:

$$b_{ij}^{(r)}=-b_{ji}^{(r)};\quad b_{ij}^{(r)}=0;\qquad b_{ij}^{(r)}=0;\qquad (i,j\leqslant r).$$

Se $r=1$, si ha la tavola del triangolo, ed è:

$$b_{ij}^{(1)}=\binom{i+j-3}{i-2}-\binom{i+j-3}{i-1}=$$

$$=\frac{i-j}{i-1}\binom{i+j-3}{i-2}=\frac{i-j}{i-1}\binom{i+j-3}{j-2}.$$

Per $i>j$ ed $i\geqslant j$ si hanno i termini del triangolo propria detto.

2. Passiamo ora all'interessante tavola della quale è parte gono di Delannoy. Per costrurla si dispongono su una prima li numeri uguali ad 1 seguiti da uno zero, e su una prima colonna s numeri uguali ad uno, pure seguiti da uno zero. Muovendo da tali zeri, si completano con altri zeri le diagonali ↘ che si staccano da essi, e si determinano gli altri termini dell'esagono col solito processo di addizione per diagonali ↗ del passo $h=1$. Com'è noto ognuno dei numeri positivi così ottenuti rappresenta il numero dei modi coi quali del termine 1 della 1ª linea e della 1ª colonna si può arrivare al numero considerato mediante un cammino composto di tratti alternativamente diretti nei sensi → e ↓ oppure ↓ e →, senza passare per alcun zero delle due diagonali nulle. Riportiamo qua la tavola della quale è parte l'esagono di lati → $r=4$ ed ↓ $s=3$. Un esagono è sempre parte di una tavola di addizione per diagonali ↗, del passo $h=1$, nella quale si può osservare:

1° Le diagonali ↘ spostate rispetto alla principale ↘ di $r, 2r+s, 3r+2s, \ldots kr+(k-1)s$ posti verso destra, oppure di $s, 2s+r, 3s+2r, \ldots ks+(k-1)r$ posti verso il basso, sono nulle, cioè contengono soltanto zeri;

2° le regioni della tavola, comprese tra due diagonali nulle consecutive, sono alternativamente positive e negative, ed è positiva quella cui appartengono i termini dell'esagono.

$\underbrace{\qquad\qquad}_{}$ $r=4$ $\qquad$ $h=1$

1	1	1	1	0	−4	−14	−33	−61	−89	−89	0	286	924	2069
1	2	3	4	4	0	−14	−47	−108	−197	−286	−286	0	924	2993
1	3	6	10	14	14	0	−47	−155	−352	−638	−924	−924	0	2993
0	3	9	19	33	47	47	0	−155	−507	−1145				0
−3	0	9	28	61	108	155	155	0	−507					
−9	−9	0	28	89	197	352	507	507	0					
−19	−28	−28	0	89	286	638	1145	1652	1052	0				
−33	−61	−89	−89	0	286	924	2069	3721	5373	5373	0			
−47	−108	−197	−286	−286	0	294	2993	6714						
−47	−155	−352	−638	−924	−924	0	2993	9704						
0	−155	−507	−1145	−2069	−2993	−2993	0							
155	0	−507	−1652											
507	507	0												
1145	1652	1652												

Tavola dell'esagono di lati $r=4$ ed $s=3$

3° ogni diagonale nulla divide la porzione della tavola della quale essa è diagonale principale ↘ in due regioni di segno opposto, e due termini di esse, simmetrici rispetto alla diagonale nulla, hanno valori assoluti uguali; 4° se si considerano i termini dell'esagono compresi

nella striscia ——— le cui porzioni sono alternativamente di
nei sensi $\downarrow$ e $\rightarrow$, e si attribuisce a quelli compresi nelle por
dirette nel senso $\downarrow$ il segno $+$, ed agli altri il segno $-$, si ha
numeri dell'entrata verticale della tavola. Il primo tratto $\downarrow$
striscia comprende $s+1$ numeri, e gli altri ne comprendono $r+$
Del pari i numeri compresi nei tratti $\rightarrow$ e $\downarrow$ della striscia ......
presi col segno $+$ o $-$, secondochè trattasi della direzione $\rightarrow$
formano, nell'ordine in cui si succedono percorrendo la striscia,
trata orizzontale. Il primo tratto $\rightarrow$ della striscia ne comprende
ed i rimanenti ne comprendono $r+s+1$. Segue da quanto è
detto che per costrurre la tavola si può col solito processo este
via via la costruzione dell'esagono e conseguentemente estend
entrate orizzontale e verticale e completare l'intera tavola fino a
data linea e colonna.

Se $c_{ij}^{(r,s)}$ è l'elemento generico della tavola cui appartiene
gono di lati $\rightarrow r$ ed $\downarrow s$, si hanno le formole: (1)

$$c_{ij}^{(r,s)} = \sum_{h\atop \ldots-2-1,0,1,2\ldots} \left[\binom{i+j-2}{j-1 \pm h(r+s)} - \binom{i+j-2}{i-1 \pm h(r+s)+r}\right]$$

$$c_{ij}^{(r,s)} = \sum_{h\atop \ldots-2,-1,0,1,2,\ldots} \left[\binom{i+j-2}{i-1 \pm h(r+s)} - \binom{i+j-2}{j-1 \pm h(r+s)+s}\right]$$

---

(1) Le formole date dal Lucas, loc. cit., per esprimere il valore del termine H_x^y
tenente alla linea $(x+1)^a$ ed alla colonna $(y+1)^a$ dell'esagono di lati $\rightarrow b$ ed $\downarrow$
con b numeri, iniziali uguali ad 1 sulla 1^a linea ed a numeri iniziali uguali ad 1 sulla
lonna, sono:

$$H_x^y = \sum_{h\atop 0,1,2\ldots} (-1)^h \left[C_{x+y}^{x-h(a+b)} - C_{x+y}^{x-h(a+b)-b}\right]$$

$$H_x^y = \sum_{h\atop 0,1,2\ldots} (-1)^h \left[C_{x+y}^{y-h(a+b)} - C_{x+y}^{x-h(a+b)-b}\right]$$

nelle quali la notazione $C_{x+y}^{x-h(a+b)}$ sta per $\binom{x+y}{x-h(a+b)}$, e si conviene che h pos
mere tra i valori $0, 1, 2, \ldots$, quelli per i quali gli indici superiori dei termini chiusi in
siano contemporaneamente negativi. Le formole sono errate, perchè non danno sempre
lore esatto di H_x^y, e restano tali anche se si suppone che h possa assumere valori
interi, oppure se si cambiano gli indici $x-h(a+b)-b$; $y-h(a+b)-b$ in $x-h(a$
$y-h(a+b)+b$ od in $x-h(a+b)\pm a$; $y-h(a+b)\pm a$. Per es. nel caso
$a=3$, che è quello considerato dal Lucas, si ha, come risulta dalla tavola già d
$H_4^6 = 155$ mentre dalla formola risulta:

$$H_4^6 = \sum_{h\atop 0,1,2,\ldots} (-1)^h \left[C_{10}^{4-7h} - C_{10}^{6-7h-4}\right] = \binom{10}{4} - \binom{10}{2} = 165$$

essendo possibile il solo valore 0 di h. E dalla 2^a si avrebbe per $h=0$:

$$H_4^6 = \binom{10}{6} - \binom{10}{0} = 209.$$

Supposto che h possa avere anche valori negativi interi, si ha dalla 1^a per $h=$

$$H_4^6 = \left[\binom{10}{4} - \binom{10}{2}\right] - \left[-\binom{10}{9}\right] = 175.$$

ovvero, per la proprietà $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$ applicata al 2° termine delle differenze:

$$\left.\begin{aligned} c_{ij}^{(r,s)} &= \sum_{\substack{h \\ \ldots -2,-1,0,1,2}} \left[\binom{i+j-2}{j-1 \pm h(r+s)} - \binom{i+j-2}{j-1 \pm h(r+s)-r}\right] \\ c_{ij}^{(r,s)} &= \sum_{\substack{h \\ \ldots -2,-1,0,1,2}} \left[\binom{i-j-2}{i-1 \pm h(r+s)} - \binom{i+j-2}{i-1 \pm h(r+s)-s}\right] \end{aligned}\right\} \quad (3')$$

nelle quali il segno Σ va esteso ai valori positivi o negativi di h per i quali uno almeno dei denominatori dei termini chiusi nella [] del 2° membro non è negativo. Epperò in tutte le formule il segno del termine $h(r+s)$ è dovunque arbitrario.

Per i ed j tali che

$$i - s \leqslant j \leqslant i + r$$

si ha l'espressione dei termini dell'esagono propriamente detto. Esso adunque comprende gli zeri delle due diagonali nulle più vicine alla diagonale ↘ principale della tavola e tutta la porzione di essa compresa tra esse.

Per interpretare il significato di tali formule osserviamo che le ultime due possono scriversi:

$$c_{ij}^{(r,s)} = \sum_{\substack{h \\ \ldots -2,-1,0,1,2}} \left[\binom{[i-h(r+s)+r]+[j+h(r+s)]-r-2}{[j+h(r+s)]-1} - \right.$$
$$\left. - \binom{[i-h(r+s)+r]+[j-h(r+s)-r-2]}{[j+h(r+s)]-r-1}\right]$$

$$c_{ij}^{(r,s)} = \sum_{\substack{h \\ \ldots -2,-1,0,1,2}} \left[\binom{[j-h(r+s)+s]+[i+h(r+s)]-s-2}{[i+h(r+s)]-1} - \right.$$
$$\left. - \binom{[j-h(r+s)+s]+[i+h(r+s)-s-2]}{[i+h(r+s)]-s-1}\right].$$

Sono esatte le seguenti formole:

$$H_x^y = \sum_{\substack{h \\ \ldots -2,-1,0,1,2,\ldots}} \left[C_{x+y}^{x \pm h(a+b)} - C_{x+y}^{y \pm h(a+b)-b}\right]$$

$$H_x^y = \sum_{\substack{h \\ \ldots -2,-1,0,1,2,\ldots}} \left[C_{x+y}^{y \pm h(a+b)} - C_{x+y}^{x \pm h(a+b)+b}\right]$$

$$H_x^y = \sum_{\substack{h \\ \ldots -2,-1,0,1,2,\ldots}} \left[C_{x+y}^{y \pm h(a+b)} - C_{x+y}^{x \pm h(a+b)-a}\right]$$

$$H_x^y = \sum_{\substack{h \\ \ldots -2,-1,0,1,2,\ldots}} \left[C_{x+y}^{x \pm h(a+b)} - C_{x+y}^{y \pm h(a+b)+a}\right]$$

nelle quali h può assumere tra i valori $\ldots -2, -1, 0, 1, \ldots$ quelli per i quali gli indici superiori dei termini chiusi in [] non sono contemporaneamente negativi o maggiori degli inferiori. Il segno di $h(a+b)$ in tali indici superiori è dovunque arbitrario. Di esse la 2ª si deduce dalle 1ª, e la 4ª dalla 3ª, per la proprietà: $C_m^n = C_m^{m-n}$. Per passare dalle notazioni del Lucas alle nostre occorre cambiare x in $x+1$ ed y in $y+1$ e poi $x+1$ in i, $y+1$ in j, b in r, a in s ed H_{x+1}^{y+1} in $c_{ij}^{(r,s)}$.

Nelle formole così scritte le differenze chiuse nelle [ ] dei secor membri si rivelano termini di una tavola relativa ad un pentago di lati r ed s rispettivamente. Ciò si deduce dal loro confronto c la seconda delle (2). Abbiamo pertanto:

$$\left.\begin{aligned} c_{ij}^{(r,s)} &= \sum_{h=\ldots-2,-1,0,1,2,\ldots} b^{(r)}_{i-h(r+s)+r,\, j+h(r+s)} \\ c_{ij}^{(r,s)} &= \sum_{h=\ldots-2,-1,0,1,2,\ldots} b^{(s)}_{j-h(r+s)+s,\, i+h(r+s)} \end{aligned}\right\} .$$

Consideriamo queste formole separatamente. Riguardo alla perchè un termine del 2° membro, corrispondente ad un valore po tivo di h, esista come appartenente alla tavola relativa ad un pent gono di lato r, dev'essere $i - h(r+s) + r > 0$, e perchè esista corrispondenza di un valore negativo di h, dev'essere

$$j - |h| . (r+s) > 0.$$

Adunque per tutti i valori positivi di h che soddisfano alle relazic

$$i - h(r+s) + r > 0 \ ; \qquad j - h(r+s) > 0$$

(computando lo zero, che soddisfa ad ambedue, una sola volta), esi il termine del 2° membro come termine della tavola del pentago di lato r. Se $0, 1, 2, \ldots p$; $1, 2, \ldots q$ sono le due serie di valori di h sc disfacenti alle suddette relazioni, saranno

$$0, 1, 2, \ldots p \ ; \qquad -1, -2 \ldots -q$$

i valori possibili di h riguardo alla 1ª delle (4) e risulterà:

$$\begin{aligned} c_{ij}^{(r,s)} = {} & b^{(r)}_{i-p(r+s)+r,\, j+p(r+s)} + \ldots + b^{(r)}_{i-2(r+s)+r,\, j+2(r-s)} + b^{(r)}_{i-(r+s)+r,\, j+(r+s)} \\ & + b^{(r)}_{i+r,\, j} + b^{(r)}_{i+2(r+s)+r,\, j+(r+s)} + b^{(r)}_{i+2(r+s)+r,\, j+2(r+s)} + \ldots \\ & \ldots + b^{(r)}_{i+q(r+s)+r,\, j+q(r-s)} . \end{aligned}$$

I primi indici delle $b^{(r)}$ sono in progressione aritmetica crescei con ragione $r + s$, ed i secondi in progressione aritmetica decrescei con ragione $r + s$, pertanto: *i termini del 2° membro della* (5) *app tengono alla tavola del pentagono di lato* r, *e si trovano sulla dia nale* $\not/$ *che passa per* $b^{(r)}_{i+r,j}$. *Tra essi c'è* $b^{(r)}_{i+r,j}$ *e gli altri si har percorrendo la diagonale nei due sensi, a partire da* $b^{(r)}_{i+r,j}$, *conta i termini di* (r + s) *in* (r + s) *e prendendo ciascuna volta l'* (r + s)

Un'analoga discussione si può fare per la 2ª delle (7). Se 0, 1, 2, .. sono i valori positivi di h per i quali

$$j - h(r+s) + s > 0$$

e $1, 2, \ldots q'$ quelli per i quali $i - h(r+s) > 0$, saranno

$$0, 1, 2, \ldots p', \qquad -1, -2, \ldots q'$$

i valori possibili di h rapporto alla 2^a delle (4). Risulta adunque:

$$\begin{aligned} c_{ij}^{(r,s)} = {} & b^{(s)}_{j-p'(r+s)+s,\, i+p'(r+s)} + \dots + b^{(s)}_{j-2(r+s)+s,\, i+2(r+s)} + b^{(s)}_{j-(r+s)+s,\, i+(r+s)} + \\ & + b^{(s)}_{j+s,\, i} + b^{(s)}_{j+(r+s)+s,\, i-(r+s)} + b^{(s)}_{j+2(r+s)+s,\, i-2(r+s)} + \dots \\ & \dots + b^{(s)}_{j+q'(r+s)+s,\, i-q'(r+s)} \end{aligned} \qquad (5')$$

cioè: *per avere i termini del* 2^0 *membro delle* (5') *basta nella tavola del pentagono di lato* s *considerare la diagonale* $\swarrow$ *passante per* $b^{(s)}_{j+s,i}$; *tra essi c'è* $b^{(s)}_{j+s,i}$ *e gli altri si ottengono percorrendo la diagonale nei due sensi, muovendo da* $b^{(s)}_{j+s,i}$, *contando i termini di* $(r+s)$ *in* $(r+s)$ *e prendendo ciascuna volta l'* $(r+s)^0$.

3. La legge di distribuzione degli zeri nella tavola di un esagono risulta subito dalla semplice ispezione di essa. Se dividendo i per $r+s$, si ha il quoziente u ed il resto v, talchè $i=(r+s)u+v$, gli zeri della i^a linea occupano i posti

$$(r+v)^0,\quad [(r+v)+(r+s)]^0,\quad [r+v+2(r+s)]^0, \dots$$

e se $r+v>r+s$, cioè se $v>s$, uno zero, il 1^0 della linea, occupa il posto $(v-s)^0$. Del pari se dividendo j per $r+s$ si ha il quoziente u' ed il resto v', sulla j^{ma} colonna i posti

$$(s+v')^0,\quad [(s+v')+(r+s)]^0,\quad [(s+v')+2(r+s)]^0, \dots$$

sono occupati da zeri, e se $s+v'>s+r$, cioè se $v'>r$, uno zero, il primo della colonna, occupa pure il posto $(v'-r)^0$.

La distribuzione degli zeri può essere anche considerata rapporto alle diagonali parallele alla principale $\searrow$; se diciamo 1^a, 2^a... diagonale nulla a destra od a sinistra della principale, la 1^a, 2^a, ... diagonale di zeri a destra od a sinistra di essa, il 1^0 zero della 1^a diagonale nulla a destra è il termine $c^{(r,s)}_{1,r+s}$ della tavola, lo zero λ^0 di essa è il termine $c^{(r,s)}_{\lambda,r+\lambda}$ e lo zero λ^0 della $(k+1)^a$ diagonale nulla destra è il termine $c^{(r,s)}_{\lambda,r+\lambda+k(r+s)}$; del pari lo zero λ^0 della $(k+1)^a$ diagonale nulla sinistra è il termine $c^{(r,s)}_{s+\lambda+k(r+s),\lambda}$.

Per $\lambda=1, 2, 3, \dots$ si hanno tutti gli zeri diagonali della tavola, talchè si può scrivere:

$$\left.\begin{aligned} c^{(r,s)}_{i,i+r+k(r+s)} &= 0 \\ c^{(r,s)}_{j+s+k(r+s),j} &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (6)$$

Tali relazioni risultano anche dalle (3). Consideriamo ad es. la 1^a delle (3), nella quale supporremo di assumere il termine $h(r+s)$ col segno $+$ nel 1^0 termine della differenza chiusa in [ ] e col segno $-$ nel 2^0. Per $j=i+r+k(r+s)$, come appunto si verifica nella 1^a delle (6), la differenza diventa:

$$\binom{2i+r+k(r+s)-2}{i-1+(h+k)(r+s)+r} - \binom{2i+r+k(r+s)-2}{i-1-h(r+s)+r}.$$

Se h_1 è un valore di h per il quale il denominatore del 1° ter della differenza non è negativo, sarà $-(h_1+k)$ un valore di l il quale il denominatore del 2° termine diventa uguale a quello d e se h_1 è un valore per il quale il denominatore del 2° termine 1 negativo, sarà $-h_1-k$ un valore per il quale il denominatore (diventa uguale a quello del 2°; dunque nell'ipotesi

$$j=i+r+k(r+s)$$

il 2° membro della 1ª delle (3) vale zero. Analogamente dicas: 2° membro della 2ª delle (3) (quando, com'è lecito, si assuma h (col segno + nel 1° termine della differenza e col segno — ne esso vale zero se $i=j+s+k(r+s)$, come vuole la 2ª delle (

Occorre però osservare rapporto alle (6) che esse permetto1 ottenere tutti gli zeri diagonali della tavola dell'esagono, ma u esse, p. es. la 1ª, non contiene tutti gli zeri della i^a linea, nè tutti quelli della j^a colonna. La distribuzione degli zeri diagonal linee e colonne è già stata indicata, e può essere fissata dalle zioni:

$$\left.\begin{aligned} c^{(r,s)}{}_{k(r+s)+v,(r+v)+k'(r+s)} &= 0 \\ c^{(r,s)}{}_{(s+v)+k'(r+s),k(r+s)+v} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

per valori positivi interi arbitrari di k, per i valori -1 (quan possibile) e $0, 1, 2, \ldots$ di k', e per $v=1, 2, \ldots (r+s-1)$. P $k(r+s)+v$ può acquistare qualsiasi valore positivo intero, la 1ª relazioni contiene tutti gli zeri distribuiti per linee, e la 2ª li tiene distribuiti per colonne. Invece gli zeri diagonali dati da delle (6) occupano posti diversi da quelli dati dall'altra, percl una il 1° indice è maggiore del 2° e nell'altra è minore.

L'ispezione della tavola dell'esagono mostra anche che se $c_{ij}^{(r,s)}$ si ha:

$$\left.\begin{aligned} c^{(r,s)}{}_{i,j-1} &= c^{(r,s)}{}_{i,j-2}; \qquad c^{(r,s)}{}_{i-1,j} = c^{(r,s)}{}_{i-2,j} \\ c^{(r,s)}{}_{i,j+k} &= -c^{(r,s)}{}_{i+k,j}; \qquad c^{(r,s)}{}_{i-k,j} = -c^{(r,s)}{}_{i,j-k} \end{aligned}\right\} \text{se } c^{(r,s)}{}_{ij}=0$$

Le prime due di tali relazioni fissano per ciascuna linea o col la legge di distribuzione delle coppie di termini uguali; le u due (nella 1ª di esse k è un intero positivo qualunque e nella 2ª u tero positivo tale che $i-k$, $j-k>0$) la legge di distribuzione coppie di termini di egual valore assoluto e di segno opposto.

4. Si trova facilmente l'espressione di tutti i termini uguali o trari di un termine dato $c_{ij}^{(r,s)}$ della tavola, che non sia uno zero gonale.

Si consideri uno dei due indici i, j per es. l'indice i. Se k è il ziente della divisione di i per $(r+s)$ e v il resto, talchè $i=k(r+1$

dalla 1ª delle (7) risulta che i termini che sono zeri diagonali e che hanno per primo indice i sono

$$c^{(r,s)}_{i,r+v+k'(r+s)} \,. \; (k'=0,\,1,\,2,\ldots \text{ ed eventualmente } -1).$$

Supponiamo dapprima che j sia compreso, fra due valori l' ed m' consecutivi di $r+v+k'(r+s)$ e sia ad es. $l'<m'$. Pongasi $j-l'=l$; $m'-j=m$. Allora l ed m esprimono di quanti posti $c_{ij}^{(r,s)}$ dista dagli zeri diagonali più vicini della 1ª linea, talchè i termini

$$c^{(r,s)}_{i-m,\,j+m}\,, \qquad c^{(r,s)}_{i-(m+l),\,j+(m+l)}\,, \qquad c^{(r,s)}_{i-(2m+l),\,j+(2m+l)}\,,$$
$$c^{(r,s)}_{i-(2m+2l),\,j+(2m+2l)}\,, \qquad c^{(r,s)}_{i-(3m+2l),\,j+(3m+2l)} \cdots\cdots$$

sono alternativamente di segno uguale e contrario al dato ed hanno lo stesso valore assoluto di esso. Altrettanto dicasi dei termini

$$c^{(r,s)}_{i+l,\,j-l} \qquad c^{(r,s)}_{i+(l+m),\,j-(l+m)}\,,$$
$$c^{(r,s)}_{i+(2l+m),\,j-(2l+m)}\,, \qquad c^{(r,s)}_{i+(2l-2m),\,j-(2l+2m)} \cdots\cdots$$

Se poi sulla 1ª linea il termine $c_{i,j}^{(r,s)}$ non è compreso tra due zeri consecutivi, ma non ha alcun zero a sinistra e dista di m posti dal 1° zero che è alla sua destra, soltanto la 1ª serie di termini comprende quelli alternativamente uguali e contrari di $c_{ij}^{(r,s)}$. Vedesi ora che la 1ª serie comprende i termini della forma

$$c^{(r,s)}_{i-k(m+l),\,j+k(m+l)}\,; \qquad c^{(r,s)}_{i-k(m+l)-m,\,j+k(m+l)+m}$$

ovvero, poichè $m+l=m'-l'=r+s$

$$c^{(r,s)}_{i-k(r+s),\,j+k(r+s)}\,; \qquad c^{(r,s)}_{i-k(r+s)-m,\,j+k(r+s)+m}$$

e la 2ª quelli della forma

$$c^{(r,s)}_{i+k(r+s),\,j-k(r+s)}\,; \qquad c^{(r,s)}_{i+k(r+s)+l,\,j-k(r+s)-l}$$

k potendo avere valori positivi interi qualunque che non rendano nulli o negativi gli indici. Concludiamo adunque:

$$\left.\begin{aligned} c_{ij}^{(r,s)} &= c^{(r,s)}_{i-k(r+s),\,j+k(r+s)} &&= c^{r,s}_{i+k(r+s),\,j-k(r+s)} \\ -\,c_{ij}^{(r,s)} &= c^{(r,s)}_{i-k(r+s)-m,\,j+k(r+s)+m} &&= c_{i+k(r+s)+l,\,j-k(r+s)-l} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

k essendo intero positivo qualunque che non rende negativi o nulli gli indici. Osserviamo infine che se $c_{ij}^{(r,s)}$ è termine di una delle coppie di termini uguali comprese nelle prime due delle (8), allora per avere i termini uguali o contrari di esso, bisogna applicare le (7) non solo a $C_{ij}^{(r,s)}$ ma anche al suo uguale e contiguo sulla stessa linea o colonna.

N. Traverso.

DIMOSTRAZIONE ANALITICA

di alcune proposizioni sulla circonferenza d'Eulero

Nel triangolo, i piedi delle altezze, i punti medi dei lati ed i pun medi dei segmenti che uniscono i tre vertici all'ortocentro appartengon alla stessa circonferenza, il cui centro è il punto medio del segmento ci unisce l'ortocentro al centro della circonferenza circoscritta ed il cui ragg e metà del raggio di questa; teorema ben noto.

