

SUL TETRAEDRO A FACCE EGUALI

Fra i tetraedri particolari sono notevoli quelli che hanno gli spigoli opposti a due a due eguali, e quelli in cui gli spigoli opposti sono a due a due perpendicolari. Nei primi sono fra loro eguali le quattro facce, e quindi le quattro altezze, nei secondi le quattro altezze passano per uno stesso punto. La proprietà, da ultimo menzionata, è dimostrata nel trattato del *Baltzer*, insieme alla sua inversa; altre proprietà del tetraedro in cui le quattro altezze passano per uno stesso punto, sono esposte in una Memoria pubblicata nel 1838 dal Sig. *Michele Reiss*, (*) ed anche in un recente lavoro del Sig. *Gellenthin*. (**)

Nel presente scritto sono esposte alcune proprietà del tetraedro a facce eguali.

I.

1. S'indichino con S, A, B, C i quattro vertici d'un tetraedro, e pongasi:

$$SA = a, \quad SB = b, \quad SC = c, \quad BC = a_1, \quad CA = b_1, \quad AB = c_1,$$

$$\text{ang BSC} = \alpha, \quad \text{ang CSA} = \beta, \quad \text{ang ASB} = \gamma,$$

$$\text{area ABC} = S_0, \quad \text{area SBC} = S_1, \quad \text{area SCA} = S_2, \quad \text{area SAB} = S_3,$$

$$\text{diedro SA} = A, \quad \text{diedro SB} = B, \quad \text{diedro SC} = C,$$

$$\text{diedro BC} = A_1, \quad \text{diedro CA} = B_1, \quad \text{diedro AB} = C_1,$$

$$\cos A = \lambda, \quad \cos B = \mu, \quad \cos C = \nu,$$

$$\cos A_1 = \lambda_1, \quad \cos B_1 = \mu_1, \quad \cos C_1 = \nu_1.$$

(*) *Essai analytique et géométrique*, par Michel Reiss (*Correspondance Mathématique et physique* publiée par A. Quetelet, Bruxelles, 1838).

(**) H. Gellenthin. *Ueber einige Eigenschaften des Tetraeders* (*Archiv der Mathematik und Physik*, gegründet von I. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe, Leipzig 1885).

Si hanno, com'è noto, le equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0 = S_1 \lambda_1 + S_2 \mu_1 + S_3 \nu_1 \\ S_1 = S_0 \lambda_1 + S_2 \nu + S_3 \mu \\ S_2 = S_0 \mu_1 + S_1 \nu + S_3 \lambda \\ S_3 = S_0 \nu_1 + S_1 \mu + S_2 \lambda \end{array} \right. \quad (1)$$

le quali si dimostrano facilmente proiettando ciascun vertice sul piano della faccia opposta, ed applicando il teorema sul rapporto dell'area d'un triangolo a quella della sua proiezione.

Moltiplicando queste quattro equazioni ordinatamente per S_0, S_1, S_2, S_3 , poi dalla somma di due delle risultanti togliendo la somma delle altre due, si ottengono le:

$$\left. \begin{array}{l} S_0^2 + S_1^2 - 2S_0 S_1 \lambda_1 = S_2^2 + S_3^2 - 2S_2 S_3 \lambda \\ S_0^2 + S_2^2 - 2S_0 S_2 \mu_1 = S_1^2 + S_3^2 - 2S_1 S_3 \mu \\ S_0^2 + S_3^2 - 2S_0 S_3 \nu_1 = S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 S_2 \nu \end{array} \right\} \quad (2)$$

che sono relazioni fra le aree delle quattro facce e i coseni di due diedri opposti.

2. È noto che la funzione:

$$M = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma,$$

è sempre positiva, e che, indicando con V il volume del tetraedro, si ha:

$$\begin{aligned} 36V^2 &= a^2 b^2 c^2 \operatorname{sen}^2 \beta \operatorname{sen}^2 \gamma \operatorname{sen}^2 \alpha \\ &= a^2 b^2 c^2 M, \end{aligned}$$

ed anche

$$144V^2 = 4Ma^2 b^2 c^2 = a^2 a_1^2 (b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 - a^2 - a_1^2) + b^2 b_1^2 (a^2 + a_1^2 + c^2 + c_1^2 - b^2 - b_1^2) + c^2 c_1^2 (a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2) - (a^2 c^2 b_1^2 + b^2 a^2 c_1^2 + c^2 b^2 a_1^2 + a_1^2 b_1^2 c_1^2) \quad (*)$$

Rammento inoltre che, indicando con R il raggio della sfera circoscritta al tetraedro, si ha:

$$576V^2 R^2 = (aa_1 + bb_1 + cc_1)(bb_1 + cc_1 - aa_1)(cc_1 + aa_1 - bb_1)(aa_1 + bb_1 - cc_1).$$

(*) Eguagliando a zero quest'espressione si ottiene la nota relazione fra le distanze di quattro punti d'un piano.

II.

3. Se un tetraedro ha gli spigoli opposti a due a due eguali, le quattro facce sono eguali; e reciprocamente.

L'eguaglianza dei quattro triangoli SAB, SBC, SCA, ABC è un'immediata conseguenza dell'ipotesi: $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$.

Dall'eguaglianza dei triangoli SAB, ABC risulta: $a = a_1$, $b = b_1$; oppure: $a = b_1$, $b = a_1$. Nel secondo caso i triangoli SAC, SBC sarebbero isosceli, e dalla loro eguaglianza risulterebbe ancora: $a = a_1$, $b = b_1$. Perciò l'eguaglianza delle quattro facce implica quella degli spigoli opposti.

4. Se i diedri opposti di un tetraedro sono a due a due eguali, le quattro facce sono eguali; e reciprocamente.

Poichè i diedri SA, AC sono rispettivamente eguali ai diedri BC, SB, e il diedro AB è comune ai due triedri di vertici A e B, gli angoli SAB, SBA saranno rispettivamente eguali agli angoli ABC, CAB; e in conseguenza saranno eguali i due triangoli SAB, ABC. Similmente si dimostrerà l'eguaglianza degli altri triangoli.

Suppongasì ora che sieno fra loro eguali le quattro facce, e quindi (3) gli spigoli opposti. Dai triedri di vertici A e B si ricaverà l'eguaglianza dei diedri SA, BC, e dei diedri AC, SB; e similmente dai triedri di vertici B e C si ricaverà l'eguaglianza dei diedri AB, SC.

5. Se un tetraedro ha le facce eguali, queste devono essere triangoli acutangoli; e reciprocamente, dato un triangolo acutangolo, si può sempre costruire un tetraedro colle quattro facce ad esso eguali.

Se le quattro facce sono eguali, i tre angoli del triangolo ABC sono rispettivamente eguali ai tre angoli del tri-

dro S , epperchiò ciascuno di essi è minore della somma degli altri due.

Ora sia dato un triangolo acutangolo ABC . Poichè la somma di due dei tre angoli BAC , CBA , ACB è maggiore del terzo, e la somma di tutti e tre è minore di 360° , si potrà costruire un triedro $S (A' B' C')$ coi tre angoli $B'SC'$, $C'SA'$, $A'SB'$ rispettivamente eguali agli angoli BAC , CBA , ACB ; poi, presi sugli spigoli i segmenti $SA' = BC$, $SB' = CA$, $SC' = AB$, è chiaro che risulterà $B'C' = BC$, $C'A' = CA$, $A'B' = AB$, e che in conseguenza il tetraedro $SA'B'C'$ avrà le quattro facce eguali al triangolo ABC .

6. Se le quattro facce d'un tetraedro sono equivalenti esse devono essere eguali.

Dalle equazioni:

$$S_0^2 + S_1^2 - 2S_0S_1\lambda_1 = S_2^2 + S_3^2 - 2S_2S_3\lambda$$

$$S_0^2 + S_2^2 - 2S_0S_2\mu_1 = S_1^2 + S_3^2 - 2S_1S_3\mu$$

$$S_0^2 + S_3^2 - 2S_0S_3\nu_1 = S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\nu$$

dimostrate al N. 1, posto:

$$S_0 = S_1 = S_2 = S_3,$$

si ricava:

$$\lambda_1 = \lambda, \mu_1 = \mu, \nu_1 = \nu,$$

le quali provano l'eguaglianza dei diedri opposti, e quindi (4) il teorema enunciato.

7. Nel tetraedro a facce eguali la somma dei coseni dei diedri adiacenti ad una stessa faccia, è, per ciascuna faccia, eguale all'unità.

Questa proposizione risulta immediatamente dalle equazioni (1) del N. 1, quando vi si ponga:

$$S_0 = S_1 = S_2 = S_3.$$

8. Se la somma dei coseni dei diedri adiacenti ad una stessa faccia d'un tetraedro è, per tre facce di esso, eguale all'unità, il tetraedro ha le quattro facce eguali.

Infatti dalle:

$$\lambda_1 + \mu + \nu = 1,$$

$$\mu_1 + \nu + \lambda = 1,$$

$$\nu_1 + \lambda + \mu = 1,$$

che si suppongono verificate, e dalle:

$$S_1 = S_0 \lambda_1 + S_2 \nu + S_3 \mu,$$

$$S_2 = S_0 \mu_1 + S_1 \nu + S_3 \lambda,$$

$$S_3 = S_0 \nu_1 + S_1 \mu + S_2 \lambda,$$

si ricava:

$$-(S_1 - S_0) + (S_2 - S_0)\nu + (S_3 - S_0)\mu = 0,$$

$$(S_1 - S_0)\nu - (S_2 - S_0) + (S_3 - S_0)\lambda = 0,$$

$$(S_1 - S_0)\mu + (S_2 - S_0)\lambda - (S_3 - S_0) = 0,$$

le quali equazioni richiedono che sia

$$S_0 = S_1 = S_2 = S_3,$$

poichè il determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & \nu & \mu \\ \nu & -1 & \lambda \\ \mu & \lambda & -1 \end{vmatrix} = -1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + 2\lambda\mu\nu$$

è diverso da zero. (*)

(*) Infatti nel triedro $S(ABC)$ si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \alpha &= 1 - \left(\frac{\cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C} \right)^2 \\ &= \frac{1 - (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + 2\lambda\mu\nu)}{\operatorname{sen}^2 B \operatorname{sen}^2 C} \end{aligned}$$

9. Se la somma degli angoli piani d'un triedro è eguale a 180° , la somma dei coseni dei diedri è eguale all'unità; e reciprocamente.

Indicati con α, β, γ i tre angoli piani, e con A, B, C i diedri rispettivamente opposti, si ha:

$$\text{sen}\alpha\text{sen}\beta\text{sen}\gamma(\cos A + \cos B + \cos C - 1) = \text{sen}\alpha\cos\alpha + \text{sen}\beta\cos\beta + \text{sen}\gamma\cos\gamma - \cos\beta\cos\gamma\text{sen}\alpha - \cos\gamma\cos\alpha\text{sen}\beta - \cos\alpha\cos\beta\text{sen}\gamma - \text{sen}\alpha\text{sen}\beta\text{sen}\gamma,$$

ossia

$$2\text{sen}\alpha\text{sen}\beta\text{sen}\gamma(\cos A + \cos B + \cos C - 1) = \text{sen}(2\alpha) + \text{sen}(2\beta) + \text{sen}(2\gamma) - 2\text{sen}(\alpha + \beta + \gamma) - 4\text{sen}\alpha\text{sen}\beta\text{sen}\gamma$$

e questa, con facili trasformazioni, diviene:

$$\begin{aligned} & 2\text{sen}\alpha\text{sen}\beta\text{sen}\gamma(\cos A + \cos B + \cos C - 1) \\ & = 2 \{ \text{sen}(\alpha + \beta) - \text{sen}\gamma \} \{ \cos(\alpha - \beta) - \cos\gamma \} \\ & = 8\cos\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha + \gamma - \beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}\right). \end{aligned}$$

Dall'eguaglianza ora dimostrata risulta che nell'ipotesi:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

dev'essere:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1.$$

E dalla stessa eguaglianza risulta pure che, se la somma dei coseni dei diedri è eguale all'unità, si deve annullare il coseno che sta al secondo membro, e in conseguenza la somma dei tre angoli piani dev'essere eguale a 180° .

10. Se la somma dei tre angoli piani è eguale a 180° in tre triedri d'un tetraedro, questo ha le quattro facce fra loro eguali.

Se la somma degli angoli piani è eguale a 180° in ciascuno dei triedri A, B, C, si ha, pel teorema precedente:

$$\lambda + \mu_1 + \nu_1 = 1, \quad \mu + \lambda_1 + \nu_1 = 1, \quad \nu + \lambda_1 + \mu_1 = 1,$$

mediante le quali si possono eliminare λ, μ, ν dalle:

$$S_1 = S_0 \lambda_1 + S_2 \nu + S_3 \mu,$$

$$S_2 = S_0 \mu_1 + S_1 \nu + S_3 \lambda,$$

$$S_3 = S_0 \nu_1 + S_1 \mu + S_2 \lambda.$$

effettuata quest'eliminazione, e avuto riguardo alla:

$$S_0 = S_1 \lambda_1 + S_2 \mu_1 + S_3 \nu_1,$$

ottengono le:

$$(S_0 + S_2 - S_1 - S_3) \lambda_1 = S_0 + S_1 - S_2 - S_3,$$

$$(S_0 + S_2 - S_3 - S_1) \mu_1 = S_0 + S_2 - S_3 - S_1,$$

$$(S_0 + S_3 - S_1 - S_2) \nu_1 = S_0 + S_3 - S_1 - S_2,$$

alle quali risulta:

$$+ S_1 - S_2 - S_3 = 0, \quad S_0 + S_2 - S_3 - S_1 = 0, \quad S_0 + S_3 - S_1 - S_2 = 0,$$

ossia:

$$S_0 = S_1 = S_2 = S_3,$$

quali provano (c) il teorema enunciato.

1. Se i raggi dei cerchi circoscritti alle quattro facce d'un tetraedro sono fra loro eguali, le facce stesse devono essere fra loro eguali.

Indicati con $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, gli angoli BAC, CBA, ACB del triangolo ABC, si avrà, per l'ipotesi fatta,

$$\text{sen} \alpha = \text{sen} \alpha_1, \quad \text{sen} \beta = \text{sen} \beta_1, \quad \text{sen} \gamma = \text{sen} \gamma_1,$$

quindi:

$$\text{cos} \alpha = h \text{cos} \alpha_1, \quad \text{cos} \beta = k \text{cos} \beta_1, \quad \text{cos} \gamma = l \text{cos} \gamma_1,$$

avendo h, k, l eguali ad 1 od a - 1.

Perciò sarà:

$$\begin{aligned} M &= 1 - \text{cos}^2 \alpha - \text{cos}^2 \beta - \text{cos}^2 \gamma + 2 \text{cos} \alpha \text{cos} \beta \text{cos} \gamma \\ &= 1 - \text{cos}^2 \alpha_1 - \text{cos}^2 \beta_1 - \text{cos}^2 \gamma_1 + 2 h k l \text{cos} \alpha_1 \text{cos} \beta_1 \text{cos} \gamma_1, \end{aligned}$$

ossia :

$$M = 2(1 + hkl) \cos\alpha_1 \cos\beta_1 \cos\gamma_1,$$

dalla quale risulta che il prodotto hkl non può essere eguale a -1 , e che, in conseguenza, la quantità positiva M è eguale al quadruplo prodotto dei coseni dei tre angoli del triangolo ABC ; epperiò è chiaro che questi tre angoli devono essere acuti.

Similmente si dimostrerà che ciascuno degli altri tre triangoli è acutangolo, e che, in conseguenza, la somma dei tre angoli piani, in ciascuno dei quattro triedri, è eguale alla somma dei tre angoli della faccia opposta; e, in forza del teorema precedente, si conchiuderà quello che ora si trattava di dimostrare.

12. Nel tetraedro a facce eguali il centro di gravità, il centro della sfera circoscritta e il centro della sfera inscritta coincidono in uno stesso punto.

Indicati con A' , B' , C' , S' i centri di gravità delle facce rispettivamente opposte ai vertici A , B , C , S , si ha:

$$\left. \begin{aligned} \overline{SS'}^2 &= \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9} (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) \\ \overline{AA'}^2 &= \frac{1}{3} (a^2 + b_1^2 + c_1^2) - \frac{1}{9} (a_1^2 + b^2 + c^2) \\ \overline{BB'}^2 &= \frac{1}{3} (a_1^2 + b^2 + c_1^2) - \frac{1}{9} (a^2 + b_1^2 + c^2) \\ \overline{CC'}^2 &= \frac{1}{3} (a_1^2 + b_1^2 + c^2) - \frac{1}{9} (a^2 + b^2 + c_1^2) \end{aligned} \right\} (a)$$

dalle quali risulta che, se gli spigoli opposti sono a due a due eguali, devono essere fra loro eguali i segmenti che uniscono ciascun vertice al centro di gravità della faccia opposta, e che, in conseguenza, il centro di gravità del tetraedro è equidistante dai quattro vertici. Inoltre la distanza del centro di gravità da una faccia è un quarto dell'altezza corrispondente a quella faccia, epperiò, essendo eguali le quattro altezze, il centro di gravità sarà equidistante dalle quattro facce.

13. Se in un tetraedro coincidono due dei tre punti: il centro di gravità, il centro della sfera circoscritta e il centro della sfera inscritta, quel tetraedro ha le facce eguali.

1) Se il centro di gravità coincide col centro della sfera circoscritta, devono essere fra loro eguali i segmenti che uniscono ciascun vertice al centro di gravità della faccia opposta, epperciò, dalle formole (α) del N° precedente, risulta:

$$b_1^2 - b^2 = c^2 - c_1^2,$$

$$c_1^2 - c^2 = a^2 - a_1^2,$$

$$a_1^2 - a^2 = b^2 - b_1^2,$$

e in conseguenza:

$$a = a_1, \quad b = b_1, \quad c = c_1.$$

2) Se il centro di gravità coincide col centro della sfera inscritta, devono essere fra loro eguali le quattro altezze; epperciò equivalenti, e quindi eguali (6), le quattro facce.

3) Se il centro della sfera inscritta coincide col centro della sfera circoscritta, devono essere fra loro eguali i raggi dei cerchi circoscritti alle quattro facce, epperciò (11) le facce stesse.

14. Espressioni del volume del tetraedro a facce eguali e del raggio della sfera circoscritta.

L'espressione del volume del tetraedro in funzione degli spigoli, rammentata al N. 1, diviene, quando gli spigoli opposti sono eguali,

$$144V^2 = 2a^4(b^2 + c^2 - a^2) + 2b^4(c^2 + a^2 - b^2) + 2c^4(a^2 + b^2 - c^2) - 4a^2b^2c^2.$$

od anche:

$$72V^2 = (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2).$$

Dalla formola pel raggio della sfera circoscritta, citata nello stesso numero si ha:

$$576V^2R^2 = (a^2 + b^2 + c^2) (b^2 + c^2 - a^2) (c^2 + a^2 - b^2) (a^2 + b^2 - c^2)$$

e questa, in forza della precedente, diviene:

$$8R^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

la quale si può ricavare eziandio dalle formole (α) del N. 12.

15. Se in un tetraedro la somma dei quadrati di due spigoli opposti è eguale alla somma dei quadrati di altri due spigoli opposti, il quinto ed il sesto spigolo sono fra loro perpendicolari; e reciprocamente, se due spigoli opposti sono fra loro perpendicolari, la somma dei quadrati di altri due spigoli opposti è eguale alla somma dei quadrati della terza coppia di spigoli opposti. (*)

Guidata dal vertice S la SL parallela alla BQ e dalla banda opposta di questa rispetto allo spigolo SC, e indicato con (aa_1) l'angolo LSA, si ha, dal triedro S (ACL):

$$\begin{aligned} \cos(aa_1) &= \cos\beta \cos(LSC) - \sin\beta \sin(LSC) \cos C \\ &= \cos\beta \cos(SCB) - \sin(SCB) \frac{\cos\gamma - \cos\alpha \cos\beta}{\sin\alpha}, \end{aligned}$$

ma dal triangolo SCA risulta:

$$\cos(SCB) = \frac{e - b \cos\alpha}{a_1}, \quad \sin(SCB) = \frac{b}{a_1} \sin\alpha,$$

epperiò sarà:

$$\cos(aa_1) = \frac{c \cos\beta - b \cos\gamma}{a_1},$$

ossia:

$$\cos(aa_1) = \frac{c^2 + c_1^2 - (b^2 + b_1^2)}{2aa_1},$$

dalla quale si ricavano subito i teoremi enunciati.

(*) Questo teorema si trova, altrimenti dimostrato, nella citata Memoria del Reiss.

16. Nel tetraedro a facce eguali ciascuno dei segmenti che uniscono i punti di mezzo di due spigoli opposti è perpendicolare a questi due spigoli.

Infatti, indicati con L, M, N, L_1, M_1, N_1 i punti di mezzo degli spigoli $SA, SB, SC, B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1$, i segmenti SL_1, AL_1 saranno fra loro eguali, per l'eguaglianza dei triangoli SBC, ABC , epperò la LL_1 sarà perpendicolare alla SA ; e così dall'eguaglianza dei triangoli SAB, SAC , e quindi delle LB, LC , risulta che la LL_1 è perpendicolare alla BC . Nell'istesso modo si proverà che la MM_1 è perpendicolare agli spigoli opposti SB, AC , e che la NN_1 è perpendicolare agli spigoli opposti SC, AB .

17. Se due delle congiungenti i punti medi delle coppie di spigoli opposti d'un tetraedro sono rispettivamente perpendicolari a quelle due coppie, il tetraedro ha le facce eguali.

Nell'ipotesi che la LL_1 sia perpendicolare agli spigoli SA, BC , e che la MM_1 sia perpendicolare agli spigoli SB, AC , si hanno le eguaglianze:

$$L_1A = L_1S, \quad LB = LC, \quad M_1B = M_1S, \quad MC = MA,$$

ossia le:

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= b_1^2 + c_1^2, & a^2 + c^2 &= a_1^2 + c_1^2 \\ b^2 + c_1^2 &= b_1^2 + c^2, & a^2 + c_1^2 &= a_1^2 + c^2, \end{aligned}$$

dalle quali si ricava:

$$a = a_1, \quad b = b_1, \quad c = c_1$$

18. Se le altezze d'un tetraedro a facce eguali passano per uno stesso punto, quel tetraedro è regolare.

Infatti se le altezze d'un tetraedro passano per uno stesso punto, gli spigoli opposti sono fra loro perpendicolari, e in conseguenza (15), hanno luogo le eguaglianze:

$$a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2,$$

le quali, nell'ipotesi fatta, devono sussistere insieme alle:

$$a = a_1, \quad b = b_1, \quad c = c_1;$$

epperciò sarà:

$$a = b = c = a_1 = b_1 = c_1.$$

19. Se le altezze d'un tetraedro passano pel centro di gravità, o pel centro della sfera circoscritta, quel tetraedro è regolare.

Nella citata Memoria del Sig. Michele Reiss è dimostrato che, se le altezze d'un tetraedro passano per uno stesso punto, questo punto, e il centro della sfera circoscritta, sono gli estremi d'un segmento il cui punto di mezzo è il centro di gravità del tetraedro. Perciò, nell'una e nell'altra ipotesi, il centro di gravità coincide col centro della sfera circoscritta, e dai teoremi dei N. 13, 18, si conchiude che il tetraedro dev'essere regolare.

20. Se le altezze d'un tetraedro passano pel centro della sfera inscritta, quel tetraedro è regolare.

Indicati con A', B', C', S' i piedi delle perpendicolari condotte dai vertici A, B, C, S sulle facce rispettivamente opposte, e con O il centro della sfera inscritta, si avrà, per ipotesi:

$$OA' = OB' = OC' = OS'.$$

Perciò, se con H s'indica il punto in cui il piano delle AA', SS' incontra lo spigolo BC , le altezze AA', SS' del triangolo SAH , s'incontrano in un punto O equidistante dai lati SH, AH , e in conseguenza saranno eguali questi due lati SH, AH , i quali sono le altezze dei triangoli SBC, ABC , corrispondenti al loro lato comune BC . Di qui risulta l'equivalenza dei due triangoli SBC, ABC ; e così si proverà che le quattro facce del tetraedro sono equivalenti, e dai teoremi dei N. 6 e 18 si conchiuderà che il tetraedro è regolare.

D. BESSO.

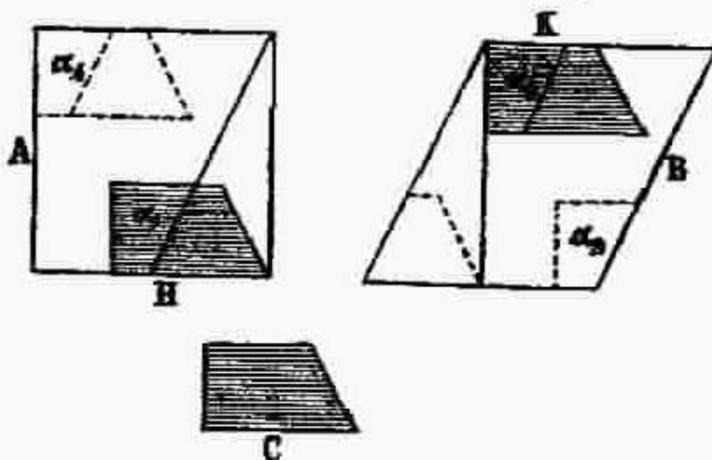
DIMOSTRAZIONE DI UNA PROPOSIZIONE FONDAMENTALE
DELLA TEORIA DELL'EQUIVALENZA

Ponendo a fondamento della teoria dell'equivalenza la definizione: Due poligoni o due poliedri si dicono equivalenti, se si possono dividere in egual numero di parti rispettivamente uguali, è sembrato che non si potesse poi fare a meno di assumere come postulato la proposizione seguente: Non può una parte di un poligono o d'un poliedro essere equivalente all'intero. Ecco qui una dimostrazione di codesta proposizione.

