SOPRA UN OPUSCOLO

DI MICHELANGELO RICCI

MICHELANGELO RICCI, nato a Roma nel 1619 e morto nella stessa città nel 1682, fu allievo del TORRICELLI che l'ebbe in grande stima, e in gran pregio fu tenuto da altri illustri suoi contemporanei (*).

Egli è autore d'un opuscolo intitolato: *Exercitatio geometrica de maximis & minimis,* stampato a Roma nel 1666, del quale scrisse STEFANO DEGLI ANGELI: « Il Sig. Ricci, quando non stampasse altro, vivrà sempre nella memoria degli uomini per questa sola operetta (**) ». E il MONTUCLA: « La Societé royale de Londres le jugea assez interessant pour en procurer une seconde édition qui est à la suite de la Logarithmotechnie de MERCATOR (***) ».

Questi giudizi sull'opuscolo del Ricci mi sembrano giustificati. Per questa ragione, e perchè il CANTOR nella recente sua opera (****) appena ne menziona il titolo, spero che non riescirà discaro ai lettori del *Periodico,* che già non ne avessero cognizione, di leggerne un estratto, al quale faranno seguito alcune notizie di lavori anteriori che con quello del Ricci hanno qualche attinenza.

(*) FABBRONI. Vitae italorum doctrina excellentium qui saeculis XVII e XVIII floruerunt. Pisiis 1778, vol. II. — B. BONCOMPAGNI. Intorno ad alcune lettere di Evangelista Torricelli, del P. Marino Mersenne e di Francois de Verdus (nel tomo VIII del suo *Bullettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche e fisiche*). — Correspondance de René-Francois de Sluse, publié par M. C. LE PAIGE nel tomo XVII del *Bullettino* di Boncompagni. — Documenti inediti per la storia dei manoscritti Galileiani nella Biblioteca nazionale di Firenze, pubblicati ed illustrati da ANTONIO FAVARO (nel tomo XVIII del citato *Bullettino*).

Sono molto interessanti due lettere del Torricelli al Ricci, relative alla famosa esperienza sulla pressione atmosferica, le quali si leggono nella prefazione alle *Lezioni accademiche* del Torricelli.

(**) FABBRONI. Opera citata.

Nella *Biblioteca matematica* del RICCARDI non è menzionata alcun'altra opera matematica del Ricci.

(***) *Logarithmotechnia:* sive Methodus construendi Logarithmos nova, accurata e facilis; cui nunc accedit Vera Quadratura Hyperbolae & inventio Summae Logarithmorum Auctore NICOLAO MERCATORE. Huic etiam jungitur: MICHAELIS ANGELI RICCII, *Exercitatio geometrica de maximis & minimis* — Lundini MDCLXVIII.

(****) Il secondo volume delle *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* von MORITZ CANTOR — Leipzig 1892.

I.

Lemma 1. Posto $x + y = a$ e $z + t = b$, se il rapporto $\frac{x}{y}$ è eguale al rapporto $\frac{z}{t}$, dev'essere anche $\frac{x^m y^n}{a^{m+n}} = \frac{z^m t^n}{b^{m+n}}$. (*).

Lemma 2. Nell'ipotesi della proposizione precedente, se il prodotto $x^m y^n$ è il massimo fra tutti i prodotti simili formati con due parti di a, dev'essere anche $z^m t^n$ il massimo fra quelli formati con due parti di b.

Lemma 3. Se un dato segmento sia diviso in due parti disuguali nel rapporto di due numeri interi, e si faccia il rapporto della parte minore alla differenza delle due parti, o questi due termini sono eguali, oppure, facendo ancora il rapporto del minore di essi alla loro differenza, e, quanto occorre, continuando questo processo, si perverrà infine a due termini eguali.

Lemma 4. Il rapporto $\frac{a^m b^n}{a^m c^n}$ è eguale al rapporto $\frac{b^n}{c^n}$.

Lemma 5. Se ha luogo la diseguaglianza $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dev'essere anche $ad < bc$.

Teorema I. *Il prodotto di potenze di eguale esponente di due parti d'un dato segmento è massimo quando queste sono fra loro eguali, cioè nel rapporto degli esponenti.*

Se il segmento AB è diviso comunque in D e per metà in C, i quattro segmenti AD, AC, CB, BD costituiscono una proporzione aritmetica i cui termini medi sono fra loro eguali; perciò sarà $\frac{AD}{AC} < \frac{CB}{BD}$, ed anche $\frac{AD^3}{AC^3} < \frac{CB^3}{BD^3}$, dalla quale risulta:

$$AD^3 \,.\, BD^3 < AC^3 \,.\, CB^3.$$

Teorema II. *Siano in una retta i segmenti* AC, CB *e sia il rapporto* $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}}$ *eguale a quello di due interi, p. e.* $\frac{3}{5}$, *e si prenda*

(*) Qui, e in appresso, le lettere che stanno al posto dei segmenti di cui fa uso l'a. significano sempre numeri positivi, e gli esponenti s'intendono sempre numeri interi e positivi. Ma avverto che non vi si trovano notazioni come AB^m: gli esponenti sono numeri particolari e le potenze indicate p. e. con $AB3$. Nè i prodotti, nè i rapporti sono indicati con speciali simboli, nè si trova in tutto l'opuscolo il segno di eguaglianza, nè un segno di diseguaglianza; vi si trova bensì, ma soltanto nella prima applicazione del teorema III, di cui si dirà più innanzi, un segno d'eguaglianza che mi è riescito nuovo: l'equazione $BA^3 - A^4 = Z^4$ è così rappresentata: B in $A3 - A4 \,\|\, Z4$.

sul prolungamento di B A *il segmento* $AF = CB - AC$, *così che sia* $\frac{AF}{AC} = \frac{2}{3}$: *se il prodotto* $FA^2 . AC^3$ *è il massimo fra tutti i prodotti simili formati con due parti di* F C, *sarà anche* $AC^3 . CB^5$ *il massimo fra tutti i prodotti simili formati con due parti di* A B.

Sia D un punto qualunque della AB, e si scelga il punto E sulla FB così che abbia luogo la proporzione $\frac{FE}{ED} = \frac{FA}{AC}$: per l'ipotesi fatta, e in forza del lemma 2, sarà $FE^2 . ED^3$ il massimo fra tutti i prodotti simili formati con due parti della FD, epperciò $FE^2 . ED^3 > FA^2 . AD^3$. Ma pel lemma 1 è $\frac{FE^2 . ED^3}{FD^5} = \frac{FA^2 . AC^3}{FC^5}$, quindi sarà $\frac{FA^2 . AD^3}{FD^5} < \frac{FA^2 . AC^3}{FC^5}$, e permutando, e in forza del lemma 4,

$$\frac{AD^3}{AC^3} < \frac{FD^5}{FC^5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [1]$$

Ora i segmenti DB, CB, FC, FD sono in proporzione aritmetica; perciò, e perchè FC è eguale a CB, sarà $\frac{FD}{FC} < \frac{BC}{BD}$, sia il punto D fra A e C, oppure fra C e B, e in conseguenza dalla [1] risulterà a fortiori

$$\frac{AD^3}{AC^3} < \frac{BC^5}{BD^5} \quad \text{ossia} \quad AD^3 . BD^5 < AC^3 . BC^5 ,$$

che è quanto si voleva dimostrare (*).

Teorema III. *Se un dato segmento si divide in due parti proporzionali a due interi dati, il prodotto delle loro potenze, che hanno*

(*) In forma moderna: Si supponga che il prodotto delle potenze n^{ma} ed $(m-n)^{ma}$ di due parti di un numero sia massimo quando quelle due parti sono proporzionali ai numeri n, $m-n$, cioè si supponga che, qualunque sia il numero positivo ξ minore di g e diverso da $\frac{n}{m} g$, sia:

$$\left(\frac{n}{m} g\right)^n \left(\frac{m-n}{m} g\right)^{m-n} > \xi^n (g-\xi)^{m-n} .$$

Allora posto

$$g = ma - x , \qquad \xi = na - x ,$$

sarà

$$\frac{n^n (m-n)^{m-n}}{m^m} (ma - x)^m > (m-n)^{m-n} (na - x)^n a^{m-n} .$$

Ma dalla

$$m^2 a^2 > (ma - x)(ma + x)$$

risulta

$$m^{2m} a^{2m} > (ma - x)^m (ma + x)^m ;$$

epperciò sarà a fortiori

$$m^m n^n a^{m+n} > (ma + x)^m (na - x)^n ,$$

cioè il prodotto delle potenze m^a ed n^a delle due parti di un numero sarà massimo quando quelle due parti saranno proporzionali agli esponenti m ed n.

per esponenti quei due numeri, è massimo fra tutti i prodotti che in simil modo si possono formare con due parti del dato segmento.

Questo risulta dal teorema precedente associato al lemma 3 ed al teorema I.

Quale prima applicazione del teorema dimostrato, Ricci risolve un problema che, nel nostro linguaggio, si può enunciare nel seguente modo:

A quale condizione deve soddisfare il numero c *affinchè l'equazione* $x^{2n} - bx^{2n-1} + c^{2n} = 0$ *abbia radici reali?*

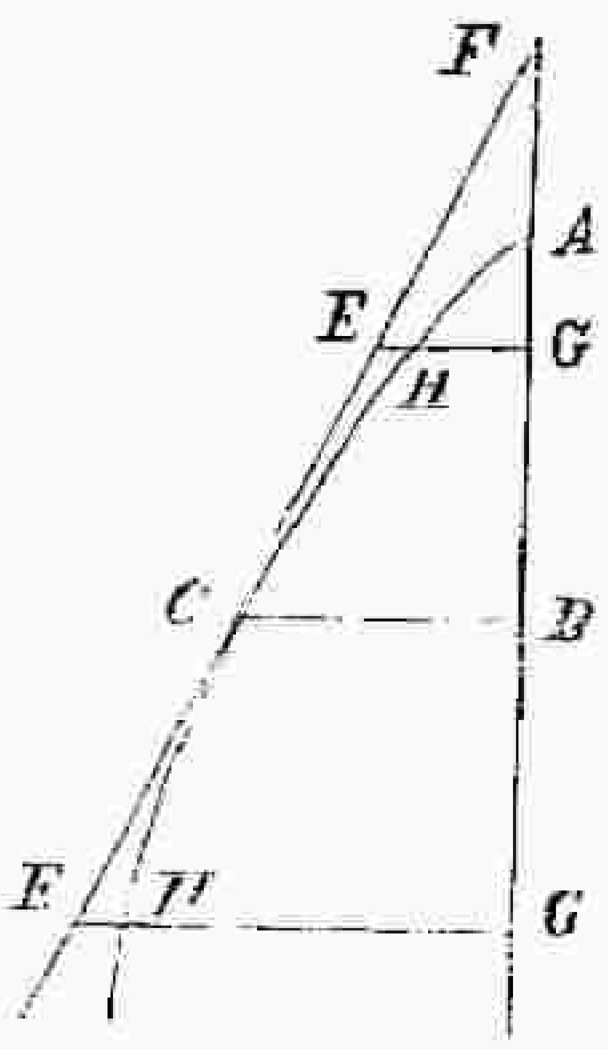
Posta l'equazione nella forma

$$x^{2n-1}(b - x) = c^{2n}$$

e osservato che, se essa ammette radici reali, queste, nell' ipotesi di b positivo, devono essere positive e minori di b, risulta subito da quel teorema

$$c^{2n} \leqq \frac{(2n-1)^{2n-1}}{(2n)^{2n}} b^{2n} \quad (^*).$$

Ricci applica poi il teorema alla costruzione della tangente in un punto dato della curva nella quale i cubi delle ordinate sono proporzionali ai quadrati delle ascisse.



Sia AD l'ascissa del punto C della curva e sia AF, dalla banda delle ascisse negative, eguale alla metà di AD: sarà la FC tangente nel punto C. Preso un punto qualunque E sulla FC dall'una o dall'altra banda di C, l'ascissa del quale sia AG, sarà il rapporto $\frac{FA}{AG}$ diverso dal rapporto $\frac{FA}{AD}$ che è $\frac{1}{2}$, perciò sarà il rapporto $\frac{FA \cdot AD^2}{FD^3}$ maggiore del rap-

---

(*) Più generalmente: Sia l'equazione $x^n - px^m + q = 0$ con p e q positivi ed $n > m$, e sia n pari ed m dispari. Posta nella forma $q = x^m(p - x^{n-m})$ è manifesto che le radici reali, quando esistano, devono essere positive e minori di p. Fatto poi $x^{n-m} = v$ si ha:

$$q^{n-m} = v^m(p-v)^{n-m} \leqq \frac{m^m(n-m)^{n-m}}{n^n} p^n,$$

cioè la nota condizione

$$m^m(n-m)^{n-m} p^n - n^n q^{n-m} \geqq 0.$$

porto $\frac{FA \,.\, AG^2}{FG^3}$. Ora da questa diseguaglianza risulta $\frac{AD^2}{AG^2} > \frac{FD^3}{FG^3}$ od anche $\frac{AD^2}{AG^2} > \frac{CD^3}{EG^3}$; ma se s'indica con H il punto della curva che ha l'ascissa AG si ha $\frac{CD^3}{HG^3} = \frac{AD^2}{AG^2}$, e in conseguenza sarà

$$\frac{CD^3}{HG^3} > \frac{CD^3}{EG^3} \quad \text{cioè} \quad EG > HG\,.$$

Osserva poi il Ricci che questo metodo di costruire la tangente può essere applicato alle infinite parabole. E infatti per la curva $y^m = c\,x^n$ $(m > n)$ posto $FA = \frac{m-n}{n}\,AD$ sarà

$$\frac{FA^{m-n}\,AD^n}{FD^m} > \frac{FA^{m-n}\,AG^n}{FG^m}$$

da cui

$$\frac{AD^n}{AG^n} > \frac{FD^m}{FG^m} \quad \text{ossia} \quad \frac{CD^m}{HG^m} > \frac{CD^m}{EG^m}$$

epperciò $$EG > HG \qquad (^*).$$

Infine dà il Ricci un metodo per costruire la tangente in un punto dato della $$y^{m+n} = c\,x^m\,(x-a)^n \qquad (^{**})$$
e sceglie per esempio la curva

$$y^5 = c\,x^3\,(x-a)^2$$

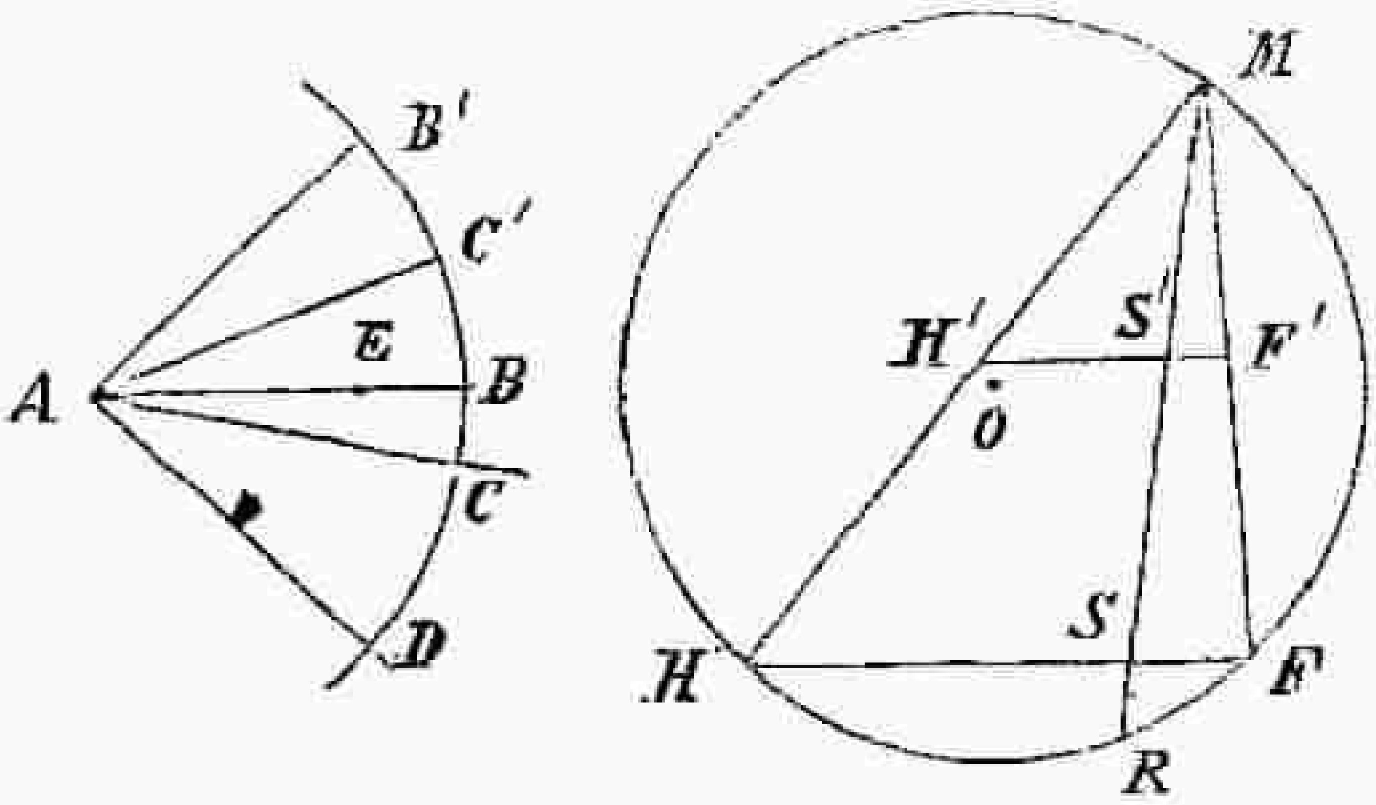
della quale considera soltanto la parte corrispondente alle ascisse positive maggiori di a (***).

(*) Facilmente si verifica che, nell'ipotesi fatta di $m > n$, la curva $y^m = cx^n$ presenta sempre la concavità all'asse.

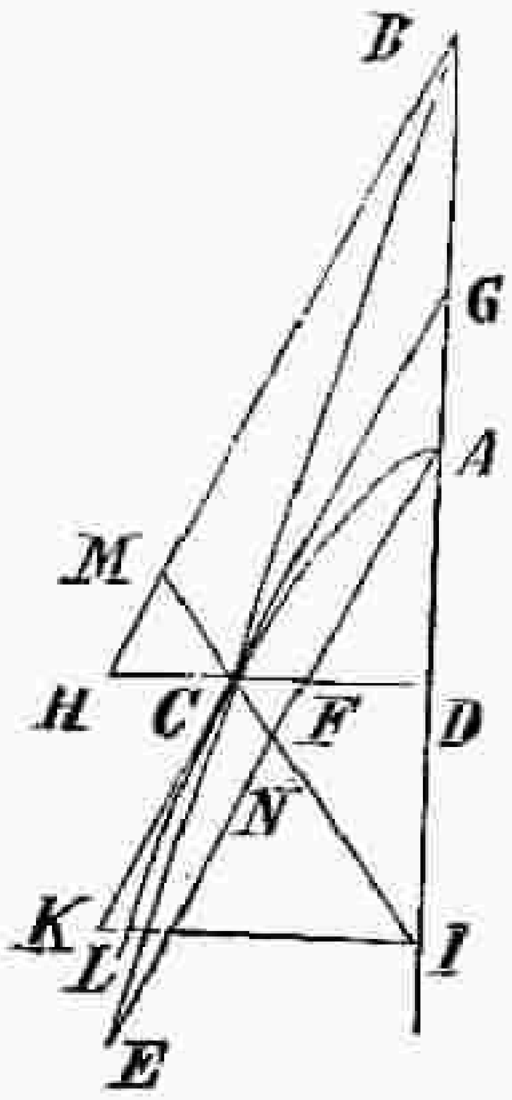
(**) Anche questa presenta sempre la concavità all'asse.

(***) A questa costruzione è premessa una soluzione del problema:

Fra i due lati d'un angolo dato collocare un segmento che abbia un estremo in un punto dato d'uno di essi e l'altro estremo nell'altro lato, e sia diviso in parti proporzionali a segmenti dati da una retta data interna all'angolo e passante pel suo vertice. Sia BAD l'angolo dato, AC la retta data, E il punto dato nel lato AB. Sopra un segmento arbitrario HF si descriva un segmento di circolo HMF capace dell'angolo dato, e sia O il suo centro. Fatto l'angolo $B'AD$ doppio di BAD e $B'AC'$ doppio di BAC, si descriva con centro A e raggio OF l'arco $B'CBCD$: sarà l'arco $B'BD$ eguale all'arco HRF, e, fatto l'arco FR eguale all'arco BC', e quindi l'arco RH eguale all'arco CD, gli angoli HMR, RMF saranno rispettivamente eguali agli angoli DAC, CAB. Ora, se il segmento HF si divida in S così che il rapporto SF ad HS sia eguale a quello dei segmenti dati, e poi si conduca la RS fino al punto M in cui essa incontra la circonferenza, e infine si prenda sulla MF la $MF' = AE$, e da F' si conduca la $F'H'$ parallela alla HF, la figura $MH'F'$ così costruita sarà eguale a quella richiesta.



Siano B l'origine, BAI l'asse, C ed L due punti quali si vogliano della curva le cui ascisse BD e BI siano maggiori di BA: sarà il rapporto $\frac{LI^5}{CD^5}$ eguale al rapporto $\frac{BI^3 . AI^2}{BD^3 . AD^2}$. Per costruire la tangente nel punto C si conduca la BC e dal punto A la AFE,



la quale incontri in E il prolungamento della BC ed in F la CD, in modo che sia $\frac{FA}{FE} = \frac{2}{3}$: la CG parallela ad AE è la tangente richiesta. Preso sulla CG un punto qualunque K, dall'una o dall'altra banda di C, la cui ascissa sia BI, sia L il punto corrispondente della curva; siano poi N ed M i punti d'incontro della IC colla AE e colla BH parallela a CG, e sia H il punto d'incontro della BH colla CD. Ora nel segmento AE sono i punti F e N dal primo dei quali esso è diviso in parti proporzionali ai numeri 2 e 3, epperciò sarà il prodotto $AF^2 . FE^3 > NA^2 . NE^3$ e quindi $\frac{FE^3}{NE^3} > \frac{NA^2}{AF^2}$; ma il rapporto $\frac{FE}{NE}$ è uguale ad $\frac{HB}{MB}$, e in consegnenza sarà $\frac{HB^3}{MB^3} > \frac{NA^2}{AF^2}$, ossia

$$\frac{HB^3 . AF^2}{CG^5} > \frac{MB^3 . NA^2}{CG^5} \quad \ldots \ldots \quad [1]$$

Inoltre dalle proporzioni

$$\frac{HB}{CG} = \frac{BD}{GD} \quad , \quad \frac{AF}{CG} = \frac{AD}{DG}$$

si ricava

$$\frac{HB^3 . AF^2}{CG^5} = \frac{BD^3 . AD^2}{DG^5} \quad \ldots \ldots \quad [2]$$

e similmente dalle proporzioni

$$\frac{MB}{CG} = \frac{BI}{GI} \quad , \quad \frac{NA}{CG} = \frac{AI}{IG}$$

risulta

$$\frac{MB^3 . NA^2}{CG^5} = \frac{BI^3 . AI^2}{GI^5} \quad \ldots \ldots \quad [3]$$

Ora, in forza della [2] e della [3] la [1] diviene

$$\frac{BD^3 . AD^2}{DG^5} > \frac{BI^3 . AI^2}{GI^5},$$

ma, per la definizione della curva è

$$\frac{BD^3 . AD^2}{DC^5} = \frac{BI^3 . AI^2}{LI^5},$$

e in conseguenza sarà

$$\frac{DC^5}{DG^5} > \frac{LI^5}{GI^5} \quad \text{ossia} \quad \frac{DC}{DG} > \frac{LI}{GI}.$$

Se infine si osserva che il rapporto $\frac{DC}{DG}$ è eguale a $\frac{KI}{IG}$, è chiaro che dall'ultima diseguaglianza risulta

$$KI > LI.$$

II.

Il metodo così detto di induzione matematica, o di conclusione da n ad $n+1$, è stato adoperato da Giacomo Bernouilli, ma prima ancora da Pascal, come ha avvertito il Cantor (*). Nel *Traité du triangle arithmetique*, che fu trovato stampato dopo la morte dell'Autore, avvenuta nel 1662, ma che si deve ritenere composto, almeno in parte, fin dal 1654, come risulta dalla corrispondenza di Pascal con Fermat (**), sono studiate delle proprietà dei numeri, dipendenti da due indici, definiti dalle

$$(n, r) = (n, r-1) + (n-1, r), \quad (n, 1) = 1, \quad (1, r) = 1.$$

Sotto il titolo *Conséquence XII* vi enuncia la proprietà espressa dall'eguaglianza

$$\frac{(n-r,\ r+1)}{(n-r+1,\ r)} = \frac{n-r}{r},$$

e nel seguente modo la dimostra:

« Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donne-
« rais une démonstration bien courte, en supposant deux lemmes.

« Le premier, qui est evident de soi même, que cette proportion
« se rencontre dans la seconde base (***).

(*) Nel già citato secondo volume delle sue *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, p. 684.

(**) Bossut. Discorso sopra la vita e le opere di Pascal. Questo discorso è inserito nel 4° volume del *Saggio della storia generale delle Matematiche* di Carlo Bossut, prima edizione italiana con riflessioni ed aggiunte di Gregorio Fontana. — Milano, 1803.

(***) L'Autore chiama *base* ogni serie di termini pei quali la somma degli indici ha uno stesso valore; così la base $(n+1)^{ma}$ è costituita dai termini $(n, 1)$, $(n-1, 2)$, $(n-2, 3)$. . . . . $(2, n-1)$, $(1, n)$; i quali sono i coefficienti binomiali corrispondenti all'esponente n.

« Le deuxième, que si cette proportion se trouve dans une base « quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante.

« D'où il se voit qu'elle est necessairement dans toutes les « bases: car elle est dans la seconde base par le premier lemme; « donc par le second elle est dans la troisième base, donc dans la « quatrième, et à l'infini.

« Il faut donc seulement démontrer le second lemme en cette « sorte. Si cette proportion se rencontre en une base quelconque, « comme en la quatrième, c'est à dire si

$$\frac{(4,1)}{(3,2)} = \frac{1}{3}, \quad \frac{(3,2)}{(2,3)} = \frac{2}{2}, \quad \frac{(2,3)}{(1,4)} = \frac{3}{1} \qquad (^*)$$

« je dis que la même proportion se trouvera dans la base suivante, « et que, par exemple

$$\frac{(4,2)}{(3,3)} = \frac{2}{3}.$$

« Car $\frac{(4,1)}{(3,2)} = \frac{1}{3}$ par l'hypothèse. Donc

$$\frac{(4,1)+(3,2)}{(3,2)} = \frac{1+3}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{(4,2)}{(3,2)} = \frac{1+3}{3}.$$

« De même $\frac{(3,2)}{(2,3)} = \frac{2}{2}$ par l'hypothèse. Donc

$$\frac{(3,2)+(2,3)}{(3,2)} = \frac{2+2}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{(3,3)}{(3,2)} = \frac{2+2}{2}.$$

« Mais $\frac{(3,2)}{(4,2)} = \frac{3}{1+3}$ comme il est montré.

« Donc par la proportion troublé

$$\frac{(3,3)}{(4,2)} = \frac{3}{2}$$

« ce qu'il fallait démontrer.

« On le trouvera de même dans tout le reste, puisque cette « preuve n'est fondé que sur ce que cette proportion se trouve « dans la base précédente, et que chaque cellule est égale à sa « precedente plus à sa superieure ce qui est vrai partout ».

Se il Ricci nel 1666 abbia avuto cognizione di quell'opera di

---

(*) Per maggiore chiarezza adopero la notazione (n, r) in luogo delle lettere adoperate da Pascal per indicare le *cellule* della sua figura.

Pascal, è quistione che non saprei risolvere; ma certo è che posteriori a quell'epoca sono i lavori di Giacomo Bernouilli che allora aveva 12 anni.

È poi degno di nota che, nella dimostrazione del teorema sul massimo del prodotto $x^m (a - x)^n$, il Ricci adopera un metodo che si può considerare quale una generalizzazione di quello di conclusione da n ad $n+1$. Infatti per dimostrare quella proprietà relativa ai numeri m ed $n < m$, egli la dimostra pei numeri 1 e 1, e dimostra che, se essa vale pei numeri n ed $m - n$ deve pure sussistere pei numeri m ed n.

III.

Il teorema sul massimo rettangolo, fra quelli che hanno per lati due segmenti di somma costante, è un immediato corollario della proposizione V del secondo libro d'Euclide (*).

Archimede, nel suo *Trattato della sfera e del cilindro*, dimostra la seguente proposizione, che è la X del secondo libro:

Fra tutti i segmenti sferici ad una base terminati da zone di egual superficie, quello di massimo volume è l'emisfero.

La sua dimostrazione, tradotta in linguaggio moderno, si può così esporre:

Siano R il raggio d'una sfera, x l'altezza d'un suo segmento ad una base, $2\pi c^2$ la superficie della zona. Dalla $Rx = c^2$ risulta che, per $x > c$, è $c > R$ e $x - R > c - R$, e che, per $x < c$, e quindi $R > c$, è $R - x > R - c$. Perciò in ciascuno dei due casi è

$$(R - c)^2 < (R - x)^2 \quad \text{ossia} \quad c\,(2R - c) > x\,(2R - x),$$

(*) Il teorema correlativo sul minimo della somma $x + y$ quando è costante il prodotto xy, si può considerare quale corollario della proposizione 35 del libro III, poichè, fra tutte le corde che passano per uno stesso punto, la più distante dal centro è quella che in quel punto è dimezzata.

I massimi e minimi di Apollonio si possono riferire a questi due teoremi. Così, p. es., la ricerca del minimo della somma $a'^2 + \left(\frac{b'^2}{a'}\right)^2$, in cui a' e b' significano due semidiametri coniugati d'un'elisse, posto $a'^2 = X$, $b'^2 = Y$, $X + Y = A$, equivale alla ricerca del minimo di

$$\frac{A^2}{X} + 2X$$

la quale diseguaglianza, quando si sostituisca ad R il suo valore in funzione di x, si trasforma nella

$$x\,(3\,c^2 - x^2) < 2\,c^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad [1]$$

e questa esprime appunto il teorema enunciato.

Ora osservo che dalla [1] posto $x^2 = z$, $3\,c^2 = a$, risulta

$$z\,(a - z)^2 < \frac{4}{27}\,a^3\,,$$

cioè appunto il teorema sul massimo del prodotto d'una parte d'un segmento dato pel quadrato dell'altra parte.

Ma questo teorema è stato esplicitamente enunciato e dimostrato dal Cardano nella sua opera: *De proportionibus numerorum, motuum, ponderum, ecc.*, pubblicata a Basilea nel 1570, la quale si trova pure nella raccolta delle sue opere stampata a Lione nel 1663.

Le proposizioni e le dimostrazioni del Cardano sono qui compendiosamente raccolte.

Lemma I:

$$\frac{a+b}{a} > \frac{a+2b}{a+b}\,.$$

Lemma II:

$$(1)\quad \frac{c+b}{c} < \frac{(2c+b)^2}{(2c)^2}\,, \qquad (2)\quad \frac{c+b}{c} > \frac{(2c+2b)^2}{(2c+b)^2}\,.$$

Infatti è

$$\frac{c+b}{c} = \frac{2c+2b}{2c} = \frac{2c+2b}{2c+b}\cdot\frac{2c+b}{2c}\,,$$

e, in forza del lemma I,

$$\frac{(2c+b)^2}{(2c)^2} > \frac{c+b}{c} > \frac{(2c+2b)^2}{(2c+b)^2}\,.$$

Lemma III:

$$(1)\quad \frac{d}{d-b} > \frac{(2d+b)^2}{(2d)^2}\,, \qquad (2)\quad \frac{d+b}{d} < \frac{(2d)^2}{(2d-b)^2}\,.$$

Dal secondo lemma, posto $c + b = d$, risulta

$$\frac{d}{d-b} > \frac{(2d)^2}{(2d-b)^2}\,, \text{ ma pel lemma I è } \frac{2d}{2d-b} > \frac{2d+b}{2d}\,,$$

e in conseguenza sarà

$$\frac{d}{d-b} > \frac{(2d+b)^2}{(2d)^2}.$$

E similmente prova la seconda parte.

Se il segmento AB *dividasi in* C *talmente che sia* $CB = \frac{1}{3}AB$, *e quindi* $AC = \frac{2}{3}AB$, *il parallelepipedo che ha per base il quadrato di* AC *e per altezza* CB *sarà il massimo fra quelli che hanno per base il quadrato d'una parte di* AB *e per altezza l'altra parte.*

Questa proposizione discende immediatamente dal lemma terzo.

Nello stesso luogo Cardano trova il massimo di $\sqrt{x}\,(a-x)$, ma il risultato al quale arriva, pure mediante il lemma terzo, si può considerare un corollario della precedente proposizione (*).

Allo stesso teorema, ma più intimamente al massimo testè menzionato, si collega un altro problema dal Cardano risolto al Capitolo XXXIX dell'opera *De Regula Aliza,* cioè:

Dividere un numero in due parti tali che la differenza fra i due prodotti che si ottengono moltiplicando ciascuna di esse pel quadrato dell'altra sia massima.

Cardano prende ad esempio il numero 12 e sceglie per incognita la semidifferenza delle due parti. Se il numero dato s'indica con $2a$ e quindi s'indicano con $a+x$ e $a-x$ le due parti, la formola data da Cardano diviene

$$x = \frac{a}{3}\sqrt{3},$$

ed a questo valore corrisponde appunto il massimo della funzione

$$(a+x)^2(a-x) - (a-x)^2(a+x).$$

Lo stesso problema, ma in altra forma enunciato, è stato risolto dal Tartaglia.

Ecco quanto si legge alla pag. 88 della sua opera: *La quinta parte del general trattato di numeri e misure* - Venezia, 1560.

(*) In questa interpretazione dell'oscuro linguaggio di Cardano, reso ancora più difficile da errori di stampa, mi sono giovato dell'opera del Cossali: *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra.* — Parma, 1799.

« Il decimosettimo quesito di trent'uno a me proposti da Hyero-
« nimo Cardano, medico milanese, nella nostra publica disputa.

« Fatime di otto due tai parti, che il produtto dell'una nell'altra
« multiplicato nella loro differentia faccia più che possibel sia.

« A questo suo decimosettimo quesito a quel tempo gli risposi che « la maggior parte fu 4 più $R\,5\,\frac{1}{3}$, e la menore fu 4 meno $R\,5\,\frac{1}{3}$, « il prodotto è $10\,\frac{2}{3}$, qual multiplicato nella differentia che è $R\,21\,\frac{1}{3}$ « fa $R\,2427\,\frac{7}{27}$, e questa è di frutti della nostra pianta, con li quali « pensavano di farmi guerra, ma gli fallì il pensiero.

« La regola da trovar le sopradette parti è questa, divideremo il « detto ottavo in due parti eguali e ne venirà 4, quadreremo quel 4, « fa 16, e a questo 16 gli aggiongeremo la sua terza parte, che sarà « $5\,\frac{1}{3}$, farà $21\,\frac{1}{3}$, e la R de $21\,\frac{1}{3}$ sarà la differentia delle adi- « mandate parti, quala partendola per mitá ne venirà $R\,5\,\frac{1}{3}$, qual « gionto alla mitá di 8 cioè a 4 farà 4 più $R\,21\,\frac{1}{3}$ per la parte « maggiore, e tratto de 4 restarà 4 men $R\,5\,\frac{1}{3}$ per la parte me- « nore. La causa di questa operatione si narrarà nella nostra noua « Algebra, per esser dependente da quella » (*).

Da ciò è manifesto che anche Tartaglia ha presa per incognita la differenza delle due parti, e che perciò ha considerata la funzione

$$(a - x)\,(a + x)\,x = x\,(a^2 - x^2)\,.$$

Ora è degno di nota che questa funzione è quella stessa alla quale si riferisce il teorema di Archimede sopra esposto: la formola trovata da Tartaglia $2x = \sqrt{\frac{4}{3}a^2}$, che corrisponde a quella data da Cardano, può senz'altro desumersi da quel teorema quando si ponga $a^2 = 3\,c^2$.

