# IL SISTEMA METRICO

## I.

Parve a me, e ne convennero i miei amici, che curano la pubblicazione di questo periodico, che fosse opportuna, per l'indole di esso, una esposizione sommaria storico-teoretica della genesi del sistema metrico, perocchè è fuor di dubbio essere di sommo giovamento ai docenti la conoscenza un po' più approfondita delle cose che diuturnamente debbono insegnare ne' primi elementi; e però chieggo venia ai molti che sanno, dettando l'articolo che segue per i pochi che credono di profittarne.

Tre grandi rivoluzioni dello spirito umano si svolsero dopo il cristianesimo; il rinascimento e l'umanesimo in Italia, la riforma in Germania e la rivoluzione in Francia. È appunto nel primo periodo di quest'ultima che i pensatori francesi sollevarono a questione pratica l'unificazione delle misure, de' pesi, del tempo, degli angoli. La scienza, i commerci, i pericoli di frode esigevano da lungo tempo una unificazione, e se il sistema metrico non trionfò in ogni luogo della terra e fin da' primordi della sua creazione, dipese più che tutto dalle convulsioni politiche della Francia nel tempo della attuazione di esso, perocchè al di là de' confini di quella parvero tinti di sangue regale i campioni delle misure e dei pesi, e la opposizione naturale degli uomini a mutare le cose consuete si confuse con sentimenti politici ed umanitarii, e perfino il gigante che schiacciò la repubblica francese, fattosi sire, così poco bramava che le gesta di quella si ricordassero, che acconsentì che rivivessero insieme col sistema metrico le antiche misure; e negli ultimi giorni di vita Simone Laplace (1749-1827) scriveva:

« Il est donc permis d'espérer qu'un jour ce système qui réduit toutes les mesures et leurs calculs à l'échelle et aux opérations les plus simples de l'arithmétique décimale sera aussi généralement adopté que le système de numération dont il est le complément... »

I voti dell'uomo di genio vennero in gran parte, ma non integralmente soddisfatti. Ed in verità una mutazione nelle suddivisioni del giorno, così che questo divenisse di 10 ore, ognuna di 100 minuti, urtava, senza manifesto beneficio, contro le secolari abitudini umane, e però il giorno decimale nè trionfò, nè trionferà. All'incontro, che l'angolo retto (unità di misura angolare) dovesse dividersi in 100 parti era questione puramente scientifica, e i vantaggi di tale suddivisione si compendiano nella facilità de'conteggi: che se il patrimonio numerico delle scienze di osservazione e l'altro finanziario de'circoli divisi impedirono l'accettazione dell'arco decimale, non per questo è improbabile che lentamente il mondo scientifico faccia a quello buon viso.

Noi, del resto, lascieremo da un lato, del sistema, di cui ci occupiamo, appunto quello che riguarda tempo ed archi, delle quali unità la società posteriore a quella della Rivoluzione Francese sembrò voler fare categoria a parte.

Poche volte l'attività umana raggiunse quel culmine che ci si manifesta fra il 1750 e il 1800, specialmente nella società europea; alla testa d'un movimento vertiginoso si pose la Francia, ma le idee ben prima ed altrove avevano germogliato. Ciò non pertanto devesi riconoscere che una pleiade di uomini di genio fecero corona alla riscossa delle genti di Francia ed alla emancipazione delle classi popolari contro le storiche tirannie; solo è deplorevole che quella benefica riscossa degenerasse in ispaventevole degradazione, e quasi compromettesse principii supremamente morali. Il sistema metrico, che nacque nel seno della Rivoluzione, sentì anch'esso le dure conseguenze e del periodo delirante di quella e delle guerre od ostilità esteriori che ne furono per un certo periodo di tempo la conseguenza. Anche il sistema metrico si trovò coinvolto nelle miserie umane.

Ricorrere a lunghezze forniteci dalla natura allo scopo di creare l'unità lineare, non è idea originale della celebre Commissione del metro, perocchè l'antichissima civiltà chinese aveva provveduto in quel senso, e qualche cosa di simile troviamo anche nella civiltà del Nilo; nè è da maravigliare, poichè il concetto per sua natura è semplice e si presenta spontaneo allo spirito, ma il mondo animale e vegetale troppo subisce la influenza dell'ambiente per poter fornire un prototipo di unità lineare, ed è uopo ricorrere a fatti fisici, la mutabilità de' quali non sia prevedibile senza straordinari cataclismi, che del resto sfuggono alle ricerche umane.

Come una durata della rotazione terrestre dà la naturale unità di tempo, così la lunghezza del pendolo che batte, per esempio, il secondo medio e quella del meridiano sono i due principali mezzi che offre la natura per fissare l'unità delle misure lineari. Alla prima rivolse, in principio, la sua attenzione la Commissione metrica.

Clairaut (1713-1765) ha insegnato quale relazione esista fra le lunghezze di due pendoli che battono il secondo medio in paralleli diversi. Ed invero, se $l_1$ rappresenta la lunghezza del pendolo che batte il secondo medio all'equatore, la lunghezza $l$ in luogo di latitudine $\varphi$ è data dall'equazione

$$l = l_1 + \left(\frac{5}{2} q - \mu\right) l_1 \operatorname{sen}^2 \varphi.$$

dove $\mu$ è lo schiacciamento terrestre, cioè $\frac{a-b}{a}$ e $q$ il numero $\frac{1}{289}$, che è il rapporto della forza centrifuga alla gravità all'equatore. La formola corrisponde al livello del mare (*).

(*) La lunghezza d'un pendolo, che compie piccolissime oscillazioni di durata $t$ nel vuoto, e l'accelerazione in un luogo dato, sono legate dalla relazione

$$t^2 = \pi^2 \frac{l}{g}$$

e se si assume per unità il secondo sessagesimale di tempo medio si ha

$$g = \pi^2 l.$$

La formola quindi di Clairaut, quando la si moltiplichi per $\pi^2$, diventa:

$$g = g' + \left(\frac{5}{2} q - \mu\right) g' \operatorname{sen}^2 \varphi$$

Qualora adunque $g$ o $l$ sieno esperimentalmente determinati in luogo qualunque, la costante $g'$ (accelerazione equatoriale) diviene nota, poichè $\frac{a-b}{a}$ può essere fornito dalla geodesia. È facile comprendere che si può risolvere il problema reciproco, di ammirabile accertamento nel valore di $\frac{a-b}{a}$ del problema diretto.

La Commissione metrica aveva pensato da principio di determinare la lunghezza di detto pendolo al livello medio del mare per il parallelo 45°; tale lunghezza sarebbe stata facilmente ed in ogni tempo reperibile. Bastava determinarla in pollici, linee e millesimi di linea, suddivisioni della tesa che servì per le misure geodesiche del Perù, tener conto delle influenze della temperatura per le riduzioni del prototipo ad una temperatura normale, chiamare μέτρον quella calcolata lunghezza e edificare poscia tutto il sistema già oggi ben noto. Considerazioni forse soverchiamente teoretiche fecero abbandonare la lunghezza del pendolo: dicevasi dai commissari che l'unità di misura lineare in tal modo sarebbe dipesa da elementi ad essa affatto eterogenei, come la gravità ed il tempo, che quest'ultimo aveva suddivisioni arbitrarie e sessagesimali. Di più le belle tradizioni geodesiche francesi per le misure di D. Cassini (1625-1712), per quelle di Bouguer (1698-1758) e di Lacondamine (1701-1774) nel Perù, di Maupertuis (1698-1759) e di Clairaut in Lapponia fecero pendere la bilancia per la revisione della meridiana di Francia, e si deliberò che, allorquando si potesse conoscere in tese dell'arco del Perù la lunghezza d'un quarto del meridiano terrestre (nella ipotesi d'un ellissoide di rotazione), verrebbe assunta la diecimilionesima parte di essa come *unità* di lunghezza, la quale prenderebbe il nome classico di μέτρον.

I preludi della grande innovazione tu li ritrovi in opuscoli numerosi che accennavano al bisogno di unificazione, ma soltanto un anno dopo la convocazione degli Stati Generali a Versailles, che come è notissimo avvenne il primo maggio 1789, cioè il 10 maggio 1790 l'Assemblea nazionale udì per la prima volta Buffon, che fece la proposta di assumere per unità di lunghezza quella del pendolo che al livello medio del mare e sul parallelo 45$^{mo}$ batte il secondo medio.

Il cittadino Talleyrand (1754-1838), che incominciava quella grande e subdola carriera politica, era allora presidente dell'Assemblea; invaghitosi della proposta, volle che l'Inghilterra vi si associasse affinchè l'esito internazionale fosse assicurato, e che l'Accademia delle scienze se ne occupasse e venisse a riferire all'Assemblea; e vi riferì l'illustre Condorcet (1743-1794), immemore allora che, come Annibale, avrebbe un dì preso il veleno per evitare la ghigliottina. A questo tempo interviene la profonda modificazione sull'unità di misura. La Commissione delibera che questa non dovesse più essere la lunghezza del pendolo nelle condizioni prima dette, ma invece $\frac{1}{10000000}$ del quarto del meridiano terrestre. Il 20 marzo 1791, in seguito a relazione di Talleyrand e udito un'altra volta Condorcet, l'Assemblea votò senza contestazione, anzi con grande benevolenza, il novello progetto. La prima e celeberrima Assemblea nazionale si sciolse il 30 settembre 1791; spetta ad essa la gloria di aver sancito per legge il sistema metrico: esso sorse nel periodo puro della Rivoluzione, acquistò forza di legge quando moriva Mirabeau (1749-1791).

I teoremi di Huyghens (1629-1695) sulla forza centrifuga conducevano al concetto teorico che la lunghezza di un grado di meridiano dovesse essere maggiore verso il polo che non verso l'equatore, cioè che la terra dovesse essere schiacciata ai poli e rigonfia all'equatore.

I cannocchiali avevano mostrato il disco di Giove schiacciato nel senso dell'asse di rotazione. Newton (1643-1727), nell'ipotesi d'una sfera liquida omogenea delle dimensioni della terra e della velocità rotatoria di essa, aveva conchiuso per un valore

$$\frac{a-b}{a}=\frac{1}{230}$$

Senonchè le misure geodesiche ideate da Picard (1620-1682) in Francia e compiute da D. Cassini e da F. Lahire (1640-1718) colla misura dell'arco di meridiano da Dunkerque a Perpignano contraddissero per difetti intrinseci il risultato di Newton, e l'Accademia delle scienze immaginò e condusse a termine le due celebri spedizioni in Lapponia e in Perù verso la metà del secolo passato, per togliere di mezzo il dubbio sulla figura della terra. Newton aveva ragione. Prendendo per unità la tesa del Perù si pervenne allora ai seguenti risultati:

| $\varphi$ | |
|---|---|
| $-1^{\circ}\,30'$ | $1^{\circ}=56750^{t}$ |
| $+45\;\;0$ | $1^{\circ}=57069$ |
| $+70\;\;0$ | $1^{\circ}=57422.$ |

Sull'arco di Lapponia allora si sollevarono dubbi e nel 1801 venne rifatto e lo si trovò minore di circa 223 tese. In ogni modo la questione era risoluta, e già colle misure di Francia e del Perù si possedeva un valore di *e* (eccentricità) abbastanza approssimato. Tali erano le cognizioni geodetiche in Francia al momento della costituzione della Commissione del sistema metrico. Prevalsa l'idea dell'unità di misura basata sulle dimensioni della terra, gli uomini illustri, che formavano parte della Commissione, ben presto convennero che era necessario rimisurare con cura infinita il meridiano Cassiniano; i buoni accordi del momento colla Spagna permettevano che l'arco si estendesse fino a Barcellona; in tale modo la nona parte del quadrante veniva misurata direttamente. Ma per misurare con rigore le basi necessarie, per leggere con precisione gli angoli dei triangoli, per determinare le latitudini alle estremità dell'arco occorrevano strumenti nuovi e precisi, uomini illuminati e devoti, denari dello Stato, concorso delle autorità centrali e dipartimentali, simpatia fra i contadini nelle campagne affinchè non si dovesse temere o della malevolenza o della ignoranza durante i lavori; per di più occorreva molto tempo per apprestare il necessario, ed in epoca vertiginosa come quella il molto tempo era un grande pericolo per l'impresa, perchè l'avvenire della Francia si oscurava ogni dì più.

La seconda Assemblea nazionale inaugurata il primo ottobre 1791 aveva già nel suo seno i germi del Terrore; i Giacobini erano in prevalenza. La Commissione del metro appena funzionava che si vide colpita dagli strali avvelenati del cittadino Marat (1744-1793) autore del libello « les Charlatans académiques, » il quale fra le altre cose malvage scriveva quanto segue:

« ..... Mais le beau de jeu, c'est que, sous prétexte de mesurer un degré de méridien si bien détérminé (sic) par les anciens, ils se sont fait accorder par le ministre 100,000 écus pour les frais de l'opération; petit gâteau qu'ils se partageront en frères... »

La Commissione metrica ebbe uomini celebri nel suo seno, ma si modificò in ordine di tempo per morti naturali o violente, per ritiro o spontaneo o dettato dallo sgomento dell'epoca; vi furono membri Laplace, Lalande (1732-1807), Borda (1733-1799), Condorcet, Cassini IV (1747-1845), Méchain (1744-1804), Legendre (1752-1833), Carnot (1753-1823), Bailly (1736-1793), Meusnier, Monge (1746-1818), Coulomb, Lavoisier (1743-1794), Haüy (1743-1822), Tillet, Brisson, Vandermond, Delambre (1749-1822), Biot (1774-1862), Arago (1786-1853), ecc., ecc.

A varie epoche vennero aggregati nuovi membri, ma gli eroi delle misure furono Delambre assieme al nepote di Lalande al nord; Méchain insieme con Tranchot al sud, e dopo la morte di Méchain, Biot insieme col giovane Francesco Arago. I lavori peraltro di questi due ultimi non entrarono veramente nelle determinazioni del quarto del meridiano terrestre allo scopo di averne il diecimilionesimo. Era stato deliberato che Borda e Coulomb si occupassero della lunghezza del pendolo che batte il secondo. Il celebre Borda doveva fornire le sbarre metalliche per le misure delle basi, i termometri per esplorare la temperatura di quelle, i circoli a ripetizione per le misure angolari; a Lavoisier ed a Haüy era affidato il compito di assegnare l'unità di peso. L'acqua distillata, al suo massimo di densità, fu il liquido scelto assai opportunamente per dare l'unità di peso, e si convenne che, dopo conosciuta la lunghezza del metro, il peso dell'acqua nelle condizioni sopra dette, nel vuoto e al parallelo di 45°, contenuta nel decimetro cubo varrebbe mille volte l'unità di peso, il grammo.

Da ultimo era necessario che alcuni membri si occupassero di redigere le tabelle di rapporto fra le antiche misure e le nuove, che le dovevano sostituire; e poichè conveniva misurare con una unità di lunghezza ben definita, si stabilì che tutte le misure sarebbero state fatte colla tesa che servì a Bouguer e a Lacondamine a misurare l'arco di meridiano in Perù; questa tesa, di cui il sesto è il piede, il settantaduesimo è il pollice e l'ottocentosessantaquattresimo è la linea (quest'ultima suddivisa fino alla sua millesima parte), doveva supporsi alla temperatura di $16^{gr}\ {}^1/_4$ del termometro centigrado.

*(Continua).*

E. Millosevich.

# Sopra i sistemi di Circoli aventi lo stesso asse radicale

## I.

1. Nella presente Nota mi propongo di dimostrare con mezzi semplici ed elementari alcune importanti proprietà dei sistemi di cerchi aventi lo stesso asse radicale le quali, per la maggior parte, sono dovute al Poncelet *(Traité des Proprietés proiectives des figures)*.

2. Consideriamo un circolo di centro O (Tav. I, figura 1) e raggio O K, ed una retta I C perpendicolare ad un diametro K′ K di esso in un punto I del suo prolungamento. Preso sopra la C I un punto C ad arbitrio si guidi da esso al cerchio una tangente C D. Se si confrontano i due triangoli rettangoli C D O, C I O si scorge facilmente che C D è maggiore di C I. Perciò se col centro C e l'intervallo C D si descrive il cerchio, esso taglierà la retta K I in due punti L, L′ simmetricamente posti rispetto al punto I. I due cerchi O e C si segano ortogonalmente; e se si considera il sistema dei cerchi che, insieme al cerchio O, hanno per asse radicale la retta I C, tutti quanti verranno dal circolo C segati ortogonalmente.

Dal triangolo rettangolo C I L si osservi che si ha:

$$IL^2 = CL^2 - IC^2 = CD^2 - IC^2$$

e dall'altro C D O:

$$CD^2 = CO^2 - OD^2 = IC^2 + IO^2 - OK^2,$$

quindi risulta:

$$IL^2 = IO^2 - OK^2. \tag{1}$$

Questa relazione prova che i punti L, L′ sono punti determinati della K I indipendenti dalla posizione del punto C. Tali punti, che godono di importanti proprietà, vennero dal Poncelet denominati *punti limiti* del sistema.

Se poi si considera il sistema dei cerchi che passano tutti per due punti fissi L, L′, è facile vedere che esso è segato ortogonalmente da quelli del sistema che ha per asse radicale la linea dei centri del primitivo e per punti limiti i punti L ed L′. Possiamo adunque dire: — « I circoli che segano ortogonalmente « quelli di un sistema dato costituiscono un altro sistema (detto « *ortogonale reciproco* del primo), il cui asse radicale è la linea dei « centri del primitivo. Se i circoli dell'un sistema si segano, « quelli dell'altro non si segano; i punti comuni ai circoli che si « segano sono i punti limiti di quelli che non si segano » (*).

## II.

1. Consideriamo (Fig. 1) un punto P′, e costruiscasi la sua polare rispetto al circolo di centro O raggio O D del sistema che ha per asse radicale la C I, per punti limiti L ed L′: sia dessa la P T, essendo T il punto ove essa incontra la congiungente di P′ con O. Si avrà allora:

$$OP' . OT = OD^2,$$

ma perchè si ha pure (per la (1)):

$$OD^2 = IO^2 - IL^2 = (IO + IL)(IO - IL) = L'O . LO,$$

sarà:

$$OP' . OT = OL' . OL.$$

Laonde i quattro punti L, L′, P′, T sono sopra una medesima circonferenza. Perciò una volta fissato il punto P′, ne viene che qualunque sia il centro O del circolo del sistema rispetto al quale si prende la polare di P′, il corrispondente punto T si trova situato sulla circonferenza che passa pei tre punti fissi L, L′, P′. Siccome poi l'angolo P′ T P é costantemente retto, se ne conclude che le polari di P′ rispetto ai circoli del sistema passano tutte per un medesimo punto P che è l'estremo del diametro condotto per P′ nel circolo L L′ P′.

Si esamini ora il caso di un sistema di circoli che si segano nei punti L, L′: (Fig. 2) e scelto il punto P′ a piacere si determini la sua polare P T rispetto al circolo di centro O del sistema. Per P′, L′ ed L si faccia passare il cerchio; e condotta la tangente ad esso nel punto P′, si prolunghi fino ad incontrare in C l'asse radicale del sistema. Se si descrive il circolo di centro C e raggio C P′, esso sega ortogonalmente quello che passa per

(*) Amiot, Libro 3°, Cap. 4°, Teor. II.

$P'$, $L'$, $L$: quindi appartiene al sistema il cui asse radicale è $OI$ e che ha per punti limiti $L$ ed $L'$. Avremo adunque:

$$IL^2 = CI^2 - CP^2.$$

Ma perchè $T$ è il punto ove la polare di $P'$ rispetto al cerchio di centro $O$ del sistema incontra la $P'O$, si avrà:

$$OP' . OT = OL^2 = OI^2 + IL^2$$

dunque sarà:

$$OP' . OT = OI^2 + CI^2 - CP^2 = OC^2 - CP^2$$

e perciò:

$$OP' . OT = OM . OM'.$$

Questa relazione prova che i quattro punti $M$, $P'$, $M'$, $T$ sono sopra una stessa circonferenza; e siccome i primi tre stanno sul cerchio di centro $C$, così anche $T$ si troverà situato su di esso; e ciò indipendentemente dalla posizione del centro $O$ del primo cerchio considerato. Poichè poi l'angolo $P'TP$ è costantemente retto, se ne conclude, anche in tal caso, che le polari di $P'$ rispetto ai circoli del sistema dato passan tutte per un punto $P$ estremo del diametro, del circolo di centro $C$, che parte da $P'$. Possiamo quindi in generale affermare:

« Le polari di uno stesso punto rispetto ai circoli di un si-« stema qualunque passano per un punto fisso; questo è l'estremo « del diametro condotto pel punto dato nel cerchio che passa « per esso punto e che fa parte del sistema ortogonale reciproco « del sistema dato » (Poncelet).

Ed anche: — « Se un punto scorre sopra una circonferenza « di un sistema, scorre sulla stessa il centro del fascio di polari « di esso punto rispetto ai circoli del sistema ortogonale reci-« proco al sistema dato ».

2. Condotta $P'P$ (Figure 1 e 2), essa incontra l'asse radicale del sistema nel punto $C$ centro del circolo $P'TP$; perciò sarà $CP' = CP$. Se quindi si conducono da $P'$ e da $P$ le $P'H'$, $PH$ parallele all'asse, risulterà $IH' = IH$.

È dunque manifesto che se $P'$ scorre sopra $P'H'$, corrispondentemente $P$ scorrerà su $PH$. Dunque: — « Se un punto scorre « sopra una parallela all'asse radicale di un sistema di circoli, « il centro del fascio di polari di quel punto rispetto ai mede-

« simi circoli scorre sopra un'altra retta parallela all'asse radi-
« cale stesso situata, rispetto ad esso, simmetricamente alla pa-
« rallela primitiva ».

3. Se il punto P' è situato sopra la parallela all'asse radicale condotta per uno dei punti limiti L', l'angolo L L' P' è retto; e perciò il diametro del cerchio di centro C, che passa per P', incontrerà di nuovo il cerchio in L. Dunque: — « Se un punto scorre « sulla parallela condotta all'asse radicale di un sistema di cerchi « per uno dei punti limiti, il centro del fascio corrispondente di « polari è costantemente l'altro punto limite ».

4. Se il punto P' coincide con un punto S' dell'asse radicale è facile vedere che il suo corrispondente S si troverà sopra l'asse radicale stesso. Poichè poi è manifesto che se si parte da S come polo si ritrova per centro del fascio delle polari di esso il primitivo punto S', così potremo concludere il noto teorema: — « I punti dell'asse radicale di un sistema di circoli e i centri « dei fasci corrispondenti di polari rispetto a quei circoli sono « accoppiati in involuzione ». — Il centro della involuzione è il punto di incontro della linea dei centri coll'asse radicale del sistema. Se i circoli di questo non si segano, i punti coniugati sono separati dal centro della involuzione; altrimenti il centro è esterno a ciascuna coppia di punti corrispondenti.

5. Quando l'asse radicale non taglia i cerchi del sistema è manifesto che i punti I, S, S' (Fig. 1) sono legati dalla relazione:

$$S'I \, . \, IS = IL^2. \tag{2}$$

Nel caso opposto, ricordando (Fig. 2) che il circolo di centro C appartiene al sistema ortogonale reciproco del sistema dato, cioè a quello che ha per punti limiti L, L', si deduce agevolmente che se da I si conduce una tangente ad esso circolo, essa sarà eguale ad I L; e perciò sarà:

$$IS' \, . \, IS = IL^2. \tag{3}$$

In questo secondo caso la relazione precedente suggerisce un'altra costruzione delle coppie di punti S, S'. Sopra la linea dei centri H H' prendasi a partire da I, $I\lambda = IL$: le circonferenze tangenti in $\lambda$ alla predetta linea, e che incontrano l'asse radicale, determinano sopra di esso coppie di punti che soddisfano la relazione (3). Due delle predette circonferenze, precisamente quelle il cui raggio è $IL$, toccano l'asse radicale in $L, L'$; dunque questi sono i punti doppi della involuzione.

6. Nel fascio delle polari di un punto $P'$ rispetto ai circoli di un sistema i cui punti limiti sono $L$ ed $L'$, le rette che proiettano dal centro $P$ del fascio questi punti sono manifestamente le polari di $P'$ rispetto a circoli (di raggio nullo) che hanno per centri $L, L'$. Se, mercè la relazione (1), si ricercano i raggi dei cerchi del sistema coi centri in $L, L'$ questi si trovàno pure eguali a zero. Ciascun punto limite $L$ può quindi venir considerato come un cerchio, di raggio zero, appartenente al sistema (Poncelet, l. c.), e $PL$ ne è la polare rispetto a $P'$.

7. Dalla relazione (2) si ricava: (Fig. 1).

$$S'L^2 = S'I \,.\, S'S \quad \text{ed} \quad SL^2 = SI \,.\, SS'$$

le quali ci permettono di enunciare il Teorema:

« Se due punti dell'asse radicale di un sistema di cerchi che
« non si segano sono l'uno polo, l'altro centro del fascio corri-
« spondente delle polari rispetto a quei cerchi, la linea dei centri
« del sistema è la polare di uno qualunque di quei due punti
« rispetto al cerchio che ha per centro l'altro punto ed appar-
« tiene alla serie ortogonale reciproca del sistema dato ».

Esaminiamo ora ciò che avviene allorquando si considera il caso di un sistema di cerchi segati dal loro asse radicale.

Si osservi intanto che dalla relazione (1) si ha:

$$OK^2 = IO^2 - IL^2$$

la quale fornisce la lunghezza $OK$ del raggio del circolo del sistema che ha per centro un punto $O$ e per punti limiti $L$ ed $L'$. Quando questo punto $O$ cade entro il segmento compreso fra i punti limiti la quantità $OK$ è immaginaria: e ciò fa concludere che del sistema non fanno parte circoli i cui centri cadono entro l'intervallo compreso fra i punti limiti. Ciò posto, poichè, nel caso ora in esame, i punti $S, S'$ sono separati (Fig. 2) dal punto $L$, se $S'$ è quello di essi che cade fuori del tratto $LL'$, si immagini descritto il circolo di centro $S'$ appartenente alla serie la quale ha per punti limiti $L, L'$. Il quadrato del suo raggio, a causa della (1), sarà: $S'I^2 - IL^2$. Togliendo dai due membri della identità:

$$IS'^2 = IS'^2$$

rispettivamente i due membri della equivalenza:

$$IS'.IS = IL^2,$$

si ottiene subito:

$$IS'.SS' = IS'^2 - IL^2 \tag{4}$$

la quale dice che il punto S è il polo del circolo di centro S′ e di raggio $\sqrt{IS'^2 - IL^2}$ rispetto alla linea dei centri del sistema. Se invece i due membri della equivalenza $IS'.IS = IL^2$ si tolgono rispettivamente dai due membri della identità $IS^2 = IS^2$, si avrà ancora:

$$IS.S'S = IS^2 - IL^2$$

ove la quantità $IS^2 - IL^2$ è negativa, perchè il punto S cade entro il tratto L I. Ora se si conviene di dire che i punti S dell'intervallo compreso fra i punti limiti di un sistema sono essi pure centri di cerchi appartenenti al sistema, ma aventi per raggi le quantità immaginarie $\sqrt{IS^2 - IL^2}$ (che pure verificano la relazione (1)), si potrà allora asserire che la linea dei centri del sistema dato è ancora la polare del punto S′ rispetto al circolo (di raggio immaginario) che ha per centro il punto S ed appartiene al sistema ortogonale reciproco di quello dato.

Tale convenzione parmi giustificata dal vantaggio di poter così enunciare teoremi generali riflettenti proprietà comuni a tutti i sistemi di circoli: e nel caso nostro per essa si potrà concludere: — « Le coppie di punti dell'asse radicale di *qualsivoglia* « sistema di circoli, che sono l'uno polo, l'altro centro del fascio « corrispondente di polari rispetto a quei cerchi, sono altresì « centri di cerchi del sistema ortogonale reciproco del dato e « poli di questi rispetto al loro asse radicale (linea dei centri del « sistema primitivo) ».

*(Continua).*

L. Gianni.

# Sopra una ricerca goniometrica di Aristarco di Samo

*Aristarco di Samo* (nato verso l'anno 320 a. C.) (*) è forse il più antico geometra del quale sia a noi pervenuta una ricerca di carattere goniometrico (**).

1. Nel suo libro sulle grandezze e le distanze del sole e della luna (***) egli trova due limitazioni pel seno di 3°, e nel seguente modo:

Sia A B E F (Tav. I, fig. 3) un quadrato, l'angolo H B E $=$ 3°, e sia B G la bisettrice dell'angolo F B E; si avrà la proporzione

$$\frac{\text{ang. } GBE}{\text{ang. } HBE} = \frac{15}{2}$$

ed anche

$$\frac{GE}{EH} > \frac{\text{ang. } GBE}{\text{ang. } HBE} \tag{1}$$

epperciò sarà

$$\frac{GE}{EH} > \frac{15}{2}. \tag{1'}$$

Inoltre si ha

$$\frac{FG}{GE} = \frac{FB}{BE},$$

ma $FB^2$ è doppio di $BE^2$, epperciò sarà $FG^2$ doppio di $GE^2$, e quindi $\frac{FG}{GE} > \frac{7}{5}$, dalla quale, componendo, risulta $\frac{FE}{GE} > \frac{12}{5}$. Da questa e dalla (1') si ricava $\frac{FE}{EH} > 18$ ossia $\frac{BE}{EH} > 18$, e a *fortiori* $\frac{BH}{EH} > 18$, cioè sen $3° < \frac{1}{18}$.

Condotta la H K perpendicolare ad A B, e sulla B H come dia-

(*) Questa data trovo nella Memoria dello *Schiaparelli:* " Opinioni e ricerche degli antichi sulle distanze e sulle grandezze dei corpi celesti ".

(**) Nella pregevolissima opera del *Cantor:* " Vorlesungen über Geschichte der Mathematik " non trovo menzionata questa ricerca.

(***) ARISTARCHI. De magnitudinibus et distantiis solis et lunae liber, cum *Pappi* alexandrini explicationibus quibusdam. A *Federico Commandino* urbinate in latinum conversus ac commentariis illustratus. Pisauri, 1572.

metro descritta la circonferenza, questa passerà per K, e l'arco B K sarà di 6°; perciò se l'arco B L è di 60°, sarà $\frac{\text{ar. } BL}{\text{ar. } BK} = 10$.

E in forza della diseguaglianza

$$\frac{\text{ar. } BL}{\text{ar. } BK} > \frac{BL}{BK} \qquad (2)$$

e perchè B L è la metà di B H, sarà

$$\frac{BH}{BK} < 20$$

cioè

$$\text{sen } 3° > \frac{1}{20}.$$

2. Le diseguaglianze (1) (2) sulle quali è fondata questa ricerca d'Aristarco, si traducono, nel linguaggio odierno, nelle

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\text{tang } a}{\text{tang } b} > \dfrac{a}{b} \\ \dfrac{\text{sen } a}{\text{sen } b} < \dfrac{a}{b} \end{array}\right\} \text{per } a > b$$

delle quali, in alcuni moderni trattati, si trovano dimostrazioni di carattere analitico.

Nel commento di *Commandino* è dimostrata la (1) nel seguente modo:

Sia A C (Fig. 4) perpendicolare a B C, C D < C A, e sieno E ed F i punti in cui A B e B C sono incontrati dall'arco di raggio B D e centro B.