1° Sottraendo da due poligoni equivalenti due loro parti che siano eguali ad un terzo poligono, si ottengono resti equivalenti.

Chiamiamo A e B due poligoni equivalenti, ed H e K due loro parti che siano eguali fra loro.

Si dividano i due poligoni in parti rispettivamente uguali, come è possibile, dacchè sono equivalenti.



Quindi in ciascuno dei poligoni A e B si suddividano le dette parti nel modo stesso che esse sono suddivise rispettivamente nei poligoni B ed A dai contorni di K ed H.

E se i poligoni H e K sono divisi dalle primitive linee di divisione o dalle nuove che si sono tirate, si facciano in ciascuno di essi le divisioni che si scorgono nell'altro.

Dopo ciò i due poligoni A e B sono divisi in parti rispettivamente uguali, e così che per riconoscere queste parti non è mestieri far astrazione da nessuna delle linee di divisione.

Ed ora consideriamo una parte α_1 di H . A questa troviamo corrispondere nel poligono B una parte α_2 od una α_3 , secondo che vogliamo riguardare α_1 come parte di A , oppure di H .

Similmente alla parte α_2 di K corrisponde nel poligono A la parte α_1 od una α_4 , secondo che si vuol riguardare α_2 come parte di K , oppure di B .

Così, essendo tutte e quattro uguali tra loro le parti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, nel far corrispondere le parti di A a quelle di B , possiamo stabilire che ad α_1 corrisponda α_3 , e ad α_4 corrisponda α_2 .

Similmente ad ogni altra di quelle parti di A , che compongono H , si può far corrispondere una di quelle parti di B , che compongono K ; e reciprocamente.

In conclusione i due poligoni A e B sono composti di parti rispettivamente uguali, e sopprimendo H e K , si sopprimono di queste parti rispettivamente uguali. Per conseguenza anche i resti sono tuttavia formati di parti rispettivamente uguali.

2° Se due poligoni equivalenti hanno una parte comune, sopprimendo questa parte si ottengono resti equivalenti.

Infatti, sopprimendo la parte comune non si fa che togliere da due poligoni equivalenti due loro parti eguali.

3° Una parte di un poligono non può essere equivalente all'intero.

Infatti, detta A una parte qualunque di un poligono C e B il rimanente del poligono stesso, se A e C fossero equivalenti, tali sarebbero anche il poligono B ed il nulla, che sono i resti che si ottengono sottraendo dai poligoni C ed A il poligono A . E che un poligono sia equivalente al nulla è assurdo.

Ora si può dimostrare facilmente che: Sottraendo da poligoni equivalenti poligoni equivalenti, si ottengono resti equivalenti; e così le proposizioni sull'equivalenza dei poligoni e dei poliedri si possono tuttavia dimostrare con la stessa semplicità che si ammira negli *Elementi d'Euclide*.

A. FAIFOPER.

ESERCIZI PER LA SCUOLA

ARITMETICA

Sulla trasformazione delle frazioni

1. Quanti quarti, quanti sestanti, quanti ottavi, quanti decimi, quanti diciottesimi sono contenuti in $\frac{1}{2}$?
2. Trovare cinque frazioni eguali ad $\frac{1}{2}$ le quali abbiano per denominatori i numeri 6, 14, 38, 100, 274.
3. Si può trovare una frazione eguale ad $\frac{1}{2}$ il cui denominatore sia 49?
4. Quanti sestanti, quanti noni, quanti dodicesimi, quanti quindicesimi, quanti ventiquattresimi sono contenuti in $\frac{1}{3}$?
5. Trovare cinque frazioni eguali ad $\frac{1}{3}$ le quali abbiano per denominatori i numeri 9, 15, 24, 87, 213.
6. Esiste una frazione eguale ad $\frac{1}{3}$, col denominatore 56?
7. Quanti quattordicesimi, quanti ventunesimi, quanti trentacinquesimi, quanti quarantanovesimi sono contenuti in $\frac{1}{7}$?
8. Trovare cinque frazioni eguali ad $\frac{1}{7}$ coi denominatori 30, 77, 105, 658, 1036.
9. Si può trovare una frazione eguale ad $\frac{1}{7}$, col denominatore 562?

10. Trovare tre frazioni eguali ad $\frac{1}{13}$ i cui denominatori sieno 65, 143, 1144.
11. Trovare una frazione eguale a $\frac{7}{13}$, ed un'altra eguale ad $\frac{9}{13}$, le quali abbiano il denominatore 65.
12. Trovare: 1) due frazioni eguali a $\frac{4}{55}$ coi denominatori 105, 245, 2) due frazioni eguali a $\frac{27}{95}$ che abbiano gli stessi denominatori 105, 245.
13. Trovare tre frazioni eguali a $\frac{4}{29}$ coi numeratori 3, 7, 15.
14. Trovare tre frazioni eguali a $\frac{42}{29}$ i cui numeratori sieno 24, 60, 144, 576.
15. Esiste una frazione eguale a $\frac{42}{29}$ la quale abbia per numeratore 2250?
16. Trovare una frazione eguale a $\frac{24}{249}$ col numeratore minore di 24.
17. Trovare una frazione eguale a $\frac{84}{208}$ coi termini più piccoli.
18. Si può trovare una frazione eguale a $\frac{84}{256}$ col numeratore minore di 84?
19. Come devono essere i denominatori delle frazioni eguali a $\frac{8}{15}$? E quanti sono quelli minori di 1000?
20. Quante sono le frazioni eguali a $\frac{9}{37}$ che hanno i denominatori compresi fra 1000 e 2000?
21. Quante sono le frazioni eguali a $\frac{47}{60}$? Ve n'ha una col denominatore eguale ad uno dei numeri 10, 100, 1000, ...?
22. Si può trovare una frazione eguale a $\frac{24}{875}$ la quale abbia per denominatore uno dei numeri 10, 100, 1000,?
23. Esiste una frazione eguale a $\frac{56}{448}$ il cui denominatore sia uno dei numeri 10, 100, 1000,?
24. Una frazione il cui numeratore è 37, e il cui denominatore è maggiore di 100 e minore di 200, è eguale ad un'altra frazione che ha il denominatore 1000: trovare il denominatore della prima frazione.
25. Quante sono le frazioni col numeratore 168, e col denominatore maggiore di 300 e minore di 400, eguali ad altre frazioni col denominatore 1000?
26. A quanti ottavi equivale la somma di $\frac{3}{4}$ e $\frac{7}{8}$?

27. A quanti sessantesimi equivale la somma di $\frac{5}{12}$, $\frac{9}{40}$ e $\frac{7}{60}$?
28. Qual'è la più grande delle due frazioni $\frac{19}{20}$ e $\frac{73}{140}$?
29. Trovare due frazioni collo stesso denominatore, ed eguali rispettivamente a $\frac{7}{18}$ e $\frac{5}{11}$.
30. Qual'è la più grande delle due frazioni $\frac{7}{24}$, $\frac{7}{25}$?
31. Qual'è la più grande delle due frazioni $\frac{7}{24}$, $\frac{8}{25}$?
32. Qual'è la maggiore, e quale la minore delle tre frazioni $\frac{10}{81}$, $\frac{12}{88}$, $\frac{14}{85}$?
33. Qual'è la maggiore, e quale la minore delle tre frazioni $\frac{71}{20}$, $\frac{76}{25}$, $\frac{81}{80}$?
34. Trovare due frazioni col denominatore 100, l'una minore e l'altra maggiore di $\frac{1}{3}$.
35. Trovare due frazioni col denominatore 1000, l'una minore e l'altra maggiore di $\frac{28}{75}$.

TRIGONOMETRIA

*Sui primi teoremi relativi al seno ed al coseno
d'un angolo acuto.*

1. Dimostrare che, se un triangolo rettangolo ha un angolo di 30° , il cateto ad esso opposto è la metà dell'ipotenusa.
2. Dimostrare che, se un triangolo rettangolo ha un angolo minore di 30° , il rapporto del cateto ad esso opposto all'ipotenusa è minore di $\frac{1}{2}$.
3. Sia BAC un angolo di 45° , e da un punto B del suo lato AB si conduca sull'altro lato la perpendicolare BC; dimostrare che, se la AB è divisa in 1000 parti eguali, la BC è maggiore del segmento che contiene 707 di quelle parti e minore del segmento che ne contiene 708.
4. Costruire un angolo il cui seno sia eguale a $\frac{7}{10}$. Quell'angolo sarà maggiore o minore di 45° ?
5. Dimostrare che il seno di 60° è compreso fra 0,866 e 0,8661.
6. Il seno d'un angolo è $\frac{56}{65}$; calcolare il suo coseno, e provare che quell'angolo è compreso fra 45° e 60° .

7. Calcolare a meno di $\frac{1}{1000}$ il seno ed il coseno d'un angolo, sapendo che il seno è doppio del coseno.
8. Dimostrare che, se l'angolo α è minore di 45° , esiste un angolo il cui seno è eguale al quoziente $\frac{\text{sen}\alpha}{\text{cos}\alpha}$.
9. Se il seno d'un angolo è doppio del seno di un altro angolo, fra quali limiti dev'essere compreso il secondo angolo?
10. Se il coseno d'un angolo è la metà del coseno d'un altro angolo, fra quali limiti dev'essere compreso il primo angolo?
11. Come devono essere due angoli se la somma dei loro seni è eguale a 2?
12. Come devono essere due angoli se il prodotto del seno dell'uno pel coseno dell'altro è eguale all'unità?
13. Dimostrare che il seno di 70° è minore del doppio del seno di 35° .
14. Dimostrare che il seno di 60° è minore del triplo del seno di 20° .
15. Dimostrare che il seno di 45° è maggiore di $\frac{1}{4}$.
16. Dimostrare che, se l'angolo al vertice d'un triangolo isoscele è un quarto d'un angolo alla base, il rapporto della base ad uno dei lati eguali è maggiore di $\frac{1}{3}$.
17. Trovare due numeri i quali differiscano di 0,0001, l'uno minore e l'altro maggiore del seno di 45° .
18. Dimostrare che, se uno degli angoli acuti d'un triangolo rettangolo è un quarto dell'altro, il rapporto del cateto opposto al primo angolo al cateto opposto al secondo è maggiore di $\frac{8}{25}$.
19. Dimostrare che, se uno degli angoli acuti d'un triangolo rettangolo è un quinto dell'altro, il rapporto del cateto opposto al primo angolo al cateto opposto al secondo è maggiore di $\frac{13}{50}$.
20. Il seno d'un angolo acuto d'un triangolo rettangolo è compreso fra $\frac{459}{1000}$ e $\frac{461}{1000}$: trovare due limitazioni del rap-

porto del cateto opposto a quell'angolo al cateto adiacente.

21. Dimostrare che l'angolo, menzionato nell'esercizio precedente, è compreso tra 9° e 10° .
22. Nel triangolo BAC rettangolo in A, il rapporto del cateto AC al cateto AB è compreso fra $\frac{7}{10}$ e $\frac{704}{1000}$; provare che l'angolo B è maggiore di 30° e minore di 36° .
23. Nell'ipotesi che la somma del seno e del coseno d'un angolo, minore di 45° , sia eguale a $\frac{5}{4}$, si dimostri che quell'angolo dev'essere compreso fra 15° e 18° .
24. Esiste un angolo tale che la somma del suo seno e del suo coseno sia eguale a $\frac{3}{2}$?
25. Qual'è il massimo valore della somma del seno e del coseno d'uno stesso angolo?
26. Trovare i valori di due angoli, non maggiori di 60° , nell'ipotesi che la somma dei quadrati dei loro coseni, aumentata di 1, sia eguale al doppio prodotto dei loro seni.
27. Trovare i valori di due angoli nell'ipotesi che uno di essi non sia maggiore di 18° , che l'altro non sia maggiore di 54° , e che il prodotto dei loro seni sia eguale ad $\frac{1}{4}$.
28. Dimostrare che il prodotto dei coseni dei due angoli acuti d'un triangolo rettangolo, è eguale al prodotto dei loro seni.
29. Dimostrare che il prodotto dei coseni di due angoli è maggiore o minore del prodotto dei loro seni, secondo che la somma dei due angoli è minore o maggiore di 90° .
30. Se la somma degli angoli a e b è minore di 90° , e se hanno luogo le disequaglianze:

$$\frac{3}{8} < \text{sen} a \cos b < \frac{3}{7},$$

cosa si può asserire sui prodotti:

$$\text{sen}(a + b) \cos b, \quad \text{sen} a \cos(a + b)?$$

D. BESSO.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

ELEMENTI DI GEOMETRIA per Riccardo de Paolis, Prof. di Geometria Superiore nella R. Università di Pisa. Torino, Ermanno Loescher 1884.

Di questo libro, come di tutte le migliori opere dell'ingegno, si parlerà da molti, per molto tempo e in varie guise. Ciò sarà grandemente utile alla scienza e ai suoi seguaci e lieto auspicio di novello incremento del culto delle Matematiche elementari nel nostro paese. Chiunque, leggendo con intelletto di giustizia l'opera del Prof. de Paolis, si soffermi di quando in quando a riflettere all'ordine nel quale l'A. volle si succedessero e connettessero i vari argomenti, e ad indagarne i motivi, deve riconoscere che molte e potenti ragioni di metodo precedentemente ponderate, determinarono l'A. parte inconsapevole, parte incurante delle difficoltà che egli si apparecchiava, a seguire una via, mercè quelle nettamente e saggiamente delineata. Prova ne sia tra l'altre l'abolizione dell'antica distinzione fra Planimetria e Stereometria, evidentemente suggerita da ciò, che a niuno può sembrare tanto bello quanto è comodo che le varietà di fenomeni analoghi che n'offre lo spazio, per ragion d'antico uso o di creduta opportunità didattica, vengano disseminate in vari punti di un trattato, sia pur esso elementare. Ora, se fare un buon libro di Geometria elementare è cosa giustamente reputata delle più difficili, quand'anche si voglia attenersi a quel disegno che, consacrato dall'uso comune e dalla pratica dei migliori Autori, sembra divenuto pressochè inviolabile ed universale, ardua certo e pari al suo ingegno fu la prova alla quale un programma affatto nuovo e sparso di difficoltà cimentava l'Autore di questi nuovi Elementi. Essi andranno meritamente annoverati fra i più degni lavori in fatto di Matematica elementare.

Non dispiacciono adunque all'A. alcune osservazioni le quali mirano a mettere in chiaro taluno dei molti e considerevoli pregi della sua opera, tal'altro dei pochi e lievi difetti.

1. Nella prefazione l'A. parla quasi esclusivamente dell'opportunità di uno studio simultaneo di figure analoghe nel

piano e nello spazio allo scopo di non cadere in ripetizioni inutili.

Io sono del suo avviso, soltanto desidererei che, in una nuova edizione del libro, si commettessero alla cura dell'insegnante quelle ripetizioni che la buona scelta del metodo permetterebbe di evitare e che l'A. sovente non evita, o per rispetto all'uso comune, o per ribadire nel lettore l'abitudine a ragionamenti e deduzioni della medesima specie.

Lo studio simultaneo degli enti ad una, due o tre dimensioni è poi consigliato secondo l'A. da un'altra ragione di gran valore. Come le costruzioni eseguite nel piano sono mezzi efficacissimi e talvolta gli unici mezzi a problemi relativi ad enti di una sola dimensione, così, le costruzioni fatte nello spazio possono riuscire utilissime, se pure non necessarie, in problemi relativi ad enti minori dello spazio medesimo, e molte recenti memorie valgono a dimostrarlo. E nel campo degli elementi, credo arrivi a proposito la seguente osservazione: Nell'ordinaria Planimetria può talvolta riuscir difficile, massime quando si sia astretti a sole considerazioni di *posizione*, verificare che certe tre rette concorrono in un medesimo punto. Uscendo dal piano, tenteremo di dimostrare che esse sono proiezioni sul piano medesimo delle intersezioni di certi tre piani. A questa osservazione fa capo gran parte dei mezzi di costruzione e di dimostrazione che alla Planimetria dona la Stereometria, e l'ingegnosa costruzione del triangolo isoscele con ciascuno degli angoli alla base doppio del rimanente, ottenuta dall'A. indipendentemente dalla teorica delle proporzioni o dell'equivalenza e mediante il solo uso d'un noto teorema su triangoli omotetici che, mentre è evidente nello spazio, non lo è egualmente nel piano, ma lo diviene quivi con considerazioni stereometriche.

Ma la previsione dell'A. il quale afferma che ai principianti non è più facile concepire un'angolo che un diedro, un triangolo che un triedro, ha per lo meno bisogno d'una conferma che soltanto dalla esperienza possiamo aspettare. E, pur concedendo la non maggiore difficoltà, dovremmo ancora consultar l'esperienza per decidere se, la permanenza in quell'astrazione alla quale la nostra mente è stretta nello studio di figure stereometriche che ai sensi appaiono, non già quali esse sono, ma rappresentate su d'un piano,

quello del foglio o della lavagna, costituisca, per la testolina d'un allievo, una difficoltà che possa andar confusa fra le tante d'ordine rudimentale (novità della materia, del linguaggio, della forma nelle argomentazioni), o non piuttosto una difficoltà d'ordine più elevato e che il giovanetto non possa vincere, se già non adusato a vittoria, nella lotta con le prime. Ma quand'anche ciò fosse, si dovrebbe per ciò tornare all'antica separazione come ad unico porto di salvezza? Ecco, a parer mio, ciò non sarebbe saggio. Il tempo necessario a preparare la mente degli alunni a maggiori difficoltà quali possono essere le stereometriche, è certo assai più breve di quello che per antico sistema si concede ordinariamente, e durante il quale, lo si noti bene, il giovanetto trattenuto nel campo planimetrico acquista, come per legge d'inerzia, una naturale riluttanza a tutto ciò che sa di Stereometria. Ma son d'avviso che a cagione dell'ordine che il nostro autore prescrisse ai primordi del suo libro, poco ivi si abbondi in teoremi planimetrici o proposizioni stereometriche assai semplici (in aggiunta a quelle che sono indispensabili alla formazione del gruppo fondamentale dei postulati). Manchi così un giusto periodo di preparazione, e si giunga troppo presto a pagina 27 del libro, e prima forse che un alunno di comune intelligenza possa intendere il teorema 43 della pagina istessa che è alquanto difficile. E qui cade in acconcio una domanda: Fu provvido consiglio il recente bando dello studio della Geometria intuitiva dai Ginnasi e dalle scuole tecniche, o fu smania di novità quella che ci fe' tornare all'antico? Io fo voti, perchè la caducità perenne del nostro sistema di studi si affermi ancora una volta a bene del paese, e che la Geometria intuitiva torni in onore presto e per sempre nelle nostre scuole.

2. I postulati che stanno a base degli Elementi del Prof. de Paolis presuppongono per lo più il concetto di movimento che in ogni trattato di geometria elementare conviene ammettere o esplicitamente o tacitamente.

Ho osservato esser costume dell'A. lo ammettere un medesimo postulato in casi analoghi, ad es. la possibilità di rovesciare il segmento o il diedro, anche quando qualche dipendenza possa esistere fra i vari casi, ad es. fra le due possibilità anzidette. Ma si consideri che, ciascuno il quale

conceda la prima delle due possibilità, vi si decide sol perchè il segmento si diporta in egual modo rispetto ai suoi due estremi. Egli non potrebbe adunque negar la seconda perciò che anche il diedro si diporta in egual modo rispetto alle sue faccie. L'uso dell'A. mi sembra adunque per la detta ragione irreprensibile; ma per la ragione istessa, altrettanto non penso dell'estensione agli angoli del postulato: « Dati due segmenti diseguali si può sempre trovare un segmento multiplo del minore e maggiore dell'altro » alla quale l'A. giunge per via dimostrativa (p. 290, Cor.).

La proposizione « Una retta può scorrere su sè stessa » assunta come postulato dall'A. si trova dimostrata negli elementi di geometria del Sig. Prof. Faifofer. Ma mentre, secondo questo Autore, la possibilità di scorrere attribuita alla retta consiste nella facoltà di sovrapporre un punto A della retta ad altro suo punto A', e poi di nuovo la retta alla retta, il De Paolis, accettando il senso che alla parola *scorrere* volgarmente si attribuisce, ammette che si possa portare A in A' senza che avvenga distacco della retta dalla sua posizione nello spazio. Io credo che l'A. avrebbe fatto bene a riprodurre la breve e facile dimostrazione del Faifofer allo scopo, sempre lodevole, di anteporre un *motivo* al postulato. Avrebbe così disposto il lettore ad accettare la nuova condizione restrittiva, l'ammessibilità della quale è quivi dato di comprendere. Dissi *comprendere* e non *rigorosamente spiegare*: escluderei anzi a priori come priva di significato ogni considerazione d'ordine infinitesimale che mirasse a dimostrare il contrario. Ma dichiaro che, quanto a me, fra molti equivalenti sistemi di postulati, accetterei quello che fosse meno proclive a richiedere la concessione di *modi* anzichè di *effetti* del movimento (operazione per la quale una figura geometrica muta posizione). Ciò imporrebbe, è vero, il sacrificio di qualche proposizione isolata d'ordine cinematico, ma, mentre le operazioni indipendentemente dal modo di compierle sorreggerebbero il grosso dell'edificio geometrico, ciò che sembra più conforme a spirito scientifico, si eviterebbero molte questioni interminabili ed infeconde, indizio talvolta di non perfetta arrendevolezza del soggetto a rivestirsi d'evidenza. Anzichè ammettere che facendo rotare una retta *intorno a un suo punto* la si può costringere

a passare per qualsivoglia altro punto, preferirei si ammettesse a dirittura la conseguenza: si può sempre costringere una retta a passare per due punti, che è indipendente da qualsivoglia concetto di *modo*. Gli « Elementi di Geometria » dei Professori Sannia e d'Ovidio erano quelli che meglio rispondevano a questo mio desiderio. Credo poi che l'A. invece di chiedere che la nota dualistica venga ammessa come postulato in ogni e singolo moto di strisciamento e di rotazione, avrebbe raggiunta una maggior semplicità dimostrandola ne' vari casi, dopo avere ammesso che: se una figura può passare da una posizione A ad un'altra B per una serie di posizioni intermedie, essa può sempre da B tornare in A percorrendo la serie medesima in ordine inverso.

Noto la terza parte del Post. I. a pag. 7: « Una figura si può muovere tenendo fissi tutti i suoi punti situati sopra una stessa retta ». Amerei che fosse detto: Una figura si può muovere fermi restando due de' suoi punti, perchè dalla 1ª parte del Post. II si potrebbe poi dedurre che: se nel moto di una figura due punti si mantengono immobili, lo stesso avviene di tutti gli altri punti della retta che li congiunge. Noto ancora, come pregevolissime e nuove, le definizioni alle p. 10 e 11. Esse si riferiscono alla *linea divisa* da uno dei suoi punti, o alla *superficie divisa* da una delle sue linee, o allo *spazio diviso* da una superficie. Inoltre, come opportunissimi e nuovi i postulati della retta divisa da un suo punto, o del piano da una sua retta, o dello spazio da un suo piano. Se ne trova ben presto una applicazione nella dimostrazione del teorema I. a p. 14. « Un piano è individuato da tre suoi punti non situati sopra una stessa retta ».

La definizione di angolo (piano o diedro) fu sempre argomento di discussione e una spina per gli Autori. Ma sembra oramai prevalso il partito di definir l'angolo come parte del piano o dello spazio. A questo si attiene il nostro A. il quale, a dimostrare che si può sempre sommare più angoli, estende a pag. 38 il concetto di angolo ammettendo angoli che possono essere composti di parti che siano minori del piano o dello spazio aggiunte a multipli del piano o dello spazio istesso. Se ciò non è estetico, è tuttavia necessario e rigorosamente ammissibile; niuno può adunque muoverne rimpro-

vero all'A. Definire l'angolo come *rotazione* equivale a dare un sinonimo alla parola *angolo*, punto o poco chiarendone il concetto.

3. Ora dirò in breve ciò che penso in generale intorno ai primi tre libri dell'opera. L'A. si occupa in essi delle figure geometriche, non delle grandezze. Al par. IV fa un'eccezione. Quivi egli, precludendo opportunamente alla teoria dell'equivalenza, ne disegna la tela, e ne dà una teoria in quei casi ne'quali essa si riduce ad eguaglianza, come avviene per quelle che egli chiama *grandezze elementari* (i segmenti, gli angoli e i diedri). È in questi tre libri che le figure o varietà più note ed importanti dello spazio, quasi sospingendosi a vicenda nella palestra, si offrono in bell'ordine al nostro studio, dalle più semplici alle più composte. Le proprietà planimetriche s'intrecciano alle stereometriche e le une le altre sostengono: sorge un tutto mirabilmente semplice ed armonico, dono d'arte, non d'artificio, di fede nel metodo, non di pompa scientifica. Descriver tutto sarebbe lunghissimo, il lettore si contenterà di alcune osservazioni.

