A PROPOSITO D'UNA GENERALIZZAZIONE

DELLA FUNZIONE φ DI *GAUSS*

In una recente nota (*) il signor L. Carlini si è proposto di calcolare quanti gruppi di p numeri, uguali o disuguali e non superiori ad n, ammettono un massimo comun divisore primo con n, ed ha dimostrato che, se $\varphi_p(n)$ è il numero di tali gruppi, si ha

$$\varphi_p(a) + \varphi_p(b) + \varphi_p(c) + \ldots = n^p \qquad [1]$$

supponendo che $a, b, c, \ldots$ siano tutti i divisori di n. Questa relazione determina completamente la funzione incognita φ. Si sa infatti che la funzione f soddisfacente, per tutti i valori di n, alla condizione

$$f(a) + f(b) + f(c) + \ldots = F(n) \qquad [2]$$

è in modo unico determinata dall'eguaglianza

$$f(n) = \mu(a) F\left(\frac{n}{a}\right) + \mu(b) F\left(\frac{n}{b}\right) + \mu(c) F\left(\frac{n}{c}\right) + \ldots, \qquad [3]$$

nella quale $\mu(n)$ rappresenta una funzione generalmente nulla, ma uguale a $(-1)^k$ quando n è il prodotto di k fattori primi, disuguali. Si ha dunque

$$\frac{\varphi_p(n)}{n^p} = \frac{\mu(a)}{a^p} + \frac{\mu(b)}{b^p} + \frac{\mu(c)}{c^p} + \ldots, \qquad [4]$$

cioè, chiamando $u, v, w, \ldots$ i fattori primi di n,

$$\varphi_p(n) = n^p \left(1 - \frac{1}{u^p}\right)\left(1 - \frac{1}{v^p}\right)\left(1 - \frac{1}{w^p}\right)\ldots,$$

come ha dimostrato direttamente il signor Carlini.

Ogni funzione φ_p si può esprimere mediante le analoghe funzioni corredate di minori indici. Si osservi infatti che, se si ha un'altra

(*) *V.* pag. 119 dell'anno VI.

relazione [2], in cui al posto delle funzioni f ed F intervengano altre funzioni g e G, è identicamente

$$\sum f(a)\, G\left(\frac{n}{a}\right) = \sum g(a)\, F\left(\frac{n}{a}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad [5]$$

Ora, poichè le relazioni [1] e [4] hanno entrambe la forma [2], possiamo scrivere, ponendo mente alla stessa [4],

$$\varphi_{p+q}(n) = \sum a^q \varphi_p(a)\, \varphi_q\left(\frac{n}{a}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad [6]$$

Ne segue che la funzione $\varphi_p(n)$ si può esprimere mediante una qualunque delle somme

$$\sum a\, \varphi_{p-1}(a)\, \varphi_1\left(\frac{n}{a}\right),\ \sum a^2 \varphi_{p-2}(a)\, \varphi_2\left(\frac{n}{a}\right),\ \ldots,\ \sum a^{p-1} \varphi_1(a)\, \varphi_{p-1}\left(\frac{n}{a}\right),$$

estese a tutti i divisori di n.

Molte altre relazioni analoghe si deducono in modo assai facile dalla [5]. Così, rappresentando con $\theta_p(n)$ la somma delle p^{esime} potenze dei divisori di n, si ottiene, adoperando l'identità [1],

$$\sum \varphi_p(a)\, \theta_{p+q}\left(\frac{n}{a}\right) = n^p\, \theta_q(n);$$

poi da questa, osservando che si ha identicamente

$$n^p\, \theta_{-p}(n) = \theta_p(n),$$

si deduce anche

$$\sum a^q \varphi_p(a)\, \theta_q\left(\frac{n}{a}\right) = \theta_{p+q}(n).$$

Adoperando invece la [4] si trova che la funzione

$$f_p(n) = a^p f(a)\, \varphi_p\left(\frac{n}{a}\right) + b^p f(b)\, \varphi_p\left(\frac{n}{b}\right) + c^p f(c)\, \varphi_p\left(\frac{n}{c}\right) + \ldots.$$

soddisfa all' identità

$$f_p(a) + f_p(b) + f_p(c) + \ldots. = n^p F(n).$$

Basta supporre $F(n) = n^q$ per ritrovare la relazione [6].

Ancora si osservi che dalla [4] si deduce immediatamente l'espressione assintotica della funzione φ_p, constatando che la serie

$$\frac{\mu(1)}{1^{p+1}} + \frac{\mu(2)}{2^{p+1}} + \frac{\mu(3)}{3^{p+1}} + \ldots.$$

converge assolutamente. Ciò basta (*) infatti per asserire che la sua somma rappresenta il *valor medio* della funzione $n^{-p}\varphi_p(n)$, e per scrivere assintoticamente

$$\varphi_p(n) = \frac{n^p}{1+\frac{1}{2^{p+1}}+\frac{1}{3^{p+1}}+\dots}.$$

In particolare si ottiene $\frac{6n}{\pi^2}$ come espressione assintotica della *funzione di Gauss*.

Quando l'indice è negativo la funzione φ_p perde il significato attribuitole dal signor Carlini, ma si può ridurla a funzioni che hanno quel significato osservando che

$$\varphi_{-p}(n) = \pm\left(\frac{uvw\dots}{n^2}\right)^p \varphi_p(n).$$

La funzione $n^p\varphi_{-p}$ si presenta in una interessante questione di Aritmetica. Se la rappresentiamo con ζ_{p+1}, se cioè poniamo

$$\zeta_p(n) = (1-u^{p-1})(1-v^{p-1})(1-w^{p-1})\dots,$$

la somma delle p^{esime} potenze dei numeri primi con n, e non superiori ad n, è data (**) dalla formola simbolica

$$\sigma_p(n) = \frac{(n+B\zeta)^{p+1}-(B\zeta)^{p+1}}{p+1} \quad \dots\dots\dots \quad [7]$$

in cui le B rappresentano i *numeri di Bernoulli*. Inversamente è facile riconoscere che le funzioni φ si esprimono in modo assai semplice mediante le somme σ. Si ottiene infatti, invertendo l'ultima eguaglianza,

$$n\,B_p\,\zeta_p(n) = (\sigma - n\,B)^p. \quad \dots\dots\dots \quad [8]$$

In altri termini, se $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ son tutti i numeri primi con n e non superiori ad n, la somma

$$(\alpha - nB)^p + (\beta - nB)^p + (\gamma - nB)^p + \dots$$

è nulla se p è dispari, ed è proporzionale ad $n\zeta_p$ se p è pari. Ciò per-

(*) *Comptes-rendus*, 1888, p. 1651.
(**) *Giornale di Crelle*, t. XL, p. 89.

mette di calcolar subito ogni σ con indice dispari quando si conoscano le precedenti σ con indice pari. Si ottiene

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} n \sigma_0$$

$$\sigma_3 = \frac{3}{2} n \sigma_2 - \frac{1}{4} n^3 \sigma_0$$

$$\sigma_5 = \frac{5}{2} n \sigma_4 - \frac{5}{2} n^3 \sigma_2 + \frac{1}{2} n^5 \sigma_0$$

$$\sigma_7 = \frac{7}{2} n \sigma_6 - \frac{35}{4} n^3 \sigma_4 + \frac{21}{2} n^5 \sigma_2 - \frac{17}{8} n^7 \sigma_0$$

. . . .

come si riconosce anche sviluppando l'eguaglianza simbolica evidente

$$\sigma^p = (n - \sigma)^p$$

Si hanno inoltre, per esprimere nelle σ le funzioni ζ con indice pari, le formole

$$\zeta_0 = \frac{1}{n} \sigma_0$$

$$\zeta_2 = \frac{6}{n} \sigma_2 - 2 n \sigma_0$$

$$\zeta_4 = -\frac{30}{n} \sigma_4 - 60 n \sigma_2 - 14 n^3 \sigma_0$$

$$\zeta_6 = \frac{42}{n} \sigma_6 - 210 n \sigma_4 + 294 n^3 \sigma_2 - 62 n^5 \sigma_0$$

. . . .

Si può anche dire che, a prescindere da un fattore che dipende unicamente dal prodotto dei divisori primi di n, ognuna delle funzioni considerate dal signor Carlini è esprimibile, se l'indice è dispari, come somma dei valori che assume un polinomio bernoulliano quando la variabile percorre la serie delle frazioni proprie irriducibili, di denominatore n.

È facile risalire dalle relazioni [7] ed [8] ad una formola molto più generale. Immaginiamo che le frazioni

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots\ldots, \frac{n}{n}$$

si riducano al minimo denominatore. Per uno stesso denominatore a

(che necessariamente divide n) il numeratore prende tutti i valori primi con a e non superiori ad a. Ne segue che, se si pone

$$f(n) = \psi\left(\frac{\alpha}{n}\right) + \psi\left(\frac{\beta}{n}\right) + \psi\left(\frac{\gamma}{n}\right) + \ldots.$$

e

$$F(n) = \psi\left(\frac{1}{n}\right) + \psi\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots\ldots + \psi\left(\frac{n}{n}\right),$$

tra le funzioni così definite sussiste il vincolo [2]. Se, per esempio, si prende $\psi(x) = x^p$, si ha

$$f(n) = \frac{\sigma_p(n)}{n^p}, \qquad F(n) = \frac{1^p + 2^p + \ldots. + n^p}{n^p};$$

quindi si ottiene, sostituendo in [3], la *formola di Liouville* (*)

$$\sum a^p \sigma_p\left(\frac{n}{a}\right) = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots. + n^p,$$

che per inversione dà

$$\sigma_p(n) = \sum\left[1^p + 2^p + \ldots\ldots + \left(\frac{n}{a}\right)^p\right] a^p \mu(a).$$

È poi facile trasformare quest'ultima formola nella [7]. Supponendo invece $\psi(x) = (x - B)^p$ si ottiene

$$f(n) = \frac{(\sigma - nB)^p}{n^p}, \qquad F(n) = \frac{B_p}{n^{p-1}},$$

in virtù di note proprietà dei polinomii bernoulliani; poi, adoperando la [3], si ricade sulla [8]:

$$(\sigma - nB)^p = nB_p \sum a^{p-1} \mu(a) = nB_p \zeta_p(n).$$

Del resto si passa agevolmente dalla [8] alla [7], osservando prima che i numeri A definiti dall'eguaglianza simbolica

$$(A - B)^p = 0$$

sono

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{1}{3}, \quad A_3 = \frac{1}{4}, \quad \ldots\ldots$$

(*) *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. XLIV.

e scrivendo poi

$$\sigma_p = (\sigma - nB + nA)^p = n \sum_{i=0}^{i=p} \frac{p(p-1)\dots(p-i+1)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \dots i} B_{p-i} \zeta_{p-i} \frac{n^i}{i+1}$$

$$= \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{i=p} \frac{(p+1)p\dots(p-i+1)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \dots (i+1)} B_{p-i} \zeta_{p-i} n^{i+1} = \frac{(n+B\zeta)^{p+1} - (B\zeta)^{p+1}}{p+1}.$$

Ancora si faccia $\psi(x) = x^{-p}$. Si ottiene, per rappresentare la funzione φ_p, l'eguaglianza

$$\varphi_p(n) = n^p \frac{\frac{1}{\alpha^p} + \frac{1}{\beta^p} + \frac{1}{\gamma^p} + \dots\dots + \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{(n+B\zeta)^{p-1}}}{1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots\dots} \, . \quad [9]$$

Per esempio si ha, in serie semi-convergente,

$$\varphi_2(n) = \frac{6}{\pi^2} \left[n^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \dots \right) + \varphi(n) + \frac{\zeta_2}{6n} - \frac{\zeta_4}{30 n^3} + \frac{\zeta_6}{42 n^5} - \dots\dots \right].$$

La formola [9] cade in fallo quando $p = 1$. Allora bisogna sostituirle quest'altra notevole relazione simbolica

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \dots\dots = \log(n + B\zeta) + \left(\sum \frac{\log u}{u-1} + 0{,}577215664\dots \right) \frac{\varphi(n)}{n},$$

intendendo estesa a tutti i divisori primi di n la somma che comparisce nel secondo membro. Finalmente, se si fa $\psi(x) = \log x$, si ottiene, rappresentando con ε un numero inferiore all'unità in valore assoluto,

$$\alpha \beta \gamma \dots = \left(\frac{n}{e} \right)^{\varphi(n)} . \, e^{\frac{1}{24 n}[(1-u)(1-v)\dots + \varepsilon(1+u)(1+v)\dots]}$$

purchè n non sia potenza di qualche numero primo u: in questo caso bisogna ancora moltiplicare per $\sqrt{u}$ il secondo membro. L' ultima relazione è, per così dire, la *formola di Stirling* dell'Aritmetica.

E. Cesàro.

DELL'ANALISI INDETERMINATA DI SECONDO GRADO

(Continuazione, V. pag. 169). (*)

8. *Metodo per la ricerca di una soluzione intera dell'equazione di* Pell *e, più generalmente, di qualsiasi soluzione dell' equazione* $x^2 - Dy^2 = N$.

Si indichi con m la radice di D a meno di un'unità in difetto e con n il resto dell'estrazione di tale radice. Si avrà: $D = m^2 + n$, e inoltre: $2m + 1 - n > 0$. Sia pertanto (x_1, y_1) una qualunque soluzione intera e positiva dell'equazione proposta.

Supponendo $x_1 > (m+1)\,y_1$, si trova facilmente che

$$y_1 < \sqrt{\frac{N}{2m+1-n}}.$$

Se invece $x_1 \leq (m+1)\,y_1$, si ponga: $x_1 = (m+1)\,y_1 - h$, intendendo per h un intero, positivo o nullo. La y_1 e la h soddisferanno la condizione

$$(2m+1-n)\,y_1^2 - 2h\,(m+1)\,y_1 + h^2 - N = 0,$$

la quale, risoluta per rispetto alla y_1, darà:

$$y_1 = \frac{h\,(m+1) \pm \sqrt{Dh^2 + N\,(2m+1-n)}}{2m+1-n}.$$

Essendo il primo membro di questa formola un numero intero, lo sarà anche il secondo: epperò la quantità sotto radice dovrà essere un quadrato intero k^2. Si avrà dunque:

$$y_1 = \frac{h\,(m+1) \pm k}{2m+1-n};$$

e quanto ai numeri k ed h, essi saranno i valori della x e della y in una soluzione dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N\,(2m+1-n).$$

(*) Per intendere questo articolo non è necessario conoscere il precedente, del quale è continuazione.

Qui si deve notare che il segno negativo davanti alla k della penultima formola è inaccettabile. Infatti da essa e dalla $x_1 = (m+1)\,y_1 - h$ si ricava:

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \frac{m+1+\sqrt{D}}{2m+1-n}\left(\pm k + h\sqrt{D}\right).$$

Se si desse alla k il segno negativo, il secondo membro di questa eguaglianza sarebbe negativo, perchè $k > h\sqrt{D}$, per virtù della

$$k^2 - D h^2 = N(2m+1-n).$$

L'eguaglianza adunque sarebbe impossibile, perchè il suo primo membro è positivo. Rimane così stabilito che, *se* y_1 *non è minore della radice del secondo membro dell'equazione proposta, diviso per* $2m+1-n$, *deve aversi:*

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \frac{m+1+\sqrt{D}}{2m+1-n}\left(k + h\sqrt{D}\right),$$

denotando (k, h) *una soluzione di quell'equazione che si ottiene dalla proposta moltiplicandone il secondo membro per* $2m+1-n$.

Applicando questo principio alla soluzione (k, h) dell'equazione

$$x^2 - D y^2 = N(2m+1-n),$$

si avrà, qualora h non sia minore di $\sqrt{N}$,

$$k + h\sqrt{D} = \frac{m+1+\sqrt{D}}{2m+1-n}\left(k' + h'\sqrt{D}\right),$$

indicando con (k', h') una certa soluzione dell'equazione

$$x^2 - D y^2 = N(2m+1-n)^2.$$

Conseguentemente:

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \left(\frac{m+1+\sqrt{D}}{2m+1-n}\right)^2 \left(k' + h'\sqrt{D}\right).$$

Di nuovo: se h' non sarà minore di $\sqrt{N(2m+1-n)}$, si avrà:

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \left(\frac{m+1+\sqrt{D}}{2m+1-n}\right)^3 \left(k'' + h''\sqrt{D}\right),$$

indicando con (k'', h'') una certa soluzione dell'equazione

$$x^2 - D y^2 = N(2m+1-n)^3.$$

E via così. - Continuando, si deve finalmente arrivare ad un'eguaglianza

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \left(\frac{m+1+\sqrt{D}}{2m+1-n}\right)^\lambda (x' + y' \sqrt{D}) = \frac{x' + y' \sqrt{D}}{(m+1-\sqrt{D})^\lambda},$$

nella quale y' denoterà un certo valore di y che, mentre apparterrà ad una certa soluzione dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N(2m+1-n)^\lambda,$$

sarà superato dalla radice del secondo membro dell'equazione medesima, diviso per $2m+1-n$ (*). Se non fosse così, si avrebbe, per θ intero positivo, grande a piacimento:

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \frac{k^{(\theta-1)} + h^{(\theta-1)} \sqrt{D}}{(m+1-\sqrt{D})^\theta}.$$

Ciò è impossibile, perchè, essendo $m+1-\sqrt{D}$ minore dell'unità, il secondo membro crescerebbe indefinitamente al crescere di θ, mentre il primo è costante.

Si consideri adunque il sistema

$$\begin{array}{l} x^2 - Dy^2 = N \\ x^2 - Dy^2 = N(2m+1-n) \\ x^2 - Dy^2 = N(2m+1-n)^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \qquad [A]$$

e tra le soluzioni delle varie equazioni ond'esso si compone, si chiamino *singolari* quelle nelle quali il valor d'y è minore della radice del secondo membro della relativa equazione, diviso per $2m+1-n$. Segue dalle cose dette che ogni soluzione (x_1, y_1) dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$ si può derivare da una soluzione singolare (x', y'). Appartenendo questa alla $(\lambda+1)^a$ equazione del precedente sistema, se ne deriverà la (x_1, y_1) moltiplicando il binomio $x' + y'\sqrt{D}$ per il fattore

$$\frac{m+1+\sqrt{D}}{2m+1-n} \qquad [9]$$

(*) Supponendo $D = a^2 - 1$ e conseguentemente $m = a - 1$, $2m+1-n = 1$, si ritrova tutto ciò che fu detto nel n. 1 in proposito dell'equazione $x^2 - (a^2-1)y^2 = N$.

λ volte, ed eguagliando x_1 alla parte razionale ed y_1 al coefficiente di $\sqrt{D}$ dell'ultimo prodotto.

Di qui un metodo per la ricerca delle soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$. Si troveranno per tentativi le soluzioni singolari delle successive equazioni del sistema scritto di sopra. Se una soluzione singolare (x', y') sarà stata ottenuta dopo aver fatto λ passaggi da un'equazione del sistema alla seguente, e se il binomio $x' + y' \sqrt{D}$ moltiplicato per il fattore [9] λ volte di seguito darà nascita a λ binomi nei quali la parte razionale e il coefficiente di $\sqrt{D}$ siano numeri interi, la parte razionale e il coefficiente di $\sqrt{D}$ relativi all'ultimo prodotto saranno i valori della x e della y in una soluzione dell'equazione proposta.

9. *Discussione del metodo.* — Ci riferiremo più specialmente al caso in cui $\sqrt{D}$ sia più vicina al suo valore a meno di un'unità in eccesso che non a quello in difetto, supponendo

$$m + 1 - \sqrt{D} < \sqrt{D} - m.$$

Perchè, se si verificasse il contrario, sarebbe più vantaggioso un procedimento diverso dall'indicato, come si vedrà in appresso. Dalla condizione precedente si ricava:

$$m + 1 - \sqrt{D} < \frac{1}{2},$$

mentre generalmente si ha soltanto:

$$m + 1 - \sqrt{D} < 1.$$

Si supponga che la soluzione (x_1, y_1) dell'equazione proposta si derivi dalla soluzione singolare (x', y') e che questa sia stata trovata dopo λ passaggi da un'equazione del sistema $[A]$ alla susseguente, così che si abbia:

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \frac{x' + y' \sqrt{D}}{(m + 1 - \sqrt{D})^\lambda}.$$

Si avrà ancora, per essere la (x', y') una soluzione singolare, $x' > (m + 1) y'$. Conseguentemente:

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} > \frac{y' (m + 1 + \sqrt{D})}{(m + 1 - \sqrt{D})^\lambda}.$$

Ora poi si osservi che, quando per la ricerca della (x_1, y_1) occorre passare dall'equazione proposta alle susseguenti del sistema [A], come supporremo, la soluzione (x_1, y_1) non è singolare per l'equazione proposta, e ciò vuol dire che $x_1 \leq (m+1) y_1$. Combinando questa disuguaglianza con la precedente, si ottiene:

$$y_1 > \frac{y'}{(m+1-\sqrt{D})^\lambda}.$$

Essendo $m+1-\sqrt{D}$ quantità minore dell'unità, anzi, nel caso più specialmente considerato minore di $\frac{1}{2}$, e inoltre tanto più piccola quanto $\sqrt{D}$ è più vicina al suo valore a meno di un'unità in eccesso, si conclude che, *se per trovare y' occorrono λ passaggi, essa è minore della $(2^\lambda)^a$ parte dell'incognita y_1 che se ne deriva, e tanto più considerabilmente quanto più $m+1-\sqrt{D}$ si discosta dal suo limite superiore $\frac{1}{2}$*. Pertanto, qualora y_1 non sia straordinariamente grande, basteranno pochi passaggi perchè y' sia superata dal limite fissato per la y delle soluzioni singolari di taluna delle equazioni del sistema [A], e divenga perciò nota (*).

Esaminiamo ora l'entità dei tentativi da premettersi ai singoli passaggi da equazione ad equazione del sistema [A]. Il limite superiore fissato per la y delle soluzioni singolari relative all'equazione che occorre considerare dopo λ passaggi, è

$$\sqrt{N(2m+1-n)^{\lambda-1}}.$$

Ora, poichè

$$2m+1-n=(m+1)^2-D: \quad m+1<\frac{1}{2}+\sqrt{D},$$

e conseguentemente

$$2m+1-n<\left(\frac{1}{2}+\sqrt{D}\right)^2-D=\frac{1}{4}+\sqrt{D},$$

il suddetto limite è minore di

$$\sqrt{N\left(\frac{1}{4}+\sqrt{D}\right)^{\lambda-1}},$$

(*) La precedente conclusione riguardante la piccolezza di λ non si applica a quelle soluzioni la cui y' risultasse eguale a zero. Siffatte soluzioni, quando esistono, sono eccezionali: e non possono esistere se non quando N oppure $N(2m+1-n)$ sono quadrati perfetti, come dal sistema [A] chiaramente apparisce.

numero che, ritenute le precedenti conclusioni relative a λ, non è molto grande, se pure N e D non sono grandissimi.

Applichiamo il metodo alla ricerca di una soluzione dell'equazione $x^2 - 46\,y^2 = 1$. Per questa il sistema $[A]$ diviene:

$$\begin{array}{ll}
x^2 - 46\,y^2 = 1 & \qquad 0 \\
x^2 - 46\,y^2 = 3 & \qquad 0 \\
x^2 - 46\,y^2 = 9 & \qquad 1 \\
x^2 - 46\,y^2 = 27 & \qquad 2 \\
x^2 - 46\,y^2 = 81 & \qquad 5 \\
x^2 - 46\,y^2 = 243 & \qquad 8 \\
\cdots\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots\cdots &
\end{array}$$

A lato di ciascuna equazione è scritto il valor massimo per la y delle relative soluzioni singolari, che è l'intero prossimo inferiore alla radice quadrata del secondo membro diviso per 3. Trascurando la soluzione evidente (1, 0) della 1ª equazione, che è la proposta, e le soluzioni (3, 0), (9, 0) della 3ª e della 5ª, perchè non se ne derivano soluzioni intere per la 1ª, dopo pochi e facili tentativi si trova (17, 1), soluzione singolare della 6ª equazione. Questa soluzione fu ottenuta con 5 passaggi. Il relativo binomio $17 + \sqrt{46}$, moltiplicato 5 volte di seguito per

$$\frac{7 + \sqrt{46}}{3},$$

produce i binomi:

$$55 + 8\sqrt{46};\quad 251 + 37\sqrt{46};\quad 1153 + 170\sqrt{46};$$
$$5297 + 781\sqrt{46};\quad 24335 + 3588\sqrt{46}.$$

Si ottiene così per l'equazione proposta la soluzione (24335, 3588).

10. Dalla discussione generale risulta, e l'esempio precedente lo conferma, che il metodo in proposito fa dipendere la ricerca della desiderata soluzione da tentativi con numeri di gran lunga più piccoli dei numeri incogniti. Detti tentativi si possono alla lor volta facilitare. Dovendosi per esempio sperimentare sull'equazione $x^2 - D\,y^2 = F$

il valore $q+1$ della y, a fine di riconoscere se mai $D(q+1)^2+F$ risulti quadrato perfetto, si farà uso dell'identità

$$D(q+1)^2+F=(Dq^2+F)+D(2q+1).$$

Si otterrà pertanto il valore del primo membro, aggiungendo al numero Dq^2+F, già noto per il tentativo precedente, il prodotto $D(2q+1)$. Ma sarebbe un fuor d'opera l'intrattenere il lettore in particolari di questa natura. Mostreremo piuttosto che l'indicato metodo dà tutte le soluzioni dell'equazione proposta senza ripetizione alcuna: che anzi le soluzioni che a mano a mano ci sono fornite, risultano ordinate per ragion di grandezza, dalla minima in poi. Infatti dalla formola

$$x+y\sqrt{D}=\frac{x'+y'\sqrt{D}}{(m+1-\sqrt{D})^\lambda}$$

apparisce che, ferma restando λ, il binomio $x+y\sqrt{D}$, e con esso la soluzione (x, y), cresce al crescere della relativa soluzione singolare (x', y'). Le soluzioni derivate dalle soluzioni singolari di una medesima equazione del sistema $[A]$ si presenteranno adunque ordinate nel modo sopraddetto. Rimane da dimostrare che le soluzioni derivate dalle soluzioni singolari di qualsiasi equazione succedanea alla $(\lambda+1)^a$ sono maggiori di tutte quelle che si derivano dalle soluzioni di questa.

Siano (x', y'), (x'', y'') soluzioni singolari della $(\lambda+1)^a$ e della $(\lambda+1+p)^a$ equazione del sistema $[A]$, e supponiamo che se ne derivino le soluzioni (x_1, y_1), (x_2, y_2) dell'equazione proposta. Si avrà:

$$x_1+y_1\sqrt{D}=\frac{x'+y'\sqrt{D}}{(m+1-\sqrt{D})^\lambda}:\quad x_2+y_2\sqrt{D}=\frac{x''+y''\sqrt{D}}{(m+1-\sqrt{D})^{\lambda+p}}.$$

Bisogna dimostrare che, se $p>o$,

$$x_2+y_2\sqrt{D}>x_1+y_1\sqrt{D},$$

ossia che

$$x''+y''\sqrt{D}>(m+1-\sqrt{D})^p\,(x'+y'\sqrt{D}).$$

Avendosi

$$y'<\sqrt{N(2m+1-n)^{\lambda-1}}$$

e conseguentemente

$$x' < (m+1)\sqrt{N(2m+1-n)^{\lambda-1}}\,,$$

e ciò per essere (x', y') soluzione singolare dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N(2m+1-n)^{\lambda}\,,$$

basterà dimostrare che

$$x'' + y''\sqrt{D} > (m+1-\sqrt{D})^{p-1}\sqrt{N(2m+1-n)^{\lambda+1}}\,;$$

ossia che

$$N(2m+1-n)^{\lambda+p} > (m+1-\sqrt{D})^{p-1}\sqrt{N(2m+1-n)^{\lambda+1}}\,(x''-y''\sqrt{D})\,;$$

vale a dire:

$$x'' - y''\sqrt{D} < \frac{\sqrt{N(2m+1-n)^{\lambda+2p-1}}}{(m+1-\sqrt{D})^{p-1}}\,.$$

Pertanto, essendo

$$(x''+y''\sqrt{D})(x''-y''\sqrt{D}) = N(2m+1-n)^{\lambda+p}\,,$$

si ha

$$x'' - y''\sqrt{D} < \sqrt{N(2m+1-n)^{\lambda+p}}\,;$$

epperò ancora

$$x'' - y''\sqrt{D} < \frac{\sqrt{N(2m+1-n)^{\lambda+2p-1}}}{(m+1-\sqrt{D})^{p-1}}\,,$$

dacchè $p \geq 1$ e inoltre $m+1-\sqrt{D} < 1$.

11. Per il fatto che le soluzioni dell'equazione proposta ci sono fornite in ordine per ragion di grandezza, dalla minima in poi, il metodo in proposito è applicabile (e non è piccolo vantaggio) alla determinazione di tutte quelle soluzioni che sono inferiori a un certo limite Δ, fissato per la y (*). E invero, prima di por mano ai relativi calcoli, si può dire quanti passaggi da equazione ad equazione del sistema [A] sono al più necessari per ottenere le desiderate soluzioni, o per accertarne l'inesistenza.

(*) Per esempio delle soluzioni fondamentali: la cui ricerca, senza il sussidio di acconcio metodo, sarebbe spesso assai faticosa.

Ciò risulta dalla formola

$$y \geq \frac{y'}{(m+1-\sqrt{D})^{\lambda}} \cdot (^*)$$

Dato alla y' il valor minimo 1, si ottiene:

$$y \geq \frac{1}{(m+1-\sqrt{D})^{\lambda}}$$

e, dovendo essere $\Delta > y$,

$$\Delta > \frac{1}{(m+1-\sqrt{D})^{\lambda}} = \left(\frac{m+1-\sqrt{D}}{2m+1-n}\right)^{\lambda}.$$

Dunque

$$\lambda < \frac{\log \Delta}{\log(m+1+\sqrt{D}) - \log(2m+1-n)}.$$

12. *Osservazione.* — Chiamando δ il massimo comun divisore fra $m+1$ ed $n+1$ (eguale a quello fra $m+1$ e $2m+1-n$), sulle successive equazioni del sistema $[A]$ non occorrerà provare se non quei valori d' y che rendono $(2m+1-n)\,y^2$ divisibile per δ^2, meno che si tratti della 1^a e della 2^a equazione, per le quali tale semplificazione non sarebbe giustificata. Si tratti per esempio della 3^a equazione. Dettane (r, s) una soluzione singolare, la quale metta capo ad una soluzione dell'equazione proposta, dovrà aversi:

$$\left(\frac{m+1+\sqrt{D}}{2m+1-n}\right)(r+s\sqrt{D}) = r'+s'\sqrt{D},$$

essendo r' ed s' numeri interi. Perciò

$$s' = \frac{r+(m+1)s}{2m+1-n}.$$

Affinchè il secondo membro possa risultare intero, come lo è il primo, occorre che r sia divisibile per δ. Ma poichè

$$r^2 - [(m+1)^2 - (2m+1-n)]\,s^2 = N\,(2m+1-n)^2,$$

δ^2 dovrà dividere $(2m+1-n)\,s^2$, che è quanto bisognava dimostrare.

(*Continua*). G. Frattini.

(*) Il segno di eguaglianza si riferisce al caso in cui $\lambda = 0$.

LA DEFINIZIONE DI PROPORZIONE

ED IL V LIBRO DI EUCLIDE

1. Due sono i modi con cui si possono trattare le proporzioni nei corsi di geometria: quello che parte dalla definizione d'Euclide o da consimili, e quello che le studia come eguaglianze di rapporti, chiamando con questo ultimo nome dei numeri. Non voglio qui occuparmi di giudicare quale sia il migliore di essi; tale questione è ancora discutibile, avendo il primo metodo dalla sua parte la lunga tradizione, il valore educativo e l'indipendenza dal concetto di numero, l'altro la maggior facilità e chiarezza insieme alla rapidità dello svolgimento.

Indubitatamente la definizione di Euclide, così complicata nella forma, non è adatta a mettere in chiaro a menti inesperte l'essenza delle proporzioni, e conduce a dimostrazioni di teoremi che tutti sanno quanto sono penose. Ma se si osserva che la definizione euclidea non si restringe alle grandezze geometriche e vale invece per infinite altre classi di grandezze, si vede come per due vie si possa tentare di rendere più accessibile la teoria delle proporzioni che si fa in geometria, senza ricorrere al concetto di numero: quella di semplificare la definizione di Euclide conservandole la portata così generale, e l'altra di limitarsi a darla per le sole grandezze che studia la geometria.

Scopo principale della presente nota è di tentare la prima via; ma credo opportuno di dare prima un cenno anche del come si possa percorrere la seconda, già da altri in parte tracciata.

Proporzioni fra sole grandezze geometriche.

2. Il Prof. Raiola Pascarini in un suo lavoro (*) destinato appunto a scansare la definizione euclidea, mostra come si possa darne un'altra, limitandosi peraltro ai soli segmenti. In conclusione secondo il suo metodo può dirsi così:

Dati quattro segmenti *a, b, c, d si dirà* che essi *sono in propor-*

(*) *Studio sulla proporzionalità grafica e sue applicazioni alla similitudine e omotetia*, per il Dr. Luigi Raiola Pescarini, professore nel R. Liceo Ginnasio Principe Umberto. — Napoli, 1876.

zione, quando presi consecutivamente su un lato di un angolo MVN, ed a partire dal vertice V, due segmenti $VA = a$, $AB = b$ e sull altro lato in modo simile i due $VC = c$, $CD = d$, le congiungenti AC, BD siano parallele. Dopo che si sia dimostrato che la proprietà precedente è indipendente dall'angolo scelto, tale definizione è legittima: e, chiaramente, a causa del teorema di Talete, equivale per i segmenti a quella ordinaria.

