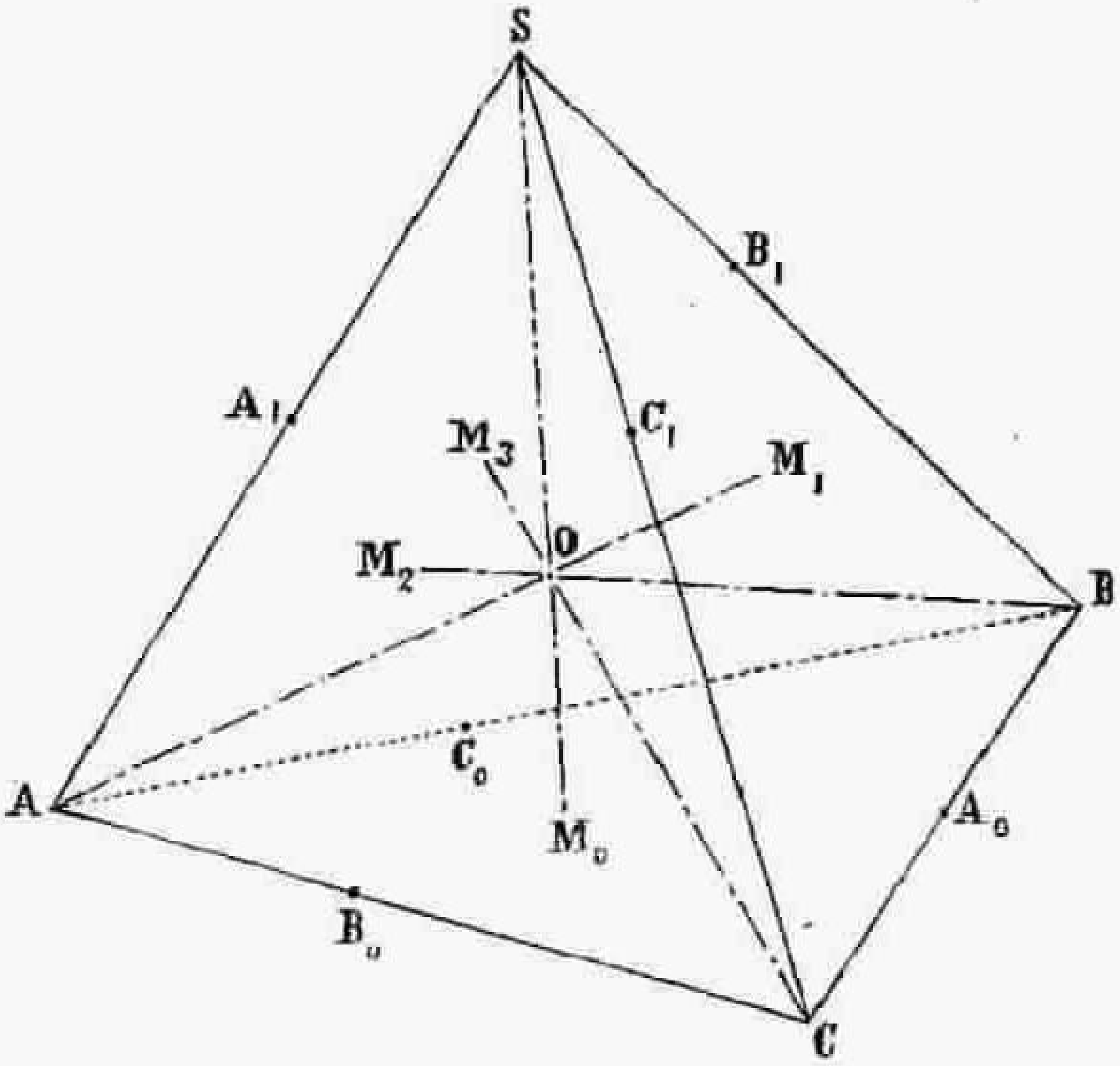
CONTRIBUTO ALLO STUDIO DEL TETRAEDRO

Sia $SABC$ un tetraedro, e pongasi:

$$SA = a,\ SB = b,\ SC = c,\ BC = a_1,\ CA = b_1,\ AB = c_1,$$
$$\text{diedro } SA = A,\ \text{diedro } SB = B,\ \text{diedro } SC = C,$$
$$\text{diedro } BC = A_1,\ \text{diedro } CA = B_1,\ \text{diedro } AB = C_1,$$
$$\text{area } ABC = S_0,\ \text{area } SBC = S_1,\ \text{area } SCA = S_2,\ \text{area } SBA = S_3.$$



Si congiunga un punto interno O coi vertici e sieno $M_0\ M_1\ M_2\ M_3$ i punti d'incontro delle $S\,O$, $A\,O$, $B\,O$, $C\,O$ colle faccie opposte. Unendo ciasun punto M coi vertici delle rispettive faccie, queste congiungenti s'incontrano a due a due sugli spigoli del tetraedro (ad es. le $S\,M_1$ ed $A\,M_0$ s'incontrano sullo spigolo $B\,C$ in un punto A_0). Chiamo A_0, B_0, C_0,

A_1, B_1, C_1 i punti così determinati sugli spigoli BC, CA, AB, SA, SB, SC. Di questi 6 punti, 2 presi su due spigoli opposti sono allineati con O e 4 presi su due coppie di spigoli opposti (come $A_0\, A_1\, B_0\, B_1$) sono in un piano: reciprocamente se un piano taglia due coppie di spigoli opposti d'un tetraedro, unendo ciascun punto d'intersezione cogli estremi dello spigolo opposto, si determinano sulle faccie 4 punti M, dei quali le congiungenti coi vertici opposti passano per uno stesso punto.

Tra i rapporti dei segmenti determinati sugli spigoli e sulle rette SM_0 AM_1 BM_2 CM_3 esiste una relazione, per la ricerca della quale giova ricordare un teorema sul triangolo, che trovasi nel numero del 15 ottobre 1887 del *Journal de Mathèmatiques èlèmentaires*.

Teorema. In un triangolo ABC, se le AA', BB', CC' terminate ai lati opposti passano per uno stesso punto O, si ha:

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B} \quad (1).$$

Si dimostra applicando ai triangoli $AA'C$, $AA'B$ (tagliati rispettivamente dalle BB', CC') il teorema di Menelao e ricavando i valori di $\frac{AB'}{B'C}$ e $\frac{AC'}{C'B}$.

Prima di applicare il teorema al tetraedro mi sembra non inutile considerare qualche caso particolare.

1. *Il punto* O *è centro del cerchio iscritto.* Per la nota proprietà della bisettrice la relazione (1) diventa:

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{b+c}{a}.$$

2. *I punti* A', B', C' *sono i punti di contatto del cerchio iscritto.* Si ha:

$$\frac{AO}{OA'} = (p-a)\left(\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right).$$

3. *I punti* A', B', C' *sono i punti di contatto dei cerchi exiscritti.* Si ha:

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{p-b}{p-a} + \frac{p-c}{p-a} = \frac{a}{p-a}.$$

Si può verificare che in questo caso e nel precedente si ha:

$$\frac{A\,A'}{O\,A'} + \frac{B\,B'}{O\,B'} + \frac{C\,C'}{O\,C'} = p\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right).$$

4. *Il punto* O *è tale che da esso si vedono i tre lati sotto lo stesso angolo.* — Allora le $O\,A'$, $O\,B'$, $O\,C'$ bisecano rispettivamente gli angoli $B\,O\,C$, $C\,O\,A$, $A\,O\,B$ e per la proprietà della bisettrice la (1) diventa:

$$\frac{A\,O}{O\,A'} = \frac{A\,O}{O\,C} + \frac{A\,O}{O\,B} \text{ ossia } \frac{1}{O\,A'} = \frac{1}{O\,C} + \frac{1}{O\,B}$$

similmente:

$$\frac{1}{O\,B'} = \frac{1}{O\,C} + \frac{1}{O\,A}, \quad \frac{1}{O\,C'} = \frac{1}{O\,A} + \frac{1}{O\,B}.$$

Sottraendo a due a due queste relazioni si ricava:

$$\frac{1}{O\,A} + \frac{1}{O\,A'} = \frac{1}{O\,B} + \frac{1}{O\,B'} = \frac{1}{O\,C} + \frac{1}{O\,C'}$$

ed addizionando le stesse tre relazioni:

$$\frac{1}{O\,A} + \frac{1}{O\,B} + \frac{1}{O\,C} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{O\,A'} + \frac{1}{O\,B'} + \frac{1}{O\,C'}\right):$$

la quale sta anche quando il punto O è il baricentro del triangolo.

Venendo ora al tetraedro $S\,A\,B\,C$, considero il triangolo $S\,A\,B$, da cui pel teorema precedente si ha;

$$\frac{S\,M_3}{M_3\,C_0} = \frac{S\,A_1}{A_1\,A} + \frac{S\,B_1}{B_1\,B}$$

e dal triangolo $S\ C_0\ C$:

$$\frac{S\,O}{O\,M_0} = \frac{S\,M_3}{M_3\,C_0} + \frac{S\,C_1}{C_1\,C}$$

da cui:

$$\frac{S\,O}{O\,M_0} = \frac{S\,A_1}{A_1\,A} + \frac{S\,B_1}{B_1\,B} + \frac{S\,C_1}{C_1\,C}. \tag{2}$$

Analoghe relazioni si hanno per le $A\,M_1$ $B\,M_2$ $C\,M_3$.

Considero alcuni casi particolari: ometto perchè assai noto il caso che i punti $A_0\,A_1\,B_0\,B_1$ sieno i punti medî degli spigoli corrispondenti.

1. *I punti* $A_0\,A_1\,B_0\,B_1$ *sono i piedi comuni delle altezze nelle faccie corrispondenti.* Allora i punti M sono i punti d'incontro delle altezze (ortocentri) delle faccie e le due coppie di spigoli opposti (e quindi la terza coppia) sono ortogonali fra loro. Inoltre poichè i piani $S B_0 B_1$, $S A_0 A_1$ sono perpendicolari alla faccia $A\,B\,C$, la retta $S\,M_0$ è l'altezza relativa a questa faccia e similmente $A\,M_1$, $B\,M_2$, $C\,M_3$ le altezze relative alle faccie $S\,C\,B$, $S\,A\,C$, $S\,B\,A$, onde in questo caso si ha che le 4 altezze del tetraedro passano per uno stesso punto. Ma allora è noto che la somma dei quadrati degli spigoli opposti è costante e reciprocamente. Laonde il teorema:

Se in un tetraedro è costante la somma dei quadrati degli spigoli opposti, le congiungenti i vertici cogli ortocentri delle facce opposte (altezze del tetraedro) passano per uno stesso punto e reciprocamente.

I 6 punti $A_0\,B_0\,C_0\,A_1\,B_1\,C_1$ sono su di una sfera che interseca le faccie del tetraedro secondo i rispettivi cerchi dei nove punti.

2. *I punti* $A_0\,A_1\,B_0\,B_1$ *sono gli estremi (comuni) delle bisettrici degli angoli opposti nelle faccie corrispondenti.* Allora i punti M sono i centri dei cerchi iscritti nelle faccie, e per la nota proprietà della bisettrice si ha:

$$\frac{B\,A_0}{A_0\,C} = \frac{c_1}{b_1} \quad \text{e} \quad \frac{B\,A_0}{A_0\,C} = \frac{b}{c} \quad \text{da cui} \quad \frac{c_1}{b_1} = \frac{b}{c} \quad \text{ossia} \quad b\,b_1 = c\,c_1\,.$$

Similmente si ha $a\,a_1 = b\,b_1$. Reciprocamente se $a\,a_1 = b\,b_1 = c\,c_1$ le bisettrici degli angoli nelle faccie s'incontrano sugli spigoli. Laonde il teorema:

Se in un tetraedro è costante il prodotto degli spigoli opposti, le congiungenti i vertici coi centri dei cerchi iscritti nelle faccie opposte passano per uno stesso punto e reciprocamente.

La relazione (2) diventa:

$$\frac{S\,O}{O\,M_0} = \frac{a}{c_1} + \frac{b}{a_1} + \frac{c}{b_1} = \frac{a\,a_1\,(a_1 + b_1 + c_1)}{a_1\,b_1\,c_1} = \frac{a\,a_1}{2\,R_0\,r_0}$$

dove R_0, r_0 sono i raggi dei cerchi circoscritto ed iscritto alla faccia $A\,B\,C$. — Noto che in questo caso si ha (*):

(*) Cfr. Baltzer. *Elem. di mat.* — Trad. Cremona. Trigonom. § 6, n. 6.

a) La somma dei coseni delle inclinazioni degli spigoli opposti è nulla cioè:

$$\cos(a\,a_1) + \cos(b\,b_1) + \cos(c\,c_1) = 0.$$

b) Le sezioni medie del tetraedro sono proporzionali ai seni delle suddette inclinazioni, cioè:

$$\frac{s\,(a\,a_1)}{\text{sen}\,(a\,a_1)} = \frac{s\,(b\,b_1)}{\text{sen}\,(b\,b_1)} = \frac{s\,(c c_1)}{\text{sen}\,(c\,c_1)}.$$

c) I seni stessi sono inversamente proporzionali alle distanze dagli spigoli opposti, cioè:

$$\text{sen}\,(a\,a_1)\,\mathrm{d}\,(a\,a_1) = \text{sen}\,(b\,b_1)\,\mathrm{d}\,(b\,b_1) = \text{sen}\,(c\,c_1)\,\mathrm{d}\,(c\,c_1).$$

d) I seni dei diedri opposti sono inversamente proporzionali, cioè:

$$\text{sen}\,A\,.\,\text{sen}\,A_1 = \text{sen}\,B\,.\,\text{sen}\,B_1 = \text{sen}\,C\,.\,\text{sen}\,C_1.$$

3° *I punti $A_0 A_1\, B_0 B_1$ sono i punti di contatto (comuni sullo stesso spigolo) dei cerchi iscritti nelle faccie.* — Allora si ha:

$$B A_0 = p_0 - b_1\ (^*)\ \text{e}\ B A_0 = p_1 - c$$

da cui: $a_1 + c_1 - b_1 = a_1 + b - c$ ed anche: $b + b_1 = c + c_1$. Similmente si ha: $a + a_1 = b + b_1$. Reciprocamente se $a + a_1 = b + b_1 = c + c_1$ i cerchi iscritti nelle faccie hanno comuni i punti di contatto collo stesso spigolo. In questo caso i 6 punti $A_0\, B_0\, C_0\, A_1\, B_1\, C_1$ sono sopra una sfera tangente agli spigoli del tetraedro: e reciprocamente se vi è una sfera tangente agli spigoli del tetraedro, si ha $a + a_1 = b + b_1 = c + c_1$. La relazione (2) diventa:

$$\frac{S\,O}{O\,M_0} = \frac{1}{3}\,(a + b + c - p_0)\left(\frac{1}{p_0 - a_1} + \frac{1}{p_0 - b_1} + \frac{1}{p_0 - c_1}\right).$$

4° *I punti $A_0\, A_1\, B_0\, B_1$ sono i punti di contatto (comuni sullo stesso spigolo) dei cerchi ex-iscritti alle faccie.* Si ha: $B A_0 = p_1 - b$ e $B A_0 = p_0 - c_1$ da cui: $c + a_1 - b = b_1 + a_1 - c_1$ ed anche $c + c_1 = b + b_1$. Similmente si ottiene $b + b_1 = a + a_1$. Reciprocamente se $c + c_1 = b + b_1 = a + a_1$ i cerchi ex-iscritti alle faccie

(*) Indico con p_0 il semiperimetro della faccia $(A\,B\,C)$ dove giace il punto M_0. Analogamente per le altre faccie.

toccano gli spigoli nei medesimi punti. Questi cerchi a due a due determinano 6 sfere tangenti ciascuna ad uno spigolo ed ai prolungamenti dei 4 spigoli concorrenti negli estremi di questo. Reciprocamente dall'esistenza di queste sfere si deduce: $a + a_1 = b + b_1 = c + c_1$.

La relazione (2) diventa:

$$\frac{S\,O}{O\,M_0} = \frac{3\,p_0}{a + b + c - p_0}.$$

Da quanto è detto in questi due casi si ha il teorema:

Se in un tetraedro è costante la somma degli spigoli opposti, esiste una sfera tangente agli spigoli del medesimo ed altre 6 sfere tangenti ciascuna ad uno spigolo ed ai prolungamenti dei quattro spigoli concorrenti con questo.

Osservazione — Se si conviene di chiamare *rete* del tetraedro il complesso dei 6 spigoli e *rette della rete* le 6 rette sulle quali giacciono gli spigoli, il teorema precedente si può enunciare così:

Se in un tetraedro è costante la somma degli spigoli opposti esiste una sfera *iscritta* nella rete del medesimo e 6 sfere *ex-iscritte* tangenti a 5 rette della rete.

Credo opportuno poi di aggiungere che:

Se in un tetraedro gli spigoli opposti sono eguali esistono 4 sfere ex-iscritte alla rete del tetraedro e tangenti alle 6 rette della rete.

Ciascuna di queste sfere è tangente a tre spigoli ed ai prolungamenti degli altri tre.

5° *Il punto O è centro della sfera iscritta.* — In questo caso per la proprietà dei piani bisettori dei diedri si ha:

$$\frac{S\,A_1}{A_1\,A} = \frac{S_1}{S_0},\quad \frac{S\,B_1}{B_1\,B} = \frac{S_2}{S_0},\quad \frac{S\,C_1}{C_1\,C} = \frac{S_3}{S_0}$$

e perciò la (2) diventa

$$\frac{S\,O}{O\,M_0} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_0}.$$

6° *I punti M sono i punti di contatto della sfera iscritta.* — Posto che le $S\,M_0$ $A\,M_1$ $B\,M_2$ $C\,M_3$ passino per uno stesso punto si ha: $S\,M_1 = S\,M_2 = S\,M_3$, $A\,M_0 = A\,M_3 = A\,M_2$ ecc. e così pure $A_0\,M_0 =$

$= A_0 M_1$, $B_0 M_0 = B_0 M_3$ ecc. . . . Ora dal triangolo $SA_0 C$, tagliato dalla BC_1, pel teorema di Menelao, si ha:

$$\frac{S M_1}{M_1 A_0} = \frac{C B}{A_0 B} \times \frac{S C_1}{C C_1}.$$

Similmente dal triangolo $A A_0 C$ tagliato dalla $B B_0$, si ha:

$$\frac{A M_0}{M_0 A_0} = \frac{C B}{A_0 B} \times \frac{A B_0}{B_0 C}.$$

Dividendo membro a membro le due relazioni e riducendo, si ha:

$$\frac{S M_1}{A M_0} = \frac{S C_1}{C C_1} \times \frac{B_0 C}{A B_0}.$$

Ma dal triangolo $S A C$, pel teorema di Ceva, si ha:

$$\frac{S A_1}{A A_1} = \frac{S C_1}{C C_1} \times \frac{B_0 C}{A B_0},$$

perciò:

$$\frac{S M_1}{A M_0} = \frac{S A_1}{A A_1} \quad \text{ossia} \quad \frac{S M_3}{A M_3} = \frac{S A_1}{A A_1}$$

cioè $M_3 A_1$ è bisettrice dell'angolo $S M_3 A$. Similmente $M_3 B_1$ è bisettrice dell'angolo $S M_3 B$: d'onde risulta che i tre angoli $S M_3 A$, $A M_3 B$, $B M_3 S$ sono eguali.

Lo stesso dicasi per le altre faccie del tetraedro. Laonde il teorema:

Se in un tetraedro le congiungenti i punti di contatto della sfera iscritta coi vertici opposti passano per un punto, da quei punti si vedono i lati delle faccie sotto il medesimo angolo.

Farò da ultimo un'osservazione sulla ricerca dei baricentri nelle figure considerate (triangolo e tetraedro).

Ricordo anzitutto che il baricentro del contorno d'un triangolo si ha nel centro del cerchio iscritto nel triangolo che ha per vertici i punti medi dei lati del primo. Con analogo procedimento si può dimostrare che: *Il baricentro della superficie d'un tetraedro è il centro della sfera iscritta nel tetraedro che ha per vertici i baricentri delle faccie del tetraedro dato.* Infatti supposte concentrate le masse delle 4 faccie nei rispettivi baricentri (il che non altera la posizione del baricentro del sistema) la questione è ridotta a trovare il baricentro dei 4 punti $M_0 M_1 M_2 M_3$ aventi i coefficienti $S_0 S_1 S_2 S_3$. Ora per la nota proprietà dei piani bisettori dei diedri del tetraedro, risulta facilmente che questo è il centro della sfera iscritta nel tetraedro $M_0 M_1 M_2 M_3$ come si è detto.

Ma la ricerca di questi baricentri si può fare anche altrimenti. Ed infatti tornando al contorno del triangolo, è evidente che la posizione del baricentro non cambia, se si suppone che in ciascun vertice si concentri la massa della metà di ciascun lato concorrente in esso vertice; dimodochè la questione è ridotta a trovare il baricentro dei tre vertici aventi coefficienti *proporzionali* alle somme dei lati concorrenti nei medesimi. Perciò nel triangolo ABC se si dividono i lati AB, BC, CA in C', A', B' in modo che:

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{c+a}{c+b}, \quad \frac{BA'}{A'C} = \frac{a+b}{a+c}, \quad \frac{CB'}{B'A} = \frac{b+c}{b+a},$$

il punto O comune alle AA', BB', CC' è il baricentro cercato e si avrà:

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{b+c+2a}{b+c} \quad \text{ed anche} \quad \frac{AA'}{OA'} = \frac{2p}{\frac{1}{2}(b+c)}.$$

Collo stesso metodo si ha che il baricentro della superficie del tetraedro coincide con quello dei quattro vertici, ciascuno dei quali abbia un coefficiente proporzionale alla somma delle tre faccie che hanno in comune quel vertice. Perciò nel tetraedro $SABC$ se si dividono gli spigoli AB, BC, CA in modo che:

$$\frac{AC_0}{C_0B} = \frac{S_0+S_1+S_3}{S_0+S_2+S_3}, \quad \frac{BA_0}{A_0C} = \frac{S_0+S_3+S_1}{S_0+S_1+S_3}, \quad \frac{CB_0}{B_0A} = \frac{S_0+S_2+S_3}{S_0+S_2+S_1}$$

il punto M_0 comune alle AA_0, BB_0, CC_0 è il baricentro dei tre punti A, B, C, e perciò sulla SM_0 si troverà il baricentro cercato. Ripetendo le stesse operazioni per le altre faccie e determinati quivi i punti $M_1 M_2 M_3$, come si è fatto per M_0, il punto O comune alle SM_0 AM_1 BM_2 CM_3 è il baricentro cercato: e si avrà

$$\frac{SO}{OM_0} = \frac{3S_0 + 2(S_1+S_2+S_3)}{S_1+S_2+S_3}$$

ossia anche

$$\frac{S\,M_0}{O\,M_0} = \frac{\text{somma delle faccie}}{\frac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3)}.$$

Così pure il baricentro della rete del tetraedro coincide con quello dei 4 vertici aventi ciascuno un coefficiente proporzionale alla somma degli spigoli concorrenti in esso vertice. Perciò con un procedimento somigliante al precedente si determinano 4 punti M sulle faccie: le congiungenti questi punti coi vertici opposti s'incontrano nel baricentro cercato. Indicando questi punti colle solite lettere si ha:

$$\frac{S\,O}{O\,M_0} = \frac{a + b + c + 2\,(a_1 + b_1 + c_1)}{a + b + c}$$

od anche

$$\frac{S\,M_0}{O\,M_0} = \frac{\text{somma degli spigoli}}{\frac{1}{2}(a + b + c)}.$$

È evidente che se il tetraedro ha le faccie eguali gli anzidetti baricentri coincidono con quello del tetraedro.

G. Riboni.

SUL NUMERO DELLE DIVISIONI
nella ricerca del massimo comune divisore di due numeri

Una nota del prof. Gatti, inserita in questo *Periodico* (luglio-agosto, 1889) con lo stesso titolo della presente, mi ha suggerito le considerazioni che seguono.

Sieno A ed R_n due numeri, pei quali la ricerca del massimo comune divisore dia luogo ad n divisioni, e sia $A > R_n$. Dinotando con

$$Q_1,\ Q_2,\ \ldots\ldots\ldots,\ Q_{n-1},\ Q_n$$

e con

$$R_{n-1},\ R_{n-2},\ \ldots\ldots\ldots,\ R_1,\ R_0$$

ordinatamente le parti intere de' quozienti ed i resti delle successive divisioni, sarà $R_0 = 0$ ed R_1 il massimo comune divisore dei numeri dati. E si avranno inoltre evidentemente le seguenti eguaglianze:

$$R_n = R_{n-1}\, Q_2 + R_{n-2},\ R_{n-1} = R_{n-2}\, Q_3 + R_{n-3}, \ldots,\ R_3 = R_2\, Q_{n-1} + R_1,\ R_2 = R_1\, Q_n.$$

Da queste eguaglianze, se alla R_1 ed alle Q si dànno i più piccoli valori che tali quantità possono avere, cioè se si pone

$$R_1 = 1,\ Q_n = 2,\ Q_{n-1} = Q_{n-2} = \ldots\ldots = Q_2 = Q_1 = 1,$$

si ottengono i minimi valori delle R, e questi sono:

$$R_1 = 1,\ R_2 = 2,\ R_3 = 3,\ R_4 = 5,\ R_5 = 8,$$
$$R_6 = 13,\ R_7 = 21,\ R_8 = 34,\ R_9 = 55,\ R_{10} = 89,\ \text{ecc.}$$

ciascuno de' quali è la somma dei due precedenti, sicchè la serie può facilmente prolungarsi quanto si vuole.

Ogni termine di questa serie rappresenta dunque il più piccolo valore che può avere il minore di due numeri perchè la ricerca del massimo comune divisore di essi dia luogo ad un determinato numero di divisioni. Così, per 9 divisioni, il minore dei due numeri non può essere più piccolo di $R_9 = 55$; o altrimenti: se il minore di due numeri è minore di 55, la ricerca del massimo comune divisore dei due numeri non può dar luogo a più di 8 divisioni.

Alcune facili proprietà de' termini della serie considerata permettono di dimostrare molto facilmente i teoremi citati dal professore Gatti e d'introdurre in essi modificazioni vantaggiose.

In primo luogo è chiaro che la serie è crescente e che ciascun termine di essa è maggiore del doppio di quello che lo precede di due posti. Da ciò segue che, essendo $R_2 = 2$, sarà

$$R_4 > 2^2,\ R_6 > 2^3,\ \ldots\ldots,\ R_{2n} > 2^n \ldots\ldots \qquad (1);$$

ed essendo $R_5 = 8 = 2^3$, sarà

$$R_7 > 2^4,\ R_9 > 2^5,\ \ldots\ldots,\ R_{2n+1} > 2 \ \ldots\ldots \qquad (2).$$

Dalle (1) si deduce il teorema:

Se 2^n è la più piccola potenza di 2 la quale eguagli o superi il minore di due numeri dati, nella ricerca del massimo divisore comune a questi due numeri non si possono fare più di $2n-1$ divisioni, $(n \geqq 2)$.

Questo teorema è quello citato nella nota del prof. Gatti (art. 5), ma in esso si sono apportate modificazioni di grande vantaggio.

Dalle (2) si deduce poi quest'altro teorema più utile del precedente:

Se 2^n è la più piccola potenza di 2 la quale eguagli o superi il minore di due numeri dati, nella ricerca del massimo divisore comune a questi due numeri non si possono fare più di $2n-2$ divisioni, $(n > 3)$.

Finalmente è facile dimostrare che i termini della serie considerata soddisfano alla relazione

$$R_{2n+1} > 2^{n-1}(n+2) \tag{3}$$

per $n > 2$.

Questa relazione può verificarsi pei primi termini della serie; così:

$$2^2(3+2) = 20 < R_7,\ \ 2^3(4+2) = 48 < R_9, \text{ ecc.}$$

Ammesso poi che la relazione si sia verificata per R_{2K+1}, cioè che sia

$$R_{2K+1} > 2^{K-1}(K+2)$$

si dimostra che dovrà essere vera per R_{2K+3}. Infatti si sa che

$$R_{2K+2} = R_{2K+1} + R_{2K} \text{ ed } R_{2K+3} = R_{2K+2} + R_{2K+1};$$

ed eliminando R_{2K+2}, si ha

$$R_{2K+3} = 2R_{2K+1} + R_{2K}.$$

Ora, per ipotesi

$$R_{2K+1} > 2^{K-1}(K+2)$$

e per le (1) $\qquad R_{2K} > 2^K,$

quindi chiaramente

$$R_{2K+3} > 2\left\{2^{K-1}(K+2)\right\} + 2^K,$$

ovvero

$$R_{2K+3} > 2^K\left\{(K+1)+2\right\}.$$

Dopo ciò la (3) è dimostrata, e da essa si deduce il teorema:

Se n *è il più piccolo numero intero tale che* $2^{n-1}(n+2)$ *eguagli o superi il minore di due numeri dati, nella ricerca del massimo divisore comune a questi due numeri non si possono fare più di* $2n$ *divisioni,* $(n>2)$.

Napoli (Collegio Militare), settembre 1889.

T. Fuortes.

SULL'EGUAGLIANZA $a^b = b^a$ CON a E b INTERI E POSITIVI

1. *Se* a *ed* m *sono interi e positivi ed è* a ≥ 3, *si ha*

$$1+\frac{m}{1}+\frac{m^2}{1.2}+\frac{m^3}{1.2.3}+\ldots.+\frac{m^a}{1.2\ldots a} < a^m \qquad (1)$$

Per $m=1$ si ha

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots.+\frac{1}{1.2\ldots a} < 1+ \\ +\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^{a-1}}\right)$$

ossia

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots.+\frac{1}{1.2\ldots a} < 1+ \\ +\frac{1-\frac{1}{2^a}}{1-\frac{1}{2}} = 3-\frac{1}{2^{a-1}}$$

epperciò

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\ldots+\frac{1}{1.2\ldots a} < a \qquad (1')$$

Ora se si ammette la (1) per un valore di m, e la si moltiplica per la (1'), si ottiene

$$\left(1+\frac{m}{1}+\frac{m^2}{1\,.\,2}+\frac{m^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots\ldots+\frac{m^a}{1\,.\,2\,.....\,a}\right)\times$$
$$\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots\ldots+\frac{1}{1\,.\,2\,.....\,a}\right)<a^{m+1} \quad (2)$$

Se i termini del primo polimonio si indicano con $u_0, u_1, u_2, \ldots. u_a$, e quelli del secondo con $v_0, v_1, v_2, \ldots. v_a$, il prodotto dei due polimoni sarà evidentemente maggiore della somma

$$u_0 v_0+(u_0 v_1+u_1 v_0)+(u_0 v_2+u_1 v_1+u_2 v_0)+\ldots.$$
$$\ldots.+(u_0 v_a+u_1 v_{a-1}+\ldots\ldots+u_{a-1} v_1+u_a v_0);$$

ma è

$$u_0 v_0=1$$

$$u_0 v_1+u_1 v_0=m+1$$

$$u_0 v_2+u_1 v_1+u_2 v_0=\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{m}{1}+\frac{m^2}{1\,.\,2}=\frac{(m+1)^2}{1\,.\,2}$$

$$u_0 v_3+u_1 v_2+u_2 v_1+u_3 v_0=$$
$$=\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{m}{1}\cdot\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{m^2}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{1}+\frac{m^3}{1\,.\,2\,.\,3}=\frac{(m+1)^3}{1\,.\,2\,.\,3}$$

. . . .

$$u_0 v_a+u_1 v_{a-1}+\ldots\ldots+u_{a-1} v_1+u_a v_1=$$
$$=\frac{1}{1\,.\,2\,....\,a}+\frac{m}{1}\cdot\frac{1}{1\,.\,2\,....\,(a-1)}+\frac{m^2}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{1\,.\,2\,....\,(a-2)}+\ldots..$$
$$\ldots..+\frac{m^{a-2}}{1\,.\,2\,....\,(a-2)}\cdot\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{m^{a-1}}{1\,.\,2\,....\,(a-1)}\cdot\frac{1}{1}+\frac{m^a}{1\,.\,2\,....\,a}=$$
$$=\frac{(m+1)^a}{1\,.\,2\,.....\,a}.$$

Quel prodotto è dunque maggiore di

$$1+\frac{m+1}{1}+\frac{(m+1)^2}{1\,.\,2}+\ldots..+\frac{(m+1)^a}{1\,.\,2\,....\,a},$$

epperciò dalla (2) risulta

$$a^{m+1} > 1 + \frac{(m+1)}{1} + \frac{(m+1)^2}{1 \,.\, 2} + \ldots\ldots + \frac{(m+1)^a}{1 \,.\, 2 \,\ldots\ldots\, a};$$

cioè, ammessa la (1) per un valore di m essa deve pure verificarsi per quel valore di m aumentato di 1.