Leggo a pag. 23: « Facendo scorrere su sè stessa una faccia rA di un diedro $r.AB$ strisciando lungo lo spigolo r , anche la faccia rB si move ma non cambia posizione rimanendo sempre il diedro eguale a sè stesso ». L'A. vuol provare in sostanza che un diedro può scorrere su sè stesso.

Ma ciò è inutile perchè questa proprietà è già sottintesa nella definizione dell'eguaglianza di due diedri, la quale potrebbe tuttavia essere censurata. (1)

Veggio con piacere entrar subito in campo il postulato delle parallele con le sue conseguenze.

Dopo la scoperta pangeometrica fu in voga la moda (esagerazione e talvolta parodia dei grandi fatti) di pretendere se-

(1) Infatti essa suppone che per ogni maniera di sovrapporre le due punteggiate, spigoli di due diedri eguali, una ne esista per sovrapporre un diedro all'altro. Avrei preferito che l'A., avendo già detto a pag. 8 che « due figure si dicono *uguali* quando, trasportate convenientemente nello spazio, possono coincidere », nulla avesse soggiunto a pag. 23 circa l'eguaglianza di due diedri, e soprattutto avesse raccomandato le successive dimostrazioni non al modo (come nel teorema a pag. 33, la dimostrazione del quale non è soddisfacente) ma al fatto della sovrapponibilità. E parmi che, quando i segmenti, gli angoli, i diedri, si vogliano considerare come enti affini dello spazio, si debba por cura a proscrivere il dominio del seguente fatto: Vi sono *due* o *infiniti* modi di sovrapporre una grandezza *elementare* ad un'altra ad essa eguale, secondochè si tratti di segmenti ed angoli, oppure di diedri.

parate in sulle prime e per non breve tratto nel corso di un libro elementare, le proposizioni che dipendono dal postulato Euclideo da quelle che non ne dipendono. Ma di grazia: Qual' è lo scopo del libro elementare che si vuol fare? È desso la pangeometria o la geometria ordinaria? Se questa seconda, non sembra logico entrar senza ambagi nell'ambiente de' suoi fenomeni, di quei fenomeni alla contemplazione dei quali il libro si destina? Tuttavia si rassicurino i pangeometri: l'A. rende loro giustizia in una buona nota (la nota XIX a p. 464) dalla quale togliamo che al postulato d'Euclide si può sostituire l'altro: « Quando un piano scorre su sè stesso strisciando lungo un'asse, esiste almeno uno dei suoi punti, non situato sull'asse, che si muove sopra una retta ». A pag. 54 si legge il teorema: « Se una retta è perpendicolare a due rette di un piano non parallele, è anche perpendicolare a tutte le altre sue rette », e si nota nella dimostrazione che essa dipende da semplici considerazioni di posizione mentre le ordinarie, invocando il sussidio di confronti fra triangoli eguali si allontanano in certo modo dall'indole del teorema. A p. 13 l'A. spiega che cosa egli intenda per *segarsi* di due linee o di una linea e di una superficie o di due superficie. Alle p. 72 e 73 ne fa l'applicazione all'intersezione di due cerchi o di un cerchio e di una sfera o di due sfere. L'A. a p. 74 dopo avere molto saggiamente discorso sopra la costruzione delle figure geometriche e gli elementi che nello spazio si possono porre o *immediatamente* o *mediatamente*, enuncia il postulato VIII che dice: « Nello spazio si possono porre *immediatamente* i suoi elementi fondamentali » (i punti, le rette, i piani, secondo l'A.). E poi: « i cerchi di un piano e le sfere dello spazio si pongono *mediante* i loro centri e raggi ». E finalmente: « Se per mezzo degli elementi punti, rette, cerchi, piani, sfere, ne vengono altri posti *mediatamente*, li riterremo come determinati ». Con la 1^a parte del postulato l'A. rivendica il diritto che si aveva a negare altra cosa già *tacitamente* ammessa, e al n. 90 lo dichiara. Ma, o io m'inganno, o quando si concedono le proprietà fondamentali della Geometria e si permette ad un autore di attribuirle ad enti A, B, C, che egli chiama punto, retta, piano, si ammettono gli enti, non importa se esplicitamente o tacitamente,

perchè si può talvolta tacere ciò che si sottintende. L'A. non è qui incorso in una ripetizione? Le altre due proposizioni del postulato, rivelano nell'A. squisitezza di senso geometrico, sebbene mi sembrano semplici definizioni. Nelle costruzioni di triangoli a p. 87, l'A. il quale ha già opportunamente premessa la trattazione dei principali casi d'egualianza, ne approfitta per notare la sufficienza di certi elementi alla determinazione unica del triangolo. Ciò è molto lodevole. Altrettanto egli fa prima delle costruzioni di triedri a p. 136. Tra quest'ultime, notevole per accuratezza, segnalerò quella del n. 170 a p. 137.

4. Vengo all'importante libro dell'equivalenza non senza osservare che nella scala delle difficoltà questa sovrasta alle proprietà di figura. Benemeriti di questa teoria, cito i Professori Faifofer e de Zolt che l'A. ebbe a precursori. L'A. si occupa adunque delle *grandezze equivalenti*, adatta perciò loro la nota definizione di *poligoni equivalenti*, ed incomincia dimostrando che il carattere di equivalenti distribuisce le grandezze in sistemi chiusi in loro stessi, in grazia del teorema: « Due grandezze equivalenti ad una terza sono equivalenti fra loro ». Dà quindi un'opportuna definizione di somma, e dimostra la proprietà associativa dell'addizione T. 1°, e l'unità della somma, T. 2°. Passa al postulato: « Se una grandezza è comunque divisa in parti, trascurandone alcune non è possibile disporre le altre in modo da formare l'intera grandezza » già *dimostrato* per grandezze elementari. La dimostrazione data a questo proposito dal Sig. de Zolt nell'opuscolo: « Principi dell'egualianza di poligoni ecc. Milano 1881 dev'esser sembrata, come a parecchi, così all'A., non del tutto soddisfacente. (1) L'ultima parola su questo punto non s'è forse detta. Ma quando quella proposizione si dimostrasse, il lavoro del nostro A. non sarebbe scosso perciò; invece di un postulato, l'insegnante porrebbe un teorema. Postulato o teorema che permette l'introduzione del concetto di maggiore e minore (v. anche de Zolt l. c.). Secondo questo concetto vengono poi dimostrate alcune delle ordinarie proprietà delle disegualianze, e introdotte le *grandezze principali*. Questa definizione mi sembra nuova ed importante.

(1) Il lettore avrà trovato a pag. 13 di questo fascicolo la dimostrazione del S. g. Faifofer. — (Nota della Direzione).

Principali chiama l'A. le grandezze di una famiglia quando si possono sommare, e si sappia sempre giudicare se due di esse sono equivalenti o quale delle due sia la maggiore. Il Cor. 1° a p. 283 e vari altri della stessa specie che altrove ritrovo non esprimendo proprietà ma identità, mi sembrano inutili. I teoremi successivi si dividono in due classi secondo che essi riguardano grandezze generali o grandezze principali. È importante la conseguenza che stabilisce l'esistenza della differenza, ed unica, fra due grandezze principali, e sola basterebbe a giustificare la distinzione dell'A. L'A. estende poi a grandezze principali alcune disequaglianze con differenze già dimostrate per grandezze elementari (v. ad es. il T. 2° a p. 285), e finalmente si diffonde alquanto sulle grandezze multiple o summultiple di grandezze date mai trascurando la sopradetta distinzione. Ed ora dimando: Non si poteva rendere più agevole l'argomento, grave ed astratto per sè medesimo, enunciando soltanto i teoremi di più facile dimostrazione? L'insegnante li avrebbe poi dimostrati egli stesso in una scuola di *ottimi* allievi dopo aver persuaso questi della loro utilità nelle successive applicazioni. Si sa già che gli Allievi sogliono essere più agevoli all'occasionale che non lo siano al formale insegnamento. E se i teoremi relativi a sole grandezze principali fossero stati enunciati per grandezze senz'altro, non avrebbe l'accorto lettore capito egli stesso dall'enunciato o dalla dimostrazione se la limitazione si dovesse supporre o pur no?

Della teorica delle grandezze equivalenti l'A. fa successivamente l'applicazione ai poligoni piani, ai prismi, e ai poligoni sferici equivalenti. È commendevole l'unità di metodo che l'A. segue nei tre casi. Veggansi ad es. le dimostrazioni dell'equivalenza di due parallelogrammi di eguali basi ed altezze, di due prismi triangolari con eguali sezioni normali ed eguali spigoli, di un parallelogramma sferico e della metà del suo eccesso. L'A. mette molta cura a porre in rilievo la decomponibilità in parti eguali nei vari incontri con grandezze equivalenti, ad es. con due parallelogrammi, insistenti nel piano sulla medesima base e posti dalla medesima parte di essa, quando i lati opposti alla base comune sono separati: (il modo di decomporli in parti eguali dato dall'A. in questo caso, è quello che è descritto negli Elementi di Geometria

di Faifofer seconda ediz. Venezia 1880); lo stesso fa in casi analoghi a p. 312, (1) e a p. 321. Leggo e noto a p. 301: « Due poligoni equivalenti si possono sempre dividere in uno stesso numero di triangoli rispettivamente uguali » e l'applicazione a p. 313, T. 2°. E a p. 295, la dimostrazione del teorema: « Se due triangoli hanno uguale una base e l'altezza corrispondente sono equivalenti ». (Vedi anche gli « Elementi di Faifofer », pag. 197). L'A. non avendo dimostrato che i poligoni sono grandezze principali, evita la dimostrazione ordinaria. Analoga osservazione pel Teorema 2° a p. 315, e per il teorema a p. 322. L'A. si occupa finalmente della trasformazione dei parallelogrammi, dei prismi, e dei poligoni sferici, mirando principalmente a dimostrare che i parallelogrammi, i prismi, i poligoni sferici, sono grandezze principali, conclusione che egli giustamente pone a corona della sua teoria. Splendido e di egregia fattura è il c. V che s'intitola: « Grandezze variabili. Limiti. » Le grandezze principali dell'A. corrispondono ai numeri razionali dell'Aritmetica. Si tratta ora di fare nella geometria mediante quelle, la teorica degli irrazionali. Ed ecco, in breve, come l'A. si è adoperato all'importante oggetto. Ha incominciato a dire di grandezze variabili crescenti e decrescenti, *continuamente* crescenti o decrescenti, *indefinitamente* crescenti o decrescenti. Ha poi dimostrato che, date certe condizioni che ordinariamente hanno luogo, una grandezza principale può decrescere indefinitamente (p. 328), e che una grandezza variabile somma di grandezze indefinitamente crescenti o decrescenti, cresce o decresce indefinitamente (p. 329). A p. 330 l'A. pone l'importante definizione di *variabili convergenti* e loro *limiti*. E poichè l'A. mira a definire come equivalenti due grandezze *limiti* delle stesse variabili convergenti, incomincia dall'escludere qualsiasi dubbio di contraddizione della nuova e più generale definizione con la particolare già data,

(1) L'esposizione di questo teorema non è davvero felice. Leggendola, si crederebbe, che la dimostrazione sia insostenibile, mentre è invece esatissima. Avvertirò adunque i futuri lettori dell'opera che, giunti alla penultima linea della p. 314, essi devono disegnare una figura, che manca nel testo, la quale rappresenti due prismi con uno spigolo comune e gli altri due ordinatamente coincidenti, ma solo in direzione, e chiamarli ABC. A'B'C', AB₁C₁. A'B₁C₁'. Questi sono quelli che l'A. vuol dimostrare equivalenti, confrontandoli col prisma intermedio AB₁C. A'B₁C' come si vede chiaramente a lin. 12, 13, 14 della pagina 313.

dimostrando che: se una di più grandezze equivalenti (nel primitivo senso) è limite di due variabili convergenti, lo sono tutte le altre, e che: sono equivalenti due grandezze principali limiti delle stesse variabili convergenti, p. 332. Passa poi al teorema a pag. 333, dimostrando che due grandezze equivalenti limiti delle stesse variabili convergenti sono equivalenti anche nel senso generale. Stabilisce quindi il postulato: « Due variabili convergenti ammettono sempre un limite » e lo dichiara con un' esempio molto opportuno. A p. 336 dà la definizione di somma di grandezze come limite delle somme delle variabili crescenti e decrescenti nei sistemi di variabili convergenti che possono definire i suoi termini, non senza aver prima dimostrato che quelle somme si possono considerare come variabili convergenti. Con i corollari al n. 390 generalizza i teoremi premessi alla teoria dell'equivalenza intesa nel senso antico. Il teorema a p. 337: « Date due coppie di variabili convergenti la variabile decrescente di una coppia è sempre maggiore della variabile crescente dell'altra », prepara una definizione di maggiore e minore che l'A. porrà in seguito. Intanto, avere la propria variabile decrescente maggiore della variabile crescente dell'altra, è proprietà assoluta di una coppia, e dipendente soltanto dai limiti delle due coppie (V. il T. 2° a p. 338); e se i limiti sono eguali, ognuna delle due coppie gode di questa proprietà, (teor. seg). A pag. 339 si trovano dimostrati i teoremi inversi, è aperto così l'adito alla definizione di maggiore e minore che l'A. pone a p. 340.

La trama è, come ognuno vede, sottilmente e maestrevolmente ordita: ne sia lode al ch. Autore. Sorvolando sulle applicazioni ai poliedri equivalenti, alla superficie e al volume del cono, del cilindro, della sfera, ecc., nelle quali l'A. ha dovuto rinunciare al mezzo delle proporzioni, dirò qualche cosa dell'applicazione al circolo e alla sua superficie. L'A., e ciò è notevolissimo, incomincia dalla superficie. Dimostra che questa è il limite di due variabili principali convergenti, poligoni inscritti e circoscritti succedentisi con la nota legge Euclidea: e che esiste sempre un triangolo equivalente alla superficie di un circolo dato. Posto che l'altezza del triangolo sia eguale al raggio del circolo, dimostra che la sua base è il limite di due variabili convergenti. Esse

sono i perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti. Questo limite è indipendente anch'esso dalla legge di successione dei poligoni le aree dei quali convergono verso quella del circolo. *Circolo* chiama l'A. questo secondo limite.

6. La teoria delle proporzioni offre una nuova applicazione di quella dei limiti. Lo spazio concessomi non mi permette di esaminarla qui da vicino. Forse lo farò in una prossima pubblicazione occasionata da una recente edizione degli Elementi di Geometria dei Professori Sannia e d'Ovidio. Questo libro dà luogo a vari confronti con quello del de Paolis. Avverto soltanto che questi ha notevolmente semplificato la celebre definizione di Euclide introducendo l'altra: « Date quattro grandezze, prese in un certo ordine, si dice che formano una *proporzione* se la seconda e la quarta sono contenute sempre uno stesso numero di volte in due grandezze equimultiple della prima e della terza, secondo qualunque numero ».

Ancora un cenno sulla teoria della misura della quale l'altra delle grandezze e dei limiti è un simulacro geometrico che l'A. seppe, come dissi, magistralmente scolpito. (1) Essa riusciva meno ardua all'A. il quale l'ha perciò, a quanto mi sembra, un pò meno curata. L'A. ammette il postulato di Dedekind che corrisponde a quello del limite di due variabili convergenti, del quale si tenne parola. E per misura di una grandezza rispetto a una data unità, intende il numero limite dei numeri commensurabili che rappresentano le misure degli stati (commensurabili coll'unità) delle grandezze variabili convergenti che la definiscono, e dimostra, sempre invocando la teoria delle grandezze variabili, che: « Una grandezza data, rispetto a una data unità, ha sempre una misura, ed una sola. » La dimostrazione del corollario al n. 470 è difettosa, ma fu corretta dai Professori Sannia e d'Ovidio nel loro recente lavoro sopra citato.

E di alcune altre mende meno importanti dell'opera, non occorre tener discorso.

G. FRATTINI.

(1) Il de Paolis ha, in sostanza, fatto in geometria ciò che se già in Aritmetica il Dedekind col classico lavoro: « Die irrationalen Zahlen ».

QUISTIONE PROPOSTA

Se i raggi dei cerchi inscritti nelle quattro facce d'un tetraedro sono fra loro eguali, è necessario che le facce stesse sieno fra loro eguali?

LIBRI RICEVUTI DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

- Lezioni di Geometria complementare ad uso degli Istituti tecnici di *Raffaele Badia* insegnante di matematiche nell'Istituto tecnico di Perugia. — Città di Castello, S. Lapi editore 1885.
- Primi Elementi di Geometria proiettiva e descrittiva ad uso degli Istituti tecnici del Regno del Dott. *Vittorio Murer*. 1885, Ditta G. B. Paravia e Comp. — Torino — Milano — Firenze — Roma. Scuola Militare. — Compendio di Geometria con due appendici sulla trigonometria e sulle proiezioni quotate del prof. *Francesco Nicoli*. — In Modena, coi tipi della società tipografica, 1885.
- Elementi di Aritmetica generale ed Algebra. Lezioni date nel R. Liceo Umberto I, dal Prof. *L. Rajola Pescarini*. — Napoli, Domenico Morano editore, 1884.
- Capitolo aggiunto agli Elementi di Aritmetica generale ed Algebra del professore *L. Rajola Pescarini* contenente la teoria dei logaritmi. — Napoli, Domenico Morano editore, 1885.
-

INTORNO
AD ALCUNE RELAZIONI FRA DISTANZE

NOTA
DI GINO LORIA

I.

1. La porzione di retta limitata da due punti dicesi *segmento rettilineo*, o, più semplicemente, *segmento*.

2. La figura formata da quattro punti disposti comunque nello spazio dicesi *tetragono*; i punti dati ne sono i *vertici* e i segmenti che li congiungono a due a due *gli spigoli*.

Un tetragono ha sei spigoli, essi sono i lati del triangolo determinato da tre de' suoi vertici e le congiungenti questi col quarto.

Se i quattro vertici stanno in un piano, il tetragono è *piano* e i suoi spigoli si chiamano *lati*.

3. Dati sei segmenti $abcefg$, affinchè con essi come spigoli si possa costruire un tetragono, non è necessario che passi fra essi alcuna equazione di condizione.

Infatti, si costruisca con tre di essi (a, b, c) come lati un triangolo ABC: affinchè ciò sia possibile è necessario e sufficiente che ciascuno sia compreso fra la somma e la differenza degli altri due. Centri due di essi (b, c) e raggi altri due dei dati segmenti (f, g) si descrivano due sfere: queste avranno comune un cerchio (di centro O e raggio r) purchè la distanza BC sia compresa fra la somma e la differenza di quei due segmenti. Questo cerchio secherà la sfera di centro A e raggio e in due punti (D', D'') quando, chiamando E la proiezione di A sul piano del cerchio, sià $AE < e$ (*) ed OE risulti compreso fra la somma e la diffe-

(*) Ciò è necessario affinchè il piano del cerchio sechi la sfera.

renza dei due segmenti r e $\sqrt{e^2 - AE^2}$. (*) I tetragoni $ABCD'$ e $ABCD''$ hanno entrambi gli spigoli eguali ai segmenti dati; dunque, ecc.

Se uno de' punti D' , D'' cade nel piano ABC il tetragono è piano; in generale ciò non accade, ma affinché si verifichi questo caso devono i segmenti dati soddisfare qualche equazione di condizione. Ma notando che, dati i segmenti $abcfg$ per modo che si possa con i tre primi come lati costruire un triangolo ABC e che le due sfere di centri B , C e raggi f , g s'incontrino, si può scegliere e in due soli modi per rendere il tetragono piano, (**) si conchiuderà che fra i sei lati di un tetragono piano passa una e una sola relazione. (***)

4. La figura formata da cinque punti disposti comunque nello spazio dicesi *pentagono*; i punti dati ne sono i vertici, i segmenti che li congiungono a due a due gli *spigoli*.

Un *pentagono* ha dieci spigoli: essi sono gli spigoli del tetragono determinato da quattro de' punti dati e i segmenti congiungenti i vertici di questo col quinto.

5. Dati ad arbitrio dieci segmenti $abcfg a_1 b_1 c_1 d_1$, in generale non esiste alcun *pentagono* che li abbia per ispigoli.

Infatti, supposte soddisfatte le condizioni esposte nel n. 3, si potrà costruire un tetraedro $ABCD$ i cui spigoli BC , CA , AB , AD , BD , CD siano eguali rispettivamente ai segmenti a , b , c , e , f , g . Supposte soddisfatte altre condizioni analoghe, si potrà costruire sulla stessa base ABC un tetraedro $ABCE$ i cui spigoli EA , EB , EC siano eguali ri-

(*) Questa seconda condizione è necessaria affinché il cerchio considerato sechi quello in cui il suo piano interseca la sfera data.

(**) Se P' , P'' sono i punti comuni alla due sfere suddette e al piano ABC si può assumere $e = AP'$ o $e = AP''$.

(***) L'utilità dell'introduzione metodica nella geometria elementare di considerazioni di questo genere, fu sostenuta dal Prof. Besso nel suo articolo *Sul concetto di funzione nell'insegnamento della geometria elementare* (Giornale di Matematiche, Vol. VII).

spettivamente ad a_1, b_1, c_1 . Ora, il pentagono ABCDE ha nove de'suoi spigoli eguali ad altrettanti dei segmenti dati; ma il decimo, DE, non sarà in generale eguale al decimo, d_1 , di questi. Di più, DE è determinato (in uno o più modi) dalla conoscenza dei segmenti abc, efg, a_1, b_1, c_1 : dunque, affinchè i dieci segmenti dati siano spigoli di un pentagono, dovrà fra essi passare una e una sola relazione. In altre parole, fra i dieci spigoli di qualunque pentagono passa una relazione.

6. Supponiamo in particolare che quattro spigoli uscenti dallo stesso vertice del pentagono siano fra loro eguali; gli altri quattro vertici apparterranno allora alla stessa sfera; fra il raggio di questa e i segmenti che uniscono a due a due i detti quattro punti, passerà quindi una relazione. È facile dedurre che fra i sei archi di cerchio massimo congiungenti a due a due quattro punti di una sfera passa una relazione ed una sola.

7. Dunque, riassumendo i risultati ottenuti, potremo dire:

Fra i sei segmenti che uniscono a due a due quattro punti di un piano; fra gli archi di circolo massimo congiungenti a due a due quattro punti di una sfera; e fra i segmenti che uniscono a due a due cinque punti dello spazio, passa una relazione.

Scopo del presente scritto è la ricerca con metodo elementare di queste relazioni. Ci dispenseremo però d'indicare la via per la quale si può pervenire alla prima, perchè essa si trova additata in opere molto diffuse: d'altronde essa è del tutto analoga a quella per cui si perviene alla seconda.

II. •

Se α, β, γ sono tre angoli tali che sia soddisfatta una delle relazioni

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi, \quad -\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha - \beta + \gamma = 0, \quad \alpha + \beta - \gamma = 0,$$

si avrà

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Infatti, le prime due fra le date equazioni possono scriversi come segue

$$\beta + \gamma = 2\pi - \alpha, \quad \beta + \gamma = \alpha,$$

le quali concordano nel dare

$$\cos(\beta + \gamma) = \cos\alpha,$$

relazione che, sviluppata, diviene

$$\cos\beta \cos\gamma - \cos\alpha = \text{sen}\beta \text{sen}\gamma$$

Elevandola a quadrato si ottiene

$$\cos^2\beta \cos^2\gamma + \cos^2\alpha - 2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = (1 - \cos^2\beta) (1 - \cos^2\gamma);$$

e questa, fatte tutte le riduzioni, prende la forma

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = 0$$

c.d.d. - Analogamente si mostrerebbe che anche le due ultime delle date relazioni conducono a questa equazione.

III.