Dalle diseguaglianze

$$\text{sett. } BDF > \text{tr. } BDC$$
$$\text{sett. } BDE < \text{tr. } ADB$$

si ricava

$$\frac{\text{sett. } BDF}{\text{sett. } BDE} > \frac{\text{tr. } BDC}{\text{tr. } ADB};$$

ma il primo rapporto è eguale a quello degli archi D F e D E, e il secondo è eguale a quello di D C ad A D, epperciò sarà

$$\frac{\text{ar. } DF}{\text{ar. } DE} > \frac{DC}{AD}, \text{ ossia } \frac{AD}{DC} > \frac{\text{ar. } DE}{\text{ar. } DF},$$

e componendo

$$\frac{AC}{DC} > \frac{\text{ar. } EF}{\text{ar. } DF} = \frac{\text{ang. } ABC}{\text{ang. } DBC}$$

3. In quanto alla seconda diseguaglianza, quella relativa al seno, il *Commandino* dice: « Ex demonstratis à *Ptolemeo* in prin-

cipio magne constructionis. » E invero nell'*Almagesto* si trova la seguente dimostrazione:

Siano in un circolo (Fig. 5) due archi $a\,b$ e $b\,g$ e sia $a\,b < b\,g$, sia inoltre $f$ il punto di mezzo della corda $a\,g$ ed $f\,d$ perpendicolare ad $a\,g$. Indicato con $e$ il punto d'incontro della $a\,g$ colla $b\,d$ si descriva l'arco $h\,e\,c$ col raggio $d\,e$ centro $d$, e sieno $h$ e $c$ i punti in cui esso incontra la $a\,d$ e la $f\,d$; sarà $a\,d > e\,d > f\,d$, epperciò il punto $h$ sarà interno ad $a\,d$ e il punto $c$ esterno ad $f\,d$. Si avranno in conseguenza le diseguaglianze

$$\frac{\text{tr.}\,e\,d\,f}{\text{sett.}\,h\,d\,e} < \frac{\text{sett.}\,e\,c\,d}{\text{sett.}\,h\,d\,e} \quad \text{e} \quad \frac{\text{tr.}\,e\,d\,f}{\text{tr.}\,a\,d\,e} < \frac{\text{tr.}\,e\,d\,f}{\text{sett.}\,h\,d\,e}$$

dalle quali risulta

$$\frac{\text{tr.}\,e\,d\,f}{\text{tr.}\,a\,d\,e} < \frac{\text{sett.}\,e\,c\,d}{\text{sett.}\,h\,d\,e}$$

e quindi anche

$$\frac{e\,f}{a\,e} < \frac{\text{ar.}\,e\,c}{\text{ar.}\,h\,e} \quad \text{ossia} \quad \frac{e\,f}{a\,e} < \frac{\text{ang.}\,e\,d\,c}{\text{ang.}\,a\,d\,e}.$$

Da questa, componendo, si ha

$$\frac{a\,f}{a\,e} < \frac{\text{ang.}\,a\,d\,f}{\text{ang.}\,a\,d\,e}$$

e raddoppiando

$$\frac{a\,g}{a\,e} < \frac{\text{ang.}\,a\,d\,g}{\text{ang.}\,a\,d\,e}$$

e quindi

$$\frac{a\,g - a\,e}{a\,e} < \frac{\text{ang.}\,a\,d\,g - \text{ang.}\,a\,d\,e}{\text{ang.}\,a\,d\,e}$$

ossia

$$\frac{g\,e}{a\,e} < \frac{\text{ang.}\,g\,d\,e}{\text{ang.}\,a\,d\,e};$$

ma il primo rapporto è eguale a $\frac{b\,g}{a\,b}$, per essere $b\,e$ bisettrice dell'angolo $a\,b\,g$, e il secondo rapporto è eguale ad $\frac{\text{ar.}\,b\,g}{\text{ar.}\,a\,b}$, e in conseguenza sarà

$$\frac{\text{corda}\;b\,g}{\text{corda}\;a\,b} < \frac{\text{ar.}\,b\,g}{\text{ar.}\,a\,b}.$$

4. Non mi sembra fuor di luogo il rammentare come Tolemeo si sia giovato di questo teorema pel calcolo della corda di 1°.

Applicandolo agli archi di 45′, 1°, 1° 30′ si ha

$$\frac{\text{corda}\;1^\circ}{\text{corda}\;45'} < \frac{4}{3}, \quad \frac{\text{corda}\;1^\circ\,30'}{\text{corda}\;1^\circ} < \frac{3}{2}$$

ossia

$$\frac{2}{3}\text{ corda } 1^\circ\,30' < \text{corda } 1^\circ < \frac{4}{3}\text{ corda } 45'.$$

Ora Tolemeo, che divideva il raggio in 60 *gradi*, il grado in 60 *minuti*, il minuto in 60 *secondi* e il secondo in 60 *terzi*, aveva trovato

$$\text{corda } 45' = 0 \text{ gradi } 47 \text{ minuti } 7 \text{ secondi},$$
$$\text{corda } 1^\circ\,30' = 1 \text{ grado } 34 \text{ minuti } 14 \text{ secondi},$$

epperciò ricava

$$\text{corda } 1^\circ = 1 \text{ grado } 2 \text{ minuti } 49 \text{ secondi } 20 \text{ terzi}$$

il quale valore corrisponde a 0,0174506 che è approssimato a meno di $\frac{24}{10^7}$.

Ma colle limitazioni

$$\text{corda } 45' = 2 \text{ sen } 22'\,30'' < 0{,}01309$$
$$\text{corda } 1^\circ\,30' = 2 \text{ sen } 45' > 0{,}026179$$

si trova

$$\text{corda } 1^\circ < \frac{4}{3}\text{ corda } 45' < 0{,}0174534$$

$$\text{corda } 1^\circ > \frac{2}{3}\text{ corda } 1^\circ\,30' > 0{,}0174526$$

dalle quali risulta

$$\text{corda } 1^\circ = 0{,}0174530 \text{ a meno di } \frac{4}{10^7}.$$

D. Besso.

## TEMI DI MATEMATICA

### PER LA LICENZA D'ISTITUTO TECNICO
### NELLA SEZIONE *FISICO-MATEMATICA*

(*Continuazione*)

Autunno 1879, II b). — *Trovare il numero totale di combinazioni che si possono fare con* n *oggetti, prendendoli successivamente ad* 1, 2, ..... n.

Risposta: $2^n - 1$.

Estate 1880, I) — *Conoscendo due lati* a *e* b *di un triangolo e la bisettrice* l *dell'angolo* C *da essi compreso, trovare le formole* *che determinano, per mezzo dei dati* a, b, l, *gli angoli* A, B, C *del triangolo, ed il terzo lato* c. *Calcolare con queste formole gli elementi ignoti del triangolo supponendo* $a = 3^m, 15$; $b = 2^m, 25$; $l = 1,^m 62$.

Chiamando $x$ ed $y$ i segmenti A D, D B che la bisettrice C D determina sul lato opposto A B, le equazioni dalle quali sono da ricavare $x, y$, per noti teoremi, saranno

$$a\,b = l^2 + xy, \quad a\,x = b\,y$$

onde $$x = +\sqrt{\frac{b}{a}(a\,b - l^2)}; \; y = +\sqrt{\frac{a}{b}(a\,b - l^2)}.$$

La prima condizione da soddisfare affinchè i valori di $x$ ed $y$ siano reali è che sia $a\,b \geqq l^2$. Il caso di $a\,b = l^2$ è evidentemente da trascurare, rimane da considerare quello in cui $a\,b > l^2$.

In questo caso si ha:

$$c = x + y = \sqrt{\frac{b}{a}(a\,b - l^2)} + \sqrt{\frac{a}{b}(a\,b - l^2)}$$

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}\,C = \sqrt{\frac{(x+y)^2 - (a-b)^2}{4\,a\,b}} = \frac{1}{2\,a\,b}\sqrt{4\,a^2\,b^2 - (a^2 + b^2)\,l^2}.$$

Perchè questa espressione sia reale occorre che si abbia $4\,a^2\,b^2 > (a^2 + b^2)\,l^2$, ciò che fornisce un'altra limitazione per $l$, ossia $l^2 < \frac{4\,a^2\,b^2}{a^2 + b^2}$.

Supponiamo ora che anche la seconda limitazione $l^2 < \frac{4\,a^2\,b^2}{a^2 + b^2}$, se è necessario, sia soddisfatta, è chiaro, dalla considerazione dei triangoli A D C, B D C, che si ha

$$\text{sen}\,A = \frac{l}{x}\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\,C = \frac{l}{2\,a\,b}\sqrt{\frac{4\,a^3\,b^2 - a\,(a^2 + b^2)\,l^2}{a\,b^2 - b\,l^2}}.$$

$$\text{sen}\,B = \frac{l}{y}\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\,C = \frac{l}{2\,a\,b}\sqrt{\frac{4\,a^2\,b^3 - b\,(a^2 + b^2)\,l^2}{a^2\,b - a\,l^2}}.$$

e i valori di sen A e sen B saranno reali come quelli di sen $\frac{1}{2}$ C, $x$ ed $y$.

Nel caso che sia $a = 3^m, 15$; $b = 2^m, 25$; $l = 1^m, 62$, le condizioni $a\,b > l^2$ e $\frac{4\,a^2\,b^2}{a^2 + b^2} > l^2$ vengono soddisfatte e dall'uso delle formole precedenti si ricava:

$$c = 3^m, 285; \; C = 103^\circ.46'.46''; \; A = 45^\circ.34'.8''.$$

Estate 1880, II). — *Trovare i quattro termini di una proporzione aritmetica, conoscendo il prodotto degli estremi, il prodotto* *dei medî e la somma delle quarte potenze dei quattro numeri. Applicare le formole generali al caso particolare in cui il prodotto degli estremi è* 104, *il prodotto dei medî è* 110, *e la somma delle quarte potenze dei quattro numeri è* 57298.

Chiamando $x$, $y$, $z$, $t$ i quattro termini della proporzione, $p_1$ il prodotto degli estremi, $p_2$ quello dei medî, $s$ la somma delle quarte potenze dei quattro termini, le equazioni del problema saranno:

$$y+z=x+t,\ xt=p_1,\ yz=p_2,\ x^4+y^4+z^4+t^4=s.$$

Quadrando la prima e aggiungendo ai due membri dell'ultima la quantità $2p_1^2+2p_2^2$, si ottengono le equazioni:

$$\mathrm{X}-\mathrm{Y}=2(p_1-p_2);\ \mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2=s+2(p_1^2+p_2^2),$$

dove si è posto X in luogo di $y^2+z^2$ ed Y in luogo di $x^2+t^2$. Da queste si ha: $\mathrm{X}+\mathrm{Y}=+\sqrt{2s+8p_1p_2}$, dovendo X + Y essere una quantità positiva. Quindi:

$$\mathrm{X}=p_1-p_2+\sqrt{\frac{s}{2}+2p_1p_2},\quad \mathrm{Y}=p_2-p_1+\sqrt{\frac{s}{2}+2p_1p_2}$$

e perciò:

$$y+z=\pm\sqrt{\mathrm{X}+2p_2}=x+t=\pm\sqrt{\mathrm{Y}+2p_1},$$

dove per le radici sono da prendersi contemporaneamente od i segni superiori o quelli inferiori.

Così per determinare $y$ e $z$, $x$ e $t$ si hanno da trovare le radici delle due equazioni di 2° grado:

$$\mathrm{Z}^2\mp\sqrt{\mathrm{X}+2p_2}\,.\,\mathrm{Z}+p_2=0,\quad \mathrm{Z}^2\mp\sqrt{\mathrm{Y}+2p_1}\,.\,\mathrm{Z}+p_1=0$$

le quali conducono, per le considerazioni precedenti relative ai segni dei radicali, alle due seguenti soluzioni del problema

$$\begin{array}{l|l}
x'=+\sqrt{\frac{\mathrm{Y}}{4}+\frac{p_1}{2}}+\sqrt{\frac{\mathrm{Y}}{4}-\frac{p_1}{2}} & x''=-\sqrt{\frac{\mathrm{Y}}{4}+\frac{p_1}{2}}+\sqrt{\frac{\mathrm{Y}}{4}-\frac{p_1}{2}} \\
y'=+\sqrt{\frac{\mathrm{X}}{4}+\frac{p_2}{2}}+\sqrt{\frac{\mathrm{X}}{4}-\frac{p_2}{2}} & y''=-\sqrt{\frac{\mathrm{X}}{4}+\frac{p_2}{2}}+\sqrt{\frac{\mathrm{X}}{4}-\frac{p_2}{2}} \\
z'=+\sqrt{\frac{\mathrm{X}}{4}+\frac{p_2}{2}}-\sqrt{\frac{\mathrm{X}}{4}-\frac{p_2}{2}} & z''=-\sqrt{\frac{\mathrm{X}}{4}+\frac{p_2}{2}}-\sqrt{\frac{\mathrm{X}}{4}-\frac{p_2}{2}} \\
t'=+\sqrt{\frac{\mathrm{Y}}{4}+\frac{p_1}{2}}-\sqrt{\frac{\mathrm{Y}}{4}-\frac{p_1}{2}} & t''=-\sqrt{\frac{\mathrm{Y}}{4}+\frac{p_1}{2}}-\sqrt{\frac{\mathrm{Y}}{4}-\frac{p_1}{2}}
\end{array}$$

ed a quelle che si ottengono da queste ponendo:

$x=t'$, $y=z'$, $z=y'$, $t=x'$; $x=t''$, $y=z''$, $z=y''$, $t=x''$

$x=x'$, $y=z'$, $z=y'$, $t=t'$; $x=x''$, $y=z''$, $z=y''$, $t=t''$

$x=t'$, $y=y'$, $z=z'$, $t=x'$; $x=t''$, $y=y''$, $z=z''$, $t=x''$.

È facile poi vedere che $\sqrt{\frac{X}{4}+\frac{p_2}{2}}=\sqrt{\frac{Y}{4}+\frac{p_1}{2}}$ e che si ha:

$$x'=-t'',\ y'=-z'',\ z'=-y'',\ t'=-x''.$$

Nel caso particolare di $p_1=104$, $p_2=110$, $s=57298$ le otto proporzioni che rispondono al quesito sono:

| | |
|---|---|
| 13 . 11 : 10 . 8 | — 8 . — 10 : — 11 . — 13 |
| 8 . 10 : 11 . 13 | — 13 . — 11 : — 10 . — 8 |
| 13 . 10 : 11 . 8 | — 8 . — 11 : — 10 . — 13 |
| 8 . 11 : 10 . 13 | — 13 . — 10 : — 11 . — 8. |

Autunno 1880, I). — *S'inscriva in un triangolo equilatero un circolo, in questo circolo un triangolo equilatero, in questo triangolo di nuovo un circolo, e così di seguito indefinitamente. — Qual'è la somma dei raggi di tutti questi circoli, quale la somma delle loro periferie, quale la somma delle loro superficie, quale la somma dei perimetri, e quale la somma delle aree di tutti i triangoli, escluso il triangolo proposto.*

*In secondo luogo trattare la stessa questione sostituendo sempre al triangolo equilatero un quadrato.*

Risposte: — Chiamando $a$ il lato del triangolo equilatero o del quadrato dato, si ha:

Somma raggi $=\frac{a}{\sqrt{3}}$; somma circonferenze $=\frac{2\pi a}{\sqrt{3}}$, somma aree circoli $=\frac{\pi a^2}{9}$. Somma perimetri triangoli $=3a=$ perimetro del dato triangolo, somma aree triangoli $=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=$ area triangolo primitivo.

Somma raggi inscritti nei quadrati $=\frac{a(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}$; somma circonferenze $=a\pi\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$; somma aree circoli $=\frac{\pi a^2}{3}$; somma perimetri quadrati $=4a\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$; somma aree quadrati $=a^2=$ area quadrato dato.

Autunno 1880, II). — *Una piramide regolare ha per base il poligono regolare di* m *lati inscritto nel cerchio di raggio* r, *e per apotema questo stesso raggio. Condotto pel centro della sfera inscritta nella piramide il piano parallelo alla base, trovare le formole che esprimono la superficie totale ed il volume del tronco di piramide e calcolarne i valori supponendo* m $=10$ *ed* r $=1$.

Si ha intanto con facilità:

lato base piramide $= 2\,r$ sen $\frac{180^\circ}{m}$, perimetro base $= 2\,m\,r$ sen $\frac{180^\circ}{m}$, apotema base $= r\cos\frac{180^\circ}{m}$, altezza piramide $=$ metà lato $= r$ sen $\frac{180^\circ}{m}$, area base $= \frac{mr^2}{2}$ sen $\frac{360^\circ}{m}$. Per determinare l'altezza del tronco della piramide e gli altri elementi necessari alla soluzione del problema, s'immagini una sezione della piramide ottenuta con un piano passante per l'asse e perpendicolare ad uno dei lati della base. Si avrà così un triangolo rettangolo (C D B) di cui uno dei cateti (B C) sarà l'altezza della piramide, l'altro cateto (B D) l'apotema della base, e l'ipotenusa (C D) l'apotema della piramide, per ipotesi $= r$. La sfera inscritta sarà intersecata dal piano di questo triangolo secondo una semicirconferenza tangente all'ipotenusa (D C) e ad uno dei cateti (B D) e avente il suo diametro sul cateto rimanente. La retta che congiunge il centro (A) del semicerchio col vertice opposto (D) del triangolo, sarà bisettrice dell'angolo (C D B) dei due apotemi, il quale angolo, com'è facile vedere, è uguale a $\frac{180^\circ}{m}$, talchè si avrà:

altezza tronco $=$ (A B) $= r\cos\frac{180^\circ}{m}\ \mathrm{tg}\,\frac{90^\circ}{m}$, altezza della piramide staccata $=$ (A C) $= r$ sen $\frac{180^\circ}{m} - r\cos\frac{180^\circ}{m}.\ \mathrm{tg}\,\frac{90^\circ}{m} = r\ \mathrm{tg}\,\frac{90^\circ}{m}$.

L'area della base superiore del tronco sarà quindi

$$= \left(\text{area base piramide} \times r^2\,\mathrm{tg}^2\frac{90^\circ}{m}\right) : r^2 \,\mathrm{sen}^2\frac{180^\circ}{m} = \frac{mr^2}{8}\,\frac{\mathrm{sen}\,\frac{360^\circ}{m}}{\cos^4\frac{90^\circ}{m}}.$$

L'apotema della piramide staccata (C E. Il punto E è sulla parallela a B D condotta pel centro A della sfera), si avrà facilmente osservando che è $=$ altezza piramide staccata (A C): seno dell'angolo formato dai due apotemi della piramide staccata $=$

$$= r\,\mathrm{tg}\,\frac{90^\circ}{m} : \mathrm{sen}\,\frac{180^\circ}{m} = \frac{r}{2}\,\frac{1}{\cos^2\frac{90^\circ}{m}}.$$

Quindi: apotema tronco $= r - \frac{r}{2}\,\frac{1}{\cos^2\frac{90^\circ}{m}} = \frac{r}{2}\cos\frac{180^\circ}{m}\,\frac{1}{\cos^2\frac{90^\circ}{m}}$.

Di più si ha:

lato base superiore tronco : lato base inferiore :: apotema piramide staccata (C E) : apotema piramide. Onde lato base superiore $= 2\,r \operatorname{sen} \frac{180^0}{m} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \frac{90^0}{m}} = 2\,r \operatorname{tg} \frac{90^0}{m}$, e, perimetro base superiore $= 2\,m\,r \operatorname{tg} \frac{90^0}{m}$.

Dopo ciò si hanno tutti gli elementi necessari per determinare la superficie totale ed il volume del tronco e si ricava:

$$\text{Sup. totale tronco} = \frac{m\,r^2}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{90^0}{m} + \operatorname{sen}\frac{180^0}{m}\right)\cos\frac{180^0}{m}\sec^2\frac{90^0}{m} + $$
$$+ \frac{m r^2}{2} \operatorname{sen} \frac{360^0}{m} + \frac{m r^2}{8} \operatorname{sen} \frac{360^0}{m} \sec^4 \frac{90^0}{m} =$$
$$= m\,r^2 \operatorname{tg} \frac{90^0}{m} \sec^2 \frac{90^0}{m} \cos \frac{180^0}{m} \left\{1 + \cos^2 \frac{90^0}{m} + 2 \cos^4 \frac{90^0}{m}\right\}.$$

$$\text{Vol. tronco} = \frac{m\,r^3}{6} \cos \frac{180^0}{m} \operatorname{tg} \frac{90^0}{m} \left\{\operatorname{sen} \frac{360^0}{m} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{360^0}{m} \sec^2 \frac{90^0}{m} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{360^0}{m} \sec^4 \frac{90^0}{m}\right\} =$$
$$= \frac{m\,r^3}{6} \operatorname{sen} \frac{90^0}{m} \operatorname{tg} \frac{90^0}{m} \cos^2 \frac{180^0}{m} \sec^3 \frac{90^0}{m} \left\{1 + 2 \cos^2 \frac{90^0}{m} + 4 \cos^4 \frac{90^0}{m}\right\}.$$

Nel caso speciale di $m = 10$ ed $r = 1$, la superficie totale ed il volume del tronco sono espressi dalle formole:

$$\text{Superficie} = 10 \operatorname{tg} 9^\circ \sec^2 9^\circ \cos 18^\circ \{1 + \cos^2 9^\circ + 2 \cos^4 9^\circ\},$$
$$\text{Volume} = \frac{5}{3} \operatorname{sen} 9^\circ \operatorname{tg} 9^\circ \cos^2 18^\circ \sec^3 9^\circ \{1 + 2 \cos^2 9^\circ + 4 \cos^4 9^\circ\}.$$

Eseguendo i calcoli si trova:

Superficie totale tronco $= 5{,}9756$ unità di superficie,
Volume tronco $= 0{,}268067$ unità di volume.

Del resto il caso speciale qui considerato può trattarsi indipendentemente dalle funzioni trigonometriche.

Difatti dalla considerazione del solito triangolo rettangolo (C D B), deducesi che uno de'suoi cateti (B D), uguale all'apotema del decagono regolare di base inferiore, è $\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 0{,}95016$, l'ipotenusa è $= 1$ e quindi l'altro cateto (C B), uguale all'altezza della piramide ed alla metà del lato della base, è $\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) = 0{,}30901$. Così l'altezza (A B) del tronco, data dalla proporzione (A B) : (B D) :: (C B) : (B D) + (D C), da cui $(A B) = \frac{(B D) \cdot (C B)}{(B D) + (D C)}$, sarà

$$\left\{\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)\right\} : \left\{\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 1\right\} =$$
$$= \frac{0{,}95016 \cdot 0{,}30901}{1{,}95016} = a \cdot 0{,}30901, \text{ avendo posto } a = \frac{0{,}95016}{1{,}95016}.$$

L'apotema (A E) della base superiore del tronco, data dalla proporzione (A E) : (D B) : : (C B) — (A B) : (C B) da cui

$$(\mathrm{A\,E}) = \frac{(\mathrm{D\,B})\,[(\mathrm{C\,B}) - (\mathrm{A\,B})]}{(\mathrm{C\,B})},$$ risulterà poi eguale a

$$\left(\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\left\{\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) - \text{altezza tronco}\right\}\right) : \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+1} = \frac{0{,}95016}{1{,}95016} = a.$$

Finalmente per avere l'apotema (D E) del tronco, basta osservare che questa è uguale al rapporto fra l'altezza del tronco e l'altezza della piramide (ciò risulta dalla proporzione (D E) : 1 :: (AB) : (B C)), onde essa sarà $= \frac{a\,.\,0{,}30901}{0{,}30901} = a =$ apotema base superiore.

Si è così in possesso di tutti gli elementi necessari alla spedita calcolazione aritmetica della superficie totale e del volume del tronco speciale di piramide considerato nell'enunciato.

Estate 1882, I). — *Trovare il valore delle formole:*

$$\frac{\cot A + \cot B + \cot C}{\cot A\,.\,\cot B\,.\,\cot C}, \quad \frac{\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C}{\cos A\,.\,\cos B\,.\,\cos C}$$

*quando* $A + B + C = 90^\circ$, *e il valore delle formole*

$$\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A\,.\operatorname{tg} B\,.\,\operatorname{tg} C}, \quad \frac{\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C}{\operatorname{sen} A\,.\,\operatorname{sen} B\,.\,\operatorname{sen} C}$$

*quando* $A + B + C = 180^\circ$.

Risposte: Quando $A + B + C = 90^\circ$, si ha:

$$\frac{\cot A + \cot B + \cot C}{\cot A\,.\,\cot B\,.\,\cot C} = 1, \quad \frac{\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C}{\cos A\,.\,\cos B\,.\,\cos C} = 4;$$

quando $A + B + C = 180^\circ$, si ha:

$$\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A\,.\,\operatorname{tg} B\,.\,\operatorname{tg} C} = 1, \quad \frac{\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C}{\operatorname{sen} A\,.\,\operatorname{sen} B\,.\,\operatorname{sen} C} = 4.$$

Estate 1882, II). — *Dati i raggi* a, b *di due cerchi che si toccano esternamente, trovare il valore del seno dell'angolo compreso tra le loro tangenti comuni.*

Chiamando $x$ l'angolo delle tangenti, si trova facilmente

$$\operatorname{sen} x = \frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}.$$

Questa formola può rendersi calcolabile per logaritmi col porre $\mathrm{tg}^2\,\varphi = \frac{b}{a}$, sicchè $\varphi$ è da calcolarsi mediante l'equazione

$$\log \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\log b - \log a}{2}.$$

Con questa posizione si trova:

$$\mathrm{sen}\, x = \frac{4\,(1 - \mathrm{tg}^2\varphi)\,\mathrm{tg}\,\varphi}{(1 + \mathrm{tg}^2\,\varphi)^2} = 4 \cos 2\,\varphi\, \mathrm{sen}\,\varphi \cos\varphi = \mathrm{sen}\, 4\,\varphi.$$

*(Continua).*

A. LUGLI.

# ESERCIZI PER LA SCUOLA

## Sulla misura del quadrato e sul teorema di Pitagora.

1. Si costruiscano due quadrati in modo che il lato dell'uno sia doppio di quello dell'altro. Quante volte il secondo quadrato è contenuto nel primo?

2. Si costruiscano due quadrati in modo che il lato dell'uno sia triplo di quello dell'altro. Quante volte il secondo quadrato è contenuto nel primo?

3. Si costruiscano due quadrati in modo che il lato del primo sia quadruplo di quello del secondo. Quante volte il secondo quadrato è contenuto nel primo?

4. Dato un quadrato, si costruisca un secondo quadrato col lato eguale a cinque volte il lato del primo, ed un terzo quadrato col lato eguale a sei volte quello del primo. Quante volte il primo quadrato è contenuto nel secondo? Quante volte è esso contenuto nel terzo?

5. Si costruiscano cinque quadrati in modo che il lato del primo sia contenuto sette volte in quello del secondo, otto volte in quello del terzo, nove volte in quello del quarto, e dieci volte in quello del quinto. Quante volte il primo quadrato è contenuto nel secondo? Quante volte è esso contenuto nel terzo? Quante volte nel quarto? Quante volte nel quinto?

6. Quanti decimetri quadrati sono contenuti nel metro quadrato? Quanti centimetri quadrati sono contenuti nel decimetro

quadrato? Che parte è il centimetro quadrato del metro quadrato?

7. Quanti metri quadrati sono contenuti in un decametro quadrato? Quanti in un chilometro quadrato? Che parte è il millimetro quadrato del metro quadrato?

8. Il lato d'un quadrato misura 1 metro e 47 centimetri. Quanti centimetri quadrati sono in esso contenuti?

9. Un quadrato contiene 144 metri quadrati. Qual'è la lunghezza del suo lato?

10. Se un quadrato contiene quarantanove volte la centesima parte d'un altro quadrato, e se il lato del secondo è diviso in dieci parti eguali, quante di esse saranno contenute nel lato del primo?

11. Provare che, se un quadrato contiene 47 decimetri quadrati, il suo lato dev'essere maggiore di 68 centimetri, ma minore di 69 centimetri.

12. Trovare due segmenti che differiscano d'un millimetro, e tali che il quadrato costruito sull'uno sia minore, e quello costruito sull'altro sia maggiore di 7 metri quadrati.

13. Costruito il quadrato quadruplo d'un quadrato dato, si conducano quelle diagonali dei quattro quadrati che uniscono i punti di mezzo dei suoi lati. Quale figura ne risulta?

14. Dato un quadrato, si costruisca un altro quadrato il quale sia doppio del primo.

15. Provare che, se un cateto d'un triangolo rettangolo isoscele è diviso in 1000 parti eguali, la sua ipotenusa è maggiore del segmento che ne contiene 1414, ma minore di quello che ne contiene 1415.

16. Nel quadrato che ha il lato eguale alla somma di due segmenti dati, si dispongano i quadrati che hanno per lati quei due segmenti, così che un angolo dell'uno e un angolo dell'altro sieno due angoli opposti, e si conducano le diagonali nei due rettangoli restanti.

17. Dimostrare che, dal quadrato che ha il lato eguale alla somma di due segmenti dati, si possono togliere quattro triangoli rettangoli eguali, coi cateti eguali a quei due segmenti, cosi che la figura restante sia un quadrato.

18. Dati due quadrati, costruire un terzo quadrato equivalente alla loro somma.

19. Dimostrare che, se un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 3 metri e l'altro cateto lungo 4 metri, la sua ipotenusa dev'essere lunga 5 metri.

20. Trovare la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti misurano rispettivamente 5 metri e 12 metri.

21. Se l'ipotenusa di un triangolo rettangolo è divisa in 25 parti eguali, e se uno dei cateti ne contiene 7, quante di esse saranno contenute nell'altro cateto?

22. Provare che, se il lato d'un triangolo equilatero è diviso in 100 parti eguali, la sua altezza è compresa fra due segmenti i quali contengono rispettivamente 86 e 87 di quelle parti.

23. Trovare due segmenti che differiscano di un millesimo di millimetro, e i quali comprendano l'altezza del triangolo equilatero che ha il lato di un metro.

24. Provare che, se due lati d'un triangolo misurano rispettivamente 33 decimetri e 56 decimetri, il terzo lato è minore o maggiore di 65 decimetri, secondo che l'angolo compreso fra quei due lati è acuto od ottuso.

25. Provare che, se i lati d'un triangolo sono misurati dai numeri 60, 91, 109, il raggio del circolo ad esso circoscritto è misurato dal numero $54 \frac{1}{2}$.

26. Dimostrare che, se i lati d'un triangolo sono misurati dai numeri 17, 25, 26, quel triangolo dev'essere acutangolo.

27. Condotta la perpendicolare al minor lato del triangolo considerato nel precedente esercizio, dal vertice dell'angolo ad esso opposto, si dimostri che la differenza dei numeri che misurano i quadrati dei due segmenti di quel lato è eguale a 51.

28. Trovare la misura di quell'altezza del triangolo, considerato nei due precedenti esercizi, che corrisponde al minore dei tre lati.

29. I tre lati d'un triangolo sono lunghi rispettivamente m. 125, m. 312 e m. 323: trovare la misura dell'altezza corrispondente al maggiore di essi.

30. Calcolare a meno di un millimetro la lunghezza di quel segmento che unisce il vertice del maggior angolo del triangolo, considerato nel precedente esercizio, col punto di mezzo del lato opposto.

D. Besso.

# SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 15, 16 e 17

**15.** *Dimostrare che il numero dei modi nei quali un intero positivo* n *può essere formato, per via di addizione, coi numeri 1, 2, 3, è dato dalla formola*

$$\frac{(n+3)^2}{12}+\frac{(-1)^n}{8}-\frac{7}{72}+\frac{2}{9}\cos\frac{2n\pi}{3}.$$

D. Besso.

Dimostrazione del Prof. *F. Viaggi*.

Vediamo da prima in quanti modi combinando per via d'addizione i numeri 1, 2 si possa ottenere il numero intero e positivo $n$. Se $h$ è il quoziente intero di $n$ diviso per 2, il numero 2 si potrà prendere $0, 1, 2, \ldots, h$ volte come addendo, e a ciascuna di tali scelte corrisponderà una soluzione del problema: il numero di soluzioni è dunque $h+1$, cioè $\frac{n+2}{2}$ o $\frac{n+1}{2}$ secondo che sia $n$ pari o dispari, e in tutti i casi

$$\frac{2n+3}{4}+\frac{(-1)^n}{4}\ldots\ldots(\alpha).$$

Ciò premesso, cerchiamo ora in quanti modi combinando per via d'addizione i numeri 1, 2, 3 si possa ottenere $n$. Se $h$, $r$ sono quoziente intero e resto della divisione di $n$ per 3, il numero 3 si potrà prendere $0, 1, 2, \ldots, h$ volte come addendo e a ciascuna di tali scelte corrispondono, in virtù di $(\alpha)$,

$$\frac{2n+3}{4}+\frac{(-1)^n}{4},\ \frac{2(n-3)+3}{4}+\frac{(-1)^{n-3}}{4},\ldots,\ \frac{2(n-3h)+3}{4}+\frac{(-1)^{n-3h}}{4}$$

soluzioni; e la somma delle precedenti frazioni è il numero domandato.

Ora, osservando che $n=3h+r$, si ha

$$\frac{2n+3}{4}+\frac{2(n-3)+3}{4}+\ldots+\frac{2(n-3h)+3}{4}=\frac{(2n-3h+3)(h+1)}{4}=$$
$$=\frac{(2n-3h+3)(3h+3)}{12}=\frac{(n+r+3)(n-r+3)}{12}=\frac{(n+3)^2}{12}-\frac{r^2}{12},$$

e inoltre

$$\frac{(-1)^{n-3h}}{4}+\ldots+\frac{(-1)^n}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(-1)^{n-3h}-(-1)^{n-3h+1}}{1-(-1)^3}=\frac{(-1)^r+(-1)^n}{8},$$

perciò il numero domandato è

$$\frac{(n+3)^2}{12}+\frac{(-1)^n}{8}+\frac{(-1)^r}{8}-\frac{r^2}{12}.$$

Ora, ponendo $r=0, 1, 2$ nella espressione $\frac{(-1)^r}{8}-\frac{r^2}{12}$, e contemporaneamente $n\equiv 0, 1, 2$ (mod. 3) nella $-\frac{7}{72}+\frac{2}{9}\cos\frac{2n\pi}{3}$, le due espressioni assumono gli stessi valori: resta così dimostrato il teorema.