Sia AA_1A_2 il triangolo, P, P_1, P_2 i piedi delle altezze, H l'ort centro, O il centro della circonferenza circoscritta, M, M_1, M_2 i pun medi dei segmenti determinati dall'ortocentro e dai vertici.

Il lato A_2A_1, sia asse delle x, e l'altezza AP l'asse y: sia

$$A_2P = m, \qquad A_1P = n$$

ed h l'altezza.

Determiniamo dapprima l'equazione della circonferenza dei pun P, M, M_2; mostreremo che essa è pur verificata dalle coordinate d punti M_1 e D,

L'equazione generale della circonferenza è

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0. \qquad ($$

I parametri A, B, C son determinati, in questo caso, dalla co dizione che la circonferenza passi pei tre punti

$$P \equiv (0,0) \ ; \quad M \equiv \left(\frac{n-m}{2}, 0\right) M_2 \equiv \left(\frac{n}{2}, \frac{h}{2}\right).$$

Abbiamo così le tre equazioni lineari

$$C = 0, \qquad ($$

$$\left(\frac{n-m}{2}\right)^2 + 2A \left(\frac{n-m}{2}\right) + C = 0, \qquad ($$

$$\frac{n^2}{4} + \frac{h^2}{4} + 2A \,.\, \frac{n}{2} + 2B \,.\, \frac{h}{2} + C = 0. \qquad ($$

Si ricava:

$$2A = -\left(\frac{n-m}{2}\right), \qquad 2B = -\frac{1}{2}\left(h + \frac{m \,.\, n}{h}\right). \qquad ($$

Portando questi valori in (1) trovasi per equazione della circonferenza che passa pei punti in parola,

$$x^2+y^2-\left(\frac{n-m}{2}\right)x-\frac{1}{2}\left(h+\frac{mn}{2}\right)y,$$

oppure,

$$2x^2+2y^2-(n-m)x-\frac{h^2+mn}{h}y=0. \qquad (6)$$

Si vede che le coordinate di $M_1\left(x=-\frac{m}{2}, y=\frac{h}{2}\right)$ soddisfano a quest'equazione. Infatti, sostituendo $\frac{m}{2}$ al posto di x e $\frac{h}{2}$ al posto di y si ottiene

$$\frac{2m^2}{4}+\frac{2h^2}{4}+(n-m)\frac{m}{2}-\left(h+\frac{mn}{h}\right)\frac{h}{2}=0,$$

e riducendo,

$$0=0.$$

Ricerchiamo i valori delle coordinate di D; esse verificano la (6). Il punto D è medio di AH e quindi, PD, ordinata di D è eguale a $\frac{AP+HP}{2}$, cioè alla semisomma delle ordinate di A ed H.

Ma è $AP=h$, e HP, è l'ordinata all'origine della P_1A_1; per cui, essendo

$$y=\frac{h}{m}x+h$$

l'equazione di A_2A, e quella di A_1P_1, che è perpendicolare ad A_2A e passa per $A_1\equiv(n, 0)$, è

$$y=-\frac{m}{h}(x-n),$$

e ponendo $x=0$, trovasi per ordinata all'origine di PH, il valore

$$y=\frac{mn}{h}.$$

Le coordinate di D sono dunque

$$x=0, \qquad y=\frac{mn+h^2}{2h}.$$

Se questi valori si sostituiscono nella (6), l'equazione si riduce ad un'identità, ciò che prova che D appartiene alla circonferenza (6).

Assumendo per asse delle x la P_2A e per asse delle y la perpendicolare P_1A_1, si vedrà nel modo stesso che la circonferenza che passa per P_1, M_1, passa pure per M_2 e D_1 e che quindi si identifica colla circonferenza precedente.

Così pure, assumendo quali assi coordinati il lato A_1A e l
tezza A_2P_2, si vedrà che la circonferenza P_2M_2M passa pur essa pe
e D_2 per cui s'identifica colle due altre. Dunque i nove punti P, M
P_1, M_1, D_1, M_2, P_2, D_2 sono sulla stessa circonferenza.

Se x_n, y_n, sono le coordinate del centro N della circonfere
predetta, è

$$4x_n-(n-m)=0,$$

$$4y_n-\left(h+\frac{mn}{h}\right)=0,$$

dalle quali,

$$x_n=\frac{1}{4}(n-m), \qquad y_n=\frac{1}{4}\left(h+\frac{mn}{h}\right).$$

Questi valori rappresentano pure le coordinate del punto medic
segmento che unisce l'ortocentro al centro della circonferenza
coscritta. Infatti, dall'equazione (1) di una circonferenza si de
quella del circolo circoscritto ad AA_1A_2 scrivendo che le coordi
dei vertici $A\equiv(0, h)$; $A_1\equiv(n, 0)$; $A_2\equiv(-m, 0)$ soddisfano all'e
zione (1): ciò che conduce a tre equazioni di condizione,

$$h^2+2Bh+C=0, \quad n^2+2An+C=0; \quad m^2-2Am+C=0.$$

Risolvendo si hanno i valori dei coefficienti indeterminati A, I

$$2A=-(n-m); \qquad 2B=-\left(\frac{h^2-mn}{h}\right), \qquad C=-mn.$$

L'equazione della circonferenza circoscritta diventa dunque,

$$x^2+y^2-(n-m)x-\left(\frac{h^2-mn}{h}\right)y-mn=0,$$

e le coordinate del centro O sono per conseguenza:

$$X_0=\frac{n-m}{2}; \qquad Y_0=\frac{h^2-mn}{2h}.$$

L'ascissa del punto medio di HO è così $\frac{1}{4}(n-m)$, eguale a q
di N, e l'ordinata del punto medio di HO è $\frac{1}{2}(PH+MO)$. Or

$$PH=\frac{mn}{h}, \qquad MO=Y_0=\frac{h^2-mn}{2h},$$

e dunque l'ordinata del punto medio di HO è

$$\frac{mn}{2h}+\frac{h^2-mn}{4h}, \qquad \text{cioè}, \qquad \frac{h^2+mn}{4h}.$$

Essa non differisce da quella di N, per cui si deduce che questo centro coincide col punto medio di HO.

Il raggio $OA_1 = R$ di (O) è dato dalla relazione

$$\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 + \left(\frac{h^2 - mn}{2h}\right)^2 = R^2,$$

e dopo riduzione,

$$R^2 = \frac{h^4 + (m^2 + n^2)h^2 + m^2n^2}{4h^2}. \tag{10}$$

Il raggio $PN = R'$ di (N) è dato da

$$\overline{PN}^2 = R'^2 = \left(\frac{n-m}{4}\right)^2 + \left(\frac{h^2 - mn}{4h}\right)^2,$$

cioè, sviluppando

$$R'^2 = \frac{(n^2 + m^2)h^2 + h^4 + m^2n^2}{16h^2}. \tag{11}$$

Dalle (10) e (11) si ottiene facilmente,

$$\frac{R'^2}{R^2} = \frac{1}{4}, \qquad \text{cioè} \qquad R' = \frac{1}{2}R.$$

La proposizione è dunque dimostrata.

Osservazione. — Il teorema si estende facilmente al tetraedro ortico, cioè al tetraedro le cui altezze passano per uno stesso punto.

1°. In un tetraedro ortico i punti medi degli spigoli, ed i piedi delle più corte distanze degli spigoli opposti son dodici punti di una stessa sfera il cui centro è il baricentro del tetraedro.

2°. Nel tetraedro ortico i baricentri delle facce, i punti posti ai $\frac{2}{3}$ dei segmenti che uniscono ciascun vertice al punto di concorso delle altezze ed i piedi delle quattro altezze sono dodici punti di una sfera. Il centro di essa è il punto medio del segmento che unisce il punto comune delle altezze col punto di concorso delle perpendicolari in ciascuna faccia nel baricentro. Il raggio è la terza parte del raggio della sfera circoscritta al tetraedro.

Si hanno così due sfere di dodici punti.

Nello stesso sistema di assi coordinati sia $V(\alpha, \beta)$ un punto della circonferenza circoscritta: l'equazione (9) dovendo esser soddisfatta da $x = \alpha$, $y = \beta$, otteniamo una prima relazione fra α e β:

$$\alpha^2 + \beta^2 - (n-m)\alpha - \left(\frac{h^2 - nm}{h}\right)\beta - mn = 0. \tag{1'}$$

Abbiamo già visto che le coordinate di H sono $x = 0$, $y = \frac{mn}{h}$; quelle del punto medio Q di HV sono quindi,

$$x_Q = \frac{\alpha}{2}, \qquad y_Q = \frac{mn}{2h} + \frac{\beta}{2} = \frac{mn + h\beta}{2h},$$

dalle quali,

$$\alpha = 2x_q, \qquad \beta = \frac{2hy_q - mn}{h}.$$

Sostituendo nella (1') e ponendo in luogo delle coordinate x_q le coordinate correnti x e y, otteniamo:

$$4x^2 + \left(\frac{2hy - mn}{h}\right)^2 - 2(n-m)x - \left(\frac{h^2 - mn}{h}\right)\left(\frac{2yh - mn}{h}\right) - mn =$$

Sviluppando e riducendo abbiamo infine:

$$2x^2 - 2y^2 - (n-m)x - \left(\frac{h^2 + mn}{h}\right) y = 0,$$

che è ancora l'equazione (6) della circonferenza di EULERO.

Mostreremo ancora che *la circonferenza di* EULERO *del triang il luogo geometrico dei centri delle iperboli equilatere ad esso c scritte.*

Il sistema d'assi coordinati sia sempre lo stesso: affinchè l'e zione di 2° grado

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

rappresenti un'iperbole equilatera è necessario che sia $A = -$

L'equazione è dunque della forma

$$Ax^2 + 2Bxy + 2Dx - Ay^2 + 2Ey + F = 0,$$

e dividendo per A

$$x^2 + \frac{2B}{A}xy + \frac{2D}{A}x - y^2 + \frac{2E}{A}y + \frac{F}{A} = 0,$$

e ponendo

$$\frac{B}{A} = M, \qquad \frac{D}{A} = N, \qquad \frac{E}{A} = P, \qquad \frac{F}{A} = Q,$$

quest'equazione diventa,

$$x^2 + 2Mxy - y^2 + 2Nx + 2Py + Q = 0.$$

Poichè l'iperbole deve passare pei vertici

$$A_2 \equiv (-m, 0); \qquad A_1 \equiv (n, 0); \qquad A_3 \equiv (0, h),$$

di AA_1A_2, l'equazione di essa (a) deve essere soddisfatta dalle dinate di questi punti; si hanno perciò le tre equazioni di condiz

$$m^2 - 2Nm + Q = 0; \quad n^2 + 2Nn + Q = 0; \quad -h^2 + 2Ph + Q =$$

Ricavasi da queste,

$$2N = -(n-m), \qquad Q = -mn, \qquad 2P = \frac{h^2 + mn}{h},$$

e sostituendo in (a),

$$x^2 + 2Mxy - y^2 - (n-m)\,x + \left(\frac{h^2+mn}{h}\right) y - mn = 0. \qquad (b)$$

Le coordinate x_1, y_1 dei centri di questa famiglia d'iperboli son date dalle equazioni,

$$2x_1 + 2My_1 - (n-m) = 0,$$
$$-2y_1 + \frac{h^2+mn}{h} + 2Mx_1 = 0,$$

e fra queste eliminando M e sostituendo a x_1 e y_1 le coordinate correnti x, y otteniamo per equazione del luogo,

$$2x^2 + 2y^2 - (n-m)\,x - \left(\frac{h^2+mn}{h}\right) y = 0,$$

che è l'equazione della circonferenza di Eulero già vista.

Osservazione. — L'equazione (b) delle iperboli equilatere circoscritte al triangolo è soddisfatta dalle coordinate dell'ortocentro, $x=0$, $y=\frac{mn}{h}$; dunque *queste curve passano per l'ortocentro del triangolo*.

I vertici d'un quadrilatero qualunque presi tre a tre determinano quattro triangoli; le loro circonferenze di Eulero passano per uno stesso punto.

Basta infatti notare che se l'iperbole s'immagina circoscritta al quadrilatero, è circoscritta ad ognuno di quattro triangoli e per conseguenza del teorema più su dimostrato, il suo centro deve appartenere a ciascuna delle circonferenze di Eulero dei quattro triangoli.

Se AA_1A_2 è rettangolo, m è nullo, e la (b) diventa:

$$x^2 + 2Mxy - y^2 - nx + hx + hy = 0.$$

I coefficienti angolari delle tangenti a queste curve son dati dalla relazione:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n - 2x - 2My}{h - 2y + 2Mx}.$$

Facendo $x=0$, $y=0$ si trovano i coefficienti angolari delle tangenti condotte a queste curve del vertice dell'angolo retto. Il loro valore $\frac{n}{h}$ è costante.

Se d'altra parte si nota che l'equazione dell'ipotenusa del triangolo rettangolo è

$$y = -\frac{h}{n}\,x + h,$$

se ne conclude che:

tutte le iperboli equilatere circoscritte ad un triangolo rettangolo h una tangente comune che passa pel vertice dell'angolo retto;
che questa tangente è perpendicolare all'ipotenusa.

Se nel triangolo AA_1A_2 un angolo ed il lato opposto sono cost il luogo geometrico del centro *della circonferenza d'*EULERO *è ı lisse il cui centro è nel vertice dell'angolo fisso.*

Sia il vertice di quest'angolo l'origine delle coordinate; un lati dell'angolo costante $A\widehat{A_2}A_1 = \theta$, l'asse delle x e la perpen lare su questo lato l'asse delle y. Siano m ed h le coordinate riabili di A, n la distanza variabile di A_1 da P, piede dell'al condotta da A. Poniamo $AA_1 = a''$.

L'equazione della circonferenza d'EULERO riferita agli assi or nali PX e PA, è,

$$2x^2 + 2y^2 - (n - m)x - \left(\frac{h^2 + mn}{h}\right) y = 0.$$

Per riferire quest'equazione agli assi prescelti basta sost nell'equazione precedente $x - m$ ad x: sviluppando e riducend biamo,

$$2x^2 + 2y^2 - (n + 3m)x - \left(\frac{h^2 + mn}{h}\right) y + m(n + m) = 0.$$

Siano x_n e y_n le coordinate del centro di questa circonfere loro valori son dati dalle relazioni

$$4x_n - (n + 3m) = 0,$$

$$4y_n - \left(\frac{h^2 + mn}{h}\right) = 0.$$

Per ottenere l'equazione del luogo basta eliminare i para variabili, n, m, h fra le (a_2) e (b_2) e le relazioni

$$a''^2 = n^2 + h^2,$$
$$h = m \operatorname{tg} \theta.$$

Dalla prima abbiamo

$$n = 4x_n - 3m;$$

dalla seconda combinata con (b'_2),

$$n = 4y_n \operatorname{tg}\theta - m \operatorname{tg}^2\theta;$$

confrontando i due valori di n, si ha

$$4x_n - 3m = 4y_n \operatorname{tg}\theta - m \operatorname{tg}^2\theta,$$

e quindi

$$m = \frac{4\cos\theta\,(y_n \operatorname{sen}\theta - x_n \cos\theta)}{1 - 4\cos^2\theta}.$$

Sostituendo questo valore in (b'_3) abbiamo,

$$h = \frac{4 \operatorname{sen} \theta \, (y_n \operatorname{sen} \theta - x_n \cos \theta)}{1 - 4 \cos^2 \theta}.$$

La relazione $n = 4x_n - 3m$, diventa, tenendo conto del valore di m,

$$n = 4x_n - \frac{12 \cos \theta \, (y_n \operatorname{sen} \theta - x_n \cos \theta)}{1 - 4 \cos^2 \theta},$$

e dopo riduzione,

$$n = \frac{4 \operatorname{sen} \theta \, (x_n \operatorname{sen} \theta - 3 y_n \cos \theta)}{1 - 4 \cos^2 \theta}.$$

Sostitituendo i valori di m, n ed h in (a'_2), si ha l'equazione del luogo cercato. Sostituendo ad x_n e y_n le coordinate correnti x e y si ottiene, a riduzioni fatte,

$$x^2 + y^2 (1 + 8 \cos^2 \theta) - 8xy \operatorname{sen} \theta \cos \theta = \frac{a''^2 (1 - 4 \cos^2 \theta)^2}{16 \operatorname{sen}^2 \theta}. \qquad (c)$$

Il luogo cercato è dunque una conica, e poichè mancano i termini di primo grado, ha per centro l'origine A_2 delle coordinate.

Assumiamo come assi coordinati la bisettrice di θ e quella del suo supplemento: passeremo dall'uno all'altro sistema sostituendo in (c) ad x e y i valori,

$$x = x_1 \cos \frac{\theta}{2} - y_1 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}; \qquad y = x_1 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + y_1 \cos \frac{\theta}{2},$$

Facendo le opportune riduzioni si trova che l'equazione del luogo considerato rispetto ai nuovi assi è

$$(1 - 2 \cos \theta)^2 x^2 + (1 + 2 \cos \theta)^2 y^2 = \frac{a''^2 (1 - 4 \cos^2 \theta)^2}{16 \operatorname{sen}^2 \theta},$$

oppure,

$$\frac{x^2}{(1 + 2 \cos \theta)^2} + \frac{y^2}{(1 - 2 \cos \theta)^2} = \frac{a''^2}{16 \operatorname{sen}^2 \theta}. \qquad (d)$$

Il 2° membro di quest'eguaglianza equivale al valore del quadrato della metà del raggio R *della circonferenza circoscritta* AA_1A_2.

Infatti, se a, a', a'' sono i tre lati, si può esprimere la sua area S colle relazioni

$$S = \frac{aa'a''}{4R}, \qquad e \qquad S = \frac{aa'}{2} \operatorname{sen} \theta$$

dalle quali,

$$\frac{a''}{4R} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{2}, \qquad o \qquad R = \frac{a''}{2 \operatorname{sen} \theta},$$

ed anche

$$\frac{R^2}{4} = \frac{a''^2}{16 \operatorname{sen}^2 \theta}.$$

La (d), semplificata, diventa

$$\frac{4x^2}{(1 + 2 \cos \theta)^2} + \frac{4y^2}{(1 - 2 \cos \theta)^2} = R^2. \qquad (e)$$

Essa è l'equazione di un'ellisse che ha per centro l'origine de assi, diretti secondo le bisettrici dell'angolo considerato e del supplemento. Le lunghezze degli assi di questa ellisse sono dunq

$$R(1+2\cos\theta) \quad \text{e} \quad R(1-2\cos\theta).$$

OSSERVAZIONE 1ª. — Qualunque sia la posizione del lato mobile A la circonferenza circoscritta ad AA_1A_2 passa pel vertice fisso A_2, il suo raggio, che dipende solo da a'' e da θ, ha lunghezza costan Segue da ciò che il centro O di questa circonferenza descrive circonferenza che ha A_2 per centro, vertice dell'angolo θ, ed il raggio è

$$R = \frac{a''}{2 \operatorname{sen} \theta}.$$

Se si fa la figura si vede che è

$$A_2O = R, \qquad A_2H = 2R\cos\theta$$

dalle quali,

$$A_2O + A_2H = R(1+2\cos\theta)$$
$$A_2O - A_2H = R(1-2\cos\theta),$$

che mostrano che l'asse maggiore dell'ellisse rappresentata da (eguale alla somma delle distanze A_2H, A_2O, e che l'asse minor eguale alla differenza di queste lunghezze.

OSSERVAZIONE 2ª. — Per $\theta = 90°$ la (e) si riduce all'altra

$$x^2 + y^2 = \frac{a''^2}{16} = \frac{R^2}{4}.$$

Il luogo geometrico è allora una circonferenza circoscritta. Per $\theta = 60°$ e $120°$, è

$$\cos\theta = \frac{1}{2}, \quad \text{oppure} \quad \cos\theta = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

L'equazione (c) assume allora la forma,

$$x^2 + 3y^2 \mp 2xy\sqrt{3} = 0,$$

ossia,

$$(x \mp y\sqrt{3})^2 = 0.$$

Il luogo si riduce allora ad una retta doppia $(x \mp y\sqrt{3})^2 = 0$, la bisettrice dell'angolo θ o del suo supplemento.

C. ALLASI

LUNGHEZZE, AREE, VOLUMI [*]

di SEBASTIANO CATANIA

Il prof. C. Burali-Forti in (1) dà dei numeri reali una definizione nominale e nei suoi successivi lavori (2) (3) dà definizioni nominali di enti che prima si definivano per astrazione o per classi. In (1) i numeri reali, Q_0, sono definiti, per dir così, in blocco, e i numeri interi, N_0, e i razionali, R_0, sono definiti come speciali classi di Q_0.

Se u è una classe, $+$ è un'operazione per gli u, si dice che u è una " Grand $+$ ", o che " gli u formano una classe di grandezze omogenea rispetto all'operazione $+$ ", se per la classe u e per l'operazione $+$ sono verificate le seguenti I-IX condizioni (**), nelle quali x, y, z, sono u qualunque:

I. Dall'essere $x+z=y+z$ segua, qualunque siano x, y, z, che $x=y$.

II. Esista in u almeno un elemento nullo.

III. Esista in u almeno un elemento non nullo.

IV. La somma d'un u non nullo con un u qualunque non sia nulla.

V. Qualunque siano x, y, z si abbia sempre:

$$(x+y)+z=x+(y+z).$$

VI. Qualunque siano x ed y, si abbia sempre $x+y=y+x$.

VII. Qualunque siano x ed y, si abbia sempre

$$\text{o} \quad x=y, \quad \text{o} \quad x>y, \quad \text{o} \quad x<y.$$

VIII. Dato un u non nullo arbitrario, esista almeno un u non nullo minore di esso.

(*) Saranno citati i seguenti lavori:

(1) C. BURALI-FORTI, *I numeri reali definiti come operatori per le grandezze*, Lincei, 1915.

(2) C. BURALI-FORTI, *Nuove applicazioni degli operatori*, R. Acc. Torino, 1915.

(3) C. BURALI-FORTI, *Sulla definizione di coppie, terne, ecc.*, Lincei, 1916.

(4) C. BURALI-FORTI, *Gli enti astratti definiti come enti relativi a un campo di nozioni*, Lincei, 1912.

(5) S. CATANIA, *Grandezze e numeri*, Catania, N. Giannotta, 1915.

(6) S. CATANIA, *Sulle condizioni che determinano una classe di grandezze*, R. Accademia di Torino, 1915.

(7) S. CATANIA, *Sul concetto di definizione e di eguaglianza*, Bollettino della *Mathesis*, agosto 1916.

(**) *Condizioni e non postulati*. È bene che si insista, contrariamente a quanto ancora qualcuno afferma, che le I-IX costituiscono una definizione nominale, e non per postulati, di Grand $+$. C. BURALI-FORTI, *Sulla teoria generale della grandezza e dei numeri*, R. Acc. Scienze di Torino, 1914, (1), (2). Cadono così tutte le osservazioni fatte in contrario dal COUTURAT in *Les principes des Mathématiques*.

IX. Se v è una classe limitata di u, esista almeno un u, e si
tale che $\theta x = \theta v$, cioè esista almeno un limite superiore della class

Di queste condizioni in ([6]) è dimostrata l'indipendenza assol

La classe Q_0 è definita nel seguente modo:

" Sia u una Grand $+$. Si chiama *numero reale*, o *quantità*, per relativa alla classe u di grandezze, e si indica con Q_0, la class operatori per gli u che gode delle seguenti proprietà:

A. Se a e b sono u, a non nullo, esista un Q_0, α, ed un solo, che, qualunque siano a, b, α, si abbia $\alpha a = b$.

B. Se α è un Q_0, a e b sono u, si abbia, qualunque siano α,

$$\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b.$$

C. Se α è un Q_0, ed esiste un u non nullo, x, tale che αx
per qualunque altro u non nullo, a, si abbia

$$\alpha a = a.$$

D. Se α, β, γ sono Q_0, ed esiste un u non nullo, x, tale $\gamma x = \alpha x + \beta x$, per un altro u non nullo, a, si abbia $\gamma a = \alpha a + \beta$

Della classe Q_0 è dimostrata l'esistenza assoluta mediante stenza di Grand $+$.

In ([5]) l'argomento è ampiamente sviluppato e reso di imme applicazione per le scuole di secondo grado.

In ([3]) ([8]) sono definiti nominalmente *lunghezza, area, volun* Burali-Forti si limita alle definizioni. lo che con amore ho se l'opera dell'Autore, mi son proposto, con questa Nota, di svilup i particolari dimostrando l'esistenza di lunghezze, aree, volumi e ciascuna classe di tali enti è una Grand $+$.

Lo studio, che, dopo compiuto, appare assai semplice, è ri invece assai laborioso, non avendosi per le nostre scuole un di Geometria che direttamente rispondesse al mio scopo.

In un pregevole libro di Geometria elementare si cerca di delle *condizioni* per definire una *classe di grandezze*. Non si dà definizione di *grandezza*, ma dalle poste condizioni risulta che " menti, gli angoli ... sono grandezze ". È detto che " i segment archi circolari di qualsiasi raggio, considerati tutti insieme, s sono anche ascrivere a *un'unica specie di grandezze*, che diconsi *dezze lineari*, o *lunghezze* ". Più avanti è detto che " se A e I segmenti, e $A = \frac{m}{n} B$, il numero razionale $\frac{m}{n}$ si dice *misura* rispetto a B ". E più avanti ancora: " Come unità dei segm può scegliere un segmento arbitrario; esso dicesi *unità* di lungh Ora anche nel linguaggio comune la lunghezza d'un segme riguarda come cosa *diversa* dal segmento stesso, e comunque il superiore ragionamento, non balzerà mai fuori il concetto *ghezza*. Considerazioni analoghe per aree e volumi.