Siano A, B, C, D quattro punti di una sfera, la quale supporremo, come d'uso, di raggio eguale ad 1. Chiamiamo *abcefg* gli archi di cerchio massimo BC, CA, AB, AD, BD, CD e $\alpha\beta\gamma$ gli angoli BDC, CDA, ADB. In forza dell'equazione fondamentale della trigonometria sferica, avremo

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos f \cos g}{\text{sen} f \text{sen} g}, \quad \cos\beta = \frac{\cos b - \cos g \cos e}{\text{sen} g \text{sen} e}, \quad \cos\gamma = \frac{\cos c - \cos e \cos f}{\text{sen} e \text{sen} f}.$$

Di più, i tre angoli α, β, γ o danno per somma 2π o uno di essi è eguale alla somma degli altri due: si verifica la prima di tali relazioni se il punto D è interno al triangolo ABC, si verifica una delle altre se è esterno. Ne viene che fra questi angoli passerà la relazione (I). Sostituendo in questa per $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ le espressioni precedenti otterremo:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\cos c - \cos f \cos e}{\operatorname{sen} f \operatorname{sene}} & \frac{\cos b - \cos g \cos e}{\operatorname{seng} \operatorname{sene}} \\ \frac{\cos c - \cos f \cos e}{\operatorname{sene} \operatorname{sen} f} & 1 & \frac{\cos a - \cos g \cos f}{\operatorname{seng} \operatorname{sen} f} \\ \frac{\cos b - \cos g \cos e}{\operatorname{sene} \operatorname{seng}} & \frac{\cos a - \cos f \cos g}{\operatorname{seng} \operatorname{sen} f} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa si potrebbe considerare come la relazione cercata, ma si può trasformarla in modo che essa assuma un aspetto più semplice. Moltiplichiamo a tale scopo le successive verticali del precedente determinante per $\operatorname{sene}, \operatorname{sen} f, \operatorname{seng}$; facciamo le stesse operazioni sulle orizzontali; quindi sostituiamo ad ogni sen^2 il suo equivalente $1 - \cos^2$; finalmente eleviamo di ordine il determinante. Avremo così:

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos^2 e & \cos c - \cos f \cos e & \cos b - \cos e \cos g & 0 \\ \cos c - \cos e \cos f & 1 - \cos^2 f & \cos a - \cos g \cos f & 0 \\ \cos b - \cos e \cos g & \cos a - \cos f \cos g & 1 - \cos^2 g & 0 \\ \cos e & \cos f & \cos g & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Aggiungendo poi alla 1^a orizzontale la 4^a moltiplicata per $\cos e$, alla 2^a la 4^a moltiplicata per $\cos f$ e alla 3^a la 4^a moltiplicata per $\cos g$ otterremo infine

$$(II) \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b & \cos e \\ \cos c & 1 & \cos a & \cos f \\ \cos b & \cos a & 1 & \cos g \\ \cos e & \cos f & \cos g & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Collo stesso ragionamento si dimostra che fra i sei lati di un tetragono piano, passa la relazione

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & e^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & f^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & g^2 & 1 \\ e^2 & f^2 & g^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (*)$$

Applicando la (II) si determina facilmente il raggio sferico del cerchio (minore) circoscritto al triangolo ABC; chiamandolo infatti r la (II) dovrà essere soddisfatta ponendo $e = f = g = r$; ne segue

$$\cos^2 r = - \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b & 1 \\ \cos c & 1 & \cos a & 1 \\ \cos b & \cos a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}},$$

$$\text{sen } r = \frac{2\text{sen}\frac{a}{2} \text{sen}\frac{b}{2} \text{sen}\frac{c}{2}}{\sqrt{\left(\text{sen}\frac{a}{2} + \text{sen}\frac{b}{2} + \text{sen}\frac{c}{2}\right) \left(-\text{sen}\frac{a}{2} + \text{sen}\frac{b}{2} + \text{sen}\frac{c}{2}\right) \left(\text{sen}\frac{a}{2} - \text{sen}\frac{b}{2} + \text{sen}\frac{c}{2}\right) \left(\text{sen}\frac{a}{2} + \text{sen}\frac{b}{2} - \text{sen}\frac{c}{2}\right)}}$$

(*) E allo stesso modo si dimostra che fra i sei archi geodetici che uniscono a coppie quattro punti di una superficie pseudosferica passa la relazione

$$\begin{vmatrix} 1 & \cosh\frac{c}{R} & \cosh\frac{b}{R} & \cosh\frac{e}{R} \\ \cosh\frac{c}{R} & 1 & \cosh\frac{a}{R} & \cosh\frac{f}{R} \\ \cosh\frac{b}{R} & \cosh\frac{a}{R} & 1 & \cosh\frac{g}{R} \\ \cosh\frac{e}{R} & \cosh\frac{f}{R} & \cosh\frac{g}{R} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

IV.

Siano ABCDE cinque punti qualunque dello spazio; indichiamo nel seguente modo gli spigoli del pentagono da essi determinato:

$$BC = a_1 \quad CA = b_1 \quad AB = c_1$$

$$AD = e_1 \quad BD = f_1 \quad CD = g_1$$

$$AE = a_2 \quad BE = b_2 \quad CE = c_2 \quad DE = d_2$$

e nel seguente modo gli angoli formati dalle congiungenti E agli altri punti considerate a coppie:

$$BEC = a \quad CEA = b \quad AEB = c$$

$$AED = e \quad BED = f \quad CED = g$$

Allora, pel teorema del coseno della trigonometria rettilinea, avremo:

$$\cos a = \frac{-a_1^2 + b_2^2 + c_2^2}{2b_2c_2}, \quad \cos b = \frac{-b_1^2 + c_2^2 + a_2^2}{2c_2a_2}, \quad \cos c = \frac{-c_1^2 + a_2^2 + b_2^2}{2a_2b_2}$$

$$\cos e = \frac{-e_1^2 + d_2^2 + a_2^2}{2d_2a_2}, \quad \cos f = \frac{-f_1^2 + d_2^2 + b_2^2}{2d_2b_2}, \quad \cos g = \frac{-g_1^2 + d_2^2 + c_2^2}{2d_2c_2}$$

Ciò posto, descriviamo una sfera di centro E e raggio 1; i raggi EA, EB, EC, ED, prolungati se occorre oltre i loro estremi, incontrano la superficie in quattro punti A' B' C' D' le cui mutue distanze sferiche sono

$$B'C' = a, \quad C'A' = b, \quad A'B' = c, \quad A'D' = e, \quad B'D' = f, \quad C'D' = g:$$

ne segue che fra $a b c e f g$ passerà la relazione (II). Sostituendo in essa in luogo di $\cos a, \cos b, \dots, \cos g$ le loro

espressioni precedentemente trovate, essa prenderà la forma seguente :

$$\begin{vmatrix}
 1 & \frac{-c_1^2 + b_2^2 + a_2^2}{2b_2 a_2} & \frac{-b_1^2 + c_2^2 + a_2^2}{2c_2 a_2} & \frac{-e_1^2 + d_2^2 + a_2^2}{2d_2 a_2} & \\
 \frac{-c_1^2 + a_2^2 + b_2^2}{2a_2 b_2} & 1 & \frac{-a_1^2 + c_2^2 + b_2^2}{2c_2 b_2} & \frac{-f_1^2 + d_2^2 + b_2^2}{2d_2 b_2} & \\
 \frac{-b_1^2 + a_2^2 + c_2^2}{2a_2 c_2} & \frac{-a_1^2 + b_2^2 + c_2^2}{2b_2 c_2} & 1 & \frac{-g_1^2 + d_2^2 + c_2^2}{2d_2 c_2} & \\
 \frac{-e_1^2 + a_2^2 + d_2^2}{2a_2 d_2} & \frac{-f_1^2 + b_2^2 + d_2^2}{2b_2 d_2} & \frac{-g_1^2 + c_2^2 + d_2^2}{2c_2 d_2} & 1 & \\
 \end{vmatrix} = 0$$

Questa si può considerare come la relazione da cui son legate le mutue distanze di cinque punti dello spazio. Essa può ridursi ad una forma molto più semplice. A tale scopo moltiplichiamo le verticali successive del suo primo membro rispettivamente per $2a_2$, $2b_2$, $2c_2$, $2d_2$ e le sue orizzontali ordinatamente per a_2 , b_2 , c_2 , d_2 ; poi eleviamo il determinante di ordine; essa allora sarà divenuta

$$\begin{vmatrix}
 2a_2^2 & -c_1^2 + b_2^2 + a_2^2 & -b_1^2 + c_2^2 + a_2^2 & -e_1^2 + d_2^2 + a_2^2 & 1 \\
 -c_1^2 + a_2^2 + b_2^2 & 2b_2^2 & -a_1^2 + c_2^2 + b_2^2 & -f_1^2 + d_2^2 + b_2^2 & 1 \\
 -b_1^2 + a_2^2 + c_2^2 & -a_1^2 + b_2^2 + c_2^2 & 2c_2^2 & -g_1^2 + d_2^2 + c_2^2 & 1 \\
 -e_1^2 + a_2^2 + d_2^2 & -f_1^2 + b_2^2 + d_2^2 & -g_1^2 + c_2^2 + d_2^2 & 2d_2^2 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1
 \end{vmatrix} = 0$$

Sottraggiamo ora dalla 1^a verticale l'ultima moltiplicata per a_2^2 , dalla 2^a l'ultima moltiplicata per b_2^2 , dalla 3^a l'ultima moltiplicata per c_2^2 , dalla quarta l'ultima moltiplicata per d_2^2 ; elevando l'ordine anche del nuovo determinante avremo :

1. *Trovare il raggio della sfera circoscritta ad un dato tetraedro.*

Sia ABCD il tetraedro dato, essendo $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $AD = e$, $BD = f$, $CD = g$; chiamando O il centro e r il raggio della sfera ad esso circoscritta, sarà $OA = OB = OC = OD = r$; la relazione analoga alla (III) pei cinque punti ABCDO è

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & e^2 & r^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & f^2 & r^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & g^2 & r^2 & 1 \\ e^2 & f^2 & g^2 & 0 & r^2 & 1 \\ r^2 & r^2 & r^2 & r^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

e questa ci dà subito

$$r^2 = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & e^2 \\ c^2 & 0 & a^2 & f^2 \\ b^2 & a^2 & 0 & g^2 \\ e^2 & f^2 & g^2 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & e^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & f^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & g^2 & 1 \\ e^2 & f^2 & g^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. *Date quattro sfere concentriche, trovare un tetraedro che sia simile a un tetraedro dato e di cui ciascun vertice stia su una delle sfere date.*

Siano a_1, b_1, c_1, d_1 i raggi e O il centro delle date sfere: $abcefg$ gli spigoli del tetraedro dato.

Se ABCD è il tetraedro cercato e x un numero da determinare, dovrà essere

$$BC = ax, CA = bx, AB = cx, AD = ex, BD = fx,$$

$$CD = gx, OA = a_1, OB = b_1, OC = c_1, OD = d_1$$

Fra le mutue distanze de' punti ABCDO dovrà aver luogo la relazione analoga alla (III), dunque:

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2 x^2 & b^2 x^2 & e^2 x^2 & a_1^2 & 1 \\ c^2 x^2 & 0 & a^2 x^2 & f^2 x^2 & b_1^2 & 1 \\ b^2 x^2 & a^2 x^2 & 0 & g^2 x^2 & c_1^2 & 1 \\ e^2 x^2 & f^2 x^2 & g^2 x^2 & 0 & d_1^2 & 1 \\ a_1^2 & b_1^2 & c_1^2 & d_1^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ ossia} \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & e^2 & a_1^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & f^2 & b_1^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & g^2 & c_1^2 & 1 \\ e^2 & f^2 & g^2 & 0 & d_1^2 & 1 \\ a_1^2 & b_1^2 & c_1^2 & d_1^2 & 0 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Donde :

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & e^2 \\ c^2 & 0 & a^2 & f^2 \\ b^2 & a^2 & 0 & g^2 \\ e^2 & f^2 & g^2 & 0 \end{vmatrix} x^4 + 2x^2 \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & e^2 & a_1^2 \\ c^2 & 0 & a^2 & f^2 & b_1^2 \\ b^2 & a^2 & 0 & g^2 & c_1^2 \\ e^2 & f^2 & g^2 & 0 & d_1^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & e^2 & a_1^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & f^2 & b_1^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & g^2 & c_1^2 & 1 \\ e^2 & f^2 & g^2 & 0 & d_1^2 & 1 \\ a_1^2 & b_1^2 & c_1^2 & d_1^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Trovato x il problema è risolto. Deduca il lettore da questa equazione a quali condizioni geometriche debbano soddisfare i dati della questione affinchè si possa effettivamente trovare un tetraedro soddisfacente tutte le condizioni imposte.

Torino, 27 Gennaio 1886.

SOPRA UNA PROPOSIZIONE FONDAMENTALE
DELLA TEORIA DELL'EQUIVALENZA

Lettera del Prof. De Paolis al Direttore del Periodico

Pisa, 10 Febbraio 1886.

Pregiò Sig. Professore,

Mi permetta di sottoporre al suo giudizio alcune osservazioni sopra l'articolo pubblicato dal Prof. Faifofer nel primo fascicolo del Giornale che Ella dirige.

Il Prof. De Zolt (Principii della eguaglianza di poligoni - Milano. - D. Briola. - 1881.) fonda la teoria dell'equivalenza dei poligoni sul Teorema: Se un poligono è diviso in parti in un modo qualunque non è possibile, trascurando alcuna di esse, disporre le rimanenti in modo da coprire interamente il poligono.

Essendomi però accorto che la dimostrazione data dal Prof. De Zolt non andava esente da obbiezioni, e non essendo riuscito a trovarne una rigorosa, quando pubblicai i miei « Elementi di Geometria » domandai, con un Postulato, che: Se una grandezza è comunque divisa in parti, trascurandone alcune non è possibile disporre le rimanenti in modo da formare nuovamente la stessa grandezza. Ora, nel suddetto articolo del Prof. Faifofer, leggo un'altra dimostrazione dello stesso teorema; disgraziatamente però anche questa dimostrazione mi pare inesatta, ed ecco la ragione per cui la ritengo tale:

L'Autore deduce che: « Una parte di poligono non » può essere equivalente all'intero », pretendendo di dimostrare prima che: « Sottraendo da due poligoni equivalenti » due loro parti che siano uguali ad un terzo poligono, si » ottengono resti equivalenti ». Ed ecco come: Se A e B

sono i due poligoni equivalenti, divisi già in uno stesso numero di parti rispettivamente uguali, e se H e K sono i due poligoni uguali, che si devono togliere da A e B, dividiamo le parti di A e B come sono divise in B ed A dai contorni di K ed H, e se i poligoni H e K sono divisi dalle primitive linee di divisione o dalle *nuove* che si sono tirate, facciamo in ciascuno di essi le divisioni che si scorgono nell'altro. Dopo ciò i due poligoni A e B sono composti di parti rispettivamente uguali, e sopprimendo H e K, si sopprimono di queste parti rispettivamente uguali, quindi, ecc. Però le divisioni e suddivisioni accennate dall'Autore sono sufficienti solamente se le *nuove* linee che si sono tirate non dividono i poligoni H e K, come avviene nella figura che presenta al lettore; se le nuove linee dividessero invece H e K bisognerebbe nuovamente suddividere le parti di A e B come sono suddivise quelle di B ed A, così si descriverebbero altre *nuove* linee che potrebbero ancora suddividere i poligoni H e K, ciò che porterebbe un'ulteriore suddivisione delle parti di A e B, e così di seguito. Mi pare dunque che il teorema sarà dimostrato solamente quando sarà provato che eseguendo le successive operazioni di suddivisione si arriva *necessariamente* ad un punto in cui le *ultime* linee descritte non dividono più i poligoni H, K. E che la dimostrazione possa essere completata, in questo senso, ne dubito. Infatti si tratta di dimostrare il Teorema: « Sono equivalenti i resti che si trovano sottraendo due poligoni uguali da due poligoni equivalenti, e poi dedurre la dimostrazione del Postulato fondamentale dell'equivalenza; ora è dopo avere ammesso questo postulato, e non prima, che si può stabilire il concetto di poligoni maggiori o minori, e per dimostrare che sono equivalenti i resti che si ottengono sottraendo poligoni uguali da poligoni equivalenti, pare necessario avere dimostrato che due poligoni o sono equivalenti o uno è maggiore dell'altro.

Finalmente poi mi permetta di farle pure osservare che

se anche i Teoremi enunciati dal Prof. Faifofer fossero dimostrati rigorosamente, non basterebbero, come egli dice, per potere « dimostrare le proposizioni sull'equivalenza dei » poligoni e dei poliedri con la stessa semplicità che si » ammira negli Elementi d'Euclide », e ciò perchè appunto, nel caso dei parallelogrammi equivalenti, caso da cui parte Euclide, bisogna applicare successivamente più volte le operazioni di suddivisione.

Mi creda, Sig. Professore, con tutta la stima, suo

Devoto

RICCARDO DE PAOLIS.

DEL CIRCOLO CIRCOSCRITTO ED INSCRITTO E DEI CIRCOLI EX-INSCRITTI IN UN TRIANGOLO SFERICO

I.

Si indichino con a, b, c i lati di un triangolo sferico qualunque, con A, B, C gli angoli opposti, con ψ la tangente trigonometrica del raggio sferico del cerchio circoscritto, con φ quella del raggio sferico del cerchio inscritto, con $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ le tangenti trigonometriche dei raggi sferici dei cerchi inscritti nei nuovi triangoli che si ottengono ordinatamente prolungando due a due i lati b e c, a e c, a e b del triangolo che si considera, e pongasi

$$a + b + c = 2p, \quad A + B + C = 2P$$

$$\pm \sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a) \operatorname{sen}(p-b) \operatorname{sen}(p-c)} = \omega$$

$$\pm \sqrt{-\cos P \cos(P-A) \cos(P-B) \cos(P-C)} = \omega_1$$

Si avranno le eguaglianze

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}a \operatorname{sen}\frac{1}{2}b \operatorname{sen}\frac{1}{2}c}{\omega} \\ \varphi &= \frac{\omega}{\operatorname{sen}p} \\ \varphi_1 &= \frac{\omega}{\operatorname{sen}(p-a)} \\ \varphi_2 &= \frac{\omega}{\operatorname{sen}(p-b)} \\ \varphi_3 &= \frac{\omega}{\operatorname{sen}(p-c)} \end{aligned} \right\} \text{(M)}$$

$$\left. \begin{aligned} \psi &= -\frac{\cos P}{\omega_1} \\ \varphi &= \frac{\omega_1}{2\cos\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}B \cos\frac{1}{2}C} \\ \varphi_1 &= \frac{\omega_1}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}B \operatorname{sen}\frac{1}{2}C \cos\frac{1}{2}A} \\ \varphi_2 &= \frac{\omega_1}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}A \operatorname{sen}\frac{1}{2}C \cos\frac{1}{2}B} \\ \varphi_3 &= \frac{\omega_1}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}A \operatorname{sen}\frac{1}{2}B \cos\frac{1}{2}C} \end{aligned} \right\} \text{(N)}$$

le quali si dimostrano facilmente per mezzo delle relazioni fondamentali della trigonometria sferica.

Il doppio segno da cui sono affetti i valori di ciascuna tangente si spiega osservando che ogni cerchio descritto sulla superficie della sfera ha due poli, ai quali corrispondono due raggi sferici che sono archi supplementari.

II.

Si prendano i valori reciproci di φ , φ_1 , φ_2 , φ_3 invertendo i rapporti che costituiscono i secondi membri e si addizionino la seconda, la terza e la quarta delle eguaglianze che ne risultano, sottraendo da questa somma la prima. Dopo alcune trasformazioni si troverà

$$\frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} + \frac{1}{\varphi_3} - \frac{1}{\varphi} = \frac{4\operatorname{sen}\frac{1}{2}a \operatorname{sen}\frac{1}{2}b \operatorname{sen}\frac{1}{2}c}{\omega}$$

ovvero

$$\frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} + \frac{1}{\varphi_3} - \frac{1}{\varphi} = -\frac{2\cos P}{\omega_1}$$

secondo che le eguaglianze sulle quali si è operato appar-

tengono al sistema (M) o al sistema (N). Da una qualunque di queste ultime e dai valori di ψ si deduce

$$\frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} + \frac{1}{\varphi_3} - \frac{1}{\varphi} = 2\psi.$$

III.

Ponendo

$$p - a = \alpha, \quad p - b = \beta, \quad p - c = \gamma$$

si ha

$$\beta + \gamma = p - \alpha$$

quindi

$$\cos\beta\cos\gamma - \cos p\cos\alpha = \text{sen}\beta\text{sen}\gamma + \text{sen}p\text{sen}\alpha$$

Eliminando i coseni e dividendo per $\text{sen}^2 p \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \beta \text{sen}^2 \gamma$ si ottiene

$$\begin{aligned} & \frac{\text{sen}^2 p}{2\text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \beta \text{sen}^2 \gamma} + \frac{\text{sen}^2 \alpha}{2\text{sen}^2 p \text{sen}^2 \beta \text{sen}^2 \gamma} + \frac{\text{sen}^2 \beta}{2\text{sen}^2 p \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \gamma} \\ & + \frac{\text{sen}^2 \gamma}{2\text{sen}^2 p \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \beta} - \\ & - \frac{1}{\text{sen}^2 p \text{sen}^2 \alpha} - \frac{1}{\text{sen}^2 p \text{sen}^2 \beta} - \frac{1}{\text{sen}^2 p \text{sen}^2 \gamma} - \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \beta} \\ & - \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \gamma} - \frac{1}{\text{sen}^2 \beta \text{sen}^2 \gamma} + \\ & + \frac{2\text{sen}^2 p + 2\text{sen}^2 \alpha + 2\text{sen}^2 \beta + 2\text{sen}^2 \gamma}{\text{sen} p \text{sen} \alpha \text{sen} \beta \text{sen} \gamma} + \frac{2}{\text{sen}^2 p} + \frac{2}{\text{sen}^2 \alpha} + \frac{2}{\text{sen}^2 \beta} + \frac{2}{\text{sen}^2 \gamma} - \\ & - \frac{4}{\text{sen} p \text{sen} \alpha \text{sen} \beta \text{sen} \gamma} = 0 \end{aligned}$$

Ma dalla seconda, terza, quarta e quinta eguaglianza del sistema (M) moltiplicate fra loro risulta

$$\omega^2 = \varphi\varphi_1\varphi_2\varphi_3$$

e per conseguenza

$$\operatorname{sen}^2 p = \frac{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3}{\varphi}, \quad \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\varphi \varphi_2 \varphi_3}{\varphi_1}, \quad \operatorname{sen}^2 \beta = \frac{\varphi \varphi_1 \varphi_3}{\varphi_2}, \quad \operatorname{sen}^2 \gamma = \frac{\varphi \varphi_1 \varphi_2}{\varphi_3}$$

dunque

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\varphi^4} + \frac{1}{2\varphi_1^4} + \frac{1}{2\varphi_2^4} + \frac{1}{2\varphi_3^4} - \frac{1}{\varphi^2 \varphi_1^2} - \frac{1}{\varphi^2 \varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi^2 \varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_1^2 \varphi_2^2} - \frac{1}{\varphi_1^2 \varphi_3^2} - \frac{1}{\varphi_2^2 \varphi_3^2} \\ & + \frac{2}{\varphi^2} + \frac{2}{\varphi_1^2} + \frac{2}{\varphi_2^2} + \frac{2}{\varphi_3^2} + \frac{2\varphi}{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3} + \frac{2\varphi_1}{\varphi \varphi_2 \varphi_3} + \frac{2\varphi_2}{\varphi \varphi_1 \varphi_3} + \frac{2\varphi_3}{\varphi \varphi_1 \varphi_2} - \frac{4}{\varphi \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3} = 0 \end{aligned}$$

IV.

Si sa che il numero $A + B + C - 2$ esprime l'area del triangolo sferico quando si prende per unità di misura degli angoli l'angolo retto e per unità di superficie il triangolo trirettangolo. Ciò posto, indicando con S l'area di un triangolo sferico qualunque, sarà

$$-\cos P = \operatorname{sen}^{\frac{1}{2}} S$$

quindi la prima eguaglianza del sistema (N) diviene

$$\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}} S = \omega_1 \psi.$$

Moltiplicando fra loro membro a membro le altre quattro eguaglianze dello stesso sistema ed estraendo la radice quadrata da ambedue i membri della risultante si ottiene

$$2\omega_1^2 = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \sqrt{\varphi \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3}$$

Se si moltiplica la seconda delle eguaglianze (N) per la terza e la risultante si divide per la nuova eguaglianza ottenuta moltiplicando la quarta per la quinta, si trova

$$\operatorname{tang}^{\frac{3}{2}} A = \frac{\varphi \varphi_1}{\varphi_2 \varphi_3}$$

e quindi

$$\operatorname{sen} A = \frac{2\sqrt{\varphi \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3}}{\varphi \varphi_1 + \varphi_2 \varphi_3}$$

È chiaro che con semplici permutazioni di lettere e di indici si ottengono espressioni analoghe per gli angoli B e C .

Sostituendo nell'espressione di $\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}} S$ il valore di ω_1 dopo

averne eliminato gli angoli A, B, C e ponendo in luogo di ψ il valore trovato nel paragrafo precedente si avrà

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} S = \frac{\varphi\varphi_1\varphi_2 + \varphi\varphi_1\varphi_3 + \varphi\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1\varphi_2\varphi_3}{\sqrt{(\varphi\varphi_1 + \varphi_2\varphi_3)(\varphi\varphi_2 + \varphi_1\varphi_3)(\varphi\varphi_3 + \varphi_1\varphi_2)}}$$

R. BADIA.

SULLA
POTENZA AD ESPONENTE IRRAZIONALE
DI UN NUMERO IRRAZIONALE

I.

Richiamo le seguenti proprietà:

1. Tutte le potenze positive e negative di un numero positivo sono positive.
2. Tutte le potenze positive dei numeri maggiori dell'unità sono maggiori dell'unità, e tutte le potenze negative sono minori dell'unità.

L'opposto accade per le potenze dei numeri minori di uno.