2. *Se* a *ed* m *sono interi e positivi, ed è* a $\geqq 3$, *ha luogo la disuguaglianza*

$$(a+m)^a < a^{a+m}.$$

Sviluppando si ha

$$(a+m)^a = a^a + a \,.\, a^{a-1}\, m + \frac{a\,(a-1)}{1 \,.\, 2}\, a^{a-2}\, m^2 + \ldots.$$
$$\ldots. + \frac{a\,(a-1) \ldots\ldots (a-r+1)}{1 \,.\, 2 \,\ldots\ldots\, r}\, a^{a-r}\, m^r + \ldots. + m^a$$

ma è

$$\frac{a\,(a-1) \ldots (a-r+1)}{1 \,.\, 2 \,\ldots\ldots\, r}\, a^{a-r} = a^a\, \frac{\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{2}{a}\right) \ldots \left(1-\frac{r-1}{a}\right)}{1 \,.\, 2 \,\ldots\ldots\, r} < \frac{a^a}{1 \,.\, 2 \ldots r};$$

in conseguenza, e in forza del teorema precedente, sarà

$$(a+m)^a < a^{a+m}.$$

3. *L'eguaglianza*

$$a^b = b^a$$

con a *e* b *interi e positivi, ha luogo soltanto quando uno dei due numeri è eguale a* 2 *e l'altro a* 4.

Supposto $b > a$ ed eguale ad $a+m$, è chiaro, pel teorema precedente, che l'eguaglianza non può verificarsi se non è $a < 3$.

Ora per $a = 1$, si ha

$$a^b = 1, \;\; b^a = 1 + m.$$

Posto poi $a = 2$, l'eguaglianza diviene

$$(2+m)^2 = 2^{2+m}$$

ossia

$$1 + m + \frac{m^2}{4} = 2^m,$$

dalla quale si rileva che il numero m dev'essere pari. Fatto $m = 2n$, risulterà

$$(n+1)^2 = 2^{2n}$$

ossia

$$n + 1 = 2^n,$$

e in conseguenza $n = 1$, poichè, per $n > 1$ si ha

$$2^n - 1 > n.$$

D. Besso.

UN PROBLEMA D'ARITMETICA

1. Dato il numero $N = a_1 a_2 \dots a_n$, in cui $a_1, a_2, \dots a_n$ sono numeri primi, trattasi di trovare il numero dei modi differenti nei quali N può decomporsi in due, tre .... m fattori coniugati, cioè tali che il loro prodotto sia uguale ad N. La trattazione che segue viene poi a mostrare come potrebbero ottenersi i singoli prodotti corrispondenti ad un numero assegnato di fattori coniugati.

2. Consideriamo prima il caso che i fattori coniugati debbano essere due. La decomposizione relativa può venire effettuata come segue.

Si prenda come primo fattore una delle a e come 2°, per conseguenza, il prodotto delle rimanenti $n-1$ a, poi per 1° fattore il prodotto di due a e come 2° quello delle rimanenti $n-2$ a, e così via; finalmente come 1° fattore il prodotto di $n-1$ a e come 2° la rimanente a. Il numero dei successivi prodotti che così si ottengono, sarà:

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots\dots\dots\dots, \binom{n}{n-1}$$

essendo $\binom{n}{1}$ il numero delle combinazioni di n elementi 1 ad 1, $\binom{n}{2}$ quello delle combinazioni di n elementi due a due, ecc., giacchè in ogni caso le rimanenti a sono da comporsi in un fattore unico.

Abbiamo così che il totale numero di questi prodotti è dato, per la formola del binomio, dalla somma

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots\dots + \binom{n}{n-1} = 2^n - 2.$$

Se ora osserviamo che i prodotti stessi sono uguali due a due, per la proprietà commutativa del prodotto, segue che il numero dei modi differenti in cui N può decomporsi in un prodotto di due fattori coniugati è $2^{n-1} - 1$ (*).

3. Passiamo ora ad esaminare il caso in cui i fattori coniugati debbono essere tre, procedendo analogamente a quanto s'è fatto precedentemente.

Si prenda cioè come 1° fattore una lettera a e mantenendo fisso questo fattore si raggruppino le rimanenti $n-1$ a in due fattori coniugati differenti, in tutti i modi possibili, poi prendendo come 1° fattore il prodotto di due a, si compongano le rimanenti $n-2$ a in due fattori coniugati differenti in tutte le maniere possibili, e si proceda così finchè si giunga a scegliere come 1° fattore il prodotto di $n-2$ a e per 2° e 3° fattore l'una e l'altra delle due a rimanenti. In questo caso per avere il numero dei prodotti che si sono ottenuti è chiaro che saranno da moltiplicare i numeri delle combinazioni di n elementi ad 1 ad 1, a 2 a 2, ... ad $n-2$ ad $n-2$, ossia i numeri

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots\ldots\ldots, \binom{n}{n-2}$$

rispettivamente per i numeri

$$2^{n-2} - 1,\ 2^{n-3} - 1, \ldots\ldots\ldots 2 - 1$$

che indicano (n. 2) quanti siano i modi differenti in cui un prodotto di $n-1$, $n-2$, ... due fattori primi, può scomporsi in due fattori coniugati; poi dovranno addizionarsi i risultati ottenuti. La somma che così si ricava è

$$\binom{n}{1} 2^{n-2} + \binom{n}{2} 2^{n-3} + \ldots\ldots + \binom{n}{n-2} 2 -$$
$$- \left\{ \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots\ldots + \binom{n}{n-2} \right\} =$$
$$\frac{(2+1)^n - 2^n - 2n - 1}{2} - \left\{ 2^n - n - 2 \right\} = \frac{3^n - 3 \cdot 2^n + 3}{2},$$

sempre per la formola del binomio.

(*) Questo risultato trovasi, ottenuto in altro modo, nelle pregevolissime *Lezioni di Algebra elementare* del Prof. GIACOMO BELLACCHI, vol. I, n. 24, libro del quale siamo lieti di annunziare prossima la pubblicazione di una analisi nelle pagine di questo Periodico.

Se poi si osservi che col metodo seguito per la formazione di questi prodotti, uno stesso prodotto figura tre volte, per es. essendo $N = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ il prodotto $a_3 . (a_1 a_2) . (a_4 a_5 a_6)$ riappare sotto le due altre forme $(a_1 a_2) . a_3 . (a_4 a_5 a_6)$ e $(a_4 a_5 a_6) . a_3 . (a_1 a_2)$; è da concludersi che il numero dei modi differenti in cui il numero $N = a_1 a_2 \ldots . a_n$, può risolversi nel prodotto di tre fattori coniugati, è

$$\frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2} = \frac{3^{n-1} - 2 . 2^{n-1} + 1}{2}.$$

4. Passeremo ora a dimostrare, col metodo di *conclusione* da m ad $m + 1$, che il numero dei modi differenti ne' quali il numero N, che è il prodotto di n fattori primi, può scomporsi in un prodotto di m fattori coniugati, essendo $m \leq n$, è dato da

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)} \left\{ m^{n-1} - \binom{m-1}{1} (m-1)^{n-1} + \binom{m-1}{2} (m-2)^{n-1} - \ldots\ldots \right.$$
$$\left. \ldots\ldots - (-1)^{m-1} \binom{m-1}{1} 2^{n-1} + (-1)^{m-1} . 1^{n-1} \right\}. \qquad [1]$$

A questo scopo conviene premettere il seguente teorema:

Se u_0, u_1, $u_2, \ldots . u_n$ sono $n + 1$ numeri qualunque e se con Δu_i s'indica la differenza $u_{i+1} - u_i$, con $\Delta^2 u_i$ la differenza $\Delta(\Delta u_i) = (u_{i+2} - u_{i+1}) - (u_{i+2} - u_i)$ e così via, si ha

$$\Delta^n u_0 = u_n - \binom{n}{1} u_{n-1} + \binom{n}{2} u_{n-2} - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + (-1)^{n-1} \binom{n}{1} u_1 + (-1)^n u_0. \qquad [2]$$

Infatti segue:

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0, \quad \Delta^2 u_0 = (u_2 - u_1) - (u_1 - u_0) = u_2 - 2 u_1 + u_0,$$
$$\Delta^3 u_0 = \Delta(\Delta^2 u_0) = (u_3 - 2 u_2 + u_1) -$$
$$(u_2 - 2 u_1 + u_0) = u_3 - 3 u_2 + 3 u_1 - u_0,$$
$$\Delta^4 u_0 = (u_4 - 3 u_3 + 3 u_2 - u_1) - (u_3 - 3 u_2 + 3 u_1 - u_0) =$$
$$u_4 - 4 u_3 + 6 u_2 - 4 u_1 + u_0$$

. . . .

e, in generale, per la notissima legge di formazione dei coefficienti binomiali che va sotto il nome di *triangolo di Tartaglia* la relazione [2].

(Continua).

A. Lugli.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 27, 39, 40, 41, 42, 44 e 45

27. *Dimostrare che, se l'equazione*

$$t^4 - 4t^3 + \alpha t^2 - 4t + \beta = 0$$

ha le quattro radici positive, dev'essere $\alpha = 6$, $\beta = 1$. (D. BESSO).

Dimostrazione del Prof. *U. Scarpis.*

Sieno $t_1\, t_2\, t_3\, t_4$ le radici della data equazione e $P_1\, P_2\, P_3\, P_4$ le loro funzioni simmetriche elementari: sarà intanto

$$P_1 = 4,\ P_2 = \alpha,\ P_3 = 4,\ P_4 = \beta.$$

Ponendo ora $t_1 = 1 + r_1$, $t_2 = 1 + r_2$, $t_3 = 1 + r_3$, $t_4 = 1 + r_4$, ed indicando con $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ le funzioni simmetriche elementari delle quantità $r_1\, r_2\, r_3\, r_4$ si otterranno facilmente le relazioni:

$$P_1 = 4 + p_1 \quad P_2 = 6 + p_2 + 3p_1$$
$$P_3 = 4 + 3p_1 + 2p_2 + p_3 \quad P_4 = 1 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4$$

dalle quali si deducono subito le altre:

$$p_1 = 0 \quad 2p_2 + p_3 = 0$$
$$p_2 + 6 = \alpha \quad 1 + p_2 + p_3 + p_4 = \beta.$$

Da ciò si vede che qualunque sieno le radici dell'equazione proposta, le quantità $r_1\, r_2\, r_3\, r_4$ devono soddisfare alle precedenti condizioni, la seconda delle quali, osservando che da $p_1 = 0$ si può trarre

$$-2p_2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2$$

assume la forma:

$$p_3 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2.$$

Essendo $p_1 = 0$ si scorge che in qualunque ipotesi le $r_1\, r_2\, r_3\, r_4$ non potranno essere tutte positive o tutte negative, e se supponiamo poi che le $t_1\, t_2\, t_3\, t_4$ sieno tutte positive si vede pure che quelle delle $r_1\, r_2\, r_3\, r_4$ che sono negative devono però essere in valore assoluto minori dell'unità.

Esaminiamo quindi i tre seguenti casi.

(I) Sieno

$$r_1 > 0 \quad r_2 < 0 \quad r_3 < 0 \quad r_4 < 0$$

e pongasi

$$r_2 = -\rho_2 \quad r_3 = -\rho_3 \quad r_4 = -\rho_4.$$

Ricavando dalla $p_1 = 0$ il valore di r_1 e sostituendo nella:

$$p_3 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2$$

si ha:

$$r_1 = \rho_2 + \rho_3 + \rho_4$$
$$(\rho_2 + \rho_3 + \rho_4)(\rho_2 \rho_3 + \rho_2 \rho_4 + \rho_3 \rho_4) - \rho_2 \rho_3 \rho_4 =$$
$$= (\rho_2 + \rho_3 + \rho_4)^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2.$$

Essendo ora per ipotesi $\rho_2 < 1$, $\rho_3 < 1$, $\rho_4 < 1$ sarà:

$$\rho_2 \rho_3 + \rho_3 \rho_4 + \rho_2 \rho_4 < \rho_2 + \rho_3 + \rho_4$$

da cui si deduce subito l'impossibilità della precedente eguaglianza.

(2) Siano $r_1 < 0$ $r_2 > 0$ $r_3 > 0$ $r_4 > 0$ e pongasi $r_1 = -\rho_1$, avremo analogamente:

$$\rho_1 = r_2 + r_3 + r_4$$
$$-(r_2 + r_3 + r_4)(r_2 r_3 + r_3 r_4 + r_2 r_4) + r_2 r_3 r_4 =$$
$$= (r_2 + r_3 + r_4)^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2.$$

Ma per ipotesi è: $\rho_1 < 1$ e quindi tali pure saranno $r_2\, r_3\, r_4$ per cui anche in questo caso risulta subito l'impossibilità che sussista la predetta relazione.

(3) Sieno $r_1 > 0$ $r_2 > 0$ $r_3 < 0$ $r_4 < 0$ e si faccia: $r_3 = -\rho_3$ $r_4 = -\rho_4$. Avremo allora:

$$r_1 + r_2 = \rho_3 + \rho_4$$
$$(\rho_3 + \rho_4)(\rho_3 \rho_4 - r_1 r_2) = r_1^2 + r_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2$$

Ma essendo $\rho_3 < 1$, $\rho_4 < 1$ il fattore $(\rho_3 \rho_4 - r_1 r_2)$, anche se positivo, sarà minore di ρ_3 e di ρ_4 e risulta pure come sopra l'impossibilità della predetta condizione.

Ora se l'equazione proposta ha le radici positive, dovranno essere egualmente soddisfatte le relazioni: $p_1 = 0$, $p_3 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2$ ed in questa ipotesi non potranno $r_1\, r_2\, r_3\, r_4$ essere diverse da 0, e quindi dalle due:

$$\alpha = p_2 + 6 \qquad \beta = 1 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4\,,$$

risulterà $\alpha = 6$, $\beta = 1$.

39. *Trovare il numero delle radici reali dell'equazione*

$$a\,x^4 + 4\,x^3 + 2\,a\,x^2 - 4\,x + a = 0$$

in cui a *è compreso fra* 0 *ed* 1, *e separarle.* (D. Besso).

Soluzione del prof. *U. Scarpis* (*).

Anzitutto dalla forma particolare dell'equazione si scorge che se essa è soddi-

(*) Altre soluzioni pervennero dai Sig. prof. *S. Gatti*, *F. Palatini* e *F. Viaggi* sfatta da $x=y$ lo sarà pure da $x=-\frac{1}{y}$, per cui potremo rappresentare le sue radici con α, $-\frac{1}{\alpha}$, β, $-\frac{1}{\beta}$. Essendo poi $-\frac{4}{a}$ la somma delle dette radici, e $\frac{2a}{a}$ la somma dei loro prodotti due a due, avremo;

$$\alpha-\frac{1}{\alpha}+\beta-\frac{1}{\beta}=-\frac{4}{a}$$
$$\alpha\beta+\frac{1}{\alpha.\beta}-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}-2=2$$

ovvero:

$$\alpha-\frac{1}{\alpha}+\beta-\frac{1}{\beta}=-\frac{4}{a}$$
$$\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)=4.$$

Ponendo ora $\alpha-\frac{1}{\alpha}=u$, $\beta-\frac{1}{\beta}=v$ abbiamo: $u+v=-\frac{4}{a}$ $u.v=4$ dalle quali:

$$u=\frac{1}{a}\left(-2+2\sqrt{1-a^2}\right),\quad v=\frac{1}{a}\left(-2-2\sqrt{1-a^2}\right)$$

e sostituendo questi valori di u e v nelle $\alpha^2-u\,\alpha-1=0$, $\beta^2-v\,\beta-1=0$, si ottiene:

$$\alpha=\frac{1}{a}\left(-1+\sqrt{1-a^2}\pm\sqrt{2\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)}\right)$$
$$\beta=\frac{1}{a}\left(-1-\sqrt{1-a^2}\pm\sqrt{2\left(1+\sqrt{1-a^2}\right)}\right).$$

I due valori di α danno per prodotto -1, e se uno s'indica con α l'altro sarà $-\frac{1}{\alpha}$; considerando che lo stesso vale per i due valori di β, si scorge che le radici dell'equazione proposta saranno:

$$\alpha=\frac{1}{a}\left(-1+\sqrt{1-a^2}+\sqrt{2\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)}\right)$$
$$-\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{a}\left(-1+\sqrt{1-a^2}-\sqrt{2\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)}\right)$$
$$\beta=\frac{1}{a}\left(-1-\sqrt{1-a^2}+\sqrt{2\left(1+\sqrt{1-a^2}\right)}\right)$$
$$-\frac{1}{\beta}=\frac{1}{a}\left(-1-\sqrt{1-a^2}-\sqrt{2\left(1+\sqrt{1-a^2}\right)}\right).$$

Dall' ipotesi $0<a<1$ si deduce subito che le radici sono tutte reali e l'osservazione fatta in principio ci dimostra che due saranno positive e due negative.

Le precedenti espressioni delle radici sono però suscettibili di una semplificazione e questa si ottiene facilmente giovandosi della nota formula:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Si ha allora:

$$\alpha = \frac{1}{a}\left(-1 + \sqrt{1 - a^2} + \sqrt{1 + a} - \sqrt{1 - a}\right)$$

$$-\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{a}\left(-1 + \sqrt{1 - a^2} - \sqrt{1 + a} + \sqrt{1 - a}\right)$$

$$\beta = \frac{1}{a}\left(-1 - \sqrt{1 - a^2} + \sqrt{1 + a} + \sqrt{1 - a}\right)$$

$$-\frac{1}{\beta} = \frac{1}{a}\left(-1 - \sqrt{1 - a^2} - \sqrt{1 + a} - \sqrt{1 - a}\right)$$

e ponendo

$$\sqrt{1+a} = p, \ \sqrt{1-a} = q$$

$$\alpha = \frac{1+q}{1+p} = \frac{1+\sqrt{1-a}}{1+\sqrt{1+a}}, \quad -\frac{1}{\alpha} = -\frac{1+\sqrt{1+a}}{1+\sqrt{1-a}}$$

$$\beta = \frac{p-1}{q+1} = \frac{\sqrt{1+a}-1}{\sqrt{1-a}+1}, \quad -\frac{1}{\beta} = -\frac{\sqrt{1-a}+1}{\sqrt{1+a}-1}.$$

Queste formule ci dicono intanto che le due radici positive α. β sono comprese tra 0 ed 1 e che le radici negative si trovano quindi tra -1 e $-\infty$.

La media aritmetica

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{1+\sqrt{1+a}}$$

ci somministra un valore atto a separare le radici positive: l'inversa di questa quantità, presa negativamente, servirà a separare le radici negative.

Considerando poi l'equazione proposta si trova subito come limite inferiore delle radici positive il valore $\frac{a}{4}$ e quindi come limite inferiore delle radici negative $-\frac{4}{a}$.

40. *Eliminare* x, y, z *dalle tre equazioni*

$$Ax + By + Cz = 0$$

$$\frac{A_1}{x} + \frac{B_1}{y} + \frac{C_1}{z} = 0$$

$$A_2x^2 + B_2y^2 + C_2z^2 = 0.$$

(D. Besso).

Soluzione del Prof. *S. Catania.*

Le prime due equazioni, dopo di avere scritto nei secondi membri i termini in z, si moltiplichino membro a membro, e vi si ponga $\frac{x}{y}=u$; si avrà:

$$A B_1 u^2 + (A A_1 + B B_1 - C C_1) u + A_1 B = 0.$$

Nella prima equazione si scriva Cz nel secondo membro, e poscia si innalzi al quadrato. Si paragoni indi l'equazione ottenuta con la terza, allo scopo di eliminare z, e si ponga anche qui $\frac{x}{y}=u$; si avrà:

$$(A^2 C_2 + A_2 C^2) u^2 + 2 A B C_2 u + B^2 C_2 + B_2 C^2 = 0.$$

Con uno qualunque dei metodi notissimi eliminando u, da queste due equazioni quadratiche, si avrà la relazione cercata, la quale, dopo alcune riduzioni, si può mettere sotto la seguente forma:

$$\begin{gathered} A^4 A_1^2 B_2 C_2 - 2 A^3 A_1 (B B_1 + C C_1) B_2 C_2 + \\ + A^2 (B^2 B_1^2 + C^2 C_1^2) B_2 C_2 + A_1^2 A_2^2 B^2 C^2 + \\ + B^4 B_1^2 C_2 A_2 - 2 B^3 B_1 (C C_1 + A A_1) C_2 A_2 + \\ + B^2 (C^2 C_1^2 + A^2 A_1^2) C_2 A_2 + B_1^2 B_2^2 C^2 A^2 + \\ + C^4 C_1^2 A_2 B_2 - 2 C^3 C_1 (A A_1 + B B_1) A_2 B_2 + \\ + C^2 (A^2 A_1^2 + B^2 B_1^2) A_2 B_2 + C_1^2 C_2^2 A^2 B^2 = 0. \end{gathered}$$

41°. *Se con* $\binom{m}{r}$ *s'indica il numero delle combinazioni di* m *elementi ad* r *ad* r, *ha luogo la relazione*

$$\binom{n-1}{2r} + \frac{n-1}{2r-1}\binom{n-2}{2r-2} = \binom{n}{2r}. \qquad \text{(D. Besso).}$$

Soluzione del Sig. *S. Lopriore*, alunno del R. Liceo di Bari.

Si ha infatti:

$$\binom{n-1}{2r} + \frac{n-1}{2r-1}\cdot\binom{n-2}{2r-2} =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-2r)}{1.2\ldots\ldots 2r} + \frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-2r+1)}{1.2\ldots\ldots(2r-2)(2r-1)} =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-2r+1)}{1.2\ldots\ldots(2r-1)}\left\{\frac{n-2r}{2r}+1\right\} = \binom{n}{2r}$$

poichè $\frac{n-2r}{2r} + 1 = \frac{n}{2r}$.

42*. *Se in un esagono* AB'CA'BC' *inscritto in un cerchio, le rette* AA', BB', CC' *che uniscono i vertici opposti, si incontrano in un punto, il prodotto dei lati di posto dispari è uguale al prodotto dei lati di posto pari. Si ha cioè* AB' . CA' . BC' = A'B . C'A . B'C. (A. Sauve).

Soluzione del Sig. *P. Patrassi* alunno del R. Istituto tecnico di Terni (*).

Chiamando O il punto d'intersezione comune delle rette AA', BB', CC', congiungenti i vertici opposti, è chiaro che i triangoli $C'OA$, COA' sono simili poichè ang. $C'OA = COA'$, siccome opposti al vertice, e ang. $AC'O = OA'C$, perchè angoli al cerchio insistenti sullo stesso arco. Per ragioni analoghe sono simili i triangoli $A'OB$ ad AOB' e $B'OC$ a BOC'. Da queste tre coppie di triangoli simili si hanno le uguaglianze

$$CA' . OA = C'A . OC, \quad AB' . OB = A'B . OA, \quad BC' . OC = B'C . OB$$

che moltiplicate membro a membro, dopo la soppressione del fattore comune ai due membri $OA . OB . OC$, danno

$$CA' . AB' . BC' = C'A . A'B . B'C$$

ciò che d. d. (**).

44*. *Se si circoscrive un cerchio ad un triangolo equilatero* ABC, *dimostrare geometricamente:* 1° *che la somma delle distanze di un punto qualunque* P, *dell'arco* BC, *ai vertici* B *e* C *è eguale a* PA; 2° *che la somma* PA + PB + PC *è massima quando* P *è il punto medio dell'arco* BC.

(A. Lugli).

Dimostrazione del Sig. *U. Grossato,* alunno del R. Istituto tecnico di Girgenti (***).

Essendo $ABPC$ un quadrilatero inscritto, pel teorema di Tolomeo, si ha:

$$AP . BC = CA . BP + AB . CP$$

e poichè, per ipotesi, si ha $BC = CA = AB$, sopprimendo i fattori uguali, risulta:

$$AP = BP + CP.$$

Se poi P è il punto medio dell'arco BC, è manifesto che AP è diametro e perciò maggiore di qualsiasi corda. In tal caso la somma $PA + PB + PC = 2PA$ ha il suo massimo valore.

(*) Soluzioni analoghe di questa quistione vennero inviate dai Signori *G. D'Asdia* (R. Istituto tecnico Girgenti), *S. Jovino* (R. Istituto tecnico Bari), *S. Lopriore* (R. Liceo Bari), *G. Piuma* (Regio Liceo Colombo Genova).

(**) Come, giustamente, osserva il Sig. *D'Asdia* la proposizione sussiste tanto per un esagono convesso quanto per uno intrecciato.

(***) Altre dimostrazioni, sostanzialmente uguali all'una od all'altra delle due qui pubblicate, vennero inviate dai Signori *G. D'Asdia* (R. Istituto tecnico Girgenti), *S. Jovino* (R. Istituto tecnico Bari), *S. Lopriore* (R. Liceo Bari), *G. Piuma* (R. Liceo Colombo Genova), *P. Patrassi* (R. Istituto tecnico Terni).

Dimostrazione del Sig. *C. Casaterra*, alunno della R. Scuola tecnica di Velletri.

Prolunghisi BP in P' così che sia $PP' = PC$ e congiungasi P' con C. Gli angoli $P'PC$, BAC, che hanno lo stesso supplemento CPB, saranno uguali e poichè BAC è angolo di un triangolo equilatero sarà pure tale l'angolo $P'PC$ onde può concludersi che il triangolo $P'PC$ è equilatero, per conseguenza $CP' = PC$. Fatto l'angolo BCP comune, è chiaro che sarà la somma degli angoli $ACB + BCP = BCP + PCP'$, onde l'intero angolo $ACP = BCP'$ e i due triangoli ACP, BCP' sono egnali per avere il lato $AC = BC$, $CP = CP'$ ed uguali gli angoli compresi dai lati uguali. Risulta così che $AP = BP' = BP + PP' = BP + CP$.

Per la 2ª parte il ragionamento è quello della dimostrazione precedente.

Osservazione — Se P, M, N sono i punti medî degli archi BC, CA, AB l'esagono $ANBPCM$ è regolare e il suo perimetro vale tre diametri, risulta così che il suo lato è uguale al raggio, com'è notissimo.

45. *Se* A′ *è il punto del lato* BC *di un triangolo* ABC *pel quale si ha* $BA' : A'C = m$ *e* P *il punto in cui* AA′ *incontra la circonferenza circoscritta al triangolo, dimostrare:* 1° *che*

$$PA + PB + PC = \frac{c(a + c) + mb(a + b)}{\sqrt{(1 + m)(mb^2 + c^2) - a^2 m}};$$

2° *che il valore massimo della somma delle tre distanze del punto* P *ai tre vertici del triangolo si ha quando questa somma uguaglia*

$$2\sqrt{R(R + 2r_1)},$$

dove R *e* r_1 *indicano il raggio del cerchio circoscritto al triangolo e quello del cerchio ex-inscritto relativo al lato* a. (A. Lugli).

Dimostrazione del prof. *L. Merante* (*).

1. Chiamiamo φ e ψ gli angoli BAP, CAP, che la retta AP forma rispettivamente coi lati adiacenti c e b, sarà

$$A = \varphi + \psi, \quad \frac{mb}{c} = \frac{\text{sen}\,\varphi}{\text{sen}\,\psi},$$

Eliminando l'angolo ψ si ottiene

$$c \,\text{sen}\,\varphi = mb\,\text{sen}\,(A - \varphi);$$

sviluppando sen $(A - \varphi)$ e dividendo per $\cos\varphi$, otteniamo

$$tg\,\varphi = \frac{mb\,\text{sen}\,A}{c + mb\cos A}.$$

(*) Altre soluzioni vennero inviate dai sig. prof. *S. Catania*, *G. Ciabò*, *S. Gatti*, *G. Riboni*, e *F. Viaggi*.

Svilupparono la sola 1ª parte i giovani *G. Gallucci* e *G. Bitonti* alunni dell'Istituto tecnico di Catanzaro.

Eliminando invece l'angolo φ si troverà con processo analogo

$$tg\,\psi = \frac{c \operatorname{sen} A}{m\,b + c \cos A}.$$

Dall'espressioni delle tangenti degli angoli φ e ψ si deducono immediatamente quelle dei loro seni e coseni, ossia:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{m\,b \operatorname{sen} A}{\sqrt{m^2\,b^2 + c^2 + 2\,m\,b\,c \cos A}}, \quad \cos\varphi = \frac{c + m\,b \cos A}{\sqrt{m^2\,b^2 + c^2 + 2\,m\,b\,c \cos A}}$$

$$\operatorname{sen}\psi = \frac{c \operatorname{sen} A}{\sqrt{m^2\,b^2 + c^2 + 2\,m\,b\,c \cos A}}, \quad \cos\psi = \frac{m\,b + c \cos A}{\sqrt{m^2\,b^2 + c^2 + 2\,m\,b\,c \cos A}}.$$

Ora, essendo

$$\frac{P\,A}{\operatorname{sen}(C+\varphi)} = \frac{P\,B}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{P\,C}{\operatorname{sen}\psi} = \frac{a}{\operatorname{sen} A},$$

sarà

$$P\,A + P\,B + P\,C = \frac{a}{\operatorname{sen} A} \left\{ \operatorname{sen}(C+\varphi) + \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\psi \right\}.$$

Sostituendo a $\operatorname{sen}\varphi$, $\operatorname{sen}\psi$, $\cos A$, $\cos C$ i loro valori, abbiamo

$$P\,A + P\,B + P\,C = \frac{c\,(a+c) + m\,b\,(a+b)}{\sqrt{(1+m)\,(m\,b^2 + c^2) - a^2\,m}}.$$

2. Per determinare il valore massimo di questa espressione, poniamo

$$\frac{c\,(a+c) + m\,b\,(a+b)}{\sqrt{(1+m)\,(m\,b^2 + c^2) - a^2\,m}} = y$$

e cerchiamo per quali valori di y l'equazione in m

$$b^2 \left\{ (a+b)^2 - y^2 \right\} m^2 + \left\{ 2\,b\,c\,(a+b)\,(a+c) - (b^2 + c^2 - a^2)\,y^2 \right\} m + c^2 \left\{ (a+c)^2 - y^2 \right\} = 0$$

ha radici reali. Per la realità delle radici basta che

$$\left\{ 2\,b\,c\,(a+b)\,(a+c) - (b^2 + c^2 - a^2)\,y^2 \right\}^2 - 4\,b^2\,c^2 \left\{ (a+b)^2 - y^2 \right\} \left\{ (a+c)^2 - y^2 \right\} =$$
$$= 4\,y^2 \left(a\,b\,c \left\{ 8\,p\,(p-b)\,(p-c) + a\,b\,c \right\} - 4\,p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,y^2 \right)$$

non sia negativa. Quindi il valore massimo di y è

$$\sqrt{\frac{a\,b\,c \left\{ 8\,p\,(p-b)\,(p-c) + a\,b\,c \right\}}{4\,p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}} = \sqrt{\frac{a^2\,b^2\,c^2}{4\,\Delta^2} + \frac{2\,a\,b\,c}{p-a}} =$$
$$= \sqrt{4\,R^2 + 8\,R\,r_1} = 2\sqrt{R\,(R + 2\,r_1)}.$$

QUISTIONI PROPOSTE (*)

a). (**) Se i raggi dei circoli inscritti nelle quattro facce d'un tetraedro sono fra loro eguali, è necessario che le facce stesse siano fra loro eguali?

D. BESSO.

b). Il luogo dei punti, del piano d'un triangolo dato, tali che i piedi delle perpendicolari, condotte da uno qualunque di essi ai tre lati, formino un triangolo di data area, è una circonferenza concentrica a quella circoscritta al triangolo dato.

G. LORIA.

c). Fra quali limiti devono essere compresi gli angoli d'un triangolo affinchè si possa costruire un triangolo colle distanze del centro del circolo circoscritto ai tre lati?