Siccome in modo presso che analogo procedono le cose in tutti i libri di testo, almeno in quelli che ho consultato, è da concludere che **non sono** definizioni di lunghezza, area, volume quelle che di tali enti si dànno nei libri di testo. Che così sia risulta anche dal fatto che i Matematici hanno cercato altre definizioni di quegli enti, e sono venute fuori definizioni per astrazione e per classi, le quali in (1) (2) (3) e in altri lavori sono state sottoposte a una severa critica.

Anche ai più restii apparirà ora l'incontestabile valore scientifico e *didattico* dei lavori del Burali-Forti il quale, in (2) e (3) affronta e risolve tutte le questioni di esistenza e di pluralità di specie logica (*), ed apparirà pure giustificato in me il proposito di diffonderli portandovi qualche personale contributo (5) (6) (7). Si tenga presente che un testo scolastico che tratti a un tempo, e in modo rigoroso e semplice, " Grandezze e Numeri „ non esiste, e che ora potrebbe compilarsi. Già l'opera esiste, perchè in (5) è indicato come il detto opuscolo può accordarsi con i miei libri di Aritmetica razionale ed Algebra elementare. Basterebbe che, per ragioni didattiche, alcune dimostrazioni non si dessero nella scuola per avere una esposizione logica, chiara, semplice di " Grandezze e numeri „, conseguendo il *massimo risultato* con *minimi mezzi*, cioè seguendo la *legge fisica* della *minima azione* che nel campo didattico è quasi sempre del tutto trascurata (**).

In altra nota mi propongo la determinazione effettiva delle lunghezze, delle aree e dei volumi delle figure che si considerano in Geometria elementare.

§ I. — Lunghezze.

1. Se a è un segmento, chiameremo " lunghezza di a „, abbreviato in lung a, quell'operatore tra *punti* e *classi di punti* tale che, qualunque sia il punto x, si ha che (lung a) x è la classe dei punti tali che se m è uno di essi, il segmento a è sovrapponibile al segmento di estremi x ed m.

Qualunque sia il testo di Geometria seguito nella scuola, si ammette, qui, che si abbia il concetto di *segmento* (rettilineo) considerato come classe di punti, e di segmenti *eguali* nel senso geometrico.

L'eguaglianza (geometrica) nei vari libri di testo non è definita allo stesso modo, ma per i segmenti si riduce sempre alla loro sovrapponibilità mediante il movimento, concepito, questo, come movimento fisico o come speciale trasformazione univoca di punti in

(*) Cfr. la Nota al n. 4, § I.

(**) Cfr. T. Boggio, *Bollettino di Bibliografia e Storia delle scienze matematiche* di G. Loria, fasc. IV, 1915.

punti. Indicheremo con il segno $\equiv$ la sovrapponibilità, o eguaglia comunque stabilita, dei segmenti.

2. Se a è un segmento, lung a è un operatore esistente, univ mente determinato da a.

Infatti, dai postulati ammessi nel testo risulta che esistono i merevoli segmenti. Se a è uno di essi, ed x un punto qualunque stono infiniti punti (quelli della superficie sferica di centro x e gio a) tali che se m è uno di essi, il segmento a è sovrapponib segmento di estremi x ed m. Così (lung a) x è una classe esist di punti, univocamente determinata da a ed x, e quindi lung a è tore esistente, univocamente determinato da a, e che applicato punto qualunque dà una determinata classe di punti.

Come si è osservato, (lung a) x è la superficie sferica di cen e raggio a (*).

3. Se a e b sono segmenti, è lung a = lung b solamente qu $a \equiv b$.

a) Sia lung a = lung b. Allora, se x è un punto qualunque, si avere:

$$(\text{lung } a)\, x = (\text{lung } b)\, x.$$

Ora (n. 2) (lung a)x è la superficie sferica di centro x e ragg e (lung b)x è la superficie sferica di centro x e raggio b. Quest superficie sferiche (classi di punti) coincidendo, avranno i ragg vrapponibili, cioè $a \equiv b$.

b) Se viceversa, $a \equiv b$, le due superficie sferiche (n. 2) (lun e (lung b)x coincidono, cioè (lung a) x = (lung b)x.

Da a) e b) si ha la tesi (**).

4. Si chiama *lunghezza* la classe degli enti (operatori) tali che è uno di essi, non importa quale, esiste almeno un segmento quindi infiniti, tutti sovrapponibili ad a (n. 3) tale che α = lu

Dai numeri 1 e 2 segue che *lunghezza* è classe esistente. Dal poi, come risulta dal testo di Geometria, che esistono innume segmenti tutti distinti fra loro, consegue che detta classe con quanti si vogliano elementi.

Risulta pure che il concetto dato di lunghezza conduce, anzi vale, al *comune* concetto di lunghezza, in virtù del quale due menti hanno eguali (identiche) lunghezze solamente quando sovrapponibili (***).

(*) Sotto forma diversa è il concetto di *sfera* dato dal Pieri nella sua celebre Memori Geometria elementare istituita sulle nozioni di *punto* e *sfera* „. *Memorie della Società italia Scienze (detta dei XL).*

(**) Per il metodo di dimostrazione qui adoperato si possono consultare ad es., i lavori (

Se f e g sono operatori, $f = g$ solamente quando, essendo x un elemento qualun $fx = gx$.

(***) In ([a]) sono date altre definizioni di *lunghezza*. È detto: " È l'intuizione, guida bisogni scientifici e pratici d'un dato ramo di scienza, che ci conduce a considerare un classe della quale diamo il *nome* U (come *numero, vettore, lunghezza*, ecc.) e, ciò che pi

5. Se α e β sono lunghezze, si chiama "somma di α con β", e si indica con $\alpha+\beta$, quella lunghezza γ tale che se a, b sono segmenti tali (n. 4) che $\alpha = \text{lung}\, a$, $\beta = \text{lung}\, b$, allora $\gamma = \text{lung}\, c$, dove c è uno qualunque dei segmenti che è decomposto da un suo punto in due segmenti sovrapponibili, rispettivamente, ad a e b.

6. Se α, β sono lunghezze, $\alpha+\beta$ è una lunghezza determinata ed unica.

Infatti qualunque sia il testo usato nella scuola, si dimostra che dati due segmenti a e b è sempre possibile, e infinite maniere, prendere i punti A, B, C in modo che B giaccia nel segmento AC, e che i segmenti AB, BC siano sovrapponibili rispettivamente ad a e b. Tutti i segmenti AC sono sovrapponibili fra loro, se anche a e b si sostituiscano con altri segmenti ad essi rispettivamente sovrapponibili. E allora, se (n. 4) a e b sono tali che $\alpha = \text{lung}\, a$, $\beta = \text{lung}\, b$, sarà (n. 5) $\alpha+\beta = \text{lung AC}$, cioè $\alpha+\beta$ è lunghezza esistente univocamente determinata da α e β.

Segue che $+$ è un'*operazione* per la classe lunghezza.

7. Ove nel testo non sia introdotto il concetto di *segmento nullo*, si può introdurlo chiamando segmento nullo un segmento a estremi coincidenti.

---

stessa, l'*algoritmo* dei suoi elementi, *molto tempo prima* che ci sia possibile di dare una definizione logicamente precisa della classe stessa. Giunto il momento nel quale si *riesce a definire*, non di rado avviene che la classe considerata si *possa* definire in *più di un modo*, sempre, s'intende, *mantenendo inalterato l'algoritmo dei suoi elementi*, algoritmo acquisito per intuizione e adattato, già da tempo, ai bisogni della scienza. È pure possibile che a due modi diversi di definizione corrispondano enti che, pur avendo lo stesso algoritmo, abbiano *specie* (o *natura*) *logica* diversa. Ora ciò non implica che le definizioni considerate siano logicamente difettose. Consideriamo, ad es., la classe *lunghezza*, ben nota per intuizione e l'algoritmo dei cui elementi è pure ben noto indipendentemente dalla *definizione* della classe stessa. Se, essendo a un segmento, con lung a intendiamo "quell'operatore tra segmenti e classi di segmenti, che, applicato ad un segmento arbitrario b, produce la classe dei segmenti sovrapponibili tanto ad a quanto a b", si ritrova l'ordinario algoritmo, e, inoltre, *una* classe *lunghezza* è logicamente definita. Se scegliamo che l'ente cui si dà di solito il nome di "lunghezza di a" sia definito come operatore tra *punti* e *sfere*, con elementi primitivi del Pieri, allora il *simbolo* che deve indicare la "lunghezza di a" non può essere lung a, già adoperato con significato diverso; ma sarà ad es., lung′ a. E se si dà ancora un altro modo di definizione, l'ente considerato sarà indicato con lung″ a; e così di seguito. Gli enti lung a, lung′ a, lung″ a, ..., hanno è vero, natura logica diversa, ma, col il variare di a nella classe *segmento*, producono enti che *hanno a comune l'algoritmo* e si capisce che *scelto* uno di questi *a piacere* (purchè, non presenti inconvenienti formali), gli altri restano *esclusi necessariamente*. Dunque la pluralità delle *specie logiche* non costituisce un difetto logico; si cade invece in un errore logico, quando si vuole attribuire alla nozione intuitiva, ad es. "lunghezza di a" un significato logico *assoluto*, e si pretende di dare una definizione *assoluta* di lung a. L'A. a nota aggiunge: Si ritiene *assoluta* la definizione di tipo moderno:

$$a \,\varepsilon\, \text{segm} \,.\supset .\, \text{lung}\, a = \text{segm} \frown x \ni (x \equiv a) \quad (a).$$

Ora ponendo, ad es.:

$$a \,\varepsilon\, \text{segm} \,.\supset .\, \text{lung}\, a = (\text{p} \,!\, \text{p}) \frown (x;\, y) \ni \{\, \text{segm}\,(x, y) \equiv a \,\} \quad (b),$$

ove segm (x, y) indica il segmento di estremi x, y, si ha una def. che *pare* assoluta come la (a), che dà lung a di specie logica diversa dalla precedente! Ma come si sono *identificati* i *quaternioni* relli ai *vettori*, i *quaternioni* di Hamilton a *coppie di immaginari*, gli *interi* di Russel ai razionali $m/1$ ottenuti con le definizioni per classi, non si troverà, forse, difficoltà ad identificare la *classe di segmenti* data dalla (a), alla *classe di coppie di punti* data dalla (b). L'A. conclude: Ciò nonostante sorgerà, forse la questione della *specie logica*, e vi è da augurarsi che non finisca, come quella dell'*esistenza*, cioè in lunghe discussioni con conclusioni nulle.

Se a è un segmento nullo, lung a è ancora operatore esistent unico. Infatti, se x è un punto qualunque, (lung a) x è la classe punti tutti coincidenti con x (eguali ad x).

Siccome tutti i punti sono sovrapponibili, si deduce che le l ghezze dei segmenti nulli sono tutti eguali fra loro.

8. Essendo lunghezza una classe e $+$ un'operazione per le l ghezze, si intendono qui ripetuti ((³) pag. 6) i concetti di *lunghe nulla*, di $>$, di $<$, di 0, di $1'$, sempre rispetto all'operazione $+$.

9. La classe lunghezza è una Grand $+$.

Dobbiamo fare vedere che per la classe lunghezza sussiston proprietà I-IX.

I. Se α, β, γ sono lunghezze qualunque, dall'essere $\alpha+\gamma=\beta$ - si deduce $\alpha=\beta$.

Infatti, siano a, b, c tre segmenti tali che (n. 4).

$$\alpha = \text{lung}\, a, \qquad \beta = \text{lung}\, b, \qquad \gamma = \text{lung}\, c.$$

Si possono, in infinite maniere, prendere tre punti A, B, C in m che B giaccia nel segmento AC, e siano AB, BC rispettivamente vrapponibili ad a e c; e si possono prendere in infinite maniere, punti A′, B′, C′ tali che B′ giaccia nel segmento A′C′, e siano A B′C′ rispettivamente sovrapponibili a b e c. Si ha (n. 5) $\alpha+\gamma=$ lung $\beta+\gamma=$ lung A′C′. E siccome, per ipotesi, $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$, i segm AC, A′C′ sono sovrapponibili (n. 3). E allora il testo insegna che movimento (comunque introdotto) che trasforma A in A′ e C in porta B in B′, e quindi il segmento AB sul segmento A′B′. Se che (5, 6, 3) $\alpha=\beta$.

II. Esiste almeno una lunghezza nulla (*).

Infatti sia a un segmento nullo, α la sua lunghezza; l'uno e l'a sono esistenti. Sia b un segmento qualunque, β la sua lunghezz

È possibile prendere, e in infinite maniere, due punti A, C in m che b sia sovrapponibile ad AC. Posto B = A, il punto B appart al segmento AC, e scompone AC in due segmenti AB, BC. Il p è nullo, e quindi è sovrapponibile ad a, il secondo è sovrapponi a b. Segue che $\alpha+\beta=\beta$, e α è una lunghezza nulla.

Da I segue che tutte le lunghezze nulle sono eguali.

III. Esiste almeno una lunghezza non nulla.

Infatti, esistono segmenti a estremi non coincidenti. Sia a u essi, e sia $\alpha=$ lung a. Sia β un'altra lunghezza qualunque, e sia segmento tale che $\beta=$ lung b. È sempre possibile, e in infinite niere, prendere tre punti A, B, C tali che B giaccia nel segmento e AB, BC siano sovrapponibili, rispettivamente, ad a e b. Essen non nullo, AC non è sovrapponibile a b. E siccome $\alpha+\beta=$ lung si deduce che $\alpha+\beta$ non è eguale a β, e quindi α non è nulla.

(*) *Rispetto all'operazione* $+$, sempre sottinteso.

IV. La somma d'una lunghezza non nulla α con una lunghezza qualunque β non è nulla.

Siano a, b segmenti tali che $\alpha = \text{lung}\, a$, $\beta = \text{lung}\, b$. Procedendo come al n. 6 si riconosce che il segmento AC non ha gli estremi coincidenti, e perciò lung AC, cioè $\alpha + \beta$, non è nulla.

V. Qualunque siano le lunghezze α, β, γ si ha

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

Infatti siano a, b, c tre segmenti tali che

$$\alpha = \text{lung}\, a, \ \beta = \text{lung}\, b, \ \gamma = \text{lung}\, c.$$

Il testo insegna che è possibile, ed in infinite maniere, prendere quattro punti A, B, C, D tali che B cada nel segmento AD, C nel segmento BD, e i segmenti AB, BC, CD siano sovrapponibili, rispettivamente, ad a, b, c. Allora si ha (nn. 3, 5)

$$\text{lung AB} = \alpha, \ \text{lung BC} = \beta, \ \text{lung CD} = \gamma, \ \text{lung AC} = \alpha + \beta, \ \text{lung BD} = \beta + \gamma.$$

Poi

$$\text{lung AD} = \text{lung AC} + \text{lung CD} = (\alpha + \beta) + \gamma \qquad (1)$$
$$\text{lung AD} = \text{lung AB} + \text{lung BD} = \alpha + (\beta + \gamma). \qquad (2)$$

Da (1) e (2) si ha la tesi.

VI. Similmente si dimostra che se α, β sono lunghezze qualunque, si ha $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

VII. Qualunque siano le lunghezze α e β si ha:

$$\text{o} \quad \alpha = \beta, \quad \text{o} \quad \alpha > \beta \quad \text{o} \quad \alpha < \beta.$$

Infatti, siano a, b segmenti tali che

$$\alpha = \text{lung}\, a, \qquad \beta = \text{lung}\, b.$$

Si possono prendere, e in infinite maniere, due punti A e B tali che il segmento AB sia sovrapponibile ad a. Il raggio AB si compone del segmento AB e del prolungamento di esso segmento dalla parte di B. Con un movimento si può portare un estremo di b su A e l'altro estremo C sul raggio AB. Allora C o cade in B, o cade in qualche punto del segmento AB, escluso B, o cade sul prolungamento del segmento AB dalla parte di B. Segue dai nn. 3, 5, e come oramai è stato ripetutamente osservato, che

$$\text{o} \quad \alpha = \beta, \quad \text{o} \quad \alpha = \beta + \gamma, \quad \text{o} \quad \beta = \alpha + \gamma,$$

essendo γ, nel secondo e terzo caso, la lunghezza, non nulla, del segmento CB. Sotto altra forma:

$$\text{o} \quad \alpha = \beta, \quad \text{o} \quad \alpha > \beta, \quad \text{o} \quad \alpha < \beta.$$

NOTA. — Se α e β sono lunghezze, a, b segmenti tali che

$$\alpha = \text{lung}\, a, \qquad \beta = \text{lung}\, b,$$

allora:

$\alpha > \beta$ è tutt'uno con b sovrapponibile ad una parte di a, ma n costituente tutto il segmento a;

$\alpha < \beta$ è tutt'uno con a sovrapponibile ad una parte di b, ma n costituente tutto il segmento b.

VIII. Se α è una lunghezza non nulla, esiste almeno una lu ghezza non nulla minore di essa.

Infatti, sia AB un segmento tale che lung AB $= \alpha$. Gli estre A e B non coincidono. Nel testo di Geometria è ammesso o dimostra che nel segmento AB esiste almeno un punto C diverso dagli estre Allora, posto lung AB $= \beta$, lung CB $= \gamma$, si ha $\alpha = \beta + \gamma$. Siccome e γ non sono nulle, risulta che $\beta < \alpha$.

IX. Se v è una classe limitata di lunghezze, esiste almeno u lunghezza x tale che $\theta x = \theta v$; cioè esiste, almeno, un limite su riore della classe v (5).

Per ragioni di brevità diremo parte *propria* d'un segmento n nullo una parte di esso che non sia tutto il segmento.

In Geometria è ammesso un postulato, detto postulato della *co tinuità* (della retta). Sono varie le forme sotto cui esso suole pres tarsi, ma sarà facile, dalla forma usata nel testo, e dai postulati esso ammessi, dedurre la forma seguente: Data una classe V di se menti esistente e limitata superiormente, esiste almeno una cla di segmenti, tutti sovrapponibili fra loro, tali che se X è uno di e ogni segmento sovrapponibile a una parte propria di X è sovr ponibile a una parte propria di qualche V, e viceversa.

Se ora supponiamo che V sia la classe (di classi) dei segment cui lunghezze costituiscano la classe v (n. 4), essendo v limitata, an limitata sarà V (VII, Nota). Allora in virtù del detto postulato ste almeno un segmento X in esso indicato. Detta x la lunghe di X, si ha allora che (VII, Nota) $\theta x = \theta v$.

Le I-IX dimostrano il teorema.

10. Nella Geometria elementare si definiscono *linee convesse* (poligonali) speciali come *circonferenza, ellisse*, ecc. Sia AB una pa finita di una linea di estremi A, B; l una qualunque delle linee poli nali convesse *inscritte* in AB, L una qualunque delle linee poligo convesse circoscritte ad AB, essendo nei due casi A e B gli estr di l ed L. Si ha sempre

$$\text{lung}\, l < \text{lung}\, \mathrm{L}$$

(essendo lung l la somma delle lunghezze dei lati della poligonal e lung L la somma delle lunghezze dei lati della poligonale L), e qui con il variare di l, lung l ha un *limite superiore*, unico, che è *lunghezza* determinata (IX). Noi porremo, per *definizione*, " lung arco AB „ = " l' (lunghezze delle linee poligonali l inscritte nell'arco AB) „.

Risulta così che lung arco AB è una lunghezza univocamente determinata, cioè esiste un segmento a (e gl'infiniti altri sovrapponibili ad a) tale che

$$\text{lung arco AB} = \text{lung } a.$$

È così che si *rettifica* un arco qualunque di linea.

Sarebbe dunque erroneo ritenere che la definizione data di lunghezza mediante i segmenti limitasse la classe *lunghezza* alla classe formata dalle lunghezze dei segmenti; essa contiene anche le lunghezze di linee qualunque, purchè, si capisce, noi definiamo la lunghezza di un arco, il che è *necessario*, e la definiamo come limite superiore nel modo indicato. Risulta quanto sia *inutile* considerare le due classi contigue, come ora si tenta di rimettere in moda, abbandonando concezioni italiane semplici ed eleganti per concezioni esotiche pesanti e antiestetiche (¹).

11. Vale ora per le lunghezze tutto l'algoritmo delle " Grand + „, e di " Grandezze e Numeri (⁵) „.

§ II. — Aree.

1. Comunque nel testo di Geometria sia stabilito il concetto di *poligono* (*piano*, sempre sottinteso), esso è una classe di punti. Escludiamo i poligoni intrecciati, e quindi un poligono può essere convesso o concavo.

Dai postulati ammessi nel testo risulta che esistono quanti si vogliano poligoni convessi o concavi. Fra i poligoni convessi vi sono i rettangoli e i triangoli.

Un poligono convesso è *scomposto* dalle diagonali che escono da un suo vertice in triangoli.

2. Più generalmente, dicesi *figura poligonale* una figura scomponibile in poligoni convessi, e quindi in triangoli (n. 1). I poligoni convessi sono figure poligonali.

3. Comunque sia stabilito il concetto di *eguaglianza* (geometrica), per le figure piane tale eguaglianza coincide con la sovrapponibilità mediante il movimento, pensato questo come movimento fisico, o come speciale trasformazione di punti in punti.

4. Due figure poligonali si dicono *equivalenti*, se esiste una scomposizione dell'una e una scomposizione dell'altra in parti a due a due sovrapponibili.

L'equivalenza sarà indicata con il segno $\doteq$, che è ben diverso da $=$ e $\equiv$.

5. Dato un rettangolo a, chiameremo " area di a „, area a, quell'operatore tra *coppie di punti* e *classi di punti* tale che qualunque

sia la coppia di punti distinti (x, y), si ha che (area a) $(x, y$]
classe dei punti tali che se m è uno di essi, il rettangolo a è
valente al triangolo di vertici x, y, m.

6. Se a è un rettangolo, area a è operatore esistente, un
mente determinato da a.

Infatti, il testo di Geometria insegna che dato il rettango
i due punti distinti x, y, esistono, e si possono costruire, quan
gliano triangoli equivalenti ad a e aventi per base comune i
mento xy e le cui altezze, rispetto a questa base, sono segm
sovrapponibili. Ciascun di questi triangoli ha il vertice m o
ad xy su d'una retta parallela ad xy, e distante h da xy
(area a) (x, y) è la superficie cilindrica rotonda di asse la re
e raggio h; è, cioè, classe esistente di punti univocamente de
nata da a e dai punti x, y, e quindi anche area a è operato
stente, univocamente determinato da a.

7. Se a e b sono rettangoli, è area $a =$ area b solamente
$a \doteq b$.

a) Se area $a =$ area b, qualunque sia la coppia di punti distint
le classi di punti (superficie cilindriche (*)

$$(\text{area } a)\ (x,\ y),\ (\text{area } b)\ (x,\ y)$$

devono essere eguali (identiche) (*). Se allora m è un punto
alle due classi, il triangolo xym è equivalente tanto ad a qua
e quindi (n. 4) $a \doteq b$.

b) Se, inversamente, $a \doteq b$, qualunque sia la coppia di pu
stinti (x, y), risultano sovrapposte le due superficie (area a
(area b) (x, y), perchè hanno lo stesso asse xy e raggi sovr
bili, perchè sono altezze, rispetto alla comune base xy, di due
goli equivalenti fra loro.

Da a) e b) si ha la tesi.

8. Si chiama *area* la classe degli enti (operatori) tali che
uno di essi, esiste almeno un rettangolo a (e quindi infiniti, t
equivalenti ad a) tale che $\alpha =$ area a.

Da quanto precede risulta che *area* è classe esistente, e c
quantisivogliano elementi.

9. Se α e β sono aree, con $\alpha + \beta$ intendiamo l'area γ t
se a e b sono rettangoli tali che (n. 8) $\alpha =$ area a, $\beta =$ area b
$\gamma =$ area c, essendo c uno qualunque dei rettangoli che è de
nibile in due rettangoli equivalenti, rispettivamente, ad a e

10. Se α e β sono aree, $\alpha + \beta$ è un'area determinata e un

Infatti, presi due punti distinti A, B si costruisca un ret
ABCD equivalente ad a. Ciò è possibile e in infinite manier

(*) Cfr. Nota al n. 3, § I.

Sia b' un rettangolo equivalente a b e di base sovrapponibile ad AB (o CD) e sia h l'altezza di tale rettangolo. Sul prolungamento di BC, dalla parte di C, esiste un punto E, ed un solo, tale che $CE \equiv h$. Si completi il rettangolo DCEF.

La figura ABEF è un rettangolo scomposto dal segmento CD in due rettangoli rispettivamente equivalenti ad a e b', e quindi ad a e b. Tutte le costruzioni fatte sono possibili, e in infinite maniere, e tutti i rettangoli ABEF sono fra loro equivalenti (n. 4), e l'area di ciascuno è (n. 9) $\alpha + \beta$.

11 È opportuno considerare rettangoli (o triangoli), *improprii*, aventi, almeno, la base o l'altezza nulla; li chiameremo rettangoli (o triangoli) *nulli*.

Ammesso che si possa considerare un rettangolo ABCD di base AB e altezza BC nulla, se esso si trasforma in un rettangolo equivalente di base diversa, tale rettangolo avrà pure l'altezza nulla, e sarà nullo. Esistono così quantisivogliano rettangoli nulli, e sono tutti equivalenti. Così per i triangoli.

Risulta pure che se a è un rettangolo nullo, anche area a è operatore univocamente determinato da a. Se x, y sono punti distinti, (area a) (x, y) è una determinata classe di punti, tutti situati sull'asse xy, e ogni punto di tale asse appartiene a quella classe. Risulta ancora che se a e b sono rettangoli nulli, è

$$(\text{area } a)\ (x, y) = (\text{area } b)\ (x, y)$$

qualunque sia la coppia di punti distinti (x, y).