3. Per proseguire per le altre grandezze utilizzando il concetto del Prof. Raiola, possiamo definire così:

Due archi di un medesimo circolo *si dirà* che *sono in proporzione coi due segmenti* che li rappresentano rettificati ossia che i *due archi stanno fra loro come questi segmenti.*

Due angoli *stanno fra loro come i due archi rettificati* compresi in essi appartenenti a cerchi coi centri nei loro vertici e coi raggi uguali: lo stesso dicasi per due diedri, avvertendo di prendere i circoli coi centri sull'asse ed in piani perpendicolari all'asse.

Si dirà poi che due striscie (o due strati) *stanno fra loro come le loro altezze.*

Due superficie piane di quelle che studia la geometria elementare (superficie di poligoni, di circoli e loro parti) si trasformeranno in due rettangoli d'uguale base (come insegna la teoria dell'equivalenza) e *si dirà che stanno fra loro come le altezze di queste:* due solidi si trasformeranno in due parallelepipedi d'uguale base e *si dirà* che *stanno fra loro come le altezze di questi.*

In tal modo, date due grandezze geometriche α, β omogenee, si trovano sempre due segmenti a, b per i quali si dice che stanno fra loro come esse, e si scrive:

$$\alpha : \beta = a : b.$$

Si dimostra che, trovate con due modi differenti due coppie di segmenti a, b, ed a', b' tali che

$$\alpha : \beta = a : b$$
$$\alpha : \beta = a' : b',$$

deve essere

$$a : b = a' : b'$$

nel senso già spiegato per i segmenti. Indi avendosi due coppie di grandezze geometriche α, β, A, B, omogenee due a due, ma non necessariamente tutte e quattro, e non tutte segmenti, se essendo (colle definizioni date)

$$\alpha : \beta = a : b$$
$$A : B = a' : b',$$

dove a, b, a', b' sono segmenti, si verificasse che

$$a : b = a' : b',$$

si dirà (con nuova definizione) che α e β *stanno fra loro come* A e B, e si scriverà

$$\alpha : \beta = A : B.$$

In questo modo vengono definite le proporzioni fra coppie di grandezze geometriche, omogenee o no, di qualunque specie, e si possono con metodi puramente geometrici e differenti da una specie di grandezze all'altra (perchè differenti sono le definizioni), dimostrare le loro proprietà.

4. Non si può negare che questo metodo, pregevole perchè puramente ed esclusivamente geometrico, oltre il difetto di esigere dimostrazioni disparate secondo le varie specie di grandezze, ha quello non trascurabile di non mostrare sin da principio il concetto che informa le diverse definizioni delle proporzioni, concetto che è unico e non per la sola geometria, giacchè si estende anche ad altri campi.

Per questo stimo opportuno, invece che sviluppare quel metodo, tentare una definizione di proporzione generale per tutte le grandezze simili alle geometriche; e di ciò mi occuperò nei seguenti paragrafi (*).

(*) Anche il Ch. Prof. Biffignandi in un suo opuscolo: (*Biffignandi* - Le principali proprietà delle grandezze proporzionali novamente esposte - Acireale 1891) comparso dopochè il presente scritto era già stato consegnato per la stampa, tenta un nuovo modo di trattare le proporzioni. Egli parte dalla definizione d'Euclide, mostra che, per i segmenti, il fatto da essa espresso coincide con quello preso come definizione dal Prof. Raiola, e ricava da questo le proprietà delle proporzioni: la sua trattazione per i segmenti viene quindi ad informarsi alle stesse idee di quella del Prof. Raiola. Soltanto, il Prof. Biffignandi giudica la sua teoria valida senz'altro per tutte le grandezze, a causa unicamente dell'osservazione che fa in principio, e che è così concepita: « Ammetteremo, « in quanto segue, che una grandezza sia rappresentata da un segmento rettilineo che colla sua « lunghezza indichi la *quantità* di quella ». Ora, o io m'inganno, o questa osservazione, che non può esprimere un'assioma, nasconde una teoria completa, che dovrebbe essere svolta, quella della corrispondenza fra grandezze e segmenti: teoria non semplice e di difficoltà pari a quella delle proporzioni fra grandezze non omogenee della misura. In modo simile a quello tenuto dall'autore potrebbesi dire che ogni grandezza è rappresentata da un numero che ne indica la quantità, e interpretare per i numeri la definizione euclidea di proporzione, e svolgere la teoria aritmetica delle proporzioni fra i numeri, giudicando ciò sufficiente ad una trattazione generale delle proporzioni; ma come ciò non è esatto se prima non si stabilisce la teoria della misura, così non appare rigoroso il metodo accennato senza una teoria della *rettificazione delle grandezze*.

Corrispondenze metriche.

5. Si suol dare nei trattati di geometria il seguente teorema: « Se due serie di grandezze sono in corrispondenza univoca in modo « che a grandezze uguali di una corrispondano grandezze uguali del- « l'altra, ed alla somma di due grandezze della prima la somma delle « corrispondenti della seconda, allora due grandezze qualunque della « prima serie, e le due corrispondenti dell'altra, sono in proporzione « (con la definizione d'Euclide) e viceversa ». Tale teorema suggerisce di prendere come definizione della proporzione quella proprietà che è assunta come ipotesi nell'enunciato, premettendo quindi lo studio delle grandezze proporzionali a quello delle proporzioni vere e proprie fra quattro grandezze sole; ed è appunto questa via che io mi propongo di tracciare.

6. Parlando di classi di grandezze, in quello che segue intenderò alludere a tutte le classi lineari (costituite come quelle geometriche), le quali sono continue (*). Per esse quindi, fra le altre, valgono le proprietà espresse dai postulati d'Archimede (**) e di Dedekind (***), e le altre che di ogni loro grandezza esiste la sottomultipla secondo un numero qualunque e che per ogni grandezza presa nella classe ve n'è in questa una minore, oltre alla grandezza nulla, se esiste: in queste classi la somma gode le proprietà ordinarie della somma nelle grandezze geometriche. Col segno $=$ indicherò la parola *equivalenti*, e così potrò riferirmi anche alle classi geometriche delle superficie e dei solidi; in certe classi, per es. quelle delle grandezze geometriche elementari, questo nome si potrà sostituire con l'altro *uguali*.

Per semplicità supporrò di non considerare la grandezza nulla in nessuna classe.

7. Date due grandezze C e D, rispettivamente omogenee alle due A e B, per brevità di linguaggio si dirà che C e D sono *simili* rispetto ad A e B, quando avvenga che M ed N sieno:

1° o equimultiple di A e B,

(*) Cfr. la mia « Teoria delle grandezze » § 48.

(**) cioè che, prese in esse due grandezze qualunque A e B, fra le multiple di A ve ne sono di quelle maggiori di B.

(***) cioè che due coppie di variabili convergenti hanno sempre un limite.

2° o equisummultiple di A e B,

3° o equimultiple di equisummultiple di A e B,

4° o limiti di variabili convergenti formate con equimultiple di equisummultiple di A e B, casi che si indicheranno rispettivamente così:

$$1° \quad C = mA, \qquad D = mB,$$

$$2° \quad C = \frac{1}{n} A = \frac{A}{n}, \qquad D = \frac{1}{n} B = \frac{B}{n},$$

$$3° \quad C = \frac{m}{n} A, \qquad D = \frac{m}{n} B,$$

$$4° \quad C = \lim \frac{m}{n} A, \qquad D = \lim \frac{m}{n} B,$$

dove m ed n indicano numeri interi indeterminati.

Si dimostra facilmente che le grandezze simili rispetto a tutte le grandezze di una classe sono di nuovo tutte le grandezze della classe stessa.

8. Ricordando che nelle nostre classi se, date due coppie di variabili convergenti, si fa la somma delle grandezze corrispondenti, si ha una nuova coppia di variabili convergenti, il cui limite è la somma dei limiti delle variabili date (tale proprietà se non è teorema è definizione) si vede che, se due grandezze C e D sono simili rispetto ad altre due A e B:

1° se $A \gtreqless B$ sarà rispettivamente $C \gtreqless D$,

2° la somma $C + D$ è essa pure, considerata rispetto ad $A + B$, simile a C e D considerate rispetto ad A e B.

9. Diremo che due classi di grandezze non necessariamente omogenee sono in *corrispondenza metrica* quando si corrispondono univocamente, in modo che se A_1, A_2 sono due grandezze qualunque equivalenti della 1ª classe siano pure equivalenti le corrispondenti B_1, B_2 della 2ª, ed alla somma $A_1 + A_2$ corrisponda quella $B_1 + B_2$ delle grandezze corrispondenti, qualunque siano A_1 e A_2 (*).

Corrispondenze di tal genere sono note nelle classi geometriche: se n'ha un esempio ponendo una classe in corrispondenza con sè stessa

(*) È chiaro che una corrispondenza fra due classi omogenee, non è che una corrispondenza delle grandezze di una classe colle stesse o con altre della classe medesima.

in modo che ad ogni sua grandezza corrisponda la grandezza stessa, la quale ultima corrispondenza metrica si chiama *identità.*

10. Dalla definizione precedente si vede con facilità che in due classi poste in corrispondenza metrica, se A_1, A_2 sono due grandezze della 1ª, e B_1, B_2 le corrispondenti dell'altra, secondochè $A_1 \gtreqless A_2$ sarà anche $B_1 \gtreqless B_2$; ed A_2, B_2 saranno simili rispetto ad A_1, B_1. In particolare, se ad A corrisponde B, ad $\frac{m}{n} A$, a $\lim \frac{m}{n} A$ corrispondono rispettivamente $\frac{m}{n} B$, $\lim \frac{m}{n} B$: e se due variabili convergenti della 1ª classe hanno un limite M, le grandezze corrispondenti della 2ª formano pure due variabili convergenti il cui limite è la grandezza corrispondente ad M. Così si vede facilmente che, quando $A_1 > A_2$, ad $A_1 - A_2$ corrisponde $B_1 - B_2$.

Prese ora due grandezze uguali nella 2ª classe, B_1 e B_2, se le corrispondenti A_1 ed A_2 della 1ª non fossero uguali, sarebbe per es.: $A_1 > A_2$ e quindi $B_1 > B_2$ contro l'ipotesi. Così a $B_1 + B_2$ corrisponde $A_1 + A_2$: altrimenti se vi corrispondesse una grandezza non equivalente $A' \gtrless A_1 + A_2$, poichè per definizione ad $A_1 + A_2$ corrisponde $B_1 + B_2$, a questa grandezza corrisponderebbero nella 1ª classe due grandezze non equivalenti A' e $A_1 + A_2$, contro quanto ora si è detto. Si conclude che la 2ª classe rispetto alla 1ª gode le stesse proprietà che la 1ª rispetto alla 2ª.

11. È facile vedere come, date due classi qualunque α, β di grandezze (in particolare data due volte la stessa classe) sia possibile stabilire fra esse una corrispondenza metrica, dando ad arbitrio una coppia di grandezze che debbono essere corrispondenti.

Se infatti A e B sono due grandezze rispettivamente delle due classi, alla grandezza A si faccia corrispondere B, ed alle grandezze mA, $\frac{A}{n}$, $\frac{m}{n} A$, dove m ed n sono numeri qualunque interi, rispettivamente le altre mB, $\frac{B}{n}$, $\frac{m}{n} B$ cogli stessi numeri. Le grandezze della classe α che così non si sono ancora considerate, sono ciascuna, com'è facile a vedere (*), limite di serie convergenti formate da grandezze già considerate: esse si faranno corrispondere ai limiti

(*) Per brevità tralascio alcune facili dimostrazioni, che il lettore ritroverà agevolmente da sè.

delle serie convergenti di β corrispondenti a quelle ora dette di α. La corrispondenza attuale è metrica. Infatti se due grandezze A_1, A_2 di α sono equivalenti, sia che abbiano la forma $\frac{m}{n} A$ o che siano limiti di serie convergenti, chiaramente per il modo con cui sono ottenute sono equivalenti anche le loro corrispondenti: e ad $A_1 + A_2$ corrisponde una grandezza che (pensando alla definizione di somma di grandezze anche quando queste sono limiti di serie convergenti) si vede essere $B_1 + B_2$. Queste due proprietà sono quelle che caratterizzano le classi in corrispondenza metrica.

È chiaro inoltre che se A deve corrispondere a B la corrispondenza non può stabilirsi che in questo modo.

La corrispondenza metrica di due classi è quindi individuata da quella di due loro grandezze A, B: e per indicarla ci si potrà servire del simbolo $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. Usando di questa notazione, se vorremo indicare che in due classi in corrispondenza metrica α, β alle grandezze A_1, A_2, A_3, ecc. di α corrispondono quelle B_1, B_2, B_3, ecc. di β si scriverà:

$$\begin{pmatrix} A_1, & A_2, & A_3, & \ldots\ldots \\ B_1, & B_2, & B_3, & \ldots\ldots \end{pmatrix}.$$

Potremo quindi, per quanto si è detto, scrivere:

$$\begin{pmatrix} A, & mA, & \frac{A}{n}, & \frac{m}{n} A, & \ldots\ldots \\ B, & mB, & \frac{B}{n}, & \frac{m}{n} B, & \ldots\ldots \end{pmatrix}.$$

12 Si ha come corollario del teorema precedente, che, date due grandezze A e B di due classi α e β ed un'altra A_1 di α, è sempre possibile trovare la grandezza B_1 di β che corrisponderebbe a B se α e β fossero in corrispondenza metrica ed A corrispondesse ad A_1: e che la grandezza B_1 è unica, ossia tutte quelle che possono corrispondere così a B sono equivalenti fra loro ed a B_1.

13. È evidente che se due classi sono in corrispondenza metrica con una terza, sono in corrispondenza metrica fra loro quando si facciano corrispondere quelle grandezze di esse che corrispondono ad una stessa della terza classe.

Se dunque abbiamo:

$$\begin{pmatrix} A_1, & A_2, & A_3, & \dots \\ B_1, & B_2, & B_3, & \dots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1, & A_2, & A_3, & \dots \\ C_1, & C_2, & C_3, & \dots \end{pmatrix},$$

sarà:

$$\begin{pmatrix} B_1, & B_2, & B_3, & \dots \\ C_1, & C_2, & C_3, & \dots \end{pmatrix}.$$

14. Date due classi α, β in corrispondenza metrica, se a tutte le grandezze di α si sostituiscono altre grandezze simili rispetto ad esse, il cui insieme è di nuovo α (come si è accennato al § 7), la classe α in questo nuovo aspetto è ancora in corrispondenza metrica con β. Ed infatti, se A_1 ed A_2 sono due grandezze di α, B_1 e B_2 le corrispondenti di β nella 1ª corrispondenza, A'_1 ed A'_2 due grandezze di α simili rispetto ad A_1, A_2, sarà (§ 8) $A'_1 = A'_2$ se è $A_1 = A_2$, cioè se $B_1 = B_2$: e la grandezza corrispondente a $B_1 + B_2$, che nel 1° aspetto era $A_1 + A_2$, sarà quella che, rispetto ad $A_1 + A_2$, è simile ad A'_1 ed A'_2 rispetto ad A_1 ed A_2, la quale (§ 8) è $A'_1 + A'_2$. Ne viene che la corrispondenza $\begin{pmatrix} A'_1, & A'_2 \\ B_1, & B_2 \end{pmatrix}$ è metrica c. d. d.

Lo stesso può ripetersi per la classe β.

In particolare si ha che dalla corrispondenza metrica $\begin{pmatrix} A_1, & A_2 \\ B_1, & B_2 \end{pmatrix}$ discendono le altre

$$\begin{pmatrix} \frac{m}{n} A_1, & \frac{m}{n} A_2 \\ B_1, & B_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1, & A_2 \\ \frac{p}{q} B_1, & \frac{p}{q} B_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{m}{n} A_1, & \frac{m}{n} A_2 \\ \frac{p}{q} B_1, & \frac{p}{q} B_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lim \frac{m}{n} A_1, & \lim \frac{m}{n} A_2 \\ \frac{p}{q} B_1, & \frac{p}{q} B_2 \end{pmatrix} \text{ ecc.}$$

15. Date due coppie di grandezze omogenee A_1, A_2 e B_1, B_2 corrispondenti in una corrispondenza metrica di una classe con sè stessa, si potrà scrivere $\begin{pmatrix} A_1, & A_2 \\ B_1, & B_2 \end{pmatrix}$. Si avrà allora, nella stessa corrispondenza metrica, che sono corrispondenti le grandezze $p A_1$, $q A_2$

alle altre pB_1, qB_2, cioè che si ha $\begin{pmatrix} pA_1, & qA_2 \\ pB_1, & qB_2 \end{pmatrix}$ e che quindi sarà, per le proprietà della corrispondenza metrica (§ 10),

(1) $$pB_1 \gtreqless qB_2 \text{ secondochè } pA_1 \gtreqless qA_2 .$$

Presa ora la coppia A_1, B_1 si cerchi (§ 12) una grandezza B' la quale corrisponda ad A_2 nella corrispondenza metrica $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, cioè tale che sia $\begin{pmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B' \end{pmatrix}$. Per il teorema del § 14 si avrà pure $\begin{pmatrix} pA_1, & pB_1 \\ qA_2, & qB' \end{pmatrix}$ qualunque sieno p e q interi: quindi, poichè pA_1 e qA^2 sono simili rispetto a pB_1 e qB' a causa della corrispondenza metrica, il § 8 mostra che sarà

$$pB_1 \gtreqless qB' \text{ secondochè } pA_1 \gtreqless qA_2 ,$$

e che perciò, per questa relazione combinata con la (1), sarà contemporaneamente, qualunque sieno p e q interi,

$$pB_1 \gtreqless qB_2 \quad \text{e} \quad pB_1 \gtreqless qB'$$

ossia

$$B_2 \gtreqless \frac{p}{q} B_1 \quad \text{e} \quad B' \gtreqless \frac{p}{q} B_1 .$$

Ciò prova che $B_2 = B'$, giacchè o per convenienti p e q si ha insieme $B_2 = \frac{p}{q} B_1$ e $B' = \frac{p}{q} B_1$, o B_2 e B' sono limiti delle stesse serie convergenti formate con grandezze $\frac{p}{q} B_1$.

Si conclude che la corrispondenza $\begin{pmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B' \end{pmatrix}$ diviene $\begin{pmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{pmatrix}$, cioè:

« Se la coppia di grandezze A_1, A_2 corrisponde in una corri-
« spondenza metrica all'altra omogenea B_1, B_2, lo stesso avverrà
« delle altre coppie A_1, B_1 e A_2, B_2 ».

16. Il teorema precedente mostra che data la corrispondenza metrica

$$\begin{pmatrix} A_1, & A_2, & A_3, & A_4, & \ldots \\ B_1, & B_2, & B_3, & B_4, & \ldots \end{pmatrix}$$

fra classi omogenee, poichè discendono da esse le altre

$$\begin{pmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1, & B_1 \\ A_3, & B_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1, & B_1 \\ A_4, & B_4 \end{pmatrix} \text{ ecc.,}$$

per la proprietà di una corrispondenza metrica (§ 10) B_1 e B_2 sono simili rispetto ad A_1, A_2, e così B_1, B_3 e B_1, B_4 ecc. sono simili rispettivamente rispetto ad A_1, A_3 ed A_1, A_4 ecc., cioè, più brevemente, B_1, B_2, B_3, B_4 ecc. sono simili rispetto ad A_1, A_2, A_3, A_4 ecc. e quindi:

« Date due classi omogenee in corrispondenza metrica in cui « sieno corrispondenti le grandezze A e B, secondochè B è del tipo « mA, $\frac{A}{n}$, $\frac{m}{n}A$ o $\lim \frac{m}{n}A$, altrettanto potrà dirsi di ogni altra « grandezza della 2ª classe rispetto alla corrispondente della 1ª, « coi medesimi numeri m ed n ».

(*Continua*).

R. Bettazzi.

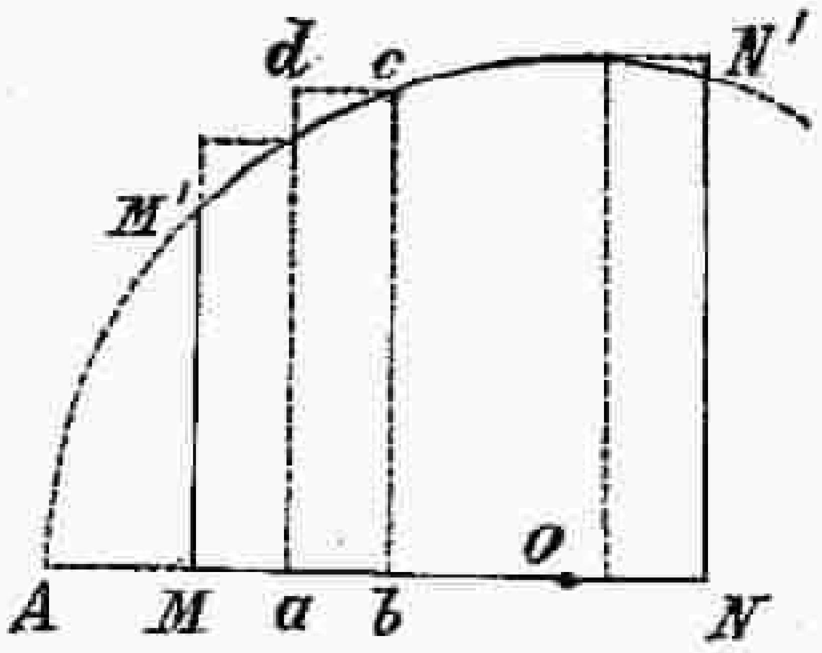
VOLUME DEL SEGMENTO SFERICO A DUE BASI

In una polemica recente che si legge nei fasc. 3, 4 e 5 della *Zeitschrift für math. u. naturwissenschaftlichen Unterricht*, dell'anno 1891, a proposito della determinazione del volume della sfera con applicazione del principio espresso dalla formola

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^m + 2^m + \ldots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1} \qquad [1]$$

nel caso di m intero e positivo e limitatamente ad $m=1$ ed $m=2$, ed anche nella *Geometrie des Maasses* dello Schlömilch, dove è fatta larga applicazione del principio stesso alla determinazione del volume di corpi di rotazione, non trovo determinato direttamente il volume del segmento sferico a due basi qualsiasi, prescindendo da qualunque cognizione relativa a volumi di corpi sferici. È perciò che non mi è sembrato fuor di luogo mostrare, anche pel valore didattico intrinseco che la quistione presenta, con quali semplici artifici si possa giungere a ricavare sifatto volume in base al principio menzionato, potendosene poi dedurre come caso particolare quello del segmento sferico ad una base e della sfera.

Sia $MNN'M'$ un semisegmento circolare, d'altezza $MN = h$, appartenente ad un cerchio di raggio $AO = R$ e si indichino con r, r' le semicorde MM', NN' che lo limitano, insieme al segmento MN del diametro AO ed all'arco circolare $M'N'$. Nella sua rotazione intorno ad MN tale semisegmento circolare genera un segmento sferico a due basi di cui r, r' sono i raggi di queste basi, h l'altezza ed R il raggio della sfera a cui appartiene. Chiamisi $h_1 = AM$ la saetta del semiarco AM', che, dalla parte di MM', nella rotazione della figura intorno ad AO, verrebbe a completare la sfera e si supponga diviso MN in n parti uguali e condotte dai punti di divisione le perpendicolari ad MN a terminare all'arco $M'N'$. La distanza di due perpendicolari consecutive sarà $\frac{h}{n}$ e se per esse si completano i rettangoli come $abcd$, tirando dall'estremità della maggiore una parallela ad MN ad incontrare la minore, poi si immagina che la figura ruoti nuovamente intorno ad MN, il volume del segmento, senza entrare in discussioni ovvie della natura di quelle che si riscontrano in molti manuali di matematica, può considerarsi come il limite della somma dei cilindri generati dai rettangoli circoscritti al semisegmento circolare, allorchè il loro numero cresce oltre ogni limite.



Ora, indicando per brevità i raggi delle basi di tali cilindri con $r_1, r_2, \ldots\ldots r_n$ ed i loro volumi con $C_1, C_2, \ldots\ldots C_n$, poichè:

$$r_i^2 = \left(h_1 + \frac{ih}{n}\right)\left(2R - \left[h_1 + \frac{ih}{n}\right]\right) =$$

$$2Rh_1 + 2Rh \cdot \frac{i}{n} - h_1^2 - 2hh_1 \cdot \frac{i}{n} - h^2 \cdot \frac{i^2}{n^2},$$

si avrà:

$$C_1 = 2\pi Rhh_1 \cdot \frac{1}{n} + 2\pi Rh^2 \cdot \frac{1}{n^2} - \pi hh_1^2 \cdot \frac{1}{n} - 2\pi h^2 h_1 \cdot \frac{1}{n^2} - \pi h^3 \cdot \frac{1^2}{n^3},$$

$$C_2 = 2\pi Rhh_1 \cdot \frac{1}{n} + 2\pi Rh^2 \cdot \frac{2}{n^2} - \pi hh_1^2 \cdot \frac{1}{n} - 2\pi h^2 h_1 \cdot \frac{2}{n^2} - \pi h^3 \cdot \frac{2^2}{n^3},$$

. . . .

$$C_n = 2\pi Rhh_1 \cdot \frac{1}{n} + 2\pi Rh^2 \cdot \frac{n}{n^2} - \pi hh_1^2 \cdot \frac{1}{n} - 2\pi h^2 h_1 \cdot \frac{n}{n^2} - \pi h^3 \cdot \frac{n^2}{n^3}.$$

Sommando membro a membro, risulta:

$$\Sigma\, C = 2\pi R h h_1 - \pi h h_1^2 + \left(2\pi R h^2 - 2\pi h^2 h_1\right)\frac{1+2+\ldots n}{n^2} - \pi h^3 \frac{1^2+2^2+\ldots n^2}{n^3}$$

e ponendo mente che per la [1] si ha: $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{1+2+\ldots\ldots n}{n^2} = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{1^2+2^2+\ldots\ldots n^2}{n^3} = \dfrac{1}{3}$, si ottiene, in seguito a teoremi noti sui limiti:

$$\lim_{n=\infty} \Sigma\, C = 2\pi R h h_1 - \pi h h_1^2 + 2\pi R h^2 \cdot \frac{1}{2} - 2\pi h^2 h_1 \cdot \frac{1}{2} - \pi h^3 \cdot \frac{1}{3},$$

che è la formola esprimente il volume del segmento sferico a due basi, in funzione di h, h_1 ed R.

Per ridurla alla forma ordinaria si osservi che essa può scriversi successivamente così:

$$\begin{aligned}\text{Vol. seg.} &= \frac{2\pi R h h_1 - \pi h h_1^2}{2} + \frac{2\pi R h^2 + 2\pi R h h_1}{2} - \frac{\pi h^3 + 2\pi h^2 h_1 + \pi h h_1^2}{2} + \frac{\pi h^3}{6} \\ &= \pi h \frac{h_1(2R - h_1)}{2} + \pi h \frac{2R(h+h_1)}{2} - \pi h \frac{(h+h_1)^2}{2} + \frac{\pi h^3}{6} \\ &= \pi h \frac{h_1(2R-h_1)}{2} + \pi h \frac{(h+h_1)(2R - [h+h_1])}{2} + \frac{\pi h^3}{6}.\end{aligned}$$

Ma $h_1(2R - h_1) = r^2$, $(h+h_1)(2R - [h+h_1]) = r'^2$, talchè ad esprimere il volume cercato si ha in ultimo la formola:

$$\frac{\pi r^2 + \pi r'^2}{2} \cdot h + \frac{\pi h^3}{3}.$$

Nota. Dimostrazioni della relazione [1], per m intero e positivo qualunque, possono leggersi a p. 108-109 della 2ª parte della *Geometria della misura* dello Schlömilch, a p. 60-61 del II vol. del *Trattato di Alg. elem.* del Prof. Garbieri, ed anche nell'art. del Prof. Giudice: *Sui limiti*, pubblicato nel 6° vol. di questo Periodico, fas. II a V.

Del resto pei casi speciali di $m = 1$ ed $m = 2$ se ne può dare la dimostrazione ovvia che brevemente accenno. Si ha:

$$\begin{aligned} n^3 - (n-1)^3 &= 3n^2 - 3n + 1 \\ (n-1)^3 - (n-2)^3 &= 3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 \\ 1^3 - 0^3 &= 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 \end{aligned}$$

e sommando membro a membro:

$$n^3 = 3\,(1^2 + 2^2 + \ldots\ldots n^2) - 3\,(1 + 2 + \ldots\ldots n) + n.$$

Ma $1 + 2 + \ldots\ldots n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$, onde:

$$1^2 + 2^2 + \ldots\ldots n^2 = \frac{n^3 - n}{3} + \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6},$$

risulta quindi, per n tendente all' infinito:

$$\lim \frac{1+2+\ldots\ldots n}{n^2} = \frac{1}{2} \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\lim \frac{1^2+2^2+\ldots\ldots n^2}{n^3} = \frac{1}{6} \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}.$$

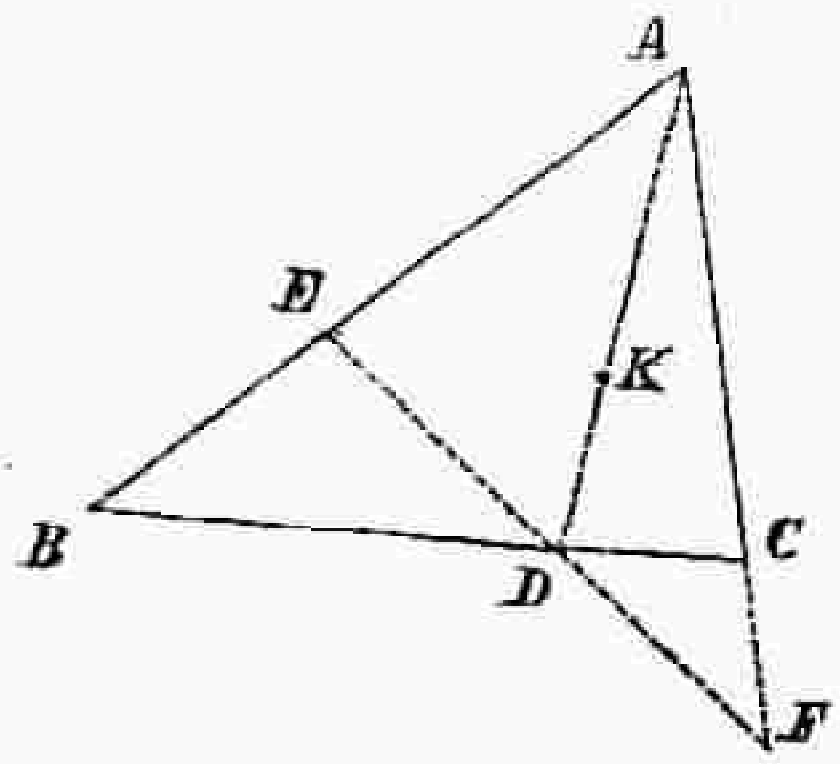
A. Lugli.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

THIRY (Cl.) — *Distances des points remarquables du triangle.* – Bulletins de l'Académie royale de Belgique. 3ᵉ série, t. XXI, pp. 471-481, 1891.

In questa nota, per la maggior parte estratta dal libro « *Applications remarquables du théorème de Stewart...* », di cui demmo ragguaglio nella rivista bibliografica dell'ultimo fas. di questo periodico, l'A. raccoglie alcuni risultati notevoli, molti dei quali aventi tratto colla recente geometria del triangolo, che reputo opportuno riassumere premessi alcuni schiarimenti per comodo del lettore.

1. Sia K il punto di Lemoine del triangolo ABC, D il punto in cui AK incontra BC, EDF l'antiparallela a BC passante per D. Sarà $ED = DF$. (Cfr. *Alcuni teo. della rec. geo. del triangolo*, Per., 1891, p. 23, n.° 2).