Il teorema sul massimo del prodotto d'una parte d'un segmento pel quadrato dell'altra parte, è stato dimostrato anche dal CAVALIERI

(*) Il Cantor, nell'opera citata, espone questa soluzione del Tartaglia (pag. 487), ma non fa alcuna menzione dei *massimi* di Cardano.
È noto che la *nuova Algebra*, annunziata dal Tartaglia anche in altra occasione, non è mai comparsa.

nelle sue *Exercitationes geometricae* (Prop. XXVIII dell'esercitazione sesta) e nel seguente modo:

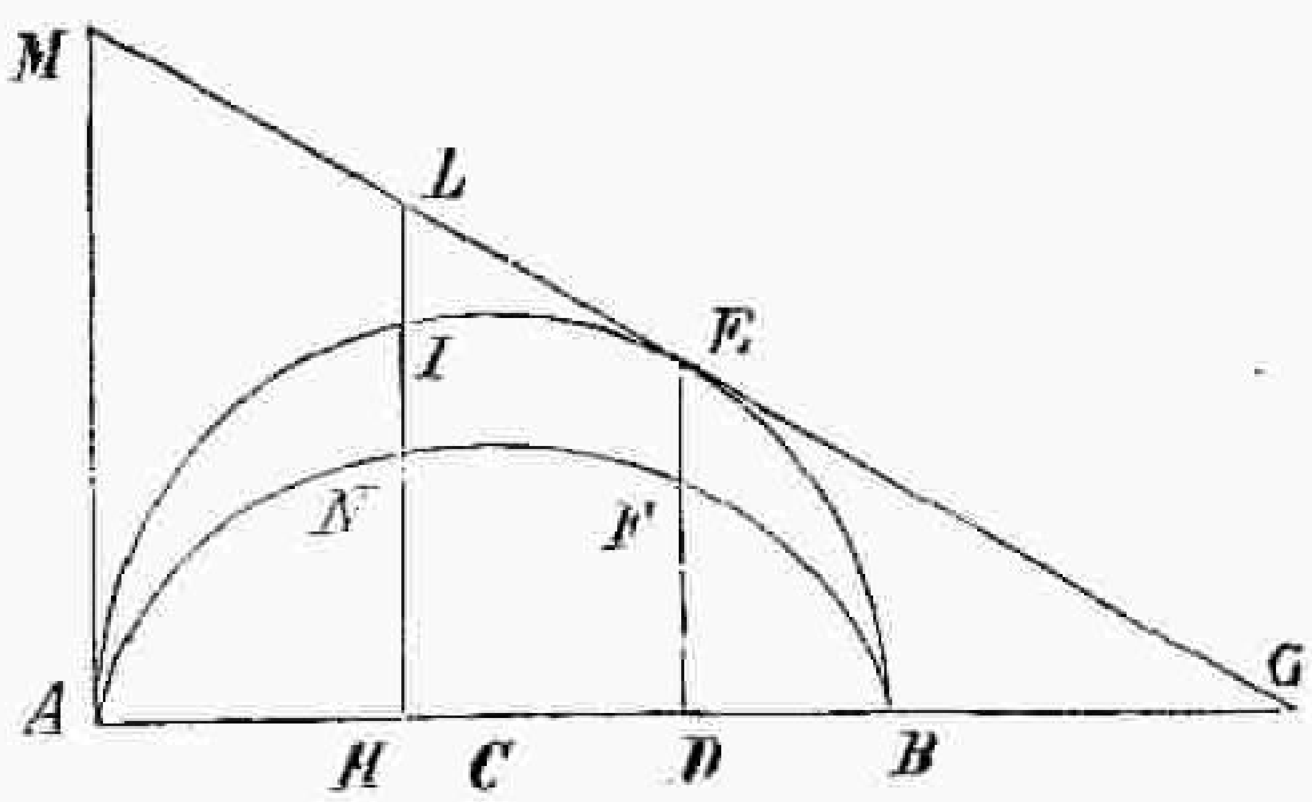
Sia il segmento dato $BE = 3BF$, H un punto qualunque fra F ed E, ed I un punto qualunque fra B ed F. Se si considera la sfera di diametro FE ed in essa il segmento d'altezza HE, il rapporto del volume di questo al volume della sfera è $\frac{BH \, . \, HE^2}{BF \, . \, FE^2}$, epperciò è $BH \, . \, HE^2 < BF \, . \, FE^2$. Inoltre, il parallelepipedo che ha l'altezza $BI < BF$ e per base il quadrato di IE si può considerare come equivalente ad altro parallelepipedo di altezza $BH > BF$, epperciò sarà anche $BI \, . \, IE^2 < BF \, . \, FE^2$.

IV.

Dirò ora di alcuni scritti che più strettamente si collegano a quello del Ricci.

Torricelli ha risolto alcuni problemi che si riferiscono al massimo del prodotto $x^2(a - x)$, e del prodotto $x^3(a - x)$, come risulta dal seguente estratto di una sua lettera diretta al P. Mersenne (*).

Sia AB il diametro d'un circolo o l'asse maggiore di un'elisse e ne sia C il centro. Si domanda il massimo rettangolo fra quelli che hanno per base un segmento del diametro con un estremo in A e per altezza l'ordinata corrispondente all'altro estremo. Dico che se D è il punto di mezzo del raggio CB, il rettangolo richiesto ha per base il segmento AD. Fatto BG, sul prolungamento del diametro, eguale al raggio, si conduca la GE la quale incontri in M la tangente in A. La GM è tangente in E, epperciò, preso in essa un punto qualunque L e condotta la LH, la quale incontri in I la



(*) Questa fa parte della già citata raccolta di lettere di Torricelli, Mersenne e Du Verdus, pubblicata dall'illustre D. Baldassare Boncompagni, nel tomo VIII del suo *Bullettino*.

semicirconferenza, sarà $LH > IH$. Ora, perchè AD è eguale a DG, risulta dalla prop. 27 del sesto libro degli *Elementi*, quali sono esposti dal CLAVIO, che il rettangolo ADE è maggiore del rettangolo AHL (*), e a fortiori del rettangolo AHI.

Considerando poi la semielisse si ha:

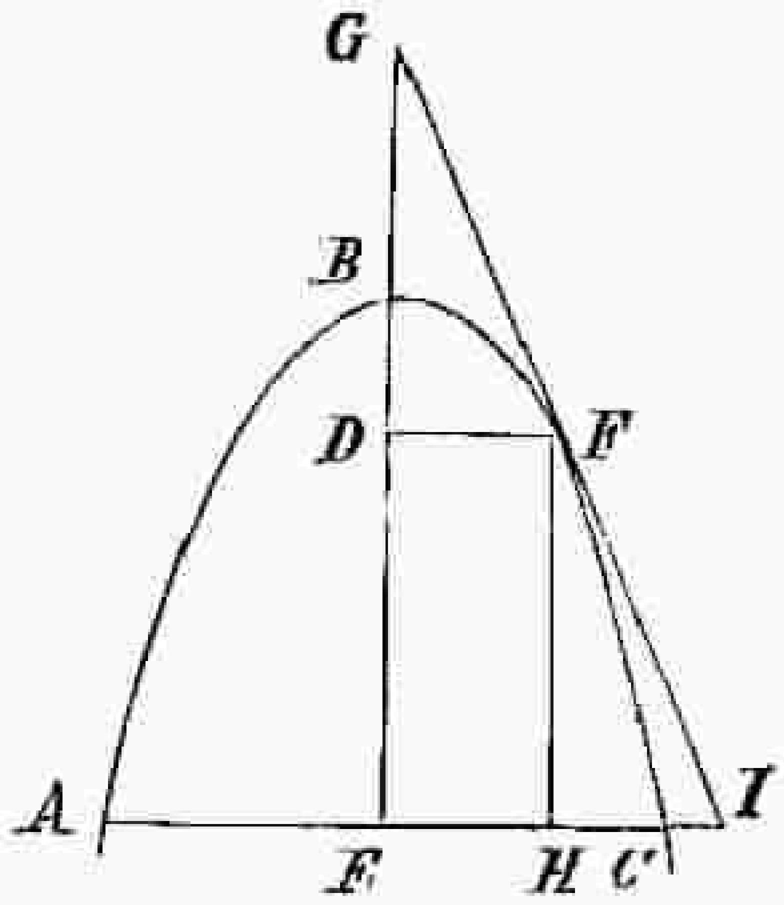
$$\frac{AH \,.\, HN}{AD \,.\, DF} = \frac{AH \,.\, HI}{AD \,.\, DE},$$

epperciò

$$AH \,.\, HN < AD \,.\, DF.$$

Egli trova, in modo analogo, il massimo rettangolo inscritto in un segmento di parabola, compreso fra la curva ed una perpendicolare all'asse.

Siano B il vertice, BE l'asse, AEI perpendicolare all'asse. Fatto $BD = \frac{1}{3} BE$, sia GFI la tangente nel punto F che ha l'ascissa BD, e siano G ed I i punti in cui essa incontra l'asse e la AC: sarà $GD = DE$, e dal teorema di Clavio risulterà che $DEFH$ è il rettangolo massimo fra quelli inscritti nel triangolo GEI con due lati contigui sulle EG, EI, e quindi anche il massimo fra quelli inscritti nel segmento di parabola BEC.



È da notare che, in queste soluzioni, Torricelli si è giovato della costruzione della tangente per la determinazione del massimo.

Il teorema sul massimo del prodotto $x^m (a - x)^n$ è stato enunciato e dimostrato in molti casi particolari, in alcuni dei quali uno degli esponenti è l'unità, e in altri ambedue gli esponenti sono diversi da uno, da PIETRO PAOLO CARAVAGGIO (**) nella sua opera: *Geometria applicationum deficientium figura data specie*, pubblicata a Milano nel 1659. Le sue dimostrazioni sono fondate sui seguenti due teoremi:

(*) Questa proposizione trovasi pure negli Elementi d'Euclide pubblicati per cura di BETTI e BRIOSCHI.

(**) Nato a Milano nel 1617, m. nel 1688. Altre sue opere di matematica sono indicate nella *Biblioteca matematica* del RICCARDI.

1.° Se i due termini d'un rapporto sono aumentati d'una stessa quantità, esso viene aumentato o diminuito secondo che è minore o maggiore di uno.

2.° Se i numeri $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sono in progressione geometrica, ha luogo, per $h < k \leqq \frac{m}{2}$, la diseguaglianza

$$a_h + a_{m-h} > a_k + a_{m-k}.$$

Ecco p. e. com'egli dimostra il teorema sul massimo del prodotto $x^4 (5a - x)$. Sia

$$\frac{x}{4a} = \frac{4a}{f} = \frac{f}{g} = \frac{g}{h},$$

e quindi

$$\frac{x^4}{(4a)^4} = \frac{x}{h} \quad \ldots\ldots \quad [1]$$

Dalle diseguaglianze

$$x + f > 8a, \quad x + g > 4a + f, \quad x + h > 4a + g$$

si ricava successivamente

$$f > 8a - x, \quad g > 4a + f - x > 12a - 2x,$$
$$h > 4a + g - x > 16a - 3x;$$

epperciò sarà

$$\frac{x}{h} < \frac{x}{16a - 3x}.$$

Se i due termini dell'ultimo rapporto vengono aumentati di $4a - x$, o diminuiti di $x - 4a$, secondo che è x minore o maggiore di $4a$, risulterà a fortiori

$$\frac{x}{h} < \frac{a}{5a - x},$$

e, in forza della [1],

$$\frac{x^4}{(4a)^4} < \frac{a}{5a - x}, \quad \text{ossia} \quad x^4 (5a - x) < (4a)^4 \cdot a.$$

Dello stesso anno 1659 è l'opera di STEFANO DEGLI ANGELI: *Miscellaneum hyperbolicum & parabolicum, in quo praecipue agitur de centris gravitatis Hyperbola, partium ejusdem*, ecc. ecc..

Alla pag. 178, premesso l'enunciato del teorema sul massimo del prodotto $z^{m-1}(a - z)$, il quale teorema, dice espressamente l'autore, è dovuto al Caravaggio, si trova la notevole proposizione:

Se in qualsivoglia delle infinite parabole ($y^m = cx$) *sia scelto un punto qualunque dal quale sia applicata al diametro l'ordinata, e il diametro sia prolungato esternamente alla curva così che la parte esterna sia all'ascissa come il numero della parabola diminuito di uno* ($m - 1$) *all'unità, la retta congiungente quel punto del prolungamento del diametro al punto della curva è in questo punto tangente.*

La dimostrazione è simile a quella che ha poi data il Ricci del teorema più generale sulla sottangente alla $y^m = c x^n$ (*).

D. Besso.

SULLA DEFINIZIONE DELLA LINEA RETTA

Mi è nata l'idea del presente scritto dalla lettura di un opuscolo del sig. Bonnel, (**) nel quale l'autore con lodevole pensiero (per quanto pur troppo non sempre con sufficiente rigore) studia la questione dei fondamenti della geometria e particolarmente delle sue figure primitive più semplici. Di tale opuscolo dette già una recensione nella *Rivista di Matematica* dell'anno passato il mio egregio amico prof. G. M. Testi; ma siccome la parte essenziale di esso è la definizione di linea retta che il signor Bonnel crede opportuno ricondurre alla forma del Legendre, quale « più corto cammino fra due punti » e ciò appoggiandosi a dimostrazioni non del tutto soddisfacenti, così ho stimato utile discutere se quella sia veramente la migliore definizione e fare insieme un esame del concetto di linea retta con una critica dei varî modi con cui si suole ordinariamente presentare; simili questioni essendo accennate appena nella recensione citata. Su tale argomento dissi già qualcosa nella mia nota « I postulati e gli enti geometrici » (***); ma intendo ora trattarlo più diffusamente.

(*) Il Cantor accenna a questo teorema di Stefano degli Angeli (pag. 821), ma nulla dice sulla dimostrazione.

La dipendenza fra il problema delle tangenti e quello dei massimi e minimi si rende manifesta osservando che, in un intervallo in cui la curva sia sempre concava o sempre convessa rispetto all'asse delle ascisse, la differenza fra l'ordinata di un punto della tangente e l'ordinata corrispondente della curva ha un minimo od un massimo nel punto di contatto.

(**) J. F. Bonnel. *Essai de géométrie rationelle.* — Lyon, 1891.

(***) *Periodico di Matematica*, Anno I.

1. Il concetto di retta è fondamentale in geometria: eppure non solo non si è ancora trovato un modo al di sopra di tutte le esigenze per definirlo, ma neppure si è d'accordo sul come e sul quando si debba introdurlo.

V'è chi preferisce di non definire affatto la retta, considerandola come un concetto a priori, presente in modo chiaro allo spirito di ciascuno. Non intendo entrare in un campo che non è il mio, quello filosofico; ma soltanto osservo come, per il mio modo di vedere, non sia corretto il ritenere che in geometria esistano idee a priori, e come chi pensi il contrario confonda forse l'intuizione colla pura teoria geometrica. Si rifletta (e su questo punto non insisto troppo, rimandando a quanto ho già detto nella mia nota citata ed alla prefazione della recente opera del Prof. Veronese sui fondamenti della geometria) (*) che gli enti della geometria sono ideali, e somigliano quelli della realtà solo per nostro giustificato arbitrio e solo in quanto si usano per essi nomi e frasi del genere di quelli dell'uso comune. La loro esistenza non è dunque reale ma puramente ideale ed arbitraria, dipendendo dalla nostra volontà che ha inteso imitare per agevolezza di studio alcuni degli oggetti che ci stanno attorno; talchè questa esistenza e alcune delle proprietà di tali enti si enunciano con frasi che esprimono verità convenzionali, non necessarie. Da alcuni di questi enti, ammessi per immediato arbitrio, ne discendono altri dei quali l'esistenza è allora necessaria (per quanto solo di fronte a quella dei primi) e viene provata con un teorema. Gli enti geometrici adunque, sebbene plasmati sul tipo di quelli della realtà, hanno proprietà espresse o con postulati assolutamente arbitrari, o con teoremi relativamente necessari: ed è forza concludere che non è il caso di parlare per essi di concetti a priori.

Questo mi sembra intanto sufficiente a stabilire che il concetto di retta deve essere definito e sviluppato.

2. Apparisce anche chiaro quanto sia poco corretto il dire, come si fa in qualche trattato, che la retta per la sua semplicità non si può definire (**), tanto più se, come accade spesso, a quella frase

(*) Giuseppe Veronese. *Fondamenti di Geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee, esposti in forma elementare.* — Padova, 1891.

(**) V. mia nota citata.

se ne aggiungono altre per dilucidare quel concetto che si ritiene indefinibile, poichè con tale aggiunta o si abbozza una definizione che allora varrebbe meglio compiere ed enunciare esplicitamente, o si vuole solo spiegare l'origine del concetto, nel qual caso occorre un postulato che dica esistente una linea colle proprietà geometriche corrispondenti a quelle dilucidazioni.

V'è chi vagheggiò l'introduzione della retta, come di altri enti geometrici, senza ricorrere ai postulati; ma questa è cosa impossibile, a meno che altri postulati enunciati o sottintesi non siano già stati introdotti, poichè la presenza di tali sorta di verità è sempre necessaria in geometria, se almeno si vuole questa, come deve essere, una scienza di enti ideali e non un accozzo di cognizioni pratiche, buono al più per studi elementari professionali.

3. Da quanto fin qui ho esposto si vede come si presentino due soli modi rigorosi per potere in geometria parlare di linea retta: o introdurla direttamente con alcune sue proprietà (da cui tutte le altre discendano come teoremi) il che si farà con postulati, o definirla per mezzo di relazioni cogli enti già noti, dimostrando che una linea con tali proprietà esiste: due vie nettamente distinte, in entrambi le quali per altro occorre sempre la proposizione: « *Esiste una linea* (da dirsi *retta*) *che goda le tali..... proprietà* » da enunciarsi come postulato nel primo modo, come teorema nel secondo. Coll'una e coll'altra via dovranno essere opportunamente scelte le proprietà da adottarsi per accompagnare la frase « *esiste una linea* » nella proposizione precedente: essendo chiaro come non tutte le proprietà di cui si vuole dotata la retta debbano in essa citarsi, poichè da alcune sole discendono poi necessariamente le altre.

4. L' unica questione da decidere è ormai quella se la retta debba ammettersi con postulati o definirsi: e, in ogni modo, quali sue proprietà debbano perciò scegliersi.

La scelta di tali proprietà dev'essere fatta in modo da introdurre in geometria un ente che assomigli strettamente a quelli che nell'uso comune s'indicano col nome di oggetti sottilissimi e diritti: all'infuori di ciò la scelta è evidentemente arbitraria (almeno da un punto di vista generale), bastando che le proprietà adottate non siano contradittorie fra loro nè con quelle già ammesse, e che siano indipendenti l'una dall'altra.

Su di esse non influisce dunque che lo scopo che ci si propone col definire la retta; il quale può essere o scientifico o didattico. Esige il primo maggiore perfezione di metodo, il secondo maggiore facilità di concezione e di esposizione: per cui con simili esigenze, talora assai diverse, è chiaro che le proprietà da scegliersi possono essere molto differenti nei due casi. Se si tratta di uno scopo puramente scientifico, sarà migliore la definizione che si appoggierà a proprietà più primitive e ci mostrerà l'ente in sè, in quanto obbedisce a condizioni necessarie e sufficienti per individuarlo. Se lo scopo è principalmente didattico, la definizione dovrà scegliere le proprietà che risvegliano meglio l'idea degli oggetti della realtà, che meglio *fanno imagine*, per servirmi di una espressione del Monge; ed anche qui il grado di coltura e d'intelligenza delle persone a cui è rivolto l'insegnamento potrà influire sulla scelta di una proprietà o di un'altra.

5. Le proprietà che, rese ideali, devono appartenere alla retta, quelle cioè che ci caratterizzano i così detti oggetti diritti e sottilissimi nei loro più importanti aspetti, sono da un lato le proprietà comuni anche ad altri enti da studiarsi pure in geometria, come quella della continuità e l'altra del rapporto finito fra due qualunque delle loro parti (postulato d'Archimede), dall'altro lato quelle speciali per essi, che sono principalmente la uniformità di simili oggetti, la costanza di direzione di un punto che si muove sopra di essi, la sufficienza dell'immobilità di due loro punti per fissarne la posizione, il fatto che essi sono gli oggetti più brevi fra tutti quelli che terminano ai loro stessi estremi, il fatto che essi costituiscono la linea di riposo di un corpo a cui appartengono e che ruoti attorno a due dei loro punti, ecc.. Qualunque definizione si adotti, essa dovrà dunque esser tale da poter condurre a proprietà simili a quelle della realtà ora enunciate.

6. Prima di passare alla discussione dei vari concetti di retta, è bene avvertire come l'introduzione di un tale ente divida i geometri in due schiere, secondo che essi ritengono opportuno di definire solo il segmento finito, limitato fra due punti, oppure la retta indefinita; os-

servando i primi che l'intuizione fornisce modelli soltanto di tratti limitati, giudicando gli altri facile ed opportuna l'astrazione che svegli l'idea di un ente unico, indefinito, di cui tutti quelli limitati siano parti.

Non intendo qui occuparmi di tale questione, che per mio conto deciderei in favore della retta indefinita, concetto più vasto e più potente dell'altro. D'altronde, poichè il passaggio dal primo modo al secondo si fa senza difficoltà, ed inoltre (*) « la proprietà della retta di « essere indefinita non è conseguenza logica del suo modo di generazione » e si può quindi senza contraddizioni fare una geometria tanto colla retta finita quanto colla retta indefinita, credo opportuno non stabilire distinzioni categoriche fra l'un modo e l'altro nell'esame che sto per fare: nel quale quindi discuterò promiscuamente le definizioni che conducono all'uno od all'altro concetto.

7. Circa alle proprietà della continuità della retta o postulato di Dedekind (cioè che date sulla retta due serie convergenti di punti esiste sempre sulla retta stessa un loro punto limite) e del rapporto finito fra le sue parti o postulato d'Archimede (cioè che dati due segmenti qualunque a e b fra i multipli di a ve ne sono anche di quelli maggiori di b) i geometri sono tutti d'accordo nell'ammetterle esplicitamente sotto quella forma od altre equivalenti; in generale quelle proprietà sono ammesse dopo le altre, anzi si sogliono introdurre dopo che dalle altre si sono dedotte tutte le conclusioni che si possono trarre. Il perchè di tal ritardo si capirà quando si pensi che quelle due proprietà hanno influenza più che altro sui teoremi metrici, i quali sogliono darsi sull'ultimo dei trattati in omaggio ai programmi che regolano l'insegnamento della geometria specialmente nelle scuole classiche.

Nei libri di geometria non esclusivamente destinati all'insegnamento secondario si vedono per altro quelle proprietà ammesse talora insieme alle altre (**).

Comunque sia non è per esse che si stabilisce la differenza più importante fra i vari modi di trattazione della retta, e, d'altra parte,

(*) Rausenberger. *Die elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene.* — Leipzig, 1887, § 2.

(**) Vedi p. es. Veronese, l. c.

non si fonda su di esse la descrizione primordiale di tale ente, quella con cui si vuol far capire allo studioso a quali tipi reali debba somigliare la retta: talchè porterò la discussione esclusivamente sulle altre proprietà, le quali da sè sole, come già ho detto, conducono allo svolgimento di molte parti della geometria.

8. La definizione teoricamente più semplice e giustamente preferita da chi non vuol parlar di moto in geometria, è quella che « la « retta è individuata da due punti qualunque » cioè che « per due « punti passa una retta e una sola » : da cui discende immediatamente che qualunque porzione di retta si adagia esattamente sulla retta stessa a partire da qualunque suo punto.

In sostanza quest'ultima proprietà costituisce la definizione d'Euclide, secondo il quale « la linea retta è quella situata ugualmente ri- « spetto a tutti i suoi punti » quando si *chieda* poi nei postulati che « si conceda di tirare da un punto a qualsivoglia altro una retta » e si dia poi l'assioma « due rette non possono racchiudere spazio (*) » colle quali aggiunte in conclusione si ammette che per due punti si possa condurre sempre una retta ed una sola.

La prima parte della definizione di Euclide pecca di oscurità, per cui è stata interpretata in vari sensi; per altro, pensando ai due postulati richiesti, si scorge come forse quella non è che una dilucidazione preliminare affinchè si capisca il perchè di quegli assiomi nei quali veramente sta la definizione della retta, e per i quali mi pare giusto il dare ad essa il nome di definizione euclidea. Il Duhamel (**) stesso vede nelle parole d'Euclide il concetto che si sta discutendo e crede potere in modo più chiaro dare la stessa definizione, chiamando retta « una linea indefinita tale che per due punti non se ne può far « passare che una sola », dimenticando per altro una parte della definizione, cioè che per due punti ne passa sempre una.

Anche modernamente molti autori eccellenti per rigore hanno accolto questa definizione, accompagnandola col postulato che ammette l'esistenza di una linea con quelle proprietà. Citerò alcuni fra quelli a cui si deve lo studio più accurato e sottile sui postulati

(*) *Gli elementi* di EUCLIDE, per cura di E. BETTI e F. BRIOSCHI — Firenze, 1887.
(**) DUHAMEL. *Des méthodes dans les sciences de raisonnement* — Paris, 1866, 2me partie, § 9.

della geometria. Il Pasch (*) ed il Peano, (**) preferendo entrambi di definire il segmento finito piuttosto che la retta indefinita, danno, sotto forma più o meno diversa, i due postulati: 1° esiste un segmento cogli estremi in due punti distinti; 2° per due punti presi come estremi passa un segmento solo. Ed il Veronese (***) (mi servo soltanto di ciò che egli dice della retta nel senso più ristretto sufficiente all'ordinario insegnamento, mentre la sua retta generale non ha un punto solo ma bensì un campo all'infinito) dà così l'assioma della retta: « Due punti distinti qualunque determinano un sistema iden- « tico nella posizione delle sue parti e continuo che li contiene e « si chiama retta » dove l'idea di continuo è qui introdotta subito, e la frase « identico nella posizione delle sue parti » sta a supplire alle proprietà della retta che ordinariamente si deducono dal moto, quali che un segmento AB è uguale al segmento BA, che ogni figura (e quindi anche il segmento) si può far rotare attorno ad un punto, e che ogni raggio di retta fatto rotare attorno al suo estremo si può condurre a passare per un punto qualunque dello spazio.

Mi sembra che la definizione in questione dal punto di vista teorico non lasci niente a desiderare, per quanto debba poi essere completata per poter concludere che se di una retta son fermi due punti saranno fermi tutti: giacchè dal solo fatto che per A e B passa una retta sola non dipende logicamente che stando fermi A e B non possano gli altri punti della retta muoversi scorrendo sulla retta stessa, proprietà questa ultima che può aggiungersi con un successivo postulato e che, comunque, non influisce sull'esistenza e sull'unicità della retta introdotta colla definizione di cui sto parlando. È evidente che questa definizione accenna alla condizione necessaria e sufficiente per individuare fra tutte una linea l. Ora simile metodo che per la definizione non ricorre ad enti estranei ma definisce la retta in sè, come ente che accompagna in qualità di risultato il dato costituito da soli enti elementari, i punti, è metodo indipendente da legami colla realtà, e s'intende quindi che sarà il più potente, il più atto ad uno studio della geometria puramente astratta.

(*) Pasch. *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig, 1882, § 1, Grundsatz I

(**) Peano. *I principii di geometria logicamente esposti*. — Torino, 1889, assiomi IV e V.

(***) L. c. pag. 216. Nota IV, ass. II.

Ma se così può dirsi dal punto di vista geometrico, non è al certo altrettanto per quello didattico. Di tal questione già dissi nella mia Nota citata, nè starò qui a ripeter molto; accennerò solo che il presentare una proprietà *negativa* della retta, quella di non passarne che una per due punti, mi sembra, almeno finchè le si mantiene quella forma, poco atto a far nascere l'idea della retta in modo da mostrarla simile a quella che se ne ha nella pratica, per quanto Duhamel (l. c) accenni il contrario. Sotto questa forma la definizione non fa immagine, e quindi credo che non sia da preferirsi in un insegnamento non molto elevato.

9. Dopo la precedente definizione vengono quelle che s'inspirano più da vicino alle proprietà sensorie più salienti dei corpi rettiformi, alle proprietà che servono a descriverci la retta avuto riguardo ai modi materiali di generazione dei ricordati corpi.

Prima fra queste per valore è la definizione che, prendendo alla intuizione il fatto che quando in un corpo stanno fermi due punti stanno fermi anche tutti quelli di un tratto diritto che traversa l'intero corpo, si dà così: « Esiste una linea (che si dirà retta) di cui « tutti i punti stanno fermi quando ne stanno fermi due ». Tale definizione, a dire il vero, deve essere completata coll'accennare che oltre quei punti nessun altro dello spazio sta fermo. Generalmente si suol definire la retta nel modo anzidetto, aggiungendo poi un nuovo postulato il quale corrisponde alla osservazione accennata: meglio sarebbe unirli tutte e due in un solo, così concepito: « Quando in una rota- « zione stanno fermi due punti, stanno fermi tutti i punti di una « linea passante per essi (retta) ed essi soli ».

Tale definizione, addottata anche dal Leibniz (*), si onora di nomi illustri. Così p. es. lo Staudt (**) dice: « Una linea che, tenuti fermi « due dei suoi punti non può cambiare di posizione, si dice retta », ed aggiunge come proprietà che « fra due punti è possibile condurre una « retta ed una sola ad essi terminata ».

E l'Höuel (***), nel suo tentativo di riordinamento del 1° libro di

---

(*) CLIFFORD. *Il senso comune nelle scienze esatte.* — Milano, 1886, Cap. II, § 5.
(**) STAUDT. *Geometria di posizione*, trad. dal dott. PIERI. — Torino, 1889, § 1.
(***) HÖUEL. *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire.* — Paris, 1883, pag. 43.

Euclide, definisce la retta solo dopo avere invocato l'intuizione del moto attorno a due punti, e propone l'assioma: « Esiste una linea, « detta retta, la cui posizione nello spazio è completamente fissata « dalle posizioni di due qualunque dei suoi punti ».

È facile riconoscere come tale definizione non sia in sostanza che una forma diversa della precedente, trasformata col fare uso del concetto del moto e resa perciò più intuitiva: potrebbe quindi muoverle una seria obiezione chi volesse bandita dalla geometria l'idea di moto. Ma è certo che, sebbene tale idea sia teoricamente non necessaria in geometria, è peraltro di potente aiuto nell'insegnamento e, quando la s'introduca in modo esatto (*) rende accessibili certe idee sotto altra forma oscure e difficili.

Alla definizione stessa si è obiettato (**) da altri che essa nulla dice sulla forma della retta; ma io non conosco ancora una definizione della retta in cui si dica di questa tutto ciò che la riguarda, a causa e del momento in cui conviene introdurla per cui non si può appoggiarla che a pochi concetti già definiti, e della necessità di dire di essa tante proprietà *quante bastino* ad individuarla, se si vuole che la definizione abbia carattere teorico, e non si cambi in una descrizione.

Strana è la critica che le fa il Bonnel (***), l'autore dell'opuscolo che ha inspirato il presente scritto, il quale dice: « Quella definizione si « riconduce agevolmente a questa: una linea è retta, se essa non ruota « quando si fa rotare. Sotto questa forma un poco brutale merita « appena di essere discussa ». Osservo che se è vero che la forma *citata* è addirittura brutale, è inesatto che la definizione si riduca a quella forma, giacchè il dire che la linea non può rotare quando ne stanno fermi due punti, esclude che si possa far rotare, e quindi non accade che non roti *quando si fa rotare!* L'altra obiezione dello stesso autore, che cioè partendo, come si fa con questa definizione, da un movimento concreto il prodotto dell'operazione sarà concreto e si otterrà così un oggetto sottilissimo che potremo far

(*) V. la nota finale alla mia memoria: *La retta ed il concetto di lunghezza.* — *Annali di Matematica*, 1892.

(**) Cassani. *Memorie sui fondamenti della geometria.* - *Giornale di Matematiche*, Volumi XI, XV, XX.

(***) L. c. pag. 16.

girare sui due capi, ma che quando si tratta di estrarre si cade nell'inconveniente accennato nell'altra obiezione, mi pare priva di importanza anche ammettendo quell'inconveniente: giacchè le linee geometriche provengono appunto dalla astrazione dei corpi sottilissimi e le proprietà di una di esse possono appunto essere generate dall'astrazione su tali corpi sottili.

Io giudico che, nonostante le obiezioni che le si muovono, questa definizione, assai rispondente alla intuizione, sia la migliore di tutte quelle a me note, didatticamente parlando.

(Continua). R. Bettazzi.

A PROPOSITO DI UN LAVORO SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE

(Continuazione, V. pag. 81, 113, 169 del vol. VII).

III.

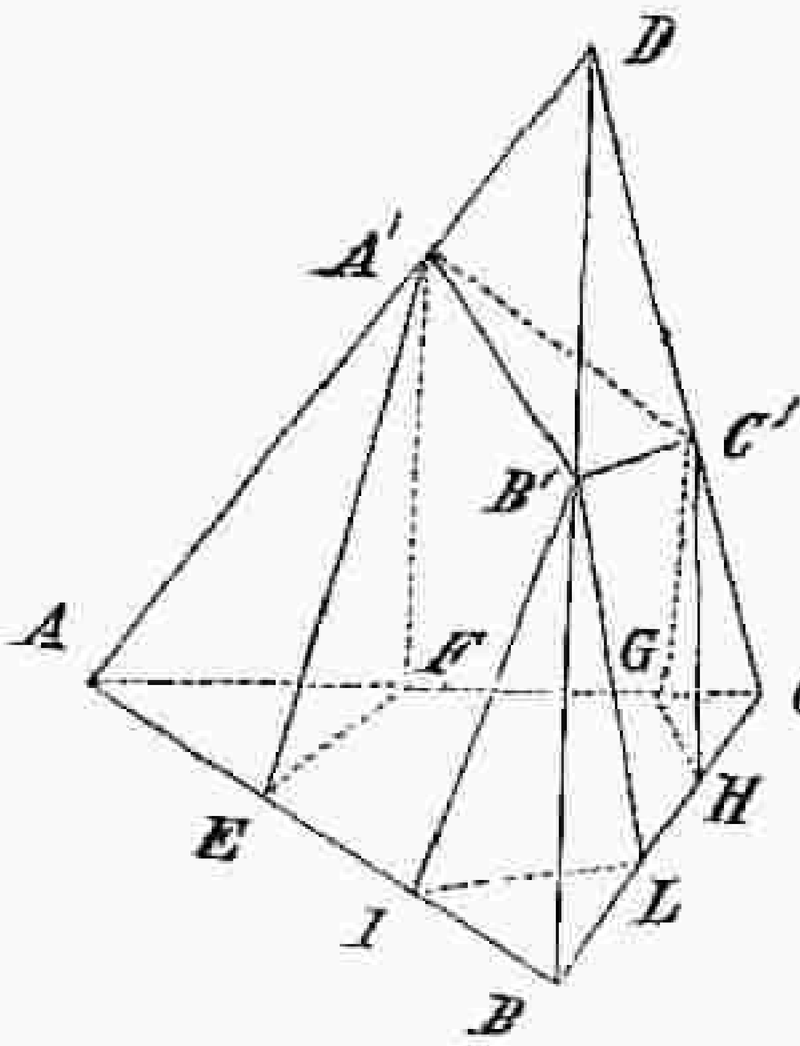
Il filosofo Platone, accogliendo le idee pitagoriche sopra le forme simmetriche e primitive delle molecole materiali, con raziocinio geometrico nei dialoghi del Timeo, definì i cinque poliedri regolari convessi.

Euclide, giovandosi degli studi fatti da Tehètéte e da Aristeo seniore, al XIII libro de' suoi elementi insegnò le regole per iscriverli in una sferica superficie. Apollonio di Perga, Ipsicle, Aristeo, ... cercarono le mutue relazioni fra le varie parti dei solidi regolari e con l'iscrivere l'uno nell'altro s'avvidero come i centri delle faccie siano i vertici del poliedro correlativo, ovvero ai piani α, β, γ, ... ed agli spigoli $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, ... del primo corrispondano respettivamente i vertici A, B, C, ... e gli spigoli AB, BC, CA, ... del secondo. Archimede immaginò tredici figure contenute da poligoni regolari di nome diverso ed i numeri f, v, s delle lor faccie, vertici e spigoli ci furono tramandati per le collezioni matematiche di Pappo alessandrino (*). E siccome questo novero mercè l'analisi indeterminata si riconobbe esatto e completo, il Professor Gunther congetturò che il Siculo genio avesse intuita la

(*) Vedi pagine 42-43 del *Periodo aureo della Geometria greca*, saggio storico del Prof. Loria, e la nitida esposizione del Prof. F. Panizza alla pagina 109 del III volume di questo Giornale.

proposizione fondamentale $f + v - s = 2$; discoperta nell' evo moderno da Cartesio e dall' Euler. Attesochè il troncamento di un angolo m-edro convesso eseguito con un piano che non passi per alcun vertice del solido, accresca questo di m spigoli, di $m - 1$ vertici e di una sola faccia, consegue l'invariabilità della differenza $f + v - s$; viceversa la piramide costruita sopra una faccia n-latera del poliedro presa per base e col vertice opposto non situato sulla superficie, aumenta di $n - 1$, 1, n i respettivi numeri f, v, s; e quindi la differenza suddetta non viene ad alterarsi. Inoltre ch'essa sia eguale a due si manifesta per il tetraedro, ed in generale per il prisma e la piramide a basi n-latere, essendo nel primo $n + 2$, $2n$, $3n$ e nella seconda $n + 1$, $n + 1$, $2n$ i respettivi numeri f, v, s.