12. La classe *area* è una Grand $+$.

I. Se α, β, γ sono aree qualunque, da $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ segue $\alpha = \beta$.

Infatti, esistono (n. 8) tre rettangoli a, b, c (e quindi infinite terne), tali che

$$\alpha = \text{area } a, \qquad \beta = \text{area } b, \qquad \gamma = \text{area } c.$$

Si possono costruire, e in infinite maniere, tre rettangoli a', b', c' rispettivamente equivalenti ad a, b, c, aventi basi x, y, z sovrapponibili e dei quali p, q, r siano le altezze. Nelle figure del n. 9, I del § I si tirino ad AC, A'C' nei punti A, A' due segmenti ad angolo retto rispettivamente sovrapponibili ad x, e si supponga inoltre che AB, A'B' siano sovrapponibili, rispettivamente, a p e q, e BC, B'C' ad r. Ripetendo il ragionamento, lievemente modificato, ivi usato, sono equivalenti i rettangoli a e b.

Tanto significa, n. 7, che $\alpha = \beta$.

II. Esiste almeno un'area nulla (*).

Infatti, sia a un rettangolo nullo, α la sua area. L'uno e l'altra sono esistenti (n. 11). Sia β l'area d'un rettangolo qualunque b, e ABCD un rettangolo di base arbitraria AB ed equivalente a b. Di

(*) *Rispetto all'operazione* $+$, sempre sottinteso.

tali rettangoli ne esistono infiniti. Ciascun di essi è scomposto ir rettangoli, uno di base AB e altezza nulla, e quindi equiva ad a (n. 11), e l'altro equivalente a b. Segue (n. 10) che

$$\alpha + \beta = \text{area ABCD} = \beta,$$

e α è area nulla.

III. Esista almeno un'area non nulla.

Infatti sia a un rettangolo non nullo, α la sua area. Sia A un rettangolo equivalente ad a e di base arbitraria AB; la su tezza CD non sarà nulla. Sia b un altro rettangolo, di area β, un rettangolo equivalente a b e di base sovrapponibile ad AB (o

Sul prolungamento di BC, dalla parte di C, si prenda il pun in modo che CE sia sovrapponibile all'altezza di b'. Il rettar A'B'E' è scomponibile in due rettangoli equivalenti ad a e b, e è equivalente a b. Queste costruzioni sono sempre possibili e i finite maniere, e risulta che $\alpha + \beta$ non è eguale a β, e quindi è area nulla.

Da quanto è stato detto al n. 10 e al n. 12, I, II, III risul modo come alle aree si estendano le proprietà IV-VIII del n. mediante lievi modificazioni alle dimostrazioni date.

IX. Se v è una classe limitata di aree, esiste almeno un'ar tale che $\theta x = \theta v$; esiste, cioè, almeno un limite superiore della cla

Intanto, se α e β sono aree, e a, b due rettangoli tali che $\alpha =$ a $\beta =$ area b, e che può supporsi abbiano basi sovrapponibili, se α sarà $\alpha = \beta + \gamma$, dove γ è un'area non nulla.

Sia c un rettangolo di area γ e con la base sovrapponibile a q di a e b. Una costruzione, sempre possibile, e in infinite ma mostra allora che a è decomponibile in due rettangoli, di cui equivalente a b, ma non ad a (è parte *propria* di a (9, IX, § I)).

$\alpha > \beta$ è tutt'uno con b è equivalente a una parte propria d

$\alpha < \beta$ è tutt'uno con a è equivalente a una parte propria d

Ciò posto, si dica V la classe (di classi) di rettangoli le cui siano gli elementi di v, e può supporsi, senza togliere nulla all neralità del ragionamento, che abbiano basi sovrapponibili. D servazione ora fatta segue che V risulta limitata come v, e lin sarà la classe A delle altezze di questi rettangoli. Per il post della continuità esiste almeno un segmento X (e tutti i sovrap bili ad esso) tale che ogni segmento sovrapponibile a una propria di X è sovrapponibile a una parte propria di qualche viceversa. Si dica x l'area d'un rettangolo di altezza X e base so ponibile alla base di uno dei rettangoli V. Dall'osservazione pre risulta che ogni area minore di x è minore di qualche v, e vice cioè

$$\theta x = \theta v.$$

Le I-IX dimostrano il teorema (cfr. n. 11, § I).

13. Data una figura poligonale A la Geometria insegna a costruire un rettangolo R equivalente ad A. Di rettangoli R se ne possono costruire infiniti, che risultano tutti equivalenti fra loro ed equivalenti a quelli che si ottengono se invece della figura A si considera una figura qualunque equivalente ad A.

L'area di ciascun dei rettangoli R si chiama *area della figura* A; e si deduce che una figura poligonale qualunque ha un'area univocamente determinata dalla figura, che non varia se alla figura se ne sostituisce una equivalente. Queste considerazioni si estendono alle aree delle superficie dei solidi poliedri.

Nella Geometria elementare piana si definiscono figure convesse, come *cerchio*, *ellisse*, ecc. Sia A una di tali figure.

Se l è un poligono convesso inscritto in A, L un poligono convesso circoscritto, si ha sempre

$$\text{area } l < \text{area L}.$$

Facendo variare l, si ha allora una classe limitata di aree l, che ammette un limite superiore, che è un'area determinata, e che si chiama *area di* A. Cioè: " area A " = " l'(aree poligonali convesse inscritte in A) ".

Nella Geometria solida si definiscono speciali superficie curve finite, come superficie cilindrica, conica, sferica e loro parti elementari. Le aree di tali superficie si definiscono, come al solito, con il limite superiore.

Se A è la superficie laterale d'un cilindro retto, l la superficie laterale d'un prisma retto convesso inscritto, L la superficie laterale d'un prisma convesso circoscritto, si ha sempre

$$\text{area } l < \text{area L}.$$

Facendo variare l, area l genera perciò una classe limitata v di aree, sarà l'v un'area determinata e unica, che si chiama *area laterale* del dato cilindro.

Così per l'area laterale del cono circolare retto. Per l'area della sfera i ragionamenti sono meno semplici.

Risulta così che quantunque il concetto di area sia stato stabilito mediante i rettangoli, esso è affatto generale, perchè si definisce il concetto di area d'un poligono qualunque o di una superficie qualunque, riportandolo ad aree di rettangoli o al limite superiore di determinate classi di aree.

E può ora ripetersi quanto è detto alla fine del n. 10 e al n. 11 del § I.

sovrapponibili, i loro volumi, sono, come facilmente si riconos

$$\frac{1^2+2^2+\ldots+(n+1)^2}{n^3}\,Sh, \qquad \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}\,Sh,$$

essendo S l'area di ABC e h la lunghezza dell'altezza rispetto ad del tetraedro ABCD. Da a) risulta che il primo è minore di

c) La differenza dei volumi indicati in b) è $\frac{1}{n}Sh$, e può q divenire minore, crescendo n, d'un volume qualunque dato. Co ragione è minore d'un volume qualunque dato, come risulta la differenza fra $\frac{Sh}{3}$ e il primo dei detti volumi.

d) Indicando con v la classe dei volumi degli scaloidi iscritti

$$\mathrm{l}'v=\frac{Sh}{3},$$

o anche

$$\theta v=\theta\,\frac{Sh}{3}.$$

Ogni volume minore di qualche v è, come risulta da b, min $\frac{Sh}{3}$ (1).

Sia, viceversa, a un volume minore di $\frac{Sh}{3}$. Esiste la diff $\frac{Sh}{3}-a$, che è un dato volume. Sia v_1 un v tale che (c)

$$\frac{Sh}{3}-v_1<\frac{Sh}{3}-a;$$

sarà $a<v_1$ (2).

Da (1) e (2) si ha la tesi.

Dunque: Il volume d'un tetraedro è eguale a $\frac{1}{3}$ di quell prisma di base equivalente e della stessa altezza.

Data una figura poliedrica qualunque, si chiama *volume la somma dei volumi dei tetraedri in cui la figura si può sco* (n. 1).

Si ricorre pure, con grande vantaggio e semplicità, al limi periore per definire il volume di ciascuno degli altri solidi c rati nella Geometria elementare.

Ma, come ho detto, ad altra *Nota*, la determinazione *effet* lunghezze, aree e volumi che si considerano nella Geometria e tare.

Risulta intanto che quantunque il concetto di volume si stabilito mediante i prismi, esso è affatto generale (cfr. § II, in fine; § I, n. 10 in fine e n. 11).

SULL'AREA DI UNA CURVA PIANA GENERALE

Ecco un curioso risultato di puro calcolo, che costituisce una imprevista applicazione dell'integrale abeliano $\int(Y.dX - X.dY)$ relativo alla quadratura di una curva piana generale.

Il problema di cui mi occupo non offrirebbe per sè stesso alcun interesse particolare, perchè è di quelli che s'incontrano frequentemente nelle applicazioni del calcolo integrale alle curve piane definite da proprietà delle loro tangenti e delle loro normali. L'originalità di questo problema è senza dubbio contestabile; dei casi particolari sono già stati trattati, come dirò in seguito; altri casi particolari risoluti possono essere sfuggiti alle mie ricerche bibliografiche; forse anche l'integrazione nel caso generale è stata osservata. Ma l'osservazione che credo nuova, e per conseguenza degna di essere segnalata qui, è che questa integrazione si effettua precisamente per mezzo dell'integrale di quadratura di una curva generale.

1. Io mi propongo di risolvere la quistione seguente:

Determinare le curve piane (C) *tali che i segmenti* MP e MQ *della normale corrente limitati da una parte al punto d'incidenza* M *e, dall'altra parte, alle tracce* P *e* Q *sugli assi ortogonali delle coordinate, siano legati fra loro da una relazione stabilita.*

La curva (C) che si vuole determinare sia rappresentata in coordinate polari tangenziali, riferite ad assi ortogonali Ox e Oy, come inviluppo della retta di equazione

$$x \cos\varphi + y \operatorname{sen}\varphi = p;$$

i segmenti MP e MQ della normale corrente, limitati dal punto corrente M e dai punti P e Q, intersezioni con gli assi Ox e Oy, hanno per valori algebrici

$$MP = Y = \frac{y}{\operatorname{sen}\varphi},$$

$$MQ = X = \frac{x}{\cos\varphi};$$

sia allora $f(X, Y) = 0$ la relazione stabilita fra i segmenti MP e MQ.

Supponiamo ora che X e Y rappresentino, in un piano figurativo riferito ad assi ortogonali, le coordinate di un certo punto, di guisa che la relazione stabilita fra i segmenti di normale non è altro che nella loro rappresentazione analitica con la presenza della fu logaritmica.

Queste curve (C) possono esser considerate come curve par a due famiglie particolari di curve assai notevoli. La relazione lutoria infatti può esser subito ridotta alla forma

$$\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}=\frac{1}{2a},$$

a essendo una costante. La curva (C) corrispondente gode d della seguente proprietà caratteristica:

Il luogo del coniugato armonico del punto d'incidenza M *della male rispetto al segmento* PQ *determinato sulla normale dagli ass coordinate, è una curva parallela alla curva considerata.*

È possibilissimo che questa proprietà sia stato il punto di tenza di ricerche attorno a questa famiglia di curve (C). Ma cerche bibliografiche che io ho fatto sono rimaste infruttuose.

Le stesse curve (C) corrispondenti ad una relazione involu fra X e Y possono esser considerate come parallele a quelle di q curve che corrispondono alla relazione ridotta $X \cdot Y =$ costante, alle *curve di Collignon.* Queste curve infatti sono state lungar studiate da COLLIGNON (1) in coordinate di punti. L'equazione renziale è allora, a meno di una similitudine,

$$xy\,(dx^2+dy^2)+dx\;dy=0\,;$$

la sua integrazione si effettua con lo stesso artifizio che riesc caso classico delle coniche omofocali, cioè prendendo $x^2=u$, y per nuove variabili. L'equazione si trasforma allora in una zione di CLAIRAULT-LAGRANGE:

$$vdu^2+udv^2+du\,.\,dv=0.$$

La rappresentazione definitiva di queste curve in funzione parametro è allora

$$x^2=\frac{A}{(\lambda+1)^2}-\frac{1}{\lambda+1}-\frac{\log\lambda}{(\lambda+1)^2},$$

$$y^2=-\frac{A\lambda^2}{(\lambda+1)^2}-\frac{\lambda}{\lambda+1}+\frac{\lambda^2\log\lambda}{(\lambda+1)^2}.$$

A è la costante arbitraria d'integrazione. Per $\lambda=-1$, queste mule diventano illusorie; ma la curva (C) è allora un circolo

$$x^2+y^2-1=0.$$

---

(1) ED. COLLIGNON, *Problèmes, sur les normales aux courbes planes* "Nouvelle annales d thématique", 4ª serie, 1901, tomo 1, pp. 481-508.

Il cambiamento di variabile $x^2=u$, $y^2=v$ riuscirebbe d'altronde in tutti i casi, qualunque sia la condizione imposta. Questa infatti può sempre esser messa sotto la forma

$$g\left(\mathrm{XY},\ \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}\right)=0;$$

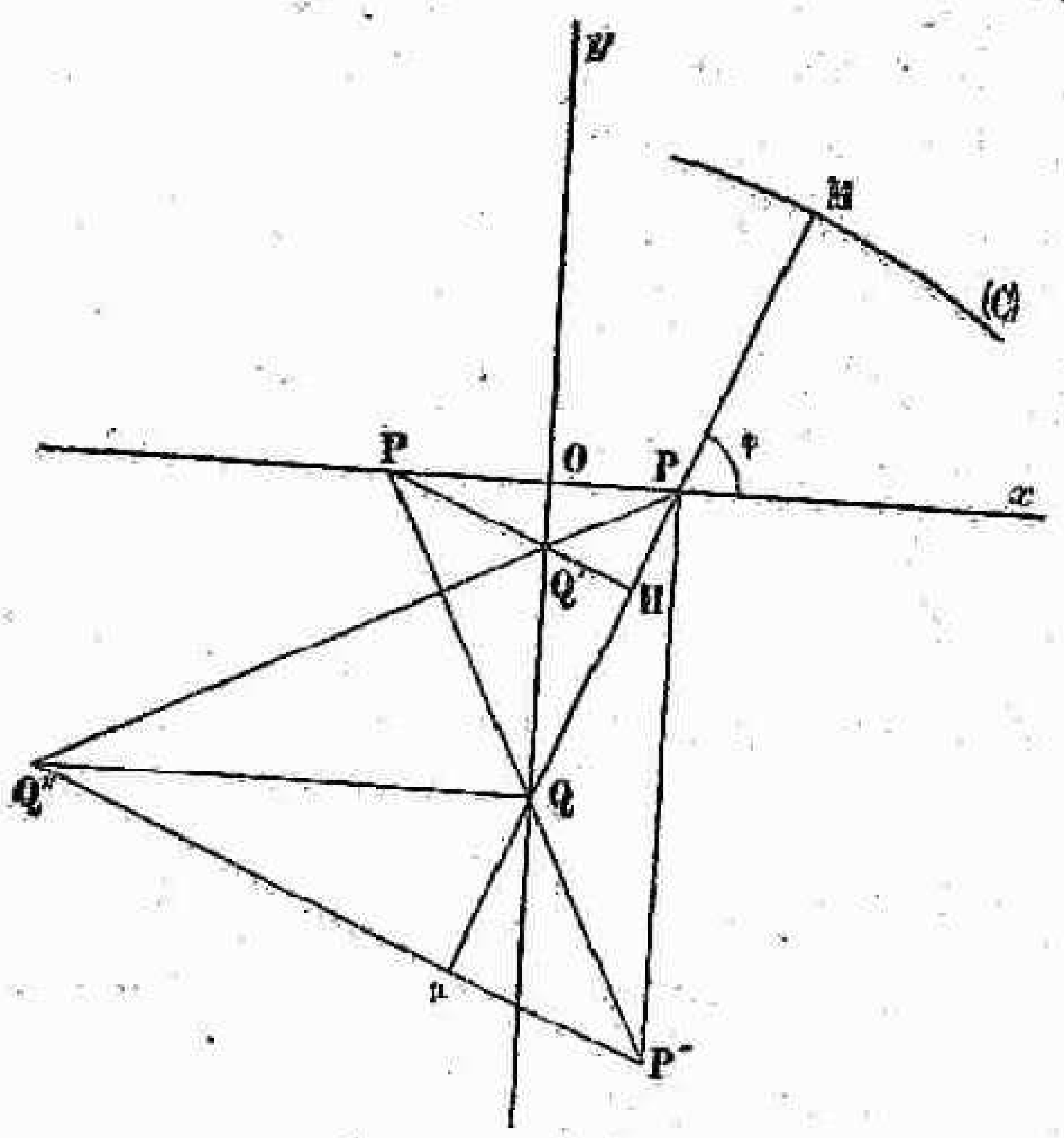
d'altra parte il prodotto ed il rapporto dei segmenti hanno le espressioni seguenti in funzione di u e v:

$$\mathrm{XY}=-xy\,.\,\frac{dx^2+dy^2}{dx\,dy}=-\frac{v du^2+u dv^2}{du\,dv},$$
$$\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}=-\frac{y\,dy}{x\,dx}=-\frac{dv}{du},$$

di guisa che si giunge sempre ad un'equazione di Clairault-Lagrange.

Il metodo tangenziale conduce molto più rapidamente al resultato che il metodo seguito da Collignon. Questo stesso metodo tangenziale permette inoltre, sempre a proposito delle curve di Collignon, di stabilire le reciprocità di una proposizione dovuta al sig. M. d'Ocagne: (1)

Sia H *il coniugato armonico di* M *rispetto al segmento* PQ; *la parallela condotta da* H *alla tangente in* M *alla curva* (C) *incontra gli*



assi nei punti P′ *e* Q′; *sia* P″ *l'intersezione di* P′Q *con la perpendicolare* PP″ *a* Ox, *e sia* Q″ *l'intersezione di* Q′P *con la perpendicolare* QQ″ *in* Q *a* Oy. *La retta* P″Q″ *è la normale alla sviluppata della curva* (C),

(1) M. d'Ocagne, *Au sujet de courbes de M. Collignon* "Nouvelle annales de Mathématiques", 4ª serie, 1902, pp. 137-138.

il punto d'intersezione μ *di* P″Q″ *e di* MPQ *è dunque il centro di cur tura della curva* (C).

Allo scopo di stabilire analiticamente questa proposizione sig. M. d'Ocagne e la sua reciproca osservo che, se le equazion due rette perpendicolari qualunque PQ e P′Q′ sono messe sott forme seguenti

$$(\mathrm{PQ}) \qquad -x \operatorname{sen} \varphi + y \cos \varphi = \Delta\,,$$
$$(\mathrm{PQ}') \qquad x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi = \lambda\,,$$

(λ non avendo alcun rapporto con quello che è stato utilizzato r formule di Collignon) le rette PQ′ e QP′ hanno rispettivamente equazioni

$$(\mathrm{PQ}') \quad -\frac{x}{\Delta} + \frac{y}{\lambda} = \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi}\,,$$

$$(\mathrm{QP}') \quad \frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\Delta} = \frac{1}{\cos \varphi}\,;$$

queste rette sono evidentemente ortogonali. Ne segue che i punt e Q″ della figura hanno le seguenti coordinate:

$$\mathrm{P}''\begin{cases} x = -\dfrac{\Delta}{\operatorname{sen}\varphi} \\ y = \Delta^2\left(\dfrac{1}{\lambda \operatorname{sen}\varphi} + \dfrac{1}{\Delta \cos\varphi}\right) \end{cases} \qquad \mathrm{Q}''\begin{cases} x = \Delta^2\left(\dfrac{1}{\lambda\cos\varphi} - \dfrac{1}{\Delta \operatorname{sen}\varphi}\right. \\ y = \dfrac{\Delta}{\cos\varphi}\,, \end{cases}$$

e che la retta P″Q″, perpendicolare a PQ, ha per equazione

$$x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi = \mathrm{M}\,,$$

ove

$$\mathrm{M} = \frac{\Delta^2}{\lambda} - 2\Delta \cot 2\varphi\,.$$

Nel caso attuale bisogna mettere

$$\Delta = \frac{dp}{d\varphi} = p'\,, \qquad \lambda = p - \mathrm{MH} = p - \frac{2\mathrm{XY}}{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}\,;$$

$$\mathrm{Y} - \mathrm{X} = \frac{2p'}{\operatorname{sen} 2\varphi}\,,$$

$$\mathrm{Y} + \mathrm{X} = 2\,[p + p' \operatorname{cotang} 2\varphi]\,;$$

la distanza $\mu\mu_1$ del punto d'intersezione di P″Q″ con la normal dal centro di curvatura μ_1 della curva (C), definita dalla formu

$$\mu\mu_1 = \mathrm{M} + p''\,,$$

ha per espressione

$$\mu\mu_1 = \frac{\dfrac{d}{d\varphi}(\mathrm{XY})}{p \operatorname{cotang} 2\varphi - \dfrac{dp}{d\varphi}}\,.$$

Questa formula vale per una curva piana qualunque. Nel caso particolare di una curva di Collignon, XY essendo costante, il punto μ non è dunque altro che il centro di curvatura di (C), conformemente alla proposizione del sig. d'Ocagne. Reciprocamente il centro di curvatura si confonderà col punto Q soltanto quando la curva sia una curva di Collignon, di guisa che il citato teorema di d'Ocagne caratterizza perfettamente tali curve.

EMILE TURRIÈRE.

BIBLIOGRAFIA

Tavole logaritmiche pubblicate dall'*Istituto idrografico della R. Marina* in *Genova*.

Tempo fa lessi, in non so qual giornale, un aneddoto interessante ed istruttivo. L'editore Zanichelli, volendo pubblicare i due volumi delle prose e delle poesie del Carducci, si rivolse ad un editore di Londra per sapere dove si poteva acquistare la bella carta sottile e resistente da lui usata per certe sue Bibbie; e l'editore londinese, molto stupito, rispose che la carta tanto ammirata dall'editore bolognese egli la acquistava a... Bologna. Vero o non vero, l'aneddoto è certamente del tutto verosimile; nessun popolo, credo, può contendere all'italiano il primato nell'ignoranza di quanto ha in casa sua e nell'ostentazione di volersi mostrare di „ idee larghe „ ammirando sempre e soltanto ciò che si ha, si dice, si fa negli altri paesi. Almeno adesso, in quest'ora benedetta di completa rigenerazione per la nostra Patria, i buoni Italiani devono procurare di rimediare, per quanto possono, al suaccennato nostro pernicioso difetto. Ciò mi propongo ora di fare, colle modeste mie forze, in un caso particolarissimo, ma non trascurabile e per noi assai interessante. Prego i Colleghi di volermi concedere benevola attenzione: se non odono su tale argomento qualche voce autorevole, e quindi più efficace della mia, ciò dipende, devo confessarlo, dal fatto che invano la ho, più volte, da varie parti invocata!

Gli insegnanti di matematica e di materie affini delle nostre Scuole sono quest'anno imbarazzatissimi nella scelta delle tavole logaritmiche da adottare. Le tavolissime della kultur teutonica, che avevano invaso tutte le nostre Scuole, non possono ora più giungere sino a noi, nemmeno attraverso la tanto compiacente patria di Guglielmo Tell. Ed anche le tavole francesi o inglesi è ora difficilissimo averle. Bisogna dunque ricorrere alle tavole italiane; è però innegabile che le più note fra esse sono talvolta insufficienti ai bisogni degli studiosi. Tavole italiane complete, paragonabili colle teutoniche di cui la Guerra ci priva, non ci sono: così suol dirsi, e spesso in buona fede. Ben pochi infatti sanno che l'Istituto idrografico della R. Marina ha pubblicato fino dal 1913 un bellissimo volume di tavole che gli stranieri, anche i superuomini germanici, potrebbero benissimo invidiarci. Librai ed insegnanti ne ignorano quasi tutti l'esistenza; ed anche conoscendola sono, purtroppo, restii ad occuparsene. Due nostri valenti insegnanti, il Concina ed il Neppi-Modona, hanno fatta pubblicare or ora dall'editore Gallizio di Torino una loro pregevole Trigonometria; in essa si parla di tutte le tavole più no a queste non si accenna nemmeno; evidentemente gli autori ne ignorano anch'es l'esistenza. L'Istituto, che con tanta cura e fatica le ha pubblicate, nulla assol tamente ha fatto perchè siano conosciute, anzi sembra desideri che non lo sian assenza completa di quella cooperazione ed organizzazione in cui i nostri barba nemici sono sommi e che noi, invece di deridere o disprezzare, dovremmo in tare. Fra questa generale incuria mi sono deciso a scrivere io la presente rece sione; ma lo faccio con amarezza, perchè ne traggo una nuova prova che r italiani, come già dissi, nemmeno adesso sappiamo sufficientemente sfruttare nostre energie ed utilizzare quanto possediamo.

Il volume in discorso si inizia con una lucidissima introduzione-istruzione, una ventina di pagine. La I^a tavola ha i logaritmi e i cologaritmi dei numeri i teri da 1 a 10080; la II^a e la III^a contengono i logaritmi dei 6 funzioni goni metriche, di secondo in secondo per i 2 primi e pei 2 ultimi gradi del I° qu drante, di 15 in 15 secondi per gli angoli intermedi; la IV^a tavola dà i ben n logaritmi di Gauss per le addizioni e sottrazioni; la tavola V^a contiene i val naturali delle funzioni goniometriche per il I° quadrante, di primo in primo; tavola seguente serve per la conversione fra logaritmi naturali e logaritmi muni [1] ed ha inoltre i logaritmi naturali dei numeri interi da 1 a 1000. I lori contenuti in queste 6 tavole sono tutti espressi con 5 cifre decimali. Le tavole che seguono possono dividersi in 3 gruppi; quelle dalla VII^a all'XI^a han carattere prettamente aritmetico e contengono quadrati, cubi, numeri recipro radici quadrate, radici cubiche; le tavole XII^a-XVIII^a servono per le conversi dei vari sistemi di misura degli angoli e dei tempi; le tavole XIX^a-XXII^a han carattere esclusivamente geodetico; ed anche le prime 6 tavole hanno indicazi colle quali possono servire a scopi geodetici. Il volume termina con un ri formulario, di 40 pagine, trattante interessanti argomenti di aritmetica, algeb goniometria, trigonometria piana e sferica, sviluppi in serie, interpolazione, calc differenziale, teoria degli errori, geodesia, astronomia e fisica.