46. Dimostrare che, se l'equazione

$$x^6 + 3\,a\,x^5 + \left(3\,a^2 - \frac{6}{a}\right)x^4 - 20\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0$$

ha tutte le radici positive, esse devono essere eguali ad 1.

47*. Verificare le disuguaglianze

$$\frac{m\,(b-a)}{b^{m+1}} < \frac{1}{a^m} - \frac{1}{b^m} < \frac{m\,(b-a)}{a^{m+1}}$$

nelle quali è $b > a > 0$, ed m significa un intero positivo.

48. Assegnare il limite al quale tende la funzione

$$n^{m-1}\left\{\frac{1}{(n+1)^m} + \frac{1}{(n+2)^m} + \frac{1}{(n+3)^m} + \ldots\ldots + \frac{1}{(n+n)^m}\right\}$$

(*) Le questioni contrassegnate con asterisco sono specialmente destinate agli alunni delle nostre Scuole e di esse si pubblicheranno soltanto le soluzioni inviate dagli alunni stessi.

(**) Le quistioni a), b) e c) furono già proposte a pag. 32 e 99 del Vol. I. ed a pag. 59 del Vol II. del *Periodico*, ma rimasero insolute. È perciò che se ne ripetono gli enunciati.

quando n tende all'infinito, nell'ipotesi che m sia un intero positivo costante.

49. Dimostrare che, quando n tende all'infinito, si ha

$$Lim \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 2.$$

50*. Dimostrare che in un decagono stellato, quale si ottiene prolungando i lati d'un pentagono convesso, il prodotto dei lati di posto dispari è eguale al prodotto dei lati di posto pari.

51. Risolvere l'equazione

$$x^5 + 5ax^3 + 5a^2x + b = 0.$$

52. Risolvere l'equazione

$$x^7 + 7ax^5 + 14a^2x^3 + 7a^3x + b = 0.$$

D. Besso.

53*. Dati di posizione nel piano n punti, costruire un poligono i cui lati passino per i punti dati e sieno divisi da questi, nel medesimo senso, in parti aventi un rapporto uguale a quello di due segmenti dati.

Mostrare che il problema ammette un'infinità di soluzioni se n è pari e i segmenti dati sono uguali fra loro, una soluzione unica in tutti gli altri casi.

54*. Se con $\binom{n}{r}$ s'indica il numero delle combinazioni di n elementi ad r ad r, dimostrare la relazione

$$\binom{m-1}{h} + \binom{m-1}{h+1} \frac{m-h}{m-h-1} = \frac{m+1}{m} \binom{m}{h+1}.$$

55*. Dimostrare che l'espressione

$$4^n - 3^{n+1} + 3 \, . \, 2^n - 1$$

è multipla di 6, qualunque sia l'intero positivo n, e che il quoziente della sua divisione per 6 è > 0 per ogni valore di $n > 2$.

A. Lugli.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Prof. ANTON MARIA BUSTELLI. — *L'insegnamento dell'aritmetica e della geometria secondo i nuovi programmi ufficiali per le scuole primarie e popolari.* — Città di Castello, S. Lapi tipografo editore, 1889.

Questo libro del Prof. Bustelli ha per oggetto l'insegnamento dell'aritmetica e della geometria nelle scuole elementari; ma, come l'A. dichiara nella prefazione, molte delle cose discorse in esso sono anche applicabili all'insegnamento della matematica elementare nelle scuole preparatorie alle normali, nelle scuole tecniche e nelle ginnasiali inferiori. Si divide in cinque conferenze. La prima, salvo lievi modificazioni, è la ristampa di un opuscolo dello stesso A., opuscolo che meritò il plauso di ragguardevoli persone e una lettera onorifica del Professor Cremona, come risulta dai documenti che accompagnano la pubblicazione della quale ci occupiamo.

All'autorevole voce del Prof. Cremona uniamo di gran cuore la nostra nella lode di maestro espertissimo di cose pedagogiche e di efficace espositore di eccellenti norme didattiche, tributata al Bustelli; e ci gode altresì l'animo per gli insoliti onori che il Ministero della pubblica istruzione rese al libro di questi, sebbene ci paia che il libro stesso, come d'altra parte ogni bella e buona cosa, non sia scevro di difetti e di mende, nè potremmo, e forse a torto, far nostro in tutto e per tutto il pensiero dell'A. in fatto di metodo. Ci sembra, per esempio, che pur facendo ragione alle necessarie attinenze che gli studi della scuola elementare hanno con quelli della scuola secondaria, i metodi dell'una non sieno d'ordinario applicabili all'altra: tanto è vero, che riducendo di mole un eccellente libro pei grandi, non si riescirebbe davvero a fare il buon libro dei piccoli.

Frattanto non vorremmo che il metodo proposto dal Bustelli per la trattazione di talun argomento, se ottimo per una scuola secondaria, non fosse convenevole ad una scuola elementare, dove l'attenzione degli alunni non si volge alla materia e al maestro che a tratti e fugacemente. Derivare il concetto generale del moltiplicare e del dividere dalla discussione di quesiti della stessa specie è certo ottima cosa, ma l'esame paziente e la sintesi dei vari casi non ci sembrano facili a ottenere da giovanetti delle scuole elementari. Piuttosto, dacchè l'A., a pagina 118, consiglia e molto opportunamente, la sostituzione momentanea dei dati interi ai dati frazionari, a fine di scoprire quali sieno le operazioni da fare per risolvere questo o quel problema, non si potrebbe, in proposito del moltiplicare o dividere per frazione, limitare l'insegnamento pressochè alle sole regole, e verificare di quando in quando la giustezza di taluni risultamenti facendo ricorso al metodo di riduzione all'unità?

Alcuni sostengono, e con valide ragioni, che l'insegnamento della matematica nelle scuole elementari debba contenersi entro i limiti delle quattro operazioni con gl'interi e co' decimali, e di quel tanto di geometria ch'è indispensabile al vivere civile di ogni ceto di persone. I programmi ufficiali delle nostre scuole dispongono ben altrimenti. Pertanto ci sembra che non sia proprio il caso di rincarare la dose, aggiungendo e la misura dei solidi, e uno studio abbastanza minuzioso dei medesimi, come vorrebbe il Bustelli. E a questo proposito: mentre riconosciamo di avere imparato molto dalla lettura delle pagine dello stesso Bustelli in argomento di geometria sperimentale, non possiamo tacere che taluni dei metodi sperimentali dei quali l'A. fa cenno ne hanno lasciato in qualche dubbio e nel desiderio di una esposizione sistematica e particolareggiata dei medesimi. Leggiamo per esempio a pagina 27: « Qui sarà utilissimo che il maestro dimostri, sempre per vie sperimentali, essere cinque e solo cinque le specie di poliedro regolare ». Ci sarebbe piaciuto che l'A. avesse tracciata egli stesso la via sperimentale che il maestro dovrebbe seguire per mettere in chiaro le due proposizioni, e specialmente la seconda.

Opportunissime e sagaci parecchie osservazioni del Bustelli in proposito della legge di proporzionalità. Ma siamo di parere che egli esageri alquanto le difficoltà del metodo dell'unità di contro a quello delle proporzioni, in questione di taluni problemi dipendenti dalla regola del tre semplice. Gli esempi a pagina 120 del libro non ci convincono pienamente. Ci è sembrato che, nella discussione dei medesimi, un soverchio amore della tesi abbia sospinto l'A. a qualche artifizio, altrimenti evitabile. Quanto alla definizione della proporzionalità quale eguaglianza dei rapporti fra gli stati corrispondenti di due grandezze che dipendono l'una dall'altra, definizione che l'A. preferisce a quella comunemente in uso, adottata dal Baltzer, osserveremo che, nella pratica dei problemi, ove fosse mestieri accertare la detta eguaglianza, s'incomincierebbe, naturalmente, ad assegnare a uno dei rapporti i più semplici valori, quali sono 2 o $^1/_2$, 3 o $^1/_3$, ecc.; e conseguentemente a supporre doppia o metà, tripla o terza parte ecc. una delle due grandezze. Se tale divenisse contemporaneamente anche l'altra, si potrebbe ritenere senz'altro essere le due grandezze proporzionali, com'è facile dimostrare. *La definizione degli uguali rapporti* (interi, fratti o irrazionali) contiene perciò più del necessario, e quando ne la si spogli, si riduce a quella, semplicissima, che l'A. vorrebbe evitare. Crediamo finalmente che, ad una nuova edizione del libro, sarebbero da omettere i paragrafi 61, 62 e 63. Non pare si accordino con l'indole elementare del resto dell'opera.

Se l'egregio A. nel riordinare il suo lavoro, che per la lieta accoglienza fattagli dal pubblico sembra prossimo alla ristampa, vorrà tenere in debito conto le nostre osservazioni, ci parrà fortuna l'avere, benchè in sì scarsa misura, contribuito con lui all'incremento della buona pedagogia delle nostre scuole.

RICCARDO DE PAOLIS.
GIOVANNI FRATTINI.

E. GELIN (l' Abbé) — *Elèments de Trigonomètrie Plane et sphèrique* — Namur, Huy, 1888 — Prix: 5,40 fr.

Quest'opera del prof. Gelin, noto per reputati altri lavori scolastici, oltrecchè ad uso degli allievi dei corsi professionali, dei candidati alle scuole speciali delle Università ed alla scuola militare di Bruxelles, come leggesi nel frontispizio, sarebbe a mio giudizio da chiamarsi ad uso dell'istruzione di se medesimi, *zum Selbstunterricht* come dicono i tedeschi, tanto la materia è presentata con ordine al lettore, le dimostrazioni vi sono chiare senza pregiudizio dell'esattezza e le diverse teorie sono illustrate da ben scelti esercizi e problemi risoluti.

Divise sono le opinioni se un libro di testo debba piuttosto essere un sunto sucoso delle lezioni che impartisce l'insegnante, lasciando alla viva voce di questo la cura d'eliminare quelle difficoltà che l'alunno potesse incontrare alla perfetta intelligenza di questa o quella verità, o se meglio non valga che il libro di testo spiani quasi la via all'allievo e possa considerarsi come una riproduzione inanimata della parola del docente. Per chi opina come in quest'ultimo caso il libro del prof. Gelin, può citarsi a *modello* e questo fatto non dev'essere stato ultimo fra quelli pei quali l'Accademia Reale del Belgio, assegnò a quest'opera l'alta onorificenza di un premio.

Il libro contiene sostanzialmente le teoriche che trovansi nella trigonometria del Serret ed è diviso in quattro sezioni, i cui titoli sono — *Teoria delle linee trigonometriche* (*) — *Trigonometria rettilinea* — *Trigonometria sferica* — *Complementi di trigonometria.* — In ciascuna son svolti con molta larghezza gli argomenti che vi si riferiscono e l'A. non trascura occasione di dare anche più dimostrazioni d'uno stesso teorema o diverse deduzioni d'una medesima proprietà. Questo accade ad es. per le formole relative all'addizione degli archi; per la formola che rende monomia la somma $\cot a \pm \cot b$; per la formola $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B) : \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B) = a+b : a-b$, che stabilisce la nota relazione tra due angoli d'un triangolo ed i lati opposti; per la formola che esprime l'area d'un triangolo in funzione dei lati. per la formola della trigonometria sferica $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}$; per la formola del Lhuilier che dà la tang. di $\frac{1}{4}$ dell'eccesso sferico d'un triangolo in funzione dei lati e per l'espressione di questo eccesso; ecc. ecc..

Non poche sono le cose notevoli contenute in questo volume, che difficilmente saprebbero trovarsi in altra opera sulla stessa materia, essendo introdotti nel medesimo gran parte dei perfezionamenti e dei progressi realizzati dalla trigonometria negli ultimi tempi ed alcune novità dovute allo stesso A.. Noto ad

(*) Vi sarà chi s'impunterà alla parola *linea*, che veramente non è la più propria ad indicare quei rapporti che la trigonometria considera, ma in fondo è quistione di parola e non c'è da farne gran caso.

es. gli sviluppi di sen $(a+b+c+...)$, cos $(a+b+c+...)$, tg $(a+b+c+...)$, sen ma, cos ma, tg ma, ricavati nella loro forma generale fino dalle prime pagine; i valori delle tangenti, cotangenti, secanti e cosecanti di tutti gli archi multipli di 3°, dati con *denominatori razionali*; molti esempî di verificazione di identità trigonometriche con largo contributo all'analogia fra queste e le identità algebriche; molti e interessanti esercizî di risoluzione d'equazioni trigonometriche; una serie assai copiosa di relazioni fra i tre angoli d'un triangolo obliquangolo; poi un gran numero di formole riferentesi ai cerchi circoscritto, inscritto ed ex-inscritti al triangolo rettilineo e sferico ed alla risoluzione di quello, allorchè i dati non sono lati od angoli, come pure relative al quadrilatero piano qualunque e' inscrittibile, e la trattazione di parecchi problemi non usuali di trigonometria sferica.

E non meno sviluppate sono le applicazioni pratiche della trigonometria propriamente detta, prima con numerosi esempi numerici di risoluzione dei triangoli sì rettilinei che sferici, poi colla risoluzione di problemi relativi alla misura di altezze e distanze e con un cenno sulle triangolazioni geodetiche.

La 4ª sezione dell'opera comprende le teoriche che fanno parte dei complementi della trigonometria del Serret e in parte anche delle note della edizione italiana di questa di A. Ferrucci, ed oltre a ciò il metodo delle proiezioni, con applicazione alla dimostrazione generale della formula che dà il seno e coseno della somma di due archi ed alla deduzione della relazione fondamentale della trigonometria sferica; la somma dei seni e coseni d'archi in progressione aritmetica; la trattazione di diverse quistioni di massimo e minimo e di questioni varie di trigonometria. È da segnalare poi qui una semplificazione della risoluzione trigonometrica dell'equazione $x^3+px+q=o$, nel caso di una radice reale e due immaginarie, per cui non viene in campo la considerazione delle radici immaginarie dell'unità. Tutta la materia vi è svolta sempre in quella forma piana a cui sopra accennammo in modo da darle un valore altamente didattico.

Non possiamo esimerci però da un appunto all'intera opera cioè che essa non sia provveduta di una serie opportunamente scelta di esercizi per gli scolari sui quali questi potessero esercitare la loro sagacità.

La lettura del libro del Prof. Gelin persuaderà chi non ne fosse ancora convinto che anche le matematiche elementari non sono immobilizzate ma ubbidiscono pur esse alla legge generale della natura per la quale tutto è moto e progresso.

A. Lugli.

Pubblicazioni ricevute dalla Direzione del Periodico

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del professore G. Battaglini. Vol. XXVII. Novembre-Dicembre. Napoli, B. Pellerano editore, 1889.

Journal de Mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. DE LONGCHAMPS, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, LUCIEN LÉVY, agrégé des sciences mathématiques, directeur des études à l'Ecole préparatoire de Saint-Barbe. 3[e] Série, Treizième année. N. 12. Décembre, 1889. Quatorziéme année. N. 1. Janvier, 1890. Paris, libraire Ch. Delagrave.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par H. VUIBERT. 14 année. N. 6, 7, 8. Paris, M. Nony et C., 17 rue des Écoles, 1889-1890.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo III. Fasc. VI. Novembre-Dicembre, 1889.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2ª, Vol. III, Fasc. 12. Dicembre, 1889.

FAIFOFER (A.) — Elementi di algebra ad uso degli Istituti tecnici (1° biennio) e dei Licei. 8ª edizione, migliorata. Venezia, Tipografia Emiliana, 1890. Prezzo L. 3.

GIUDICE (F.) — Geometria piana ad uso dei ginnasi e licei. Palermo, Remo Sandron, editore, 1890. Prezzo L. 3.

— Lezioni d'Algebra dette in un corso libero (litografate). Palermo, 1888-89.

GREMIGNI (M.) Euclide. Libro sesto novamente esposto. Appendice sulla Misura delle Grandezze. In Firenze, G. C. Sansoni, editore, 1889. Prezzo L. 1,50.

DE LONGCHAMPS (G.) Les fonctions pseudo, et hyper-bernoulliennes et leur premières applications. Contribution élémentaire à l'intégration des équations différentielles. (Mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique, 1889).

RAZZABONI (A.) — Sulle rappresentazioni dello spazio sopra sè stesso che conservono le aree delle superficie corrispondenti. (Rend. della R. Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 1889).

TESSARI (D.) — La Cinematica applicata alle macchine ad uso della Scuola di applicazione per gli ingegneri, degli ingegneri, e costruttori meccanici. Torino, E. Loescher, 1890.

TORELLI (G.) — Su qualche proprietà degli integrali definiti trinomi che soddisfano all'equazione differenziale lineare di 2° ordine illustrata da Gauss (Memorie della Società italiana delle scienze, Napoli, 1889).

ERRATA-CORRIGE.

A p. 184, del Vol. IV, lin. 4, dal basso, in luogo di $\sqrt{\frac{3x}{2} \cdot 2x\left(2x+\frac{r}{4}\right)\left(2x-\frac{r}{4}\right)}$, leggasi: $\sqrt{\frac{3x}{2} \cdot \frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{r}{4}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{r}{4}\right)}$; stessa pagina a linea 2 in luogo di $x=\frac{r}{8}\sqrt{13}$, leggasi $x=\frac{7r}{2}$ ed a linea 1 ai tre valori riportati sostituiscasi: $\frac{13r}{4}$; $\frac{7r}{2}$; $\frac{15r}{4}$.

A pag. 191, linea 14, invece di $e_m - \sqrt{N} < \frac{1}{\beta}$, leggasi: $e_m - \sqrt{N} < \frac{1}{\beta^2}$.

SVILUPPO DI ARC. SEN X.

Una formula di trasformazione per arc. tg x

1. L'area del segmento, del cerchio di raggio 1, limitato da un diametro e dalla corda parallela che ha da esso distanza x è

$$x \,.\, \sqrt{1-x^2} + \text{arc. sen}\, x.$$

Tal segmento è pure limite della somma dei rettangoli inscritti col tendere a zero dell'altezza d'ognuno: per ciò è

$$x \,.\, \sqrt{1-x^2} + \text{arc. sen}\, x =$$
$$\lim_{n=\infty} \,.\, \frac{2}{n} \cdot \left(1 + \sqrt{1-\frac{1}{n^2}} + \ldots\ldots + \sqrt{1-\frac{m^2}{n^2}}\right)$$

dove n è variabile intera ed m esprime, per ogni valore di n, l'intero definito dalla

$$\frac{m}{n} \gtreqless x < \frac{m+1}{n}.$$

Sviluppando i radicali del secondo membro della precedente uguaglianza, si ottiene

$$x \,.\, \sqrt{1-x^2} + \text{arc. sen}\, x =$$
$$\lim \,.\, \frac{2}{n} \cdot \left[1 + \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2\,.\,4} \cdot \frac{1}{n^4} - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6} \cdot \frac{1}{n^6} - \ldots\right)\right.$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left. + \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{n^2} - \frac{1}{2\,.\,4} \cdot \frac{m^4}{n^4} - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6} \cdot \frac{m^6}{n^6} - \ldots\ldots\right)\right].$$

Sommando per colonne, si ottiene

$$x \,.\, \sqrt{1-x^2} + \text{arc. sen}\, x =$$
$$\lim \,.\, 2 \,.\, \left(\frac{m}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1^2+2^2+\ldots+m^2}{m^3} \cdot \frac{m^3}{n^3} - \frac{1}{2\,.\,4} \cdot \frac{1^4+2^4+\ldots+m^4}{m^5} \cdot \frac{m^5}{n^5} - \right.$$
$$\left. \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6} \cdot \frac{1^6+2^6+\ldots\ldots+m^6}{m^7} \cdot \frac{m^7}{n^7} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right)$$

epperò, (V. Baltzer, Aritm. Gen., § 12).

$$x \,.\, \sqrt{1-x^2} + \text{arc}\,.\,\text{sen}\, x =$$
$$2\,.\left(x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2\,.\,4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{x^7}{7} - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\cdot\frac{x^9}{9} - \dots\dots\right)$$

per cui è

$$\text{arc}\,.\,\text{sen}\, x = 2\,.\left(x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2\,.\,4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{x^7}{7} - \dots\right) - x\,.\,\sqrt{1-x^2}$$
$$= 2\,.\left(x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2\,.\,4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{x^7}{7} - \dots\dots\right)$$
$$- \left(x - \frac{1}{2}\cdot x^3 - \frac{1}{2\,.\,4}\cdot x^5 - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot x^7 - \dots\dots\right)$$
$$= x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{x^7}{7} + \dots\dots$$

Essendo

$$\text{arc}\,.\,\text{sen}\,(-x) = -\,\text{arc}\,.\,\text{sen}\, x$$

abbiamo così

$$\text{arc.}\ \text{sen}\, x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{x^7}{7} + \dots\dots$$

dove deve essere

$$x^2 \overline{\gtrless}\ 1$$

ed arc. sen x indica l'arco, positivo o negativo, di minor lunghezza assoluta avente per seno x. Dal precedente sviluppo si può avere quello di arc. tg x essendo

$$\text{arc.}\ \text{tg}\, x = \text{arc.}\ \text{sen}\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\ \text{arc.}\ \text{sen}\ \frac{2\,x}{1+x^2}.$$

2. Posto

$$\text{tg}\, y = x \qquad \text{tg}\, y' = x'$$

si ha

$$\text{tg}\,(y + y') = \frac{\text{tg}\, y + \text{tg}\, y'}{1 - \text{tg}\, y\,.\,\text{tg}\, y'} = \frac{x + x'}{1 - x\,.\,x'}$$

da cui, essendo

$$y = \text{arc.}\ \text{tg}\, x \quad y' = \text{arc.}\ \text{tg}\, x'$$

si ricava

$$\text{arc. tg}\, x + \text{arc. tg}\, x' = \text{arc. tg}\, \frac{x + x'}{1 - x \,.\, x'}.$$

Da questa si deduce immediatamente la relazione, utile in molti casi

$$\text{arc. tg}\, \frac{1}{a + (a^2+1)\,.\,k} = \text{arc. tg}\, \frac{1}{(a^2+1)\,.\,k^2 + (a+1)^2\,.\,k + (a+1)}$$
$$+ \text{arc. tg}\, \frac{1}{a + (a^2+1)\,.\,(k+1)}.$$

Si ricava, p. es.,

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc. tg}\, \frac{1}{2} + \text{arc. tg}\, \frac{1}{8} + \dots + \text{arc. tg}\, \frac{1}{2\,k^2} + \text{arc. tg}\, \frac{1}{1 + 2\,k}$$
$$= \sum_{1}^{\infty}{}_k\, \text{arc. tg}\, \frac{1}{2\,.\,k^2},$$

$$\text{arc. tg}\, \frac{1}{n + (n^2+1)\,.\,k} =$$
$$\sum_{k+1}^{k'}{}_\lambda\, \text{arc. tg}\, \frac{1}{(n^2+1)\lambda^2 - (n-1)^2\,.\,\lambda - n + 1} + \text{arc. tg}\, \frac{1}{n + (n^2+1)\,.\,k'}$$
$$= \sum_{k+1}^{\infty}{}_\lambda\, \text{arc. tg}\, \frac{1}{(n^2+1)\,\lambda^2 - (n-1)^2\,.\,\lambda - n + 1}.$$

Con un po' di pazienza, si possono dedurre formule convenienti quanto si desidera per il calcolo di π.

F. GIUDICE.

UN PROBLEMA D'ARITMETICA

(*Continuazione e fine*).

Prendansi ora per $u_0, u_1, \dots\dots u_n$ le potenze m$^{\text{esime}}$ dei primi $n+1$ numeri naturali: $1^m, 2^m, \dots (n+1)^m$, le quali, com'è noto (*), formano una *progressione aritmetica* d'ordine m, cioè sono tali che le loro differenze m$^{\text{esime}}$ sono costanti ed uguali poi ad $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,\dots\, m$ e quindi le differenze degli ordini superiori tutte nulle.

(*) BALTZER. *Arit. generale.* § 28, 10.

Segue da ciò e dal teorema precedente che

$$\Delta^n u_0 = (n+1)^m - \binom{n}{1} n^m + \binom{n}{2} (n-1)^m - \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1} \binom{n}{1} 2^m + (-1)^n 1^m,$$

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots m = (m+1)^m - \binom{m}{1} m^m + \binom{m}{2} (m-1)^m - \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots + (-1)^{m-1} \binom{m}{1} 2^m + (-1)^m 1^m \qquad [3]$$

e che l'espressione

$$(n+1)^m - \binom{n}{1} n^m + \binom{n}{2} (n-1)^m - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + (-1)^{n-1} \binom{n}{1} 2^m + (-1)^n \,.\, 1^m \qquad [4]$$

è uguale a zero tutte le volte che sia $n > m$.

In particolare posto $n = 5$, per $m = 4, 3, 2, 1$, si ha:

$$6^4 - 5 \,.\, 5^4 + 10 \,.\, 4^4 - 10 \,.\, 3^4 + 5 \,.\, 2^4 - 1 = 0,$$
$$6^3 - 5 \,.\, 5^3 + 10 \,.\, 4^3 - 10 \,.\, 3^3 + 5 \,.\, 2^3 - 1 = 0,$$
$$6^2 - 5 \,.\, 5^2 + 10 \,.\, 4^2 - 10 \,.\, 3^2 + 5 \,.\, 2^2 - 1 = 0,$$
$$6 - 5 \,.\, 5 + 10 \,.\, 4 - 10 \,.\, 3 + 5 \,.\, 2 - 1 = 0,$$

com'è facile verificare.

Posto ciò si ammetta che la formola [1] rappresenti effettivamente quanti sieno i modi differenti in cui N può risolversi in m fattori coniugati, quando $m \leqq n - 1$, e dimostriamo che essa rappresenta questo numero di modi anche quando il numero dei fattori coniugati è $m + 1$.

Procederemo come al n. 3. Moltiplicheremo cioè i numeri delle combinazioni di n elementi, ad 1 ad 1, a 2 a 2, ... ad $n - m$ ad $n - m$, ordinatamente per le espressioni

$$\frac{1}{|\underline{m-1}} \left\{ m^{n-2} - \binom{m-1}{1} (m-1)^{n-2} + \ldots - (-1)^{m-1} \binom{m-1}{1} 2^{n-2} + (-1)^{m-1} \,.\, 1^{n-2} \right\},$$
$$\frac{1}{|\underline{m-1}} \left\{ m^{n-3} - \binom{m-1}{1} (m-1)^{n-3} + \ldots - (-1)^{m-1} \binom{m-1}{1} 2^{n-3} + (-1)^{m-1} \,.\, 1^{n-3} \right\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{|\underline{m-1}} \left\{ m^{m-1} - \binom{m-1}{1} (m-1)^{m-1} + \ldots - (-1)^{m-1} \binom{m-1}{1} 2^{m-1} + (-1)^{m-1} \,.\, 1^{m-1} \right\},$$

addizionando i prodotti ottenuti. La somma, ordinata per le verticali del precedente complesso di termini, prescindendo dal comun fattore $\frac{1}{\underline{|m-1}} = \frac{1}{1 \,.\, 2 \,.\, \ldots\ldots \,(m-1)}$, è:

$$\left\{ \binom{n}{1} m^{n-2} + \binom{n}{2} m^{n-3} + \ldots\ldots + \binom{n}{m} m^{m-1} \right\}$$

$$- \binom{m-1}{1} \left\{ \binom{n}{1} (m-1)^{n-2} + \binom{n}{2} (m-1)^{n-3} + \ldots + \binom{n}{m} (m-1)^{m-1} \right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$- (-1)^{m-1} \binom{m-1}{1} \left\{ \binom{n}{1} 2^{n-2} + \binom{n}{2} 2^{n-3} + \ldots\ldots + \binom{n}{m} 2^{m-1} \right\}$$

$$+ (-1)^{m-1} \left\{ \binom{n}{1} . 1^{n-2} + \binom{n}{2} . 1^{n-3} + \ldots\ldots + \binom{n}{m} . 1^{m-1} \right\}.$$

Ma, pel teorema del binomio, si ha in generale

$$\binom{n}{1} (m-h)^{n-2} + \binom{n}{2} (m-h)^{n-3} + \ldots\ldots + \binom{n}{n-m} (m-h)^{m-1} =$$

$$\frac{1}{m-h} \left\{ (m-h+1)^n - (m-h)^n - \binom{n}{m-1} (m-h)^{m-1} - \ldots\ldots - \binom{n}{1} (m-h) - 1 \right\},$$

cosicchè facendo $h = 0, 1, \ldots\ldots m-1$ potrà darsi altra forma alle m espressioni entro le graffe.

Immaginando eseguita la trasformazione, poi effettuati i prodotti, finalmente addizionati, per colonna, i termini delle m linee che possono ottenersi, risulta:

$$\frac{(m+1)^n}{m} - \binom{m-1}{1} \frac{m^n}{m-1} + \ldots\ldots - (-1)^{m-1} \binom{m-1}{1} \frac{3^n}{2} + (-1)^{m-1} \frac{2^n}{1}$$

$$- \frac{m^n}{m} + \binom{m-1}{1} \frac{(m-1)^n}{m-1} - \ldots\ldots + (-1)^{m-1} \binom{m-1}{1} \frac{2^n}{2} - (-1)^{m-1} \frac{1^n}{1}$$

$$- \binom{n}{m-1} \left\{ \frac{m^{m-1}}{m} - \binom{m-1}{1} \frac{(m-1)^{m-1}}{m-1} + \ldots - (-1)^{m-1} \binom{m-1}{1} \frac{2^{m-1}}{2} + (-1)^{m-1} \frac{1^{m-1}}{1} \right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$- \binom{n}{1} \left\{ \frac{m}{m} - \binom{m-1}{1} \frac{m-1}{m-1} + \ldots - (-1)^{m-1} \binom{m-1}{1} \frac{2}{2} + (-1)^{m-1} \frac{1}{1} \right\}$$

$$- \frac{1}{m} + \binom{m-1}{1} \frac{1}{m-1} - \ldots + (-1)^{m-1} \binom{m-1}{1} \frac{1}{2} - (-1)^{m-1} \frac{1}{1}.$$

Eseguendo le riduzioni pei termini delle espressioni entro le graffe, si riconosce subito che le espressioni stesse sono della forma [4], e per esse è soddisfatta la condizione $n > m$, onde saranno tutte nulle e il complesso precedenti di termini si ridurrà, raccogliendo le potenze simili dei numeri naturali, a:

$$
\begin{aligned}
&\frac{(m+1)^n}{m} - \left\{ \frac{1}{m} + \binom{m-1}{1} \frac{1}{m-1} \right\} m^n + \\
&+ \left\{ \binom{m-1}{1} \frac{1}{m-1} + \binom{m-1}{2} \frac{1}{m-2} \right\} (m-1)^n - \dots \\
&- (-1)^{m-1} \left\{ \binom{m-1}{2} \frac{1}{3} + \binom{m-1}{1} \frac{1}{2} \right\} . 3^n + \qquad [5] \\
&+ (-1)^{m-1} \left\{ \binom{m-1}{1} \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \right\} . 2^n - (-1)^{m-1} . 1^n \\
&- \frac{1}{m} + \binom{m-1}{1} \frac{1}{m-1} - \binom{m-1}{2} \frac{1}{m-2} + \dots + (-1)^{m-1} \binom{m-1}{1} \frac{1}{2} - (-1)^{m-1} . \frac{1}{1}.
\end{aligned}
$$

Quando poi si osservi che

$$
\left\{ \binom{m-1}{h} \frac{1}{m-h} + \binom{m-1}{h+1} \frac{1}{m-h-1} \right\} (m-h)^n = \frac{m+1}{m} \binom{m}{h+1} (m-h)^{n-1} \qquad [6]
$$

e che i diversi termini delle quattro prime linee dell'espressione [5], eccettuati il primo ed ultimo, hanno la forma del 1° membro della [6] e sono per conseguenza esprimibili mediante il 2° membro, ponendo in esso successivamente $h = 0, 1, 2, \dots\dots (m-2)$ e ammettendo che il simbolo $\binom{m-1}{0}$ rappresenti l'unità, si concluderà che il numero di modi cercato, sempre prescindendo dal fattore $\frac{1}{|\underline{m-1}}$, è anche espresso da

$$
\begin{aligned}
&\frac{m+1}{m} \left\{ (m+1)^{n-1} - \binom{m}{1} m^{n-1} + \dots\dots \right. \\
&\left. \dots\dots - (-1)^{m-1} \binom{m}{2} 3^{n-1} + (-1)^{m-1} \binom{m}{1} 2^{n-1} \right\} \\
&- (-1)^{m-1} . 1 - \frac{1}{m} + \binom{m-1}{1} \frac{1}{m-1} - \dots\dots \qquad [7] \\
&\dots\dots + (-1)^{m-1} \binom{m-1}{1} \frac{1}{2} - (-1)^{m-1} . \frac{1}{1}.
\end{aligned}
$$

Ora fermiamoci ad esaminare qual sia, in quest'espressione, la somma algebrica dei termini delle due ultime righe, le quali chiaramente possono anche scriversi

$$\begin{aligned}&(-1)^m \frac{m}{m} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \left\{ \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \ldots\ldots \right.\\ &\left.\ldots\ldots + (-1)^{m-1} \binom{m}{2} - (-1)^{m-1} \binom{m}{1} \right\},\end{aligned} \qquad [8]$$

distinguendo il caso di *m pari* ed *m dispari*. Nel primo caso il polinomio entro parentesi, che ha allora l'ultimo suo termine positivo, è uguale a 2, avendosi

$$(1-1)^m = 0^m = 1 - \left\{ \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \ldots - \binom{m}{2} + \binom{m}{1} \right\} + 1;$$

e la [8] riducesi a

$$+ \frac{m}{m} - \frac{1}{m} + \frac{2}{m} = (-1)^m \frac{m+1}{m}.$$

Nel caso invece di m impari i termini in [8] entro parentesi sono due a due uguali e di segno contrario, talchè la [8] diviene

$$- \frac{m}{m} - \frac{1}{m} = (-1)^m \frac{m+1}{m}.$$

Per avere così il valore definitivo della [7] si dovrà in ogni caso aggiungere ai termini delle due prime righe la quantità $(-1)^m \frac{m+1}{m}$. Rammentando adesso che in [7] fu ommesso il fattore $\frac{1}{1\,.\,2\ldots(m-1)}$ ed osservando, analogamente a quanto si disse al n. 3, che con questo metodo di formazione dei singoli prodotti uno stesso prodotto viene a comparire $m+1$ volte, sarà da concludere che il numero dei modi in cui il numero N può risolversi in $m+1$ fattori coniugati è espresso dalla formola

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\,.\,2\ldots(m-1)} \left\{ (m+1)^{n-1} - \binom{m}{1} m^{n-1} + \ldots\ldots \right.\\ &\qquad \left.\ldots\ldots - (-1)^m \binom{m}{1} 2^{n-1} + (-1)^m \,.\, 1^{n-1} \right\}\end{aligned}$$

che può dedursi dalla [1] ponendo $m+1$ in luogo di m. E poichè la [1] fu dimostrata vera per $m=3$, così, quando sia $m \leq n$, essa è vera sempre.