3. Se x acquista valori razionali crescenti, la potenza a^x aumenta sempre quando a è maggiore di 1, e diminuisce sempre quando a è minore di 1.
4. Se a è maggiore di 1, scelto un numero w arbitrariamente grande, si può determinare un numero positivo n pel quale sia

$$a^n > w.$$

Infatti dall'identità

$$a^n - 1 = (a - 1) (a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

si deduce

$$a^n - 1 > (a - 1) n;$$

perciò prendendo

$$n > \frac{w - 1}{a - 1},$$

sarà

$$a^n > w.$$

5. Se a è minore di 1, scelto un numero arbitrariamente piccolo σ , si può determinare un numero positivo n , in modo che sia

$$a^n < \sigma$$

6. Dati due numeri positivi a ed m , si può determinare un numero pure positivo ε tale che, per σ scelto arbitrariamente piccolo, sia

$$(1) \quad a^{m+\varepsilon} - a^m < \sigma \quad \text{per } a > 1,$$

e $(2) \quad a^m - a^{m+\varepsilon} < \sigma \quad \text{per } a < 1.$

Supposto $a > 1$, si può sempre (1) determinare un numero n pel quale sia soddisfatta la

$$\left(1 + \frac{\sigma}{a^m}\right)^n > a$$

ossia la

$$1 + \frac{\sigma}{a^m} > a^{\frac{1}{n}}$$

nella quale ε sta al posto di $\frac{1}{n}$.

Ora dalla precedente diseguaglianza risulta

$$a^m (a^{\varepsilon} - 1) < \sigma$$

ossia

$$a^{m+\varepsilon} - a^m < \sigma.$$

Quando a è minore di 1, e quindi $\frac{1}{a} > 1$, si potrà determinare un numero ε tale che, per σ_1 arbitrariamente piccolo, sia

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{m+\varepsilon} - \left(\frac{1}{a}\right)^m < \sigma_1$$

ossia

$$a^m - a^{m+\varepsilon} < \sigma_1, \quad a^{2m+\varepsilon} < \sigma_1 a^{2m}$$

Perciò, posto $\sigma_1 = \frac{\sigma}{a^{2m}}$, sarà:

$$a^m - a^{m+\varepsilon} < \sigma.$$

7. Dati due numeri positivi a ed m ed un numero positivo ed arbitrariamente piccolo σ , si può determinare un numero positivo ε tale che abbia luogo la diseguaglianza

$$(a + \varepsilon)^m - a^m < \sigma.$$

Infatti quando sia

$$\varepsilon < \left\{ (1 + \sigma_1)^{\frac{1}{m}} - 1 \right\} a,$$

è soddisfatta la

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{a}\right)^m - 1 < \sigma_1,$$

la quale, moltiplicata per a^m , dà

$$(a + \varepsilon)^m - a^m < \sigma$$

quando si ponga $\sigma = \sigma_1 a^m$.

8. Dati due numeri positivi a ed m si possono determinare due numeri pure positivi ε , ε' tali che, per σ scelto arbitrariamente piccolo e positivo, sia

$$(a + \varepsilon')^{m+\varepsilon} - a^m < \sigma.$$

Si ha infatti (7)

$$(a + \varepsilon')^{m+\varepsilon} - a^{m+\varepsilon} < \frac{\sigma}{2},$$

e (6)

$$a^{m+\varepsilon} - a^m < \frac{\sigma}{2},$$

e queste, addizionate, danno

$$(a + \varepsilon')^{m+\varepsilon} - a^m < \sigma,$$

II.

Sieno ora due numeri razionali α e β definiti dalle due classi A, A' ; B, B' , con

$$A \equiv \dots a_1, a_2, \dots; \quad A' \equiv \dots a'_1, a'_2, \dots$$

$$B \equiv \dots b_1, b_2, \dots; \quad B' \equiv \dots b'_1, b'_2, \dots$$

È noto che si possono trovare due numeri, uno della classe A ed uno della classe A' , a ed a' , tali che la loro differenza sia piccola quanto si voglia; lo stesso può ripetersi per le due classi B e B' (cfr. anche per le notazioni, il trattato d'Algebra elementare del prof. G. Garbieri).

Nel caso delle b positive e delle a maggiori di uno, le disequaglianze

$$a' - a < \varepsilon', \quad b' - b < \varepsilon,$$

nelle quali ε ed ε' sono arbitrariamente piccoli, conducono alla

$$a'^{b'} - a^b < (a + \varepsilon')^{b+\varepsilon} - a^b;$$

Ma (8) i numeri ε ed ε' si possono scegliere così che sia

$$(a + \varepsilon')^{b+\varepsilon} - a^b < \sigma,$$

per σ arbitrariamente piccolo; perciò sarà *a fortiori*

$$a^{b'} - a^b < \sigma \quad (I)$$

Se ora formiamo le due classi di numeri

$$(II) \dots a_1^{b_1}, a_1^{b_2} \dots a_2^{b_1} \dots; \dots a_1^{b'_1}, a_1^{b'_2}, \dots a_2^{b'_2}, \dots$$

quelli della prima sono minori di α^β e ne sono maggiori quelli della seconda, e in forza della (I), α^β è il numero definito dalle due classi. Se α e β sono irrazionali, diremo *analogamente* che le due classi (II) separano il numero α^β .

G. GIULIANI.

COROLLARI E GENERALIZZAZIONE DI UN TEOREMA D'EULERO SUL QUADRILATERO

I.

1. È notissimo il teorema che stabilisce una relazione fra i lati d'un quadrilatero, le sue diagonali e il segmento che unisce i loro punti di mezzo, cioè: la somma dei quadrati dei quattro lati d'un quadrilatero è eguale alla somma dei quadrati delle due diagonali aumentata di quattro volte il quadrato della congiungente i loro punti di mezzo. Il quale teorema si dimostra molto facilmente col sussidio della relazione che ha luogo fra i tre lati d'un triangolo e la mediana d'uno di essi. Ed è notevole che la dimostrazione non presuppone che il quadrilatero sia piano.

La relazione fra i lati d'un parallelogramma e le sue diagonali, che è, in forma diversa, quella fra i lati d'un triangolo e la mediana d'uno di essi, è un caso particolare del citato teorema d'Eulero. Ma da questo si rileva pure che ha luogo la reciproca della rammentata proprietà del parallelogrammo, cioè:

Se la somma dei quadrati dei quattro lati d'un qua-

drilatero eguaglia la somma dei quadrati delle sue diagonali, quel quadrilatero è un parallelogramma. ()*

2. Consideriamo ora un poligono di $2n$ lati, piano o gobbo, i cui vertici indicheremo ordinatamente con $A, B, C, \dots, A', B', C', \dots$. Applicando il teorema d'Eulero agli n quadrilateri $ABA'B', BCB'C', \dots$ e addizionando le n eguaglianze così ottenute, si troverà che la somma dei quadrati dei lati, aumentata della somma dei quadrati delle diagonali $AB', A'B, BC', B'C, \dots$ eguaglia il doppio della somma dei quadrati delle AA', BB', \dots aumentata del quadruplo della somma dei quadrati dei segmenti $\alpha\beta, \beta\gamma, \dots$, quando s'indichino con $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ i punti medj delle AA', BB', CC', \dots . Di qui risulta il teorema:

Se la somma dei quadrati dei lati d'un poligono di numero pari di lati aumentata della somma dei quadrati di quelle diagonali che uniscono i due estremi di ciascun lato a quelli del lato ad esso opposto, escluse le congiungenti i vertici opposti, eguaglia il doppio della somma dei quadrati delle congiungenti i vertici opposti, queste congiungenti passano per uno stesso punto, che è il punto di mezzo di ciascuna di esse; e in conseguenza i lati opposti del poligono sono a due a due eguali e paralleli.

II.

3. Sia $ABCD$ una base, e sieno AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 gli spigoli laterali consecutivi d'un prisma quadrangolare. Se le diagonali AC_1, BD_1 si tagliano nel loro punto di mezzo, lo spigolo AB risulta eguale e parallelo a D_1C_1 , e quindi a DC ; perciò:

Se le diagonali che partono da due vertici consecutivi d'una base d'un prisma quadrangolare si tagliano nel loro punto di mezzo, quel prisma è un parallelepipedo.

4. Applicando il teorema d'Eulero ai due quadrilateri ABC_1D_1, CDB_1A_1 , e indicando con α il punto di mezzo delle diagonali AC_1, CA_1 , e con β il punto di mezzo delle diagonali BD_1, B_1D , si ottengono le due eguaglianze:

(*) Questa osservazione era stata già fatta dal Sig. Stefano Gatti nei suoi *Elementi di Geometria piana con applicazione dell'Algebra*, Torino 1876.

$$\overline{AB}^2 + \overline{AD}_1^2 + \overline{C_1D_1}^2 + \overline{C_1B}^2 = \overline{AC}_1^2 + \overline{BD}_1^2 + 4\alpha\beta^2,$$

$$\overline{CD}^2 + \overline{CB}_1^2 + \overline{DA}_1^2 + \overline{A_1B_1}^2 = \overline{CA}_1^2 + \overline{DB}_1^2 + 4\alpha\beta^2,$$

le quali addizionate danno:

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{A_1B_1}^2 + \overline{C_1D_1}^2 + \overline{BC}_1^2 + \overline{B_1C}^2 + \overline{AD}_1^2 + \overline{A_1D}^2 \\ = \overline{AC}_1^2 + \overline{BD}_1^2 + \overline{CA}_1^2 + \overline{DB}_1^2 + 8\alpha\beta^2. \end{aligned}$$

Ma dai parallelogrammi BCB_1C_1 , ADA_1D_1 si ricava:

$$\overline{BC}_1^2 + \overline{B_1C}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{B_1C_1}^2 + \overline{BB}_1^2 + \overline{CC}_1^2,$$

$$\overline{AD}_1^2 + \overline{A_1D}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{A_1D_1}^2 + \overline{AA}_1^2 + \overline{DD}_1^2;$$

perciò è chiaro che:

Nel prisma quadrangolare la somma dei quadrati dei dodici spigoli è eguale alla somma dei quadrati delle quattro diagonali aumentata di otto volte il quadrato della congiungente i punti di mezzo delle diagonali.

5. Dal teorema ora dimostrato si ricava la nota relazione fra gli spigoli d'un parallelepipedo e le sue diagonali. E si ricava pure (3) la proposizione reciproca, cioè:

Se la somma dei quadrati dei dodici spigoli d'un prisma quadrangolare eguaglia la somma dei quadrati delle quattro diagonali, quel prisma è un parallelepipedo.

III.

6. Nel quadrilatero $ABCD$ pongasi:

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d, \quad AC = m, \quad BD = p;$$

e sieno L ed M punti delle diagonali BD , AC tali che si abbia:

$$\frac{BL}{BD} = \frac{CM}{CA} = h,$$

in cui h significa un numero positivo qualunque minore di 1. Indicato con g il segmento LM si avrà, pel teorema di Ste-

wart, (*), dal triangolo BMD,

$$g^2 + h(1-h)p^2 = h\overline{DM}^2 + (1-h)\overline{BM}^2 \quad (1)$$

ma dai triangoli ABC, ACD risulta:

$$\overline{BM}^2 + h(1-h)m^2 = ha^2 + (1-h)b^2,$$

$$\overline{DM}^2 + h(1-h)m^2 = hd^2 + (1-h)c^2,$$

e quindi:

$$h\overline{DM}^2 + (1-h)\overline{BM}^2 = -h(1-h)m^2 + h(1-h)(a^2 + c^2) + (1-h)^2b^2 + h^2d^2;$$

perciò la (1) diverrà:

$$g^2 + h(1-h)(m^2 + p^2) = h(1-h)(a^2 + c^2) + h^2d^2 + (1-h)^2b^2 \quad (I)$$

la quale, per $h = \frac{1}{2}$, esprime il teorema d'Eulero.

7. Nel caso particolare:

$$g = 0, \text{ e quindi } h = \frac{b}{b+d},$$

i lati AD e BC sono paralleli, e dalla (I) si ricava la nota relazione fra i lati d'un trapezio e le sue diagonali:

$$m^2 + p^2 = a^2 + c^2 + 2bd.$$

Reciprocamente, se ha luogo questa relazione, la (I) diviene:

$$g^2 + h(1-h)2bd = h^2d^2 + (1-h)^2b^2$$

ossia:

$$g^2 = (hd - (1-h)b)^2,$$

la quale, per

$$h = \frac{b}{b+d},$$

dà:

$$g = 0.$$

Dunque:

Se la somma dei quadrati delle diagonali d'un quadrilatero eguaglia la somma dei quadrati di due lati opposti aumentata del doppio prodotto degli altri due lati opposti, questi devono essere paralleli.

D. BESSO.

(*) Questo teorema, che stabilisce una relazione fra i tre lati d'un triangolo, il segmento che unisce un vertice ad un punto qualunque del lato opposto, e i due segmenti di questo lato, si dimostra assai facilmente considerando i triangoli rettangoli che si ottengono conducendo da quel vertice la perpendicolare al lato opposto.

ESERCIZI PER LA SCUOLA

ALGEBRA

Sulle equazioni di secondo grado

1. Trasformare la differenza $x^2 - c$ in un prodotto di due fattori di primo grado
2. Trasformare il trinomio di secondo grado

$$y = x^2 - 2mx + (m^2 - p)$$

in un prodotto di due fattori di primo grado, e da questa trasformazione ricavare i valori di x che annullano y .

3. Trovare le radici dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ trasformando il suo primo membro in un prodotto di due fattori di primo grado.
4. Trasformare in prodotti di due fattori di primo grado i seguenti trinomi:

$$n^2 - 3n + 2, \quad 2n^2 + n - 4, \quad \frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{6}.$$

5. Porre il trinomio $x^4 - 12x^2 + 35$ nella forma di un prodotto di quattro fattori di primo grado.
6. Posto $x_1 + x_2 = a$, $x_1 x_2 = b$, trovare un trinomio di secondo grado in x il quale si annulli per $x = x_1$ e per $x = x_2$.
7. Calcolare la somma dei quadrati e la somma dei cubi delle radici dell'equazione:

$$3x^2 - 5x - 9 = 0.$$

8. Esprimere in funzione di A , B , C il prodotto

$$\frac{1 + m_1^2}{A + Bm_1 + Cm_1^2} \cdot \frac{1 + m_2^2}{A + Bm_2 + Cm_2^2}$$

nel quale m_1 ed m_2 significano le radici dell'equazione

$$Bm^2 + 2(A - C)m - B = 0.$$

9. Posto: $\alpha + \frac{1}{\alpha} = \beta$, esprimere in funzione di β le due somme:

$$\alpha^4 + \frac{1}{\alpha^4}, \quad \alpha^5 + \frac{1}{\alpha^5}.$$

10. Provare che, se esiste un valore di x pel quale il trinomio $x^2 + px + q$ sia negativo, l'equazione $x^2 + px + q = 0$ ha le radici reali e diseguali.
11. Provare che, se il trinomio $x^2 + px + q$ è positivo per $x = a$ e negativo per $x = b$, esso si annulla per un valore di x compreso fra a e b .
12. Applicare il precedente teorema al calcolo delle radici della

$$30x^2 - 407x + 1 = 0$$

a meno di 0,001.

13. Per quali valori di x è negativo il trinomio $x^2 - 5x + 6$?
14. Posto $y = 7x^2 + 200x - 375$, calcolare la differenza dei valori di y che corrispondono ad $x = 100,000001$ ed a $x = 100$.

Dimostrare che si può dare ad h un valore positivo così piccolo, che la differenza dei valori di y corrispondenti ad

$x = 100 + h$ ed a $x = 100$, sia minore di $\frac{1}{10^{1000}}$.

15. Nell'ipotesi che i numeri a, b, c soddisfacciano alla $b^2 - 4ac > 0$ e che sieno dati i segni dei rapporti $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}$, determinare i segni delle radici della $ax^2 + bx + c = 0$.

16. A quali condizioni debbono soddisfare a e b affinché l'equazione $x^4 + ax^2 + b = 0$ abbia quattro radici reali?

17. Discussione delle radici della:

$$x^2 - 2bm x + b^2 - a^2 = 0$$

nella quale a e b sono positivi ed m è, in valore assoluto, minore di 1.

18. Provare che, se l'equazione:

$$x^2 + 2m(k - n)x + k^2m^2 - n^2 + 2kn = 0,$$

nella quale m, k, n sono positivi o negativi, ha le radici eguali, deve aver luogo una relazione fra k ed n .

19. Quale relazione deve aver luogo fra f, g, f_1, g_1 affinché uno stesso valore di x soddisfaccia alle due equazioni

$$x^2 + fx + g = 0, \quad f_1x + g_1 = 0?$$

20. Quale relazione deve aver luogo fra b, c, b_1, c_1 affinché le due equazioni

$$x^2 + bx + c = 0, \quad x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

abbiano una radice comune?

21. Quale relazione deve aver luogo fra a, b, c, a_1, b_1, c_1 affinché le due equazioni

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

abbiano una radice comune?

22. Esprimere in funzione di a, b, c, a_1, b_1, c_1 il prodotto

$$(a_1\beta_1^2 + b_1\beta_1 + c_1) (a_1\beta_2^2 + b_1\beta_2 + c_1)$$

nel quale β_1 e β_2 significano le radici della $ax^2 + bx + c = 0$; e dedurne la relazione menzionata nell'esercizio precedente.

23. Provare che, se l'eguaglianza:

$$ax^2 + bx + c = a_1x^2 + b_1x + c_1$$

è soddisfatta da tre diversi valori di x , dev'essere

$$a = a_1, \quad b = b_1, \quad c = c_1.$$

24. Dimostrare che, se hanno luogo certe relazioni fra a, b, c, a_1, b_1, c_1 , la frazione

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a_1x^2 + b_1x + c_1}$$

è indipendente da x .

25. Provare che la frazione $\frac{1}{x^2 - 1}$ si può mettere nella forma

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1},$$
 nella quale A e B sono indipendenti da x .

26. Provare che la frazione $\frac{3x^2 + 4}{x^3 - 15x^2 + 56x}$ si può trasformare nella somma

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-7} + \frac{C}{x-8},$$

nella quale A, B, C sono indipendenti da x .

27. Risolvere l'equazione

$$(x+1)^2 (x-1) (x+3) = 49725.$$

28. Trasformare il polinomio $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$ in un prodotto di due fattori uno dei quali sia x^2 e provare che, colla sostituzione $y = x + \frac{1}{x}$, l'altro fattore diviene un trinomio di secondo grado rispetto ad y .

29. A quale condizione deve soddisfare il numero β affinché l'equazione

$$x^4 + \beta x^3 - 10x^2 + \beta x + 1 = 0$$

abbia quattro radici reali?

30. Risolvere l'equazione:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-5} = 0.$$

D. BESSO.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

F. NICOLI. — *Compendio di Geometria* con due appendici. — In Modena coi tipi della Società Tipografica, antica tipografia Soliani, 1885.

Il Prof. Francesco Nicoli, professore di matematica nella Scuola Militare di Modena, ha dato testè alle stampe un suo *Compendio di Geometria*, con due appendici, in cui sono riassunte le lezioni da lui dettate da parecchi anni nella scuola stessa. Il libro di cui è parola merita di esser segnalato all'attenzione degli insegnanti delle scuole secondarie per lo stretto rigore da cui è informato e per la sua semplicità e chiarezza, pregi che certamente non è facile riunire.

Le due appendici del *Compendio*, vertono sulla Trigonometria e sulle Proiezioni quotate. Nella prima di queste, definiti i rapporti trigonometrici, l'A. passa ad esporre i teoremi dai quali dipende la risoluzione dei triangoli e fra questi può esser notato per la sua dimostrazione diretta il teo: che: *in ogni triangolo la somma di due lati stà alla loro differenza, come la tangente della semisomma degli angoli opposti a questi lati stà alla tangente della loro semidifferenza*, poi tratta la risoluzione dei triangoli sia rettangoli che obliquangoli e ne fa seguire alcune applicazioni. Nella seconda appendice vengono esposte quelle nozioni sulle proiezioni quotate, che sono necessarie a chi deve imprendere lo studio della Fortificazione. Vi si tratta della rappresentazione di punti e rette, del piano, dei problemi re-

lativi a rette e piani, finalmente vi si dà qualche cenno sulla rappresentazione dei poliedri e sulle sezioni piane e intersezioni dei medesimi.

Per ciò che riguarda la pura geometria, in vista dell'uso al quale il libro è destinato, l'A. ne ha limitato la stereometria, dando invece uno sviluppo conveniente alla planimetria, per la quale ultima, mentre ha seguito il metodo euclideo, non ha mancato di aggiungere tutte quelle proposizioni che sono necessarie per rendere il libro più consono ai moderni studi. Per alcuni teo: le dimostrazioni diversificano da quelle che si leggono nei trattati ordinari; così ad es: per dimostrare il teo: *Se due lati di un triangolo sono rispettivamente uguali a due lati di un' altro triangolo e se l'angolo compreso dai primi è maggiore dell'angolo compreso dai secondi, il terzo lato del primo è maggiore del terzo lato del secondo*, l'A. si fonda sopra un teo: dimostrato prima che: *il segmento che unisce un vertice di un triangolo con un punto del lato opposto è minore di uno almeno degli altri due lati.*

Per venire a trattare dei segmenti proporzionali l'a., definito come rapporto fra due grandezze omogenee il numero che esprime la misura della prima quando la seconda è presa per unità, osserva che se le grandezze sono incommensurabili il rapporto stesso non può valutarsi che per approssimazione, e nella definizione di grandezze proporzionali esamina in seguito partitamente i casi in cui le medesime sono commensurabili e sono incommensurabili e per l'ultimo così si esprime: se il rapporto a meno di $\frac{1}{n}$ di due grandezze incommensurabili è eguale al rapporto a meno di $\frac{1}{n}$ di altre due, e se quest'uguaglianza sussiste qualunque sia il numero n , si dirà pure che queste quattro grandezze sono proporzionali. Trattando poi dei poligoni simili, l'A. che è buon cultore della geometria proiettiva, non ha ommesso di introdurre, per quanto lo consentiva il carattere di questo suo lavoro, il concetto di corrispondenza per modo da rendere gli enunciati delle proposizioni più esatti di quel che siano in libri che anche oggidì corrono per le mani della gioventù, considerando sempre il caso sia delle figure diret-

tamente simili, quanto quello delle figure inversamente simili.

Per ciò che si riferisce alle aree, definite le grandezze commensurabili ed incommensurabili e la misura a meno di $\frac{1}{n}$ di una grandezza A rispetto ad un'altra omogenea U ,

l'A. ottiene l'area del rettangolo considerandone prima i lati commensurabili rispetto ad una stessa unità, poi dimostra che essendo questi incommensurabili rispetto alla data unità

lineare, si può assegnare una misura a meno di $\frac{1}{n}$ dei me-

desimi, scegliendo n convenientemente, in modo che il prodotto de' numeri risultanti rappresenti l'area di un rettangolo avente dal dato una differenza minore di un triangolo piccolo quanto si vuole.

Finalmente per venire alla misura della circonferenza e del cerchio, l'A. premette come lemmi, quattro teoremi sui limiti e dimostra le proposizioni seguenti: *Se un arco minore di una semicirconferenza va sempre diminuendo, la distanza del centro della circonferenza dalla corda di quest'arco va sempre aumentando e giungerà a differire dal raggio meno di un segmento h piccolo a piacere; poi: si possono circoscrivere ad una circonferenza ed inscrivere in essa due poligoni regolari simili di un numero tale di lati che la differenza tra questi due poligoni risulti minore di un triangolo t , piccolo quanto si vuole e la differenza dei loro perimetri risulti parimenti minore di un segmento h , piccolo quanto si vuole.*

Questo per quanto riguarda la planimetria. Per ciò che si riferisce alla stereometria è da osservare anzitutto, come già fù avvertito in principio, che l'A. ne ha singolarmente ristretta la trattazione, poichè si è limitato all'esposizione delle proposizioni fondamentali sulle rette e piani paralleli, sulle rette e piani perpendicolari e sulle proiezioni ortogonali, aggiungendo poi le definizioni relative agli angoli, diedri e solidi, ai poliedri ed ai corpi rotondi e in un ultimo capitolo le regole per le misure delle superficie e dei volumi dei prismi, delle piramidi e dei corpi rotondi. Il capo che tratta delle proiezioni ortogonali è peraltro relativamente meno ristretto e ciò in vista di esporre alcune proposizioni che trovano applicazione nello studio della fortifi-

cazione, come ad es: questa: *se due piani obliqui al piano di proiezione, hanno pendenze eguali e si tagliano, la proiezione della loro intersezione è la bisettrice di uno degli angoli formati dalle loro traccie.*

Ed è forse per il desiderio di riescir breve che in taluni punti della II parte del libro esaminato, a nostro giudizio, può esser notata qualche omissione da parte dell'A. Così ad es. in principio della stereometria egli avrebbe potuto con profitto citare il postulato del piano che: *facendo ruotare il piano intorno a due qualunque de'suoi punti si può sempre portarlo a passare per un qualsivoglia punto dato,* poi fondandosi sul medesimo dimostrare il suo teo: 331 per mezzo di tre rotazioni successive del piano (*), indi citare l'altro postulato che: *il piano interseca la retta che passa per due punti posti da bande opposte di esso, il quale trova immediata applicazione nel teo: 333.*

La proposizione che per un punto esterno ad un piano dato passa un sol piano parallelo a quello dato non è avvertita ed avrebbe trovato opportuna sede dopo la definizione dei piani paralleli al n° 342. La prima parte del corollario al n° 360, cioè che: *se una retta è parallela ad un piano, tutti i punti della retta sono equidistanti dal piano,* pare a noi che non si deduca immediatamente dai teo: precedenti e sarebbe stato forse opportuno di innalzarla a teorema.