La stampa del libro è nitidissima, ottima la carta, signorile la rilegatura; pur essendo un grosso volume di 550 pagine in grande formato, assai mite ne il prezzo, di sole 5 lire. Tutte le biblioteche dovrebbero acquistarlo; ed inv non lo possiede nessuna delle molte nelle quali lo cercai. Tutti gli insegna italiani dovrebbero consigliarlo ai loro alunni; non soltanto per fare un'azione buoni patriotti, ma anche per il bene degli alunni stessi; ed invece...

La limitazione degli antilogaritmi al numero 10000 e dei logaritmi alle 5 ci decimali, che fu ritenuta sufficiente dai compilatori, specialisti in argomenti n tici e geodetici, non scontenterà, voglio sperare, nessuno fra i nostri insegna di scuole medie. Pur col nostalgico desiderio delle predilette tavole teutonic essi devono rassegnarsi a riconoscere che, per l'uso che ne fanno, le tavole garitmiche con 6 o più decimali offrono un " inutile e pericoloso sfoggio di p cisione ", come si dice assai giustamente nell'Introduzione al nostro libro. Q st'ostacolo alla sua adozione non può essere ragionevolmente invocato da conosce veramente l'argomento; ed altre obbiezioni plausibili non sono capace vedere; sono convinto non esistano; dunque...

L'adozione può essere fatta, benchè in ritardo, quest'anno stesso, nelle mo Scuole dove non fu finora possibile di provvedere in altro modo; in ogni caso

---

(1) Questa I^a parte della VI^a tavola è però redatta con poca chiarezza e poca precisione.

decida almeno fin d'ora di farne la proposta ufficiale per l'anno venturo, prima che la merce teutonica trovi modo di rinnovare la deplòrata invasione e riesca ad... indurre nuovamente molti in tentazione. E così non sia!

CATTANEO PAOLO.

B. BETTINI e C. CIAMBERLINI, *Elementi di Geometria* ad uso delle scuole professionali di 2° grado. — Livorno, R. Giusti. Vol. I, L. 1,20; vol. II, L. 1,20.

Sembrerebbe cosa agevole a chi, essendo già autore di libri scolastici di matematica, volesse compilarne altri per le scuole di pari grado o di grado inferiore; senonchè — e l'esperienza lo dimostra purtroppo — l'influenza dell'analogo già fatto spesso fa perdere di vista ciò che costituisce la caratteristica di ogni buon libro, cioè il *metodo* appropriato al *fine*, che la scuola particolare, a cui esso libro è destinato, si propone.

Invece, non è raro in Italia lo spettacolo infelicissimo di libri ad uso delle scuole tecniche, per esempio, ottenuti sforbiciando quelli che lo stesso autore ha pur ben compilato per gli istituti tecnici, di libri di matematica per il liceo classico adattati al liceo moderno con l'*aggiunta* dei capitoli complementari, anzichè con l'adozione di bel nuovo del metodo caratteristico richiesto dalla scuola recentemente istituita; infine, di libri di scuola elementare *ridotti* su altri di scuola media inferiore!

Quali e quante siano le pessime conseguenze dell'adozione di libri male appropriati ad una determinata scuola, per la scelta del metodo, è inutile ricordare, non solo nel riguardo degli alunni, ma anche degli insegnanti, che frequentemente finiscono col provare disgusto del proprio ufficio, inquietudine per la propria condizione.

* * *

I proff. Bettini e Ciamberlini sono già autori di un ottimo corso completo per il ginnasio, il Ciamberlini, poi, ci ha prodigato quei libri per le scuole tecniche, complementari, normali e licei, che sono caratteristici per mirabile fusione di semplicità e rigore, taluni dei quali perciò soli, forse, possono degnamente risolvere il doloroso problema dell'insegnamento in quelle scuole, ove è troppo stridente il contrasto tra l'ampiezza del programma e la ristrettezza dell'orario corrispondente.

Gli elementi di geometria, che gli autori presentano ad uso delle scuole professionali, non hanno a che vedere con quelli, che taluno potrebbe dire affini: essi sono svolti proprio " con quell'impronta di praticità e quell'*intonazione* che sono richieste dall'indole della scuola " a cui sono rivolti.

Tale intonazione si rivela, non solo nella scelta degli esercizi svolti, avviati e proposti, nei quali spesso si accenna ad argomenti di meccanica, di fisica, di disegno geometrico o di macchine, ma anche nella costante adozione di quel *metodo sperimentale*, che noi tutti siamo convinti debba informare la scuola media inferiore, ma che, viceversa, vediamo così eccezionalmente ben applicato. Basterebbe, a codesto riguardo, leggere con quanta semplicità e maestria son date le *verifiche* dei criteri di uguaglianza dei triangoli, verifiche che, a differenza di quanto ho visto in testi analoghi, mettono anzitutto in chiarissima luce *carattere di sufficienza*, che ogni criterio sopra indicato in sè contiene.

I nostri autori hanno voluto evitare, nel compilare la loro opera, di far riduzione di quelle che rispecchiano il pensiero euclideo, certo perchè tali zioni sarebbero state pur sempre astratte e non rispondenti perciò al compit si erano assunti.

I due trattatelli costituiscono una geometria concreta, nella quale le derazioni di *simmetria* e di *spostamento* delle figure sono invocate spessis il più possibile, e ognuno deve riconoscere a tali considerazioni un forte v intuitivo e sperimentale, se pur non vuole intravedervi i germi della pre zione ad uno studio razionale, secondo una tendenza essenziale dello spirit derno. E io mi auguro che, in una prossima edizione, gli autori vorranno lineare maggiormente il concetto di simmetria, non solo limitandolo agli ma anco estendendolo ai *centri* e applicandolo, per esempio, all'argomento sportato dagli esercizi al testo) della *pavimentazione* o dell'*intarsio* con po regolari, argomento questo, che io non so comprendere perchè debba esse ciuto o creduto di semplice ricreazione geometrica o di disegno, mentre s tacca perfino a questioni di analisi indeterminata.

* * *

Gli autori avvertono nella prefazione al vol. I che, per seguire l'ordi dicato dai programmi, cioè per porre il teorema di Pitagora prima dell'e lenza e della misurazione delle superficie, era necessario premettere un sulla misurazione dei segmenti. Così hanno potuto enunciare il teorema di gora fin dalle prime pagine, come una semplice proprietà numerica, cioè una relazione tra i valori (misure) dei lati del triangolo rettangolo, sen nessun cenno a relazioni tra superficie od aree. Più tardi, poi, sono torr quella proprietà, chiarendone ed estendendone il contenuto.

Certo, nessun appunto logico può muoversi a cotal modo di procedere: si di un mezzo ingegnoso, per quanto semplice, di soddisfare le esigenze bu tiche; ma io non so se non fosse stato più simpatico fare un'ulteriore an zione, oltre a quella della misura dei segmenti e precisamente della misur superficie dei rettangoli. Così, invocando in sostanza le più ovvie nozioni stema metrico dei segmenti e dei rettangoli, il teorema di Pitagora non s stato arretrato di tanto, e certo presentato nella sua vera essenza di re superficiale, quale lo concepirono Pitagora, Euclide e le generazioni tut alla nostra.

Tanto più che l'anticipazione della misura del rettangolo avrebbe c subito alla ragione di *necessità* del capitolo dell'equivalenza, necessità c campo pratico più elementare, risiede nel bisogno di trasformare in ret le figure che non si possono misurare *direttamente*, vale a dire non si p ricoprire esattamente di quadrati.

Praticamente, poi, la misura delle superficie dei rettangoli si presenta lunga più facile di quella degli angoli, data fin dalle prime pagine nel sessagesimale (e perchè non anche in quello centesimale, dal momento strumenti si fabbricano oggi a preferenza in quest'ultimo sistema?).

Secondo me, adunque, gli egregi autori avrebbero dovuto preferire di un poco di più l'ordine del programma ufficiale per non svisare la natura rema pitagorico, tanto più che essi hanno di tutto cuore adottato — e troppo costantemente, forse — le scritture (del resto, *definite*) quali

$$(1) \qquad m \times m = m^2; \qquad m^2 \times m = m^3 \text{ ecc.},$$

relative alla misura delle superficie e dei solidi.

E poichè, riesumando tali scritture si è voluto riconoscer loro tutti i pregi didattici, ad esempio quello di non alterare i dati, così mi par naturale pensare che il teorema di Pitagora non doveva riflettere una proposizione numerica, ma bensì di *quantità*.

Me ne guarderei bene dal riaprire la discussione sopra un argomento che, secondo me, non ne ha mai valso troppo la pena, poichè l'accordo scientifico c'è sempre stato (non potendo alcun matematico attribuire alle scritture (1) altro significato se non quello di definizioni, cioè di convenzioni, e nessuno mai potè pretendere di farle rientrare nella moltiplicazione di due numeri o di una quantità per un numero) e poichè l'accordo didattico non ci sarà forse mai (in quanto che i fautori della riesumazione si sono spinti un po' troppo oltre con le argomentazioni in favore della propria tesi). Io domando solo se la formula del volume del tronco di piramide, quale è applicata a pag. 75, vol. II:

$$(2) \qquad V = \frac{1}{3}\left(m^2 9 + m^2 4 + \sqrt{m9 \times m4}\right) m\, 12\,,$$

pur corretta dell'errore tipografico sotto al radicale, sia esatta, non essendo stata definita la scrittura

$$(3) \qquad \sqrt{m^2 \times m^2} = m^2\,,$$

od anche, dato pure che la (3) sia una definizione, domando quali siano i motivi didattici che fanno preferire la (2) a quella spoglia delle unità di misura e, se mi si accennerà ancora al pregio didattico di conservare la natura dei dati, non mi resterà che a proporre che si scrivano le equazioni non più come uguaglianze tra espressioni numeriche, ma fra espressioni costruite con quantità!

* * *

I due volumetti sono corredati di tante nozioni, specialmente tecniche, che bisogna enumerare per metterne in rilievo il carattere prettamente professionale. Esse riguardano il moto uniforme, i parallelogrammi e i poligoni articolati, la risultante di forze, la forza centrifuga, gli ingranaggi e le cinghie per la trasmissione del moto da un asse ad un altro, il raccordamento delle linee, il ritaglio delle figure, la riduzione dei disegni, il pantografo, la pendenza delle strade, la costruzione di modelli di solidi geometrici (con riferimento al numero delle saldature o delle incollature) le sezioni piane dei poliedri e dei corpi rotondi, la longitudine e la latitudine, la regola di Guldino per l'area e i volumi delle figure di rotazione con applicazione al centro di gravità; inoltre, la misurazione approssimata delle superficie (regola di Simson), il peso dei legnami, di sbarre, travi, lamiere, pietre, liquidi; applicazioni del principio di Archimede sui fluidi; la cubatura di mucchi di carbone, di pietre, sterri o riporti, di volte, la stazzatura delle botti ed infine un breve, elegante e completo cenno sui metodi delle proiezioni ortogonali in *geometria descrittiva*.

In conclusione, per gli eleganti tipi dell'egregio editore Giusti, i sigg. Bettini e Ciamberlini offrono due trattatelli semplici, ma completi e di carattere ben definito e tali da offrire abbondante materia di esercitazione e di ispirazione anche ad insegnanti di scuole non professionali.

S. Bandini.

VIVANTI. — *Elementi della teoria delle equazioni integrali.* Man Hoepli, serie scientifica 286-287-288. Milano, 1916.

“ Mentre i nostri figli combattono valorosamente per liberare l' Europa “ giogo teutonico, a noi, a cui l'età e le forze più non permettono di offri “ braccio alla patria, incombe l'obbligo di lavorare per la sua emancipazione s “ tifica. Una “ scienza nazionale „ è un assurdo, e folle sarebbe chi rifiutass “ vero scientifico perchè sorto al di là delle Alpi e del mare; ma nazionale “ e deve essere l'opera di esposizione e divulgazione scientifica „.

Con queste parole nobilissime (specialmente se si pongono a confronto c geremiadi di certi professori universitari, i quali, a guerra incominciata, oss affermare che non è possibile studiare il Latino ed il Greco senza ricorrere edizioni di Lipsia) l'egregio Autore comincia la prefazione di questo impor libretto, che offre ai giovani il modo di affrontare lo studio di un argomento quale mancava sino ad ora una esposizione organica e sistematica. Ed in q senso si può affermare che egli e l'editore hanno fatto opera patriottica.

È noto che si chiama *equazione integrale* ogni equazione in cui la fun e le funzioni incognite stanno sotto segni d'integrale, e che il tipo della equa lineare con una funzione incognita è

$$f(x) = h(x) \cdot \varphi(x) + \int_{g_2(x)}^{g_1(x)} K(x, y) \cdot \varphi(y) \cdot dy$$

dove φ è una funzione incognita, mentre f, h, K, g_1, g_2 sono funzioni date

Fino ad ora sono state studiate largamente soltanto l'equazioni *linear* cialmente da VOLTERRA, FREDHOLM ed altri.

Più specialmente sono importanti i seguenti tipi particolari che si prese in quistioni di Analisi e di Meccanica.

Equazioni di VOLTERRA di 1ª specie $f(x) = \int_0^x K(x, y) \cdot \varphi(y) \cdot dy.$

„ „ 2ª „ $f(x) = \varphi(x) - \int_0^x K(x, y) \cdot \varphi(y) \cdot dy.$

„ FREDHOLM 1ª „ $f(x) = \int_0^1 K(x, y) \cdot \varphi(y) \cdot dy$

„ „ 2ª „ $f(x) = \varphi(x) - \int_0^1 K(x, y) \cdot \varphi(y) \cdot dy$

Queste equazioni sono la materia trattata nell' interessante operetta, la divisa in quattro capitoli. Il primo contiene alcune proprietà delle funzion litiche, delle equazioni differenziali lineari e dei determinanti, che occorro seguito: il secondo e il terzo trattano delle equazioni di Volterra e di Fre il quarto tratta di alcune importanti applicazioni alla Fisica matematica e colarmente ai potenziali, alle oscillazioni di una corda, alle vibrazioni di una brana, al movimento del calore in un'asta ed in una membrana.

Il libro termina con una estesa *Lista Bibliografica*, redatta con mol genza, la quale agevola singolarmente le ricerche a chi voglia approfon studio dell' importantissimo argomento.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 26 Dicembre 1916

SULLA MOLTIPLICAZIONE E DIVISIONE DELL'ARGOMENTO

NELLE FUNZIONI CIRCOLARI

Applicazione alla teoria dei numeri.

Il presente articolo è un'aggiunta alla mia nota *Sulle formole di moltiplicazione delle funzioni circolari* ecc. (*Periodico*, fasc. IV, a. XXXI), e trae la sua origine da alcune osservazioni che il chiarissimo professore G. FRATTINI, (¹) dell'Istituto Tecnico di Roma, gentilmente mi comunicò riguardo alla seconda parte (n. 2) di quella nota, là dove si fa uso della formola di moltiplicazione dell'argomento della funzione circolare seno, per dimostrare la legge di reciprocità pei resti quadratici.

Tornando, per poco, volentieri sull'argomento presento quella formola sotto un aspetto leggermente diverso in guisa che, la citata legge di reciprocità, possa dedursi con senso non dubbio; aggiungo inoltre alcune osservazioni utili in proposito: di tutto, all'egregio prof. Frattini, che me ne ha dato l'occasione, porgo qui vive grazie.

1. Indicando con m un intero qualunque, positivo e con u la variabile argomento, dalla formola di Moivre

$$\cos mu + i \operatorname{sen} mu = (\cos u + i \operatorname{sen} u)^m$$

collo sviluppo della potenza del binomio, si ha

$$\cos mu = \cos^m u - \binom{m}{2} \cos^{m-2} u \,.\, \operatorname{sen}^2 u + \binom{m}{4} \cos^{m-4} u \,.\, \operatorname{sen}^4 u + \ldots$$

$$\operatorname{sen} mu = m \cos^{m-1} u \,.\, \operatorname{sen} u - \binom{m}{3} \cos^{m-3} u \,.\, \operatorname{sen}^3 u + \\ + \binom{m}{5} \cos^{m-5} u \,.\, \operatorname{sen}^5 u + \ldots,$$

(¹) Mi associo di cuore alle belle parole che la Direzione del *Bollettino di Matematica* ha dettate, nel suo penultimo fascicolo, in occasione del quarantesimo anno di insegnamento del chiarissimo prof. Frattini e della sua domanda di collocamento a riposo dal R. Istituto Tecnico " Leonardo da Vinci " di Roma, e mi duole di avere conosciuto, spiritualmente, soltanto da poco (per la mia recente entrata nell'insegnamento) l'illustre e modesto Uomo. A Lui, anche da queste colonne, il nostro saluto affettuoso e il fervido augurio di un lungo ed operoso ritiro, sempre diretto a beneficio della Scienza e della Scuola.

e queste si trasformano nelle altre (v. l. citato)

$$2\cos mu = (2\cos u)^m - \frac{m}{1}(2\cos u)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2!}(2\cos u)^{m-4} - \ldots$$

$$+(-1)^r \frac{m(m-r-1)(m-r-2)\ldots(m-2r+1)}{r!}(2\cos u)^{m-2r} + \ldots$$

$$\frac{\operatorname{sen} mu}{\operatorname{sen} u} = (2\cos u)^{m-1} - \binom{m-2}{1}(2\cos u)^{m-3} + \binom{m-3}{2}(2\cos u)^{m-5} - \ldots$$

$$+(-1)^r\binom{m-r-1}{r}(2\cos u)^{m-2r-1} + \ldots .$$

La (I) è la *formola di moltiplicazione dell'argomento* nella fu[nzione] circolare coseno e mostra: *Qualunque sia l'intero* m, *cos* mu *è* [un po]*linomio in cos* u *di grado* m, *col primo coefficiente* 2^{m-1} *e cont*[iene] *soltanto le potenze di cos* u *con esponenti della stessa parità di* [m].

L'equazione

$$\cos mu = 0,$$

di grado m in $\cos u$, ha le m radici distinte

$$\cos\frac{\pi}{2m},\quad \cos 3\frac{\pi}{2m},\quad \cos 5\frac{\pi}{2m},\ldots \cos(2m-1)\frac{\pi}{2m},$$

quindi

$$\cos mu = 2^{m-1}\prod_1^m{}_r\left(\cos u - \cos(2r-1)\frac{\pi}{2m}\right).$$

La (II), che è la *formola di moltiplicazione dell'argomento* [nella] funzione circolare seno, nel caso di $m \equiv 1$ (mod. 2), scritta

$$\frac{\operatorname{sen} mu}{\operatorname{sen} u} = 2^{m-1}(1-\operatorname{sen}^2 u)^{\frac{m-1}{2}} - 2^{m-3}\binom{m-2}{1}(1-\operatorname{sen}^2 u)^{\frac{m-3}{2}} + \text{ ec}$$

mostra: *Per* m$\equiv$1 (mod. 2), $\frac{\operatorname{sen} mu}{\operatorname{sen} u}$ *è un polinomio in* sen *u di grad*[o]

col primo coefficiente $(-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot 2^{m-1}$; invece se $m \equiv 0$ (mod. 2), [scritta] così:

$$\frac{\operatorname{sen} mu}{\operatorname{sen} u \cdot \cos u} = 2^{m-1}(1-\operatorname{sen}^2 u)^{\frac{m-2}{2}} - 2^{m-3}\binom{m-2}{1}(1-\operatorname{sen}^2 u)^{\frac{m-4}{2}} - \ldots$$

mostra: *Per* m $\equiv 0$ (mod. 2), $\frac{\operatorname{sen} mu}{\operatorname{sen} u}$ *è il prodotto di*

$$\cos u = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}$$

per un polinomio in sen u *di grado* m $-$ 2 *e col primo coefficien*[te]

$$(-1)^{\frac{m-2}{2}} \cdot 2^{m-1}.$$

Supposto $m \equiv 1 \pmod{2}$ dalla (II)' segue che l'equazione

$$\frac{\operatorname{sen} mu}{\operatorname{sen} u} = 0$$

di grado $m-1$ in $\operatorname{sen} u$, ha le $m-1$ radici distinte

$$\pm \operatorname{sen} \frac{2\pi}{m}, \quad \pm \operatorname{sen} 2\frac{2\pi}{m}, \quad \pm \operatorname{sen} 3\frac{2\pi}{m}, \ldots \pm \operatorname{sen} \frac{m-1}{2}\frac{2\pi}{m}$$

e quindi [1]

$$\frac{\operatorname{sen} mu}{\operatorname{sen} u} = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot 2^{m-1} \prod_{1}^{\frac{m-1}{2}}{}_r \left(\operatorname{sen}^2 u - \operatorname{sen}^2 r\frac{2\pi}{m}\right). \tag{1}$$

Osservando che

$$\lim_{u=0} \cdot \frac{\operatorname{sen} mu}{\operatorname{sen} u} = m,$$

$$\lim_{u=0} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot 2^{m-1} \prod_{1}^{\frac{m-1}{2}}{}_r \left(\operatorname{sen}^2 u - \operatorname{sen}^2 r\frac{2\pi}{m}\right) = 2^{m-1} \prod_{1}^{\frac{m-1}{2}}{}_r \operatorname{sen}^2 r\frac{2\pi}{m} =$$

$$= \prod_{1}^{\frac{m-1}{2}}{}_r \left(2 \operatorname{sen} r\frac{2\pi}{m}\right)^2,$$

si ha pure

$$m = \prod_{1}^{\frac{m-1}{2}}{}_r \left(2 \operatorname{sen} r\frac{2\pi}{m}\right)^2$$

e

$$\frac{\operatorname{sen} mu}{\operatorname{sen} u} = m \prod_{1}^{\frac{m-1}{2}}{}_r \left\{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 u}{\operatorname{sen}^2 r\frac{2\pi}{m}}\right\}.$$

Dalla (1)

$$\operatorname{sen} mu = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot 2^{m-1} \cdot \operatorname{sen} u \prod_{1}^{\frac{m-1}{2}}{}_r \left(\operatorname{sen}^2 u - \operatorname{sen}^2 r\frac{2\pi}{m}\right)$$

si ha, cambiando u in $\frac{\pi}{2} - u$

$$\cos mu = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot 2^{m-1} \cdot \cos u \prod_{1}^{\frac{m-1}{2}}{}_r \left(\cos^2 u - \operatorname{sen}^2 r\frac{2\pi}{m}\right)$$

se $m \equiv 1 \pmod{4}$

e

$$\cos mu = -(-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot 2^{m-1} \cdot \cos u \prod_{1}^{\frac{m-1}{2}}{}_r \left(\cos^2 u - \operatorname{sen}^2 r\frac{2\pi}{m}\right)$$

se $m \equiv 3 \pmod{4}$.

---

[1] Si confronti questa colla (6) della nota citata.

Si ricava

$$\frac{\text{tang}\, mu}{\text{tang}\, u} = \pm \prod_{1}^{\frac{m-1}{2}}{}_r \frac{\text{sen}^2 u - \text{sen}^2 r \dfrac{2\pi}{m}}{\cos^2 u - \text{sen}^2 r \dfrac{2\pi}{m}},$$

ove vale il segno $+$ o il segno $-$ secondo che

$$m \equiv 1 \text{ (mod. 4)} \quad \text{o} \quad m \equiv 3 \text{ (mod. 4)}.$$

2. Dato $\cos u$, $\cos mu$, qualunque sia l'intero m, si calcola sem razionalmente, mentre dato $\text{sen}\, u$, $\text{sen}\, mu$ si calcola razionalmente $m \equiv 1$ (mod. 2), invece se $m \equiv 0$ (mod. 2) c'è da estrarre anche radice quadrata.

Non accade lo stesso pel problema inverso: dato $\cos mu$ o sen trovare $\cos u$ o $\text{sen}\, u$ rispettivamente; questo è il problema della visione dell'argomento nelle funzioni circolari seno e coseno.

Noi lo porremo qui così: *dato*

$$t = \cos u \qquad \text{o} \qquad s = \text{sen}\, u,$$

trovare

$$x = \cos \frac{u}{m} \qquad \text{o} \qquad y = \text{sen} \frac{u}{m},$$

e ci limiteremo al caso del divisore m numero primo, dispari p, tendosi da questo caso particolare, risalire al caso generale ed sendo d'altronde note le formole per la bisezione degli angoli.

Cambiando nelle (I) e (II)' u in $\frac{u}{p}$, per le posizioni

$$t = \cos u \qquad x = \cos \frac{u}{p}$$

$$s = \text{sen}\, u \qquad y = \text{sen} \frac{u}{p},$$

si ha

$$2t = (2x)^p - \frac{p}{1}(2x)^{p-2} + \frac{p(p-3)}{2!}(2x)^{p-4} + \ldots,$$

$$s = 2^{p-1} y (1-y^2)^{\frac{p-1}{2}} - 2^{p-3} \cdot \binom{p-2}{1} \cdot y (1-y^2)^{\frac{p-3}{2}} + \ldots,$$

e si vede che x ed y sono legate a t ed s risp. da una equazion grado p; le radici sono

$$x_0 = \cos \frac{u}{p}, \quad x_1 = \cos \frac{u+2\pi}{p}, \ldots \; x_{p-1} = \cos \frac{u+2(p-1)\pi}{p} \quad \text{per la}$$

e

$$y_0 = \text{sen} \frac{u}{p}, \quad y_1 = \text{sen} \frac{u+2\pi}{p}, \ldots \; y_{p-1} = \text{sen} \frac{u+2(p-1)\pi}{p} \quad \text{per l}$$

Le (a) e (b) sono *le equazioni per la divisione dell'argomento* nelle funzioni circolari seno e coseno.