**16.** *Dedurre il postulato delle parallele dalla proposizione: Il quadrato del numero che misura l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo è eguale alla somma dei quadrati dei numeri che misurano i due cateti.*

D. Besso.

Dimostrazione del Prof. *F. Viaggi.*

Dalla proposizione premessa si deducono corollari corrispondenti a quelli che derivano dal teorema di Pitagora, tra gli altri quello che fornisce la relazione tra le misure dei lati e d'una mediana: cioè in un triangolo A B C, se A O è mediana, si ha

$$AB^2 + AC^2 = 2AO^2 + 2BO^2.$$

Ora, se il triangolo proposto è rettangolo in A, si ha pure

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 = 4BO^2;$$

dunque $BO = OC = AO$, i triangoli O A B, O C A sono isosceli, e quindi gli angoli in B e C sono eguali rispettivamente a O A B, C A O e sono perciò complementari.

Si ottiene così, come corollario della proposizione premessa, che in un triangolo rettangolo gli angoli acuti sono complementari; e di qui si conchiude, con metodo noto, al postulato delle parallele. (Cf. Baltzer Plan. § 2, 7).

**17.** *Preso un punto sulla bisettrice di un angolo retto e condotto per questo punto una secante ai lati, determinare la posizione che deve avere la secante affinchè sia minima*

*1º la somma dei segmenti staccati dai lati dell'angolo a partire dal vertice,*

*2º la porzione della secante limitata ai lati,*

*3º l'area del triangolo formato dalla secante e dai lati dell'angolo.*

A. Lugli.

Soluzione del Prof. *Fosilo Montesano* (*).

1º. Sia D il punto scelto sulla bisettrice A D dell'angolo retto B A C e B C una secante condotta per D; si tiri D E parallela a B A e si ponga $DE = a$, sarà $AE = a$.

Dinotando con $x$ la lunghezza del segmento E C, dai triangoli equiangoli B A C, D E C si ricava:

$$BA : a :: a + x : x,$$

donde

$$BA = \frac{a(a+x)}{x} = \frac{a^2}{x} + a.$$

Dunque si tratta di determinare il valore di $x$ che rende minima la funzione $a + x + \frac{a^2}{x} + a$, o la somma delle quantità variabili $x$ ed $\frac{a^2}{x}$. Ma il prodotto $a^2$ di tali quantità è costante, perciò dev'essere

$$x = \frac{a^2}{x}$$

(*) Un' altra soluzione, non essenzialmente diversa, è stata inviata dal sig. Prof. *G. Riboni.*

da cui

$$x = \pm a.$$

Il valore $-a$ di $x$ che rende nulla la funzione $a + x + \frac{a^2}{x} + a$ risolve il quesito nel solo caso che il punto D coincida con A.

2°. Dal triangolo rettangolo B A C si ricava:

$$BC = \sqrt{(a+x)^2 + \frac{a^2(a+x)^2}{x^2}}$$

ossia

$$BC = \sqrt{2a^2 + 2ax + x^2 + \frac{a^4}{x^2} + \frac{2a^3}{x}}$$

perciò si deve trovare il valore di $x$ che rende minima la funzione $\frac{a^4}{x^2} + \frac{2a^3}{x} + x^2 + 2ax$, ovvero ciascuna delle somme $\frac{a^4}{x^2} + x^2$, $\frac{2a^3}{x} + 2ax$. Ma tanto la prima che la seconda somma è minima per $x = \pm a$, onde risulta minimo il valore di BC allorchè si prende $x = \pm a$.

Anche in questo caso il valore $-a$ di $x$ risolve il quesito quando il punto D coincide con A.

3°. L'area del triangolo B A C è data dall'espressione

$$\frac{a(a+x)^2}{2x} = \frac{a^3}{2x} + a^2 + \frac{ax}{2}$$

perciò essa sarà minima se tale sarà la somma $\frac{a^3}{2x} + \frac{ax}{2}$. Ma $\frac{a^3}{2x} \cdot \frac{ax}{2} = \frac{a^4}{4}$, perciò dev'essere

$$\frac{a^3}{2x} = \frac{ax}{2}$$

donde

$$x = \pm a.$$

Si può dunque dire che $x = \pm a$ è la condizione comune per il minimo; per conseguenza conducendo dal punto D la BC perpendicolare ad AD risulta minima non solo $BA + AC$, ma anche BC e l'area del tirangolo B A C.

---

**Errata-Corrige.** — A pag. 186 del vol. III, linea 2ª: « $a^\alpha + b^\alpha$ » va corretto in: « $a^n + b^n$ »; ed a linea 6ª: « $(n+1)^{ma}$ » va corretto in « $n^{ma}$ ».

---

## QUISTIONI PROPOSTE.

**20.** Provare che esistono due triangoli isosceli, e due soli, col perimetro di 8 metri e l'area di 2 metri quadrati, e calcolare la base di ciascuno di essi a meno di un millesimo di millimetro.

**21.** Sulle perpendicolari ad un piano dato, innalzate da due suoi punti A, A′, sono presi i segmenti $AB = 2a$, $A'B' = a$; è data la distanza $AA' = a\sqrt{2}$, ed è dato l'angolo acuto che una retta A R di quel piano forma colla A A′: trovare sulla A R un punto C tale che sia l'angolo B C A doppio dell'angolo B′ C A′.

D. Besso.

# RIVISTA BIBLIOGRAFICA

FERDINANDO ASCHIERI — *Geometria proiettiva.* — U. Hoepli, Milano, 1886. Prezzo L. 1,50.

Questo è il primo di quattro volumetti, inspirati ai moderni metodi geometrici (Manuali Hoepli) (*) pubblicati dal Prof. Aschieri, della R. Università di Pavia, e nel medesimo l'A., come avverte nella prefazione, si è principalmente proposto di svolgere quegli argomenti che riguardano i principii di geometria proiettiva, che fan parte dei programmi degli Istituti tecnici. Per questo rispetto e per il chiaro nome dell'A., pare a noi di grande interesse il tenere parola di quest'operetta.

Nella medesima trovansi svolte le principali teoriche costituenti un corso elementare di geometria proiettiva, non che i principii dell'Omografia e Reciprocità per le forme fondamentali di 2ª specie, per quanto abbisognano nelle nozioni elementari di geometria descrittiva, ed è mirabile come l'A. abbia saputo concentrare in così piccola mole tanta molteplicità d'argomenti.

Nei primi §§ l'A., accennato alle operazioni della geometria proiettiva, definisce le forme fondamentali di 1ª, 2ª e 3ª specie, mostrando come colle operazioni stesse si passi da una forma delle prime due specie ad una forma della medesima specie, e come dai due differenti modi di generazione delle forme di 2ª e 3ª specie scaturisca il principio di dualità, riguardo al quale riporta alcune proposizioni correlative fondamentali. Passa poi a definire e studiare le forme proiettive e prospettive ed a trattare dei sistemi omologici, che costruisce in alcuni casi particolari, considerando in seguito l'omologia armonica, l'affinità, la similitudine e la simmetria.

Nei §§ 6 e 7 l'A. svolge piuttosto ampiamente le condizioni d'omologia e prospettività dei sistemi piani e di proiettività di due forme fondamentali di 1ª specie ed i principii sulle forme armoniche. Nel seguente § egli tratta specialmente della determinazione di posizione degli elementi fondamentali di 1ª specie, giungendo all'importante proposizione — " Gli elementi di una forma fondamentale di 1ª specie si ottengono tutti con costruzioni di forme armoniche a partire da tre elementi *(fondamentali)* presi ad arbitrio nella forma, e propriamente vi sono elementi *(razionali)* che si ottengono esattamente con un numero finito delle dette forme armoniche; vi sono invece elementi *(irrazionali)* che si ritengono determinati come elementi limiti di serie infinite di elementi ottenuti con costruzioni di forme armoniche a partire dagli elementi dati " — e ne deduce che se due di tali forme sovrapposte hanno tre elementi uniti sono congruenti, e che se due forme fondamentali di 1ª specie in corrispondenza univoca, sono tali che ad una forma armonica corrisponda

(*) I tre altri hanno per titolo: — *Geometria Descrittiva* — *Geometria analitica del piano* — *Geometria analitica dello spazio.*

una forma armonica, le due forme sono proiettive. Nel medesimo § sono poi svolte le costruzioni fondamentali delle forme proiettive di prima specie nel piano.

Nel § 9 considera l'A. le forme fondamentali di 1ª specie in involuzione e nei due successivi le relazioni metriche della proiettività e della involuzione delle forme fondamentali di 1ª specie ed i rapporti anarmonici.

Nel § 12 trovansi brevemente sviluppate le proprietà proiettive del cerchio e in quello 13 le proprietà dei poligoni inscritti e circoscritti al cerchio che hanno nome da Pascal e Brianchon ed i corollari che ne conseguono. Nel § 14 è trattato il sistema polare di un cerchio e quivi trova luogo la considerazione delle figure polari reciproche rispetto al cerchio, ciò che conduce l'A. alla dimostrazione del principio di dualità nel piano, e del triangolo coniugato rispetto al cerchio.

Nel § 15 sono studiate le forme elementari di 2º ordine del piano, ossia le coniche, costruite come figure omologiche del cerchio, esaminando i casi di loro determinazione, e da loro son dedotte mediante proiezione le forme elementari del 2º ordine della stella.

I §§ 16 e 17 sono i corrispondenti dei §§ 13 e 14, però riguardo alle coniche e il § 18 è un accenno alle quadriche gobbe.

Negli ultimi tre paragrafi finalmente l'A. tratta delle forme fondamentali reciproche mostrando quante siano le coppie di elementi corrispondenti sufficienti a determinarle e quali le condizioni da soddisfare affinchè due sistemi piani, od un sistema piano ed una stella, o due stelle siano proiettive o reciproche. Avendo particolare riguardo ai sistemi piani proiettivi sovrapposti, studia le particolarità inerenti ai loro elementi uniti ed alla loro corrispondenza involutoria. Insegna quindi a risolvere in modo generale il problema di costruire gli elementi uniti nelle forme elementari proiettive sovrapposte e in ultimo risolve alcuni problemi di 2º grado seguendo il metodo geometrico detto di falsa posizione.

La trattazione di tutti questi argomenti è, in generale, e necessariamente, atteso alle piccole proporzioni dei Manuali Hoepli, molto sommaria, tanto che un alunno delle nostre scuole medie vi si potrebbe difficilmente orizzontare senza l'aiuto del maestro, ma col sussidio di questo ha nel libro del Prof. Aschieri un valido ausiliario per procacciarsi buona messe di utili cognizioni in materia di geometria di posizione.

Egli è certo che disponendo di maggiore spazio l'A. avrebbe potuto, con vantaggio grande dei discenti, aggiungere in alcuni punti maggiori dettagli atti a meglio chiarire le successive teoriche. Così, ad es., riguardo alle forme fondamentali di 1ª specie in involuzione sarebbe tornato utile esplicare vieppiù perchè in due forme di tal specie proiettive sovrapposte, se ad un elemento, riguardato come appartenente all'una e poi all'altra, corrisponde lo stesso elemento, questa proprietà abbia luogo per tutti gli elementi delle due forme; e laddove egli insegna a costruire le forme proiettive di 1ª specie nel piano, era utile aggiungere, dopo le costruzioni del § 8 n. 8, *c)*, atteso alla loro importanza, gli enunciati dei teoremi a cui esse danno origine e da cui derivano quelli di Pascal e Brianchon (*). Queste e alcune altre aggiunte avrebbero forse accresciuto l'importanza didattica del libro, non certo il suo valore scientifico.

Insegnanti ed allievi, de' nostri Istituti tecnici, saranno sicuramente grati a chi abbandonate per un istante le regioni elevate della scienza ha voluto vivere alcun poco nel loro ambito redigendo il pregiato volumetto di cui ci siamo occupati.

A. Lugli.

---

## PUBBLICAZONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO.

*Giornale di Matematiche* ad uso degli studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del professore G. Battaglini. Vol. XXVI. Novembre-Dicembre. Napoli, 1888.

*Journal de Mathématiques élémentaires* à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. de Longchamps, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, Lucien Lévy, agrégé des sciences mathématiques, directeur des études à l'Ecole preparatoire de Saint-Barbe. 3ᵉ Serie, Treizième année. N. 1, Janvier 1889, Paris.

*Journal de Mathématiques élémentaires* publié par H. Vuibert. 13ᵉ année. N. 7, 8, Paris. M. Nony et Cᶦᵉ, 17 Rue des Écoles, 1889.

*Jornal de sciencias mathematicas e astronomica* publicado pelo Dʳ F. Gomes Teixeira professor na Academia Polytechnica do Porto. Vol. VIII, n. 5 e 6. Coimbra, 1889.

*Le Scuole secondarie,* eco dell'Associazione nazionale fra gli insegnanti delle Scuole secondarie. Anno VI, n. 5 e 6. Milano, 1889.

*Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche.* (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2ª, Vol. 2, Fasc. 12. Dicembre, 1889.

*Rivista Scientifico-industriale* compilata da Guido Vimercati. Anno XX, n. 22-24. Firenze, 1888.

Bertini (E.) — Sulle curve fondamentali dei sistemi lineari di curve piane algebriche (Rend. Circolo mat. Palermo, 1888). — Aggiunta alla precedente memoria. Pavia, 1888.

Guccia (G. B.) — Sur l'intersection de deux courbes algébriques en un points singulier. — Théorème général concernant les courbes algébriques planes. (Comptes-Rendus Séances Académie des Sciences, 1888).

Jung (G.) — Sul numero delle *curve degeneri* contenute in un fascio di genere qualunque. — Sull'*eccesso* degli elementi fondamentali di un sistema lineare di genere qualunque. (Rend. R. Istituto lombardo).

Neuberg (J.) — Sur les triangles équibrocardiens. (Bulletin Association Française Avancement des Sciences).

Padova (E.) — Sulla teoria delle coordinate curvilinee. (Rend. R. Accademia Lincei, 1888).

Pascal (E.) — Sopra le relazioni che possono sussistere identicamente fra formazioni simboliche del tipo invariantivo nella teoria generale delle forme algebriche. (Atti. R. Accademia Lincei, 1888).

Riccò (A.) — Immagine deformata del sole riflesso sul mare e dipendenza della medesima dalla rotondità della terra. (Rend. R. Accademia Lincei, 1888).

Tonelli (A.) — Sopra una certa equazione differenziale a derivate parziali del 2º ordine. (Atti. R. Accademia Lincei, 1888). — Sopra una certa equazione a derivate parziali del 3º ordine (Rend. R. Accademia Lincei, 1888).

---

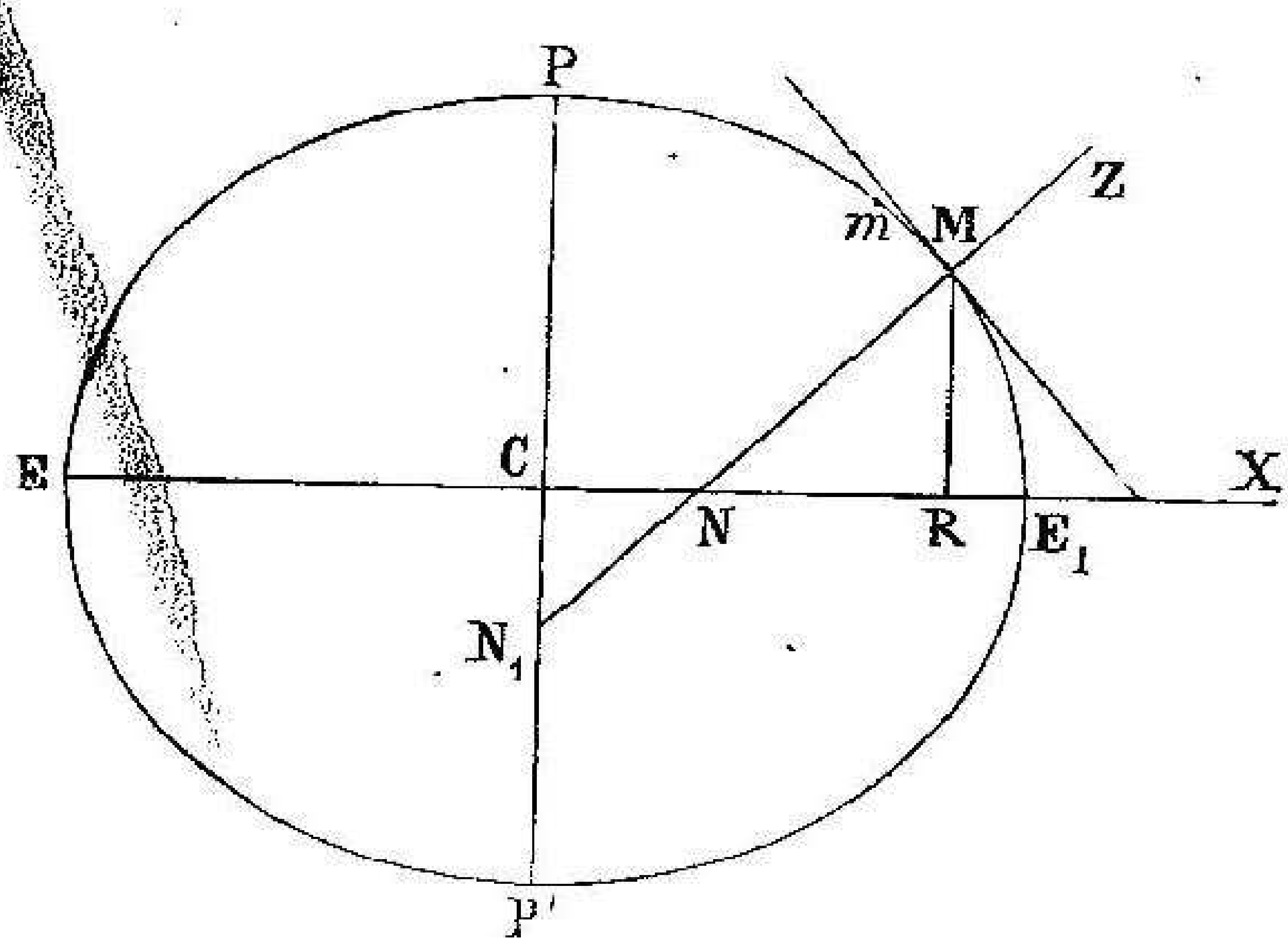
(*) Vedi a pag. 57 della maggior opera dello stesso A. — Lezioni di Geometria proiettiva. — U. Hoepli, Milano 1888.

# IL SISTEMA METRICO

## II.

Il cortese lettore, che mi ha fino a questo punto seguito, potrà ora leggere le poche cose di analisi che seguono; di queste ho bisogno per poter continuare nella mia narrazione. La esposizione di esse fu da me ridotta al puro necessario e nel modo che mi parve più acconcio, affinchè anche quel lettore, che per caso avesse dimenticato qualche principio algebrico, possa in brevi istanti richiamarselo alla memoria.

Nell'ellisse qui tracciata intendesi rappresentare una sezione meridiana della terra ritenuta un ellissoide di rotazione. P P' è l'asse minore ($2\,b$), E $E_1$ l'asse maggiore ($2\,a$), M un punto dell'ellisse meridiana, Z lo zenit di questo punto, C l'origine delle coordinate ortogonali,




$M\,R = y$, $C\,R = x$, $90° - M\,N\,X$ l'angolo che la tangente ad M forma coll'asse della X; $N_1\,N\,M$ la direzione della verticale, $M\,N\,R = \varphi =$ latitudine astronomica, M $m$ un arco di meridiano che riteniamo infinitesimo.

Detta E l'eccentricità dell'ellisse espressa nella stessa unità in cui sono espressi $a$ e $b$, poniamo $e\,a = E$, cioè $b^2 = a^2\,(1 - e^2)$ ed allora la ben nota equazione dell'ellisse, riferita al centro di un sistema di assi ortogonali, diviene

$$1) \qquad y^2 + (1 - e^2)\,x^2 = a^2\,(1 - e^2).$$

Questa, differenziata, dà

$$-\frac{dx}{dy}=\frac{y}{x(1-e^2)};$$

poichè

$$\operatorname{tang}(90^\circ-\varphi)=-\frac{dy}{dx}$$

si ha tosto

$$\operatorname{tang}^2\varphi=\frac{y^2}{x^2(1-e^2)^2}.$$

Sostituendo il valore di $y^2$ della formola 1) si ha

$$\operatorname{tang}^2\varphi=\frac{a^2-x^2}{x^2(1-e^2)}.$$

Risolta per $x$ dà

$$x=\frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi}}$$

e poi

$$y=\frac{a\operatorname{sen}\varphi(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

Differenziando queste ultime equazioni si ha:

$$dx=-d\varphi\cdot\frac{a(1-e^2)\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{(1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi)^3}}$$

$$dy=\quad d\varphi\cdot\frac{a(1-e^2)\cos\varphi}{\sqrt{(1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi)^3}}.$$

Poichè M $m$ è supposto un arco infinitesimo, si ha, ponendo M $m=ds$,

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2},$$

dunque

2) $$ds=d\varphi\cdot\frac{(1-e^2)a}{\sqrt{(1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi)^3}},$$

ma è ben noto che $\frac{ds}{d\varphi}=\mathrm{R}$ è il raggio di curvatura, dunque

3) $$\mathrm{R}=\frac{(1-e^2)a}{\sqrt{(1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi)^3}}.$$

Sieno ora $\varphi$, $\varphi_1$ i valori delle latitudini astronomiche di due punti sullo stesso meridiano; volendo conoscere la lunghezza dell'arco intercetto si riprenda la formola 2).

Il fattore di $d\varphi$ sviluppato in serie secondo il canone binomiale diventa:

$$(1-e^2)a(1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}=a(1-e^2)\Big[1+\frac{3}{2}e^2\operatorname{sen}^2\varphi+$$
$$+\frac{15}{8}e^4\operatorname{sen}^4\varphi+\frac{105}{48}e^6\operatorname{sen}^6\varphi+\ldots\Big]$$

Alle potenze dei seni si possono sostituire i coseni di archi multipli perchè

$$\text{sen}^2 \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2 \varphi$$

$$\text{sen}^4 \varphi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2 \varphi + \frac{1}{8} \cos 4 \varphi$$

$$\text{sen}^6 \varphi = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 2 \varphi + \frac{3}{16} \cos 4 \varphi - \frac{1}{32} \cos 6 \varphi .$$

Sostituendo nella precedente serie i valori ora scritti e ponendo:

$$\alpha = 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} e^2 + \frac{15}{8} \cdot \frac{3}{8} e^4 + \frac{105}{48} \cdot \frac{5}{16} e^6 \ldots.$$

$$\beta = \quad - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} e^2 - \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{2} e^4 - \frac{105}{48} \cdot \frac{15}{32} e^6 \ldots.$$

$$\gamma = \qquad \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{8} e^4 + \frac{105}{48} \cdot \frac{3}{16} e^6 \ldots.$$

$$\delta = \qquad - \frac{105}{48} \cdot \frac{1}{32} e^6 \ldots.$$

si ottiene

$$d s = d \varphi \times a (1 - e^2) [\alpha + \beta \cos 2 \varphi + \gamma \cos 4 \varphi + \delta \cos 6 \varphi \ldots.]$$

Integrando fra i limiti $\varphi$ e $\varphi_1$ si ottiene la lunghezza $\sigma$ dell'arco intercetto

$$\sigma = a (1 - e^2) \Big[ \alpha (\varphi - \varphi\ ) + \frac{1}{2} \beta (\text{sen}\, 2 \varphi - \text{sen}\, 2 \varphi_1) + \\ + \frac{1}{4} \gamma (\text{sen}\, 4 \varphi - \text{sen}\, 4 \varphi_1) + \frac{1}{6} \delta (\text{sen}\, 6 \varphi - \text{sen}\, 6 \varphi_1) \ldots \Big]$$

Limitandoci alla quarta potenza dell'eccentricità (più che sufficiente nel problema dell'unità di misura), dopo fatte le facilissime sostituzioni si ha

$$\sigma = a \left(1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4\right) [\varphi - \varphi_1] - a \left(\frac{3}{8} e^2 + \frac{3}{32} e^4\right) [\text{sen}\, 2 \varphi - \text{sen}\, 2 \varphi_1] \\ + \frac{15}{256} a\, e^4 [\text{sen}\, 4 \varphi - \text{sen}\, 4 \varphi_1].$$

È ben ovvio che nella formola precedente $\varphi - \varphi_1$ deve essere espresso in parti di raggio, e perciò, se $\varphi - \varphi_1$ è dato in gradi e frazioni decimali di grado (coll'errore massimo di $\frac{1}{2}$ unità del quinto ordine corrispondente al limite di precisione pratica nelle determinazioni astronomiche di $\varphi$) si avrà:

$$4) \qquad \sigma = a\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4\right)\frac{\pi}{180}[\varphi - \varphi_1] -$$
$$- a\left(\frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{32}e^4\right)[\text{sen } 2\,\varphi - \text{sen } 2\,\varphi_1] +$$
$$+ \frac{15}{256}\,a\,e^4\,[\text{sen } 4\,\varphi - \text{sen } 4\,\varphi_1].$$

Poniamo ora $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi = 90^\circ$, e la lunghezza del quarto di meridiano che chiamo $\Sigma$ diviene:

$$5) \qquad \Sigma = a\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4\right)\frac{\pi}{2}.$$

Dividendo la 4) per la 5), e risolvendo rispetto a $\Sigma$, abbiamo:

$$6) \quad \Sigma = \frac{90^\circ}{\varphi - \varphi_1}\,\sigma + \frac{90\,\Sigma}{\pi(\varphi - \varphi_1)}\left(\frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{4}e^4\right)\text{sen }(\varphi - \varphi_1)\cos(\varphi + \varphi_1) -$$
$$- \frac{1350\,\Sigma\,e^4}{64\,\pi\,(\varphi - \varphi_1)}\,\text{sen } 2\,(\varphi - \varphi_1)\cos 2\,(\varphi + \varphi_1)\ldots.$$

Su quest'ultima relazione importantissima dobbiamo dirigere la nostra attenzione. Il valore di $e$ deve essere conosciuto per altra via e diremo in qual modo: peraltro è imperioso far notare che se $\varphi + \varphi_1$ desse per somma $90^\circ$ il termine che contiene $e^2$ si annullerebbe rimanendo l'altro in $e^4$; e però con quella fortunata condizione anche una conoscenza approssimata di $e$ basterebbe allo scopo. Poi la risoluzione della 6) deve farsi col metodo delle approssimazioni successive.

Pongasi da prima $\sigma \dfrac{90^\circ}{\varphi - \varphi_1} = \Sigma_o$, quest'ultimo valore si introduca nel secondo e terzo termine, i quali calcolati coll'aggiunta del primo ci porgono un secondo valore di $\Sigma$, ecc., ecc.

Resta ora ad esporre in qual modo si possa avere colle misure geodesiche $e$. A tal uopo ripigliamo l'equazione 3), che dà il raggio di curvatura

$$3) \qquad R = \frac{(1 - e^2)\,a}{\sqrt{(1 - e^2\,\text{sen}^2\,\varphi)^3}}.$$

Per una piccola estensione, per es., per un'ampiezza di circa 1°, l'arco del cerchio osculante si confonde col corrispondente arco di ellisse meridiana.

Sia $s$ la lunghezza misurata fra $\varphi$ e $\varphi_1$ poco differenti di 1° e ridotta con una proporzione ad un grado, e sia $\Phi$ la latitudine intermedia $\left(\frac{\varphi + \varphi_1}{2}\right)$. È ben ovvio che

$$s = \frac{\pi}{180} \cdot R$$

cioè
$$s = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{(1-e^2)\,a}{\sqrt{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \Phi)^3}}.$$

Un'altra misura ridotta ad un grado in latitudine diversa (verso il polo e verso l'equatore) darà
$$s_1 = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{(1-e^2)\,a}{\sqrt{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \Phi_1)^3}}.$$
Dividendo $s_1$ per $s$ avremo
$$\sqrt[3]{\left(\frac{s'}{s}\right)^2} = \frac{1-e^2 \operatorname{sen}^2 \Phi}{1-e^2 \operatorname{sen}^2 \Phi_1}$$
e ponendo
$$4') \qquad \Gamma = \sqrt[3]{\left(\frac{s'}{s}\right)^2}$$
che è quantità data dalle misure nelle latitudini già determinate, si ha:
$$5_1) \qquad e^2 = \frac{1-\Gamma}{\operatorname{sen}^2 \Phi - \Gamma \operatorname{sen}^2 \Phi_1}.$$

Ripigliamo ora la nostra narrazione.

L'arco Lappone e quello del Perù, sostituiti nella formola 4'), avrebbero dato la $5_1$), cioè l'eccentricità, con sufficiente approssimazione; di quella, come vedemmo, abbiamo bisogno per il calcolo della 6).

Ma la 6), come abbiamo fatto notare, contiene il fatto prezioso che se $\varphi + \varphi' = 90°$, il quarto del meridiano è dato da
$$\Sigma = \frac{90}{\varphi - \varphi_1}\,\sigma - \Delta\Sigma$$
essendo $\Delta\Sigma$ un piccolo termine dipendente solo dalla quarta potenza dell'eccentricità.

Se le misure, dunque, affidate alla cura di Delambre e di Mechain, si estendevano da Dunkerque a Barcellona, $\varphi + \varphi'$ era $92°\,24',9$; che se invece l'estremo Sud si portava a Formentera nelle Baleari, $\varphi + \varphi^1$ diventava $89°\,42',1$, quantità così vicina a $90°$ che l'inesatta nozione di $e$ non metteva certo pensiero. Di qui le cure, gli affanni, i pericoli e la morte di Mechain sul territorio spagnuolo, intento, anche dopo fissata la costante metrica, fino all'ultima ora a congiungere la costa di Spagna colle Baleari, congiungimento felice ed ammirabile che fecero più tardi Biot ed Arago in mezzo alle miserie del blocco continentale, dei pirati e della subdola guerra di Spagna.

Il programma, che dovevano compiere Delambre e Mechain, era quello di rimisurare l'arco Cassiniano fra Dunkerque e Montjoui, cioè fra 51° 2′ e 41° 22′ per mezzo di due basi e di una catena di oltre cento triangoli, colla condizione che le due basi dovessero reciprocamente verificarsi e coll'aggiunta delle determinazioni delle latitudini estreme ed anche intermedie, programma che si attuava con istrumenti nuovi e precisi usciti dagli ingegni di Borda e di Lenoir.

Qui dovrebbesi, per una narrazione meno incompleta dell'argomento, entrare sulla parte fisico-astronomica della misura dell'arco del meridiano; se non che mi astengo di farlo per l'indole del periodico dove trova posto questo scritto, ed anche perchè il cortese lettore può consultare l'opera dell'illustre Marinelli, *La terra*, e colà leggere, nel primo volume, una mia appendice proprio su questo argomento, che qui ometto.

Narrare ne' suoi minuti particolari in qual modo ammirabile ed in mezzo a quali pericoli i due illustri uomini compirono il loro mandato, dire della efferatezza da un lato, del coraggio dall'altro in epoca così tempestosa, sarebbe fuor di dubbio tema interessante, ma esso mi obbligherebbe a una quantità di premesse storiche qui fuor di proposito.

Dopo il 20 giugno 1792 fino al 28 luglio 1794, giorno della morte di Robespierre, la Francia entrò in quella fase fatale e ad un tempo grandiosa della Rivoluzione. La seconda Assemblea Nazionale prese il nome dapprima d'Assemblea Legislativa e poi di Convenzione Nazionale, nella quale padroneggiavano i Giacobini; da questo momento il despota della Francia è il Comitato di Salute Pubblica. Le passioni popolari si scatenarono, il sospetto divenne il sentimento universale, caddero teste regali, teste sacre, teste illustri, e per parlare dei nostri sparvero Lavoisier, Condorcet, Bailly violentemente; cadde Meusnier all' assedio di Magonza; muore più tardi Borda di morte naturale, ma in giovane età.

Carnot, del Comitato di Salute Pubblica, quantunque impieghi il formidabile suo genio a far trionfare la Francia contro i nemici proprio nel momento più terribile della sua rivoluzione, esercita nella posizione in cui si trova benefiche influenze a proteggere di fronte agli energumeni suoi colleghi i dotti, la scienza, la impresa dell'arco di meridiano.

Uno scrittore francese, il Fonvielle, ha narrato con efficacia drammatica appunto le vicende di Delambre e di Mechain durante i loro lavori, i quali vennero finalmente condotti a compimento per l'arco Dunkerque-Montjoui sotto il Direttorio e quando la meravigliosa campagna del 1796 e la spedizione di Egitto avevano rialzato dinanzi il mondo il prestigio di Francia.