Nelle definizioni ai n. 405 e 406 è tacitamente ammesso il teo: *due angoli diedri sono proporzionali ai loro angoli piani corrispondenti:* sarebbe quindi stato bene premetterlo esplicitamente o citarlo in una nota. Finalmente, essendo il libro destinato a principianti, al n° 468, quando l'A. considera il tronco di piramide a basi parallele nel quale le basi sono rettangoli e dà la formola che esprime il volume in funzione dei lati delle basi e dell'altezza, avrebbe potuto con vantaggio porre in guardia il lettore inesperto che la formola stessa non serve che per questo caso e non per quello in cui i rettangoli non sono simili e coi lati omologhi paralleli.

Ma queste piccole cose non infirmano il merito del lavoro del Prof. Nicoli che ha dato alla non ricca raccolta di

(*) Come fa il Sig. Faifofer nei suoi *Elementi di Geometria.*

buoni libri scolastici di geometria, italianamente scritti e italianamente pensati, un contributo di notevole valore didattico; però noi vogliamo con lui condolerci di una cosa, che il libro stesso manchi di esercizi da servire di palestra agli studenti per sperimentare le loro forze, e rivolgergli una raccomandazione, quella cioè ch'ei ponga mano ad estendere la stereometria in quella stessa misura che ha fatto per la planimetria, poichè così modificato il suo lavoro potrebbe con profitto anche maggiore servire per gli istituti d'istruzione secondaria.

A. LUGLI.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

- Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas* publicado pelo D.^r F. Gomes Teixeira Professor na Escola Polytechnica do Porto: Vol. VI, N. 1, 2, 3, 4, 5. Coimbra, 1885.
- Journal de Mathématiques élémentaires* publié par H. Vuibert., 10.^e Année, N. 10 e 11. Paris, M. Nony, 17, Rue des Écoles.
- Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne*, publié par P. Mansion, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, et J. Neuberg, Professeur à l'Université de Liège. Tome sixième, Janvier et Février 1886.
- Rivista scientifico-industriale* compilata da Guido Vimercati. Anno XVIII. N. 1 e 2. Firenze 1886.
- L. BIANCHI. — Sopra i sistemi tripli di superficie ortogonali che contengono un sistema di superficie pseudosferiche (1886).
- E. CESARO. — Considerations nouvelles sur le déterminant de Smith et Mansion.
- R. DE PAOLIS. — Le trasformazioni doppie dello spazio (1885).
- G. FRATTINI. — Intorno alla generazione dei gruppi d'operazioni e ad un teorema d'aritmetica (1886).
- M. GEMIGNI. — Teoria delle frazioni decimali periodiche (1883). — Sul cerchio e sulla circonferenza (1884). — La teoria dei quadrati ed il concetto di radicale quadrato (1885).
- G. IUNG. — Sui sistemi Cremoniani reciproci di grado m (1885).
- A. LIVINI. — Scritti educativi e didattici (1884).
- G. LORIA. — Su alcune proprietà metriche della cubica gobba osculatrice al piano all'infinito (1885).
- I. NEUBERG. — Mémoire sur le tétraèdre (1884). — Sur les tétraèdres de Möbius (1884). — Sur les tangentes communes à un cercle et à une conique (1885). — Sur le quadrilatère harmonique.
- F. PORTA. — Trigonometria sferica. — Torino, Bocca, 1886.
- L. RAJOLA PESCARINI. — Rapporti esatti ed approssimati e Teoria delle proporzioni. Napoli, Morano, 1886.
- A. SUINI. — Elementi di prospettiva lineare. Milano, tip. degli Ingegneri, 1880.
-

OSSERVAZIONI ED ESEMPI

SULLA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI DI GEOMETRIA

I.

Sebbene la felice risoluzione dei problemi dipenda in gran parte dalla intuizione individuale e dalla facilità nel richiamare alla mente e riavvicinare quelle cognizioni che vi hanno stretto legame, nondimeno si possono dare alcune regole generali che, aiutando i principianti, valgano ad evitare tentativi infruttuosi ed avvezzarli ad una esposizione ordinata e rigorosa.

I metodi seguiti nella risoluzione dei problemi geometrici si riducono sostanzialmente a due: *analitico* e *sintetico*.

Il metodo analitico consiste nel ridurre il problema ad un altro noto, cioè nel rinvenire un problema di cui sia conosciuta la soluzione ed onde si possa far discendere quella del dato.

Il metodo sintetico consiste nel *dedurre* (onde si chiama anche *deduttivo*) dalla soluzione di un problema quella di un altro, e così via, finchè si giunga al proposto, che in tal guisa verrà ad essere risolto.

Col primo metodo si passa dall'ignoto al noto; col secondo, dal noto all'ignoto; ond'è che giustamente l'uno venne chiamato da Kant *metodo regressivo*, l'altro *metodo progressivo*.

II.

METODO ANALITICO

Secondo questo metodo la risoluzione d'un problema si compone in generale di cinque parti ben distinte:

1° Costruzioni ausiliarie.

2° Esame, per mezzo della figura ausiliaria, di relazioni

sussistenti fra i dati e le incognite del problema, per cui gli uni determinano le altre.

3° Costruzione finale.

4° Dimostrazione.

5° Discussione.

1° Costruzioni ausiliarie. — La prima cosa da farsi è di supporre il problema già risoluto, tracciando una figura che risponda approssimativamente ai dati. Ciò fatto, si cerca di effettuare qualche costruzione preparatoria (conducendo linee e determinando punti in istretta relazione colla data figura) tale che conduca ad una figura facilmente costruibile coi dati, e da cui la richiesta possa dedursi ricorrendo alle mutue loro relazioni. Non si possono stabilire regole fisse per queste costruzioni sussidiarie; ma, se ben si riflette alla natura della questione ed alle verità geometriche che essa richiama, si resta naturalmente guidati nella scelta degli elementi che si possono prendere in aiuto.

Queste costruzioni hanno per iscopo di mettere in evidenza i rapporti sussistenti tra i dati e le incognite del problema, ed arrivare a determinare le une per mezzo degli altri. Nell'andarne alla ricerca bisogna sempre tener presente questo loro scopo essenziale.

II. Esame. — Eseguite le opportune costruzioni ausiliarie si procede col loro aiuto all'esame delle relazioni che hanno tra loro i dati e le incognite nella questione. Per questo è necessaria la conoscenza delle proprietà delle figure che si hanno in esame; e inutile riuscirebbe ogni tentativo per la risoluzione d'un problema se non si presentassero spontaneamente al pensiero i teoremi su cui poterla fondare. La giudiziosa loro scelta e combinazione è suggerita dalla stessa natura dell'argomento a chi si sia alquanto impraticato dei procedimenti geometrici ed abbia fatto attento studio delle proprietà delle figure. Importerà anzitutto di non divagarsi in considerazioni estranee all'argomento; ma concen-

trare l'attenzione sulle proprietà che hanno *diretta relazione* coll'enunciato.

III. Costruzione finale. - Trovate le relazioni fra i dati e le incognite, o meglio fra la figura ausiliaria e quella da costruirsi, per mezzo delle quali la prima determini la seconda, si è in grado di risolvere il problema.

Un problema si riterrà risolto quando le incognite si sapranno determinare per mezzo delle costruzioni elementari della geometria, e cioè

- a) condurre una retta che passi per due punti dati;
- b) descrivere con dato centro e dato raggio una circonferenza;
- c) condurre un piano per tre punti dati, oppure (ciò che è lo stesso) per un punto e una retta, per due rette concorrenti, per due parallele;
- d) descrivere una sfera con dato centro e dato raggio;

oppure quando si sia ridotto, per mezzo di queste costruzioni elementari, a un altro di cui sia nota la soluzione.

Non è inutile poi avvertire che la costruzione non sarà esatta se non quando la figura ottenuta soddisfi a *tutte* le condizioni imposte. Essa si raggiunge immediatamente, una volta conosciute le relazioni in parola, ripassando dalla figura ausiliaria alla primitiva col cammino inverso a quello mediante il quale dalla primitiva (supposta esatta) si era passati a questa. In breve, le costruzioni finali sono ordinatamente le inverse delle ausiliarie.

IV. Dimostrazione. - Quando si sia indicato il modo di costruire la figura cercata rimane a farsi la *dimostrazione*, vale a dire quel ragionamento con cui si prova, appoggiandosi a teoremi conosciuti, che essa è quella richiesta, o in altri termini soddisfa a tutte le condizioni stabilite. Se l'analisi fatta precedentemente era esatta, la costruzione non può essere che giusta, perchè ottenuta tenendo accuratamente calcolo di tutte le condizioni: epperò logicamente la

dimostrazione non sarebbe necessaria. Pure, come utile esercizio e verificaione dell'analisi eseguita, converrà stenderla con diligenza.

V. *Discussione.* - Non può dirsi completa una soluzione quando non venga accompagnata dalla relativa discussione. Talora un problema non ammette soluzione alcuna, tal altra ne ammette più d'una; altre volte, infinite: la modificazione di qualche dato può far passare dall'uno all'altro di questi casi. La discussione ha appunto per oggetto di abbracciare il problema in tutta la sua generalità, osservando come cangi il numero delle soluzioni quando i dati vengano modificati nella loro grandezza o posizione (non nella loro natura); e distinguendo nettamente i limiti tra i diversi casi. Essa poi conduce ad osservazioni e proprietà che possono mettere in chiara luce l'essenza del problema; e si raccomanda in particolare ai principianti, i quali generalmente la trascurano troppo.

III.

La soluzione d'un problema si riduce talora, o se ne può facilmente far dipendere, alla determinazione di qualche punto. In questo caso si ricorre alle conoscenza dei *luoghi*, cioè l'assieme di punti (costituenti una linea o una superficie) tali che *essi*, ed *essi soltanto*, soddisfacciano a una data condizione.

Così il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due fissi è il piano perpendicolare sul mezzo del segmento rettilineo che li congiunge; essendo che tale proprietà spetta ai punti di quel piano, e non ad altri.

Or bene, dall'esame delle condizioni cui nel problema è assoggettato il punto richiesto si vedrà, considerando a parte ogni condizione, che esso dovrà giacere su due o più luoghi contemporaneamente. Se questi avessero più punti a comune, essendochè tutti soddisferebbero alle condizioni date, il problema ammetterebbe più d'una soluzione. Bisognerà poi

cercare, nel caso che più luoghi si presentassero, di scegliere i più semplici, i quali dovranno essere rette o circoli, piani o sfere, se si vuol rimanere nel dominio della geometria elementare.

IV.

Giunge a proposito un'osservazione. Un problema potrebbe ammettere in certi casi, ed anche sempre, infinite soluzioni; e allora, dopo aver dimostrato come le condizioni imposte siano insufficienti, cioè che altre se ne potrebbero stabilire oltre quelle, basterà naturalmente costruire una fra le infinite figure rispondenti alla questione. Però se quanto si domanda è un punto, non bisognerà limitarsi a costruirne uno, ma sarà duopo determinarne il *luogo*.

I problemi di questo genere sono generalmente enunciati in modo da far palese la infinità dei punti che vi soddisfanno; e si limitano appunto a richiedere il luogo. La loro risoluzione conterrà un teorema, venendosi così a dimostrare una proprietà del luogo stesso.

V.

METODO SINTETICO

Non sempre si usa nella risoluzione dei problemi il metodo analitico, sebbene sia il più sicuro e fecondo. Alcune volte la semplicità della questione fa in sulle prime intravedere la costruzione da eseguirsi, o suggerisce un noto problema dal quale si possa far dipendere il dato; senza che occorra una completa analisi. In questo caso non rimane altro a dimostrarsi che quella costruzione è esatta, cioè corrisponde appieno al problema.

Questo modo di risolvere i problemi costituisce il metodo sintetico; esso non comprende quindi che due parti, costruzione e dimostrazione, alle quali sarà bene aggiungere la discussione.

Il carattere dommatico di questo metodo, se lo fa preferire nella esposizione scolastica e nei libri di testo, non mette in piena luce il processo con cui si è giunti alla soluzione, e la fa apparire piuttosto un'intuizione o divinazione che il natural risultato di ben collegati raziocini.

Se il metodo sintetico fa conoscere il vero, l'analitico mostra anche come vi si è giunti: è quindi a un tempo più convincente ed istruttivo; e, dando più largo campo alla investigazione individuale, apre meglio la mente a superare nuove difficoltà.

VI.

DIMOSTRAZIONE DEI TEOREMI

Non solo nella risoluzione dei problemi, ma ben anco nella esposizione di teoremi e della scienza in generale, si possono seguire i due metodi sintetico e analitico, intesi nel senso generale come furono definiti nel n. I.

Il metodo analitico, universalmente applicato nei testi di geometria elementare, si accontenta di enunciare i teoremi (senza mostrare per che via si siano presentati), e costringe ad accettarli *a posteriori* con un ragionamento mediante il quale da essi si risale ad altri conosciuti, passando così dunque dall'ignoto al noto. Il sintetico invece progredisce ordinatamente da una verità all'altra per via di deduzione; cammina cioè dal noto all'ignoto, mostrando la via tenuta nel rinvenire date verità.

E qui si noti la differenza essenziale di metodo tra risolvere una data questione a parte, e lo stabilire dei veri formanti un corpo di dottrina. Nel primo caso è opportuno seguire il metodo analitico; nel secondo è meglio, anzi quasi sempre necessario appigliarsi al sintetico; e le verità geometriche che tutto di si vanno scoprendo in gran parte non si sono ottenute altrimenti. Il metodo sintetico, come il vero processo dell'invenzione, è da preferirsi per la razionale es-

posizione della scienza: se non che sarebbe impossibile seguirlo quando essa non fosse giunta a un'ordinato e logico assieme, per cui ogni verità conduca grado grado ad altre, senza che vi sia sconnessione fra le varie parti o i teoremi appaiano quasi il frutto di un caso fortunato.

L'insegnamento della geometria elementare sarebbe assai più proficuo per l'intelligenza e meglio preparerebbe agli studi superiori, ove venisse dato sinteticamente; ed io faccio voti sorga presto un buon trattato che s'ispiri a questi principî.

VII.

Nel novero dei problemi possiamo comprendere i teoremi da dimostrare o le proposizioni da esaminare, per riconoscere se siano vere o false. Gioverà attenersi al metodo analitico, per quanto già si disse; e cioè partendo da questa proposizione si risalirà ad altre, per via di induzione, finchè si giunga ad una conosciuta. Se questa è falsa, sarà pure falsa la primitiva (giacchè da una verità non può scaturire, ragionando esattamente, una conseguenza erronea); se questa è giusta, non potremo dire che lo sia parimenti la prima; ma si dovrà, rifacendo in senso inverso il cammino, vedere se reciprocamente dalla prima si possa dedurre la seconda: perchè allora, e allora soltanto, essa è conseguenza di verità, e quindi vera (*).

(*) Che da un falso si possa, ragionando esattamente, *arrivare* ad una conclusione esatta, ognuno lo comprende di leggieri; e parecchi esempi si potrebbero dare. Per citarne uno dalle scienze fisiche, e certo falsa l'ipotesi di due fluidi elettrici aventi le proprietà che loro si attribuiscono; pure ne discendono delle verità verificate; e cioè, per citare una frase molto espressiva dei Francesi, *le cose avvengono come se così fosse realmente* (*les choses se passent comme s'il était ainsi*). Parimenti la teoria atomica è probabilmente falsa; eppure essa serve a spiegare molti fenomeni, alla cui esistenza si può giungere partendo da essa, e della quale

VIII.

ALCUNI ESEMPLI.

Daremo qualche esempio per meglio far comprendere ed applicare le precedenti osservazioni.

quindi appaiono conseguenze. *Appaiono* dico; giacchè a rigore logico il vero a cui si giunge partendo da un falso non si può ritenere la conseguenza, talchè in fondo il vero non può essere che conseguenza del vero. Le conclusioni vere da falsi principi si hanno allorquando, (e questo avviene il più delle volte senza che ce ne accorgiamo) non si tien conto della completa ipotesi, e trascurando quella parte di falso, per così dire, che essa contiene, si fonda il ragionamento solo su certe proprietà generali che effettivamente sono vere. Tali conclusioni non muterebbero se anche l'ipotesi venisse modificata, attenendosi ai principii che l'hanno ispirata. Ognun sa ad esempio che se invece di due fluidi elettrici si ammettessero due forze contrarie, le conseguenze sarebbero le stesse; per cui la verità delle conclusioni non sta nell'ipotesi dell'esistenza dei due fluidi, ma piuttosto nel modo di agire di quella qualunque causa che così si chiama; modo che è esatto, perchè fondato sull'esperienza; e che non può quindi condurre che a conseguenze esatte.

Queste osservazioni sono importanti nelle scienze naturali, le quali si valgono di ipotesi che non ponno direttamente essere verificate, e per giudicare le quali conviene ricorrere alle conseguenze. Se una data ipotesi conduce a un falso, essa va rigettata come falsa; mentre se conduce a un vero essa non si può ritenere esatta se non quando questo ne sia una vera conseguenza e cioè non possa aver luogo senza quella. Ma il verificarlo è difficile ed anche impossibile talvolta per la molteplicità delle ipotesi che si possono fare; mentre per altra parte sfugge il più delle volte, nel ragionare su un'ipotesi, quella parte essenziale di essa che poi andrebbe esaminata: cosicchè viene a mancare, da una parte la prova per asserire, dall'altra quella per negare; e si resta sempre incerti.

Nella geometria felicemente però avviene tutt'altro; qui il piccolo numero di ipotesi che si possono generalmente fare su un dato soggetto e la facilità d'una discussione che porti presto a una

Esempio. I.

Dato nel piano d'un angolo un punto, condurre per esso una retta tale che il segmento intercetto fra i lati sia diviso a metà dal punto stesso.

Qui daremo l'esempio d'un'analisi completa e diffusa, con tutte le 5 parti accennate nel n. II e nell'ordine ivi tenuto.

1. — Suppongasi già costruita la retta desiderata, la quale dovrà quindi esser tale che il segmento AB (fig. 1) compreso tra i lati del dato angolo C sia diviso a metà nel punto dato P.

Qui è opportuna una costruzione ausiliaria, perchè la

conseguenza falsa, se falsa era l'ipotesi, forniscono un criterio pressochè sicuro.

Un esempio fisserà meglio le idee sulle cose esposte.

Partendo dall'ipotesi errata che la corda in un cerchio sia proporzionale all'arco, deduco che le corde che congiungono i punti di divisione d'un arco diviso in n parti eguali sono eguali fra loro; in quantochè sarebbero la n^{esima} parte della corda corrispondente all'intero arco: e questo risultato è esatto. Ma se ben si guarda, questa non è a rigore una conseguenza dell'ipotesi presa nel suo complesso; ma d'un'altra più generica, e vera, che le corde degli archi parziali hanno tutte lo stesso rapporto (che non è $\frac{1}{n}$) con quella dell'arco totale. Che se invece si tien calcolo dell'ipotesi che questo rapporto sia $\frac{1}{n}$, ne verrebbe che la corda dell'arco totale dovrebbe essere eguale alla somma delle corde degli archi parziali (perchè n volte la sua n^{ma} parte); cioè un segmento rettilineo dovrebbe essere eguale ad una spezzata contermine: conseguenza assurda che ci avverte della falsità dell'ipotesi. Parimenti se si supponesse che in un qualunque triangolo la mediana sia bisettrice dell'angolo dal cui vertice parte, ipotesi errata, si potrebbe facilmente giungere alla proposizione esatta che essa divide a metà tutte le parallele alla base. Ma è facile vedere che questo non discende necessariamente dall'ipotesi; la quale invece, tenuto calcolo di tutto, condurrebbe ad ammettere che il triangolo sia diviso in parti eguali e quindi isoscele: e questa conseguenza è, come deve essere, falsa, e ci avverte della falsità dell'ipotesi.

figura come sta non fornisce relazioni sufficienti per la determinazione dell'incognita. Si osservi infatti che del triangolo ABC non conosciamo che un angolo, il C; e che l'essere P il punto di mezzo del lato opposto AB ha in sè molto di vago, o per lo meno non si traduce immediatamente in relazioni fra gli altri elementi del triangolo, si che valgano a far scorgere il modo di costruirlo.

Andiamo adunque in cerca di questa costruzione ausiliaria. La prima idea che si presenta è di condurre la retta CP che per dato del problema è nota. La conoscenza dell'angolo C e della retta CP ci fa subito pensare se si possa costruire qualche figura con questi dati. Siamo così condotti facilmente al parallelogrammo, tanto più se si riflette che CP sega BA a metà, fatto che ci richiama subito le diagonali d'un parallelogrammo per le quali il bisecarsi scambievolmente è proprietà caratteristica. In conformità di questa osservazione nasce spontanea l'idea di prolungare di altrettanto la retta CP nel punto D, per avere in tal guisa due segmenti BA, CD che si tagliano a metà, e i cui estremi sono quindi vertici di un parallelogrammo.

In tal guisa abbiamo costruito una figura ausiliaria, il parallelogrammo ABCD (parallelogrammo perchè le diagonali si tagliano a metà), facilmente determinabile coi dati del problema, e dal quale la figura richiesta non meno facilmente si può dedurre.

2. - E infatti esaminiamo le relazioni delle due figure. Intanto il parallelogrammo è determinato coi dati del problema, giacchè uno de' suoi angoli dev'essere il dato C ed una sua diagonale la CD, doppia di CP, retta nota. Di questo parallelogrammo poi la retta richiesta AB è l'altra diagonale. È così trovata una relazione determinatrice tra la figura ausiliaria (il parallelogrammo) e la domandata (la retta AB).

3. - Una volta ottenuta questa relazione, la costruzione è subito eseguita rifacendo il cammino in senso in-

verso; vale a dire partendo dal parallelogrammo per arrivare alla retta AB, sua diagonale. Si procederà dunque così:

Congiunti con retta i punti C e P, si prenda $PD=PC$ e si completi il parallelogrammo di cui C è un angolo e CD una diagonale, conducendo da D le parallele DB, DA ai due lati dell'angolo C. Condotta AB, questa sarà la retta richiesta.

4. -E infatti nel parallelogrammo ABCD le diagonali si tagliano a metà, dunque la AB dovrà passare per il punto di mezzo P dell'altra diagonale CD, ed ivi dovrà essere divisa a metà; vale a dire il segmento costruito AB passa per P, il quale è poi il suo punto di mezzo; cioè soddisfa alle condizioni del problema.

5. - Il punto P può avere diverse posizioni; e precisamente sono a distinguersi tre casi: 1° quando è interno all'angolo, 2° quando è sopra un lato, 3° quando è fuori dell'angolo.

Nel primo caso, che è quello contemplato dalla figura, si può realmente costruire un parallelogrammo, ed uno solo, il quale avrà, oltre la CD, una sola diagonale AB, epperò il problema ammette un'unica soluzione.

Nel secondo caso non si può costruire un vero parallelogrammo; o a meglio dire, il parallelogrammo si riduce al segmento CD preso sul lato su cui giace P in modo che $CP=PD$ (fig. II); e la CD si può considerare come una soluzione impropria.

Nel terzo abbiamo una soluzione; se non che uno dei lati va prolungato al di là del vertice, per essere incontrato dalla retta costruita (fig. III).

IX.

Daremo un altro esempio per mostrare il modo con cui, nel metodo analitico, si è guidati alle costruzioni ausiliarie, e per fornire nel tempo stesso il modello d'una discussione la quale ci fornirà l'occasione di formulare una regola importante.

Esempio II. - Per il punto P comune a due circonferenze O e Q condurre una retta tale che il segmento intercetto fra le stesse eguagli un segmento dato r (fig. IV).

1. - Suppongasi già tracciata la retta AB che soddisfa al problema. Tutta l'attenzione deve concentrarsi per ottenere, secondo le regole stabilite, una figura determinata dai dati del problema, e da cui la retta richiesta possa ricavarsi facilmente.

Qui di noto c'è la retta OQ; con questo adunque e cogli altri dati vediamo di costruire qualche figura utile allo scopo. Si presenta subito alla mente il teorema che i raggi perpendicolari alle corde le dividono a metà, essendo questione appunto di corde e di grandezze loro. Onde naturalmente si è guidati a condurre da O e da Q le perpendicolari ad AB; queste, cadendo in C e D sulla AB, divideranno a metà le corde AP e PB; onde CD sarà la metà di AB, cioè metà di r ; epperò la sua grandezza ci sarà nota. In tal modo ecco che abbiamo ottenuto un trapezio rettangolo OCQD, di cui ci sono noti i lati obliqui OQ, CD, e che è in istretta relazione colla retta da costruirsi. Quel trapezio però non è completamente conosciuto; onde noi cercheremo di dedurne una figura che si sappia tosto determinare coi risultati così ottenuti.

Riflettendo che del trapezio sono noti due lati non che degli angoli (quelli retti) elementi sufficienti a determinare un triangolo, sorge spontanea l'idea di condurre la QE parallela a CD, la quale dà luogo a un triangolo rettangolo EQO. Di questo si conosce l'ipotenusa e un cateto $EQ = CD = \frac{1}{2}r$, onde si sa costruire; per altro esso determina alla sua volta la retta AC, onde possiamo ritenere esaurita la costruzione ausiliaria.

2. - Esaminiamo ora le relazioni fra la figura ausiliaria e quella richiesta. Basterà all'uopo osservare che la AB, per la stessa costruzione, viene ad essere la parallela condotta da P al cateto QE del triangolo.