Risulta poi senz' altro la regola seguente:

Il numero dei modi differenti ne' quali un numero $\mathrm{N} = \mathrm{a}_1 \mathrm{a}_2 \ldots \mathrm{a}_n$, *dove* $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots \mathrm{a}_n$, *sono fattori primi diversi, può risolversi nel prodotto di* m *fattori coniugati, si ottiene moltiplicando le potenze* $\mathrm{n}-1^{\text{esime}}$ *dei primi* m *numeri naturali* $1, 2, \ldots \mathrm{m}$ *per i coefficienti dei termini della potenza* $\mathrm{m}-1^{\text{esima}}$ *del binomio, alternativamente cambiati di segno, incominciando col* $+$ *se* m *è dispari, col* $-$ *se* m *è pari, poi dividendo il numero ottenuto per* $1 \,.\, 2 \ldots (\mathrm{m}-1)$.

Volendo poi considerare anche il caso in cui uno dei fattori sia la unità, come può talvolta occorrere, al numero espresso dalla formola [1], per un dato valore di m, conviene aggiungere quello che si ha dalla stessa formola sostituendo $m-1$ ad m.

6. Possiamo poi osservare, a verifica del risultato ottenuto, che per la formola [3], questo numero di modi, com'è naturale, uguaglia l'unità tutte le volte che $m=n$.

7. Se il numero N anzichè della forma $a_1 a_2 \ldots a_n$ fosse uguale ad $a_1^\alpha a_2^\beta \ldots a_n^\nu$, dove $a_1, a_2, \ldots a_n$ stanno sempre a rappresentare numeri primi diversi, poichè due fattori coniugati che debbono essere primi fra loro non possono contenere la stessa lettera, si ha che il numero dei modi nei quali il nuovo numero è decomponibile in m fattori coniugati primi fra loro, è ugualmente ottenibile applicando la regola del n. 5.

Così ad es. il numero $232848 = 2^4 \,.\, 3^3 \,.\, 7^2 \,.\, 11$ è risolvibile in un prodotto di 3 fattori coniugati *primi fra loro* in

$$\frac{1^3 - 2 \,.\, 2^3 + 3^3}{1 \,.\, 2} = 6$$

modi differenti, escluso il caso del fattore 1.

Questi prodotti sono poi

$(2^4 \,.\, 3^3) \,.\, 7^2 \,.\, 11 = 432 \,.\, 49 \,.\, 11$; $(2^4 \,.\, 7^2) \,.\, 3^3 \,.\, 11 = 784 \,.\, 27 \,.\, 11$;
$(2^4 \,.\, 11) \,.\, 3^3 \,.\, 7^2 = 176 \,.\, 27 \,.\, 49$; $(3^3 \,.\, 7^2) \,.\, 2^4 \,.\, 11 = 1323 \,.\, 16 \,.\, 11$;
$(3^3 \,.\, 11) \,.\, 2^4 \,.\, 7^2 = 297 \,.\, 16 \,.\, 49$; $(7^2 \,.\, 11) \,.\, 2^4 \,.\, 3^3 = 539 \,.\, 16 \,.\, 27$.

A. Lugli.

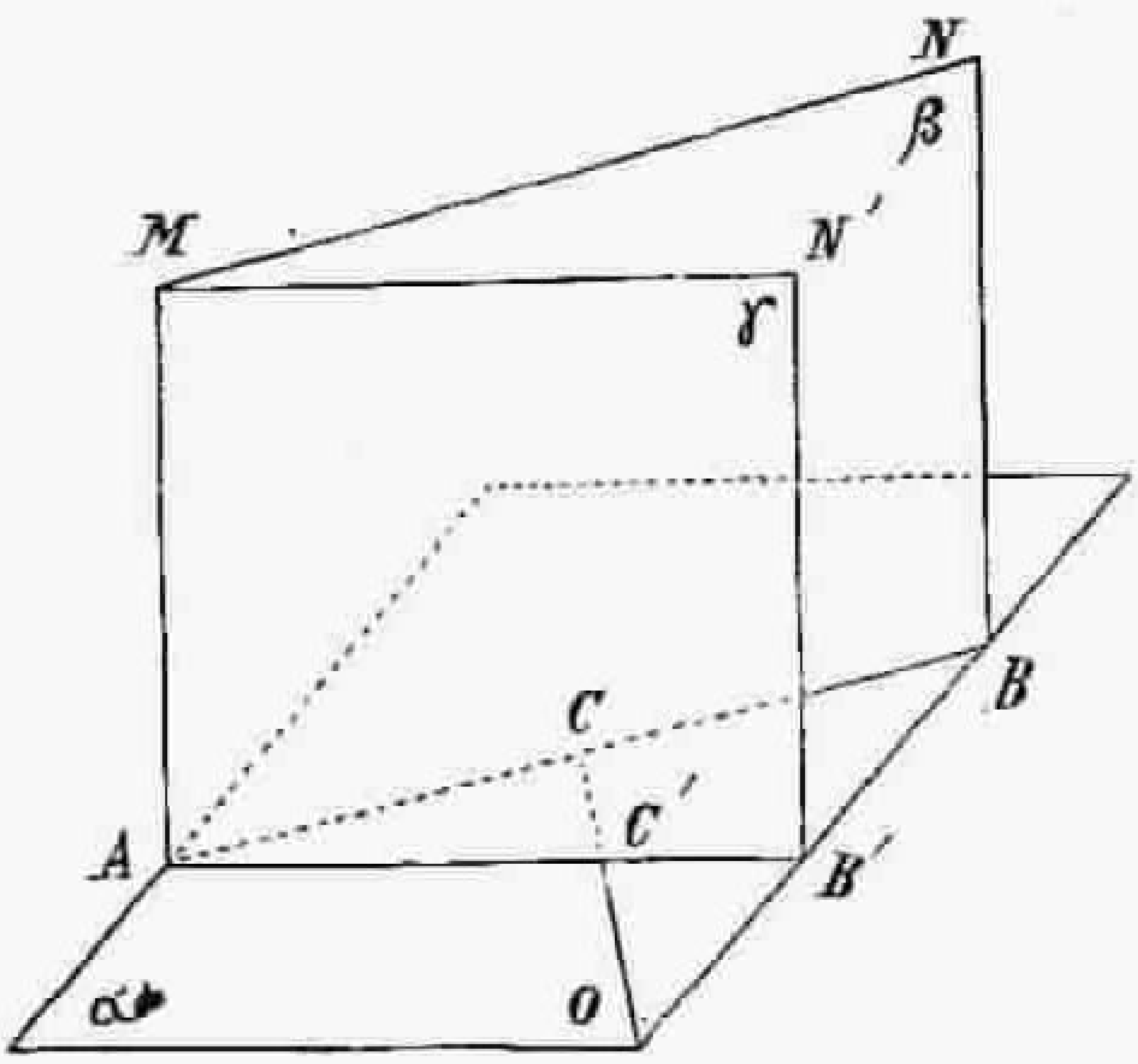
UNA OSSERVAZIONE

RELATIVA AD ALCUNE QUISTIONI DI PROBABILITÀ

Il Sig. BERTRAND nella sua opera *Calcul des probabilités* (Paris, Gauthier-Villars, 1889) mette in guardia il lettore contro gli errori nei quali si può incorrere applicando il concetto ordinario di probabilità al caso in cui il numero delle sorti è infinito, e porta quattro esempi, uno aritmetico e tre geometrici, a confermare le sue osservazioni. Mi pare non inutile aggiungere il seguente molto semplice.

In un piano orizzontale α abbiasi un segmento AB, e sia C il suo punto di mezzo. Per la retta AB si conduca un piano verticale β e siano AM, BN le verticali dei punti A, B. Se si fa cadere nella striscia (AM, BN) un punto pesante P, in modo che la caduta sia rimesssa al caso, la probabilità che P cada in AC è uguale ad $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$.

Facciamo ora una proiezione centrale da un centro O, situato nel piano α, sopra un piano γ passante per AM, e sia AB' la proiezione di AB, $B'N'$ quella di BN, C' quella di C e P' quella di P. Il rimettere al caso la caduta di P nella striscia (AM, BN) equivale a rimettere al caso quello della proiezione P' nella striscia $(AM, B'N')$, e la probabilità che si veda la imagine P' cadere in AC', espressa dal rapporto $\frac{AC'}{AB'}$,



non si può più prendere sempre uguale ad $\frac{1}{2}$ ma può acquistare infiniti valori differenti facendo solo variare la posizione dell'occhio.

La proiezione centrale porterebbe parimente a fare osservazioni analoghe nel caso in cui invece di segmenti si trattasse di aree.

Non è dunque sempre permesso, neppure in casi molto semplici, quando il numero delle sorti è infinito, sostituire alla considerazione di un caso quella di un altro, in cui le sorti possibili e le favorevoli corrispondono una ad una a quelle del primo.

Aggiungerò anche l' osservazione seguente.

A rappresentare le forme possibili di triangolo si possono prendere, invece dei punti interni ad un triangolo equilatero (V. Cesàro, Volume XXIV del Giornale di Battaglini, 1886: *La rottura del diamante*, e Murer, Anno IV di questo Periodico, 1889, pag. 161: *Dei poligoni che corrispondono ai triangoli rettangoli ed agli acutangoli ed alcune quistioni relative di probabilità*), i punti P interni ad un triangolo qualunque ABC, facendo corrispondere ai possibili angoli le superficie dei triangoli PBC, PCA, PAB la cui somma è uguale alla superficie ABC, che si fa allora corrispondere all' angolo di due retti. In tal modo si troverebbe facilmente che la cosiddetta probabilità che un triangolo formato a caso sia isoscele sta a quella che esso sia rettangolo non come $\sqrt{3} : 1$ (V. la nota citata del Murer), ma come

$$(m + m' + m'') : p,$$

essendo m, m' m'' le mediane e p il semiperimetro del triangolo.

S. Rindi.

ALCUNE FORMOLE RELATIVE AL TRIANGOLO

1. Sia ABC un triangolo. Conducansi le altezze $AA' = h$, $BB' = h'$, $CC' = h''$ e si descriva il triangolo $A'B'C'$, del quale, com' è noto, le $A'A$, $B'B$, $C'C$ sono bisettrici degli angoli interni, e siano A'', B'', C'' i punti in cui queste incontrano $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ e D, E, F quelli in cui incontrano il cerchio circoscritto ad ABC.

Pongasi $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $B'C' = a'$, $C'A' = b'$, $A'B' = c'$; $A'A'' = \alpha$, $B'B'' = \beta$, $C'C'' = \gamma$; $A'D = d$, $B'E = e$, $C'F = f$ e siano R, r, R', r' i raggi dei cerchi rispettivamente circoscritti ed inscritti dei triangoli $ABC = \Delta$, $A'B'C' = \Delta'$.

Se O è il punto in cui s' intersecano le tre altezze del triangolo ABC, si ha

$$AO = m = 2R\cos A,\ BO = n = 2R\cos B,\ CO = p = 2R\cos C,$$
$$A'O = g = 2R\cos B\cos C,\ B'O = i = 2R\cos C\cos A,$$
$$C'O = l = 2R\cos A\cos B,$$
$$a' = R\,\mathrm{sen}\,2A,\ b' = R\,\mathrm{sen}\,2B,\ c' = R\,\mathrm{sen}\,2C,$$
$$\Delta' : \Delta = 2\cos A\cos B\cos C = r' : R \ (^*).$$

Mostreremo ora che fra i diversi elementi precedentemente notati esistono altre relazioni non prive affatto d' interesse.

2. Si ha intanto $a' = R\,\mathrm{sen}\,2A = 2R\,\mathrm{sen}\,A\cos A$, onde:

[1] $$a' = a\cos A,\ b' = b\cos B,\ c' = c\cos C.$$

Inoltre poichè $\Delta = \frac{R}{r'}\cdot\Delta'$ ed è $2\Delta' = (a'+b'+c')\,r'$, segue:

[2] $$2\Delta = (a'+b'+c')\,.\,R$$

ed anche

$$2\Delta = R\,(a\cos A + b\cos B + c\cos C) =$$
$$R^2\,(\mathrm{sen}\,2A + \mathrm{sen}\,2B + \mathrm{sen}\,2C)$$

e poichè il fattore fra parentesi, com'è noto, è $= 4\,\mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,B\,\mathrm{sen}\,C$, infine

[3] $$\Delta = 2R^2\,\mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,B\,\mathrm{sen}\,C = Rr'\,.\,\mathrm{tang}\,A\,\mathrm{tang}\,B\,\mathrm{tang}\,C.$$

Dalla relazione:

$$\Delta' : \Delta = 2\cos A\cos B\cos C$$

e dall'essere $\Delta' = \frac{a'b'c'}{4R'}$ e $\Delta = \frac{abc}{4R}$, deducesi

$$\frac{a'b'c'}{abc}\cdot\frac{R}{R'} = 2\cos A\cos B\cos C = \frac{2a'b'c'}{abc},$$

onde

[4] $$R = 2R'.$$

(*) Baltzer. — *Trigonometria* § 4, 13.

3. Si ha: $d = BA' \,.\, \cot C = c \cos B \cot C = 2R \cos B \cos C = g$, quindi:

$$[5] \qquad \frac{a}{g} + \frac{b}{i} + \frac{c}{l} = \frac{a}{d} + \frac{b}{e} + \frac{c}{f} =$$
$$\frac{\operatorname{sen} A}{\cos B \cos C} + \frac{\operatorname{sen} B}{\cos C \cos A} + \frac{\operatorname{sen} C}{\cos A \cos B} =$$
$$\frac{\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C}{2 \cos A \cos B \cos C} = 2 \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C.$$

Inoltre evidentemente

$$[6] \qquad ma + nb + pc = 2R \left\{ a \cos A + b \cos B + c \cos C \right\} =$$
$$2R\,(a' + b' + c') = 4\Delta.$$

$$[7] \qquad ail + blg + cgi =$$
$$4R^2 \cos A \cos B \cos C \left\{ a \cos A + b \cos B + c \cos C \right\} =$$
$$4 \Delta r' = 4 R \Delta';$$

$$[8] \qquad mnp = 8R^3 \cos A \cos B \cos C = 4R^2 r' =$$
$$4R \,.\, \Delta \,.\, \cot A \cot B \cot C = abc \cot A \cot B \cot C;$$

$$[9] \qquad anp + bpm + cmn =$$
$$4R^2 \left\{ a \cos B \cos C + b \cos C \cos A + c \cos A \cos B \right\} =$$
$$8R^3 \left\{ \operatorname{sen} A \cos B \cos C + \operatorname{sen} B \cos C \cos A + \operatorname{sen} C \cos A \cos B \right\} =$$
$$8R^3 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C = abc,$$

per essere $\sum \operatorname{sen} A \cos B \cos C = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$.

$$[10] \quad \frac{g}{h} + \frac{i}{h'} + \frac{l}{h''} = \frac{\cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C} + \frac{\cos C \cos A}{\operatorname{sen} C \operatorname{sen} A} + \frac{\cos A \cos B}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B} = 1.$$

$$[11] \quad \frac{m}{h} + \frac{n}{h'} + \frac{p}{h''} = \frac{\cos A}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C} + \frac{\cos B}{\operatorname{sen} C \operatorname{sen} A} + \frac{\cos C}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B} = 2.$$

$$[12] \quad h\,h'\,h'' = \frac{1}{2}\,(m\,h'\,h'' + n\,h''\,h + p\,h\,h') = \Delta \,.\, (a' + b' + c').$$

$$[13] \qquad \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = 1 + 4 \,.\, \frac{a' + b' + c'}{a + b + c}.$$

Infatti:

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = \cos A + \cos B + \cos C =$$
$$1 + 4 \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \operatorname{sen} \frac{1}{2} B \operatorname{sen} \frac{1}{2} C,$$

per una formola nota di trigonometria, e

$$1 + 4 \,.\, \frac{a' + b' + c'}{a + b + c} = 1 + 4 \,.\, \frac{\operatorname{sen} A \cos A + \operatorname{sen} B \cos B + \operatorname{sen} C \cos C}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}$$
$$= 1 + 2 \,.\, \frac{\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C} = 1 + 2 \,.\, \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}$$
$$= 1 + 4 \,.\, \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \operatorname{sen} \frac{1}{2} B \operatorname{sen} \frac{1}{2} C,$$

dove si è fatto uso della relazione:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C.$$

[14] $$a \,.\, \operatorname{sen} (BAA' - CAA') + b \,.\, \operatorname{sen} (CBB' - ABB') +$$
$$c \,.\, \operatorname{sen} (ACC' - BCC') = 0.$$

Infatti il primo membro è uguale ad

$$a \,.\, \operatorname{sen} (C - B) + b \,.\, \operatorname{sen} (A - C) + c \,.\, \operatorname{sen} (B - A) =$$
$$2R \left\{ \operatorname{sen} A \operatorname{sen} (C - B) + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} (A - C) + \operatorname{sen} C \operatorname{sen} (B - A) \right\} = 0.$$

4. Chiamando O' il centro del cerchio inscritto nel triangolo ABC, dal triangolo OBO', si ha:

$$\overline{OO'}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{O'B}^2 - 2\, OB \,.\, O'B \cos OBO' =$$
$$4R^2 \cos^2 B + R^2 - 4R^2 \cos B \cos OBO'.$$

Ma si ha: $\cos OBO' = \cos (OBC - O'BC) = \cos B'BC \cos O'BC + \operatorname{sen} B'BC \operatorname{sen} O'BC = \operatorname{sen} C \operatorname{sen} A + \cos C \cos A = \cos (A - C)$, quindi

[15] $$\overline{OO'}^2 = R^2 - 4R^2 \cos B \left[\cos (A - C) - \cos B \right] =$$
$$R^2 - 8R^2 \cos A \cos B \cos C = R(R - 4r') = 4R'(R' - 2r').$$

Considerando infine i triangoli $AB'C'$, $A'B'C'$, aventi la stessa base, abbiamo che $AB'C' : A'B'C' = AA'' : A''A'$. Ma

$$[16]\quad 2\,A B' C' = a' \,.\, A C' \,.\, \text{sen}\, A C' B' = a' \,.\, b \cos A \cos C A A' =$$
$$a' \, b \cos A \,.\, \frac{h}{b} = a\, h \cos^2 A = 2\,\Delta \,.\, \cos^2 A,$$

onde: $A A'' : A'' A' = \Delta \,.\, \cos^2 A : \Delta'$. Ma $A' A'' = \alpha'$, $A A'' = h - \alpha'$, epperciò:

$$[17]\qquad \frac{h-\alpha'}{\alpha'} : \frac{h-\beta'}{\beta'} : \frac{h-\gamma'}{\gamma'} = \cos^2 A : \cos^2 B : \cos^2 C.$$

D. Gambioli.

SULL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

NELLE SCUOLE CLASSICHE

La matematica è per gli alunni delle scuole secondarie classiche uno degli scogli più ardui a superare, più di quello che non sia lo stesso greco, il quale se poco si studia, se ne deve cercare la causa, più nella poca persuasione che gli alunni e le famiglie hanno della utilità di questo insegnamento, anzichè nella difficoltà intrinseca della materia. L'utilità della matematica invece non è messa in dubbio da alcuno, appena appena qualche genitore alla vigilia dell'esame farà timidamente osservare al professore, che il suo figliolo vuole studiar Legge e quindi che sul suo sapere riguardo alla matematica si potrà non essere tanto esigenti. La difficoltà e il poco profitto qui derivano tutti dalla natura della scienza stessa, alla quale i giovani si sentono in generale poco inclinati perchè per ascoltare con profitto ogni lezione occorre uno sforzo notevole della mente, una continua riflessione, uno studio assiduo, un esercizio continuo, ed è assolutamente necessario che l'alunno abbia sempre presente tutto quello che prima ha studiato. — In questi studi una piccola interruzione, un momento di distrazione, fanno sì che lo scolare trovi subito gravi difficoltà a seguire il maestro, e se non è dotato di buona volontà, che l'aiuti a riparare prontamente alla momentanea deficienza, esse si accumulano in breve e viene presto il giorno in cui il giovane se ne trova avvolto come in una rete intricatissima della quale non saprà liberarsi, perchè gli manca il tempo di riprendere lo studio metodico ed ordinato della materia fin dai primordi; e se anche lo assiste il buon proposito di mantenersi in corrente, al maestro che l'interrogherà dovrà rispondere: che sebbene abbia studiato tanto, non ha potuto capire. Una volta che il giovane sia convinto che *la matematica non la capisce,* è inutile ogni esortazione, ogni ammonizione perchè ne coltivi lo studio con amore; nella migliore ipotesi non se ne occuperà che quel tanto da poter mostrare all'insegnante che *ha fatto quanto ha potuto*, sperando che il professore, convinto di ciò, lo tratti con indulgenza e gliene tenga conto il giorno dell'esame. Del resto a che mai è ora ridotto l'esame di matematica nel Ginnasio e nel Liceo? Abolito, o quasi, l'esame scritto; che criterio dell'istruzione di un giovane può dare la sola prova orale? A questa è assegnato un limite minimo di quindici minuti per la licenza, di dieci per la promozione; è difficile, per la buona distribuzione degli esami, che questo limite possa essere superato, dal momento che in molti licei le commissioni esaminatrici sono occupate tutto il mese di luglio anche sedendo le otto e dieci ore al giorno, e nell'ottobre debbono affrettarsi per poter riprendere le lezioni il giorno fissato. Nei quindici minuti è quindi necessario: preparare la figura, scrivere le formule algebriche, correggere gli errori che il candidato commette, che per poter andare innanzi non si possono lasciar passare in silenzio. Queste cose, insieme ad altri piccoli perditempi inevitabili, minaccerebbero di assorbire tutto il tempo disponibile, se per evitare ogni complicazione non si riducesse l'esame a domandare qualche definizione, a far eseguire qualche operazioncella, a far dimostrare qualche teorema semplicissimo.

D'altra parte colle disposizioni che attualmente regolano l'insegnamento secondario, la matematica sembra che sia stata messa affatto in seconda linea, e mentre una volta teneva colle lettere il primo posto, ora trovasi in condizioni tanto difficili da far temere che il profitto diventi pressochè nullo.

Infatti per cominciare fino dalle prime tre classi del ginnasio, mentre cogli ordinamenti entrati in vigore nel 1870, e che durarono con leggere modificazioni fino al 1883, erano assegnate due ore di aritmetica pratica per settimana e per classe, ora queste due ore sono divise fra l'aritmetica e le nozioni di scienze naturali. La maggior parte di questo tempo non resterà certo all'aritmetica, perchè le nozioni di scienze naturali essendo cosa affatto nuova per questi scolari e comprendendo un programma abbastanza vasto, dovranno prendere il maggior numero di lezioni. Per l'aritmetica basterà accontentarsi di assegnare gli esercizi di casa che il regolamento prescrive, e non resterà molto tempo per farne in iscuola una correzione a viva voce, assai più efficace di quella fatta segnando gli errori sulle pagine presentate, essendo molto dubbio che i giovanetti ritornino sul lavoro fatto per correggerne gli errori. Non sarà quindi possibile assicurarsi se gli alunni hanno lavorato del loro, e per poco che la scuola sia numerosa la maggior parte di essi potrà impunemente farsi fare da altri il compito di casa; e l'insegnante che correggerà questi temi potrebbe credere, se l'esperienza non l'ammaestrasse, che i suoi alunni sieno espertissimi nel calcolo numerico e nella soluzione dei problemi, mentre in realtà, quando saranno giunti alla fine della terza ginnasiale, dell'aritmetica avranno dimenticato la maggior parte di quanto ne sapevano uscendo dalle scuole elementari. — Anche la disposizione del nuovo regolamento, che in tutti gli esami del ginnasio inferiore l'aritmetica e le nozioni di scienze naturali costituiscano una sola prova, e quindi sia uno solo il punto di merito che esprima il profitto complessivo nei due rami di insegnamento, è tutto a scapito dell'aritmetica. Poichè i giovanetti, e per la novità dell'insegnamento e per le sue maggiori attrattive, daranno certamente la preferenza allo studio delle nozioni di scienze naturali e potranno col buon profitto in questo ramo riparare alla deficienza nell'aritmetica, senza che si veda come una cosa possa supplire all'altra.

Al Ginnasio superiore, sempre cogli ordinamenti del 1870, erano assegnate sei ore settimanali, tre per classe, pel solo insegnamento dell'Aritmetica ragionata. Era questo un tempo sufficiente allo scopo, ma non eccessivo, perchè l'Aritmetica ragionata è forse la parte più difficile della matematica elementare e per ottenere qualche risultato bisogna insistere, insistere molto su ogni dimostrazione, e non bisogna tralasciare gli esercizi, perchè non succeda che imparando l'Aritmetica ragionata gli alunni scordino la Tavola pitagorica. Ora nel Ginnasio sono riserbate solo due ore settimanali per classe, e queste per insegnare non solo l'Aritmetica ragionata (di cui il programma è quasi sempre il medesimo, giacchè difficile sarebbe diminuirlo), ma anche il primo libro degli Elementi di Geometria dell'Euclide. Come si potrà fare a svolgere in modo proficuo il programma in quel tempo? Sarà necessario sorvolare su tutto, limitarsi alle nozioni più semplici, ridurre la materia allo stato di scheletro, fare pochissime ripetizioni, interrogare appena quel tanto che è necessario per poter segnare per ciascun alunno un punto di merito per la votazione bimestrale. Di assegnare esercizi scritti in iscuola non si parlerà neppure, perchè come si potrebbe in tanta angustia di tempo, sacrificare per essi qualche ora di lezione? Dei compiti di casa non se ne potrà fare in iscuola che una correzione sommaria, senza potersi assicurare della loro autenticità. E poi, dal momento che è abolita la prova scritta d'Aritmetica nella licenza ginnasiale, come far entrare nei giovani la convinzione che la matematica non si può imparare, se non esercitandoli con temi scritti, sinceramente fatti e senza aiuto, allo sforzo necessario a trovare da sè le relazioni fra i termini di un problema, o la ragione necessaria di un teorema?

La matematica non si impara con un semplice sforzo di memoria, ed anche per poter ricostruire la dimostrazione di un teorema o la soluzione di un problema spiegati dal maestro è indispensabile che il giovane sappia lì per lì scoprire quei legami logici che ne segnano la via, ed in questo non potrà divenire esperto se non con continui esercizi.

(Continua).

DEMETRIO VALERI.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI
b), 28, 37, 43, 45, 47 e 50

b). *Il luogo dei punti, del piano di un triangolo dato, tali che i piedi delle perpendicolari, condotte da uno qualunque di essi ai tre lati, formino un triangolo di data area, è una circonferenza concentrica a quella circoscritta al triangolo dato.* (G. LORIA).

Dimostrazione del Prof. *F. Viaggi.* (*)

Sieno O, R centro e raggio del cerchio circoscritto al triangolo ABC; M un punto qualunque del suo piano, $MO = R_1$, ed A', B', C' i piedi delle perpendicolari condotte ai suoi lati da M.

Il quadrangolo $MB'AC'$ è inscrittibile nel cerchio di diametro MA; in esso e nel cerchio ABC le corde $B'C'$ e BC tagliano archi simili, quindi sono proporzionali ai diametri; dalla quale osservazione, estesa agli altri quadrangoli inscrittibili che si presentano nella figura, si deducono le relazioni

$$2R \, . \, B'C' = a \, . \, MA, \quad 2R \, . \, C'A' = b \, . \, MB, \quad 2R \, . \, A'B' = c \, . \, MC. \quad [1]$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè A', B', C' sieno in linea retta, nel quale caso formano un triangolo d'area nulla, è che uno dei segmenti $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ eguagli la somma degli altri due, ossia, per le [1], che uno dei rettangoli $a \, . \, MA$, $b \, . \, MB$, $c \, . \, MC$ eguagli la somma degli altri due, e quindi (pel teorema di Tolomeo) che M sia sul circolo ABC: e questo forma il teorema di SIMSON.