L'arco di Francia e Spagna e quello di 60 anni prima del Perù fornirono alla Commissione metrica il valore di $e$ con sufficiente approssimazione. Si ebbe $\frac{a-b}{a}=\alpha=\frac{1}{334}$, e quindi

$$e=\sqrt{2\,\alpha-\alpha^2}=0.077324$$

$$\lg e^2=7.776629$$

$$\lg e^4=5.553258.$$

La lunghezza dell'arco misurato fra Dunkerque e Montjoui, espressa in tese, ridotta al livello del mare risultò di

$$551583.6=\sigma.$$

La latitudine di Dunkerque risultò a Delambre di

$$51^\circ\, 2'\, 10''.\,5=\varphi,$$

quella di Montjoui fu determinata da Mechain ed ebbe

$$41^\circ\, 21'\, 44''.\,9=\varphi_1\ (*).$$

Le latitudini posteriormente assunte da Delambre sono un pochino diverse; quelle ora scritte danno $\varphi-\varphi_1$ indentico a quello usato nel calcolo classico.

$$\varphi+\varphi_1=92^\circ\, 23'\, 55''.\,4$$

$$\varphi-\varphi_1=\ 9^\circ\, 50'\, 25''.\,6$$

$$\lg\frac{90^\circ}{\varphi-\varphi^1}=\ 0.9686464$$

$$\lg\sigma=\ 5.7416113$$

$$\lg\left(\frac{90^\circ}{\varphi-\varphi_1}\,\sigma\right)=\ 6.7102577$$

$$\frac{90^\circ}{\varphi-\varphi_1}\,\sigma=\ 5131660.0=\Sigma\, a$$

$$\lg\,[\text{sen}\,(\varphi-\varphi_1)\cos\,(\varphi+\varphi_1)]=7.8471348\ n$$

(*) *NB.* I valori di $\varphi$ e $\varphi_1$ vennero più volte leggermente modificati durante l'epoca intera dei lavori. (Cfr. Delambre, *Base del sistema metrico*).

$$\lg\left[\operatorname{sen} 2(\varphi - \varphi_1)\cos 2(\varphi + \varphi_1)\right] = 9.5186954\, n$$

$$\lg\left(\frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{4}e^4\right) = 7.954016\ldots; \quad \lg\frac{90}{\pi(\varphi - \varphi_1)} = 0.4712933$$

$$\lg\frac{1350\, e^4}{64\,\pi(\varphi - \varphi_1)} = 5.394463\ldots$$

Il calcolo nel 2$^{do}$ e 3$^{zo}$ termine del secondo membro della 6) usando $\Sigma_a$ in luogo di $\Sigma$ mi diede $-960.95$; $+42.02$, donde un più esatto valore di $\Sigma_a$ è 5130741, che non si modifica che di un decimo di tesa usandolo come nuovo valore approssimato: dunque $\Sigma = 5130741$ tese del Perù a $t_c\, 16\frac{1}{4}$.

Laplace (Méc. Cél., lib. III, pag. 155, ultima ed.) dà 5130740, quindi il calcolo precedente è in accordo col risultato storico.

$\frac{1}{10\,000\,000}$ di $5130741^{te}$ è $0^{te}.5130741$ cioè $0^{te}$ $3^{pi}$ $0^{po}$ $11^{li}.296$.

È assai interessante porre in evidenza la precisione colla quale avrebbero dovuto osservare e misurare Delambre e Mechain affinchè il valore del metro fosse esatto, per es., al mezzo decimo di millimetro. Supposto che $\varphi + \varphi_1$ fosse stato 90° e che l'eccentricità usata nulla avesse influito (come quasi fu veramente) sul termine che contiene $e^4$, si tratta di differenziare l'espressione $\Sigma = \frac{90^\circ}{\varphi - \varphi_1}\,\sigma$. Esprimendo in primi d'arco si ha

$$d\Sigma = 9.3\, d\sigma - 9.3\, d\varphi \cdot \frac{\sigma}{580}.$$

Sostituendo per $\sigma$ l'arco misurato e esprimendo l'errore $d_\varphi$ in $1''$ si ha

$$d\Sigma = 9.3\, d\sigma - \frac{9.3}{60}\cdot\frac{551584^{te}}{580}\cdot d\varphi$$

$$d\Sigma = 9.3\, d\sigma - 147.4\, d\varphi.$$

Or dunque, perchè il metro avesse l'errore soltanto di mm 0.05 e non più, conveniva che $\Sigma$ non errasse più di metri 500, cioè tese 256.5. Il massimo, dunque, errore tollerabile in $d\Sigma$ era nella nostra ipotesi tese 256.5: e però l'errore dell'arco Dunkerque-Montjoui non doveva oltrepassare 28 tese nella supposizione ben improbabile che $d\varphi$ fosse zero. E supposto invece $d\sigma$ zero, $d\varphi$, cioè l'errore nella differenza $\varphi - \varphi_1$, non doveva eccedere $1''.7$; ma, a parte le deviazioni della gravità, all'epoca della unificazione dei pesi e delle misure non si era sicuri di raggiungere precisione simile nelle determinazioni delle latitudini.

Il 4 messidoro, anno VII, davanti i poteri riuniti nella sala dei 500, una deputazione dell'Istituto di Francia, allora riorganizzato, informò dei lavori compiuti dalla Commissione dei pesi e delle misure, e presentò i prototipi che rappresentavano la grande opera compiuta. Una sbarra di platino costruita da Borda, alla temperatura del ghiaccio che si fonde, lunga $3^{pi}\ 0^{po}\ 11^{li}.296$ della tesa del Perù alla temperatura di $16^{o}.25$ centigradi era il metro legale, il quale, col *placet* delle podestà legislative, veniva deposto negli Archivi di Stato.

Se il lettore volesse approfondire l'argomento dovrebbe consultare l'opera di Delambre prima citata, alcuni scritti di Legendre, la *Geodesia* di Puissant, le *Note Varie* di Lalande, ecc. Senonchè la tesa del Perù, *mater comunis*, e il metro, *filius suus*, potevano perire, perocchè un terremoto o lo folgore hanno podestà di annientare o di fondere, e peggio ancora (e lo sapeva bene il Direttorio) sovente gli uomini distruggono quelle cose che la folgore o il terremoto hanno risparmiato, con questo d'aggravante di fronte alla crudeltà delle forze naturali, che spesso si fanno apologisti della distruzione.

E però Borda aveva già determinata la lunghezza del pendolo che batte il secondo medio a Parigi, e aveva apparecchiato le sbarre di platino per le eventuali esperienze future. La sagacia umana si era premunita anche per i casi più improbabili.

Il Governo della Repubblica ordinava che a partire dal 21 vendemmiale, anno VIII, il litro fosse l'unità di misura per i liquidi, restando abolite le misure antiche.

Benchè il metro fosse trovato, il programma scientifico della misura dell'arco di meridiano fu continuato da Mechain sotto gli auspicii di Bonaparte (1769?-1821), poco prima che divenisse imperatore; ma ahimè! Mechain nello zelo del lavoro per il congiungimento de' suoi triangoli di Spagna colle isole Baleari non cura un primo attacco di febbre gialla, e al secondo muore nelle braccia del barone di Puebla alla Plana, dove ancor oggi dorme il sonno eterno, martire del dovere.

Una interruzione lunghissima ne' lavori di compimento è prodotta dalla morte di Mechain. Quando Napoleone I trionfava a Jena e annientava la Prussia, l'Ufficio delle longitudini ordinava a Biot e ad Arago di tentare l'ammirabile congiungimento dei triangoli spagnuoli colle Baleari. Qui non è il caso di narrare le nuove peripezie che le ostilità colla Spagna, i pirati e il blocco apparecchiarono al giovane Arago: diremo soltanto che il congiungimento fu fatto, e l'arco Cassiniano si estese da Dunkerque a Formentera, poi da Greenwich a Formentera.

Se la Commissione del metro avesse atteso di possedere la lunghezza dell'arco completo, Greenwich-Formentera, i risultati sulla lunghezza unitaria sarebbero stati un po' più concordanti col vero.

Con $\varphi$ (Greenwich) $51^\circ 28' 40''.0$ e $\varphi'$ (Formentera) $38^\circ 39' 56''.11$ (uso i costanti che si ottennero in principio del secolo), con $a = 730431{,}3$ tese del Perù, con $e^2 = 0.006166$ si ottiene

$$\Sigma = 5130942 = 3^{pi}\, 0^{po}\, 11^{li}.313$$

in eccesso sul risultato dato da Laplace di $0^{li}.017$.

I lavori geodesici assunsero nel nostro secolo uno slancio ed una precisione non prevedibili. Presto si dimostrò che i circoli ripetitori, usati da Delambre e Mechain, quantunque ammirabili, potevano benissimo dare le latitudini estreme coll'errore di qualche secondo d'arco e così pure gli angoli dei triangoli geodesici; fu messo bene in luce che le attrazioni locali possono viziare le latitudini astronomiche modificando la direzione normale della gravità. Grandi archi di meridiano si misurarono in più parti del mondo, sotto moltissimi paralleli si determinò la lunghezza del pendolo che batte i secondi, discussioni, approfondite mercè la teoria degli errori, condussero ai risultati moderni, che dalla verità potranno ancor discostarsi, ma di quantità estremamente piccole.

La scienza moderna riconosce che ben si apposero gli uomini celebri della Commissione del metro assumendo che i meridiani della terra avessero eccentricità costante, perocchè le attrazioni locali, spesse e svariatissime, vere intumescenze geodesiche, nulla tolgono all'insieme generale che il livello medio dei mari sia un ellissoide di rotazione. Soltanto il più probabile valore di $\Sigma$ nello stato attuale della scienza è $5131758 \pm$. L'errore quindi commesso dalla Commissione del metro fu di circa 1018 tese sulla lunghezza del quadrante, e però l'errore sul metro di $-0^{li}.088$.

Il metro, quando debba rappresentare $\frac{1}{10\,000\,000}$ del quarto del meridiano terrestre, deve essere lungo

$$0^{\text{tese}}\ 3^{\text{pi}}\ 0^{\text{po}}\ 11^{\text{li}}.384$$

della tesa del Perù a $16^{\circ}.\frac{1}{4}$ di $t_c$.

Se ora nella formola

$$d\Sigma = 9.3\, d\sigma - 147.4\, d\varphi$$

si sostituisce a $d\varphi$ l'errore commesso nell'arco $\varphi - \varphi^1$, supponendo che le posteriori determinazioni di $\varphi$ e di $\varphi_1$ lo abbiano veramente messo in evidenza, si ha $d\varphi = +2''.2$, e poichè $d\Sigma$ è $-1018$ tese, si ha $d\sigma = -75$.

Tale errore nella misura diretta è più che probabile, e però ci è lecito, fino ad un certo punto, di conchiudere che la deviazione de' livelli alle due teste dell'arco era o nulla o piccolissima, e perciò la massima parte dell'errore va attribuita alle determinazioni delle latitudini estreme.

La definizione di metro, che enunciasi nelle scuole, deve essere modificata nel seguente modo:

Il metro è l'unità di misura internazionale, il cui prototipo esiste nell'Archivio di Stato di Francia; esso differisce in meno dalla diecimilionesima parte d'un quarto del meridiano terrestre d'una quantità per gli usi civili evaniscente. Il prototipo è una sbarra di platino alla temperatura del ghiaccio fondentesi lunga

$$0^{\text{tese}}\quad 3^{\text{pi}}\quad 0^{\text{po}}\quad 11^{\text{li}}.296$$

la tesa essendo quella usata nelle misure del Perù supposta alla temperatura di $16^{\text{gr}}\frac{1}{4}$ centigradi.

Non varrebbe in verità la pena di mutare il prototipo in causa dell'errore $-0^{\text{li}}.088$, giacchè, qualora anche si facesse un prototipo esatto nello stato presente della scienza, pure a rigore di essa non sarebbe ancora $\frac{1}{10\,000\,000}$ del quarto del meridiano terrestre, giacchè, perchè lo fosse, sarebbe necessario che la terra fosse un ellissoide di rivoluzione, mentre il livello medio dei mari lo è soltanto approssimatamente, e poi bisognerebbe giurare in modo assoluto che i costanti moderni non abbiano ancora leggerissimamente a mutarsi e per la imperfezione delle misure e per la mutabilità, quanto lenta essa possa essere, della figura del nostro pianeta. In ogni modo e a titolo di curiosità diciamo che la sbarra di platino a 0°, perchè fosse $\frac{1}{10\,000\,000}$ del quarto del meridiano terrestre, dovrebbe essere lunga mm. 1000,20, in luogo di mm. 1000.

Non è fuori di proposito far osservare che immergendo il campione prototipo in un bagno a $+\,22^{\circ},5\ t.$, ritenuto che il coefficiente K per il platino sia 0.000008842, l'allungamento lineare è appunto circa mm. 0,2.

La Commissione internazionale del metro, riunitasi a Parigi nel 1872, neppure sollevò, a titolo di capriccio, la questione di mutare il prototipo, anzi, con decisione plenaria, deliberò che « Pour l'exécution du mètre international on prend comme point de départ le mètre des Archives dans l'état où il se trouve ».

Il metro prototipo di Borda non è diviso; ma il Comitato deliberò che i prototipi delle diverse nazioni, uguali in lunghezza al primitivo, fossero a tratti; che il metro internazionale avesse la lunghezza del metro tipo a 0° C.; che nella fabbricazione dei metri si dovesse impiegare una lega composta di 90 di platino e 10 di iridio. Deliberò ancora che le sbarre di platino iridiato, sulle quali debbonsi tracciare i 100 centimetri, debbono essere lunghe cm. 102. Riguardo poi al chilogramma fu deciso che il chilogramma internazionale sarebbe dedotto dal chilogramma prototipo degli Archivi. Come si stabilì per il metro, così si fece per il chilogramma, il quale deve essere di platino iridiato nello stesso rapporto di 90 a 10. La forma del chilogramma internazionale è identica a quella del prototipo degli Archivi, cioè un cilindro di cui l'altezza eguaglia il diametro e le periferie delle basi leggermente arrotondate.

Non credo necessario di più oltre trattenermi sulle deliberazioni della Commissione internazionale metrica, perocchè quel tanto che ho detto è sufficiente al mio compito. Non resta a desiderare che una sola cosa, cioè che tutto il mondo civile accetti per legge e nel fatto il monumento imperituro, che è gloria intangibile della Francia. Oggidì il sistema metrico è legalmente obbligatorio in Italia, nella Svizzera, nell'Olanda, nel Belgio, nella Danimarca, nella Svezia, ecc., ecc. In Inghilterra e negli

Stati Uniti l'uso è autorizzato per legge, ma lentamente il sistema metrico diverrà affatto universale, e la società umana proverà anche con questo fatto che, ad onta degli abusi sanguinosi di alcuni settari briachi, i beneficii morali, sociali e materiali che la Rivoluzione francese recò al mondo sono stelle lucide nella costellazione umana, alle quali sempre con reverenza dirigeranno gli sguardi i lontani nostri nepoti.

Dicembre 1888. R. Osservatorio del Collegio Romano.

E. Millosevich.

## Sopra i sistemi di Circoli aventi lo stesso asse radicale

### III.

1. Da un punto P′ (Tav. I, fig. 1ª e 2ª) si tiri una retta indefinita P′ Q′, e si segnino i punti Q′, N ove essa incôntra rispettivamente l'asse radicale e la linea dei centri del sistema dato. Da P′ si tiri ancora P′ R′ parallela alla linea dei centri e si prolunghi fino ad incontrare in R′ l'asse radicale. Detto P il centro del fascio corrispondente delle polari di P′ rispetto ai cerchi del sistema, e condotta PH parallela all'asse radicale, si prolunghi fino a segare nuovamente il cerchio (di centro C) che ha per diametro P′ P. La distanza di questo punto di intersezione della P H col cerchio ad H è eguale a R′ I. Quindi, ricordando che, quando si considera il caso della 2ª figura, la tangente condotta da H al circolo C è eguale ad H L, si avrà costantemente in ambedue i casi:

$$HP.IR' = HL.HL'.$$

Ora, osservando la prima figura, si vede che tanto il punto H cada dentro L L′, quanto cada fuori, si ha:

$$HL.HL' = IH^2 - IL^2,$$

mentre nella seconda figura si ha:

$$HL.HL' = IH^2 + IL^2;$$

quindi si comprendono ambedue i casi scrivendo:

$$HL.HL' = IH^2 \mp IL^2$$

e perciò:

$$IH^2 = HP \cdot IR' \pm IL^2.$$

E se $P_1$ è la proiezione di $P$ sull'asse radicale, sarà $P_1P = IH$; onde:

$$P_1P^2 = HP \cdot IR' \pm IL^2. \tag{4}$$

Ma dai triangoli simili $P'H'N$, $Q'IN$, essendo $IR' = H'P'$, si ricava:

$$IR' : IQ' = H'N : IN$$

e perchè:

$$H'N = IN - IH' = IN + P_1P,$$

si avrà:

$$IR' : IQ' = IN + P_1P : IN$$

cioè:

$$IR' = \frac{IQ'}{IN}(IN + P_1P).$$

Sostituendo quindi nella (4) per $IR'$ questo suo valore, avremo:

$$P_1P^2 = HP \cdot IQ' + \frac{IQ'}{IN} \cdot P_1P \cdot HP \pm IL^2. \tag{5}$$

Se dunque il punto $P'$ si muove sulla retta $QP'N$, il corrispondente $P$ descriverà una linea tale che le distanze rispettive di ogni suo punto dall'asse radicale e dalla linea dei centri del sistema verificano costantemente la relazione (5).

Senza stare ad investigare quale sia la definizione geometrica più semplice di questo luogo, si esamini subito il caso speciale in cui la retta data è la $P'R'$ parallela alla linea dei centri del sistema. In tal caso allora si deve manifestamente ritenere che $IR'$ è costante nella relazione (4):

$$P_1P^2 = IR' \cdot HP \pm IL^2.$$

Se $R$ è il centro del fascio di polari corrispondente ad $R'$, abbiamo visto che si ha:

$$IR' \cdot RI = \pm IL^2$$

a seconda che siamo nel caso contemplato dalla 1ª o dalla 2ª figura. Quindi si avrà in ambedue i casi:

$$P_1P^2 = IR' \cdot HP + IR' \cdot RI$$

e perciò:

$$P_1P^2 = IR' \cdot RP_1. \tag{6}$$

Se ora $P'$ si muove sopra $P'R'$ parallela ad $HI$, il segmento

$IR'$ essendo costante per ogni posizione di $P'$, ne viene che il corrispondente $R$ di $R'$ è un punto fisso. Perciò il centro $P$ del fascio delle polari di $P'$ rispetto ai circoli del sistema descrive una linea tale che il quadrato della perpendicolare condotta da ogni suo punto all'asse radicale del sistema è proporzionale alla distanza del suo piede ad un punto fisso dell'asse stesso. È noto che la linea che gode di tale proprietà è una parabola, il cui asse è l'asse radicale del sistema e il cui vertice è il punto fisso. Il parametro di questa parabola essendo $IR'$, la distanza del vertice dal fuoco sarà $\frac{1}{4}IR'$. Dunque: — « Se un punto scorre lungo una « retta parallela alla linea dei centri di un sistema di cerchi, il « centro del fascio corrispondente di polari rispetto a quei cerchi « descrive una parabola che ha per asse l'asse radicale del si- « stema, per vertice il centro del fascio di polari del punto ove « la retta data incontra l'asse, e per raggio vettore del fuoco la « quarta parte della distanza fra la linea dei centri e la retta « data » (Poncelet).

O altrimenti può anche dirsi: — « Se pei punti d'intersezione « dei cerchi di un sistema con una parallela alla loro linea dei « centri si conducono i rispettivi diametri, i nuovi estremi di « questi sono sopra una parabola. »

2. Se si indica con $V$ uno qualunque dei punti ove la parallela $P'R'$ alla linea dei centri è tagliata dalla corrispondente parabola, la posizione di detto punto verrà determinata dalla relazione (Fig. 1ª e 2ª):

$$R'V^2 = IR' \,.\, RR'.$$

Quindi, a seconda che siamo nel caso della prima o della 2ª figura, si avrà:

$$R'V^2 = IR'^2 + IL^2$$

oppure:

$$R'V^2 = IR'^2 - IL^2$$

e perciò nel primo caso è:

$$R'V = R'L;$$

nell'altro:

$$R'V^2 = R'L \,.\, R'L'.$$

Da ciò il teorema: — « La distanza del punto d'incontro di una « parallela alla linea dei centri di un sistema col suo asse radi- « cale a uno qualunque dei punti di intersezione di essa paral-

« lela colla parabola, luogo dei centri dei fasci di polari dei punti « situati su quella retta rispetto ai circoli del sistema, è eguale « al segmento che congiunge il nominato punto d'incontro a uno « dei punti limiti del sistema, se questo è composto di cerchi « che non si segano: nel caso opposto essa è media proporzio- « nale fra le distanze di quel punto ai punti comuni a tutti i « circoli del sistema. »

3. Se da V si conduce V G parallela all'asse radicale, essendo $VG = R'I$, si avrà nella prima figura:

$$GV^2 = R'V^2 - IL^2;$$

e nella seconda:

$$GV^2 = R'V^2 + IL^2.$$

E perciò osservando che $R'V = IG$, si avrà nell'un caso:

$$GV^2 = IG^2 - IL^2;$$

nell'altro

$$GV = GL.$$

Queste ultime relazioni provano che il circolo di centro G e raggio G V appartiene in ambedue i casi al sistema che si considera. Ora, siccome questo cerchio è tangente in V alla P′ R′, e due soli sono i cerchi del sistema che toccano la P′ R′, così si può concludere: — « La parabola, luogo dei centri dei fasci di polari dei punti situati sopra una parallela alla linea dei centri « di un sistema rispetto ai cerchi di esso, passa pei punti di con- « tatto di quella retta coi due cerchi del sistema che le sono « tangenti. »

Si prova facilmente che, qualunque sia l'inclinazione di una retta sulla linea dei centri d'un sistema, la distanza del suo punto d'incontro coll'asse radicale ai punti nei quali è toccata dai cerchi del sistema ad essa tangenti, è eguale al segmento che congiunge detto punto ad uno dei punti limiti, se il sistema risulta di cerchi che non si segano; altrimenti è media proporzionale fra le distanze di quel punto ai punti comuni a tutti i cerchi del sistema.

Dopo tale osservazione, il lettore potrà facilmente verificare che un teorema analogo a quello dimostrato ora per la parabola sussiste anche allorquando si considera il caso che la data retta abbia colla linea dei centri del sistema di cerchi una inclinazione qualunque.

Modica, agosto 1883.

L. Gianni.

# Alcune formole sulle somme delle potenze simili dei numeri naturali

Indico con $S^m(x)$ la somma delle potenze $m^e$ dei numeri naturali $1.2.3.\dots x$, e cioè pongo:

$$S^m(x) = 1^m + 2^m + \dots x^m$$

e la chiamo per brevità *somma di* x *d'ordine* m.

Comincio dal considerare il caso di $m = 1$.

Si ha:

$$S(a+b) = 1 + 2 + \dots a + (a+1) + (a+2) \dots (a+b) = \\ = S(a) + S(b) + ab. \qquad (1)$$

Ponendo nella precedente relazione $(b+c)$ in luogo di $b$, risulta:

$$S(a+b+c) = S(a) + S(b+c) + a(b+c) = \\ = S(a) + S(b) + S(c) + a(b+c) + bc$$

ed in generale:

$$S(a+b+c+\dots k+l) = S(a) + S(b) + \dots S(k) + S(l) + \\ + a(b+\dots k+l) + b(c+\dots k+l) + \dots + kl.$$

Ponendo $a = b = c = \dots = l$, le formole precedenti diventano:

$$S(2a) = 2S(a) + a^2$$
$$S(3a) = 3S(a) + (1+2)a^2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$S(ba) = bS(a) + S(b-1)a^2$$

ed osservando che $S(b-1) = S(b) - b$ e sostituendo si ha:

$$S(ba) = bS(a) + a^2 S(b) - a^2 b. \qquad (2)$$

Ponendo $bc$ in luogo di $b$ nella precedente relazione e sviluppando si ha:

$$S(abc) = bcS(a) + a^2 S(bc) - a^2 bc$$

e sviluppando $S(bc)$:

$$S(abc) = bcS(a) + a^2(cS(b) + b^2 S(c)) - a^2 \{bc(b+1)\}$$

similmente:

$$S(abcd) = bcd\,S(a) + a^2[cd\,S(b) + b^2\{d\,S(c) + c^2 S(d)\}] \\ - a^2[bcd\{bc + b + 1\}]$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

e la legge di formazione è manifesta.

Facendo $a = b = c = \ldots$, le precedenti relazioni diventano:

$$S(a^2) = (a + a^2)\,S(a) - a^3$$

$$S(a^3) = (a^2 + a^3 + a^4)\,S(a) - (a^5 + a^4) = a^2\,(S(a^2) + S(a) - a^2)$$

$$S(a^4) = (a^3 + a^4 + a^5 + a^6)\,S(a) - (a^7 + a^6 + a^5) = \\ = a^2\,(S(a^3) + a\,S(a) - a^3)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$S(a^n) = (a^{n-1} + a^n + \ldots a^{2n-2})\,S(a) - (a^{2n-1} + a^{2n-2} + \ldots a^{n+1}) \\ = a^2\{S(a^{n-1}) + a^{n-3}\,S(a) - a^{n-1}\}.$$

Quest' ultima formola si verifica facilmente da $n$ ad $n + 1$ applicando la (2).

Passo ora alle somme d'ordine qualunque.

Si ha:

$$S^n(a + b) = 1^n + 2^n + \ldots a^n + (a + 1)^n + (a + 2)^n + \ldots (a + b)^n.$$

Sviluppando le potenze $n^e$ indicate e sommando i termini d'eguale grado rispetto ad $a$ in questi sviluppi, si ottiene:

$$S^n(a + b) = S^n(a) + a^n b + \binom{n}{1} a^{n-1}\,S(b) + \binom{n}{2} a^{n-2}\,S^2(b) + \ldots \\ \ldots \binom{n}{n-1} a\,S^{n-1}(b) + S^n(b) \qquad (3)$$

per $n = 1$ si ricade nella (1), per $n = 2, 3 \ldots$ si hanno le somme di $(a + b)$ di 2°, 3° ... ordine in funzione delle somme di $a$ e $b$ dello stesso ordine e degli ordini inferiori.

Ponendo $a + b$ in luogo di $a$ e $c$ in luogo di $b$ nella precedente relazione e sviluppando si ha:

$$S^n(a + b + c) = S^n(a + b) + (a + b)^n c + \binom{n}{1}(a + b)^{n-1}\,S(c) \ldots \\ \ldots \binom{n}{n-1}(a + b)\,S^{n-1}(c) + S^n(c)$$

e sostituendo il valore di $S^n(a + b)$:

$$S^n(a + b + c) = S^n(a) + a^n b + (a + b)^n . c + \binom{n}{1}\{a^{n-1}\,S(b) + \\ + (a + b)^{n-1}\,S(c)\} + \binom{n}{2}\{a^{n-2}\,S(b) + (a + b)^{n-2}\,S(c)\} + \ldots \\ \ldots + \binom{n}{n-1}\{a\,S^{n-1}(b) + (a + b)\,S^{n-1}(c)\} + S^n(b) + S^n(c)$$

e così di seguito per le somme di 4, 5 ... termini.

Ponendo $a = b$ la (3) diventa:

$$S^n(2a) = S^n(a) + a^n \cdot a + \binom{n}{1} a^{n-1} S(a) + \binom{n}{2} a^{n-2} S^2(a) + \ldots$$
$$\ldots n\, a\, S^{n-1}(a) + S^n(a)$$

così pure:

$$S^n(3a) = S^n(2a) + (2a)^n \cdot a + \binom{n}{1} (2a)^{n-1} S(a) + \ldots$$
$$\ldots n\,(2a)\, S^{n-1}(a) + S^n(a)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$S^n(ba) = S^n\{(b-1)a\} + \{(b-1)a\}^n a + \binom{n}{1} \{(b-1)a\}^{n-1} S(a) \ldots$$
$$\ldots + n\,\{(b-1)a\}\, S^{n-1}(a) + S^n(a).$$

Addizionando membro a membro queste relazioni e riducendo si ha:

$$S^n(ba) = b\,S^n(a) + a^{n+1} S^n(b-1) + \binom{n}{1} a^{n-1} S(a)\, S^{n-1}(b-1) +$$
$$+ \binom{n}{2} a^{n-2} S^2(a)\, S^{n-2}(b-1) + \ldots + \binom{n}{n-1} a^2 S^{n-2}(a)\, S^2(b-1) +$$
$$+ n\, a\, S^{n-1}(a)\, S(b-1). \qquad (4)$$

Osservando che $S^k(b-1) = S^k(b) - b^k$, per $k$ qualunque intero è positivo (*), e ponendo per simmetria $\binom{n}{0} = 1$, la precedente formola si può anche scrivere così:

$$S^n(ba) - S^n(a) = \binom{n}{0} a^n S^0(a)\, S^n(b) + \binom{n}{1} a^{n-1} S(a)\, S^{n-1}(b) + \ldots$$
$$\ldots \binom{n}{n-1} a\, S^{n-1}(a)\, S(b) + \binom{n}{n} a^0 S^n(a)\, S^0(b) - \{\binom{n}{0} S^0(a)(ab)^n +$$
$$+ \binom{n}{1} S(a)(ab)^{n-1} + \ldots \binom{n}{n-1} S^{n-1}(a)(ab) + \binom{n}{n} S^n(a)(ab)^0\}$$

che dà $S^n(ba)$ in funzione delle somme di $a$ e di $b$ d'ordine $n^o$ e di ordini inferiori. — Procedendo in modo analogo a quello tenuto per le somme lineari si potrebbero anche qui ottenere le formole esprimenti $S^n(abc)$, $S^n(abcd) \ldots$ e quindi $S^n(a^2)$, $S^n(a^3), \ldots$ $S^n(a^k)$ in funzione delle somme d'ordine $n^o$ e d'ordini inferiori dei fattori; il che però tralascio di fare per brevità; d'altra parte queste formole hanno forme assai complesse, sicchè non offrono più vantaggio di sorta.

Una relazione semplice ed interessante si ha tra le somme dei successivi ordini da $o$ ad $n$ di un numero $a$; da cui si deducono altre due, l'una tra le somme dei successivi ordini impari, l'altra tra le somme dei successivi ordini pari. Il lettore le può trovare nell'*Aritmetica generale* del Baltzer, § 28, n. 11.

G. Riboni.

---

(*) Che $S^0(a) = 1^0 + 2^0 + \ldots a^0 = a$.

# Sul triangolo che ha per lati le mediane di un triangolo dato

1. Sia A B C il triangolo dato (*), le cui mediane A D, B E, C F s'incontrano in O a due terzi di ciascuna dal vertice, e sia A D un lato del triangolo da costruirsi con le medesime. Da D si conduca D E′ uguale e parallela a B E e diretta nel medesimo senso di B E e si unisca A con E′; sarà A D E′ il triangolo delle mediane.

Infatti, dal parallelogrammo D B E E′ si deducono successivamente gli altri C D E E′, C D F E, C B F E′, C F A E′ e si conclude A E′ uguale e parallela ad F C.

Se da C′, incontro di A C e D E′, si conduce C′ B′ parallela a C B, fino ad incontrare A B in B′, sarà A B′ C′ il triangolo delle mediane di A D E′.

Infatti, risultando $DC' = C'E'$, la $AC' = \frac{3}{4}AC$ è una mediana del triangolo D A E′ la quale viene incontrata in E dalle altre due D G, E′ H, poichè $AE = 2 \cdot EC' = \frac{2}{3}AC'$. È inoltre $AB' = \frac{3}{4}AB$, e quindi $B'C' = \frac{3}{4}BC$; di più $B'D = \frac{1}{2}FC$ e parallela ad F C e $AG = \frac{1}{2}AE' = \frac{1}{2}FC$ e parallela ad F C, perciò D B′ A G è un parallelogrammo in cui $AB' = GD$ e parallela G D; infine $E'H = \frac{3}{4}E'F = \frac{3}{4}CB$ e parallela C B; quindi E′ H eguale e parallela C′ B′; adunque A B′ C′ è il triangolo delle mediane del triangolo D A E′.

Ora, volendo descrivere il triangolo che ha per lati le mediane del triangolo A C′ B′, sappiamo come continuare le costruzioni. Da D′, intersezione di A D con C′ B′, si conduca D′ E″ parallela a D E′ e che incontra A C in C″ e A E′ in E″, e da C″ la C″ B″ parallela a B C, e così si prosegua. Le parallele a C B dai punti C′, C″, ... e a D E′ dai punti D′, D″, ... danno due serie di triangoli omotetici rispettivamente ad A C B e ad A E′ D.