3. - Possiamo immediatamente venire alla costruzione. Basta, secondo la regola generale, eseguire le costruzioni in

ordine inverso; cosicchè, mentre prima siamo partiti dalla retta incognita AB per arrivare alla figura nota del triangolo rettangolo, ora passeremo da questa a quella, la quale verrà in tal modo ad essere determinata. La costruzione è pertanto la seguente:

Sopra OQ come ipotenusa si costruisce il triangolo avente come cateto QE un segmento eguale alla metà di r (basterà descrivere un semicerchio su OQ , e, centrato in un estremo Q , con raggio $= \frac{1}{2}r$ segarlo nel punto E , che si congiungerà cogli estremi O e Q); dal punto P si conduca la parallela AB alla QE , e questa sarà la retta richiesta.

4. - Dimostriamo l'esattezza della costruzione. Prolungata OE fino ad incontrare in C la corda AP , si conduca da Q la parallela QD ad OE (serve ancora la fig. IV): queste ultime due rette sono raggi nei due cerchi perpendicolari alle corde AP , PB (perchè perpendicolari alla loro parallela QE); epperò le dividono a metà; onde il segmento CD sarà la metà di AB . Ma $CD = QE$, perchè lati opposti di un rettangolo; ed essendosi fatto $QE = \frac{1}{2}r$, sarà CD pure $= \frac{1}{2}r$, epperò $AB = r$. La AB pertanto passa per il punto dato P ed ha la lunghezza voluta r , e quindi soddisfa completamente al problema.

5. - Discutiamo ora la soluzione. Se $QE = \frac{1}{2}r$ è minore di OQ , sopra questa retta come ipotenusa si ponno costruire due triangoli rettangoli aventi un cateto eguale a $\frac{1}{2}r$; e cioè facendo partire il cateto $= \frac{1}{2}r$ dall'uno oppure dall'altro estremo dell'ipotenusa. Laonde, conducendo a questi due cateti la parallela da P avremo chiaramente due rette soddisfacenti entrambe al problema.

Se $\frac{1}{2}r$ fosse $= OQ$, allora il triangolo rettangolo si ridurrebbe alla OQ , e la parallela condotta da P a questa retta sarebbe in tal caso l'unica soluzione del problema.

Se finalmente si avesse $\frac{1}{2}r > OQ$, $\frac{1}{2}r$ non potrebbe essere cateto d'un triangolo di cui OQ fosse l'ipotenusa; quindi il problema non ammetterebbe soluzione.

Concludendo, il problema ammette:
due soluzioni quando il segmento $\frac{1}{2}r$ sia $< OQ$
una soluzione » » » » $= OQ$
nessuna » » » » $> OQ$

X.

La discussione precedente ci porta ad un'osservazione generale. Quando un problema ammette al più due soluzioni, dovrà a volte presentarne una sola, a volte nessuna; e il passaggio tra i casi in cui le soluzioni sono due e quelli in cui non ne esiste alcuna, sarà sempre segnato da quello in cui se ne ha una sola.

Questo fatto costante dipende in ultima analisi da ciò che un cerchio può essere segato da una retta, a norma della sua posizione, in due punti, in uno o in nessuno; e precisamente che se una retta si muove con una certa legge sul piano d'un cerchio, se dapprima lo segava in due punti, verrà un momento in cui più non lo segnerà, e il passaggio tra l'uno e l'altro stato di cose è dato da quell'istante in cui i due punti di segamento riunendosi in uno, la retta diviene tangente.

XI.

Come esempio dell'applicazione di luoghi geometrici, in conformità al detto nel n. III, e nel medesimo tempo per fare applicazione del problema precedente, risolveremo il seguente:

Esempio III. — *Costruire un triangolo eguale a un triangolo dato ABC, e i cui lati passino per tre punti dati M, N, P. (fig. V).*

Qui non faremo più la distinzione che per maggior chiarezza abbiamo posto tra le cinque parti delle soluzioni precedenti: e in tal modo intendiamo offrire un esempio della forma sotto cui si esporrà preferibilmente la soluzione dei problemi.

Supposto costruito il triangolo richiesto $A'B'C'$, eguale cioè ad ABC e i cui lati passino per M, N, P , osservo che, volendosi che sia $\text{ang}A' = \text{ang}A$, $\text{ang}B' = \text{ang}B$ e per conseguenza $\text{ang}C' = \text{ang}C$, il vertice A' dovrà trovarsi su un arco di cerchio capace dell'angolo A , e così B' su un arco di cerchio capace dell'angolo B , e costruiti rispettivamente su PN e su PM . Per altro riflettendo che $A'B'$ deve essere eguale ad AB , tosto si presenta la seguente soluzione:

Descritto su PN un arco di cerchio capace dell'angolo A , su PM uno capace dell'angolo B , si conduca per P , seguendo la costruzione del problema precedente, una retta a segare i due cerchi in guisa che sia $A'B' = AB$. Condotte poi $A'N$, $B'M$ a segarsi in C' , sarà $A'B'C'$ il triangolo richiesto.

Infatti per costruzione si ha $A'B' = AB$, $\text{ang}A' = \text{ang}A$, $\text{ang}B' = \text{ang}B$; dunque il triangolo $A'B'C'$ sarà eguale ad ABC ; e siccome per costruzione i suoi lati passano rispettivamente per i punti M, N, P , esso sarà il richiesto.

Per discutere poi questa soluzione, osserviamo anzitutto che su NP , invece di costruire un angolo eguale ad $\text{ang}A$ potevamo costruirne uno eguale ad $\text{ang}B$ oppure ad $\text{ang}C$; e analogamente su PM ; e si sarebbero così ottenuti altri triangoli soddisfacenti al problema. Perchè determinati due angoli lo è anche il terzo, così si vede che avremmo potuto procedere in 6 modi differenti, costruendo su NP un angolo eguale ad A , oppure a B , oppure a C , e in ognuno di questi casi costruendo su PM un angolo eguale all'uno oppure all'altro dei due rimanenti.

Ognuna poi di queste maniere può dar luogo a due soluzioni; giacchè, come vedemmo dal precedente problema, per un punto comune a due cerchi si possono condurre al più due secanti eguali a un segmento dato; e qui appunto, una volta fissati i due angoli che si prendono da principio (uno opposto a NP e l'altro a PM) resta fissato il lato da prendersi, cioè la lunghezza della secante da condursi per P .

Osservando che in tal modo abbiamo esaurite tutte le

possibili combinazioni dei dati (giacchè ogni altra sarebbe compresa in queste) si vede che si avranno *al più* dodici soluzioni del problema proposto.

Accontentandoci di avere accennato a questo fatto, non entreremo in una minuta e tediosa discussione di tutti i casi possibili, potendo le soluzioni ridursi da 12 sino a 0. Ognuno che il voglia potrà farlo senza difficoltà, fondandosi sopra la discussione del II esempio.

La stessa costruzione serve a risolvere il celebre problema di Newton: « Costruire un triangolo eguale a un dato e i cui vertici giacciono su tre rette date ».

E invero se il triangolo dato è MNP (fig. V) e le tre rette date formano l'altro triangolo ABC, colla costruzione di poc'anzi si formerà il triangolo A'B'C' eguale ad ABC, e i cui lati passino per M, N, P. Il problema è così risolto, bastando ora portare il triangolo A'B'C' su ABC, perchè allora i tre punti M, N, P, si porteranno nella posizione dei vertici del triangolo domandato. E cioè i tre punti sui lati del triangolo ABC che dai vertici di esso hanno le distanze stesse che M, N, P, hanno rispettivamente dai vertici dell'egual triangolo A'B'C', congiunti con rette, daranno il triangolo richiesto.

XII.

Abbiamo detto che in generale la natura stessa della questione suggerisce le costruzioni ausiliarie che possono servire nel rinvenimento di relazioni utili fra i dati e le incognite. Per agevolare questo compito si può ricorrere al calcolo, giovandosi di relazioni *metriche* (di grandezza) fra cognite e incognite, in guisa da aver elementi sufficienti per la costruzione, — o diretta, o per mezzo di altre ausiliarie a cui condurrà naturalmente il calcolo, — della richiesta figura.

Eccone un esempio che varrà cogli altri a mostrare i diversi aspetti sotto cui si può presentare il metodo analitico.

Esempio IV. - *Date le tre altezze a, b, c, d'un triangolo, costruirlo.*

Suppongo sia ABC (fig. VI) il triangolo richiesto, le cui altezze AA', BB', CC' siano rispettivamente eguali ad a, b, c.

Osservo che i due triangoli AA'C, BB'C sono simili per aver due angoli eguali, onde sussisterà la proporzione:

$$AC : AA' :: BC : BB' \text{ ossia } \frac{AC}{a} = \frac{BC}{b}$$

Parimenti i due triangoli simili ABB', ACC' danno $\frac{AB}{b} = \frac{AC}{c}$. Qui si hanno due eguaglianze, di cui la prima

contiene il rapporto $\frac{AC}{a}$, la seconda il rapporto $\frac{AC}{c}$. Per avere in tutte e due lo stesso rapporto, ad es. $\frac{AC}{a}$ e poterle così confrontare, moltiplicherò ambo i membri della seconda per $\frac{c}{a}$, col che ottengo

$$\frac{AB}{b} \cdot \frac{c}{a} = \frac{AC}{c} \cdot \frac{c}{a} \quad \text{cioè} \quad AB : \frac{ab}{c} = AC : a$$

Ora $\frac{ab}{c}$ è una quantità nota dai dati del problema ed è geometricamente costruibile, essendo essa la quarta proporzionale, che dirò d, dopo c, a, b. E invero dalla proporzione $c : a :: b : d$ si ricava appunto $d = \frac{ab}{c}$.

Dunque si hanno le eguaglianze

$$\frac{AC}{a} = \frac{BC}{b}; \quad \frac{AB}{d} = \frac{AC}{a}; \quad \text{onde} \quad \frac{AC}{a} = \frac{BC}{b} = \frac{AB}{d}$$

Quest'ultima dimostra che i tre lati AC, BC, AB del triangolo da costruirsi sono rispettivamente proporzionali

alle tre rette a, b, d : vale a dire il triangolo formato con queste tre rette sarà simile al cercato. Adesso che sappiamo costruire un triangolo simile al voluto, facilmente costruiremo anche quest'ultimo.

Incominceremo dunque a determinare la lunghezza d , costruendo nel modo noto la quarta proporzionale dopo c, a, b (fig. VII). Ciò fatto costruiremo un triangolo APQ i cui lati sieno quei tre segmenti, e cioè $AP = a, AQ = d, PQ = b$; e che sarà simile al domandato. Per ottenere il quale basterà dunque condurre la parallela BC al lato QP, determinando B in guisa che l'altezza BB' eguagli la b , come si è fatto nella figura. Il triangolo ABC risolve il problema.

Condotte infatti le tre altezze AA', BB', CC' si trova, ripetendo il ragionamento di prima, che queste altezze sono risp. proporzionali ad a, b, c ; ma la seconda è per costruzione eguale alla stessa b ; dunque anche $AA' = a, CC' = c$; e il triangolo soddisfa al problema.

Del resto si può anche osservare che ABC è simile ad APQ e quindi anche al domandato cui questo secondo fu dimostrato simile; ma con esso ha eguale un'altezza omologa b , quindi gli è eguale.

Come si vede, il problema presenta una sola soluzione; per la cui possibilità è poi necessario che coi tre segmenti a, b, d si possa costruire un triangolo.

XIII.

Per convalidare con un esempio le osservazioni del n. IV ci proporremo ora la seguente questione:

Esempio V. - Determinare il vertice d'un triangolo rettangolo eguale a un triangolo dato ABC e che abbia gli estremi dell'ipotenusa rispettivamente su due rette perpendicolari date.

È evidente che esistono infiniti punti i quali soddisfanno al problema, perchè l'ipotenusa del triangolo si può met-

tere in quella direzione che più aggrada: cosicchè non sarà questione di determinare uno fra questi infiniti punti, ma piuttosto la linea costituita dal loro assieme.

E il problema sarà meglio espresso così:

Trovare il luogo dei vertici, dei triangoli rettangoli eguali a un dato ABC e nei quali gli estremi dell'ipotenusa giacciono rispettivamente su due rette perpendicolari.
od anche:

Trovare la linea percorsa dal vertice C di un triangolo rettangolo ABC il quale si muova nel proprio piano in guisa che i due estremi A e B dell'ipotenusa scorrono rispettivamente su due rette perpendicolari OM, OQ (fig. VIII).

Prendiamo come prima posizione del triangolo mobile quella OMN nella quale l'ipotenusa AB si trovi tutta sul lato OM dell'angolo retto, e precisamente A in M, B in O; dove A è un punto del primo lato OM, e O un punto del secondo lato OQ: e immaginiamo poi che il triangolo vada movendosi in guisa che il vertice A discenda lungo il primo lato, e il vertice B si avanzi lungo il secondo lato, finchè il primo vertice sarà venuto in O e il secondo in Q e il triangolo avrà assunta l'ultima posizione OPQ nella quale l'ipotenusa sia disposta invece lungo il secondo lato dell'angolo. È chiaro che in questa posizione finale il cateto OP dovrà essere sovrapposto al cateto ON nella posizione iniziale (perchè i due angoli acuti del dato triangolo sono complementari); e cioè il vertice P dell'angolo retto si troverà sulla stessa retta ON sulla quale giaceva nella posizione iniziale del triangolo.

Quest'analisi ci fa subito capire che il luogo domandato è la retta ON. E invero se indichiamo ora con $A'B'C'$ una qualunque posizione del triangolo mobile, facile riesce dimostrare che il vertice C' deve essere sulla ON. Se infatti indichiamo per un istante con C'' il punto in cui il lato $A'C'$

sega ON , per i 4 punti $A'OB'C''$ passerà una circonferenza, essendo $\text{ang}A'OC'' = \text{ang}A'B'C''$; ma, essendo retto l'angolo $A'OB'$, l'arco $A'OB'$ sarà una semicirconferenza; e una semicirconferenza sarà pertanto il rimanente arco $A'C''B'$, il che prova che l'angolo $A'C''B'$ è retto, al pari di $A'C'B'$; epperò che C'' coincide con C' , cioè che questo vertice giace per l'appunto su ON .

Al muoversi dunque del triangolo il suo vertice percorre la ON , e precisamente quel segmento di essa che intercede fra il punto S , per cui OS è eguale all'ipotenusa (massima distanza da O) e il punto P , per cui OP è eguale al cateto minore (minima distanza da O): ed è chiaro che al principio del movimento il vertice va da N verso S ; poi ritorna indietro, camminando da S fino in P .

Ed ecco che, nel mentre abbiamo risolta la proposta questione, siamo giunti a un teorema (cfr. n. IV):

« Se un triangolo rettangolo si muove cogli estremi » dell'ipotenusa lungo due rette perpendicolari il cui incontro » sia O , il suo vertice percorre, su una retta uscente da O , » e formante coi lati del dato angolo due angoli rispettiva- » mente eguali a quelli acuti del triangolo, il segmento com- » preso fra i due punti che distano da O di grandezze ris- » pettivamente eguali all'ipotenusa e al cateto minore del » triangolo. »

Se in particolare il triangolo fosse isoscele il suo vertice si muoverebbe sulla bisettrice dell'angolo retto; e il segmento, che in questo caso sarebbe eguale alla differenza fra l'ipotenusa e il cateto, sarebbe percorso per intero due volte; la prima allontanandosi da O , la seconda avvicinandosi ad O .

Il teorema è suscettibile di diversi altri enunciati forse non privi d'interesse, fra cui questo:

Se tanti cerchi eguali hanno gli estremi del diametro su due rette perpendicolari uscenti da un punto O , e su ognuno di essi si prende lo stesso arco a partire dal punto di se-

gamento con uno dei lati dell'angolo, tutti i punti così ottenuti, estremi degli archi, si troveranno su una retta uscente da O ; teorema che permette di costruire infiniti punti, col solo compasso, della retta che divide un dato angolo retto in due parti stabilite (in due angoli dati per mezzo degli archi che li misurano).

XIV.

Prima di dare qualche esempio anche per la stereometria, rammenteremo che un problema di questo ramo di scienza si può ritenere risolto quando si sia ridotto a condurre rette, piani, sfere, datini i sufficienti elementi giovandosi anche all'uopo dei problemi elementari, come condurre rette o piani paralleli o perpendicolari ecc. Del resto valgano in tutto le osservazioni generali che abbiamo fatto fin dal principio; se non che il più delle volte la mancanza di metodi grafici, per eseguire una figura anche approssimativa nello spazio, è causa di non lievi difficoltà, la quale fa sì che essi vengano trascurati troppo nell'insegnamento. Converrebbe invece insistere su essi, essendo questo il metodo più acconcio per rendere famigliari e mostrare le applicazioni di verità astratte e troppo astruse alla mente di chi imprende lo studio della geometria solida.

Esempio VI. — *Segare un dato angolo tetraedro in modo che la sezione sia un parallelogrammo.*

Supponiamo sia $ABCD$ (fig. IX) la sezione domandata: dovrà allora il lato AB essere parallelo all'opposto lato CD , e quindi anche alla faccia su cui è situato questo lato; e parimenti BC parallela alla faccia su cui giace l'opposto lato AD .

Per cui tosto si presenta la soluzione seguente. Preso un punto qualunque A su uno spigolo si conduca per esso, a segare una faccia lungo la retta AB , il piano parallelo alla faccia opposta; per il punto B si conduca, a segare lungo BC la faccia consecutiva, il piano parallelo alla faccia op-

posta. Il piano delle due rette AB, BC segnerà le altre due facce lungo due rette AD, DC , e il poligono piano $ABCD$ sarà un parallelogrammo. E invero AB e CD essendo sezioni di due piani paralleli (la faccia su cui è la CD e il piano ad essa parallelo condotto per AB) con un terzo piano (quello del quadrilatero) saranno paralleli, e così pure AD, BC .

Il problema, come si vede, presenta infinite soluzioni: una per ogni punto preso su uno spigolo dell'angolo tetraedro dato; giacchè il punto A fu scelto ad arbitrio. E che ciò dovesse avvenire era da prevedersi, perchè tutte le sezioni parallele d'un angolo solido sono figure simili; e quindi se una è parallelogrammo sono tali anche le altre.

Esempio VII. — *Costruire un tetraedro dato un punto su ciascuno spigolo.*

Il problema è della massima semplicità e per risolverlo non ci occorrerà nemmeno la figura. Indichiamo ordinatamente con 1, 2, 3, 4, 5, 6 i punti dati. Le quattro facce del tetraedro conterranno ognuna tre di questi punti (contenendo ognuna tre spigoli), e le facce a due a due (segandosi in uno spigolo) avranno a comune uno ed uno solo di essi. Basterà dunque, per risolvere il problema, condurre 4 piani ognuno dei quali contenga 3 di questi 6 punti ed abbia un punto comune (fra questi 6) con ciascuno degli altri 3. La soluzione presenta molto di arbitrario.

Si può ad esempio partire dalla faccia 123, cioè condurre un piano per i tre punti 1, 2, 3. Allora le altre tre facce dovranno contenere rispettivamente il punto 4, il punto 2, e il punto 3. Quella che contiene 1 potrà poi contenere 4 e 5, oppure 4 e 6, oppure 5 e 6. Se prendiamo la prima combinazione 145, la terza faccia, quella che contiene 2 dovrà contenere anche uno dei due punti 4 e 5 e poi il sesto punto 6; e potrà quindi essere o 246 oppure 256. Se assumiamo 246 come terza faccia, la quarta, dovendo avere un punto e uno solo a comune con ognuna delle altre tre, e un punto non potendo giacere su più di due facce, sarà necessariamente 356.

Partendo dalla faccia 123 si possono così formare i 6 tetraedri:

123	123	123	123	123	123
145	145	146	146	156	156
246	256	245	265	254	264
366	346	356	345	346	345

ed è evidente che ognuno di questi 6 tetraedri soddisfa al problema. Ma invece di partire dalla faccia 123, noi avremmo potuto partire da uno qualunque dei $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ piani che congiun-

gono quei 6 punti a 3 a 3 in tutti i modi possibili; e ripetendo lo stesso procedimento per ognuno di essi avremmo

costruito 6 tetraedri. I $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ tetraedri così ottenuti non sono

però tutti differenti, ma a 4 a 4 coincidono, vale a dire un medesimo tetraedro sarebbe così contato quattro volte.

Questo è evidente, giacchè ad es. il primo tetraedro si ottiene non solo partendo dalla combinazione 123, ma anche partendo dalle tre combinazioni 145, 246, 356 corrispondenti alle altre sue facce. Quindi i tetraedri distinti che si possono formare sono in numero di $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 30$.

Abbiamo così veduto che si possono costruire 30 tetraedri i cui spigoli passino rispettivamente per 6 punti dati nello spazio; ed è da notarsi che tutte queste costruzioni sono possibili, potendosi sempre condurre un piano per 3 punti. (*)

XV.

Daremo un ultimo esempio per mostrare come in certe questioni riesca utile l'applicazione dell'algebra.

Esempio VIII. - Segare con un piano una sfera

(*) La configurazione dell'insieme di questi 30 tetraedri e specie dei loro 120 vertici potrebbe forse essere argomento di studio.

in modo che uno dei due segmenti sia equivalente al cono retto inscritto nell'altro segmento.

Indicando con r il raggio della sfera, con x la saetta del primo segmento, il problema sarà risolto quando sia noto x in termini di r , giacchè allora è nota la distanza che il piano segante deve avere dal centro. Se x è la saetta del segmento, l'altezza del cono sarà evidentemente $2r - x$, e il quadrato del raggio della base del cono e del segmento sarà $(2r - x)x$ dovendo esso essere la media proporzionale fra i due segmenti del diametro perpendicolare.

Il volume del cono sarà quindi $\frac{2r - x}{3} \pi x (2r - x)$, e quello del segmento, secondo la nota formola, $\pi x^2 \left(r - \frac{x}{3} \right)$

Sussisterà pertanto l'eguaglianza

$$\frac{\pi x}{3} (2r - x)^2 = \pi x^2 \left(r - \frac{x}{3} \right) \quad (I).$$

ossia

$$(2r - x)^2 = x (3r - x)$$

onde

$$x = \frac{r}{4} (7 \pm \sqrt{17})$$

Dei due segni qui non piglieremo che il $-$, giacchè $\frac{7 + \sqrt{17}}{4} r$ è maggiore del diametro e in questo caso il valore di x sarebbe geometricamente insignificante. La soluzione

$$x = \frac{r}{4} (7 - \sqrt{17})$$

è la sola che soddisfi al problema. Per questo valore di x infatti si verifica tosto che il volume del cono è eguale a quello del segmento, essendo entrambi $\frac{\pi r^3}{48} (23 - \sqrt{17})$.

L'altro valore

$$x = \frac{r}{4} (7 + \sqrt{17})$$

potrebbe però interpretarsi introducendo le soluzioni immaginarie; l'arca del circolo sezione sarebbe negativa, e il suo raggio immaginario; ma essendo negativa anche l'altezza del cono, il volume del cono risulterebbe positivo ed eguale a $\frac{\pi r^3}{48} (23 + \sqrt{17})$, eguale poi ancora a quello del segmento. La comparsa di questo valore proviene algebricamente dal fatto che si può soddisfare alla relazione (I) anche con un valore negativo di $2r - x$, perchè questa espressione non vi compare che al quadrato.

Valga questa discussione a mostrare come i risultati che si hanno applicando l'algebra alla geometria vadano esaminati e discussi.

XVI.

Gli esempi precedenti basteranno a dare una chiara idea del metodo analitico. Non ne daremo alcuno per il metodo sintetico, giacchè su tutti i testi di geometria se ne trovano: così i problemi fondamentali, come condurre una retta perpendicolare, una parallela a un'altra, dividere a metà un segmento rettilineo o un angolo, costruire un triangolo eguale a un altro ecc, sono sempre risolti sinteticamente, cioè senza costruzioni preparatorie ed esami di mutue relazioni. Del resto le soluzioni precedenti stesse, qualora si omettano le due prime parti, ossia si incominci addirittura dalla costruzione finale, potrebbero altresì servire come esempi di metodo sintetico.

Osserveremo però, e il ripeterlo non sarà soverchio, che, eccettuato il caso in cui la soluzione d'un problema si sappia immediatamente far discendere da quella d'un altro noto, epperò le costruzioni preparatorie riescano inutili, sarà sempre da preferirsi il metodo analitico.

Dott. VITTORIO MURER.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

RAFFAELE BADIA. — *Lezioni di Geometria complementare ad uso degli Istituti Tecnici.* — Città di Castello, S. Lapi editore, 1885: prezzo Lire 2, 50.

L'A., insegnante di matematiche nell'istituto tecnico di Perugia, ha pubblicato questo libro specialmente per uso dei giovani che frequentano il 3° anno d'istituto tecnico nella sezione fisico-matematica. Esso dichiara nella prefazione che nel medesimo sono raccolte le teorie che servono, per dir così, d'introduzione alla geometria superiore (sono sue parole), comprese nel nuovo programma sotto il titolo di *complementi di geometria*. Veramente questo libro contiene più di quello che si possa insegnare agli alunni in rapporto alle accennate teorie, tenuto anche conto della libertà che i nuovi programmi d'insegnamento consentono al docente; per altro questo per me è piuttosto titolo di lode, e ciascun insegnante che adotti il libro di cui si tratta ne svolgerà quelle parti che crederà, tanto più facilmente inquantochè diversi capitoli stanno da sè e possono essere ommessi senza pregiudizio dei rimanenti.