Dai triangoli ABD, AED, aventi in comune il vertice D e le basi sulla stessa retta, si ha: $\Delta ABD : \Delta AED = AB : AE$ e per la stessa ragione $\Delta ADF : \Delta ADC = AF : AC$ e poichè i due triangoli AED, ADF sono equivalenti, segue:

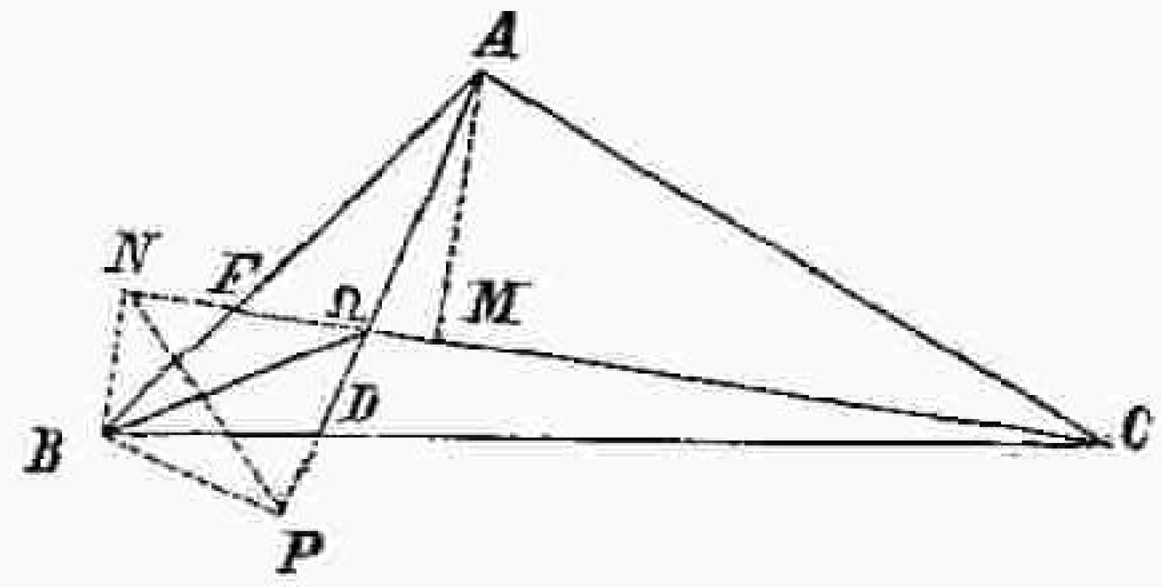
$$\Delta ABD : \Delta ADC = (AB \,.\, AF) : (AE \,.\, AC).$$

Ora perchè i triangoli ABC, AFE sono equiangoli risulta $AF : AE = AB : AC$, talchè, sostituendo nella proporzione ultima, risulta:

$$\Delta ABD : \Delta ADC = BD : DC = (AB \,.\, AB) : (AC \,.\, AC) = c^2 : b^2,$$

cosicchè *la simediana di ciascun lato d'un triangolo divide il lato stesso in due segmenti proporzionali ai quadrati dei lati adiacenti.*

2. Sia, nel triangolo ABC, Ω il punto positivo di Brocard, per modo che ang. $\Omega BC = \Omega CA = \Omega AB = \omega$ (nota cit., n. 8), F il punto in cui $C\Omega$ incontra AB e debbasi determinare, in funzione dei lati di ABC, il rapporto $AF : FB$. Condotte AM, BN perpendicolari a $C\Omega$ e BP, perpendicolare ad $A\Omega$ e tirata NP, si avrà $AF : FB = AM : BN$ e il quadrilatero $BP\Omega N$ risulterà inscrittibile. Ora i triangoli rettangoli MCA, PAB sono simili, ed avendosi ang. $C\Omega B = 180° - C$, ang. $B\Omega A = 180° - B$, e conseguentemente ang. $B\Omega N = BPN = C$, ang. $P\Omega B = PNB = B$, risulterà il triangolo BNP simile ad ABC. Si hanno così le proporzioni $AM : BP = b : c$, $BP : BN = b : c$, donde



$$AF : FB = AM : BN = b^2 : c^2 = c^{-2} : b^{-2}. \quad (*)$$

In modo analogo, chiamando D il piede di $A\Omega$ su BC ed E il piede di $B\Omega$ su CA, si otterrebbe:

$$BD : DC = c^2 : a^2 \qquad CE : EA = a^2 : b^2.$$

Se invece siano Ω' il punto negativo di Brocard del triangolo ABC e D', E', F' i piedi di $A\Omega'$, $B\Omega'$, $C\Omega'$, si ha:

$$BD' : D'C = a^2 : b^2 ; \quad CE' : E'A = b^2 : c^2 ; \quad AF' : F'B = c^2 : a^2.$$

3. Nell'ultima figura si applichi al triangolo ABD il teorema di Menelao, considerando FC come trasversale. Segue:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{D\Omega}{\Omega A} = \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{c^2 + a^2}{a^2} \cdot \frac{D\Omega}{\Omega A} = 1 ,$$

(*) La determinazione di questo e del precedente rapporto risulta altrettanto facilmente coll'uso della trigonometria. Infatti dalla 1ª figura si ha:

$$BD : AD = \text{sen}\, DAB : \text{sen}\, B, \qquad AD : DE = \text{sen}\, AED \ (= \text{sen}\, C) : \text{sen}\, DAB,$$

quindi $BD : DE = \text{sen}\, C : \text{sen}\, B$. Analogamente $DF : DC = \text{sen}\, C : \text{sen}\, B$. Concludendo $BD : DC = \text{sen}^2 C : \text{sen}^2 B = c^2 : b^2$.

Dalla 2ª fig. si ha: $AF : FB = \text{tri.}\, \Omega CA : \text{tri.}\, \Omega BC = (\Omega C \,.\, b) : (\Omega B \,.\, a)$. Ora dal triangolo ΩBC risulta $\Omega B : \Omega C = \text{sen}\,(C - \omega) : \text{sen}\, \omega = (\text{sen}\, C \cos \omega - \cos C\, \text{sen}\, \omega) : \text{sen}\, \omega = \text{sen}\, C \,.\, \cot \omega - \cos C$. Ma (no. cit. n° 9) $\cot \omega = \cot A + \cot B + \cot C$, sicchè:

$$\Omega B : \Omega C = \text{sen}\, C\, (\cot A + \cot B) = \text{sen}\, C \frac{\text{sen}\,(A+B)}{\text{sen}\, A\, \text{sen}\, B} = \frac{\text{sen}^2 C}{\text{sen}\, A\, \text{sen}\, B} = c^2 : ab.$$

Sostituendo questo valore del rapporto $\Omega B : \Omega C$ nella prima proporzione, si ottiene infine:

$$AF : FB = (ab \,.\, b) : (c^2 \,.\, a) = b^2 : c^2.$$

onde

$$\frac{A\Omega}{\Omega D} = \frac{b^2 c^2 + b^2 a^2}{a^2 c^2}.$$

Applicando invece al triangolo ABC il teorema di Stewart, considerando AD come trasversale, si ha: $c^2 . DC + b^2 . BD = \overline{AD}^2 . BC + DC . BD . BC$, o, per essere $BD : DC : BC = c^2 : a^2 : c^2 + a^2$,

$$c^2 \cdot \frac{a^2}{c^2 + a^2} + b^2 \cdot \frac{c^2}{c^2 + a^2} = \overline{AD}^2 + \frac{a^2 c^2 . a^2}{(c^2 + a^2)^2},$$

da cui:

$$\overline{AD}^2 = \frac{(a^2 c^2 + b^2 c^2)(c^2 + a^2) - a^4 c^2}{(c^2 + a^2)^2} = \frac{c^2 \, \Sigma \, a^2 b^2}{(c^2 + a^2)^2},$$

avendo posto $\Sigma \, a^2 b^2 = a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2$.

Finalmente per essere $\overline{A\Omega}^2 : \overline{\Omega D}^2 : \overline{AD}^2 = (b^2 a^2 + b^2 c^2)^2 : (a^2 c^2)^2 : (\Sigma \, a^2 b^2)^2$, consegue

$$\overline{A\Omega}^2 = \frac{(b^2 a^2 + b^2 c^2)^2 . \overline{AD}^2}{(\Sigma \, a^2 b^2)^2} = \frac{b^4 . (a^2 + c^2)^2 . c^2 . \Sigma \, a^2 b^2}{(\Sigma \, a^2 b^2)^2 . (c^2 + a^2)^2} = \frac{b^4 c^2}{\Sigma \, a^2 b^2}.$$

Similmente ricavasi:

$$\overline{B\Omega}^2 = \frac{c^4 a^2}{\Sigma \, a^2 b^2} \quad ; \qquad \overline{C\Omega}^2 = \frac{a^4 b^2}{\Sigma \, a^2 b^2}.$$

Collo stesso procedimento si perviene alle formole:

$$\overline{A\Omega'}^2 = \frac{c^4 b^2}{\Sigma \, a^2 b^2}, \qquad \overline{B\Omega'}^2 = \frac{a^4 c^2}{\Sigma \, a^2 b^2}, \qquad \overline{C\Omega'}^2 = \frac{b^4 a^2}{\Sigma \, a^2 b^2}.$$

4. Siano ora A_1, B_1, C_1 punti interni dei lati BC, CA, AB del triangolo ABC, tali che si abbia $\frac{BA_1}{A_1 C} = \frac{c^n}{b^n}$, $\frac{CB_1}{B_1 A} = \frac{a^n}{c^n}$, $\frac{AC_1}{C_1 B} = \frac{b^n}{a^n}$, poichè in tal caso $\frac{BA_1}{A_1 C} \cdot \frac{CB_1}{B_1 A} \cdot \frac{AC_1}{C_1 B} = 1$, il teorema di Ceva c'insegna che le tre rette AA_1, BB_1, CC_1 concorrono in uno stesso punto che il Sig. Thiry designa colla lettera K_n.

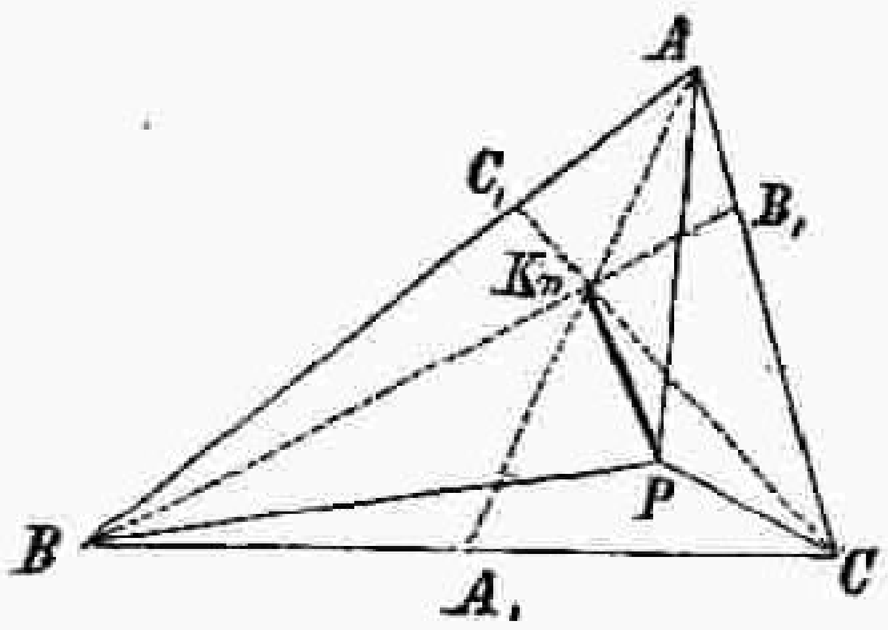
Se poi in questa stessa figura, analogamente a quanto si fece precedentemente, si applica al triangolo ABA_1 il teorema di Menelao, considerando CC_1 come trasversale, si ha:

$$\frac{AK_n}{K_n A_1} \cdot \frac{A_1 C}{CB} \cdot \frac{BC_1}{C_1 A} = \frac{AK_n}{K_n A_1} \cdot \frac{b^n}{b^n + c^n} \cdot \frac{a^n}{b^n} = 1,$$

donde $AK_n : K_n A_1 = (b^n + c^n) : a^n$.

5. Ciò premesso passeremo ad indicare il modo seguito dal Sig. Thiry per ricavare la formola che dà la distanza del punto K_n ad un punto qualsiasi P interno al triangolo, note che siano PA, PB, PC.

Applicando il teorema di Stewart successivamente ai triangoli APA_1, BPC, ABC, in causa di $BA_1 : A_1C = c^n : b^n$ e $AK_n : K_n A_1 = (b^n + c^n) : a^n$, si ha:



$$a^n . \overline{PA}^2 + (b^n + c^n) . \overline{PA_1}^2 =$$
$$(a^n + b^n + c^n) . \overline{PK_n}^2 + \frac{a^n (b^n + c^n)}{a^n + b^n + c^n} . \overline{AA_1}^2$$

$$b^n . \overline{PB}^2 + c^n . \overline{PC}^2 = (b^n + c^n) . \overline{PA_1}^2 + \frac{b^n c^n}{b^n + c^n} . a^2$$

$$b^n . c^2 + c^n . b^2 = (b^n + c^n) . \overline{AA_1}^2 + \frac{b^n c^n}{b^n + c^n} . a^2,$$

da cui, eliminando PA_1 ed AA_1 si deduce la relazione cercata (*), che può scriversi brevemente così:

$$[1] \quad \overline{PK_n}^2 = \frac{\Sigma a^n \overline{PA}^2}{\Sigma a^n} - \left(\frac{abc}{\Sigma a^n}\right)^2 . \Sigma a^{n-2} b^{n-2} = \frac{\Sigma a^n \overline{PA}^2}{\Sigma a^n} - C_n,$$

rappresentando C_n una costante indipendente dalla posizione del punto P.

6. Indichino, come al solito, O, R il centro e il raggio del cerchio circoscritto, I il centro del cerchio inscritto, G il baricentro, H l'ortocentro del triangolo ABC.

Supponendo che il punto P cada successivamente in O, H, Ω, Ω' e tenendo conto che in tal caso si ha successivamente $AP = BP = CP = R$; $\overline{AP}^2 = \overline{AH}^2 = 4R^2 - a^2$, ...; $\overline{AP}^2 = \overline{A\Omega}^2 = \frac{b^4 c^2}{\Sigma a^2 b^2}$, ...; $\overline{AP}^2 = \overline{A\Omega'}^2 = \frac{c^4 b^2}{\Sigma a^2 b^2}$, ... poi facendo $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ nella [1], con che si viene a supporre che K_n divenga il baricentro G, il centro del cerchio inscritto I e il punto K di Lemoine del triangolo ABC, il Sig. Thiry giunge alle formole notabili seguenti, di facile deduzione:

$$\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}, \quad \overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr, \quad \overline{OK}^2 = R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2};$$

$$\overline{HG}^2 = 4R^2 - \frac{4}{9}(a^2+b^2+c^2) = 4\,\overline{OG}^2, \quad \overline{HI}^2 = 4R^2 - \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} - 2Rr,$$

$$\overline{HK}^2 = 4R^2 - \frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2};$$

$$\overline{\Omega G}^2 = \frac{a^4 b^2 + b^4 c^2 + c^4 a^2}{3 \Sigma a^2 b^2} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9},$$

(*) Cfr. *Periodico*, vol. VI, pag. 197.

$$\overline{\Omega I}^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{\Sigma a^2 b^2 . 2p}\left[\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}\right]-2Rr=$$
$$\frac{2Rr}{\Sigma a^2 b^2}\left[a^2 b (a-b)+b^2 c (b-c)+c^2 a (c-a)\right],$$

$$\overline{\Omega K}^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{\Sigma a^2 b^2}-\frac{3 a^2 b^2 c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}=\overline{\Omega' K}^2,$$

alle quali altre ne aggiunge per esprimere GK, IK, IG.

7. Nella stessa memoria, supponendo che M sia un punto della base BC del triangolo ABC e T_a un punto di AM, tali che $BM:MC=m:n$; $AT_a : T_a M = \alpha : \beta$, l'A., applicando il teorema di Stewart successivamente ai triangoli AOM, BOC, ABC, dove O è sempre il circumcentro di ABC, ricava l'altra formola:

$$\overline{OT_a}^2 = R^2 - \frac{\alpha}{(m+n)(\alpha+\beta)^2}\left[\frac{mn\alpha}{m+n}a^2+\beta(mb^2+nc^2)\right]$$

della qnale fa alcune applicazioni fra le quali è degna di nota quella per cui viene a determinarsi $\overline{O\Omega}^2 = R^2 - \frac{a^2 b^2 c^2}{\Sigma a^2 b^2} = \overline{O\Omega'}^2$. Inoltre esso determina, applicando sempre tre volte il teorema di Stewart, in modo facile a comprendersi, direttamente ΩH, che viene dato dalla formola:

$$\overline{\Omega H}^2 = 4R^2 - \frac{(a^2 b^2 c^2 + a^2 b^4 + b^2 c^4 + c^2 a^4)}{\Sigma a^2 b^2} =$$
$$\frac{R^2 (a^2+b^2+c^2)^2 - (a^2 b^4 + b^2 c^4 + c^2 a^4)}{\Sigma a^2 b^2}$$

ed osserva che con metodo analogo possono determinarsi altre distanze fra le quali OH, $O\Omega$, GI, GK, $G\Omega$, IK, $K\Omega$, ...

Finalmente nel § ultimo sono notate alcune conseguenze interessanti delle formole ottenute.

A. Lugli.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 84 e 102

84. *Dimostrare che, se* p *è un numero primo, e se* D *e* λ *sono due numeri interi non divisibili per* p, *la congruenza*

$$x^2 - Dy^2 \equiv \lambda \ (mod.\ p)$$

ammette $\frac{p-1}{2}$ *soluzioni quando la congruenza*

$$z^2 \equiv D \ (mod.\ p)$$

è risolubile, e ne ammette $\frac{p+1}{2}$ *nel caso contrario.*

Avvertenza. - Una soluzione $(x=\alpha,\ y=\beta)$ si consideri come identica all'altra $(x=-\alpha,\ y=-\beta)$; epperò due soluzioni siffatte si contino per una sola.

(G. Frattini).

Dimostrazione del Sig. Prof. *F. Viaggi.*

La quistione si riduce a trovare le soluzioni per valori d' x ed y compresi tra 0 e $\frac{p-1}{2}$ (i limiti inclusi), le quali chiameremo *soluzioni positive* e indicheremo s. p.: a ciascuna di queste, in generale, corrispondono due soluzioni distinte, a' sensi dell'avvertenza, le quali si ottengono premettendo ad una delle radici il segno doppio $\pm$; ne corrisponde una sola, quando il valore d' una radice è 0.

A semplificare la ricerca ricorderemo, completandole, alcune proprietà dei numeri.

I numeri $1, 2, \ldots . p-1$, inferiori al numero primo p, si separano in $\frac{p-1}{2}$ coppie di numeri diseguali *coniugati*, tali che il prodotto dei numeri di una stessa coppia sia congruo con λ, se λ è non-residuo di p; e in $\frac{p-3}{2}$ di tali coppie e in due numeri, ciascuno coniugato con se stesso, se λ è residuo. Una coppia è individuata da un suo elemento. (Cfr. DIRICHLET: *T. dei N.* § 34). Sieno r, s elementi di una coppia (eguali o no), $p-r$, $p-s$ sono pure elementi coniugati d' un'altra coppia, che chiameremo *complementare* della precedente. Se il numero di coppie è dispari, almeno una di esse dev' essere complementare di sè stessa, quindi i suoi elementi hanno per somma p; ed evidentemente se la somma di due numeri coniugati è p, essi formano una coppia complementare di se stessa.

Dimostriamo che di tali coppie non può essercene più di una. E invero, se (r, s), (r', s') sono due coppie, ciascuna complementare di se stessa, sussistono le relazioni

$$r+s=p \qquad r'+s'=p$$
$$rs \equiv r's' \pmod{p};$$

ora dalla eguaglianza $(r+s)^2=(r'+s')^2$ si sottragga la congruenza moltiplicata per 4, si ottiene

$$(r-s)^2 \equiv (r'-s')^2 \pmod{p}$$

donde

$$(r+r'-s-s')(r-r'-s+s') \equiv 0.$$

Perciò, o

$$r-r'-s+s' \equiv 0,$$

oppure

$$r+r'-s-s' \equiv 0.$$

Nella prima ipotesi, essendo ancora

$$r-r'+s-s'=0,$$

si concluderà che $r \equiv r'$, $s \equiv s'$. Nella seconda ipotesi, avendosi inoltre

$$r+r'+s+s'=2p \equiv 0,$$

si concluderà che $r \equiv -r' \equiv s'$; $s \equiv -s' \equiv r'$. In ambedue i casi le coppie (r, s) (r', s') saranno identiche.

Ed ora veniamo alla quistione.

1° *Caso.* — D residuo quadratico.

Sia h una delle due radici della congruenza $z^2 \equiv D \pmod{p}$ la congruenza da risolvere sarà equivalente all'altra

$$(x+hy)(x-hy) \equiv \lambda \pmod{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [1]$$

Le soluzioni d'uno dei quattro sistemi di congruenze

$$x \pm hy \equiv \pm r \qquad x \mp hy \equiv \pm s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [2]$$

(nelle quali si corrispondono i segni ambigui dei primi membri fra loro, e fra loro quelli dei secondi; ed r, s sono due qualunque numeri coniugati) sono soluzioni della [1]; e, reciprocamente, le soluzioni della [1] sono soluzioni di uno dei sistemi [2], quando si prenda la coppia (r, s) in tutti i modi possibili.

Combinando le [2] per addizione e sottrazione, e tenendo presente il teorema di Fermat, le soluzioni dei quattro sistemi [2] sono

$$x \equiv \pm (r+s) \,.\, 2^{p-2} \qquad y \equiv \pm (r-s) \,.\, (2\,h)^{p-2} \quad \ldots\ldots \quad [3]$$

(nelle quali i segni ambigui sono indipendenti fra loro).

In generale, i numeri eguali e di segno contrario $\pm (r+s) \,.\, 2^{p-2}$ sono congrui con due numeri positivi, che hanno per somma p, quindi uno solo di questi è $\leqq \frac{p-1}{2}$; essi sono congrui con 0, se $r+s=p$. Così $\pm (r-s) \,.\, (2\,h)^{p-2}$ sono congrui a due numeri positivi, di cui uno solo è $\leqq \frac{p-1}{2}$, se $r \gtrless s$, e al solo numero 0, se $r=s$. Il che mostra che le [3] forniscono una sola s. p., e che una delle radici acquista il valore 0, quando la coppia adoprata è complementare di se stessa, o composta di numeri eguali.

Se in luogo della coppia (r, s) si adopera la complementare, di leggieri si scorge che le soluzioni fornite da [3] sono le stesse. Reciprocamente, se le coppie (r, s) ed (r', s') danno le stesse radici, o sono identiche o complementari: infatti se le soluzioni sono le stesse da [3] si deducono le congrueze

$$r+s \equiv \pm (r'+s'), \qquad r-s \equiv \pm (r'-s') \pmod{p}$$

donde, addizionando e semplificando,

$$r \equiv \pm r' \qquad \text{oppure} \qquad r \equiv \pm s'$$

e in corrispondenza

$$s \equiv \pm s' \qquad \text{oppure} \qquad s \equiv \pm r'$$

Premesse queste cose:

$$\text{se} \qquad p = 4n+1 \qquad \text{e } \lambda \text{ residuo di } p,$$

le due coppie complementari, ciascuna di numeri eguali, forniscono 1 s. p. con $y=0$; una coppia complementare di se stessa fornisce 1 s. p. con $x=0$; le rimanenti $2n - 2$ a due a due complementari ne forniscono $n - 1$: in tutto $1 + 1 + 2(n-1) = \frac{p-1}{2}$ soluzioni distinte;

$$\text{se} \quad p = 4n+1 \quad \text{e } \lambda \text{ non-residuo di } p,$$

le $2n$ coppie sono a due a due complementari e danno n s. p.: cioè $2n = \frac{p-1}{2}$ soluzioni;

$$\text{se} \quad p = 4n+3 \quad \text{e } \lambda \text{ residuo di } p,$$

le due coppie complementari, ciascuna di elementi eguali, danno 1 s. p. con $y = 0$; le rimanenti $2n$ coppie ne danno n: in tutto $1 + 2n = \frac{p-1}{2}$ soluzioni;

$$\text{se} \quad p = 4n+3 \quad \text{e } \lambda \text{ non residuo di } p,$$

la coppia complementare di se stessa fornisce 1 s. p. con $x = 0$; le rimanenti $2n$ ne forniscono n: in tutto $1 + 2n = \frac{p-1}{2}$. Rimane così dimostrata la prima parte del teorema.

Ove si ricordi che λ e $-\lambda$ hanno lo stesso carattere o carattere diverso, secondo che p è della forma $4n+1$ o $4n+3$, dall'esame precedente può anche dedursi che « il numero di soluzioni positive è

$$\frac{1}{4}\left[p + 1 + \left(\frac{\lambda}{p}\right) + \left(\frac{-\lambda}{p}\right)\right] \text{»}$$

nella quale espressione s'è adoperato il simbolo di Legendre.

Dei risultati ottenuti facciamo un'applicazione utile in prosieguo.

Dei valori $0, 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$, successivamente attribuiti ad x, tanti rendono zero o residuo la differenza $x^2 - \lambda$, quante sono le s. p. della $x^2 - y^2 \equiv \lambda$; quindi quelli che la rendono non-residuo sono in numero di $\frac{p+1}{4} - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\lambda}{p}\right) + \left(\frac{-\lambda}{p}\right)\right]$; tra i non-residui potrà presentarsi o no $-\lambda$ e, tenendo conto da parte di questo, possiamo conchiudere che: « il valore 0 attribuito ad x, trasforma $x^2 - \lambda$ in $\frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{-\lambda}{p}\right)\right]$ non residuo, e i valori $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$ « in $\frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{\lambda}{p}\right)\right]$ valore nullo e $\frac{p-1}{4} + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{-\lambda}{p}\right) - \left(\frac{\lambda}{p}\right)\right]$ non « residui ».

2° *Caso.* — D non residuo di p.

La congruenza proposta, in tutti i casi, è equivalente alla seguente

$$y^2 \equiv (x^2 - \lambda) D^{p-2} \pmod{p}$$

perchè $D \cdot D^{p-2} \equiv 1$; e per questo nel caso presente, pure D^{p-2} è non-residuo epperò il 2° membro sarà congruo con 0 o residuo, se il primo fattore è congruo con 0 o non-residuo; ora badando che 0 se rende $x^2 - \lambda$ non-residuo dà luogo a 1 soluzione, ogni altro valore che la renda tale dà luogo a 2 soluzioni, e il valore che l'annulli dà luogo a 1 soluzione della congruenza (scelti sempre i valori d'x tra 0 e $\frac{p-1}{2}$), si deduce che il numero di soluzioni è

$$\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right]+\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{-\lambda}{p}\right)\right]+\frac{p-1}{2}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{-\lambda}{p}\right)-\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right]=\frac{p+1}{2}.$$

E così rimane dimostrata la seconda parte del teorema.

Il numero di soluzioni positive è, in questo 2° caso,

$$\frac{1}{4}\left[p+3+\left(\frac{\lambda}{p}\right)-\left(\frac{-\lambda}{p}\right)\right]$$

e, in tutti i casi,

$$\frac{1}{4}\left[p+2-\left(\frac{D}{p}\right)+\left(\frac{\lambda}{p}\right)+\left(\frac{-\lambda D}{p}\right)\right].$$

Soluzione del Prof. *U. Scarpis.*

Lemma. « Se $\mu=\frac{p-1}{2}$ e D_1, D_2 .... D_μ sono i residui quadratici di p si ha:

$$[1] \qquad \sum_r (D_r-\lambda)^\mu \equiv \mu+(-1)^\mu \,.\, \mu\lambda^\mu. \text{ »} \quad (^*)$$

Sviluppando e sommando rispetto ad r si ha:

$$[2] \quad \sum_r (D_r-\lambda)^\mu = \sum_r D_r^\mu - \binom{\mu}{1}\lambda \sum_r D_r^{\mu-1} + \ldots\ldots + (-1)^\mu \,.\, \mu\lambda^\mu.$$

Se ora S_n è la somma delle potenze n^{esime} dei numeri 1, 2, 3, ... $(p-1)$, si ha: (*Serret-Algèbre Supérieure,* vol. 2°, n.° 302)

$$S_1 \equiv S_2 \equiv \ldots\ldots \equiv S_{p-2} \equiv 0, \qquad S_{p-1} \equiv p-1$$

ed essendo, com'è evidente:

$$S_2 \equiv 2\sum_r D_r, \quad S_4 \equiv 2\sum_r D_r^2, \ldots, S_{p-1} \equiv 2\sum_r D_r^\mu,$$

si ottengono le relazioni:

$$\sum_r D_r \equiv \sum_r D_r^2 \equiv \ldots\ldots \equiv \sum_r D_r^{\mu-1} \equiv 0, \ \sum_r D_r^\mu \equiv \mu,$$

con le quali dalla [2] si passa alla [1].

Ciò premesso, osservando che, escluso il caso nel quale $D_r - \lambda$ sia divisibile per p, $(D_r-\lambda)^\mu$ è sempre congruo ad 1 o a -1 secondo che $D_r - \lambda$ è o no residuo di p, si deduce che dalla [1] potremo sapere quanti resti e non resti si trovino nella serie

$$[3] \qquad D_1-\lambda, \quad D_2-\lambda, \quad \ldots\ldots\ldots \quad D_\mu-\lambda$$

(*) Questa congruenza e tutte le seguenti s'intendono riferite al modulo p.

tanto che sia $\left(\frac{\lambda}{p}\right) = 1$ e quindi uno dei suoi termini divisibile per p, come pure nel caso che sia $\left(\frac{\lambda}{p}\right) = -1$.

Distinguiamo ora i seguenti casi:

1°) μ numero pari e quindi $\left(\frac{\lambda}{p}\right) = \left(\frac{-\lambda}{p}\right)$:

a) $\left(\frac{\lambda}{p}\right) = 1$.

In questa ipotesi la [1] diviene: $\sum_r (D_r - \lambda)^\mu \equiv -1$ e si deduce quindi che nella serie [3] vi sono $\frac{p-5}{4}$ residui e $\frac{p-1}{4}$ non-residui, rammentando che uno dei suoi termini è divisibile per p, essendo λ, come residuo, congruo ad uno dei numeri $D_1, D_2, \ldots\ldots D_\mu$.

Facendo ora $x \equiv 0, 1, 2, \ldots\ldots (p-1)$, x^2, oltre ad un valore congruo a 0, assume pure μ valori diversi congrui ai resti $D_1, D_2, \ldots\ldots D_\mu$ e quindi il binomio $x^2 - \lambda$, oltre a due valori congrui rispettivamente a 0, $-\lambda$, assume pure altri $\frac{p-5}{4}$ valori diversi $R_1, R_2, \ldots\ldots R_{\frac{p-5}{4}}$ che sono residui e $\frac{p-1}{4}$ valori $N_1, N_2, \ldots\ldots N_{\frac{p-1}{4}}$ non resti. Oltre a ciò poi, per una nota proprietà dei resti quadratici, il prodotto Dy^2, oltre ad essere congruo a 0 per $y \equiv 0$, ci darà costantemente un residuo od un non-residuo secondochè $z^2 \equiv D$ è o no possibile.

Se ora $z^2 \equiv D$ è possibile, cioè se $\left(\frac{D}{p}\right) = 1$, indicando con $\pm\xi$, $\pm\eta$ rispettivamente le radici di $x^2 - \lambda \equiv 0$, $Dy^2 \equiv -\lambda$, e parimenti con $\pm\alpha_r$, $\pm\beta_r$ le radici di $x^2 - \lambda \equiv R_r$, $Dy^2 \equiv R_r$, si scorge che la proposta congruenza ha le $2\frac{p-5}{4} + 2 = \frac{p-1}{2}$ soluzioni $x \equiv \pm\xi$, $y \equiv 0$; $x \equiv 0$, $y \equiv \pm\eta$; $x \equiv \pm\alpha_r$, $y \equiv \pm\beta_r$; $x \equiv \mp\alpha_r$, $y \equiv \pm\beta_r$, per $r = 1, 2, 3, \ldots\ldots \frac{p-5}{4}$ e contando per una due soluzioni eguali ed opposte.

Se invece $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$, oltre $x \equiv \pm\xi$, $\eta \equiv 0$, vi sono pure le $2\frac{p-1}{4}$ soluzioni $x \equiv \pm\alpha_r$, $y \equiv \pm\beta_r$; $x \equiv \pm\alpha_r$, $y \equiv \mp\beta_r$; essendo $\pm\alpha_r$, $\pm\beta_r$ radici di $x^2 - \lambda \equiv N_r$; $Dy^2 \equiv N_r$ per $r = 1, 2, \ldots\ldots \frac{p-1}{4}$.

b) $\left(\frac{\lambda}{p}\right) = -1$.

La [1] ci dà $\sum_r (D_r - \lambda)^\mu \equiv 0$, per cui in [3] vi sono $\frac{\mu}{2}$ residui ed altrettanti non-residui e quindi $x^2 - \lambda$, al variare di x da $x \equiv 0$ ad $x \equiv p-1$, assumerà, oltre ad un valore congruo a $-\lambda$ per $x \equiv 0$, $\frac{\mu}{2}$ valori $R_1, R_2, \ldots\ldots R_{\frac{\mu}{2}}$ residui ed altrettanti non-residui $N_1, N_2, \ldots\ldots N_{\frac{\mu}{2}}$.

Se ora $\left(\frac{D}{p}\right) = 1$, la proposta congruenza avrà solo le $\frac{p-1}{2}$ soluzioni $x \equiv \pm \alpha_r$, $y \equiv \pm \beta_r$; $x \equiv \pm \alpha_r$, $y \equiv \mp \beta_r$, essendo $\pm \alpha_r$, $\pm \beta_r$ radici di $x^2 - \lambda \equiv R_r$, $Dy^2 \equiv R_r$ $\left(r = 1, 2, \ldots\ldots, \frac{p-1}{4}\right)$ inquantochè per $\left(\frac{\lambda}{p}\right) = -1$ non è possibile la $x^2 - \lambda \equiv 0$.

Se all'incontro $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$, oltre alla soluzione $x \equiv 0$, $y \equiv \pm \eta$, essendo $\pm \eta$ radice della $Dy^2 \equiv -\lambda$, possibile in questo caso, ne ammetterà altre $\frac{p-1}{2}$, $x \equiv \pm \alpha_r$, $y \equiv \pm \beta_r$; $x \equiv \pm \alpha_r$, $y \equiv \mp \beta_r$, essendo $\pm \alpha_r$, $\pm \beta_r$ radici di

$$x^2 - \lambda \equiv N_r, \quad Dy^2 \equiv N_r \quad \left(r = 1, 2, \ldots\ldots \frac{p-1}{4}\right).$$

In tutto quindi $\frac{p-1}{2} + 1 = \frac{p+1}{2}$ soluzioni.

2°) μ dispari, $\left(\frac{\lambda}{p}\right) = -\left(\frac{-\lambda}{p}\right)$:

a) $\left(\frac{\lambda}{p}\right) = 1$.