Dimostriamo ora l'importante teorema: *L'equazione per la divisione dell'argomento nelle funzioni circolari è risolubile per radicali.*

La x e la y sono, per le (a) e (b), funzioni algebriche di t ed s rispettivamente.

Per determinare il *gruppo di monodromia* Γ dell'equazione (a), e quello Γ_1 della (b), bisogna far descrivere a $t = \cos u$ e $s = \operatorname{sen} u$, un cammino chiuso σ nel loro rispettivo piano complesso, ossia bisogna, per la (α), cambiare u in $\pm u + 2\beta\pi$, con β intero, ed inversamente, qualunque sia l'intero β, variando u con continuità da

$$u \quad \text{a} \quad \pm u + 2\beta\pi,$$

la t descrive nel suo piano complesso un cammino chiuso, e, per la (b), bisogna cambiare u in $u + 2\beta\pi$, e viceversa.

L'effetto prodotto sui p rami $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{p-1}$, dal descrivere il cammino chiuso σ, sarà di permutarli fra loro in un certo modo, e precisamente, per questa sostituzione, il ramo x_ν va nel ramo $x_{\nu'}$, ove ν' è definito dalla congruenza

$$\nu' \equiv \pm \nu + \beta \qquad (\text{mod. } p); \tag{c}$$

medesimamente i rami della y si permuteranno, descrivendo il corrispondente cammino chiuso, in un certo altro modo, ogni ramo y_ν si cambierà in $y_{\nu'}$, con

$$\nu' \equiv \nu + \beta \qquad (\text{mod. } p). \tag{d}$$

Dando a β tutti i suoi valori (mod. p), abbiamo che le $2p$ sostituzioni (c) e le p sostituzioni (d), formano rispettivamente i gruppi di monodromia della (a) e della (b); si osservi che le (d) formano il gruppo ciclico sulle p radici y.

I *gruppi algebrici* delle equazioni (a) e (b), dovendo contenere, come è noto, i rispettivi gruppi di monodromia, come sottogruppi invarianti, non conterranno che sostituzioni del *gruppo metaciclico*, quindi coincideranno col gruppo metaciclico stesso, o con sottogruppi puri di esso di ordine multiplo di $2p$ per la (a), e di ordine multiplo di p, per la (b). In ogni caso coincideranno quindi col gruppo metaciclico o con sottogruppi di esso di ordine pr, dati da

$$\nu' \equiv a_i \nu + b \qquad (\text{mod. } p)$$

ove r divide $p-1$, b percorre un sistema completo di resti (mod. p) ed a_i le radici della congruenza $x^r \equiv 1$ (mod. p).

Tali gruppi essendo transitivi, risolubili sopra un numero primo p di elementi ne risulta il teorema enunciato.

Ma la ricerca può spingersi ancora più avanti: limitiamoci, per brevità, alla equazione (a) e mostriamo che il gruppo algebrico di essa, nel campo assoluto di razionalità, è precisamente il gru metaciclico. [1]

Si aggiunga al campo assoluto di razionalità l'irrazionale nu rico $\cos \frac{2\pi}{p}$: nel campo così ampliato quale è il gruppo algeb della (a)? Dico che esso coincide proprio con Γ. Dopo l'aggi di $\cos \frac{2\pi}{p}$, il gruppo algebrico della (a) sarà sempre un sottogru puro o meno, del gruppo metaciclico: sia

$$\nu' \equiv a\nu + b \,(\text{mod. } p)$$

una sua sostituzione.

È

$$\cos \frac{u+2\pi}{p} + \cos \frac{u-2\pi}{p} = 2 \cos \frac{2\pi}{p} \,.\, \cos \frac{u}{p},$$

cioè

$$x_1 + x_{-1} - 2 \,.\, x_0 \,.\, \cos \frac{2\pi}{p} = 0;$$

a questa funzione razionale delle radici della (a), razionalmente (=0), è applicabile qualunque sostituzione dell'attuale gruppo a brico (di Galois), applicando la $\nu' \equiv a\nu$ (mod. p), si ha

$$x_a + x_{-a} - 2 \,.\, x_0 \,.\, \cos \frac{2\pi}{p} = 0 \,.$$

Ma è pure

$$x_a + x_{-a} = \cos \frac{u + 2a\pi}{p} + \cos \frac{u - 2a\pi}{p} = 2 \,.\, x_0 \,.\, \cos a \frac{2\pi}{p},$$

quindi

$$\cos \frac{2\pi}{p} = \cos a \frac{2\pi}{p}$$

cioè

$$a \equiv \pm 1 \,(\text{mod. } p)$$ c. v

Osserviamo che l'aggiunta dell'irrazionale numerico $\cos \frac{2\pi}{p}$ campo assoluto di razionalità, è certamente necessaria se si v effettivamente abbassare il gruppo algebrico di (a) nel campo a luto di razionalità, al gruppo di monodromia Γ, perchè la funz razionale delle radici della (a)

$$\frac{x_1 + x_{-1}}{2x_0} = \cos \frac{2\pi}{p}$$

è invariabile per le sostituzioni di Γ.

---

[1] Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni* ecc. (Pisa, 1900) pag. 241 e seg

Ciò posto, è facile ora determinare il gruppo algebrico G della (a) nel campo assoluto di razionalità.

Infatti, tale gruppo non può essere che il gruppo metaciclico od un suo sottogruppo d'ordine multiplo di $2p$.

Però questo secondo caso va escluso perchè altrimenti l'indice di Γ in G sarebbe un divisore puro di $\frac{p-1}{2}$ e, poichè il gruppo complementare $\frac{G}{\Gamma}$ è Abeliano ciclico, basterebbe la risoluzione della corrispondente equazione Abeliana di grado minore di $\frac{p-1}{2}$ per conoscere razionalmente

$$2\cos\frac{2\pi}{p} = e^{\frac{2\pi i}{p}} + e^{\frac{-2\pi i}{p}} = \varepsilon + \varepsilon^{-1},$$

che dipende, come è noto, da una equazione Abeliana irriducibile di grado $\frac{p-1}{2}$.

Si conclude: *Il gruppo algebrico dell'equazione* (a) *per la divisione dell'argomento per* p, *numero primo dispari, della funzione circolare coseno, nel campo assoluto di razionalità, è il gruppo metaciclico*

$$\nu' \equiv a\nu + b \ (\text{mod. } p),$$

che si riduce al gruppo di monodromia

$$\nu' \equiv \pm \nu + b \ (\text{mod. } p)$$

coll'aggiunta dell'irrazionale numerico $\cos\frac{2\pi}{p}$.

Oltre alla risolubilità per radicali di queste equazioni per la divisione dell'argomento nelle funzioni circolari, si osservi ancora che, nel caso di $p=3$, è necessaria l'estrazione di un radicale cubico e quindi il corrispondente problema geometrico della *trisezione dell'angolo*, non è solubile, in *generale*, elementarmente (riga e compasso).

3. Ricordiamo che dato un numero primo, dispari, positivo p, è sempre possibile spartire un sistema completo di resti (mod. p), con esclusione del termine divisibile per p, in due gruppi tali che i termini del secondo gruppo siano i contrari di quelli del primo, questi due gruppi siano

A) $\qquad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots \ \frac{1}{2}(p-1)$

A') $\qquad -1, \ -2, \ -3, \ldots -\frac{1}{2}(p-1)$.

Ricordiamo pure che il *carattere quadratico*, rispetto a p, di un numero qualunque q, non divisibile per p, è dato dal seguente cri-

terio (di Eulero): q *è residuo quadratico o non residuo di* p, *secon*
che è:

$$q^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1 \quad \textit{oppure} \quad q^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Ora consideriamo i minimi resti positivi dei prodotti

$$1 . q, \quad 2 . q \quad 3 . q, \ldots \frac{p-1}{2} . q$$

rispetto al mod. p: fra essi alcuni, in numero di λ

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots \alpha_\lambda$$

sono minori di $\frac{1}{2} p$ e quindi sono numeri r di A), i rimanenti,
numero di $\mu = \frac{1}{2}(p-1) - \lambda$

$$\beta_1, \quad \beta_2, \ldots \beta_\mu$$

sono maggiori di $\frac{1}{2} p$, e se da ciascuno di essi si toglie p, si ha
numeri $-r$ di A').

Avremo quindi per ogni r_i e per un conveniente r_h

$$r_i q \equiv + r_h \pmod{p} \quad \text{oppure} \quad r_i q \equiv - r_h \pmod{p}$$

e

$$\operatorname{sen} r_i q \frac{2\pi}{p} = + \operatorname{sen} r_h \frac{2\pi}{p} \quad \text{oppure} \quad \operatorname{sen} r_i q \frac{2\pi}{p} = - \operatorname{sen} r_h \frac{2\pi}{p}$$

corrispondentemente, ossia in ogni caso

$$r_i q \equiv r_h \frac{\operatorname{sen} r_i q \frac{2\pi}{p}}{\operatorname{sen} r_h \frac{2\pi}{p}} \pmod{p}.$$

Facendo, in questa, percorrere ad r_i i numeri del gruppo A) m
tiplicando membro a membro le congruenze che così si otteng
e dividendo, come è lecito, i due membri della congruenza così
tenuta per $1 . 2 . 3 \ldots \frac{1}{2}(p-1)$, si ha

$$q^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv \prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_r \frac{\operatorname{sen} rq \frac{2\pi}{p}}{\operatorname{sen} r \frac{2\pi}{p}} \pmod{p},$$

o, usando il simbolo di Legendre

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_r \cdot \frac{\operatorname{sen} rq \frac{2\pi}{p}}{\operatorname{sen} r \frac{2\pi}{p}},$$

che dà il carattere quadratico rispetto a p del numero qualunque q, non divisibile per p.

Se supponiamo adesso anche q numero primo dispari, analogamente si ha

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\prod_{1}^{\frac{q-1}{2}}{}_{r'}\frac{\operatorname{sen} r'p\,\dfrac{2\pi}{q}}{\operatorname{sen} r'\,\dfrac{2\pi}{q}}$$

che dà il carattere quadratico di p rispetto a q.

Infine, ricordando la (1), dal confronto dei secondi membri delle due ultime formole, si ha

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)=$$

$$=2^{\frac{1}{2}(p-1)(q-1)}\prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_{r}\prod_{1}^{\frac{q-1}{2}}{}_{r'}\left(\operatorname{sen}^2 r\,\frac{2\pi}{p}-\operatorname{sen}^2 r'\,\frac{2\pi}{q}\right),$$

da cui

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

che è la nota espressione del teorema di reciprocità pei residui quadratici.

Per dimostrare la legge di reciprocità pei resti quadratici si può anche fare uso delle formole di moltiplicazione dell'argomento per la funzione tangente prese sotto l'aspetto (2), od anche sotto la forma

$$\frac{\operatorname{tg} mu}{\operatorname{tg} u}=\pm\prod_{1}^{\frac{m-1}{2}}{}_{r}\frac{\operatorname{sen}^2 u-\operatorname{sen}^2 r\,\dfrac{\pi}{m}}{\cos^2 u-\operatorname{sen}^2 r\,\dfrac{\pi}{m}},$$

colla solita convenzione riguardo al doppio segno, essendo la tangente a periodo π.

Si trova infatti, procedendo come sopra che:

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$$

se uno almeno dei due numeri p *e* q *è della forma* $4n+1$, *e*

$$\left(\frac{p}{q}\right)=-\left(\frac{q}{p}\right)$$

se ambedue i numeri p *e* q *sono della forma* $4n+3$.

4. La formola (4) trasforma il criterio di Eulero sul carattere quadratico del numero q rispetto al numero primo p in un altro;

infatti, il secondo membro della (4) stessa è il prodotto di $\frac{p-1}{2}$ tori, dei quali, per le (3), λ sono uguali a $+1$ e

$$\mu = \frac{1}{2}(p-1) - \lambda$$

sono uguali a -1, quindi

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\mu};$$

in parole: *se il numero* μ *dei minimi resti positivi dei numeri*

$$1 . q, \ \ 2 . q, \ \ 3 . q, \ldots \frac{1}{2}(p-1) . q,$$

presi rispetto al modulo p, *i quali superano* $\frac{1}{2}$ p, *è pari,* q *è resi* *quadratico di* p, *se è dispari* q *è invece non residuo.* (¹)

Per mezzo di questo criterio possiamo stabilire le forme dei meri primi p, dei quali un dato numero q, non divisibile per residuo o non residuo, per es. per i primi valori di q, cioè

$$q = -1, 2, 3, 5 \ldots .$$

Per $q = -1$ è

$$\mu = \frac{p-1}{2},$$

quindi

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

in parole: *Il numero* -1 *è residuo quadratico di tutti i numeri pr della forma* $4n+1$, *è invece non residuo di tutti i numeri primi d forma* $4n+3$ (Eulero, *Nov. Comm. Petrop.* V).

Per $q = 2$, ciascuno dei numeri

$$1 . 2, \ \ 2 . 2, \ \ 3 . 2, \ldots \frac{1}{2}(p-1) . 2 = p - 1,$$

è il minimo resto positivo di sè stesso (mod. p): il numero quelli di questi resti che sono maggiori di $\frac{1}{2}p$ è determinato d

$$\frac{p-2}{4} < \mu < \frac{p+2}{4},$$

ossia è il massimo intero contenuto in $\frac{p+2}{4}$,

$$\mu = \left[\frac{p+2}{4}\right].$$

(¹) Sopra una ulteriore trasformazione di questo criterio è basata la *terza* delle sette d strazioni date da Gauss per la nostra legge di reciprocità. V. ad. es. Dirichlet, *Dedekind, identheorie*, § 43 e 44.

Si conclude: μ è pari e quindi

$$\left(\frac{2}{p}\right)=+1 \quad \text{se} \quad p\equiv \pm 1 \,(\text{mod. } 8);$$

e μ è dispari, e quindi

$$\left(\frac{2}{p}\right)=-1 \quad \text{se} \quad p\equiv \pm 3 \,(\text{mod. } 8):$$

in parole: *Il numero 2 è residuo quadratico di tutti i numeri primi di una delle due forme* 8n + 1 *od* 8n + 7, *è invece non residuo di tutti i numeri primi di una delle due forme* 8n + 3 *od* 8n + 5 (proposizioni di Fermat, dimostrate la prima volta dal nostro LAGRANGE, *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin,* 1775, pagg. 349-351).

Analogamente potrebbesi continuare per $q=3, 5, \ldots,$ ma essendo questi numeri primi dispari, le corrispondenti proposizioni si ricavano ancora più speditamente dalla già dimostrata legge di reciprocità.

Infatti, per i numeri primi 3 e $p=3n\pm 1$, si ha

$$\left(\frac{3}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{3}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{\pm 1}{3}\right),$$

ma rispetto al mod. 3 è $+1$ residuo e -1 non residuo, se dunque spartiamo i numeri primi (dispari) nelle 4 classi

$$12n+1, \quad 12n+5, \quad 12n+7, \quad 12n+11,$$

si avrà: *Il numero 3 è residuo quadratico di tutti i numeri primi di una delle due forme* $12n+1$, $12n+11$; *è non residuo di tutti i numeri primi di una delle due forme* $12n+5$, $12n+7$ (EULERO, *Nov. Comm. Petrop.* VIII).

Per i numeri primi 5 e p, si ha

$$\left(\frac{5}{p}\right)=\left(\frac{p}{5}\right),$$

ma

$$\left(\frac{p}{5}\right)=\pm 1$$

secondo che p è della forma $5n\pm 1$ o $5n\pm 2$; se dunque si distinguono i numeri primi nelle otto classi

$$\begin{array}{llll} 20n+1, & 20n+3, & 20n+7, & 20n+9 \\ 20n+11, & 20n+13, & 20n+17, & 20n+19 \end{array}$$

si avrà: *Il numero 5 è residuo quadratico dei numeri primi di una delle forme*

$$20n+1, \quad 20n+9, \quad 20n+11, \quad 20n+19$$

e non residuo dei numeri prima di una delle forme

$$20n+3\,,\quad 20n+7\,,\quad 20n+13\,,\quad 20n+17\,.$$

Colla regola moltiplicatrice (per -1) da queste due ultime posizioni si deducono le analoghe per -3 e -5.

A. CERO

APPUNTI SULLA TEORIA DEI GRUPPI

I.

Sui gruppi semplici e sul grado oloedrico di un grup

Sia G un gruppo semplice di ordine n e sia H un suo gruppo di ordine h; è noto che il gruppo G è isomorfo oloe mente [1] ad un gruppo Γ transitivo fra:

$$i=\frac{n}{h}$$

lettere. Se prendiamo per h il massimo ordine dei sottogrup si potrà, di qui, concludere che il minimo numero di lettere deve operare un gruppo, perchè sia isomorfo oloedricamente il numero i così determinato?

Ci proponiamo di dimostrare che tal conclusione è vera.

1. Cominciamo dal dimostrare che: *se* m *è il minimo nu lettere su cui possa operare un gruppo* Γ *isomorfo oloedricam gruppo semplice* G, *il gruppo* Γ *è transitivo rispetto alle* m *letter opera.*

Supponiamo infatti che il gruppo Γ non sia transitivo alle m lettere; cosicchè, fra queste, ne esistano μ, $(\mu<n)$, sono permutabili fra loro da tutte le sostituzioni di Γ. Siano

(1) $$a_1\,,\ a_2\,,\ldots,\ a_\mu$$

queste lettere. Ogni sostituzione Γ_i di Γ sarà della forma:

$$\Gamma_i=\Gamma'_i\,\Gamma''_i$$

essendo Γ'_i una sostituzione fra le (1) e Γ''_i una sostituzione rimanenti $m-\mu$ lettere.

(1) A. CAPELLI, *Istituzione di Analisi algebrica*, 4ª ed. (Napoli, 1909), cap. III, § 13.

Le Γ'_i costituirebbero, evidentemente, un gruppo Γ', isomorfo al gruppo Γ univocamente, cioè in modo che ad ogni sostituzione di Γ corrisponderebbe una unica sostituzione di Γ'.

L'isomorfismo non potrebbe più esser oloedrico; chè, altrimenti, non sarebbe m, come si è supposto, il minimo numero di lettere su cui possa operare un gruppo isomorfo oloedricamente a Γ. Sarà, dunque, un isomorfismo meriedrico; cioè, ad ogni sostituzione di Γ' corrisponderanno ν, $(\nu > 1)$, sostituzioni di Γ. Le ν sostituzioni di Γ che hanno per corrispondenti in Γ' la sostituzione identica formerebbero, in tal caso, un sottogruppo invariante di G; il gruppo Γ non sarebbe semplice, contro il supposto.

L'asserto è dunque dimostrato.

2. Ciò premesso, passiamo a dimostrare che: *se* h *è l'ordine di un sottogruppo* H, *di ordine massimo, contenuto nel gruppo semplice* G *di ordine* n, *l'indice:*

$$i = \frac{n}{h}$$

di H *rispetto a* G *è precisamente uguale al numero* m *testè considerato; cioè al minimo numero di lettere su cui possa operare un gruppo* Γ *oloedricamente isomorfo al gruppo* G.

Ammettiamo, infatti, se è possibile, che sia $m \gtrless i$. Dovrà, intanto, esser necessariamente $m < i$; poichè, se fosse $m > i$, il gruppo complementare destro (¹) di G rispetto H, operante fra gli i periodi:

$$H,\ H_1, \ldots,\ H_{i-1}$$

nei quali si distribuiscono le sostituzioni di Γ quando si assuma come primo periodo il sottogruppo H, sarebbe (²) oloedricamente isomorfo a G, che è semplice, ed opererebbe sopra un numero i di elementi, cioè sopra un numero di lettere inferiore ad m, contro l'ipotesi.

Resta dunque soltanto a supporre che sia $m < i$. In tal caso, essendo, pel prec. Art., il gruppo Γ transitivo rispetto alle m lettere su cui opera, dovrà contenere, come è ben noto, un sottogruppo K,

---

(¹) Le sostituzioni del sottogruppo complementare destro che corrisponde ad una sostituzione qualunque g di G è espressa da:

$$\begin{pmatrix} Hg, & H_1 g, & H_2 g, \ldots, & H_{\nu-1} g \\ H, & H_1, & H_2, \ldots, & H_{\nu-1} \end{pmatrix}.$$

Si potrebbe in egual modo considerare il gruppo complementare *sinistro*, composto dalle sostituzioni:

$$\begin{pmatrix} gH_0, & gH_1, & gH_2, \ldots, & gH_{\nu-1} \\ H_0, & H_1, & H_2, \ldots, & H_{\nu-1} \end{pmatrix}.$$

I due gruppi sono dello stesso ordine e coincidono fra loro quando H è sottogruppo invariante di G.

(²) A. CAPELLI, *ibid.*, Art. 283.

di indice m rispetto a Γ; cioè: quello formato da tutte le sos
zioni di Γ che lasciano ferma una, a piacere, delle lettere su
opera. A questo sottogruppo di Γ corrisponderebbe però, in
sottogruppo dello stesso ordine che sarebbe pure, rispetto a
indice $m < i$; il sottogruppo H non sarebbe dunque, un sottogr
di ordine massimo contenuto in G, contro l'ipotesi.

Il t. si trova, così, completamente stabilito.

3. *Se* G *è un gruppo semplice che contiene entro di sè un altro g semplice* H, *di indice* i *rispetto* G, *e se* H *contiene entro di sè, sottogruppo di ordine massimo, un gruppo* K *di indice* j *rispetto è sempre:*

$$j \leqslant i.$$

Poichè, infatti, H è sottogruppo di G, di indice i, il gruppo
plementare di H rispetto a G è isomorfo univocamente (e q
oloedricamente, G essendo semplice) al gruppo G ed opera s
elementi. In questo isomorfismo, al sottogruppo H di G corri
derà oloedricamente un sottogruppo T del gruppo compleme
che opererà del pari fra i elementi; esiste, dunque, un gruppo
dricamente isomorfo ad H, il quale opera fra i elementi.

D'altra parte, essendo K un sottogruppo di ordine massimo
di indice j rispetto ad H, il minimo numero di elementi su cu
operare un gruppo oloedricamente isomorfo ad H è dato da j,
del prec. Art. Deve dunque essere:

$$i \geqslant j.$$

4. Non è difficile riconoscere che il prec. t. vale anche s
un gruppo composto, purchè H non sia invariante rispetto a
infatti, G è un gruppo composto, l'isomorfismo fra G ed il g
complementare $\frac{G}{H}$ potrà, forse, esser meriedrico, ma la corri
denza fra H ed il gruppo T $\left(\text{corrispondente di H in } \frac{G}{H}\right)$ sa
questo isomorfismo, egualmente oloedrica, G essendo un grupp
plice; fa eccezione il caso in cui a tutte le sostituzioni di H
sponde l'unità ossia, ciò che torna lo stesso, che H sia inva
rispetto G.

In altri termini: *Se un gruppo* G *è isomorfo meriedricame un altro gruppo qualunque* Γ, *alle sostituzioni di* G *appartenenti gruppo semplice* H, *contenuto in* G, *corrispondono in* Γ *altretta stituzioni distinte, in isomorfismo oloedrico; cosicchè, l'isomorfismo e* Γ *sarà*, per es., (v, 1), *ma l'isomorfismo fra* H *ed il suo cor dente in* Γ *sarà* (1, 1).

Supposto, infatti, che le sostituzioni di H alle quali in Γ
sponde l'unità fossero più di una, esse costituirebbero, nel lo

sieme, un sottogruppo di H, invariante rispetto H; ciò che è assurdo, essendo H semplice, a meno che tal sottogruppo non coincida coll'intero gruppo H.

5. Diremo *grado canonico* o *grado oloedrico* di un gruppo semplice: il minimo numero di lettere su cui può operare un gruppo oleodricamente isomorfo a quello considerato.

In base a tale definizione, il t. dell'Art. 2 e quello dell'Art. 3, generalizzato alquanto, come all'Art. 4, si possono enunciare brevemente così:

Teorema I. — *Il grado canonico di un gruppo semplice G è uguale all'ordine di G diviso per l'ordine dei sottogruppi di ordine massimo contenuto in G.*

Teorema II. — *Se m è il grado canonico di un gruppo semplice G e Γ è un gruppo qualunque, che contiene G come sottogruppo (non invariante), il quoziente dell'ordine di Γ e dell'ordine di G è uguale o maggiore di m.*

6. Corollario. — *Sia*

$$1,\ T_1,\ T_2,\ldots,\ T_{\varrho-1},\ G$$

una successione di gruppi contenuti in G, tutti semplici, G compreso; ciascuno di essi sia sottogruppo di ordine massimo rispetto al seguente e, dippiù, si indichi con i_h il quoziente dell'ordine di T_{h+1} e dell'ordine di T_h. Fra gli i_h sussiste la relazione:

$$i_1 \leqq i_2 \leqq \ldots\ldots \leqq i_{\varrho-1} \leqq i_\varrho\,.$$

Se fosse, ad es., $i_{h+1} < i_h$ il gruppo T_h dovrebbe esser composto; ovvero, se T_h fosse semplice, esser dovrebbe invariante rispetto T_{h+1}, che quindi sarebbe composto, contro l'ipotesi.