L'A. anzichè seguire i puri metodi dalla geometria di posizione, di cui si hanno bell' esempi nella *Geometria proiettiva* del CREMONA e nella *Geometrie der Lage* del REYE, si è principalmente attenuto a quelli che informano il classico *Traité de géométrie supérieure* del CHASLES e di cui si ha un saggio nelle note che il prof. Novi aggiunse, fino dal 1858, alla traduzione italiana del *Traité de géométrie élémentaire* di A. AMIOT, e di questo veramente chi scrive non sa se sia da attribuirgliene lode. È vero che questi metodi si scostano meno da quelli divenuti già famigliari agli alunni per i precedenti studi, ma non è men vero che gli altri, di cui si fa uso nella geometria proiettiva propriamente detta, nulla prova siano più difficili e men propri all'insegnamento elementare.

L'esposizione dell'A. è molto chiara e nel complesso rigorosa, e queste lezioni hanno, a giudizio mio, notevole va-

lore didattico, tanto che l'A. può esser lieto d'aver raggiunto lo scopo prefissosi. Aggiungasi poi che le medesime aumentano la nostra letteratura scolastica d'un libro il quale, tenuto conto del metodo geometrico-analitico da cui è informato, per quanto io sappia, non trova riscontro che nella menzionata traduzione italiana dell'AMOT.

Le *lezioni di geometria complementare* del prof. BADIA, constano di XIX capitoli dei quali, senza trascriverne l'indice per esteso, mi limiterò a citare gli argomenti. Capo I. Preliminari intorno alla grandezza e direzione dei segmenti determinati dai punti d'una retta. Relazione fra i segmenti determinati da tre e quattro punti d'una retta. — II. Rapporto semplice di punti. — III. Doppio rapporto o rapporto anarmonico di punti. — IV. Rapporto armonico di punti. — V. Preliminari intorno alla grandezza e direzione degli angoli. Doppio rapporto di quattro rette d'un fascio. — VI. Rapporto armonico di quattro rette. — VII. Potenza d'un punto rispetto a due altri d'una stessa punteggiata. Punto d'ugual potenza. Involutione; equazioni che l'esprimono. — VIII. Centro e punti doppi d'una involuzione. Equazioni dell'involuzione in un caso speciale. — IX. Fasci di rette in involuzione. Equazioni esprimenti l'involuzione di sei rette. — X. Potenza d'un punto rispetto ad un cerchio. Centro e asse radicale. — XI. Elementi correlativi delle figure, legge di dualità. — XII. Alcune proprietà del triangolo e trilatero (*). — XIII. Teoremi sul quadrangolo e quadrilatero completo (**). — XIV. Concetto di poligoni e poliedri semplici convessi. Rappresentazione di un sistema di punti nel piano e nello spazio per mezzo d'un poligono o d'un poliedro semplice convesso. — XV. Omotetia. — XVI. Generalità del metodo di proiezione centrale. Sezioni coniche. — XVII. Proprietà dell'ellisse. — XVIII. Proprietà dell'iperbole. — XIX. Proprietà della parabola.

Stimo utile aggiungere alcune considerazioni critiche che daranno ulteriori indicazioni circa il contenuto del libro.

Primieramente un'osservazione generale. Poichè le relazioni che l'alunno deve ricordare sono numerose e spesso

(*) Teorema di MENELAO e correlativo, e corollari.

(**) Teoremi di DESARGUES relativi al quadrilatero isolato e inscritto in un circolo, e correlativi.

complesse, sarebbe stato utile, a mio giudizio che l'A. avesse aggiunto, per le principali, dei criteri pratici da servire a comporle. Le formole o relazioni di cui sarebbe stato opportuno accennare una genesi pratica sono: quella del §. 5. che stabilisce una relazione fra i sei segmenti determinati da quattro punti A B C D in linea retta (espressione di tre termini dove il primo è AB.CD e gli altri due s'ottengono lasciando ferma la A. e permutando circolarmente BCD); le due, facilmente deducibili l'una dall'altra, che trovansi ai §§. 10 e 11 le quali danno l'espressione del rapporto semplice di tre punti ABC in funzione delle quantità reciproche delle distanze di A da B e C, l'espressione dello stesso rapporto in cui entra un quarto punto arbitrario M, e le relazioni analoghe pel doppio rapporto di quattro punti che trovansi ai §§. 19 e 20; la prima formola dei gruppi (I) o (I') e (II), al §. 65, esprimenti l'involuzione di sei punti di una retta, l'ultima delle quali può ottenersi scrivendo il prodotto AB. BC. CA. poi applicando le virgolette alle tre ultime lettere di ciascun fattore ed uguagliandolo allo stesso prodotto, cambiato di segno, in cui le virgolette sono invece da aggiungere alle tre prime lettere, mentre l'altra che è la prima del gruppo (I) si rendeva chiara con un semplice accenno al significato dei suoi due membri, e così la prima del gruppo (I'); finalmente la relazione alla fine del §. 71 che esprime l'involuzione di sei punti in linea retta, in cui entrano le distanze dei medesimi da un settimo punto arbitrario e le singole distanze dei punti medi dei segmenti che hanno le estremità in due punti coniugati l'uno all'altro.

Stando sempre in quest'ordine d'idee, trovo assai proprio che l'A. abbia premesso all'esposizione delle diverse forme del rapporto anarmonico di quattro punti, quelle analoghe del rapporto semplice di tre punti; ma non ho capito perchè, nell'imprendere la trattazione del doppio rapporto, non abbia avvertito che con quattro punti A B C D sono possibili 24 rapporti, uguali quattro a quattro, cosicchè la sua esposizione potrebbe lasciare nei giovani il dubbio che oltre ai sei considerati, altri ne fossero possibili. Ancora: nel dedurre i sei differenti rapporti anarmonici anzichè ricorrere a scambi successivi, credo sarebbe stata miglior cosa ch'egli avesse fatto osservare che dal primo se ne deducono altri due per-

mutando circolarmente BC D, e dai tre primi i rimanenti cambiandovi le due ultime lettere. Facendo ciò l'esplicazione delle relazioni esistenti fra questi sei rapporti, da lui esposte nel §. 17, e le conseguenti formole che esprimono il valore di cinque di essi in funzione del rimanente, ne sarebbe stata notabilmente avvantaggiata. Finalmente, se le relazioni esistenti fra quattro punti formanti un gruppo armonico, avessero ogni volta seguito quelle per il rapporto anarmonico da cui si deducono, pare a me che ne avrebbe guadagnato l'economia dell'opera e non scapitata la chiarezza.

Al §. 36 l'A., trasformando l'espressione del doppio rapporto in cui entra un punto arbitrario, accenna ad un artificio di calcolo complesso più del bisogno. L'espressione trasformata potevasi dedurre dalla precedente dividendo sem-

plimente il numeratore e denominatore di questa per $\frac{MB}{MA}$.

La stessa osservazione è estendibile alle formole analoghe del doppio rapporto di quattro rette, in cui entra una quinta retta arbitraria. Il problema: *Date tre rette in un piano concorrenti in un punto costruire la quarta retta del fascio in modo che il doppio rapporto delle quattro rette sia = λ* , trattato al §. 39, potevasi risolvere anche applicando quello del §. 22, costruendo cioè il quarto punto, che coi tre determinati da una trasversale qualsiasi sulle rette date, forma un doppio rapporto = λ . L'A. non l'ha avvertito, pure ricorre ad un mezzo consimile al §. 79 quando tratta il problema: *Date cinque rette concorrenti in un punto, condurre per questo punto una retta tale che le sei rette formino un'involuzione.*

Al §. 45, in cui è dimostrato il teorema: *Se per un punto fisso P preso nel piano d'un angolo S, si conducono due secanti qualunque le quali taglino rispettivamente i lati nei punti A, A' e B, B' e si unisce A con B' ed A' con B, il luogo geometrico delle intersezioni delle due rette AB', ed A'B è la polare di P rispetto all'angolo dato*, l'A. è incorso in una lieve inesattezza. L'eguaglianza alla fine della pag. 55 dev'essere: $(PP'AA') = (PP''B'B)$, in base alla quale per proseguire la dimostrazione conveniva scrivere: ma $(PP'AA') = -1$, quindi sarà anche: $(PP''B'B) = -1$, ed avendosi (16):

$$(PP''BB') = \frac{1}{(PP''B'B)}, \text{ risulta altresì: } (PP''BB') = -1, \text{ ecc..}$$

Alla fine del §. 56 è affermato che il valore della potenza di un punto O , rispetto ad altri due AA' in linea retta col primo, diviene massimo quando O è il punto medio di AA' . Non sarebbe stato utile in una nota dichiararne la ragione.

Al successivo §. 57 dove trattasi di risolvere il problema: *Dati quattro punti $AA'BB'$ in una linea retta s , coniugati due a due, trovare su questa un punto che sia d'ugual potenza rispetto alle due coppie di punti coniugati*, è detto che, preso un punto arbitrario M fuori di s , le due circonferenze $AA'M$, $BB'M$ si segheranno necessariamente in un secondo punto M' . Veramente le due circonferenze potrebbero riuscire tangenti in questo punto.

Nel capo VII al §. 62 l'A. dà la seguente definizione: *Se più circonferenze, le quali siano descritte in uno stesso piano e passino tutte per due punti fissi, sono segate da una trasversale condotta nel piano, il sistema di punti formato dalle intersezioni della trasversale colle circonferenze si chiama involuzione di punti*. Ora quando tre coppie di punti $AA' BB' CC'$, situati sopra una stessa retta, sono in involuzione, esistono fra i segmenti determinati dai medesimi, sette relazioni che l'A. determina in questo capitolo; a me sembra però ch'egli non abbia messo abbastanza in rilievo come l'esistenza di una qualsiasi delle relazioni medesime porti a concludere che i sei punti che compariscono in essa sono in involuzione secondo la definizione.

Al capitolo XIII trovansi esposti due teoremi che vanno sotto il nome di DESARGUES (il secondo però esteso al solo cerchio) e i loro correlativi. La dimostrazione dell'ultimo teo: a destra cioè: *Se nel piano di un quadrilatero $mnpq$ circoscritto ad un cerchio si prende un punto S in modo che da esso si possano condurre due tangenti d, d' alla circonferenza, queste formeranno un'involuzione con due qualunque delle tre coppie di rette coniugate $aa' bb' cc'$ che il punto determina con i sei vertici del quadrilatero*, pare a me che sia insostenibile e ciò perchè, dopo aver chiamato e la retta che congiunge i due vertici opposti mq ed np , a un certo punto l'A., per giungere alla tesi, stabilisce le eguaglianze: $\text{sen } eq. \text{ sen } em = \text{sen } ep. \text{ sen } en$; $\text{sen } a'p. \text{ sen } a'n = \text{sen } a'd. \text{ sen } a'd'$; $\text{sen } aq. \text{ sen } am = \text{sen } ad. \text{ sen } ad'$. Ora quest'eguaglianze esprimono la proposizione: *se un quadrilatero è*

circoscritto ad un cerchio e si tira la retta che congiunge due vertici opposti, gli angoli che essa forma coi due lati che passano per ciascuno di questi vertici son tali che il prodotto dei seni della prima coppia è uguale a quello dei seni dell'altra coppia, proposizione che in generale non è vera. Del resto il teorema correlativo a quello di DESARGUES, seguendo il metodo adottato dall'A., si può facilmente dimostrare fondandosi sul teorema: *Il prodotto delle distanze d'una tangente mobile a due vertici opposti d'un quadrilatero circoscritto al cerchio sta al prodotto delle sue distanze agli altri due vertici, in un rapporto costante.* Infatti siano d_1, d_2 e d'_1, d'_2 le distanze delle due coppie di vertici opposti qm, np e nq, mp rispettivamente dalla tangente d , e δ_1, δ_2 e δ'_1, δ'_2 le distanze dei medesimi vertici dall'altra tangente, e si rappresentino con a, a', b, b' i segmenti delle rette $aa' bb'$ estesi da S ai vertici considerati del quadrilatero. È chiaro che si avrà:

$$\text{sen}ad = \frac{d_1}{a}; \text{sen}ad' = \frac{\delta_1}{a'}; \text{sen}a'd = \frac{d_2}{a}; \text{sen}a'd' = \frac{\delta_2}{a'}$$

$$\text{sen}bd = \frac{d'_1}{b}; \text{sen}bd' = \frac{\delta'_1}{b'}; \text{sen}b'd = \frac{d'_2}{b}; \text{sen}b'd' = \frac{\delta'_2}{b'}$$

onde:

$$\frac{\text{sen}ad \cdot \text{sen}a'd}{\text{sen}ad' \cdot \text{sen}a'd'} = \frac{d_1 \cdot d_2}{\delta_1 \cdot \delta_2}; \frac{\text{sen}bd \cdot \text{sen}b'd}{\text{sen}bd' \cdot \text{sen}b'd'} = \frac{d'_1 \cdot d'_2}{\delta'_1 \cdot \delta'_2}$$

Ma per l'accennato teorema si ha:

$$\frac{d_1 \cdot d_2}{d'_1 \cdot d'_2} = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{\delta'_1 \cdot \delta'_2}$$

quindi anche:

$$\frac{\text{sen}ad \cdot \text{sen}a'd}{\text{sen}ad' \cdot \text{sen}a'd'} = \frac{\text{sen}bd \cdot \text{sen}b'd}{\text{sen}bd' \cdot \text{sen}b'd'}$$

uguaglianza che dimostra come le sei rette $aa' bb' dd'$ formino un fascio in involuzione.

In questo capitolo XIII avrei veduto con piacere i teoremi di PASCAL e BRIANCHON per il cerchio, che invece l'A. ha confinato semplicemente fra gli esercizi, e questi insieme ai due accennati di DESARGUES avrebbe potuto con

facilità, servendosi della proiezione centrale, da lui esposta al capo XVI, estendere altresì alle coniche.

Al capitolo XV che verte sull'omotetia, prima di passare al §. 112, sarebbe stato opportuno osservare, quantunque ciò possa parere ovvio, che la figura omotetica d'una figura piana è parimenti una figura piana, col suo piano parallelo a quello della prima figura. Sullo stesso capitolo ho poi due altre osservazioni a fare. La prima, che la dimostrazione del §. 113 regge solo per il caso in cui O sia esterno al segmento AA' o, ciò che torna lo stesso, che i poligoni considerati siano direttamente simili, mentre giovava estenderla anche al caso in cui la similitudine fosse stata inversa, e ciò tanto più che al §. 114, ov'è esaminato il teorema analogo pei poliedri, l'A. accenna al caso dell'omotetia sia diretta che inversa. La seconda osservazione riguarda il §. 124 in cui trovasi dimostrato il teorema: *I centri di omotetia di due cerchi omotetici, e i quattro punti in cui la retta da essi determinata è tagliata dalle due circonferenze, formano un sistema di sei punti in involuzione.* Ivi a un certo punto nel corso della dimostrazione l'A. scrive: si conduca la retta $O'Q$ che incontrerà la circonferenza C' in N' . Ora la retta $O'Q$ incontra in generale questa circonferenza in due punti, e fra questi dev'esser scelto quello che corrisponde a Q rispetto al centro O' d'omotetia; conveniva quindi a rigore esprimersi così: conducasi la $O'Q$ e dei due punti in cui questa retta taglia in generale la circonferenza C' , scelgasi quello più prossimo o più lontano da O' , secondochè il segmento $O'Q$ taglia o meno la circonferenza C .

Nel capitolo XVI al §. 128 trovasi dimostrato il teorema: *La proiezione di un cerchio descritto sulla superficie d'una sfera, fatta sopra un piano di circolo massimo, prendendo per centro di proiezione il polo di questo, è un cerchio.* L'A. avrebbe, secondo me, bene operato, deducendo anche il reciproco, il che potevasi fare con molta facilità. Ai §§. 130 al 135 di questo capitolo si considerano la superficie conica invilupante due sfere fisse, nelle due posizioni ch'essa può avere, e le sezioni di questa mediante un piano tangente alle sfere medesime: si presentano così le sezioni coniche: ellisse, iperbole e parabola. Questo metodo di generazione per le curve di 2° ordine pone immediatamente in

rilievo la posizione di alcuni elementi delle medesime, quali sono i fuochi, i vertici, le direttrici, gli assi e diverse altre particolarità; ma poteva fornire altresì con grande agevolezza le proprietà che le caratterizzano riflettenti la somma o differenza costante dei raggi vettori per le prime due e l'ugual distanza di ciascuno de' suoi punti dal fuoco e dalla direttrice per la terza (*), che l'A. ha creduto di dedurre solo più tardi, dopo avere ricavate le equazioni che le definiscono (§§. 141, 153, 164), nei tre capitoli che chiudono l'opera. Seguendo una tal via l'esposizione delle proprietà delle sezioni coniche sarebbe riuscita più spedita e uniforme.

Finalmente sarebbe stato utile esporre anche il teorema: *La sezione obliqua d'un cilindro circolare retto è un'ellisse.* E per questa sezione potevasi poi adottare un metodo di generazione analogo a quello seguito per le sezioni del cono.

Il libro termina con una raccolta d'esercizi, appropriati e disposti in ordine alla materia del testo; però mi sarebbe piaciuto di trovare fra questi il problema: *descrivere una circonferenza tangente a tre circonferenze date*, che avrebbe fornito ai giovani un mezzo efficace di porre in giuoco le teorie dei poli e delle polari, degli assi radicali e dell'omotetia. Anzi a mio parere il problema stesso avrebbe potuto con vantaggio essere svolto nel testo.

A. LUGLI.

TEMI PER LAVORI SCOLASTICI (**)

Calcolare il raggio di una sfera sapendo che il suo volume supera di un decimetro cubo quello del tetraedro regolare in essa inscritto.

Un triedro trirettangolo è tagliato con un piano in modo che la sezione risulta un triangolo equilatero. Calcolare: 1) il rapporto del volume della piramide così ottenuta al volume del cubo il cui lato è eguale a quello del triangolo equilatero; 2) le inclinazioni delle facce del triedro sul piano del triangolo equilatero.

(*) Veggasi: BRIOT ET BOUQUET — *Leçons de géométrie analytique.*

(**) Questi temi sono estratti dalla raccolta di quelli proposti per la promozione dalla terza alla quarta classe nell'Istituto tecnico di Roma.

1) Un emisfero è diviso in tre segmenti di eguale altezza da due piani paralleli alla sua base: trovare i rapporti dei loro volumi. 2) Calcolare il maggiore dei tre angoli d'un triangolo i lati del quale sono proporzionali ai numeri 2, 3, 4.

Il rapporto del volume d'una sfera a quello d'un tronco di cono retto ad essa circoscritto è eguale ad m : esprimere in funzione di m il rapporto del raggio della base minore del tronco al raggio della base maggiore.

1) Assegnare un metodo pel calcolo del seno di $1^\circ 52' 30''$ senza presupporre alcuna cognizione sul rapporto della circonferenza al diametro. 2) Trovare due limitazioni del rapporto della circonferenza al diametro sapendo che il seno di $1^\circ 52' 30''$ è compreso fra 0,03271 e 0,03272.

La base BC d'un triangolo isoscele BAC è divisa in tre parti eguali nei punti D ed E; esprimere le tangenti degli angoli BAD, DAE, EAC in funzione della tangente dell'angolo BAC, e calcolare quelli angoli nell'ipotesi che l'angolo BAC sia retto.

Di un prisma triangolare sono dati: il volume, la lunghezza dello spigolo laterale, la superficie laterale, e il diedro di due facce laterali. Assegnare le formole pel calcolo dei diedri delle altre due coppie di facce laterali.

Il volume d'un parallelepipedo rettorettangolo è di cent. cubi 564, 48, l'altezza di cent. 24 e la diagonale di cent. 25. Calcolare: 1) la superficie totale del parallelepipedo; 2) gli angoli che le diagonali formano col piano della base.

1) Supposta la terra sferica, calcolare la latitudine del parallelo la cui lunghezza è $\frac{2}{7}$ di quella dell'equatore. 2) Da un'urna in cui sono 100 palline numerate dall'1 al 100 se ne estraggono a sorte 10; qual'è la probabilità che fra le 10 estratte sieno quelle quattro segnate coi numeri 28, 59, 70, 83?

In un tronco di prisma retto triangolare avente il volume d'un metro cubo, gli spigoli laterali sono rispettivamente $\frac{7}{20}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{11}{20}$ del perimetro della base, e i lati di questa sono proporzionali ai numeri 5, 12, 13: calcolare il perimetro della base.

TEOREMI A DIMOSTRARE

1. Il luogo dei punti, del piano d'un triangolo dato, tali che i piedi delle perpendicolari, condotte da uno qualunque di essi ai tre lati, formino un triangolo di data area, è una circonferenza concentrica a quella circoscritta al triangolo dato.

G. LORIA.

2. Se da un punto qualunque della superficie d'un triangolo sferico trirettangolo si conducono tre archi di circonferenze massime perpendicolari ai suoi lati, il perimetro del triangolo sferico, che ha per vertici i piedi dei tre archi, è eguale alla metà d'una circonferenza massima.

F. NICOLI.

3. Se le coppie di punti A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 sono situate rispettivamente sulle tre rette BC , CA , AB , così che le rette AA_1 , BB_1 , CC_1 concorrano in uno stesso punto, e che anche le rette AA_2 , BB_2 , CC_2 concorrano in uno stesso punto, e s'indichino rispettivamente con α , β , γ i punti di incontro di AA_1 con B_2C_2 , di BB_1 con C_2A_2 e di CC_1 con A_2B_2 , le tre rette $A_2\alpha$, $B_2\beta$, $C_2\gamma$ concorreranno pure in uno stesso punto.

D. BESSO.

[PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Bibliotheca mathematica rédigée par *Gustav Eneström*. Stockholm, 1886. N° 1.
L'Eco della Associazione nazionale fra gli insegnanti delle scuole secondarie. Anno III, n. 13 e 14. Torino, 1886.

Giornale di Matematiche pubblicato per cura del professore *G. Battaglini*.
Volume XXIV. Gennaio e Febbraio 1886. Napoli, Benedetto Pellerano, editore.

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo *D. F. Gomes Teixeira*. Professor na Escola Polytechnica do Porto. Vol. VI, n. 6. Coimbra, 1885.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *J. Bourget*, Recteur de l'Académie de Clermont, de *Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy* Directeur des études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe 2^e série. Dixième année. N. 1, 2, 3, 4. Paris, 1886.

- Journal de Mathématiques élémentaires* publié par H. Vuibert. 10^e Année.
N. 12, 13, 14, 15. Paris, E. Nony, 17, Rue des Écoles.
- Mathesis* recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion Professeur à l'Université de Gand, et J. Neuberg Professeur à l'Université de Liège. Tome sixième, Mars et Avril 1886.
- Rivista scientifico-industriale* compilata da Guido Vimercati. Anno XVII.
N. 3, 4, 5, 6. Firenze, 1886.
- E. BELTRAMI. — Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell (1886).
- E. BERTINI. — Le omografie involutorie in uno spazio lineare a qualsivoglia numero di dimensioni (1886).
- G. DA COMO. — Formola pratica per la quadratura delle aree delle figure comprese fra una curva piana ed una base rettilinea e delle figure piane curvilinee in generale (1886). — numero di dimensioni (1886).
- A. FARFONDA. — Elementi di Geometria ad uso dei Licei, quinta edizione. Venezia, Tipografia Bazziana, 1886.
- V. GRONWALD. — Saggio di Aritmetica non decimale con applicazioni del calcolo duodecimale e trigesimala a problemi sui numeri complessi (1884). — Intorno all'Aritmetica dei sistemi numerici a base negativa con particolare riguardo al sistema numerico a base negativa-decimale per lo studio delle sue relazioni coll'Aritmetica ordinaria (decimale) (1884). — Dei sistemi numerici a base immaginaria (1886).
- G. JACOBI. — Sulle trasformazioni birazionali di tre forme geometriche di seconda specie (1886). — Sulle superficie generate da tre sistemi deducibili l'una dall'altro mediante trasformazioni birazionali (1886).
- G. DE LANGE. — Applications nouvelles des transversales reciproques (1886). — Etude sur une transformation reciproque. — Courbes diagonales et transversales reciproques. — Sur les cubiques unicursales (1879). — Transformation plane des quadriques. — La Géométrie récurrente (1883). — Sur les conchoïdales (1879). — Sur un mémoire de M. Landy (1884). — Des fractions étagées. — Sur la décomposition en facteurs premiers des nombres $2^n - 1$ (1877). — Sur les nombres de Bernoulli. — Sur les intégrales Eulériennes de seconde espèce. — La première leçon sur la théorie des équations (1885). — Sur une nouvelle espèce de fractions continues (1894). — Sur les séries récurrentes proprement dites et sur un théorème de Lagrange (1880).
- E. PADOVA. — Proprietà del moto di un corpo di rivoluzione soggetto a forze che hanno la funzione potenziale $H \cos^2 \vartheta$ (1886).
- S. PINCHERLE. — Note sur une intégrale définie (1885). — Sur une formule dans la théorie des fonctions (1886).
- G. PITTARELLI. — Gli elementi immaginari nelle forme binarie cubiche (1885). — Le curve di terz'ordine e di quarta classe (1885).
- E. VIGARIÉ. — Note de Géométrie (1886).