La [1] diventa: $\sum_r (D_r - \lambda)^\mu \equiv 0$, per cui in [3], oltre ad un termine nullo, vi sono $\frac{\mu - 1}{2} = \frac{p-3}{4}$ residui ed altrettanti non-residui, il che ci indica che $x^2 - \lambda$, al variare di x da $x \equiv 0$ ad $x \equiv p-1$, oltre ad un valore congruo a $-\lambda$ per $x \equiv 0$ ed un valore congruo a 0, assumerà pure $\frac{p-3}{4}$ valori $R_1, R_2, \ldots\ldots R_{\frac{p-3}{4}}$ residui, ed altrettanti $N_1, N_2, \ldots\ldots N_{\frac{p-3}{4}}$ non-residui.

Se ora $\left(\frac{D}{p}\right) = 1$, e con $\pm \xi$ si indicano le radici di $x^2 - \lambda \equiv 0$, si scorge che, oltre alla soluzione $x \equiv \pm \xi$, $\eta \equiv 0$, abbiamo pure le soluzioni: $x \equiv \pm \alpha_r$, $y \equiv \pm \beta_r$; $x \equiv \pm \alpha_r$, $y \equiv \mp \beta_r$: essendo $\pm \alpha_r$, $\pm \beta_r$ radici di

$$x^2 - \lambda \equiv R_r, \quad Dy^2 \equiv R_r \quad \left(r = 1, 2, \ldots\ldots \frac{p-3}{4}\right)$$

vale a dire in tutto $2\frac{p-3}{4} + 1 = \frac{p-1}{2}$.

Se all'incontro $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$, oltre alle soluzioni $x \equiv \pm \xi$, $y \equiv 0$; $x \equiv 0$, $y \equiv \pm \eta$, essendo $\pm \eta$ radice di $Dy^2 \equiv -\lambda$ possibile per essere $\left(\frac{D}{p}\right) = \left(\frac{-\lambda}{p}\right)$, ve ne saranno pure altre $\frac{p-1}{2}$, com'è facile vedere riferendosi ai casi precedenti.

b) $\left(\frac{\lambda}{p}\right) = -1$.

Valendoci nuovamente della [1] e tenendo sempre presente che per μ dispari λ e $-\lambda$ hanno carattere quadratico opposto, si deduce con lo stesso ragionamento precedentemente usato che se $\left(\frac{D}{p}\right) = 1$, le soluzioni sono in numero di $\frac{p-3}{4} \cdot 2 + 1 = \frac{p-1}{2}$; ed in numero di $\frac{p+1}{4} \cdot 2 = \frac{p+1}{2}$, se $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$.

102. *Indicando col simbolo* $\binom{h}{r}$ *il numero delle combinazioni di* h *elementi presi* r *ad* r, *dimostrare che*

$$\sum_{i=0}^{i=k} \binom{m+i}{m} = \binom{m+k+1}{m+1}$$

e farne applicazione a mostrare che

$$\sum_{i=0}^{i=k} (1+2+\ldots\ldots+i) = \binom{k+2}{3}, \quad \sum_{i=1}^{i=k} i^2 = \binom{k+2}{3} + \binom{k+1}{3}.$$

(C. Marsengo Bastia).

Dimostrazione del Sig. Prof. *Giuseppe Bernardi* (*).

Per dimostrare la prima uguaglianza proposta osservo che quando si formano le $\binom{m+k+1}{m+1}$ combinazioni di $m+k+1$ elementi $a_1, a_2, \ldots\ldots,$ a_{m+k+1}, presi $m+1$ ad $m+1$ secondo il loro ordine dato, ciascuna di esse termina con qualcuno dei $k+1$ elementi $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots\ldots, a_{m+k+1}$, e poichè in generale delle suddette combinazioni ve ne sono manifestamente tante che terminano coll'elemento a_{m+s} quante combinazioni si possono formare cogli $m+s-1$ elementi $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{m+s-1}$ che lo precedono, presi m ad m, cioè ve ne sono $\binom{m+s-1}{m}$, si deve avere necessariamente:

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \ldots\ldots + \binom{m+k}{m} = \binom{m+k+1}{m+1} \ldots \text{c.d.d.}$$

Per dimostrare poi la seconda uguaglianza proposta osservo che in conseguenza della nota relazione:

$$1+2+\ldots\ldots+i = \frac{(i+1)\,i}{2} = \binom{i+1}{2}$$

e della prima uguaglianza proposta si ottiene:

$$\sum_{i=0}^{i=k} (1+2+\ldots\ldots+i) = \sum_{i=0}^{i=k} \binom{i+1}{2} = \sum_{i=1}^{i=k} \binom{i+1}{2} =$$

$$\sum_{i-1=0}^{i-1=k-1} \binom{2+(i-1)}{2} = \binom{k+2}{3} \ldots\ldots\ldots \text{c.d.d.}$$

(*) Dimostrazioni poco dissimili pervennero dai Sigg. Prof. *L. Bosi, S. Catania, M. Martone, G. Rozzolino* e dal Sig. *F. Mariantoni* (studente nella R. Università di Roma).

Finalmente per dimostrare la terza eguaglianza proposta osservo che dall' identità:

$$i^2 = \frac{(i+1)\,i}{2} + \frac{i\,(i-1)}{2} = \binom{i+1}{2} + \binom{i}{2}$$

e dalla prima uguaglianza proposta consegue l'altra:

$$\sum_{i=1}^{i=k} i^2 = \sum_{i=1}^{i=k} \binom{i+1}{2} + \sum_{i=2}^{i=k} \binom{i}{2} = \sum_{i-1=0}^{i-1=k-1} \binom{2+(i-1)}{2} + \sum_{i-2=0}^{i-2=k-2} \binom{2+(i-2)}{2} = \binom{k+2}{3} + \binom{k+1}{3} \ldots\ldots \text{ c. d. d.}$$

I Sigg. Prof. *L. Bosi* e *M. Martone*, fondandosi sulle relazioni

$$\sum_{i=1}^{i=k} i\,(k-i+1) = \sum_{i=0}^{i=k} (1+2+\ldots\ldots+i) = \binom{k+2}{3},$$

$$\sum_{i=1}^{i=k} i^n = (k+1) \sum_{i=1}^{i=k} i^{n-1} - \sum_{i=1}^{i=k} i^{n-1}\,(k-i+1)$$

e sul fatto che $\sum\limits_{i=0}^{i=k} (1^n + 2^n + \ldots\ldots + i^n)$ può dedursi da $\sum\limits_{i=1}^{i=k} i^n$ sommando l'espressione esprimente quest'ultima quantità, trovano poi formole analoghe alle ultime due della quistione per esprimere le somme delle successive potenze dei numeri naturali fino a k e le somme di queste somme, ossia:

$$\sum_{i=0}^{i=k} (1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + i^2) = \binom{k+2}{4} + \binom{k+3}{4},$$

$$\sum_{i=1}^{i=k} i^3 = \binom{k+1}{4} + 4\binom{k+2}{4} + \binom{k+3}{4},$$

$$\sum_{i=0}^{i=k} (1^3 + 2^3 + \ldots\ldots + i^3) = \binom{k+2}{5} + 4\binom{k+3}{5} + \binom{k+4}{5},$$

$$\sum_{i=1}^{i=k} i^4 = \binom{k+1}{5} + 11\binom{k+2}{5} + 11\binom{k+3}{5} + \binom{k+4}{5},$$

. . . .

Il primo di questi formola le seguenti leggi, verificabili per induzione, che presiedono alla formazione delle somme medesime:

1°. La somma $\sum\limits_{i=1}^{i=k} i^n$ (dove n è un numero qualunque aritmetico intero) equivale alla somma degli n numeri

$$\binom{k+1}{n+1},\ \binom{k+2}{n+1},\ \ldots\ldots \binom{k+i}{n+1},\ \ldots\ldots \binom{k+n-1}{n+1},\ \binom{k+n}{n+1} \qquad [1]$$

moltiplicati per certi coefficienti che indicheremo con

$$C_1^{(n)},\quad C_2^{(n)},\ \ldots\ldots\ \ C_i^{(n)},\ \ldots\ldots\ \ C_{n-1}^{(n)},\quad C_n^{(n)},$$

e il primo e l'ultimo di questi coefficienti sono sempre eguali ad 1;

2ª. Dalla formola che dà $\sum_{i=1}^{i=k} i^n$ si ricava quella che dà $\sum_{i=0}^{i=k}(1^n+2^n, \ldots + i^n)$ col sostituire ordinatamente ai numeri [1] i numeri che seguono

$$\binom{k+2}{n+2},\ \binom{k+3}{n+2}, \ldots\ldots \binom{k+i+1}{n+2}, \ldots\ldots \binom{k+n}{n+2},\ \binom{k+n+1}{n+2};$$

3ª. Supposto $n > 2$, nella formola che dà $\sum_{i=1}^{i=k} i^n$ il coefficiente $C_i^{(n)}$ di un termine qualunque che non sia il primo nè l'ultimo si esprime in funzione di $C_{i-1}^{(n-1)}$ e $C_i^{(n-1)}$ (coefficienti dell' $i-1^{\text{esimo}}$ e dell' i^{esimo} termine dell'espressione che dà $\sum_{i=1}^{i=k} i^{n-1}$) mediante la relazione

$$C_i^{(n)} = (n-i+1)\, C_{i-1}^{(n-1)} + i\, C_i^{(n-1)}.$$

Sono pervenute inoltre le soluzioni seguenti: quistione **108***. dal Sig. *E. Colonna, E. G. Ricci, G. Trapani;* **109***. *G. Candido, F. Facciolli, E. G. Ricci, G. Trapani* — soluzioni alle quali verrà data evasione nei fascicoli venturi.

La Redazione.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

113. Dimostrare che l'equazione

$$A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0,$$

in cui è

$$\begin{aligned}
A_4 &= m^5 - l\,m^3 n + m^2 l^4,\\
A_3 &= 4\,m^4 n - 3\,l\,m^2 n^2 - 11\,m^3 l^3 + 2\,m\,n\,l^4,\\
A_2 &= 6\,m^3 n^2 - 3\,m n^3 l + 64\,m^4 l^2 - 49\,l^3 n\,m^2 + n^2 l^4,\\
A_1 &= 4\,m^2 n^3 - n^4\,l + 128\,m^3 n\,l^2 - 65\,m\,n^2 l^3,\\
A_0 &= m\,n^4 + 64\,m^2 n^2 l^2 - 27\,l^3 n^3,
\end{aligned}$$

ha due radici eguali, ed esprimere queste e l'altre radici in funzioni di l, m, n.

D. Besso.

(*) Le questioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.

114. Si considerano tutte le frazioni, non inferiori all'unità, che hanno il numeratore uguale ad n ed il denominatore privo di fattori quadrati (diversi dall'unità). Dimostrare che la somma dei massimi numeri interi, i cui quadrati non superano le frazioni considerate, è uguale ad n.

115. Sia $\varphi(n)$ il numero dei numeri primi con n e non superiori ad n. Dimostrare che, se α, β, γ, ... sono tutti gli interi che entrano (esattamente o no) un numero dispari di volte in $2n$, si ha:

$$\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)+\varphi(\gamma)+\ldots\ldots=n^2.$$

116. Dimostrare che, se nella serie $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots\ldots$ si cambia il segno ad ogni termine il cui denominatore ha la forma $4k+1$ ed è composto d'un numero dispari di fattori primi, uguali o disuguali, o ha la forma $4k-1$ ed è composto d'un numero pari di tali fattori, la somma della serie che si ottiene è $\frac{\pi}{2}$. In altri termini

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\frac{1}{23}+\ldots=\frac{\pi}{2}.$$

117. Dimostrare che, se si cambiano i segni dei termini nella serie

$$\varphi(1)+\frac{\varphi(3)}{9}+\frac{\varphi(5)}{25}+\frac{\varphi(7)}{49}+\ldots.$$

seguendo la legge indicata nella precedente quistione, la somma della serie che si ottiene è uguale a

$$\frac{48}{\pi^3}\left(1-\frac{1}{9}+\frac{1}{25}-\ldots.\right).$$

E. Cesàro.

118. L'inviluppo dei lati dei triangoli iso-ortocentrici e iscritti in un dato cerchio è una conica concentrica e bitangente alla circonferenza dei nove punti, comune a tutti quei triangoli, e avente un fuoco nel comune ortocentro, e l'altro fuoco nel centro del dato cerchio.

S. Catania.

119. In un cerchio O siano OA, OB due raggi perpendicolari l'uno all'altro. Immaginando diviso il raggio AO in n parti uguali nei punti $A_1, A_2, \ldots\ldots A_{n-1}$, poi condotte le corde BA, BA_1B_1,

$BA_2B_2, \ldots . BA_{n-1}B_{n-1}$, dimostrare che la somma dei triangoli BAA_1, BB_1A_2, $BB_2A_3, \ldots . BB_{n-1}O$, quando n tende all'infinito, ha per limite il quadrante BOA.

A. Lugli.

120*. Nel piano d'un cerchio è dato un punto C. Dimostrare che vi sono, in generale, quattro triangoli equilateri ABC, ciascuno dei quali ha il lato AB tangente in B al dato cerchio e costruirli. I quattro vertici A sono per diritto.

S. Catania.

121*. Risolvere l'equazione

$$x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 5x + 1 = 0.$$

F. Giudice.

122*. Costruito sopra un raggio AB di un cerchio un triangolo equilatero ABC e condotta la congiungente dei punti di mezzo dei lati AC, BC, questa determina sull'arco BC un arco BM; trovare con quale approssimazione quest'arco rappresenta un quattordicesimo della circonferenza.

F. Palatini.

123*. Sull'ipotenusa d'un triangolo rettangolo, esternamente ad esso, è costruito un quadrato. Se l'intera figura ruota intorno ad un cateto del triangolo, dimostrare che il volume generato dal quadrato è equivalente ad un cilindro retto avente per raggio di base l'ipotenusa e per altezza la somma dei cateti.

V. Correnti.

124*. Dato un cerchio, siano A, B, C, D, E, F i punti che lo dividono in sei parti uguali. Una retta AM ruoti nel piano del cerchio, intorno al punto A, incontrandolo in un punto variabile H. Dimostrare che tirata la corda HE, che incontra il diametro AD in I, e per I la perpendicolare IL a questo diametro, il luogo dei punti in cui IL incontra AM è la segante CD.

125*. Siano AD, AE le rette che dividono l'angolo retto di un triangolo rettangolo ABC in tre parti uguali, incontrando l'ipotenusa in D, E, dimostrare che si ha:

$$BE \, . \, DC = 3 BD \, . \, EC.$$

S. Gatti.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

GIACOMO BELLACCHI. — *Lezioni di Algebra elementare.* – Parte seconda: Teoria dell'equazioni. — Firenze, Tip. Barbera, 1891. — Prezzo: L. 3.

Della prima parte: *Aritmetica generale,* si è tenuta parola in questo Periodico (an. V, fasc. III); ed ora a proposito della seconda si possono ripetere le osservazioni generali che si fecero allora.

Tutta l'opera, piuttosto che un corso d'Algebra, va considerata come una raccolta preziosa di esercizi maestrevolmente svolti. Con ciò non s'intenda che le teorie vi sono esposte monche o senza cura, perchè è da ritenere anzi proprio il contrario; ma se può accadere di trovar l'una o l'altra teoria trattata in alcuna delle nostre migliori Algebre in guisa più soddisfacente che in questa, sarà difficile trovare in altre esercizi più spinosi e trattati con maggior bravura: gli stessi problemi dei corrieri, delle fontane, degli orologi e dei treni, che si ripresentano fatalmente in ogni Algebra, in questa appaiono come ringiovaniti dall'abilità dell'illustre A.

Ma per dare al lettore un'idea adeguata del presente libro, sarà bene trascriverne l'indice particolareggiato.

LEZIONE I. — Equazioni ad un'incognita.

Definizioni e teoremi sull'equivalenza. Equazioni di primo grado.

Esercizi. — Identità numeriche ed equazioni riducibili al primo grado. Relazioni fra i lati, le diagonali di un quadrilatero circoscritto ed il raggio del cerchio.

LEZIONE II. — Equazioni irrazionali e forme singolari.

Equazioni con radicali ridotte a forma razionale, ed in alcuni casi al primo grado. Significati dei simboli $\frac{m}{0}$, $\frac{0}{0}$ per il valore dell'incognita.

Esercizi. — Ricerca dell'equazioni di forma intera e che hanno una data radice irrazionale.

LEZIONE III. — Analisi dei problemi.

La regola di Platone per l'analisi tradotta in simboli ed illustrata con esempi. Definizioni d'Euclide sovra i dati e i porismi. Cenno sul metodo della falsa posizione.

Esercizi. — Problemi sopra gl'interessi e gli sconti semplici, il moto uniforme, i pesi specifici, sulla corona di Gerone, ecc..

LEZIONE IV. — Proprietà euleriane del triangolo.

Distanza fra i centri O, I, I_a, I_b, I_c, dei cerchi circoscritto, inscritto, exinscritti ed il punto H comune alle altezze di un triangolo ABC; relazioni fra i lati dei triangoli IOH, ABC.

Esercizi — Circonferenza dei nove punti, ed altri luoghi geometrici; punti di Beltrami o di Lemoine e di Crelle o di Brocard.

Osservazioni. — Le interessanti proprietà contenute in questo capitolo sono state dimostrate, come era naturale in un'Algebra, con **metodi algebrici**: potrà essere utile ai giovani cercarne le dimostrazioni geometriche o trigonometriche. Badino inoltre i giovani che a proposito del punto di Beltrami, nel testo è solo dimostrato che le corde parallele ai lati condotte per esso hanno a due a due gli estremi conciclici, ma la dimostrazione agevole che i tre cerchi coincidono è lasciata alla loro diligenza.

Lezione V. — Determinanti delle funzioni lineari.

Nozioni sulle coordinate cartesiane e plucheriane. Sistemi equivalenti. Determinanti del secondo e terzo ordine; loro proprietà e cenno storico.

Esercizi. — Addizione e prodotto dei determinanti. Proprietà aritmetiche e geometriche espresse con determinanti.

Lezione VI. — Sistemi di equazioni lineari.

Teoremi fondamentali. I metodi della sostituzione, della riduzione allo stesso coefficiente e dei moltiplicatori indeterminati. Coordinate trimetriche d'un punto e di una retta; tetrametriche del punto e del piano.

Esercizi. — Sistemi speciali di n equazioni lineari. Problemi di primo grado a più incognite; quesiti del Fibonacci e del Pacioli, con cenni storici.

Lezione VII. — Discussione delle formole risolventi i sistemi di primo grado.

Le forme $\frac{m}{0}$, $\frac{0}{0}$ nell'equazioni lineari a più incognite, con esempi geometrici. Teoremi per la coesistenza e l'indeterminazione dei sistemi.

Esercizi. — Porismi d'Euclide. Equazioni di una punteggiata, d'un fascio di piani, di rette nello spazio, e condizioni del loro incontro. Teorema di Desargues. Stella di rette e spazio lineare a tre dimensioni, con la rappresentazione del Nicoli. Veri valori delle radici nell'equazioni di secondo, terzo e quarto grado aventi nullo al limite il coefficiente del primo termine.

Lezione VIII. — Interpretazione dei valori delle incognite.

Problemi e significato delle radici negative; costruzioni grafiche per le radici dell'equazioni di secondo grado.

Esercizi. — Le radici di un'equazione cubica derivante da un problema di Archimede interpretate da Poinsot (il problema è il seguente: con un piano segare una sfera in un dato rapporto); esempi simili. Problemi sopra le intensità luminose. Rapporto anarmonico e serie proiettive di punti.

Lezione IX. — Le diseguaglianze di primo grado.

Teoremi; regola di risoluzione ed esempi. Diseguaglianze a due variabili e loro rappresentazioni geometriche.

Esercizi. — Relazioni fra due lati e le bisettrici degli angoli opposti in un triangolo. Dimostrazione di Cauchy per il confronto fra le medie aritmetica e geometrica di n quantità positive. Numeri delle combinazioni binarie e ternarie di m elementi $a_1, a_2, \ldots, a_m$, con la somma degli indici minore di un numero dato. Teoremi aritmetici con dimostrazioni originali di Campano da Novara, di Fibonacci e di Fermat.

Lezione X. — Le diseguaglianze del secondo grado.

Teoremi principali e regole di risoluzione. Quesiti diversi sul triangolo: problema sul manometro.

Esercizi. — Polare comune a due cerchi. Parallelepipedo rettangolo di nota superficie e nota diagonale con uno spigolo medio armonico fra gli altri due. Incontro di due gravi ascendenti per la linea verticale. Cilindro massimo inscritto nello sferoide. Problemi di secondo grado risoluti da Bhascara.

Lezione XI. — La forma quadratica ternaria.

Riduzione di un polinomio quadrico ed omogeneo con tre variabili alla somma dei quadrati di tre funzioni lineari, e significato geometrico per le coordinate cartesiane e plucheriane. Semplici luoghi geometrici ed inviluppi.

Esercizi. — Altri luoghi geometrici di un punto ed inviluppi di rette. Genesi delle coniche trovata da Maclaurin, e porisma d'Euclide; proposizioni correlative di Pascal e Brianchon. Figure piane omologiche.

Lezione. XII. — Sistemi di equazioni quadriche.

Soluzione dei sistemi di una o due quadriche insieme ad $n-1$ od $n-2$ equazioni lineari. I punti e le tangenti comuni a due coniche si determinano risolvendo una quartica od una cubica. Costruzione delle radici di un'equazione di terzo o quarto grado mediante una circonferenza ed una parabola.

Esercizi. — Sistemi particolari di n equazioni quadriche ad n incognite. Formula del Sacchi per l'area del triangolo. Sistema di equazioni per esprimere i lati di un triangolo in funzione delle bisettrici degli angoli. Trisezione dell'arco circolare mediante l'iperbole; iscrizione degli ettagoni ed enneagoni regolari nel cerchio. Problema del Malfatti: inscrivere in un triangolo tre cerchi tangenti tra loro. Il cerchio osculatore e le sviluppate delle coniche; teoremi di Steiner e Joachimstahl.

Osservazione. — La soluzione del problema del Malfatti è la stessa che fu data dall'A, alquanto semplificata; i giovani iniziati nella trigonometria potranno con l'aiuto di questa semplificare ancora un po' la soluzione del prof. Bellacchi.

Ed ora dopo aver notato, nuovo pregio dell'opera le numerose ed interessanti note storiche, mi rimane da esaminare se questa possa o no essere adottata come libro di testo nelle nostre scuole secondarie.

L'A. opina di sì, se ho letto bene nell'avvertenza premessa alla seconda parte; io, senza contraddire recisamente, osservo che il suo libro presenta le seguenti difficoltà per un primo insegnamento d'Algebra: 1ª la quasi assoluta assenza di esercizi proposti da risolvere ma non risoluti; 2ª il frequente uso d'artifici speciali, che, mentre conferiscono all'eleganza della soluzione, sono insieme ostacolo al ribadirsi nella mente dei discepoli di quelle teorie generali, che si vogliono illustrare; 3ª un certo disordine per cui, a mo' d'esempio, nel I volume si risolvono le equazioni di 2°, 3° e 4° grado; e nel III si definisce l'equazione e si risolvono l'equazioni di 1° grado. Ma a queste piccole mende un insegnante volenteroso, che abbia da fare con una scolaresca volonterosa e intelligente, può facilmente trovare rimedio.

Termino col porgere al chiaro A. e in questo s'uniranno a me molti colleghi, vive azioni di grazia pel godimento avuto dalla lettura della sua opera.

F. Viaggi.

Prof. Francesco Panizza. – *Aritmetica razionale.* – Ulrico Hoepli — Milano, 1891.

L'Aritmetica razionale del prof. Panizza viene a completare felicemente la raccolta dei manuali Hoepli per quanto riguarda la Matematica elementare.

Certamente questa operetta non è da considerarsi come un trattato di Aritmetica ad uso delle scuole, inquantochè i vari argomenti sono semplicemente abbozzati con spigliatezza e sobrietà bene spesso degne d'essere imitate, ma che qualche volta possono sembrare eccessive.

Ciò nonpertanto le definizioni (tranne forse quelle di numero e di addizione, che del resto lasciano a desiderare in quasi tutti i trattati) e le dimostrazioni sono esposte col voluto rigore ed oltre a ciò l'Autore insiste molto opportunamente nel distinguere in ogni caso dai risultati delle operazioni che sono conseguenza delle definizioni, quelli che si assumono per convenzione.

Tra i vari capitoli troviamo specialmente degni di nota quello intorno alla ricerca del minimo comune multiplo di più numeri esposta una buona volta indipendentemente dai numeri primi e collocata quindi nel suo posto naturale subito dopo la teoria dei divisori; e quello finale nel quale viene elegantemente riassunta l'evoluzione del concetto di numero.

Anche la determinazione del limite di un numero decimale periodico è trattato con molta chiarezza: ma l'Autore, stabilita la forma della frazione limite, dice semplicemente che essa si chiama la sua generatrice, senza dimostrare che ridotta in decimali deve riprodurre il dato numero periodico, cosa che a mio parere non sarebbe stata lunga nè difficile e che avrebbe completato l'argomento.

Se però il manuale del prof. Panizza, come abbiamo detto, non è fatto per un primo studio dell'Aritmetica, è invece consigliabile a tutti coloro che avendo studiata questa materia in altri tempi, fossero costretti a tornarci su, poichè troveranno in esso un buon riassunto di Aritmetica razionale e nello stesso tempo una eccellente introduzione all'Algebra.

U. Scarpis.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des mathématiques publié par G. Eneström. Nouvelle série. 5. N. 4. — Stockholm, 1891.

Bulletin scientifique, rédigé par M. E. Lebon. Sixième année. N. 1, 2, 3. — A. Colin et C., éditeurs. Paris, 1891.

El Progreso matemático. Director Don Zoel G. de Galdeano. Año I. N. 10, 11 e 12; Octubre, Noviembre, Diciembre de 1891. Zaragoza.

Giornale di Matematiche ad uso degli Studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Vol. XXIX. Settembre-Ottobre 1891. — Napoli, B. Pellerano.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. DE LONGCHAMPS. 3e Série, XV année. N. 11, 12; Novembre, Décembre 1891. — Paris, Librairie Ch. Delagrave.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. VUIBERT. 16e année. Nombres 3, 4, 5, 6. — Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles, 1891.

Mathesis, recueil mathématique publié par P. MANSION et J. NEUBERG. Deuxième série. Tome I. Novembre, Décembre 1891. — Gand, Ad. Hoste, éditeur.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo V, Fasc. VI; Novembre e Dicembre 1891.

Revue de Mathématiques spéciales, rédigée par M. B. NIEWENGLOWSKI. 2e année N. 2, 3; Novembre, Décembre 1891. — Paris, Librairie Nony et C., 17, rue des Écoles.

Rivista di matematica, diretta da G. PEANO. Fasc. 10°-12°; Ottobre-Dicembre 1891. — Torino, Fratelli Bocca.

BELLACCHI (G.) — Galileo e i suoi successori. Discorso letto nel R. Istituto tecnico Galilei di Firenze il dì XXIX ottobre MDCCCLXXXXI. — Firenze, tipografia Galletti e Cocci, 1891.

FIBBI (C.) — I sistemi doppiamente infiniti di raggi negli spazii di curvatura costante. (Annali della R. Scuola normale Superiore di Pisa, 1891).

FRATTINI (G.) — Aritmetica pratica per uso delle Scuole elementari del Regno, approvata da molti Consigli scolastici. Parte I, 5a edizione. — Ditta G. B. Paravia e C., 1892. - Prezzo: cent. 40.

GARBIERI (G.) — Trattato di aritmetica razionale. Libro di testo per i Ginnasi superiori e per gli Istituti tecnici e militari. 2a edizione, interamente rifatta. — Padova, tip. F. Sacchetto, 1891. - Prezzo: L. 2.

GIUDICE (F.) — G. Lazzeri ed A. Bassani: *Elementi di Geometria*. (Rivista di Matematica. Anno 1891).

LORIA (G.) — Esame di alcune ricerche concernenti l'esistenza di radici nelle equazioni algebriche. (Journal d'histoire des mathé. par Eneström. Nou. série 5, n.° 4).

NICOLI (F.) — Interpretazione geometrica del campo delle soluzioni reali di una equazione quadratica a quattro variabili. (Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Vol. VIII, Serie II).

VALERI (D.). — Proprietà metriche delle cubiche gobbe. (Id. id.)

REGGIO (G. Z.) — *Complementi di geometria* proposti come libro di testo pel secondo biennio degli Istituti tecnici e come avviamento ai corsi superiori ai giovani licenziandi dei Licei e degli Istituti. — Treviso, Tip. L. Zoppelli, 1891. - Prezzo: L. 3.

Chiusura della redazione il dì 29 dicembre 1891.

DELL'ANALISI INDETERMINATA DI SECONDO GRADO

(Continuazione, V. pag. 7).

13. Esporremo ora un'altra maniera per trovare le soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$. Quando $\sqrt{D}$ è più vicina ad m, suo valore a meno di un'unità in difetto, che non ad $m+1$, questa seconda maniera è più rapida di quella che fu già esposta nel n. 8 e discussa nel n. 9.

Ricordando che si è posto $D = m^2 + n$, si consideri il sistema

$$\begin{array}{l} x^2 - Dy^2 = N \\ x^2 - Dy^2 = -Nn \\ x^2 - Dy^2 = Nn^2 \\ x^2 - Dy^2 = -Nn^3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{array} \qquad [B]$$

Detta in generale (x, y) una soluzione di una delle equazioni del sistema, si riconoscerà facilmente che $x > my$, se la soluzione appartiene a equazione di posto dispari, e che $x < (m+1)y$, se essa appartiene a equazione di posto pari.

Una soluzione appartenente a equazione di posto dispari sarà detta *singolare*, se, oltre alla condizione $x > my$, si verificherà l'altra: $x \geq (m+1)y$. - Una soluzione appartenente a equazione di posto pari si dirà singolare, se, oltre alla condizione $x < (m+1)y$, si verificherà l'altra: $x \leq my$.

Affinchè una soluzione sia singolare, è necessario e sufficiente che in essa il valore della y non superi la radice quadrata del secondo membro diviso per $2m+1-n$, se l'equazione occupa posto dispari; oppure la radice del secondo membro diviso per n e positivamente preso, se l'equazione occupa posto pari. - È facile verificare.

Sia (x_1, y_1) una soluzione qualsiasi della prima equazione. Se essa è singolare, non discuteremo più avanti. Se no, porremo:

$x_1 = my_1 + h$, intendendo per h un numero che sarà positivo, perchè $x_1 > my_1$. Sostituendo $my_1 + h$ invece di x_1 nella prima equazione e risolvendo per rispetto ad y_1, viene:

$$y_1 = \frac{mh \pm \sqrt{Dh^2 - Nn}}{n}.$$

Epperò, posto $Dh^2 - Nn = k^2$ (k intera e positiva), si avrà successivamente:

$$y_1 = \frac{\pm k + mh}{n}$$

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right) (\pm k + h \sqrt{D}),$$

indicando con (k, h) una certa soluzione della seconda equazione. Se la (k, h) è singolare, non discuteremo più avanti. Se non è tale, se cioè $k > mh$, rifiuteremo il segno — davanti alla k delle due precedenti eguaglianze, affinchè y_1 risulti positiva. Porremo inoltre: $k = mh + h'$ (h' positiva). Fatto ciò, procedendo nella solita maniera, troveremo che, detta (k', h') una certa soluzione della terza equazione,

$$k = \frac{\pm k' + mh'}{n}$$

$$k + h \sqrt{D} = \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right) (\pm k' + h' \sqrt{D}).$$

Ma dovremo rifiutare il segno — davanti a k', perchè $k' > mh'$. Perciò, combinando le espressioni di $x_1 + y_1 \sqrt{D}$ e di $k + h \sqrt{D}$,

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right)^2 (k' + h' \sqrt{D}).$$

Se (k', h') è soluzione singolare della terza equazione, non discuteremo più avanti. Nel caso contrario dimostreremo che

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right)^3 (\pm k'' + h'' \sqrt{D}),$$

significando con (k'', h'') una certa soluzione della quarta equazione. Se (k'', h'') non sarà peranco soluzione singolare della quarta equazione, all'eguaglianza precedente succederà l'altra:

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right)^4 (k''' + h''' \sqrt{D}).$$

E via così. — Argomentando come si è fatto più volte nel corso di questo scritto, si concluderà che

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right)^\lambda (\pm x' + y' \sqrt{D}),$$

intendendo per x' e y' i valori della x e della y in una soluzione singolare della $(\lambda + 1)^a$ equazione, ed avvertendo che, per λ pari, bisogna escludere il segno — davanti alla x'.

Per risolvere l'equazione $x^2 - Dy^2 = N$ si ricercheranno adunque le soluzioni singolari (x', y') delle successive equazioni del sistema $[B]$, ossia quelle soluzioni nelle quali la y non supera la radice del secondo membro della relativa equazione diviso per $2m + 1 - n$, se l'equazione occupa posto dispari; oppure quelle soluzioni nelle quali la y non supera la radice del secondo membro della relativa equazione, positivamente preso e diviso per n, se l'equazione occupa posto pari. Si supponga che la soluzione singolare (x', y') siasi ottenuta dopo λ passaggi da un'equazione del sistema $[B]$ alla susseguente, e che il relativo binomio $\pm x' + y' \sqrt{D}$, moltiplicato per

$$\frac{m + \sqrt{D}}{n}$$

λ volte di seguito, dia nascita a prodotti interi della stessa forma, determinato convenientemente il segno della x', che, come si disse, per λ dispari è ambiguo. Alla (x', y') corrisponderà una soluzione (x, y) dell'equazione proposta: e quanto alla x e alla y, esse saranno la parte razionale e il coefficiente di $\sqrt{D}$ relativo all'ultimo prodotto. È poi superfluo aggiungere, perchè risulta dalle cose dette di sopra, che tal maniera di derivazione conviene a qualsivoglia soluzione della proposta equazione.