Sia δ l'area del triangolo $A'B'C'$; esprimendo l'area in funzione dei lati e ricorrendo alle [1], si ha

$$256 \, R^4 \delta^2 = - a^4 \, . \, \overline{MA}^4 - b^4 \, . \, \overline{MB}^4 - c^4 \, . \, \overline{MC}^4 + 2 \, a^2 b^2 \, . \, \overline{MA}^2 \, . \, \overline{MB}^2 + \ldots \quad [2]$$

Si costruisca la circonferenza di centro O e che passi per M; essa incontri in A_1, B_1, C_1 le direzioni OA, OB, OC: la formola [2] relativa alle proiezioni di M sui lati del triangolo $A_1 B_1 C_1$, i cui lati sono proporzionali ad a, b, c, pel teorema di SIMSON, dà luogo alla seguente:

$$- a^4 \, . \, \overline{MA_1}^4 - b^4 \, . \, \overline{MB_1}^4 - c^4 \, . \, \overline{MC_1}^4 + 2 \, a^2 b^2 \, . \, \overline{MA_1}^2 \, . \, \overline{MB_1}^2 + \ldots = 0. \quad [3]$$

Sia Δ l'area del triangolo ABC; e suppongasi, per fissare le idee, che M sia interno all'angolo $B_1 A_1 C_1$ del triangolo, epperò $MA_1 \, . \, B_1 C_1 = MB_1 \, . \, C_1 A_1 + MC_1 \, . \, A_1 B_1$, perciò

(*) Altre dimostrazioni pervennero dai Sigg. Prof. *S. Catania, S. Gatti, F. Palatini, L. Mariscotti, G. Russo.*

$$\overline{B_1 C_1}^2 \left(-\overline{M A_1}^2 \cdot \overline{B_1 C_1}^2 + \overline{M B_1}^2 \cdot \overline{C_1 A_1}^2 + \overline{M C_1}^2 \cdot \overline{A_1 B_1}^2\right) =$$
$$-2\left(A_1 B_1 \,.\, B_1 C_1 \,.\, C_1 A_1\right) \,.\, \left(M B_1 \,.\, M C_1 \,.\, B_1 C_1\right) =$$
$$-32\left(A_1 B_1 C_1\right) \,.\, \left(M B_1 C_1\right) R_1^2$$

e l altre due relazioni che si deducono dalla precedente con cambiamento di lettere e prendendo positivo l'ultimo membro: dalle dette relazioni, nelle quali $A_1 B_1$, $B_1 C_1$, $C_1 A_1$ si esprimano in funzione di c, a, b, R_1, R, si deduce:

$$a^2\left(-a^2 \,.\, \overline{MA_1}^2 + b^2 \,.\, \overline{MB_1}^2 + c^2 \,.\, \overline{MC_1}^2\right) + b^2\left(a^2 \overline{MA_1}^2 - b^2 \,.\, \overline{MB_1}^2 + c^2 \,.\, \overline{MC_1}^2\right) +$$
$$c^2\left(a^2 \,.\, \overline{MA_1}^2 + b^2 \,.\, \overline{MB_1}^2 - c^2 \,.\, \overline{MC_1}^2\right) = 32 \,.\, \frac{R^4}{R_1^2}\left(A_1 B_1 C_1\right)^2 = 32\, R_1^2\, \Delta^2 \quad [4]$$

Fra i quadrati dei segmenti MO, MA, MA_1 uscenti da M, e le distanze dei loro estremi, che sono in linea retta, sussiste la relazione

$$\overline{MA}^2 = \frac{R}{R_1}\,\overline{MA_1}^2 + \left(R_1 - R\right)^2$$

per mezzo di questa e delle due analoghe, elimino MA, MB, MC dalla [2]; e, riduzion fatta, come coefficiente di $\left(\frac{R}{R_1}\right)^2$ comparirà il 1° membro della [3], come coefficiente di $\frac{2R(R_1 - R)^2}{R_1}$ comparirà il 1° membro della [4] e come coefficiente di $(R_1 - R)^4$ il quadrato del quadruplo dell'area ABC; dunque si ha:

$$256\, R^4\, \delta^2 = 64\, R R_1 (R_1 - R)^2\, \Delta^2 + 16\, (R_1 - R)^4\, \Delta^2$$

dalla quale

$$\delta = \pm\, \frac{R_1^2 - R^2}{4 R^2}\, \Delta \qquad [5]$$

ed anche

$$R_1 = R\sqrt{1 \pm \frac{4\delta}{\Delta}}. \qquad [6]$$

Ora se M si muove nel piano su di una circonferenza di centro O, essendo R_1 costante la formola [5], nella quale sceglieremo il segno in modo da rendere positivo il 2° membro, prova che δ è costante; e, se δ si mantiene costante, dalla [6] si deduce che M muovesi su due circonferenze di centro O, e di queste una può mancare o ridursi al punto O se $\delta \geqq \frac{\Delta}{4}$.

La formola [5] che può scriversi così:

$$4\,(A'\, B'\, C') = \pm\,(A_1\, B_1\, C_1 - A\, B\, C)$$

suggerisce una costruzione molto semplice per ottenere il luogo quando sia data l'area di $A'\, B'\, C'$.

28*. *Se da un punto, interno ad un poligono equilatero, si guidano segmenti terminati ai lati, uno per ciascun lato, e tutti egualmente inclinati sui rispettivi lati, la somma di tutti questi segmenti è indipendente dalla posizione di quel punto, e, per un dato poligono, essa è minima quando i segmenti sono perpendicolari ai rispettivi lati.* (D. Besso).

Dimostrazione del Sig. *C. Aiello*, alunno del R. Liceo V. E. di Napoli.

Sia n il numero dei lati del poligono, l la lunghezza di ciascun lato. Nell'interno del poligono prendansi due punti O, O_1 e si conducano da questi, innanzi tutto, le perpendicolari $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$; $b_1, b_2, \ldots\ldots b_n$ ai rispettivi lati. Congiungendo O ed O_1 coi vertici del poligono, questo resta diviso in due classi di triangoli, quelli che hanno vertice comune in O e quelli che hanno tutti il vertice in O_1. Esprimendo che la doppia somma delle aree dei triangoli della prima serie uguaglia quella delle aree dei restanti triangoli, equivalendo ambedue al doppio dell'area del poligono dato, si ha l'eguaglianza:

$$la_1 + la_2 + \ldots\ldots + la_n = lb_1 + lb_2 + \ldots\ldots + lb_n,$$

da cui, dividendo per l, deducesi:

$$a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n. \qquad [1]$$

Conducansi ora per O ed O_1, rispettivamente, i segmenti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ e $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \beta_n$ ugualmente inclinati sui lati del poligono per un angolo che si suppone non retto. I segmenti α e β insieme coi segmenti a e b e coi lati del poligono, determinano dei triangoli rettangoli tutti simili, per avere uno stesso angolo acuto. Segue da ciò che

$$\frac{\alpha_1}{a_1} = \frac{\alpha_2}{a_2} = \ldots\ldots = \frac{\alpha_n}{a_n} = \frac{\beta_1}{b_1} = \frac{\beta_2}{b_2} = \ldots\ldots = \frac{\beta_n}{b_n}$$

e quindi

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n}{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n} = \frac{\beta_1 + \beta_2 + \ldots\ldots + \beta_n}{b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n}.$$

Ma per la [1] essendo eguali i denominatori dei due membri, saranno uguali anche i numeratori, onde

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots\ldots + \beta_n$$

e così la somma dei segmenti α è indipendente dalla scelta del punto O, c. d. d.

Essendo poi $\alpha_1 > a_1$, $\alpha_2 > a_2, \ldots\ldots \alpha_n > a_n$ segue che la somma delle α è minima quando i segmenti considerati sono perpendicolari ai lati.

Dimostrazione del Sig. *G. D'Asdia*, alunno del R. Istituto tecnico di Girgenti.

Se l rappresenta la misura del lato del polipono di n lati, O un punto interno qualsiasi del medesimo, α l'angolo costante che i diversi segmenti a_1, $a_2, \ldots\ldots a_n$ tirati da O e terminati ai lati, formano coi lati stessi, l'area di uno qualunque dei triangoli che si ottengono congiungendo O coi vertici del poligono, sarà evidentemente $\frac{1}{2}\, l a_i$ sen α, onde si avrà l'eguaglianza

$$S = \frac{1}{2}\left\{ l a_1 \operatorname{sen}\alpha + l a_2 \operatorname{sen}\alpha + \ldots + l a_n \operatorname{sen}\alpha \right\} = \frac{1}{2}\, l \operatorname{sen}\alpha \,.\, \Sigma\, a,$$

dove S rappresenta l'area del poligono. Di qui ricavasi

$$\Sigma\, a = \frac{2\,S}{l\,.\operatorname{sen}\alpha}$$

e poichè S, l ed α sono costanti così la somma dei segmenti a è indipendente dalla posizione di O.

37*. *Trovare il resto della divisione per 13 di 7^{100}.* (A. Lugli).

Soluzione del Sig. *P. Marano*, studente privato a Catania.

Applicando alle successive potenze di 7, ciascuna considerata come il prodotto della precedente per 7, il teorema che se due numeri si dividono per lo stesso divisore, il prodotto dei numeri dati e il prodotto dei resti divisi per questo divisore danno resti uguali, si avrà:

$$\begin{array}{lll} 7 = \text{mul. } 13 + 7, & 7^2 = \text{m. } 13 + 10, & 7^3 = \text{m. } 13 + 5, \\ 7^4 = \text{m. } 13 + 9, & 7^5 = \text{m. } 13 + 11, & 7^6 = \text{m. } 13 + 12, \\ 7^7 = \text{m. } 13 + 6, & 7^8 = \text{m. } 13 + 3, & 7^9 = \text{m. } 13 + 8, \\ 7^{10} = \text{m. } 13 + 4, & 7^{11} = \text{m. } 13 + 2, & 7^{12} = \text{m. } 13 + 1. \end{array}$$

Ed ora analogamente ogni potenza di 7^{12} divisa per 13 darà per resto 1 ed avendosi $100 = 12 \,.\, 8 + 4$, il resto della divisione di 7^{100} per 13 sarà quello stesso di 7^4, ossia 9 (*).

43*. *Dei tre quadrati inscritti in un triangolo il maggiore è quello che appoggia al lato minore. — La proposizione ammette eccezioni?* (A. Lugli).

Dimostrazione del Sig. *C. Aiello*, alunno del R. Liceo V. E. di Napoli.

Indicando con a, b, c i lati del triangolo, con h, h', h'' le altezze relative, i lati dei quadrati inscritti nel triangolo e insistenti sui lati a, b sono, com'è noto: $\frac{a\,h}{a+h}$, $\frac{b\,h'}{b+h'}$. Si noti che i prodotti $a\,h$, $b\,h'$ sono uguali, esprimendo il doppio dell'area del triangolo, cosicchè se supponesi $a < b$ sarà da dimostrare che $b + h' > a + h$. A tal uopo si osservi che si ha:

$$b + h' = b + \frac{a\,h}{b} = \frac{b^2 + a\,h}{b}; \quad a + h = \frac{a\,b + b\,h}{b}.$$

Sottraendo si ricava:

$$(b + h') - (a + h) = \frac{b\,(b - a) + h\,(a - b)}{b} = \frac{(b - h)\,(b - a)}{b}.$$

(*) Analoga soluzione pervenne dal Sig. *P. Patrassi* (R. Istituto tecnico di Terni). Il Sig. *C. Aiello* (R. Liceo V. E. di Napoli) risolve questa quistione ricorrendo al teorema di Fermat, ma più laboriosamente

Ora essendo evidentemente: $b > h$ e per ipotesi $b > a$, segue che il 2° membro di questa eguaglianza è > 0 e così il primo membro, onde $b + h' > a + h$, c. d. d.

Se il triangolo considerato è rettangolo ed a e b ne sono i cateti: $a = h'$, $b = h$, e $\frac{ah}{a+h}$ e $\frac{bh'}{b+h'}$ sono eguali fra loro perchè uguali ad $\frac{ah}{a+b}$, quando anche a e b siano disuguali, e quest' è l'eccezione che la proposizione ammette.

Il Sig. *S. Lopriore* (R. Liceo Bari), che sviluppa questa stessa quistione, osserva che $b : a = h : h'$, onde di queste quattro grandezze essendo b la maggiore, e quindi h' la minima, sarà (EUCLIDE, 5°, XXV): $b + h' > a + h$, ecc...

45. *Se* A' *è il punto del lato* BC *di un triangolo* ABC *pel quale si ha* BA' : A'C = m *e* P *il punto in cui* AA' *incontra la circonferenza circoscritta al triangolo, dimostrare:* 1° *che*

$$PA + PB + PC = \frac{c(a+c) + m b (a+b)}{\sqrt{(1+m)(mb^2+c^2) - a^2 m}};$$

2° *che il valore massimo della somma delle tre distanze del punto* P *ai tre vertici del triangolo si ha quando questa somma uguaglia*

$$2\sqrt{R(R+2r_1)},$$

dove R *e* r_1 *indicano il raggio del cerchio circoscritto al triangolo e quello del cerchio ex-inscritto relativo al lato* a. (A. LUGLI).

Dimostrazione del Prof. *G. Riboni.*

1° Dal triangolo ABC, applicando il teorema di *Stewart*, si ha:

$$c^2 . CA_1 + b^2 . BA_1 = AA_1^2 . a + a . BA_1 . A_1C. \tag{1}$$

Ora da $\frac{BA_1}{A_1C} = m$ segue: $BA_1 = \frac{am}{1+m}$ e $A_1C = \frac{a}{1+m}$.

Dai triangoli simili AA_1B, PA_1C si ha poi $AA_1 = BA_1 \frac{b}{PB} = \frac{mab}{PB(1+m)}$

e dai triangoli simili AA_1C, PA_1B: $AA_1 = A_1C \frac{c}{PC} = \frac{ac}{PC(1+m)}$.

Sostituendo nella (1) i valori di BA_1, A_1C ed il primo dei valori di AA_1, dopo aver diviso per A_1C, si ottiene:

$$c^2 + mb^2 = \frac{m^2 a^2 b^2}{PB^2(1+m)} + \frac{ma^2}{1+m},$$

da cui:

$$PB = \frac{mab}{\sqrt{(1+m)(mb^2+c^2) - a^2 m}}.$$

Similmente sostituendo nella (1) il 2° valore di AA_1 si ricava:

$$PC = \frac{ac}{\sqrt{(1+m)(m^2 b^2 + c^2) - a^2 m}}.$$

Dal quadrilatero $ABPC$ inscritto, pel teorema di Tolomeo, segue la relazione:

$$a \,.\, PA = b \,.\, PB + c \,.\, PC.$$

Sostituendo in essa i valori trovati di PB e PC si ricava:

$$PA = \frac{c^2 + mb^2}{\sqrt{(1+m)(c^2+mb^2) - ma^2}}$$

e quindi: $$PA + PB + PC = \frac{c(a+c) + mb(a+b)}{\sqrt{(1+m)(c^2+mb^2) - a^2 m}}$$ c. d. d.

2° Per la ricerca del massimo trovo conveniente cambiar la variabile. Perciò posto ang. $BAP = x$ osservo che:

$$PB = 2R \operatorname{sen} x,\ PC = 2R \operatorname{sen}(A - x),\ PA = \frac{2R}{a}\Big(b \operatorname{sen} x + c \operatorname{sen}(A - x)\Big),$$

perciò

$$PA + PB + PC = \frac{2R}{a}\Big\{(a+b)\operatorname{sen} x + (a+c)\operatorname{sen}(A-x)\Big\}.$$

La funzione da render massima è: $(a+b)\operatorname{sen} x + (a+c)\operatorname{sen}(A-x) = z$. Sviluppando ed ordinando rispetto a sen x si ha:

$$\Big((a+b)^2 - 2(a+b)(a+c)\cos A + (a+c)^2\Big)\operatorname{sen}^2 x -$$
$$- 2z\Big(a+b - (a+c)\cos A\Big)\operatorname{sen} x + z^2 - (a+c)^2 \operatorname{sen}^2 A = 0.$$

e perchè sen x sia reale è necessario che sia:

$$z^2\Big(a+b - (a+c)\cos A\Big)^2 -$$
$$\Big((a+b)^2 - 2(a+b)(a+c)\cos A + (a+c)^2\Big)\Big(z^2 - (a+c)^2\operatorname{sen}^2 A\Big) \geq 0$$

od anche, sviluppando e riducendo, che sia:

$$z \leq \sqrt{(a+b)^2 - 2(a+b)(a+c)\cos A + (a+c)^2}.$$

Il massimo cercato adunque è:

$$\frac{2R}{a}\sqrt{(a+b)^2 - 2(a+b)(a+c)\cos A + (a+c)^2}\,.$$

È facile verificare l'identità di questa espressione colla data $2\sqrt{R(R+2r_1)}$ quando in questa si ponga $R = \dfrac{a}{2 \operatorname{sen} A}$ ed $r_1 = p \operatorname{tang}\dfrac{A}{2} = \dfrac{p(1 - \cos A)}{\operatorname{sen} A}$.

Il valore di sen x in questo caso è:

$$\text{sen}\, x = \frac{a + b - (a + c)\cos A}{\sqrt{(a+b)^2 - 2\,(a+b)\,(a+c)\cos A + (a+c)^2}}.$$

Osservazione — Se si prolungano AB ed AC, rispettivamente in E ed F, in modo che $BE = CF = a$ sarà

$$EF = \sqrt{(a+b)^2 - 2\,(a+b)\,(a+c)\cos A + (a+c)^2}\;:$$

la AP (nel caso del massimo) divide l'angolo A per modo che: ang. $BAP + AFE = CAP + AEF =$ Retto, come si può dedurre dal valore di sen x; infine il massimo equivale al diametro del cerchio circoscritto al triangolo AEF, il che risulta dalla espressione trovata, ed equivale anche al doppio della distanza del centro del cerchio circoscritto al triangolo ABC dal centro del cerchio ex-iscritto tangente al lato a, come risulta dalla espressione data (*).

47*. *Verificare le disuguaglianze*

$$\frac{m\,(b-a)}{b^{m+1}} < \frac{1}{a^m} - \frac{1}{b^m} < \frac{m\,(b-a)}{a^{m+1}}$$

nelle quali è $b > a > 0$, *ed* m *significa un intero positivo.* (D. Besso).

Soluzione del Sig. *A. Seymandi*, allievo della Regia Accademia navale di Livorno. (**).

Basterà verificare che

$$\frac{m\,(b-a)}{b^{m+1}} < \frac{b^m - a^m}{a^m\, b^m} < \frac{m\,(b-a)}{a^{m+1}},$$

ossia che

$$\frac{m}{b^{m+1}} < \frac{b^{m-1} + a\,b^{m-2} + \dots\dots + a^{m-2}b + a^{m-1}}{a^m\, b^m} < \frac{m}{a^{m+1}} \dots\dots [1]$$

Ora, essendo $b > a$, si ha evidentemente:

$$m\,a^{m-1} < b^{m-1} + a\,b^{m-2} + \dots\dots + a^{m-2}b + a^{m-1} < m\,b^{m-1}$$

e

$$\frac{m}{a\,b^m} < \frac{b^{m-1} + a\,b^{m-2} + \dots\dots + a^{m-2}b + a^{m-1}}{a^m\, b^m} < \frac{m}{a^m\, b}$$

ed a più forte ragione la [1] per essere $a\,b^m < b^{m+1}$ e $a^m b > a^{m+1}$.

(*) Cfr. *Baltzer* — Planl. §. 14, n. 4.

(**) Soluzioni analoghe da *O. Aiello* (R. Liceo V. E. di Napoli); *A. Baldassarre* (R. Istituto tecnico di Bari); *G. Bitonti, G. Galluzzi* e *R. Maltese* (Istituto tecnico di Catanzaro); *A. Coacci* (R. Istituto tecnico di Roma); *A. Davigo* e *G. Menicanti* (R. Accademia navale di Livorno); *O. Manfredi* (R. Istituto tecnico di Reggio Emilia); *P. Marano* (Studente privato in Catania); *M. Miconi* e *P. Patrassi* (R. Istituto tecnico di Terni); *S. Lopriore* (R. Liceo di Bari); *G. Piuma* (R. Liceo Colombo di Genova); *P. Rizzuti* (R. Liceo di Catanzaro).

50*. *Dimostrare che in un decagono stellato, quale si ottiene prolungando i lati d'un pentagono convesso, il prodotto dei lati di posto dispari è uguale al prodotto dei lati di posto pari.* (D. BESSO)

Soluzione del Sig. *G. Michele Nobile*, alunno del R. Istituto tecnico di Chieti.

Sia $A_1\,A_2\,A_3\,A_4\,A_5$ un pentagono piano convesso: l'intersezione di due lati non consecutivi la chiamo con la lettera B munita dell'indice che ha quella del pentagono non situato su di essi: ottengo così il decagono $B_1\,A_3\,B_5\,A_2\,B_4\,A_1\,B_3\,A_5\,B_2\,A_4\,B_1$.

I triangoli $A_1\,A_2\,B_4$, $A_2\,A_3\,B_5$ hanno in A_2 angoli eguali o supplementari; quindi il loro rapporto è quello del prodotto dei lati dintorno agli angoli di vertice A_2, epperciò

$$\frac{B_4\,A_2}{B_5\,A_2} = \frac{A_1\,A_2\,B_4\,.\,A_2\,A_3}{A_2\,A_3\,B_5\,.\,A_1\,A_2}.$$

Analogamente si ha

$$\frac{B_5\,A_3}{B_1\,A_3} = \frac{A_2\,A_3\,B_5\,.\,A_3\,A_4}{A_3\,A_4\,B_1\,.\,A_2\,A_3},\quad \frac{B_1\,A_4}{B_2\,A_4} = \frac{A_3\,A_4\,B_1\,.\,A_4\,A_5}{A_4\,A_5\,B_2\,.\,A_3\,A_4},$$
$$\frac{B_2\,A_5}{B_3\,A_5} = \frac{A_4\,A_5\,B_2\,.\,A_5\,A_1}{A_5\,A_1\,B_3\,.\,A_4\,A_5},\quad \frac{B_3\,A_1}{B_4\,A_1} = \frac{A_5\,A_1\,B_3\,.\,A_1\,A_2}{A_1\,A_2\,B_4\,.\,A_5\,A_1}.$$

Moltiplicando membro a membro queste uguaglianze, deducesi

$$\frac{B_4\,A_2\,.\,B_5\,A_3\,.\,B_1\,A_4\,.\,B_2\,A_5\,.\,B_3\,A_1}{B_5\,A_2\,.\,B_1\,A_3\,.\,B_2\,A_4\,.\,B_3\,A_5\,.\,B_4\,A_1} = 1, \qquad \text{c. d. d. (*)}.$$

Soluzione del Sig. *U. Grossato*, alunno del R. Istituto tecnico di Terni.

Chiamando α_1, β_1; α_2, β_2; α_3, β_3; α_4, β_4; α_5, β_5 gli angoli alla base dei 5 triangoli formati da due lati del decagono e da un lato del pentagono convesso a cui essi vanno a terminare; a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3; a_4, b_4; a_5, b_5 i lati rispettivamente opposti a questi angoli, che sono in pari tempo i lati del decagono, si avrà:

$$a_1 \operatorname{sen} \beta_1 = b_1 \operatorname{sen} \alpha_1,\quad a_2 \operatorname{sen} \beta_2 = b_2 \operatorname{sen} \alpha_2,\quad a_3 \operatorname{sen} \beta_3 = b_3 \operatorname{sen} \alpha_3;$$
$$a_4 \operatorname{sen} \beta_4 = b_4 \operatorname{sen} \alpha_4,\quad a_5 \operatorname{sen} \beta_5 = b_5 \operatorname{sen} \alpha_5$$

e poichè β_1 è uguale o supplementare ad α_2, β_2 uguale o supplementare ad α_3, ecc., risulta $\operatorname{sen} \beta_1 = \operatorname{sen} \alpha_2$, $\operatorname{sen} \beta_2 = \operatorname{sen} \alpha_3$, ecc., onde moltiplicando membro a membro le precedenti uguaglianze, e sopprimendo i fattori uguali nei due membri, si ottiene

$$a_1\,.\,a_2\,.\,a_3\,.\,a_4\,.\,a_5 = b_1\,.\,b_2\,.\,b_3\,.\,b_4\,.\,b_5. \qquad \text{c. d. d. (**)}.$$

(*) Soluzioni sostanzialmente analoghe da *C. Aiello* (R. Liceo V. E. di Napoli), *A. Baldassarre* (R. Istituto tecnico di Bari), *G. D'Asdia* (R. Istituto tecnico di Girgenti), *L. Giuliodori* (Scuola tecnica di Osimo), *E Piccioli* (Liceo di Chiavari), *P. Patrassi* (R. Istituto tecnico di Terni), *Riccarda De Albini*, *D. Manacorda* e *G. Vincenti* (R. Istituto tecnico di Roma), *G. A. Venturi* (R. Istituto tecnico di Reggio Emilia).

(**) Soluzione analoga dal Sig. *P. Patrassi* alunno del R. Istituto tecnico di Terni.

I Signori *P. Patrassi* ed *L. Giuliodori* osservano giustamente che la proprietà enunciata sussiste per qualunque poligono stellato di $2n$ lati, ottenuto prolungando i lati di un poligono convesso di n lati, purchè non sia $n < 5$.

Si dichiara inoltre ricevimento delle soluzioni seguenti: quistioni **a)** dal Sig. *F. Benucci, F. Palatini*; **c)**. *S. Gatti, F. Palatini, F. Viaggi*; **42***. *C. Aiello*; **43***. *C. Aiello, S. Lopriore*; **44***. *C. Aiello*; **46**. *F. Viaggi, U. Scarpis*; **48**. *S. Catania, L. Merante, F. Viaggi*; **49**. *L. Merante, F. Viaggi*; **51** e **52** *G. Russo, U. Scarpis, F. Viaggi*; **53***. *G. Michele Nobile*; **54***. *C. Aiello, A. Baldassarre, A. Coacci, S. Lopriore, O. Manfredi, P. Marano, G. Marsilia, P. Patrassi, G. Piuma*; **55***. *C. Aiello A. Baldassarre, G. Bitonti, A. Coacci, Riccarda De Albini, G. Gallucci, S. Lopriore, R. Maltese, P. Marano, Z. Mengoni, G. Piuma, M. Righetto, G. A. Venturi, G. Vincenti* — soluzioni alle quali si darà evasione col fascicolo venturo.

La Direzione.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

56*. Dimostrare che, indicando con A, B, C, D quattro vertici consecutivi d'un poligono regolare, si ha

$$AC^2 = AB \times (AB + AD).$$

57*. Dimostrare che, se un triedro ha un diedro retto, la somma dei coseni dei tre angoli piani non può essere eguale a -1.

58*. Un tronco di piramide, in cui il perimetro della base maggiore è doppio di quello della base minore, è diviso in due parti equivalenti con un piano parallelo alle basi: calcolare a meno di $\frac{1}{10000}$ il rapporto delle distanze del piano segante dalle due basi.

59. Dimostrare che il rapporto del raggio del circolo inscritto ad un ettagono regolare al raggio del circolo circoscritto soddisfa alla equazione

$$8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0.$$

60. Dimostrare che la somma dei quadrati delle distanze d'un punto qualunque d'una superficie sferica dai quattro vertici d'un

---

(*) Il tempo utile per l'invio delle soluzioni delle quistioni nuove e di quelle rimaste insolute, scade un mese e mezzo dopo la chiusura della redazione del fascicolo. La data di chiusura si troverà nell'ultima pagina di ciascun numero del Periodico.

Le quistioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.

tetraedro a facce eguali, in essa inscritto, è eguale ad otto volte il quadrato del raggio.

D. Besso.

61. Fra quali limiti deve variare l'angolo acuto α, acciocchè l'angolo β, legato ad α dalla seguente relazione

$$\frac{\sqrt{2}+1+(\sqrt{2}+1)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{2}-1+(\sqrt{2}-1)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta},$$

sia pur esso acuto?

62*. Essendo a e b numeri interi primi con 30, dimostrare che l'espressione

$$a^8+a^6b^2-a^2b^6-b^8$$

rappresenta un numero multiplo di 720.

S. Gatti.

63*. Costruire un triangolo dato un lato, l'altezza relativa a questo lato e la bisettrice dell'angolo opposto.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Das geschichtliche Element im mathematischen Unterrichte der höheren Lehranstalten. Vortrag gehalten bei der 62. Versammlung Naturforscher und Aerzte zu Heidelberg von P. Treutlein, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe Braunschweig, 1890, p. 32.

In occasione del XLII Congresso dei Naturalisti e Medici tedeschi, tenutosi ad Heidelberg nel Settembre ultimo scorso, il signor P. Treutlein, conosciutissimo pei suoi lavori intorno alla Matematica delle età passate, ha pronunciato un importante discorso avente per iscopo di far ottenere un posto nell'insegnamento delle Scienze esatte a considerazioni di indole storica, discorso sul quale credo opportuno attrarre l'attenzione dei lettori di questo *Periodico.*

Pretendere che la storia sia un ingrediente dell'insegnamento scientifico più elementare sarebbe esagerazione e dal pericolo di cadere in essa il signor Treutlein è difeso dalla sua lunga esperienza didattica. Invece, il desiderio che nell'insegnamento superiore si trovi un elemento storico, si può ritenere, almeno in parte, già soddisfatto, giacchè — prescindendo anche dai corsi speciali sulla storia della Matematica che furono istituiti presso alcune Università — è lecito asserire non esservi alcuno fra gli insegnanti di Istituti superiori che non inserisca nel corso delle sue lezioni, con maggiore o minore larghezza a seconda delle sue tendenze particolari, delle notizie storico-bibliografiche relative all'argomento che svolge. Ma questo stesso desiderio è ragionevole nell'insegnamento medio e d'altronde è finora insoddisfatto.

Che esso sia ragionevole è dimostrato da questa sola considerazione. Negli Istituti di istruzione media i vari rami d'insegnamento hanno il fine comune di sviluppare l'intelligenza dello scolaro e di assicurargli quella coltura generale che gli sarà necessaria qualunque sia la via nella quale si mette: per ciò si cerca sempre di stabilire il più gran numero di intimi rapporti fra di essi. Assai spesso però accade di udire affermare che la Matematica sta da sè e deve rimanere isolata, che l'indole sua si oppone a che fra essa e le altre discipline venga stretto qualsiasi legame, ecc. Orbene a nostro avviso queste affermazioni sono troppo assolute e se nell'insegnamento della Matematica esistesse un elemento storico, il legame in discorso sarebbe ben presto stabilito. Se, ad esempio, il matematico della scuola esponesse i metodi usati dai vari popoli per leggere e scrivere i numeri, egli avrebbe occasione di completare l'insegnamento delle lingue classiche facendo conoscere i sistemi di numerazione dei Latini e dei Greci, o di rendere ragione delle denominazioni strane *soixante-dix, quatre-vingt*, ecc. incontrate da' suoi alunni nel corso di lingua Francese. Se egli parlasse un po' delle origini della Geometria, non solo impedirebbe a' suoi discepoli di condividere l'opinione (così errata e pur tanto diffusa!) che la Geometria sia uscita dal capo di Euclide come Minerva dalla testa di Giove, ma potrebbe far loro conoscere quanta parte ebbero nella sua fondazione e nel suo sviluppo quel Platone e quell'Aristotele che essi ebbero occasione di ammirare nello studio della Filosofia. Ed egli potrebbe ancora citare il nome del grande filosofo di Stagira per dimostrare come l'uso delle lettere nell'Aritmetica generale abbia probabilmente la sua prima radice nel costume che questi aveva d'indicare mediante le lettere dell'alfabeto i concetti astratti.

I punti di contatto che verrebbero così a stabilirsi fra l'insegnamento delle Matematiche e gli altri insegnamenti sono innumerevoli e un po' d'attenzione è sufficiente a rivelarli; l'accertamento della loro esistenza farebbe acquistare alla istruzione media ovunque l'aspetto di un solido cristallino invece dell'apparenza di un conglomerato da essa ora in gran parte posseduto. Non è qui il luogo nè il momento opportuno per entrare in particolari sul modo con cui questo intento si potrebbe raggiungere; il signor Treutlein lo ha dimostrato su parecchi esempi assai bene scelti, suggeritigli dalla lunga sua pratica; il lettore li troverà nel lavoro originale accompagnati da altre argomentazioni connesse alla questione.

Un'obbiezione alla tesi sostenuta dal Prof. Treutlein che si presenta spontanea è l'esiguità del tempo che generalmente è concesso allo svolgimento dei programmi ufficiali. L'obbiezione è grave ed io lascio giudicare se essa sia tale da fare abbandonare totalmente l'idea dell'egregio Professore tedesco a chi abbia la competenza che deriva dall'esperienza personale e che a me fa totalmente difetto (*). Mi pare però meritare speciale considerazione l'osservazione da lui fatta che le notizie storiche, intercalate in una lezione scientifica, concedono alla mente di chi studia argomenti difficili, quelle interruzioni, quelle pause che egli può ragionevolmente pretendere.

Noi personalmente saremmo assai lieti che in Italia fossero accolte con favore le vedute del Signor Treutlein, non solo pel vantaggio che secondo noi ne ridonderebbe agli scolari, ma anche perchè in tal modo la mente dei professori sarebbe ricondotta verso un campo di studi che da noi è completamente trascurato: parliamo degli studi storici. Lungi da noi l'antico concetto che pone a uno stesso livello il far grandi cose e il raccontarle, quindi preferiremmo assai che gli insegnanti delle nostre scuole medie si occupassero di far progredire la scienza piuttostochè esporre conquiste già fatte. Ma ai più fra essi manca il tempo indispensabile per compiere colla dovuta continuità delle investigazioni originali e quindi essi restringono la propria azione alle esigenze della scuola. A tutti invece sarebbe possibile di compiere ricerche di erudizione le quali non esigono un lavoro ininterrotto: essi allora potrebbero aspirare a fornire gli elementi per una sintesi storica, la quale sorgerebbe quando esse fossero abbastanza numerose e importanti e delle quali essi sarebbero fattori essenziali. A dimostrare la legittimità di questa nostra aspirazione basta osservare come in Germania molti insegnanti di scuole medie (per esempio il Treutlein stesso, il Nizze, l'Unger, ecc.) hanno aiutato con preziosi dati di fatto lo studio dello svolgersi del pensiero matematico; e quando si pensa al numero di documenti importanti per la storia scientifica che stanno dimenticati nelle innumerevoli biblioteche italiane (**) — documenti che gli stranieri ci invidiano e che noi dovremmo ricordare col rossore di chi non sa trar profitto dalle ricchezze che possiede — non si può non lamentare che fra noi sia così poco diffusa l'abitudine di studiare le antiche opere matematiche, alle quali si preferisce concedere un'onorata sepoltura ed un eterno oblio.