(*) Il lettore è pregato di fare la figura.

2. Volendo determinare l'area del triangolo delle mediane del dato triangolo si osservi che: area $ADC = \frac{1}{2} ABC$, poichè $DC = \frac{1}{2} BC$. Area $DC'C = \frac{1}{4} ADC = \frac{1}{8} ABC$, perche $C'C = \frac{1}{4} AC$, quindi: area $ADC' = \frac{1}{2} ABC - \frac{1}{8} ABC = \frac{3}{8} ABC$. L'area $ADE' = 2 . ADC'$, per essere $DE' = 2 C'D$, sarà pertanto $= \frac{3}{4} ABC$. Adunque l'area del triangolo delle mediane è $\frac{3}{4}$ di quella del triangolo dato. Questa proprietà si verifica per ciascun triangolo di una delle due serie omotetiche costruito colle mediane di quello che lo precede nell'altra serie.

Il rapporto tra la somma dei primi $n$ triangoli costruiti ed il primo di essi è: $\left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right] ADE' : ADE'$, cioè lo sviluppo del quoziente $\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right] : \left[1 - \frac{3}{4}\right]$ che ha per limite $1 : \left[1 - \frac{3}{4}\right] = 4$.

3. Il triangolo delle mediane può costruirsi anche in altro modo. Sia $ABC$ il triangolo dato (*) e formisi il parallelogrammo doppio $ABCB'$. Essendo $D$, $C'$ i punti medi dei lati $BC$, $CB'$, sarà $ADC'$ il triangolo delle mediane di $ABC$. Chiamisi $E$ il punto medio di $AC$ e $F$ il punto medio di $BA$.

Infatti $AD$ è mediana; $DC' =$ e parallela $BE = \frac{1}{2} BB'$, perchè congiungente, nel triangolo $BB'C$, i punti medi di $BC$, $CB'$; $AC' =$ e parallela $CC'$ perchè anche $AF =$ e parallela $CC'$.

Compiendo il parallelogrammo $ADC'B''$, doppio del triangolo $ADC'$ e congiungendo i punti medi $D'$, $C''$ di $DC'$, $C'B''$, sarà $AD'C''$ il triangolo delle mediane di $ADC'$; il che si dimostra come prima.

Ogni triangolo delle mediane si ottiene costruendo il parallelogrammo doppio dell'ultimo triangolo ottenuto e congiungendo con $A$ i punti medi dei lati che concorrono nel vertice opposto ad $A$.

I punti indicati colle stesse lettere in quest'ultima costruzione appartengono a circuiti poligonali a forma di spirale col polo in $A$ (**), che diremo *triangolari*, perchè derivati da un trian-

(*) Il lettore è pregato a fare una nuova figura.

(**) Anche nella 1ª costruzione i segmenti rettilinei $BD$, $B'D'$....; $CE'$, $C'E''$.... possono riguardarsi inscritti in archi di spirali omopolari in $A$.

golo. Se il triangolo A B C è equilatero, le spirali risultano tutte equiangole.

4. Il triangolo delle mediane può avere attorno ad un vertice del triangolo dato sei collocazioni, che sarà lecito numerare e percorrere nel senso delle lancette d'un orologio, apponendo le cifre 1 e 2 ai due triangoli che hanno metà della loro area in comune col dato.

La serie dei triangoli successivi delle mediane può formarsi con uno o due dei sei triangoli sopra distinti, o con qualunque permutazione, anche con ripetizione e rovesciamento, di 3, 4, 5, 6 dei medesimi. Queste permutazioni (eccetto che in alcuni casi particolari) danno origine a spirali che risultano omopolari o in un vertice del triangolo fondamentale, o in un punto determinabile colle successive costruzioni.

Firenze, settembre 1888.

F. Benucci.

## Sopra due esercizi proposti nella trigonometria del Serret (*)

### I.

Essendo $a$ un arco qualunque si ha

$$\operatorname{tang} a = \frac{1}{2}\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right) - \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\right] \ (^{**})$$

Infatti per note relazioni trigonometriche e perchè i due archi $\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}$ e $\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}$ sono complementari, si ha

$$\operatorname{tang} a = \frac{\cos 2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)}{\operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)}$$

(*) Edizione francese e traduzione italiana di A. Ferrucci.

(**) Quest'identità dev'essere sostituita alla $\operatorname{tang} a = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right) - \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)$ che è l'8ª dell'esercizio I del libro II del suddetto Trattato.

$$=\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)}=\frac{1}{2}\left[\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)-\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)-\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)\right].$$

## II.

Essendo $a$, $b$, $c$ tre archi qualunque, si ha

$$\cos(a+b+c)+\cos(b+c-a)+\cos(a+c-b)+$$
$$+\cos(a+b-c)=4\cos a\cos b\cos c \text{ (*)}$$

Infatti per note relazioni trigonometriche si ha

$$\cos(a+b+c)+\cos(b+c-a)+\cos(a+c-b)+\cos(a+b-c)$$
$$=2\cos a\cos(c+b)+2\cos a\cos(c-b)=$$
$$2\cos a\,[\cos(c+b)+\cos(c-b)]$$
$$=2\cos a\,.\,2\cos b\cos c=4\cos a\cos b\cos c.$$

## III.

Essendo $a$, $b$, $c$ tre archi qualunque, si ha

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} b+\operatorname{sen} c-4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\\ =2\operatorname{sen}\frac{a+b+c-\pi}{4}\left(\cos\frac{3a-b-c+\pi}{4}+\cos\frac{3b-a-c+\pi}{4}+\right.\\ \left.+\cos\frac{3c-a-b+\pi}{4}+\cos\frac{a+b+c-\pi}{4}\right)\end{array}\right\}\text{ (**)}$$

Infatti, poichè per l'identità dimostrata ultimamente si ha

$$4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}=\cos\frac{a+b+c}{2}+\cos\frac{b+c-a}{2}+\cos\frac{a+c-b}{2}+$$
$$+\cos\frac{a+b-c}{2}$$

---

(*) Quest'identità è la 1ª dell'esercizio VI del libro II, della quale mi servo per dimostrare poi la 2ª corretta dello stesso esercizio.

(**) Quest'identità dev'essere sostituita alla

$$\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} b+\operatorname{sen} c-4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}=$$
$$=\operatorname{sen}\frac{a+b+c-\pi}{4}\left(\cos\frac{3a-b-c-\pi}{4}+\cos\frac{3b-a-c-\pi}{4}+\right.$$
$$\left.+\cos\frac{3c-a-b-\pi}{4}+\cos\frac{a+b+c-\pi}{4}\right)$$

che è la 2ª dell'esercizio VI del libro II.

sarà pure identicamente

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c - 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} \\ &= \operatorname{sen} a - \cos\frac{b+c-a}{2} + \operatorname{sen} b - \cos\frac{a+c-b}{2} + \operatorname{sen} c - \\ &- \cos\frac{a+b-c}{2} - \cos\frac{a+b+c}{2} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

e poichè d'altra parte per note relazioni trigonometriche si ha

$$\cos\frac{a+b+c}{2} = -\operatorname{sen} 2\left(\frac{a+b+c-\pi}{4}\right)$$
$$= -2\operatorname{sen}\frac{a+b+c-\pi}{4}\cos\frac{a+b+c-\pi}{4},$$

sostituendo convenientemente nella (1), si ottiene

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c - 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} \\ &= \left(\operatorname{sen} a - \cos\frac{b+c-a}{2}\right) + \left(\operatorname{sen} b - \cos\frac{a+c-b}{2}\right) + \\ &+ \left(\operatorname{sen} c - \cos\frac{a+b-c}{2}\right) + 2\operatorname{sen}\frac{a+b+c-\pi}{4}\cos\frac{a+b+c-\pi}{4} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Ora, mediante la nota identità

$$\operatorname{sen} q - \cos p = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p-q}{2}\right) =$$
$$= 2\operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

la precedente eguaglianza diviene

$$\begin{aligned} &\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c - 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} \\ &= 2\operatorname{sen}\frac{a+b+c-\pi}{4}\cos\frac{b+c-3a-\pi}{4} + \\ &+ 2\operatorname{sen}\frac{a+b+c-\pi}{4}\cos\frac{a+c-3b-\pi}{4} + \\ &+ 2\operatorname{sen}\frac{a+b+c-\pi}{4}\cos\frac{a+b-3c-\pi}{4} + \\ &+ 2\operatorname{sen}\frac{a+b+c-\pi}{4}\cos\frac{a+b+c-\pi}{4} \end{aligned}$$

e se nel 2° membro di questa, per la nota relazione $\cos x = \cos(-x)$, si cambia il segno ai tre primi archi di cui sono indicati i coseni, e si mette in evidenza il fattor comune $2\operatorname{sen}\frac{a+b+c-\pi}{4}$, si ottiene finalmente

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c - 4 \cos\frac{a}{2} \cos\frac{b}{2} \cos\frac{c}{2}$$

$$= 2 \operatorname{sen} \frac{a+b+c-\pi}{4} \left(\cos\frac{3a-b-c+\pi}{4} + \cos\frac{3b-a-c+\pi}{4} + \right.$$

$$\left. + \cos\frac{3c-a-b+\pi}{4} + \cos\frac{a+b+c-\pi}{4}\right).$$

Parma, luglio 1888.

Dottor Giuseppe Bernardi.

## SOLUZIONE DELLE QUISTIONI 17, 18 e 19

**17.** *Preso un punto sulla bisettrice di un angolo retto e condotta per questo punto una secante ai lati, determinare la posizione che deve avere la secante affinchè sia minima*

1º *la somma dei segmenti staccati dai lati dell'angolo a partire dal vertice,*

2º *la porzione della secante limitata ai lati,*

3º *l'area del triangolo formato dalla secante e dai lati dell'angolo.*

A. Lugli.

Soluzione del Prof. *F. Viaggi.*

Tratto un problema alquanto più generale.

Sia X O Y l'angolo retto; P un punto interno, $PO = d$ e $POX = \omega$; una retta condotta per P incontri in A, B le direzioni O X, O Y e sia $\alpha$ l'angolo acuto in A: $d$, $\omega$ sono costanti, $\alpha$ variabile.

1º
$$OA = d \cdot \frac{\operatorname{sen}(\omega + \alpha)}{\operatorname{sen} \alpha} = d \cos\omega + d \operatorname{sen}\omega \operatorname{cotg}\alpha,$$

$$OB = d \cdot \frac{\operatorname{sen}(\omega + \alpha)}{\cos \alpha} = d \operatorname{sen}\omega + d \cos\omega \operatorname{tang}\alpha,$$

quindi

$$OA + OB = d \operatorname{sen}\omega + d \cos\omega + d \operatorname{sen}\omega \operatorname{cotg}\alpha + d \cos\omega \operatorname{tang}\alpha;$$

la somma dei due primi termini del 2º membro è costante, quella dei due ultimi, essendo essi positivi e il loro prodotto costante, diventa minima quando essi sono eguali, quando cioè

$$\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{\operatorname{tang}\omega}.$$

Per tal valore di $\alpha$, $OA + OB$ acquista il valore minimo

$$d\left(\sqrt{\operatorname{sen}\omega} + \sqrt{\cos\omega}\right)^2.$$

Se $\omega = 45°$, $OA + OB$ assume lo stato di minimo per $\alpha = 45°$.

2° Sia $A_1 B_1$ la posizione di $AB$ corrispondente all'angolo acuto $\alpha_1$ determinato dall'equazione

$$\text{tang}\,\alpha_1 = \sqrt[3]{\text{tang}\,\omega}$$

e sia $\alpha - \alpha_1 = \pm\varphi$, $\varphi$ quindi acuto.

Dai triangoli $OA_1P$, $OPB$, si ricava

$$A_1P = d\frac{\text{sen}\,\omega}{\text{sen}\,\alpha_1},\quad PB_1 = d\,.\,\frac{\cos\omega}{\cos\alpha_1}$$

da cui

$$A_1B_1 = d\,.\,\frac{\text{sen}\,\omega}{\text{sen}\,\alpha_1} + d\,.\,\frac{\cos\omega}{\cos\alpha_1} = d\cos\omega\left(\frac{\text{tang}\,\omega}{\text{sen}\,\alpha_1} + \frac{1}{\cos\alpha_1}\right)$$

e analogamente

$$AB = d\cos\omega\left(\frac{\text{tang}\,\omega}{\text{sen}\,(\alpha_1 \pm \varphi)} + \frac{1}{\cos(\alpha_1 \pm \varphi)}\right);$$

e le due ultime eguaglianze, in virtù di quella posta a principio, diventano dopo agevoli trasformazioni trigonometriche

$$A_1B_1 = \frac{d\cos\omega}{\cos^3\alpha_1}$$

$$AB = \frac{d\cos\omega}{\cos^3\alpha_1}\,.\,\frac{\text{sen}\,\alpha_1\cos\alpha_1\cos\varphi \pm (\cos^2\alpha_1 - \text{sen}^2\alpha_1)\,\text{sen}\,\varphi}{\text{sen}\,(\alpha_1 \pm \varphi)\,.\,\cos(\alpha_1 \pm \varphi)}$$

e da queste

$$AB - A_1B_1 = A_1B_1\,\frac{2\,\text{sen}\,(\alpha + \alpha_1) + \text{sen}\,2\alpha_1}{\text{sen}\,2\alpha}\,(1 - \cos\varphi);$$

ed essendo, per le ipotesi fatte su $\alpha$ e $\alpha_1$, positiva la frazione del secondo membro, si conchiude che

$$AB \geqq A_1B_1$$

secondo che sia

$$1 - \cos\varphi \geqq 0 \text{ ossia } \varphi \geqq 0\,.$$

Dunque $A_1B_1$ è il minimo di $AB$.

Nell'ipotesi $\omega = 45°$, è $\alpha_1 = 45°$.

3° Moltiplicando tra loro i valori di $OA$, $OB$ e dividendo per 2, si ha

$$\Delta OAB = d^2\,\text{sen}\,\omega\cos\omega + \frac{d^2}{2}(\text{sen}^2\omega\,\text{cotg}\,\alpha + \cos^2\omega\,\text{tang}\,\alpha);$$

il 1° termine del 2° membro è costante, il valore della parentesi, somma di termini positivi il cui prodotto è costante, diventa minimo quando questi sono eguali, quando cioè

$$\text{tang}\,\alpha = \text{tang}\,\omega\,,\ \text{ossia}\ \alpha = \omega\,.$$

Perciò il valore minimo il triangolo $OAB$ l'acquista quando il centro del suo cerchio circoscritto è $P$.

Considerando ora il caso che la trasversale condotta per $P$ incontri la direzione opposta di $OX$ o di $OY$, se, p. es., $A$ si allontana da $O$ indefinitamente sulla direzione opposta di $OX$, le funzioni $OA + OB$, $AB$, $OAB$ crescono continuamente e indefinitamente a partire da zero: dunque lo zero si può considerare un loro minimo.

**18.** *Se col simbolo* $S^m(x)$ *s'indica la somma delle potenze* m<sup></sup>esime *dei primi* x *numeri interi e positivi ed* a, b, c, .... l *sono numeri primi due a due ed* n *intero e positivo, dimostrare che:*

$$\frac{S^n(a.b.c....l)}{a.b.c...l} - \frac{S^n(a)}{a} - \frac{S^n(b)}{b} - \dots \frac{S^n(l)}{l}$$

*è un numero intero.*

A. Lugli.

Dimostrazione del Prof. *U. Scarpis* (*).

Lemma. « Se $a$, $n$, $k$ sono numeri interi e positivi sarà:

$$S^n(a.k) \equiv k.S^n(a) \pmod{a} \text{ ».}$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} S^n(k.a) = {} & 1^n + 2^n + \dots r^n + \dots + a^n \\ & + (a+1)^n + (a+2)^n + \dots + (a+r)^n + \dots + (2a)^n \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + (sa+1)^n + (sa+2)^n + \dots + (sa+r)^n + \dots + ((s+1)a)^n \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + ((k-1)a+1)^n + ((k-1)a+2)^n + \dots + ((k-1)a+r)^n + \dots + (ka)^n. \end{aligned}$$

Ora dallo sviluppo della potenza d'un binomio si riconosce che:

$$(s.a+r)^n \equiv r^n \pmod{a}$$

e sarà quindi

$$(sa+1)^n + (sa+2)^n + \dots (sa+r)^n + \dots ((s+1)a)^n \equiv S^n(a), \pmod{a}$$

da cui si deduce subito la dimostrazione del predetto lemma.

Dopo ciò, riducendo allo stesso denominatore l'espressione considerata nella quistione, si ha:

$$\frac{S^n(a.b.c....l) - S^n(a).b.c....l - S^n(b)a.c....l - S^n(c)a.b....l - \dots}{a.b.c....l}$$

Tutti i termini del numeratore sono multipli di $a$, ad eccezione dei due primi; ma per questi, secondo il lemma precedente, vige la relazione

$$S^n(a.b.c....l) \equiv S^n(a).b.c....l \pmod{a}$$

per cui la differenza $S^n(a.b.c....l) - S^n(a).b.c....l$ sarà divisibile per $a$, e quindi anche il numeratore in quistione.

Per la simmetria della formola in egual modo si dimostra che il numeratore è divisibile per i rimanenti fattori $b, c, \dots l$, ed essendo $a, b, c \dots l$ primi due a due, ne segue che sarà divisibile anche per il loro prodotto.

(*) Altre dimostrazioni di questa e della quistione seguente sono state inviate dai sig. Prof[i]. *F. Viaggi* e *G. Riboni*. Le dimostrazioni di quest'ultimo si fondano sopra i risultati contenuti nell'articolo " Alcune formole sulle somme delle potenze simili dei numeri naturali „ che trovasi in altra parte di questo fascicolo.

**19.** *Se col simbolo* $S^m(x)$ *s'indica la somma delle potenze* m^esime^ *dei primi* x *numeri interi e positivi;* a, b, c....l *sono numeri primi due a due ed* n, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$....$\lambda$ *numeri interi positivi arbitrari, dimostrare che*:

$$\frac{S^{2n}\left(a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots . l^\lambda\right)}{a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots . l^\lambda} - \frac{S^{2n}(a)}{a} - \frac{S^{2n}(b)}{b} - \ldots . \frac{S^{2n}(l)}{l}$$

*è un numero intero.*

A. Lugli.

Dimostrazione del Prof. *U. Scarpis.*

Lemma. « Essendo $a$, $m$, $\alpha$ numeri interi positivi, $S^m\left(a^\alpha\right)$ è sempre divisibile per $a^{\alpha-1}$ ».

Per il lemma della quistione precedente, abbiamo la seguente catena di congruenze:

$$S^m\left(a^\alpha\right) \equiv S^m\left(a^{\alpha-1}\right).a \quad \left(\text{mod. } a^{\alpha-1}\right)$$
$$S^m\left(a^{\alpha-1}\right) \equiv S^m\left(a^{\alpha-2}\right).a \quad \left(\text{mod. } a^{\alpha-2}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S^m(a^3) \equiv S^m(a^2).a \quad (\text{mod. } a^2)$$
$$S^m(a^2) \equiv S^m(a).a \quad (\text{mod. } a).$$

Dall'ultima si ricava che $S^m(a^2)$ è divisibile per $a$, e tenendo conto di ciò si deduce dalla precedente che $S^m(a^3)$ è divisibile per $a^2$ e procedendo a questo modo si dimostra infine che $S^m\left(a^\alpha\right)$ è divisibile per $a^{\alpha-1}$.

Posto ciò, riducendo allo stesso denominatore l'espressione considerata nell'enunciato della quistione e riferendoci alla quistione precedente, si comprende che tutto si riduce a dimostrare la congruenza:

$$S^{2n}\left(a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots . l^\lambda\right) \equiv S^{2n}(a).a^{\alpha-1}.b^\beta.c^\gamma \ldots . l^\lambda.\left(\text{mod. } a^\alpha\right).$$

Ma in virtù del lemma della quistione (18):

$$S^{2n}\left(a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots . l^\lambda\right) \equiv S^{2n}\left(a^\alpha\right).b^\beta.c^\gamma \ldots . l^\lambda.\left(\text{mod. } a^\alpha\right)$$

e sostituendo:

$$S^{2n}\left(a^\alpha\right).b^\beta.c^\gamma \ldots . l^\lambda \equiv S^{2n}(a).a^{\alpha-1}.b^\beta.c^\gamma \ldots . l^\lambda\left(\text{mod. } a^\alpha\right).$$

Per ipotesi $a$, $b$, $c$. ....$l$ sono primi due a due, quindi il prodotto $b^\beta.c^\gamma \ldots . l^\lambda$ sarà primo con $a^\alpha$, e dividendo i due membri dell'ultima congruenza per il fattore comune $b^\beta.c^\gamma \ldots . l^\lambda$, primo col modulo, saremo così infine condotti a dimostrare che:

$$S^{2n}\left(a^\alpha\right) \equiv S^{2n}(a).a^{\alpha-1}\left(\text{mod. } a^\alpha\right).$$

A questo scopo osserviamo che:

$$(a+1)^{2n}=a^{2n}+\ldots.\binom{2n}{r}a^{2n-r}.1^r+\ldots.1^{2n}$$

$$(a+2)^{2n}=a^{2n}+\ldots.\binom{2n}{r}a^{2n-r}.2^r+\ldots.2^{2n}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$(a+h)^{2n}=a^{2n}+\ldots.\binom{2n}{r}a^{2n-r}.h^r+\ldots.h^{2n}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$(a+a)^{2n}=a^{2n}+\ldots.\binom{2n}{r}a^{2n-r}.a^r+\ldots.a^{2n},$$

**da cui sommando si ricava:**

$$S^{2n}(2.a)-S^{2n}(a)=a^{2n+1}+\ldots.\binom{2n}{r}a^{2n-r}.S^r(a)+\ldots.S^{2n}(a)=$$
$$=1^{2n}.a^{2n+1}+\ldots.\binom{2n}{r}1^{2n-r}.a^{2n-r}S^r(a)+\ldots.S^{2n}(a).$$

Analogamente si ha:

$$S^{2n}(3a)-S^{2n}(2a)=2^{2n}.a^{2n+1}+\ldots.\binom{2n}{r}2^{2n-r}.a^{2n-r}.S^r(a)+\ldots.S^{2n}(a)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S^{2n}(a^\alpha)-S^{2n}((a^{\alpha-1}-1).a)=(a^{\alpha-1}-1)^{2n}.a^{2n+1}+\ldots.$$
$$\ldots.\binom{2n}{r}(a^{\alpha-1}-1)^{2n-r}.a^{2n-r}.S^r(a)+\ldots.S^{2n}(a)$$

e sommando nuovamente:

$$S^{2n}(a^\alpha)-S^{2n}(a)=a^{2n+1}.S^{2n}(a^{\alpha-1}-1)+\ldots.$$
$$\ldots.\binom{2n}{r}a^{2n-r}.S^{2n-r}(a^{\alpha-1}-1)S^r(a)+\ldots.S^{2n}(a)(a^{\alpha-1}-1).$$

Notando ora che:

$$S^{2n-r}(a^{\alpha-1}-1)=S^{2n-r}(a^{\alpha-1})-(a^{\alpha-1})^{2n-r}$$

si scorge che, essendo $S^{2n-r}(a^{\alpha-1})$ divisibile per $a^{\alpha-2}$, in base al lemma precedente, lo sarà pure $S^{2n-r}(a^{\alpha-1}-1)$ e che quindi tutti i termini dello sviluppo di $S^{2n}(a^\alpha)-S^{2n}(a)$ che corrispondono ad $r=0,1,2,\ldots.(2n-2)$, saranno divisibili per $a^\alpha$.

D'altra parte per $r=2n-1$ abbiamo:

$$\binom{2n}{2n-1}.a.S^1(a^{\alpha-1}-1).S^{2n-1}(a)$$

ed essendo

$$\binom{2n}{2n-1}=2n,\ S^1(a^{\alpha-1}-1)=1+2+\ldots.(a^{\alpha-1}-1)=\frac{(a^{\alpha-1}-1)a^{\alpha-1}}{2}$$

risulta che anche il termine corrispondente ad $r=2n-1$ sarà divisibile per $a^\alpha$ e si conclude quindi infine che

$$S^{2n}(a^\alpha) - S^{2n}(a) \equiv \binom{2n}{2n} . a^0 . S^0(a^{\alpha-1} - 1) . S^{2n}(a)$$
$$\equiv (a^{\alpha-1} - 1) S^{2n}(a) \pmod{a^\alpha}$$

cioè che:

$$S^{2n}(a^\alpha) \equiv S^{2n}(a) . a^{\alpha-1} \pmod{a^\alpha};$$

quello che si voleva dimostrare (*).

## QUISTIONI PROPOSTE.

**22.** Eliminare $x$, $y$, $z$ dalle tre equazioni

$$y(b - c + z) + z(c - b + y) = X + y^2 + z^2$$
$$z(c - a + x) + x(a - c + z) = Y + z^2 + x^2$$
$$x(2a - b - c) + y(2b - a - c) + z(2c - a - b) =$$
$$= X + Y + Z + 2(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy).$$

**23.** Dato un triangolo $ABC$ si costruisca un secondo triangolo $A_1 B_1 C_1$ coi lati $B_1 C_1$, $C_1 A_1$, $A_1 B_1$ eguali rispettivamente ai segmenti $AA'$, $BB'$, $CC'$ che uniscono i vertici $A, B, C$ con i punti $A'$, $B'$, $C'$ dei lati ad essi opposti, o dei loro prolungamenti, determinati dalle

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{C'B} = m$$

in cui $m$ significa un numero positivo o negativo. Sia $A_2 B_2 C_2$ il triangolo derivato, con analoga costruzione, dal triangolo $A_1 B_1 C_1$, e $A_3 B_3 C_3$ quello derivato da $A_2 B_2 C_2$. Provare: 1° che esistono tre valori di $m$ per ciascuno dei quali il triangolo $A_2 B_2 C_2$ è simile al triangolo $ABC$; 2° che esistono sei valori di $m$ per ciascuno dei quali il triangolo $A_3 B_3 C_3$ è simile al triangolo $ABC$.

D. Besso.

---

(*) Per abbondanza di materia si rimanda al fascicolo venturo lo svolgimento delle quistioni 20 e 21, di una od ambedue delle quali pervennero soluzioni dai sig. Prof[i]. *E. Millosevich, F. Viaggi, F. Palatini* e *R. Badia.*

# RIVISTA BIBLIOGRAFICA

EUCLIDE. Libro quinto, novamente esposto dal Dott. MICHELE GREMIGNI. — Firenze, G. C. Sansoni, 1889. Prezzo L. 1.

Il Prof. Gremigni, già noto ai lettori di questo periodico, nel presente libretto espone in modo chiaro e rigoroso la teoria delle grandezze proporzionali contenuta nel quinto libro d'Euclide. L'A., fondandosi sul pregevole lavoro del Prof. Bertini sullo stesso argomento, che ha reso un così notevole servigio all'insegnamento liceale, ha creduto conveniente di modificarlo, nell'intento di rendere più semplice l'esposizione e in pari tempo ridurre a quanto è strettamente necessario la materia da esporre.

Ove si consideri che le recenti modificazioni ai programmi delle scuole classiche (24 ottobre 1888), assegnando al Ginnasio i primi due libri d'Euclide, trasportano il libro quinto dalla seconda alla prima classe liceale, la pubblicazione del Prof. Gremigni sarà accolta con favore dagli insegnanti, ai quali essa faciliterà grandemente il compito di dover esporre una teoria, già per sè stessa alquanto difficile, a giovanetti meno maturi per questa sorta di studi.

Il Gremigni sostituisce un teorema agli assiomi 1° e 3° d'Euclide, e nella dimostrazione di quello fa uso esplicitamente della definizione di *grandezze equivalenti*, secondo la quale son considerate come tali quelle che si possono dividere in parti rispettivamente eguali *(sovrapponibili)*. Sebbene questo concetto non sia in Euclide, il quale non definisce le figure che ora noi diciamo equivalenti e cui egli dà semplicemente il nome di eguali, è molto facile colmare questa lacuna col premettere, insieme con poche altre osservazioni, l'accennata definizione di equivalenza alla spiegazione della proposizione venticinquesima del libro primo. Noi pensiamo anzi che ciò oramai non possa trascurarsi da chiunque voglia impartire un insegnamento rigoroso.

La cura particolare posta dall'A. per ottenere la maggior possibile semplicità è manifestata anche dall'ordinamento che esso ha dato alle sue prime otto proposizioni, le quali così si possono ridurre a quattro soli enunciati facilissimi a ricordarsi.

Il G. poi premette molto opportunamente alla definizione di proporzione due facili proposizioni, le quali dimostrano che effettivamente si possono immaginare quattro grandezze aventi quella proprietà, per cui verranno poi dette proporzionali. In seguito espone nel seguente modo la definizione che è fondamentale in questa teoria: *Quattro grandezze.... formano una* proporzione, *quando le equimolteplici secondo qualsivoglia numero, della prima e della terza, sono, tutte e due, o maggiori, o equivalenti, o minori rispettivamente delle equimolteplici, pure secondo qualsivoglia numero, della seconda e quarta grandezza.* Questo enunciato ha su quello di Euclide (definizione 5ª) il vantaggio di non dare alcuna preferenza alle prime due grandezze di fronte alle altre due, il che contribuisce a render poi tutta l'esposizione più semplice e chiara. Così, per esempio, la proposizione: se A : B : : C : D, sarà anche C : D : : A : B, che ha bisogno di dimostrazione colla definizione euclidea, è data dal G. come immediata conseguenza della sua definizione nella quale essa è infatti contenuta.

Le proposizioni che seguono, senza allontanarsi essenzialmente nelle dimostrazioni da quelle di Euclide, ne differiscono per l'ordinamento pel quale, come pure per la maggiore semplicità degli enunciati, esse riescono assai più facili a ritenersi.

L'A., infine, oltre agli esercizi proposti dal Bertini, ne aggiunge alcuni altri molto propri anch'essi ad illustrare la teoria generale. Noteremo soltanto che l'esercizio 13°, non essendo che un diverso enunciato della proposizione 20ª, si potrebbe senza danno sopprimere.

Ci auguriamo che lo stesso autore faccia presto succedere a questo libro una nuova esposizione del libro sesto, informata agli stessi criteri che lo hanno guidato nel lavoro del quale qui abbiamo tenuto parola.

A. Grandi.

---

## PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO.

*Journal de Mathématiques élémentaires* à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. de Longchamps, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, Lucien Lévy, agrégé des sciences mathématiques, directeur des études à l'Ecole preparatoire de Saint-Barbe. 3ᵉ Serie, Treizième année. N. 2, 3, Février, Mars. Paris. Librairie Ch. Delagrave, 1889.

*Journal de Mathématiques élémentaires* publié par H. Vuibert. 13ᵉ année. N. 9, 10, 11, 12. Paris. M. Nony et Cⁱᵉ, 17 Rue des Écoles, 1889.

*Mathesis*, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion, professeur à l'Université de Gand, et J. Neuberg, professeur à l'Université de Liège. Tome neuvième. Janvier, Février, Mars, 1889.

*Le Scuole secondarie*, eco dell'Associazione nazionale fra gli insegnanti delle Scuole secondarie. Anno VI, n. 7, 8 e 9. Milano, 1889.

*Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche* (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2ª, Vol. 3, Fasc. 1, 2: Gennaio, Febbraio 1889.

*Rivista Scientifico-industriale* compilata da Guido Vimercati. Anno XXI, n. 1, 2 e 3. Firenze, 1889.

Agamennone (G.) — Determinazione della densità dell'aria (Rend. R. Accademia Lincei, 1885). — Sul grado di precisione nella determinazione della densità dei gas (Rend. R. Acc. Lincei, 1885). — Influenza della deformazione del pallone di vetro nella misura della densità dei gas (Rend. R. Accademia Lincei, 1889).

Amodeo (F.) — Fasci di omografie binarie e rappresentazione geometrica degli elementi immaginari (Gior. Battaglini, Vol. XXVI).

Andreini (A.) — Sopra una proprietà singolare di alcuni numeri dipendente dal sistema particolare di numerazione nel quale sono scritti (Gior. Battaglini, Vol. XXVI).

Beltrami (E.) — Considerazioni idrodinamiche (Rend. R. Istituto lomb., 1889).

Chistoni (C.) — Sul calcolo del coefficiente magnetometrico per i magnetometri costruiti secondo il metodo Gauss modificato da Lamont. Torino, 1889.

Gelin (*l'Abbé* E.) — Éléments de trigonométrie plane et sphérique. Ouvrage couronné par l'Académie royale de Belgique. Namur, Librairie Wesmael-Charlier, 1888. Prix: 5 fr. 40

Gremigni (M.) — Euclide. Libro quinto. In Firenze, G. C. Sansoni, 1889. — Prezzo: 1 lira.