14. Per ciò che riguarda la discussione del metodo, ci occuperemo anche qui del rapporto $y : y'$, la cui grandezza, come si vide nel n. 9, ha stretta attinenza con l'efficacia del metodo stesso. Perciò supporremo che la soluzione (x', y') sia stata ottenuta dopo λ passaggi da un'equazione del sistema $[B]$ alla succedanea, e di-

mostreremo che, se $\lambda > 0$, il detto rapporto è maggiore dell'unità. Di più che

$$y > \frac{m + \sqrt{D}}{m + \sqrt{D} + 1} \cdot \frac{y'}{(\sqrt{D} - m)^{\lambda - 1}}.$$

Dalla quale formola, essendo $\sqrt{D} - m$ minore di $\frac{1}{2}$, apparisce chiaramente che il rapporto $y : y'$ (sempre maggiore dell' unità quando $\lambda > 0$) cresce rapidamente al crescere di λ.

Che il rapporto $y : y'$ è maggiore dell'unità, risulta dal ricordare che, se (x, y) non è soluzione singolare della prima equazione, essa si deriva da una soluzione (k, h) della seconda; e che questa soluzione è legata alla (x, y) dalla relazione $x - my = h$. Essendo $x > my$, e nel medesimo tempo $x < (m + 1)y$, si conclude che $y > h$. Similmente, se (k, h) non è soluzione singolare della seconda equazione, talchè si derivi da una soluzione (k', h') della terza, si avrà $h > h'$, e a più forte ragione: $y > h'$. Ecc. - Dunque finalmente: $y > y'$.

Supponendo ora che la (x', y'), ottenuta dopo λ passaggi $(\lambda > 0)$, sia soluzione singolare di un'equazione di posto dispari, si avrà:

$$x + y\sqrt{D} = \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right)^{\lambda} (x' + y'\sqrt{D}).$$

E di più:

$$x < (m + 1)y \quad ; \quad x' \geq (m + 1)y'.$$

Conseguentemente:

$$y > \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right)^{\lambda} y' = \frac{y'}{(\sqrt{D} - m)^{\lambda}}.$$

E a più forte ragione:

$$y > \frac{m + \sqrt{D}}{m + \sqrt{D} + 1} \cdot \frac{y'}{(\sqrt{D} - m)^{\lambda - 1}}.$$

Supponendo invece che (x', y') appartenga ad equazione di posto pari, si avrà:

$$x + y\sqrt{D} = \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right)^{\lambda} (\pm x' + y'\sqrt{D}).$$

Ma si ricordi che questa eguaglianza è preceduta da un'altra della forma

$$x + y\sqrt{D} = \left(\frac{m+\sqrt{D}}{n}\right)^{\lambda-1}(u + v\sqrt{D}),$$

nella quale u e v significano i valori delle incognite in una soluzione non singolare dell'equazione di posto dispari, che precede quella alla quale (x', y') appartiene: cosicchè

$$x < (m+1)y \quad ; \quad u > mv;$$

e perciò:

$$y\,(m + 1 + \sqrt{D}) > \left(\frac{m+\sqrt{D}}{n}\right)^{\lambda-1}(m + \sqrt{D})v.$$

Da questa disuguaglianza, ricordando che $v > y'$, come poco sopra si è dimostrato, risulta:

$$y > \frac{m+\sqrt{D}}{m+\sqrt{D}+1} \cdot \frac{y'}{(\sqrt{D}-m)^{\lambda-1}}.$$

Applichiamo il metodo alla ricerca di una soluzione dell'equazione $x^2 - 205y^2 = 1$. In questo caso $m = 14$, $n = 9$, $2m + 1 - n = 20$. Il sistema [B] diviene:

$x^2 - 205\,y^2 = 1$	0
$x^2 - 205\,y^2 = -9$	1
$x^2 - 205\,y^2 = 81$	2
$x^2 - 205\,y^2 = -729$	9
$x^2 - 205\,y^2 = 6561$	18
$x^2 - 205\,y^2 = -59049$	81
. . . .	
. . . .	

Accanto ad ogni equazione sta scritto il valor massimo per la y delle relative soluzioni singolari, ossia la radice a meno di un'unità del valore positivo del secondo membro, diviso per 20 o per 9, secondochè il posto dell'equazione è dispari o pari. Nel provare sulla 6ª equazione i successivi valori interi e positivi della y, dal 17 in poi, affinchè $205\,y^2 - 59049$ risulti positivo, s'incontra alla prima prova la soluzione singolare (14, 17). Dato al primo termine il segno positivo, il binomio $\pm 14 + 17\sqrt{205}$, moltiplicato 5 volte per

$$\frac{14 + \sqrt{205}}{9},$$

produce l'un dopo l'altro i binomi:

$$409 + 28\sqrt{205}\,;\ 1274 + 89\sqrt{205}\,;\ 4009 + 280\sqrt{205}\,;$$
$$12614 + 881\sqrt{205}\,;\ 39689 + 2772\sqrt{205}.$$

Si ottiene così per l'equazione proposta la soluzione (39689, 2772).

(Continua).

G. FRATTINI.

LA DEFINIZIONE DI PROPORZIONE
ED IL V LIBRO DI EUCLIDE

(Continuazione e fine: V. pag. 16).

PROPORZIONI.

17. Date due classi in corrispondenza metrica e prese due grandezze A e B della prima e le corrispondenti C e D della seconda, si dice che le quattro grandezze nell'ordine in cui sono scritte *sono in proporzione* e si scrive:

$$A : B = C : D.$$

Una proporzione individua una corrispondenza metrica fra le due classi a cui appartengono le sue grandezze, la quale potrà dirsi per brevità *corrispondenza della proporzione.*

18. Dal teorema del § 12 discende subito che date tre grandezze A, B, C delle quali le prime due sieno omogenee, esiste una grandezza ed una sola D (o più equivalenti) omogenee a C, e tale che $A : B = C : D$.

19. Si ha per definizione che

$$A : A = B : B$$

cioè che

$$A : A' = B : B' \text{ quando } A = A',\ B = B'.$$

20. Avendosi che nella corrispondenza metrica $\binom{A}{C}$ si corrispondono le grandezze delle due classi che sono simili rispetto ad A e C, si ha subito che sono vere le seguenti proporzioni:

$$A : mA = C : mC$$

$$A : \frac{1}{n}A = C : \frac{1}{n}C$$

$$A : \frac{m}{n}A = C : \frac{m}{n}C$$

$$A : \lim \frac{m}{n}A = C : \lim \frac{m}{n}C.$$

21. Poichè la proporzione

$$A : B = C : D$$

individua la corrispondenza metrica $\begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix}$, si vede subito che da questa e dalla definizione data discendono le proporzioni:

$$B : A = D : C$$

$$C : D = A : B$$

$$D : C = B : A.$$

22. Se la proporzione del § precedente è fra grandezze tutte omogenee, allora per il teorema del § 15, essendo corrispondenti le coppie A, B e C, D, lo sono, in un'altra corrispondenza metrica, le altre A, C e B, D, cioè si ha:

$$A : C = B : D;$$

talchè in una proporzione di grandezze tutte omogenee si possono permutare i medi.

Ai quattro aspetti indicati nel § precedente che può prendere una proporzione, si possono allora aggiungere gli altri quattro:

$$A : C = B : D$$

$$B : D = A : C$$

$$C : A = D : B$$

$$D : B = C : A.$$

23. Data la proporzione

$$A : B = C : D,$$

per le proprietà della corrispondenza metrica $\begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix}$ (§ 10), si ha subito che sarà contemporaneamente

$$A \gtreqless B \quad \text{e} \quad C \gtreqless D$$

e che A e C saranno simili rispetto a B e D, cioè che sarà contemporaneamente

$$A = \frac{m}{n} B \quad \text{e} \quad C = \frac{m}{n} D$$

o

$$A = \lim \frac{m}{n} B \quad \text{e} \quad C = \lim \frac{m}{n} D.$$

24. Data la proporzione

$$A : B = C : D,$$

dalla sua stessa corrispondenza metrica discendono immediatamente le altre

$$A \pm B : A = C \pm D : C$$
$$A \pm B : B = C \pm D : D$$

e, pure dalla stessa corrispondenza, che

$$\frac{m}{n} A : B = \frac{m}{n} C : D$$

$$\lim \frac{m}{n} A : B = \lim \frac{m}{n} C : D$$

$$\frac{m}{n} A : \frac{p}{q} B = \frac{m}{n} C : \frac{p}{q} D \text{ ecc..}$$

25. Se B e D sono variabili i cui successivi stati sono corrispondenti nella corrispondenza metrica $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$, talchè sussista la proporzione

$$A : B = C : D$$

per tutti gli stati corrispondenti delle variabili B e D, sarà anche, a causa della stessa corrispondenza metrica :

$$A : \lim B = C : \lim D.$$

26. Se si ha la proporzione

$$A : B = C : D$$

e quindi sussiste la corrispondenza metrica $\begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix}$, per il teorema del § 14 sussisteranno anche le altre

$$\begin{vmatrix} \frac{m}{n} A \, , & \frac{m}{n} B \\ C \, , & D \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} \lim \frac{m}{n} A \, , & \lim \frac{m}{n} B \\ C \, , & D \end{vmatrix}$$

e quindi avremo le proporzioni

$$\frac{m}{n} A : \frac{m}{n} B = C : D$$

$$\lim \frac{m}{n} A : \lim \frac{m}{n} B = C : D .$$

In modo simile si ha

$$\frac{m}{n} A : \frac{m}{n} B = \frac{p}{q} C : \frac{p}{q} D \text{ ecc..}$$

27. Se si hanno le proporzioni

$$A : B = C : D$$
$$M : N = C : D ,$$

poichè esse hanno per corrispondenze le due $\begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} M, & N \\ C, & D \end{pmatrix}$, da queste per il teorema del § 13 discenderà l'altra $\begin{pmatrix} A, & B \\ M, & N \end{pmatrix}$ e quindi avrà luogo la proporzione

$$A : B = M : N .$$

28. Date le proporzioni

$$A : B = M : N$$
$$B : C = N : P$$

le loro corrispondenze che sono $\begin{pmatrix} A, & B \\ M, & N \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} B, & C \\ N, & P \end{pmatrix}$ costituiscono la corrispondenza unica $\begin{pmatrix} A, & B, & C \\ M, & N, & P \end{pmatrix}$ e quindi si ha la proporzione

$$A : C = M : P .$$

Analogamente da

$$A : B = C : D$$
$$A : M = C : N$$

discende la proporzione

$$B : M = D : N,$$

e dalle due

$$A : B = C : D$$
$$M : B = N : D,$$

l'altra

$$A : M = C : N.$$

29. Dalle proporzioni

$$(1) \qquad A : B = N : P$$
$$(2) \qquad B : C = M : N$$

dico che discende l'altra

$$A : C = M : P.$$

Cerco infatti X omogenea ad M, N, P tale che (§ 18)

$$(3) \qquad B : C = P : X.$$

Allora (1) e (3) per il teorema del § precedente danno

$$(4) \qquad A : C = N : X,$$

mentre (2) e (3), per il teorema del § 27, danno

$$M : N = P : X,$$

proporzione fra grandezze omogenee da cui, permutando i medi (§ 22), si ha

$$(5) \qquad M : P = N : X.$$

La (4) e (5) danno

$$A : C = M : P, \text{ c. d. d.}$$

30. Se

$$A : B = C : D$$
$$M : B = C : N,$$

permutando i medi nella seconda ed applicando il teorema del § precedente, si conclude che

$$A : M = N : D.$$

31. Date le proporzioni

$$A_1 : B = C_1 : D$$
$$A_2 : B = C_2 : D$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$A_n : B = C_n : D,$$

poichè esse hanno tutte la stessa corrispondenza $\binom{B}{D}$ e può scriversi

$$\begin{pmatrix} B, & A_1, & A_2, \dots A_n, & A_1 + A_2 + \dots + A_n, \dots \\ D, & C_1, & C_2, \dots C_n, & C_1 + C_2 + \dots + C_n, \dots \end{pmatrix},$$

si vede che vale la proporzione

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n : B = C_1 + C_2 + \dots + C_n : D.$$

32. Passiamo ora ad occuparci delle proporzioni fra grandezze tutte omogenee.

Dalla definizione di proporzione si rileva subito che se $A = A'$, si ha

$$A : B = A' : B \quad \text{e} \quad B : A = B : A',$$

qualunque sia B omogenea ad A.

33. Data la proporzione fra grandezze omogenee

$$A : B = C : D,$$

permutando i medi ed applicando le proprietà già dimostrate, si conclude che si avrà contemporaneamente

$$A \gtreqless C \quad \text{e} \quad B \gtreqless D,$$

ed A e B saranno simili rispetto a C e D.

34. Dalle proporzioni, supposte fra grandezze omogenee, del § 20 permutando i medi si conclude, che se A e B sono grandezze omogenee sussistono le proporzioni

$$A : B = \frac{m}{n} A : \frac{m}{n} B$$
$$A : B = \lim \frac{m}{n} A : \lim \frac{m}{n} B.$$

35. Dalla proporzione fra grandezze omogenee

$$A : B = C : D,$$

permutando i medi ed applicando il teorema del § 24, si rileva che sono valide le proporzioni

$$A \pm C : A = B \pm D : B$$
$$A \pm C : C = B \pm D : D.$$

36. Come si vede, i teoremi sulle proporzioni si dimostrano tutti facilmente con l'accennata definizione, solo che si premettano considerazioni generali sulle corrispondenze delle classi.

La definizione data rassomiglia evidentemente assai a quella aritmetica, anzi si informa ad essa, essendo le grandezze simili rispetto a due altre quelle che ad esse (secondo la definizione aritmetica) hanno eguale rapporto. Per altro la definizione che ho dato non invoca il concetto generale di numero, ma solo quello di numero intero e (non altro che per brevità ma non necessariamente) quello di frazione - concetti i quali, ormai, sono indissolubili dal linguaggio ordinario.

37. È facile riconoscere ora come tale definizione coincida con quella d'Euclide.

Infatti se sia $A : B = C : D$, con la definizione del § 17 avremo la corrispondenza $\binom{A,\ B}{C,\ D}$, della quale due coppie corrispondenti sono pA, qB e pC, qD qualunque sieno p e q interi. Per la definizione di corrispondenza metrica sarà dunque

$$pA \gtreqless qB \text{ secondochè } pC \gtreqless qD,$$

ossia le quattro grandezze saranno in proporzione secondo la definizione d'Euclide.

Viceversa, sia insieme

$$pA \gtreqless qB \quad \text{e} \quad pC \gtreqless qD,$$

qualunque sieno gli interi p e q (definizione euclidea di proporzione). Allora possono darsi due casi: O per convenienti p_1, q_1 si ha $p_1 A = q_1 B$ e quindi $p_1 C = q_1 D$, ed allora nella corrispondenza metrica $\binom{A}{C}$ si corrispondono $\frac{p_1}{q_1} A$ e $\frac{p_1}{q_1} C$, cioè B e D, talchè si avrà $\binom{A,\ B}{C,\ D}$. Oppure ciò non accade, ed allora presi i numeri

q, $q^2, \ldots, q^n, \ldots$ con q numero intero qualunque, si troveranno convenienti numeri interi $p_1, p_2, \ldots p_n$ tali che sia

$$\begin{array}{l} p_1 A < qB < (p_1 + 1) A, \\ p_2 A < q^2 B < (p_2 + 1) A, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n A < q^n B < (p_n + 1) A, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

e che quindi, per l'ipotesi fatte, sia anche:

$$\begin{array}{l} p_1 C < qD < (p_1 + 1) C, \\ p_2 C < q^2 D < (p_2 + 1) C, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n C < q^n D < (p_n + 1) C, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Si vede allora che B è limite delle serie convergenti

$$\left| \begin{array}{llll} \frac{p_1}{q} A, & \frac{p_2}{q^2} A, \ldots & \frac{p_n}{q^n} A, \ldots \\ \frac{p_1+1}{q} A, & \frac{p_2+1}{q^2} A, \ldots & \frac{p_n+1}{q^n} A, \ldots \end{array} \right.$$

e D delle altre

$$\left| \begin{array}{llll} \frac{p_1}{q} C, & \frac{p_2}{q^2} C \ldots & \frac{p_n}{q^n} C, \ldots \\ \frac{p_1+1}{q} C, & \frac{p_2+1}{q^2} C, \ldots & \frac{p_n+1}{q^n} C, \ldots \end{array} \right.$$

le quali nella corrispondenza metrica $\binom{A}{C}$ sono corrispondenti. Corrisponderà dunque D a B in detta corrispondenza, cioè, come nel caso precedente, sarà $\binom{A,\ B}{C,\ D}$. Ne viene che in ogni caso si ha la proporzione $A : B = C : D$ anche nel nostro senso.

Torino, maggio 1891.

R. Bettazzi.

TEMI DI MATEMATICA

per la licenza nei Licei di Francia

(Sessione d'aprile 1891).

1. Dato un triangolo qualunque ABC, si domanda di condurre pel vertice A una retta AD tale, che se dai vertici B e C si abbassano delle perpendicolari Bb e Cc sopra AD, i due triangoli ABb, ACc siano equivalenti. — Vi sono più soluzioni? *(Besançon).*

2. Sapendo che le due equazioni

$$x^2 + px + q = 0 \quad , \quad x^2 + p'x + q' = 0$$

hanno in comune una radice, formare l'equazione che ammette per radici le seconde radici di ciascuna di queste equazioni. *(Bordeaux).*

3. A e B essendo due punti fissi ed OX la proiezione sopra un piano orizzontale P della retta AB che li congiunge e che taglia questo piano in O, si tracci nel piano P una retta OI inclinata su OX dell'angolo α. Trovare su OI un punto M tale che la somma dei quadrati delle sue distanze da A e B abbia il valore S^2, ossia $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = S^2$.

Minimo di questa somma e posizione corrispondente di M.

Come cambierà questo punto M, pel quale S è minimo, quando si farà variare l'angolo α?

I dati sono ang. $XOA = \beta$, $OA = a$, $OB = b$. *(Bordeaux).*

4. Dimostrare che se un numero intero è divisibile separatamente per più numeri interi dati, è divisibile pel loro minimo multiplo comune. Posto ciò, trovare due numeri interi tali che ciascuno sia divisibile per 20, per 30 e per 35 e che la differenza dei loro quadrati sia uguale a 529200. *(Caen).*

5. Calcolare i lati d'un triangolo sapendo che questi lati e la superficie sono rispettivamente uguali a quattro numeri interi consecutivi. *(Caen).*

6. Dato un cerchio di raggio R ed un punto P situato ad una distanza d dal centro, si domanda: 1° di condurre per il punto P due secanti rettangolari APC, BPD, seganti il cerchio nei punti A, B, C, D e tali che l'area del quadrilatero $ABCD$ sia uguale ad $\frac{1}{2}a^2$. — Discussione; 2° R, d, a essendo noti, di calcolare i lati del quadrilatero $ABCD$; — 3° di trovare questi lati nel caso di

$$d = \frac{R}{2}\sqrt{4 - \sqrt{5}}\,, \quad a^2 = R^2\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}. \quad \textit{(Clermont).}$$

7. Sopra un lato d'un triangolo, trovare un punto in modo che la somma dei quadrati delle perpendicolari abbassate da questo punto sugli altri due lati sia minima. *(Clermont).*

8. Risolvere un parallelogrammo conoscendo i valori p, q delle sue due coppie di lati paralleli e l'angolo acuto θ formato dalle sue diagonali.

Qual'è il maggior valore dell'angolo θ pel quale il problema è possibile, e, quale forma dà esso al parallelogrammo? *(Digione)*.

9. In un triangolo ABC, si sa che i lati sono rappresentati da numeri in progressione aritmetica. È data la mediana m che va al centro del lato medio ed il raggio r del cerchio inscritto nel triangolo. Si domandano le espressioni dei tre lati. Si rappresenterà il lato medio con x.

Quale relazione deve esistere fra m ed r affinchè il triangolo sia rettangolo? *(Grenoble)*.

10. Risolvere e discutere l'equazione

$$\operatorname{tang}^2 x + m \operatorname{sen}^2 x + 1 = 0,$$

in cui m è un parametro variabile.

Completare i calcoli quando $m = -\frac{16}{3}$ e trovare tutti gli archi che rispondono al quesito. *(Lilla)*.

11. In un triangolo rettilineo ABC si conosce la base $b = 428^m,27$; l'altezza $h = 303^m,64$ e la differenza degli angoli alla base $A - C = 21^\circ\ 47'\ 12'',4$. Si domanda di calcolare i lati a e c a meno d'un centimetro, gli angoli A e C a meno di $\frac{1}{10}$ di secondo. *(Lione)*.

12. Un punto A può muoversi senz'attrito lungo una retta fissa XY. Questo punto è sollecitato da due forze P e Q. La direzione della forza P fa con AY un angolo di 60°; la direzione della forza Q fa con AX un angolo di 45°. La forza Q è uguale a 10 Cg.; quale dev'essere la forza P perchè il punto A sia in equilibrio? *(Marsiglia)*.

13. Determinare un triangolo rettangolo conoscendo la somma m dei cateti e la somma k dell'ipotenusa e dell'altezza relativa all'ipotenusa. — Discussione. *(Montpellier)*.

14. Calcolare i lati e gli angoli d'un triangolo conoscendo la superficie di questo triangolo, il volume che esso genera ruotando intorno ad uno de' suoi lati a, e l'angolo A opposto a questo lato. Discutere il problema. *(Montpellier)*.

15. Dato un angolo circoscritto ad un cerchio, si domanda di condurre al cerchio una tangente che formi coi lati dell'angolo un triangolo di dato perimetro. *(Montpellier)*.

16. Volume del segmento sferico; dimostrazione. Mostrare che il volume può essere espresso anche dalla formola $V = Sh - \frac{\pi h^3}{12}$, essendo h l'altezza del segmento, ed S indicando l'area della sezione fatta nella sfera da un piano equidistante dalle basi. *(Nancy)*.

17. Data l'equazione

$$\operatorname{tang}(x + a) . \operatorname{tang}(x - b) = \pm \operatorname{tang}^2 x,$$

si domanda di ricavare $\operatorname{tang} x$.

Discutere la soluzione nel caso particolare in cui b è uguale ad a. *(Nancy)*.

18. Dividere 13 in due parti x ed y tali che $3\sqrt{x} + 2\sqrt{y}$ sia un massimo. (*Parigi*).

19. Sono dati due assi rettangolari Ox ed Oy; un cerchio di raggio R è tangente ad Oy nel punto O. Da un punto A di Ox si conduce una tangente AB che incontra Oy in B. Determinare la posizione del punto A in modo che sia $\overline{AB}\,.\,\overline{OB} = m^2$.

Si prenderà come incognita $OA = x$. (*Parigi*).

20. Determinare sopra una semicirconferenza $ACMB$, di raggio R, un punto M tale che conducendo la retta AM ed abbassando MP perpendicolarmente al diametro AB, il volume generato dal segmento circolare ACM, ruotando intorno al diametro AB, sia uguale a h volte il volume generato dal triangolo AMP. (*Parigi*).

21. Dividere una retta AB di lunghezza $2a$ in due parti MA ed MB tali che $\overline{MA}^2 + 3\,\overline{MB}^2$ sia minimo. (*Parigi*).

22. Pel vertice A del quadrato $ABCD$, si conduca una retta che incontri i lati CD e CB od i loro prolungamenti in E (sulla retta CD) ed in F (sulla retta CB); il lato del quadrato è a, la distanza EF è b; si domanda di calcolare la distanza x del punto C alla retta AEF. (*Poitiers*).

23. Dato un angolo $XOY = \alpha$, si prendano sul lato OX due punti A e B tali che sia $OA = a$, $OB = b$. Trovare sul lato OY un punto M $(OM = x)$ tale che MA sia bisettrice dell'angolo OMB. — Discussione. (*Rennes*).

24. Il sistema d'equazioni

$$\lambda x + a y = c b x + \lambda y = d,$$

ove a, b, c, d sono date ed ove λ è variabile, ammette per ciascun valore di λ una coppia x, y di soluzioni in generale determinate. Fra questi numeri x ed y vi è una relazione indipendente da λ; qual'è essa?

Stabilire come varia con λ il rapporto di y ad x. (*Rennes*).

25. Risolvere l'equazione

$$\frac{\cos x \,.\, \cos 3a}{1 - \cos^2 x} = m. \qquad (\textit{Rennes}).$$

26. Dato un rettangolo $OAMB$ la cui diagonale $OM = 2u$ e di cui l'angolo delle diagonali è 2α, s'innalzi dal punto M, sulla diagonale OM, una perpendicolare fino al suo incontro in M' col prolungamento della diagonale AB; pel punto M' si conducano delle parallele ai lati del primo rettangolo; si forma così un secondo rettangolo. Trovare la sua diagonale OM', come pure l'angolo delle sue diagonali in funzione di α e di u. (*Rennes*).

27. Due punti A e B si proiettano ortogonalmente in A', B' sopra una retta data indefinita xy. Posto $AA' = a$, $BB' = b$, $A'B' = c$, si domanda di determinare, mediante la sua distanza al punto A, il punto M di xy tale che l'angolo BMB' sia doppio dell'angolo AMA'. (*Rennes*).

28. Si indichi con y l'espressione $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, a, b, c, d essendo numeri dati. 1° Dimostrare che se $ad - bc$ non è zero, y varia sempre nello stesso senso

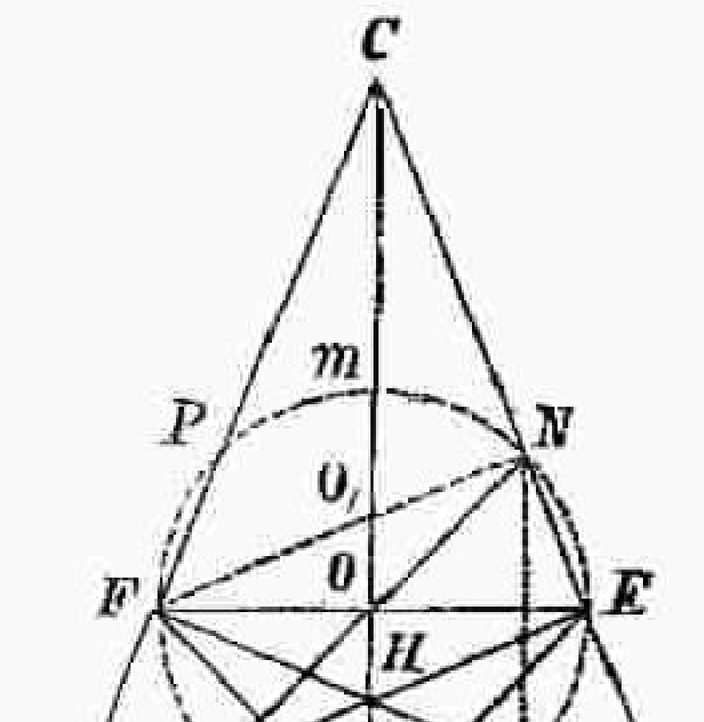
allorchè si danno ad x valori crescenti. 2° Si indichino con y_1, y_2, y_3, y_4 i valori che assume y quando si rimpiazza x con x_1, x_2, x_3, x_4, si domanda la relazione che esiste fra le due quantità

$$\frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} : \frac{y_1 - y_4}{y_2 - y_4}\ , \quad \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4}\ . \qquad (\textit{Tolosa}).$$

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Un teorema sul triangolo. — *Se in un triangolo isoscele la congiungente il piede dell'altezza di uno dei lati eguali, col punto medio dell'altro lato eguale, è parallela all'altezza corrispondente a quest'ultimo lato, il cerchio passante pei punti medi dei lati del triangolo, sega tali lati e le altezze in otto punti che sono vertici d'un ottagono regolare.*

Siano AE, BF, CD, rispettivamente, le altezze relative ai lati eguali BC, CA, ed alla base AB del triangolo isoscele ABC, H il punto comune a queste tre altezze ed N, n, p, ordinatamente, i punti medî di BC, AH, BH, ed abbiasi FN parallela ad AE.



Poichè Np è parallela a CD ed np parallela ad AB, l'angolo npN sarà retto. Ma anche l'angolo nEN è retto ed inoltre CD è asse di np, onde il cerchio passante per n, p, N avrà il suo centro nel punto O (in cui nN taglia CD) e passerà per E, e, a motivo di simmetria anche pel punto medio P di AC, non che pel piede F dell'altezza BF. Essendo poi nD parallela ad FB, ND parallela ad AC ed FB perpendicolare ad AC, l'angolo nDN è retto cosicchè questo cerchio passa anche per D.

Ricordando poi che le altezze d'un triangolo sono bisettrici del suo triangolo ortico, si ha che FB è bisettrice dell'angolo EFD, onde arco $Ep =$ ar. pD, similmente arco $Dn = nF = Dp$. Inoltre avendosi Np parallela a CD ed FN parallela ad AE, si può concludere che arco $Dp = mN = mP = NE = PF$, talchè i punti F, P, m, N, E, p, D, n sono i vertici dell'ottagono regolare inscritto nel cerchio O.

Corollario. Il teorema dimostrato permette di concludere che Nm è parallela a BH, sicchè, a motivo di $CN = NB$, m è punto medio di HC. Sono così trovate tutte le proprietà caratteristiche del cerchio O che è il cerchio dei *nove punti* relativo al triangolo ABC.

Osservazione I. — Il quadrangolo $FNEn$ è un rettangolo e le sue diagonali sono diametri del cerchio O, per modo che FE passa per O.

Se FN taglia CD in O_1, poichè FN è parallela ad AE, quindi perpendicolare a CB nel suo punto di mezzo, sarà O_1 il centro del cerchio circoscritto al triangolo ABC, di più si avrà $CO_1 = Cm + mO_1 = mH + HD = mD$, onde il diametro del cerchio O uguaglia il raggio del cerchio O_1.

II. Essendo le corde PN, FD, DE eguali al lato del quadrato inscritto nel cerchio O e PN la metà di AB, segue che il triangolo FDE, ortico di ABC ed ABH, è la metà del quadrato inscritto nel cerchio O; che la base AB comune a questi due triangoli è lato del quadrato inscritto nel cerchio O_1, come pure lato del quadrato inscritto nel cerchio O_2 circoscritto al triangolo ABH (cerchio che facilmente si vede essere uguale ad O_1); e gli angoli ACB, AHB sono l'uno di 45° e l'altro di 135°. Segue poi angolo $A = B = 67°.30'$.

S. Gatti.

Nota sulla Quistione 91ª — Si trova con lo sviluppo che, qualunque sia l'intero a, l'espressione:

$$\frac{a^7 - (a-1)^7 - 1}{a(a-1)+1}$$

rappresenta sempre un intero.

Vi sono infiniti altri numeri che sostituiti in luogo di 7 fanno acquistare alla formola medesima dei valori interi, per valori interi di a. Sia m uno di questi numeri; mi propongo di cercare la condizione perchè l'espressione:

$$(1) \qquad \frac{a^m - (a-1)^m - 1}{a(a-1)+1},$$

per valori interi di a, rappresenti un intero.

Mi servo del teorema di Moivre relativo all'innalzamento a potenza d'un numero complesso, e dei caratteri di divisibilità d'un polinomio intero in a per un divisore della forma $a - \alpha_1$, i quali si estendono anche al caso in cui α_1 sia un numero complesso.

Si ha:

$$a(a-1)+1 = [a - (\cos 60^0 + i \operatorname{sen} 60^0)]\,[a - (\cos 60^0 - i \operatorname{sen} 60^0)].$$

Nel numeratore dell'espressione (1) si ponga: $a = \cos 60^0 + i \operatorname{sen} 60^0$ e per conseguenza: $a - 1 = \cos 120^0 + i \operatorname{sen} 120^0$, e si avrà:

$$a^m - (a-1)^m - 1 = \cos m\,.\,60^0 + i \operatorname{sen} m\,.\,60^0 - (\cos m\,.\,120^0 + i \operatorname{sen} m\,.\,120^0) - 1.$$

Perchè questa espressione si annulli è necessario e sufficiente che sia:

$$(2) \qquad \cos m\,.\,60^0 - \cos m\,.\,120^0 - 1 = 0$$

$$(3) \qquad \operatorname{sen} m\,.\,60^0 - \operatorname{sen} m\,.\,120^0 = 0.$$

Ora affinchè due angoli abbiano il medesimo seno, è necessario e sufficiente o che la loro somma sia uguale ad un numero impari di mezzi giri, o che la loro differenza sia uguale ad un numero pari di mezzi giri; quindi detto k un numero intero qualunque, compreso lo zero, dalla (3) si ricava:

$$m \cdot 60^0 + m \cdot 120^0 = (2k + 1)\, 180^0,$$

ovvero:

$$m \cdot 120^0 - m \cdot 60^0 = 2k \cdot 180^0.$$

Nel 1° caso risulta: $m = 2k + 1$. Intanto la (2) può scriversi:

$$\text{sen}\, m \cdot 90^0 \ \text{sen}\, m \cdot 30^0 = \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Ora m essendo dispari, potrà essere delle due forme: $4n + 1$ e $4n - 1$.