GINO LORIA.

Zur Auflösung der dreigliedrigen irrationalen Gleichungen mit linearen Radikanden von Dr. Jos. DIEKMANN in Viersen.

Per dare idea del principale scopo della nota che porta il titolo riportato, inserita nella XIX annata della *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen* di HOFFMANN, prendiamo a considerare l'equazione a tre termini con radicandi lineari

$$\sqrt{9x+1} - \sqrt{4x-3} = 3. \qquad [1]$$

(*) Affinchè tutti potessero avere sott'occhio gli elementi necessari per pronunciare il giudizio, vedrei con piacere tradotto e stampato in questo *Periodico* il lavoro del Sig. Treutlein, accompagnato da note atte a sopperire alle cognizioni storiche presupposte nel lettore.

(**) Che questa non sia una congettura priva di fondamento è dimostrato dall'esistenza di *Un precursore italiano di Lobatschewsky e Bolyai* ignoto fino al giorno (17 marzo 1889) in cui il Professore Beltrami lo presentò ai suoi colleghi dell'Accademia dei Lincei.

Risolvendola col metodo ordinario, dopo due elevamenti al quadrato, si è condotti all'equazione

$$25x^2 - 194x + 133 = 0,$$

le cui radici sono 7 e $\frac{19}{25}$. Sostituendo successivamente questi valori nei due radicandi, si trova prima $\sqrt{9x+1} = \pm 8$ e $\sqrt{4x-3} = \pm 5$, quindi $\sqrt{9x+1} = \pm\frac{14}{5}$ e $\sqrt{4x-3} = \pm\frac{1}{5}$. Ora delle quattro possibili combinazioni dei segni delle radici, che si presentano in ciascun caso, una sola soddisfa alla proposta equazione, e precisamente + e + nel 1° caso e + e — nel 2°, e per giunta la combinazione da adottare nell'uno è diversa di quella da scegliere per l'altro.

In vista di ciò l'A., dopo avere osservato che il metodo comunemente adoperato per la risoluzione delle equazioni a tre termini con radicandi lineari, non è del tutto soddisfacente, mancando di quel carattere di determinatezza che dev'essere precipuo scopo delle matematiche, potendo anche ingenerare confusione negli scolari, assume per ogni equazione come [1] la forma più generale

$$F(x) + F_1(x) = c$$

e si pone il problema di determinare $F(x)$ ed $F_1(x)$, in funzione dei coefficienti della data equazione, in modo da trovare $F(x) = \alpha$ ed $F_1(x) = \beta$ con $\alpha + \beta = c$, il che naturalmente viene a togliere qualsiasi ambiguità e permette di trovare le radici della [1] risolvendo una delle equazioni $F(x) = \alpha$, $F(x) = \beta$.

Il metodo da lui seguito mentre risponde completamente alla posta quistione, ha poi il merito di raggiungere lo scopo applicando un processo di pura eliminazione lineare, il che è certamente vantaggioso sotto l'aspetto didattico. Questo è il motivo che ci ha sospinti a darne un esteso cenno.

L'A. considera separatamente le equazioni

$$\sqrt{ax+b} + \sqrt{a_1x+b_1} = c, \quad \sqrt{ax+b} + \sqrt{a_1x+b_1} = c\sqrt{a_2x+b_2}$$

applicando all'una ed all'altra lo stesso processo, ond'è che noi ci limiteremo qui a riassumere il suo trattamento per quanto riguarda l'ultima più generale.

Pongasi

$$ax+b = y^2, \ a_1x+b_1 = z^2, \ a_2x+b_2 = u^2, \ y+z = cu.$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{aligned} 0 \,.\, x + \quad y + \quad z - c\;u &= 0 \\ -\,a\,x + y\,.\,y + 0\,.\,z + 0\,.\,u &= b \\ -\,a_1\,x + 0\,.\,y + z\,.\,z + 0\,.\,u &= b_1 \\ -\,a_2\,x + 0\,.\,y + 0\,.\,z + u\,.\,u &= b_2 \end{aligned} \qquad [2]$$

che considerato come lineare fornisce

$$y = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -c \\ -a & b & 0 & 0 \\ -a_1 & b_1 & z & 0 \\ -a_2 & b_2 & 0 & u \end{vmatrix} : R, \quad R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -c \\ -a & y & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & z & 0 \\ -a_2 & 0 & 0 & u \end{vmatrix},$$

ossia

$$R\,y = u\,(a_1 b - a\,b_1) - c\,z\,(a_2 b - a\,b_2) = u\,\Delta - c\,z\,\Delta_1\,,$$

avendo posto $\Delta = a_1 b - a\,b_1$, $\Delta_1 = a_2 b - a\,b_2$. Se si fa inoltre $\Delta_2 = a_2 b_1 - a_1 b_2$ e si ricavano dal sistema [2], in modo analogo, la z ed u, si perviene all'altro sistema

$$R\,y + c\,\Delta_1\,z - \Delta\,u = 0,\ c\,\Delta_2\,y + R\,z + \Delta\,u = 0,\ \Delta_2\,y + \Delta_1\,z + R\,u = 0 \ldots \quad [3]$$

Per la coesistenza di queste tre equazioni dev'essere

$$\begin{vmatrix} R & c\,\Delta_1 & -\Delta \\ c\,\Delta_2 & R & \Delta \\ \Delta_2 & \Delta_1 & R \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando ed escludendo $R = 0$, risulta

$$R = \pm \sqrt{c^2\,\Delta_1\,\Delta_2 + \Delta\,(\Delta_1 - \Delta_2)},$$

onde R, che conteneva in origine y, z, u, si trova espressa mediante i coefficienti.

Dopo ciò dal sistema [3] si deduce facilmente

$$\frac{y}{u} = \frac{R + c\,\Delta_1}{\Delta_1 - \Delta_2}\,;\ \frac{z}{u} = -\frac{R + c\,\Delta_2}{\Delta_1 - \Delta_2}.$$

Dai valori che si ottengono per $\frac{y}{u}$ e $\frac{z}{u}$, due per ciascun quoziente la R avendo doppio segno, la cui somma è c, sono poi da ricavare i valori di x che soddisfano all'equazione proposta.

L'A. discute le formole ottenute, applica il suo metodo ad alcune equazioni numeriche e conclude come segue:

1) Nelle equazioni irrazionali le espressioni delle radici sono da prendersi assolutamente e da considerare da principio come incognite i cui valori si lasciano calcolare direttamente dai coefficienti dell'equazione.

2) I valori di x si deducono da quelli dei radicali.

A. Lugli.

Pubblicazioni ricevute dalla Direzione del Periodico

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del professore G. Battaglini. Vol. XXVIII. Gennaio-Febbraio. Napoli, B. Pellerano editore, 1889.

Journal de Mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. DE LONGCHAMPS, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, LUCIEN LÉVY, agrégé des sciences mathématiques, directeur des études à l'École préparatoire da Saint-Barbe. 3ᵉ Série, Quatorzième année. N. 1, 2. Février, Mars, 1890. Paris, librairie Ch. Delagrave.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par H. VUIBERT. 14ᵉ année. N. 9, 10, 11, 12. Paris, M. Nony et C., 17 rue des Écoles, 1890.

L' Università. Rivista dell' Istruzione superiore, pubblicata da una società di professori. Anno IV, 1890. Gennaio-Febbraio. Bologna, Libreria Idelson.

Mathesis, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. MANSION, professeur à l'Université de Gand, et J. NEUBERG, professeur à l'Université de Liège. Tome dixième. Janvier, Février, Mars, 1890. Paris, Gauthiers-Villars & fils; Gand, Ad. Hoste, Éditeur.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo IV. Fasc. I e II, Gennaio-Febbraio e Marzo-Aprile, 1890.

Rendiconti dell' Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2ª, Vol. IV, Fasc. 1° e 2°, Gennaio e Febbraio, 1890.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Ein Organ für Methodik, Bildungsgehalt und Organisation der exakten Unterrichtsfächer an Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminarien und gehobenen Bürgerschulen, herausgegeben von J. C. V. HOFFMANN. XXI Jahrgang. I Heft. Leipzig, B. G. Teubner, 1890.

AGAMENNONE (G.) — Sopra la correlazione dei terremoti con le perturbazioni magnetiche. (Ren. R. Acc. Lincei, 1890).

BARDELLI (G.) — Commemorazione del Comm. Prof. Celeste Clericetti (Rend. R. Istituto Lombardo, 1890).

BIGIAVI (C.) — Sulle equazioni differenziali lineari. (Rend. R. Acc. Lincei, 1890).

CANCANI (A.) — Sul valore normale delle temperature medie, mensili ed annue di Roma. (Rend. R. Acc. Lincei, 1890).

GIUDICE (F.) — A proposito della quistione 88 proposta dal Prof. Cesàro (Gior. di Battaglini. Vol. XXVII, 1889). — Una considerazione relativa alle serie a termini positivi costanti tra le quali trovasi quella d' Eulero (idem, idem).

NAGY (A.) — Fondamenti del calcolo logico. (Gior. di Battaglini Vol. XXVIII, 1890).

PERSIANI (O.) — Elementi di geometria secondo Euclide ad uso dei licei. Libro IV. Roma, Tipografia della Pace, 1890. — Prezzo: cent. 75.

PORTA (F.) — Geometria analitica. Torino, Fratelli Bocca editori, 1890. Prezzo: Lire 8.

RICCARDI (P.) — Di alcune opere di prospettiva di autori Italiani ommesse nella « Histoire de la Perspective » di M. Poudra. (Bibliotheca mathematica di G. Eneström, 1890).

Chiusura della redazione il dì 30 marzo 1890.

SULL' INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

NELLE SCUOLE CLASSICHE

(Continuazione e fine).

Veniamo ora al Liceo. Qui l'insegnamento della matematica era una volta distribuito in dodici ore settimanali delle quali sei nella prima classe e le altre sei o divise tra le altre due classi o, sebbene per poco tempo, riunite tutte nella seconda; e in tal periodo fu anche aggiunta un'ora e mezza settimanale alla terza classe, allo scopo che i giovani, avendo oramai esaurito lo studio della matematica elementare, potessero esercitarsi nella soluzione dei problemi e tener presente la materia studiata nel momento di presentarsi alla licenza liceale. Con sei ore settimanali di lezione gli alunni della prima classe potevano sufficientemente assimilarsi gli argomenti del programma, addestrarsi nel calcolo algebrico e nella soluzione di facili problemi di Geometria, che si spiegava fino a tutto il terzo libro di Euclide. In tal modo nella seconda e terza classe si poteva procedere assai più speditamente nello svolgere le altre parti del pogramma, e rimaneva tempo sufficiente per fare esercizi su tutte le parti della materia spiegata.

Ora invece nel Liceo per la matematica non sono assegnate che tre ore alla settimana in ciascuna delle tre classi; e per la prima specialmente questo tempo è affatto insufficiente. In questa classe il programma di Algebra è rimasto su per giù il medesimo di prima, ma a quello di Geometria venne aggiunto il quarto libro. Nè serve il dire che la spiegazione della Geometria deve ora cominciare nella prima classe liceale dal secondo libro perchè il primo deve essere studiato nel Ginnasio. Bisogna pensare: che nella prima liceale convengono alunni provenienti da scuole differenti e che quindi hanno studiato la Geometria con metodi e testi diversi, che molti di questi giovani, specialmente se hanno studiato privatamente, della Geometria ne avranno letto appena quel tanto da poter rispondere all'esaminatore nei pochi minuti dell'esame orale. In tali condizioni se il professore vuol procedere con sicurezza non ha niente di meglio a fare che riprendere dal principio l'insegnamento della Geometria. Dovendo fare tutto questo è assolutamente impossibile svolgere e bene tutto il programma; e si rinnoveranno gli stessi inconvenienti che ho notati pel Ginnasio riguardo ai temi scritti ed alla loro correzione. E con alunni così poco esercitati come si potrà procedere innanzi nelle due classi superiori? Se una volta per queste le sei ore complessive erano sufficienti, adesso non lo sono più, perchè ad ogni momento bisogna arrestarsi a ricordare le cose precedenti, ogni semplice calcolo, ogni semplice trasformazione, presenta difficoltà insormontabile agli alunni se non sono aiutati dal maestro; e nella seconda classe specialmente la spiegazione del quinto libro di Euclide occuperà un gran tempo, perchè tutti gli insegnanti di matematica sanno quanti sforzi bisogna fare perchè sia inteso, se non da tutti, almeno da un discreto numero di scolari.

Notisi poi che il programma è sempre presso a poco il medesimo ora che tra Ginnasio e Liceo il tempo assegnato all'aritmetica e matematica è di 17 ore per settimana (supposto che nel Ginnasio inferiore il tempo assegnato per l'aritmetica e le nozioni di scienze naturali sia diviso per metà fra i due rami di insegnamento) di quello che era con ventiquattro e fino venticinque ore e mezzo; poichè sono riduzioni insignificanti l'aver tolto i teoremi relativi al volume del tronco di piramide a basi parallele e la risoluzione dei triangoli obliquangoli, potendosi nella terza classe, se gli alunni fossero ben preparati, svolgere questi argomenti in tempo assai breve.

Anche nel Liceo poco si può ottenere dai giovani per ciò che riguarda la diligente e coscienziosa esecuzione degli esercizi scritti fin che non sia ripristinato l'esame scritto. L'aver ora lasciata la facoltà ai candidati di scegliere tra l'esame scritto di greco e quello sulla materia scientifica equivale all'aver quasi abolita quest'ultima perchè in generale i giovani preferiscono la prova scritta di greco che offre *meno pericoli e maggiori speranze* di quella di matematica. E siccome più che ogni altra cosa, chi si presenta all'esame, cerca il modo di rendere più facile la riuscita, non è raro il caso, per non dirlo affatto costante, di alunni che intendono di darsi agli studi matematici superiori, e che ottenuta la licenza si inscriveranno nella facoltà matematica, i quali non si sentono abbastanza sicuri nella matematica elementare da sottomettersi con speranza di successo alla prova scritta di matematica che, per quanto si sia detto il contrario, è quasi sempre stata assai facile, e preferiscono la prova di greco. E a questo proposito sarebbe utile che fosse constatato ufficialmente il numero degli studenti inscritti nelle facoltà di matematica provenienti dai Licei e che non si sono sentiti in grado di risolvere il problema di matematica nell'esame di licenza. Credo che il risultato sarebbe tale da preoccupare seriamente tutti quelli a cui sta a cuore che il nostro paese mantenga nel progresso degli studi matematici il posto onorevole che fin'ora ha occupato, e convincerebbe tutti della necessità di obligare alla prova scritta di matematica almeno quei giovani che intendono inscriversi in una facoltà di matematica.

Nè questo è il solo danno che tale disposizione reca agli studi liceali; i giovani, vedendo che possono fare a meno della prova di greco o di quella di matematica, e non essendo evidente come la eccellenza nel greco possa compensare il difetto nella matematica o viceversa, ne traggono spontanea la conclusione, che ad ambedue le materie si dà poca importanza, e che nell'insegnamento liceale hanno un posto affatto secondario.

Nè meno dannose, almeno per quanto riguarda la matematica, sono le conseguenze dell'altra disposizione dell'attuale regolamento che concede in certe circostanze ai giovani di presentarsi all'esame di licenza liceale solo dopo due anni dalla licenza ginnasiale. Per decidersi se gli convenga approfittare di questa concessione il giovane non pensa affatto se le sue forze intellettuali, la sua istruzione, sieno tali che possa senza danno della sua coltura abbreviare di un anno il corso liceale. Tutti non vedono in ciò che una via per poter tentare la sorte di *risparmiare un anno* ed è frequente il caso di giovani che rimandati nello esame di promozione dalla prima alla seconda classe, e che quindi dovrebbero ripetere il primo corso, si ritirano dalle scuole pubbliche ed osano presentarsi nell'estate successivo all'esame di licenza liceale. Una volta che questi giovani hanno tentata la prova della licenza, anche se rimandati, e lo sono in gran parte, è inutile sperare che essi ripiglino regolarmente gli studi liceali. Di solito ecco che succede: questi candidati, se non hanno trovato la Commissione esaminatrice tanto indulgente da concedere loro la licenza liceale, non l'avranno trovata sempre tanto severa da negar loro la idoneità alla terza classe liceale. Con questa ottengono l'iscrizione in una scuola di Farmacia o di Veterinaria e cominciano così a frequentare le scuole universitario, allora disdegnano di occuparsi degli studi liceali, ed all'esame di licenza non pensano più che all'avvicinarsi della nuova sessione e sarà molto se poco prima daranno una ripassatina alle materie sulle quali dovranno essere esaminati, sperando che non si avrà il *coraggio* o la *poca umanità* di rimandarli una terza o quarta volta. Del resto che debbono fare gli esaminatori? Il candidato nella prima sessione di esami avrà superato le prove di qualche materia, nella successiva quelle di qualche altra, qualche volta avrà goduto di una concessione ministeriale, e dopo essersi presentato parecchie volte non avrà più che a superare l'esame in una o due materie e in tal caso la pietà vince anche i professori più severi. Ottenuta la licenza dopo essere stato un anno inscritto nella scuola di Farmacia o di Veterinaria, si ottiene di passare al secondo anno delle facoltà di medicina, di matematica o magari di legge, e si raggiunge lo scopo principale di *guadagnare un anno*. Con questo metodo è facile capire quanto avrà *guadagnato* la coltura generale di questi giovani e quanto il buon andamento dei loro studi universitari. Per ciò che riguarda la prima è fuor di dubbio che al momento in cui ritirano il diploma di licenza degli studi liceali non ricorderanno quasi più nulla, e per i secondi si troveranno con un gran numero di esami arretrati da sostenere e saranno fra quelli che al momento dell'esame di laurea hanno sulle spalle gli esami speciali a dozzine. S'intende che tutto questo possa accadere, e pur troppo molto di frequente, anche all'alunno che abbia compiuto regolarmente il corso liceale, ma sarà la condizione quasi normale per colui che dopo aver fatto il primo anno e due o tre mesi del secondo in una scuola publica, l'abbandona per consacrare il tempo che rimane a compire l'anno scolastico, a prepararsi, aiutato da un insegnante privato più o meno esperto, qualche volta da uno studente che ha finito il Liceo appena l'anno precedente, all'esame di licenza, condensando così in pochi mesi di studio tutto il programma del secondo e terzo anno di Liceo. Se il giovane è animato da buona volontà si sottopone ad un lavoro improbo che stanca la mente senza frutto, e se egli è un negligente che tenta la prova per sottrarsi più presto alla disciplina del Liceo, allora senza questa, senza il legame dell'orario, senza l'obbligo di prepararsi a determinate lezioni e di far esercizi in giorni determinati, interromperà ad ogni momento le sue occupazioni appena abbia un leggero sintomo di noia o di stanchezza.

È evidente che da questa condizione di cose più di tutto ne debba risentire danno il profitto nello studio della matematica, ove più che in ogni altra dottrina si sente il bisogno di uno studio regolare ed ordinato, e che il discente disponga di un tempo sufficiente per assimilarsi le nuove cose che impara e per eseguire numerosi esercizi ai quali possa pensare con calma. Inoltre i giovani che anticipano l'esame di licenza liceale sono i più maturi di età e perciò, se intelligenti e volonterosi, quelli che dello studio delle matematiche potrebbero cavare maggior profitto; se tardi d'ingegno e negligenti sono altresì quelli che più sentiranno la necessità di non affrettare i loro studi.

Da quanto ho detto mi sembra che risulti sempre evidente la sproporzione fra le cose che il professore di matematica deve insegnare e il tempo disponibile a questo scopo. Ora sembrami anche troppo vasto il programma di matematica per alunni che non intendono progredire in tali studi, e per i quali la matematica non deve servire che come ginnastica mentale e per scopo di coltura generale; e credo che, senza che nè l'una nè l'altra possano soffrirne, sia possibile diminuirlo alquanto, a condizione però che non si diminuiscano di più le ore d'insegnamento, e che piuttosto vengano aumentate.

In quanto a coloro che intendono percorrere gli studi matematici, bisogna pensare che neppure col programma attuale imparano tutto ciò che per loro è necessario a sapersi, ma, quel che è peggio su quanto loro si insegna, per la ristrettezza del tempo, non possono avere una preparazione sufficiente da poter loro servire di solida base per gli studi futuri. Diminuendo il programma ma aumentando le ore d'insegnamento, imparerebbero nel Liceo minor quantità di cose, ma su quelle che saranno insegnate sarebbero così sicuri da poter da loro stessi o dietro brevi accenni dei professori universitari riparare alla mancanza del programma liceale. Giacchè mi sembra che un giovane ben preparato e ben sicuro dei primissimi elementi e dei principî più generali della matematica, che con continui esercizi abbia raggiunto una certa facilità a concepire e trattare nel modo più semplice le quistioni, debba poi facilmente imparare tutte le teorie speciali di cui può in seguito avere man mano bisogno.

Sopratutto è indispensabile ristabilire le prove scritte tanto negli esami di promozione come in quelli di licenza, e quando vi fosse modo di esercitare bene gli alunni lungo l'anno scolastico non si ripeterebbero più in tali prove gli esempi, che tutti ricordano, di generali disastri e che forse furono la causa della loro abolizione. È certo che se la prima volta che un alunno tenta la soluzione di un problema, anche semplice, è abbandonato alle proprie forze e lo deve fare in una prova di esame, novantanove volte su cento fallirà. Ma quando il maestro avesse avuto tempo di assegnare almeno una volta al mese un esercizio scritto in iscuola il risultato sarebbe differente. Infatti è certo che nella scuola gli scolari penserebbero a fare da soli, prima perchè il tempo ristretto non lascerebbe agio a cercare l'aiuto altrui, e poi la frequenza delle prove, e non avere esse conseguenze decisive come quelle dell'esame, li distoglierebbe dall'organizzare la frode, che una volta o l'altra potrebbe con loro danno essere scoperta. Inoltre dalla lettura di questi scritti, potrebbe il maestro farsi un idea delle autenticità del lavoro, anche in base alla sola presunzione di quanto è capace di fare un giovane, e quindi prendere qualche provvedimento per l'avvenire; mentre questa presunzione resterebbe senza nessun effetto se si trattasse di una prova di esame.

Col tempo ristretto di cui ora si dispone bisogna limitarsi a dare pochi problemi da risolvere a casa; ma allora è inutile sperare che gli alunni faccian da loro. La maggior parte si affiderà all'aiuto altrui, giacchè ci vorrebbe un grande amore per lo studio in generale ed in particolare per la matematica per dedicare un poco di tempo alla soluzione di un problema quando poche parole suggerite da altri possono esimere da ogni fatica. Nell'ipotesi migliore il giovane che si serve dell'aiuto altrui per risolvere un problema, se lo farà anche spiegare e poi cercherà di studiarne e di impararne la soluzione come farebbe di una proposizione del suo testo. È qualche cosa anche questo, ma con ciò non si raggiunge ancora lo scopo al quale si mira col proporre agli scolari la soluzione dei problemi, che non è solo di far conoscere nuove proprietà speciali, non assolutamente necessarie per l'intelligenza degli argomenti successivi del programma, ma anche e principalmente di abituare la mente dei giovani allo sforzo di trovare da sè le relazioni che legano gli elementi del problema, e facilitargli così lo studio di nuove teorie ed il ricordarle. Per ottenere dai giovani questo sforzo mentale e costringerli ad acuire il loro intelletto alla ricerca della verità, credo che l'unico esercizio vero ed efficace sia quello che si fa nella scuola in presenza del maestro a voce ed in iscritto. Sul principio il giovane farà qualche tentativo infruttuoso, ma se non ha speranza di aiuto raddoppierà gli sforzi che in fine, specialmente se il maestro avrà cura di graduare gli esercizi anche fra gli alunni della stessa classe, saranno coronati da felice riuscita. Allora non v'ha dubbio che il giovane comincerà a provare quel sentimento di compiacenza che in tutti si manifesta quando si riesce in una impresa, che si giudicava quasi impossibile. Da questo intimo sentimento al desiderio di fare di più, all'amore per quelli studi verso i quali prima si nutriva invincibile ripugnanza il passo è breve e non dubito che giovani così educati daranno di sè buona prova e gli studi matematici ne risentiranno notevole vantaggio.

Anche la facoltà di anticipare l'esame di licenza liceale dovrebbe essere meglio disciplinata. Prima di tutto, di essa non dovrebbero approfittare che quelli che realmente sono soggetti a leva; e poi si dovrebbe permettere il passaggio dal primo anno dalle scuole di Farmacia e Veterinaria al secondo corso delle altre facoltà universitarie solo quando il giovane avesse già da un anno ottenuta la licenza liceale.

Demetrio Valeri.

INTORNO AL SIGNIFICATO
DI ALCUNE QUESTIONI DI PROBABILITÀ

Il Prof. V. Murer nel fascicolo VI dell'anno IV di questo Periodico esamina la probabilità affinchè un triangolo preso ad arbitrio sia isoscele anzichè rettangolo, e il Prof. S. Rindi torna incidentalmente sulla questione in una nota che fa parte del fascicolo II dell'anno V. Leggendo quei due pregiati articoli mi è venuto un qualche dubbio circa il significato preciso da attribuire alla suddetta questione, nonchè ad altre consimili delle quali abbonda la letteratura della probabilità.

Intendo benissimo come si possa domandare se un triangolo disegnato a caso sarà acutangolo anzichè ottusangolo (non sarebbe il caso di includere nella questione i triangoli rettangoli, la probabilità dei quali è nulla rispetto a quella dei triangoli delle altre due specie). Quello che non arrivo a capire è la probabilità che un triangolo, preso o disegnato a capriccio, sia isoscele anzichè rettangolo. Perchè, mentre vedo la qualità di triangolo scindersi nelle due di acutangolo e di ottusangolo, non so trovare un fatto unico che comprenda sinteticamente tanto il fatto del triangolo isoscele quanto l'altro del triangolo rettangolo. Per questa ragione i due fatti non mi sembrano paragonabili fra loro. Ammetto che un discepolo ideale, indifferente cioè a tutti i casi, quale lo richiederebbe il calcolo delle probabilità, invitato dal maestro a disegnare un triangolo, lo farebbe più verosimilmente ottusangolo che non acutangolo. Ma se gli si dicesse di fare a sua scelta un triangolo isoscele o un triangolo rettangolo, non ci sarebbe, mi pare, ragione alcuna per aspettarsi di preferenza l'un triangolo o l'altro. Gli è che le qualità di isoscele e di rettangolo non si possono occultare sotto un unico concetto, come, dicendo triangolo, si occultano quelle di acutangolo e di ottusangolo. Nè si dica che disegnando un triangolo a piacimento il caso speciale del triangolo rettangolo potrà avverarsi più o meno facilmente che non quello del triangolo isoscele, *dato che uno dei due* *casi si avveri*, perchè nella questione del disegnare un triangolo qualunque, i suddetti casi speciali intervengono entrambi con probabilità nulla, e fra due zeri della questione non si può instituire confronto di sorta. Per ciò non mi sembra corretto il derivare la probabilità del triangolo rettangolo di contro al triangolo isoscele dalla figura che serve a mettere in chiaro quella del triangolo acutangolo di contro all'ottusangolo, come fa il Murer nell'articolo sopra citato. L'arbitrarietà del risultato al quale può condurre il metodo seguito dal Murer, arbitrarietà notata nell'articolo del Rindi, parmi debba far capo alle precedenti mie osservazioni. Lo stesso rapporto $2:1$ che il Prof. Giudice assegna senza dimostrazione alla probabilità del triangolo isoscele di contro al triangolo rettangolo nei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (anno 1890, fascicolo III) può essere sospettato di arbitrario, al pari dell'altro $\sqrt{3}:1$ trovato precedentemente dal Murer, risultando esso, al dire del Ch[mo] Professore, dal confronto di due probabilità infinitamente piccole. Se queste due probabilità sono perfettamente paragonabili fra loro, come egli asserisce, è desiderabile che se ne chiarisca il come e il perchè. E soprattutto che la quistione venga risoluta alla stregua d'una definizione accettabile, se sarà possibile il trovarla (*).

G. Frattini.

SOPRA UNA QUISTIONE DI PROBABILITÀ

TRATTATA RECENTEMENTE DAL PROF. MURER (**)

1. In infiniti modi si può stabilire una corrispondenza univoca tra i punti d'una superficie e le diverse forme di triangoli e se essa è tale che i punti corrispondenti ai triangoli acutangoli, p. es., formino una parte della considerata superficie, il rapporto di tal parte

(*) La redazione ritiene opportuno segnalare il legame esistente fra questo ed il successivo articolo, del Prof. Giudice, quantunque sorti indipendentemente l'uno dall'altro.

(**) Periodico di Matematica. — Novembre-dicembre 1889.

alla rimanente può prendere qualsiasi valore se sia arbitraria la scelta della corrispondenza tra i punti della superficie e gli elementi, arbitrariamente scelti, sufficienti per determinare i tre angoli d'un triangolo.

In molte questioni che contemplano infiniti casi possibili si offre spontaneamente il significato da attribuirsi alla parola probabilità, significato da considerarsi come implicitamente accettato da chi non avesse dichiarato altrimenti. Ma anche per tali questioni, sebbene non possa dirsi assolutamente necessaria, è molto utile una dichiarazione esplicita rigorosa, sia per impedire che i poco esperti errino, sia perchè tra le infinite definizioni concepibili per ogni singola questione, nella quale siano da considerare infiniti casi possibili, non sempre se ne trova una che s'imponga a preferenza delle altre e, seppure c'è, si è liberi di non sceglierla. In quest'ultimo caso però si adatta quasi sempre artificiosamente, senza criterio logico, la definizione di probabilità ad una rappresentazione preconcetta invece di adattare una rappresentazione al concetto di probabilità più naturale per la questione da trattarsi.

Per studiare la frequenza con cui certe condizioni sono soddisfatte dalle soluzioni della

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_{n-1} + x_n = p$$

dove p è un numero dato ed $x_1\ x_2 \ldots . x_n$ sono arbitrarie, si cerchi la probabilità che tali condizioni siano soddisfatte da una delle soluzioni, in numero finito, di quell'equazione nell'ipotesi che $x_1\ x_2 \ldots . x_n$ debbano avere una comune misura ε, necessariamente parte aliquota di p, e poi vedasi di determinare il limite di tal probabilità, se esiste, col tendere di ε a zero. Se si può avere una rappresentazione geometrica delle soluzioni e queste finiscono per formare uno spazio divenendo infinitesima ε, si potrà dire che il limite del rapporto dei numeri delle soluzioni di due classi è dato dal rapporto degli spazii corrispondenti solamente se si sia potuto riconoscere che, divenendo infinitesima ε, i punti corrispondenti alle soluzioni delle due classi che si considerano finiscono per formare uno spazio di densità costante.

Questi sono precisamente i criterii di cui si servì sempre il Prof. Cesàro per non discostarsi mai dal concetto più naturale di probabilità nelle questioni analoghe a quella della rottura del diamante da lui trattata con ammirabile eleganza.

2. Se x y z si fanno proporzionali alle distanze d'un punto mobile nell'interno di un triangolo equilatero dai lati del medesimo, le soluzioni di

$$x + y + z = \pi$$

date da valori di x y z aventi per comune misura $\frac{\pi}{n}$ sono date dai punti d'intersezione delle parallele ai lati del triangolo condotte pei punti che dividono le tre altezze in n parti eguali; esse quindi sono uniformemente distribuite nel piano dove occupano i vertici d'una rete di triangoli equilateri di lati tutti eguali alla n^{ma} parte del lato del primo triangolo equilatero. Se con A_1 A_2 si indicano due porzioni, superficiali, di questo, con N_1 ed N_2 i numeri di nodi dell'accennata rete compresi in A_1 A_2, rispettivamente, con t_n la superficie d'uno dei triangoli equilateri della rete, con T la superficie del triangolo dato, si ha: (*)

$$n^2 \, . \, t_n = T$$

$$\lim_{n=\infty} N_1 \, . \, 2t_n = A_1 \qquad\qquad \lim N_2 \, . \, 2\, t_n = A_2$$

$$\lim \, . \, \frac{N_1}{N_2} = \frac{A_1}{A_2}.$$

Così è giustificata la rappresentazione geometrica per le classi di soluzioni distribuite in superfici.