*(Il seguito nel prossimo fascicolo).*

# Sull'equivalenza dei poligoni e dei poliedri

1. Due poligoni o due poliedri che si possano decomporre nello stesso numero di parti rispettivamente eguali o che sono limiti delle stesse variabili convergenti (De Paolis, *Elementi di Geometria,* 386) sono equivalenti, ed è chiaro che due poligoni o due poliedri equivalenti hanno superficie o volume eguale. Non mi sembra inutile dimostrare le proprietà inverse, mentre, per quanto so, non vi sono che due memorie, una del Gerwien (*Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke* — Giorn. di Crelle, vol. 10) ed una del Göpel, inserita nel vol. 4° dell'Arch. di Grunert e che non ho potuto consultare, che si occupino di tale argomento. La dimostrazione per i poligoni è in sostanza quella del Gerwien, che si estende facilmente al caso dei poliedri.

2. Siano i due poligoni $P$ e $Q$ che abbiano aree uguali. Si trasformino rispettivamente $P$ e $Q$ in due triangoli $ABC$, $DEF$ che avranno aree eguali. Se i due triangoli avessero un lato eguale, avrebbero eguali le corrispondenti altezze, e i due triangoli e quindi i due poligoni sarebbero equivalenti. Se questo non è, osserviamo che può sempre supporsi che un lato $DF$ del triangolo $DEF$ sia maggiore di ciascuno dei lati del triangolo $ABC$, potendo se no trasformarsi il triangolo $DEF$ in uno che soddisfi questa condizione, e sia $AB$ un lato del triangolo $ABC$ non inferiore agli altri due (Tav. II, fig. 1ª *a*), $EG$ l'altezza del triangolo $DEF$ corrispondente al lato $DF$ e $CO$ l'altezza del triangolo $ABC$ corrispondente al lato $AB$. È $CO > EG$, e poichè $AB \geq BC > CO$, ne viene $AB > EG$. Il circolo descritto con centro in $F$ e con raggio eguale ad $AB$ incontra la retta $r$, parallela a $DF$ e distante da questa di un segmento eguale ad $EG$, in due punti $M$ ed $N$. Unendo $M$ con $D$ e con $F$ si ha il triangolo $DMF$ equivalente a $DEF$ e che in conseguenza ha

la stessa area del triangolo $A\,B\,C$, e poichè i due triangoli $D\,M\,F$, $A\,B\,C$ hanno area eguale ed eguali i lati $A\,B$ ed $F\,M$, anche le altezze corrispondenti sono eguali; i due triangoli sono equivalenti, ed equivalenti sono i due $A\,B\,C$, $D\,E\,F$ per essere equivalenti al triangolo $D\,F\,M$.

3. Siano i due poliedri $P$ e $Q$ che abbiano volumi eguali. Si trasformino rispettivamente $P$ e $Q$ in due tetraedri $A\,B\,C\,D$, $E\,F\,G\,H$, che avranno volumi eguali. Se i due tetraedri avessero una faccia equivalente, avrebbero eguali le altezze corrispondenti a questa faccia e i due tetraedri e quindi i due poliedri sarebbero equivalenti. Se questo non è, abbia il triangolo $F\,G\,H$ area maggiore del triangolo $A\,B\,C$ e quest'area non sia inferiore a quella delle altre faccie del tetraedro $A\,B\,C\,D$. Osserviamo che un lato del triangolo $F\,G\,H$, per esempio $G\,H$, può supporsi non inferiore ad un lato $A\,B$ del triangolo $A\,B\,C$, poichè altrimenti il triangolo $F\,G\,H$ potrebbe trasformarsi in un altro che soddisfacesse a questa condizione. Da $E$ tiro la $E\,O$ perpendicolare al piano $F\,G\,H$ e un piano $\pi$ (fig. 2ª $a$) parallelo al piano $F\,G\,H$ e distante da questo di un segmento eguale ad $E\,O$. Sia poi $D\,S$ l'altezza del tetraedro $A\,B\,C\,D$ corrispondente alla faccia $A\,B\,C$, $C\,T$ l'altezza del triangolo $A\,B\,C$ rispetto al lato $A\,B$. È $D\,S > E\,O$, $C\,T > D\,S$, quindi $C\,T > E\,O$. Ne segue che il luogo dei vertici dei triangoli equivalenti al triangolo $A\,B\,C$ e che hanno per base $G\,H$ è un cilindro che taglia il piano $\pi$ secondo due rette $r$ e $r'$. Prendendo sopra una di esse un punto qualunque $M$ ed unendolo con $F$, $G$ ed $H$ si avrà un tetraedro equivalente al tetraedro $E\,F\,G\,H$ e che avrà lo stesso volume del tetraedro $A\,B\,C\,D$, e poichè i due tetraedri $A\,B\,C\,D$, $F\,G\,H\,M$ hanno le due faccie $A\,B\,C$ e $G\,H\,M$ equivalenti, le corrispondenti altezze saranno eguali e i due tetraedri equivalenti, e risultano pure equivalenti i due $A\,B\,C\,D$ ed $E\,F\,G\,H$ per essere equivalenti ad uno stesso $F\,G\,H\,M$.

Giulio Giuliani.

# Rappresentazione geometrica dei numeri irrazionali

La teoria dei numeri irrazionali, quale è esposta nei più recenti trattati, si fonda sul concetto di classi numeriche convergenti ed è suscettibile di una rappresentazione geometrica che mi pare notevole.

Per fissare le idee mi atterrò al capitolo IV degli elementi d'algebra di A. Faifofer (edizione del 1888): il quale capitolo cercherò di illustrare graficamente, ammettendo che un numero irrazionale (M, N) sia la misura d'un segmento, incommensurabile col segmento unitario, determinato in modo unico secondo la legge di formazione delle classi M, N che determinano il numero irrazionale suddetto.

Sarà facile, ad esempio, costrurre l'irrazionale $\sqrt{q}$ di cui si tratta nei paragrafi 111, 114.

Difatti sia (Tav. II, fig. 1ª) O U il segmento unitario, O Q il segmento misurato dal numero razionale $q$ non quadrato perfetto e trovisi colla costruzione d'Euclide (VI, 8) il segmento O A medio geometrico tra O Q, O U.

Siano $O M_1 = m_1$ $O N_1 = n_1$ due segmenti commensurabili con O U e l'uno minore, l'altro maggiore di O A — Descrivansi le circonferenze $O M_1 M_2$, $O N_1 N_2$ tangenti in O alla circonferenza O A Q: e come i punti $M_1$ $N_1$ sono l'uno interno, l'altro esterno al segmento U A, così i punti $M_2$ $N_2$ saranno pure l'uno interno, l'altro esterno al segmento O Q.

Ora, giusta la 5ª definizione d'Euclide e indipendentemente da ogni idea di misura, si hanno le proporzioni:

$$O M_2 : O M_1 = O M_1 : O U; \quad O N_2 : O N_1 = O N_1 : O U$$

e poichè i segmenti $O M_1$ $O N_1$ sono commensurabili con O U per ipotesi, lo saranno pure $O M_2$ $O N_2$ con $O M_1$ $O N_1$ e quindi con O U, cosicchè le misure $m_2$ $n_2$ di quei segmenti saranno razionali e si avranno le proporzioni numeriche:

$$m_2 : m_1 = m_1 : 1; \quad n_2 : n_1 = n_1 : 1$$

onde:

$$m_1^2 = m_2 < q \quad n_1^2 = n_2 > q.$$

E poichè O A separa la classe dei segmenti O $M_1$ dalla classe dei segmenti O $N_1$, così il numero che misura O A separa le classi dei numeri $m_1$ $n_1$ razionali e i cui quadrati sono rispettivamente minori e maggiori di $q$.

Dunque il segmento O A rappresenta graficamente l'irrazionale $\sqrt{q}$.

### Somma dei mumeri irrazionali.

Siano (fig. 2a) O A, O B due segmenti presi su una retta indefinita dall'una e dall'altra parte rispetto il punto O, e siano $\alpha$ $\beta$ le loro misure rispetto un segmento unitario O U. Se $\alpha$, $\beta$ sono razionali, il numero che misura il segmento A B è la somma $\alpha + \beta$: è quindi naturale di definire la somma $\alpha + \beta$ come il numero che misura A B anche nel caso in cui $\alpha, \beta$ siano uno od entrambi irrazionali ed espressi da (M, N); (P, Q). In tal caso, come O A separa le due classi di segmenti O $m$, O $n$ commensurabili con O U e misurati dai numeri $m, n$; e O B separa le classi di segmenti analoghi O $p$, O $q$ misurati dai numeri $p, q$, così A B separa le classi dei segmenti $mp$, $nq$ e perciò il numero $\alpha + \beta$ separa le due classi di numeri $m + p$, $n + q$: cosicchè si ha:

$$(M, N) + (P, Q) = (M + P, N + Q).$$

### Differenza dei numeri irrazionali.

Siano (fig. 3a) O A, O B due segmenti, di cui O A il maggiore, portati a partire da un punto O su una retta indefinita da una stessa parte di O; e siano $\alpha$, $\beta$ le loro misure rispetto il segmento unitario O U.

La differenza $\alpha - \beta$ che misura A B nel caso di $\alpha, \beta$ razionali si prenderà come misura di A B anche se $\alpha$ $\beta$ sono uno od entrambi irrazionali e espressi da (M, N); (P, Q).

In tal caso, segnato un segmento O C commensurabile con OU, maggiore di O B, e minore di O A, come il segmento O A separa la classe dei segmenti O $n$ dalla classe dei segmenti O $m$ terminati in un punto del segmento C A, e come O B separa la classe dei segmenti O $p$ dalla classe dei segmenti O $q$ terminati in un punto di B C, così il segmento A B separa la classe dei segmenti $m\,q$ da quella dei segmenti $n\,p$ e corrispondentemente la differenza $\alpha - \beta$ separa le due classi di numeri $m - q$; $n - p$: cosicchè abbiamo

$$(M, N) - (P, Q) = (M - Q,\ N - P).$$

### Prodotto di numeri irrazionali.

Siano (fig. 4ª) O A, O B due segmenti portati sui lati O $x$, O $y$ d'un angolo qualunque, e siano $\alpha\,\beta$ le loro misure rispetto un segmento unitario O U portato pure sul lato O $x$ a partire da O.

Tirisi U B e per A la A C parallela a U B.

In ogni caso si ha, secondo Euclide, la proporzione:

$$OC : OA = OB : OU.$$

E se i segmenti O A, O B (e quindi anche O C) sono commensurabili rispetto O U cosicchè le misure $\alpha\,\beta\,\gamma$ di quei tre segmenti siano numeri razionali, si ha anche la proporzione numerica

$$\gamma : \alpha = \beta : 1$$

onde

$$\gamma = \alpha\,\beta.$$

Adunque se $\alpha\,\beta$ sono razionali, il numero che misura O C è dato dal prodotto $\alpha\,\beta$. È naturale di assumere il numero che misura O C come prodotto dei numeri $\alpha, \beta$ anche se $\alpha\,\beta$ sono uno o entrambi irrazionali ed espressi da (M, N); (P, Q).

In tal caso siano O M, O N due segmenti misurati da $m, n$ e siano O P, O Q altri due segmenti misurati da $p, q$.

Tirate le U P, U Q e per M, N le rispettive parallele M R, N S si ottengono sul lato O $y$ due segmenti O R, O S che, essendo $m, n, p, q$ numeri razionali, rappresentano i prodotti $mp$, $nq$. Facilmente si dimostra essere O R minore e O S maggiore del segmento O C.

Difatti, tirata per A la A R′ parallela a M R si hanno, secondo Euclide, le seguenti proporzioni:

$$OA : OU = OC : OB = OR' : OP \; \ldots\ldots \; 1)$$
$$OA : OM = OR' : OR \; \ldots\ldots \; 2)$$

Dalla 1) per essere $OB > OP$ si deduce (Euclide, V, 14):

$$OC > OR';$$

dalla 2) per essere $OA > OM$ si deduce (Euclide, V, A):

$$OR' > OR,$$

onde, a fortiori, si ha:

$$OC > OR > mp.$$

Tirata poi per A la $AS'$ parallela a $NS$, si dimostrerebbe essere similmente

$$OC < OS < nq.$$

Adunque abbiamo trovato

$$mp < \gamma < nq.$$

È anche facile dimostrare che le coppie dei segmenti $OM$, $OP$ e dei segmenti $ON$, $OR$ si possono sempre prendere in modo che i risultanti segmenti $OR$, $OS$ differiscano tra loro per meno d'un segmento $EE'$ piccolo ad arbitrio.

Sia infatti $OR$ uno dei segmenti commensurabili con $OU$ e terminati ai punti del segmento $EC$ e così pure $OS$ un qualunque segmento commensurabile terminato tra C ed E': sarà allora $OR > OE$; $OS < OE'$ e la differenza tra $OS$, $OR$ riescirà minore di $EE'$.

Tirata allora la $AR$ e per U la parallela $UP'$, si prenda il punto P tra P' e B in modo che il segmento $OP$ risulti commensurabile e tirisi $RM$ parallela a $PU$.

Si hanno le proporzioni:

$$OM : OU = OR : OP \; \ldots\ldots\ldots \; 1)$$
$$OU : OA = OP' : OR \; \ldots\ldots\ldots \; 2)$$

dalle quali risulta che i tre segmenti $OM$, $OU$, $OA$ e i tre altri $OP'$, $OR$, $OP$ presi due a due, hanno la medesima ragione, ma in ordine perturbato; cosicchè si ottiene (Euclide, V, 23):

$$OM : OA = OP' : OP$$

ove, essendo $O P' < O P$, è pure

$$O M < O A.$$

Adunque il segmento commensurabile $O R$ risulta dai due segmenti $O M$, $O P$, dei quali $O P$, e quindi anche $O M$, è commensurabile con $O U$: cosicchè il segmento stesso $O R$ è misurato da un prodotto $mq$. Anologamente dimostro che il segmento $O S$ è misurato da un prodotto $n q$.

E come $O C$ separa la classe dei segmenti $O R$ da quella dei segmenti $O S$, così corrispondentemente il numero $\gamma$ separa le classi dei numeri $m p$, $n q$, e perciò è $\gamma = (M P, N Q)$, ossia è

$$(M, N) . (P, Q) = (M P, N Q).$$

### Quoziente di numeri irrazionali.

Siano (fig. 5ª) $O A$, $O B$ due segmenti riferiti all'unità $O U$ e misurati dai numeri $\alpha$ $\beta$.

Tirata $A B$ e per $U$ la $U C$ parallela ad $A B$, è:

$$O A : O C = O B : OU$$

e nel caso che $\alpha$ $\beta$, e quindi anche $\gamma = O C$, siano razionali, è pure

$$\alpha : \gamma = \beta : 1$$

onde

$$\gamma = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Nel caso che $\alpha$ $\beta$ siano uno o entrambi irrazionali, il quoziente $\frac{\alpha}{\beta}$ lo intenderemo ancora definito dal numero $\gamma$ che misura il segmento $O C$ trovato colla precedente costruzione.

In tal caso, supposto $\alpha = (M, N)$ $\beta = (P, Q)$ e prese, come pel prodotto, le coppie dei segmenti $O M$, $O N$ e dei segmenti $O P$, $O Q$, si conducano $M Q$, $N P$ e per $U$ le rispettive parallele $U R$, $U S$.

Si ottengono così sul lato $O y$ due segmenti $O R$, $O S$ che essendo $m, n, p, q$ razionali, sono misurati dai quozienti $\frac{m}{q}$ $\frac{n}{p}$: i quali segmenti si dimostra facilmente essere uno minore di $O C$, l'altro maggiore.

Difatti, tirata $B R'$ parallela a $U R$, si ha

$$O Q : O B = O M : O R' \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

$$O U : O B = O C : O A = O R : O R' \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

e dalla 1), per essere $O Q > O B$, è pure $O M > O R'$, e quindi anche:

$$O A > O R'$$

dalla 2) per essere $O R > O R'$ si deduce che è pure

$$O C > O R > \frac{m}{q}.$$

Analogamente, tirata $B S'$ parallela a $U S$, si troverebbe

$$O C < O S < \frac{n}{p}.$$

Si è dunque dimostrato essere:

$$\frac{m}{q} < \gamma < \frac{n}{p}.$$

Sia inoltre $E E'$ un segmento piccolo ad arbitrio e si prendano $O R$, $O S$ commensurabili con $O U$ e terminati l'uno tra $E$ e $C$, l'altro tra $C$ ed $E'$: cosicchè la differenza tra $O R$, $O S$ riesca minore di $E E'$.

Tirisi $U R$ e conducansi per $A, B$ le parallele $A S''$, $B R'$. Si ha:

$$O U : O B = O C : O A = O R : O R' \quad \ldots\ldots \quad 1);$$

si ha pure:

$$O R : O A = O U : O S''$$

$$O A : O C = O B : O U,$$

onde (Euclide, V, 23) deducesi la proporzione:

$$O R : O C = O B : O S'' \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

Si ha dalla 1), essendo $O R < O C$, che è pure

$$O R' < O A,$$

e dalla 2), essendo $O C > O R$, deducesi similmente

$$O S'' > O B.$$

Se ora $M Q$ è una parallela a $U R$ situata tra $B R'$, $A S''$ e che determini i segmenti $O M$, $O Q$ commensurabili con $O U$, si ha che $O R$ è misurato da un quoziente $\frac{m}{q}$.

Analogamente tirando A R'', B S'' parallele a U S e poi una parallela intermedia N P che determini i segmenti commensurabili O N, O P il segmento O S risulterebbe dal quoziente dei segmenti O N, O P e sarebbe misurato da $\frac{n}{p}$.

Ora, come O C separa le classi dei segmenti O R, O S, così il numero $\gamma$ separa le classi dei numeri $\frac{m}{q}$ $\frac{n}{p}$: è cioè $\gamma = \left(\frac{M}{Q}, \frac{N}{P}\right)$ ossia è:

$$(M, N) : (P, Q) = \left(\frac{M}{Q}, \frac{N}{P}\right).$$

*(Continua).*

A. Biffignandi.

# TEMI DI MATEMATICA

## PER LA LICENZA D'ISTITUTO TECNICO

## NELLA SEZIONE *FISICO-MATEMATICA*

*(Continuazione)*

Autunno 1882, I). — ***Determinare i lati d'un triangolo rettangolo, conoscendone l'area ed il raggio del cerchio inscritto.***

*Soluzione algebrica.* — Rappresenti $s^2$ l'area data del triangolo ed $r$ il raggio dato del cerchio inscritto. Chiamando $x$ l'ipotenusa ed $y$ e $z$ i cateti del triangolo, alla determinazione delle incognite si hanno le tre equazioni:

$$y\,z = 2\,s^2;\ \ x + y + z = \frac{2\,s^2}{r};\ \ x^2 = y^2 + z^2.$$

Dalla seconda segue:

$$x^2 = \frac{4\,s^4}{r^2} + y^2 + z^2 + 2\,y\,z - \frac{4\,s^2\,(y + z)}{r},$$

e sostituendo ad $y\,z$ ed $y^2 + z^2$ i valori corrispondenti dati dalla 1ª e 3ª equazione

$$s^2 + r^2 = r\,(y + z),$$

donde: $y + z = \frac{r^2 + s^2}{r}$ ed $x = \frac{s^2 - r^2}{r}$. Perchè il problema sia possibile occorre intanto che si abbia $s > r$, poichè $x$ non può essere una quantità negativa.

Conoscendo la somma ed il prodotto di $y$ e $z$, i valori di queste quantità saranno le radici dell'equazione:

$$X^2 - \frac{r^2+s^2}{r} X + 2 s^2 = 0,$$

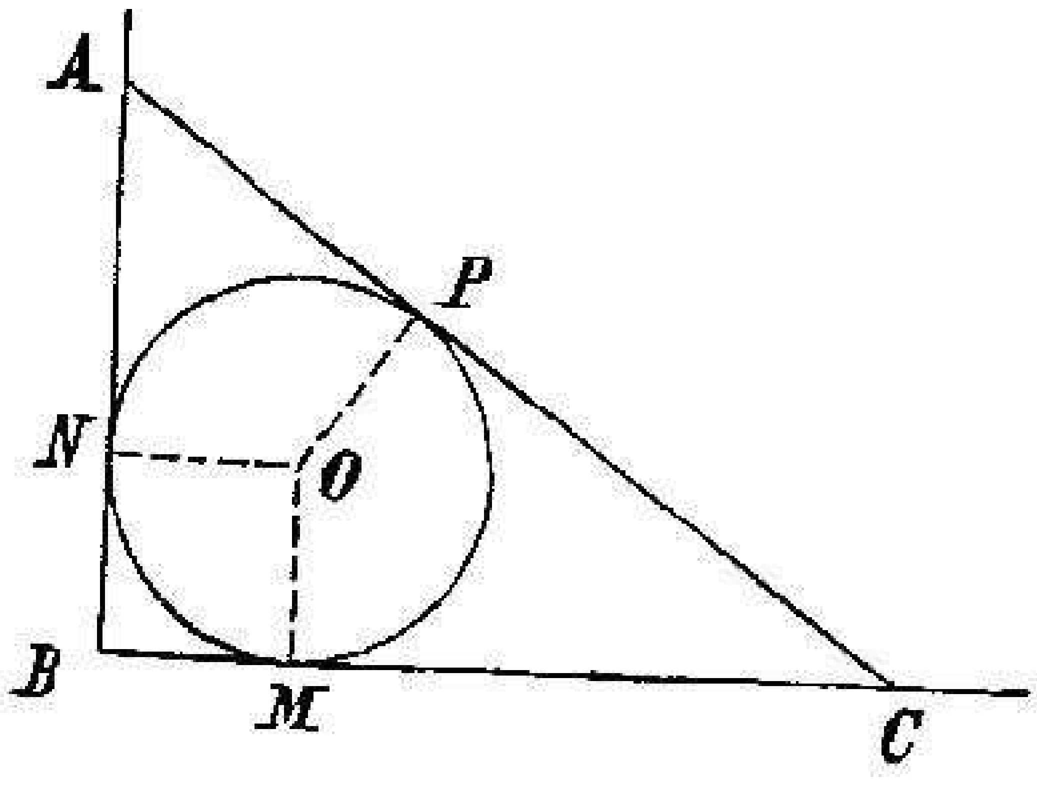
le quali sono:

$$y = \frac{r^2+s^2}{2r} + \sqrt{\left(\frac{s^2-r^2}{2r}\right)^2 - s^2}, \quad z = \frac{r^2+s^2}{2r} - \sqrt{\left(\frac{s^2-r^2}{2r}\right)^2 - s^2}.$$

Perchè queste radici siano reali, come il problema richiede, occorre che si abbia $\frac{s^2-r^2}{2r} > s$, ossia dividendo per $\frac{r}{2}$ e trasportando $\left(\frac{s}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{s}{r}\right) - 1 > 0$, sicchè il rapporto $\frac{s}{r}$ dovrà essere o maggiore della maggiore o minore della minore delle due radici dell'equazione $\rho^2 - 2\rho - 1 = 0$ le quali sono $\rho' = 1 + \sqrt{2}$ e $\rho'' = 1 - \sqrt{2}$. Dunque $\frac{s}{r} > \sqrt{2} + 1$, giacchè il rapporto stesso non può essere minore di $1 - \sqrt{2}$ che è una quantità negativa.

Segue da ciò che data l'area $s^2$ del triangolo, questo non esiste se non si ha $r < \frac{s}{\sqrt{2}+1}$, mentre dato il raggio $r$ del cerchio inscritto nel triangolo conviene scegliere l'area $s^2$ in modo che la radice quadrata di quest'area, ossia $s$, sia $> r(\sqrt{2}+1)$ ed inoltre: 1° *il massimo raggio del cerchio inscritto in un triangolo rettangolo di cui è data l'area* $s^2$ *si ha quando* $r = \frac{s}{\sqrt{2}+1} = s(\sqrt{2}-1)$; 2° *la minima area* $s^2$ *di un triangolo rettangolo di cui è dato il raggio* $r$ *del cerchio inscritto, si ha quando* $s = r(\sqrt{2}+1)$.

*Soluzione geometrica.* — Si descriva un angolo retto A B C, quindi un cerchio di raggio $r$ tangente ai due lati dell'angolo, poi tolta dall'area data un'area uguale a quella del quadrato M O N B del raggio del cerchio inscritto, si trasformi l'area rimanente in un triangolo avente per altezza il raggio O P; la metà della base di questo triangolo si chiami A′ C′. È chiaro che inserendo fra i lati dell'angolo retto un seg-



mento A C = A′ C′ in modo che sia tangente al cerchio M N P si avrà il triangolo richiesto A B C. A tale uopo si descriverà su A′ C′ un segmento di cerchio capace di un angolo uguale alla metà di 3 retti poi si determinerà quel punto dell'arco di tal segmento distante da A′ C′ della lunghezza $r$. Condotta da questo punto una perpendicolare ad A′ C′ i segmenti in cui il piede di questa perpendicolare divide A′ C′ saranno chiaramente quelli che nella figura terminano ad A e P ed a C e P, uguali rispettivamente ad N A ed M C. I punti A e C si possono quindi determinare con facilità e con essi il triangolo cercato.

Autunno 1882, II). — *Dividere un tronco di cono retto (circolare a basi parallele) in tre parti d'ugual volume, mediante due piani paralleli alle basi. (Dati i raggi* a, b *delle basi, si devono trovare i raggi delle due sezioni).*

Il trapezio isoscele A B C D rappresenti una sezione meridiana del tronco di cono circolare retto: sarà A B $= 2\,b$ e D C $= 2\,a$, con $a > b$. Chiamisi $x$ il raggio di una sezione del tronco, con un piano parallelo alle basi, che divide il tronco in due parti i cui volumi sono come $m : n$ e G H l'intersezione di questa sezione con quella meridiana: sarà G H $= 2\,x$. Si conduca poi per B la perpendicolare a D C che incontra G H in K e D C in E.

Chiamando $h$, H le altezze e $v$, V i volumi dei due tronchi di sezioni meridiane A B H G, A B C D, si avrà:

$$v = \frac{\pi h}{3}(b^2 + x^2 + b\,x),\ \mathrm{V} = \frac{\pi H}{3}(b^2 + a^2 + a\,b),$$

onde $x$ è da determinarsi dall'equazione:

$$h\,(b^2 + x^2 + b\,x) = \frac{m\,H}{m+n}(b^2 + a^2 + a\,b).$$

Ma dai triangoli simili B H K, B C E si ha $h : \mathrm{H} = x - b : a - b$, quindi:

$$(x - b)\,(b^2 + x^2 + b\,x) = (a - b)\,(b^2 + a^2 + a\,b)\frac{m}{m+n}$$

da cui

$$x = \sqrt[3]{b^3 + \frac{m}{m+n}(a^3 - b^3)}$$

con $x$ sempre reale e positiva $(a > b)$.

Facendo successivamente $m=1$, $n=2$ ed $m=2$, $n=1$ si hanno i raggi $x$ ed $x'$ cercati nell'enunciato, ossia

$$x=\sqrt[3]{b^3+\frac{1}{3}(a^3-b^3)},\quad x'=\sqrt[3]{b^3+\frac{2}{3}(a^3-b^3)}.$$

Se poi fosse $m=n=1$, allora si avrebbe

$$x=\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}.$$

Estate 1883, I a). — *Dividere il numero 13 in tre parti i cui quadrati diano la somma 75 e in modo che i tre quadrati siano in progressione aritmetica.*

Chiamando $n$ il numero dato 13, $s$ la somma 75 dei quadrati delle tre parti, ed $x$, $y$ due di queste con $x>y$, le equazioni generali del problema sono:

$$x^2+y^2+[n-(x+y)]^2=s\,;\ 2\,y^2-x^2-[n-(x+y)]^2=0,$$

da cui, dopo avere addizionato membro a membro, si deduce $y=\pm\sqrt{\frac{s}{3}}$.

Sostituendo questo valore di $y$ nella prima equazione, risulta

$$x^2+\frac{s}{3}+\left[n-\left(x\pm\sqrt{\frac{s}{3}}\right)\right]^2=s$$

ossia:

$$(1)\qquad x^2-\left(n\mp\sqrt{\frac{s}{3}}\right)x-\frac{s}{3}+\frac{1}{2}\left(n\mp\sqrt{\frac{s}{3}}\right)^2=0,$$

quindi:

$$x=\frac{1}{2}\left(n\mp\sqrt{\frac{s}{3}}\right)\pm\sqrt{\frac{s}{3}-\frac{1}{4}\left(n\mp\sqrt{\frac{s}{3}}\right)^2},$$

dove i segni superiori corrispondono al valore $+\sqrt{\frac{s}{3}}$ per $y$ e quelli inferiori al valore $-\sqrt{\frac{s}{3}}$.

Dall'espressione precedente per $x$ si può ricavare agevolmente una limitazione per $s$ corrispondentemente al valore di $n$. Considerando infatti i segni superiori, affinchè $x$ sia reale è necessario che si abbia $\frac{s}{3}\geqq\frac{1}{4}\left(n-\sqrt{\frac{s}{3}}\right)^2$ e quindi $s\geqq\frac{n^2}{3}$, mentre se si adottano i segni inferiori deve aversi $\frac{s}{3}\geqq\frac{1}{4}\left(n+\sqrt{\frac{s}{3}}\right)^2$, da cui deducesi $s\geqq 3\,n^2$. Risulta da ciò e dal fatto che la somma delle due radici dell'equazione (1) è uguale a $n \mp \sqrt{\frac{s}{3}}$, che, dato $n$, se $s$ è minore di $\frac{n^2}{3}$ il problema non ha soluzione, se $\frac{n^2}{3} \leqq s < 3n^2$ il problema ha una sola soluzione, e questa corrisponde al valore $+\sqrt{\frac{s}{3}}$ per $y$, finalmente se $s \geqq 3n^2$ il problema ha due soluzioni, corrispondenti ai valori $\pm\sqrt{\frac{s}{3}}$ per $y$.

Nel caso speciale considerato nell'enunciato, avendosi $s < 3 . 13^2$ e $> \frac{13^2}{3}$, il problema ha una soluzione unica, quella per la quale ad $x$, $y$ ed alla terza parte competono i valori 7, 5, 1.

Estate 1883, I b). — *Trovare la distanza del sole dalla terra, preso il raggio terrestre come unità, e supposto essere 8'',57 l'angolo che questo raggio sottende al centro del sole.*

*Risposta:* distanza $= \frac{\text{angolo al centro corrisp. all'arco} = \text{raggio}}{8'',57} = \frac{57^{\circ}.17'.44'',75}{8'',57} = 24068$ raggi terrestri.

Estate 1883, II a). — *Senza far uso di tavole, calcolare la tangente dell'arco di 37°. 30'.*

Osservando che $37^{\circ}.30' = \frac{1}{2}.75^{\circ}$ e che

$$\text{tg } 75^{\circ} = \frac{\cos 15^{\circ}}{\text{sen } 15^{\circ}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{3}-1}{2.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1},$$

si calcolerà la tangente richiesta $x$ dall'equazione $\frac{2x}{1-x^2} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$, ovvero:

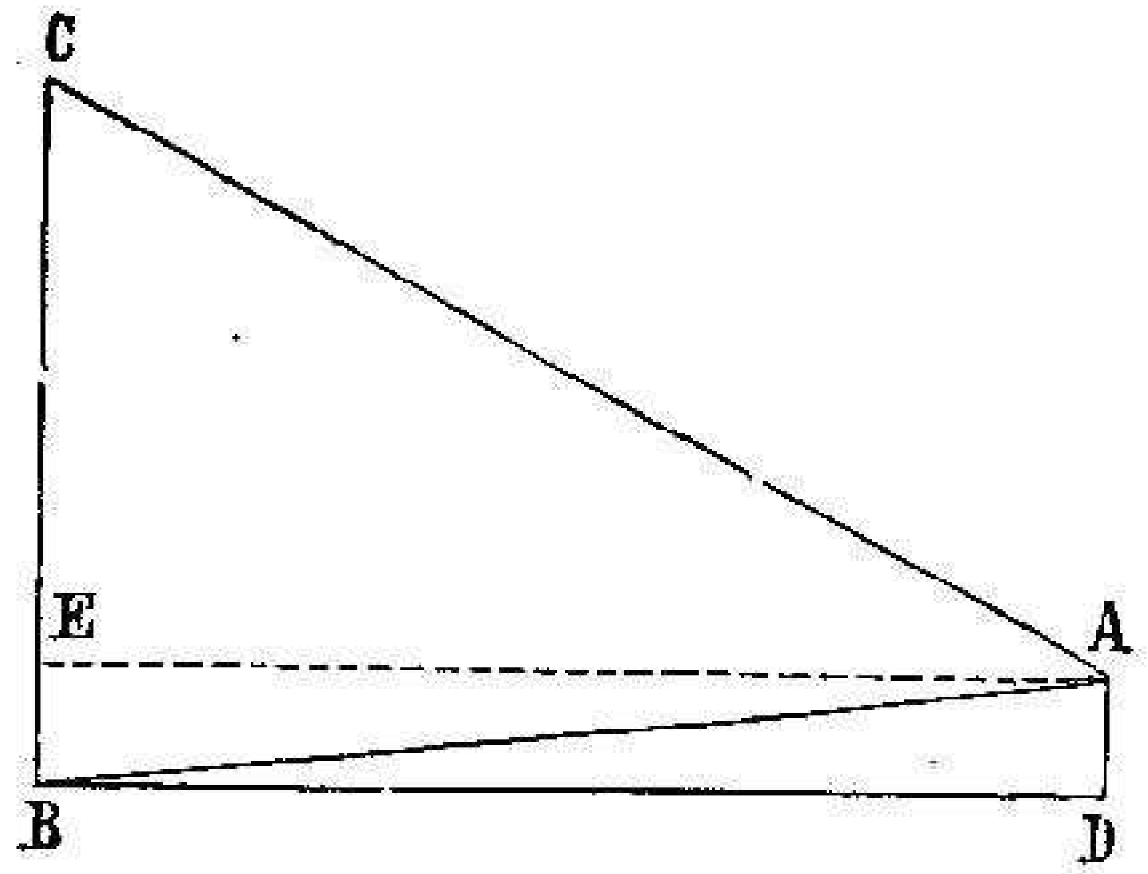
$$x^2 + 2(2-\sqrt{3})x - 1 = 0.$$

Da questa si ricava: $x = -(2-\sqrt{3}) \pm 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Dei due valori di $x$ dati da quest'espressione quello che si ha prendendo il segno — pel radicale è negativo, e poichè la tangente cercata dev'essere positiva, così sarà:

$$x = \text{tang } 37^{0}.30' = -(2-\sqrt{3}) + 2\sqrt{2-\sqrt{3}} = 0{,}7673270.$$

Estate 1883, II b). — *Un fiume separa un osservatore da una torre alta metri 64,8. Con un sestante l'osservatore, il cui occhio è a $1^m,50$ sul livello del piede della torre, determina in 47°. 56' l'angolo sotteso dall'altezza della torre. Qual'è la distanza dell'osservatore dalla torre?*



La verticale $CB$ rappresenti la torre, l'orizzontale $DB$ il piano del del terreno, e sia $A$ la posizione dell'occhio dell'osservatore. Immaginando da $A$ la perpendicolare $AD$ alla $DB$ e tracciate $AB$, $AC$, ed $AE$ parallela a $DB$, si avrà:

$$AD = EB = \text{m. } 1{,}5; \quad < CAB = 47^0.56'; \quad CB = 64{,}8.$$

Pongasi: $< DBA = \alpha$, $AD = h$, $BC = H$, $BD = x$, $< CAB = \beta$. Sarà $< CAE = \beta - \alpha$ e dai triangoli rettangoli ADB, CAE si avrà: $AD = h = x \,.\, \text{tang}\,\alpha$, $AE = x = (H - h)\cot(\beta - \alpha)$, donde, eliminando la $x$, e sviluppando $\cot(\beta - \alpha)$:

$$\frac{h}{\text{tang}\,\alpha} = (H - h)\frac{1 + \text{tang}\,\beta \,.\, \text{tang}\,\alpha}{\text{tang}\,\beta - \text{tang}\,\alpha}$$

ovvero:

$$(1) \;\ldots\; (H - h)\,\text{tang}\,\beta \,.\, \text{tang}^2\,\alpha + H\,\text{tang}\,\alpha - h\,\text{tang}\,\beta = 0.$$

Di qui ricavando tang $\alpha$, si avrà $x$ dalla relazione $x = \frac{h}{\text{tang}\,\alpha}$.

Poichè le quantità $H > h$ ed $h$ sono da supporsi positive e tang $\beta$ parimenti, dai segni dei termini dell'equazione (1) si deduce che la radice numericamente minore della medesima è positiva e l'altra da trascurare negativa. E così coi dati numerici dell'enunciato si trova tang $\alpha = 0{,}02488$ e quindi $x = \text{m. } 60{,}3$.

*(Continua).* A. Lugli.

## ESERCIZI SUL TRIANGOLO RETTANGOLO

I. *Data la bisettrice dell'angolo retto d'un triangolo rettangolo e l'area di questo, determinare i lati.*

Sia $\alpha$ la misura della bisettrice, $s$ la misura dell'area del triangolo. Indico con $z$, $x$, $y$ le misure rispettive dell'ipotenusa e dei cateti. Alla determinazione delle incognite servono le equazioni:

$$[1] \qquad xy = 2s; \; x^2 + y^2 = z^2; \; xy - \frac{xyz^2}{(x+y)^2} = \alpha^2.$$

Dalla 1ª e 2ª si ha: $(x+y)^2 = z^2 + 4s$. Sostituendo questo valore nella 3ª, questa diviene:

$$2s - \frac{2sz^2}{z^2+4s} = \alpha^2 \text{ ossia } \alpha^2 z^2 + 4s\alpha^2 - 8s^2 = 0$$

da cui

$$z = \pm\frac{2}{\alpha}\sqrt{s(2s-\alpha^2)}.$$

Dei due valori di $z$ quello proveniente dal segno meno non può soddisfare al problema, l'altro affinchè sia reale richiede che sia $2s - \alpha^2 > 0$, ovvero $\alpha < \sqrt{2s}$.

Sostituendo nella 2ª delle [1] il valore trovato di $z$, per determinare $x$, $y$ restano a risolvere le equazioni

$$x^2 + y^2 = \frac{8s^2 - 4s\alpha^2}{\alpha^2}; \; xy = 2s,$$

da cui si ha subito:

$$x + y = 2\sqrt{2}\frac{s}{\alpha}; \; x - y = \frac{2\sqrt{2}}{\alpha}\sqrt{s(s-\alpha^2)}$$

e successivamente:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}\left[s + \sqrt{s(s-\alpha^2)}\right]; \; y = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}\left[s - \sqrt{s(s-\alpha^2)}\right],$$

essendo inutile tener conto del doppio segno pel redicale in $x - y$.

Perchè i valori di $x$ ed $y$ siano reali è necessario che sia $s - \alpha^2 \geqq 0$ ossia $\alpha \leqq \sqrt{s}$, e poichè se questa condizione è soddisfatta lo è pure la precedente, così quest'ultima è la sola che si richiede perchè i valori di $x, y, z$ siano reali e positivi.

II. *Data la bisettrice dell'angolo retto d'un triangolo rettangolo e la sua ipotenusa, determinare i cateti.*

Siano $\alpha$ e $a$ le misure della bisettrice e dell'ipotenusa date e s'indichino con $x$, $y$ quelle dei cateti. Si hanno le equazioni:

$$[1] \qquad x^2 + y^2 = a^2; \; xy - \frac{a^2xy}{(x+y)^2} = \alpha^2.$$

Dalla 2ª di queste, tenendo conto della 1ª, si ricava facilmente:

$$2(xy)^2 - 2\alpha^2(xy) - a^2\alpha^2 = 0 \text{ donde: } xy = \frac{\alpha(\alpha \pm \sqrt{2a^2+\alpha^2})}{2}.$$

Evidentemente $xy$ è positivo, quindi pel radicale deve prendersi il segno più, chè essendo $\sqrt{2a^2+\alpha^2} > \alpha$, se si prendesse il segno meno, $xy$ riuscirebbe negativo. Si è così trasformato il sistema [1] nell'altro

$$x^2 + y^2 = a^2; \; 2xy = \alpha(\alpha + \sqrt{2a^2+\alpha^2}).$$

Da questo deduconsi immediatamente i valori di $x + y$ e $x - y$ e quindi $x$ e $y$ ossia:

$$x = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a^2 + \alpha(\alpha + \sqrt{2a^2 + \alpha^2})} + \sqrt{a^2 - \alpha(\alpha + \sqrt{2a^2 + \alpha^2})}\right]$$

$$y = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a^2 + \alpha(\alpha + \sqrt{2a^2 + \alpha^2})} - \sqrt{a^2 + \alpha(\alpha + \sqrt{2a^2 + \alpha^2})}\right].$$

Ora perchè i valori di $x$ ed $y$ siano reali e positivi è necessario e sufficiente che sia $a^2 - \alpha(\alpha + \sqrt{2a^2 + \alpha^2}) \geqq 0$, da cui trasportando il radicale nel 2° membro, quadrando e riducendo si ricava $a^2 \geqq 2\alpha$.

III. *Data l'altezza corrispondente all'ipotenusa e la bisettrice dell'angolo retto d'un triangolo rettangolo, determinare i suoi lati.*

Indicando con $h$ ed $\alpha$ le misure dell'altezza e della bisettrice, con $x, y, z$ rispettivamente le misure dei cateti e dell'ipotenusa, alla soluzione del problema si hanno le equazioni:

$$[1] \qquad xy = hz;\; x^2 + y^2 = z^2;\; xy - \frac{xyz^2}{(x+y)^2} = \alpha^2.$$

Dall'ultima di queste, tenendo conto delle due altre, si ricava

$$hz - \frac{hz^3}{z^2 + 2hz} = \alpha^2 \text{ da cui deducesi } z = \frac{2h\alpha^2}{2h^2 - \alpha^2}.$$

Si ha perciò da risolvere il sistema:

$$x^2 + y^2 = \frac{4h^2\alpha^4}{(2h^2 - \alpha^2)^2};\; xy = \frac{2h^2\alpha^2}{2h^2 - \alpha^2}$$

dal quale ricavasi, operando come nei precedenti esercizi:

$$x = \frac{\sqrt{2}h\alpha}{2h^2 - \alpha^2}(h + \sqrt{\alpha^2 - h^2});\; y = \frac{\sqrt{2}h\alpha}{2h^2 - \alpha^2}(h - \sqrt{\alpha^2 - h^2}).$$

Perchè $x$ e $y$ riescano numeri reali è necessario che sia $\alpha^2 - h^2 \geqq 0$, ossia $\alpha \geqq h$, perchè poi siano positivi e finiti deve essere $2h^2 - \alpha^2 > 0$, la quale include pure $h - \sqrt{\alpha^2 h^2} > 0$. Infatti da quest'ultima deducesi successivamente $h > \sqrt{\alpha^2 - h^2}$ e $2h^2 - \alpha^2 > 0$. Si ha così che $\alpha < \sqrt{2}.h$, onde risultano per $\alpha$ le limitazioni $\sqrt{2}.h > \alpha \geqq h$ od anche $\sqrt{2} > \frac{\alpha}{h} \geqq 1$.

IV. *Dato il perimetro d'un triangolo rettangolo e la bisettrice dell'angolo retto, determinare i lati del triangolo.*

Indicando rispettivamente con $\alpha$, $2p$, $x$, $y$, $z$ le misure della bisettrice, del perimetro, dei cateti e dell'ipotenusa, alla determinazione delle incognite si hanno le equazioni:

$$x^2 + y^2 = z^2;\; x + y + z = 2p;\; xy - \frac{xyz^2}{(x+y)^2} = \alpha^2.$$

Dalla 1ª e 3ª si ricava subito:

$$\frac{x\,y\,\sqrt{2}}{x+y}=\alpha \quad \text{ossia} \quad x\,y\,\sqrt{2}-\alpha(x+y)=0.$$

Dalla 1ª e 2ª risulta poi:

$x^2+y^2=(2p-x-y)^2$, da cui $x\,y-2p\,x-2p\,y+2p^2=0.$

Si ha così da risolvere il sistema:

$$x\,y-2p(x+y)+2p^2=0;\quad x\,y\,\sqrt{2}-\alpha(x+y)=0.$$

Da questo deducesi:

$$x\,y=\frac{2p^2\alpha}{2\sqrt{2}\,.\,p-\alpha},\quad x+y=\frac{2p^2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\,.\,p-\alpha},$$

donde

$$x=\frac{\sqrt{2}\,.\,p}{2\sqrt{2}\,.\,p-\alpha}\left[p+\sqrt{\alpha^2-2\sqrt{2}\,.\,p\,\alpha+p^2}\right];$$

$$y=\frac{\sqrt{2}\,.\,p}{2\sqrt{2}\,.\,p-\alpha}\left[p-\sqrt{\alpha^2-2\sqrt{2}\,.\,p\,\alpha+p^2}\right].$$

Si ha poi subito

$$z=\frac{2p}{2p\sqrt{2}-\alpha}\left[p\sqrt{2}-\alpha\right].$$

Perchè i valori di $x$ ed $y$ siano reali occorre che si abbia $\alpha^2-2\sqrt{2}\,\alpha p+p^2\geqq 0$, onde, se $p$ si considera determinata, i valori possibili di $\alpha$ soddisfacenti a questa condizione saranno quelli maggiori della maggiore o minori della minore delle radici dell'equazione $\alpha^2-2\sqrt{2}\,\alpha p+p^2=0$, le quali sono $\alpha=p(\sqrt{2}\pm 1)$; se poi vuolsi che i valori medesimi siano anche positivi, come richiede la natura del problema, conviene che sia $2\sqrt{2}p-\alpha>0$. Ma considerando che pure $z$ dev' essere positiva, e perciò deve aversi $p\sqrt{2}-\alpha>0$, ossia $\alpha<p\sqrt{2}$ (la qual condizione trascina l'altra $2\sqrt{2}p-\alpha>0$), si ricava immediatamente che i soli valori accettabili per $\alpha$ son quelli minori od uguali a $p(\sqrt{2}-1)$ ed il massimo valore attribuibile ad $\alpha$ è precisamente $p(\sqrt{2}-1)$. Si è pervenuti così al risultato che di tutti i triangoli rettangoli di dato perimetro $2p$ quello ha la massima bisettrice $\alpha$ dell'angolo retto pel quale ad $\alpha$ spetta il valore $p(\sqrt{2}-1)$ e in questo caso ad $x$, $y$, $z$ corrispondono i valori

$$x=\frac{\sqrt{2}\,.\,p}{1+\sqrt{2}};\quad y=\frac{\sqrt{2}\,.\,p}{1+\sqrt{2}};\quad z=\frac{2p}{1+\sqrt{2}},$$

onde il triangolo in discorso è isoscele.

Viceversa, considerando come determinato $\alpha$, perchè i valori di $x$ ed $y$ siano reali conviene che $p$ sia maggiore della maggiore o minore della minore delle due radici della stessa equazione $p^2 - 2\sqrt{2}\,\alpha p + \alpha^2 = 0$ considerandovi $p$ come incognita, le quali sono $p = \alpha(\sqrt{2} \pm 1) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(2 \pm \sqrt{2})$.

Ma poichè $z$ dev'essere positiva insieme ad $x$ ed $y$, conviene inoltre che si abbia $\sqrt{2}\,p - \alpha > 0$, ossia $p > \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$, onde, essendo $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(2 - \sqrt{2}) < \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$, i valori da ritenersi per $p$ saranno soltanto quelli maggiori od uguali ad $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(2 + \sqrt{2})$ e il minor valore che può prendere $p$ sarà precisamente $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(2 + \sqrt{2})$. Si deduce da ciò che tutti i triangoli rettangoli aventi una determinata bisettrice $\alpha$ dell'angolo retto, quello ha il minimo perimetro $p$, pel quale $p$ ha il valor precedente, ed allora ad $x$, $y$, $z$ corrispondono poi i valori

$$x = y = \frac{\alpha(2+\sqrt{2})^2}{4+3\sqrt{2}}, \qquad z = \frac{\sqrt{2}\,\alpha(2+\sqrt{2})^2}{4+3\sqrt{2}}$$

ed il triangolo che si ottiene è isoscele.

D. Gambioli.

# ESERCIZI PER LA SCUOLA

## Applicazione della teorica delle progressioni.

1. Dimostrare che dando ad $i$ i valori $1, 2, \ldots m$ e supponendo che $a_1, a_2, \ldots a_m$ formino una progressione aritmetica di ragione $d'$, la somma S delle somme $S_1, S_2, \ldots S_m$ delle $m$ progressioni aritmetiche che si deducono dalla

$$\div a_i \,.\, a_i + d \,.\, a_i + 2d \ldots a_i + (n-1)d$$

è

$$S = a_1 m^2 + \frac{mn(n-1)}{2} d + \frac{m^2(m-1)}{2} d'$$

e in particolare supponendo che i numeri $a_1, a_2, \ldots a_m$ siano $1, 3, \ldots 2m-1$ e si abbia $d = 2$

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_m = m(m^2 + n^2 - n).$$

2. Dal risultato generale dell'es. prec. dedurre che la somma dei termini del quadro

$$\begin{array}{llll} 1 & 2 & 3 & \dots m \\ 2 & 3 & 4 & \dots m+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m & m+1 & m+2 & \dots 2m-1 \end{array}$$

è $m^3$.

3. Se $a_1, a_2, \dots a_m$ sono i termini d'una progressione aritmetica di ragione $d$ e si forma il quadro

$$\begin{array}{llll} a_1 & a_2 & a_3 & \dots a_m \\ 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 & \dots 2a_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ na_1 & na_2 & na_3 & \dots na_m, \end{array}$$

dimostrare che la somma dei termini del medesimo è

$$\left\{a_1 m + \frac{m(m-1)}{2} d\right\} \frac{n(n+1)}{2}.$$

4. Dal risultato dell'es. prec. dedurre che la somma dei numeri del quadro

$$\begin{array}{llll} 1 & 2 & 3 & \dots m \\ 2 & 4 & 6 & \dots 2m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m & 2m & 3m & \dots m^2 \end{array}$$

è

$$\left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2$$

e in particolare che la somma dei numeri della tavola di moltiplicazione (pitagorica) è 2025.

5. Dimostrare che se $S_1, S_2, \dots S_m$ rappresentano le somme dei primi $n$ termini di $m$ progressioni aritmetiche i cui primi termini $a_1, a_2, \dots a_m$ formano una progressione aritmetica di ragione $d$ e le cui ragioni $d_1, d_2, \dots d_m$ formano parimenti una progressione aritmetica di ragione $d'$, si ha:

$$S_1 + S_2 + \dots + S_m = n\left\{a_1 m + \frac{m(m-1)}{2} d\right\} + \\ + \frac{n(n-1)}{2}\left\{d_1 m + \frac{m(m-1)}{2} d'\right\}$$

e in particolare se $a_1, a_2, \dots a_m$ sono i numeri $1, 2, \dots m$ e $d_1, d_2, \dots d_m$ i numeri $1, 3, \dots 2m-1$

$$S_1 + S_2 + \dots + S_m = \frac{nm(1+mn)}{2}.$$

6. Dimostrare che dando ad $i$ i valori $1, 2, \ldots m$ e supponendo che $a_1, a_2, \ldots a_m$ siano i termini d'una progressione geometrica di ragione $q$, la somma S delle somme dei termini delle $m$ progressioni aritmetiche che si deducono dalla

$$\div a_i \,.\, a_i + d \,.\, a_i + 2\,d \ldots a_i + (n-1)\,d$$

è

$$S = n\,a_1 \frac{q^m - 1}{q - 1} + m\,d \frac{n\,(n-1)}{2}.$$

7. Dimostrare che se $S_1, S_2, \ldots S_m$ rappresentano le somme dei primi $n$ termini di $m$ progressioni geometriche aventi la stessa ragione $q$ e per primi termini i numeri $a_1, a_2, \ldots a_m$, formanti una progressione aritmetica di ragione $d$, si ha

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_m = \left(a_1\,m + \frac{m\,(m-1)}{2} \,.\, d\right) \frac{q^m - 1}{q - 1}$$

e in particolare se $a_1, a_2 \ldots a_m$ sono i numeri $a,\ 2\,a, \ldots m\,a$

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_m = \frac{a\,m\,(m+1)}{2} \frac{q^m - 1}{q - 1}.$$

8. Dimostrare che dando ad $i$ i valori di $1, 2, \ldots m$ e supponendo che $a_1, a_2, \ldots a_m$ siano i termini d'una progressione geometrica di ragione $r$, la somma S delle somme dei termini delle $m$ progressioni geometriche di ragione $q$ che si deducono dalla

$$\div\!\!\div\, a_i : a_i\,q : a_i\,q^2 : \ldots : a_i\,q^{n-1}$$

è

$$S = a_1 \frac{r^m - 1}{r - 1} \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

9. Nel caso dell'es. prec., supponendo che $m$ ed $n$ crescano indefinitamente, mostrare che S ha per valor limite

$$a_1 \frac{1}{(1-r)\,(1-q)}.$$

10. Dimostrare che se $S_1, S_2, \ldots S_m$ rappresentano i limiti delle somme di $m$ progressioni geometriche decrescenti aventi per primo termine 1 e per ragioni rispettivamente $q, q^2, \ldots q^m$, si ha:

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \ldots + \frac{1}{S_m} = m - \frac{q\,(1-q^m)}{1-q}.$$

11. Date le somme $S_n, S_p$ dei primi $n$ e $p$ termini, rispettivamente, d'una progressione aritmetica, mostrare che il primo termine della medesima è $\frac{p\,(p-1)\,S_n - n\,(n-1)\,S_p}{n\,p\,(p-n)}$, e la ragione $\frac{2\,n\,S_p - 2\,p\,S_n}{n\,p\,(p-n)}$.

12. Se $a_m$, $a_n$, $a_p$ rappresentano i termini $m^{esimo}$, $n^{esimo}$, $p^{esimo}$ d'una progressione aritmetica, mostrare che si ha la relazione:

$$(p-n)\,a_m + (m-p)\,a_n + (n-m)\,a_p = 0.$$

13. Se $a_m$, $a_n$, $a_p$ rappresentano i termini $m^{esimo}$, $n^{esimo}$, $p^{esimo}$ di una progressione geometrica, mostrare che si ha:

$$(a_m)^{p-n}\,(a_n)^{m-p}\,(a_p)^{n-m} = 1.$$

14. Se $S_m$, $S_n$, $S_p$ rappresentano rispettivamente le somme dei primi $m$, $n$, $p$ termini d'una progressione aritmetica, mostrare che si ha la relazione:

$$n\,p\,(p-n)\,S_m + p\,m\,(m-p)\,S_n + m\,n\,(n-m)\,S_p = 0.$$

15. Dimostrare che se $P_m$, $P_n$, $P_p$ rappresentano, rispettivamente, i prodotti dei primi $m$, $n$, $p$ termini d'una progressione geometrica, si ha la relazione:

$$P_m^{\,n\,p\,(p-n)}\,.\,P_n^{\,p\,m\,(m-p)}\,.\,P_p^{\,m\,n\,(n-m)} = 1.$$

16. Dall'identità:

$$(n+1)^3 - n^3 = 3\,n\,(n+1) + 1,$$

dedurre che la somma dei primi $m-1$ *numeri triangolari* $\frac{1\,.\,2}{2}$, $\frac{2\,.\,3}{2}$, $\ldots \frac{(m-1)\,m}{2}$, è

$$\frac{(m-1)\,m\,(m+1)}{6}.$$

17. Addizionando termine a termine le due somme

$$1 + 1\,.\,2 + 1\,.\,3 + \ldots + 1\,.\,m$$
$$0\,.\,1 + 1\,.\,2 + 2\,.\,3 + \ldots + (m-1)\,.\,m,$$

dedurre che

$$1^2 + 2^2 + \ldots + m^2 = \frac{m\,(m+1)\,(2\,m+1)}{6}.$$

18. Dimostrare che la somma dei prodotti due a due, in tutti i modi possibili, dei numeri $1, 2, 3, \ldots m$ è

$$\frac{(m-1)\,m\,(m+1)\,(3\,m+2)}{12}.$$

19. Dimostrare che la somma dei prodotti dei termini corrispondenti delle due progressioni

$$\div\, a\,.\,(a+x)\,.\,(a+2\,x)\,.\,\ldots\,.\,(a+[m-1]\,x)$$
$$\div\, b\,.\,(b+y)\,.\,(b+2\,y)\,.\,\ldots\,.\,(b+[m-1]\,y)$$

è

$$m\,a\,b + \frac{m\,(m-1)}{2}\,(b\,x + a\,y) + \frac{(m-1)\,m\,(2\,m-1)}{6}\,x\,y.$$

20. Dimostrare che la somma dei termini della serie che si ottiene moltiplicando i termini corrispondenti delle due progressioni

$$\div a \,.\, (a + x) \,.\, (a + 2\,x) \,.\, \ldots \,.\, (a + [n - 1]\,x)$$
$$\div\!\div b : \quad b\,y \quad : \quad b\,y^2 \quad : \ldots : \quad b\,y^{n-1}$$

è

$$b\left(a - \frac{x\,y}{y - 1}\right) . \frac{y^n - 1}{y - 1} + \frac{n\,b\,x\,y^n}{y - 1} .$$

21. Dimostrare che il limite della somma

$$a\,b + (a + x)\,b\,y + (a + 2\,x)\,b\,y^2 + \ldots + (a + [n - 1]\,x)\,b\,y^{n-1} + \ldots,$$

in cui $y$ è minore dell'unità, quando $n$ cresce indefinitamente, è

$$\frac{a\,b}{1 - y} + \frac{b\,x\,y}{1 - y^2} .$$

22. Dimostrare che la somma dei termini della serie che si ottiene dividendo i termini corrispondenti delle due progressioni

$$\div a \,.\, (a + x) \,.\, (a + 2\,x) \,.\, \ldots \,.\, (a + [n - 1]\,x)$$
$$\div\!\div b : \quad b\,y \quad : \quad b\,y^2 \quad : \ldots : \quad b\,y^{n-1}$$

è

$$\frac{1}{b\,(y - 1)\,y^{n-1}} \left\{ a\,(y^n - 1) + \frac{x\,(y^n - 1)}{y - 1} - n\,x \right\} .$$

23. Dimostrare che il limite della somma

$$\frac{a}{b} + \frac{a + x}{b\,y} + \frac{a + 2\,x}{b\,y^2} + \ldots + \frac{a + [n - 1]\,x}{b\,y^{n-1}} + \ldots,$$

in cui $y$ è maggiore dell'unità, quando $n$ cresce indefinitamente, è

$$\frac{a\,y^2 + x\,y - a\,y}{b\,y^2 + 2\,b\,y + b} .$$

24. Dimostrare che la somma

$$\frac{a}{e} + \frac{a\,c + b}{e\,d} + \frac{a\,c^2 + b\,c + b}{e\,d^2} + \ldots + \frac{a\,c^{m-1} + b\,c^{m-2} + \ldots + b\,c + b}{e\,d^{m-1}},$$

è

$$\frac{a\,(c - d)\,(c - 1)\,(d - 1) + b\,(c^m - 1)\,(d - 1) - b\,(d^m - 1)\,(c - 1)}{e\,d^{m-1}\,(c - d)\,(c - 1)\,(d - 1)} .$$

25. Dimostrare che avendosi $c < d$ e $d > 1$, la somma della serie infinita

$$\frac{a}{e} + \frac{a\,c + b}{e\,d} + \frac{a\,c^2 + b\,c + b}{e\,d^2} + \frac{a\,c^3 + b\,c^2 + b\,c + b}{e\,d^3} + \ldots$$

è

$$\frac{a\,d^2 - a\,d + b\,d}{e\,d^2 - e\,c\,d - e\,d + e\,c} .$$

A. Lugli.

## SOLUZIONE DELLE QUISTIONI 20, 21 e 22

**20.** *Provare che esistono due triangoli isosceli, e due soli, col perimetro di 8 metri e l'area di 2 metri quadrati, e calcolare la base di ciascuno di essi a meno di un millesimo di millimetro.*

D. Besso.

Soluzione del Prof. *F. Viaggi* (*).

Ciascuno dei lati eguali d'un triangolo isoscele sia misurato da $y$ e la base da $2x$; siano $2p$ il perimetro ed $a$ l'area del triangolo: $a, p$ sono costanti positive.

Si stabiliscono le seguenti equazioni

$$y = p - x$$
$$x\sqrt{y^2 - x^2} = a$$

dalle quali, eliminando $y$, si ricava l'equazione cubica

$$2px^3 - p^2x^2 + a^2 = 0 \tag{1}$$

che può anche scriversi così:

$$\left(x - \frac{p}{3}\right)^2\left(2x + \frac{p}{3}\right) + a^2 - \frac{p^4}{27} = 0. \tag{1'}$$

Attribuendo ad $x$ valori continuamente decrescenti da 0 a $-\infty$, $2px^3$ e $-p^2x^2$ decrescono continuamente da 0 a $-\infty$ e il 1° membro della (1) da $a^2$ a $-\infty$, perciò (1) ammette sempre una ed una sola radice negativa.

Se $a^2 - \frac{p^4}{27} > 0$, per ogni valore positivo attribuito alla $x$ il 1° membro della (1') assume valore positivo, quindi (1) non ha radice positiva.

Se $a^2 - \frac{p^4}{27} = 0$, la (1') e quindi (1) ammette la radice doppia positiva $\frac{p}{3}$.

Se $a^2 - \frac{p^4}{27} < 0$, poichè per due valori consecutivi scelti tra $0, \frac{p}{3}, \frac{p}{2}$ e attribuiti ad $x$ il 1° membro della (1') assume valori di segni contrari, la (1') ha due radici positive comprese tra 0 e $\frac{p}{2}$. In questo caso, se $\varphi$ è un angolo ausiliario acuto determinato dalla equazione

$$\cos\varphi = \frac{3\sqrt{3}\,a}{p^2},$$

la (1) si trasforma nella seguente:

$$4\left(\frac{\sqrt{3}\,a}{2p}\cdot\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{\sqrt{3}\,a}{2p}\cdot\frac{1}{x}\right) = \cos(\varphi - 180°);$$

(*) Altre soluzioni vennero inviate dai Sig.[i] Prof.[i] *E. Milloserich*, *R. Badia*, *F. Palatini*.

e confrontando questa con l'identità

$$4\cos^3\left(\frac{\varphi}{3} - 60^\circ + k.120^\circ\right) - 3\cos\left(\frac{\varphi}{3} - 60^\circ + k.120^\circ\right) = \cos(\varphi - 180^\circ),$$

si scorge che le sue radici sono fornite dalla formola

$$x = \frac{\sqrt{3}\,a}{2p}\sec\left(\frac{\varphi}{3} - 60^\circ + k.120^\circ\right),$$

dalla quale, ponendo $k = 0, 1, 2$ si deducono le radici positive

$$\left.\begin{matrix} x' \\ x'' \end{matrix}\right\} = \frac{\sqrt{3}\,a}{2p}\sec\left(60^\circ \pm \frac{\varphi}{3}\right)$$

e la negativa

$$x''' = -\frac{\sqrt{3}\,a}{2p}\sec\frac{\varphi}{3}.$$

Ora delle radici di (1) conducono ad una soluzione del problema geometrico quelle che sono positive e minori del valore corrispondente d'$y$, ossia quelle comprese tra 0 e $\frac{p}{2}$: perciò nel 1° caso il problema non ha soluzione, nel 2° ne ha una sola e il triangolo risulta equilatero, nel 3° ne ha due.

Il caso di $p = 4$, $a = 2$ rientra nel 3°, e per questi valori particolari si ha

$$\begin{aligned} x' &= 1{,}85463\,76797\ldots \\ x'' &= 0{,}59696\,82832\ldots \\ x''' &= -0{,}45160\,59629\ldots \end{aligned}$$

e le basi dei due triangoli che rispondono al problema calcolate a meno di un mezzo millesimo di millimetro sono di metri 3,709275 e 1,193937.

*Osservazione.* Se ci si propone di calcolare la base ($2x$) d'un triangolo isoscele, data l'area ($a$) e la differenza ($2p$) tra la somma ($2y$) dei lati eguali e la base; si ottiene il sistema d'equazioni che si deduce dal precedente cambiando il segno alla lettera $x$. Dalla discussione precedente si conchiude che questo nuovo problema ammette sempre una soluzione e una sola.

Nel caso di $p = 4$, $a = 2$ la base calcolata a meno di un mezzo millesimo di millimetro è di metri 0,903212.

**21.** *Sulle perpendicolari ad un piano dato, innalzate da due suoi punti A, A', sono presi i segmenti $AB = 2a$; $A'B' = a$; è data la distanza $AA' = a\sqrt{2}$, ed è dato l'angolo acuto che una retta AR di quel piano forma colla AA': trovare sulla AR un punto C tale che sia l'angolo BCA doppio dell'angolo B'CA'.*

D. Besso

Soluzione del Prof. *F. Viaggi* (*).

Sia $\alpha$ l'angolo che la direzione AR forma con la AA'; e sieno $AC = ax$, $A'C = ay$; $x, y$ rappresentano numeri positivi.