Nel tetraedro $ABCD = t$, il piano condotto per tre punti A', B', C' degli spigoli AD, BD, CD separa il pentaedro $ABCA'B'C'$ la cui ragione a t è $1 - ghi$; significando con g, h, i le respettive ragioni $A'D : AD$, $B'D : BD$, $C'D : CD$. E chiamando E, F due punti degli spigoli AB, AC ed $AE : AB = l$, $AF : AC = m$, il piano $A'FE$ separa dal solido $ABCA'B'C'$ l'esaedro $EBCFA'B'C'$ avente con t la ragione $1 - ghi - (1 - g)\,lm$. In simil guisa i piani $C'GH$, $B'IL$ troncano dall'esaedro le piramidi $C'GHC$, $B'IBL$ e l'ottaedro risultante $EFGHLIA'B'C'$ ha quattro faccie



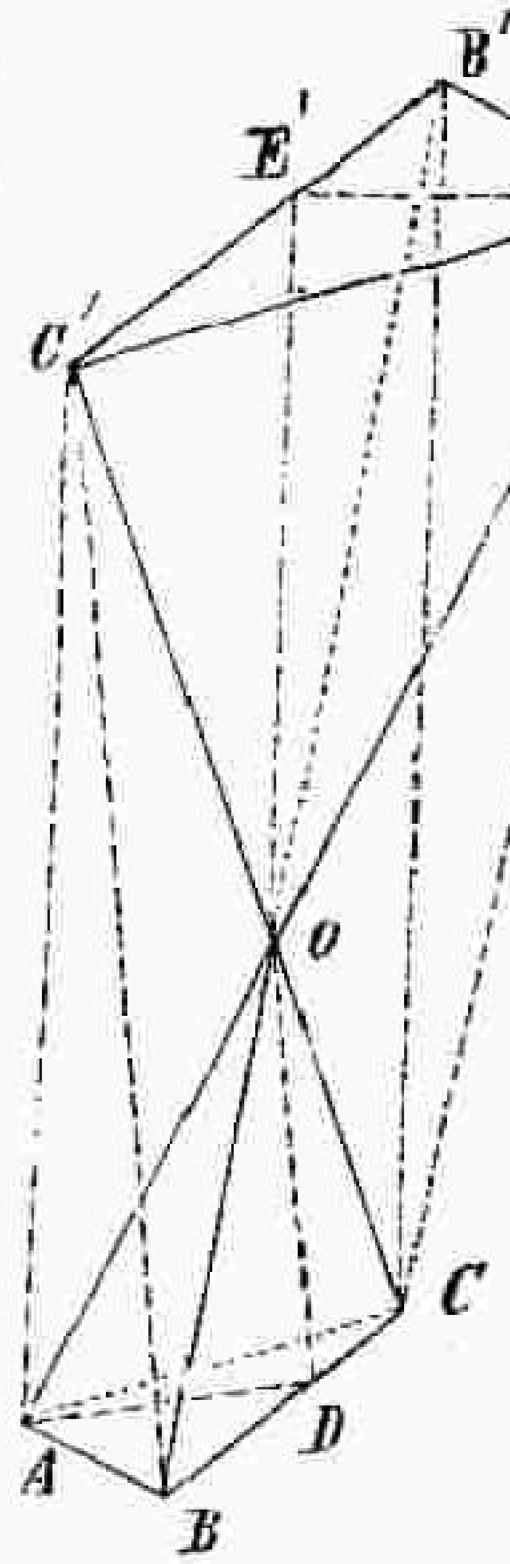
triangolari, tre quadrilatere ed una esagonale; posto $CG : CA = n$, $CH : CB = p$, $BL : BC = q$, $BI : BA = r$ si trova esser $1 - ghi - (1 - g)\,lm - (1 - h)\,qr - (1 - i)\,np$ la ragione di quest'ottaedro a t. Se i punti G, L, I coincidano respettivamente con F, H, E si avranno $n = 1 - m$, $q = 1 - p$, $r = 1 - l$ e le faccie saranno tutte triangolari. Nel caso speciale di $g = i = h$, $m = l = p = 1 - h$ la suddetta ragione si riduce a $2h\,(1 - h)$ e per $h = \frac{1}{2}$ l'ottaedro diviene la metà di t, le sue faccie opposte sono simmetriche rispetto al comun baricentro e fanno angoli diedri supplementari a quelli di t.

Un pentaedro può anche avere le forme di un prisma trilatero e del suo tronco, della piramide quadrangolare o del segmento di questa determinato da un piano passante per un lato della base.

Alla pagina 177 della *practica geometria* di Leonardo pisano, divulgata l'anno 1867 dal Principe Boncompagni, si legge la prima valutazione del tronco di piramide triangolare a basi parallele per l'enunciato: il volume $ABCA'B'C' = v$ decomporsi nella somma delle tre piramidi $ABCA'$, $BA'B'C$, $A'B'C'C$ continuamente proporzionali; poichè avendosi le proporzioni $ABCA' : BA'B'C = AB : A'B'$, $BA'B'C : A'B'C'C = BC : B'C'$ ei conchiude l' eguaglianza delle prime ragioni a motivo dei triangoli simili $ABC = b$, $A'B'C' = b'$; indi costruita una piramide con la stessa altezza h del tronco e la base media proporzionale fra b, b' e simile ad esse dimostra equivalere al tetraedro $BA'B'C$. Simboleggiando con (b, h) il prisma descritto coll'altezza h e la base b, il teorema di Leonardo si esprime con la relazione

$$v = \left(b, \frac{h}{3}\right) + \left(b', \frac{h}{3}\right) + \left(\sqrt{bb'}, \frac{h}{3}\right) = \left(b + b' + \sqrt{bb'}, \frac{h}{3}\right).$$

Due tetraedri omotetici inversi $OABC$, $OA'B'C'$ formano un solido compreso da cinque piani, che si chiama tronco di piramide triangolare a basi parallele e di seconda specie; evidentemente sussiste l'identità $OABC + OA'B'C' = C'ABC + CA'B'C' - (OABC' + OA'B'C)$. Notando con b, b' i triangoli ABC, $A'B'C'$, con h la distanza dei loro piani, con k la ragione $OA' : OA = \sqrt{b'} : \sqrt{b}$, si ricavano $C'ABC = \frac{1}{3}(b, h)$, $CA'B'C' = \frac{1}{3}(b', h)$. Tirando le rette OD, OE' respettivamente parallele a BC', CB' fino ad incontrare i lati BC, $B'C'$ risulteranno $OABC' = DABC' = \frac{1}{3}(ABD, h)$, $OA'B'C = E'A'B'C = \frac{1}{3}(A'B'E', h)$; ed

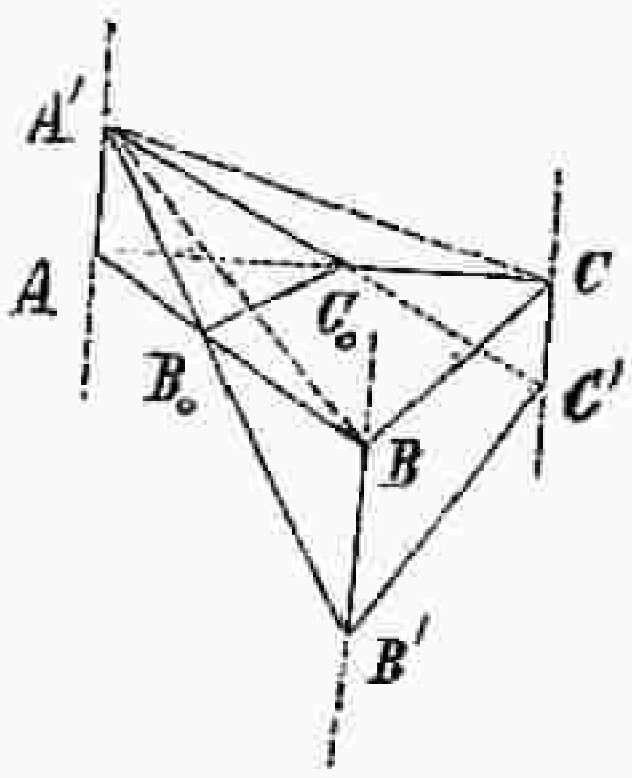


in virtù delle proporzioni $ABD : ABC = BD : BC = C'O : C'O + OC$, $A'B'E' : A'B'C' = B'E' : B'C' = OC : C'O + OC$ e $b' : b = k^2 : 1$, si deducono $ABD = kb : (1+k)$, $A'B'E' = bk^2 : (1+k)$; quindi si avrà $ABD + A'B'E' = kb = \sqrt{bb'}$; dunque il tronco di seconda specie equivale a

$$\left(b, \frac{h}{3}\right) + \left(b', \frac{h}{3}\right) - \left(\sqrt{bb'}, \frac{h}{3}\right) = \left(b + b' - \sqrt{bb'}, \frac{h}{3}\right).$$

Le due proposizioni si estendono ai tronchi di piramidi a basi parallele ed n - latere, decomponendo una base θ del tronco nei triangoli t_1, t_2, t_3, ... e l'altra θ' negli omotetici t'_1, t'_2, t'_3, ...; per le ragioni $t_1 : t'_1 = t_2 : t'_2 = t_3 : t'_3 = \ldots.\ \theta : \theta' = 1 : k^2$ si trae $\sqrt{t_1 t'_1} + \sqrt{t_2 t'_2} + \sqrt{t_3 t'_3} + \ldots. = (t_1 + t_2 + t_3 + \ldots)\, k = \sqrt{\theta\theta'}$.

Un tronco di prisma è della seconda specie, quando la base ABC sia segata internamente dalla faccia opposta $A'B'C'$; indicata con B_0C_0 la retta d'intersezione si trovano le identità $A'AB_0C_0 + B_0C_0CBB'C' = A'AB_0C_0 + A'BCC'B' - A'B_0C_0CB = 2\,A'AB_0C_0 + A'BCC'B' - A'ABC$, e siccome la piramide $A'BCC'B'$ è la somma dei tetraedri $A'BCC'$, $A'BC'B'$ o dei loro equivalenti $ABCC'$, $ABCB'$, il volume v del tronco si esprime con la somma $ABCC' + ABCB' - ABCA' + 2A'AB_0C_0$;



i tre primi tetraedri hanno comune la base ABC ed i vertici nei punti A', B', C'; per il rimanente si ha la proporzione $A'AB_0C_0 : A'ABC = AB_0C_0 : ABC = (AB_0 : AB)(AC_0 : AC)$ e queste ultime ragioni sono respettivamente eguali ad $AA' : (AA' + BB')$, $AA' : (AA' + CC')$ in virtù dei triangoli simili AB_0A', B_0BB' e degli altri due $A'AC_0$, C_0CC'; dunque significando con b la base ABC e con h, h', h'' le distanze dei vertici A', B', C' da questa b, risulta

$$v = \left(b, \frac{h'}{3}\right) + \left(b, \frac{h''}{3}\right) - \left(b, \frac{h}{3}\right) + 2\,\frac{h^2}{(h+h')(h+h'')}\left(b, \frac{h}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(b,\ h' + h'' + h\,\frac{(h-h')(h-h'') - 2h'h''}{(h+h')(h+h'')}\right).$$

(Continua). G. Bellacchi.

SOPRA ALCUNE EQUAZIONI INDETERMINATE DI PRIMO GRADO

Mi propongo qui di determinare il numero delle soluzioni di alcune equazioni indeterminate di primo grado applicando talune formole che ho dato nella mia nota: *Sulla partizione dei numeri* (*). Adoperiamo quindi le stesse notazioni ivi adottate, e prendiamone a considerare le formole (4), (6), (10) (la prima delle quali ora scriveremo con notazione più semplice)

$$s_{m,p} = \sum_{k=0}^{k=\left(\frac{m}{p}\right)} s_{m-kp,\, p-1} \quad \ldots \ldots (A) \qquad s'_{m,p} = s_{m-p,\, p} \quad \ldots \ldots (B)$$

$$s''_{m,p} = s_{m-\frac{p(p+1)}{2},\, p} \quad \ldots \ldots (C)$$

dove $s_{m,p}$, $s'_{m,p}$, $s''_{m,p}$ rappresentano rispettivamente il numero delle soluzioni dell'equazione

$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots + y_p = m \qquad (^{**})$$

in numeri positivi o nulli, in numeri positivi e diversi da zero, in numeri positivi diversi da zero e tra loro.

1. Supposto $p = 2$ dalla (A) si ha subito

$$s_{m,2} = \sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{2}\right)} s_{m-2k,\,1} = \left(\frac{m}{2}\right) + 1$$

ciò che è evidente. Distinguendo dapprima il caso di m pari da quello di m dispari, è facile vedere che si ha in ogni caso

$$s_{m,2} = \frac{2m + 3 + (-1)^m}{4}.$$

2. Sostituendo questo valore di $s_{m,2}$ nella (A) dopo avervi posto $p = 3$, si ha:

$$s_{m,3} = \sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{3}\right)} s_{m-3k,\,2} = \sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{3}\right)} \frac{2(m-3k)+3}{4} + \frac{1}{4}\sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{3}\right)} (-1)^{m-k}.$$

(*) V. pag. 93 dell'anno VII.

(**) Si considerano come distinte quelle soluzioni che differiscono per due valori *almeno* delle y. - V. la mia nota citata

La quantità $\sum\limits_{0\,k}^{\left(\frac{m}{3}\right)} (-1)^{m-k}$ è zero quando $\left(\frac{m}{3}\right)$ è dispari ed è uguale a $(-1)^m$ quando $\left(\frac{m}{3}\right)$ è pari, onde, come è facile verificare, si ha in tutti i casi

$$\sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{3}\right)} (-1)^{m-k} = \frac{(-1)^m + (-1)^{m+\left(\frac{m}{3}\right)}}{2}$$

da cui

$$s_{m,3} = \left\{\frac{2m - 3\left(\frac{m}{3}\right) + 3}{4}\right\}\left\{\left(\frac{m}{3}\right) + 1\right\} + \frac{(-1)^m + (-1)^{m+\left(\frac{m}{3}\right)}}{8} \quad . \; (1)$$

Se si indica con r_m il resto della divisione di m per 3 si trova anche

$$s_{m,3} = \frac{(m+3)^2 - r_m^2}{12} + \frac{(-1)^m + (-1)^{r_m}}{8} \quad \ldots\ldots \; (1)'$$

Ponendo $p = 3$ nella (B) $(m \geqq 3)$, e nella (C) $(m \geqq 6)$, si ha subito dalle precedenti e con facili calcoli

$$s'_{m,3} = \frac{2m - 3\left(\frac{m}{3}\right)}{4} \cdot \left(\frac{m}{3}\right) + \frac{(-1)^{m-1} + (-1)^{m+\left(\frac{m}{3}\right)}}{8} \quad . \; . \; (2)$$

$$s''_{m,3} = \left\{\frac{2m - 3\left(\frac{m}{3}\right) - 3}{4}\right\}\left\{\left(\frac{m}{3}\right) - 1\right\} + \frac{(-1)^m + (-1)^{m+\left(\frac{m}{3}\right)}}{8} \quad (3)$$

ed altre due analoghe alla (1)′ tralasciamo per brevità.

(*Continua*).

ALBERTO TAGIURI.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

A complemento di un articolo del Prof. Riboni (*Lettera al Redattore*) — Egregio Sig. Professore: Lessi soltanto ora la nota del Sig. Riboni inserita nel *Periodico*, 1891, p. 186-9. A complemento della stessa mi permetto comunicarle i seguenti risultati.

Si ha in generale:

$$K_p^n = \binom{n+1}{2p} + a_{p,1}\binom{n+2}{2p} + a_{p,2}\binom{n+3}{2p} + \ldots\ldots + a_{p,p-1}\binom{n+p}{2p};$$

dove le a sono legate dalla relazione:

$$a_{p,\lambda-1} = \lambda a_{p-1,\lambda-1} + (2p-\lambda)\, a_{p-1,\lambda-2}\,.$$

Mediante questa relazione e col sussidio del calcolo delle differenze finite, si trovano successivamente le a; e cioè si ha:

$$a_{p,\lambda-1} = \lambda^p \sum \left\{ \frac{1}{\lambda^{p+1}} (2p+2-\lambda)\, a_{p,\lambda-2} \right\},$$

dove $\sum$ è il simbolo dell'integrazione finita rispetto a p. Si trova p. es.:

$$a_{p,1} = \frac{2}{1} \cdot 2^p - (2p+2),$$

$$a_{p,2} = \frac{9}{2} \cdot 3^p - (4p+6) \cdot 2^p + \left(2p^2 + 3p + \frac{3}{2}\right),$$

$$a_{p,3} = \frac{64}{6} \cdot 4^p - (9p+18) \cdot 3^p + (4p^2 + 10p + 8) \cdot 2^p$$
$$- \left(\frac{4}{3} p^3 + 2p^2 + \frac{8}{3} p + \frac{4}{6}\right),$$

$$a_{p,4} = \frac{625}{24} \cdot 5^p - \left(\frac{64}{3} p + \frac{160}{3}\right) \cdot 4^p + \left(9p^2 + \frac{63}{2} p + \frac{135}{4}\right) \cdot 3^p$$
$$- \left(\frac{8}{3} p^3 + 8p^2 + \frac{34}{3} p + \frac{20}{3}\right) 2^p + \left(\frac{2}{3} p^4 + \frac{2}{3} p^3 + \frac{5}{6} p^2 + \frac{2}{3} p + \frac{5}{24}\right),$$

e in generale:

$$a_{p,\lambda-1} = \frac{\lambda^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \cdot \lambda^p - M_{\lambda,1} (\lambda-1)^p + M_{\lambda,2} (\lambda-2)^p - \ldots\ldots$$
$$+ (-1)^\lambda M_{\lambda,\lambda-2} \cdot 2^p - (-1)^\lambda M_{\lambda,\lambda-1},$$

dove $M_{\lambda,i}$ è un polinomio in p di grado i a coefficienti razionali e positivi.

Uno studio più profondo dovrebbe condurre alla determinazione della forma dei polinomi M.

Mi credo

Mantova, 5 dicembre 1892.

Suo Dev.mo

G. Vivanti.

Sul teorema di Lehmus ed affini. — Le dimostrazioni di alcuni teoremi affini contenute negli ultimi due numeri del *Periodico di Matematica* e particolarmente gli interessanti cenni storici della Redazione mi fecero ripensare ad una mia dimostrazione assai semplice della quale segnai traccia in un libro da me pubblicato (*). Cercando ricostruirla pervenni ad una dimostrazione che ritengo opportuno far conoscere ai lettori del *Periodico*: essa è quella del secondo dei seguenti teoremi.

(*) *Geometria piana ad uso dei Ginnasi e Licei*; Palermo, 1890: pag. 88, 38.

T. 1. *A due lati eguali d' uno stesso triangolo corrispondono bissettrici eguali.*

D. Si può rimettere il triangolo sopra sè stesso dopo d'averne scambiati i lati eguali, bastando per quest' intento rivoltare sopra sè stesso l'angolo compreso dai detti lati. Con ciò scambiansi tra loro le bissettrici corrispondenti ai lati eguali, cioè ognuna va a coincidere con la posizione iniziale dell'altra: esse bissettrici sono dunque eguali.

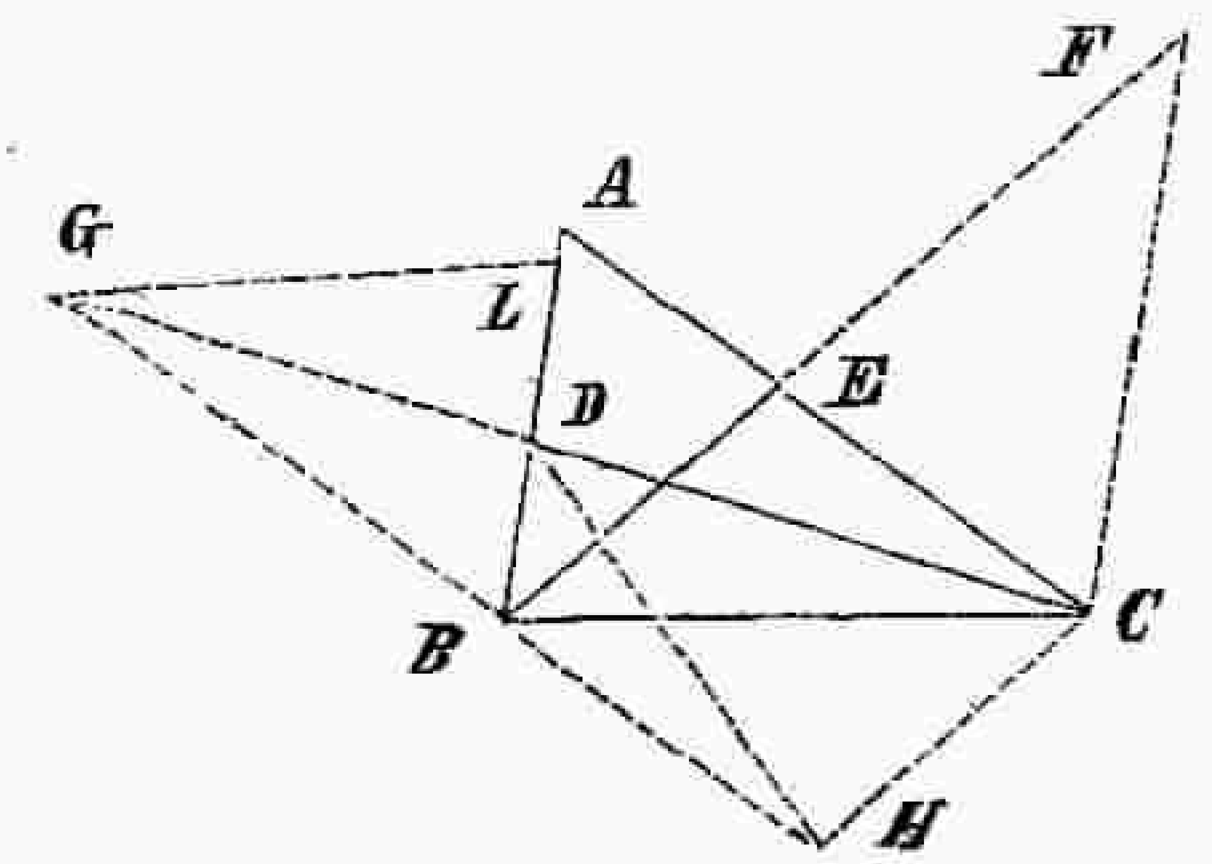
T. 2. *A due lati diseguali di uno stesso triangolo corrispondono due bissettrici diseguali ed è maggiore la bissettrice corrispondente al lato minore.*

D. Nel triangolo ABC siano CD, BE le bissettrici degli angoli C, B; e sia $AB < AC$ per cui l' angolo B sarà maggiore dell' angolo C e la metà del primo sarà maggiore della metà del secondo. Siano F e G i punti d' incontro delle parallele a BA e CA condotte per C e B con le BE, CD prolungate. Sarà

$$\text{ang.}\, BGD = DCA = DCB \qquad \text{ang.}\, CFE = EBA = EBC$$

onde, per quanto fu detto:

$$\text{ang.}\, BGD < CFE$$



e per le riconosciute eguaglianze di angoli sarà inoltre

$$GB = BC = CF.$$

Con un lato in GB, dalla parte di BGD, costruiscasi un angolo eguale a CFE, quindi maggiore di BGD, e sia L il punto d'incontro del secondo lato del medesimo con la retta BA. Per quanto fu detto, i triangoli CEF, BLG hanno un lato eguale adiacente a due angoli uguali epperò essi triangoli sono uguali ed è

$$CE = BL > BD.$$

Ora, siccome un angolo esterno ad un triangolo è la somma dei due interni opposti, è

$$\text{ang.}\, BEC = A + \frac{1}{2} B \qquad \text{ang.}\, BDC = A + \frac{1}{2} C$$

per cui, essendo $B > C$, è

$$\text{ang.}\, BEC > BDC.$$

Si conducano per B e C le parallele ad EC ed EB e s'unisca con D il loro punto d' incontro H. Il quadrilatero $BHCE$ è un parallelogrammo, per cui, tenendo pur conto di quanto precede, si ha:

$$BH = CE > BD \qquad \text{ang.}\, BHC = BEC > BDC$$

da cui segue immediatamente

$$\text{ang. } BHD < BDH \qquad \text{ang. } BHC - BHD > BDC - BDH.$$

Essendo l'angolo DHC del triangolo DHC maggiore dell'angolo HDC del medesimo triangolo, ne segue che DC è maggiore di CH, ossia di BE che è uguale a CH.

C. *Se due bissettrici d'un triangolo sono eguali, i lati corrispondenti sono eguali. Se due bissettrici d'un triangolo sono disegualі, i lati corrispondenti sono diseguali ed è maggiore quello corrispondente a bissettrice minore.*

La verità di questo corollario si riconosce subito mediante un principio che ho applicato spesso ed utilmente anche nella mia *Geometria piana* (*).

Genova, 3 dicembre 1892.

F. Giudice.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI

114, 115, 119, 134*, 135*, 137*, 138*, 140* e 141*

114. *Si considerano tutte le frazioni, non inferiori all'unità, che hanno il numeratore uguale ad* n *ed il denominatore privo di fattori quadrati (diversi dall'unità). Dimostrare che la somma dei massimi interi, i cui quadrati non superano le frazioni considerate, è uguale ad* n. (E. Cesàro).

Dimostrazione del Sig. Prof. *U. Scarpis.*

Convenendo d'indicare col segno di radice quadrata solamente la parte intera della radice, dimostriamo che essendo n, α due interi, ed $\alpha \leq n$ sarà sempre $\sqrt{\frac{n}{\alpha}} = \sqrt{\frac{n+1}{\alpha}}$ eccetto che $\frac{n+1}{\alpha}$ sia intero e quadrato perfetto nel qual caso sarà: $\sqrt{\frac{n+1}{\alpha}} = \sqrt{\frac{n}{\alpha}} + 1$.

Poniamo infatti $\frac{n}{\alpha} = q + \frac{r}{\alpha}$ $(r < \alpha)$ e quindi $\frac{n+1}{\alpha} = q + \frac{r+1}{\alpha}$: avremo evidentemente $\sqrt{\frac{n}{\alpha}} = \sqrt{q}$, $\sqrt{\frac{n+1}{\alpha}} = \sqrt{q}$ ogniqualvolta sia $r + 1 < \alpha$, oppure $r + 1 = \alpha$ ma $q + 1$ quadrato non perfetto; mentre invece sarà $\sqrt{\frac{n+1}{\alpha}} = \sqrt{q+1} = \sqrt{q} + 1 = \sqrt{\frac{n}{\alpha}} + 1$ qualora oltre ad essere $r + 1 = \alpha$, $q + 1$ sia pure quadrato perfetto.

Ciò premesso, indichiamo con Σx, Σy rispettivamente, la somma delle radici intere delle frazioni non minori di 1 che hanno per numeratori n, $n + 1$

(*) Pag. 5; T.: oppure Sannia e D'Ovidio, *Elementi di Geometria*, 5ª ediz., pag. 27, n. 20.

e per denominatori numeri soddisfacenti alla condizione di non contenere fattori quadratici diversi dall'unità, e dimostriamo che sussiste la relazione:

$$(1) \qquad \Sigma y = \Sigma x + 1$$

Distinguiamo i seguenti casi:

1°) Sieno n ed $n+1$ entrambi privi di fattori quadratici.

Indichiamo con $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots n, n+1$ i numeri tra l'unità ed $n+1$ (gli estremi inclusi) sprovvisti di fattori quadratici. Avremo:

$$\Sigma x = \sqrt{\frac{n}{1}} + \sqrt{\frac{n}{\alpha_1}} + \sqrt{\frac{n}{\alpha_2}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{n}}\,,$$

$$\Sigma y = \sqrt{\frac{n+1}{1}} + \sqrt{\frac{n+1}{\alpha_1}} + \sqrt{\frac{n+1}{\alpha_2}} + \ldots + \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \sqrt{\frac{n+1}{n+1}}\,.$$

Ma per quanto precede si ha:

$$\sqrt{\frac{n}{1}} = \sqrt{\frac{n+1}{1}},\ \sqrt{\frac{n}{\alpha_1}} = \sqrt{\frac{n+1}{\alpha_1}},\ldots.\ \sqrt{\frac{n}{n}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

ed oltre a ciò: $\sqrt{\frac{n+1}{n+1}} = 1$, per cui è manifesta la (1).

2°) Sia $n = m^2 . q$, $n+1 = \mu^2 . k$ essendo m^2, μ^2 i massimi fattori quadratici di n, $n+1$ di modo che q e k ne saranno privi.

Sieno ora $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_r$ i numeri inferiori ad n che non contengono fattori quadratici, tra i quali si troveranno q e k, avremo:

$$\Sigma x = \sqrt{\frac{n}{1}} + \sqrt{\frac{n}{\alpha_1}} + \ldots\ldots + \sqrt{\frac{n}{\alpha_r}}\,,$$

$$\Sigma y = \sqrt{\frac{n+1}{1}} + \sqrt{\frac{n+1}{\alpha_1}} + \ldots\ldots + \sqrt{\frac{n+1}{\alpha_r}}\,.$$

Ora, per quanto s'è detto in principio e notando inoltre che k è l'unico divisore di $n+1$ che non contenga fattori di 2° grado ed al quale corrisponda un quoziente μ^2 quadrato perfetto, si scorge che per α diverso da q, k come pure per $\alpha = q$ si ha: $\sqrt{\frac{n}{\alpha}} = \sqrt{\frac{n+1}{\alpha}}$, mentre invece solo per $\alpha = k$ abbiamo: $\sqrt{\frac{n+1}{\alpha}} = \sqrt{\frac{\mu^2 k}{k}} = \mu = \sqrt{\frac{n}{\alpha}} + 1$ e così pure in questo caso resta provata la (1).

3°) Sia n mancante di fattori di 2° grado, ed $n+1 = \mu^2 . k$ essendo μ^2 il massimo quadrato divisore di $n+1$.

Si dimostra come il precedente.

4°) Sia $n+1$ privo di fattori quadratici e sia invece $n = m^2 . q$.

I denominatori delle frazioni che si considerano saranno in questo caso $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_r, n+1$ tra i quali si troverà pure q ed avremo:

$$\Sigma x = \sqrt{\frac{n}{1}} + \sqrt{\frac{n}{\alpha_1}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{\alpha_r}}\,,$$

$$\Sigma y = \sqrt{\frac{n+1}{1}} + \sqrt{\frac{n+1}{\alpha_1}} + \ldots\ldots + \sqrt{\frac{n+1}{\alpha_r}} + \sqrt{\frac{n+1}{n+1}},$$

e siccome anche per $\alpha = q$ si ha: $\sqrt{\frac{n}{\alpha}} = \sqrt{\frac{n+1}{\alpha}}$ ed è $\sqrt{\frac{n+1}{n+1}} = 1$, si ricava:

$$\Sigma y = \Sigma x + 1$$

e la (1) resta dimostrata in ogni caso.

Rappresentando ora con Σx, Σz, Σt, ... Σv, Σw rispettivamente le somme delle radici intere di tutte le frazioni soddisfacenti alle condizioni volute ed aventi successivamente per numeratori n, $n-1$, $n-2$, ... 2, 1, dalla (1) si ricaverà la seguente catena di eguaglianze:

$$\Sigma x = \Sigma z + 1\,,\quad \Sigma z = \Sigma t + 1\,,\ \ldots\ldots\quad \Sigma v = \Sigma w + 1\,,\quad \Sigma w = 1$$

dalle quali sommando si ha: $\Sigma x = n$ (*)

115. *Sia* $\varphi(n)$ *il numero dei numeri primi con* n *e non superiori ad* n. *Dimostrare che, se* α, β, γ, ... *sono tutti gli interi che entrano (esattamente o no) un numero dispari di volte in* 2n, *si ha:*

$$\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) + \varphi(\gamma) + \ldots\ldots = n^2.$$

(E. Cesàro).

Dimostrazione del Sig. Prof. *U. Scarpis.*

Dimostriamo anzitutto che se si rappresentano con x, y rispettivamente, gli interi che entrano (esattamente o no) un numero dispari di volte in $2n$, $2(n-1)$, si ha:

(1) . . . . $\Sigma\varphi(x) = \Sigma\varphi(y) + 2n - 1.$

In primo luogo, com'è facile vedere, i numeri x si compongono: 1°) dei numeri y, tolti però i numeri $\eta > 1$ divisori di $2n$ che danno quozienti pari; 2°) dei numeri k divisori di $2n-1$, eccettuata l'unità; 3°) dei numeri λ, divisori pari di $2n$ che danno quozienti dispari.

Ciò premesso si ha così:

(2) . . . $\Sigma\varphi(x) = \Sigma\varphi(y) - \Sigma\varphi(\eta) + \Sigma\varphi(k) + \Sigma\varphi(\lambda).$

Cerchiamo ora i valori di $\Sigma\varphi(\eta)$, $\Sigma\varphi(k)$, $\Sigma\varphi(\lambda)$ ed a tal uopo distinguiamo i seguenti casi:

a) n dispari. - I numeri η, cioè i divisori di $2n$ che lasciano quozienti pari, coincidono con i divisori δ di n, tolta l'unità, e si ha quindi per una nota proprietà della funzione φ:

$$\Sigma\varphi(\eta) = \Sigma\varphi(\delta) - \varphi(1) = n - 1.$$

I numeri k coincidono con i divisori di $2n-1$, esclusa l'unità, per cui:

$$\Sigma\varphi(k) = \Sigma\varphi(\delta) - \varphi(1) = 2n - 1 - 1 = 2n - 2.$$

(*) Una dimostrazione sostanzialmente analoga è stata inviata dal Sig. Prof. *G. Santacroce.*

I numeri λ poi, cioè i divisori pari di $2.n$, che danno quozienti dispari, sono della forma 2δ essendo δ sempre dispari divisore di n che è pure dispari, e per essi avremo:

$$\Sigma\varphi(\lambda) = \Sigma\varphi(2\delta) = \Sigma\varphi(\delta) = n.$$

b) n pari. – Si faccia $n = 2^{\nu}.n'$ essendo n' dispari. I numeri η cioè i divisori di $2.n$, tolta l'unità, che danno quozienti pari, sono della forma $2^{\nu'}.\delta$ essendo $\nu' < \nu + 1$ e δ divisore di n', mentre quelli che danno quozienti dispari sono della forma $2^{\nu+1}.\delta$: indicando quindi con d i divisori tutti di $2.n$ avremo:

$$\Sigma\varphi(\eta) = \Sigma\varphi(d) - \Sigma\varphi(2^{\nu+1}.\delta) - \varphi(1),$$

ma poichè $2^{\nu+1}$ e δ sono numeri primi fra loro, per altra proprietà della funzione φ, segue:

$$\varphi(2^{\nu+1}.\delta) = \varphi(2^{\nu+1})\varphi(\delta) = 2^{\nu+1}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\varphi(\delta) = 2^{\nu}\varphi(\delta).$$

Così essendo

$$\Sigma\varphi(d) = 2n,\ \Sigma\varphi(2^{\nu+1}.\delta) = 2^{\nu}\Sigma\varphi(\delta) = 2^{\nu}.n' = n,$$

si avrà:

$$\Sigma\varphi(\eta) = n - 1.$$

Per i numeri k, come precedentemente, è

$$\Sigma\varphi(k) = \Sigma\varphi(\delta) - \varphi(1) = 2n - 2.$$

I numeri λ infine, cioè i divisori pari di $2n = 2^{\nu+1}.n'$ e che danno quozienti dispari, sono della forma $2^{\nu+1}\delta$ per cui

$$\Sigma\varphi(\lambda) = \Sigma\varphi(2^{\nu+1}\delta) = 2^{\nu}.n' = n.$$

Le espressioni $\Sigma\varphi(\eta)$, $\Sigma\varphi(k)$, $\Sigma\varphi(\lambda)$ hanno dunque gli stessi valori in ogni caso, e sostituiti nella (2) conducono alla (1).