Ponendo nella (4) il primo valore di m, $\text{sen}\, m \cdot 90^0$ diventa uguale ad 1, e si ottiene: $\text{sen}\,(4n + 1)\, 30^0 = \frac{1}{2} = \text{sen}\, 30^0$, da cui:

$$(4n + 1)\, 30^0 = 2h \cdot 180^0 + 30^0 \tag{a}$$

oppure

$$(4n + 1)\, 30^0 = (2h + 1)\, 180^0 - 30^0 \tag{b}$$

dove h rappresenta un intero positivo o nullo.

Dalla (a) si trae $n = 3h$ e dalla (b) $n = 3h + 1$. In corrispondenza i valori di m saranno:

$$m = 12h + 1; \qquad m = 12h + 5.$$

Ponendo invece nella (4) il 2° valore di m, $\text{sen}\, m \cdot 90^0 = -1$, e risulterà: $\text{sen}\,(4n - 1)\, 30^0 = -\frac{1}{2} = \text{sen}\, 210^0$. E di qui si trae:

$$(4n - 1)\, 30^0 = 2h \cdot 180^0 + 210^0 \tag{c}$$

$$(4n - 1)\, 30^0 = (2h + 1)\, 180^0 - 210^0. \tag{d}$$

Dalla (c) si ha $n = 3h + 2$ e dalla (d) $n = 3h$, ed i corrispondenti valori di m saranno:

$$m = 12h + 7; \qquad m = 12h - 1.$$

In quest'ultimo valore trovato per m, h è per lo meno uguale ad 1, e quindi l'ultima formola può scriversi:

$$m = 12h + 11.$$

Consideriamo ora il 2° caso, nel quale nella equazione (3) la differenza dei due angoli sia un numero pari di mezzi giri, e si avrà: $m = 6k$. E allora: $\text{sen}\, m \cdot 90^0 = 0$ e la (4) ed anche la (2) si riducono a $0 = \frac{1}{2}$ che è assurda.

Quindi i valori trovati per m, ed essi soli, fanno divenire il numeratore della (1) divisibile per

$$a - (\cos 60^0 + i \operatorname{sen} 60^0).$$

Similmente si dimostra che per i medesimi valori di m, e per essi soltanto, il detto numeratore risulta divisibile per

$$a - (\cos 60^0 - i \operatorname{sen} 60^0).$$

Ciò del resto risulta anche dal fatto che se un polinomio reale in x si annulla per un valore complesso di x, si annulla anche per il valore complesso coniugato. Si può così enunciare il seguente

Teorema. L'espressione

$$\frac{a^m - (a-1)^m - 1}{a(a-1)+1}$$

per valori interi di a si riduce ad un intero nei soli casi in cui m avrà una delle seguenti quattro forme:

$$12h+1, \qquad 12h+5, \qquad 12h+7, \qquad 12h+11,$$

(dove h rappresenta un intero positivo o nullo), ovvero per tutti i valori della serie naturale che si ottengono cancellandone una volta tre ed una volta uno, a cominciare dal numero 2, che sarebbe il primo ad essere cancellato.

Osservazione. Applicando i caratteri di divisibilità d'un polinomio intero in a per $(a-a_1)^2$, (G. Bellacchi, *Lezioni di algebra elementare*, vol. II, pag. 80-81), si trova che il numeratore della (1) è divisibile pel quadrato del suo denominatore per tutti i valori di m che sono della forma $6h+1$, cioè che sono d'una delle due forme $12h+1$ e $12h+7$. Applicando poi i caratteri di divisibilità per $(a-a_1)^3$, (V. luogo cit.) si trova che non vi è nessun valore di m (eccetto 1) per il quale il numeratore della (1) risulti divisibile pel cubo del suo denominatore, o per ogni potenza più elevata.

Così si può concludere che la formola:

$$\frac{a^m - (a-1)^m - 1}{[a(a-1)+1]^n}$$

per $n \geqq 3$, e per a intero, non rappresenterà mai un numero intero, eccetto il caso in cui sia $m = 1$, nel quale la formola dà zero, per tutti i valori di n.

Pietro Marano.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 95, 100, 101* e 103*

95. *Due recipienti* A *e* B *contengono quantità disuguali di uno stesso liquido, e propriamente* A *contiene* a *litri di più di quanti ne contiene* B. *Ora s'immagini che dal recipiente* A *sieno tolti gli* $\frac{r}{n}$ *del suo contenuto e versati in* B, *e poi tolti da* B *gli* $\frac{r}{n}$ *del suo nuovo contenuto e versati in* A; *indi tolti nuovamente dal recipiente* A *gli* $\frac{r}{n}$ *del suo nuovo contenuto e versati in* B, *e poi tolti da* B *gli* $\frac{r}{n}$ *del suo nuovo contenuto e versati in* A; *e così continuando fino a fare* p *volte la doppia operazione di versare gli* $\frac{r}{n}$ *del contenuto di* A *in* B *e gli* $\frac{r}{n}$ *del nuovo contenuto di* B *in* A. *Conoscendosi il rapporto* k *del contenuto di* A *al contenuto di* B *dopo le* p *coppie di operazioni accennate, determinare la quantità di liquido contenuta in ciascuno dei due recipienti* A *e* B *prima delle suddette operazioni.*

Indicando con x *il numero dei litri di liquido contenuti nel recipiente* B, *si deve trovare:*

$$x = \frac{[n^{2p} - (n-r)^{2p}]\,(n-r)\,k - [n^{2p+1} + (n-r)^{2p+1}]}{[2\,n^{2p+1} - r\,(n-r)^{2p}] - [2\,n^{2p} + r\,(n-r)^{2p-1}]\,(n-r)\,k}\,.\,a.$$

Determinare inoltre fra quali limiti deve variare il rapporto k *per essere possibile il problema.* (D. Amanzio).

Soluzione del Sig. *E. Piccioli*, studente nella R. Università di Genova.

Indichiamo con $A_1, A_2, \dots A_m$ e con $B_1, B_2, \dots B_m$ ciò che diventano rispettivamente le quantità di liquido $a + x$ e x, contenute nei recipienti A e B prima di cominciare l'operazione, dopo 1, 2, ... m coppie di operazioni. Dopo la $(s-1)^a$ doppia operazione, A_{s-1} sarà la quantità di liquido che si trova nel recipiente A e quella che si trova in B sarà B_{s-1} ossia $a + 2x - A_{s-1}$, perchè la somma del contenuto dei due recipienti deve mantenersi sempre la stessa $= a + 2x$. Se da A_{s-1} leviamo gli $\frac{r}{n}$ e li aggiungiamo a B_{s-1}, nel recipiente A ve ne resteranno $\frac{n-r}{n} A_{s-1}$ e nel recipiente B verranno ad essercene $a + 2x - \frac{n-r}{n} A_{s-1}$. Da questo togliamo gli $\frac{r}{n}$ del nuovo contenuto e versiamoli in A. Ciò che resta in B è la quantità:

$$\frac{n-r}{n}(a+2x) - \left(\frac{n-r}{n}\right)^2 A_{s-1} = B_s \qquad (1)$$

e ciò che viene ad essere contenuto in A è la quantità:

$$\left(\frac{n-r}{n}\right)^2 A_{s-1} + \frac{r}{n}(a+2x) = A_s. \tag{2}$$

In quest'ultima formula poniamo successivamente $s = 1, 2, 3\ldots$ si ha allora:

$$A_1 = \left(\frac{n-r}{n}\right)^2 A_0 + \frac{r}{n}(a+2x) = \left(\frac{n-r}{n}\right)^2 (a+x) + \frac{r}{n}(a+2x), \text{ poichè } A_0 = a+x,$$

$$A_2 = \left(\frac{n-r}{n}\right)^2 A_1 + \frac{r}{n}(a+2x) = \left(\frac{n-r}{n}\right)^4 (a+x) + \frac{r}{n}\left(\frac{n-r}{n}\right)^2 (a+2x) + \frac{r}{n}(a+2x),$$

$$A_3 = \left(\frac{n-r}{n}\right)^2 A_2 + \frac{r}{n}(a+2x) = \left(\frac{n-r}{n}\right)^6 (a+x) + \frac{r}{n}\left(\frac{n-r}{n}\right)^4 (a+2x) + \frac{r}{n}\left(\frac{n-r}{n}\right)^2 (a+2x) + \frac{r}{n}(a+2x),$$

. . . .

Per induzione si dovrebbe avere:

$$A_p = \left(\frac{n-r}{n}\right)^{2p}(a+x) + \frac{r}{n}\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2(p-1)}(a+2x) + \frac{r}{n}\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2(p-2)}(a+2x) + \ldots\ldots + \frac{r}{n}(a+2x). \tag{3}$$

Per persuadersi che ciò è infatti supponiamo che sia:

$$A_{p-1} = \left(\frac{n-r}{n}\right)^{2(p-1)}(a+x) + \frac{r}{n}\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2(p-2)}(a+2x) + \frac{r}{n}\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2(p-3)}(a+2x) + \ldots\ldots + \frac{r}{n}(a+2x). \tag{4}$$

La relazione (2) ci dà allora, ponendosi per A_{p-1} il valore dato dalla (4),

$$A_p = \left(\frac{n-r}{n}\right)^{2p}(a+x) + \frac{r}{n}\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2(p-1)}(a+2x) + \frac{r}{n}\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2(p-2)}(a+2x) + \ldots\ldots + \frac{r}{n}(a+2x)$$

che è precisamente la (3). Questo valore di A_p può essere ulteriormente modificato come segue:

$$A_p = \left(\frac{n-r}{n}\right)^{2p}(a+x) + \frac{r}{n}(a+2x)\left[\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2(p-1)} + \left(\frac{n-r}{n}\right)^{2(p-2)} + \ldots + 1\right]$$

$$= \left(\frac{n-r}{n}\right)^{2p}(a+x) + \frac{r}{n}(a+2x)\frac{1-\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2p}}{1-\left(\frac{n-r}{n}\right)^2} =$$

$$a\left[\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2p} + \frac{r}{n}\frac{1-\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2p}}{1-\left(\frac{n-r}{n}\right)^2}\right] + x\left[\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2p} + 2\frac{r}{n}\frac{1-\left(\frac{n-r}{n}\right)^{2p}}{1-\left(\frac{n-r}{n}\right)^2}\right] =$$

$$a\,\frac{n^{2p+1}+(n-r)^{2p+1}}{(2n-r)\,n^{2p}} + x\,\frac{2\,n^{2p+1}-r\,(n-r)^{2p}}{(2n-r)\,n^{2p}} \tag{5}$$

Per la relazione (1) si avrà:

$$B_p = \frac{n-r}{n}(a+2x) - \left(\frac{n-r}{n}\right)^2 \left[a\frac{n^{2p-1}+(n-r)^{2p-1}}{(2n-r)n^{2p-2}} + x\frac{2n^{2p-1}-r(n-r)^{2p-2}}{(2n-r)n^{2p-2}}\right] =$$

$$a(n-r)\frac{n^{2p}-(n-r)^{2p}}{(2n-r)n^{2p}} + x(n-r)\frac{2n^{2p}+r(n-r)^{2p-1}}{(2n-r)n^{2p}}.$$

Si conosce il rapporto k di A_p a B_p: l'equazione

$$\frac{a\dfrac{n^{2p+1}+(n-r)^{2p+1}}{(2n-r)n^{2p}} + x\dfrac{2n^{2p+1}-r(n-r)^{2p}}{(2n-r)n^{2p}}}{a\dfrac{n^{2p}-(n-r)^{2p}}{(2n-r)n^{2p}} + x\dfrac{2n^{2p}+r(n-r)^{2p-1}}{(2n-r)n^{2p}}} = (n-r)k,$$

ci dà:

$$\frac{a}{x} = \frac{[2n^{2p+1}-r(n-r)^{2p}]-[2n^{2p}+r(n-r)^{2p-1}](n-r)k}{[n^{2p}-(n-r)^{2p}](n-r)k-[n^{2p+1}+(n-r)^{2p+1}]},$$

da cui finalmente:

$$x = \frac{[n^{2p}-(n-r)^{2p}](n-r)k-[n^{2p+1}+(n-r)^{2p+1}]}{[2n^{2p+1}-r(n-r)^{2p}]-[2n^{2p}+r(n-r)^{2p-1}](n-r)k}\,a.$$

Questo è il contenuto del recipiente B prima dell'operazione. Per avere quello del recipiente A basta costruire $a+x$ e si ha:

$$a+x = a\,.\,n\,.\,\frac{n^{2p}-(n-r)^{2p}-[n^{2p-1}+(n-r)^{2p-1}](n-r)k}{2n^{2p+1}-r(n-r)^{2p}-[2n^{2p}+r(n-r)^{2p-1}](n-r)k}.$$

Per avere i limiti di k riguardanti la possibilità del problema, osserviamo che x deve essere sempre positivo e che quindi il numeratore e il denominatore della frazione che ci dà x devono essere dello stesso segno. Il rapporto k è dunque compreso fra

$$\frac{n^{2p+1}+(n-r)^{2p+1}}{(n-r)[n^{2p}-(n-r)^{2p}]} \quad \text{e} \quad \frac{2n^{2p+1}-r(n-r)^{2p}}{(n-r)[2n^{2p}+r(n-r)^{2p-1}]}.$$

Di questi rapporti il maggiore è il primo. Ne concludiamo che k deve soddisfare la diseguaglianza

$$\frac{n^{2p+1}+(n-r)^{2p+1}}{(n-r)[n^{2p}-(n-r)^{2p}]} > k > \frac{2n^{2p+1}-r(n-r)^{2p}}{(n-r)[2n^{2p}+r(n-r)^{2p-1}]}.$$

100. *Dimostrare che, quando* n *tende all'infinito, si ha:*

$$\lim\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

D. Besso.

Dimostrazione del Sig. *F. Mariantoni*, studente nella R. Università di Roma.

Dalla trigonometria si ha:

$$\frac{\text{arco sen}\,(x+h) - \text{arco sen}\,x}{h} = \frac{\text{arco sen}\left[(x+h)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+h)^2}\right]}{h} =$$

$$\frac{\text{arco sen}\,H}{h} = \frac{\text{arco sen}\,H}{H} \cdot \frac{H}{h},$$

dove, come si vede, H tende a zero con h.

Passando al limite per $h = 0$, e quindi $H = 0$, risulta:

$$\lim_{h=0} \frac{\text{arco sen}\,(x+h) - \text{arco sen}\,x}{h} = \lim_{H=0} \frac{\text{arco sen}\,H}{H} \cdot \lim_{h=0} \frac{H}{h},$$

e poichè

$$\lim_{H=0} \frac{\text{arco sen}\,H}{H} = 1 \text{ e } \lim_{h=0} \frac{H}{h} = \lim_{h=0} \frac{(x+h)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+h)^2}}{h} =$$

$$\lim_{h=0} \frac{2x+h}{(x+h)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x+h)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

potremo porre, quando h è abbastanza piccolo:

$$\frac{\text{arco sen}\,(x+h) - \text{arco sen}\,x}{h} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \varepsilon,$$

con ε infinitesimo tendente a zero con h, od anche supponendo $h = \frac{1}{n}$, con n sufficientemente grande:

$$\text{arco sen}\left(x + \frac{1}{n}\right) - \text{arco sen}\,x = \frac{1}{\sqrt{n^2 - n^2 x^2}} + \frac{\varepsilon}{n}.$$

In questa formola x è suscettibile di tutti i valori da zero (incluso) ad 1 (escluso). Facendo nella medesima successivamente $x = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots\ldots \frac{n-1}{n}$, si ottiene la serie d'uguaglianze:

$$\begin{aligned}
\text{arco sen}\,\frac{1}{n} &= \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{n},\\
\text{arco sen}\,\frac{2}{n} - \text{arco sen}\,\frac{1}{n} &= \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{\varepsilon}{n},\\
\text{arco sen}\,\frac{3}{n} - \text{arco sen}\,\frac{2}{n} &= \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \frac{\varepsilon}{n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\text{arco sen}\,\frac{n}{n} - \text{arco sen}\,\frac{n-1}{n} &= \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} + \frac{\varepsilon}{n},
\end{aligned}$$

da cui, sommando membro a membro, si trae:

$$\text{arco sen}\,1 = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} + \frac{1}{n} + \varepsilon,$$

ossia:

$$\frac{\pi}{2} - \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} \right\} = \frac{1}{n} + \varepsilon .$$

Ora se n cresce oltre ogni limite il secondo membro diviene minore di ogni quantità assegnabile perchè, come si è detto, ε decresce con $\frac{1}{n}$; così la differenza al primo membro potendo esser resa in valore assoluto minore di ogni quantità arbitrariamente piccola ha per limite zero al tendere di n all'infinito, per cui:

$$\lim \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} \right\} = \frac{\pi}{2} .$$

101*. *A quale relazione devono soddisfare i coefficienti* a, b, c *affinchè il polinomio* $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + m$ *si possa mettere nella forma* $\left(x^2 + \frac{a}{2}x + p\right)^2$?

E, nell'ipotesi che quella relazione sia soddisfatta, risolvere l'equazione

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (*).$$

(D.r Besso).

Risposta del Sig. *P. Marano*, studente a Catania.

I. Poichè si ha:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + p\right)^2 = x^4 + ax^3 + \left(\frac{a^2}{4} + 2p\right)x^2 + apx + p^2 ,$$

affinchè questo polinomio sia identico al dato, dovranno aversi le relazioni:

$$a^2 + 8p = 4b, \qquad ap = c, \qquad p^2 = m.$$

Eliminando p dalle due prime risulta:

$$a^3 - 4ab + 8c = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad [1]$$

che è la relazione cercata.

La [1] esprime la condizione necessaria perchè il polinomio $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + m$ possa mettersi sotto la forma $\left(x^2 + \frac{a}{2}x + p\right)^2$, ma non quella sufficiente.

Stando nel campo dei numeri reali, perchè la trasformazione abbia luogo, si richiede inoltre che m sia positivo ed uguale a $\frac{c^2}{a^2}$. Il segno di p dipenderà poi dai segni di a e c, perchè $p = \frac{c}{a}$.

Ad es. nel caso del polinomio (**)

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$$

(*) Un'equazione particolare di questa classe, cioè l'equazione

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x = 81600$$

è stata risolta da *Luca Paciolo*.

(**) *V.* quistione 92*.

la relazione [1] è soddisfatta ed inoltre il termine indipendente da x è uguale a $\frac{c^2}{a^2}$, onde $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$ è il quadrato di $x^2 + 2x - 3$.

II. Per risolvere ora l'equazione

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

nell'ipotesi che $a^3 - 4ab + 8c = 0$, si aggiunga ai due membri un numero h tale che sia $h + d = \frac{c^2}{a^2}$, cioè $h = \frac{c^2}{a^2} - d$. Allora essa diviene:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + \frac{c^2}{a^2} = h,$$

ovvero: $\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{c}{a}\right)^2 = h$, e però $x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{c}{a} \mp \sqrt{h} = 0$

e l'equazione proposta essendo stata ridotta a due equazioni quadratiche si può considerare come risoluta.

Ad es. trattandosi dell'equazione

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 81600 = 0,$$

poichè $\frac{c}{a} = 1$, risulta $h = 81601$. Aggiungendo h ai due membri si avrà:

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 81601,$$

e quindi

$$x^2 + x + 1 \mp \sqrt{81601} = 0.$$

Discussione. — *a*). $\frac{c^2}{a^2} - d < 0.$

Le quattro radici della proposta saranno immaginarie.

b). $\frac{c^2}{a^2} - d = 0.$

Allora l'equazione si riduce ad $x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{c}{a} = 0$. Si avranno due radici doppie, cioè:

$$x = -\frac{a}{4} \pm \sqrt{\frac{a^2}{16} - \frac{c}{a}}.$$

In tale ipotesi queste due radici doppie sono reali e distinte, se $\frac{a^2}{16} > \frac{c}{a}$; sono immaginarie se $\frac{a^2}{16} < \frac{c}{a}$; e sono reali e coincidenti se $\frac{a^2}{16} = \frac{c}{a}$.

Un esempio dell'ultimo caso ce l'offre l'equazione:

$$x^4 + x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{16}x + \frac{1}{256} = 0,$$

che si può scrivere:

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right)^2 = 0, \quad \text{oppure:} \quad \left(x + \frac{1}{4}\right)^4 = 0,$$

che ha la radice quadrupla $x = -\frac{1}{4}$.

c). $$\frac{c^2}{a^2} - d > 0.$$

Allora da $$x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{c}{a} \mp \sqrt{k} = 0,$$
si trae:
$$x = -\frac{a}{4} \pm \sqrt{\frac{a^2}{16} - \frac{c}{a} \pm \sqrt{k}}\,.$$

Se $\frac{a^2}{16} - \frac{c}{a} - \sqrt{k} = 0$, si avranno quattro radici reali due delle quali coincidenti.

» $\frac{a^2}{16} - \frac{c}{a} + \sqrt{k} > 0$,
e $\frac{a^2}{16} - \frac{c}{a} - \sqrt{k} < 0$, } si avranno due radici reali e due immaginarie.

Se $\frac{a^2}{16} - \frac{c}{a} + \sqrt{k} < 0$, si avranno quattro radici immaginarie.

» $\frac{a^2}{16} - \frac{c}{a} + \sqrt{k} = 0$, si avranno quattro radici, una reale doppia, le altre due immaginarie.

» $\frac{a^2}{16} - \frac{c}{a} - \sqrt{k} = 0$, si avranno quattro radici reali una delle quali doppia.

L'ipotesi $\frac{a^2}{16} - \frac{c}{a} + \sqrt{k} = 0$, $\frac{a^2}{16} - \frac{c}{a} - \sqrt{k} = 0$ non è ammissibile, perchè darebbe $\sqrt{k} = 0$. (*)

103*. *In un tetraedro, se i coseni delle facce d'un triedro sono proporzionali alle lunghezze degli spigoli opposti, le altezze del tetraedro passano per uno stesso punto: reciprocamente se le altezze d'un tetraedro passano per uno stesso punto, in ciascun triedro i coseni delle facce sono proporzionali agli spigoli opposti.* (G. Riboni).

Dimostrazione del Sig. *G. Trapani*, studente a Catania.

Nel tetraedro $ABCD$ chiaminsi con α, β, γ le facce CAD, BAD, CAB e con S, S', S'' le lunghezze degli spigoli AB, AC, AD opposti.

Dai vertici B e C conducansi le perpendicolari BF, BF' alla costola AD. Dai triangoli rettangoli ABF, ACF', si ha:
$$AF = AB \cos\beta = S \,.\, \cos\beta\,; \qquad AF' = S' \,.\, \cos\alpha.$$
Ma per dato $S : S' = \cos\alpha : \cos\beta$, ossia $S \,.\, \cos\beta = S' \,.\, \cos\alpha$, quindi $AF = AF'$ e i punti F, F' coincidono: per conseguenza la costola BC è perpendicolare alla AD. Adunque il tetraedro ha le costole opposte rispettivamente perpendicolari fra loro e perciò le altezze s'incontrano in un punto (Cfr. Baltzer: *Ster.* § 6, 10).

(*) Soluzioni meno diffuse di questa quistione pervennero dai Sigg. *A. Baldassarre* (R. Istituto tecnico Bari), *G. Candido* (R. Liceo Lecce), *A. Dal Buono Sidoli* (R. Istituto tecn. Reggio Emilia).

Reciprocamente: consideriamo le altezze BG, CH, condotte dai vertici B e C alle facce opposte, che si taglino in un punto. Il loro piano taglierà le facce ABD, ACD secondo le rette BF, CF, perpendicolari alla AD. Allora dai triangoli rettangoli ABF, ACF, si ha:

$$AF = S \cdot \cos\beta; \qquad AF = S' \cdot \cos\alpha,$$

sicchè

$$S \cos\beta = S' \cos\alpha, \qquad \text{ossia} \qquad S : S' = \cos\alpha : \cos\beta.$$

Analogamente si dimostra che $S' : S'' = \cos\beta : \cos\gamma$, onde

$$S : S' : S'' = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma.$$

Sono pervenute inoltre le soluzioni seguenti: quistione **108***. dal Sig. *V. Columbo, G. Russi Raggi*; **109***. *A. Baldassarre, V. Columbo*; **112**. *F. Mariantoni*; **113**. *S. Catania, G. Rozzolino*; **114**. *G. Santacroce, U. Scarpis*; **115**. *U. Scarpis*; **119**. *S. Catania, F. Mariantoni, G. Santacroce*; **120***. *E. G. Ricci*; **121***. *E. Bellezza, G. Candido, A. Gandolfi, D. Pacilli, G. Polverini, E. G. Ricci, G. Trapani*; **122***. *D. Pacilli, G. Trapani*; **123***. *E. Bellezza, A. Gandolfi, G. Russi Raggi, G. Trapani*; **124***. *G. Russi Raggi, G. Trapani*; **125***. *E. Bellezza, G. Candido, A. Gandolfi, G. Polverini, G. Russi Raggi, G. Trapani*, oltre ad una generalizzazione di quest'ultima quistione dal signor prof. *G. Russo* — soluzioni alle quali verrà data evasione nei fascicoli venturi.

La Redazione.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

126. Résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2 + 2t^2.$$

E. Fauquembergue.

127. Dimostrare che il numero dei modi nei quali un intero M può ottenersi come differenza di due quadrati interi, è dato dalla formola

$$\frac{(-1)^M (m_1+1)(m_2+1)\ldots(m_n+1)(m-1)-\alpha}{2},$$

dove α è l'unità quando M è quadrato perfetto, zero negli altri casi, m denota l'esponente del fattore 2 ed $m_1, m_2, \ldots m_n$ gli esponenti degli altri fattori primi di M.

A. Tagiuri.

(*) Le questioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.

128*. Divisa la corda AB di un arco in tre parti uguali $AI = IE = EB$ e condotti i raggi OIM, OEN, dimostrare che il coseno dell'angolo medio, cioè $\cos IOE = \frac{4 + 5\cos\alpha}{5 + 4\cos\alpha}$, essendo angolo $AOB = \alpha$ l'angolo al centro.

129*. Di un pentagono $ABCDE$ si conoscono i lati $AB = a$, $BC = CD = 2a$, $DE = 3a$, $EA = 4a$ e gli angoli $EAB = BCD = 120°$, si calcolino gli altri elementi per la sola geometria.

G. Bellacchi.

130*. Senza valersi della teoria dell'equivalenza e senza sostituire ai segmenti i numeri che servono loro di misura, dimostrare il seguente teorema: Se si costruisce un triangolo rettangolo, che abbia per cateti la diagonale ed il lato di un quadrato, e poi se ne costruisce un altro che abbia per cateti il lato di quel quadrato e l'ipotenusa del primo triangolo, l'ipotenusa del secondo triangolo sarà eguale al doppio del lato di quel quadrato (*).

E. De Amicis.

131*. Le potenze di un intero a qualsivoglia, sono sempre esprimibili mediante la somma di a termini consecutivi della serie dei numeri dispari.

F. P. Paternò.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Elementi di Geometria, a uso delle Scuole Secondarie inferiori, di G. Riboni, corredati da una raccolta di circa seicento esercizi, per cura di D. Gambioli. — Bologna, Ditta Nicola Zanichelli, 1892. Prezzo: L. 2.

Gli elementi di Geometria del sig. Prof. G. Riboni, mi sembrano molto adattati per le scuole alle quali sono destinati. Ai medesimi accresce pregio la collezione numerosa di esercizi aggiuntivi per cura del Sig. Prof. D. Gambioli. Carettere precipuo del libro è l' indirizzo pratico a cui è informato, sia sotto il riguardo delle dimostrazioni, come rispetto alle applicazioni, che vi sono numerose, per modo che il medesimo ritengo riuscirà di facile lettura per i giovinetti delle scuole secondarie inferiori.

Il principio di anteporre la teoria della misura a quella delle proporzioni, quivi trattate coi numeri, è da lodarsi, siccome quello che vale ad appianare la

(*) L'alunno può giovarsi delle proporzioni fra grandezze geometriche.

maggiore delle difficoltà che presenta lo studio della geometria elementare. Del resto in un libro destinato a scuole inferiori nemmeno poteva balenare il pensiero di svolgere la teorica delle proporzioni tra grandezze altrimenti che con numeri.

Tanto la planimetria che la stereometria sono contenute nei presenti elementi in giusta misura, ma più questa che quella. Trovo ad es: la teoria delle parallele esposta con dettagli forse maggiori del necessario, i teoremi 4 e 7 a pag. 60 e 62, riguardanti i caratteri pei quali un quadrilatero è inscrittibile e circoscrittibile ad una circonferenza, superflui. Qualche dimostrazione sarebbe a mio giudizio da sostituire con altra più semplice; quella ad es. del 3 teo. a pag. 30, relativa al confronto di due triangoli aventi due lati uguali a due lati e disuguali gli angoli compresi, che coll' esposizione dell' A., riuscirà difficile se non a comprendere almeno a ritenere dai discenti. Da notarsi pure un certo abuso di postulati nei preliminari: per me i postulati 9° a pag. 5 e 7°, 8° e 9° a pag. 6 sarebbero da omettersi in un libro come il presente. L'amore di brevità ha condotto l' A. a dare talvolta dimostrazioni forse troppo succinte, ma potrà supplire a ciò l'insegnante. Alla proposizione enunciata a pag. 48, ossia « due segmenti circolari sono eguali quando sono eguali i loro archi », va aggiunto « ed i loro raggi ».

A taluno potrà parere difetto la numerazione non continua dei teoremi e il non richiamare con numeri i teoremi man mano invocati. Siccome il far ciò non avrebbe arrecato probabilmente inconvenienti alla compagine del libro, consiglierei l'A. in una prossima edizione, a render continua la numerazione, aggiungendo gli opportuni richiami.

Voglia l'egregio collega considerare questi pochi appunti al suo lavoro, come ispirati dal desiderio di veder reso ancora migliore un libro che sotto modesta apparenza racchiude non comuni pregi didattici ed è a parer mio destinato a non finire dimenticato nei polverosi scaffali delle librerie.

A. Lugli.

Dott. OSKAR SCHLÖMILCH. — *Elementi di geometria metrica.* Prima versione italiana dei Professori D. Gambioli e V. Bernardi. — Parte III. — Ditta G. B. Paravia e Comp., 1891. Prezzo: L. 4.

Già ho riferito sulla 2ª parte di quest'opera nel fas. III dell'anno 1891 di questo giornale e per dar esito alla promessa allora fatta, mi occupo qui della 3ª parte.

In questa, come nella parte precedente, riscontransi gli stessi caratteri di omissione dei particolari e concisione che permettono di avere, in un libro di mole relativamente piccola, lo sviluppo della *stereometria, trigonometria sferica* e *geometria descrittiva.* Il libro consta di 11 capitoli, oltre ad un'appendice dei traduttori, i cui titoli sono: — 1°. Rette e piani nello spazio — 2°. L'angolo solido — 3°. Corpi racchiusi da superficie piane — 4°. Confronto e misura dei poliedri — 5°. Generazione delle superficie e corpi rotondi — 6°. Le sezioni coniche — 7°. Misure dei corpi rotondi — 8°. Calcolo dei triangoli sferici — 9°. Applicazioni stereometriche della trigonometria sferica — 10°. Proiezione parallela — 11°. La proiezione prospettica.

Senza entrare in minuti dettagli, mi limiterò, per ciascuno di essi, ad accennare quegli argomenti che costituiscono a mio giudizio il principale pregio dell'opera.

Cap. 2°. — Molto semplice la dimostrazione del teorema che stabilisce la relazione fra le facce d'un triedro ed i diedri del triedro supplementare. Chi ha pratica della scuola sa che il teorema in discorso, come trovasi esposto nei più usitati manuali di geometria, riesce difficile ai discenti — Costruzione degli elementi incogniti del triedro in tutti i casi in cui son dati gli elementi che valgono a determinarlo.

Cap. 3°. — Nuova e facile dimostrazione del teorema d'Eulero relativo al numero dei vertici degli spigoli e delle facce di un poliedro — Le limitazioni pel numero degli spigoli e dei vertici, in funzione del numero delle facce, nei poliedri euleriani — La costruzione della piramide n^{gona} in due casi notevoli e le reti dei poliedri regolari.

Cap. 4°. e 7°. — Volume della piramide triangolare e della sfera con applicazione del principio espresso dalla relazione $\lim_{n=\infty} \frac{1^m+2^m+\ldots+n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}$. — Volume del tronco di piramide a basi parallele sotto una nuova forma, oltre a quella ordinaria. — Volume del prismatoide.

Cap. 6°. — (Esso merita menzione speciale per la trattazione fuori dell'usuale con la quale sono sviluppate elementarmente le proprietà delle celebri curve che derivano dalla sezione del cono. Senza far confronti con manuali scolastici italiani, perchè pochi ve ne sono in cui siano considerate le sezioni coniche, come quelle che non fan parte dell'insegnamento elementare delle matematiche nei programmi delle nostre scuole, eccezione fatta pel IV° corso della sezione fisico matematica degli Istituti tecnici, e forse a torto, la trattazione dell'A. sembrami preferibile a quella di molti libri scolastici stranieri).

Genesi delle sezioni del cono circolare retto ottenute con un piano, comunque posto, rispetto all'asse e che sega l'asse, è parallelo ad una generatrice, o, sega le due generatrici di una sezione meridiana. — Le seguenti proprietà generali delle sezioni coniche: « per ogni punto d'una sezione conica il rapporto del suo raggio vettore alla sua distanza dalla direttrice è costante ed uguale alla caratteristica della sezione » e « la tangente ad un punto qualunque d'una sezione conica e la perpendicolare innalzata dal fuoco al corrispondente raggio vettore, passano per uno stesso punto della direttrice ». — « Qualunque sezione ellittica del cono può essere ottenuta da un determinato cilindro » — « Qualunque sezione iperbolica d'una superficie conica qualunque, si può trasportare in un nuovo cono determinato, in modo che il piano di sezione sia parallelo all'asse » — « Il parallelogrammo contenuto dalle distanze di un punto dell'iperbole, prese parallelamente agli assintoti, e dagli assintoti ha per area costante la metà del rettangolo dei semiassi » — Quadratura della parabola, dell'ellisse e dell'iperbole. — « I centri (vertici) di tutte le superficie coniche sulle quali si può trasportare una parabola data, si trovano su una seconda parabola, il cui piano è perpendicolare al piano della parabola data, il cui vertice è il fuoco ed il cui fuoco è il vertice della prima parabola; gli assi delle corrispondenti superficie coniche sono le tangenti alla seconda parabola » e teoremi analoghi per l'ellisse e per l'iperbole.

Cap. 8° — Espressioni di Cagnoli, Eulero e Lhuilier per l'eccesso sferico — Il teorema importante « Un piccolo triangolo sferico curvilineo può essere considerato come un triangolo piano, i cui lati hanno uguali lunghezze ed i cui angoli sono costruiti in modo che ogni angolo del triangolo sferico sia stato diminuito della terza parte dell'eccesso sferico ».

Cap. 9° — Volume del prisma triangolare espresso mediante le aree delle facce laterali e della base, e degli angoli diedri formati dalle prime fra loro e colla base — Espressioni dei raggi delle sfere inscritte e circoscritte ai singoli poliedri regolari e le aree ed i volumi di questi.

Cap. 10° — Rappresentazioni delle sezioni piane delle superficie coniche, cilindriche e di rivoluzione e di queste fra loro.

Tutto ciò per l'opera originale. Nell'appendice sono risoluti alcuni problemi di planimetria, stereometria e trigonometria ed altri vengono proposti allo studioso. Fra i problemi sviluppati, cosa ben fatta, è considerata la quistione: « dimostrare che se le bisettrici dei due angoli d'un triangolo sono uguali, esso è isoscele ». Ciascun capitolo è stato arricchito dai traduttori, con molta opportunità, d'una serie d'esercizi: peccato che non sempre essi siano bene coordinati agli argomenti sviluppati nel capitolo. Negli esercizi relativi al cap. 8° trovansi notati i valori di tutti gli elementi appartenenti a 17 triangoli sferici, ciò che fornisce soggetto di utilissima applicazione per lo studioso.

Qualcuno potrà muovere obbiezione riguardo al metodo a cui è informata questa, come le parti precedenti, della geometria elementare del dott. Schlömilch, che non è certo il sintetico, ma è un passo innanzi nel metodo analitico di trattare la geometria, iniziato dal Legendre. È perciò che prescindendo dal metodo innovatore al quale l'opera è informata, che pure ha trovato accoglimento favorevole nella patria d'Arminio, tanto da permettere alla I parte dell'opera di giungere alla 7ª edizione, alla II parte di giungere alla 6ª ed alla III di pervenire alla 3ª edizione, l'opera è consigliabile per gli alunni degli Istituti tecnici, più che per quelli dei Licei, ne' quali i metodi della pura geometria sono in qualche maniera prescritti anche dai programmi. Non dico poi che qualche appunto non fosse da muoversi alla medesima anche sotto il rispetto didattico, in quanto il desiderio d'innovare ha portato talvolta l'A. ad escogitare dimostrazioni meno dirette di quelle ordinarie e sopratutto è un ostacolo per la facile intelligenza del libro la rigidità dello stile.

Riguardo alla traduzione non posso passare sotto silenzio che vi si trovano frequentissimi gli errori di stampa e frequenti le imperfezioni e scorrezioni del periodo.

A. Lugli.

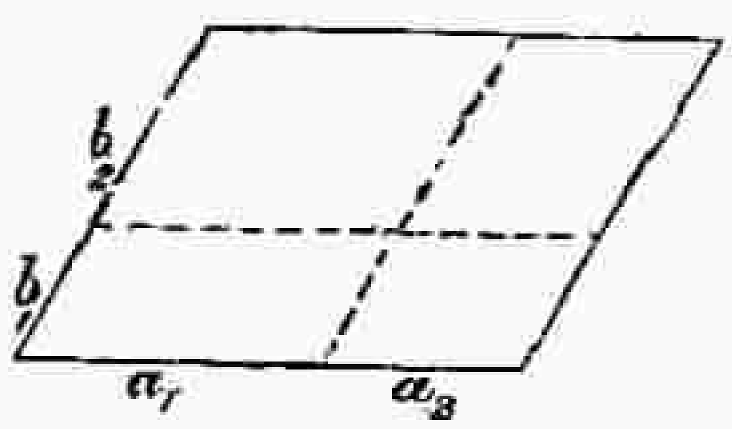
NB. L'elenco delle pubblicazioni ricevute, dalla chiusura del fasc. I, viene rimandato al fascicolo venturo.

Chiusura della redazione il dì 11 marzo 1892.

A PROPOSITO DI UN LAVORO SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE

Il chiarissimo dottor Gino Loria, che insegna l'alta geometria nell'università ligure e con pregevoli scritti alacremente ne cura il progresso, or sono tre anni pubblicò un suo bello studio sul *Periodo aureo della geometria greca*, il quale trovasi inserito fra le memorie della R. Accademia scientifica di Torino, serie II, tomo XL. Come i nordici abitatori dell'Europa lasciano le umide nebbie del loro clima, e vengono a ritemprare la salute al sereno e caldo cielo delle regioni meridionali, così il valente geometra abbandona per alcun tempo le moderne ricerche sugli spazi ad *n* dimensioni, sulle geometrie infinitesimali, proiettive e cinematiche per tornare alle pure sorgenti della scuola greco-alessandrina, e con dilettevole stile rinverdire l'antica sintesi di Euclide, di Archimede e di Apollonio. Dal commento di Teone apparisce esser vissuto Euclide tre secoli innanzi Cristo, aver unite ed ordinate le proprietà dello spazio scoperte da Talete, da Eudosso e dai Pitagorici. I suoi famosi elementi di geometria trattano delle figure poligone e poliedriche, delle grandezze commensurabili ed irrazionali; in virtù di alcuni semplici postulati per intersezioni di rette e circonferenze ivi si costruiscono le incognite dei problemi, e per una catena di sillogismi rigorosi dalle definizioni semplici e chiare deduconsi le relazioni di sito e di grandezza fra le varie parti delle figure. Sebbene Euclide non faccia parola del moto geometrico, considera la circonferenza generata per la rotazione dell'estremo di un segmento rettilineo che abbia fisso l'altro estremo sul piano, escludendo ogni istrumento meccanico. Nel dimostrare l'eguaglianza degli angoli alla base di un triangolo isoscele considera due triangoli non sovrapponibili per moto di scorrimento; perocchè sia necessario di far girare prima nello spazio uno dei triangoli attorno ad un suo lato, abbatterlo sopra la banda opposta, e poi trasferirlo a coincidere sul secondo. Le prove euclidee sopra i casi di eguaglianza dei triangoli e varie costruzioni dei quesiti si possono applicare alla sfera, purchè si sostituiscano circonferenze massime alle rette; valga ad esempio la regola per tracciare le tangenti ad un circolo da un punto esterno. La 47sima proposizione del I libro è la più attraente e feconda per le conseguenze: da essa discende il modo di costruire un quadrato equivalente al rettangolo descritto con i lati $a > b$ od alla somma e differenza di figure poligone: seguendo lo stesso metodo provasi l'equivalenza dei rettangoli che hanno per basi due lati di un triangolo qualunque e per altezze le proiezioni di ciascuno sull'altro; ricavandone le dirette dimostrazioni dei teoremi 12 e 13 del II libro. Introducendo le notazioni $(a, b)_\alpha$ per indicare il parallelogrammo disegnato con i lati a, b e l'angolo compreso α; $(a)_\alpha$, se abbiasi $a = b$, od il rombo che ha il lato a e l'angolo α; (a, b) il rettangolo descritto con i lati a, b ed infine (a) il quadrato costruito sul segmento a, col raziocinio delle prime proposizioni del II libro euclidiano trovansi le identità

$$(1) \quad (a, b)_\alpha + (a, c)_\alpha = (a, b + c)_\alpha; \; (a, 2b)_\alpha = 2\,(a, b)_\alpha; \; (2a, 2b)_\alpha = 2\,(a, 2b)_\alpha = 4\,(a, b)_\alpha.$$



Il parallelogrammo avente per lati le somme $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2$, mediante le parallele condotte dagli estremi comuni ai segmenti si decompone in quattro parallelogrammi e quindi resulta l'identità

$$(2) \quad (a_1 + a_2, b_1 + b_2)_\alpha = (a_1, b_1)_\alpha + (a_2, b_1)_\alpha + (a_1, b_2)_\alpha + (a_2, b_2)_\alpha$$

simile all'aritmetica esprimente il prodotto di una somma per una somma ed estendibile al parallelogrammo costruito con i lati $a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_m, b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. La medesima figura o la (2) fornisce l'identità

$$(3) \quad (a_1 + a_2, b_1 + b_2)_\alpha - (a_1, b_1)_\alpha = (a_1, b_2)_\alpha + (a_2, b_1 + b_2)_\alpha.$$

In particolare facendo $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$ la (2) diviene

$$(4) \quad (a_1 + a_2)_\alpha = (a_1)_\alpha + 2\,(a_2, a_1)_\alpha + (a_2)_\alpha,$$

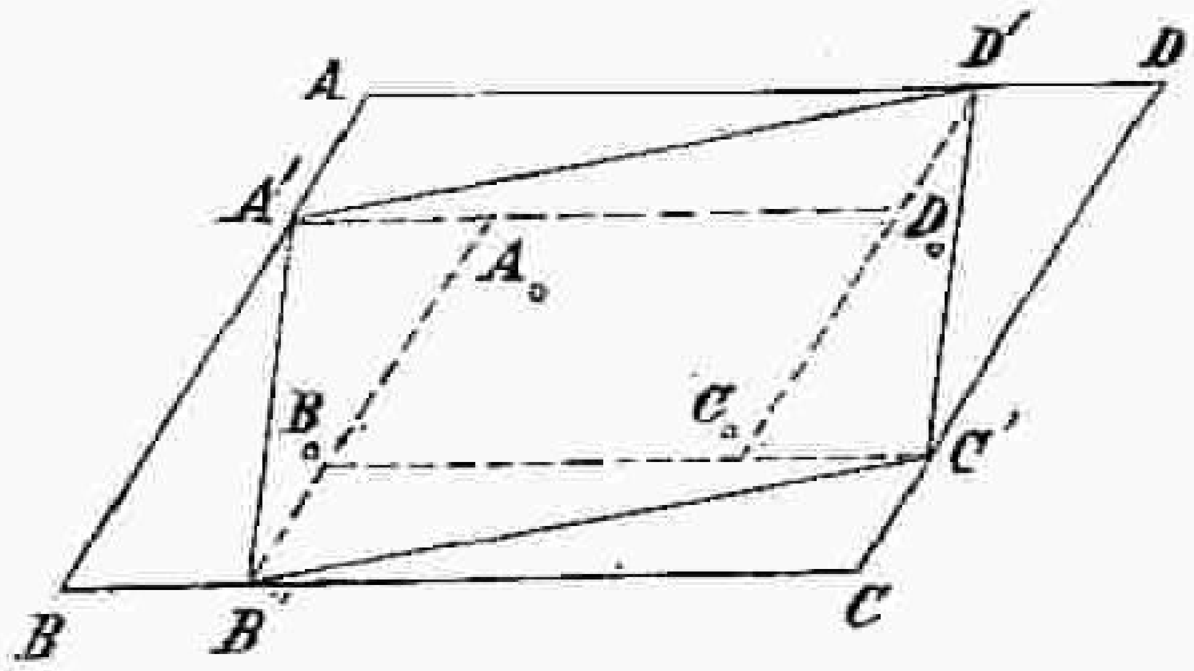
che per $\alpha = 90^\circ$ simboleggia il teorema 4° del secondo libro; e la (3) si riduce alla

$$(a_1 + a_2)_\alpha - (a_1)_\alpha = (a_1, a_2)_\alpha + (a_2, a_1 + a_2)_\alpha = (2a_1 + a_2, a_2)_\alpha :$$

ovvero ponendo $a_2 = a - a_1$ si ottiene

$$(a)_\alpha - (a_1)_\alpha = (a + a_1, a - a_1)_\alpha ;$$

dunque la differenza di due rombi equiangoli si trasforma nel parallelogrammo avente per lati la somma e la differenza dei loro lati e con i medesimi angoli.



Il parallelogrammo $ABCD$ mediante due trasversali $A'C'$, $B'D'$ condotte per il suo centro è decomponibile in quattro triangoli a due a due congrui ($AA'D'$, $B'CC'$) ($BA'B'$, $D'DC'$) e nel parallelogrammo interno $A'B'C'D'$, di cui due lati sono i segmenti $A'B' = D'C' = c_1$, $B'C' = A'D' = c_2$ inclinati secondo l'angolo $\omega = A'B'C'$: ponendo $BB' = a_1$, $B'C = a_2$, $BA' = b_1$, $A'A = b_2$, ed osservando che i detti triangoli formano due parallelogrammi, si ottiene l'identità geometrica

$$(a_1 + a_2, b_1 + b_2)_\alpha = (a_1, b_1)_\alpha + (a_2, b_2)_\alpha + (c_1, c_2)_\omega,$$

e per i valori $b_2 = a_1$, $b_1 = a_2$ si riduce al rombo $(a_1 + a_2)_\alpha = 2(a_1, a_2)_\alpha + (c_1, c_2)_\omega$, e nel caso di $\alpha = 90^\circ$ il rombo insieme al parallelogrammo interno divengono quadrati; onde la relazione $(a_1 + a_2) = 2(a_1, a_2) + (c_1)$ e togliendo il comune rettangolo $2(a_1, a_2)$ resulta $(a_1) + (a_2) = (c_1)$ significante il teorema pitagorico. In un rombo $ABCD$ sopposti i lati $A'B'$, $B'C'$ paralleli alle diagonali AC, BD si hanno $\omega = 90^\circ$, $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$ e l'identità generale riducesi alla $(a_1 + a_2)_\alpha = (a_1)_\alpha + (a_2)_\alpha + (c_1, c_2)$, e quindi $2(a_1, a_2)_\alpha = (c_1, c_2)$.

Se nel surriferito parallelogrammo $ABCD$ si tirino per i punti A', B', C', D' le parallele ai suoi lati fino a segarsi fra loro, si ottengono cinque parallelogrammi equiangoli gli opposti congrui, e lo interno $A_0\, B_0\, C_0\, D_0$ avente per lati $A_0 B_0 = b_1 - b_2$, $B_0 C_0 = a_2 - a_1$; onde l'identità

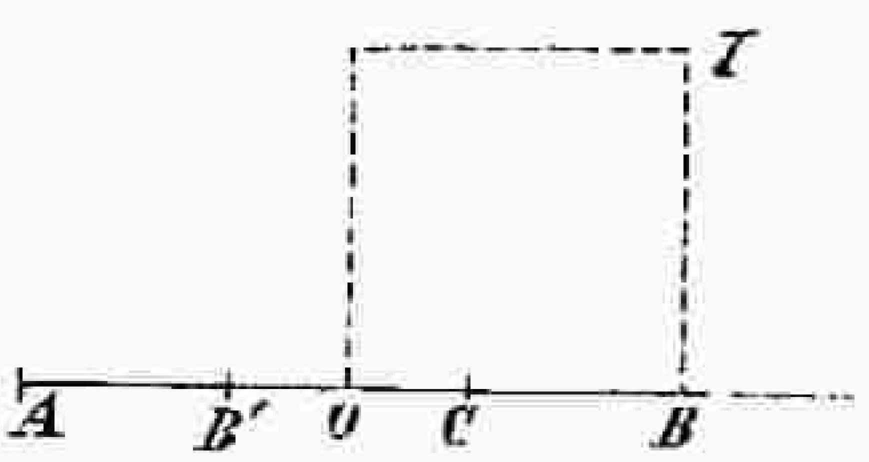
$$(a_1 + a_2,\, b_1 + b_2)_\alpha = 2(a_1,\, b_1)_\alpha + 2(a_2,\, b_2)_\alpha + (a_2 - a_1,\, b_1 - b_2)_\alpha$$

che per $b_1 = a_2$, $b_2 = a_1$ si riduce alla

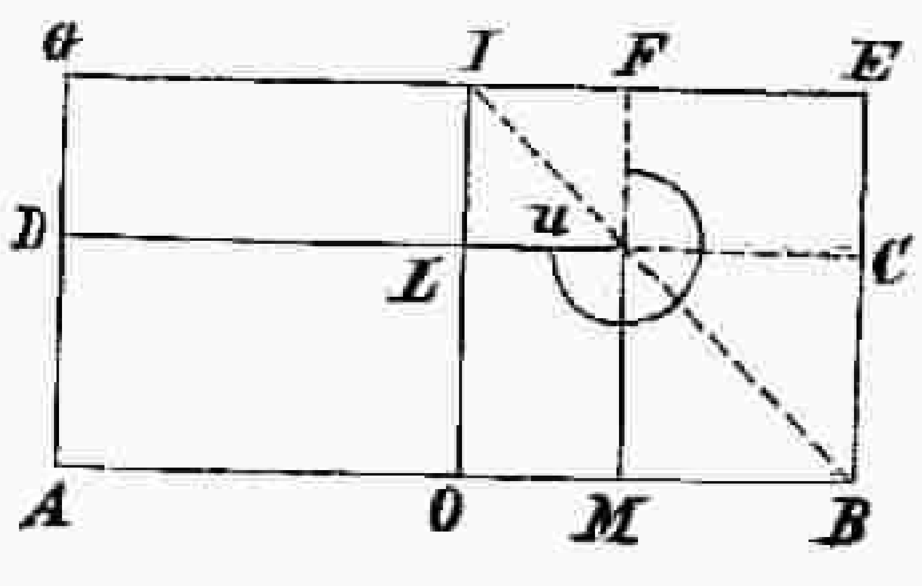
$$(a_1 + a_2)_\alpha = 4\,(a_1,\, a_2)_\alpha + (a_2 - a_1)_\alpha$$

e per $\alpha = 90^o$ corrispondono a note identità algebriche.

Sia C un punto interno del segmento AB ed O il punto medio, ne risulta $(AO) - (OC) = (AO + OC, AO - OC) = (AC, CB)$, ovvero $(AO) = (AC, CB) + (OC)$ che è il teorema 5° del libro II: similmente per un punto esterno D si deduce $(OD) - (OB) = (AD,\ BD)$ significante il teorema 6°.



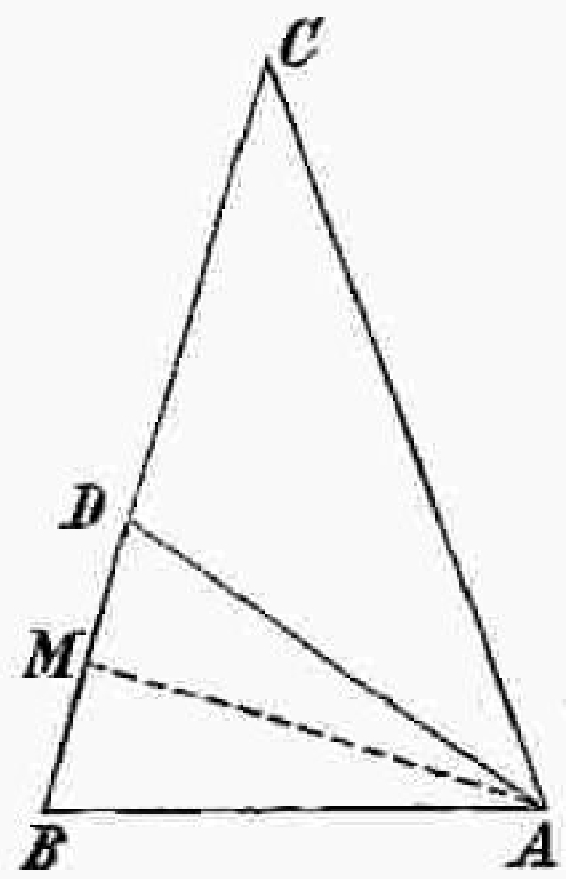
Rappresenti AC il segmento aureo di AB, cioè $(AC) = (AB,\ CB) = (AB,\ AB - AC)$, poichè $(AB) = (AB,\ AC) + (AB,\ AB - AC)$, a motivo dell'ipotesi precedente si ottiene $(AB) = (AB,\ AC) + (AC) = 2(AO,\ AC) + (AC)$, ed aggiungendovi il quadrato costruito sopra AO ne deriva $(AB) + (AO) = (AO + AC)$; il il primo membro di questa eguaglia il quadrato dell'ipotenusa AI, essendo AB e $BI = AO$ i cateti del triangolo rettangolo, onde $AI = AO + AC$, da cui $AC = AI - AO$ identica alla soluzione euclidea, prop: 2ª, libro II. Parimente dalla relazione $(AC) = (AB,\ CB) = (AC + CB,\ CB) = (AC,\ CB) + (CB)$ si deduce $(CB) = (AC) - (AC,\ CB) = (AC,\ AC - CB)$; quindi preso il punto B' simmetrico di B rispetto C, l'ultima equivale a $(B'C) = (AC,\ AC - B'C)$, onde $B'C$ è il segmento aureo di AC.



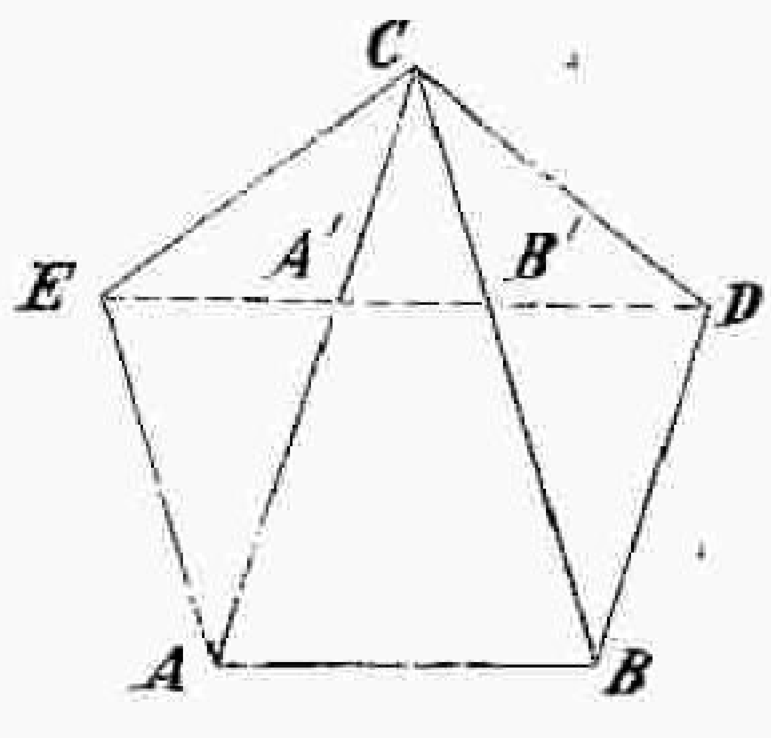
Disegnando i quadrati sulle parti eguali AO, OB ed il rettangolo $AMUD$ con le parti diseguali AM, MB, lo gnomone $ULOBEFU$ equivale al detto rettangolo e perciò questo è minore del quadrato descritto sopra $A\,O$ metà del semiperimetro, dunque fra tutti i rettangoli isoperimetri il quadrato ha la massima superficie; proposizione simile alla 27^{sima} del VI libro.

Anche le relazioni fra i segmenti determinati dalle corde circolari segantisi dentro o fuori del cerchio, sono dedotte dall'equivalenza delle superficie indipendentemente dai numeri e dalle formole metriche.

Nel III° libro Euclide applica la sezione aurea a costruire il triangolo isoscele, di cui gli angoli alla base siano doppi dell'angolo al vertice, e sussiste pure la proposizione reciproca. Infatti nel triangolo isoscele $A\,C\,B$ si suppongano gli angoli $A = B = 2\,C$; tirata la bisettrice $A\,D$ dell'angolo $C\,A\,B$ ne conseguono $B\,A = A\,D = D\,C$ e significando con M il mezzo di $B\,D$, si deduce $(A\,D) = (A\,M) + (M\,D)$, ovvero $(D\,C) + (M\,C) = (A\,M) + (M\,D) + (M\,C) = (A\,C) + (M\,D) = (B\,C) + (M\,D) = (B\,M + M\,C) + (M\,D) = (B\,M) + 2\,(B\,M,\ M\,C) + (M\,C) + (M\,D)$ e quindi resulta $(D\,C) = 2\,(B\,M) + 2\,(B\,M,\ M\,C) = (B\,D,\ B\,C)$; dunque *se un triangolo isoscele abbia gli angoli eguali dupli dell'angolo al vertice, la sua base pareggia il segmento aureo di ciascuno degli altri lati.*

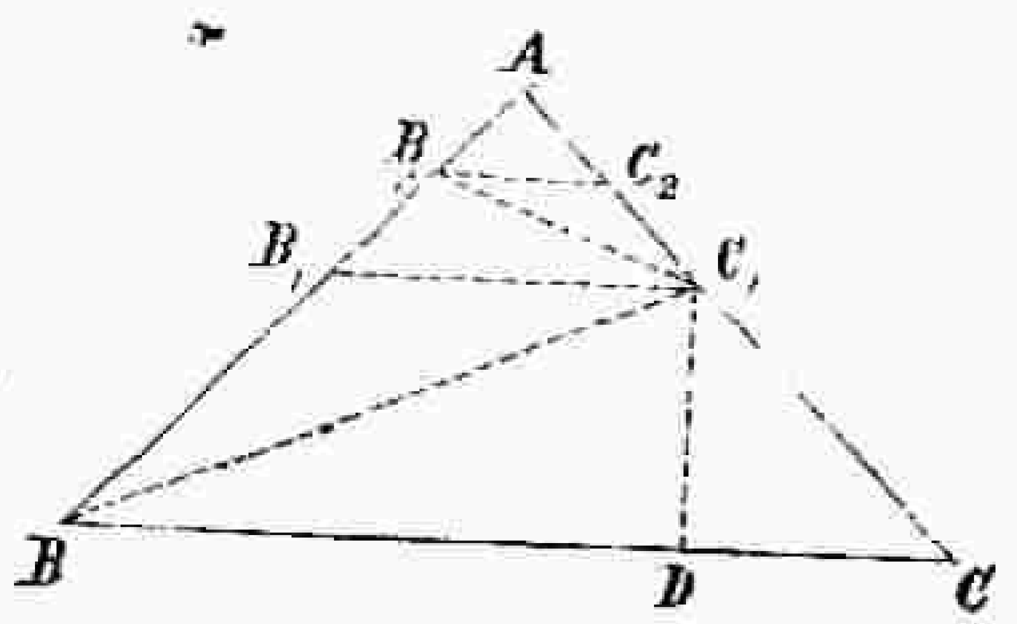


In questo triangolo $A\,B\,C$ si prendano $A\,A' = B\,B' = A\,B$, e sulla $A'B'$ parallela ad $A\,B$ si seghino le parti $A'E = B'D = A'C = B'C$, la figura $E\,C\,D\,B\,A$ sarà un pentagono regolare perchè $B'C$ è il segmento aureo di $B\,B' = A\,B$ e di $E\,B'$ a motivo del triangolo $E\,C\,B'$ avente gli angoli alla base doppi dell' angolo al vertice, onde $E\,B' = A\,B$ ecc. Dalle costruzioni del quadrato, del pentagono, e dell'esagono regolari Euclide concluse potersi dividere la circonferenza in archi eguali secondo i numeri 2^m, $2^m.3$, $2^m.5$, $2^m.3.5$ con m intero e positivo. - Il napoletano Alfonso Borelli, professore di matematica all'Università di Pisa nell'anno 1658 stampò



l'*Euclides restitutus* riformando l'ordine delle proposizioni e semplificando i ragionamenti; così dimostra un triangolo isoscele ABC esser pure isoangolo, costruendo il triangolo $A'B'C$ simmetrico del primo rispetto al vertice C e sovrapponendo l'angolo $B'CA'$ sull'eguale ACB mediante la coincidenza di $B'C$ con CA e di CA' con CB. La congruenza di due triangoli ABC, $A'B'C'$ aventi i tre lati rispettivamente eguali è da lui provata col situarli in posizioni simmetriche e coi lati AB, $A'B'$ coincidenti; condotta la retta CC' ricava per i triangoli isosceli ACC', BCC' l'eguaglianza degli angoli C, C'. Nella teorica delle parallele al postulato euclideo sostituì il principio *il luogo geometrico dell'estremo di un segmento rettilineo* l *costante e normale ad una retta* a, *dove giace l'altro estremo, comporsi di due rette* a', a'' *simmetriche ed ortogonali con* l. Le proprietà elementari del cerchio sono esposte dal Borelli nel 2° libro, vi determina il centro d'una circonferenza descritta per l'incontro delle normali bisecanti due corde aventi un estremo comune. Al termine di questo suo libro distingue le quantità commensurabili dalle irrazionali e premette il lemma euclideo *date due grandezze disuguali* $a > b$, *se dalla maggiore* a *si tolga la parte* $a' > \frac{a}{2}$ *e dal residuo* $a - a'$ *si tolga* $a'' > \frac{a - a'}{2}$ *e così da ciascun residuo più della sua metà, proseguendo si giungerà ad una grandezza minore della* b.

Considera un triangolo ABC avente l'angolo retto A ed i lati $CA = AB$, tirata la bisettrice BC_1 dell'angolo B fino a segare in C_1 il lato CA e da C_1 la perpendicolare C_1D a BC, a motivo di $BD = BA > \frac{BC}{2}$, si avrà $DC = BC - AB$ e $DC = C_1D = AC_1$; condotta



la parallela C_1B_1 a CB, nel triangolo rettangolo isoscele AC_1B_1 i cateti eguagliano il residuo DC, e la C_1B_2, bisettrice dell'angolo $B_1C_1A = C$, sega dal lato $AB_1 = DC$ il segmento $B_1B_2 > \frac{AB_1}{2}$ e così tirando B_2C_2 parallela a BC si ottiene il triangolo isoscele $A B_2 C_2$ ecc.; in ognuno di questi triangoli per la bisettrice dell'angolo acuto si sottrae da ciascun cateto più della sua metà; onde si giungerà ad un triangolo $A B_n C_n$ isoscele rettangolo e tale che i lati $C_n A = A B_n$ risulteranno minori di qualsivoglia piccolissimo segmento. Ora se $B C$ avesse una comune misura d col lato $A C$, sarebbero tanto $A C_1 = B C - A C$, quanto $B_1 C_1 = B C - 2 A C_1$ multipli di d; e così tutti i lati dei successivi triangoli isosceli e l'ultimo $A B_n$ verrebbero multipli della grandezza finita d; conclusione assurda perchè $A B_n$ può ridursi minore di d, dunque la diagonale $B C$ del quadrato è incommensurabile con il lato $A C$. Il Borelli inserisce i teoremi di Archimede sul circolo, ed applicando il metodo di esaustione prova esser il circolo equivalente al triangolo, che abbia la base eguale alla circonferenza e l'altezza pari al raggio. Dimostra la proposizione di Snellio essere il poligono regolare iscritto di $2n$ lati medio proporzionale fra i poligoni regolari iscritto e circoscritto di n lati, e vi aggiunge il teorema di Galileo *ogni circolo esser medio proporzionale fra due poligoni regolari simili, l'uno iscrittovi e l'altro isoperimetro con la circonferenza.* Il germe delle figure inverse contiensi in una osservazione del Borelli; che tirando una trasversale s per un punto A di una circonferenza ed indicati con M il secondo punto di sezione, con M' l'incontro di s con una retta fissa r prova l'esser costante il rettangolo $A M \times A M'$. Nella geometria dello spazio costruisce il triedro avente faccie date, disegnando in un cerchio col centro S e col raggio arbitrario $S A$ gli angoli piani $A S B$, $B S C$, $C S D$; condotte le corde $A M A'$, $D N D'$ normali alle rispettive rette $S B$, $S C$ e segantisi in P, innalza da questo al piano del cerchio la perpendicolare $P A_o$, il cui quadrato equivalga al rettangolo dei segmenti $A P$, $P A'$ o dei segmenti $D P$, $P D'$ ed i triangoli $A_o S M$, $A_o S N$ sono respettivamente eguali ai triangoli $A S M$, $D S N$. Il Borelli definì le superficie coniche e cilindriche, come luoghi delle rette congiungenti i punti di una curva piana ad un punto fisso esterno al piano, o parallele fra loro. Infine terminerò coll'accennare che nell'Euclide riformato l'autore prova l'equivalenza delle piramidi triangolari, che hanno la medesima altezza h e le basi di egual superficie, inscrivendo in ciascuna piramide prismi interni e circoscrivendo prismi esterni di altezza $\frac{h}{2^n}$, e la somma degl' interni mostra differire da quella degli esterni per il prisma costruito sulla base della prima piramide; quindi la differenza potersi ridurre minore di qualunque piccolissima grandezza.

(Continua). G. Bellacchi.

DELL'ANALISI INDETERMINATA DI SECONDO GRADO

(Continuazione, V. pag. 49).

15. *Osservazioni.* — *a*) Nell'applicare il metodo dichiarato nel n. 13, invece di far uso di tutte le equazioni del sistema $[B]$, si potrebbe far uso di quelle soltanto che occupano posto pari. Infatti, ragionando come nel n. 13, facilmente si dimostra che, se (x_1, y_1) è soluzione, singolare o no, della proposta equazione, si ha:

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right)(\pm k + h\sqrt{D}),$$

essendo (k, h) una soluzione della 2ª equazione. Che inoltre, se (k, h) non è singolare,

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right)^3 (\pm k'' + h''\sqrt{D}),$$

indicando con (k'', h'') una soluzione della 4ª equazione. E via così. Che insomma

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \left(\frac{m + \sqrt{D}}{n}\right)^\lambda (\pm x' + y'\sqrt{D}), \qquad [10]$$

λ essendo dispari ed (x', y') soluzione singolare dell' equazione $(\lambda + 1)^a$.

Derivando le soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$ dalla [10] per λ dispari, il che equivale a far uso del sistema $[B]$, dopo averne escluso le equazioni di posto impari, si ha il vantaggio di ottenere tutte le soluzioni dell'equazione proposta senza ripetizioni e, ove si voglia, ordinate per ragion di grandezza dalla minima in poi. Infatti le dette soluzioni cresceranno al crescere di λ e, per ogni particolar valore di λ, al crescere del valore algebrico della quantità $\pm x'$ (si tralascia per brevità la dimostrazione, già data per casi consimili nei n. 3, 6 e 10 di questo scritto).

Noteremo peraltro, a fine di giusticare l'uso dell'intero sistema $[B]$, e conseguentemente della [10] per λ pari o dispari, che facendo uso delle sole equazioni di posto pari, epperò della [10] per λ dispari soltanto, la soluzione singolare dalla quale si deriva una certa soluzione (x_1, y_1) dell'equazione proposta, appartenendo a equazione di posto più avanzato nel sistema $[B]$, potrebbe risultar maggiore, epperò più difficile a determinarsi, che non facendo uso di tutte le equazioni del sistema medesimo. È facile il verificarlo.

b) Dalla formola

$$y > \frac{m+\sqrt{D}}{m+\sqrt{D}+1} \cdot \frac{y'}{(\sqrt{D}-m)^{\lambda-1}},$$

dimostrata nel n. 14, risulta che, applicando il metodo alla determinazione delle soluzioni minori di Δ, limitazione assegnata alla y, il numero λ dei passaggi da equazione ad equazione del sistema $[B]$ deve soddisfare la condizione

$$\Delta > \frac{m+\sqrt{D}}{m+\sqrt{D}+1} \cdot \frac{1}{(\sqrt{D}-m)^{\lambda-1}}.$$

Dalla quale si ottiene:

$$\lambda < \frac{\log \Delta + \log (m+\sqrt{D}+1) - \log n}{\log (m+\sqrt{D}) - \log n}.$$

Questa osservazione fa riscontro ad altra simile, contenuta nel n. 11, e, come quivi è detto, la limitazione Δ potrebbe esser quella che definisce le soluzioni fondamentali.

c) Chiamando δ il massimo comun divisore fra m ed n, sulle successive equazioni del sistema $[B]$ non occorrerà provare che quei valori di y i quali rendono ny^2 divisibile per δ^2, meno che si tratti della 1ª e della 2ª equazione. (V. l'osservazione consimile nel n. 12).

16. Fu già osservato che i dichiarati metodi non si applicano soltanto alla ricerca delle soluzioni dell'equazione Pelliana e alla conseguente determinazione della α e della β contenute nella formola [4], ma benanche alla ricerca delle soluzioni fondamentali (K, H)

che figurano in essa. Se così non fosse, la formola [4], nella generalità dei casi, quando cioè le limitazioni $\alpha \sqrt{N}$, $\beta \sqrt{N}$ della K e della H fossero numeri grandi, avrebbe un'importanza puramente teoretica, a cagione del numero grande di tentativi che occorrerebbero per conoscere le soluzioni fondamentali. Un caso teoretico sarebbe, per esempio, quello dell'equazione

$$x^2 - 46 y^2 = 210,$$

trattata da LAGRANGE nelle *Memorie di Berlino;* perchè, essendo (24335, 3588) la soluzione minima dell'equazione $x^2 - 46 y^2 = 1$, come risulta dai n. 9 e 10, la relativa limitazione per H sarebbe $3588 \sqrt{210} = 51995,...$

Pertanto, per meglio mostrare l'efficacia dei metodi dianzi stabiliti, e come debbasi in generale procedere nell'applicarli, proponiamoci di risolvere di fondo la suddetta equazione.

Essendo $\sqrt{46}$ più vicina al suo valore a meno di un'unità in eccesso che non a quello in difetto, applicheremo il metodo stabilito nel n. 8; ed anzitutto alla ricerca della (α, β), indi a quella delle soluzioni fondamentali dell'equazione proposta. La prima ricerca fu già fatta nel n. 9, e si trovò che $\beta = 3588$, $\alpha = 24335$.

Passiamo dunque a ricercare le soluzioni fondamentali della proposta equazione, ossia quelle soluzioni nelle quali $y < 3588 \sqrt{210}$.

Anzitutto stabiliamo un limite superiore per il numero λ dei passaggi da equazione ad equazione del sistema [A]. Applicando l'ultima formola del n. 11, col porre in essa $D = 46$, $m = 6$, $n = 10$, $\Delta = 3588 \sqrt{210}$, si ottiene $\lambda \leq 7$. Facendo uso del sistema [A], all'intento di conoscere le sole soluzioni fondamentali della proposta equazione, si dovranno adunque fare 7 passaggi al più. Le equazioni da considerarsi saranno perciò le 8 seguenti:

$$\begin{aligned}
x^2 - 46 y^2 &= 210 \\
x^2 - 46 y^2 &= 630 \\
x^2 - 46 y^2 &= 1890 \\
x^2 - 46 y^2 &= 5670 \\
x^2 - 46 y^2 &= 17010 \\
x^2 - 46 y^2 &= 51030 \\
x^2 - 46 y^2 &= 153090 \\
x^2 - 46 y^2 &= 459270.
\end{aligned}$$

La limitazione per la y delle soluzioni singolari della 1ª equazione è 8, e si trova facilmente che l'equazione ammette la sola soluzione singolare [16, 1].

La limitazione della y è 14, per la 2ª equazione, e le relative soluzioni singolari sono (26, 1), (66, 9). Se ne derivano per l'equazione proposta le soluzioni [76, 11], [292, 43].

Passiamo alla 3ª equazione, con 25 limitazione della y, e (44, 1), (48, 3), (136, 19), soluzioni singolari. Di queste, la 2ª e la 3ª sono *spurie*, in quanto che non se ne derivano soluzioni intere per la proposta equazione. Ma dalla 1ª si deriva per l'equazione medesima la soluzione [536, 79].

Segue la 4ª equazione, con 43 limitazione della y, e (78, 3), (106, 11), (198, 27), (262, 37), soluzioni singolari; dalle due prime delle quali, che non sono spurie, come la 3ª e la 4ª, si derivano le soluzioni [4768, 703], [8756, 1291].

La limitazione per la y della 5ª equazione è 75, e (132, 3), (144, 9), (236, 29), (408, 57), (512, 73) le soluzioni singolari. Dalla prima e dall'ultima soltanto si derivano per l'equazione proposta soluzioni intere. Queste sono [33932, 5003] e [224312, 33073].

La limitazione per la y della 6ª equazione sarebbe 130, e altrettanti sarebbero i tentativi da farsi per ottenere le soluzioni singolari dell'equazione. Ma viene in buon punto una osservazione, mercè la quale i tentativi in proposito possono ridursi a 25 soltanto. Nel n. 11 si è dimostrato che

$$y \geq \frac{y'}{(m+1-\sqrt{D})^{\lambda}},$$

riferendosi y all'equazione proposta e y' ad una soluzione singolare ottenuta dopo λ passaggi. Dovendo pertanto essere $y < 3588\sqrt{210}$, si avrà, trattandosi della 6ª equazione,

$$3588\sqrt{210} > \frac{y'}{(7-\sqrt{46})^5}$$

e conseguentemente $y' < 25$. La 6ª equazione ammette due sole soluzioni singolari con y' non maggiore di 25. Esse sono (226, 1) e (234, 9); ma sono spurie per rispetto all'equazione proposta

La condizione

$$3588 \sqrt{210} > \frac{y'}{(7 - \sqrt{46})^6}$$

limita le soluzioni singolari della 7ª equazione. Da essa si ricava $y' \leq 5$. Ma nessuno dei valori 0, 1, 2, 3, 4, 5 della y soddisfa l'equazione. Si passerà dunque all' 8ª equazione.

Dalla condizione

$$3588 \sqrt{210} > \frac{y'}{(7 - \sqrt{46})^7}$$

si ricava $y' \leq 1$. Ma i valori 0 e 1 della y non soddisfanno l'equazione.

Essendosi fatti 7 passaggi, non occorre proceder oltre. Le soluzioni fondamentali dell'equazione $x^2 - 46y^2 = 210$ sono le otto che si ebbe cura di scrivere a mano a mano entro parentesi quadrate. L'equazione ammette dunque 8 formole di risoluzione, risultanti dai binomi

$$16 + \sqrt{46}\ ; \quad 76 + 11\sqrt{46}\ ; \quad 292 + 43\sqrt{46}\ ;$$
$$536 + 79\sqrt{46}\ ; \quad 4768 + 703\sqrt{46}\ ; \quad 8756 + 1291\sqrt{46}\ ;$$
$$33932 + 5003\sqrt{46}\ ; \quad 224312 + 33073\sqrt{46}\ ;$$

moltiplicati tutti per il fattore

$$(24335 + 3588\sqrt{46})^m. \ (*)$$

(*Continua*).

G. Frattini.

(*) Concedendo il segno ambiguo al termine irrazionale dei primi quattro binomi fondamentali, le trovate otto formole di risoluzione si riducono alle quattro seguenti:

$$(16 \pm \sqrt{46})(24335 + 3588\sqrt{46})^m; \quad (76 \pm 11\sqrt{46})(24335 + 3588\sqrt{46})^m;$$
$$(292 \pm 43\sqrt{46})(24335 + 3588\sqrt{46})^m; \quad (536 \pm 79\sqrt{46})(24335 + 3588\sqrt{46})^m.$$

Cosicchè non fa bisogno, per la risoluzione dell'equazione, di tutte ed otto le soluzioni fondamentali, ma della prima metà solamente. Questo fatto non è particolare per l'equazione sopra considerata, ma si verifica sempre (v. l'appendice): e la limitazione Δ, per la y delle soluzioni fondamentali che veramente abbisognano, è

$$\sqrt{\frac{N(\alpha - 1)}{2D}};$$

la quale, per l'equazione $x^2 - 46y^2 = 210$, diviene $\sqrt{\frac{210 \,.\, 24334}{2 \,.\, 46}} = \sqrt{55545}$. Dall'ultima formola del n. 11, ponendovi $\Delta = \sqrt{55545}$, $D = 46$, $m = 6$, $n = 10$, risulta che $\lambda \leq 3$. Per risolvere l'equazione $x^2 - 46y^2 = 210$ sarebbero adunque bastati tre passaggi da un'equazione del relativo sistema alla susseguente. Le limitazioni superiori per la y delle quattro equazioni da considerarsi sarebbero state ordinatamente 8 e 14, per la 1ª e per la 2ª equazione; 25 e 43, per la 3ª e per la 4ª. Ma le ultime due, modificate secondo l'osservazione fatta verso la fine di questo numero, si sarebbero ridotte a 11 e 1. - Ciò dimostra che l'equazione si sarebbe potuta risolvere anche più sbrigativamente: anzi, se ben si osserva, con tale speditezza, *che avanza di molto quella del metodo classico relativo all'argomento.*

SULLA PARTIZIONE DEI NUMERI

1. Parlando in ciò che segue di soluzioni di equazioni intendiamo sempre quelle formate da numeri interi positivi o nulli; per l'equazione $y_0 + y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{p-1} = m$ (m intero positivo) si considerano come soluzioni diverse quelle soltanto che differiscono *per due valori almeno delle* y. Le equazioni che qui studiamo si connettono colla partizione dei numeri e diamo pel numero delle loro soluzioni alcune proprietà che in casi particolari conducono alla sua determinazione effettiva.

Teorema I. — « Le equazioni

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_m = p \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots\ldots + m\lambda_m = n \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

dove m, p, n sono interi positivi, ed m non supera n, ammettono soluzioni comuni solo quando è $pm \geqq n$ ed il loro numero è uguale a quello delle soluzioni dell'equazione

$$y_0 + y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{p-1} = n \quad \ldots\ldots (\beta)$$

in cui le y *non superano* m ».

Sia infatti $\lambda'_0, \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots\ldots, \lambda'_m$ una soluzione comune alle (α) e si consideri la serie dei numeri formata scrivendo tante volte lo zero quante unità sono in λ'_0, tante volte 1 quante sono in λ'_1, tante volte r ($r \leqq m$) quante unità sono in λ'_r: essendo verificate le (α) si otterrà così una serie di p numeri $y_0, y_1, \ldots\ldots, y_{p-1}$ (diversi o no da 0) pei quali sarà:

$$y_0 + y_1 + \ldots\ldots + y_{p-1} = \lambda'_1 + 2\lambda'_2 + \ldots\ldots + m\lambda'_m = n.$$

Così ad ogni soluzione delle (α) ne corrisponde una della (β) in cui le y non superano m, e poichè l'esistenza di tali soluzioni della (β), porta evidentemente $pm \geqq n$ così questa condizione è necessaria per l'esistenza di soluzioni delle (α).

Viceversa se la condizione $pm \geqq n$ è soddisfatta, sia $y'_0, y'_1, \ldots\ldots, y'_{p-1}$ una soluzione della (β) in numeri non maggiori di m;

indicando con $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_m$ quante y'_r sono rispettivamente uguali a $0, 1, 2, \ldots\ldots, m$ si avrà:

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_m = p,$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots\ldots + m\lambda_m = y'_0 + y'_1 + y'_2 + \ldots\ldots, + y'_{p-r} = n$$

e quindi da una soluzione della (β) si è dedotta una delle (α). E poichè risulta ancora che a soluzioni diverse delle (α) ne corrispondono diverse della (β) e viceversa, il teorema è completamente dimostrato.

Sotto le medesime condizioni del precedente e colla nuova $p \leqq n$ si ha:

Teorema II. — « Il numero delle soluzioni comuni alle equazioni

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_m = p \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots\ldots + m\lambda_m = n \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)'$$

è uguale a quello delle soluzioni dell'equazione (β) in cui le y non superano m e *sono tutte differenti da zero* ».

La dimostrazione è del tutto analoga alla precedente.

Supponendo in particolare $n = m$ i teoremi dimostrati danno luogo ai seguenti:

Teorema III. — « Il numero delle soluzioni comuni alle due equazioni

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_m = p \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots\ldots + m\lambda_m = m \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

è uguale a quello delle soluzioni dell'equazione

$$y_0 + y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{p-1} = m \text{ ».} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Teorema IV. — « Il numero delle soluzioni comuni alle equazioni

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_m = p \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots\ldots + m\lambda_m = m \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

è uguale a quello delle soluzioni dell'equazione (2) in cui *tutte le y sono diverse da zero* ».

2. Ci occuperemo delle equazioni (1) e (3) ossia, pel nostro fine, della (2) e indicheremo con $s_{m,p}$ il numero delle sue soluzioni formate da *elementi* positivi o zero corrispondenti alle (1), e con $s'_{m,p}$ il numero di quelle formate da elementi diversi da zero corrispondenti alle (3). Chiameremo anche soluzioni s o *partizioni* s del numero m in p elementi qualunque quelle della prima specie, e soluzioni s' o partizioni s' di m in p elementi diversi da zero quelle della seconda (*). Ciò posto si ha:

Teorema V. — « Le quantità $s_{m,p}$, $s'_{m,p}$ soddisfano rispettivamente le equazioni

$$(4)\qquad \begin{aligned} s_{m,p} = s_{m,p-1} + s_{m-p,p-1} + s_{m-2p,p-1} + \\ s_{m-3p,p-1} + \ldots\ldots + s_{m-\left(\frac{m}{p}\right)p,\,p-1} \end{aligned}$$

$$(4')\qquad \begin{aligned} s'_{m,p} = s'_{m-1,p-1} + s'_{m-p-1,p-1} + \\ s'_{m-2p-1,p-1} + \ldots\ldots + s'_{m-\left[\left(\frac{m}{p}\right)-1\right]p-1,\,p-1} \end{aligned}$$

dove $\left(\dfrac{m}{p}\right)$ denota il quoto intero della divisione di m per p ».

Infatti sia K diverso da zero, e denotiamo con $s_{(m,p)_k}$ il numero delle partizioni di m che hanno per elemento *minimo* K, o come diremo anche in seguito *appartenente a* K. Se $(K\, K_1 \ldots . K_{p-1})$ è una di tali partizioni, immaginiamo, come faremo sempre, i suoi elementi disposti in modo che uno qualunque sia non maggiore di quello che gli succede a destra; ora se in ciascuna delle $s_{(m,p)_k}$ partizioni definite si sottrae da ogni suo elemento un numero $l \leqq K$, si otterranno evidentemente altrettante partizioni del numero $m - pl$ che appartengono a $K - l$. Nè oltre queste il numero $m - pl$ può averne altre appartenenti a $K - l$, perchè se ciò fosse aggiungendo in ciascuna e ad ogni suo elemento il numero l, si avrebbero altre partizioni di m appartenenti a K oltre le considerate, ciò che è assurdo; si conclude dunque

$$s_{(m,p)_k} = s_{(m-pl,\,p)_{k-l}}.$$

(*) Osserviamo che $s_{m,p}$ è sempre diverso da zero, mentre $s'_{m,p}$ è zero quando $p > m$.

Facendo $l = K$, $l = K - 1$ si ha:

$$s_{(m,p)_k} = s_{(m-pk,p)_0} \quad ; \quad s_{(m,p)_k} = s_{[m-p(k-1),p]_1}.$$

Osservando ora che ad ogni partizione di un numero N in p elementi appartenente a zero ne corrisponde una dello stesso numero in $p - 1$ elementi diversi o no da zero, e che ad ogni partizione di N appartenente a 1 ne corrisponde una di $N - 1$ in $p - 1$ elementi differenti da zero, e viceversa, nei due casi sarà:

$$s_{(m,p)_k} = s_{m-pk,p-1} \; , \; s_{(m,p)_k} = s'_{m-p(k-1)-1,p-1} \quad \ldots \quad (j)$$

E poichè se $(x_0, x_1 \ldots\ldots x_{p-1})$ è una partizione di m, di elemento minimo x_0, segue $px_0 \leqq m$, $x_0 \leqq \left(\frac{m}{p}\right)$, e le partizioni che appartengono ad elementi diversi sono necessariamente diverse, potremo classificare tutte le $s_{m,p}$ partizioni s in $\left(\frac{m}{p}\right) + 1$ gruppi rispettivamente appartenenti a 0, 1, 2, $\ldots\ldots \left(\frac{m}{p}\right)$, e tutte le $s'_{m,p}$ partizioni s' in $\left(\frac{m}{p}\right)$ gruppi appartenenti a 1, 2, $\ldots\ldots \left(\frac{m}{p}\right)$ onde avremo:

$$s_{m,p} = s_{(m,p)_0} + s_{(m,p)_1} + s_{(m,p)_2} \ldots\ldots + s_{(m,p)\left(\frac{m}{p}\right)}$$
$$s'_{m,p} = \qquad s_{(m,p)_1} + s_{(m,p)_2} \ldots\ldots + s_{(m,p)\left(\frac{m}{p}\right)}$$

che a causa delle precedenti formule (j) si riducono rispettivamente alle (4) e (4').

Osservazione (1). Dalle (j) risulta $s_{m-pk,p-1} = s'_{m-p(k-1)-1,p-1}$ che per $K = 1$ si riduce a

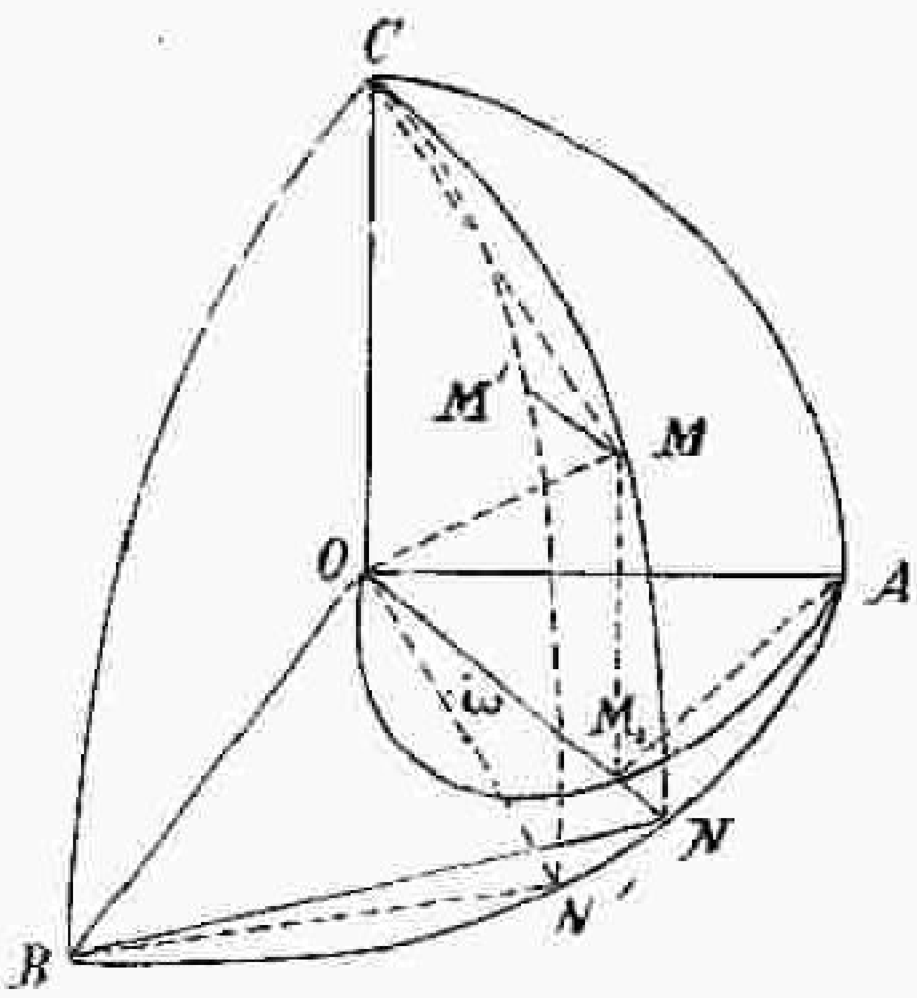
$$s'_{m,p} = s_{m-p,p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

(*Continua*).

Alberto Tagiuri.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Dimostrazione elementare del teorema di Viviani. (*Tidsskrift for Mathematik*). — Siano OA, OB, OC tre raggi di una sfera a due a due ortogonali. Sopra OA come diametro si descriva un semicerchio che sia nel piano AOB ed entro l'angolo AOB. Il teorema di Viviani si riduce a questo che la curva gobba in cui la sfera è tagliata dal cilindro avente per base il detto semicircolo ed OC per generatrice, taglia l'ottante sferico ABC in due parti le cui aree hanno delle espressioni semplici.



In ciò che segue supporremo il raggio OC verticale.

Sia ora M un punto della curva e M_1 la sua proiezione sul piano orizzontale AOB. L'angolo AOM_1 sia eguale a v e sia N l'intersezione del raggio OM_1 colla sfera. Sarà allora $\Delta\, OAM_1 \equiv OMM_1$, onde $< NOM = AON = v$, e $< COM = 90^0 - v = BON$. Da ciò segue poi $\Delta\, COM \equiv BON$ e anche $CM = BN$.

Si conduca ora per OCM un piano diametrale e inoltre per OC un nuovo piano ad esso infinitamente vicino, il quale seghi la curva nello spazio in M' e il piano ANB in N'. Sia ω l'angolo di questi due piani. L'area sferica MCM', che ha la forma di un settore, a meno di una quantità che è trascurabile rispetto ad essa, può calcolarsi come un settore di una calotta sferica limitato da un arco di circolo col centro in C e da due circoli massimi comprendenti fra loro l'angolo ω. Per un noto teorema sull'area di una calotta sferica, l'area della suddetta area elementare, sarà:

$$\frac{\omega}{2\pi}\,\pi\,\overline{CM}^2 = \frac{1}{2}\,\omega\,.\,\overline{CM}^2 = \frac{1}{2}\,\omega\,.\,\overline{BN}^2.$$

Ma l'area NBN' di un elemento del circolo orizzontale limitato dall'arco NN' e dalle due corde BN e BN' vale, pure a meno di una quantità trascurabile di fronte alle precedenti, $\frac{1}{2}\,\overline{BN}^2.\,\frac{\omega}{2} = \frac{1}{4}\,\omega\,.\,\overline{BN}^2$ per cui se ora si fa la somma tutti gli elementi di area NBN' attorno a B, si ottiene l'area d'un segmento circolare BN. Abbiamo quindi il seguente teorema:

Se si conduce per gli estremi del diametro verticale un cerchio qualunque che tagli il circolo orizzontale AB *in* N, *l'area di quella parte di ottante sferico limitata da una parte della curva gobba e da una parte dell'anzidetto circolo verticale, sarà doppia dell'area del segmento circolare* BN.

Se ora si vuole avere le due aree, in cui l'ottante è diviso dalla curva gobba, si faccia coincidere N con A, e si concluderà che una parte è eguale al doppio del segmento AB, l'altra al doppio del triangolo AOB ossia al quadrato del raggio della sfera. Questo è il teorema di Viviani nella sua solita forma (*).

C. Juel.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI
97, 104*, 105, 106*, 107*, 108* e 109*

97. *Dimostrare che, se* p *è un numero primo e* g *radice primitiva mod.* p, *si ha*

$$2(1+g)^2(1+g^2)^2\ldots\ldots\left(1+g^{\frac{p-3}{2}}\right)^2 \equiv g^{\frac{p^2-1}{8}} \ \textit{mod.}\ p$$

ed anche

$$2(1-g)^2(1-g^2)^2\ldots\ldots\left(1-g^{\frac{p-3}{2}}\right)^2 \equiv g^{-\frac{p^2-1}{8}} \ \textit{mod.}\ p.$$

Dedurne i noti teoremi di Fermat, riguardanti il carattere quadratico di 2 *mod.* p. (G. Frattini) (**)

I $p-3$ numeri

$$(1)\left\{\begin{array}{l} 1+g; \quad 1+g^2; \quad \ldots.1+g^{\frac{p-3}{2}}; \\ 1+g^{-1}; \quad 1+g^{-2}; \ldots.1+g^{-\frac{p-3}{2}} \end{array}\right.$$

sono fra loro incongrui mod. p. Perciò rappresentano, mod. p, tutti i numeri della serie $0, 1, 2, \ldots\ldots p-1$, fatta eccezione di tre fra questi. È facile riconoscere che i tre numeri esclusi sono 0, 1 e 2. Perchè, mentre la congruenza $1+g^x\equiv 1$ è impossibile, dalle congruenze $1+g^x\equiv 0$; $1+g^x\equiv 2$, si deduce ordinatamente: $x\equiv\frac{p-1}{2}$; $x\equiv 0$ mod. $(p-1)$. Ora, i valori $\frac{p-1}{2}$ e 0, non si trovano come esponenti della g nei numeri (1). Dunque lo 0 e il 2 non sono compresi fra quei numeri.

(*) Una dimostrazione di questo teorema e dell'altro che ha tratto al volume dei due solidi che il cilindro considerato determina nella *sfera*, fondata sopra considerazioni geometriche e trigonometriche, può leggersi nel vol. II, pag. 278-281 delle *Lezioni d'algebra* del prof. G. Bellacchi.

(**) Una soluzione di questa quistione venne inviata dal Sig. Prof. *U. Scarpis*. Quella che si pubblica è dell'A. Sig. Prof. *G. Frattini*: ad essa si dà la preferenza, perchè *molto più breve*, quantunque fondata sui medesimi principî ai quali è informata la prima.

Applicando pertanto il teorema di Wilson, si avrà:

$$2\prod_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{p-3}{2}}(1+g^{\lambda})(1+g^{-\lambda})\equiv -1 \quad \text{mod. } p.$$

Ma

$$1+g^{-\lambda}\equiv g^{-\lambda}(1+g^{\lambda});$$

dunque

$$2\prod_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{p-3}{2}} g^{-\lambda}(1+g^{\lambda})^2\equiv -1 \quad \text{mod. } p;$$

ossia

$$2\prod_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{p-3}{2}}(1+g^{\lambda})^2\equiv -g^{1+2+\ldots+\frac{p-3}{2}}\equiv -g^{\frac{(p-1)(p-3)}{8}}\equiv$$

$$\equiv g^{\frac{p-1}{2}+\frac{(p-1)(p-3)}{8}}\equiv g^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Così è dimostrata la prima parte del teorema, e similmente si dimostrerebbe la seconda.

La formola

$$2\prod_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{p-3}{2}}(1+g^{\lambda})^2\equiv g^{\frac{p^2-1}{8}}$$

rende manifesto che 2 è resto quadratico mod. p, quando $\frac{p^2-1}{8}$ è pari, e non è resto quando $\frac{p^2-1}{8}$ è dispari: che cioè il 2 è resto dei numeri primi della forma $8n\pm 1$ e non resto di quelli della forma $8n\pm 3$ (teoremi di Fermat).

104.* *Indicare la costruzione mediante la quale può dividersi un poligono convesso* ABCDE.... *in parti proporzionali a più segmenti dati* m, n, p,..., *in un verso assegnato, ad es.* ABC..., *mediante segmenti uscenti da un punto* O *interno al poligono, a partire da un segmento* OX *che termina ad un punto* X *di un lato, ad es.* AB. (A. Lugli).

Soluzione del sig. *G. Trapani*, alunno del R. Istituto nautico di Catania.

Si tiri XC e per B la BB' parallela ad XC finchè incontri il prolungamento di DC in B'; il poligono $AXB'DE$.... sarà equivalente ad $ABCDE$.... Si applichi al primo di questi la costruzione insegnata in questo *Periodico* a pag. 94, n. 3 dell'anno VI, per dividerlo in parti proporzionali ad $m, n, p, \ldots$, nel verso $ABC\ldots$, con segmenti uscenti da O. Delle rette di divisione risulteranno giustamente collocate quelle che cadono nella parte di contorno $CDE\ldots AX$. Per situare quelle i cui piedi cadono in BC, tirata BO e per X la XY parallela a BO, ad incontrare CB prolungata in Y, si trasformi il poligono dato (V. l. cit.)

in un triangolo equivalente di vertice O e la cui base abbia un termine in Y e cada nella direzione YBC; poi si divida tale triangolo in parti proporzionali ai dati segmenti, nel verso assegnato, con rette uscenti da O, e le rette di divisione che vanno a punti di BC saranno quelle cercate. Finalmente per mettere a posto i segmenti di divisione che finiscono a punti di XB, si trasformi il poligono dato in un triangolo equivalente, di vertice O e la cui base abbia un termine in X e la cui direzione coincida con XB, quindi si operi su questo triangolo come sul precedente. I segmenti relativi ad XB, se ve sono, e lo si sa a priori dopo le altre costruzioni effettuate, saranno così trovati.

105. *Determinare i triangoli ciascuno dei quali soddisfi alle seguenti condizioni: un vertice cada in un punto dato, i due vertici rimanenti cadano in due date rette, uno per ciascuna, e l'ortocentro sia un punto assegnato.*

(S. Catania).

Soluzione del Sig. Prof. *R. Bettazzi* (*).

Sia A il vertice dato, O l'ortocentro, e siano l_1 ed l_2 le due rette su cui devono trovarsi gli altri due vertici incogniti X ed Y.

1° Caso. — A ed O coincidenti.

Il triangolo dev'essere rettangolo in A, ed il problema è indeterminato, potendo in generale qualunque punto di l_1 essere preso come punto X.

2° Caso. — A ed O distinti.

Userò il linguaggio del *Calcolo geometrico* (**), prendendo le coordinate cartesiane, e per vettore di riferimento I il vettore $O-A$. La retta l_1 sarà nota quando sia dato un suo punto R ed un vettore $(h+ik)I$ a cui debba essere parallela. Il vettore $R-A$, che dev'essere noto, sia dato uguale a $(\alpha+i\beta)I$. I numeri dati h, k, α, β devono essere numeri reali.

Trascurando dapprima la condizione che Y sia su l_2, cerco il luogo dei punti Y quando X scorre su l_1. In tale ipotesi dovremo porre $X=R+t(h+ik)I$, dove t è un numero reale variabile con X, che prende qualunque valore.

Abbiamo ora:

$$Y-A=(Y-X)+(X-R)+(R-A). \tag{1}$$

Poichè O è l'ortocentro, il lato XY è perpendicolare ad AO, e quindi il vettore $(Y-X)$ è di direzione perpendicolare al vettore $(O-A)$ e di lunghezza sconosciuta x: talchè essendosi preso $O-A=I$, sarà $Y-X=xiI$. Inoltre, per quanto si è visto $X-R=t(h+ik)I$, $R-A=(\alpha+i\beta)I$; dunque la (1) dà:

$$\begin{aligned} Y &= A+xiI+thI+tkiI+\alpha I+i\beta I \\ &= A+(th+\alpha)I+(x+tk+\beta)iI, \end{aligned} \tag{2}$$

formula che ci darà il luogo di Y, quando sia determinata x.

(*) Un'altra soluzione, che si pubblicherà nel fas. venturo, venne inviata dal Sig. Prof. *F. Palatini*.

(**) V. Peano. — *Calcolo geometrico* (Torino, Bocca 1888) — ed *Elementi di calcolo geometrico* (Torino, Candeletti 1891).