---

(*) Un'altra soluzione venne inviata dal Sig. Prof. *E. Millosevich.*

Poichè $\cot g \, BCA = \frac{x}{2}$, $\cot g \, B'CA' = y$, essendo per ipotesi l'angolo BCA doppio di B'CA', si ottiene la seguente equazione:

$$x = \frac{y^2 - 1}{y} \qquad (1)$$

Un'altra equazione s'ottiene scrivendo la relazione tra i lati del triangolo ACA' e l'angolo $\alpha$:

$$y^2 = x^2 - 2\sqrt{2}\, x \cos\alpha + 2;$$

e dalle due, eliminando $x$,

$$y^3 - y - \frac{1}{2\sqrt{2}\cos\alpha} = 0 \qquad (2)$$

che può anche scriversi nel modo seguente:

$$\left(y - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(y + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}\cos\alpha} = 0 \qquad (2').$$

Conducono a una soluzione del problema le radici di (2) che sieno positive e diano per $x$ valore positivo, ossia le radici maggiori di 1. Ora $y^3 - y = y(y+1)(y-1)$ cresce continuamente da 0 a $+\infty$ se ad $y$ si attribuiscono valori crescenti da 1 a $+\infty$, perciò:

Se $\alpha > 90°$, il 1° membro della (2) rimane positivo per valori eguali o maggiori di 1 attribuiti ad $y$, ossia la (2) non ammette radice maggiore di 1 e il problema non ha soluzione;

Se $\alpha = 90°$, la (2) ha la radice $\infty$, e quindi il punto all'infinito di AR risponde al problema;

Se $\alpha < 90°$, che è l'ipotesi del testo, la (2) ammette una ed una sola radice maggiore di 1: e può anche osservarsi che essa è la sola radice positiva di (2), perchè le sue tre radici, avendo per somma 0, non possono essere tutte e tre positive, ed avendo per prodotto il numero positivo $\frac{1}{2\sqrt{2}\cos\alpha}$ debbono essere una positiva e due negative, se reali. Rimanendo dunque nell'ipotesi $\alpha < 90°$, basterà prendere la radice positiva di (2), ed essa condurrà alla soluzione del problema: procediamo alla determinazione di tal radice.

Sia intanto $\alpha_1$ l'angolo acuto determinato dalla equazione

$$\cos\alpha_1 = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},$$

ossia

$$\alpha_1 = 23°\, 17'\, 1'',4342 \ldots$$

Se $\alpha > \alpha_1$, e quindi $\frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}\cos\alpha} < 0$, radice negativa la (2) non ne ha (il che si rende manifesto, ove si osservi che per valori negativi d'$y$ il primo membro della (2') è negativo); unica radice reale è la positiva che è fornita dalla formola cardanica

$$y=\left\{\frac{1}{4\sqrt{2}\cos\alpha}+\sqrt{\frac{1}{32\cos^2\alpha}-\frac{1}{27}}\right\}^{\frac{1}{3}}+\left\{\frac{1}{4\sqrt{2}\cos\alpha}-\sqrt{\frac{1}{32\cos^2\alpha}-\frac{1}{27}}\right\}^{\frac{1}{3}}$$

la quale con l'aiuto dei due angoli ausiliari acuti $\varphi$ e $\psi$, determinati dalle equazioni

$$\operatorname{sen}\varphi=\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\cos\alpha,\quad \operatorname{tang}\psi=\sqrt[3]{\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}},$$

diventa

$$y=\frac{2}{\sqrt{3}\operatorname{sen}2\psi}$$

e quindi da (1)

$$x=\frac{\operatorname{sen}^2 2\psi}{2\sqrt{3}\operatorname{sen}\varphi}.$$

Se $\alpha=\alpha_1$, e quindi $\frac{2}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{2}\cos\alpha}=0$, le radici di (2') sono una positiva e un'altra doppia negativa, epperò

$$y=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

e da (1)

$$x=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Se $\alpha<\alpha_1$, e quindi $\frac{2}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{2}\cos\alpha}>0$, mercè l'angolo acuto ausiliario $\varphi$ determinato dall'equazione

$$\cos\varphi=\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}\cos\alpha},$$

l'equazione (2) si rasforma nella seguente

$$4\,.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^3-3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)=\cos\varphi,$$

e paragonando questa coll'identità

$$4\cos^3\left(\frac{\varphi}{3}+k\,.\,120^\circ\right)-3\cos\left(\frac{\varphi}{3}+k\,.\,120^\circ\right)=\cos\varphi$$

si scorge che le sue radici sono fornite dalla formola

$$y=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+k\,.\,120^\circ\right)$$

e, limitandoci alla radice positiva, si ha per questo terzo caso

$$y=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\varphi}{3}=\frac{\cos\frac{\varphi}{3}}{\cos 30^\circ}$$

e quindi da (1)

$$x=\frac{\operatorname{sen}\left(30^\circ+\frac{\varphi}{3}\right).\operatorname{sen}\left(30^\circ-\frac{\varphi}{3}\right)}{\cos 30^\circ.\cos\frac{\varphi}{3}}.$$

Il caso $\alpha=0$ rientra nell'ultimo considerato; ma trattato direttamente conduce alla soluzione

$$x=\frac{1}{4}(\sqrt{10}+\sqrt{2}) \qquad y=\frac{1}{4}(3\sqrt{2}-\sqrt{10}).$$

*Osservazione.* Se il rapporto A B : A′ B′ fosse diverso da 2 la equazione nella $y$ verrebbe del 4° grado, perciò la (2) si può considerare come caso particolare d'una biquadratica in cui il coefficiente di $y^4$ sia diventato 0, e quindi una sua radice sia diventata $\infty$; il che verrebbe a dire che il punto all'infinito di qualunque direzione A R risponde al problema. Questo per altro si può giustificare con considerazioni geometriche nel modo seguente: qualunque sia la direzione A R e comunque preso C su di di essa, si ha

$$\frac{\text{tang ACB}}{\text{tang . A}'\text{CB}'}=2.\frac{\text{A}'\text{C}}{\text{AC}}$$

quindi

$$\frac{\text{ACB}}{\text{A}'\text{CB}'}=2.\frac{\dfrac{\text{tang A}'\text{CB}'}{\text{A}'\text{CB}'}}{\dfrac{\text{tang ACB}}{\text{ACB}}}\cdot\frac{\text{A}'\text{C}}{\text{AC}};$$

ora se C si allontana all'infinito $\lim\frac{\text{A}'\text{C}}{\text{AC}}=1$ e, poichè A C B, A′ C B′ tendono a zero, $\lim\frac{\text{tang ACB}}{\text{ACB}}=1$ e $\lim\frac{\text{tang A}'\text{CB}'}{\text{A}'\text{CB}'}=1$, dunque

$$\lim\frac{\text{ACB}}{\text{A}'\text{CB}'}=2.$$

**22.** *Eliminare* x, y, z *dalle tre equazioni*

$$y(b-c+z)+z(c-b+y)=\text{X}+y^2+z^2$$
$$z(c-a+x)+x(a-c+z)=\text{Y}+z^2+x^2$$
$$x(2a-b-c)+y(2b-a-c)+z(2c-a-b)=\text{X}+\text{Y}+\text{Z}+$$
$$+2(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy).$$

D. Besso.

Soluzione del Prof. *S. Catania* (*).

Le prime due si possono scrivere:

$$(y-z)^2-(b-c)(y-z)+\text{X}=0,$$
$$(z-x)^2-(c-a)(z-x)+\text{Y}=0.$$

La terza prima si trasforma in

$$x(2a-b-c)+y(2b-a-c)+z(2c-a-b)=\text{X}+(y-z)^2+$$
$$+\text{Y}+(z-x)^2+\text{Z}+(x-y)^2.$$

Il secondo membro di questa equazione, tenuto conto delle due equazioni precedenti, si riduce a

$$(b-c)(y-z)+(c-a)(z-x)+\text{Z}+(x-y)^2.$$

Sostituendo, trasponendo e riducendo si ha:

$$(x-y^2)-(a-b)(x-y)+\text{Z}=0.$$

(*) Altre soluzioni vennero inviate dai Sig.$^{\text{i}}$ Prof.$^{\text{i}}$ *L. Bosi, S. Gatti, G. Riboni* e *F. Viaggi*.

Dalle tre equazioni così trasformate si hanno immediatamente queste tre altre:

$$y - z = \frac{b-c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b-c}{2}\right)^2 - X},$$

$$z - x = \frac{c-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2 - Y},$$

$$x - y = \frac{a-b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 - Z},$$

le quali sommate membro a membro danno:

$$\pm \sqrt{\left(\frac{b-c}{2}\right)^2 - X} \pm \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2 - Y} \pm \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 - Z} = 0.$$

Togliendo i radicali, dopo facili riduzioni, si ottiene per eliminata delle tre equazioni date la relazione seguente:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2XY - 2XZ - 2YZ - X(b-a)(a-c) - Y(c-b)(b-a) - Z(a-c)(c-b) = 0.$$

## QUISTIONI PROPOSTE.

**24.** Se $a$, $b$, $c$, $f$ rappresentano numeri positivi e si ha:

$$a x^2 + b x y + c y^2 = f \text{ ed } r^2 = x^2 + y^2,$$

dimostrare elementarmente che i valori massimo e minimo di $r^2$ sono dati dall'equazione

$$(b^2 - 4ac) r^4 + 4f(a+c) r^2 - 4f^2 = 0.$$

A. Lugli.

**25.** Dato un cerchio ed un triangolo circoscritto al medesimo, condurre una coppia di tangenti al cerchio che stacchi dai lati del triangolo dato segmenti proporzionali a tre segmenti dati.

A. Sauve.

**26.** Se una piramide ha per base un poligono regolare, la somma dei quadrati degli spigoli laterali è uguale a tante volte la somma dei quadrati della congiungente il vertice col centro della base e del raggio del cerchio circoscritto al poligono base, quanti sono i lati di questo poligono. (*)

(*) Teorema enunciato nella *Poligonometria analitica* del Prof. Callegari e da questi attribuito al Prof. Piani.

# RIVISTA BIBLIOGRAFICA

G. Z. Reggio: *Complementi d'algebra per gli allievi degl'Istituti Tecnici* (2° biennio). — Ditta G. B. Paravia — L. 3,50.

" In questo volume si trova sviluppato tutto il programma d'algebra per gli " Istituti Tecnici (2° biennio). L'Autore ha raccolto i vari articoli in quattro " libri sotto quattro titoli collettivi (Calcolo combinatorio — Numeri e gran- " dezze — Variabile e limite — Equazioni e diseguaglianze) per dare all'opera " maggiore unità e in certo modo improntarla a quella divisione che si fa del- " l'analisi nei suoi diversi rami principali. L'allievo che avrà seguito su questo " testo il programma e procederà alla lettura del volume com'è scritto, vi tro- " verà, speriamo, una conveniente preparazione ai corsi superiori. „

In quest'avvertenza premessa all'opera è segnalato ciò che costituisce il suo maggior pregio: e invero in ciascuna pagina appare evidente lo studio messo dall'egregio A. a porre nella mente degli allievi i germi di teorie che dovranno essere fecondati in avvenire, ed a farlo coi modi più acconci: precisione nei concetti e rigore nelle dimostrazioni, senza però l'ingombro di troppe lungaggini e minuzie che impediscano a menti ancora inesperte di raccogliere in uno sguardo sintetico le cose studiate; larghezza di vedute, senza varcare il limite d'un insegnamento secondario; concisione ed evidenza anche nella esposizione delle teorie più delicate.

L'opera che s'è venuta formando nella pratica dell'insegnamento quotidiano, trarrà da questo occasione a miglioramenti per future e, spero, prossime edizioni: così qualcosa potrebbe forse essere soppressa, qualche altra aggiunta (l'applicazione, per esempio, delle diseguaglianze alla discussione dei problemi, la qual discussione è uno scoglio dei candidati alla licenza), qualche definizione resa più precisa (quella sul limite, a mo' d'esempio, in cui è detto che alla variabile indipendente s'attribuiscono valori *sempre crescenti o decrescenti*, senz'aggiunger altro, il che si presta a un'interpretazione incompleta), qualche enunciato di teorema reso meno ellittico (tra gli altri, alcuni di quelli che riguardano diseguaglianze dedotte da una o più altre).

Ma il 2° libro, che è il più notevole del volume, è anche quello su cui l'A. potrebbe, a mio avviso, effettuare qualche rimutamento di maggiore importanza. Egli, con savio consiglio, prepara il lettore al numero irrazionale e all'immaginario ripigliando addirittura il concetto di numero dai primordi: rapidamente ne espone le successive generalizzazioni con metodo analitico; quindi studia le grandezze e la possibilità di rappresentarle con i numeri.

Ora io credo che un'esposizione sintetica, condotta sul disegno che in un bell'articolo stampato in questo Periodico ne tracciava il ch. prof. Bettazzi, vincerebbe sull'altra per rapidità e, ciò che più monta, per evidenza, ove si badi che la teoria è destinata ad allievi di scuole secondarie: e se attingesse ad alcune vedute originali del Cliffort, tanto meglio. Ma detto questo di passata, osserverò che l'A., introdotto l'irrazionale secondo il concetto del Dedekind e trattato dell'addizione tra irrazionali, delle altre operazioni dà solo la definizione, salvo poi a tornare (una quarantina di pagine dopo) sull'irrazionale, considerandolo come limite, e ad occuparsi ampiamante di tutte le operazioni. E questo lasciare in sospeso la teoria ha creato qualche imbarazzo all'A. stesso: infatti, definito il rapporto di due grandezze in tutti i casi, ma non avendo ancora definito l'eguaglianza d'irrazionali, per dare un significato all'eguaglianza di rapporti ricorre alla seguente definizione:

" Date due grandezze tra loro omogenee, A e B, e altre due tra loro omo-
" genee, C e D, il rapporto delle due prime sarà eguale a quello delle seconde,
" quando B e D saranno comprese sempre lo stesso numero di volte in due
" grandezze equimultiple delle A e C, secondo qualunque numero " (n. 74).

La qual definizione dovrebb'essere, nel libro dell'A., un vero teorema. Un altro imbarazzo incontra nella dimostrazione del teorema al n. 92:

" Sia $y$ un numero variabile che assume valori sempre crescenti, ma che
" non può diventar grande più di qualunque numero; se nella successione dei
" suoi valori nessuno ve n'è maggiore di tutti, esisterà un numero finito $l$,
" limite superiore d'$y$. "

E comincia la dimostrazione così:

" Infatti sia $y_1$, $y_2$, $y_3$, ... la successione in ordine crescente dei valori d'$y$;
" siccome $y$ non può diventar grande a piacere, vi saranno infiniti numeri ad
" esso superiori, sia $l$ il più piccolo di questi. "

Ora o l'A. suppone già introdotto il numero irrazionale (come infatti l'ha introdotto) e parmi che l'esistenza di questo minimo $l$ dovrebbe dimostrarla; o non lo suppone, e dovrebbe ammettere l'esistenza di $l$ per postulato; ma e poi, al punto in cui si è condotto, sarebbe giustificata l'introduzione di quest'altro postulato? Osservazione simile pel n. 93.

E poichè son venuto a parlare del libro sul limite, osserverò che nella dimostrazione del teorema " $lim\,\frac{1}{y} = \frac{1}{lim\,y}$ " se si parte dalla trasformazione $lim\left(\frac{1}{y}.y\right) = lim\,\frac{1}{y}\,.\,lim\,y$ si commette la svista di presupporre l'esistenza di $lim\,\frac{1}{y}$.

Per la teoria delle equazioni indeterminate, svolta con molta simmetria e abbondanza di metodi, vorrei segnalare all'attenzione dell'A. le formole risolutive dell'equazione lineare con tre incognite, le quali oltre all'inconveniente di comparire con tre indeterminate, anzichè con due, non sono facilmente generalizzabili al caso di più incognite.

Chiuderò questa rapida recensione col tributare ancora una lode all'egregio A. per le note storiche disseminate pel volume; le quali hanno il merito d'aprire l'animo dei giovani all'ammirazione dei grandi nomi che hanno illustrato la scienza.

F. Viaggi.

# PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

*Annales de la licence ès sciences* (Mathématiques, Phisiques, Naturelles) — Session de novembre 1888. — Paris, Nony, 17, Rue des Ecoles, 1889.

*Giornale di Matematiche* ad uso degli studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del professore G. Battaglini. Vol. XXVII. Gennaio-Febbraio, Marzo-Aprile. Napoli, B. Pellerano editore, 1889.

*Journal de Mathématiques élémentaires* à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. de Longchamps, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, Lucien Lévy, agrégé des sciences mathématiques, directeur des études à l'Ecole preparatoire de Saint-Barbe. 3e Serie, Treizième année. N. 4, 5, Avril, Mai. Paris. Librairie Ch. Delagrave, 1889.

*Journal de Mathématiques élémentaires* publié par H. Vuibert. 13e année. N. 13, 14, 15, 16. Paris. M. Nony et Cie, 17 Rue des Ecoles, 1889.

*Jornal de sciencias mathematicas e astronomica* publicado pelo Dr F. Gomes Teixeira professor na Academia Polytechnica do Porto. Vol. IX, n. 1. Coimbra, 1889.

*Le Scuole secondarie*, eco dell'Associazione nazionale fra gli insegnanti delle Scuole secondarie. Anno VI, n. 10, 11, 12, 13, 14. Milano, 1889.

*Mathesis*, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion, professeur à l'Université de Gand, et J. Neuberg, professeur à l'Université de Liège. Tome neuvième. Avril, Mai, 1889.

*Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche* (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2a, Vol. 3, Fasc. 3, 4: Marzo, Aprile 1889.

*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*. Tomo III, Fasc. 1, 2. Gennaio-Febbraio, Marzo-Aprile 1889.

*Rivista Scientifico-industriale* compilata da Guido Vimercati. Anno XXI, n. 4 e 5. Firenze, 1889.

Alibrandi (P.) — Sulle variazioni di temperatura dell'acqua nelle condotture. Roma. Tipografia Poliglotta della S. C. di Propaganda Fide, 1889.

Andriani (A.) — Correzioni ed aggiunte agli Elementi di Geometria euclidea esposti con nuovo metodo. Napoli, Pellerano, 1889.

Arzelà (C.) — Sugli integrali di funzioni che oltre alla variabile di integrazione contengono altre variabili (Bologna 1888). — Funzioni di linee (Rend. R. Acc. dei Lincei, 1889).

Beltrami (E.) — Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewski (Rend. R. Acc. dei Lincei, 1889).

Bernardi (F.) — Aritmetica per le Scuole primarie. 2a ediz. riveduta ed ampliata. Lecce, tipografia editrice salentina, 1888. — Prezzo: cent. 70.

Casorati (F.) — Nuova definizione della curvatura delle superficie e suo confronto con quella di Gauss (Rend. R. Istituto Lom., 1889).

De Marchi (L.) — Saggio d'applicazione dei principii dell'idraulica alla teoria delle correnti dell'aria (Annali Uff. Cent. Meteorologia e Geodinamica, Vol. VIII, 1886).

Guccia (G. B.) — Sulla classe e sul numero dei flessi di una forma algebrica dotata di singolarità qualunque (Rend. R. Acc. Lincei, 1889).

Gugliuzzo Fazio (A.) — Caratteri di divisibilità per 7, 13, 17 e pei numeri della forma (9, 10 + 1). Appunti. Palermo, Libreria L. Pedone Lauriel, 1889. — Prezzo: cent. 50.

Jung (G.) — Ricerche sui sistemi lineari di curve piane algebriche del genere $p$ e sulla loro riduzione all'ordine minimo. Memoria II (Ann. matematica pura e applicata, 1889).

Loria (G.) — L'opera scientifica di Ettore Caporali (Gior. Battaglini, Vol. XXVII, 1889).

LORIA (G.) — (I Poligoni di Poncelet). Discorso pronunziato nell' Università di Genova in occasione del suo solenne accoglimento a Dottore aggregato della Facoltà di Scienze. Torino, G. B. Paravia e C., 1889. — Prezzo: L. 3.

MARCOLONGO (R.) — Teorema di meccanica (Rend. Circolo mat. Palermo, 1888). Sulla variazione di un integrale definito e sulla teoria delle equazioni a derivate del primo ordine (Rend. R. Acc. Scienze fis.-mat. Napoli, 1888). — Sull'accelerazione nel moto di un solido intorno ad un punto fisso (Gior. Battaglini, Vol. XXVII). — Alcuni teoremi sulle funzioni cilindriche di prima specie (Rend. R. Acc. Scienze fis.-mat., Napoli, 1889).

MORERA (G.) — L'insegnamento delle Scienze matematiche nelle Università italiane. Genova, 1889.

PADOVA (E.) — Sulle deformazioni infinitesime (R. Acc. Lincei, 1889).

PEANO (I.) — Arithmetices principia nova methodo exposita. Torino, Bocca, 1889.

PERSIANI (O.) — Teorica delle equazioni di secondo grado esposta agli alunni della seconda classe liceale. Roma, Tip. della Pace. Prezzo: cent. 50.

RAIOLA PESCARINI (L.) — La trigonometria per tutti. Napoli, Morano editore. 1888. Prezzo: cent. 60.

RAZZABONI (A.) — Delle superficie sulle quali due serie di geodetiche formano un sistema coniugato (R. Acc. delle Scienze dell' Ist. di Bologna, 1889).

REBIÈRE (A.) — Mathématiques et mathématiciens. Pensées et curiosités. Paris, Nony, 17, Rue des Ecoles, 1889).

RUSSO (G.) — Sul saggio di geometria metrico-proiettiva del prof. E. Tirelli. Catanzaro, 1889.

*Scuole mezzane.* — Pensieri di un vecchio insegnante in riposo. Roma, Forzani e C., 1889.

TARTINVILLE (A.) — Cours d'arithmétique. Paris. Nony et C., 17, Rue des Ecoles — Prix: 5 fr.

---

*Errata Corrige.* — A pag. 53, l. 21, invece di:

« $A C' =$ e parallela $C C'$ », leggasi « $A C' = F C$ ».

A pag. 56, linea 13, invece di:

$$\operatorname{sen} q - \cos p = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p-q}{2}\right) = \ldots.$$

leggasi:

$$\operatorname{sen} q - \cos p = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p-q}{2}\right) = \ldots$$

# Alcune proprietà projettive del triangolo

Le proprietà esposte qui sono un complemento di quelle contenute nella nota « *Un teorema sul triangolo* » inserita nel fascicolo del Settembre-Ottobre 1887 di questo Periodico.

1. Sia $ABC$ un triangolo e $P_1$, $P_2$ due punti del suo piano. Siano

$A_1$, $A_2$ le intersezioni di $BC$ con $P_1A$, $P_2A$
$B_1$, $B_2$ » $CA$ » $P_1B$, $P_2B$
$C_1$, $C_2$ » $AB$ » $P_1C$, $P_2C$

ed $A^*$, $B^*$, $C^*$ le intersezioni di $P_1P_2$ coi lati $BC$, $CA$, $AB$.

Dimostrerò relativamente ai triangoli

$$A_2B_1C_1 \quad , \quad B_2C_1A_1 \quad , \quad C_2A_1B_1$$
$$A_1B_2C_2 \quad , \quad B_1C_2A_2 \quad , \quad C_1A_2B_2$$

proprietà analoghe a quelle stabilite nell'altra nota per i triangoli

$$A_1B_1C_1 \quad , \quad A_2B_2C_2.$$

Usiamo per brevità delle notazioni seguenti: (*)

$$\begin{pmatrix} B_1 & C_1 \\ A & A_1 \end{pmatrix} = \alpha_2 \;, \quad \begin{pmatrix} C_1 & A_2 \\ B & B_2 \end{pmatrix} = \beta_{211} \;, \quad \begin{pmatrix} A_2 & B_1 \\ C & C_2 \end{pmatrix} = \gamma_{211} \;,$$
$$\begin{pmatrix} B_2 & C_1 \\ A & A_2 \end{pmatrix} = \alpha_{121} \;, \quad \begin{pmatrix} C_1 & A_1 \\ B & B_1 \end{pmatrix} = \beta_2 \;, \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ C & C_2 \end{pmatrix} = \gamma_{121} \;,$$
$$\begin{pmatrix} B_1 & C_2 \\ A & A_2 \end{pmatrix} = \alpha_{112} \;, \quad \begin{pmatrix} C_2 & A_1 \\ B & B_2 \end{pmatrix} = \beta_{112} \;, \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C & C_1 \end{pmatrix} = \gamma_2 \;;$$

$$\begin{pmatrix} B_2 & C_2 \\ A & A_2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \;, \quad \begin{pmatrix} C_2 & A_1 \\ B & B_1 \end{pmatrix} = \beta_{122} \;, \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ C & C_2 \end{pmatrix} = \gamma_{122} \;,$$
$$\begin{pmatrix} B_1 & C_2 \\ A & A_1 \end{pmatrix} = \alpha_{212} \;, \quad \begin{pmatrix} C_2 & A_2 \\ B & B_2 \end{pmatrix} = \beta_1 \;, \quad \begin{pmatrix} A_2 & B_1 \\ C & C_1 \end{pmatrix} = \gamma_{212} \;,$$
$$\begin{pmatrix} B_2 & C_1 \\ A & A_1 \end{pmatrix} = \alpha_{221} \;, \quad \begin{pmatrix} C_1 & A_2 \\ B & B_1 \end{pmatrix} = \beta_{221} \;, \quad \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C & C_1 \end{pmatrix} = \gamma_1 \;,$$

(*) Indico anche qui con $\begin{pmatrix} MN \\ PQ \end{pmatrix}$ il punto comune alle due rette $MN$ e $PQ$.

Per giustificare poi le notazioni con tre indici che ho creduto di dovere adottare, farò osservare quanto sia facile tener presente che p. es. $\beta_{112}$ è un punto del lato opposto a $B_1$ nel triangolo $A_1B_1C_2$, e precisamente quello in cui il lato stesso è incontrato dalla retta che va da $B$ a $B_2$ (cioè a quello dei due punti $B_1$, $B_2$ che non appartiene al triangolo).

2. Le forme

$$\begin{matrix} C_1 & A_2 & \beta_{211} & \beta_{221} \\ A & C & B_2 & B_1 \end{matrix}$$

sono prospettive dal centro B, per cui si possono far corrispondere ai raggi

[1] $P_1 C_1 \;,\; P_1 A_2 \;,\; P_1 \beta_{211} \;,\; P_1 \beta_{221}$

i raggi

[2] $P_2 C \;,\; P_2 A \;,\; P_2 B_1 \;,\; P_2 B_2 \,.$

Inoltre queste due forme di quattro raggi sono prospettive ed hanno per asse B C, poichè

$$\begin{pmatrix} P_1 & C_1 \\ P_2 & C \end{pmatrix} \equiv C \;,\; \begin{pmatrix} P_1 & A_2 \\ P_2 & A \end{pmatrix} \equiv A_2 \,,\; \begin{pmatrix} P_1 & \beta_{221} \\ P_2 & B_2 \end{pmatrix} \equiv B \,.$$

Ne segue che le coppie

$$\begin{pmatrix} P_1 & \beta_{221} \\ P_2 & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & B_2 \\ P_1 & \beta_{211} \end{pmatrix} \,,\; \begin{pmatrix} P_1 & C_1 \\ P_2 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & C \\ P_1 & \beta_{221} \end{pmatrix}$$

cioè le coppie

$$B_1 \, \beta_{211} \;,\; \begin{pmatrix} B & B_1 \\ C & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & B_2 \\ C & C_1 \end{pmatrix}$$

sono allineate con un punto $O_a$ di $P_1 P_2$, che è il coniugato armonico di $A^*$ rispetto a $P_1$ , $P_2$.

In modo analogo, cioè solo collo scambio delle lettere B e C, $\beta$ e $\gamma$, si proverebbe che la coppia

$$C_1 \; \gamma_{211}$$

è anch'essa allineata collo stesso punto $O_a$. Di più a causa, del quadrilatero $B C_1 C B_1$, è armonico il gruppo

$$A_1 \; \alpha_2 \; P_1 \, A$$

e perciò anche il gruppo di raggi

$$A_2 \,.\, (A_1 \; \alpha_2 \; P_1 \, A)$$

cioè

$$A_2 \, (A^* \; \alpha_2 \; P_1 \, P_2);$$

la retta $A_2 \, \alpha_2$ passa dunque essa pure per $O_a$.

Abbiamo così che nel triangolo $A_2 B_1 C_1$ le rette che uniscono i vertici

$$A_2 \;,\; B_1 \;,\; C_1$$

coi punti

$$\alpha_2 \;,\; \beta_{211} \;,\; \gamma_{211}$$

dei lati rispettivamente opposti, passano per $O_a$.

Collo scambio degli indici 1 e 2 si dimostrerebbe che le rette che uniscono i vertici

$$A_1 \quad , \quad B_2 \quad , \quad C_2$$

del triangolo $A_1 B_2 C_2$ ai punti

$$\alpha_1 \quad , \quad \beta_{122} \quad , \quad \gamma_{122}$$

dei lati opposti passano pure per $O_a$.

3. La retta che unisce $O_a$ col punto $O$ della nota precedente *(Un teorema sul triangolo)* è la retta

$$\begin{pmatrix} B & B_1 \\ C & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & B_2 \\ C & C_1 \end{pmatrix},$$

poichè questa coppia di punti è allineata con $O_a$, come abbiamo qui dimostrato, ed allineata con $O$, come è dimostrato in quella nota.

4. Dimostrazioni in tutto simili a quella del § 2 si possono fare per i triangoli

$$B_2\, C_1\, A_1 \quad , \quad B_1\, C_2\, A_2$$

e per i triangoli

$$C_2\, A_1\, B_1 \quad , \quad C_1\, A_2\, B_2$$

5. Possiamo riunire come segue i resultati precedenti.

Le 6 rette

$$\begin{matrix} A_2\,\alpha_2 & , & B_1\,\beta_{211} & , & C_1\,\gamma_{211} \\ A_1\,\alpha_1 & , & B_2\,\beta_{122} & , & C_2\,\gamma_{122} \end{matrix}$$

passano per $O_a$, le

$$\begin{matrix} B_2\,\beta_2 & , & C_1\,\gamma_{121} & , & A_1\,\alpha_{121} \\ B_1\,\beta_1 & , & C_2\,\gamma_{212} & , & A_2\,\alpha_{212} \end{matrix}$$

per $O_b$, e le

$$\begin{matrix} C_2\,\gamma_2 & , & A_1\,\alpha_{112} & , & B_1\,\beta_{112} \\ C_1\,\gamma_1 & , & A_2\,\alpha_{221} & , & B_1\,\beta_{221} \end{matrix}$$

per $O_c$.

I punti $O_a$ , $O_b$ , $O_c$ sono sulla retta $P_1\, P_2$, e sono respettivamente i coniugati armonici di $A^*$ , $B^*$ , $C^*$ rispetto a $P_1$ , $P_2$.

Le rette

$$OO_a \quad , \quad OO_b \quad , \quad OO_c$$

non sono altro che le

$$\begin{pmatrix} BB_1 \\ CC_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} BB_2 \\ CC_1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} CC_1 \\ AA_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} CC_2 \\ AA_1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} AA_1 \\ BB_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AA_2 \\ BB_1 \end{pmatrix}.$$

6. Considerando nei gruppi proiettivi di raggi (1) , (2) del § 2 le altre 4 coppie di intersezioni di cui non abbiamo tenuto conto nella dimostrazione si vedrebbe che vi sono altre 12 rette, di cui 4 passano per $O_a$, 4 per $O_b$ e 4 per $O_c$.

Pesaro, 10 febbraio 1889

S. Rindi.

# Sul numero delle divisioni nella ricerca del massimo comun divisore di due numeri

1. Lemma. *In ogni divisione il dividendo è maggiore del doppio del resto.*

Siano rispettivamente A, B, Q, R il dividendo, il divisore, il quoziente ed il resto di una divisione; dico che A è maggiore di 2 R.

Infatti, essendo

$$A = B Q + R, \; B > R$$

e Q almeno eguale ad 1, possiamo scrivere

$$B = R + d, \; Q = 1 + \delta,$$

dove $d$ e $\delta$ adempiono alle condizioni:

$$d \geq 1, \; \delta \geq 0;$$

e quindi la prima di queste eguaglianze diviene

$$A = (R + d)(1 + \delta) + R,$$

ossia

$$A = 2 R + d(1 + \delta) + R \delta.$$

E poichè $d(1 + \delta)$ dev'essere almeno eguale ad 1, l'ultima eguaglianza mostra che $A > 2 R$.

2. Corollario. *Se fra i resti che provengono dalle successive divisioni per la ricerca del massimo comun divisore tra due numeri, se ne considerano due qualunque, che comprendano come intermedii un numero dispari di altri resti, il primo di questi due resti è maggiore del prodotto dell'altro per una potenza del 2 il*