Rappresentando ora rispettivamente con $x, y, z, \ldots\ldots u, v, w$ il numero degli interi che entrano esattamente o no un numero dispari di volte in $2.n$, $2(n-1)$, $2(n-2), \ldots\ldots 2[n-(n-1)]$, applicando la (1), si ha:

$$\begin{aligned}
\Sigma\varphi(x) &= \Sigma\varphi(y) + 2n - 1\\
\Sigma\varphi(y) &= \Sigma\varphi(z) + 2n - 3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Sigma\varphi(v) &= \Sigma\varphi(w) + 3\\
\Sigma\varphi(w) &= 1
\end{aligned}$$

e sommando membro a membro e riducendo:

$$\Sigma\varphi(x) = 1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2n-1) = n^2.$$

119. *In un cerchio* O *siano* OA, OB *due raggi perpendicolari l'uno all'altro. Immaginando diviso il raggio* AO *in* n *parti uguali nei punti* A_1, $A_2, \ldots A_{n-1}$, *poi condotte le corde* BA, BA_1B_1, $BA_2B_2, \ldots BA_{n-1}B_{n-1}$, *dimostrare che la somma dei triangoli* BAA_1, BB_1A_2, BB_2A_3, ... $BB_{n-1}O$, *quando* n *tende all'infinito, ha per limite il quadrante* BOA.

(A. Lugli).

Dimostrazione del Sig. Prof. *S. Catania.*

Suppongo che i punti A_1, A_2, ... A_{n-1} siano segnati a partire da O andando verso A, e indico con A_0 il punto O, con A_n il punto A, e suppongo il raggio $OA = 1$. Si ha successivamente:

$$OA_k = k \cdot \frac{1}{n} \quad , \quad \overline{BA}_k^2 = 1^2 + k^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}(n^2 + k^2),$$

$$BA_k \cdot A_k B_k = 1 - \overline{OA}_k^2 = \frac{1}{n^2}(n^2 - k^2) \quad , \quad \overline{A_k B}_k^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n^2 - k^2)^2}{n^2 + k^2}.$$

L'altezza del triangolo $A_{k-1} A_k B_k$, relativa alla base $A_{k-1} A_k$, è

$$A_k B_k \operatorname{sen} B A_k O = \frac{1}{n} \frac{n^2 - k^2}{\sqrt{n^2 + k^2}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n} \sqrt{n^2 + k^2}} = \frac{n^2 - k^2}{n^2 + k^2},$$

onde l'area di tale triangolo sarà espressa da

$$\frac{1}{2n} \cdot \frac{n^2 - k^2}{n^2 + k^2} = \frac{1}{2n}\left(\frac{2n^2}{n^2 + k^2} - 1\right) = \frac{n}{n^2 + k^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}.$$

La somma dei triangoli $A_0 A_1 B_1$, $A_1 A_2 B_2$, ... $A_{n-2} A_{n-1} B_{n-1}$, risulterà così uguale a

$$\left\{ \frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2 + (n-1)^2} \right\} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{2}.$$

Il limite per n tendente all'infinito di $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, resta quindi a cercare il limite per $n = \infty$ della somma entro le grappe.

Dalla trigonometria si ha:

$$\frac{\operatorname{arc\,tan}(x + \Delta x) - \operatorname{arc\,tan} x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \operatorname{arc\,tan} \frac{\Delta x}{1 + (x + \Delta x) x},$$

onde il limite per $\Delta x = 0$ del 1° membro sarà uguale a

$$\lim_{\Delta x} \left(\frac{\operatorname{arc\,tan} \dfrac{\Delta x}{1 + (x + \Delta x) x}}{\dfrac{\Delta x}{1 + (x + \Delta x) x}} \cdot \frac{\dfrac{\Delta x}{1 + (x + \Delta x) x}}{\Delta x} \right)$$

e poichè, com'è noto, $\lim\limits_{\alpha = 0} \frac{\operatorname{arc\,tan} \alpha}{\alpha} = 1$, il limite del primo fattore è l'unità, e il limite del prodotto è uguale ad $\frac{1}{1 + x^2}$.

Potremo dunque porre, quando Δx sia una quantità infinitesima:

$$\operatorname{arc\,tan}(x + \Delta x) - \operatorname{arc\,tan} x = \frac{\Delta x}{1 + x^2} + \varepsilon(\Delta x).$$

dove ε è una quantità che va a zero con Δx.

In questa formula, facciasi ora $\Delta x = \frac{1}{n}$, supponendo n grandissimo, ed $x = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \frac{n-1}{n}$. Riducendo convenientemente il 2° membro, si avrà:

$$\text{arc tan}\frac{2}{n} - \text{arc tan}\frac{1}{n} = \frac{n}{n^2+1^2} + \varepsilon_1 \cdot \frac{1}{n}$$

$$\text{arc tan}\frac{3}{n} - \text{arc tan}\frac{2}{n} = \frac{n}{n^2+2^2} + \varepsilon_2 \cdot \frac{1}{n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{arc tan}\frac{n}{n} - \text{arc tan}\frac{n-1}{n} = \frac{n}{n^2+(n-1)^2} + \varepsilon_{n-1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Sommando, coll'osservare che $\text{arc tan } 1 = \frac{\pi}{4}$, risulta:

$$\frac{\pi}{4} - \text{arc tan}\frac{1}{n} = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+(n-1)^2} + \sum_{k=1}^{k=n-1} \varepsilon_k \cdot \frac{1}{n}.$$

Se ε_i rappresenta il più gran valore di ε, sarà $\sum \varepsilon_k \cdot \frac{1}{n} < n \cdot \varepsilon_i \cdot \frac{1}{n} = \varepsilon_i$, ed allora, passando nell'eguaglianza precedente al limite per $n = \infty$, avendosi $\lim\limits_{n=\infty} \text{arc tan}\frac{1}{n} = 0$ e $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_i = 0$, si ottiene infine

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+(n-1)^2} \right\} = \frac{\pi}{4},$$

e quindi

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{k=n} A_{k-1} A_k B_k = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Se a questa somma si aggiunge il triangolo $OAB = \frac{1}{2}$, si ha, come volevasi dimostrare, $\frac{\pi}{4}$ = quadrante OAB per limite della somma dei triangoli indicati nella quistione.

Dimostrazione del Sig. Prof. *G. Santacroce*.

Sia A_r uno dei punti di divisione del raggio OA, che poniamo, per semplicità, uguale ad 1, ed indichiamo con x il segmento OA_r e con dx una dell'ennesime parti del raggio, p. es. $A_r A_{r+1}$ (essendo n estremamente grande).

Il $\Delta\, B B_r A_{r+1}$ essendo uguale alla somma dei triangoli aventi per base il segmento $A_r A_{r+1}$ e per vertici B e B_r, la sua area elementare sarà espressa da

$$\frac{dx}{2}(OB + B_r P) = \frac{dx}{2}(1 + \text{sen } B_r O A)$$

dove $B_r P$ rappresenta la perpendicolare condotta da B_r al raggio OA.

Si ha dalla trigonometria che $\text{sen } 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$. D'altra parte l'angolo $A O B_r$ è doppio dell'angolo $A B B_r$, (differenza fra gli angoli $ABO = 45^0$

e $B_r B O$): la sua tangente trigonometrica è data per conseguenza da: $\dfrac{\tan ABO - \tan A_r B O}{1 + \tan ABO \,.\, \tan A_r B O} = \dfrac{1-x}{1+x}$, onde per la relazione precedente:

$$\operatorname{sen} A O B_r = 2 \frac{\dfrac{1-x}{1+x}}{1+\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

L'area del $\Delta\, B_r A_{r+1} B$ è quindi uguale a

$$\frac{dx}{2}\left(1+\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Non rimane ora che integrare l'espressione $\dfrac{dx}{1+x^2}$ fra i limiti 0 e 1. Ma è noto dal calcolo integrale che: $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x$, e fra i limiti 0 e 1 lo stesso integrale è uguale a $\dfrac{\pi}{4}$, che esprime appunto l'area del quadrante nel cerchio di raggio 1, c. d. d. (*).

134*. *Eliminare* u *e* v *dalle tre equazioni*

$$\frac{z\sqrt{2}}{1-z^4} = \frac{1}{u}\sqrt{1-\sqrt{1-u^4}}$$

$$\frac{u\sqrt{2}}{1-u^4} = \frac{1}{v}\sqrt{1-\sqrt{1-v^4}}$$

$$v^2 + z^2 + v^2 z^2 = 1.$$

(D. Besso).

Soluzione dei Sigg. *G. Trapani*, macchinista in primo ed *E. de Vito*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Roma.

Sostituendo nella seconda equazione il valore di v, ricavato dalla terza, dopo facili riduzioni si ha:

$$\frac{u^2}{(1-u^4)^2} = \frac{1-z}{2(1+z)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

La prima equazione liberata dai radicali diviene

$$u^2 = \frac{4z^2(1-z^4)^2}{4z^4+(1-z^4)^4}.$$

Sostituendo nella (1), fatta ogni riduzione, si ha:

$$8z^2(1-z^4)(1+z^2)(1+z)^2[(1-z^4)+4z^4]^3 = [(1-z^4)^4 - 4z^4]^4$$

che è la relazione domandata (**).

(*) Due dimostrazioni, analoghe nella sostanza alle precedenti, vennero inviate dal Sig. *F. Mariantoni*, studente nella R. Università di Roma.

(**) Soluzioni sostanzialmente analoghe vennero inviate dai Sigg. *D. de Blasi* alunno R. Liceo Lecce) e *D. Pacillo* (R. Ist. tec. Foggia).

135*. *Se in un triangolo rettangolo si descrive un cerchio che sia tangente all'ipotenusa e sottenda un cateto, il triangolo che ha per vertice un punto qualunque del cerchio e per base il cateto sotteso, è equivalente al triangolo che ha per vertici le proiezioni del medesimo punto sui tre lati del triangolo rettangolo.* (P. MORINO).

Dimostrazione del Sig. *G. Trapani*, macchinista in primo.

Si abbia il triangolo ABC rettangolo in C; si descriva una circonferenza avente per corda il cateto BC e che sia tangente all'ipotenusa AB; si unisca un punto P di questa circonferenza con B e con C; siano D, E, F rispettivamente le proiezioni del punto P su AB, AC e BC: dico che i due triangoli PBC, DEF sono equivalenti.

Sia G la proiezione del vertice B su CP, e si unisca F con G. In virtù delle ipotesi fatte gli angoli DBP, FCG sono uguali. Inoltre dall'essere FG antiparallela a BP, si ha pure che l'angolo $CGF = CBP$. Di qui segue ang. $DBF = DBP + CBP = FCG + CGF$; ma ang. $BFG = FCG + CGF$, quindi ang. $DBF = BFG$.

Le due coppie di triangoli simili CFG, CPB; BCG, PBD dànno: $CG : BC = FG : BP$, $CG : BC = BD : BP$, da cui $GF = BD$, onde i due triangoli DBF, GBF sono uguali per avere l'ang. $DBF = BFG$, il lato $BD = FG$ e il lato BF di comune; quindi anche ang. $BFD = FBG$ e lato $BG = FD$.

Inoltre abbiamo $CP = FE$, perchè diagonali del rettangolo $CFPE$ ed ang. $DFE = BFP - BFD + PFE =$ ang. retto $- FBG + PFE =$ ang. retto $- PCE + PFE =$ ang. retto $- PFE + PFE =$ ang. retto.

Adunque i due triangoli PBC, DEF avendo basi CP ed FE, e altezze BC e DF, uguali, sono equivalenti, c. d. d..

137*. *Risolvere un triangolo dati un angolo* A, *la bisettrice interna* α *e l'inclinazione* i *di questa sul lato* a. *Qual dev'essere il valore di* i *affinchè il triangolo abbia la ragione* m *col quadrato di* α? (G. BELLACCHI).

Soluzione del Sig. *E. Ghisi*, studente a Catania e del Sig. *V. Columbo*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Bari (*).

Si ha subito:

$$B = 180^0 - \left(i + \frac{A}{2}\right), \qquad C = i - \frac{A}{2};$$

$$b = \frac{\alpha \operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} C} = \frac{\alpha \operatorname{sen} i}{\operatorname{sen}\left(i - \frac{A}{2}\right)}, \qquad c = \frac{\alpha \operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} B} = \frac{\alpha \operatorname{sen} i}{\operatorname{sen}\left(i + \frac{A}{2}\right)},$$

$$a = \frac{b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \frac{\alpha \operatorname{sen} i \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen}\left(i + \frac{A}{2}\right) \operatorname{sen}\left(i - \frac{A}{2}\right)}.$$

(*) Altre soluzioni vennero inviate dai Sigg. *A. Parsi* (studente a Genova), *D. Pasillo* e *G. Russi Ruggi* (R. Ist. tec. Foggia), *E. G. Ricci* (R. Liceo Bari).

Per la seconda parte si ha:

$$\frac{\frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A}{\alpha^2} = m .$$

Sostituendovi i valori di b e c trovati, si ottiene:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 i \, . \operatorname{sen} A}{2 \operatorname{sen}\left(i - \frac{A}{2}\right) \operatorname{sen}\left(i + \frac{A}{2}\right)} = m ,$$

da cui:

$$\operatorname{sen} i = \sqrt{\frac{m(1 - \cos A)}{2m - \operatorname{sen} A}} = \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \sqrt{\frac{2m}{2m - \operatorname{sen} A}} .$$

Intanto dev'essere $i > \frac{A}{2}$. Perchè poi i sia reale, si richiede che si abbia $2m > \operatorname{sen} A$ ed inoltre:

$$m - m \cos A \leq 2m - \operatorname{sen} A \quad \text{da cui} \quad \operatorname{sen} A \leq m + m \cos A .$$

Questa seconda condizione include la prima, perciò come unica condizione di possibilità, oltre ad $i > \frac{A}{2}$, si ha:

$$m \geq \frac{\operatorname{sen} A}{1 + \cos A} \quad \text{cioè} \quad m \geq \operatorname{tg} \frac{1}{2} A .$$

Quando $m = \tan \frac{A}{2}$, risulta $\operatorname{sen} i = 1$, cioè $i = 90^0$ ed il triangolo è isoscele.

138*. *Per quali valori razionali di* n *l'espressione*

$$\frac{(n + 5)\,(n + 6)}{6n}$$

si riduce a un intero positivo? (S. Catania).

Risposta del Sig. *G. Russi Ruggi*, alunno del R. Istituto tecnico di Foggia.

L'espressione data può mettersi sotto la forma $\left(n + 11 + \frac{30}{n}\right) : 6$ donde si vede che n deve essere un fattore di 30. I fattori di 30 essendo 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, il valore di $n + \frac{30}{n}$, che si indicherà con k, dovrà essere uno dei seguenti:

$$1 + 30 = 31 , \quad 2 + 15 = 17 , \quad 3 + 10 = 13 , \quad 5 + 6 = 11 .$$

Ora il minimo valore di k che rende $\frac{11 + k}{6}$ numero intero è 1. Gli altri valori saranno, come è noto, i termini della progressione aritmetica 1, 7, 13, 19, 25, 31, ...

I valori che coincidono con quelli di k sono 13 e 31 che corrispondono ai valori

1, 30, 3, 10

di n.

140*. *Essendo* $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ *numeri interi dati, indichino* $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ *rispettivamente i minimi multipli comuni alle coppie* (a_1, a_2), (m_1, a_3), $(m_2, a_4), \ldots (m_{n-2}, a_n)$, *e* $d_1, d_2, d_3, \ldots d_{n-1}$ *i massimi comuni divisori di queste coppie. Dimostrare che il prodotto* $d_1 d_2 \ldots d_{n-1}$ *si mantiene costante variando l'ordine dei numeri dati.* (A. TAGIURI).

Dimostrazione dei Sigg. *C. Aiello*, studente a Napoli, *V. Columbo* del R. Istituto tecnico di Bari, *E. de Vito* a Roma, *E. Ghisi* a Catania, *A. Parsi* a Genova, *L. Perrotti* del R. Istituto tecnico di Aquila, *G. Russi Ruggi* del R. Istituto tecnico di Foggia.

Se d è il massimo comun divisore ed m il minimo comune multiplo dei numeri a e b, è noto che $d = (ab) : m$. Si avrà dunque nel caso presente

$$d_1 = \frac{a_1 a_2}{m_1}, \quad d_2 = \frac{m_1 a_3}{m_2}, \quad d_3 = \frac{m_2 a_4}{m_3}, \ldots \; d_{n-1} = \frac{m_{n-2} a_n}{m_{n-1}}.$$

Moltiplicando queste uguaglianze membro a membro, poi riducendo, risulta

$$d_1 d_2 d_3 \ldots d_{n-1} = \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_n}{m_{n-1}}.$$

Ora nel secondo membro il numeratore è indipendente dall'ordine dei fattori e il denominatore è il m. c. m. dei numeri dati pure indipendente dall'ordine nel quale essi sono presi. Segue adunque che il prodotto $d_1 d_2 d_3 \ldots d_{n-1}$ rimane costante variando comunque l'ordine dei numeri dati.

Il Sig. *E. Ghisi* osserva poi che il teorema proposto seguita a sussistere scambiando le d con le m e viceversa.

141*. *Se* p *è un numero primo maggiore di* 3 *ed* a *un numero intero qualunque, dimostrare che la differenza* $a^p - a$, *è sempre divisibile per* $6p$.
(F. GIUDICE).

Dimostrazioni sostanzialmente analoghe dei Sigg. *G. Candido* studente a Pisa, *U. Gerra* e *G. Mazza* del R. Istituto tecnico di Piacenza, *M. Piattelli* del R. Liceo di Bari.

Deriva dall'ipotesi che p è dispari, quindi $(p-1):2$ numero intero. Si ha così

$$a^p - a = a(a^{p-1} - 1) = a\left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right).$$

Ora se $(p-1):2$ è pari, nell'ultimo prodotto il terzo fattore è divisibile per $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$, se $(p-1):2$ è dispari il secondo fattore è divisibile per $a+1$ e l'ultimo per $a-1$. In ogni caso adunque la differenza $a^p - a$ è divisibile per $(a-1)a(a+1)$, che è il prodotto di tre numeri consecutivi, quindi, per un teorema elementare, divisibile per 6.

In secondo luogo se p è un numero primo maggiore di 3, pel teorema di Fermat, $a^{p-1} - 1$ è divisibile per p. La differenza $a^p - a$ è dunque divisibile per 6 e per p, che sono numeri primi fra loro, quindi anche pel loro prodotto $6p$.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

143. Dimostrare il seguente teorema di Giamblico (IV Sec. dell'E. v.) « Dati tre numeri consecutivi della serie dei numeri naturali, il massimo dei quali sia divisibile per tre, se ne faccia la somma: si addizionino poi le cifre del numero così ottenuto, altrettanto facciasi per questo nuovo numero, e così via. Si arriverà così finalmente al numero 6 ». E cercare se in sistemi di numerazione a base diversa da 10 esista un'analoga proposizione.

G. Loria.

144. Eliminare x, y, z dalle quattro equazioni

$$y z (1 - 2 x) = \alpha^2 (1 - x)^2$$
$$z x (1 - 2 y) = \beta^2 (1 - y)^2$$
$$x y (1 - 2 z)^2 = \gamma^2 (1 - z)^2$$
$$x + y + z = 1.$$

D. Besso.

145**. Posto

$$a_1 = \frac{a + b}{2}, \; a_2 = \frac{b + a_1}{2}, \; a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2}, \ldots . \; a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2},$$

esprimere a_n in funzione di a, b, n, e trovare il limite a cui tende a_n quando n tende all' infinito.

D. Besso.

146*. In un dato triangolo isoscele costruire tre circoli fra loro eguali, ciascuno dei quali sia tangente a due lati del triangolo, e in modo che quello tangente ai due lati eguali tocchi ciascuno degli altri due.

147*. Sia $A B C D$ un rettangolo e sia, sul prolungamento del lato $A B$, il punto P così situato che il rapporto $\frac{A B}{A D}$ sia il cubo del rapporto $\frac{B P}{A D}$: se la $P C$ incontra in R il prolungamento della $A D$, i punti R e P saranno equidistanti dal punto d' incontro delle diagonali del rettangolo.

148*. Dati i raggi delle basi di due coni retti di egual volume e di eguale superficie totale, calcolare le loro altezze (**).

(*) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

(**) Delle quistioni 146*, 147* e 148* la prima è stata risoluta da L. Paciolo, la seconda è riportata dal Tartaglia nel suo *General Trattato di numeri et misure*, la terza si trova in una lettera di Roberval diretta a Fermat.

149*. Per un punto P distante del segmento a dal centro O di un cerchio descritto col raggio r, condurre una trasversale PMM', in modo che le tangenti MT, TM' agli estremi della corda intercetta formino un dato angolo θ; esprimere la distanza PT, il perimetro del triangolo MTM' in funzione della a, r, θ e dare il valore di θ nel caso di angolo $OPM = MTM'$.

G. BELLACCHI.

150**. Determinare un triangolo sferico equilatero, la cui superficie sia il complemento del suo perimetro.

G. BELLACCHI.

151**. Risolvere un triangolo sferico rettangolo, il cui perimetro è un quadrante, ed è pur dato un angolo obliquo.

G. BELLACCHI.

152**. Dati gli angoli di un triangolo sferico ABC, determinare l'arco AD verificante la relazione $\text{sen}^2 AD = \text{sen}\, BD \,.\, \text{sen}\, DC$, cercando in quali casi è possibile.

G. BELLACCHI.

153*. Se convertendo la frazione $\dfrac{1}{p}$, con p numero primo, in decimali, risulta un numero periodico il cui periodo ha un numero dispari di cifre, i resti della divisione $1 : p$ corrispondenti alle singole cifre del periodo, due a due, non sono mai complementari cioè tali che la loro somma sia uguale a p.

A. LUGLI.

154*. Dato l'angolo $BOA = 2\alpha$, si descriva con centro O e raggio arbitrario un cerchio a tagliare i lati dell'angolo in A e B, poi con diametri AB, OB due semicerchi, il secondo dei quali passa pel punto medio H di AB e il primo taglia OH, dalla parte del vertice O dell'angolo, in C. Condotta CB poi tracciato il cerchio di centro B e raggio uguale alla metà di BC fino a tagliare l'arco BH in P, dimostrare che prendendo l'angolo BOP uguale alla terza parte dell'angolo dato, si commette un errore che è espresso da

$$\frac{2\alpha}{3} - \text{ang}\left(\text{sen} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\sqrt{2}}\right) \ (*).$$

(*) La costruzione precedente è ricavata dal Redattore, con qualche fatica, da un opuscolo che porta la data del 1892 ed il titolo: *Sulla elementare trisezione in parti eguali dell'angolo rettilineo.* L'A., che ha voluto ornare l'opuscolo della sua fotografia, crede colla costruzione riportata d'aver dato la soluzione completa, col mezzo della retta e del cerchio, del problema propostosi e ne dà una dimostrazione a modo suo il cui disordine è degno di nota, promettendo per l'avvenire altre scoperte (!) di vantaggio alle arti ed alle scienze.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

FRANCESCO GRASSI. – *Trattato di trigonometria piana e sferica* di G. A. SERRET, tradotto in italiano sulla settima edizione francese. — Seconda edizione con note ed aggiunte del traduttore e 900 esercizi colle risposte. — Torino, Fratelli Bocca editori, 1893. — Prezzo L. 3, 50.

Lodevolissima è la raccolta degli esercizi contenuti in questo libro. Di esercizi, che sono parte tanto vitale nell'insegnamento, è difetto, bisogna riconoscerlo, nella trigonometria del Serret; ma ben può dirsi che il Grassi ha colmato questo difetto, e di buona misura. È vero che nel libro del Grassi esercizi e risposte domandano qua e là qualche rammenda: (*) ma è altresì certo che un maestro avveduto può trarre gran profitto dal materiale che esso Grassi, con lungo studio e grande amore, ha raccolto e ordinato.

Non direi altrettanto delle aggiunte che egli ha creduto doversi fare all'opera del Serret. È mia opinione che, ormai, i libri per le scuole, piuttosto che *aggiungendo*, si dovrebbero migliorare *togliendo*: (**) ma a tacer di ciò, non credo che tutte le aggiunte del Grassi siano di tale importanza da giustificare la cresciuta mole dell'antico Serret. Alcune avrebbero potuto far corpo con gli esercizi, perchè non sono altro che esercizi (v. p. es. i § 58-*bis* e 96-*bis*). – L'aggiunta relativa al seno e al coseno di una somma di archi, mi è sembrata troppo difficile, mentre, se ben si osserva, la verità contenuta in essa è un'ovvia conseguenza del teorema di moltiplicazione dei numeri complessi, combinato con la legge di formazione del prodotto di n binomi, tutte cose che gli studiosi di matematica prima o poi dovranno imparare. – Nell'aggiunta a pag. 128 si legge: « Una delle più importanti applicazioni del calcolo dei logaritmi è la risoluzione delle equazioni trigonometriche. Il metodo più generale consiste nell'esprimere le linee trigonometriche in funzione di una sola; prendendo questa linea come incognita ausiliaria, si è ridotti alla risoluzione di una equazione algebrica ». Ora è ovvio, e lo dimostrano gli stessi esempi trattati dall'autore, che ad esprimere tutte le linee trigonometriche in funzione di una sola e a risolvere l'equazione risultante, i logaritmi non possono giovare. Mi sembra poi che le parole dell'autore abbiano a ribadire il pregiudizio di chi credesse le tavole dei logaritmi strumento per la risoluzione dei problemi trigonometrici, solo ed in quanto esse sono tavole di *logaritmi*, quasichè una tavola di seni e coseni naturali non potesse prestare eguali servigi. — Della noterella a pag. 114, quantunque dettata da ottimo intendimento, perchè relativa alla misura dell'errore nel consueto calcolo del logaritmo di un seno, non può farsi

(*) Così, nella maggior parte delle risposte relative alla risoluzione di equazioni trigonometriche, si indica soltanto qualche soluzione particolare e si rimette allo studioso la ricerca della soluzione generale, conforme l'autore ne avvisa a pag. 37, lasciando adito al dubbio che, in fatto di risoluzione di equazioni, la ricerca della soluzione generale sia quasi un di più, da affidarsi al buon volere degli scolari.

(**) Naturalmente io considero quello del Grassi come libro per le scuole medie, quale apparisce dalla natura e dal lavorio degli esercizi. Come tale, anche il Serret contiene alcune cose di troppo: per citarne una, la risoluzione trigonometrica delle equazioni del 2° e 3° grado. - Perchè rincarare la dose?

gran caso. Oltrechè troppo laconica, e perciò oscura, essa non mi pare utile, didatticamente parlando, perchè suppone la conoscenza della serie di Taylor per lo sviluppo di log. sen $(x+h)$ — log. sen x. Ma è certo che, ripubblicata sotto veste elementare in una ristampa del libro, che auguro prossima, sarebbe un complemento desiderato, forse l'unico veramente desiderato, dell'opera magistrale di A. Serret.

Le precedenti osservazioni, se giuste, non toccano tuttavia che le aggiunte: quanto al libro, tra per l'eccellenza del testo, tra per la bontà e la copia degli esercizi, io lo reputo utilissimo all'insegnamento (*).

G. FRATTINI.

ING. ALESSANDRO PEPOLI. – *Elementi di aritmetica.* – Palermo, tipografia del *Giornale di Sicilia*, 1891. — Prezzo L. 3,50.

È questo un trattato di aritmetica teorica o pratica? Esaminando le dimostrazioni dei teoremi più importanti, le quali, benchè non di rado chiare e piane, non sono scientificamente rigorose, nè sempre sono logicamente dedotte da principi prestabiliti, si viene facilmente alla conclusione che il voluminoso libro del Pepoli non merita il nome di aritmetica razionale; osservando poi la soverchia estensione data ad alcune teoriche, si può concludere che non è una aritmetica pratica. Si può dire quindi che è una aritmetica ibrida, di quelle così dette teorico-pratiche (che viceversa poi non sono nè l'una nè l'altra cosa), della quale veramente non si sentiva il bisogno e che non ha nessuna ragione di essere, perchè è una edizione poco riveduta e molto scorretta delle vecchie aritmetiche del Luvini, del Pagnini, dell'A. e C., ecc..

Ma, affinchè le mie osservazioni non sembrino censure gratuite, offrirò al lettore qualche saggio del libro, incominciando da alcune definizioni.

« PIU' cose che si contano si esprimono colle parole due, tre, quattro, ecc. », e più innanzi: « diremo parti aliquote dell'unità i simboli $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ecc. » senza che l'A. dica che cosa rappresentino questi simboli, ed anche: « Dicesi problema una questione in cui, essendo conosciuti alcuni numeri, se ne cercano altri ».

Nè più rigorosi ed esatti sono gli enunciati delle regole. Per rappresentare i numeri l'A. dice che bisogna avvertire che « ogni classe deve avere tre cifre e quindi di scrivere *degli* (quanti?) zeri alla sinistra delle classi che hanno una o due cifre .... ». Osserva che nel fare l'addizione conviene non pronunciare i *numeri* (!) pensati.

Curiosa è la dimostrazione del teorema: « moltiplicando per uno stesso numero tanto il dividendo quanto il divisore ecc. »: « Infatti dalla divisione di 75 per 8 si sa che 75 unità contengono 9 volte al più 8 unità più 3 unità. La parola unità indica una cosa qualunque; di guisa che, sostituendo alla parola

(*) Della stessa Trigonometria del Serret, vogliamo anche segnalare agli studiosi l'apparizione in questi giorni della 2ª ristampa della traduzione italiana dal prof. Fenoglio, e di cui rese conto il prof. Besso nel vol. II, p. 158-159 del *Periodico*.

(*Nota della Red.*).

unità la parola dozzina, si può dire: 75 dozzine contengono 9 volte al più 8 dozzine più 3 dozzine, cioè 12×75 diviso 12×8 dà per quoto 9 e per resto 12×3, c. d. d. ».

Di molti teoremi l'A. non dà la dimostrazione, contentandosi di asserire: « questo teorema non è altro che il precedente *preso in senso inverso* ».

Per finire: « la lunghezza del viaggio è inversamente proporzionale al numero degli uomini dell'equipaggio rimanendo costanti la quantità di viveri che ha la nave e il trattamento giornaliero (*sic*) per ciascun uomo dell'equipaggio » (p. 498).

A. Massa.

G. DE LONGCHAMPS. — *Cours de Mathématiques spéciales.* Supplément comprenant la Trigonométrie et la Mécanique. — Paris, Librairie Ch. Delagrave, 1893. — Prix 7,50 fs.

Del *Corso di matematiche speciali* del valente e fecondo Direttore del *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales*, e della 1ª edizione del *Supplemento* al Corso medesimo demmo altra volta un'analisi in questo giornale (Vol. II, p. 188-90) ed ora è per noi un debito di far noto come l'opera abbia trovato fevorevole accoglimento nel pubblico in modo da rendere necessaria già da tempo una 2ª edizione dell'*Algebra* e adesso una 3ª edizione del Supplemento. Questa ultima racchiude in più della 1ª edizione, una rapida esposizione della Trigonometria piana e sferica, lo sviluppo del programma di Meccanica per l'ammissione alla scuola politecnica di Parigi, programma che può considerarsi quale indice di un trattato di meccanica non superiore, ma neppure affatto elementare in quanto richiede l'uso di alcune proprietà dell'analisi infinitesimale ed abbraccia la cinematica e dinamica del punto e la statica dei solidi liberi ed invariabili, finalmente l'esposizione delle coordinate trilineari, baricentriche e tangenziali con applicazione alle principali proprietà delle coniche, e lo studio dell'intersezione di due quadriche.

I pregi di chiarezza e profondità di vedute, già segnalati nel Corso del signor Prof. de Longchamps, com'era da prevedere, non mancano neppure nelle aggiunte del supplemento, il quale contiene inoltre scelti e numerosi esercizî di cui in generale è presentato un cenno di soluzione.

Chiudono il volume i soggetti d'esame scritto in matematiche dati negli anni 1889-92 nella scuola politecnica, normale e centrale, al concorso generale ed all'Aggregazione.

A. Lugli.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des mathématiques, publié par G. Eneström. Nouvelle série. 6. N. 4. — Stockholm, 1892.

Bulletin scientifique, rédigé par M. E. Lebon. — Septième année. N. 2, 3. Novembre, Décembre. Félix Alcan, éditeur. Paris, 1892.

El Progreso matemático, periódico de matemáticas puras y applicadas. Director D. Zoel G. de Galdeano. Año II. N. 22, 23. Octubre, Noviembre 1892. — Zaragoza.

Giornale di Matematiche ad uso degli Studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Vol. XXX. Settembre e Ottobre 1892. — Napoli, B. Pellerano.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. de Longchamps. 4e Série, XVI année. N. 11, 12 Novembre, Décembre 1892. — Paris, Librairie Ch. Delagrave.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert. 17e année. Nombres 3, 4, 5, 6. — Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles, 1892.

Mathesis, recueil mathématique publié par P. Mansion et J. Neuberg. Deuxième série. Tome II. Novembre, Décembre 1892. — Gand, Ad. Hoste, éditeur.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo VI, Fasc. V. Settembre-Ottobre 1892.

Revue de mathématiques spéciales, rédigée par M. B. Niewenglowski. 3e année. N. 2, 3 Novembre, Décembre 1892 — Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles.

Rivista di matematica, diretta dal Prof. G. Peano. Fasc. 10°-11°. Ottobre, Novembre 1892. — Torino, Fratelli Bocca.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. XXIII Jahrgang: 7, 8 Heft, 1892. — Leipzig, G. B. Teubner.

Bustelli (A. M.) — L'insegnamento nel Ginnasio pareggiato e nel R. Liceo di Ferrara per l'anno scolastico 1892-93. — Ferrara, 1892.

Casey (J.) — *A Sequel to the first six Books of the Elements of Euclid*, Containing an Easy Introduction to Modern Geometry, with numerous Exercises. Sixth Edition. — Dublin, Hodges, Figgis & C., 1892. — Price: 3s. 6d..

De Longchamps (G.) — *Supplément* au Cours de Mathématiques spéciales, comprenant la Trigonométrie et la Mécanique. — Paris, Ch. Delagrave, 1892. — Prix: fr. 7,50.

Gianni (L.) — Sulle equazioni che ammettono coppie di radici reciproche. (Giornale di Matematiche di Battaglini, Vol. XXX, 1892).

Gillet (J.) — Théorie des plans hypercycliques des surfaces du second degré. (*Mathesis*, 1892, 2me série, t. II).

Giudice (F.) — Sulle equazioni algebriche. (Rivista di mat.. Anno II, 1892).

Grilli (R.) — Saggio di un nuovo trattato di Algebra elementare per i Licei. — Correggio, 1889.

— — Esposizione di uno dei principii intorno all'equivalenza di due equazioni e considerazioni relative. — Correggio, 1890.

Humbert (E.) — Traité d'Arithmétique, avec des Compléments et une Préface de J. Tannery. — Paris, Nony et Cie, 1892. — Prix: 5 fr. (*franco*).

Pepoli (A.) — *Elementi d'Aritmetica*. — Palermo, Tip. del *Giornale di Sicilia*, 1892. — Prezzo: L. 3,50.

Sbrana (S.) — Sulla condensazione del vapore acqueo durante l'espansione. (Rivista Scient.-industriale di G. Vimercati. Firenze, 1892).

Serret (J. A.) — *Trattato di Trigonometria*. Versione autorizzata dall'autore con aggiunte di L. Fenoglio. Seconda edizione. — Ditta G. B. Paravia e Comp., 1893. — Prezzo: L. 3.

— — *Trattato di Trigonometria piana e sferica*, tradotto in italiano sulla 7a edizione francese col consenso dell'autore da F. Grassi. 2a edizione, con note ed aggiunte del traduttore e 900 Esercizi colle risposte. — Torino, Fratelli Bocca, 1893. — Prezzo: L. 3,50.

Vivanti (G.) — L'infinito nella natura e nella scienza. Discorso letto nella R. Accademia Virgiliana di Mantova il giorno 12 giugno 1892. — Milano, Tipo-litografia Ingegneri, 1892.

Chiusura della redazione il dì 31 dicembre 1892.

SULLA DEFINIZIONE DELLA LINEA RETTA

(*Continuazione e fine*, V. *pag. 16*).

10. Un' altra definizione che si trova assai diffusa è quella per cui la retta è « una linea di direzione costante ». Tralascio di occuparmi di chi, senz'altro, dice essere la retta « il cammino fatto da « un punto che si muova sempre nella stessa direzione », poichè qui si ricorre al concetto di moto continuo di cui non è il caso di parlare sul principio della geometria puramente teorica, prima di tutto perchè richiede, per essere compreso e ben chiarito, delicate nozioni sulla costituzione dello spazio e delle linee, non solite a darsi in principio, e forse malagevoli a svolgersi senza aver già il concetto di retta; e poi perchè contiene, sebbene poco avvertibile, il concetto di tempi successivi, estraneo troppo alla geometria. Tale definizione, insieme all'altra simile che « la linea retta è quella che « ha la stessa direzione in tutti i suoi punti » non hanno valore teorico, oltrechè per le ragioni precedenti, anche per l'uso della parola « direzione » non definita; tanto più che il concetto di direzione guida, se altro non si aggiunge, piuttosto all'idea di raggio (semiretta) che a quello di retta.

Chi, pure accogliendo il concetto che informa le definizioni accennate, ha voluto rendere queste più rigorose, si è trovato di fronte l'idea di direzione, che occorreva chiarire prima di farla servire ad introdurre una linea. P. es. lo Schlegel (*) con concetti attinti all' « Ausdehnungslehre » del Grassmann, ragiona così « Vi è una « infinità di movimenti fra i quali un punto può scegliere in principio « della sua variazione. Il segno distintivo per un tal moto iniziale si « dice *direzione*. Se il punto prosegue nello stesso moto iniziale scelto « una volta, il suo moto si dirà semplice. Il segno di un moto semplice « è dunque la direzione... Quando un punto varia la sua posizione con « un moto semplice, la figura che genera si dice retta ». — Non

(*) SCHLEGEL. — *System der Raumlehre I.* — Leipzig, 1872. Einleitung — e 2te Ab: —

si può negare che l'artifizio sia sottile; ma esso consiste unicamente nel sostituire alla parola « direzione » la frase « segno distintivo « per il moto iniziale », cioè il concetto di moto iniziale che si compie in infiniti modi diversi, senza che sia detto che cosa vuol dire il compiersi due volte in egual modo, essendo così priva di significato la definizione di moto semplice e quindi di retta. Inoltre si presenta anche qui, quasi senza che ce ne accorgiamo, il moto continuo, e si possono quindi rinnovare le obiezioni già esposte.

Lo Schotten (*) con procedimento migliore, scansa la definizione di direzione; egli dice che un punto insieme ad un altro qualunque individua due concetti, cioè una distanza ed una direzione, e che dato un punto si dice retta l'insieme dei punti che accoppiati con quelli danno la stessa direzione o l'opposta. Egli usa il concetto di direzione senza definirlo, con metodo che oggi giustamente si usa spesso secondo l'esempio di Euclide nel suo 5° libro; ma non pensa a definire che cosa vuol dire direzioni uguali, mentre gli occorre appunto di usare il concetto « di ugual direzione ». Se tale definizione fosse data, il metodo sarebbe corretto, scientifico e di notevole importanza; ma io credo che il concetto di direzione, o almeno quello di direzioni uguali o disuguali, sia molto difficile (almeno per ora) a stabilire senza quello di retta a cui strettamente si collega. Lo stesso Staudt, p. es. non parla di direzione altro che dopo aver parlato della retta.

Questo metodo adunque che saputo bene stabilire avrebbe il pregio di mettere in rilievo una delle qualità più salienti della retta è, almeno nello stato attuale della geometria, non bene sviluppato.

11. Presso alcuni autori (**) si trova data la retta come « quella « linea la quale nella sua totalità non suppone che una dimensione « sola ». — Non mi trattengo su questo modo di introdurre la retta, potendosi ad esso muovere l'obiezione stessa del precedente, quella di usare il concetto di dimensione non definito, forse anche più difficilmente definibile della direzione, e l'altra di essere circondato di eccessiva oscurità.

(*) SCHOTTEN. *Inhalt und Methode des planimetrischen Unterricht.* — Leipzig, 1890. V. Kap..

(**) SCHOTTEN l. c. - SCHMIDT. *Euklids 11 axiom durch eine neue Definition der geraden Linien bewiesen.* — Moskau 1891.

12. Accenno anche appena alla definizione platoniana della retta (*) come la linea « i cui punti intermedi adombrano gli estremi » la quale ricorrendo, come è chiaro, alla intuizione di un raggio luminoso, costringerebbe per renderla esatta a introdurre in geometria qualcosa di corrispondente al concetto di luce e di raggio luminoso, il che non mi pare conveniente. L'utilità di tal definizione potrà manifestarsi al più in un insegnamento primitivo.

13. Per molto tempo ha fatto fortuna la definizione adottata dal Legendre, quella che « la retta (o meglio un segmento sua parte) è « il più corto cammino fra due punti », combinata coll'osservazione che per due punti passa una retta sola. Si volle appoggiare questa definizione al nome augusto di Archimede; ma (v. Höuel l. c.) si è forse presa come definizione quello che Archimede chiedeva di ammettere come proprietà della retta, o meglio come un concetto per avviarsi alla definizione di lunghezza di una curva.

Per quanto si dica, questa proposizione presa come definizione è quella che più facilmente si presta ad una critica severa. Ed infatti, pure prescindendo dalla circostanza che tal definizione non dice nulla sull' aspetto della retta (circostanza di nessun valore da un punto di vista puramente scientifico) interviene in essa il concetto di lunghezza che, generalmente, a quel punto non è ancora stabilito. — Si suole rispondere che il concetto di lunghezza è intuitivo e non può definirsi; ma di ciò ho già detto in generale (§ 3). Si potrebbe rendere più esatta l' idea, introducendo il postulato: « Per ogni linea esiste un concetto (ente) che è la sua lunghezza »: ma, anche in questo modo più corretto, come ci si può servire di quel postulato là dove si parla di *minima* lunghezza, se prima per la lunghezza non si definiscono le parole uguale, maggiore e minore relative a qualunque linea?

V'ha chi a questa obiezione non pensa, e così fanno i più; v'ha invece chi tenta rispondervi, come il Bonnel, il quale, avendo due linee da confrontare in lunghezza, suppone « di attribuire col pen- « siero ad una la rigidità assoluta, all'altra la flessibilità perfetta

(*) Bonnel, l. c.

« coll'inestendibilità necessaria per salvaguardare le sue proprietà di « lunghezza, portandole poi l'una sull'altra per giudicare quale so- « pravanzi », Questo ultimo mezzo, prezioso in pratica per misurare gli oggetti materiali per i quali le parole flessibilità, rigidità, ecc. hanno un significato ben netto, è addirittura assurdo se usato in geometria fin da principio, quale processo indefinibile. Poichè infatti la forma è un attributo delle linee, se ad una linea si toglie la forma sua propria per cambiarla in un' altra, la linea cessa di essere *quella* linea, e quindi i ragionamenti non hanno più significato. Nè si opponga che togliendo la proprietà della forma si lascia alla linea quella della sua lunghezza; questo infatti equivale a dire che la linea nell'aspetto primitivo e nell'aspetto alterato ha la medesima lunghezza e così si viene unicamente a dare una definizione di lunghezze uguali in due linee delle quali la prima è nota e la seconda no, non avendo quello stendimento nessun significato senza il concetto di conservazione di lunghezza che è appunto quello che si deve definire. Questo stendimento delle linee si può considerare soltanto dopochè, in un modo o nell'altro, si sia già stabilito il concetto di lunghezza, potendosi allora dire che si distende o comunque si deforma una linea quando invece di essa se ne consideri un'altra non congruente, ma che abbia ugual lunghezza. Come ben si vede, sono dunque le idee di lunghezze e di lunghezze paragonabili fra loro che servono ad introdurre l'idea di linee flessibili, e non reciprocamente. È perciò chiaro, che, se si vuol fare intervenire la lunghezza nella definizione della retta, devesi prima introdurre quella in modo rigoroso indipendentemente da questa.

Tutto ciò stabilito è ancora da vedersi se il concetto di lunghezza, anche se rigorosamente introdotto, è davvero il più opportuno ad essere assunto per fondarvi la definizione di retta. Si dice che l'idea di lunghezza è inseparabile da quella di linea, e quindi deve ritrovarsi anche nella retta; ma da questo all'affidarle pienamente l'introduzione di tal ente vi è un passo notevole. E, invero, se la lunghezza è l'attributo comune delle linee, è proprio necessario fondare su essa la distinzione di una certa linea da tutte le altre? Ed allora perchè ciò dev'essere della sola retta e non di altre linee, p. es. del circolo? Ma v'ha di più; se si *definisce* la retta come il più breve cammino fra due punti, si presenta la domanda se fra tutte le linee cogli estremi in due punti *esiste* effettivamente una linea di cui la lunghezza sia la minima. È noto che data una classe di oggetti di cui siano conosciute le relazioni di uguale, maggiore e minore non sempre ve ne esiste uno che è il minore: così accade, p. es., nel sistema di tutte le corde di un circolo. Ne viene che l'esistenza, e così dicasi dell'unicità, di una linea di lunghezza minima fra due punti, sono due verità da ammettersi per postulato o da dimostrarsi con teoremi, il che ordinariamente non si fa, aggravando così le inesattezze della definizione. Non così, è vero, si comporta il Bonnel, il quale cerca di dimostrare quelle due proposizioni; ma è forza convenire che i suoi ragionamenti peccano per mancanza di rigore, a ristabilire il quale sarebbero necessari forse tanti postulati da rendere preferibile d'introdurre più semplicemente quello solo che ammette quell'esistenza e quell'unicità.

Concludendo, può dirsi che mentre il fatto che la retta è il più corto cammino fra due punti è una verità che deve appartenere al patrimonio della geometria, non è conveniente dare la definizione per mezzo di essa, tanto più se prima non si definisce in tutto il suo rigore il concetto di lunghezza, e non si ammette o si dimostra esattamente l'esistenza e l'unicità della linea di distanza minima (*).

14. Passo alle definizioni nelle quali la retta è data per mezzo di enti geometrici di ordine superiore ad essa o di proprietà meno salienti di quelle fin qui citate.

Del Leibniz (**) si ha una definizione del piano come « la superficie « che divide lo spazio in due parti simmetriche, » e poi della retta come « la linea del piano che ne divide la superficie in due parti « simmetriche ».

A questa s'uniformano alcuni autori più moderni: così la dà, p. es., il Clifford, (***) se si prescinde dalla forma più materiale, scusabile coll'indole dell'opera (del resto eccellente) in cui è inserita. Tale definizione, la cui esattezza dipende dall'esattezza con cui è

(*) Per lo sviluppo di tale concetto, che è possibile dare prima di quello di retta, vedi la mia Nota citata: *Il concetto di lunghezza e la retta.*

(**) Cfr. BALTZER. *Elementi di matematica*, trad. da L. CREMONA. — Genova, 1878, parte 4ª, § 1.

(***) CLIFFORD. L. c.

definito il piano, ha senza dubbio molti pregi, primo fra gli altri, quello di seguire per definire la retta il processo con cui si introducono comunemente gli enti geometrici, giacchè si sogliono definire prima le superficie poi le linee, e queste per mezzo di superficie di cui esse limitano le parti; ma ha anche il difetto, comune a tutte le definizioni che ancora ho da esporre, di non essere appropriata a dare da sè sola un'idea chiara della retta.

15. Più interessante, poichè legata ad un'epoca memorabile nella storia della geometria, è la definizione del Bolyai e del Lobatschewski, la quale si collega colle ricerche da cui ebbe origine la distinzione della geometria in euclidea e non euclidea. Essa si dà così (*). Definita la coppia di punti come figura invariabile, si genera una sfera col tener fermo un punto di una coppia e dare all'altro tutte le posizioni possibili. Si prendono poi le infinite coppie di sfere aventi centri fissi distinti e raggi variabili, ma eguali in ogni coppia; poi, movendo le figure collo scambiare i centri, si mostra che in tale movimento in ogni linea d'intersezione delle sfere di una coppia stanno fermi due punti. L'insieme di tutti questi punti immobili costituisce una linea tale che se di essa stanno fermi due punti, è immobile tutta. Questa linea e le consimili si dicono *rette*.

Tale definizione è evidentemente rigorosa, quando si abbia cura di supplire con postulati alle osservazioni che vi si riscontrano, fra cui sostanziale è quella che l'insieme dei punti immobili in quello scambio di centri sia una linea e non un altro ente. Essa in conclusione conduce al concetto di retta come linea immobile quando ne sono immobili due punti; ma invece che presentare questo concetto fin da principio con un postulato, lo presenta come teorema dimostrando l'esistenza della retta. Esso richiede certo un numero ristretto di imagini fondamentali, essendo le figure da cui si parte di natura elementare e facilmente definibili. Così pure pensa il Baltzer (**) per il quale « tra i luoghi geometrici non la retta ed il piano, ma la sfera « ed il circolo sono definibili in guisa che la loro possibilità non sia « sottoposta a dubbio alcuno ». Non ostante ciò è certo che nell'inse-

(*) V. p. es. FRISCHAUF. *Absolute Geometrie.* — Leipzig, 1876, *1.* Buch.
(**) BALTZER. L. c., § 1, n. 5.

gnamento è più opportuno cominciare subito collo stabilire la retta, al che non si presta il metodo del Bolyai, il quale per altro, occorre ripeterlo, ha singolare valore scientifico.

16. Il Cassani (*) dà una definizione che s'informa a concetti simili, sebbene sotto aspetto alquanto diverso.

Egli pure parte dal concetto di coppia di punti: poi conclude l'esistenza (A, B, C), di terne regolari, tali cioè che siano uguali le tre coppie formate da $(A B)$, da (B, C), da (A, C), e dice essere una linea il luogo geometrico dei punti M tal che sieno uguali le tre coppie (MA), (MB), (MC): una simile linea non cambia posizione se ne stanno fermi due punti, e si chiama retta. Questa definizione è davvero ingegnosa, per quanto, come la precedente, l'eccessivo artifizio la renda inadattabile all'insegnamento.

Essa del resto sotto forma assai simile fu già proposta dal Fourier (**), il quale, cercando una definizione più appropriata di quella del Legendre, supponeva nello spazio tre punti fissi e prendeva una serie di punti di cui ciascuno distasse ugualmente da quei tre fissi, ottenendo una linea retta: talchè così poteva dirsi essere la retta una serie di punti di cui ciascuno è ugualmente distante da tre punti dati, con analogia con la sfera che è il luogo geometrico dei punti ugualmente distanti da uno dato, e col piano che è il luogo di quelli equidistanti da due punti dati. A tale definizione obiettava il Monge (nella discussione alla seduta dell' Accademia del 14 febbraio 1795) che la definizione è rigorosa, ma più complicata di quello che vuol definire. La proprietà che ha da servire di definizione ad una figura deve essere, è vero, una proprietà comune a tutti i punti della stessa figura; ma dev' essere scelta in modo da riuscire la più semplice, la più atta a far concepire la natura della figura. Così non sarebbe opportuno, p. e., definire il circolo come luogo geometrico dei vertici degli angoli retti i cui lati passano per due punti fissi. Una definizione deve essere tale, sopratutto in geometria, che essa faccia imagine. Tali

(*) CASSANI. *Giornale di Matematiche*, l. c..
(**) V. MATHESIS. V. 9, pag. 189.

le obiezioni di Monge, alle quali altro non credo occorra aggiungere per la critica della definizione di cui ci stiamo occupando.

17. Voglio finalmente fare semplice cenno di alcuni che definiscono certe figure geometriche come limite di certe altre. Oltre esser cosa molto delicata il dare tale definizione colla quale è facile cadere nell'uso di concetti di continuità sempre malagevoli a darsi in principio della geometria, non credo si debba usare tal metodo per le figure fondamentali geometriche, fra cui la retta, delle quali il concetto è bene sia più assoluto che si possa.

18. Da questo esame delle principali definizioni della retta io non mi permetto di trarre nessuna conclusione decisiva nella scelta di una di esse, sapendo come molto possano in questo argomento le vedute personali: solo credo osservare a modo di riassunto come, secondo me, la definizione euclidea, posta in forma chiara e rigorosa, abbia il massimo valore scientifico e molto ne abbia pure quella del Bolyai; ma che per la questione dell' insegnamento sia più utile ricorrere ad una definizione più descrittiva della retta, cioè, per ora, come la meglio stabilita, alla definizione della retta quale luogo geometrico di punti che sono immobili quando ne sono immobili due, o all' altro della linea di direzione costante, quando per altro si sarà pervenuti a stabilire il concetto di direzione senza ricorrere a quello di retta.

Torino, 10 settembre 1892.

RODOLFO BETTAZZI.

UNA FORMULA DI TRASFORMAZIONE
PER *ARC. TG.*

Mediante la nota formula

$$\text{arc tg}\, p + \text{arc tg}\, q = \text{arc tg}\, \frac{p+q}{1-pq}$$

si riconosce essere:

$$2\,.\,\text{arc tg}\, \frac{1}{2a} = \text{arc tg}\, \frac{4a}{4a^2-1} = \text{arc tg}\, \frac{1}{a} + \text{arc tg}\, \frac{1}{a\,.\,(4a^2+3)},$$

ossia:

$$(1) \qquad \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{a} = - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{a(4a^2+3)} + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2a}.$$

Mediante la ripetuta applicazione a sè medesima di questa notevole formula di trasformazione, si ottiene:

$$(2) \quad \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{a} = - \sum_{0\lambda}^{n-1} 2^\lambda . \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2^\lambda . a (2^{2\lambda+2} a^2 + 3)} + 2^n . \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2^n . a}.$$

Facendo crescere n indefinitamente ed osservando essere: $\lim_{n=\infty} 2^n . \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2^n . a} = \frac{1}{a}$, si deduce:

$$(3) \qquad \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{a} = \frac{1}{a} - \sum_{0\lambda}^{\infty} 2^\lambda . \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2^\lambda . a (2^{2\lambda+2} a^2 + 3)}.$$

Questa può anche utilizzarsi per calcolare π in modo semplice ed elementare dopo d'avere osservato che la stessa formula, (3), dà immediatamente:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{a} > \frac{1}{a} - \sum_{0\lambda}^{\infty} 2^\lambda . \frac{1}{2^\lambda a (2^{2\lambda+2} a^2 + 3)} > \frac{1}{a} - \sum_{0\lambda}^{\infty} \frac{1}{2^{2\lambda+2} a^3},$$

ossia:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{a} > \frac{1}{a} - \frac{1}{3a^3}.$$

Voghera, agosto 1892.

F. Giudice.

A PROPOSITO DI UN LAVORO SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE

(Continuazione, V. pag. 25 di questo Vol. e pag. 81, 113, 169 del Vol. VII).

IV.

Nei seguenti esempi si determinano le ragioni dei volumi poliedrici per i teoremi di Eudosso e di Euclide senza ricorrere alle formole stereometriche.

Di un parallelepipedo (Tav. I, fig. 1ª) siano $A, A', B, B', C, C', D, D'$, le coppie dei vertici opposti ed $AB = a$, $AD = b$, $AC' = c$ gli spigoli diversi; dei quali prendansi i segmenti $AP = a_1$, $AQ = b_1$, $AR = c_1$ e con i lati PQ, QR, RP nelle faccie $ABCD$,

$ADB'C'$, $ABD'C'$ s' inscrivano i parallelogrammi PQP_0Q_0, QRQ_1R_1, RPR_0P_1; indi nelle faccie opposte $A'B'C'D'$, $A'D'BC$, $A'B'DC$ con i lati P_1Q_1, R_0Q_0, R_1P_0 s' inscrivano i parallelogrammi $P_1Q_1P_2Q_2$, $R_0Q_0R_2Q_2$, $R_1P_0R_2P_2$. I piani PQR, $P_0Q_0R_2$, $Q_1P_2R_1$, $P_1Q_2R_0$ troncano dagli angoli solidi A, C, B', D', tetraedri equivalenti alla sesta parte del parallelepipedo (a_1, b_1, c_1); onde resta un decaedro con sei faccie esagone e quattro trilatere, il cui volume è la differenza $(a, b, c) - \frac{2}{3}(a_1, b_1, c_1)$. Parimenti segando gli altri angoli solidi B, D, C', A' con i rispettivi piani PR_0Q_0, QP_0R_1, RP_1Q_1, $Q_2P_2R_2$ risulta un secondo decaedro che equivale ad $(a, b, c) - \frac{2}{3}(a - a_1, b - b_1, c - c_1)$. Nel caso di $a_1 : a = b_1 : b = c_1 : c = k$, essi hanno col parallepipedo AA' le ragioni $1 - \frac{2}{3}k^3$, $1 - \frac{2}{3}(1 - k)^3$; il primo decaedro per $k = 1$, ed il secondo per $k = 0$ riducansi ai tetraedri $A'C'BD$, $ACB'D'$ simmetrici rispetto al baricentro comune, ed eguali alla terza parte dell'esaedro AA'.

In un prisma a basi n-latere intersecando le faccie adiacenti due a due con piani paralleli al comune spigolo si ottiene un solido contenuto da $4n + 2$ faccie, delle quali n sono quadrilatere, $3n$ esagone e due n-latere.

Per esempio si consideri un parallelepipedo rettangolo v (fig. 2ª) con le dimensioni $AB = a$, $AD = b$, $AC' = c$; disegnati i quadrilateri $EFGH$, $LMPQ$, $RSTV$ omotetici diretti alle faccie $C'D'A'B'$, $C'D'BA$, $D'A'CB$ secondo la ragione k^2, si avranno $EF = LM = ka$, $FG = RS = kb$, $PM = VR = kc$. I lati FG, PM s' incontrino in Y punto dello spigolo $C'D'$; parimenti LM ed RS in Z su $D'B$ ed EF, VR in X punto di $D'A'$; ne risulteranno $FY = \frac{b}{2}(1 - k)$, $YM = \frac{c}{2}(1 - k)$, $MZ = \frac{a}{2}(1 - k)$. I piani $EFLM$, $FGSR$ si segheranno lungo la retta FZ, ed il mezzo I di FZ giacerà nel piano $MPVR$; le distanze del punto I dalle faccie del parallelepipedo AA' si esprimono con $\frac{a}{4}(1 - k)$, $\frac{b}{4}(1 - k)$, $\frac{c}{4}(1 - k)$; onde i lati convergenti dell' esagono

$EFIMLU$ sono eguali ad $FI = IM = \left(\frac{1-k}{4}\right) . d$; dove d simboleggia la diagonale AA'. Il solido W racchiuso dalle faccie trapezie $C'D'FE$, $C'D'ML$, dall'esagono $EFIMLU$ e dai triangoli $FD'I$, MID', $EC'U$, $C'UL$ è doppio del tronco di prisma avente gli spigoli $C'D' = a$, $EF = ka$, $UI = C'D' - MZ = \frac{a}{2}(1-k)$ e per sezione retta la metà del triangolo FYM, la cui ragione al triangolo $AC'B'$ è $\left(\frac{1-k}{2}\right)^2$; onde $W = \frac{v}{2^4}(1-k)^2(1+k)$ e ripetendo lo stesso ragionamento per tutti gli altri spigoli dell'esaedro AA' troncati con piani ad essi paralleli, il poliedro che ne resta equivale a $v\left[1 - \frac{3}{4}(1-k)^2(1+k)\right]$. Facendo $k = 0$, il solido riducesi ad un dodecaedro romboidale, perchè le faccie divengono rombi con i lati pari ad $\frac{1}{4}d$; e ciascuno ha due vertici nei centri delle faccie contigue del parallelepipedo, e gli altri due nei mezzi delle congiungenti il baricentro di questo ai termini dello spigolo comune alle faccie medesime. E nel caso di $a = b = c$ i rombi sono tutti eguali fra loro e tangenti ad una sfera.

Anche l'*icositetraedro*, solido contenuto da 24 faccie quadrilatere, si può derivare dal parallelepipedo rettangolo. Si chiamino (fig. 3ª) O il centro di questo, ed OA, OB, OC i semiassi o le congiungenti O con i centri delle tre faccie contigue; l'esaedro $v = OBC'A \cdot O'A'CB'$ è l'ottava parte del parallelepipedo. Si disegni il triangolo FDE omotetico ad $A'B'C'$ per la ragione $OF : OA' = OE : OB' = OD : OC' = k$; conducansi i piani CFE, BFD, ADE segantisi due a due lungo le rette EI, FI, DI; i quadrilateri $CFIE$, $BFID$, $AEID$ limitano esternamente un volume nel triedro trirettangolo $OABC$ e sono le basi di piramidi col vertice comune O. I piani CFE, OAB s'intersecano per la retta $E'F'$ parallela ad EF; perchè dai triangoli simili CEB', OEE' oppure CFA', OFF' si deducono $OE' = \frac{k}{1-k}CB'$, $OF' = \frac{k}{1-k}CA'$, $F'E' = \frac{FE}{1-k} = \frac{k}{1-k}AB$; le rette AB, $F'E'$ essendo parallele ne consegue la OC' bisecare $F'E'$ nel punto C_0, cioè $OC_0 = C_0E' = \frac{k}{1-k}\,\frac{AB}{2}$.

I piani CFE, COC' s' incontrano per la retta CIC_0 e dai triangoli simili $CO'I$, OIC_0 determinati dalle parallele CO', OC_0 e dalle traversali OO', CC_0 si conchiude $OI : IO' = OC_0 : CO' = k : 2 - 2k$ o componendo $OI : OO' = k : 2 - k$. I tetraedri $OFBD$, $OFCE$, $OEAD$ sono equivalenti in virtù della proporzione $OFBD : OA'BC' = (OB : OB)(OD : OC')(OF : OA') = k^2$, e siccome $OA'BC' = \frac{1}{6}v$ si ottiene $OFBD = \frac{k^2}{6}v$. Delle surriferite piramidi quadrangole restano da determinarsi i tetraedri $OFDE$, $IFDE$, che hanno per somma la piramide costruita sulla base FDE ed un laterale spigolo equipollente ad OI (cioè della stessa lunghezza e direzione); paragonando questa al tetraedro descritto con la base $A'B'C'$ ed un laterale spigolo equipollente ad OO' si trova $OFDE + FDEI : OA'B'C' + A'B'C'O' = (FDE : A'B'C')(OI : OO') = k^3 : 2 - k$. Ora la retta OO' è divisa dal piano $A'B'C'$ nella ragione $2 : 1$; ne risulta $OA'B'C' = 2A'B'C'O' = \frac{v}{3}$, ovvero $OA'B'C' + A'B'C'O' = \frac{v}{3} + \frac{v}{6} = \frac{v}{2}$ e quindi $OFDE + FDEI = \frac{k^3}{2-k}\,\frac{v}{2}$. La somma delle tre piramidi quadrangole equivale a $3\,OFBD + OFDE + FDEI = \frac{k^2 v}{2-k}$; così l'icositetraedro e il parallelepipedo hanno i loro volumi nella ragione $k^2 : 2 - k$. E se abbiasi $OA = OB = OC = a$, le faccie quadrilatere $CFIE, \ldots.$ si compongono di due triangoli isosceli con i lati $CE = CF$, $IE = IF$ e toccano una sfera avente il centro O ed il raggio pari a $\frac{ka}{\sqrt{3k^2 - 4k + 2}}$.

Le prime proposizioni del XIII libro euclideo si esprimono per l'eguaglianze

$$[1]\ \left(\frac{a}{2} + x\right) = 5\left(\frac{a}{2}\right), \qquad [2]\ (a + x) + (x) = 3\,(a),$$
$$[3]\ (a) + (a - x) = 3\,(x);$$

simboleggiando con x il segmento aureo di a e con la parentesi il quadrato descritto sulla racchiusa lunghezza; si provano mercè l'ipotesi $(a, x) + (x) = (a)$. Succedono le proprietà del pentagono regolare, e fra le quali sono ammirabili: 1° dividersi due diagonali l' in media ed estrema ragione e la parte maggiore l esser il lato del poligono; 2° detti x, a i lati del decagono e dell'esagono regolari iscritti nello stesso cerchio aversi la relazione $(l) = (a) + (x)$. Ora il medesimo ragionamento conduce alla simile $(l') = (a) + (x')$; significando l' ed x' i lati del pentagono e decagono regolari stellati; poichè nel circolo O (fig. 4ª) descritto col raggio a siano $AC = CB = x'$ le corde degli angoli $AOC = COB = \frac{3\pi}{5}$, e quindi $AB = l'$ la corda dell'angolo $BOA = \frac{4\pi}{5}$; tirato il raggio OD normale a BC segante AB in D risulta $AD = DO$, e per i triangoli equiangoli AOD, AOB si trae $(AB,\ AD) = (OA)$, e per i triangoli simili ABC, BDC si ha pure $(AB,\ DB) = (BC)$; onde con l'aggiungere queste due eguaglianze si conchiude $(AB) = (OA) + (BC)$.

Le regole di Euclide per iscrivere nella sfera i poliedri platonici sono le più eleganti che pensare si possono, e mi sembra opportuno il riassumerle. Un diametro $AA' = d$ (fig. 5ª) della sfera sia diviso in tre parti eguali $AI = II' = I'A'$, per il punto I si conduca la sezione normale al diametro, ed in questa s' iscriva il triangolo equilatero BCD; il tetraedro avente i vertici nei punti A', B, C, D è regolare a motivo di $(A'B) = (BC) = 3(BI) = \frac{2}{3}(d)$. Tirando per gli stessi punti A, B della circonferenza massima ABA' i piani perpendicolari alla corda AB e nelle sezioni sferiche iscrivendo i quadrati $ACB'D$, $A'C'BD'$, i loro otto vertici a due a due opposti sono i vertici dell'esaedro regolare e si trova $(AB) = (AC) = \frac{1}{2}(AB') = \frac{1}{3}(d)$. I triangoli equilateri BCD, $B'C'D'$ risultano simmetrici rispetto al centro O e trisecano AA'; in un piano ad essi parallelo le proiezioni ortogonali dei loro vertici cadono in quelli di un esagono regolare; di cui il lato è medio proporzionale fra AI ed IA'.

L'ottaedro regolare si costruisce inscrivendo il quadrato $CBC'B'$ (fig. 6ª) in una circonferenza massima c e menando i piani per ciascun lato ed i centri sferici A, A' di c; si trova $(AC) = (CB') = \frac{1}{2}(d)$. Le faccie sono simmetriche due a due rispetto al centro O della sfera come per esempio ABC, $A'B'C'$ e distano di un segmento pari al lato del quadrato iscritto nel cerchio minore ABC; le loro proiezioni ortogonali sopra un piano ad esse parallelo sono due triangoli equilateri iscritti nella circonferenza ABC e tali che i vertici dell'uno sono i mezzi degli archi sottesi dai lati dell'altro. I due solidi esaedro ed ottaedro regolare sono correlativi; e se ρ indica il raggio del cerchio circoscritto ad una loro faccia, si dimostra i quadrati dei raggi delle sfere iscritta e circoscritta valere $\frac{1}{2}(\rho)$ e $\frac{3}{2}(\rho)$.

(Continua). G. Bellacchi.

TEMI D'ESAMI DI MATEMATICA IN SCUOLE DELLA DANIMARCA

(1888-1891).

(Dall'opuscolo: *Matematiske Eksamenopgaver. Udgifne af P. T. Foldberg. Andet Hefte. Kjobenavn 1892*) (*).

1. Costruire un triangolo eguale ad un triangolo dato per modo che ogni lato del triangolo cercato tocchi un circolo dato. Ogni lato del triangolo cercato deve avere il relativo circolo corrispondente e il vertice ad esso opposto da parti contrarie.

2. Con $a_1\ a_2\ a_3 \ldots . a_{n-1}\ a_n \ldots .$ s'indichi una serie di numeri positivi di cui ciascuno è medio proporzionale fra i due precedenti. Dimostrare le formole

$$a_n \sqrt{a_{n-1}} = a_2 \sqrt{a_1} \qquad a_n = a_2^{\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]} . a_1^{\frac{1}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]}$$

ed esprimere $\sqrt[n]{a_1\ a_2 \ldots . a_n}$ in funzione di $a_1\ a_2$ e n. A qual limite tendono

$$\sqrt[n]{a_1\ a_2 \ldots . a_n} \quad \text{e} \quad a_n$$

quando n cresce indefinitamente?

3. Calcolare il valore di $\cos \operatorname{tg} \log \pi$ e quello di $\operatorname{sen} \sqrt{\cos \sqrt{\log \pi}}$.

4. Mostrare che è $\left(\frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} + \frac{x-y}{z}\right)\left(\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y}\right) = 9$ quando $x + y + z = 0$.

5. Risolvere il sistema

$$zy - y^2 = 5 + 5z - 6y \qquad zy - z^2 = -10 + 3z - 5y.$$

(*) Dobbiamo questi temi tradotti alla cortesia del Sig. Prof. G. Loria. — *N. d. Red.*

6. Nei polinomii

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + y$$
$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x + z$$

attribuire a y e z valori tali che essi abbiano comune un fattore di 2° grado.

7. Due sfere di raggi R e r si segano ortogonalmente. Trovare il volume della parte che esse hanno comune.

8. Dati in un piano tre punti A, B, C e una retta per C; determinare su questa un punto da cui AB e BC siano visti sotto angoli eguali.

9. Due triangoli ABC e $A'B'C'$ e una retta r sono dati in un piano, e AB è parallelo ad $A'B'$. Trovare due punti D e D', di cui D su r, tali che le rette DA, DB, DC risultino parallele rispettivamente a $D'A'$, $D'B'$, $D'C'$.

10. Dati due circoli di raggi a, b, tracciare una parallela alla linea dei centri su cui i dati circoli determinino corde di dato rapporto. Entro quali limiti dev'essere compreso il rapporto delle corde affinchè il problema sia possibile?

11. In un triangolo acutangolo ABC è inscritto un triangolo $A_1 B_1 C_1$ per modo che $A_1 B_1 C_1$ stanno rispettivamente sui lati AB, BC, CA e che i lati A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 sono perpendicolari a AB, BC, CA. Esprimere i lati di $A_1 B_1 C_1$ in funzione dei lati a, b, c di ABC.

12. In un triangolo acutangolo i lati a, b, c sono opposti rispettivamente agli angoli A, B, C. Disegnare un nuovo triangolo avente per lati

$$a \cos A\,, \qquad b \cos B\,, \qquad c \cos C\,.$$

Dimostrare come gli angoli del nuovo triangolo rispettivamente opposti a questi lati si possono esprimere, il primo in funzione del solo A, il secondo del solo B, il terzo del solo C.

13. In un circolo è inscritto un triangolo i cui lati sono il lato del pentagono inscritto, la corda supplementare e un diametro; la figura ruota attorno a quel diametro; trovare il rapporto dei volumi generati dal triangolo e dal segmento ($<$ di un semicerchio) sotteso dal lato del pentagono.

14. Risolvere il sistema

$$x^2 + 3xy = 4a^2 \qquad (\sqrt{y} - \sqrt{x})(2a - x) = 3(x + y)\sqrt{x}\,.$$

15. In un circolo inscrivere un triangolo, conoscendo di un lato lunghezza e direzione e della bisettrice dell'angolo opposto un punto.

16. Dimostrare che in qualunque triangolo

$$\frac{b - 2a\cos C}{a \operatorname{sen} C} + \frac{c - 2b\cos A}{b \operatorname{sen} A} + \frac{a - 2c\cos B}{c \operatorname{sen} B} = 0\,.$$

17. Se p è un numero primo e $0 < n < p$ il m. c. d. di $x^p - 1$ e $x^n - 1$ è $x - 1$; se α è una radice diversa da 1 di $x^p - 1 = 0$, $\alpha\, \alpha^2 \ldots \alpha^p$ saranno tutte radici; trovare la somma delle loro potenze m^{me}.

18. Due cerchi di raggi R e r si tagliano sotto l'angolo v. Trovare il volume compreso entro la superficie generata dalla porzione di tangente comune

ai due cerchi limitata dai punti di contatto quando la figura rota attorno alla retta dei centri.

19. In un triangolo acutangolo un'altezza divide il lato a nei segmenti a_1 e a_2 e l'angolo opposto A nelle parti A_1 e A_2. Costruire il triangolo conoscendo quell'altezza e le differenze $a_1 - a_2$ e $A_1 - A_2$.

20. Costruire un triangolo ABC simile a uno dato per modo che AB e AC tocchino rispettivamente in B e C due dati circoli. Quante soluzioni si ottengono se i dati circoli sono esterni l'uno all'altro?

21. In un circolo di raggio r è inscritto un poligono regolare di $2n$ lati. A, B, C ne sono tre vertici consecutivi. K è il vertice opposto ad A. Per K si conduce una retta che incontri in un punto P la retta AB (non il suo prolungamento). KP divide il poligono in due altri le cui aree stanno fra loro come p a q $(p > q)$. In quale rapporto quella retta divide il perimetro del $2n$ – gono?

Nella figura risultante delle rette KB, KC e dall'arco BC si può inscrivere un cerchio tangente a queste tre linee. Come si può trovare pel raggio di questo cerchio un'espressione comoda pel calcolo con logaritmi? – Quale è il volume generato dalla detta figura KBC quando il circolo rota attorno il diametro AK?

22. Risolvere il sistema

$$x + y + z = 1$$
$$x \operatorname{tg} A + y \operatorname{tg} B + z \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} D$$
$$x \operatorname{tg}^2 A + y \operatorname{tg}^2 B + z \operatorname{tg}^2 C = \operatorname{tg}^2 D.$$

Quindi calcolare i coefficienti dell'equazione cubica avente per radici x^2, y^2, z^2.

23. Trovare i valori reali di x e y soddisfacenti l'equazione

$$y\sqrt{2} - x\sqrt{-3} = \left(\frac{x}{2} + y\sqrt{-b}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

24. Dimostrare per induzione che

$$(1 + 2 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3.$$

25. Se x è intero $x^7 - x$ è divisibile per 42.

26. L'asse di un cono rotondo passa pel centro della sfera ed il suo centro dista da questo centro del diametro. Conoscendo che l'area del pezzo di cono esterno alla sfera è doppia dell'area del pezzo interno, trovare l'angolo al vertice del cono.

27. Descrivere un cerchio di dato raggio che passi per un punto dato e tagli su una retta data un segmento di lunghezza data.

28. Date le equazioni

$$p + q = a\,, \quad px + qy = b\,, \quad px^2 + qy^2 = c\,, \quad px^3 + qy^3 = d$$

trovare un'equazione quadratica avente per radici x, y e i cui coefficienti siano funzioni di p o di q.

29. Dato un triangolo ABC, trovarne un altro $A_1B_1C_1$ equivalente e tale che sia ang. $A_1 =$ ang. A, $A_1B_1 + A_1C_1 =$ retta data.

30. Dati su una retta quattro punti $A\,B\,P\,Q$ trovarne un quinto tale che

$$\frac{A\,X}{B\,X} = \frac{P\,X}{Q\,X}.$$

31. È dato un triangolo $A\,B\,C$ con due punti P e Q posti sul lato $A\,B$. Trovare un altro triangolo $a\,b\,c$ tale che a stia in $B\,C$ e b in CA, che $a\,b$ sia parallelo ad $A\,B$, $b\,c$ passi per P e $a\,c$ per Q, e che finalmente i lati $a\,c$ e $b\,c$ abbiano fra loro un dato rapporto. Come si può risolvere questo problema se, invece di questo rapporto, è dato il rapporto delle mediane relative ai lati $a\,c$ e $b\,c$?

32. Se $\alpha\,\beta\,\gamma$ sono le radici dell'equazione $x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = 0$ ed m è un numero dato, calcolare $(m - \alpha^2)\,(m - \beta^2)\,(m - \gamma^2)$ in funzione di a, b, c.

33. In quanti modi n cose possono distribuirsi in due gruppi?

34. Un tetraedro regolare è inscritto in una sfera di raggio r. Una seconda sfera ha il centro in un vertice del tetraedro e passa per gli altri tre. Trovare l'area ed il volume del solido comune alle due sfere.

35. Costruire un triangolo $A\,B\,C$ di cui sono date l'altezza e la bisettrice uscenti da A nonchè il rapporto in cui quell'altezza divide il lato a.

36. Trovare quale relazione deve passare fra i coefficienti dell'equazione

$$x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

affinchè una radice sia media proporzionale fra le altre due. Supposta soddisfatta, esprimere le radici in funzione di a e c.

37. $\dfrac{y_{n-1}}{z_{n-1}}$ e $\dfrac{y_n}{z_n}$ sono due ridotte consecutive di una frazione continua con i quozienti incompleti $a_0\,a_1\,\ldots\,a_{n-1}\,a_n$. Dimostrare che $\dfrac{y_n}{y_{n-1}}$ e $\dfrac{z_n}{z_{n-1}}$ possono svilupparsi in frazioni continue aventi entrambe per quozienti incompleti $a_n\;a_{n-1}\ldots$ in quest'ordine. Come finiscono nei due casi le due serie di quozienti incompleti?

38. In un cono di rivoluzione avente l'angolo al vertice di 90° sono inscritte, dalla stessa parte del vertice, due sfere fra loro tangenti e di cui la linea dei centri è a. Trovare il volume compreso fra il cono e le due sfere.

39. Sono dati un circolo ed un punto A. Costruire un triangolo $A\,B\,C$ di cui si conosca l'angolo B ed il lato $A\,C$, per modo che $B\,C$ tocchi in B il dato circolo.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

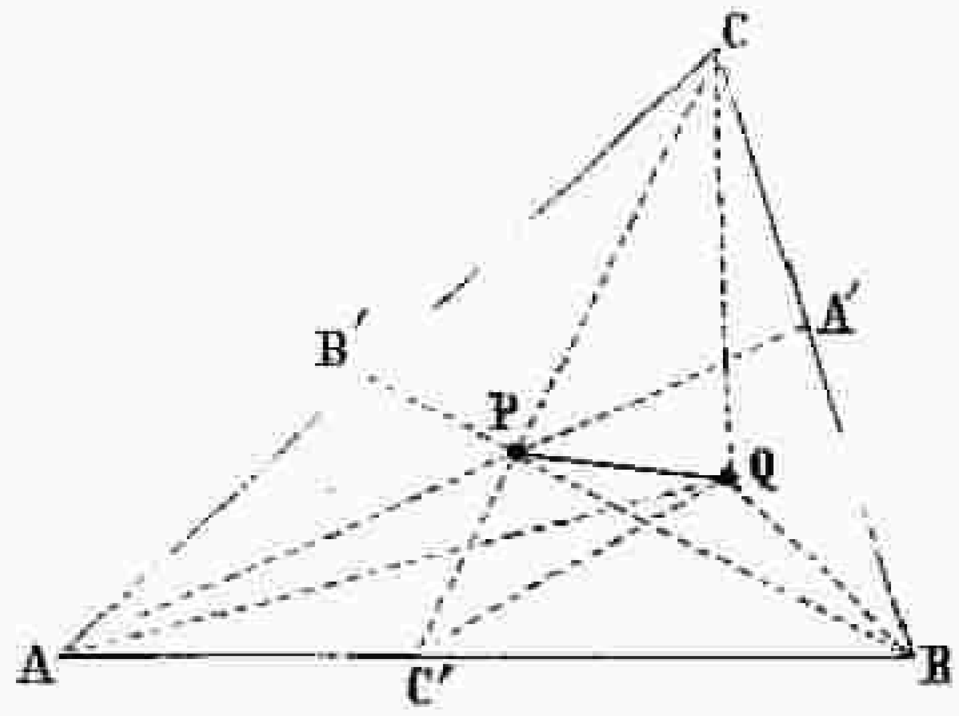
Distanze di punti notevoli del triangolo. — Il Sig. Thiry in due sue pubblicazioni (*) calcola le distanze di molti punti notevoli del triangolo dai vertici e fra loro; le formole di cui si serve si possono rendere affatto generali così da essere atte a dare le distanze dai vertici e fra loro di tutti i

(*) Vedi riassunto in questo *Periodico*, anno VI, pag. 196 e a. VII, p. 28.

punti del piano del triangolo, noti i rapporti che le rette che li proiettano dai vertici sui lati opposti determinano su di questi.

1. Sia ABC il triangolo, e sieno a, b, c, Δ rispettivamente le misure di BC, CA, AB, ABC.

Essendo P un punto interno od esterno al triangolo, ed AA', BB', CC' le rette che lo proiettano da A, B, C su BC, CA, AB, pongo



$$\frac{AC'}{C'B} = m, \quad \frac{BA'}{A'C} = p, \quad \frac{CB'}{B'A} = q \quad (1)$$

e prendo m, p, q positivi o negativi secondochè A', B', C' cadono sui lati o sui loro prolungamenti.

2. Dalle (1) componendo si ha

$$\frac{AB}{AC'} = \frac{m+1}{m}, \quad \frac{AB}{C'B} = m+1, \text{ ecc. } (2);$$

dal triangolo $CC'B$ segato dalla AA' si ha per il teorema di Menelao $\frac{CP}{PC'} \cdot \frac{C'A}{AB} \cdot \frac{BA'}{A'C} = -1$, donde per le (1) (2) risulta la prima delle formole seguenti e in modo analogo le altre

$$\frac{CP}{PC'} = \frac{m+1}{mp} = q(m+1), \quad \frac{AP}{PA'} = m(p+1), \quad \frac{BP}{PB'} = p(q+1) \quad (3).$$

3. Dalle (3) componendo si ottiene

$$\frac{CC'}{CP} = \frac{mp+m+1}{m+1} \text{ ecc.}, \quad \frac{CC'}{PC'} = \frac{mp+m+1}{mp} \text{ ecc.} \quad (4),$$

donde per le relazioni di Stewart

$$\overline{CC'}^2 = [(1+m)\,m a^2 + (1+m)\,b^2 - m c^2] \div (1+m)^2, \quad \text{ecc.} \quad (5)$$

si ricava

$$\left.\begin{aligned} CP^2 &= [(1+m)\,m a^2 + (1+m)\,b^2 - m c^2] \div (mp+m+1)^2 \\ AP^2 &= [(1+p)\,p b^2 + (1+p)\,c^2 - p a^2] \div (pq+p+1)^2 \\ BP^2 &= [(1+q)\,q c^2 + (1+q)\,a^2 - q b^2] \div (qm+q+1)^2 \end{aligned}\right| \quad (6)$$

che danno le distanze di P dai vertici del triangolo.

4. Sia Q un altro punto qualunque interno od esterno ad ABC. Dal triangolo $CC'Q$, per il teorema di Stewart, si ha

$$PQ^2 = \frac{CP}{CC'} \cdot \overline{QC'}^2 + \frac{PC'}{CC'} \cdot QC^2 - \frac{PC'}{CC'} \cdot \frac{CP}{CC'} \cdot \overline{CC'}^2;$$

dal triangolo AQB si ha pure

$$QC'^2 = \frac{m}{m+1} \cdot QB^2 + \frac{1}{m+1} \cdot QA^2 - \frac{m}{m+1}\,\frac{1}{m+1} \cdot c^2 ,$$

per la quale e per le relazioni (4), (5) la precedente diviene con facili trasformazioni

$$PQ^2 = \frac{QA^2 + m \,.\, QB^2 + mp \,.\, QC^2}{1 + m + mp} - m\,\frac{mp \,.\, a^2 + p \,.\, b^2 + c^2}{(mp + m + 1)^2} \quad (7).$$

Mediante la (7) e la (6) si potranno così calcolare le distanze di punti qualunque interni od esterni ad ABC, dati i rapporti corrispondenti ad essi.

La (7) si riduce a quella trovata dal Sig. Thiry per il punto $K^{(n)}$ ponendovi

$$m = \frac{b^n}{a^n}, \qquad p = \frac{c^n}{b^n}, \qquad q = \frac{a^n}{c^n} .$$

Se Q è il circumcentro, la (7) diventa

$$PO^2 = R^2 - m\,\frac{mp \,.\, a^2 + p \,.\, b^2 + c^2}{(mp + m + 1)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

la quale si presta a calcolare assai facilmente tutte le distanze $OK^{(n)}$, $O\Omega$, $O\Omega'$, OH, ecc., dove Ω, Ω', H, ecc. hanno il solito significato.

Se P va in A' la (7) dà

$$A'Q^2 = \frac{QB^2 + p\,QC^2}{1 + p} - \frac{p \,.\, a^2}{(p+1)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

e se Q va in C', la (9) dà

$$A'C'^2 = \frac{mp \,.\, a^2 + p \,.\, b^2 + c^2}{(m+1)(p+1)} - \frac{m\,c^2}{(m+1)^2} - \frac{p\,a^2}{(p+1)^2} \qquad (10)$$

che serve a calcolare le distanze fra i piedi delle mediane, delle bisettrici, delle altezze, ecc..

Se Q va su BC, la (9) dà la distanza di due punti di BC

$$A'Q = a\,\frac{p - p'}{(p+1)(p'+1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

ove p, p' sono i rapporti secondo cui A', Q dividono BC.

5. Se a Q corrispondono i rapporti m', p', q' si ha per le (6)

$$CQ^2 = [(1 + m')\,m'a^2 + (1 + m')\,b^2 - m'c^2] \div (m'p' + m' + 1)^2, \quad \text{ecc.}$$

e se P, Q sono in linea retta con C, essendo $m = m'$, si ha

$$CQ^2 = [(1 + m)\,m\,a^2 + (1 + m)\,b^2 - m\,c^2] \div (mp' + m + 1)^2$$

onde

$$\frac{CP}{CQ} = \frac{mp' + m + 1}{mp + m + 1}$$

da cui decomponendo

$$\frac{P\,Q}{C\,Q}=\frac{m\,(p-p')}{m\,p+m+1}\,,\quad \text{ossia}\quad P\,Q=C\,Q\,.\,\frac{m\,(p-p')}{m\,p+m+1}\qquad(12).$$

Se P, Q sono punti armonicamente associati e quindi $p'=-p$, la (12) diviene

$$P\,Q=C\,Q\,.\,\frac{2\,m\,p}{m\,p+m+1}\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\qquad(13).$$

Permutando circolarmente fra m, p, q e fra m', p', q' si hanno le distanze fra punti P, Q allineati con A, con B.

6. Farò alcune applicazioni delle formole (7), (8), (13), che credo nuove.

I. Indicando con K_1, K_2, K_3 i punti armonicamente associati a K (punto di Lemoine), cioè i vertici del triangolo circoscritto al cerchio $A\,B\,C$ nei punti A, B, C dalla (13) si ha

$$K_1\,K_2=\frac{2\,a\,b\,c^3}{(b^2+c^2-a^2)\,(c^2+a^2-b^2)}=\frac{c}{2\cos A\;\cos B}\,,\quad \text{ecc.}$$

e

$$K_1\,K_2+K_2\,K_3+K_3\,K_1=\frac{2\,a\,b\,c\,.\,16\,\Delta^2}{(b^2+c^2-a^2)\,(c^2+a^2-b^2)\,(a^2+b^2-c^2)}=$$

$$\frac{4\,\Delta^2}{a\,b\,c\,\cos A\;\cos B\;\cos C}=\frac{\Delta}{R\,\cos A\;\cos B\;\cos C}=\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{2\cos A\;\cos B\;\cos C}\,.$$

II. Indicando con $\alpha\,(P)$ la quantità indipendente da Q

$$m\,\frac{m\,p\,.\,a^2+p\,.\,b^2+c^2}{(m\,p+m+1)^2}=R^2-P\,O^2=-\text{ potenza di } P \text{ rispetto al circumcerchio,}$$

si ottiene

$$\alpha\,(\Omega)=\alpha\,(\Omega')=\frac{a^2\,b^2\,c^2}{\Sigma\,a^2\,b^2}=4\,R^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega\quad(\omega\text{ angolo di Brocard}),\text{ onde si ha}$$

$$Q\,\Omega^2=\frac{\Sigma\,(c^2\,a^2\,.\,Q\,A^2)-a^2\,b^2\,c^2}{\Sigma\,a^2\,b^2}\,,$$

$$Q\,\Omega'^2=\frac{\Sigma\,(a^2\,b^2\,.\,Q\,A^2)-a^2\,b^2\,c^2}{\Sigma\,a^2\,b^2}\,,\quad Q\,\Omega^2-Q\,\Omega'^2=\frac{\Sigma\,a^2\,.\,Q\,A^2\,(c^2-b^2)}{\Sigma\,a^2\,b^2}\,.$$

III. Indicando con N, N_1, N_2, N_3 il punto di Nagel e i punti affini posti rispettivamente negli angoli A, B, C; con r, r_1, r_2, r_3 i raggi dei cerchi inscritti ed ex-iscritti; con s il semiperimetro di $A\,B\,C$, si ha

$$\alpha\,(N)=\frac{1}{s^2}\,[a^2\,(s-b)\,(s-c)+b^2\,(s-c)\,(s-a)+c^2\,(s-a)\,(s-b)]=4\,r\,(R-r)$$

$$\alpha\,(N_1)=\frac{1}{(s-a)^2}\,[a^2\,(s-b)(s-c)-b^2.\,s\,.\,(s-b)-c^2\,(s-c)\,.\,s]=-4\,r_1\,(R+r_1),$$

ecc.

$$O\,N=R-2\,r\,,\qquad O\,N_1=R+2\,r_1\,,\quad \text{ecc.}\,,$$

$$H\,N^2=4\,R\,(R-2\,r)\,,\qquad H\,N_1^2=4\,R\,(R+2\,r_1)\,,\quad \text{ecc.}$$

$$\Omega N^2 = \frac{a^4 b^2 (s-c) + b^4 c^2 (s-a) + c^4 a^2 (s-b)}{s \,.\, \Sigma a^2 b^2} - 4r(R-r)$$

$$\Omega N_1^2 = \frac{b^4 c^2 \,.\, s - c^4 a^2 (s-c) - a^4 b^2 (s-b)}{(s-a)\, \Sigma a^2 b^2} + 4r_1 (R + r_1)\,, \quad \text{ecc.}$$

$$\Omega' N^2 = \frac{a^2 b^4 (s-c) + b^2 c^4 (s-a) + c^2 a^4 (s-b)}{s \,.\, \Sigma a^2 b^2} - 4r(R-r)$$

$$\Omega' N_1^2 = \frac{b^2 c^4 \,.\, s - c^2 a^4 (s-c) - a^2 b^4 (s-b)}{(s-a) \,.\, \Sigma a^2 b^2} + 4r_1 (R + r_1)\,, \quad \text{ecc.}$$

$$K N^2 = \frac{2s \,.\, \Sigma a^2 b^2 - 2abc\, \Sigma ab}{s \,.\, \Sigma a^2} - \frac{3a^2 b^2 c^2}{(\Sigma a^2)^2} - 4r(R-r)\,.$$

Luglio, 1893.

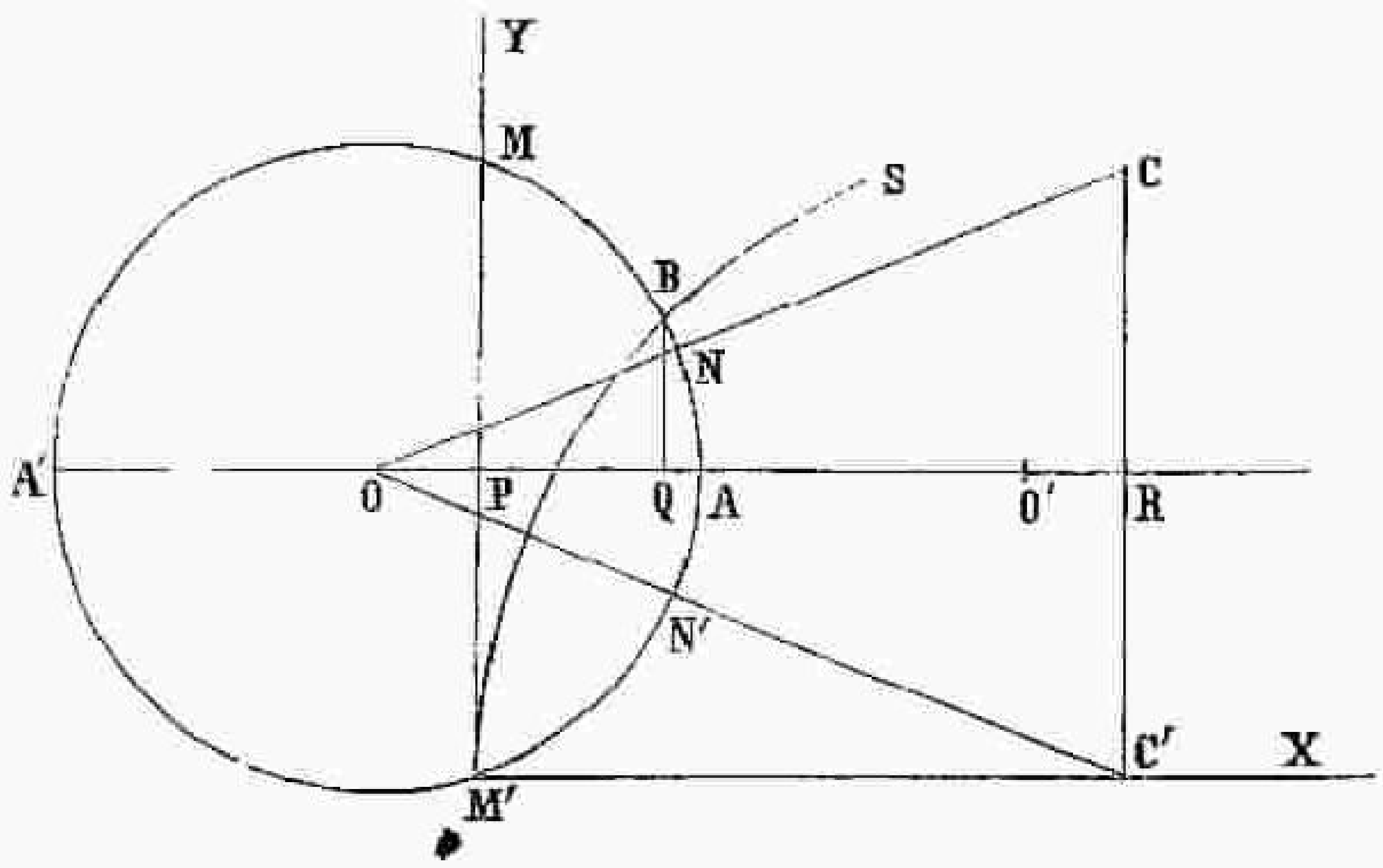
F. Ferrari.

In seguito di un esercizio proposto dal Sig. Prof. Bellacchi. — 1. A pag. 194 del vol. VII di questo *Periodico* si trova risoluta la seguente quistione proposta dal Sig. Bellacchi:

« Divisa la corda AB di un arco in tre parti egnali $AI = IE = EB$ e condotti i raggi OIM, OEN, dimostrare che il coseno dell'angolo medio, cioè $\cos IOE = \dfrac{4 + 5\cos\alpha}{5 + 4\cos\alpha}$, essendo angolo $AOB = \alpha$ l'angolo al centro ».

Scopo della presente nota è di dimostrare: 1° Che l'arco che ha quel coseno, si può costruire direttamente sul cerchio. – 2° Che quell'arco si presta ad un metodo *diretto* di approssimazione per un vecchio problema. – 3° In che modo dato un arco α, per tutti gli archi inferiori si può dare al coseno quella forma.

2. Sia A l'origine degli archi ed M l'estremo di un arco qualunque α non



maggiore di 90°. Si abbassi dal punto estremo M la normale MP sul raggio OA e si prolunghi questa sino al suo incontro col cerchio in M'. Si conduca la retta $M'X$ parallela al diametro AA' e preso su questa il segmento $M'C' = AA'$ si descriva col centro C' e col raggio $C'M'$ l'arco $M'BS$. Il punto B in cui quest'arco incontra di nuovo il cerchio dato sarà sull'arco AM.

Infatti per essere $A'AC'M'$ un parallelogrammo, $C'A = M'A'$ epperò $C'A < C'M'$; è poi $C'M > C'M'$, dunque i punti A e M sono l'uno interno l'altro esterno al cerchio $M'BS$, il cui raggio è $C'M'$. Poniamo $OP = a$, $MP = b$ l'equazione del cerchio dato di centro O e di raggio r riferita agli assi ortogonali $M'X$, $M'MY$ sarà

$$(x + a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

e quella del cerchio di centro C' e di raggio $C'M' = 2r$

[1] . . . . $(x - 2r)^2 + y^2 = 4r^2.$

Sviluppando e sottraendo, posto anche $r = 1$, si ottiene per equazione della corda comune $y = \frac{2 + a}{b} x$ e sostituendo questo valore nella [1] si ha l'equazione

$$x^2 + \frac{x^2}{b^2}(2 + a)^2 - 4x = 0$$

che è soddisfatta dai valori $x = 0$, $x = \frac{4b^2}{4a + 5}$ e quindi

[2] . . . . $OQ = a + x = \frac{5a + 4}{4a + 5}$

che è il coseno dell'arco AB.

3. Si congiunga il centro O coll'altro C'. Il punto N' in cui questa congiungente taglia l'arco AM' sarà il punto medio dell'arco BM' ed anche si avrà $AN' = \frac{1}{2} MB$, perchè $AN' = AM' - N'M' = MA - BN' = MA - (BA + AN')$ e quindi $2AN' = MB$.

Portato l'arco AN' in senso positivo AN, sarà sempre $AN < AB$. Infatti $\operatorname{tang} AN = \frac{b}{a + 2}$, $\operatorname{tang} AB = \frac{3b}{5a + 4}$ ed essendo $a < 1$, si ha

$$\frac{1}{5a + 4}\left(= \frac{1}{3a + 4 + 2a}\right) > \frac{1}{3a + 6} \quad \text{ossia} \quad \frac{3}{5a + 4} > \frac{1}{a + 2}.$$

Inoltre i due archi AB e AN tendono a diventare eguali quanto più diventa piccolo l'arco α perchè si ha

$$\operatorname{tang}(AB - AN) = \frac{2(1 - a)\sqrt{1 - a^2}}{14a + 2a^2 + 11}$$

e posto $a = 1 - \lambda$

$$\operatorname{tang}(AB - AN) = \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}\, 2\sqrt{2 - \lambda}}{27 - 18\lambda + 2\lambda^2},$$

quantità che va a zero con λ.

Dalle relazioni trovate $AN < AB$, $AN = \frac{1}{2} MB$ resulta che l'arco NB è sempre positivo ed è trisecato dallo stesso punto X che triseca l'arco dato α, per essere $AX - AN = NX = \frac{1}{3} AM - AN = \frac{1}{3}(3AN + BN) - AN = \frac{1}{3} BN$; sicchè ripetendo la stessa operazione grafica sull'arco $NB = \alpha'$ si otterranno due nuovi punti N' e B' che si avvicineranno di più a quello X e determineranno un terzo arco $N'B'$ che sarà pure trisecato dal punto X; si opererà di nuovo al modo stesso sull'arco $N'B'$ e così via via. Si avranno per tal modo due classi di punti

$$\begin{array}{llllll} (B) & B & B' & B'' & B''' & \ldots\ldots \\ (N) & N & N' & N'' & N''' & \ldots\ldots \end{array}$$

che soddisferanno alle seguenti condizioni:

1° I punti della classe (N) saranno tutti superiori a quelli della classe (B).

2° Quelli della classe (N) saranno disposti in ordine crescente, e quelli della classe (B) in ordine decrescente.

3° I punti dell'una e dell'altra classe saranno in numero infinito.

4° Mai un punto della classe (N) potrà coincidere con uno della classe (B), nè essere compreso fra due della classe (B) e viceversa.

4. Per passare dall'arco AM a quello NB, e da questo al successivo $N'B'$, ecc. non sono necessarie tutte le linee della figura; la costruzione è assai semplice. Osserviamo sulla figura che i punti O, N', C' essendo in linea retta, il cerchio che ha per centro N' e passa per M' passerà anche per B. Ciò posto ecco la costruzione. Si prenda sul diametro prolungato $OO' = AA'$ e si costruisca il quarto vertice C del parallelogrammo $MOO'C$ sarà C simmetrico di C' rispetto la retta AA' e condotta la retta OC questa determinerà il punto N; si porti ora in senso negativo $AN' = AN$, $AM' = AM$ e con centro in N' si descriva un cerchio passante per M', questo determinerà B; così si avrà con poche intersezioni l'arco NB; allo stesso modo si opererà su questo per avere il successivo $N'B'$, ecc.

Diciamo θ questa costruzione grafica per la quale da un arco si passa al successivo e dimostriamo che presa una frazione μ piccola a piacere si potrà determinare il numero n delle volte che si dovrà ripetere l'operazione θ perchè l'errore sia $< \mu\alpha$.

Si ha infatti per l'errore NX:

$$NX = AX - AN = \frac{\alpha}{3} - \text{arc sen} \frac{b}{\sqrt{5 + 4a}},$$

e sostituendo al seno l'arco

$$NX < \frac{\alpha}{3} - \frac{b}{\sqrt{5 + 4a}}.$$

Ora essendo a una frazione si avrà a più forte ragione

$$NX < \frac{1}{3}(\alpha - b),$$

ma la differenza fra l'arco e il suo seno è noto essere minore del sesto del cubo dell'arco, quindi

$$NX < \frac{1}{3}\,\frac{1}{6}\,\alpha^3 \qquad \text{e} \qquad NB\,(=3NX) < \frac{1}{6}\,\alpha^3 .$$

Perciò indicando gli archi NX colla lettera ε e quelli NB colla lettera α, si avrà

$$\varepsilon_1 < \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\,\alpha^3, \qquad \alpha_1 < \frac{1}{6}\,\alpha^3$$

e ripetendo su α_1 l'operazione θ:

$$\varepsilon_2 < \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\,\alpha_1{}^3, \qquad \alpha_2 < \frac{1}{6}\,\alpha_1{}^3$$

e ponendo in queste in luogo di α_1 il valore maggiore $\frac{1}{6}\,\alpha^3$ sarà a più forte ragione

$$\varepsilon_2 < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^4\alpha^9, \qquad \alpha_2 < \left(\frac{1}{6}\right)^4\alpha^9,$$

applicando su α_2 l'operazione θ e così di seguito si avrà

$$\varepsilon_3 < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{13}\alpha^{27}, \qquad \alpha_3 < \left(\frac{1}{6}\right)^{13}\alpha^{27}, \quad \text{ecc.}$$

e in generale

$$\varepsilon_n < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{3^n-1}{2}}\alpha^{3^n}, \qquad \alpha_n < \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{3^n-1}{2}}\alpha^{3^n}.$$

Sicchè per determinare il numero n perchè sia $\varepsilon_n < \mu\alpha$, essendo μ una frazione piccola a piacere, basterà porre:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{3^n-1}{2}}\alpha^{3^n-1} = \mu \qquad \text{ossia} \qquad \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha^2}{6}\right)^{\frac{3^n-1}{2}} = \mu,$$

da cui

$$n = \frac{\log\left(2\,\dfrac{\log 3\mu}{\log\dfrac{\alpha^2}{6}} + 1\right)}{\log 3}$$

e prendere per n l'intiero subito superiore. Così ad esempio preso $\alpha = 1$ e $\mu = 0,001$ si trova $n = 1,8$ cioè per l'arco eguale al raggio, si ha l'errore minore di un millesimo ripetendo l'operazione θ due volte. Per un arco α a piacere sul cerchio, si calcoli n per un arco qualunque maggiore e di valor numerico arbitrario $< \frac{\pi}{2}$; il valore che risulta sarà vero per α.

La dichiarata costruzione θ ha questo di singolare che è *diretta* cioè indipendente da ogni estranea divisione ed è geometricamente *completa* per sè.

5. Se si prende $M'C$ non più eguale a $2r$ ma eguale a p volte r si trova collo stesso processo

$$[3] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \cos AB = \frac{(p^2+1)a+2p}{2pa+(p^2+1)}$$

dove a è il coseno di un arco $\alpha < 90^0$. Ora, qualunque sia l'arco $AB < AM$ si può sempre far passare un cerchio per B e tangente alla corda MM' nel punto M', dunque data ai coseni degli archi minori di α la forma [3] p rappresenta il raggio del cerchio che passa per l'estremo B dell'arco ed è tangente alla corda MM' nel punto M'.

Treviso, gennaio 1893.

G. Z. Reggio.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 112, 127 e 145**

112. *Se* a, b, n *sono interi qualunque ad* a, b *primi tra loro, e si indica con* D (x, y), φ (x) *rispettivamente il massimo comun divisore di* x, y *ed il numero degli interi minori di* x *e primi con esso, il numero dei valori interi di* z, *minori di* n, *che rendono il binomio* az + b *primo con* n, *è dato da*

$$d_1 d_2 \dots . d_m . \varphi\left(\frac{n}{d_1 d_2 \dots . d_m}\right),$$

essendo $d_1 = D(n, a)$, $d_2 = D\left(\frac{n}{d_1}, d_1\right)$, $d_3 = D\left(\frac{n}{d_1 d_2}, d_2\right) \dots \dots$
$d_m = D\left(\frac{n}{d_1 d_2 \dots . d_{m-1}}, d_{m-1}\right)$ *e posto che sia* $d_{m+1} = 1$.

(U. Scarpis).

Soluzione del Sig. *F. Mariantoni*, studente nella R. Università di Roma.

È noto che se b è primo con a tutti i numeri della forma $az+b$ (z intero) sono primi con a e, per conseguenza, con qualunque suo divisore. In particolare i numeri siffatti sono tutti primi con $d_1 = D(n, a)$ e perciò con $d_2 = D\left(\frac{n}{d_1}, d_1\right)$, con $d_3 = D\left(\frac{n}{d_1 d_2}, d_2\right)$, e infine, posto che sia $d_{m+1} = 1$, con $d_m = D\left(\frac{n}{d_1 d_2 \dots . d_{m-1}}, d_{m-1}\right)$, segue che quei numeri sono tutti primi col prodotto $d_1 d_2 \dots . d_m$.

Ciò posto si cerchino i numeri dell'anzidetta forma che risultano primi con n; chiaramente basterà soltanto cercare quelli di essi primi con $n_1 = \frac{n}{d_1 d_2 \dots d_m}$ e tutti gli altri congrui ad essi rispetto al mod. n_1.

Pertanto il numero $b + az$ sarà primo con n_1 se z soddisfa alla congruenza

$$(1) \quad az + b \equiv \alpha \pmod{n_1}$$

dove α è uno qualunque dei $\varphi(n_1)$ numeri primi con n_1 e minori di n_1. Poichè, evidentemente, è a primo con n_1 la (1), come si sa, fornisce una soluzione, *cioè un valore di* z *minore di* n_1, per ognuno dei $\varphi(n_1)$ valori che possono attribuirsi ad α. Così è stabilito che vi sono $\varphi(n_1)$ valori di z minori di n_1 che rendono il binomio $az + b$ primo con n. Ma quando si vogliano tutti i valori di z minori di n si osservi che se z_r è una radice di (1) minore di n_1, $z_r + kn_1$ è anch'essa una radice qualunque sia l'intero k, così avremo determinate tutte le radici di (1) minori di n quando avremo stabilito il massimo valore che può avere k. Se z_r è una delle radici minori di n_1, basterà sottoporre k alla condizione

$$z_r + kn_1 \leq n \quad \text{donde si trae} \quad k \leq \frac{n - n_1}{n_1} + \frac{n_1 - z_r}{n_1}$$

e perciò, essendo k intero, il suo più grande valore è

$$k = \frac{n - n_1}{n_1} = d_1 d_2 \ldots . d_m - 1$$

quando si osservi che $\frac{n_1 - z_r}{n_1}$ è una frazione propria positiva.

Presa dunque una radice generica di (1) z_r minore di n_1 attribuendo nella espressione $z_r + kn_1$ a k tutti i valori da 0 a $d_1 d_2 \ldots . d_m - 1$ si deducono $d_1 d_2 \ldots . d_m$ radici di (1) minori di n. Lo stesso ripetendo per ognuna delle $\varphi\left(\frac{n}{d_1 d_2 \ldots . d_m}\right)$ radici di (1) minori di n_1 si deduce evidentemente che il numero dei valori di z minori di n che rendono $az + b$ primo con n_1 e perciò con n, è dato da

$$d_1 d_2 \ldots d_m \cdot \varphi\left(\frac{n}{d_1 d_2 \ldots . d_m}\right) . \qquad \text{c. v. d..}$$

127. *Dimostrare che il numero dei modi nei quali un intero* M *può ottenersi come differenza di due quadrati interi, è dato dalla formola*

$$\frac{(-1)^{M}(m_1 + 1)(m_2 + 1) \ldots . (m_n + 1)(m - 1) - \alpha}{2},$$

dove α *è l'unità quando* M *è quadrato perfetto, zero negli altri casi,* m *denota l'esponente del fattore* 2 *ed* $m_1, m_2, \ldots . m_n$ *gli esponenti degli altri fattori primi di* M. (A. Tagiuri).

Dimostrazione del Sig. *D....* (Seminario di Solmona) (*).

Il numero dei modi nei quali un intero M può ottenersi come differenza di due quadrati non è altro che il numero delle soluzioni intere dell'equazione

$$[1] \qquad x^2 - y^2 = M \quad \text{od anche} \quad (x + y)(x - y) = M,$$

(*) Dimostrazioni sostanzialmente analoghe pervennero dai Sigg. Prof. *S Catania*, *F. Palatini* e *G. Santacroce* e dal Sig. *F. Mariantoni* studente nella R. Università di Roma.

le quali soluzioni saranno quindi tante quanti sono i modi di scomporre M in due fattori M_1, M_2 tali che

1.° siano ineguali, p. es. $M_1 > M_2$, perchè non risulti $y = 0$,

2.° siano entrambi impari o pari, perchè ponendo $x + y = M_1$, $x - y = M_2$, risulti $x = \frac{M_1 + M_2}{2} =$ intero, $y = \frac{M_1 - M_2}{2} =$ intero.

Ora indicando con m_1, $m_2 \ldots\ldots m_n$ gli esponenti dei fattori primi, in numero di n, di M, è noto che il numero N dei divisori di M è uguale ad $(m_1 + 1)(m_2 + 1) \ldots\ldots (m_n + 1)$, e si ha pure che disposti questi N divisori per ordine di grandezza, il primo e l'ultimo, il secondo ed il penultimo, ecc. danno per prodotto M, quindi i modi di scomporre M in due fattori son tanti quante sono le coppie de' suoi N divisori, cioè $\frac{N}{2}$, per N pari, o $\frac{N-1}{2}$ per N impari (ossia per M quadrato perfetto), escludendo la coppia di fattori eguali secondo il n.° 1.°

Supponendo ora che gli n fattori primi di M siano impari, tutti i divisori saranno pure tali, e quindi, essendo soddisfatta anche la condizione del n.° 2°, il numero delle soluzioni della [1] sarà appunto

$$[2] \qquad \frac{N - \alpha}{2} = \frac{(m_1 + 1)(m_2 + 1) \ldots\ldots (m_n + 1) - \alpha}{2},$$

dove α va presa nel senso indicato dalla quistione.

Se poi M fosse pari, cioè se avesse, oltre i predetti n fattori primi, anche il fattore 2^m, allora si avranno tutti i suoi divisori moltiplicando ciascuno dei precedenti N divisori per 2^m, 2^{m-1}, ..., 2, 1. Nei prodotti dei nuovi divisori due a due, non potranno tuttavia essere considerati come utili quelli che contengono l'uno il fattore 2^m e l'altro il fattor 1, perchè secondo il n.° 2°, non può essere M_1 pari ed M_2 dispari, e viceversa, così nella serie precedente i termini 1 e 2^m sono da escludere per modo che i divisori da considerare resteranno così $N(m-1)$. Quindi il numero delle coppie di fattori M_1 ed M_2, ossia delle soluzioni della [1], sarà

$$[3] \qquad \frac{N(m-1) - \alpha}{2} = \frac{(m_1 + 1)(m_2 + 1) \ldots\ldots (m_n + 1)(m-1) - \alpha}{2}.$$

Ma la formola proposta comprende le due formole [2] e [3], poichè per M impari, ossia per $m = 0$, riproduce la [2], essendo $(-1)^M (m-1) = (-1)^2 = 1$, e per M pari riproduce la [3], essendo $(-1)^M = 1$. Dunque il numero dei modi nei quali l'intero M può ottenersi come differenza di due quadrati interi è dato effettivamente da

$$\frac{(-1)^M (m_1 + 1)(m_2 + 1) \ldots\ldots (m_n + 1)(m-1) - \alpha}{2},$$

con α uguale ad 1 o a zero, secondochè M è o non è quadrato perfetto.

145.** *Posto*

$$a_1 = \frac{a+b}{2},\quad a_2 = \frac{b+a_1}{2},\quad a_3 = \frac{a_1+a_2}{2},\ \ldots.\ a_n = \frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{2},$$

esprimere a_n *in funzione di* a, b, n, *e trovare il limite a cui tende* a_n *quando* n *tende all'infinito.* (D. Besso).

Soluzione del Sig. Prof. *G. Mola* a Campobasso.

Dal seguente sistema di n equazioni lineari

$$\begin{aligned} a + (m-1)\,b &= m\,a_1 \\ b &= -(m-1)\,a_1 + m\,a_2 \\ 0 &= -a_1 - (m-1)\,a_2 + m\,a_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= -a_{n-2} - (m-1)\,a_{n-1} + m\,a_n\,, \end{aligned}$$

se indichiamo con Δ_n il seguente determinante di grado n

$$\left|\begin{array}{cccc} (m-1) & -m & 0 & \ldots \\ 1 & (m-1) & -m & \ldots \\ 0 & 1 & (m-1) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right|,$$

che, sviluppato secondo gli elementi della prima orizzontale, dà la relazione

$$\Delta_n = (m-1)\,\Delta_{n-1} + m\,\Delta_{n-2}\,, \tag{1}$$

si avrà per il valore di a_n

$$a_n = \frac{a\,\Delta_{n-1} + b\,\Delta_n}{m^n}. \tag{2}$$

Dalla (1) si trae $\Delta_n + \Delta_{n-1} = m\,(\Delta_{n-1} + \Delta_{n-2})$; e poichè è evidente che $\Delta_1 = m-1$, $\Delta_2 = (m-1)^2 + m$, donde $\Delta_2 + \Delta_1 = m^2$, sarà: $\Delta_3 + \Delta_2 = m^3$, $\Delta_4 + \Delta_3 = m^4$, e in generale $\Delta_n + \Delta_{n-1} = m^n$. E si deduce

$$\Delta_{n-1} = m^{n-1} - m^{n-2} + m^{n-3} \ldots. (-1)^{n-1} = \frac{m^n \pm 1}{m+1},$$

$$\Delta_n = m^n - m^{n-1} + \ldots.(-1)^n = \frac{m^{n+1} \mp 1}{m+1};$$

(i segni superiori sono per n dispari)

Per questi valori la (2) diventa:

$$a_n = a\,\frac{1 + \frac{(-1)^{n-1}}{m^n}}{m+1} + b\,\frac{m + \frac{(-1)^n}{m^n}}{m+1},$$

e per $n = \infty$, si ha

$$\lim a_n = a \frac{1}{m+1} + b \frac{m}{m+1}.$$

Facendo $m = 2$, questi valori divengono quelli domandati dal problema proposto (*).

Risposte a quistioni alle quali rimane a dare evasione. Quistione **118** risposta del Sig. *F. Palatini*; **132**. *S. Catania*, *M. Martone*; **133**. *S. Catania*; **143**. *R. Bettazzi*, *U. Fazzini*, *F. Ferrari*, *G. Marotta*, *F. Mariantoni*, *F. Palatini*; **145****. *C. Aiello*, *G. Candido*, *E. Ghisi*, *G. Marotta*, *A. Tagiuri*, M.me *F. Prime*; **146***. *L. L. Mucci*, *M. Piattelli*, Sig.ina *L. Polverini*, M.me *F. Prime*, *C. Scarponi*, Sig.ina *A. Sciava*; **147***. *U. Gerra*, *G. Mazza*, *A. Parsi*, M.me *F. Prime*; **148***. *A. Parsi*, M.me *F. Prime*; **149***. *C. Aiello*, *Barbieri*, *U. Gerra*, *G. Mazza*, *A. Parsi*, M.me *F. Prime*, *Veneziali*; **151****, **153*** e **154***. M.me *F. Prime*.

QUISTIONI PROPOSTE (**)

155*. Dato il triangolo ABC e le rette AH, BH, CH passanti per lo stesso punto H, inscrivere in ABC un triangolo $A'B'C'$ in modo che A' cada in BC, B' in CA, C' in AB, ed i lati $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ siano bisecati rispettivamente da AH, BH, CH.

Dimostrare poi che le rette AA', BB', CC' passano per uno stesso punto.

L. Merante.

156**. Se in un triangolo ABC è inscritto un triangolo $A'B'C'$ tale che le rette AA', BB', CC' passino per uno stesso punto, le simediane dei triangoli $AC'B'$, $BA'C'$, $CB'A'$, corrispondenti ai lati $C'B'$, $A'C'$, $B'A'$, passeranno per uno stesso punto; e viceversa se nei triangoli $AC'B'$, $BA'C'$, $CB'A'$ le simediane corrispondenti ai lati $C'B'$, $A'C'$, $B'A'$ concorrono in uno stesso punto, anche le rette AA', BB', CC' passeranno per uno stesso punto.

L. Merante.

(*) Altre soluzioni di questa quistione verranno pubblicate nel fascicolo venturo.

(**) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

157**. Se in un triangolo ABC i punti H', H'' sono coniugati isogonali ed in esso s'inscrivono due triangoli $A'B'C'$, $A''B''C''$ tali che i lati $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$; $A''B''$, $B''C''$, $C''A''$ siano bisecati rispettivamente dalle rette CH', AH', BH'; CH'', AH'', BH'', i sei punti A', B', C', A'', B'', C'' appartengono ad uno stesso cerchio e ciascuno dei detti triangoli è prospettivo al triangolo ABC.

L. MERANTE.

158. Si ponga

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= (\alpha s - \beta r) M + (\gamma s - \delta r) N \\ \beta' &= (\beta m - \alpha n) M + (\delta m - \gamma n) N \\ \gamma' &= (\alpha s - \beta r) R + (\gamma s - \delta r) S \\ \delta' &= (\beta m - \alpha n) R + (\delta m - \gamma n) S \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

e inoltre

$$MS - NR = ms - nr = 1. \qquad (B)$$

Dalle (A), lineari e di determinante 1 per rispetto alle α, β, γ, δ, si deduce

$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

E vera la reciproca? Se cioè α', β', γ', δ' sono espresse per mezzo delle α, β, γ, δ da formole lineari e di determinante 1, e se

$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

le α', β', γ', δ' saranno sempre riducibili alla forma definita dalle (A) e dalle (B)?

G. FRATTINI.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

ING. FILIPPO NICITA. — *Descrizione del cerchio.* Raccolta di 527 problemi di Geometria elementare colle relative soluzioni. — Ragusa, tip. Piccitto e Antoci, 1892. Prezzo L. 3.

L'Autore avverte nella prefazione che ha inteso soltanto di fare un prontuario utile per la pratica, ed io penso ch'egli abbia bene raggiunto lo scopo; imperocchè ha ordinati e raggruppati i diversi problemi relativi alla descrizione d'un cerchio per modo che riesce facile rintracciarli. Non è quindi questa una raccolta intesa a mostrare l'applicazione dei differenti metodi generali e particolari che si hanno per iscoprire la soluzione d'un dato problema, l'Autore non ha badato a ciò; bensì è un qualche cosa d'analogo alle tavole dei logaritmi. Egli, considerate prima le diverse condizioni (in numero di diciasette) che generalmente si danno per la determinazione d'un cerchio, prende a risolvere successivamente la serie dei problemi in cui, fra le condizioni date, vi è che il cerchio richiesto debba avere un dato centro, un dato raggio; debba determinare, sopra due parallele, segmenti dati; debba passare per due punti dati, essere tangente a due rette o a due circoli dati; le quali serie sono ottenute combinando le precedenti condizioni con ciascuna di quelle da principio considerate. Per ultimo risolve alcuni problemi in cui le tre condizioni date sono di specie differente, o della stessa specie; ed altri nei quali il cerchio richiesto deve passare per un punto avente una posizione speciale. Mediante poi opportune considerazioni poste alla fine della trattazione dei problemi d'ogni serie, l'Autore riduce ai problemi considerati altri, i quali vengono disposti con bell'ordine in tavole contenenti l'indicazione abbreviata del problema, cui ciascun d'essi si riduce. Fra queste considerazioni noterò specialmente quella per cui la risoluzione dei problemi relativi alla descrizione d'un cerchio secante normalmente o diametralmente due cerchi dati è ridotta alla descrizione d'un cerchio passante per due punti noti. A tal uopo egli dimostra il teorema:

« Qualunque cerchio che taglia normalmente due cerchi dati, o ne taglia uno « normalmente e l'altro diametralmente, o li taglia entrambi diametralmente, passa « sempre per una coppia di punti fissi posti sulla congiungente dei centri dei « cerchi dati ».

L'Autore non aggiunge, come doveva (l'omissione non è giustificabile in un libro d'indole elementare), che questo teorema suppone, per il primo dei casi considerati, che i due cerchi dati non sieno secanti. La dimostrazione ch'egli ne dà è divisa in due parti, ma queste non hanno fra loro un legame tale che della prima non si possa far a meno; la seconda parte poi, cioè la vera dimostrazione, parmi sia troppo elevata per una questione così semplice, vorrei anzi dire, quasi evidente (si può vedere in proposito la nota della pag. 97 della Geometria dell'Amiot). Inoltre i due teoremi che seguono (pag. 50), dovevano precedere il teorema ora detto, perchè nella dimostrazione di questo l'Autore si serve di quelli.

Quanto alle soluzioni date dei diversi problemi, esse sono esatte e parecchie anche non prive d'eleganza; alcuna tuttavia è scorretta in qualche sua parte, come quelle dei problemi 289 e 385. Queste scorrezioni però, essendo evidenti, credo sieno accidentalmente sfuggite all'Autore, animato forse un poco da troppa fretta; e son certo che in una nuova edizione del suo libro, che di cuore gli auguro possa prossimamente fare, non figureranno affatto; come non figurerà qualche errore di ortografia, grammatica e dicitura che ora vi si trova sparso qua e là. Anche alla discussione dei problemi sarà bene dare più larga parte. Ciò non pertanto, come già il lettore avrà forse avvertito, il libro in parola è nel suo complesso buono, e all'Autore va tributata lode per avere fatto un lavoro che ha, per quanto io mi sappia, un carattere di novità, e che certo può tornar utile ad ogni studioso della Geometria elementare.

L'edizione è nitida, con bella stampa e figure abbastanza ben disegnate; v'è solo da lamentare qualche omissione e alcuni errori.

R. Grilli.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico.

Bulletin scientifique, rédigé par M. E. Lebon. — Septième année. N. 3, 4. Janvier, Février, 1893. Félix Alcan, éditeur. Paris.

El Progreso matemático, periódico de matemáticas puras y aplicadas. Director D. Zoel G. de Galdeano. Año II. N. 24. Diciembre de 1892 — Año III, N. 25, Enero de 1893 — Zaragoza.

Giornale di Matematiche ad uso degli Studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Vol. XXX. Novembre e Dicembre 1892. — Napoli, B. Pellerano.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. de Longchamps. 4e Série, XVII année. N. 1, 2, Janvier, Février, 1892. — Paris, Librairie Ch. Delagrave.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert. 17e année. N. 7, 8, 9, 10, 11. — Paris, Librairie Nony et C.ie, 17 rue des Écoles, 1893.

Mathesis, recueil mathématique publié par P. Mansion et J. Neuberg. Deuxième série. Tome III. Janvier, Février, 1893. — Gand, Ad. Hoste, éditeur.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo VI, Fasc. VI. Novembre-Dicembre 1893.

Rendiconto dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli. — Serie 2a; Vol. V, Fasc. 7° a 12°. Luglio a Dicembre 1892; Vol. VI, Fasc. 1°, 2°. Gennaio, Febbraio 1893.

Revue de mathématiques spéciales, rédigée par M. B. Niewenglowski. 3e année. N. 4, 5, Janvier, Février 1893 — Paris, Librairie Nony et C.ie, 17 rue des Écoles.

Rivista di matematica, diretta dal Prof. G. Peano. Vol. II, Fasc. 12°. Dicembre 1892; Vol III, Fasc. 1°, 2°. Gennaio, Febbraio 1893.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. XXIV Jahrgang: 1 Heft, 1893. — Leipzig, G. B. Teubner.

Association for the Improvement of Geometrical Teaching. XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII General Report. — Bedford: W. J. Robinson, Printer. 1887, -88, -89, -90, -91, -92.

Bardelli (G.) — Osservazioni sull'uso della formula di Simpson in risposta alle obbiezioni mosse alla medesima dal Sig. Ing. *F. Crotti*. (Rivista di matem. Anno III, 1893).

Bernardi (F.) — Luoghi geometrici nella risoluzione dei problemi. — R. Tip. edit. Salentina, Lecce 1893.

Carvallo (E.) — *Traité de mécanique* — Paris, Librairie Nony & Cie, 1893. — Prix fr. 2,50.

Del Re (A.) — Sulla superficie del 5° ordine dotata di cubica doppia e punto triplo (Rend. R. Acc. Lincei, vol. I, 5a serie, 1892) — Altre proprietà relative alla superficie del 5° ordine con cubica doppia e punto triplo (Idem, idem) — Sopra alcune varietà della superficie del 5° ordine con cubica doppia e punto triplo (Idem, idem).

Loria (G.) — Congetture e ricerche sull' aritmetica degli antichi Egiziani (Bibliotheca math. par G. Eneström, nouv. série, n. 4, 1892). - Risposta alle osservazioni del prof. E. Pascal (Rivista di mat. Anno III, 1893).

Millosevich (E.) — Sul moto proprio di 9352 Lacaille (Mem. Società Spettroscopisti italiani, vol. XXI, 1892).

Occella (F.) — Nuove dimostrazioni elementari di teoremi sulle diseguaglianze con applicazioni ai massimi e minimi — Casale, tip. F.lli Torelli, 1893.

Sferra (V.) — Progressioni, logaritmi e loro applicazioni — Napoli, Stamperia del Vaglio, 1882.

Chiusura della redazione il dì 5 marzo 1893.

DELLA VARIA FORTUNA DI EUCLIDE

IN RELAZIONE CON I

PROBLEMI DELL'INSEGNAMENTO GEOMETRICO ELEMENTARE [1]

DI

GINO LORIA

Prof. di Geometria Superiore nella R. Università di Genova

> « Ich weiss zu wohl, noch bleibt es unvollendet,
> Wenn es auch gleich geendigt scheinen möchte ».
>
> GOETHE.

1. Se vero è, come pensava Diogene Laerzio, che chiunque si pone a discorrere debba di necessità produrre un principio irrefragabile, io non so cominciar meglio questo mio scritto che asserendo: « la legge di continuità governa il movimento del pensiero umano, con la stessa regolarità e con le medesime interruzioni, con cui presiede a tutti gli altri fenomeni naturali ». Questa proposizione, la cui accettazione da parte dell'universalità dei dotti è per fermo uno dei risultati più cospicui (per non dire il più eccelso) delle ricerche critiche rigorose sulla storia della scienza, ha sradicata la fede nell'esistenza di opere a cui potesse adattarsi l'epiteto di *prolem sine matre creatam* [2]; e, senza indurre alcuno a sminuire il merito di coloro che radunarono in un corpo di dottrina o in un enunciato unico degli elementi di ve-

(1) Le quistioni didattiche devono a parer mio risolversi non meno col ragionamento che con i dati di fatto. Ritengo perciò non inutile la presente monografia ove, in base a testimonianze scritte e a notizie favoritemi da varii amici (a cui debbo pubblicamente esprimere la mia gratitudine), io tento di scoprire la tendenza generale che ebbe ed ha, e la mèta a cui dovrebbe ragionevolmente mirare l'odierno insegnamento della geometria elementare.

(2) Questa credenza era divisa da CHASLES che la manifestò nel giudicare l'invenzione della geometria analitica (*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*. 2.e ed., Paris 1875, pag. 94).

rità dispersi ed apparentemente fra loro eterogenei, persuase fosse doveroso il riporre in onore quei modesti collaboratori i quali spianarono il terreno su cui riposano e prepararono i materiali di cui sono costruiti gli edificii dinanzi a cui l'umanità con riverente riconoscenza s'inchina.

A tale revisione del giudizio su essi pronunciato non sfuggirono Descartes e Galileo, Keplero e Newton; ed arrivò l'istante in cui ad Euclide stesso venne strappata la corona di gloria che lo faceva apparire siccome creatore del primo sistema geometrico organico, vennero in pari tempo disseppelliti e ricordati onorevolmente i nomi di Ippocrate da Chio, di Leone, di Teudio da Magnesia, che precorsero Euclide nel comporre degli elementi di matematica [1], e finalmente si pose il problema (il cui solo enunciato sarebbe in passato parso a molti un'eresia!) di ricostruire la geometria greca pre-euclidea [2].

2. Benchè questo problema non abbia ancora ottenuta una soluzione completa, pure le indagini fatte per raggiungerla permettono già di asserire che Euclide nello scrivere il suo celebre libro pose poco di originale; nulla autorizza ad ammettere che esso appartenga ad una epoca di decadenza [3], giacchè per converso dal momento in cui fu scritto ha origine quello che è da designarsi senza titubanza per il periodo aureo della geometria greca, nè si può asserire che esso abbia sopravvissuto a scapito di altri per essere migliore di tutti i congeneri, chè la qualità di insegnante nel Museo d'Alessandro doveva rendere facile ad Euclide l'imporlo come codice geometrico. Ma del resto ciò per noi è di secondaria importanza; bastandoci constatare che per lunghi secoli a lui arrise una sorte favorevole della quale non era certamente indegno.

Errerebbe però chi credesse che nell'antichità ad Euclide venisse tributata quella venerazione di cui cominciò ad essere fatto segno a partire dal momento in cui gli Arabi lo fecero conoscere agli Occiden-

(1) Per maggiori particolari si vegga il I libro del mio lavoro *Le scienze esatte nell'antica geometria* che si sta stampando nel vol. X della 2ª Serie delle *Memorie dell'Accademia di Modena*.

(2) Si vegga l'enunciato dato da F. Hultsch per questo problema nella *Bibliotheca mathematica*, 1889, pag. 89.

(3) Questa strana opinione, a cui si oppongono ragioni intrinseche e storiche, è riferita da H. Schotten (*Inhalt und Methode des planimetrischen Unterricht. Eine vergleichende Planimetrie*, Leipzig, 1890, p. 99, nota 2).

tali e che continuò fino a tempi a noi vicini (1). A provare che tale opinione sarebbe contraria al vero basta ricordare l'esistenza di un procedimento per gettar la base della geometria che sembra escogitasse, poco dopo Euclide, il grande geometra Apollonio Pergeo (2).

3. Del resto il professare tuttora per Euclide quel culto superstizioso che induce a giudicare sacrilega qualunque modificazione proposta agli *Elementi*, non soltanto è al presente in aperto contrasto con lo spirito critico che aleggia su tutti gli studii moderni e che in particolare spinge a frugare molto addentro in tutta la compagine della geometria; ma, dopo che la scienza ha chieste a una critica severa più potenti formole di evocazione, è sragionevole per due ragioni: perchè in primo luogo gli *Elementi* non possono più considerarsi come rappresentanti (eccezione fatta tutto al più per i primi due libri) del pensiero definitivo dell'autore; perchè in secondo luogo essi giunsero a noi dopo tante ricopiature dovute a persone di cui non è dato misurare nè l'intelligenza nè la coscienza che è ingiusto giudicarli con criterii analoghi a quelli che servono a valutare un'opera che l'autore pubblicò dopo di averla sottoposta ad un'ultima revisione.

Vero è che i mezzi di cui oggi dispone la critica filologica applicati all'opera di Euclide (3), fecero bandire come pregiudizii alcune opinioni dianzi assai diffuse (4) e permisero di ricostruire in gran parte il testo primitivo sceverando le interpolazioni successive della lezione originale e di approntare un'edizione critica dell'intera opera (5). Sono questi risultamenti di cui io al certo non debbo porre in dubbio l'importanza.

---

(1) VINCENZO FLAUTI, per istima ad Euclide a nessuno secondo, raccolse nei *Preliminari* alle sue edizioni di Euclide (V. ad es. p. LXXV e seg. dell'ed. del 1816), le frasi di elogio più significanti pronunciate da eminenti geometri sugli *Elementi*: ivi si trova la giustificazione del nostro asserto. Il quale d'altronde è confermato dall'ingente numero di edizioni di cui sono alteri gli *Elementi* e di cui una miriade è registrata nel *Saggio di una Bibliografia Euclidea* del RICCARDI (Mem. dell'Istituto di Bologna, Serie IV, t. 8 e 9, Serie V, t. 1°, 1887-90).

(2) V. P. TANNERY, *Quelques fragments d'Apollonius de Perge* (Bulletin des Sciences math. et astr., 2ᵉ Série, t. V, 1881) e *Euclidis Opera omnia*, ed. Heiberg et Menge (t. V, Lipsiae 1888, p. LXXXIX).

(3) Cfr. HEIBERG, *Litterargeschichtliche Studien über Euklid* (Leipzig 1882) e il citato vol. V di *Euclidis Opera omnia*.

(4) Fra queste piacemi citare l'opinione che nella redazione degli *Elementi* fatta da TEONE ALESSANDRINO nel IV sec. dell'E. v. e da cui provengono i migliori manoscritti esistenti (tranne quelli utilizzati dal Peyrard per la sua celebre edizione delle opere di Euclide), gli enunciati fossero di Euclide e di Teone i ragionamenti; ed in conseguenza fu dimostrato che il sopprimervi le dimostrazioni, come fece taluno, non era restituire alla forma originale, ma mutilare il lavoro di Euclide

(5) Quella di Heiberg precitata.

Siccome però essi furono ottenuti mediante materiali che nulla autorizza a ritenere per gli unici da sfruttare, nè come quelli che a preferenza di altri (oggi forse perduti) si dovessero chiamare in aiuto, così lo scienziato giudicante il sistema euclideo deve sempre fare qualche riserva intorno al valore delle basi del proprio verdetto, epperò non rifiutare *a priori* dei cambiamenti che la logica suggerisce e che forse tendono a ricondurre il testo alla sua originale purezza.

4. L'indipendenza di giudizio nel valutare l'opera di Euclide, della quale aveva dato l'esempio il grande geometra di Perga, venne seguita non appena l'umanità, sfuggita dalla tenebra dell'età di mezzo, si ridestò a nuova vita intellettuale. La usò magistralmente Pietro Ramus (n. 1515, m. 1572) in Francia ed in Italia con maggiori cautele il Padre Saccheri (n. 1667 o 1670; m. 1733).

Questi (1), mirando a correggere gli errori che Euclide non aveva saputo evitare nell'esporre la teoria delle parallele e nel redigere le definizioni sesta del V libro e quinta del VI, fece « una critica veramente accurata e profonda del postulato di Euclide, critica nella quale vengono messi in sodo alcuni dei principii fondamentali della odierna teoria delle parallele, in quella stessa forma può dirsi, in cui si potrebbero oggi enunciare da noi. Che se disgraziatamente l'A. finisce col concludere all'assoluta verità (di cui allora niuno dubitava) del famoso postulato, non bisogna fargliene soverchio addebito, tanto più che la bonarietà colla quale egli si adopera, all'ultimo, a demolire tutto il proprio edifizio è di gran lunga superata dall'amore e dal retto senso geometrico di cui fa prova nell'innalzarlo » (2).

5. Ma questo rispetto, quasi superstizioso, per Euclide che vietò al nostro connazionale di trarre le conseguenze più eterodosse dalle esattissime sue premesse, non fu di alcun impaccio allo spirito indipendente di Pietro della Ramée (3). Questo fiero e sventurato oppositore

(1) Si vegga l'opera *Euclides ab omni naevo vindicatus, sive conatus geometricus quae stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae principia, Auctore Hieronymo Saccherio, Societate Jesu, in Ticinensi Universitate Matheseos Professore* (Milano 1733); sulla quale di recente attrasse l'attenzione dei matematici il prof. Beltrami con la nota *Un precursore italiano di Legendre e Lobatschewsky* (Red. della R. Accademia dei Lincei, 17 marzo 1889); e della quale diede poi un sunto il MANSION nelle *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (t. XIV, II Partie, 1889-90, p. 41-59). Cfr. anche VERONESE, *Fondamenti di Geometria*, Padova, 1891, p. 569-70.

(2) BELTRAMI, l. c.

(3) Si vegga il bel lavoro di C. WADDINGTON, *Ramus (Pierre de la Ramée); sa vie, ses écrits et ses opinions* (Paris 1856).

di Aristotele, mal soffrendo il dominio di qualunque autocrazia che l'intelletto facesse ritenere indegna di governare, ritenendo per converso che nessuna autorità fosse superiore alla ragione ma che questa dovesse gettar le basi e porre i limiti di qualunque autorità (3), dopo avere sottoposto ad una critica spietata tanto « il maestro di color che sanno » quanto Cicerone e Quintiliano, si rivolse alle matematiche (« i cui pensieri sono sempre liberi ») e scoperse delle gravi imperfezioni anche negli *Elementi* di Euclide (i quali fin dal 1545 egli avea tradotti in latino) ed ardì perfino suggerire i mezzi per toglierle.

Ora questo fatto appare ai nostri occhi come dotato di importanza maggiore di quanto può sembrare a prima vista. Infatti le critiche del Ramus si presentavano come speciali applicazioni di tutto un ordine di concetti costituenti un vero sistema filosofico il quale trovò più tardi (e non solo in Francia) numerosi ed ardenti fautori. Di più esse provenivano da uno che godeva fama di professore incomparabile in quell'epoca gloriosa in cui da un capo all'altro d'Europa i giovani accorrevano in folla a Parigi per ascoltarvi dei maestri illustri. Esse finalmente erano dovute ad uno scienziato il cui zelo per le matematiche è indiscutibilmente attestato dalla fondazione, per parte sua, di una cattedra di matematica che per due secoli conservò il nome di *cattedra di Ramus* e trovò in Roberval il suo più degno occupatore. Tutte queste circostanze cospirarono indubbiamente a dotare le critiche di Ramus di una rinomanza, di una facoltà di diffondersi, epperò di un'influenza, quale per fermo non avrebbero posseduto ove fossero uscite dalla bocca di uno esclusivamente matematico, come era ad esempio il nostro Padre Saccheri. E chi può asserire che l'insofferenza per il giogo euclideo, che la Francia ha sempre rivelato più di ogni altra nazione civile, non abbia la sua prima radice in quelle celebri *Scholarum mathematicarum*, le cui numerose edizioni tramandarono ai più tardi nepoti di Ramus l'eco delle eloquenti parole con cui egli aveva tuonato contro il feticismo per il famoso Alessandrino? Ipotesi questa tanto più verosimile perchè a ragione

(3) « Nulla auctoritas rationis, sed ratio auctoritatis regina dominaque esse debet ». *Scholarum mathematicarum*, L. III, p 78.

fu notato [1] come nel sistema delle opinioni che vanno sotto il nome di *ramismo*, si trovi accoppiata una grandezza veramente filosofica del piano generale, ad una moltitudine di considerazioni importanti unicamente dal punto di vista didattico e che indubbiamente richiamarono sulle idee di Ramus l'attenzione degli insegnanti.

6. Che, come dissi, lo spirito di libero esame di cui era infiammato il Ramus, abbia continuato a lungo vivace ne' geometri suoi connazionali è rivelato indiscutibilmente da un celebre tentativo fatto da A. M. Legendre sul finire dello scorso secolo per rinnovare il metodo di esporre gli elementi della geometria [2], e dal fatto che gli *Élèments de gèomètrie* da lui per la prima volta pubblicati nel 1794 ebbero uno straordinario successo [3]. L'ebbero e lo meritarono, giacchè riguardo alla *forma*, se possono competere con Euclide per la chiarezza e la precisione del dettato, li superano per l'euritmia complessiva che dà ad essi la parvenza di un bel edificio diviso in due parti simmetriche destinate l'una alla geometria del piano e l'altra alla geometria dello spazio; e riguardo alla *sostanza* superano Euclide essendo più ricchi di materia e migliori in certi particolari [4]. Ma il grande analista francese, nello scrivere di geometria, non seppe dimenticare i prediletti suoi studii, sicchè nelle sue mani la geometria divenne vassalla dell'aritmetica, a cui chiese a prestito alcuni raziocinii e perfino delle denominazioni [5], e perdette dai suoi dominii tutta la teoria delle proporzioni. Se si aggiunge che, mentre Euclide schiva l'uso di ogni

---

(1) WADDINGTON, l. c. p. 345.

(2) Uno analogo era stato fatto poco prima nella vicina Ginevra da L. BERTRAND con il *Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques* (Génève 1778) ove fra l'altro si legge: « le plus sûr moyen de réunir différentes matières sous les différents chefs qui leur sont propres c'est de les discuter et les traiter au fond: du moins paroît-il qu'alors on ne mêlera pas tous les sujets, qu'on ne mettra pas à côté d'une démonstration sur les angles une démonstration sur les lignes, puis à côté d'une démonstrations sur les lignes une démonstration sur les surfaces et ainsi de suite, comme cela se voit presque continuellement dans Euclide » (Préface, p. XXI-XXII).

(3) Ne ho innanzi la XV edizione, uscita a Parigi nel 1862.
Che essi siano da designarsi, come fa il COURNOT (*Des institution d'istruction publique en France*, Paris 1864, p. 96) come una variazione di Euclide, ci sembra difficile ammettersi da chi non pensi doversi chiamare *euclideo* qualunque trattato *rigoroso* di geometria.

(4) È bene citare alcune delle buone innovazioni: introduzione delle *figure equivalenti*, distinzione tra figure eguali e figure simmetriche, nuova definizione di figura simile includente (a differenza di quella di Euclide) condizioni tutte fra loro indipendenti, ricerche importanti sul celebre postulato (cfr. VERONESE l. c. p. 570). Rileviamo ancora che LEGENDRE riconobbe per riprovevole il sistema euclideo di ammassare le definizioni al principio di ciascun libro, senza osare però di appigliarsi ad altro partito; invece si scostò da Euclide separando di regola i problemi dai teoremi.

(5) Es. invece di *rettangolo* di due rette, LEGENDRE scrive *prodotto*.

figura di cui il lettore ignora la costruzione, Legendre usa senza scrupoli le così dette *costruzioni ipotetiche;* e che questi accordò la preferenza all'infelice definizione (usata del resto anche da Kant) di retta siccome linea minima; si avranno argomenti sufficienti per rendersi conto del fatto che l'edificio di Legendre non tardò a mostrarsi di solidità incomparabilmente inferiore alla bellezza [1].

7. Sia per queste, sia per altre ragioni, certo si è che dopo la metà del secolo attuale parve che in Francia la sorte arridesse nuovamente ad Euclide, giacchè nel 1867 due geometri egregi, indipendentemente l'uno dall'altro, presero a combattere il metodo di Legendre, a vantare quello di Euclide, a consigliare l'adozione di un metodo modellato sull'antico per rialzare il livello dell'istruzione geometrica. Sono il Duhamel e l'Höuel.

Quegli, nella seconda parte [2] della sua lodatissima opera che tratta *Des méthodes dans les sciences de raisonnement*, criticò a fondo (v. p. 7) la definizione di retta preferita da Legendre [3] — nonchè quella di piano proposta da Simson (p. 12) — e propose (p. 5) d'interpretare quella di Euclide come l'asserzione dell'essere retta una linea determinata da due punti; espose (p. 312-339) un dopo l'altro i procedimenti di Euclide e Legendre per gettar le basi della geometria, concluse in favore del primo ed un terzo ne fece conoscere che del medesimo è una semplice modificazione; mise innanzi (p. 378) una nuova definizione per le figure simili [4] e (d'accordo in questo col Lacroix [5]) proclamò (p. 390) essere il *metodo dei limiti* l'unico rigoroso per introdurre nella geometria l'uso dell'infinito.

---

(1) Senza esplicitamente criticare, ma senza nemmeno accettare il metodo di Legendre accostandosi piuttosto ad Euclide, di cui però non condivideva tutte le opinioni, il Lacroix compose poco dopo Legendre dei nuovi Elementi che ebbero l'onore di parecchie edizioni. Essi non hanno però i lineamenti decisivi di un'opera originale, sicchè è malagevole determinare se e quale influenza esercitarono. Chi vuol conoscerne l'andamento generale, consulti i pregevoli *Essais sur l'enseignement en général et celui des mathématiques en particulier* (IV ed., Paris 1838) del medesimo autore.

(2) Le citazioni seguenti si riferiscono alla II ed. (Parigi 1877).

(3) Nella quale, al dire del Duhamel, interviene il concetto non semplice di lunghezza di una linea e la necessità di confrontare le lunghezze di due linee eterogenee.

(4) « Due sistemi di punti diconsi simili se è possibile situarli in modo che le congiungenti le coppie di punti omologhi passino per uno stesso punto il quale abbia da due punti corrispondenti qualunque distanze aventi rapporto costante ».

Il Prof. Giudice, dopo aver trovata da sè tale definizione, la pose a fondamento della teoria della similitudine esposta nelle sue opere, ad uso dei Licei, *Geometria piana* (Palermo 1890) e *Geometria solida* (Palermo 1891).

(5) *Essais* citati p. 287.

Meno particolareggiate sono le critiche che a Legendre mosse l'Höuel (1); il quale per converso si dichiarò più schiettamente favorevole ad Euclide, augurando che questo fosse adottato nuovamente come libro di testo, dopo averne rinfrescata la facciata (in modo simile a quello che il Lorenz fece in Germania), e presentando un saggio d'una esposizione razionale dei principii della geometria (2) destinata a giovani già resi famigliari con le figure geometriche mediante una speciale propedeutica analoga a quella che da noi fu designata (durante la breve sua vita) col nome di geometria intuitiva.

8. Questo conato dei due valorosi geometri francesi non arrecò i frutti da essi sperato; perocchè non nuove edizioni di Euclide nè un orientamento verso gli *Elementi* seguirono le loro proposte; e come rifacimento di Euclide non è al certo da riguardarsi il trattato (che oggi in Francia gode del maggior favore (3) e che anche presso di noi è conosciuto assai favorevolmente) di E. Rouché e C. de Comberousse (4). Il quale, attenendosi ai programmi ufficiali, non presenta novità rilevanti di metodo; esso però, mediante numerose appendici, si estende oltre agli stretti confini da questi segnati per raggiungere le regioni che sono di pertinenza della geometria proiettiva; ivi il nuovo è mescolato non combinato al vecchio, le idee moderne non esercitano pressochè alcuna influenza sul modo di concepire ed esporre i principii della geometria, sicchè a noi appare come rispecchiante un'epoca di transizione in cui la convinzione della necessità di cambiamenti non corrisponde alla forza per operarli. Esso poi sembra colpito dalle cri-

---

(1) Nell'*Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire ou Commentaire sur les XXXII premières propositions des Elements d'Euclide* (Paris 1867).

(2) Fondata su quattro postulati: invariabilità delle figure, postulato della retta, postulato del piano, esistenza di una parallela unica.

Giova osservare che il Duhamel (p. 10-11) e l'Houel (p. 41) concordano nel ritenere non necessario definire l'angolo; se si conviene di dire che due rette concorrenti formano un angolo, dopo avere definito che cosa s'intende per angoli eguali si può stabilire tutta la teoria degli angoli. Cfr. Veronese, l. c. p. 618-9.

(3) Come m'informa il D^r. Niewenglowski, membro del Consiglio superiore della pubblica Istruzione, i testi ora più seguiti in Francia sono Rouché et de Comberousse e Vaquant. Ebbero ivi anche molto fortuna la *Geometria* dell'Amiot e alcuni rifacimenti del Legendre quale sarebbe quello dovuto ai Fratelli delle Scuole cristiane.

(4) *Traité de géométrie. Conforme aux programmes officiels, renfermant un très-grand nombre d'exercices et plusieurs appendices consacrées à l'exposition des principales methodes de la géométrie moderne.* (La IV ed. è del 1879).

Nella prefazione vi è un rapido sguardo alla storia della geometria, ove si desidererebbe evitati certi errori gravi intorno alla storia della geometria greca pre-euclidea.

tiche mosse (indipendentemente gli uni dagli altri) dal Todhunter [1], dall'Hauck [2], dal Fiedler [3] e dal Veronese [4] il primo dei quali non voleva che lo scopo dell'insegnamento matematico fosse di somministrare una forte dose di notizie, mentre gli altri due protestavano contro chi presentava quali appendici dell'antica geometria elementare le teorie della geometria superiore.

9. Anche il vicino Belgio sembra essersi sottratto all'influenza dei due citati matematici francesi, giacchè ivi [5] i trattati generalmente usati sono quello di Legendre o genuino o con le variazioni che vi recarono Blanchet da un lato, Cambier dall'altro.

In condizioni simili trovasi la Spagna ove fin dal momento (1689) in cui il Padre Kresa tradusse Euclide in castigliano, tanto il traduttore quanto Antonio Hugo avvertirono la necessità di modificare certe parti degli *Elementi* [6]; ove oggi, piuttosto che Euclide, dominano i francesi [7]; ove finalmente vide la luce un pregevole trattato di geometria [8] in cui, dei canoni che col proprio esempio ha stabiliti Euclide, sono osservati quelli soltanto che è impossibile dimenticare senza porre in non cale i precetti della logica. Nel quale di più la scolastica divisione in due grandi sezioni della geometria, in piana e solida, è surrogata dall'altra in teoria della eguaglianza delle figure e teoria della proporzionalità geometrica, mentre la distinzione fra planimetria e stereometria è invocata soltanto per suddividere ulteriormente quelle due sezioni principali; spesso le proprietà delle figure piane si trovano accostate a quelle analoghe delle figure solide, ma con ciò non è ancora operata quella perfetta fusione fra la geo-

(1) « As a general principle it may be said that the older practice in education was to aim at the discipline of the mind, and that the modern seeks to store with informations ». Todhunter, *The Conflict of Studies and other Essays connected with Education*, London 1873, p. 31.

(2) In una conferenza tenuta nel 1876 dinanzi al 31° Congresso dei filologi *Ueber die Stellung der neueren Geometrie zur Euklidische Geometrie und ueber die Annahme des ersteren in den Lehrplan der zehnklassigen Realschulen und Realgymnasien.*

(3) *Sulla riforma dell' insegnamento geometrico* (Giornale di Matematiche. T. XVI, 1878), pag. 251.

(4) L. c. p. XX.

(5) Notizie favoritemi dal prof. Mansion dell'Università di Gand.

(6) Z. G. de Galdeano, *Estudios criticos sobra la generaciòn de los conceptos mathematicos. — Cuaderno 2° La evolucion de la Geometria euclidiana hasta los tiempos modernos* (Madrid 1870), pag. 23 e 36.

(7) Secondo le informazioni inviatemi dal Prof. Zoel G. de Galdeano dell'Università di Saragozza.

(8) Z. G. de Galdeano, *Geometria elemental conforme con el desarollo actual de las teorias modernas.* II ed., Toledo 1889.

metria piana e la geometria solida da cui solo risulta evidente la convenienza di togliere l'antica separazione; inoltre trovarono accesso nell'opera in questione teorie che ordinariamente non s'incontrano in opere elementari, quali sarebbe quella dei porismi di Euclide secondo la celebre restituzione fattane da Chasles.

Importanza incomparabilmente minore dal punto di vista scientifico, ha un'altra opera geometrica che vide le luce nella penisola iberica, e di cui facciamo qui menzione come di quella che rispecchia le idee governative in Portogallo sull'insegnamento della geometria elementare [1], ma a cui, appunto per essere condotta su linee generali segnate indipendentemente dalla volontà dell'autore, non si può rimproverare la poca originalità. Essa tuttavia non è un rifacimento di Euclide come non si può dire imitata dagli *Éléments* di Legendre: ha comuni con questi dei difetti e delle qualità, ma mentre ha pregi che questi non posseggono, presenta dei nèi che in questi non si scorgono: così se in essa si trova dimostrata l'eguaglianza di tutti gli angoli retti e la proprietà di qualunque circolo di essere bisecato da un diametro, contiene d'altronde la definizione di retta come linea avente in ogni punto la stessa direzione e caratterizzata dalla proprietà di segnare la minima distanza fra due suoi punti quali si vogliano, proprietà dalla quale l'autore si crede autorizzato a dedurre l'unicità della retta congiungente due punti, quasichè ogni problema di minimo avesse sempre una ed una sola soluzione [2].

10. Continuando l'iniziata rassegna delle condizioni rispetto ad Euclide dei vari paesi d'Europa, rileveremo [3] come in Grecia, sino a nove anni or sono, il governo non imponesse alcun testo, ma il preferito generalmente fosse quello del prof. Lakon dell'Università di Atene. Nel 1884 il governo bandì un concorso il quale fu vinto dall'Hazzidakis, il cui trattato venne adottato come testo sino allo

(1) J. A. Serrasqueiro, *Tratado de Geometria elementar composto seguendo o Programma official para o ensino d'esta sciencia nos Lyceus. Obra aprovada pelo Conselho superior de Instrucção publica.* 7ª edicçao. Coimbra 1870.

Ne debbo la conoscenza alla cortesia del Prof. F. Gomes Teixeira, direttore dell'Accademia politecnica di Porto.

(2) Aggiungasi che il trattato di cui è parola conduce fino a conoscere le proprietà fondamentali delle coniche (definite separatamente mediante le loro proprietà focali) ed i rudimenti della geometria descrittiva.

(3) Debbo queste notizie al Prof. Mazaraki insegnante a Cefalonia.

scorso anno, nel quale si ritornò al sistema di libertà; ma questo cesserà quando sarà chiuso il nuovo concorso recentemente bandito dal governo greco per un trattato completo di matematica elementare. Importa frattanto notare che i due testi citati del Lakon e dell'Hazzidakis (e così dicasi di altri meno pregiati) contengono la materia degli *Elementi* svolta in modo diverso da quello euclideo: sicchè nemmeno i compatriotti di Euclide si serbano ad essi fedeli!

Neppure in Olanda (1) v'è un trattato imposto dal governo o da tutti gl'insegnanti adottato; benchè molti riconoscano dei gravi inconvenienti in tale sistema, all'adozione del sistema contrario si oppone lo spirito d'indipendenza che caratterizza quella gagliarda nazione: se ivi Euclide è pressochè ignoto nella primitiva sua forma, i numerosi trattati che colà recentemente uscirono in luce hanno con i celebri *Elementi* molteplici e profonde rassomiglianze.

In condizioni analoghe trovasi la Svezia (2) ove ogni insegnante può adottare il testo che vuole, purchè sia approvato dall'*Ephorus* (vescovo), ma i libri in uso sono variazioni di Euclide.

Sono queste condizioni non dissimili da quelle in cui versa l'Italia per quanto concerne la istruzione classica (3); ne differiscono però perchè da noi l'uso di Euclide come libro di testo nei Licei, fu più tardi surrogato con quello di altri testi redatti con metodi analoghi (4) e questa libertà, di cui già si usufruì, tende a raggiungere il suo completo sviluppo, sicchè è ragionevole sperare essere questo un periodo che immediatamente preceda un trapasso a tempi migliori; e la comparsa di opere originali e ponderate, quali gli *Elementi di geometria* di Riccardo de Paolis e i *Fondamenti di geometria* di Giuseppe Vero-

(1) Informazioni attinte dal D.r J. de Vries.

(2) Notizie avute dal Prof. Björling dell'Università di Lund.

(3) La variabilità di programmi per l'insegnamento matematico negli Istituti tecnici ci impedisce di occuparci di questo.

(4) Cfr. Hoüel *L'enseignement de la géometrie élémentaire en Italie* (Nouv. Annales de Math., 1869, p. 278-283). Nell'epoca in cui questi regolamenti erano in vigore apparve (1869) un trattato che incontrò il favore del pubblico, sicchè ebbe numerose edizioni, a cui continuano ad aggiungersene di nuove; alludo agli *Elementi di Geometria di* A. Sannia ed E. d'Ovidio, i quali si attengono alla sostanza del metodo euclideo, ma contengono una materia assai più ricca e variata. Non meno numerose e frequenti furono le edizioni degli *Elementi di Geometria* di A. Faifofer, tanto diffusi nelle nostre scuole, i pregi dei quali sono attestati dai prof. Beltrami e Mansion, ai cui giudizii io mi rimetto non avendo avuto l'occasione di studiare quegli *Elementi*.

nese [1], dà fondata speranza che la patria nostra, col precetto quanto coll'esempio, contribuirà in modo degno delle sue tradizioni scientifiche al risolvimento delle questioni concernenti l'educazione geometrica.

11. In Danimarca [2], ove l' insegnamento geometrico raggiunge un livello di considerevole altezza [3], Euclide è ignoto ed è assai diffuso un trattato del Petersen. Nè miglior fortuna trova oggi in Russia [4] il celebre autore degli *Elementi*, giacchè questi indarno si cercherebbero o fra i libri (approvati, ma non imposti, dal governo) destinati all' insegnamento, oppure fra quelli ausiliarii per l' istruzione o consigliati per le biblioteche scolastiche; libri fra cui godono il maggior favore fra gli elementari quello del Davidoff [5] e fra i complementari quello di Watschenko-Zakhartchenko [6].

In modo simile alla Russia si comporta rispetto ad Euclide l'Austria-Ungheria [7]. Infatti le istruzioni date dal governo sono in gran parte ispirate ad idee opposte a quelle che presiedettero alle redazione degli *Elementi* [8] inoltre fra i numerosi trattati che il governo ha ivi approvati ad uso dell'insegnamento secondario [9], non si trova Euclide ed il più accreditato e diffuso ha analogie molte discutibili con gli *Elementi* euclidei. Alludiamo al *Lehrbuch der Geometrie für Ober-*

---

(1) Opera in cui mi piace rilevare (oltre all'eccellente esposizione storico-critica degli studi fatti intorno ai fondamenti della geometria) le osservazioni (p. 60-62; cfr. anche 615-618) che giustificano l'uso del movimento nella pura geometria, toccando esse una questione didattica controversa.

(2) Come m' informa il Dr. C. Juel.

(3) Ne fanno fede le questioni proposte negli esami, alcune delle quali vennero di recente riprodotte in questo *Periodico*.

(4) Notizie fornite dal mio dotto amico S. Dickstein.

(5) XVI Ed., Mosca, 1891.

(6) Kief, 1880.

(7) Da informazioni ricevute dal Prof. Emilio Weyr dell'Università di Vienna e dal Dottore Corrado Zindler.

(8) Infatti nell' *Instruction für den Unterricht in Geometrie und geometrischen Zeichen an der Unterrealschulen* si legge fra l'altro: « L'esperienza ha dimostrato che la difficoltà dell'insegnamento geometrico si accresce e che esso dà qualche risultato soltanto con la minoranza degli studenti più intelligenti ed attivi, quando il maestro insegna dogmaticamente e si limita ad esporre le proposizioni già bell' e preparate e a richiedere che gli studenti le ripetano ecc. ». « .... le definizioni non si devono esporre tutte al principio, ma devono venire distribuite in modo che sia già pronto tutto quanto è necessario per la loro intelligenza ». « ... ogni dimostrazione si presenti all'intuizione quasi con un carattere di necessità, invece che come un caso fortunato od un artificio d'un geometra intelligente ».

(9) *Verzeichniss der für die österreischen Mittelschulen zum Unterrichtsgebrauche allgemein zulässigen Lehrtexte und Lehrmittel nach den zuletzt approbierten Auflagen* (Wien 1888), p. 11, 24, 32, 39, 43 e 46.

gymnasien von Dr. F. Hočevar (Wien 1888). Nel quale l'autore (seguendo le traccie segnate dalla precitata *Instruction*), invece di partire come Euclide dal *punto* per costruire il proprio sistema di geometria, preferisce, come molti altri buoni insegnanti, prendere le mosse dal *solido geometrico;* invece di dare delle pseudo-definizioni di retta e di piano, suppone cognite al lettore queste figure e si limita ad enunciare come assiomi le loro proprietà caratteristiche; e soppperisce all'assenza di ordinamento logico dei concetti che si rimprovera ad Euclide coll'introdurre le più elementari corrispondenze geometriche (congruenza diretta ed inversa, simmetria rispetto a un centro o ad un asse, similitudine) in base a cui distribuisce le proposizioni da dimostrare (1). Aggiungiamo che egli definisce come il Duhamel e il Giudice (v. n. 7) la similitudine di due figure, e, seguendo l'esempio dato dal Baltzer, espone un teorema generale di Cavalieri (2) per dedurne con procedimento uniforme le espressioni della misura dei volumi di certi solidi. Si noti finalmente che la trigonometria rettilinea e la geometria analitica cartesiana si presentano nel libro dell'Hočevar come continuazioni dell'ordinaria geometria elementare.

12. Quantunque gli Stati Uniti d'America non abbiano contribuito in modo notevole al progresso delle matematiche pure, non sarà superfluo far sapere come anche ivi il movimento di distacco da Euclide abbia proceduto in maniera non dissimile da quello che notammo in varie contrade d'Europa (3). Allorquando essi non erano ancora indipendenti, ed anche nei primordii della libertà, l'influenza della madre patria era tuttora così possente che molte edizioni inglesi di Euclide vennero ristampate in America (p. 55), ed in alcune università, quali quelle della Carolina settentrionale nel 1795 (p. 79) e del Kentucky nel 1816 (p. 84), vi fu per parecchio tempo un corso di lezioni su gli *Elementi* di Euclide. Ma all'acquisto dell'autonomia politica seguì in America ben presto il raggiungimento

(1) Non sappiamo se dar lode all'autore per aver collocato di fronte (p. 84, 85, 88) certe proposizioni analoghe ma non correlative.

(2) « Due solidi sono equivalenti se si possono disporre in posizione tale che risultino equivalenti le sezioni fatte con piani di data giacitura ».

(3) Tolgo le notizie seguenti dall'opera di Florian Cajori intitolata *The Teaching and History of Mathematics in the United States* (Washington 1890), alla quale si riferiscono le citazioni di questo n..

della libertà di pensiero, ed in conseguenza vediamo prima Legendre surrogare Euclide (p. 120) (1) e dal 1885 questo venire generalmente abbandonato (p. 158) sicchè il Collegio di Princeton (di cui è notevole il conservatorismo in parecchi rami dell'insegnamento matematico) è l'unico importante istituto d'istruzione in cui si seguano gli *Elementi:* ma anch'esso dovrà, presto o tardi, cedere alla corrente generale perchè in una scuola ad essa collegata questi furono già abbandonati per il testo della Chauvenet (p. 163-165). Tutto ciò non è forse sufficiente per dimostrare che anche in America la posizione d'Euclide è assai scossa?

13. Con quale venerazione fosse considerato Euclide nell'antica Germania, con quanto ardore fosse ivi promosso lo studio degli *Elementi*, è dimostrato dalla storia tutta dell'insegnamento matematico ivi impartito (2) e se non altro dal fatto che un opera stampata nel 1588 in tedesco antico viene attribuita a « Magister Johann Scheybl, der löblichen universität zu Tübingen, *des Euclidis* und Arithmetic Ordinarien » (3). Ma, quale attitudine ha assunto la Germania moderna di fronte ad Euclide? A tale questione non è difficile porgere oggi una risposta sicura invocando l'aiuto di due opere recenti.

Una di esse (4) è destinata a servire di guida al giovane che, uscito dall'università, è chiamato a professare in una scuola secondaria. Quantunque io credo necessario fare alcune riserve prima di accettare per buono il modo con cui sono trattate e risolte talune questioni e, in particolare, ritenga indispensabile avere sempre presente che le illazioni dell'autore furono tratte in base al frutto di esperienze fatte nella sola Germania; pure non si può che tributare larga ed incondizionata lode all'autore il quale, dopo un lungo insegnamento, raccolse gli enunciati e schizzò almeno le soluzioni dei

(1) Ad esempio nel Collegio di Darmouth, fondato nel 1769, dal 1839 Legendre fu preso invece di Euclide per libro di testo (p. 166) e se nell'Università del Mississipi Euclide è consigliato assieme ad altri testi (p. 223), in quella di Michingam il vecchio Alessandrino, a differenza di Legendre, non potè mai ottenere l'accesso (p. 250).

(2) Veggasi S. Günther *Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525* (Berlin 1887).

(3) Kästner, *Geschichte der Mathematik*, t. I. (Göttingen 1796) p. 104. Mi piace rilevare che questo autore riteneva che « die neueren Werke des Geometrie verlieren umsomehr an Klarheit und Gründlichkeit, je weiter sie sich von Euklid entfernen ».

(4) *Anleitung zum mathematishen Unterricht am höheren Schulen, herausgegeben von* Dr. Fr. Reidt, Professor am Gymnasium zu Hamm (Berlin 1886).

più cospicui problemi didattici che s'impongono e formano il tormento di chiunque è destinato a rendere famigliari i giovani con la geometria e l'aritmetica. Anzi, siccome sono tanto scarse le opere congeneri e tanto vivamente ne è sentito il bisogno, così io non voglio lasciarmi sfuggire quest'occasione per consigliare lo studio del lavoro del Reidt a tutti coloro che sono ascritti da poco o stanno per essere arruolati nella falange dei docenti di matematica elementare e desiderano una guida per sormontare alle più serie difficoltà didattiche o uno stimolo a rivolgere ad esse la propria attenzione.

Nell'altra (1) delle opere a cui sopra allusi, sono riassunte le numerose discussioni fatte in Germania intorno a tutto che concerne l'insegnamento della geometria elementare (2), opera diligente ed utile come ricco repertorio di notizie sull'argomento, eccellente opera di consultazione a cui, come al Reidt, può farsi un solo appunto (che è piuttosto un lamento) quello cioè di non avere una base che si estenda al di là dei confini della patria di Arminio (3).

14. Dallo scritto dello Schotten emerge (p. 10-11, 46, 53-4, 64, 79, 98) che Euclide domina ancora in Germania; ma vi domina, non già come un sovrano scelto da tutto un popolo e ad esso gradito, ma piuttosto come un capo di cui si discutono e spesso si riprovano gli atti, che si anela a rovesciare e si sopporta nell'attesa di uno migliore con cui sostituirlo. Di tale stato d'animo fanno fede le deliberazioni prese da assemblee di persone competenti (4), l'espressione delle necessità di far subire all'insegnamento elementare l'influenza delle idee che governano le parti superiori della scienza (5), ed i tentativi già fatti per tradurre in realtà questo desiderio (6).

---

(1) H. SCHOTTEN, *Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie.* Leipzig 1890.

(2) Esso ebbero per teatro principale la *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts* dell'HOFFMANN.

(3) Sono ivi considerati, fra i trattati stranieri, i soli di LEGENDRE, FRANCOEUR e VAN SWINDEN perchè tradotti in tedesco.

(4) Ad esempio la sezione matematica della *Schulmännerversammlung* tenuta a Lipsia nel 1872 deliberava « dass der Weg des Euklids absolut zu verlassen ist »; mentre nella 31ª Riunione dei Filogici si concludeva: « Im Unterricht der Elementargeometrie bleibt die Euklidische Geometrie dem Systhem nach bestehen, wird aber im Geist des neueren Geometrie reformiert ».

(5) Cfr. i lavori citati di HAUCK e FIEDLER.

(6) Secondo lo SCHOTTEN (p. 19) essi trovansi nei trattati seguenti: SCHLEGEL, *Lehrbuch der Elementar-mathematik* II (Wolfenbüttel 1879), H. MÜLLER, *Lehrbuch der ebenen Geometrie* (Leipzig 1879), KRUSE, *Elemente der Geometrie* (Berlin 1875), BECKER, *Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage*, WORPITZKY, *Elemente der Geometrie* (Berlin 1871), HENRICI und TREUTLEIN, *Lehrbuch der Elementargeometrie* (Leipzig 1881).

Sembra però che i tempi non siano ancor maturi per ottenere la riforma, perchè, malgrado la libertà di scelta ivi lasciata dal governo [1], i testi più diffusi sono ancor quelli imitati da Euclide [2]; onde non è priva di base la congettura essere questo un momento di preparazione a tempi migliori.

15. Per quale via verranno raggiunti quegli ideali che la Germania, come le altre nazioni, cercano irrequietamente di toccare, l'avvenire dirà. Noi intanto crediamo opportuno di non passare sotto silenzio come dalle citate opere di Schotten (v. p. 25, 37, 67, 91 e 109) e di Reidt (p. 168-171) risulti essere convincimento assai diffuso in Germania che l'insegnamento geometrico scientifico debba essere preceduto da una speciale propedeutica destinata a famigliarizzare i discepoli con le figure geometriche e con quelle fra le loro proprietà che ci sono rivelate dai nostri sensi [3]; propedeutica la quale starebbe alla geometria scientifica in un rapporto analogo a quello dell'atto d'intuire una verità geometrica all'opera intellettuale di dimostrarla: propedeutica la quale, per dar buoni frutti, dovrebbe essere affidata ad insegnanti provetti, i quali, a parer nostro, dovrebbero modellare il loro discorso su quel celebre passo del *Menone* di Platone [4] ove il divino filosofo presenta Socrate quando, volendo provare essere l'arte d'insegnare identica a quella di ridestare dei ricordi, guida uno schiavo intelligente a scoprire le proprietà di maggiore rilievo possedute da una figura geometrica complicata.

Un altro fatto che importa notare è l'avversione generale per l'esplicita enunciazione di tutti i postulati della geometria e la dimostrazione di proposizioni di verità intuitiva.

Che la prima ripugnanza sia ingiustificata vedrà chiunque osserva che, siccome la geometria è una scienza la quale parte da alcuni dati sperimentali e procede poi mediante il puro raziocinio, così è indispensabile a chiunque vuol misurare la solidità delle conclusioni a cui

---

(1) Libertà che sarebbe tolta se comparisse un eccellente testo, come m' informa il professore Lampe di Berlino.

(2) Cfr. i dati statistici esposti nella puntata di gennaio 1880 del *Centralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung in Preussen;* inoltre Reidt, p. 84 e seg., Schotten, p. 21, nota 2.

(3) Il Reidt (p. 168) delinea anzi un piano di tale insegnamento.

(4) Esso trovasi, tradotto in italiano, nel n. 59 del I Libro del mio citato lavoro sulla storia della matematica greca.

perviene, di avere schierate sott'occhio le premesse da cui esse derivano. Nè valgono a giustificare tale avversione ragioni pratiche di ordine didattico, chè per nessun conto, nell'insegnamento matematico, il rigore deve cedere dinanzi al desiderio di evitare le difficoltà.

Quanto poi alla tendenza verso il sopprimere i ragionamenti destinati a dimostrare proposizioni la cui verità tutti concedono, esso è pienamente giustificato quando si ritiene essere còmpito esclusivo del maestro quello di somministrare un certo corredo di cognizioni. Ma siccome si esige oggi invece che egli metta in chiaro i legami che intercedono fra le varie proposizioni, affinchè sia allo studioso rivelata della geometria non soltanto l'apparenza esterna, ma eziandio l'intima costituzione, così dimostrare un teorema serve non soltanto a metterne fuor di dubbio la verità, ma anche a dimostrarne la connessione con gli altri [1]; dimostrare dunque un teorema facile serve meno a legittimarne l'introduzione nella geometria, che a chiarire la sua ragione di essere, i suoi legami con altre verità e a dimostrare l'impossibilità di negarlo in cui trovansi coloro che accettarono queste ultime [2]. Si aggiunga che chiamando troppo spesso a consiglio la testimonianza de' sensi per decidere la verità o meno di una proposizione di geometria, si spegne nell'alunno la facoltà di dubitare ammettendo la verità di proposizioni che i sensi farebbero dichiarare vere ma che la ragione è impotente a dimostrar tali [3].

16. La notata attitudine della Germania di fronte ad Euclide risulta anche dall'esame di alcune pregiate opere didattiche [4].

Citiamo come prima fra queste gli *Elementi di Matematica* di R. Baltzer, i quali, benchè dovuti ad uno dei più eruditi matematici dei nostri tempi e benchè serbino traccia e diano notizia dei metodi antichi e dell'antica nomenclatura, hanno un'impronta moderna che

---

(1) Io quindi non credo, col Dauge, che « une démonstration n'a d'autre objet que de faire naître dans l'esprit le sentiment bien net de la vérité » (*Leçons de methodologie mathématique à l'usage des Élèves de l'École normale des sciences annexée à l'Université de Gand*, 1881-82, pag. 5).

(2) Questo modo di giudicare concorda con quello di Kummer, secondo il quale: « der Geist der Mathematik besteht eben darin, zu beweisen, dass, wenn das Eine es ist, so muss unumstösslich das Andere so sein; nicht aber zu zeigen dass das Erste wirklich so ist, wie wir annahmen ».

(3) Superfluo avvertire che in questo momento il nostro pensiero si volge alle considerazioni che diedero la vita alla geometria non euclidea, ad accoglier le quali occorre che la mente del giovane sia pronta, anzi favorevolmente disposta.

(4) Mi duole di non essere in grado di estendere questa breve rassegna sino al trattato di H. Müller (v. una nota al n. 14) al quale Clebsch attribuiva grande valore.

li differenzia dai libri congeneri anteriori e specialmente da quello di Euclide. È superfluo l'arrestarci a delinearne i contorni generali perchè tutti in Italia li conoscono attraverso la traduzione fattane dal Cremona; d'altronde la forma stringata in cui sono scritti e l'enorme quantità di materia che racchiudono, distribuita in maniera insolita e non a tutti gradita, li rende poco adatti a servir di testo nelle scuole di mezzo. Vogliamo soltanto notare che ivi è accordato il posto che merita allo studio dei segni da attribuirsi alle figure (siano queste lineari, superficiali o solide) fatto in base alle considerazioni che è merito del Möbius di avere per primo svolto nell'intento di attribuire alle figure geometriche tutta la loro generalità (ad es. per non essere obbligati ad escludere le figure a contorno intrecciato).

Più recente, meno nota in Italia, ma pure pregevolissima è la seconda delle opere tedesche a cui crediamo opportuno di concedere qui un posto: è il *Lehrbuch der Elementar-Geometrie* (1) di Henrici e Treutlein. Nel quale gli autori si prefissero di evitare l'assenza di distribuzione logica dei concetti lamentati in Euclide (2) e vi riuscirono scegliendo come principale criterio di distribuzione dei teoremi i metodi di dimostrazione. Ad esempio riunirono in una sezione le proposizioni che si dimostrano mediante rotazioni attorno ad un punto fisso, in altra quelle che si dimostrano considerando figure simmetriche rispetto ad una retta, in altra ancora quelle che si dimostrano con scorrimenti o movimenti in generale, abbandonando però questo criterio a favore di altri quando ciò riusciva vantaggioso. Con tal metodo gli autori riescono ad introdurre così naturalmente in tante parti superiori delle matematiche che sembra per loro merito realizzato il sogno di colmare l'abisso esistente fra l'insegnamento universitario ed il secondario. Nemici come siamo di qualunque concessione fatta con sacrificio del rigore geometrico, siamo per converso favorevoli a qualunque mezzo lecito per ravvivare e tener desto l'interesse dei giovani per la geometria, interesse di regola

(1) I. Thl., 2.e Aufl., Leipzig 1891; II Thl. 1882; III Thl. 1883.

(2) « Mit Recht gelten Euklids Elemente als einen Muster systematischer Anordnung der Schlüsse, insofern jeder Lehrsatz da steht wo die Prämissen zu seinem Beweise vollständig gegeben sind; ein Muster von logischer Anordnung der Begriffe aber sind jene Elemente nicht, da ihnen eine logische Eintheilung des Stoffes fehlt ».

posseduto soltanto da pochi eletti: onde ci sembra costume degno di venire ammirato ed imitato quello dei citati autori di accennare alle applicazioni che delle teorie esposte furono fatte alla geografia (1), alla cristallografia e all'arte del disegno. Aggiungiamo che la trigonometria si presenta nel *Lehrbuch* in discorso come ausiliare della geometria di misura, il cui intervento è necessario quando nei dati o nelle incognite delle questioni geometriche si trovino degli angoli: è questo un sistema che va diffondendosi ognor più siccome quello che corrisponde alla natura delle cose.

Da tutto ciò risulta palese la nostra convinzione che i professori Henrici e Treutlein diedero con la loro opera un contributo importantissimo alla soluzione dei problemi attuali dell'insegnamento geometrico elementare (2), in particolare abbiano posto fuori di questione la possibilità di far conoscere sino dagli elementi, illustrandola mediante esempii speciali, la teoria delle corrispondenze geometriche, quella teoria cioè che indubbiamente è la chiave di volta della parte più alta dell'edificio geometrico moderno.

Tale possibilità è confermata da un altro recente libretto (3), piccolo di mole (4) ma non di valore, nel quale è fatto largo uso della simmetria rispetto a una retta ed inoltre è fatto conoscere un modo facile per dar notizia ai principianti degli importanti studii a cui diede luogo il V postulato d'Euclide (5).

Superfluo che avvertiamo da ultimo come il libro del Rausenberger (6) di cui abbiamo già discorso in questo *Periodico* (7) accentui sempre più il dissidio fra la dotta Germania ed Euclide.

---

(1) Ad es. nella II Parte si legge una relazione abbastanza particolareggiata della triangolazione del granducato di Baden, accompagnata dalla relativa carta geografica.

(2) Non possiamo quindi capacitarci come siasi preferito tradurre in italiano altre opere di dubbio valore e certamente dotate di originalità assai minore nè capaci, come questa, di aiutare il giovane anche durante i primordi della sua istruzione universitaria.

(3) M. Simon, *Die Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf die absolute Geometrie*. (Strassburg i. E. 1890).

(4) Non è un trattato, perchè l'A. ritiene che lo scolaro non ne abbia bisogno.

(5) Osserva a questo proposito l'autore: « Ein Jahrhundert ist verflossen, seit Gauss die Folgerungen aus der Nichtannahme des Parallelaxioms sämmtlich gezogen, und noch hat die Schule von den tiefsinnigen Betrachtungen des grössten Mathematikers sowie seiner Nachfolger Lobatschewsky, Bolyai Vater und Sohn, Riemann und Helmholtz, etc. so gut wie gar keine Kenntnis genommen ».

(6) *Die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene, systhematisch und kritisch behandelt* (Leipzig 1887). Come il titolo indica e l'autore dichiara, non è un trattato pei principianti, ma un saggio di una trattazione metodica delle figure costituite da punti, rette e piani.

(7) Anno III, 1888, p. 29.

17. Così adunque in ogni angolo dell'Europa e dell'America, ogni anno arrecava nuove reclute alla schiera degli oppositori di Euclide; anzi molti dei giovani combattenti si presentavano muniti di nuove e più potenti armi, e tendevano a surrogare all'antica e sterile critica demolitrice la feconda critica ricostruttrice.

Ultimo asilo pel vecchio Alessandrino fu l'Inghilterra ove, sia a cagione del culto per tutto che avesse attinenza alla coltura classica (1), sia per l'immutabilità delle disposizioni governative regolatrici certi celebri esami (2), egli trovava miriadi di ammiratori e commentatori, di traduttori e di editori. Ma anche qui lo spirito di libero esame, invadente ogni campo nel nostro secolo, rese meno sicura la posizione di Euclide. Già fin dal 1849 il De Morgan faceva rilevare (3) uno ad uno i difetti degli *Elementi* e Tyndall irriverentemente (ma con piena ragione) osservare che dalla definizione di Euclide nessuno poteva formarsi l'idea di retta. E circa venti anni dopo Wilson (4) e Jones (5) dichiaravano la necessità di abbandonare il metodo euclideo. Finalmente nel 1869 un uomo, a cui tutti s'inchinavano, fece echeggiare il grido di rivolta dinanzi alla assemblea delle più spiccate intelligenze britanne (6); e tale e tanta era la gloria che constellava la fronte di chi innalzava il vessillo della ribellione che egli ben tosto raccolse attorno a sè un drappello di seguaci, uno dei quali (il sig. Levett) poco dopo (cioè nella primavera del 1870) proponeva, mediante una lettera inserita nel giornale *Nature,* la fondazione di un sodalizio avente per intento la riforma dei metodi per insegnare la geometria.

---

(1) Questa tendenza fu rilevata e criticata fin dal principio del nostro secolo da Byron, il quale, in alcuni *Thoughts suggested by a College Examinations*, rilevava quanto d'interessante si tralasciava in conseguenza di insegnare ai giovani e, fra l'altro, scriveva:

« Happy the youth in Euclid's axiom tried
« Though little versed in any art beside. »

(2) Cfr. TODHUNTER *The mathematical Tripos* (The conflict of Studies and other Essays, London 1873, p. 193-242) e W. W. Rouse Ball *A History of Study of Mathematics at Cambridge* (London 1889).

(3) Nel *Companion to the British Almanak.*

(4) *Educational Times* 1868. Quest'articolo, che venne letto dall'autore dinanzi alla Società matematica di Londra per ottenere che essa si ponesse a capo del moto rivoluzionario, fu tradotto in italiano e pubblicato nel T. VI (1868) del *Giornale di Matematiche* col titolo *Euclide come testo di geometria elementare;* gli argomenti e le conclusioni ne vennero combattute da F. Brioschi e L. Cremona nel vol. seguente del *Giornale* stesso.

(5) *On the Unsuitableness of Euclid as a Text-Book of Geometry*. London.

(6) Alludo al discorso di SYLVESTER per inaugurare l'adunanza della *British Association for the Advancement of Science.*