Similmente si giustifica la rappresentazione geometrica delle soluzioni della

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n + x_{n+1} = a$$

per mezzo dell' $(n + 1)$-edroido n-uplo per le classi di soluzioni distribuite in porzioni del medesimo aventi, come esso, n dimensioni.

Con questo però non resta punto stabilito che i numeri delle

(*) V. P. G. Lejeune Dirichlet — *Lezioni sulla teoria dei numeri*, pubbl. da Dedekind, tradotte da Faifofer — Venezia, 1881, pag. 306.

soluzioni distribuite in spazii d'un minor numero di dimensioni siano ancora proporzionali ad essi spazii. Si riconosce anzi facilmente che la distribuzione delle soluzioni in spazii di meno di n dimensioni contenuti nell' $(n+1)$-edroido n–uplo dipende dal modo di tendere a zero della quantità ε di cui si è parlato sopra.

3. Per poter studiare rigorosamente anche le soluzioni che nella rappresentazione geometrica formerebbero spazii con meno dimensioni di quello formato dall'insieme di tutte le soluzioni, pongo questa definizione: « Per probabilità che una soluzione dell'equazione

$$x_1 + x_2 \dots + x_n = p$$

appartenga ad una data classe intendesi il limite, se esiste, della probabilità che una soluzione appartenga a tal classe quando x_1 $x_2 \dots x_n$ debbano esser multiple di $\frac{p}{m!}$ dove m è variabile che deve tendere all'infinito prendendo successivamente i valori 1 2 3 4 5 6 .... »

Se si rappresentano le soluzioni della

$$x + y + z = \pi$$

date da valori di x y z aventi per comune misura $\frac{\pi}{2.3.4.k}$ si riconosce facilmente che $36k+1$ nodi cadono sulle altezze e $36k$ cadono sul perimetro del triangolo che ha i vertici nei baricentri dei lati del triangolo equilatero; ma quei nodi a tre a tre, escluso il punto delle altezze, il quale corrisponde alla forma regolare, danno un medesimo triangolo isoscele per cui danno complessivamente $12k$ triangoli isosceli dei quali uno solo è anche rettangolo, non contando il triangolo con un angolo piatto e due nulli che corrisponde ai vertici del triangolo di riferimento: gli altri nodi a sei a sei corrispondono ad un medesimo triangolo rettangolo, esclusi i tre vertici che corrispondono a triangolo birettangolo con un angolo nullo ed i tre punti di mezzo dei lati che corrispondono al triangolo rettangolo isoscele, per cui danno complessivamente $6k$ triangoli rettangoli dei quali uno solo è isoscele, non contando quello birettangolo. Facendo crescere k indefinitamente riconosciamo così che il rapporto delle probabilità che un triangolo sia isoscele o rettangolo è 2 e non $\sqrt{3}$ come afferma il Prof. Murer; ciò è dovuto precisamente al non aver considerato che i nodi hanno diversa potenza sui segmenti che uniscono i baricentri dei lati e sulle altezze e che vi sono diversamente distribuiti.

Questo risultato si può confermare direttamente con molta facilità. Sia t un triangolo rettangolo scaleno con gli angoli acuti α β; indichiamo con T' T'' i triangoli isosceli che hanno angoli al vertice eguali, rispettivamente, a 2α 2β e facciamo corrispondere T' e T'' a t; il triangolo isoscele con l'angolo al vertice λ corrisponde così al triangolo rettangolo con un angolo acuto eguale a $\frac{\lambda}{2}$ e ad esso solo, ed all'insieme dei triangoli isosceli con angoli multipli di $\frac{\pi}{2n}$ corrisponde l'insieme dei triangoli rettangoli con angoli pure multipli di $\frac{\pi}{2n}$ perchè se l'angolo alla base d'un triangolo isoscele è multiplo di $\frac{\pi}{2n}$, è multiplo di questo anche la metà del suo angolo al vertice. Siccome c'è un solo triangolo rettangolo isoscele, riconosciamo così che la frequenza dei triangoli isosceli è doppia di quella dei triangoli rettangoli.

4. Per studiare i quadrangoli inscritti ad un cerchio si possono fare i loro angoli proporzionali alle parti in cui un parallelogrammo è diviso dai segmenti che uniscono un suo punto ai vertici; l'angolo retto è così rappresentato dalla quarta parte della superficie del parallelogrammo: se i punti corrispondenti alle soluzioni di due classi formano due superfici, le probabilità che una soluzione appartenga all'una od all'altra classe stanno fra loro come queste due superfici: non si può dire altrettanto per le soluzioni distribuite sopra linee. Per maggiore semplicità si potrebbe fare gli angoli proporzionali alle distanze d'un punto mobile nell'interno d'un quadrato dai lati del medesimo: l'angolo retto sarà così rappresentato da una distanza eguale alla metà del lato del quadrato.

5. Sia ABC un triangolo equilatero, M un punto interno ad esso ed A' B' C' le proiezioni ortogonali di questo punto su BC CA

AB. Si riconosce immediatamente essere

$$\begin{aligned} \text{ang. } AMC &= ABC + BCM + MAB \\ &= ABC + A'B'M + MB'C' = ABC + A'B'C' \end{aligned}$$

$$\text{ang. } AMB = ACB + A'C'B' \qquad \text{ang. } BMC = BAC + B'A'C'$$

per cui ciascun angolo di $A'B'C'$ sarà compreso fra 0 e $\frac{2}{3} \cdot \pi$.

Sia ora:

$$\alpha \overline{\overline{<}} \frac{2}{3}\pi \qquad \beta \overline{\overline{<}} \frac{2}{3}\pi \qquad \gamma \overline{\overline{<}} \frac{2}{3}\pi$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Supporremo che nessuno degli angoli $\alpha\ \beta\ \gamma$ sia nullo; i triangoli con qualche angolo nullo corrispondono ai punti del perimetro del triangolo di riferimento. Se $\alpha\ \beta\ \gamma$ fossero tra loro eguali si avrebbe la forma regolare corrispondente al baricentro del triangolo equilatero di riferimento. Supponiamo che non siano tutti uguali; almeno uno sarà maggiore di $\frac{\pi}{3}$; sia

$$\alpha > \frac{\pi}{3},$$

Congiungiamo C con B ed A mediante archi i quali siano capaci di $\alpha + \frac{\pi}{3}$ e $\beta + \frac{\pi}{3}$, rispettivamente, e si trovino dalla parte del triangolo equilatero rispetto alle loro corde. Indicando con λ e μ gli angoli che quegli archi formano con CB CA, si ha:

$$\lambda = \frac{2}{3}\pi - \alpha \qquad \mu = \frac{2}{3}\pi - \beta.$$

Essendo $\alpha > \frac{\pi}{3}$ l'arco CB è tutto interno al triangolo, ed essendo

$$\alpha + \beta < \pi$$

è

$$\lambda + \mu > \frac{\pi}{3}$$

per cui i due archi CB CA si tagliano in un punto interno al triangolo di riferimento: per ciò che sopra fu detto, il triangolo corrispondente a questo punto ha eguali ad α e β gli angoli coi vertici su BC CA, rispettivamente, epperò eguale a γ quello che ha il vertice su AB. Adunque, ogni triangolo che non ha nessun angolo maggiore di $\frac{2}{3}\pi$ ha un punto corrispondente interno al triangolo equilatero.

Siccome quando è data una forma di triangolo resta da fissar l'ordine in cui i vertici debbono cadere sui lati, così è chiaro che ad un medesimo triangolo corrispondono sei o tre od un punto secondo che esso è scaleno, isoscele od equilatero, precisamente come nella rappresentazione di cui ha fatto uso il D.r Murer. Con questa rappresentazione i punti del triangolo curvilineo formato dagli archi sottesi dai lati del triangolo equilatero e tangenti alle bisettrici degli angoli corrispondono ai triangoli acutangoli, i punti del perimetro di tal triangolo curvilineo corrispondono ai triangoli rettangoli e gli altri punti del triangolo di riferimento corrispondono ai triangoli con un angolo compreso fra $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{2}{3}\pi$. I punti corrispondenti ai triangoli con angoli multipli di $\frac{\pi}{3n}$ e due angoli compresi fra $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2}{3}\pi$ sono i nodi della rete formata dagli archi congiungenti A con B e tangenti alle rette che dividono l'angolo BAC in n parti eguali e di quelli tangenti alle stesse rette congiungenti A con C; essi nodi non sono distribuiti uniformemente per cui, se la probabilità sia intesa nel senso dichiarato sopra, non si può ammettere nemmeno il principio delle superfici, con questa nuova corrispondenza. Ciò si riconosce ancora meglio eguagliando il rapporto delle superfici che nella corrispondenza stabilita dal Prof. Cesàro rappresentano due classi di triangoli al rapporto delle superfici che, nell'ultima corrispondenza, rappresentano le stesse classi: si possono così avere facilmente delle equazioni semplicissime, a coefficenti interi, del 2° grado in π mentre si sa che questo numero è trascendente.

Si dimostra senza difficoltà il teorema seguente che comprende l'ultima corrispondenza considerata: « Se un triangolo inscritto in uno dato ha per vertici le proiezioni ortogonali, sui lati di questo, d'un punto del cerchio circoscritto al medesimo, l'angolo che ha il vertice in questo punto ed intercetta sulla circonferenza circoscritta lo stesso arco intercetto da un angolo del triangolo dato è eguale alla somma di quest'angolo con l'opposto del triangolo inscritto. »

Si possono quindi rappresentare tutte le diverse forme di triangoli facendo corrispondere ad un punto qualunque del cerchio circoscritto ad un triangolo di riferimento, il triangolo che ha per vertici le proiezioni ortogonali di quel punto sui lati di questo. Ai punti del cerchio circoscritto corrispondono, pel teorema ora enunciato, i triangoli con un angolo piatto e due nulli come già era noto per una proposizione di Simson. I punti corrispondenti ai triangoli direttamente simili al dato sono il centro del cerchio circoscritto ed i due punti di Brocard di esso triangolo dato, pei quali il teorema enunciato mette subito in evidenza questa proprietà: Un punto di Brocard d'un triangolo qualunque ABC è punto d'intersezione degli archi circolari congiungenti B con A e con C e tangenti a BC ed a CA, rispettivamente; l'altro punto di Brocard è punto d'intersezione degli archi circolari congiungenti A con B e con C e tangenti ad AC ed a BC rispettivamente.

F. Giudice.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI
b), 46, 48, 53, 54 e 55

b). *Il luogo dei punti, del piano di un triangolo dato, tali che i piedi delle perpendicolari, condotte da uno qualunque di essi ai tre lati, formino un triangolo di data area, è una circonferenza concentrica a quella circoscritta al triangolo dato.* (G. Loria).

Dimostrazione del Prof. *S. Catania.*

Siano p, q, r i numeri (positivi) che misurano le perpendicolari abbassate da un punto P del luogo cercato rispettivamente sui lati a, b, c del triangolo dato A, B, C ed S, T le aree del triangolo dato e del triangolo che ha per vertici i piedi di quelle tre perpendicolari; si avrà

$$pa + qb + rc = 2S,$$
$$qr \operatorname{sen} A + rp \operatorname{sen} B + pq \operatorname{sen} C = 2T.$$

Eliminando r si ottiene

$$p^2 a \operatorname{sen} B + q^2 b \operatorname{sen} A + pq\,(a \operatorname{sen} A + b \operatorname{sen} B - c \operatorname{sen} C)$$
$$- 2Sq \operatorname{sen} A - 2Sp \operatorname{sen} B + 2cT = 0.$$

Siccome

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R,$$

eliminando a, b, c, e dividendo poi per $2R \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$, risulterà

$$p^2+q^2+pq\,.\frac{\operatorname{sen}^2 A+\operatorname{sen}^2 B-\operatorname{sen}^2 C}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}-\frac{Sp}{R\operatorname{sen} A}-\frac{Sq}{R\operatorname{sen} B}+\frac{2T\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B}=0,$$

od anche per essere

$$\frac{\operatorname{sen}^2 A+\operatorname{sen}^2 B-\operatorname{sen}^2 C}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}=2\cdot\cos C,\ S=2R^2\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C:$$

[1] $$p^2+q^2+2pq\cos C-\frac{Sp}{R\operatorname{sen} A}-\frac{Sq}{R\operatorname{sen} B}+\frac{4R^2\,T\operatorname{sen}^2 C}{S}=0.$$

Sieno rispettivamente α e β i numeri che misurano le perpendicolari abbassate dal centro O della circonferenza K circoscritta al triangolo ABC sui lati a e b, ed M ed N i loro piedi. Si deduce facilmente, dalla considerazione del quadrilatero $OMCN$, che

$$\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos C=R^2\operatorname{sen}^2 C.$$

E similmente, considerando il quadrilatero che ha due vertici in P ed O, e di cui i lati uscenti da O sieno paralleli ad a e b, e quelli uscenti da P sieno perpendicolari agli stessi lati a e b, si ottiene

$$(p-\alpha)^2+(q-\beta)^2+2\,(p-\alpha)\,(q-\beta)\cos C=\rho^2\operatorname{sen}^2 C$$

avendo rappresentato con ρ il numero che misura la distanza OP.

Sviluppando, tenendo conto dell'equazione precedente e della [1], si avrà

$$-2p\alpha-2q\beta-2p\beta\cos C-2q\alpha\cos C+R^2\operatorname{sen}^2 C$$
$$+\frac{Sp}{R\operatorname{sen} A}+\frac{Sq}{R\operatorname{sen} B}-\frac{4R^2\,T\operatorname{sen}^2 C}{S}=\rho^2\operatorname{sen}^2 C.$$

Ora $\alpha=R\cos A$, $\beta=R\cos B$, onde

$$-2p\alpha-2p\beta\cos C+\frac{Sp}{R\operatorname{sen} A}=-2pR\,(\cos A+\cos B\cos C)+\frac{Sp}{R\operatorname{sen} A}$$
$$=-2pR\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C+\frac{Sp}{R\operatorname{sen} A}=-\frac{Sp}{R\operatorname{sen} A}+\frac{Sp}{R\operatorname{sen} A}=0$$

e similmente

$$-2q\beta-2q\alpha\cos C+\frac{Sq}{R\operatorname{sen} B}=0.$$

Si avrà quindi

$$R^2\operatorname{sen}^2 C-\frac{4R^2\,T\operatorname{sen}^2 C}{S}=\rho^2\operatorname{sen}^2 C$$

ed infine

[2] $$\rho=R\sqrt{1-\frac{4T}{S}}.$$

Nello stabilire il primitivo sistema di equazioni si è tacitamente supposto essere il punto P interno al triangolo $A\,B\,C$. Se però P è esterno, ma però interno alla circonferenza K, avendo considerato i soli valori assoluti di p, q, r, si avrà il sistema

$$\begin{gathered} pa + qb - rc = 2S \\ -qr \operatorname{sen} A - rp \operatorname{sen} B + pq \operatorname{sen} C = 2T, \end{gathered}$$

che si può scrivere

$$\begin{gathered} pa + qb + (-r)\,c = 2S \\ (-r)\,q \operatorname{sen} A + (-r)\,p \operatorname{sen} B + pq \operatorname{sen} C = 2T \end{gathered}$$

da cui eliminando $(-r)$ si ricade nel risultato precedente.

Supponiamo ora che P sia esterno alla circonferenza K; avremo il sistema

$$\begin{gathered} pa + qb - rc = 2S \\ qr \operatorname{sen} A + rp \operatorname{sen} B - pq \operatorname{sen} C = 2T \end{gathered}$$

od un suo equivalente. Questo sistema si può scrivere

$$\begin{gathered} pa + qb + (-r)\,c = 2S \\ (-r)\,q \operatorname{sen} A + (-r)\,p \operatorname{sen} B + pq \operatorname{sen} C = -2T \end{gathered}$$

e si ricade nel risultato [2], cambiando però in esso il segno a T. Su dunque l'area T si considera soltanto in valore assoluto, il luogo cercato si compone di due circonferenze, i cui raggi sono espressi dalla formola

$$\rho = R\sqrt{1 \pm \frac{4T}{S}}$$

e di queste due circonferenze una è interna alla circonferenza K e l'altra è esterna.

Se $T = 0$, sarà $\rho = R$ e si ricade nel teorema di Simson.

Si noti che facendo variare ρ da 0 ad R, il triangolo $A'\,B'\,C'$, che ha per vertici i piedi delle perpendicolari abbassate da un punto del luogo sui lati del triangolo $A\,B\,C$, varia da $\frac{1}{4}\,S$ a 0, e risulta dello stesso segno del triangolo $A\,B\,C$. Risulta invece di segno opposto se ρ cresce da R a ∞. Considerando perciò come positiva l'area del triangolo $A\,B\,C$, l'area T del triangolo $A'\,B'\,C'$ risulterà positiva per i punti interni alla circonferenza K, e negativa per i punti esterni, passando per zero per i punti della circonferenza K.

In quest'ipotesi il luogo cercato è costituito da una sola circonferenza di circolo, di raggio

$$\rho = R\sqrt{1 - \frac{4T}{S}}.$$

E si vede che questa circonferenza esiste per tutti i valori positivi di T, inferiori a $\frac{1}{4}\,S$, e per tutti i negativi di T.

46. *Dimostrare che, se l'equazione*

$$x^6 + 3\,a\,x^5 + \left(3\,a^2 - \frac{6}{a}\right)x^4 - 20\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0$$

ha tutte le radici positive, esse devono essere eguali ad 1. (D. Besso).

Dimostrazione del Prof. *F. Viaggi*. (*)

Chiamo $f(x)$ il primo membro dell'equazione proposta; se $f(x) = 0$ ha tutte le radici reali e positive, lo stesso avverrà, pel teorema di Rolle, di ciascuna equazione ottenuta eguagliando a zero una derivata di $f(x)$.

$$f^{\mathrm{IV}}(x) = \frac{72}{a}\,(5\,a\,x^2 + 5\,a^2\,x + a^3 - 2)$$

s'annulla pei valori

$$x_1 = -\frac{5\,a^2 + \sqrt{5\,a\,(a^3+8)}}{10\,a}, \quad x_2 = -\frac{5\,a^2 - \sqrt{5\,a\,(a^3+8)}}{10\,a}$$

che sono reali e positivi se

$$a^3 + 8 \leqq 0 \qquad [1]$$

il caso dell'eguaglianza corrispondendo a $x_1 = x_2 = 1$.

Pel teorema di Rolle le radici di $f'''(x) = 0$ debbono essere separate dai valori $+\infty$, x_1, x_2, 0, ora

$$f'''(+\infty) = +;\; f'''(x_1) = -\frac{12}{a}\,x_2\,(a^3+8);$$

$$f'''(x_2) = -\frac{12}{a}\,x_1\,(a^3+8);\; f'''(0) = -$$

quindi non può supporsi $a^3 + 8 < 0$, perchè in tale ipotesi $f'''(x) = 0$ non avrebbe che una sola radice reale; bisogna dunque che sia $a^3 + 8 = 0$, ossia $a = -2$, nel qual caso la radice doppia della $f^{\mathrm{IV}}(x) = 0$ è comune alla $f'''(x) = 0$ e quindi è tripla per quest'ultima.

La $f''(x) = 0$ non può avere radici reali distinte, perchè tali sarebbero quelle di $f'''(x) = 0$, e, avendo radici multiple, almeno una di esse dev'essere 1, la quale essendo tripla per quest'ultima è quadrupla per la precedente: così $f''(x) = 0$ ha tutte le radici eguali ad 1.

Allo stesso modo si dimostra che $f'(x) = 0$, ed $f(x) = 0$ hanno tutte le radici eguali ad 1 (**).

(*) Altra soluzione pervenne dal Sig. Prof. *U. Scarpis*.

(**) Questa quistione è suscettibile anche di una dimostrazione elementare.

Nota della Redazione.

48. *Assegnare il limite al quale tende la funzione*

$$n^{m-1}\left\{\frac{1}{(n+1)^m}+\frac{1}{(n+2)^m}+\frac{1}{(n+3)^m}+\ldots\ldots\frac{1}{(n+n)^m}\right\}$$

quando n *tende all'infinito, nell'ipotesi che* m *sia un intero positivo costante.*

(D. Besso).

Soluzione del Prof. *L. Merante* (*).

Dall' eguaglianza

$$\left(\frac{1}{b^{m-1}}-\frac{1}{a^{m-1}}\right):(a-b)=\frac{1}{a^{m-1}\,b}+\frac{1}{a^{m-2}\,b^2}+\ldots\ldots,$$

nell' ipotesi $a>b$, **segue**

$$(m-1)\,\frac{1}{a^m}<\left(\frac{1}{b^{m-1}}-\frac{1}{a^{m-1}}\right):(a-b)<(m-1)\,\frac{1}{b^m},$$

e fatto $a=b+1$ **abbiamo**

$$(m-1)\,\frac{1}{(b+1)^m}<\frac{1}{b^{m-1}}-\frac{1}{(b+1)^{m-1}}, \qquad [1]$$

$$(m-1)\,\frac{1}{b^m}>\frac{1}{b^{m-1}}-\frac{1}{(b+1)^{m-1}}. \qquad [2]$$

Facendo nella [1] $b=n,\ n+1,\ \ldots,\ n+n-1$ **e sommando, e nella** [2] $b=n+1,\ n+2,\ \ldots,\ n+n$ **e sommando, otteniamo la limitazione**

$$\frac{1}{(n+1)^{m-1}}-\frac{1}{(2n+1)^{m-1}}$$

$$<(m-1)\left\{\frac{1}{(n+1)^m}+\frac{1}{(n+2)^m}+\ldots\ldots+\frac{1}{(n+n)^m}\right\}<\frac{1}{n^{m-1}}-\frac{1}{2\,n^{m-1}}$$

ossia

$$0<(m-1)\left\{\frac{1}{(n+1)^m}+\frac{1}{(n+2)^m}+\ldots+\frac{1}{(n+n)^m}\right\}+\frac{1}{(2n+1)^{m-1}}-\frac{1}{(n+1)^{m-1}}$$

$$<\frac{1}{n^{m-1}}-\frac{1}{2n^{m-1}}+\frac{1}{(2n+1)^{m-1}}-\frac{1}{(n+1)^{m-1}}$$

e moltiplicando per $\dfrac{n^{m-1}}{m-1}$, **abbiamo**

$$0<n^{m-1}\left\{\frac{1}{(n+1)^m}+\frac{1}{(n+2)^m}+\ldots+\frac{1}{(n+n)^m}\right\}+\frac{1}{(m-1)\left(2+\frac{1}{n}\right)^{m-1}}-\frac{1}{(m-1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{m-1}}$$

$$<\frac{1}{m-1}-\frac{1}{(m-1)\,2^{m-1}}+\frac{1}{(m-1)\left(2+\frac{1}{n}\right)^{m-1}}-\frac{1}{(m-1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{m-1}}.$$

(*) Altre soluzioni vennero inviate dai Sigg. Prof. *S. Catania, F. Viaggi*

Quando n tende all'infinito il 3° membro tende a zero, quindi

$$\lim n^{m-1}\left\{\frac{1}{(n+1)^m}+\frac{1}{(n+2)^m}+\ldots+\frac{1}{(n+n)^m}\right\}=\frac{1}{m-1}\left(1-\frac{1}{2^{m-1}}\right).$$

53*. *Dati di posizione nel piano* n *punti, costruire un poligono i cui lati passino per i punti dati e sieno divisi da questi, nel medesimo senso, in parti aventi un rapporto uguale a quello di due segmenti dati.*

Mostrare che il problema ammette un' infinità di soluzioni o nessuna se n *è pari e i segmenti dati sono eguali tra loro, una soluzione unica in tutti gli altri casi.* (A. Lugli).

Soluzione del Sig. *G. M. Nobile* alunno del R. Istituto tecnico di Chieti.

Siano P_1, P_2, ... P_n punti dati in un piano, i quali debbano dividere nel rapporto k i lati di un poligono da costruire; k si suppone un numero algebrico rappresentante il rapporto dei segmenti dati; dunque negativo se i punti dati si suppongono interni ai lati, positivo se esterni.

Preso ad arbitrio un punto A_1, sulla congiungente $A_1 P_1$ si determini il punto A_2 tale che sia $\frac{A_1 P_1}{A_2 P_1} = k$, non ce n'è che uno solo; sulla congiungente $A_2 P_2$ si determini analogamente il punto A_3 tale che sia $\frac{A_2 P_2}{A_3 P_2} = k$, e così di seguito: si costruisca cioè la poligonale $A_1 A_2 \ldots\ldots A_{n+1}$ i cui lati siano successivamente e nello stesso senso divisi da $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n$ nel rapporto k. Se A_1 si fa muovere su una retta, $A_2, A_3, \ldots\ldots, A_{n+1}$ si muovono ripettivamente su rette parallele a quella, generando punteggiate omotetiche; e, come caso particolare, se A_1 scorre lungo la $A_1 A_{n+1}$ anche A_{n+1} scorre lungo la stessa retta. Di più, se $A_1' A_2' \ldots A'_{n+1}$ è una seconda posizione della poligonale, si ha algebricamente:

$$\frac{A_1 A_1'}{A_2 A_2'} = k, \quad \frac{A_2 A_2'}{A_3 A_3'} = k, \ \ldots\ldots\ldots \ \frac{A_n A_n'}{A_{n+1} A'_{n+1}} = k.$$

Dalle quali, moltiplicando e riducendo:

$$\frac{A_1 A_1'}{A_{n+1} A'_{n+1}} = k^n \ldots\ldots\ldots\ldots [1].$$

Se A_1 ed A_{n+1} coincidono in un punto, il poligono $A_1 A_2 \ldots . A_{n+1}$ sodisfa alla condizione richiesta e la [1] mostra che, se k^n è diverso da 1, non può coincidere mai A_1' con A'_{n+1}; se invece $k^n = 1$ ossia, non potendo essere $k = 1$, imperocchè ciò corrisponderebbe ad ammettere che i punti dati fossero a distanza infinita sui lati, se è $k = -1$ ed n pari, comunque si scelga A_1' esso coincide sempre con A'_{n+1}; il che significa che in generale il problema, se ha una soluzione, non ne ammette altre; ma, se i punti dati sono i punti medii dei lati del poligono e sono in numero pari, ne ammette infinite potendosi scegliere il primo vertice ad arbitrio.

Se poi A_1 non coincide con A_{n+1}, sulla retta $A_1 A_{n+1}$ si prenda il punto O tale che sia:

$$\frac{A_1 O}{A_{n+1} O} = k^n \ldots\ldots\ldots\ldots [2].$$

Se come primo vertice si prende O, ossia si fa coincidere A_1' con O, anche l'ultimo vertice della poligonale cade in O, perchè da [1] e [2] si ha:

$$\frac{A_1 O}{A_{n+1} A'_{n+1}} = \frac{A_1 O}{A_{n+1} O}.$$

Ed ora se $k^n = 1$, con $k = -1$ e quindi n pari, il punto O, determinato dalla [2], cade a distanza infinita.

Dunque in generale il problema ammette soluzione ed una sola; quando poi è $k^n = 1$, manca ogni soluzione o ve ne sono infinite.

Corollario. — I punti medii dei lati d'un poligono piano di $2m$ lati, non formano un poligono generale ma assoggettato ad una condizione a cui può darsi il seguente enunciato: Se il poligono $P_0 P_1 P_2 \ldots P_{m-1} P_m P_{-(m-1)} \ldots P_{-2} P_{-1}$ ha i vertici nei punti medii dei lati d'un poligono, presi a considerare due vertici opposti P_0, P_m, se $C_1, C_2, \ldots, C_{m-1}$ sono punti medii dei segmenti $P_1 P_{-1}, P_2 P_{-2}, \ldots, P_{m-1} P_{-(m-1)}$, e si costruisca di P_0 il simmetrico rispetto a C_1, del nuovo punto il simmetrico rispetto a C_2, e così di seguito, l'ultimo punto ottenuto deve coincidere con P_m.

54'. *Se con* $\binom{n}{r}$ *s'indica il numero delle combinazioni di* n *elementi ad* r *ad* r, *dimostrare la relazione:*

$$\binom{m-1}{h} + \binom{m-1}{h+1} \frac{m-h}{m-h-1} = \frac{m+1}{m} \binom{m}{h+1}.$$

(A. LUGLI).

Soluzione del Sig. *G. Marsilia*, allievo della R. Accademia navale di Livorno (*).

Si verifica facilmente che

$$\binom{m-1}{h+1} \frac{m}{m-h-1} = \binom{m}{h+1},$$

(*) Soluzioni sostanzialmente analoghe da *C. Aiello* (R. Liceo V. E. di Napoli), *A. Baldassarre* (R. Istituto tecnico di Bari), *A. Coacci* (R. Istituto tecnico di Roma), *S. Lopriore* (R. Liceo di Bari), *O. Manfredi* (R. Istituto tecnico di Reggio Emilia), *P. Marano* (studente privato a Catania), *P. Patrassi* (R. Istituto tecnico di Terni), *G. Piuma* (R. Liceo Colombo di Genova).

onde

$$\binom{m-1}{h+1}\frac{1}{m-h-1}=\frac{1}{m}\binom{m}{h+1}.$$

Sommando questa equivalenza coll'altra notissima

$$\binom{m-1}{h+1}+\binom{m-1}{h}=\binom{m}{h+1}$$

si ha

$$\binom{m-1}{h}+\binom{m-1}{h+1}\frac{m-h}{m-h-1}=\frac{m+1}{m}\binom{m}{h+1}.$$

55*. *Dimostrare che l'espressione*

$$4^n-3^{n+1}+3\,.\,2^n-1$$

è multipla di 6, qualunque sia l'intero positivo n, *e che il quoziente della sua divisione per 6 è* >0 *per ogni valore di* n >2. (A. Lugli).

Dimostrazione di *C. Aiello* (R. Liceo V. E. di Napoli), *A. Baldassarre* (R. Istituto tecnico di Bari), *P. Marano* (studente privato a Catania). *Z. Mengoni* (R Accademia navale di Livorno).

L'espressione data può scriversi nei due modi

$$(4^n-1^n)-3\,(3^n-2^n) \quad\text{e}\quad 4^n+3\,.\,2^n-(3^{n+1}+1)$$

e poichè 4^n-1^n è divisibile per $4-1=3$ e $3^{n+1}+1$ è un numero pari, risulta dal primo modo di scrittura che essa è divisibile per 3, dal secondo che è divisibile per 2; l'espressione data è quindi multipla di 6.

È facile verificare che per $n=1,\ 2$ l'espressione considerata assume il valore zero, quindi, per rispondere alla seconda parte della quistione, basterà dimostrare che per $n>2$, essa è >0.

Ci serviremo del metodo d'induzione: supponendo cioè che sia

$$4^n-3^{n+1}+3\,.\,2^n-1>0,$$

dimostreremo che è anche

$$4^{n+1}-3^{n+2}+3\,.\,2^{n+1}-1>0.$$

Quest'ultima disuguaglianza è certamente vera se (dietro l'ipotesi fatta) è vera l'altra:

$$(4^{n+1}-3^{n+2}+3\,.\,2^{n+1}-1)-(4^n-3^{n+1}+3\,.\,2^n-1)>0,$$

ossia, dopo avere ridotto e diviso per 3, se

$$4^n-2\,.\,3^n+2^n>0,$$

oppur anche se

$$4^n-3^n>3^n-2^n,$$

o finalmente se

$$4^{n-1}+4^{n-2}\,.\,3+\ldots+3^{n-1}>3^{n-1}+3^{n-2}\,.\,2+\ldots+2^{n-1},$$

disuguaglianza evidentemente giusta.

Dunque se il valore della proposta espressione è >0 per una certa n lo è pure per $n+1$ e poichè per $n=3$ questo valore è 6, così il valore medesimo sarà >0 per ogni valore di $n>2$. Lo stesso accadrà poi del quoziente della divisione per 6.