7. A complemento di quanto si è dimostrato, aggiungiamo l'osservazione, del resto affatto ovvia, che: *se un gruppo G di ordine n è oloedricamente isomorfo ad un gruppo transitivo Γ, che opera su μ lettere, esiste sempre in G un sottogruppo H di ordine $\frac{n}{\mu}$. È anche vera la reciproca, se G è un gruppo semplice.*

Il sottogruppo H non è altro che il corrispondente del gruppo di Γ che lascia ferma una delle μ lettere. Reciprocamente, se esiste in G un sottogruppo H di ordine $\frac{n}{\mu}$, il gruppo G è isomorfo (oloedricamente, se G è semplice) al sottogruppo complementare (destrorso o sinistrorso) di H, che è appunto transitivo sopra μ lettere.

8. Si può dimostrare similmente che: *se un gruppo G, di ordine n, è oloedricamente o meriedricamente isomorfo ad un gruppo Γ transitivo sopra μ lettere, esiste in G un sottogruppo di ordine $\frac{n}{\mu}$ e reciprocamente.*

II.

Sul grado meriedrico di un gruppo.

9. Definiamo come *grado meriedrico* di un gruppo G il min numero di lettere sulle quali possa operare un gruppo Γ *univo mente* isomorfo a G. [1]

Se μ è il grado meriedrico di G, *il gruppo* Γ *operante fra μ lett ed al quale* G *è univocamente isomorfo, è transitivo.* Ciò è ovvio; chè, se μ', $(\mu' < \mu)$, fossero le lettere di uno, che sia T, dei sist di transitività di Γ, è chiaro che ad ogni sostituzione Γ corrisp derebbe univocamente una sostituzione Γ' fra le lettere di T. L costituirebbero, dunque, un gruppo isomorfo univocamente a Γ, c rante su un numero di lettere inferiore a μ; il che è assurdo, sendo μ il grado meriedrico di Γ.

10. *Il grado meriedrico di un gruppo* G *è uguale all'indice rispetto dei sottogruppi di ordine massimo contenuti in* G.

Sia, infatti, μ il grado meriedrico di G ed H un sottogrupp ordine massimo contenuto in G, il cui indice rispetto a G sia gruppo complementare di H rispetto a G opera, come è ben n sopra i lettere e le sue sostituzioni corrispondono isomorficam ed univocamente alle sostituzioni di G. È, dunque, necessariame

$$\mu \leqq i.$$

Supponiamo che sia $\mu < i$. Il gruppo Γ isomorfo univocam a G ed operante (transitivamente, come si è visto nel prec. su μ lettere:

$$a_1, \quad a_2, \ldots, a_\mu$$

contiene un sottogruppo K, di indice μ rispetto a Γ, format tutte quelle sostituzioni di Γ che lasciano ferma la lettera a_1. I sieme di tutte le sostituzioni di G che corrispondono alle s tuzioni di K nell'isomorfismo fra G e Γ costituiranno, dunque sottogruppo di G, dello stesso indice μ rispetto a G; giacchè, se l' morfismo fra G e Γ è un isomorfismo [ν, 1], ogni sottogruppo ha per corrispondente in G un gruppo di ordine eguale al pro moltiplicato per ν, come l'ordine di G è uguale all'ordine di Γ tiplicato per ν.

11. *Se μ è il grado meriedrico di un gruppo* G, *il quale è s gruppo (non invariante) di un altro gruppo* G', *il quoto* i *dell'or di* G' *e dell'ordine di* G *è maggiore di μ.*

---

[1] Cioè l'isomorfismo è tale che: ad ogni sostituzione di G corrisponda un'unica s zione di Γ, ma ad ogni sostituzione di Γ possano anche corrispondere più sostituzioni di escludo, naturalmente, il caso estremo in cui Γ si riduca alla sola sostituzione identica.

Sia infatti Γ' il gruppo complementare di G rispetto al gruppo G'; cosicchè, ad ogni sostituzione di G' corrisponde una sostituzione:

$$\gamma' = \begin{pmatrix} Gg' & , & G_1 g' & , & G_2 g', \ldots, & G_{i-1} g' \\ G & , & G_1 & , & G_2 \quad , & G_{i-1} \end{pmatrix}$$

di Γ', fra gli i periodi destrorsi:

$$(2) \qquad G, \; G_1, \; G_2, \ldots, G_{i-1}$$

nei quali si distribuiscono le sostituzioni di G' quando si prende come primo periodo il gruppo G. Al sottogruppo G, di G', corrisponderà, in Γ', secondo questo isomorfismo, un sottogruppo Γ.

Siano

$$(3) \qquad T_1, T_2, \ldots, T_\mu$$

i sistemi di transitività nei quali si distribuiscono gli elementi (2) su cui opera Γ', rispetto al gruppo Γ. Uno di questi sistemi, ad es. T_1, conterrà il solo elemento G; giacchè tutte le sostituzioni di G hanno evidentemente per corrispondente sostituzioni che lasciano fermo l'elemento G. Degli altri sistemi, ve ne sarà uno almeno, ad es. T_2, che conterrà più di un elemento; giacchè, se tutti i sistemi (3) si componessero, ciascuno, di un solo elemento, ciò significherebbe che le sostituzioni di G lasciano fermi tutti gli elementi (2); cioè che G è sottogruppo invariante di H', contro l'ipotesi.

Se λ è il numero, $(\lambda > 1)$, degli elementi di T_2, si ha, dunque, evidentemente:

$$i = 1 + \lambda + \ldots$$

d'onde

$$(4) \qquad i > \lambda .$$

Poichè ora il gruppo G è isomorfo, oloedricamente o meriedricamente, ad un gruppo di sostituzioni fra λ elementi, deve essere, essendo μ il grado meriedrico di G:

$$\lambda \geqq \mu .$$

Se paragoniamo con la disuguaglianza (4) segue, dunque:

$$\mu < i . \qquad \text{c. b. d.}$$

12. Corollario I. — *Se* H *è un sottogruppo di ordine massimo contenuto in* G *ed è* G *un sottogruppo di ordine massimo contenuto in* G', *l'indice di* H *rispetto a* G *è minore dell'indice di* G *rispetto a* G', *semprechè* G *non sia sottogruppo invariante di* G'.

13. Corollario II. — *Se* H *è un sottogruppo di ordine massimo contenuto in* G *ed è* G *un sottogruppo di ordine massimo contenuto in* G'; *se, di più, l'indice di* H *rispetto a* G *è maggiore od uguale all'indice di* G *rispetto a* G', *il sottogruppo* G *è invariante rispetto a* G'.

14. Esempio. — Il sottogruppo armonico H:

$$1, \quad (ab)\,(cd), \quad (ad)\,(bc), \quad (ac)\,(bd)$$

fra le quattro lettere: a, b, c, d, è un sottogruppo di ordine n
del gruppo alternato G, di ordine 12, fra le stesse quattro let
il gruppo alternato G è, evidentemente, un sottogruppo di
massimo del gruppo simmetrico G′ fra le quattro lettere. Po
questo caso, è:

$$\frac{12}{4} > \frac{24}{12}$$

deve essere (come, infatti, è) il gruppo alternato *invariante* del
simmetrico.

15. Dal Corollario II si deduce subito che *ogni gruppo di*

$$\frac{n\,!}{r}$$

contenuto nel gruppo simmetrico fra n *lettere deve essere un inv*

Si potrà applicar ciò a dimostrare il noto teorema che *i*
alternato è il solo del suo ordine, contenuto nel gruppo simmetr

16. Segue più generalmente, dal Cor. II, che *se un grupp*
mette un sottogruppo H *di ordine uguale alla metà del suo,*
sottogruppo invariante di G.

Questo teorema sembra poter riuscire molto utile a ris
questione di trovar tutti i gruppi di ordine $\frac{\mu}{2}$ contenuti in un
dato di ordine μ.

III.

Di alcuni gruppi isomorfi (o addirittura simili) ai gr complementari di sottogruppi di un gruppo dato

17. Sia H un sottogruppo di un dato gruppo G e sia R i
formato da tutte quelle sostituzioni di G che trasformano il g
in se stesso. Se:

$$\text{(5)} \qquad R, \quad R_1, \quad R_2, \ldots, R_{j-1}$$

sono i periodi destrorsi nei quali si distribuiscono le sostituz
quando si prenda come primo periodo R, i gruppi distinti ne
può esser trasformato mediante sostituzioni di G (i gruppi c
con H) sono j, e precisamente sono i gruppi:

$$\text{(6)} \qquad H, \quad H', \quad H'', \ldots, H^{(j-1)}$$

nei quali H è trasformato rispettivamente: da una sostituzione di R, da una di R_1, da una di $R_2, \dots$; giacchè, essendo un qualunque periodo R_i della forma Rv_i (detta v_i una certa sostituzione di G) è subito riconosciuto che le sostituzioni di uno stesso periodo (5) trasformano H in uno stesso gruppo.

Detta g una sostituzione qualunque di G, essa ha per corrispondente nel gruppo complementare di R rispetto a G, ad esso univocamente isomorfo, la sostituzione γ fra i periodi (5) definita dalla formola:

$$\gamma = \begin{pmatrix} Rg, & R_1 g, & R_2 g, \dots, & R_{j-1} g \\ R, & R_1, & R_2, \dots, & R_{j-1} \end{pmatrix}.$$

D'altra parte, a quella stessa sostituzione g corrisponde una sostituzione δ fra i gruppi (6), definita dalla formola:

$$\delta = \begin{pmatrix} g^{-1} Hg, & g^{-1} H'g, & g^{-1} H''g, \dots, & g^{-1} H^{(j-1)} g \\ H, & H', & H'', \dots, & H^{(j-1)} \end{pmatrix};$$

cioè, la sostituzione che avviene fra i gruppi H, H', H'',..., quando essi si trasformano tutti mediante la g. Tutte queste sostituzioni δ costituiscono evidentemente un gruppo Δ univocamente isomorfo al gruppo G.

Ciò posto, se g è una sostituzione qualunque di G, la sostituzione γ, corrispondente a g, cangerà R_s in $R_s g$; ma dall'uguaglianza

$$R_s g = R_\sigma$$

segue:

$$(R_s g)^{-1} H (R_s g) = R_\sigma^{-1} H R_\sigma$$

cioè anche:

$$g^{-1} (R_s^{-1} H R_s) g = R_\sigma^{-1} H R_\sigma$$

che può scriversi:

$$g^{-1} H^{(s)} g = H^{(\sigma)}.$$

Si vede dunque che, se la sostituzione γ cangia R_s in R_σ, la sostituzione δ cangia $H^{(s)}$ in $H^{(\sigma)}$. Ciò significa che i due gruppi Γ e Δ sono simili fra loro e precisamente che la sostituzione γ di Γ si cangia nella corrispondente δ di Δ, se le lettere (5), su cui opera Γ, si surrogano rispettivamente con le lettere (6) su cui opera Δ. In altri termini, il gruppo Δ altro non è che il gruppo Γ trasformato mediante la sostituzione:

$$\begin{pmatrix} H, & H', & H'', \dots, & H^{(j-1)} \\ R, & R_1, & R_2, \dots, & R_{j-1} \end{pmatrix}.$$

Si ha dunque il

Teorema I. — *Se H è un sottogruppo di G ed R è il gruppo formato da tutte le sostituzioni di G che trasformano in se stesso il gruppo H, ogni sostituzione di G trasformerà i gruppi coniugati di H gli uni negli* *altri, eseguendo fra essi una sostituzione* δ. *Tutte queste sostituzioni* *costituiscono un gruppo simile al gruppo complementare del gruppo* I *rispetto al gruppo* G.

18. In luogo dei periodi *destrorsi* (5) originati dal primo periodo R possiamo considerare gli j periodi *sinistrorsi*

$$(5') \qquad R, \; R'_1, \; R'_2, \ldots, R'_{j-1}.$$

Ad ogni sostituzione g^{-1} di G corrisponde allora, con isomorfism univoco, nel gruppo complementare sinistrorso Γ' di R, rispetto a G la sostituzione:

$$\gamma' = \begin{pmatrix} gR, & gR'_1, & gR'_2, \ldots, & gR'_{j-1} \\ R, & R'_1, & R'_2, \ldots, & R'_{j-1} \end{pmatrix}$$

ed inoltre la sostituzione:

$$\delta' \equiv \begin{pmatrix} gHg^{-1}, & gH'g^{-1}, & gH''g^{-1}, \ldots, & gH^{(j-1)}g^{-1} \\ H, & H', & H'', \ldots, & H^{(j-1)} \end{pmatrix}$$

e tutte le δ' costituiranno un gruppo (univocamente isomorfo [1] gruppo G, se alla δ' si fa corrispondere la g^{-1}) che indicheremo con Δ'

Intanto, se con r'_h intendiamo una qualunque delle sostituzio del periodo R'_h (poichè le r'_h sono della forma $v_h r$, essendo r u certa sostituzione di R) si vede subito che il gruppo $R'_h HR'^{-1}_h$ indipendente dalla scelta di r'_h entro R'_h e si vede inoltre che gruppo $R'_h HR'^{-1}_h$ non potrebbe coincidere col gruppo $R'_k HR_k$ p $h \neq k$.

Se, dunque, immaginiamo scritte le (5'), come è sempre lecito, un ordine fissato opportunamente, possiamo ritenere che si abbia unitamente alle eguaglianze già considerate nel prec. Art.:

$$(7) \quad H = R^{-1}HR, \quad H' = R_1^{-1}HR_1, \quad H'' = R_2^{-1}HR_2, \ldots \\ \ldots, \quad H^{(j-1)} = R_{j-1}^{-1}HR_{j-1}$$

anche le altre:

$$(7') \quad H = R'HR'^{-1}, \quad H' = R'_1HR'^{-1}_1, \quad H'' = R'_2HR'^{-1}_2, \ldots \\ \ldots, \quad H^{(j-1)} = R'_{j-1}HR'^{-1}_{j-1}$$

e precisamente si vede che, se R_h è uno qualunque dei periodi d strorsi (5) si dovrà prendere come periodo sinistrorso corrispo dente R'_h quello formato dalle sostituzioni *inverse* delle sostituzio che compongono R_h.

Ciò premesso, è facile riconoscere che *il gruppo* Γ' *è simile gruppo* Δ' *e precisamente che il gruppo* Γ' *diventa* Δ' *se nelle sosti zioni di* Γ', *le lettere*:

$$R_1, \; R'_1, \; R'_2, \ldots, R'_{j-1}$$

---

[1] Ma non nel senso che a g corrisponda δ', bensì nel senso che a g^{-1} corrisponde δ'.

si chiamano rispettivamente:

$$H,\ H',\ H'',\dots,\ H^{(j-1)}.$$

Se, infatti, la γ' cambia R'_s in $R_t = gR'_s$, dall'eguaglianza scritta segue:

$$(gR'_s)\, H\, (gR'_s)^{-1} = R'_t\, HR'^{-1}_t$$

od anche

$$gR'_s\, HR'^{-1}_s\, g^{-1} = R'_t\, HR'^{-1}_t$$

cioè, per le (7'):

$$gH^{(s)}\, g^{-1} = H^{(t)}$$

d'onde si vede appunto che la sostituzione δ' corrispondente alla γ' cangerà $H^{(s)}$ in $H^{(t)}$. Se dunque γ' cangia R'_s in R'_t, la γ' cangia $H^{(s)}$ in $H^{(t)}$.

19. Nell'isomorfismo fra G ed il gruppo Γ, complementare di R, alle sostituzioni di H corrisponderanno le sostituzioni di un sottogruppo K del gruppo Γ. Il gruppo Γ non sarà però, come il gruppo G, transitivo nelle lettere (5) su cui opera, poichè la R resta evidentemente ferma per qualsivoglia sostituzione di K.

Siano dunque:

$$R,\ T_1,\ T_2,\dots,\ T_\lambda$$

i $\lambda+1$ sistemi di transitività (¹) nei quali si distribuiscono le (5) rispetto al gruppo K: cosicchè, se:

$$1,\ \mu_1,\ \mu_2,\dots,\ \mu_\lambda$$

sono rispettivamente i numeri di lettere contenuti in ciascun sistema, sarà:

$$1+\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_\lambda = j.$$

Supponiamo che uno dei λ numeri μ_i ad es. μ_1, sia eguale all'unità. Ciò significa che il sistema T_1 si compone dell'unica lettera R_1 e che, se H_j è una qualunque delle sostituzioni di H, si ha:

$$R_1^{(\alpha)}\, H_j = R_1^{(\beta)}$$

essendo $R_1^{(\alpha)}$ una qualunque delle sostituzioni di R_1 ed $R_1^{(\beta)}$ una, opportunamente scelta, fra le sostituzioni di R_1. Da quest'eguaglianza segue:

$$R_1^{(\alpha)}\, H_i\, \{R_1^{(\alpha)}\}^{-1} = R_1^{(\beta)}\, \{R_1^{\alpha}\}^{-1} = \text{una sostituzione di } R;$$

cioè, che il gruppo H è trasformato, da una qualunque delle sostituzioni di R_1, in un gruppo tutto contenuto in R; e reciprocamente.

(¹) Diremo, d'ora innanzi, che un certo aggregato A di lettere scelte fra quelle su cui opera un certo gruppo G è un *sistema di transitività* di G se le sostituzioni di G permettono di sostituire ad una qualunque delle lettere di A un'altra qualunque delle lettere di A e solo lettere di A. Diremo anche, qualche volta, che l'aggregato A è un *sistema di intransitività* di G se le sostituzioni di G non permettono di sostituire alle lettere di A lettere estranee ad A. Si vede, dunque, che, secondo queste definizioni, un sistema di transitività è anche sistema di intransitività; ma un sistema di intransitività non è necessariamente un sistema di transitività.

Vediamo dunque che *fra i numeri:*

$$(8) \qquad \mu_1, \ \mu_2, \ldots, \mu_l$$

ve ne sono tanti, uguali all'unità, quanti sono i gruppi coniugati ad (*esclusa la stessa* H) *contenuti in* R.

Quelli, dei numeri (8), *che non sono uguali all'unità, sono tutti d risori dell'ordine di* H.

Infatti, il gruppo K, che è univocamente isomorfo ad H, è tra sitivo rispetto alle μ_2 lettere del sistema T_2. Il numero μ_2 è, dunqu un divisore dell'ordine di K; e quindi anche dell'ordine di H_1 che in ogni caso, un multiplo dell'ordine di H.

A. Palomby.

SULLA RIDUTTIBILITÀ DELLE EQUAZIONI

1. Il problema: *riconoscere se la funzione intera:*

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

sia riduttibile nel campo di razionalità dei suoi coefficienti (che suppo remo, per semplicità, esser quello dei numeri razionali) coincide c l'altro: *riconoscere se esistono* $n-1$ *numeri razionali:*

$$b_1, \ b_2, \ldots, b_{n-1}$$

tali che il polinomio:

$$x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$$

abbia in comune (¹) *col polinomio* (1) *un divisore che sia almeno primo grado in* x; come ora facilmente si riconosce. Se dunque niamo:

$$R(b_1, b_2 \ldots b_{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \ldots a_n & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 \ldots a_{n-1} & a_n & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \ldots 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 & a_1 & a_2 & \ldots a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ 1 & b_1 & b_2 \ldots b_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & b_1 \ldots b_{n-2} & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & \ldots & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 & b_1 & b_2 & \ldots b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

(¹) Vedi A. Capelli, *Istituzioni di Analisi algebrica.* Quarta ed. (Napoli, 1909), cap. XXI, vediamo che: *condizione necessaria e sufficiente affinchè la* (1) *sia riduttibile nel campo dei numeri razionali è che l'equazione:*

$$R(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}) = 0$$

sia risolvibile con un sistema di valori razionali delle:

$$b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}.$$

Il problema algebrico equivale, così, ad un problema puramente aritmetico.

2. La (1) abbia, ora, la forma:

$$x^n - A;$$

posto, per brevità:

$$b_i = 0 \qquad (i > n-1)$$

si ha:

$$R(b_1, b_2, \ldots b_{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -A & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & & 0 & -A & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & & 0 & 0 & -A & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -A \\ 1 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} & b_n & b_{n+1} & b_{n+2} & & b_{2n-3} & b_{2n-2} \\ 0 & 1 & b_1 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & b_{n+1} & & b_{2n-4} & b_{2n-3} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & & b_{2n-5} & b_{2n-4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

ossia, aggiungendo alla $n+1^{ma}$ colonna la prima moltiplicata per A, alla $n+2^{ma}$ colonna la seconda moltiplicata per A, e così via:

$$R(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}) = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_n + A & b_{n+1} + Ab_1 & \ldots & b_{2n-2} + Ab_{n-2} \\ b_{n-2} & b_{n-1} & b_n + A & & b_{2n-3} + Ab_{n-3} \\ b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & & b_{2n-4} + Ab_{n-4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1 & b_2 & b_3 & & b_n + A \\ 1 & b_1 & b_2 & & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

Poichè:

$$b_n = b_{n+1} = \ldots = b_{2n-2} = 0,$$

il determinante del secondo membro non è che il *circolante* formato cogli elementi:

$$1, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1},$$

in cui tutti gli elementi a destra della diagonale principale si trovano, inoltre, moltiplicati per A.

3. Indichiamo con:

$$\alpha_1 = 1\,, \quad \alpha_2\,, \quad \alpha_3\,, \ldots, \alpha_n$$

le radici n^{me} dell'unità; cosicchè, posto:

$$A = a^n\,,$$

siano:

$$a\,, \quad \alpha_2 a\,, \quad \alpha_3 a\,, \ldots, \alpha_n a$$

le radici dell'equazione:

$$x^n - A = 0\,.$$

È chiaro che, se:

$$b_1\,, b_2\,, \ldots, b_{n-1}$$

soddisfano alla condizione:

$$a^{n-1}\alpha_i^{n-1} + b_1 a^{n-2}\alpha_i^{n-2} + \ldots + b_{n-2}\,a\alpha_i + b_{n-1} = 0\,,$$

l'equazione:

$$x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1} = 0$$

avrà una radice: $a\alpha_i$ in comune con la (3); sarà quindi:

$$R(b_1\,, b_2\,, \ldots, b_{n-1}) = 0\,,$$

la funzione intera delle $n-1$ *variabili* (4) è, dunque, esattan
divisibile per:

$$a^{n-1}\alpha_i^{n-1} + b_1 a^{n-2}\alpha_i^{n-2} + \ldots + b_{n-2}\,a\alpha_i + b_{n-1}\,;$$

e poichè i può assumere i valori 1, 2, ..., n, si vede che dove es
a meno di un fattore indipendente dalle (4):

$$R(b_1\,, b_2\,, \ldots, b_{n-1}) = \prod_{i=1}^{i=n} \{a^{n-1}\alpha_i^{n-1} + b_1 a^{n-2}\alpha_i^{n-2} + \ldots + b_{n-2}\,a\alpha_i +$$

Se poniamo nella identità precedente:

$$b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_{n-2} = b_{n-1} = 0$$

si determina il fattore indipendente dalle (4): così:

$$R(b_1\,, b_2\,, \ldots, b_{n-1}) =$$
$$= (-1)^{n-1} A^{n-1} \prod_{i=1}^{i=n} \{a^{n-1}\alpha_i^{n-1} + b_1 a^{n-2}\alpha_i^{n-2} + \ldots + b_{n-2}\,a\alpha_i + b$$

Più semplicemente, indicando con:

$$A_1\,, A_2\,, \ldots, A_n$$

le radici della (3), si ha, identicamente nelle (4):

$$R(b_1\,, b_2\,, \ldots, b_{n-1}) =$$
$$= (-1)^{n-1} A^{n-1} \prod_{i=1}^{i=n} \{A_i^{n-1} + b_1 A_i^{n-2} + \ldots + b_{n-2}\,A_i + b_n$$

4. Cerchiamo, ad es., quale sia la condizione [1] per la riduttibilità di:

$$x^3 - A;$$

essa coincide con quella: *che si possano trovare due numeri razionali*

$$b,\ c$$

soddisfacenti alla condizione:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -A & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -A \\ 1 & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b & c \end{vmatrix} = 0$$

ossia:

$$c^3 + Ab^3 - 3Abc + A^2 = 0. \tag{5}$$

Posto:

$$b = c = x$$

si deduce che: *la relazione*

$$x^3 + A\,x^3 - 3Ax^2 + A^2 = 0$$

può esser soddisfatta da valori interi di x *e di* A, *soltanto se* A *è un cubo esatto.*

5. Dalla (5), si ha:

$$2A = 3bc - b^3 \pm \sqrt{(b^3 - 3bc)^2 - 4c^3}.$$

Se, dunque:

$$(b^3 - 3bc)^2 - 4c^3$$

è un quadrato esatto Δ^2 e se:

$$3bc - b^3 \pm \Delta \tag{6}$$

è un numero pari, il numero:

$$\frac{3bc - b^3 \pm \Delta}{2}$$

è un cubo esatto.

E, però, superflua la condizione che (6) sia un numero pari, essendo simultaneamente pari o dispari i due numeri:

$$3bc - b^3, \qquad (b^3 - 3bc)^2 - 4c^3$$

e quindi anche:

$$3bc - b^3, \qquad \sqrt{(b^3 - 3bc)^2 - 4c^3}.$$

---

[1] Ben nota: che A sia il cubo di un numero razionale.

6. Se

$$(b^3 - 3bc)^2 - 4c^3 = \Delta^2$$

si ha, dunque, detti A_1 ed A_2 due numeri interi:

$$2A_1^3 = 3bc - b^3 + \Delta$$
$$2A_2^3 = 3bc - b^3 - \Delta$$

d'onde:

$$A_1^3 + A_2^3 + b^3 = 3bc.$$

Di quì: *Se i numeri interi* b *e* c *soddisfano alla* (7), *il numero* *è somma di tre cubi.*

A. PALOMBY

SUL NUMERO DELLE SOSTITUZIONI TRA n ELEMENTI

prive di elementi fissi

Nello studio di un problema di probabilità mi sono imbattu' una espressione assai semplice la quale rappresenta *il numero* *sostituzioni tra* n *elementi le quali spostano tutti questi elementi*; conseguenza anche *il numero dei termini dello sviluppo di un d* *minante di ordine* n *che non contengono elementi diagonali.* Qu determinazione può farsi in diversi modi e porta ad un cu risultato asintotico che giova forse notare.

1. Possiamo arrivare direttamente alla desiderata espressione diante un metodo schiettamente combinatorio. Essendo cioè

$$a_1,\ a_2, \ldots a_n$$

i dati elementi, si osservi che delle $\underline{|n}$ sostituzioni possibili tra $\underline{|n-1}$ lasciano fisso l'elemento a_1; quindi il numero di quelle spostano a_1 è

$$\Delta\,\underline{|n-1} = \underline{|n} - \underline{|n-1}\,.\ (^1)$$

Così tra le $\underline{|n-1}$ sostituzioni che lascian fisso a_2, ve ne sono [che lascian fisso a_1 e

$$\Delta\,\underline{|n-2} = \underline{|n-1} - \underline{|n-2}$$

---

(1) Per la simbolica delle differenze e per tutto ciò che riguarda questa teoria seguo ((*Analisi algebrica*, Torino, Bocca, 1894, pag. 460 e segg.).

che spostano a_1. La differenza

$$\Delta^2 \underline{|n-2} = \Delta \underline{|n-1} - \Delta \underline{|n-2}$$

sarà il numero delle sostituzioni tra gli n elementi che spostano a_1 e a_2.

Poichè le sostituzioni che lascian fisso a_3 operano solo su $n-1$ elementi, il numero di quelle tra esse che spostano a_1 e a_2 si avrà cambiando nella precedente espressione n in $n-1$; sarà cioè $\Delta^2 \underline{|n-3}$. E allora il numero delle sostituzioni tra n elementi che spostano a_1, a_2 e a_3 sarà:

$$\Delta^3 \underline{|n-3} = \Delta^2 \underline{|n-2} - \Delta^2 \underline{|n-3}.$$

Procedendo su siffatta via si ottiene evidentemente che il numero delle sostituzioni tra n elementi che spostano certi r elementi è $\Delta^r \underline{|n-r}$ e il numero di quelle che spostano tutti gli n elementi è:

$$Q_n = \Delta^n \underline{|0}. \tag{1}$$

Ricorrendo ad una formola fondamentale del calcolo delle differenze si ottiene per Q_n l'espressione esplicita

$$Q_n = \underline{|n} - \binom{n}{1} \underline{|n-1} + \binom{n}{2} \underline{|n-2} - \ldots + (-1)^n -$$

$$= \underline{|n} - \frac{\underline{|n}}{\underline{|1}} + \frac{\underline{|n}}{\underline{|2}} - \ldots + (-1)^n \frac{\underline{|n}}{\underline{|n}} =$$

$$= 1.2.3.4\ldots n - 2.3.4\ldots n + 2.4\ldots n - \ldots + (-1)^n \tag{2}$$

2. Con il seguente metodo deduciamo invece il valore di Q_n da una formula ricorrente. Se una sostituzione tra n elementi sposta tutti questi elementi, nella sua decomposizione in cicli non vi saranno cicli di meno di due elementi, Sicchè a_n, per es., apparterrà a un ciclo di una delle forme

$$(a_n\, a_r) \qquad \text{oppure} \qquad (a_n\, a_{r_1}\, a_{r_2} \ldots a_{r_3}\, a_{r_k}) \qquad (k > 1).$$

Nel primo caso la soppressione del ciclo riduce la sostituzione ad una senza elementi fissi operante su $n-2$ elementi; e di queste ve ne sono Q_{n-2} per un dato a_r, e $(n-1)Q_{n-2}$ se si dànno ad r i possibili valori. Nel secondo la soppressione di a_n nel ciclo, cioè la riduzione di esso ad $(a_{r_1}\, a_{r_2} \ldots a_{r_k})$ riduce la sostituzione ad una senza elementi fissi operante su $n-1$ elementi; e di queste ve ne sono Q_{n-1}, ciascuna delle quali però ha origine da $n-1$ diverse sostituzioni distinte sugli n elementi, potendo a_n avere nei cicli una posizione arbitraria.

Da questa considerazione risulta la formula ricorrente:

$$Q_n = (n-1)\,Q_{n-1} + (n-1)\,Q_{n-2}\,.$$

Avendosi evidentemente $Q_1 = 0$, $Q_2 = 1$ si ricavano i valori

$$Q_3 = 2\,,\quad Q_4 = 9\,,\quad Q_5 = 44\,,\ \ldots .$$

È utile per uniformità formale introdurre un elemento Q_0 ch
legato a Q_1 e Q_2 dalla (3) nella quale si faccia $n = 2$; si ottien
bito $Q_0 = 1$.

Dalla (3) si ricava subito

$$\frac{Q_n}{\underline{|n}} = \frac{n-1}{n}\,\frac{Q_{n-1}}{\underline{|n-1}} + \frac{1}{n}\,\frac{Q_{n-2}}{\underline{|n-2}}$$

che ponendo in generale $\dfrac{Q_r}{\underline{|r}} = \omega_r$ si scrive:

$$\omega_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\omega_{n-1} + \frac{1}{n}\,\omega_{n-2}$$

e anche:

$$\omega_n - \omega_{n-1} = -\frac{1}{n}\,(\omega_{n-1} - \omega_{n-2})\,.$$

Facendo in questa la successiva sostituzione di n in

$$n-1\,,\quad n-2\,,\ldots 2\,,$$

moltiplicando membro a membro e semplificando si ottiene:

$$\omega_n - \omega_{n-1} = \frac{(-1)^n}{\underline{|n}}$$

avendo sostituito a $\omega_1 - \omega_0$ il suo valore -1. E mutando a
qui n in $n-1$, $n-2$, ... 2 e sommando si ottiene facilmente
$n > 1$,

$$\omega_n = \sum_2^n \frac{(-1)^r}{\underline{|r}} = \sum_0^n \frac{(-1)^r}{\underline{|r}} = 1 - \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} - \ldots + \frac{(-1)^n}{\underline{|n}}$$

la quale ultima forma vale anche per $n = 0$ e $n = 1$.

Di qui si ha subito per Q_n l'espressione data dalla (2).

3. Il significato e la forma di ω_n sono ambedue notevoli. Es
infatti $\underline{|n}$ il numero totale delle sostituzioni tra n elementi, il
porto $\omega_n = \dfrac{Q_n}{\underline{|n}}$ rappresenta *la probabilità che una sostituzione*
traria sposti tutti i suoi n *elementi.* L'espressione (4) indica poi c
è la somma dei primi $n+1$ termini della serie che sviluppa

$$e^{-1} = \frac{1}{e}$$

secondo la formula esponenziale. Si ha perciò

$$\lim_{n=\infty} \omega_n = \lim_{n=\infty} \frac{Q_n}{|\underline{n}} = \frac{1}{e}$$

cioè che *l'anzidetta probabilità tende per* n *infinito a* $\frac{1}{e}$.

Il numero Q_n è dunque rappresentato asintoticamente per n crescente, da $\frac{1}{e}\,|\underline{n} = 0{,}3678794412\ldots|\underline{n}$. E la grande esattezza di questa valutazione è provata dal teorema seguente: Q_n *è l'intero più vicino al prodotto* $\frac{1}{e}\,|\underline{n}$.

Si ha infatti per le proprietà delle serie:

$$\left|\omega_n - \frac{1}{e}\right| < \frac{1}{|\underline{n+1}}$$

e quindi, moltiplicando per $|\underline{n}$:

$$\left|Q_n - \frac{1}{e}\,|\underline{n}\right| < \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$$

per $n \geqslant 1$; e ciò dimostra l'asserto.

4. Dai risultati precedenti si può anche ricavare una formula per *il numero di quelle sostituzioni che lasciano fissi* r *elementi e non più*. Poichè esse si ottengono associando ad r elementi arbitrari, tenuti fissi, le permutazioni dei rimanenti $n-r$ che spostano tutti questi elementi, il loro numero è evidentemente:

$$Q'_{n,r} = \binom{n}{r} Q_{n-r}.$$

Questa relazione si presta a dimostrare per via combinatoria una proprietà algebrica dei numeri Q, che per noi deriva già immediatamente dalla (1). Per questo si osservi che la classe totale delle sostituzioni su n elementi si può immaginare scomposta nelle classi parziali delle sostituzioni che lasciano fissi rispettivamente

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots n$$

elementi e non più, sicchè si ha:

$$|\underline{n} = Q'_{n,0} + Q'_{n,1} + Q'_{n,2} + \ldots + Q'_{n,n}$$

ossia:

$$|\underline{n} = \binom{n}{0} Q_n + \binom{n}{1} Q_{n-1} + \ldots + \binom{n}{n} Q_0.$$

Simbolicamente:

$$|\underline{n} = (Q+1)^n.$$

Questa equazione, per i principi del calcolo delle differen: mostra nuovamente la (1), anzi le equivale perfettamente.

5. La formula ricorrente:

$$Q_n = (n-1)\,Q_{n-1} + (n-1)\,Q_{n-2}$$

posta a riscontro con l'altra di prova immediata:

$$|\underline{n} = (n-1)\,|\underline{n-1} + (n-1)\,|\underline{n-2},$$

suggeriscono di considerare le frazioni $\dfrac{Q_n}{|\underline{n}} = \omega_n$ come ridotte frazione continua generale avente le frazioni $\dfrac{n-1}{n-1}$ come c nenti parziali, almeno per $n > 3$. Disponendo opportunament prime componenti, si trova subito che è:

$$\omega_n = \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 \; \ddots \; \cfrac{n-1}{n-1}}}}},$$

e quindi, al limite per $n = \infty$, con l'inversione dei due mem

$$e = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \ddots}}}$$

Questa formula è ben nota (1); pure non mi è parso inu mostrarne l'imprevedibile collegamento con la semplice qu combinatoria da cui siamo partiti.

G. Asc

(1) V. per es. TODHUNTER, *Teoria delle equazioni*. Napoli, Pellerano, 1872, pag. 430,

APPROSSIMAZIONI NUMERICHE: PRODOTTO [1]

1. Di due numeri reali (positivi) x, y siano a, b due valori approssimati, per difetto, a meno di d, d_1 rispettivamente; avremo

$$a \leqq x < a + d, \qquad b \leqq y < b + d_1,$$

da cui, moltiplicando membro a membro,

$$ab \leqq xy < (a + d)(b + d_1) = ab + ad_1 + bd + dd_1,$$

e quindi

$$ab \leqq xy < ab + d', \tag{1}$$

essendo d' un qualsivoglia numero tale che si abbia

$$d' \geqq ad_1 + bd + dd_1 = ad_1 + (b + d_1)d; \tag{2}$$

vale a dire, ab è un valore approssimato di xy, per difetto, con l'approssimazione d', che si può prendere eguale al prodotto del valore per difetto del 1° fattore per l'approssimazione del 2°, più il prodotto del valore per eccesso del 2° per l'approssimazione del 1°; laddove $(a + d)(b + d_1)$ è un valore approssimato di xy, per eccesso, con la medesima approssimazione d'.

Per $d = d_1$ si ha

$$d' \geqq (a + b + d)\, d. \tag{3}$$

2. Si dimostra che nella relazione (1) del numero precedente si può assumere

$$d' \geqq a'' d_1 + b'' d, \tag{4}$$

ove a'', b'' sono due qualunque valori per eccesso di x, y, cioè

$$a'' > x, \qquad b'' > y.$$

Infatti, poichè $a'' > a$, se $b'' > b + d_1$, per la (2) del numero precedente possiamo prendere, a più forte ragione, d' dato dalla (4).

Se, invece, $b'' < b + d_1$, avremo $b'' - d_1 < b$, e quindi

$$b'' - d_1 < y < (b'' - d_1) + d_1,$$

[1] È questo, con alcune ommissioni e lievi varianti, un estratto da un mio lavoro sulle *Approssimazioni numeriche*, che sarà pubblicato tra breve, e che comprenderà i seguenti paragrafi: *Premesse — Errori assoluti — Valori approssimati decimali — Somma — Prodotto — Moltiplicazione abbreviata — Quoziente — Divisione abbreviata — Potenze — Radici — Calcoli semplici e complessi — Errori relativi.*

onde per le (1) e (2) di n. precedente sarà

$$a(b''-d_1) < xy < a(b''-d_1) + ad_1 + (b''-d_1+d_1)\,d,$$

ma si ha

$$ab \gtrless xy, \qquad a(b''-d_1) < ab, \qquad ad_1 + (b''-d_1+d_1)\,d < a''d_1 + b''d$$

epperò sarà

$$ab \gtrless xy < ab + a''d_1 + b''d,$$

cioè anche in questo caso vale la (4).

Per $d = d_1$ la (4) si muta nella

$$d' \geqq (a''+b'')\,d. \tag{5}$$

Se si vuole determinare l'approssimazione d dei due fattori del pr dotto xy in modo che il prodotto per difetto ab abbia l'approssimazio prefissata d' (*problema inverso*), basta che sia soddisfatta la (5), ci che si abbia

$$d \gtrless \frac{d'}{a''+b''}. \tag{6}$$

Si potrà ottenere per il prodotto ab l'approssimazione prefissata senza di che i due fattori abbiano una medesima approssimazio data dalla (6), poichè basterà che le approssimazioni d e d_1 dei d fattori soddisfino alla (4), — la quale per es. sarà soddisfatta per

$$a''d_1 \leqq \frac{d'}{2}, \qquad b''d \leqq \frac{d'}{2}. \text{ (1)} \tag{7}$$

3. Siano a_n, b_n i due valori con n decimali di x, y, a meno di 0, avremo

$$a_n b_n \leqq xy < (a_n + 0{,}1^n)(b_n + 0{,}1^n)$$

ossia

$$a_n b_n \leqq xy < a_n b_n + (a_n + b_n + 0{,}1^n) \,.\, 0{,}1^n. \tag{1}$$

Se a_0, b_0 sono le parti intere di x, y, sarà

$$a_n < a_0 + 1, \qquad b_n + 0{,}1^n \leqq b_0 + 1,$$

e quindi avremo a più forte ragione

$$a_n b_n \leqq xy < a_n b_n + (a_0 + b_0 + 2) \,.\, 0{,}1^n. \tag{2}$$

Mediante la (1) o (2) si ottiene di xy il valore per difetto $a_n b$ un valore per eccesso, entrambi espressi sotto forma decimale, e

(1) Le formule ottenute in questo n. valgono pure per l'approssimazione del prodotto eccesso, purchè uno almeno dei due valori a'' e b'' sia $\geqq$ all'effettivo valore per eccesso, ass o da assumersi, nel prodotto. Senza questa condizione si dovrebbe ricorrere a formule più g rali, ma meno semplici.

essi si può ricavare, prendendo le cifre a sinistra comuni, un valore per difetto di xy formato di cifre tutte esatte, cioè appartenenti allo sviluppo decimale di xy.

Essendo $a_0 + b_0 + 2 \leqq 10^p$, ove p è il numero di cifre dell'intero $a_0 + b_0 + 1$, e supposto $n > p$, dalla (2) si ha

$$(3) \qquad a_n b_n \leqq xy < a_n b_n + 0{,}1^{n-p};$$

cioè $a_n b_n$ è un valore di xy a meno di $0{,}1^{n-p}$; manifestamente se la $(n-p)$.esima cifra decimale di $a_n b_n$ è diversa da 9, le precedenti sono cifre esatte per xy.

Anche per $n \leqq p$ la (3) è valida, risultando $0{,}1^{n-p} = 10^{p-n}$ con $p - n \geqq 0$; in tal caso l'approssimazione di $a_n b_n$ si limita ad un'unità intera o ad un'unità d'ordine superiore.

Esempio. — Si abbia

$$a_5 = 5{,}69375, \qquad b_5 = 0{,}43429.$$

Applicando la (1) si ha:

$$\begin{array}{rr} a_5 b_5 = & 2{,}4727386875 \leqq xy \\ & 569375 \\ & 43429 \\ & 1 \\ \hline xy < & 2{,}4727999680 \end{array}$$

Si ottiene perciò xy con 4 cifre decimali esatte, cioè $xy = 2{,}4727...$.

Applicando la (2), si forma dapprima $a_0 + b_0 + 2 = 5 + 0 + 2 = 7$ e quindi si ha:

$$\begin{array}{rr} a_5 b_5 = & 2{,}4727386875 \leqq xy \\ & 7 \\ \hline xy < & 2{,}4728086875 \end{array}$$

Si ottiene cioè xy con 3 sole cifre decimali esatte: $xy = 2{,}472...$, essendo la 4ª cifra decimale o 7 o 8.

Applicando la (3), poichè $a_0 + b_0 + 1 = 5 + 0 + 1 = 6$ sarà $p = 1$, e quindi $0{,}1^{n-p} = 0{,}1^{5-1} = 0{,}1^4$, sicchè per tale via si ottiene pure $xy = 2{,}472...$, essendo la 4ª cifra decimale o 7 o 8.

La formula (3) serve specialmente per i problemi inversi come si vede nel numero seguente.

4. Dati gli sviluppi di due numeri x, y; si vuol determinare il numero n delle cifre decimali con cui devono essere presi due valori approssimati a_n, b_n a che il loro prodotto sia un valore approssimato di xy a meno di $0{,}1^t$, essendo t un intero prefissato (problema inverso).

Riprendiamo la formula (3) di n. precedente,

$$a_n b_n \leqq xy < a_n b_n + 0{,}1^{n-p},$$

ove p, indipendente da n, è il numero delle cifre dell'intero $a_0 + b_0 +$
al nostro scopo basterà che risulti $0{,}1^{n-p} = 0{,}1^t$, la quale è soddisfa
per $n = p + t$.

Non esiste invece soluzione generale del problema di determinar
in modo che il prodotto $a_n b_n$ contenga n cifre decimali esatte de
sviluppo di xy, cioè dia il valore v_t di xy con t decimali.

Si hanno tuttavia delle regole pratiche che derivano dal segue
procedimento.

Si ponga nella formula su richiamata $0{,}1^{n-p} = 0{,}1^{t+1}$, da
$n = p + t + 1$; per tale valore di n sarà

$$a_n b_n \leqq xy < a_n b_n + 0{,}1^{t+1},$$

perciò se la $(t+1)$.esima cifre decimale di $a_n b_n$ non è 9, le cifre p
cedenti dànno v_t.

Altrimenti, si pone $0{,}1^{n-p} = 0{,}1^{t+2}$, ottenendo $n = p + t + 2$,
calcola di nuovo $a_n b_n$; se le $(t+1)$.esima, $(t+2)$.esima cifre d
mali di $a_n b_n$ non sono entrambe 9, le cifre precedenti dànno il val
richiesto. In caso contrario si continua il calcolo con valori succ
sivi di n, fino a giungere alla determinazione del valore richiesto

Si può dimostrare che il procedimento indicato conduce, con
numero non determinato di esperimenti, al valore richiesto, ec
tuato il solo caso in cui il prodotto xy sia espresso esattamente c
cifre decimali.

Esempio. — Si vuole ottenere la lunghezza della circonferenza
coscritta ad un quadrato di lato 1, espressa con tre cifre deci
(esatte).

Avremo:

$$z = \pi\sqrt{2}; \quad \pi = 3{,}14159262..., \quad \sqrt{2} = 1{,}41421356...;$$

$$a_0 + b_0 + 1 = 3 + 1 + 1 = 5, \quad p = 1; \quad t = 3;$$

$$n = p + t + 1 = 1 + 3 + 1 = 5; \quad 0{,}1^{t+1} = 0{,}1^{3+1} = 0{,}1^4;$$

$$3{,}14159 \times 1{,}41421 = 4{,}4428679939;$$

poichè la 4^a cifra decimale del prodotto è 8, diversa da 9,
$z = 4{,}442...$, e la 4^a cifra decimale dello sviluppo di z sarà 8 o

5. Nel caso in cui di x e y sono dati due valori decimali
espressi con cifre tutte esatte, ma con un numero diverso di
decimali, volendo applicare le formule di n. 3 per determinare
prossimazione del prodotto, si sposta la virgola in uno dei fatto
modo di eguagliare in essi il numero delle cifre decimali; otte
poi il valore del nuovo prodotto e la sua approssimazione, si
vranno trasformare i risultati tenendo conto della variazione f

Altrimenti, essendo a_m, b_n i valori approssimati per difetto di
a meno di $0{,}1^m$, $0{,}1^n$ rispettivamente, si possono lasciare inalter

valori dati e applicare le formule di n. 1, dalle quali si ricava

$$(4) \qquad a_m b_n \leqq xy < a_m b_n + d',$$

essendo

$$(5) \quad d' \geqq a_m . 0{,}1^n + b_n . 0{,}1^m + 0{,}1^{m+n} = a_m . 0{,}1^n + (b_n + 0{,}1^n) . 0{,}1^m.$$

Ora, è qui interessante esaminare la seguente questione:

Si consideri l'approssimazione d' come somma delle due parti

$$(\alpha) \qquad a_m . 0{,}1^n, \qquad (b_n + 0{,}1^n) . 0{,}1^m.$$

Può darsi che dei due numeri m, n, uno, per es. m, sia fisso, e l'altro possa aumentare a piacere (o, almeno, possa superare il primo di alcune unità); allora la prima delle parti (α) può divenire assai piccola rispetto alla seconda, che è pressochè costante, sicchè in tal modo l'approssimazione d' verrà a dipendere prevalentemente dalla seconda parte; e viceversa può avvenire se è fisso n.

Il rapporto delle due parti (α) è eguale al rapporto dei due numeri interi

$$(\beta) \qquad a_m . 10^m, \qquad (b_n + 0{,}1^n) . 10^n,$$

che si ricavano da a_m e $b_n + 0{,}1^n$ sopprimendo la virgola; perciò basterà che il maggiore di questi numeri (β) sia 10 o 100 volte l'altro, oppure abbia *una o due cifre più dell'altro*, perchè l'approssimazione dipenda prevalentemente da una delle due parti (α).

Prendendo un numero maggiore di cifre pel fattore che ne ha di più, non si ottiene, generalmente, un vantaggio apprezzabile nell'approssimazione. Il criterio indicato sopra ci porta dunque, nel prodotto di due numeri decimali approssimati, a limitare le cifre del fattore che può essere assunto con un numero maggiore di cifre, ciò che è assai utile nella pratica.

EUGENIO MACCAFERRI.

LE IDENTITÀ

(NOTA DIDATTICA)

Questo capitolo dell'Algebra è di capitale importanza in quanto nella scienza è di continua applicazione ed in quanto può servire mirabilmente per la educazione matematica.

Lo studio di una identità si riassume ne' seguenti quesiti: *verifica*, *applicazione*, *generalizzazione* della identità.

I. La *verifica* di una identità domanda che lo studioso sia addestrato, *educato* a' calcoli: saper dare ad un termine la importanza che ha, o ad un gruppo di termini — introdurre una espressione nulla — sciogliere una parentesi opportunamente, mentre un'altra va formata — fare una opportuna sostituzione — impiegare un'altra identità per ottenere subito o uno sviluppo od una riduzione — dedurre da uno sviluppo già eseguito un altro mediante lo scambio di qualche quantità — rendersi conto rapidamente che la identità è impossibile, perchè essa manca di certe proprietà che dovrebbe avere (per es.: omogeneità, simmetria, ecc.) — saper applicare opportunamente i metodi che servono alla verifica — tutto ciò non è solo meccanica del calcolo, ma implica *educazione* matematica. E giacchè ho accennato alla scelta de' metodi di verifica è bene tenere presente queste parole dell'illustre LAMÉ [scritte a proposito della via lunga e complicata che Poisson avea seguito per pervenire alle equazioni di una membrana elastica (¹)]: " Je ne vois là qu'un esemple de plus " de longueurs qu'occasionne l'oubli du principe suivant: lors qu'on " parvient à un rèsultat simple par des calculs compliqués, il doit " exister une manière beaucoup plus directe d'arriver au même ré- " sultat; toute simplification qui s'opère, tout facteur qui disparaît " dans le cours du calcul primitif est l'indice certain d'une métode " a chercher, ou cette simplification serait toute fait, ou le facteur " n'apparaîtrait pas ".

Lo studioso che dovendo verificare una identità cominci a sviluppare calcoli, a trasportare termini da un membro all'altro, ecc. senza aver prima osservato attentamente la costruzione della identità stessa — compie opera molte volte inutile, sempre disordinata: a verifica compiuta, quando pur questa riesca, ci si accorge che quello sviluppo era inutile, che quell'aggruppamento dovea precedere l'altro ecc. Dunque, prima d'accingersi alla verifica di una identità è indispensabile che se ne osservi attentamente la costruzione e questa osservazione, oltre ad evitare le lungherie de' calcoli, ciò che porta economia di tempo e minori probabilità di errore (e lo studioso sa quanto siano apprezzabili questi due fatti) contribuisce alla estetica della verifica, indica il modo da seguire e non è raro il caso che porti ad una verifica immediata. La osservazione non deve limitarsi al momento che precede la verifica, ma ancora dopo che questa è stata eseguita, giacchè un passaggio, uno sviluppo, una trasposizione di termini, creduti indispensabili (ma fatti coscientemente) in un primo studio, possono benissimo non riconoscersi di assoluta necessità in un secondo. Alle volte la verifica discende da quella di un'altra identità o particolarizzando o generalizzando que-

(¹) *Leçons sur la théorie mathematique de l'élasticité des corps solides*, 2ᵉ éd. pg. 110-111. Gauthier-Villars, Paris, 1866.