I giovani studenti *G. Piuma* (del R. Liceo Colombo di Genova) e *S. Lopriore* (R. Liceo di Bari) dimostrano la seconda parte del teorema proposto nel modo seguente. — Per $n=3$ si verifica subito che

$$4^n-3^{n+1}+3\,.\,2^n-1>0,$$

sicchè basterà dimostrare che per $n\geqq 4$ è

$$4^n-3^{n+1}-1>0 \quad \text{o} \quad 4^n-3^{n+1}>1.$$

Ora $4^4-3^5>1$, sarà dunque evidentemente $4^4\,.\,4-3^5\,.\,3>4^4-3^5>1$, $4^5\,.\,4-3^6\,.\,3>4^5-3^6>1$, ecc., perciò il quoziente della divisione per 6 della data espressione, per $n>2$, è un intero positivo (*).

Si dichiara inoltre ricevimento delle soluzioni seguenti: quistione **56***. dal Sig. *C. Aiello, G. Alessio, A. Baldassarre, G. Bitonti, G. di G. Candido, A. Colorni, G. D' Asdia, E. Gabrielli, A. Graciotti, L. Isola, A. Longo, S. Lopriore, P. Marano, G. Marcantoni, S. Martucci, G. M. Nobile, P. Patrassi, G. Prinzi, M. Righetto, P. P. Rizzuti, R. Salvadori, G. Scarpini, E. Segrè, A. Sidoli, F. Tallarico;* **57***. *R. Cassòli, G. D' Asdia, S. Lopriore, O. Manfredi;* **58***. *A. Baldassarre, G. Bitonti, G. D' Asdia, S. Lopriore, O. Manfredi, G. M. Nobile,* **59**. *S. Catania, L. Carlini, S. Gatti, M. Misani, G. Riboni, G. Russo, F. Viaggi;* **60**. *M. Misani, G. Riboni, G. Russo, F. Viaggi;* **61**. *F. Viaggi;* **62***. *A. Baldassarre, G. D' Asdia, O. Manfredi, G. M. Nobile;* **63***. *C. Aiello, G. Bitonti, E. Goti, S. Lopriore, P. Marano, A. Mucci, G. M. Nobile, G. Paoli, G. Prinzi, P. P. Rizzuti, R. Salvadori, A. Sidoli* — soluzioni alle quali verrà data evasione, insieme a quelle arretrate, col fascicolo venturo.

La Direzione.

(*) Inviarono dimostrazioni di questa quistione ancora i giovani *G. Bitonti, G. Gallucci, R. Maltese* (Istituto tecnico di Catanzaro), *A. Cocci, Ricciarda De Albini, G. Vincenti* (R. Istituto tecnico di Roma), *M. Righetto* (Istituto tecnico di Spezia), *G. A. Venturi* (R. Istituto tecnico di Reggio Emilia).

QUISTIONI PROPOSTE (*)

64. Risolvere il seguente sistema d'equazioni

$$a x^2 + b y^2 + \alpha (a x - b y) + (a + b)(1 + \alpha - y) x - (a + b)(1 + \alpha) y + \alpha (a + b)(1 + \alpha) = 0$$

$$2 y^3 + \left\{ x^2 + (a + b)^2 - 2 y^2 \right\} x - \left\{ \alpha^2 + (a + b)^2 - 2 x^2 \right\} y - 2 x^3 = 0,$$

nelle quali α, a, b esprimono quantità note.

S. GATTI.

65. Fra tutti i triangoli sferici che hanno un angolo di 90° il lato ad esso opposto costante, e gli altri due lati minori di 90°, qual è quello di massima area?

66*. Trovare una formola pel termine n.° della serie $a, b, a, b, a, b, \ldots\ldots\ldots$

67. Trovare una formola pel termine n.° della serie $a_1, a_2, a_3, \ldots \ldots a_m, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_m, \ldots\ldots\ldots$

68. Se il punto d'incontro degli archi bisettori degli angoli d'un triangolo sferico coincide col punto d'incontro degli archi mediani dei lati, è necessario che il triangolo sia equilatero?

D. BESSO.

69*. In un quadrilatero qualunque circoscritto ad un cerchio, la differenza dei rettangoli dei lati opposti è uguale al rettangolo della somma e della differenza delle congiungenti i punti medî dei lati opposti.

(*) Il tempo utile per l'invio delle soluzioni delle quistioni nuove e di quelle rimaste insolute scade un mese e mezzo dopo la chiusura della redazione del fascicolo. La data di chiusura si troverà nell'ultima pagina di ciascun numero del Periodico.

Le quistioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.

70*. Sommando la serie finita

$$1+2x+3x^2+\ldots\ldots+nx^{n-1}$$

e facendo poi $x=\frac{n+1}{n}$, si ottiene l'identità:

$$1+2\left(\frac{n+1}{n}\right)+3\left(\frac{n+1}{n}\right)^2+\ldots\ldots+n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1}=n^2.$$

U. Dainelli.

71* a). Il massimo comun divisore di due numeri è 24. Facendone la ricerca col metodo delle divisioni, si trovano i numeri 3, 4, 5 e 6 come quozienti delle successive divisioni che occorre fare. Quali sono i due numeri?

b). Generalizzare il problema e il metodo per risolverlo.

G. Frattini.

72*. Pei centri A e B di due circoli eguali e tangenti esternamente in F, e dalla stessa parte di AB, si conducono i raggi AC, BD paralleli fra loro; su CD come diametro si descrive un mezzo cerchio esternamente ai cerchi dati, si ottiene così una figura (*drepanoide*) formata dal suddetto mezzo cerchio e dagli archi FC, FD. Mostrare che il raggio ρ del cerchio inscritto nel drepanoide è legato al raggio r dei cerchi dati ed all'angolo $ABD=\alpha$, dalla relazione

$$\rho=\frac{2r\,\text{sen}^2\,\alpha}{4-\text{sen}^2\,\alpha}.$$

G. Russo.

73*. Dato un triangolo, non regolare, trovare il luogo geometrico dei punti tali che una delle perpendicolari condotte da ciascuno di essi ai lati uguagli la somma o differenza delle altre due.

A. Baldassarre.

74*. Sia $ABCD$ un quadrilatero inscritto in una circonferenza di centro O. Sopra il lato AB, preso come corda, si descrivano le due circonferenze che hanno i loro centri sulla circonferenza O; questi centri, che saranno i punti di mezzo dell'arco $BCDA$ e dell'arco AB, si indichino con P e con P' rispettivamente. Si operi ugualmente sui lati BC, CD, DA, si avranno così altre sei circonferenze, i cui centri, con notazioni analoghe alle precedenti, si indicheranno con Q e Q', con R ed R' e con S ed S'.

Dimostrare:

1° che gli altri quattro punti in cui si tagliano le circonferenze P', Q', R', S' sono i vertici di un rettangolo;

2° che gli altri quattro punti in cui si tagliano le circonferenze P, Q, R, S sono pure i vertici di un rettangolo;

3° che la congiungente dei centri di questi due rettangoli è bisecata dal punto O.

G. Pesci.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Lezioni di Algebra Elementare per Giacomo Bellacchi. — Parte prima: Aritmetica generale. Vol. I e II, Firenze.

Il libro è stato suggerito, come l'A. stesso dichiara nella prefazione, dal desiderio di dare pubblicità a *brevi dimostrazioni delle teoriche d'Algebra* che egli aveva trovate insegnando tal disciplina: quindi nessuna intenzione novatrice, per quanto concerne le linee fondamentali dell'Algebra, ma parecchie dimostrazioni eleganti e nuove, e sapore di originalità anche in quelle trite e notissime.

Le molte applicazioni ingegnose di teorie ovvie, alcune originali dell'A. ed altre dedotte da scrittori classici, formano a mio avviso il pregio caratteristico del libro, che porta ad epigrafe la sentenza di Newton: *In scientiis addiscendis exempla prosunt magis quam præcepta*; e gli esercizi che seguono ciascun capitolo sono quasi tutti svolti nel testo, diventando così vere appendici del capitolo stesso.

Si potrebbe, forse, desiderare maggiore omogeneità nella generalizzazione del concetto di numero, e fare qualche altro appunto di simil genere; ma discussioni d'indole didattica sarebbero qui fuori di luogo, perchè il libro è destinato a giovani che, forniti gli studi secondari, s'accingono a quelli superiori; a lettori, cioè, che certi concetti debbono avere già netti e precisi nella mente.

Ma senza tenerci più sulle generali, sarà bene che diamo una rapida scorsa al libro.

Lez. I. Simboli e definizioni.

Lez. II. Quesiti sul moto uniforme.

Lez. III. Addizione e sottrazione dei polinomi interi.

Lez. IV. Teoria dei monomi interi.

Lez. V. Numero dei divisori d'un numero intero e formula dell'indicatore.

Lez. VI. Frazioni numeriche e monomie.

Lez. VII. Prodotti dei polinomi e teoremi sui massimi e minimi.

Lez. VIII. Proprietà elementari dei numeri.

Vi si trova un metodo elegante per calcolare la somma dei numeri triangolari; e dedurne la somma dei quadrati e dei cubi dei primi n numeri naturali. Notevoli formole per ottenere dei prodotti sotto forma simile a quella dei fattori.

Fra gli esercizi è esposto il metodo di Euler per calcolare numeri amicabili.

Lez. IX. Numeri negativi e prodotto dei polinomi ordinati.

Tra gli esercizi si notano belle identità di Euler, che permettono di trasformare un cubo in somma di cubi; il teorema di Libri per scomporre un numero razionale nella somma di quattro cubi positivi; e varie applicazioni di geometria elementare.

Lez. X. Potenze del binomio con esponenti interi e positivi.

Vi si trova un metodo elegante per calcolare i numeri figurati, definiti come somme di figurati d'ordine inferiore.

Tra gli esercizi son degni di nota quello che dà la formola di Waring; e quello che fornisce il modo di calcolare la somma delle potenze simili dei numeri interi minori di n e primi con esso.

Lez. XI. Quoziente dei polinomi ordinati.

La dimostrazione che *in un sol modo il quoziente dei due polinomi interi A e B si può porre sotto la forma* $Q + \frac{R}{B}$, essendo R di grado inferiore a quello di B, si fa dipendere del principio che due polinomi di grado diverso non possono essere identicamente eguali, il qual principio, invocato altre volte in seguito, non parmi evidente.

La divisibilità per $x - a$ è dimostrata al solito modo.

In questo capitolo è esposto il modo di formare il quoziente d'un polinomio diviso per $x - a$; ed è fatta la teoria delle radici commensurabili.

Tra gli esercizi son determinati i criteri di divisibilità per $b \pm 1$, nel sistema di numerazione di base b.

Lez. XII. Forme dei divisori di primo e secondo grado dei polinomi interi.

Questa lezione comincia col calcolo dei numeri complessi, quindi presenta uno studio completo del polinomio quadratico: finisce con alcuni bei teoremi di massimo e minimo, tra' quali quello dell'alveare.

Tra gli esercizi trovasi un'ingegnosa applicazione dei numeri complessi a risolvere in numeri interi l'equazione $x^2 + y^2 = z^m$, e qualche altra equazione analoga.

Lez. XIII e XIV. Dei polinomi interi di terzo e quarto grado.

Queste lezioni sono condotte nei particolari con procedimenti forse più speciosi che semplici; il che va attribuito al fatto che l'A. non ha dimostrato ancora certi teoremi generali sull'equazioni, come a mo' d'esempio la dipendenza tra radici e coefficienti, e li verifica pel caso delle equazioni cubiche e biquadratiche.

Il teorema che un polinomio del 3° e del 4° grado si può scomporre in prodotto di fattori lineari in una sola maniera, è dimostrato in guisa che presta il fianco alla censura; infatti la dimostrazione data non basterebbe a provare assurda l'identità $(x-x_1)^2\,(x-x_2)=(x-x_1)\,(x-x_2)^2$ per $x_1 \gtrless x_2$.

L'equazione cubica è risoluta col metodo del Tartaglia. Quella biquadratica col metodo del Ferrari, e poi son trovate le relazioni tra le radici di quella e le radici della risolvente del Ferrari, del Lagrange e di Euler.

La discussione è ampia e completa, e spesso le condizioni sono espresse per mezzo dei noti invarianti delle forme binarie di 3° e 4° grado.

Lez. XV. Il metodo delle divisioni successive per la ricerca della massima comune misura.

Oltre la teoria generale del massimo comun divisore e del minimo comune multiplo di più numeri, son riferite delle formole poco note, come quella del Polignac tra quattro interi. È fatta la teoria delle frazioni continue, con le sue proprietà più notevoli, ed applicazione al teorema d'Euler: « Se un numero « intero divide la somma di due quadrati interi, è pur esso la somma di due « quadrati interi ». Sono studiati alcuni casi d'incommensurabilità di segmenti.

Tra gli esercizi: si trova la serie Fibonacci, di cui son dimostrate proprietà interessanti, ed è calcolato il termine n^{esimo} (e quindi la somma dei primi n termini). Quest'ultimo problema è presentato come caso particolare d'un altro più generale, da cui deducesi pure la ridotta n^{esima} della frazione continua

$a_1 + \cfrac{r}{2a_1 + \cfrac{r}{2a_1 + \dots}}$ a cui dà origine l'irrazionale $\sqrt{a_1^2 + r}$; e si dimostra che la $(2^m-1)^{\text{esima}}$ ridotta coincide con la m^{esima} approssimazione del Fibonacci (il Fibonacci per il valore della radice quadrata del numero $N = a_1^2 + r$ diè le seguenti approssimazioni:

$$a_1,\ a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{N}{a_1}\right),\ a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{N}{a_2}\right), \dots,\ a_m = \frac{1}{2}\left(a_{m-1} + \frac{N}{a_{m-1}}\right)\Bigg).$$

Sonvi altri interessanti esercizi.

C'è da osservare che l'eguaglianza

$$\frac{e+dx}{1-gx-hx^2} = u_1 + u_2 x + u_3 x^2 + \dots.$$

non può avere un significato ben chiaro pel lettore, che di serie convergenti nei suoi studi precedenti non ha sentito parlare, e qui non trova nemmeno la definizione. . . . .

Lez. XVI. Il massimo comun divisore dei polinomi.

Negli esercizi si trovano le condizioni perchè due quadriche o due cubiche abbiano una radice comune, e quindi si calcolano le eliminate tra due equazioni del 2° e del 3° grado. Sistema armonico di punti e coppie di punti in involuzione su una retta.

Lez. XVII. Derivate delle funzioni algebrico-razionali.

Si rifà la teoria dei numeri figurati in maniera diversa da quella tenuta innanzi. Si determina quindi resto e quoziente della divisione di $u_1 x^n + u_2 a x^{n-1} + u_3 a^2 x^{n-2} + \ldots$ per $x - a$, nell'ipotesi che sieno u_1, u_2, ... numeri figurati, e si ottiene di nuovo la formola del binomio; e quindi quella di Taylor; e si definisce derivata di $f(x)$ il coefficiente di h nello sviluppo di $f(x+h)$. Si applica la teoria alla ricerca delle radici multiple d'una equazione razionale e a determinare il grado della eliminata fra due equazioni (dimostrazione del Trudi).

Tra gli esercizi. Condizione perchè una cubica abbia radice doppia, o una biquadratica radice doppia o tripla. Due radici di una cubica si esprimono con funzioni quadriche della terza radice, o con frazioni a termini lineari rispetto alla terza radice.

Lez. XVIII. Operazioni sulle quantità irrazionali.

Chiude il capitolo un cenno storico sugl'irrazionali; si riferisce il problema di costruire gl'irrazionali di 2° grado per mezzo di rette e cerchi, e l'impossibilità di costruire con lo stesso mezzo quelli del 3°, e son citati i metodi proposti per la duplicazione del cubo con l'inserzione di due medi geometrici, con le coniche o con altre curve celebri.

Un cenno sulla geometria del compasso.

Tra gli esercizi è notevole un riassunto della goniometria presso i greci; la corda dell'arco somma o differenza espresso per mezzo delle corde degli archi semplici (teorema di Tolomeo); applicazioni al calcolo dei lati e delle diagonali dei poligoni regolari e ordinari e dell'*ettadecagono;* metodo di Tolomeo per calcolare la corda di 1° grado e poterne quindi dedurre una tavola di valori approssimati delle corde. Norma d'una funzione somma di radicali.

Lez. XIX. Estrazione della radice m^{esima} dai polinomi.

Forma dello sviluppo di $(1+x)^m$ per m frazionario positivo o negativo.

Tra gli esercizi: utili formole per la estrazione di radice dai numeri. Condizione perchè si possa trasformare l'espressione

$$\sqrt[m]{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \quad \text{nell'altra} \quad \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt[2m]{u}}.$$

Lez. XX. Le progressioni.

Tra gli esercizi è calcolato la somma dei numeri figurati inversi; e di altre serie.

Lez. XXI. I logaritmi.

È data la dimostrazione che l'interpolazione per parti proporzionali pei logaritmi dei numeri superiori a 10000 non porta errore sulla 7ª cifra della mantissa.

Lez. XXII. Interessi composti ed annualità.

Lez. XXIII. Teoria dei limiti.

Oltre alcune applicazioni, che servono pei capitoli seguenti, è da notare una elegante dimostrazione d'eguaglianza $l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots$.

Il metodo di Archimede pel calcolo di π è esposto coi suoi particolari.

Riferiti alcuni teoremi fondamentali del Cavalieri, se ne fa un'applicazione alla quadratura del segmento parabolico.

Tra gli esercizi, la somma di alcune serie trigonometriche e la loro applicazione al bel teorema del Viviani, per calcolare superficie e solidi ottenuti dall'intersezione di due cilindri eguali e tangenti lungo una generatrice con una sfera ad essi tangente e che abbia il centro sulla generatrice di contatto.

È da osservare che in questo capitolo e nei seguenti da una disuguaglianza $f(x) < F(x)$ si deduce $\lim. f(x) < F(x)$ anzichè $\lim. f(x) \leqq \lim. F(x)$.

Lez. XXIV. Le funzioni trascendenti.

Serie esponenziale. Seno e coseno iperbolici definiti come somme dei termini di posto dispari o pari nello sviluppo di e^u. Coseno e seno circolari definiti come parte reale e coefficiente dell'immaginaria nello sviluppo di e^{iu}; è dimostrata ingegnosamente l'identità delle nuove definizioni con quelle geometriche di seno e coseno.

Serie logaritmica. Sviluppo di arctangx, arcsenx.

Tra gli esercizi: un bel teorema che permette di trasformare una somma in frazione continua; formola di Brounker. Un interessante studio sulle frazioni continue che si presentano sotto una speciale forma; dal quale è dedotta la formola di Wallis che dà lo sviluppo di π in prodotto d'infiniti fattori.

Lez. XXV. Quesiti sul moto vario.

Sono dimostrate le formole del moto uniformemente vario; quella per la caduta d'una grave entro un fluido che opponga resistenza proporzionale al quadrato della velocità: la formola del pendolo.

Nella rapida recensione che ho fatta, non pretendo di aver segnalato tutto ciò che c'è di buono nel libro, forse anche avrò taciuto il meglio, ma spero di aver detto quanto basti per invogliare alla lettura di esso.

Termino facendo voti che il chiaro A. dia presto alla luce la seconda parte dell'opera.

F. Viaggi.

Pubblicazioni ricevute dalla Direzione del Periodico

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des mathématiques publié par G. Eneström. Stockholm: n. 1, 1890.

Journal de Mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. G. de Longchamps, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, L. Lévy, agrégé des sciences mathématiques, directeur des études à l'École préparatoire de Saint-Barbe. 3ᵉ Série, Quatorzième année. N. 4. Avril, 1890. Paris, librairie Ch. Delagrave.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par H. Vuibert. 14ᵉ année. N. 13, 14, 15, 16. Paris, M. Nony et C., 17 rue des Écoles, 1890.

Mathesis, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion, professeur à l'Université de Gand, et J. Neuberg, professeur à l'Université de Liège. Tome dixième. Avril, Mai, 1890. Paris, Gauthiers-Villars & fils; Gand Ad. Hoste, Éditeur.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo IV. Fasc. III e IV, Maggio-Giugno e Luglio-Agosto, 1890.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2ª, Vol. IV, Fasc. 3° e 4°, Marzo, Aprile 1890.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Ein Organ für Methodik, Bildungsgehalt und Organisation der exakten Unterrichtsfächer an Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminarien und gehobenen Bürgerschulen, herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. XXI Jahrgang. 2, 3 Heft. Leipzig, B. G. Teubner, 1890.

Bertini (E.) — Sul numero dei punti di diramazione di una singolarità qualunque di una curva piana algebrica (Rendiconti R. Istit. Lomb., 1890).

Bigiavi (C.) — Sulle equazioni differenziali lineari a coefficienti doppiamente periodici (Rend. R. Acc. Lincei, 1890).

Chistoni (C.) — Sulla determinazione del meridiano astronomico col magnetometro unifilare di Kew (Memorie della Società degli Spettroscopisti italiani, 1890).

Diekmann (J.) — Anwendung der Determinanten und Elemente der neuern Algebra auf dem Gebiete der niedern Mathematik. Leipzig, B. G. Teubner, 1889.

Frattini (G.) Aritmetica pratica ad uso delle Scuole elementari del Regno, approvata da molti consigli scolastici. Parte I, 4ª ediz. prezzo cent. 40. Parte IV, 2ª ediz. prezzo cent. 75. Ditta G. B. Paravia e Cª. 1890.

Garbieri (G.) — La matematica nello sviluppo delle scienze. Discorso letto nella R. Università di Genova inaugurando le lezioni di Algebra complementare e di Geometria analitica. Genova, 1890.

Mistrot (P.) — Contabilità popolare per agricoltori e commercianti con 5 grandi tavole dimostrative. Ditta G. B. Paravia e Cª, 1889. Prezzo: lire 1,50.

Padova (E.) — Il potenziale delle forze elastiche di mezzi isotropi. — Del moto di un corpo non soggetto ad azioni acceleratrici. — Moto di un cono circolare pesante che rotola sopra un piano inclinato (Atti R. Istit. veneto, 1890).

Palatini (F.) — Sopra una configurazione determinata dal punto doppio e da sette punti semplici di una cubica piana razionale. Palmi, tip. G. Lopresti, 1890.

Pascal (E). — Sulla teoria delle funzioni σ Abeliane pari a tre argomenti. Memoria IV. (Annali di mat., 1890).

Riccardi (P.) — Concetto generale di una biblioteca matematica italiana del secolo XIX. (Rend. R. Acc. delle Scienze dell'Istit. di Bologna, 1890).

Vigarié (E.) — Esquisse historique sur la marche du développement de la géométrie du triangle (Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Paris, 1889).

Chiusura della redazione il dì 27 maggio 1890.

DELLE PENSIONI VITALIZIE

NEL CASO CHE LE SOMME VERSATE DAGLI ASSICURATI

siano da restituirsi, senza interessi, agli eredi.

I. Un individuo dell'età di anni n, per ottenere una determinata pensione annua vitalizia P decorribile dall'età di anni $n+i$, versa alla cassa di un istituto un contributo annuo costante c_n colla riserva che, al momento della sua morte, le somme da lui versate vengano, senza gl'interessi, interamente restituite ai suoi eredi, qualora la morte accada prima che egli abbia cominciato a percepire la pensione.

È una forma d'assicurazione in uso presso diverse società di mutuo soccorso (*) e quindi parmi utile di dare alcune indicazioni, affinchè si possa in pratica conoscere qual contributo matematicamente corrisponda ad una determinata pensione. Per un individuo dell'età di anni n, sia v_n il valore attuale di un'annualità vitalizia immediata di una lira annua; e $w_{n,\,n+i}$ il valore attuale di un'annualità vitalizia pure di una lira, differita però all'età di anni $n+i$.

Siccome il contributo altro non è che un'annualità vitalizia immediata, il valore attuale di tutte le contribuzioni annue per l'individuo di anni n sarà $c_n v_n$; mentre, potendosi la pensione considerare un'annualità vitalizia differita, il valore attuale delle pensioni promesse, all'individuo di n anni, sarà $P\,w_{n,\,n+i}$.

Suppongo per semplicità che, qualora l'individuo assicurato non giunga a percepire la pensione, la restituzione delle somme versate abbia luogo alla fine dell'anno in cui avviene la morte.

Se il contributo fosse di una lira annua, gli eredi avrebbero diritto alla restituzione di una lira se la morte avvenisse nel primo anno, di due lire se nel secondo, di tre se nel terzo, ..., di i lire se nel i^{esimo}.

Sia, nell'ipotesi del contributo di una lira annua, $r_{n,\,n+i}$ il valore attuale del capitale da restituirsi agli eredi quando l'individuo assicu-

---

(*) Fra queste cito la Società nazionale di mutuo soccorso degli impiegati con sede in Milano.

rato muoia in una delle i età di anni $n, n+1, n+2, \ldots n+i-1$. Nel nostro caso sarà $c_n r_{n,n+i}$ il valore attuale delle somme da restituirsi agli eredi.

Facendo astrazione dalle spese amministrative dell'istituto e supponendo che sia questo il primo anno in cui l'individuo comincia a contribuire e quindi che egli non si sia formato alcun fondo di riserva, affinchè il contributo c_n corrisponda matematicamente agli impegni dell'istituto, si dovrà avere:

$$c_n v_n = c_n r_{n,n+i} + P w_{n,n+i}$$

da cui

$$c_n = \frac{P w_{n,n+i}}{v_n - r_{n,n+i}}.$$

Pei valori v_n e $w_{n,n+i}$ delle annualità vitalizie, immediata e differita, sono note le formule e sono pure stati calcolati i risultati numerici in base a determinate ipotesi relative alla mortalità e al saggio d'interesse (*).

Se, per le condizioni del contratto, l'individuo assicurato non fosse più, dal momento della decorrenza della pensione, tenuto a contribuire, in luogo dell'annualità vitalizia immediata v_n si dovrebbe porre l'annualità vitalizia immediata e *temporanea* (dall'età n all'età $n+i-1$), per la quale è pure nota la formula e sono stati calcolati i valori numerici.

Quindi io mi limito a trovare la formula pel valore $r_{n,n+i}$.

II. Si osservi che, come si è detto sopra, per un individuo il quale versi in ogni anno una lira l'assicurare la restituzione (in caso di morte) del capitale accumulato, senza interessi, equivale ad assicurare agli eredi una lira se la morte avviene nel primo anno, due lire se avviene nel secondo, tre se nel terzo, ... i lire se nel i^{esimo}.

Quindi il valore attuale di tale assicurazione si può considerare eguale alla somma dei valori attuali di tante assicurazioni temporanee, ciascuna della durata di un anno, e corrispondenti al n^{esimo}, al $(n+1)^{\text{esimo}}$ al $(n+2)^{\text{esimo}}$, ..., al $(n+i-1)^{\text{esimo}}$ anno di età dell'individuo assicurato e rispettivamente ai capitali 1; 2; 3; .....; i.

(*) Vedasi il mio volume: *Teoria matematica della previdenza.* (Parma - Battei, 1889).

Siano s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, ..., s_{n+i-1}, s_{n+i} i numeri dei superstiti della tavola di sopravvivenza (*) corrispondenti alle età n, $n+1$, $n+2$, ..., $n+i-1$, $n+i$. Se i fatti corrisponderanno alla legge della tavola prescelta, i morti nel primo anno saranno $s_n - s_{n+1}$, nel secondo $s_{n+1} - s_{n+2}$, ..., nel i^{esimo} $s_{n+i-1} - s_{n+i}$.

Se s_n individui della stessa età n volessero assicurare ciascuno una lira, pagabile agli eredi nel solo caso che la morte accadesse nel primo anno, l'istituto d'assicurazione si esporrebbe al pagamento di lire $s_n - s_{n+1}$ alla fine d'anno. Il valore attuale di questa somma, essendo t il saggio d'interesse (l'interesse di una lira in un anno), è $\frac{s_n - s_{n+1}}{1+t} = h\,(s_n - s_{n+1})$, in cui $h = \frac{1}{1+t}$. Se tale è il valore attuale di tutte le somme pagabili agli eredi dei defunti fra gli s_n individui assicurati, il valore di tale assicurazione, per un solo individuo di n anni, sarà $h\,\frac{s_n - s_{n+1}}{s_n}$.

Qualora gli stessi s_n individui volessero assicurare ciascuno ai loro eredi una lira annua, da pagarsi nel solo caso che la morte avvenisse nel secondo anno dell'assicurazione, l'istituto s'impegnerebbe a pagare alla fine del secondo anno lire $s_{n+1} - s_{n+2}$, le quali ridotte al loro valore attuale danno $\frac{s_{n+1} - s_{n+2}}{(1+t)^2} = h^2\,(s_{n+1} - s_{n+2})$. Il valore di tale assicurazione per un solo individuo è quindi $h^2\,\frac{s_{n+1} - s_{n+2}}{s_n}$.

In generale $h^m\,\frac{s_{n+m-1} - s_{n+m}}{s_n}$ è, per un solo individuo dell'età n, il valore dell'assicurazione temporanea di una lira, da pagarsi agli eredi nel solo caso che la morte accada nel m^{esimo} anno dell'assicurazione.

Ne consegue che il valore attuale $r_{n,n+i}$ è dato dalla formula

$$[1]\quad r_{n,n+i} = h\,\frac{s_n - s_{n+1}}{s_n} + 2\,h^2\,\frac{s_{n+1} - s_{n+2}}{s_n} + 3\,h^3\,\frac{s_{n+2} - s_{n+3}}{s_n} + \dots$$
$$\dots + i\,h^i\,\frac{s_{n+i-1} - s_{n+i}}{s_n}.$$

(*) Propriamente parlando devesi distinguere la tavola di mortalità da quella di sopravvivenza. Di un certo numero di individui, che si suppongono nati nel medesimo istante, la tavola di sopravvivenza fornisce direttamente il numero probabile dei superstiti dopo uno, due, tre ... m ... anni; quella di mortalità fornisce i quozienti di mortalità, ossia le espressioni $\frac{s_m - s_{m+1}}{s_m}$ corrispondenti a tutti i valori interi di m.

Ricavando dalla tavola di sopravvivenza i numeri s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, ... s_{n+i-1}, s_{n+i}, e calcolando, quando siasi scelto il saggio d'interesse, le potenze di $h = \frac{1}{1+t}$ (*), si ottiene mediante la formula precedente il valore numerico di $r_{n,n+i}$.

Se i numeri dei superstiti nelle diverse età formassero, con sufficiente approssimazione, pel periodo considerato fra l'età n e l'età $n+i$, una progressione aritmetica, ossia se, entro i limiti predetti, la curva di sopravvivenza divenisse approssimativamente rettilinea, si avrebbe

$$s_n - s_{n+1} = s_{n+1} - s_{n+2} = s_{n+2} - s_{n+3} = \dots = s_{n+i-1} - s_{n+i}.$$

Ponendo

$$\delta = h\,\frac{s_n - s_{n+1}}{s_n} = h\,\frac{s_{n+1} - s_{n+2}}{s_n} = \dots\dots = h\,\frac{s_{n+i-1} - s_{n+i}}{s_n}$$

la formula [1] si trasforma nella seguente:

$$r_{n,n+i} = \delta\,(1 + 2h + 3h^2 + 4h^3 + \dots + i\,h^{i-1}).$$

L'espressione compresa tra parentesi nel secondo membro equivale alla somma delle espressioni seguenti:

$$
\begin{array}{rcc}
1 + h + h^2 + \dots\dots + h^{i-2} + h^{i-1} & \text{ossia} & \dfrac{1-h^i}{1-h} \\
h + h^2 + \dots\dots + h^{i-2} + h^{i-1} & » & \dfrac{h-h^i}{1-h} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & » & \dots\dots \\
h^{i-2} + h^{i-1} & » & \dfrac{h^{i-2}-h^i}{1-h} \\
h^{i-1} & » & \dfrac{h^{i-1}-h^i}{1-h}
\end{array}
$$

Quindi

$$1 + 2h + 3h^2 + 4h^3 + \dots + i\,h^{i-1} =$$
$$\frac{1 + h + h^2 + h^3 \dots + h^{i-1} - i\,h^i}{1-h} =$$
$$\frac{i\,h^{i+1} - (i+1)\,h^i + 1}{(1-h)^2} \ (^{**})$$

(*) Nel mio volume, citato precedentemente in nota, ho calcolato le potenze di $h = \frac{1}{1+t}$ fino all'ottantacinquesima, per dieci valori differenti di t da 0,02 a 0,05.

(**) Si poteva giungere allo stesso risultato più brevemente giovandosi di alcune nozioni elementari sul calcolo delle derivate. Si ha infatti: