ALCUNI TEOREMI DI GEOMETRIA

1. Teo. *Se tre trasversali condotte pei vertici di un triangolo passano per lo stesso punto, le loro coniugate isogonali passano egualmente per lo stesso punto* (*).

Siano $A B C$ (Tav. I, fig. 1ª) il triangolo fondamentale ed $A A'$, $B B'$, $C C'$ tre trasversali che si tagliano in M'. Se $A A''$ è la coniugata isogonale di $A A'$ rispetto all'angolo $B A C$, dalle due coppie di triangoli $B A A'$, $A'' A C$ e $B A A''$, $A' A C$ cogli angoli in A eguali, si ha

$$\triangle B A A' : \triangle A'' A C = (B A \,.\, A A') : (A'' A \,.\, A C)$$

e

$$\triangle A' A C : \triangle B A A'' = (A' A \,.\, A C) : (B A \,.\, A A''),$$

da cui dividendo termine a termine, dopo aver osservato che i triangoli di eguale altezza stanno fra loro come le basi, segue

$$\frac{BA'}{A'C} : \frac{A''C}{BA''} = \frac{BA \,.\, AA'}{A'A \,.\, AC} : \frac{A''A \,.\, AC}{BA \,.\, AA''} = \frac{\overline{BA}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Abbiamo dunque

[1] $\frac{BA'}{A'C} = \frac{A''C}{BA''} \cdot \frac{c^2}{b^2}$ e analogamente $\frac{CB'}{B'A} = \frac{B''A}{CB''} \cdot \frac{a^2}{c^2}$, $\frac{AC'}{C'B} = \frac{C''B}{AC''} \cdot \frac{b^2}{a^2}$.

Moltiplicando membro a membro risulta

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = \frac{A''C}{BA''} \cdot \frac{B''A}{CB''} \cdot \frac{C''B}{AC''}. \tag{2}$$

Ora, in seguito all'ipotesi, pel teorema di Ceva, il primo membro della [2] è eguale ad 1, quindi

$$\frac{BA''}{A''C} \cdot \frac{CB''}{B''A} \cdot \frac{AC''}{C''B} = 1,$$

cosicchè anche le tre trasversali $A A''$, $B B''$, $C C''$ passano per il medesimo punto M''.

(*) La dimostrazione che diamo di questo noto teorema [Cfr. ad es. *Periodico*, vol. VI, p. 25], che non abbiamo vista altrove, ci pare notevole per le conseguenze a cui dà luogo.

Cor. 1°. Se sia O il centro del cerchio circoscritto al $\triangle ABC$ ed AA'' la coniugata isogonale della congiungente AA' di O col vertice A, rispetto all'angolo BAC, è noto che AA'' è l'altezza del triangolo relativa a BC. Essendo $BA'' = c \, . \cos B$, $A''C = b \, . \cos C$, dalla prima delle [1] segue

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{b \, . \cos C}{c \, . \cos B} \cdot \frac{c^2}{b^2} = \frac{c \, . \cos C}{b \, . \cos B} = \frac{\text{sen } 2C}{\text{sen } 2B} .$$

2°. Suppongasi che A', B', C' siano i punti medi dei lati del triangolo ABC, allora AA'', BB'', CC'' saranno le coniugate isogonali delle mediane (*simediane*) e si avrà dalle [1]

$$\frac{BA''}{A''C} = \frac{c^2}{b^2}, \qquad \frac{CB''}{B''A} = \frac{a^2}{c^2}, \qquad \frac{AC''}{C''B} = \frac{b^2}{a^2} .$$

Il punto M' è in questo caso il baricentro del triangolo ed M'', suo coniugato isogonale, il punto di Lemoine.

2. Dalla relazione $\frac{BA'}{A'C} = \frac{A''C}{BA''} \cdot \frac{c^2}{b^2}$ e consimili, scaturisce una costruzione dal punto $M^{(p)}$ di potenziale d'ordine p (*), ossia di quel punto che congiunto coi vertici del triangolo ABC dà origine a trasversali che dividono i lati in parti proporzionali alle potenze p^{esime} dei lati adiacenti.

Pongasi infatti $\frac{A''C}{BA''} = \frac{c}{b}$, cosicchè A'' è il punto isotomico del piede D della bisettrice dell'angolo A (simmetrico di D rispetto a B e C); chiamando $A^{(3)}$ il punto in cui la coniugata isogonale di AA'', rispetto all'angolo BAC, taglia BC, si avrà

$$\frac{BA^{(3)}}{A^{(3)}C} = \frac{A''C}{BA''} \cdot \frac{c^2}{b^2} = \frac{c^3}{b^3} .$$

Se designamo ora con A'' il punto isotomico del piede E della simediana di ABC relativa a BC e con $A^{(4)}$ il piede della trasversale coniugata isogonale di AA'' rispetto all'angolo BAC, poichè allora $\frac{A''C}{BA''} = \frac{c^2}{b^2}$, si avrà

$$\frac{BA^{(4)}}{A^{(4)}C} = \frac{A''C}{BA''} \cdot \frac{c^2}{b^2} = \frac{c^4}{b^4} .$$

(*) Così denominato dal Prof. G. de Longchamps che ne studiò le proprietà nella nota: *Généralités sur la Géométrie du Triangle* (Jour. de Math. Élémen., 2me Série, 10me Année, 1886).

In generale indicando con A'' l'isotomico del punto $A^{(p-2)}$ di BC pel quale $BA^{(p-2)} : A^{(p-2)}C = c^{p-2} : b^{p-2}$, il piede $A^{(p)}$ della trasversale isogonale di AA'' rispetto all'angolo A, dividerà BC così che

$$\frac{BA^{(p)}}{A^{(p)}C} = \frac{A''C}{BA''} \cdot \frac{c^2}{b^2} = \frac{c^{p-2}}{b^{p-2}} \cdot \frac{c^2}{b^2} = \frac{c^p}{b^p}.$$

Il punto $M^{(p)}$ risulta in tal modo determinato.

Le costruzioni da fare per trovare $A^{(p)}$ quindi $M^{(p)}$, sono le seguenti. Se p è dispari si conduca la bisettrice AD (fig. 2^a) dell'angolo BAC e si trovi il punto D_1 tale che $BD_1 = DC$. Si conduca AD_1 e si tracci $\angle A^{(3)}AC = BAD_1$ (è utile per ciò, dopo aver descritto con centro A e raggio arbitrario, p. es. AD, un arco di cerchio che incontra AD_1 in D_2, prendere sul medesimo, in direzione opposta a DD_2, arc. $DD_3 =$ arc. DD_2 e tirare AD_3 che taglia BC in $A^{(3)}$). Si prenda ora $BA_1^{(3)} = A^{(3)}C$, si tiri $AA_1^{(3)}$ che interseca l'arco tracciato in D_4 e si tagli dall'altra banda di D, sul medesimo, arc. $DD_5 =$ arc. DD_4, la retta AD_5 incontrerà BC nel punto $A^{(5)}$ e così di seguito.

Se invece p è pari si divida BC per metà in E (fig. 3^a) e, come precedentemente, si faccia $\angle A^{(2)}AC = BAE$, poi sul lato BC si prenda $BA_1^{(2)} = A^{(2)}C$. Formato $\angle D_4AC = BAA_1^{(2)}$, il punto d'incontro del suo lato AD_4 con BC sarà $A^{(4)}$, e così via.

Trovando in modo analogo su CA il punto $B^{(p)}$ per cui $CB^{(p)} : B^{(p)}A = a^p : c^p$, nell'intersezione delle due rette $AA^{(p)}$, $BB^{(p)}$ si trova il punto $M^{(p)}$.

3. Supponiamo ora che i lati BC, CA, AB del $\triangle ABC$ siano tagliati da un cerchio rispettivamente nei punti A', A''; B' B''; C', C'' (fig. 4^a) e pongasi $BA' = \alpha$, $CB' = \beta$, $AC'_1 = \gamma$. Proponiamoci di determinare, in funzione di α, β, γ e dei lati a, b, c del triangolo fondamentale, le misure dei tre seguenti BA'', CB'' AC''.

Abbiamo a tal uopo le tre equazioni lineari

$$[3] \quad \alpha . BA'' = \gamma'(c - AC''), \quad \beta : CB'' = \alpha'(a - BA''),$$
$$\gamma . AC'' = \beta'(b - CB''),$$

dove α' β' γ' stanno ad indicare le lunghezze $A'C$, $B'A$, $C'B$.

Da queste si deduce

$$[4]\quad \begin{aligned} BA'' = \alpha_1 &= \frac{\alpha'\beta'\gamma' \cdot a - \beta\beta'\gamma' \cdot b + \beta\gamma\gamma' \cdot c}{\alpha\beta\gamma + \alpha'\beta'\gamma'} = \\ &\frac{(a-\alpha)(b-\beta)(c-\gamma) - \beta(b-\beta)(c-\gamma) \cdot b + \beta\gamma(c-\gamma) \cdot c}{\alpha\beta\gamma + (a-\alpha)(b-\beta)(c-\gamma)}, \\ CB'' = \beta_1 &= \frac{\alpha'\beta'\gamma' \cdot b - \gamma\gamma'\alpha' \cdot c + \gamma\alpha\alpha' \cdot a}{\alpha\beta\gamma + \alpha'\beta'\gamma'}, \\ AC'' = \gamma_1 &= \frac{\alpha'\beta'\gamma' \cdot c - \alpha\alpha'\beta' \cdot a + \alpha\beta\beta' \cdot b}{\alpha\beta\gamma + \alpha'\beta'\gamma'} \ (^*). \end{aligned}$$

Cerchiamo ancora in funzione dei tre segmenti α, β, γ e degli elementi del $\triangle ABC$ il raggio ρ del cerchio $A'B'C'$.

Conducansi dal centro O le rette OD, OF perpendicolari ai lati BC, AC; dal triangolo BDF si ha $\overline{FD}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{BD}^2 - 2BF \cdot BD \cos B$ e poichè BO è il diametro del cerchio circoscritto al $\triangle BDF$ risulterà $BO = FD : \text{sen}\, B$, onde osservando che $BA' . BA''$ eguaglia il quadrato della tangente tirata da B al cerchio O, si avrà

$$\rho^2 = \overline{BO}^2 - BA' \cdot BA'' = \frac{\overline{BF}^2 + \overline{BD}^2 - 2\,BF \cdot BD \cos B - BA' \cdot BA'' \cdot \text{sen}^2 B}{\text{sen}^2 B}$$

Ma $BF = c - \frac{\gamma + \gamma_1}{2}$, $BD = \frac{\alpha + \alpha_1}{2}$, per modo che si trova per l'espressione cercata

$$[5]\ \rho^2 = \frac{(2c-\gamma-\gamma_1)^2 + (\alpha+\alpha_1)^2 - 2(2c-\gamma-\gamma_1)(\alpha+\alpha_1)\cos B - 4\alpha\alpha_1 \text{sen}^2 B}{4\,\text{sen}^2 B},$$

dove α_1, β_1, γ_1 hanno i valori [4].

4. Teo. *Se tre trasversali* AA′, BB′, CC′ *tirate pei vertici di un triangolo* ABC *s'incontrano nello stesso punto* M′, *il cerchio passante per* A′, B′, C′ *taglia i lati del triangolo in altri tre punti* A″, B″, C″ *tali che le rette* AA″, BB″, CC″ *passano per il medesimo punto* M″ (fig. 5ª).

Infatti si ha

$$BA' \cdot BA'' = BC' \cdot BC'', \quad CB' \cdot CB'' = CA' \cdot CA'',$$
$$AC' \cdot AC'' = AB' \cdot AB''.$$

(*) Si può osservare che come le [3] sono deducibili l'una dall'altra mediante permutazione circolare, sono deducibili nello stesso modo l'uno dall'altro i valori di BA'', CB'', AC''.

Moltiplicando queste tre eguaglianze membro a membro ed osservando che, in seguito all'ipotesi, dal teorema di Ceva consegue

$$BA' \,.\, CB' \,.\, AC' = A'C \,.\, B'A \,.\, C'B,$$

si deduce

$$BA'' \,.\, CB'' \,.\, AC'' = A''C \,.\, B''A \,.\, C''B$$

cosicchè pel teorema inverso risulta quanto d. d..

Osservazione. — Seguitando a denotare con $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ i sei segmenti BA', CB', AC', $A'C$, $B'A$, $C'B$, poichè si ha ora $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$, i valori [4] divengono

$$[6]\quad BA' = \alpha_1 = \frac{\alpha\gamma \,.\, a - \beta'\gamma' \,.\, b + \gamma\gamma' \,.\, c}{2\alpha\gamma} = \frac{\alpha'\beta' \,.\, a - \beta\beta' . b + \beta\gamma . c}{2\alpha'\beta'}, \text{ ecc..}$$

5. Supponendo che A', B', C' siano i piedi delle altezze del $\triangle ABC$, si ha in tal caso

$$\alpha = c\cos B,\quad \alpha' = b\cos C;\quad \beta = a\cos C,\quad \beta' = c\cos A;$$
$$\gamma = b\cos A,\quad \gamma' = a\cos B.$$

Sostituendo nella [6] si trova

$$BA'' = \frac{abc \,.\, \cos A\cos B - abc \,.\, \cos A\cos B + abc\cos A\cos B}{2bc\cos A\cos B} = \frac{a}{2},$$

$$CB'' = \frac{b}{2},\quad AC'' = \frac{c}{2}$$

e sostituendo nella [5], ponendo mente che $2c - \gamma - \gamma_1 = 2c - b\cos A - \frac{c}{2} = c - b\cos A + \frac{c}{2} = a\cos B + \frac{c}{2}$:

$$\rho^2 = \frac{\left(a\cos B + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(c\cos B + \frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(a\cos B + \frac{c}{2}\right)\left(c\cos B + \frac{a}{2}\right)\cos B - 2ac\cos B\,\mathrm{sen}^2 B}{4\,\mathrm{sen}^2 B};$$

sviluppando e riducendo si giunge facilmente al valore

$$\rho^2 = \frac{a^2 + c^2 - 2ac\cos B}{16\,\mathrm{sen}^2 B} = \frac{1}{4}\left(\frac{b}{2\,\mathrm{sen}\,B}\right)^2 = \frac{R^2}{4}.$$

Si ha dunque $\rho = \frac{R}{2}$ con R raggio del cerchio circoscritto al triangolo ABC.

Si chiami ora A_1 il punto in cui l'altezza AA' taglia il cerchio $A'B'C'$, H l'ortocentro del triangolo ABC e si osservi che i quattro punti B, A', H, C' sono conciclici. Segue

$$AA_1 \,.\, AA' = AC'' \,.\, AC',\quad AH \,.\, AA' = AB \,.\, AC',$$

da cui dividendo membro a membro risulta $AA_1 : AH = AC'' : AB$ e poichè $AC'' = c : 2 = AB : 2$, si deduce infine $AA_1 = AH : 2$.

Risultano così nuovamente dimostrate le note proprietà che il cerchio passante per i piedi delle altezze di un triangolo, divide per metà i lati e i segmenti che vanno dai vertici al punto d'incontro delle altezze e che il raggio di un tal cerchio è la metà del raggio del cerchio circoscritto al triangolo.

6. Occupiamoci ora di trovare l'area del triangolo che ha per vertici i punti A', B', C' dei lati di un triangolo, posto, come precedentemente $BA' = \alpha$, $CB' = \beta$, $AC' = \gamma$, $A'C = \alpha'$, $B'A = \beta'$, $C'B = \gamma'$.

Poichè i triangoli $BA'C'$, BAC (fig. 6ª), hanno in comune l'angolo B, si ha

$$\triangle BA'C' : \triangle BAC = \alpha\gamma' : ac = \alpha\gamma'.b : abc,$$

Similmente

$$\triangle CB'A' : \triangle ABC = \beta\alpha'.c : abc,$$
$$\triangle AC'B' : \triangle ABC = \gamma\beta'.a : abc$$

onde

$$\triangle BA'C' : \alpha\gamma' b = \triangle CB'A' : \beta\alpha' c = \triangle AC'B' : \gamma\beta' a = \triangle ABC : abc.$$

Di qui si ricava

$$\triangle ABC - \triangle BA'C' - \triangle CB'A' - \triangle AC'B' : abc - \alpha\gamma' b - \beta\alpha' c - \gamma\beta' a = \triangle ABC : abc,$$

e indicando con S l'area del $\triangle ABC$, posto mente che il primo termine della proporzione precedente non è altra cosa che l'area del $\triangle A'B'C'$, si ottiene

$$\triangle A'B'C' = \frac{S}{abc}\left\{ abc - \alpha\gamma' b - \beta\alpha' c - \gamma\beta' a \right\} = \frac{S}{abc}\left\{ abc - \alpha(c-\gamma)b - \beta(a-\alpha)c - \gamma(b-\beta)a \right\} = \frac{S}{abc}\left\{ \alpha\beta\gamma + (a-\alpha)(b-\beta)(c-\gamma) \right\}$$

od anche

[7] $$\triangle A'B'C' = \frac{S}{abc}\left\{ \alpha\beta\gamma + \alpha'\beta'\gamma' \right\}.$$

Se A', B', C' sono punti dei lati del $\triangle ABC$ tali che le rette AA', BB', CC' passino per lo stesso punto M', il triangolo $A'B'C'$ si chiama triangolo pedale del punto M' e poichè allora $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$, la sua area viene espressa dalla formola semplicissima

[8] $$\triangle A'B'C' = 2S \cdot \frac{\alpha\beta\gamma}{abc} = 2S\frac{\alpha'\beta'\gamma'}{abc}.$$

Applicazioni. — 1ª. Supponiamo che le AA', BB', CC' coincidano colle trasversali $AA^{(p)}$, $BB^{(p)}$, $CC^{(p)}$ passanti pel punto di potenziale d'ordine p. Poichè allora

$$BA' = c^p\frac{a}{c^p+b^p},\quad CB' = a^p\frac{b}{a^p+c^p},\quad AC' = b^p\frac{c}{b^p+a^p},$$

la formola [8] dà

$$\triangle A^{(p)}B^{(p)}C^{(p)} = 2S\frac{a^p}{c^p+b^p}\cdot\frac{b^p}{a^p+c^p}\cdot\frac{c^p}{b^p+a^p}.$$

In particolare se $p = 1$ ossia le tre trasversali passano pel centro I del cerchio inscritto nel triangolo fondamentale, si trova per l'area del triangolo pedale di I l'espressione

$$2\triangle ABC\cdot\frac{a}{c+b}\cdot\frac{b}{a+c}\cdot\frac{c}{b+a}\ (^*).$$

Il caso di $p = 2$ fornisce l'area del triangolo pedale del punto di Lemoine.

2ª. I punti A', B', C' siano i piedi delle altezze del $\triangle ABC$, Poichè $BA' = c\cos B$, $CB' = a\cos C$, $AC' = b\cos A$, si trova

$$\triangle A'B'C' = 2S\frac{abc\,.\cos A\cos B\cos C}{abc} = 2S\cos A\cos B\cos C.$$

3ª Se A', B', C' sono i piedi delle congiungenti il centro O del cerchio circoscritto ad ABC, poichè si ha [n. **1**, cor. 1°] $\frac{BA'}{A'C} = \frac{\operatorname{sen} 2C}{\operatorname{sen} 2B}$, segue $BA' = \alpha = a\cdot\frac{\operatorname{sen} 2C}{\operatorname{sen} 2C+\operatorname{sen} 2B}$, per modo che l'area del triangolo pedale di O risulta espressa da

$$\triangle A'B'C' = 2S\frac{\operatorname{sen} 2A}{\operatorname{sen} 2C+\operatorname{sen} 2B}\cdot\frac{\operatorname{sen} 2B}{\operatorname{sen} 2A+\operatorname{sen} 2C}\cdot\frac{\operatorname{sen} 2C}{\operatorname{sen} 2B+\operatorname{sen} 2A}$$
$$= 2S\frac{\cos A\cos B\cos C}{\cos(B-C)\cos(C-A)\cos(A-B)}.$$

(*) Cfr. *Periodico*. Vol. VII, p. 151.

7. Le formole [7] e [8] si prestano naturalmente alla determinazione dei rapporti delle aree di due triangoli inscritti nello stesso triangolo fondamentale, pedali o no.

Consideriamo dapprima il caso di due triangoli $A'B'C'$, $A''B''C''$ (fig. 6ª) di cui i vertici situati sopra uno stesso lato sono coniugati isotomici rispetto alle estremità di questo lato. Se poniamo, come al solito, $BA' = \alpha$, $CB' = \beta$, $AC' = \gamma$; $BA'' = \alpha_1$, $CB'' = \beta_1$, $AC'' = \gamma_1$, si avrà dalla [7]

$$\triangle A'B'C' = \frac{S}{abc}\left\{\alpha\beta\gamma + (a-\alpha)(b-\beta)(c-\gamma)\right\}$$

e

$$\triangle A''B''C'' = \frac{S}{abc}\left\{\alpha_1\beta_1\gamma_1 + (a-\alpha_1)(b-\beta_1)(c-\gamma_1)\right\}$$

e poichè, per l'ipotesi $\alpha_1 = a - \alpha$, $\beta_1 = b - \beta$, $\gamma_1 = c - \gamma$, si vede subito che

$$\triangle A'B'C' = \triangle A''B''C''.$$

In secondo luogo esaminiamo il caso di due triangoli $A'B'C'$, $A''B''C''$ pedali di due punti M', M'' coniugati isogonali. Dalla prima delle [1] segue $\frac{\alpha}{a-\alpha} = \frac{a-\alpha_1}{\alpha_1} \cdot \frac{c^2}{b^2}$ onde $\alpha = \frac{a(a-\alpha_1)c^2}{(a-\alpha_1)c^2 + \alpha_1 b^2}$ con due formole analoghe per β e γ.

Risulta per conseguenza, applicando la [8]:

$$\triangle A'B'C' = \frac{2S}{abc} \cdot \frac{a^3b^3c^3(a-\alpha_1)(b-\beta_1)(c-\gamma_1)}{[(a-\alpha_1)c^2+\alpha_1 b^2][(b-\beta_1)a^2+\beta_1 c^2][(c-\gamma_1)b^2+\gamma_1 a^2]}.$$

Ma d'altra parte

$$\triangle A''B''C'' = \frac{2S}{abc} \cdot \alpha_1\beta_1\gamma_1,$$

onde, osservando che per essere le AA'', BB'', CC'' concorrenti in M'' si ha $\alpha_1\beta_1\gamma_1 = (a-\alpha_1)(b-\beta_1)(c-\gamma_1)$, si ottiene infine

$$\frac{\triangle A''B''C''}{\triangle A'B'C'} = \frac{[ac^2+\alpha_1(b^2-c^2)][ba^2+\beta_1(c^2-a^2)][cb^2+\gamma_1(a^2-b^2)]}{a^3b^3c^3}.$$

8. Se i punti A', B', C', A'', B'', C'' cadono o tutti o in parte esternamente ai lati del triangolo fondamentale è facile verificare che i teoremi dei n. **1** e **4**, non che i risultati dei n. **6** e **7** sussistono inalterati, cosicchè i medesimi sono da considerarsi come generali.

A. Lugli.

SUL MINIMO MULTIPLO COMUNE A PIÙ NUMERI

È noto il seguente teorema:

« Se P_1 è il prodotto di n numeri dati, P_2 quello dei massimi « comuni divisori dei numeri presi due a due, P_3 quello dei mas- « simi comuni divisori dei numeri presi tre a tre, ... P_{n-1} « quello dei massimi comuni divisori dei numeri presi $n-1$ ad « $n-1$ e P_n il massimo comun divisore degli n numeri, il mi- « nimo multiplo comune di questi sarà, per n dispari

$$M = \frac{P_1 P_3 P_5 \ldots . P_{n-2} P_n}{P_2 P_4 P_6 \ldots . P_{n-1}},$$

« e per n pari

$$M = \frac{P_1 P_3 P_5 \ldots . P_{n-3} P_{n-1}}{P_2 P_4 P_6 \ldots . P_{n-2} P_n}. \text{ »}$$

Questo teorema, riportato nel libro del Prof. D. FONTEBASSO: *Soluzionario degli esercizi proposti nell'Aritmetica di* BERTRAND; Genova, 1882, pag. 122-124, e tratto, come l'autore dice, dalla *Introduction à la théorie des nombres* di LE BESGUE (pag. 52), è ivi dimostrato considerando i fattori primi costituenti i numeri dati. La dimostrazione seguente, che io presento, s'intende, soltanto ai giovani, mi pare più semplice.

Manteniamo le notazioni adoperate nell'enunciato, e siano A_1, A_2, A_3, ... A_n i numeri dati. Siano poi: $P_n d_i$ i massimi comuni divisori dei numeri presi $n-1$ ad $n-1$ (e precisamente $P_n d_i$ quello dei numeri A_1, A_2, ... A_{i-1}, A_{i+1}, A_n), siano $P_n d_i d_h$ quelli dei numeri presi $n-2$ ad $n-2$, $P_n d_i d_h d_l$ quelli dei numeri presi $n-3$ ad $n-3$, ...; avremo

$$\begin{aligned} A_1 &= P_n d_2 d_3 d_4 \ldots . d_n . q' \\ A_2 &= P_n d_1 d_3 d_4 \ldots . d_n . q'' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n &= P_n d_1 d_2 d_3 \ldots . d_{n-1} . q^{(n)}, \end{aligned}$$

dove i numeri d_i e $q^{(h)}$ sono tutti primi fra loro due a due.

Se poniamo $D = d_1 d_2 \ldots\ldots d_n$ e $Q = q' q'' \ldots\ldots q^{(n)}$, si avrà

$$M = P_n D Q.$$

Ora abbiamo

$$\begin{aligned} P_2 &= P_n^{\binom{n}{n-2}} D^{\binom{n-1}{n-3}} \\ P_3 &= P_n^{\binom{n}{n-3}} D^{\binom{n-1}{n-4}} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{n-1} &= P_n^{\binom{n}{1}} D^{\binom{n-1}{0}} \end{aligned}$$

onde, per n dispari

$$\frac{P_1 P_3 P_5 \ldots\ldots P_{n-2} P_n}{P_2 P_4 P_6 \ldots\ldots P_{n-1}} =$$

$$\frac{P_n^{\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n-3}+\binom{n}{n-5}+\ldots\ldots+\binom{n}{2}+\binom{n}{0}}}{P_n^{\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-4}+\binom{n}{n-6}+\ldots\ldots+\binom{n}{3}+\binom{n}{1}}} \cdot \frac{D^{\binom{n-1}{n-2}+\binom{n-1}{n-4}+\ldots\ldots+\binom{n-1}{1}}}{D^{\binom{n-1}{n-3}+\binom{n-1}{n-5}+\ldots\ldots+\binom{n-1}{0}}} \cdot Q;$$

ma

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots\ldots+\binom{n}{n-3}-\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}-\binom{n}{n}=0$$

e

$$\binom{n-1}{0}-\binom{n-1}{1}+\ldots\ldots+\binom{n-1}{n-3}-\binom{n-1}{n-2}+\binom{n-1}{n-1}=0,$$

per cui

$$\frac{P_1 P_3 P_5 \ldots\ldots P_{n-2} P_n}{P_2 P_4 P_6 \ldots\ldots P_{n-1}} = \frac{P_n^{\binom{n}{n}} Q}{D^{-\binom{n-1}{n-1}}} = P_n D Q = M.$$

Per n pari si trova in modo simile

$$\frac{P_1 P_3 P_5 \ldots\ldots P_{n-3} P_{n-1}}{P_2 P_4 P_6 \ldots\ldots P_{n-2} P_n} =$$

$$\frac{P_n^{\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n-3}+\ldots\ldots+\binom{n}{1}}}{P_n^{\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-4}+\ldots\ldots+\binom{n}{0}}} \cdot \frac{D^{\binom{n-1}{n-2}+\binom{n-1}{n-4}+\ldots\ldots+\binom{n-1}{0}}}{D^{\binom{n-1}{n-3}+\binom{n-1}{n-5}+\ldots\ldots+\binom{n-1}{1}}} \cdot Q$$

$$= \frac{D^{\binom{n-1}{n-1}} Q}{P_n^{-\binom{n}{n}}} = P_n D Q = M.$$

Lucca, dicembre 1894.

S. RINDI.

UN TEOREMA D'ARITMETICA

1°. Sia a un intero qualunque e $p_1\, p_2 \ldots p_r$ i numeri primi inferiori ad a e che non lo dividono e dei quali indicheremo il prodotto con π, supponendo che sia $\pi > a$.

Consideriamo il sistema di congruenze simultanee:

$$\begin{aligned} a \,.\, x_{\mu\lambda} + \rho_\lambda &\equiv k_{1\mu} \mod p_1 \\ a \,.\, x_{\mu\lambda} + \rho_\lambda &\equiv k_{2\mu} \mod p_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a \,.\, x_{\mu\lambda} + \rho_\lambda &\equiv k_{r\mu} \mod p_r \end{aligned}$$

dove $k_{1\mu}, k_{2\mu}, \ldots . k_{r\mu}$ sono interi eguali o disuguali rispettivamente inferiori a $p_1, p_2 \ldots . p_r$ e che col loro insieme costituiscono un sistema che si fa corrispondere in modo arbitrario, ma che una volta fissato rimane costante, all'indice μ, e ρ_λ è uno qualunque dei numeri $\rho_1, \rho_2, \ldots . \rho_{\varphi(a)}$ inferiori e primi ad a.

Per ogni intero y pel quale si abbia:

$$y \equiv k_{i\mu} \mod p_i \quad i = 1, 2, \ldots . r$$

sussiste, com'è noto (*), la relazione:

$$y \equiv k_{1\mu} \left(\frac{\pi}{p_1}\right)^{p_1 - 1} + \ldots . + k_{r\mu} \left(\frac{\pi}{p_r}\right)^{p_r - 1} \qquad \mod \pi$$

per cui si avrà pure:

$$a \,.\, x_{\mu\lambda} + \rho_\lambda \equiv k_{1\mu} \left(\frac{\pi}{p_1}\right)^{p_1 - 1} + \ldots . + k_{r\mu} \left(\frac{\pi}{p_r}\right)^{p_r - 1} \qquad \mod \pi$$

e risolvendo:

$$x_{\mu\lambda} \equiv \left(k_{1\mu} \left(\frac{\pi}{p_1}\right)^{p_1 - 1} + \ldots . + k_{r\mu} \left(\frac{\pi}{p_r}\right)^{p_r - 1} - \rho_\lambda\right) . a^{\varphi(\pi) - 1} \mod \pi$$

(*) Nel § 25 delle *Lezioni sulla teoria dei numeri* del DIRICHLET si dimostra che se x diviso per $a, b, c, \ldots .$ primi tra loro due a due, dà rispettivamente per resti $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, si ha

$$x \equiv A a' \alpha + B b' \beta + C c' \gamma + \ldots . \quad (\text{mod. } n)$$

essendo $n = a . b . c . \ldots$, $A = \frac{n}{a}$, $B = \frac{n}{b}$, $C = \frac{n}{c}$, .. ., ed $a', b', c', \ldots .$, soluzioni di $Ax \equiv 1 \mod a$, $Bx \equiv 1 \mod b$, $Cx \equiv 1 \mod c$, ... Ma pel teorema di FERMAT $a' \equiv A^{\varphi(a)-1} \mod a$, $b' \equiv B^{\varphi(b)-1} \mod b$, $c' \equiv C^{\varphi(c)-1} \mod c$, . .. quindi la relazione

$$x \equiv \left(\frac{n}{a}\right)^{\varphi(a)} . \alpha + \left(\frac{n}{b}\right)^{\varphi(b)} . \beta + \left(\frac{n}{c}\right)^{\varphi(c)} . \gamma + \ldots \quad \mod n.$$

L'espressione $k_{1\mu}\left(\frac{\pi}{p_1}\right)^{p_1-1}+\ldots.+k_{r\mu}\left(\frac{\pi}{p_r}\right)^{p_r-1}$ rappresenta manifestamente un numero primo con π, e se noi attribuiamo ai coefficenti $k_{i\mu}$ tutti i possibili sistemi di valori compatibili con la condizione $k_{i\mu}<p_i$ otteniamo per essa $(p_1-1)(p_2-1)\ldots\ldots(p_r-1)=\varphi(\pi)$ valori congrui mod π ai numeri $R_1, R_2, \ldots R_\mu \ldots, R_{\varphi(\pi)}$ inferiori e primi a π.

Indicando ora con R il resto di $a^{\varphi(\pi)-1}$ mod π manifestamente primo a π, si ha:

$$x_{\mu\lambda}\equiv R_\mu \,.\, R-\rho_\lambda \,.\, R \quad \text{mod } \pi.$$

Osservando che i numeri $R_\mu \,.\, R$ sono congrui, benchè in altro ordine, ai numeri R_μ ed indicando con r_λ il resto di $\rho_\lambda \,.\, R$ si ottiene, ponendo $R_\mu \,.\, R\equiv R'_\mu$,

$$x_{\mu\lambda}\equiv R'_\mu-r_\lambda \quad \text{mod } \pi$$

come espressione della soluzione comune alle congruenze del precedente sistema in corrispondenza agli indici μ e λ.

Supponiamo ora che per un certo valore di μ e λ, vale a dire per un determinato sistema $k_{1\mu}, k_{2\mu} \ldots k_{r\mu}$ e per un certo ρ_λ, la differenza $R'_\mu-r_\lambda$ se positiva (od il suo complemento se negativa) sia minore di a e diversa da zero: indicandola con σ si avrà:

$$a\sigma+\rho_\lambda\equiv k_{1\mu}\left(\frac{\pi}{p_1}\right)^{p_1-1}+\ldots.+k_{r\mu}\left(\frac{\pi}{p_r}\right)^{p_r-1} \quad \text{mod } \pi$$

e quindi:

$$a\,.\,\sigma+\rho_\lambda\equiv k_{i\mu} \quad \text{mod } p_i.$$

Essendo $k_{i\mu}$ primo a p_i e ρ_λ ad a, $a\sigma+\rho_\lambda$ non è divisibile per alcuno dei numeri primi inferiori ad a, ed essendo inoltre minore di a^2 si conclude che è un numero primo.

Reciprocamente ogni numero primo compreso tra a ed a^2 si può porre sotto la forma $a\sigma+\rho_\lambda$ $\sigma<a$ per cui sarà

$$a\,.\,\sigma+\rho_\lambda\equiv k_{i\mu} \quad \text{mod } p_i \quad i=1, 2, \ldots. r$$

e quindi:

$$a\,.\,\sigma+\rho_\lambda\equiv k_{1\mu}\left(\frac{\pi}{p_1}\right)^{p_1-1}+\ldots.+k_{r\mu}\left(\frac{\pi}{p_r}\right)^{p_r-1} \quad \text{mod } \pi$$

ed infine $\sigma \equiv R'_\mu - r_\lambda \mod \pi$ cioè $\sigma = R'_\mu - r_\lambda$ oppure $\sigma = R'_\mu - r_\lambda + \pi$. Segue da ciò che per ogni numero primo compreso tra a ed a^2 (estremi esclusi) esiste un sistema di valori per λ e μ pei quali la differenza $R'_\mu - r_\lambda$ se positiva (il suo complemento se negativa) è minore di a.

2.° Sieno ora q, q' due numeri primi maggiori di a e minori di a^2. Avremo $a \cdot \sigma + \rho_\lambda = q, a \cdot \sigma' + \rho_{\lambda'} = q'$ e per quanto precede:

$$\sigma \equiv \left(k_{1\mu}\left(\frac{\pi}{p_1}\right)^{p_1-1} + \ldots + k_{r\mu}\left(\frac{\pi}{p_r}\right)^{p_r-1} - \rho_\lambda\right) . a^{\varphi(\pi)-1} \mod \pi$$

$$\sigma' \equiv \left(k_{1\mu'}\left(\frac{\pi}{p_1}\right)^{p_1-1} + \ldots + k_{r\mu'}\left(\frac{\pi}{p_r}\right)^{p_r-1} - \rho_{\lambda'}\right) . a^{\varphi(\pi)-1} \mod \pi.$$

Poniamo ora che sia $\rho_\lambda = \rho_{\lambda'}$: dovrà essere manifestamente μ diverso da μ' poichè altrimenti risulterebbe $\sigma = \sigma'$.

Concludiamo quindi che a due numeri primi compresi tra a ed a^2 corrispondono due sistemi di valori diversi per gli indici μ, λ.

Reciprocamente, sieno λ, μ; λ', μ' due coppie diverse per le quali si abbia:

$$\left.\begin{aligned} x_{\mu\lambda} &\equiv R'_\mu - r_\lambda \\ x_{\mu'\lambda'} &= R'_{\mu'} - r_{\lambda'} \end{aligned}\right\} \mod \pi$$

e supponiamo che, essendo le precedenti differenze se positive (o i complementi se negative) entrambi minori di a, i due numeri primi $a\sigma + \rho_\lambda$, $a \cdot \sigma' + \rho_{\lambda'}$ risultino eguali.

Tale ipotesi porta di conseguenza

$$\rho_\lambda \equiv \rho_{\lambda'} \mod a$$

che non è ammissibile altro che nel caso particolare $\rho_\lambda = \rho_{\lambda'}$ avverandosi il quale, dovrebbe pur essere $\sigma = \sigma'$ e quindi sussistere o l'una o l'altra delle due eguaglianze:

$$R'_\mu - r_\lambda = R'_{\mu'} - r_{\lambda'}, \quad R'_\mu - r_\lambda = R'_{\mu'} - r_{\lambda'} \pm \pi$$

la prima qualora le due differenze abbiano lo stesso segno, la seconda qualora abbiano segni opposti.

Ma l'ipotesi $\rho_\lambda = \rho_{\lambda'}$ porta di conseguenza $r_\lambda = r_{\lambda'}$ quindi le due precedenti eguaglianze si riducono alle due assurde:

$$R'_\mu = R'_{\mu'}, \quad R'_\mu = R'_{\mu'} \pm \pi.$$

A due diverse coppie di indici non può quindi corrispondere lo stesso numero primo.

3° Riassumendo quanto si è dimostrato nei due paragrafi precedenti e tenendo presente il significato dei simboli adottati e l'ipotesi $\pi > a$, si può enunciare il seguente

Teorema « Il numero dei numeri primi compresi tra a ed a^2 (estremi esclusi) coincide col numero delle coppie di indici λ, μ per le quali la corrispondente differenza $R'_\mu - r_\lambda$ se positiva (il suo complemento se negativa) risulta minore di a ».

Nota. La dimostrazione si appoggia all'ipotesi $\pi > a$: valendosi però della proposizione di Tchebichef secondo la quale per $n > 7$ esiste sempre un numero primo tra $\frac{n}{2}$ ed $n - 2$, si può provare che tale ipotesi è sempre ammissibile da un certo valore di a in poi.

U. Scarpis.

SULLA FORMA DEL QUOZIENTE
NEL TEOREMA DI *FERMAT*

1. L'astronomo Giovanni Plana nella sua *Mémoire sur la théorie des Nombres* (Accademia delle Scienze di Torino 1860), osservò che gli analisti si erano limitati a dimostrare in modi diversi la divisibilità di $a^p - a$, per il numero primo p e si propose perciò di determinare la forma del quoziente $\frac{a^p - a}{p}$.

La forma ottenuta dal Plana si può con metodo assai più semplice e spedito ricavare dalla seguente identità

$$(x+1)^p - x^p = \binom{p}{1} x^{p-1} + \binom{p}{2} x^{p-2} + \dots + \binom{p}{p-1} x + 1,$$

facendo in essa successivamente

$$x = 1, 2, 3, \dots (a-1) \quad \dots\dots\dots \quad [1]$$

e sommando membro a membro le $(a-1)$ eguaglianze; se con s_i indichiamo la somma delle potenze i^{me} dei numeri della serie [1], avremo, fatte le riduzioni,

$$a^p - a = \binom{p}{1} s_{p-1} + \binom{p}{2} s_{p-2} + \dots + \binom{p}{p-1} s_1$$

e da questa forma non solo risulta la divisibilità del primo membro per il numero primo p, essendo i coefficienti binominali $\binom{p}{1}$ $\binom{p}{2}$ ecc. divisibili per il numero primo p, ma si ottiene ancora, osservando che $\binom{p}{r} = \binom{p}{p-r}$,

$$\frac{a^p - a}{p} = (s_1 + s_{p-1}) + \frac{p-1}{2}(s_2 + s_{p-2}) + \frac{(p-1)(p-2)}{2 \cdot 3}(s_3 + s_{p-3})$$
$$+ \ldots + \frac{(p-1)(p-2)(p-3) \ldots \left(p - \frac{p-1}{2} + 1\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \frac{p-1}{2}} \left(s_{\frac{p-1}{2}} + s_{\frac{p+1}{2}}\right)$$

e questa è appunto la forma ottenuta dal Plana.

Il calcolo delle s_i è però talmente laborioso quando a e p sono numeri grandi, da suggerire la ricerca di una forma più acconcia al calcolo numerico; questo è appunto lo scopo della presente nota.

2. Sieno dati p gruppi di elementi tutti fra loro differenti $G_1, G_2, G_3, \ldots G_p$ e ciascun gruppo sia composto di a elementi; fra le combinazioni semplici della classe p formate colle totalità degli $a \times p$ elementi, alcune conterranno elementi scelti da un solo gruppo (quando $a > p$), altre elementi scelti da due gruppi, da tre, ecc. e finalmente alcune conterranno elementi scelti da tutti i gruppi; indicheremo il numero di tali combinazioni rispettivamente con $C_1, C_2 \ldots C_r \ldots C_p$.

Scelti r gruppi fra i p dati, è chiaro che il numero delle combinazioni contenenti elementi scelti da ciascuno di tali gruppi, può essere rappresentato da

$$\Sigma \binom{a}{i_1} \binom{a}{i_2} \binom{a}{i_3} \ldots \binom{a}{i_r}$$

dove

$$\binom{a}{i_r} = \frac{a(a-1)(a-2) \ldots (a-i_r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots i_r}$$

e la somma va estesa a tutte le soluzioni della equazione

$$i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_r = p$$

in numeri interi positivi, non nulli.

E poichè la scelta di r gruppi dai p dati si può fare in $\binom{p}{r}$ modi differenti, così avremo

$$C_r = \binom{p}{r} \Sigma \binom{a}{i_1} \binom{a}{i_2} \ldots \binom{a}{i_r}$$

e siccome sommando tutte le C otteniamo il numero totale delle combinazioni semplici degli $a \times p$ elementi della classe p, avremo

$$\binom{a \times p}{p} = \binom{p}{1}\binom{a}{p} + \binom{p}{2}\sum\binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}$$
$$+ \binom{p}{3}\sum\binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\binom{a}{i_3} + \ldots + \binom{p}{r}\sum\binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\ldots\binom{a}{i_r} + \ldots$$
$$\ldots + \binom{p}{p}\sum\binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\binom{a}{i_3}\ldots\binom{a}{i_p}$$

dove in ciascuna sommatoria le i devono assumere valori interi positivi non nulli la cui somma deve essere eguale a p.

Ora l'ultimo termine ha evidentemente il valore a^p per cui, se notiamo che

$$\binom{a \times p}{p} = \frac{ap\,(ap-1)\,(ap-2)\ldots[ap-(p-1)]}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(p-1)\,.\,p}$$
$$= a + \text{multiplo di } p, \text{ (quando } p \text{ è primo)}$$

resterà dimostrata la divisibilità di $a^p - a$ per il numero primo p e al tempo stesso si avrà modo di calcolare il quoziente.

Il calcolo del quoziente viene in tal modo a dipendere dalle $\sum$, e poichè anche queste non sono immediatamente calcolabili, cerchiamo di trasformarle in espressioni più convenienti.

(*Continua*). F. PANIZZA.

LA LEGGE DELLE INVERSE

Nell'insegnare l'aritmetica razionale sarebbe utile far conoscere agli alunni la legge delle inverse press'a poco sotto la forma seguente.

1. Si suppongano dimostrati questi due teoremi:

Se la differenza di due numeri è divisibile per un numero, quei due numeri divisi per quest'ultimo daranno uguali resti.

Se due numeri divisi per un numero danno resti uguali, la differenza dei due primi numeri sarà divisibile per il terzo.

In ciascuno di questi teoremi, come accade di tutti, vengono affermate due proprietà: una di queste è ammessa come data, e costituisce la *ipotesi* del teorema, l'altra si mette in evidenza, si deduce, si ricava col ragionamento, e costituisce la *conclusione* o la *tesi*. Nel caso attuale, si vede inoltre che l'ipotesi dell'un teorema costituisce la conclusione dell'altro: onde così fatti teoremi si dicono *inversi* o *reciproci* (*).

2. Giova subito notare che non è sempre lecito d'invertire una proposizione. Per es., essendo 5 e 3 gli addendi, il totale sarà 8; ma, inversamente, non si potrà affermare che, essendo 8 il totale, gli addendi debbano essere 5 e 8. Così pure, *ammettendo* che un numero divida due numeri, si può *concludere* che divide la loro somma; ma, inversamente, *ammettendo* che un numero divida la somma di due numeri, non è lecito *concludere* che dividerà questi due; ecc.

3. Quando due proprietà sono così collegate che, verificandosi l'una, si verifichi necessariamente anche l'altra, allora se l'una *non* si verifica, necessariamente *non* si può verificare neppure l'altra. Per es., *se due numeri, divisi per un numero, non producono uguali resti, la differenza di quei due primi numeri non potrà essere divisibile per il terzo*; poichè, diversamente, i due numeri, divisi per quel terzo, dovrebbero dare resti contemporaneamente uguali e disuguali; il che è contrario al noto principio di *logica*, detto *principio di contraddizione* « una cosa non può al tempo stesso essere e non essere ». Così pure: *se la differenza fra due numeri non è divisibile per un numero, quei due numeri divisi pel terzo non daranno uguali resti*; poichè, diversamente, la differenza di due numeri dovrebbe contemporaneamente essere e non essere divisibile per un terzo.

4. I due teoremi enunciati all'articolo precedente sono pure inversi l'uno dell'altro, ma, confrontati con quelli riportati all'art. 1, si vede che l'ipotesi e la conclusione in uno di essi sono le proprietà *contraddittorie* o negative rispetto a quelle costituenti l'ipotesi e la conclusione in uno degli altri: laonde il 1° teorema dell'art. 1 e il 2° dell'articolo precedente si dicono *contrarj* o *opposti* l'uno dell'altro, e così pure sono *contrarj* fra loro il 2° dell'art. 1 e il 1° dell'articolo precedente.

5. Qui pure giova avvertire che non tutte le proposizioni possono essere contraddette. Per es., un numero che divide due altri, divide anche la loro somma; ma, contrariamente, ammesso che un numero non divida due altri, non è lecito concludere che non divide la loro somma. Per es. 3 non divide 11 e 4, eppure divide la loro somma $11 + 4$.

6. L'art. 3 fa vedere che:

Dimostrati due teoremi inversi, si possono ritenere dimostrati anche i loro contrarj.

Inversamente, è facile persuadersi che:

Dimostrati due teoremi contrarj, si possono ritenere dimostrati anche i loro inversi.

7. Queste due proprietà costituiscono la *legge delle inverse* che domina in ogni parte delle matematiche; e che può esprimersi più concisamente così:

Dimostrato un teorema, si può ritenere dimostrato il contrario del reciproco.

(*) Avverto una volta per tutte che questi miei saggi di matematica elementare, che contengono nella sostanza cose notissime, sono scritti per gli alunni delle scuole secondarie. Di qui la ragione di taluni particolari che per i docenti sarebbero soverchi.

Infatti, si consideri un teorema del tipo generale seguente:

Se riguardo a un dato soggetto S *sussiste una certa proprietà* I, *sussisterà pure simultaneamente una certa proprietà* T *per quel medesimo soggetto.*

Il contrario del suo reciproco sarebbe:

Se riguardo a un dato soggetto S *non sussiste una certa proprietà* T, *non potrà simultaneamente sussistere una certa proprietà* I *per quel medesimo soggetto.*

Ora, ciò dovrà appunto accadere, poichè diversamente, sussistendo la proprietà *I*, sussisterebbe la proprietà *T*, pel primo teorema, e quindi questa proprietà *T* dovrebbe contemporaneamente sussistere e non sussistere.

È facile vedere che, inversamente, le due proprietà dell'articolo precedente sono conseguenze di quest'ultima, poichè, p. e., dimostrati due teoremi inversi, saranno veri i contrarj dei loro inversi.

Inoltre si osservi che il *contrario dell'inverso* è lo stesso che l'*inverso del contrario.*

8. Accade talora (di rado in Aritmetica, più spesso in altre parti della Matematica) che la ipotesi di un teorema si compone di varie proprietà anzichè di una. Per es. nel teorema: se un numero divide il prodotto di due numeri ed è primo con uno di essi, dividerà l'altro; l'ipotesi è costituita da due proprietà o ipotesi parziali.

In tal caso si possono alle volte combinare queste proprietà in guisa da formare altri teoremi, i quali, estendendo opportunamente le definizioni date, si possono chiamare inversi, contrarj, ecc..

9. Quando due proprietà sono collegate per modo che verificandosi l'una, si verifichi *necessariamente* l'altra, allora, anzichè enunciare separatamente i due teoremi inversi che ne derivano, se ne forma uno solo che si enuncia così:

La condizione NECESSARIA *e* SUFFICIENTE *affinchè si verifichi una di quelle due proprietà è che si verifichi l'altra.* E talora anche così: *Una di quelle due proprietà si verifica allora, e allora soltanto, quando si verifica l'altra.*

Per es., si attribuiscano a un numero le due proprietà seguenti:

a) la somma delle sue cifre è divisibile per 9;

b) il numero è divisibile per 9.

Ora è noto che: *basta, è sufficiente,* che si verifichi la prima perchè necessariamente si verifichi la seconda; *basta,* è *sufficiente,* che si verifichi la seconda perchè necessariamente si verifichi anche la prima.

Quindi, questi due teoremi reciproci si riuniscono in uno solo così:

La condizione NECESSARIA *e* SUFFICIENTE *affinchè un numero sia divisibile per 9 è che sia tale la somma delle sue cifre.* O anche così: *Un numero è divisibile per 9 allora, e allora soltanto, quando è tale la somma delle sue cifre.*

10. Come si è notato, non sempre una proposizione potrà invertirsi. Infatti può accadere che, mentre l'affermazione di una certa proprietà, *non basta, non è sufficiente,* senza l'aggiunta di una o più altre, per dedurne un'altra; inversamente, l'affermazione di quest'ultima *basti, sia sufficiente,* per ricavarne la prima.

Per es., *non basta*, *non è sufficiente* che un numero divida il prodotto di due numeri, per poter dire che dividerà anche uno dei fattori; bisogna aggiungere che il numero è primo con l'altro fattore. Invece, *basta*, *è sufficiente*, che un numero divida uno dei fattori, perchè *necessariamente* divida anche il prodotto (*). Ciò potrà esprimersi brevemente così:

La condizione *necessaria*, ma *non sufficiente*, affinchè un numero divida uno dei due fattori di un prodotto è che divida questo prodotto. Ovvero, la condizione *sufficiente*, ma *non necessaria*, affinchè un numero divida un prodotto di due fattori è che divida uno di questi fattori.

11. Accade talvolta che da differenti proprietà non coesistenti, quando siano trattate separatamente, ne derivi una sola di natura essenzialmente diversa dalle prime. In tal caso si vede che, se verificandosi una qualunque delle prime, si verifica *necessariamente* anche l'altra e *soltanto* questa, inversamente, il verificarsi di questa, *non basta*, *non è sufficiente*, per poter affermare la sua coesistenza con una delle prime. Ciò significa che:

La condizione *sufficiente*, ma *non necessaria*, affinchè si verifichi *quella proprietà* è che si verifichi *una* delle prime. Ovvero, la condizione *necessaria*, ma *non sufficiente*, affinchè si verifichi *una* delle prime è che si verifichi *quella proprietà*; e questo purchè, come si è detto, quella seconda proprietà si verifichi *soltanto* quando è verificata una delle prime.

Prenderemo un esempio dalla geometria.

Se due angoli sono: opposti al vertice, o retti, o formati da lati paralleli (diretti ecc.), o da lati perpendicolari (disposti ecc.), essi angoli saranno *necessariamente* uguali.

Ma, inversamente, *non basta*, *non è sufficiente*, sapere che due angoli sono uguali per poter dire che essi saranno, p. e., opposti al vertice, o retti, ecc. Onde si dirà:

La condizione *necessaria*, ma *non sufficiente*, affinchè due angoli siano opposti al vertice, ovvero abbiano i lati paralleli, (diretti ecc.) o i lati perpendicolari (disposti ecc.) o siano retti, è che siano uguali. Ovvero la condizione *sufficiente*, ma *non necessaria*, affinchè due angoli siano uguali, è che siano opposti al vertice, ovvero che abbiano i lati paralleli (diretti ecc.), ovvero che abbiano i lati perpendicolari (disposti ecc.), ovvero che siano retti.

12. Per ultimo, come complemento alla legge delle inverse esporremo il seguente principio:

Se si sono dimostrati n teoremi, relativi a un medesimo soggetto S, e se le ipotesi di questi teoremi sono tutte quelle possibili riguardo a un determinato argomento, cosicchè di queste n ipotesi $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n$ debba sempre necessariamente verificarsene una, e se le tesi $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$ di questi teoremi sono incompatibili fra loro, cosicchè, verificandosene una, non possa contemporaneamente avverarsene un'altra, allora si potranno senz'altro ritenere come dimostrati gli n teoremi inversi.

(*) Sarebbe quasi inutile avvertire che in questi teoremi di divisibilità, quando si dice numero s'intende sempre numero intero.

Infatti, il soggetto S deve sempre avere una delle proprietà I; quindi anche quando S abbia per esempio la proprietà T_2, dovrà verificarsi una delle I, e precisamente la I_2, poichè, se invece si verificasse ad esempio la I_3, allora si verificherebbe pure la T_3, e allora sussisterebbero simultaneamente le proprietà T_2 e T_3, il che è impossibile.

Per es., tre ipotesi sono possibili sulla grandezza relativa dei termini di una frazione:

a) il numeratore è minore del denominatore (frazione pura);

b) il numeratore è maggiore del denominatore (frazione spuria);

c) il numeratore è uguale al denominatore (frazione uguale a 1).

Ora, aggiungendo ai due termini della frazione uno stesso numero, si ha che nel primo caso la frazione cresce di valore, nel secondo diminuisce, nel terzo non cambia. Così, relativamente a questo soggetto e in ordine a siffatto argomento e alle proprietà ammissibili, si possono enunciare tre teoremi, e soltanto tre. Allora, per il principio enunciato, sussistono necessariamente i teoremi reciproci, come si può vedere dimostrandoli *per esclusione*. Per esempio, si avrà:

Se aggiungendo uno stesso numero ai due termini di una frazione, questa cresce, la frazione sarà pura.

Poichè se tale non fosse, essa sarebbe maggiore o uguale a 1 e quindi, con l'addizione di uno stesso numero ai suoi due termini, essa diminuirebbe o non cambierebbe di valore. Cioè, aggiungendo uno stesso numero ai due termini di una frazione, essa dovrebbe contemporaneamente aumentare e conservare il suo valore.

13. Chiuderemo questo cenno sulla legge delle inverse, la quale, come si è detto, domina in ogni parte della matematica, con il seguente esempio aritmetico molto istruttivo.

Il denominatore di una frazione ordinaria irreducibile può contenere soltanto i fattori 2 e 5, oppure fattori diversi da questi, oppure tali fattori 2 e 5 insieme con altri; e non può accadere altrimenti. Ammesse tali proprietà, si può dimostrare ordinatamente che la frazione darà luogo a un numero decimale finito, oppure periodico semplice, oppure periodico misto. Ora, in base al principio precedente, sussisteranno i teoremi reciproci; e, inversamente, dimostrati prima questi teoremi reciproci, si potranno prima ritenere dimostrati i primi. Nell'un caso o nell'altro, i nuovi teoremi si dimostrano *per esclusione*; e tutti e sei i teoremi, combinati a due a due, si compendiano nei tre seguenti:

a) La condizione necessaria e sufficiente affinchè una frazione ordinaria irreducibile si converta in un numero decimale finito, è che il suo denominatore contenga i soli fattori 2 e 5.

b) La condizione necessaria e sufficiente affinchè una frazione ordinaria irreducibile si converta in un numero decimale periodico semplice, è che il suo denominatore non contenga alcuno dei fattori 2 e 5.

c) La condizione necessaria e sufficiente affinchè una frazione ordinaria irreducibile si converta in un numero decimale periodico misto, è che il suo denominatore contenga almeno uno dei fattori 2 e 5 insieme ad altri.

Nervi, novembre 1894.

GIOVANNI GARBIERI.

TEMI DI MATEMATICA DATI PER L'ESAME DI MATURITÀ
IN GINNASI E SCUOLE REALI SUPERIORI DELL'AUSTRIA-UNGHERIA
alla fine degli anni scolastici 1891-92 e 1892-93

(*Continuazione*: *V. pag. 27, 55, 97, 148 e 184 dell'anno IX*).

VIENNA: *i. r. Ginnasio sup. nel XVII Circ.* — 1. Se ai quattro termini di una progressione aritmetica s'aggiungono rispettivamente i numeri 5, 6, 9, 15 si ottiene una progressione geometrica. Quali sono le due progressioni?

2. Quali sono gli angoli di un triangolo nel quale due lati stanno come $2:3$ e gli angoli opposti come $1:2$?

3. L'altezza d'un cono retto è $h=8$ cm., l'angolo al vertice $2\alpha=28^\circ 48'$; qual è il volume di quel settore sferico del quale il cono dato forma il complemento?

4. Si domanda l'equazione di quel cerchio che passa pel punto $(5,9)$ e tocca la retta $4x+3y+3=0$ nel punto $(-3,3)$.

VIENNA: *Ginnasio comunale sup. nel XIX Circ.* — 1. Quali numeri hanno la proprietà che tanto la differenza delle loro terze potenze quanto la somma dei loro quadrati aumentata del loro prodotto è uguale a 19?

2. Due amici risparmiano alcunchè del loro denaro per un viaggio da farsi nelle vacanze. Il primo mette da parte da prima 2 fiorini e quindi ogni mese successivo 1 f. di più che nel mese precedente; il secondo comincia un mese più tardi mettendo da parte prima 3 fior. e quindi ogni mese successivo 1,50 f. di più che nel precedente. Per quanti mesi devono risparmiare ambedue onde avere assieme la somma di 96,50 f., e quanto spetta a ciascheduno?

3. Si ha da calcolare la superficie di una piramide ottagonale regolare che ha l'altezza di 12 dm. e la cui massima sezione diagonale misura 60 dm.^{2}. (Risultato esatto in cm.^{2}).

4. L'ellisse $16x^2+25y^2=400$ viene tagliata da una retta che passa per quel punto dell'asse delle ascisse che ha l'ascissa -4 e fa con questo un angolo di 45°. Qual è l'angolo acuto che racchiudono le tangenti guidate pei due punti d'intersezione?

VIENNA: *i. r. Ginnasio sup. accademico.* — 1. Due corpi partendo dallo stesso punto si muovono in direzioni opposte sulla periferia d'un cerchio. Il primo fa nel primo secondo 3° ed in ogni secondo successivo 1° di più, il secondo fa nel primo secondo $1^\circ\frac{1}{2}$ ed in ogni secondo successivo 6° di più che nel precedente. Quando si incontreranno i due corpi la prima e la seconda volta?

2. La somma dei due lati a e b di un triangolo è di $d=10$ maggiore del terzo lato c. Gli angoli sono $\alpha=43^\circ 36' 10''$, $\beta=11^\circ 15' 16''$, $\gamma=124^\circ 58' 34''$. Calcolare i lati.

3. Ad una sfera col raggio r è circoscritta una piramide quadratica regolare la cui base ha la diagonale $4r$. Calcolare la superficie ed il volume della piramide e l'angolo d'inclinazione delle faccie laterali colla base.

4. Un ramo dell'iperbole coi semiassi a e b ha comune il vertice e l'asse con una parabola. Gli assintoti dell'iperbole sono tangenti alla parabola. Si determini il parametro della parabola e le coordinate dei punti di contatto.

TRENTO: *i. r. Ginnasio sup. - Sez. it.* - 1. I. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})+2$; II. $3(\sqrt{x}+\sqrt{y})=\sqrt{y}(3\sqrt{x}+\sqrt{x})-7$.

2. I. $x^2+y^2-2xy\cos\varphi=144$, II. $xy \operatorname{sen}\varphi=36$, III. $x+y=28$.

3. Risolvere un triangolo obliquangolo dati $b-c=125{,}5$, $\beta-\gamma=75^0\,13'\,19''$, $a=201{,}8$.

4. Una retta interseca gli assi alle distanze $x_1=4$, $y_1=5$. Fra questa retta e l'asse delle ordinate si trova un cerchio che tocca le due rette e il cui centro ha l'ascissa $p=1$. Qual'è l'equazione di questo cerchio?

TRENTO: *i. r. Ginnasio sup. - Sez. tedesca.* — 1. Una società di 25 persone, uomini, donne e ragazzi, consuma in un'osteria 33,6 f.; ogni uomo cioè 1,75 f. ogni donna 1,20 f. ed ogni ragazzo 0,7 f. Quanti erano gli uomini, quante le donne e quanti i ragazzi?

2. Un triangolo rettangolo ABC ($C=90^0$) ruota intorno ad un asse parallela a BC; quanto importano superficie e volume del corpo di rotazione se $c=29$ ed $\alpha=43^0\,36'\,10''$?

3. La parabola $y^2=4x$ viene tagliata dalla retta $y=\frac{2}{5}x+\frac{8}{5}$. Si deve calcolare il segmento parabolico separato dalla retta.

4. (In alternativa col 3). I tre vertici di un triangolo hanno le coordinate $A(x_1=-15,\ y_1=-15)$, $B(x_2=-3,\ y_2=15)$, $C(x_3=15,\ y_3=-3)$, si cerchino le coordinate del centro del cerchio circoscritto.

ROVERETO: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Un debito di 758000 f., per il quale si devè pagare il 6 % d'interesse composto, viene estinto in 10 anni col pagamento di 10 rate eguali versate alla fine d'ogni anno. Si domanda il valore della rata.

2. La superficie totale di un cono retto è $\frac{1}{54}$ di quella della sfera, che ha per raggio il semiperimetro della sezione passante per l'asse. Che lato e che volume ha il cono, se la superficie della sfera è $s=3260$ dm^2?

3. La base di un trapezio isoscele è $a=17$ dm. i lati non paralleli valgono ciascuno $c=10{,}7$ dm, l'angolo racchiuso dalle diagonali è $\alpha=100^0\,12'$. Si domanda il valore degli elementi del trapezio.

4. Le equazioni di due cerchi sono $(x-3)^2+y^2=16$, $x^2+(y+1)^2=9$. Che superficie ha il triangolo avente per vertici i due punti d'intersezione e il centro del secondo cerchio?

TRIESTE: *Ginnasio comunale sup.* — 1. I. $\sqrt{y}-\sqrt{x}=\sqrt{x+y-\sqrt{4xy+x-y}}+9$; II. $\sqrt{x-y}:\sqrt{20-x}=3:2$.

2. Un serbatoio d'acqua può venir riempito mediante i tubi A e B in 35 minuti, e mediante i tubi B e C in 70 minuti. In quanti minuti può esso venire riempiuto mediante ogni singolo tubo?

3. Si calcoli il volume di un tronco piramidale che abbia la base $B=$ all'ottagono regolare inscritto ad un cerchio col raggio $=2$ m, e la base $B_1=$

all'ottagono regolare circoscritto al medesimo cerchio, e l'altezza = alla distanza dei punti $M_1 = (4,6)$ ed $M_2 = (10,14)$.

Trieste: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. La somma dei tre primi termini di una progressione geometrica è 52; la differenza del quarto e secondo termine sta alla differenza del secondo e del primo come 12 : 1. Qual' è la progressione?

2. La superficie laterale d' un cono retto è di 1 dm² 88 cm² 49 mm², l'angolo al vertice della sezione assiale è $73^0\,44'\,21{,}4''$. Il cono è inscritto in una sfera. Qual' è il volume del segmento sferico che poggia sulla base del cono?

3. Un cerchio passa pei punti d'intersezione delle tre rette $y = \frac{x}{2} + \frac{17}{2}$, $y = -x + 1$, $y = 3x - 19$ e viene segato dalla retta $y = x + 11$. Qual' è l'area del triangolo determinato dalla corda e dal punto (11,14) del cerchio?

Vienna: *i. r. Ginnasio sup. zu den Schotten.* — 1. In una proporzione la somma dei termini estremi è = 24, quella dei termini medi = 16 e la somma dei quadrati di tutti i termini è = 580. Qual è la proporzione?

2. Si cerchi l'angolo la cui tangente trigonometrica è 32 volte la differenza fra la quarta parte del seno dell'angolo doppio e la terza parte del seno dell'angolo semplice.

3. Sviluppare completamente $(2 - \sqrt{-1})^6$.

4. Le equazioni di due circoli sono $x^2 + y^2 = \left(\frac{45}{4}\right)^2$ e $\left(x - 12\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{15}{4}\right)^2$. Si determini l'area del triangolo che è compreso fra le due tangenti esterne e la corda comune.

Vienna: *i. r. Ginnasio dell'Acc. Teresiana.* — 1. $\sqrt{\frac{3y-2x}{y}} + \sqrt{\frac{4y}{3y-2x}} = 2\sqrt{2}$, $3(x^2+1) = (y+1)(y-x+1)$.

2. In una progressione geometrica di termini reali la somma dei tre primi termini è = 14, ed il loro prodotto = 64. In una progressione aritmetica invece la somma dei tre primi termini è = 12 ed il loro prodotto = 48. Qual termine della progressione geometrica concorda col 512° termine della progressione aritmetica?

3. Un triangolo col lato $c = 156$ cm. e gli angoli adiacenti $\alpha = 46^\circ 23' 50''$ e $\beta = 61^\circ 55' 39''$ forma la base di un prisma obliquo che ha gli spigoli laterali $s = 128{,}624$ cm. ed inclinato di $\varphi = 71^\circ 40' 31''$ verso la base. Quale è il volume del prisma?

4. Dal punto (4,0) è guidata una tangente all'iperbole $9x^2 - 25y^2 = 225$, la quale taglia gli assintoti nei punti C_1 e C_2. Si determini il luogo geometrico dei centri di tutti i circoli che passano per questi due punti, e si ricerchi la sua posizione rispetto alla normale dell'iperbole che corrisponde a quella tangente.

Vienna: *Ginnasio reale sup. comunale Leopoldstadt.* — 1. Un tale pone ad interesse composto del $4\frac{1}{2}$ % per 12 anni, alla fine di ogni anno, 762,13 f., Per quanti anni potrà egli poi ricevere, pure alla fine d'ogni anno, 2000 f. affinchè capitale e frutti vengano consumati?

2. $\sqrt{10+3x}-\sqrt{14-2x}=\sqrt{19-2x}$.

3. In una piramide triangolare gli spigoli alla base sono $a=600$, $b=450$, $c=210$. I tre spigoli laterali sono eguali a $l=626$. Qual è la superficie di un parallelepipedo rettangolare equivalente, se i tre spigoli di questo stanno fra loro come $14:18:25$?

4. Sotto quali angoli taglia la parabola $y^2=8x$ quella retta che passa per i punti $(-2,8)$ e $(3,3)$?

Wiener Neustadt: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Qual è il lato più corto e quale il più lungo di un triangolo rettangolo, che ha l'area di 138 m.^{2} se un angolo importa $27^0 53'$?

2. Per tre punti $(2,3)$, $(-2,3)$ e $(0,-2)$ si conduca un circolo, lo si consideri come base di un cilindro equilatero e si calcoli il volume e la superficie del cubo inscritto in questo cilindro.

3. I. $x^2-2xy+3y^2=33$, II. $3x^2+14xy+6y^2=291$.

4. Tre fratelli dei quali il più vecchio ha ora $n_1=18$ anni, il medio $n_2=16$ anni ed il più giovane $n_3=13$ anni, hanno ricevuto, ognuno all'età di $m=10$ anni, un regalo $c=1500$ f., il quale fu impiegato all'interesse composto del $p=4\,^0/_0$. Devono fondare un' impresa tostochè abbiano insieme $c_1=10000$ f. Quanto devono aspettare?

Gorizia: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. I. $x^4+y^4=706$, II. $x-y=2$.

2. In una fabbrica, dopo l'introduzione di una macchina a vapore, vengono licenziati 45 operai, dei quali 40 ricevevano una mercede settimanale di 9 f. e gli altri una mercede settimanale di 11 f.. La fabbrica impiega il risparmio così ottenuto alla fine d'ogni anno come rata d'ammortizzazione pel pagamento della macchina, la quale si trova così pagata intieramente alla fine del 22° anno. Qual'era il prezzo originario di questa? (5 $^0/_0$ d'interesse).

3. Nei punti d' intersezione del circolo $x^2+y^2=97$ e dell' ellisse $\left(\frac{x}{15}\right)^2+\left(\frac{y}{5}\right)^2=1$ si devono guidare tangenti ad ambedue le curve e calcolare gli angoli da esse formati coll'asse delle ascisse.

Zara: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Un tale vuol pagare per 21 anni di seguito al principio d'ogni anno una somma determinata, affinchè scorsi quelli anni egli medesimo od un altro individuo possa per dieci anni di seguito percepire una rendita di 1000 f. pagabili alla fine di ogni anno. Quale sarà la somma da pagarsi annualmente, se si calcola il $3\frac{3}{4}\,^0/_0$ d'interesse composto?

2. Il perimetro di un triangolo è di 20 m., la sua base è di 5 m. minore della somma degli altri due lati, la somma dei quadrati di tutti e tre i lati è di 149 m.^{2}; si calcolino i lati e gli angoli del triangolo ed il volume del corpo generato dalla rotazione del triangolo intorno alla sua base.

3. Date le coordinate di tre punti $x_1=2$, $y_1=1$; $x_2=3$, $y_2=1$; $x_3=6$, $y_3=4$, si trovi la superficie ed il volume della sfera che ha per cerchio massimo il cerchio che passa per questi tre punti.

BOLZANO: *Ginnasio sup. dei Francescani.* — 1. $\operatorname{sen} x + 1 = 2 \cos x$.

2 Una progressione aritmetica ed una progressione geometrica accordano nel primo e secondo termine; il terzo termine della progressione geometrica è eguale al quarto termine della progressione aritmetica. Qual'è in ambedue le serie la somma dei primi 20 termini?

3 Sopra l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele col cateto a è costruito un quadrante di cerchio ed un semicerchio; si calcoli la superficie ed il volume del corpo che viene descritto se la figura compresa dai due archi ruota intorno alla loro simmetrica.

4. Dal punto A $(-1,3)$ sono guidate due tangenti alla parabola $y^2 = 16x$, si trovi l'area del triangolo compreso dalle due tangenti e dalla corda di contatto. (Costruzione).

MERAN: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Una rendita annuale di 1100 f. che dura ancora 15 anni viene trasformata in un'altra di 900 f., quanto durerà il godimento di quest'ultima se si calcola il $4\frac{1}{2}\,{}^0/_0$ d'interesse composto?

2. Risolvere un parallelogrammo date le diagonali $e = 2{,}736$, $f = 5{,}492$ e l'area $s = 4{,}3093$.

3 Un settore circolare di α^0 e di raggio r viene ripiegato a formare la superficie laterale di un cono; qual'è la superficie totale ed il volume del cono?

4. Pel punto $(2, 9)$ passano due tangenti al cerchio $x^2 + y^2 = 36$; quali sono le loro equazioni e che angolo formano?

(*Continua*).

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Nota sul problema del Malfatti: *In un triangolo inscrivere tre cerchi tangenti fra loro.* — Sia I il centro del circolo iscritto nel triangolo ABC, ed M, N, P i punti di contatto coi rispettivi lati BC, CA, AB. Sulle bisettrici degli angoli B, C, A si trovano i centri O_1, O_2, O_3 dei cerchi incogniti; chiamando M_1, M_2, le proiezioni dei centri O_1, O_2, sul lato BC, N_2, N_3 quelle dei centri O_2, O_3, sul lato CA, pongansi per brevità $M_1M = u$, $MM_2 = v = N_2N$, $NN_3 = t$, $IM = r$, $O_1M_1 = \rho_1$, $O_2M_2 = O_2N_2 = \rho_2$, $O_3N_3 = \rho_3$. Facilmente si traggono le relazioni:

$$\rho_1\rho_2 = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2, \quad \rho_2\rho_3 = \left(\frac{v+t}{2}\right)^2, \quad \rho_3\rho_1 = \left(\frac{t+u}{2}\right)^2:$$

dalle quali si hanno

$$\rho_1 = \frac{(u+v)(u+t)}{2(v+t)}, \quad \rho_2 = \frac{(v+u)(v+t)}{2(u+t)}, \quad \rho_3 = \frac{(t+u)(t+v)}{2(u+v)};$$

per la trigonometria ricavansi

$$\cot\frac{B}{2} = \frac{u}{r-\rho_1}, \quad \cot\frac{C}{2} = \frac{v}{r-\rho_2}, \quad \cot\frac{A}{2} = \frac{t}{r-\rho_3},$$

che sostituite nella nota identità

$$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$$

conducono all'uguaglianza

$$\frac{u\,v\,t}{(r-\rho_1)(r-\rho_2)(r-\rho_3)}=\frac{u}{r-\rho_1}+\frac{v}{r-\rho_2}+\frac{t}{r-\rho_3}.$$

Ridotta a forma intera otteniamo

$$r^2(u+v+t)-r[\rho_1(v+t)+\rho_2(u+t)+\rho_3(v+u)]+$$
$$u\rho_2\rho_3+v\rho_1\rho_3+t\rho_1\rho_2-u\,v\,t=0,$$

che per i surriferiti valori dei raggi ρ_1, ρ_2, ρ_3 in funzione delle u, v, t si traduce nella relazione

$$4r^2(u+v+t)-2r[(u+v)(v+t)+(v+t)(u+t)+(u+v)(t+u)]$$
$$+u(t+v)^2+v(t+u)^2+t(u+v)^2-4\,u\,v\,t=0;$$

il qual termine indipendente da r è identico al prodotto $(u+t)(v+t)(u+v)$ perciò si conchiude

$$4r^2(u+v+t)-2r[(u+v)(v+t)+(v+t)(u+t)+(u+v)(u+t)]$$
$$+(u+v)(u+t)(v+t)=0.$$

Da questa equazione si può ricavare ciascuna delle incognite $v+t$, $u+t$, $v+t$ in funzione di r e dei rispettivi angoli B, C, A: infatti scrivendola $4r^2(v+t)-2r(u+v)(u+t)+(u+v)(u+t)(v+t)=2r[(u+v)\cdot(v+t)+(v+t)(u+t)]-4r^2u$ e togliendo $2r(v+t)^2$ dai due membri, si trova

$$[2r-(v+t)][2r(v+t)-(u+v)(u+t)]=4ru(v+t-r):$$

e siccome $\tang\frac{B}{2}=\frac{r-\rho_1}{u}=\frac{2r(v+t)-(u+v)(u+t)}{2u(v+t)}$, la precedente diviene

$$[2r-(v+t)](v+t)=2r\cot\frac{B}{2}\cdot(v+t-r);$$

da cui risulta $v+t=r\left(1+\tang\frac{B}{4}\right)=BI+IM-BM$: similmente ottengonsi

$$u+t=r\left(1+\tang\frac{C}{4}\right)=CI+IM-CM,$$
$$u+v=r\left(1+\tang\frac{A}{4}\right)=AI+IN-AN,$$

e quindi

$$\rho_1=r\,\frac{\left(1+\tang\frac{A}{4}\right)\left(1+\tang\frac{C}{4}\right)}{1+\tang\frac{B}{4}}\text{, ecc..}$$

G. Bellacchi.

Centro di gravità del trapezio. — Sia $ABCD$ un trapezio i cui lati paralleli contengono rispettivamente p e q unità di lunghezza. Si bisechino AB, DC in E, F e si tirino BD, EF che si tagliano in H.

Si ha

$$\triangle ABD : \triangle BDC :: AB : DC :: p : q :: 3p : 3q.$$

Il centro di gravità del triangolo ABD si può considerare come quello delle masse $2p$ in E e p in D. Il centro di gravità del triangolo BDC è quello delle masse $2q$ in F e q in B.

Ora

$$EH : HF :: BH : HD :: BE : DF :: p : q$$

e giacchè le masse p in D e q in B equivalgono alla massa $p + q$ in H, equivarranno alle masse p in F e q in E. Il sistema ha quindi per baricentro quello delle masse $2p + q$ in E, $p + 2q$ in F.

Se G è il centro di gravità del trapezio, esso cade dunque su EF così che

$$(2p + q)\, EG = (p + 2q)\, FG.$$

Quando si denotino i baricentri dei triangoli ABD, BDC con L, M e si adotti la notazione di Möbius, l'ultima parte della dimostrazione si riassume brevemente così:

$$\begin{aligned}(3p + 3q)\, G &= 3pL + 3qM = 2pE + pD + 2qF + qB \\ &= 2pE + 2qF + (p + q)\, H = 2pE + 2qF + qE + pF \\ &= (2p + q)\, E + (2q + p)\, F.\end{aligned}$$

E. M. Langley.

Sull'ordine delle cifre di un numero decimale. — Per ordine di una cifra decimale s'intenda il numero d'ordine del posto che essa occupa, contando a partire dalla cifra della unità e attribuendo a questo numero il segno + o il segno —, secondochè si conta verso sinistra o verso destra.

Da questa definizione derivano delle semplificazioni importanti per il calcolo dei numeri decimali; eccone alcuni esempi:

I) Nella moltiplicazione di due numeri decimali, l'ultima cifra del prodotto parziale, che corrisponde alla prima cifra del moltiplicatore, ha per ordine la somma degli ordini dell'ultima cifra del moltiplicando e della prima cifra del moltiplicatore.

Questo criterio è utilissimo per collocare la virgola, quando, nell'eseguire la moltiplicazione fra due numeri decimali approssimati, onde evitare una approssimazione illusoria, non si calcolano tutte le cifre del prodotto (V., p. es., Faifofer, *Elementi di aritmetica*, pag. 253 — Venezia, 1885).

II) Nella divisione di due numeri decimali l'ordine della prima cifra del quoziente è sempre eguale alla differenza fra l'ordine della prima cifra del dividendo e l'ordine della prima cifra del divisore, o a questa stessa differenza diminuita di una unità, secondochè, immaginando che la prima cifra del dividendo e del divisore sia di ordine zero, il dividendo risulta maggiore o minore del divisore.

III) La caratteristica del logaritmo di un numero è uguale al numero d'ordine della prima cifra di questo numero (che è, in sostanza, la regola data dal CAILLET, *Tavole logaritmico-trigonometriche*, pag. II — Vannes, 1890).

Livorno, dicembre 1894.

G. PESCI.

Sulla quistione 207'. — La soluzione da me data della quistione 207' (*) non è che un caso particolare di una soluzione data dal FLAUTI nella sua *Geometria di sito*, che risolve questo problema più generale:

Dato un punto P e due rette AX, A_1X_1 terminate in A ed A_1, tirare per P fra le rette AX e A_1X_1 una trasversale PBB_1 tale che $\frac{BA}{B_1A_1} = \frac{m}{n}$.

Per risolvere un tale problema egli premette il lemma seguente:

Se sulle rette AX e A_1X_1 si prendono due segmenti AB ed A_1B_1 tali che $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{m}{n}$ e si prende ancora $\frac{OB}{OD} = \frac{m}{n}$, O essendo l'intersezione di AX e A_1X_1 e D trovandosi su OA_1, si ha che B_1D è o nulla o costante, al variare di B e B_1. (**)

Oltre questi teoremi del FLAUTI, si riferiscono al medesimo ordine di idee questi altri non meno eleganti:

1° Date le direzioni AX e A_1X_1 se si prende su di esse $AB = A_1B_1$ la congiungente dei punti medii M ed N di AA_1 e BB_1 è parallela alla bisettrice interna od esterna dell'angolo delle due direzioni, secondochè AB ed A_1B_1 sono contate nel medesimo senso o in senso inverso. (***)

Quindi:

2° Rimanendo fisse le rette AX ed A_1X_1 e i punti A ed A_1 se si tirano tante trasversali BB_1 in modo che sia $AB = A_1B_1$ il luogo dei punti medii di BB_1 si compone di due rette perpendicolari fra di loro, parallele alle due bisettrici dell'angolo (AX, A_1X_1).

Infine:

3° Le rette BB_1 inviluppano due parabole tangenti ciascuna alle due direzioni date AX e A_1X_1 e all'una delle due rette, luoghi dei punti medii di BB_1. Infatti la retta BB_1 taglia AX, A_1X_1, la retta all'infinito e una di queste rette-luogo in quattro punti di una forma armonica.

G. SCORZA.

(*) Vedere a pag. 33.

(**) Vedi FLAUTI: *Geometria di sito*, pag. 261 e seguenti.

(***) Vedi *Journal de Mathématiques élémentaires* publié par H. VUIBERT. Anno XVIII, pag. 29.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 171*, 202**, 205*, 206*, 207*, 208*, 210*, 213** e 215**.

171*. *La retta* B′C′ *tirata per i piedi delle altezze* BB′, CC′ *del triangolo* ABC *incontri in* A″ *il lato* BC *e si conduca* AA‴ *perpendicolare ad* AA″. *Dimostrare che le rette* AA‴, BB‴, CC‴ *si tagliano in un punto.*

(Ved. F. Prime).

Dimostrazione del Sig. *E. Lugaro*, licenziato dal R. Liceo Garibaldi di Palermo.

Sia A_1 (Tav. I, fig. 7ª) il punto d'incontro di BB'' con CC''. Per il teorema di Menelao applicato al $\triangle\ ACC''$, i cui lati sono tagliati dalla trasversale BB'', si ha

$$[1] \quad \ldots\ldots\ldots AB \,.\, C''A_1 \,.\, CB'' = BC'' \,.\, A_1C \,.\, B''A.$$

Siccome $A'A$ è bisettrice dell'angolo $B'A'C'$, la $A'C$, ad essa perpendicolare, sarà bisettrice dell'angolo adiacente $B''A'B'$; quindi

$$CB' : CB'' = AB' : AB'';$$

moltiplicando membro a membro con la [1] si ottiene

$$AB \,.\, C''A_1 \,.\, CB' = BC'' \,.\, A_1C \,.\, B'A$$

e per il teorema di Ceva, applicato allo stesso triangolo, considerando come trasversali le AA_1, CB, $C''B'$, si ha che queste tre rette passano per uno stesso punto A', ossia il punto A_1 si trova sulla AA'. In modo analogo si dimostra che B_1, C_1 sono rispettivamente sulle BB', CC'.

Si faccia $\angle\ CA_1D = HA_1B$, $\angle\ CB_1E = HB_1A$, $\angle\ BC_1F = HC_1A$, allora le A_1D, B_1E, C_1F, essendo coniugate isogonali delle HA_1, HB_1, HC_1 nel $\triangle\ A_1B_1C_1$, rispetto agli angoli CA_1B, CB_1A, BC_1A,, concorrono in un punto O (*). Si congiunga questo punto con A, B e C.

Siano a, b i piedi delle perpendicolari condotte da O ad AA'', BB''. Il quadrilatero ObC_1a, avendo gli angoli opposti supplementari, è inscrittibile: sono dunque eguali gli angoli bC_1O, baO; ma è $bC_1O = HC_1a$, è dunque $baO = HC_1a$. E siccome questi angoli hanno una coppia di lati perpendicolari (C_1a, Oa), anche i lati C_1H, ab dell'altra coppia sono perpendicolari; ma AB è anch'essa perpendicolare a C_1H, quindi AB è parallela alla ab. Similmente si dimostra che BC, CA sono parallele a bc, ca. Ora due triangoli che hanno i lati paralleli sono simili: se non sono eguali hanno un centro di similitudine, che è il punto d'incontro delle rette che ne congiungono i vertici omologhi; se sono eguali le tre rette sono parallele. Nel nostro caso però le AA''

(*) V. *Alcuni teoremi di geometria*, p. 1, n. 1.

BB'', CC'' non sono concorrenti nè parallele, quindi A, B, C devono coincidere con a, b, c. Le AO, BO, CO coincidono perciò con le AA''', BB''', CC''' che si tagliano in un punto O. c. d. d..

Osservazioni — 1ª. Sappiamo che le sei proiezioni di due punti isogonali sui lati d'un triangolo sono conciclihe e che il centro del cerchio è il punto medio della distanza dei due punti. Quindi il centro del cerchio ABC è il punto medio della HO.

2ª. Essendo i punti B, C, B', C' conciclici, si ha

$$A''B \,.\, A''C \equiv A''C' \,.\, A''B'.$$

Il primo membro rappresenta la potenza del punto A'' rispetto al cerchio ABC, il secondo membro la potenza di A'' rispetto al cerchio $A'B'C'$, cioè al cerchio dei nove punti (punti ortici, punti medi dei lati e punti medi delle distanze dei vertici dall'ortocentro). Similmente per B'' e C''. Quindi i punti A'', B'', C'', essendo ciascuno di uguale potenza rispetto a questi due cerchi, si trovano in una retta (asse radicale) perpendicolare a quella dei centri, cioè ad HO, perchè il centro del cerchio dei nove punti è il punto medio della distanza di H dal centro del cerchio ABC.

202.** *Dimostrare le seguenti soluzioni dei problemi:*

« *Date in un piano due rette* u, u′ *ed un punto* U′, *tracciare, con la sola riga, la retta che unisce* U′ *al punto* uu′, *senza far uso di quest'ultimo punto* ».

Si tirino le rette arbitrarie l, l′, p *delle quali le prime due passino per* U′, *e si ponga* p (u, l) ≡ N, L; ul ≡ M; u′l′ ≡ M′. *Preso poi un punto arbitrario* S *di* MM′, *si ponga* SN . u′ ≡ N′, SL . l′ ≡ L′. *La retta* N′L′ *taglierà* p *in un punto* U″ *della richiesta retta; sicchè questa sarà la* U′U″.

« *Dati in un piano due punti* U, U′ *ed una retta* u′, *trovare con la sola riga, il punto comune ad* u′ *ed alla retta* UU′, *senza far uso di quest'ultima retta* ».

Si segnino i punti arbitrari L, L′, P *dei quali i primi due giacciano sopra* u′, *e si ponga* P (U, L) ≡ n, l; UL ≡ m; U′L′ ≡ m′. *Presa poi una retta arbitraria* s *di* mm′ *si ponga* sn . U′ ≡ n′, sl . L′ ≡ l′. *Il punto* n′l′ *sarà proiettato da* P *con una retta.* u″ *del punto richiesto; sicchè questo sarà* u′u″.

Far rilevare che le due precedenti soluzioni, mentre non richiedono maggior numero di costruzioni di quelle già conosciute, possono ciascuna servire a risolvere tanto il problema a sinistra che quello a dritta. (A. Del Re).

Risposta del Sig. V. *Columbo*, studente nella R. Università di Napoli (*).

Prendiamo a dimostrare la costruzione relativa al problema di sinistra.

I due triangoli LMN, $L'M'N'$ (Tav. I, fig. 8ª) sono tali che le rette LL', MM', NN', congiungenti i vertici corrispondenti, passano per lo stesso punto

(*) Un'altra soluzione venne inviata dal Sig. *G. Scorza*, studente a Pisa.

S: ne segue che i lati corrispondenti si tagliano in punti che sono in linea retta. Ma questa retta è determinata dai due punti $U' \equiv LM . L'M'$, $U'' \equiv LN . L'N'$ cosicchè la retta $U'U''$ passa per il punto d'intersezione delle $MN \equiv u$, $M'N' \equiv u'$.

Questa costruzione richiede il tracciamento di otto rette come le altre conosciute. Inoltre essa si adatta anche alla risoluzione del problema a dritta.

Invero (fig. 9ª), preso un punto P ad arbitrio, si trova la retta congiungente P col punto $u' . UU'$ senza far uso della UU', col mezzo della costruzione precedente, come segue:

Si tracci la retta $l \equiv P . U$ e scelto un punto A ad arbitrio di u' si conduca $l' \equiv P . A$ e per U' una retta arbitraria p. Sia $V \equiv p . l$. Si prenda sulla UA un punto S e pongasi $B \equiv u' . SU'$, $C \equiv l' . SV$. La retta BC incontri p in un punto P': la PP' conterrà il punto $u' . UU'$, il quale sarà perciò l'intersezione di PP' con u'.

Correlativamente per il problema a destra.

205*. *I tre punti simmetrici di un punto* M, *preso sul circolo circoscritto ad un triangolo* A B C, *rispetto ai lati di questo, sono in una retta, e tutte le rette che si possono ottenere in tal modo, al variare di* M *sul circolo, passano per uno stesso punto, l'ortocentro del triangolo.*

(G. Biasi).

Dimostrazione del Sig. *G. Scorza*, studente a Pisa.

Dal punto M (Tav. I, fig. 10ª) si abbassino sui lati BC, CA, AB del triangolo ABC le perpendicolari MD, ME ed MF: allora pel teorema di Simson (*) i punti D, E ed F sono sopra una medesima retta. Inoltre siano: H l'ortocentro del triangolo ABC e K, N, G i punti ove la retta AH incontra le rette DE e BC e il circolo circoscritto, e si tirino le rette MC, MG, DG, DH.

I punti D, E, M, C si trovano sopra una medesima circonferenza di diametro MC poichè gli angoli MEC ed MDC sono retti, dunque $\angle MCE = \angle MDE$. Ma l'angolo MDE è uguale all'angolo DKN per essere la MD parallela alla KN e l'angolo MCA è uguale all'angolo MGA perchè insistono sul medesimo arco di cerchio, dunque sarà altresì $\angle DKN = \angle MGA$. Per conseguenza se P è il punto d'incontro delle rette DK ed MG saranno isosceli i triangoli PKG e PDM e quindi uguali gli altri due MPK e PGD. Da ciò segue che MK è uguale a DG: ma, come si sa, DG è uguale a DH, dunque MK è uguale a DH, la figura $MDHK$ è un parallelogrammo e la MH è segata per metà dalla DK. Ora poichè D, E, F sono sopra una medesima retta saranno sopra una stessa retta parallela alla DE anche i punti M', M'', M''' simmetrici di M per rispetto a BC, CA, AB; e finalmente poichè MH è segata per metà dalla DE la retta $M'M''$ passerà per H. Il teorema è dunque dimostrato (**).

(*) Vedi p. es. Baltzer, *Planimetria*, pag. 47.

(**) Una dimostrazione poco dissimile dalla presente venne inviata dal Sig. *F. Celestri*, alunno del R. Istituto tecnico di Modica.

Dimostrazioni del Sig. *E. Lugaro*, licenziato dal R. Liceo Garibaldi di Palermo e *M. Morale* licenziato dal R. Istituto tecnico di Catania (*).

Siano D, E, F (Tav. I, fig. 11ª) i tre punti simmetrici del punto M, rispetto ai lati AB, BC, AC; G, K, L i punti medi delle MD, ME, MF.

Al variare di M sul circolo, il punto D genera una circonferenza simmetrica alla data rispetto all'asse AB; perciò questa circonferenza così generata è eguale alla ABC e la interseca nei punti A, B. Similmente i luoghi dei punti E, F sono due circonferenze simmetriche alla data, l'una rispetto all'asse BC, l'altra rispetto all'asse AC. Questi tre cerchi hanno, per un noto teorema, un punto in comune H, che, essendo i tre cerchi fra loro eguali, è, per un altro teorema anch'esso noto, l'ortocentro del triangolo (**).

Tirisi AH, CH, EB, BD, MB, EH, DH. Si ha $\angle AHC = 180^0 - ABC$, perchè $\angle AHC$ ed $\angle ABC$ hanno i lati perpendicolari che non cadono due a due da una stessa banda o da bande opposte di BH. Inoltre

$$\angle AHD + CHE = \angle ABD + CBE = \angle ABM + MBC = \angle ABC;$$

quindi

$$\angle DHA + AHC + CHE = 180^0,$$

epperò D ed E giacciono in una stessa retta, passante per H.

Nello stesso modo si prova che $\angle FHA + AHC + CHE = 180^0$, cosicchè nella retta HE si trova anche il punto F. I punti D, E, F sono quindi in una retta passante per l'ortocentro del triangolo; e in una retta, parallela a questa, si trovano altresì i punti G, K, L.

206'. *Dati i tre punti simmetrici del centro del circolo circoscritto ad un triangolo, rispetto ai lati di questo, si costruisca il triangolo, studiando le relazioni fra il triangolo domandato e quello che ha per vertici i punti dati.*

(G. Biasi).

Soluzioni analoghe dai Sigg. *B. Armano*, licenziato dal R. Liceo di Alessandria; *F. Celestri*, alunno del R. Liceo di Modica; *L. Gragnani*, studente a Piombino; *C. Montanari*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Livorno e *S. Resta*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari.

Siano A, B, C (Tav. I, fig. 12ª) i punti simmetrici del centro O del circolo circoscritto ad un $\triangle DEF$ rispetto ai lati EF, FD, DE; M, N i punti medi dei segmenti AO, BO quindi anche degli altri EF, FD. Si ha $AB = 2MN$, $DE = 2NM$ quindi $AB = DE$; e così $BC = EF$, $CA = FD$: inoltre $AB \parallel MN$, $DE \parallel NM$, perciò $AB \parallel DE$; similmente $BC \parallel EF$, $CA \parallel FD$. I due triangoli ABC, DEF sono dunque direttamente eguali ed hanno inoltre i lati paralleli (*1ª proprietà*).

La CO perpendicolare a DE è altresì perpendicolare alla sua parallela AB e per ragione consimile AO è perpendicolare a BC e BO a CA. D'altra parte se Q è il centro de circolo circoscritto al $\triangle ABC$, siccome si ha $FA = FO = FB$

(*) Altre dimostrazioni del teorema furono inviate dal Sig. *B. Armano*, licenziato dal R. Liceo di Alessandria e *G. Gallucci*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Napoli.

(**) Ciò si può derivare anche come facile conseguenza della soluzione della q. 206ª [*N. d. Red.*].

e $QA = QB$, sarà FQ perpendicolare ad AB e quindi anche a DE. Analogamente le altre due altezze del $\triangle DEF$ passeranno per Q. Onde si può dire che l'ortocentro dell'un triangolo coincide col centro del cerchio circoscritto all'altro. (*2ª proprietà*).

Dall'essere poi $AF = FO = AQ$, perchè triangoli uguali hanno eguali i raggi dei cerchi a loro circoscritti, se ne ricava che AB è asse del segmento FQ e che per conseguenza i punti D, E, F sono simmetrici di Q rispetto ai lati del $\triangle ABC$. Dunque l'un triangolo si può ottenere dall'altro come questo è ricavato dal primo. (*3ª proprietà*).

La 2ª proprietà insegna, dati i tre punti A, B, C a trovare il centro del cerchio circoscritto al $\triangle DEF$. Si conoscono così le AO, BO, CO e quindi anche i loro assi che sono i lati del triangolo cercato.

Il Sig. *E. Lugaro*, che inviò pure una soluzione del problema, osserva poi che il punto d'incontro P delle mediane del $\triangle DEF$ trovandosi, com'è noto, sulla OQ in posizione tale per la quale si ha $PQ = 2\,OP$ e il baricentro G di ABC in posizione tale per cui è $OG = 2\,GQ$, i punti P, G dividono la OQ in tre parti uguali (*).

207*. a) *Essendo date, nel piano, due direzioni* AX, $\mathrm{A_1X_1}$ *uscenti dai punti* A, $\mathrm{A_1}$, *e un punto* P *esterno ad esse, trovare nelle direzioni medesime i punti* B, $\mathrm{B_1}$ *in linea retta con* P *e tali che sia* $\mathrm{AB} = \mathrm{A_1B_1}$.

b) *Applicare questo problema alla soluzione dei seguenti:*

1° *Diminuire i lati di un rettangolo di uno stesso segmento, in modo da ottenere un nuovo rettangolo equivalente ad una parte del primo, determinata da una retta parallela ad un lato.*

2° *Costruire un arco di circolo tale che la somma della sua tangente e della sua cotangente sia eguale a* 4 (*o ad altro numero dato*). [Esami di licenza degli Istituti tecnici, 1890-91].

3° *Costruire due archi, essendo date la loro somma e la somma delle loro tangenti.* [Esami di licenza degli Istituti tecnici, 1892-93].

(G. Biasi).

Risposta del Sig. *G. Scorza*, studente a Pisa (**).

a) Supponiamo il problema risoluto e sia BB_1 (Tav. I, fig. 13ª) una retta passante per P e tale che $AB = A_1B_1$.

Allora se, indicando con O il punto d'incontro di AB e A_1B_1, si prende su OA_1 un segmento OD uguale ad OB si avrà che DB_1, differenza di OB_1 ed OB (si è supposto $OA_1 > OA$ e quindi $OB_1 > OB$), è costante perchè uguale ad $(OA_1 + A_1B_1) - (OA + AB)$ (***) cioè ad $OA_1 - OA$, essendo uguali AB ed A_1B_1.

(*) Altre soluzioni pervennero dai Sigg. *M. Morale*, studente a Catania e *G. Scorza*, studente a Pisa.

(**) Un'altra risposta, meno sintetica, venne inviata dal Sig. *M. Morale*, studente a Catania.

(***) Qui si suppone che il punto P sia posto dalla parte opposta di O per rispetto ad AA_1: in caso contrario si avrebbe

$$DB_1 = (OA_1 - A_1B_1) - (OA - AB) = OA_1 - OA.$$

Inoltre se E ed F sono i punti di incontro di OA_1 colle parallele tirate da P a BD e OA si avrà da triangoli simili che risultano da tale costruzione:

$$B_1F : B_1O :: PF : BO :: EF : OD,$$

ossia permutando

$$B_1F : EF :: B_1O : OD$$

e dividendo

$$B_1E : EF :: B_1D : OD.$$

Dunque questa proporzione di cui due termini sono incogniti, ossia B_1E ed OD, fornisce il loro rettangolo $EF \, . \, B_1D$ espresso mediante i segmenti conosciuti EF e B_1D. Ma d'altra parte è conosciuta anche la differenza

$$OD - B_1E = OE - DB_1 = GE$$

avendo preso su OB_1, $OG = DB_1$; pertanto dei due segmenti OD, B_1E si conosce la differenza ed il rettangolo: essi perciò sono pienamente determinati (*) e il problema rimane risoluto.

Perchè il problema è di secondo grado le soluzioni possibili in generale sono due.

b) Ed ora sia dato un rettangolo $ABCD$ segato (fig. 14ª) da una retta qualunque EF parallela ad AB. Evidentemente se si tira per D una retta qualunque che incontri EF in G e BC in H e se per G ed H si tirano delle parallele ad AD e AB che incontrino AB e DC in L ed M e AD in N, si viene a formare un rettangolo $NDMP$ (P essendo l'intersezione di HN ed ML) equivalente al rettangolo $EFCD$. Il problema consiste adunque nel tirare per D tra FE e BC una trasversale DH in modo che risulti $LB = BH$ cioè $BH = GF$: e questo problema è già stato risoluto.

2° Sia AB un quadrante di un circolo di raggio 1 (fig. 15ª) e siano AP e BT le tangenti al circolo in A e B. Se sopra BT si prende BN uguale a 4 o a un dato numero qualsiasi a è evidente che il problema si riduce a tirare pel centro O del circolo fra le rette AP e BN una tal trasversale OPQ che risulti $AP = QN$. Il punto M ove la OP incontra il cerchio, dà l'arco AM richiesto.

3° Sia α il valore, in gradi, della somma data degli archi e sia a la somma delle tangenti. Allora preso un quadrante AB di un circolo di raggio 1 si incominci dal prendere un arco AM di α gradi (fig. 16ª) e dal tirare in A e in M la tangente al circolo AB. Allora se sulla tangente ad AB in M si prende un segmento MA_1 uguale ad a il problema si riduce a tirare pel centro O del cerchio AB una tal trasversale OPQ che risulti $PA = QA_1$; problema che ormai sappiamo risolvere.

(*) Vedi per es. Combebousse: *Cours de Mathématique*, Vol. II, pag. 108.

208*. *Dati più numeri* $a_1, a_2, \ldots a_n$ *non tutti multipli di un numero* m, *dimostrare, indipendentemente dalla teoria dei numeri primi, che il minor numero* b *pel quale i prodotti* $a_1 b, a_2 b, \ldots a_n b$ *sono divisibili per* m, *è un divisore di* m. (G. Ceccaroni).

Dimostrazione del Sig. *M. Morale*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Catania.

I prodotti $a_1 m, a_2 m, \ldots a_n m$ sono multipli di m, ma se sia d il massimo comun divisore dei numeri $a_1, a_2, \ldots a_n, m$ sono multipli di m anche i prodotti $a_1 \frac{m}{d}, a_2 \frac{m}{d}, \ldots a_n \frac{m}{d}$, anzi saranno questi i più piccoli equimultipli di $a_1, a_2, \ldots a_n$ divisibili per m.

Infatti se d_1 è il m. c. d. di a_1 ed m, ogni numero multiplo di a_1 ed m sarà un multiplo di $\frac{a_1 m}{d_1}$; parimenti ogni multiplo di a_2 ed m sarà un multiplo di $\frac{a_2 m}{d_2}$, dove d_2 è il m. c. d. di a_2 ed m, ecc., ed infine qualunque multiplo di a_n ed m sarà multiplo di $\frac{a_n m}{d_n}$, con d_n m. c. d. fra a_n ed m. Occorre dunque che il moltiplicatore b dei numeri $a_1, a_2, \ldots a_n$, sia il minimo multiplo comune di $\frac{m}{d_1}, \frac{m}{d_2}, \ldots \frac{m}{d_n}$. Ora questo m. m. c. è precisamente $\frac{m}{d'}$ essendo d' il m. c. d. di $d_1, d_2, \ldots d_n$. Osservando poi che le due serie di numeri $d_1, d_2, \ldots d_n$ e $a_1, a_2, \ldots a_n, m$ hanno gli stessi divisori comuni si conclude $d' = d$, perciò finalmente $b = \frac{m}{d}$, c. d. d..

210*. *Considerando un segmento sferico a due basi come somma o differenza di due segmenti aventi per base comune un cerchio massimo della sfera – i cui volumi sono dunque da esprimersi con* $\frac{\pi h_1}{3}(2R^2 + r_1^2)$ *e* $\frac{\pi h_2}{3}(2R^2 + r_2^2)$ *– trovare la nota formola pel volume del segmento sferico a due basi qualunque.* (A. Lugli).

Soluzione del Sig. *E. Lugaro*, licenziato dal R. Liceo Garibaldi di Palermo (*).

Il volume V del segmento sferico, appartenente alla sfera di raggio R, avente per basi i cerchi di raggio r_1 ed r_2 e per altezza $h = h_1 \pm h_2$, è:

$$V = \frac{\pi h_1}{3}(2R^2 + r_1^2) \pm \frac{\pi h_2}{3}(2R^2 + r_2^2) = \frac{\pi}{3}\left[2R^2(h_1 \pm h_2) + h_1 r_1^2 \pm h_2 r_2^2\right].$$

Ora $R^2 = h_1^2 + r_1^2 = h_2^2 + r_2^2$, onde si ha:

$$V = \frac{\pi}{3}\left[(h_1^2 + h_2^2)(h_1 \pm h_2) + (r_1^2 + r_2^2)(h_1 \pm h_2) + h_1 r_1^2 \pm h_2 r_2^2\right] =$$
$$\frac{\pi}{3}\left[h_1(h_1^2 + r_1^2) \pm h_2(h_2^2 + r_2^2) + h_1 h_2^2 \pm h_2 h_1^2 + (r_1^2 + r_2^2)(h_1 \pm h_2)\right].$$

(*) Un'altra soluzione venne inviata dal Sig. *F. Celestri*, alunno del R. Ist. tec. di Modica.

Ma, a motivo di $h_1^2 + r_1^2 = h_2^2 + r_2^2$, si deduce $h_1(h_1^2 + r_1^2) \pm h_2(h_2^2 + r_2^2) = \frac{1}{2}(h_1 \pm h)(h_1^2 + h_2^2) + \frac{1}{2}(h_1 \pm h_2)(r_1^2 + r_2^2)$, quindi

$$V = \frac{\pi}{3}\left[\frac{1}{2}(h_1 \pm h_2)(h_1^2 + h_2^2) + h_1 h_2^2 \pm h_2 h_1^2 + \frac{3}{2}(r_1^2 + r_2^2)(h_1 \pm h)\right] = \frac{\pi}{3}\left[\frac{1}{2}(h_1 \pm h_2)^3 + \frac{3}{2}(r_1^2 + r_2^2)(h_1 \pm h_2)\right] = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi h}{2}(r_1^2 + r_2^2).$$

213.** *Se, sui lati* a, b, c *di un triangolo* ABC $\equiv$ abc, *si considerano le involuzioni che hanno per punti coniugati i vertici del triangolo situati su essi lati, e per punti centrali i punti medii di questi, i coniugati dei punti nei quali* a, b, c *sono ordinatamente tagliati da una retta arbitraria del piano, sono proiettati dai vertici opposti secondo tre rette concorrenti* (*).

(A. Del Re).

Dimostrazione dell'A. della quistione (**).

Sia r la trasversale; posto $r(a, b, c) \equiv L, M, N$, si dicano L', M', N' i coniugati di L, M, N nelle tre involuzioni di cui si parla nel teorema, ed L_1, M_1, N_1 i coniugati isotomici di L', M', N'; L_1, M_1, N_1 saranno gli armonici di r, ordinatamente, rispetto a BC, CA, AB. Perciò mentre AL_1, BM_1, CN_1 concorrono nell'armonico R di r rispetto ad abc (***), AL', BM', CN' concorreranno nel coniugato isotomico R_1 di R (****).

Osservazione. A riconoscere il carattere proiettivo della proposizione proposta, giova osservare (il che fornisce un'altra dimostrazione della proposizione stessa) che immaginando il sistema polare avente per centro il baricentro di abc e questo triangolo per suo triangolo coniugato, in esso saranno AL', BM', CN', ordinatamente, le polari di L, M, N; AL', BM', CN' concorrono perciò nel polo R_1 di r, rispetto a detto sistema.

215.** *Dimostrare elementarmente, che, se* $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ *sono sei numeri reali, tali che almeno una delle quantità* $\beta^2 - \alpha\gamma$, $\beta'^2 - \alpha'\gamma'$ *sia negativa, si avrà*

$$(\alpha\gamma' + \alpha'\gamma - 2\beta\beta')^2 - 4(\beta^2 - \alpha\gamma)(\beta'^2 - \alpha'\gamma') > 0.$$

La proposizione è evidente quando una soltanto di dette quantità è negativa.

(A. Del Re).

(*) Si desidera che la dimostrazione di questa proposizione sia fatta senza ricorrere ai sistemi polari, coi quali si può fare immediatamente.

(**) Dimostrazioni più complesse pervennero dai Sigg. Prof. *V. Carpanelo* e Dott. *F. Mariantoni*.

(***) Si ha infatti $\frac{BL}{LC} = -\frac{BL_1}{L_1C}$, $\frac{CM}{MA} = -\frac{CM_1}{M_1A}$, $\frac{AN}{NB} = -\frac{AN_1}{N_1B}$ e, moltiplicando membro a membro, $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -\frac{BL_1}{L_1C} \cdot \frac{CM_1}{M_1A} \cdot \frac{AN_1}{N_1B}$. Ma poichè i tre punti L, M, N sono in linea retta, pel teorema di Menelao, il primo membro di quest'eguaglianza è uguale a -1, per cui segue $\frac{BL_1}{L_1C} \cdot \frac{CM_1}{M_1A} \cdot \frac{AN_1}{N_1B} = 1$, e allora pel teorema reciproco a quello di Ceva, le tre rette AL_1, BM_1, CN_1 passano per lo stesso punto [*N. d. Red.*]

(****) Cfr. Periodico: *Alcuni teoremi della recente teoria del triangolo.* Anno IV, pag. 21, n. 7 [*N. d. Red.*].

Dimostrazione del Sig. Prof. *R. Badia* a Perugia.

Pongasi

$$[1] \quad \frac{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}{\alpha' x^2 + 2\beta' x + \gamma'} = y$$

e si ammetta che le quantità $\beta^2 - \alpha\gamma$, $\beta'^2 - \alpha'\gamma'$ siano negative. Nessuno dei termini della frazione può allora diventar zero, sicchè per ogni valore arbitrario che si dia ad x, deve esistere necessariamente un valore corrispondente di y determinato e diverso da zero.

Ora risolvendo la [1] rispetto ad x, si ha

$$x = \frac{\beta' y - \beta \pm \sqrt{(\beta'^2 - \alpha'\gamma')y^2 + (\alpha\gamma' + \alpha'\gamma - 2\beta\beta')y + \beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha - \alpha' y}$$

ed è evidente che, essendo per ipotesi negativo il coefficiente di y^2 e reali i sei numeri α, β, γ, α', β', γ', x è reale per i soli valori di y compresi tra le radici dell'equazione

$$(\beta'^2 - \alpha'\gamma')y^2 + (\alpha\gamma' + \alpha'\gamma - 2\beta\beta')y + \beta^2 - \alpha\gamma = 0\,,$$

radici che debbono essere reali, per conseguenza deve verificarsi la diseguaglianza che bisognava dimostrare.

Dimostrazione del Sig. Prof. *V. Carpaneto* ad Acqui.

Posto $\beta^2 - \alpha\gamma = -\delta^2$ e $\beta'^2 - \alpha'\gamma' = -\delta'^2$ si ricava $\alpha = \dfrac{\beta^2 + \delta^2}{\gamma}$ e $\alpha' = \dfrac{\beta'^2 + \delta'^2}{\gamma'}$. Sostituendo nel primo membro della relazione a dimostrare, si ha

$$(\alpha\gamma' + \alpha'\gamma - 2\beta\beta')^2 - 4(\beta^2 - \alpha\gamma)(\beta'^2 - \alpha'\gamma') =$$

$$\left[(\beta^2 + \delta^2)\frac{\gamma'}{\gamma} + (\beta'^2 + \delta'^2)\frac{\gamma}{\gamma'} - 2\beta\beta'\right]^2 - 4\delta^2\delta'^2 =$$

$$\left[(\beta^2 + \delta^2)\frac{\gamma'}{\gamma} + (\beta'^2 + \delta'^2)\frac{\gamma}{\gamma'} - 2\beta\beta' - 2\delta\delta'\right] \times$$

$$\left[(\beta^2 + \delta^2)\frac{\gamma'}{\gamma} + (\beta'^2 + \delta'^2)\frac{\gamma}{\gamma'} - 2\beta\beta' + 2\delta\delta'\right] =$$

$$\frac{1}{\gamma^2\gamma'^2}(\beta^2\gamma'^2 + \beta'^2\gamma^2 - 2\beta\beta'\gamma\gamma' + \delta^2\gamma'^2 + \delta'^2\gamma^2 - 2\delta\delta'\gamma\gamma') \times$$

$$(\beta^2\gamma'^2 + \beta'^2\gamma^2 - 2\beta\beta'\gamma\gamma' + \delta^2\gamma'^2 + \delta'^2\gamma^2 + 2\delta\delta'\gamma\gamma') =$$

$$\left(\frac{1}{\gamma\gamma'}\right)^2\left[(\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2 + (\delta\gamma' - \delta'\gamma)^2\right]\left[(\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2 + (\delta\gamma' + \delta'\gamma)^2\right] > 0 \text{ c. d. d..}$$

QUISTIONI PROPOSTE (*)

238. Dimostrare che la somma

$$\frac{n}{n+1} - 2^k \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} + 3^k \frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \ldots \pm n^k \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}$$

è eguale ad $\frac{1}{2}$ per $k=0$, ed è eguale a zero qualunque sia l'intero positivo pari $k \leq 2n-2$.

D. Besso.

239**. Mostrare che, data l'equazione, a coefficienti reali,

$$\alpha xy + \beta x + \gamma y + \delta = 0,$$

e, posto $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$, le coppie di valori di x, y che la soddisfanno, e che, nello stesso tempo, differiscono di una quantità reale assegnata h, sono sempre reali se è $-\alpha^2\Delta \leq 0$; e se è $-\alpha^2\Delta > 0$, saranno reali soltanto quando h non è compreso fra i due valori $\frac{\gamma - \beta \pm \sqrt{-\Delta}}{\alpha}$.

Osservare poi che, nel caso di $\alpha = 0$, e di $\beta = -\gamma$, il problema di determinare dei valori di x, y con la condizione voluta è impossibile, o indeterminato.

A. Del Re.

240*. Dato l'angolo di sezione α di due circonferenze e quello 2θ delle loro tangenti comuni, determinare il rapporto m dei loro raggi; viceversa conoscendo m ed uno degli angoli α, 2θ si cerchi l'altro.

G. Bellacchi.

241**. Date due rette OX, OY e un punto P, intorno a cui ruota una secante variabile APB, dimostrare che il luogo del centro del circolo circoscritto al triangolo OAB è un'iperbole i cui assintoti sono perpendicolari ad OX, OY.

G. Scorza.

242**. Data un'iperbole equilatera di centro O, il luogo del centro del circolo circoscritto al triangolo formato dalla tangente all'iperbole in un punto fisso P e da due qualunque diametri coniugati, è una retta perpendicolare alla OP nel centro O dell'iperbole.

G. Scorza.

(*) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

243*. Se nel triangolo ABC si tira la bisettrice AD dell'angolo CAB, dal suo piede D la perpendicolare DE al lato AC e dal punto E le EG, EF perpendicolari ad AD, AB, dimostrare che si ha

$$\overline{DE} \cdot \overline{EF} = 2\,\overline{EG}^2.$$

V. Columbo.

244*. Il quadrato della semisomma dei cateti di un triangolo rettangolo è equivalente al triangolo che ha per vertici i centri dei quadrati costruiti sui lati del triangolo rettangolo, esternamente ad esso.

G. Candido.

245. L'inviluppo delle circonferenze aventi il centro sulla parabola e passanti pel suo vertice è una *cissoide* di Diocle.

U. Ceretti.

246*. Dimostrare che i termini della serie

16 1156 111556 ....,

ottenuti ciascuno dal precedente intercalandovi il numero **15**, sono quadrati perfetti.

G. Montanari.

247*. Un triangolo ABC è inscritto in un cerchio ed è tirato il diametro AD.

1° Le proiezioni di AB, AC su di un diametro perpendicolare ad AD sono rispettivamente eguali a due lati del triangolo *ortico* di ABC.

2° Se BC è parallela ad AD, la differenza dei quadrati dei due lati AB, AC del triangolo è maggiore di quella relativa ad ogni altro triangolo inscritto, col vertice in A e con base eguale a BC.

3° Se l'altezza su BC è eguale alla proiezione di BC sopra AD, i due lati AB, AC sono l'uno il segmento aureo dell'altro.

G. Gallucci.

248*. Se $x, y, z, \ldots\, a, b, c, \ldots$ sono numeri positivi e non si ha $x = y = z = \ldots$, dimostrare che

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + \ldots > \frac{(ax + by + cz + \ldots)^2}{a + b + c + \ldots}.$$

A. Lugli.

249*. Dimostrare che l'area del triangolo, avente per vertici i centri dei cerchi ex-inscritti ad un triangolo qualsiasi, è eguale al prodotto del perimetro di questo triangolo pel raggio del cerchio ad esso circoscritto.

A. Lugli.

250. Dato il triangolo $ABC\ (=\triangle)$ e il punto interno M, si tirino per i vertici le trasversali AM, BM, CM ad incontrare i lati opposti in A', B', C' e si costruiscano i coniugati armonici M_a, M_b, M_c (*) di M rispetto ad A e A', B e B', C e C'. Posto $BA' : A'C = m$, $CB' : B'A = n$, $AC' : C'B = p$, dimostrare che l'area del triangolo $M_a M_b M_c$ è data da

$$4\triangle : \left[\left(m+1-\frac{1}{p}\right)\left(n+1-\frac{1}{m}\right)\left(p+1-\frac{1}{n}\right)\right].$$

A. Lugli.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Revue semestrielle des publications mathémathiques, rédigée sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam, par P. H. Schoute. — Prezzo dell'abbonamento annuale: 8 ½ fr. — Per abbonarsi, inviare vaglia postale all'indirizzo: Dr. G. Schouten Amsterdam, Prinsengracht, 264.

Il rapido accrescersi dei giornali di matematica e degli atti delle Accademie scientifiche ha fatto sentire agli studiosi l'imperiosa necessità di porsi al corrente della produzione scientifica, o almeno di quella parte della scienza che maggiormente si coltiva, senza un eccessivo impiego di tempo, ed il bisogno di avere una guida sicura per poter confrontare e conoscere quanto su di un dato argomento trovasi raccolto nei numerosi giornali e nei rendiconti delle numerose Accademie.

Il lavoro del *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques*, di già abbastanza avanzato, e per la parte italiana già incominciato a pubblicare a cura del Circolo matematico di Palermo, servirà abbastanza bene alle ricerche delle pubblicazioni del secolo; e, per quanto non esente da inconvenienti, ad opera compiuta risulterà un lavoro importantissimo che non mancherà di rendere reali servigi a tutti gli studiosi.

Ma è altresì chiaro che esso non potrà dare informazioni su quanto si pubblica in un anno, nè un semplice titolo può far comprendere l'importanza della memoria, nè far conoscere i risultati ai quali l'autore è pervenuto. Allo studioso occorre adunque, ed è della massima importanza, un lavoro di rapida ed esatta sintesi. E l'importanza di un simile lavoro di spoglio è tanto chiara ed è stata sì ben compresa, che senza accennare alle brevi recensioni che alcuni giornali fanno dei lavori loro inviati, come il *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* de G. Teixeira, e, in gran parte per la storia delle matemati-

(*) *Punti armonicamente associati ad* M *rispetto al triangolo* ABC, che supponiamo cadano esternamente ad esso entro gli angoli *CAB*, *ABC*, *BCA*.

che, l'*Archiv für die Mathematik von Grunert*, il *Bullétin des sciences mathématiques* redigé par Darboux, ha dal 1870 all'incirca cominciato un esame dettagliato dei lavori pubblicati nei principali giornali scientifici d'Europa e di America, e negli atti delle principali Accademie. Questi sunti, fatti sempre molto fedelmente e con molta cura, non compendiano che una piccola parte della produzione scientifica, e disgraziatamente vengono pubblicati con gravissimo ritardo.

Certamente migliore è l'opera fatta dai *Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie*, del prof. E. Wiedemann; ma non contiene che i sunti dei lavori che hanno per oggetto la meccanica o la fisica matematica.

Più completo, infine, e meglio rispondente allo scopo, è lo *Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematick*, ben noto agli studiosi, ma non ci sembra troppo commendevole la divisione per materie, e anche in questo le recensioni compariscono con ritardo.

La nuova pubblicazione di alcuni benemeriti professori olandesi è un lavoro unico nel genere e ci sembra la migliore di tutte sia per l'esattezza delle recensioni, sia per la celerità con cui esse sono pubblicate, sia perchè esamina quasi tutti i giornali del mondo e gli atti e i rendiconti di tutte le Accademie. Senza dubbio è la rivista più completa e più utile che finora si possegga, e che sarà accolta con entusiasmo da tutti gli studiosi

La rivista conta già due anni di vita e consta di due volumetti l'anno, ognuno di quasi cento pagine; sicchè leggendo poco più che duecento pagine si può avere un'idea abbastanza completa della produzione scientifica dell'anno. Sono esaminati gli articoli di più di 130 fra giornali e pubblicazioni accademiche, ed ogni volume ha un indice delle materie in cui è seguita la classificazione stabilita nel *Congrès International de Bibliographie des Sciences-Mathématiques* e pubblicata nell'*Index du Répertoire bibliographique* dal Gauthier-Villars.

Le recensioni sono fatte in inglese, tedesco e francese; non è seguita la divisione per materie, ma si esaminano i singoli giornali, e questo è un vero pregio; ma anche a coloro che desiderassero informarsi delle memorie che più hanno relazione coi loro studi, la *Revue* serve egualmente bene. Noi pur vorremmo che questa nuova pubblicazione, indispensabile a coloro che si occupano di scienza, servisse anche a diffondere la cultura matematica e non facesse trascurare del tutto quanto è lungi dalle materie favorite.

Nel congresso tenuto ultimamente a Caen dall'*Association française pour l'avancement des sciences*, le sezioni hanno applaudito «à la publication, si intéressante, due à un groupe de mathématiciens hollandais et entre autres de Mr. P. H. Schoute, et qui est intitulée *Revue Semestrielle des Publications mathématiques*».

E tutti coloro che lavorano e amano lo sviluppo della coltura e della scienza, di buon grado si uniranno alle conclusioni degli scienziati francesi.

Roma, 25 dicembre 1894.

R. Marcolongo.

G SCOTO. — *La misurazione delle grandezze grafiche - Nozioni pratiche di Geometria con appendice sulle sezioni coniche.* Livorno, R. Giusti, 1895 — Prezzo L. 2.

Raffaello Giusti di Livorno, che da alcuni anni si è fatto editore di buone opere scolastiche, ha pubblicato recentemente questo libro notevole, designato alle scuole secondarie inferiori e ai Corsi preparatori alle Scuole Normali.

Dissi che è un libro notevole; e lo è infatti, sopratutto per la novità dell'intento che l'egregio A. si è prefisso, e cioè di scrivere un libro che sia rispetto alla scienza delle figure, quel che sono i trattati di aritmatica pratica rispetto alla scienza dei numeri. Sull'utilità di un libro cosifatto l'A. si diffonde nella prefazione, mostrando che nè i cosidetti trattati di geometria intuitiva, nè quelli di geometria razionale, possono valere di buona guida in un primo studio della geometria; i primi perchè generano spesso idee non rigorose che devono mutarsi poi quando più innanzi si farà lo studio della geometria razionale; i secondi perchè troppo difficili e sproporzionati alle tenere menti dei giovanetti.

Per tutto ciò l'A. si è proposto di scrivere un libro che valga a far nascere o a perfezionare nella mente dagli allievi i concetti fondamentali della forma e della estensione, e contenga inoltre le principali proprietà delle figure più semplici e che più spesso si presentano nella vita pratica. Ma queste proprietà non vi sono già dimostrate, ma solamente enunciate: se l'allievo impadronitosi di un fatto, si mostrerà nella scuola desideroso di conoscerne la prova, l'insegnante appagherà a voce questo suo desiderio nella maniera che stimerà più opportuna. Molte figure intercalate nel testo, e delle quali non è data in esso spiegazione di sorta, potranno servire all'insegnante in tali dimostrazioni, e anche stimolare o aiutare gli allievi più intelligenti a trovarle da sè medesimi.

Questi intendimenti dell'A. riguardo a un primo insegnamento della geometria, mi sembrano così giusti che mi permetto di raccomandarli alla attenzione degli educatori.

Per dare un'idea del contenuto dell'opera, farò un rapido cenno dei punti più importanti.

L'A. prende le mosse dal concetto di corpo e da esso deduce quello di superficie, di linea e di punto. E osserva che le superficie o le linee così concepite hanno necessariamente estensione finita, e che, soltanto per comodità di studio, si è condotti a immaginare poi superficie e linee di estensione infinita, come il piano e la retta.

Notevole è il modo col quale parla della somma degli angoli di un poligono; modo che dispensa dal dover stabilire il concetto di angolo superiore a un piano; ciò che reca sempre difficoltà ai principianti.

Il capitolo dei problemi grafici è forse più abbondante di materia di quel che avrebbe richiesto un libro di semplice avviamento allo studio della geometria. Ma l'A. ha dato a questa parte un largo sviluppo perchè il professore di disegno della scuola tecnica o normale possa servirsene nell'insegnamento del disegno geometrico; e con ciò ottiene due vantaggi: risparmia agli alunni la spesa di un testo speciale per questo disegno; impedisce quella dannosa diversità di linguaggio tra i professori di disegno e di matematica che ha luogo non di rado nelle nostre scuole.

Trattando della misura delle grandezze, l'A. stabilisce il concetto di *valore* definendolo come quel numero che indica quali operazioni debbano farsi sulla grandezza unitaria affinchè risulti la grandezza misurata. In questo capitolo, ricco di molti pregi, è posta molto bene in luce la corrispondenza tra i valori degli archi e quelli degli angoli al centro che li comprendono.

Nella stereometria, premesse le solite nozioni generali, l'A. distingue lo studio delle superficie da quello dei solidi. Nel primo tratta delle superficie poliedriche e rotonde, definendole con precisione e dando le regole per calcolarne l'area; nello studio dei solidi si occupa dei poliedri e dei corpi rotondi, limitandosi anche qui a dare delle buone definizioni, che sono in perfetto accordo con quelle date prima per le superficie, e a indicare le regole per il calcolo dei volumi. Queste regole e quelle relative alle aree si trovano molto opportunamente raccolte in tavole, per comodità dello studioso.

Da ultimo l'A. persuaso che la conoscenza delle coniche sia utile o necessaria in molti casi pratici e nello studio, anche elementare, della geografia e dell'astronomia, ha aggiunto una appendice su queste linee così importanti, la cui esistenza avea già enunciato parlando delle superficie cilindriche e coniche. Egli studia le tre curve in tre paragrafi distinti; per ciascuna dà la definizione, qualche proprietà, la costruzione per punti e con moto continuo, risolve il problema « data la conica costruire i principali elementi » e da ultimo insegna la costruzione delle tangenti. Oltre a ciò, parte nel testo e parte in note a piè di pagina, indica regole facili per il calcolo, o esatto o approssimato, di lunghezze o di aree ellittiche, paraboliche e iperboliche; nè tralascia l'importante formola di Simpson. In questa appendice è specialmente da lodarsi la cura che l'A. ha posto onde l'allievo acquisti una precisa idea della forma delle tre curve.

Termina il libro una pregevole raccolta di numerosi problemi in massima parte originali.

Tolta qualche lievissima menda, che l'A. toglierà certo in una nuova edizione, le idee contenute nell' opera non mancano mai d' esattezza, e vi sono espresse con linguaggio proprio e preciso; e queste doti renderanno l'opera pregevole agli occhi di molti. Potrebbero tuttavia non mancare coloro che, rispetto all'indole del libro, trovassero eccessiva la quantità di materia in esso trattata e la forma un po' troppo duramente scientifica e mancante di quella sciolta ed efficace semplicità che tanto si ammira nelle opere elementari inglesi, e che purtroppo non è molto frequente presso di noi. Io non voglio scusare a ogni costo l'egregio A. da queste possibili critiche, ma non so tenermi dall'esporre un'idea nata in me dall'attento esame di tutto il lavoro; ed è che l'A. intenda di trarre da questa sua prima pubblicazione un altro libro più completo per le *scuole secondarie superiori*, aggiungendo *sens'altro* le dimostrazioni che mancano in quello ora pubblicato, dopo avervi soppresso alcune cose d'indole pratica, che non troverebbero luogo conveniente in un corso razionale.

L'edizione è nitida, e le figure sono numerose e ben chiare: doti che hanno sempre le edizioni del solerte Giusti.

A conti fatti è un libro pregevole e gli auguro buona fortuna perchè la merita.

Ravenna, Dicembre 1894. G. Nonni.

G. Z. REGGIO. — 1° *I poliedri convessi* - 2° *Principii di Geometria descrittiva* con una tavola e 60 problemi con soluzione — Appendice alla 2ª edizione dei Complementi di Geometria ad uso degli Istituti Tecnici, delle Scuole ed Accademie Militari e Navali, di Belle Arti ecc. ecc.. — Treviso, Tipografia Luigi Zoppelli, 1894. — Prezzo: L. 1.

Il presente volumetto (38 pagine), oltre ad una breve nota sulle principali relazioni che legano fra loro gli elementi di un poliedro convesso, applicate poi alla determinazione dei possibili poliedri regolari convessi, contiene (e questa è la sua parte sostanziale) lo svolgimento, fatto con molta chiarezza e bell'ordine, e in generale anche con precisione di forma, di quei principii di Geometria descrittiva (col metodo della projezione di Monge) che sono strettamente necessarî e sufficienti per fornire all'allievo un corredo di cognizioni atte a fargli comprendere lo spirito di tale scienza e ad invogliarlo alla lettura di opere più estese.

I sessanta esercizî (ciascuno seguito da una conveniente traccia per la relativa soluzione) che chiudono il lavoro sono ben graduati, e, se svolti man mano che le cognizioni acquistate lo permettono, servono all'allievo di complemento a quanto ha imparato nel testo (specialmente per ciò che riguarda le più semplici linee curve e superficie poliedriche e rigate, delle quali nel libro si parla molto succintamente) e ad un tempo di ottima guida per imparar ad applicare da solo e con sicurezza i metodi studiati.

In conclusione si può affermare che il volumetto in discorso è un buon libro per le Scuole cui è dedicato, ottimo poi per gl'Istituti Tecnici, dei quali esaurisce il prescritto programma. F. Palatini.

Annuaire pour l'an 1895 publié par le Bureau des Longitudes. *Avec des Notices scientifiques.* In-18 de IV–826 pages, avec 2 Cartes magnétiques. Paris, Gauthier-Villars et fils. — Prix: fr. 1,50; franco fr. 1,85.

Come ogni anno a quest'epoca è comparso l'*Annuaire du Bureau des Longitudes.* L'annuario per il 1895 racchiude in grande copia delle indicazioni pratiche riunite in questo piccolo volume per comodo degli studiosi. Vi si trovano anche articoli dovuti agli scienziati più illustri sulle Monete, la Statistica, la Geografia, la Mineralogia, ecc., infine le notizie seguenti: *Le onde atmosferiche lunari*; per Bouquet de la Grye. — *Sul Congresso geodesico d'Inspruck*; per F. Tisserand. — *L'osservatorio del Monte Bianco*; per J. Janssen. — *La Fotometria Fotografica*; per J. Janssen. — *Relazione sulle proposte d'unificazione dei giorni astronomico e civile*; per H. Poincaré.

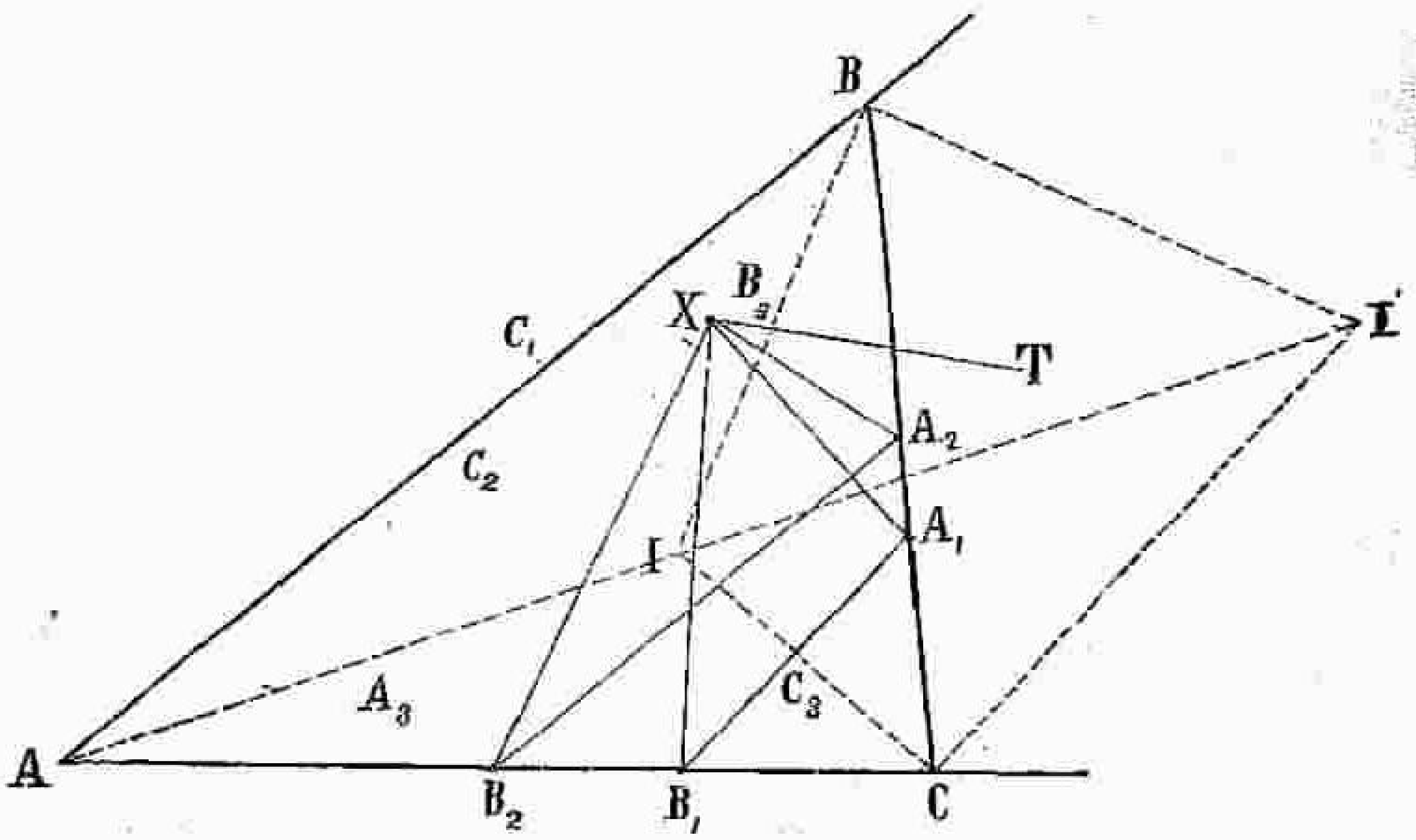
Finita la Redazione il dì 15 gennaio 1895.

UNA APPLICAZIONE DEL METODO DELLE EQUIPOLLENZE

Tra i punti notevoli di un triangolo è per certo da annoverarsi il punto di contatto del circolo di Feuerbach con ciascuno dei circoli ex-iscritti ed iscritto.

Scopo di questa nota è di dimostrare, col metodo delle equipollenze, il contatto di questi circoli, e dare poi le coordinate baricentriche dei quattro punti di contatto.

Nel triangolo ABC sia I il centro del circolo che tocca in A_1, B_1, C_1 i lati BC, CA, AB. I punti medii di questi siano rispet-



tivamente A_2, B_2, C_2 e quelli dei segmenti IA, IB, IC siano A_3, B_3, C_3. Ciascuno dei triangoli IAB, IBC, ICA ha un circolo dei 9 punti che passa per i punti situati sopra i corrispondenti lati; due di questi circoli hanno di comune il punto A_3, due il punto B_3 e due il punto C_3.

1. Condizione necessaria e sufficiente perchè un quadrilatero sia iscrittibile è che il rapporto anarmonico dei suoi quattro vertici sia un numero reale (*). Ora indichiamo con X il secondo punto comune

(*) Bellavitis — *Esposizione del metodo delle equipollenze*, n. 30.

ai due circoli $A_3C_2B_3$, $B_3A_2C_3$, e significando con q un qualsiasi numero reale, si avrà

$$\frac{A_3C_2}{B_3C_2} : \frac{A_3X}{B_3X} = q\,, \qquad \frac{B_3A_2}{C_3A_2} : \frac{B_3X}{C_3X} = q\,.$$

Moltiplichiamo il primo per il secondo rapporto, e poichè $A_3C_2 = C_3A_2$, e si può sostituire C_3B_2 a B_3C_2, e A_3B_2 a B_3A_2, si ottiene

$$\frac{A_3B_2}{C_3B_2} : \frac{A_3X}{C_3X} = q\,;$$

dunque il punto X si trova sulla circonferenza $A_3B_2C_3$.

I medesimi punti considerati nei due circoli $A_3C_2B_3X$ e $B_3A_2C_3X$ dànno ancora i due rapporti

$$\frac{B_3A_3}{C_2A_3} : \frac{B_3X}{C_2X} = q\,, \qquad \frac{A_2C_3}{B_3C_3} : \frac{A_2X}{B_3X} = q\,,$$

il prodotto dei quali, se osserviamo che $C_2A_3 = A_2C_3$, e che A_2B_3 si può sostituire a B_2A_3, e C_2B_2 a B_3C_3, è

$$\frac{A_2B_2}{C_2B_2} : \frac{A_2X}{C_2X} = q\,,$$

il qual rapporto anarmonico mostra che il punto X appartiene alla circonferenza $A_2B_2C_2$.

Poichè i punti A_3, B_2, B_1, X si trovano sulla circonferenza dei nove punti del triangolo IAC, ed i punti A_3, C_2, C_1, X su quella del triangolo IBA, abbiamo $\frac{A_3X}{C_1X} = q\frac{A_3C_2}{C_1C_2}$, $\frac{A_3X}{B_1X} = q\frac{A_3B_2}{B_1B_2}$ donde

$$\frac{B_1X}{C_1X} = q\,\frac{A_3C_2\,.\,B_1B_2}{C_1C_2\,.\,A_3B_2}\,.$$

Ma, dai quadrilateri iscrittibili IA_1BC_1 e IB_1CA_1, si ottiene

$$\frac{B_1A_1}{IA_1} = q\frac{B_1C}{IC}\,, \quad \frac{C_1A_1}{IA_1} = q\frac{C_1B}{IB} \quad \text{donde} \quad \frac{B_1A_1}{C_1A_1} = q\,\frac{B_1C\,.\,IB}{IC\,.\,C_1B}$$

e però

$$\frac{B_1A_1}{C_1A_1} : \frac{B_1X}{C_1X} = q\,\frac{B_1C\,.\,IB\,.\,C_1C_2\,.\,A_3B_2}{B_1B_2\,.\,A_3C_2\,.\,C_1B\,.\,IC}\,.$$

Ora è $IC = 2A_3B_2$, $IB = 2A_3C_2$ ed è poi $\frac{C_1C_2}{C_1B} = q$, $\frac{B_1C}{B_1B_2} = q$, perchè ciascuno di questi rapporti è rapporto di segmenti coincidenti. Dunque

$$\frac{B_1A_1}{C_1A_1} : \frac{B_1X}{C_1X} = q\,,$$

e però il punto X appartiene al circolo $A_1B_1C_1$ tangente ai tre lati del triangolo.

2. Se in questo punto X toccansi i due circoli $A_2B_2C_2$ e $A_1B_1C_1$, tra gli angoli delle due corde XA_2 e XA_1 e la tangente comune XT deve aversi, tenendo conto del verso della rotazione degli angoli, la relazione: $\angle TXA_2 - TXA_1 = A_1XA_2$ e poichè $TXA_2 = XB_2A_2$ e $TXA_1 = XB_1A_1$, dovrà aversi ancora $A_1XA_2 = XB_2A_2 - XB_1A_1$ o

$$A_1XA_2 + A_2B_2X + XB_1A_1 = 0\,.$$

Consideriamo l'equipollenza identica

$$\frac{XA_2}{XA_1}\cdot\frac{B_2X}{B_2A_2}\cdot\frac{B_1A_1}{B_1X} = \frac{XA_2}{B_2A_2}\cdot\frac{B_1A_1}{XA_1}\cdot\frac{B_2X}{B_1X}\,. \qquad (a)$$

Dai circoli $A_2B_2C_2X$, $A_1B_1C_1X$, $A_3B_1B_2X$ abbiamo

$$\frac{XA_2}{B_2A_2} = q\,\frac{XC_2}{B_2C_2}\,,\qquad \frac{B_1A_1}{XA_1} = q\,\frac{B_1C_1}{XC_1}\,,\qquad \frac{B_2X}{B_1X} = q\,\frac{B_2A_3}{B_1A_3}\,.$$

Moltiplichiamo queste equipollenze tra di loro; e poichè dal circolo $A_3C_1C_2X$ si ha $\frac{XC_2}{XC_1} = q\,\frac{A_3C_2}{A_3C_1}$ il valore del secondo membro della (a) è

$$q\,\frac{A_3C_2\,.\,B_1C_1\,.\,A_3B_2}{B_2C_2\,.\,A_3C_1\,.\,A_3B_1}\,.$$

Ora, se il circolo $A_1B_1C_1$ ha per centro I, sia I' il centro dell'altro circolo tangente ai lati del triangolo, che è separato dal primo dal lato BC, luogo di A_1 e A_2. Poichè A_3C_2 è perpendicolare ad $I'B$, e B_1C_1 ad II', e B_2C_2 è parallela a BC, e l'angolo $(A_3C_1,\, A_3B_1)$ è bisecato da II', si avranno le seguenti equipollenze

$$A_3C_2 = q\,i\,I'B,\quad B_1C_1 = q\,i\,I'I,\quad B_2A_3 = q\,CI,\quad B_2C_2 = q\,CB,$$
$$A_3C_1\,.\,A_3B_1 = q\,\overline{I'I}^2.$$

Sostituendo questi valori nell'antecedente risultato si avrà che esso diventa

$$q\,\frac{I'B\,.\,CI}{I'I\,.\,CB}$$

il quale è uguale ad un numero reale, perchè i quattro punti I', B, C, I sono situati sulla circonferenza che ha per diametro II'. Dunque possiamo scrivere

$$\frac{XA_2}{XA_1}\cdot\frac{B_2X}{B_2A_2}\cdot\frac{B_1A_1}{B_1X} = q\,.$$

Nella quale equipollenza, essendo il secondo membro un numero reale, l'inclinazione del primo membro ha un valore nullo, e cioè

$$\text{incl.}\,\frac{XA_2}{XA_1} + \text{incl.}\,\frac{B_2X}{B_2A_2} + \text{incl.}\,\frac{B_1A_1}{B_1X} = 0$$

o, ciò che è lo stesso

$$\angle A_1XA_2 + A_2B_2X + XB_1A_1 = 0 .$$

E così rimane dimostrato il contatto del circolo di Feuerbach con ciascuno dei quattro circoli, l'iscritto e gli ex-iscritti.

3. Se due punti P e Q riferiti ai vertici del triangolo ABC hanno per equipollenza rispettivamente

$$\begin{aligned} \alpha . AP + \beta . BP + \gamma . CP = 0, \\ \alpha_1 . AQ + \beta_1 . BQ + \gamma_1 . CP = 0, \end{aligned} \tag{b}$$

l'equipollenza di un punto X che divide la distanza dei punti P e Q nella ragione $m : m_1$, posto $s = \alpha + \beta + \gamma$, $s_1 = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$, è

$$\begin{aligned} (\alpha s_1 m + \alpha_1 s m_1) A X + (\beta s_1 m + \beta_1 s m_1) B X + \\ (\gamma s_1 m + \gamma_1 s m_1) C X = 0 ; \end{aligned} \tag{c}$$

la quale si riduce a

$$(\alpha + \alpha_1) A X + (\beta + \beta_1) B X + (\gamma + \gamma_1) C X = 0 \tag{d}$$

quando $s : s_1 = m : m_1$.

Invero, in luogo di $AP, \ldots$ scriviamo $AX + XP, \ldots$; allora le due equipollenze (b) si trasformano in

$$\begin{aligned} s XP + (\alpha A X + \beta B X + \gamma C X) = 0 , \\ s_1 XQ + (\alpha_1 A X + \beta_1 B X + \gamma_1 C X) = 0 . \end{aligned}$$

Indichiamo con R il valore del trinomio secondo termine della prima equipollenza, e con R_1 il valore del trinomio della seconda; e se è dato $m\,XP + m_1 XQ = 0$ si ha il determinante

$$\begin{vmatrix} s & 0 & R \\ 0 & s_1 & R_1 \\ m & m_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

o $m s_1 R + m_1 s R_1 = 0$, o, sviluppato, l'equipollenza (c).

4. Applichiamo questo teorema alla ricerca delle coordinate baricentriche dei punti di contatto del circolo di Feuerbach con i quattro circoli iscritti nel trilatero ABC.

Il centro I del circolo iscritto nel triangolo ha per equipollenza

$$\operatorname{sen} A \, . \, AI + \operatorname{sen} B \, . \, BI + \operatorname{sen} C \, . \, CI = 0,$$

e quello G del circolo dei 9 punti

$$\operatorname{sen} A \cos(B-C) AG + \operatorname{sen} B \cos(C-A) BG + \operatorname{sen} C \cos(A-B) CG = 0$$

ed inoltre si ha dalla trigonometria

$$IX - 8 \operatorname{sen}\frac{A}{2} \operatorname{sen}\frac{B}{2} \operatorname{sen}\frac{C}{2} GX = 0\,,$$

essendo IX e GX i rispettivi raggi dei due circoli. Si trova poi

$$s = 4 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}\,, \quad s_1 = 4 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$$

onde $\frac{s_1}{s} = 8 \operatorname{sen}\frac{A}{2} \operatorname{sen}\frac{B}{2} \operatorname{sen}\frac{C}{2}$, e poichè è $m = 1$, $m_1 = - 8 \operatorname{sen}\frac{A}{2} \operatorname{sen}\frac{B}{2} \operatorname{sen}\frac{C}{2}$, si ha

$$s : s_1 = m : m_1\,.$$

Dunque l'equipollenza del punto X di contatto del circolo iscritto col circolo dei nove punti del triangolo ABC, è

$$[\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} A \cos(B-C)] AX + [\operatorname{sen} B - \operatorname{sen} B \cos(C-A)] BX + [\operatorname{sen} C - \operatorname{sen}(A-B)] CX = 0.$$

Per il punto X' di contatto del circolo ex-iscritto tangente al lato BC, poichè l'equipollenza del suo centro I' è

$$- \operatorname{sen} A \, . \, AI' + \operatorname{sen} B \, . \, BI' + \operatorname{sen} C \, . \, CI' = 0$$

e la trigonometria dà

$$I'X' + 8 \operatorname{sen}\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2} GX' = 0\,,$$

si ha, identicamente ragionando, (*)

$$[-\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} A \cos(B-C)] AX' + [\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} B \cos(A-C)] BX' + [\operatorname{sen} C + \operatorname{sen} C \cos(A-B)] CX' = 0.$$

Analoghe equipollenze si avrebbero per gli altri punti di contatto X'' e X'''. Esse si possono semplificare. E troveremo per i quattro punti le equipollenze seguenti:

(*) Sostituendo alle funzioni goniometriche i lati a, b, c del triangolo ABC, si ha pel punto X

$$(b-c)^2 (p-a) AX + (c-a)^2 (p-b) BX + (a-b)^2 (p-c) CX = 0,$$

e pel punto X'

$$-(b-c)^2 p AX + (a+c)^2 (p-c) BX + (a+b)^2 (p-b) CX = 0.$$

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen}^2 \frac{B-C}{2} AX + \operatorname{sen} B \operatorname{sen}^2 \frac{C-A}{2} BX + \operatorname{sen} C \operatorname{sen}^2 \frac{A-B}{2} CX = 0,$$

$$-\operatorname{sen} A \operatorname{sen}^2 \frac{B-C}{2} AX' + \operatorname{sen} B \cos^2 \frac{C-A}{2} BX' + \operatorname{sen} C \cos^2 \frac{A-B}{2} CX' = 0,$$

$$\operatorname{sen} A \cos^2 \frac{B-C}{2} AX'' - \operatorname{sen} B \operatorname{sen}^2 \frac{C-A}{2} BX'' + \operatorname{sen} C \cos^2 \frac{A-B}{2} CX'' = 0,$$

$$\operatorname{sen} A \cos^2 \frac{B-C}{2} AX''' + \operatorname{sen} B \cos^2 \frac{C-A}{2} BX''' - \operatorname{sen} C \operatorname{sen}^2 \frac{A-B}{2} CX''' = 0.$$

5. Sommiamo i coefficienti della prima rispettivamente con i coefficienti di ciascuna delle altre tre equipollenze; avremo, per la (d), le equipollenze di particolari punti Y', Y'', Y''' allineati ciascuno rispettivamente con X e X', con X e X'' e con X e X'''. Dai coefficienti delle due prime equipollenze abbiamo

$$\operatorname{sen} B \,.\, BY' + \operatorname{sen} C \,.\, CY' = 0 \,.$$

Ma questa è pure l'equipollenza di un punto situato sulla BC, e propriamente il punto d'incontro della bisettrice dell'angolo A con esso lato, ovvero il centro d'omotetia interna dei due circoli, l'iscritto e l'ex-iscritto tangenti al lato BC.

Sottraghiamo invece i coefficienti di una delle tre ultime equipollenze da quelli di un'altra delle medesime, p. es. i coefficienti dell'equipollenza del punto X'' da quelli del punto X'''; si avrà l'equipollenza di un punto Z' allineato con X'' e X'''; essa è

$$-\operatorname{sen} B \,.\, BZ' + \operatorname{sen} C \,.\, CZ' = 0$$

che fa vedere che il punto Z' è sulla BC, ed è il coniugato armonico del punto Y', innanzi trovato, per rispetto ai punti B e C.

Identici risultati avremmo trattando identicamente le altre equipollenze. Dunque i lati del triangolo iscritto nel circolo di Feuerbach, e che ha i vertici nei punti di contatto di questo con i tre circoli ex-iscritti, incontrano i lati del triangolo fondamentale in tre punti per diritto, dove i medesimi sono tagliati dai coniugati armonici, rispetto ai lati delle tre bisettrici. Si sa poi che questa retta, che contiene questi tre punti, è l'asse di omotetia esterna dei tre circoli ex-iscritti.

Campobasso, dicembre 1894.

G. Mola.

SULL'INCOMMENSURABILITÀ DI DUE GRANDEZZE

1. Teorema. *Se* a *e* b *sono due grandezze omogenee, delle quali* $b > a$ *e sia*

$$[1]\ \frac{b}{a}=q_0+\frac{r_0}{a},\ \frac{b}{r_0}=q_1+\frac{r_1}{r_0},\ \frac{b}{r_1}=q_2+\frac{r_2}{r_1},\ \ldots\ \frac{b}{r_{n-1}}=q_n+\frac{r_n}{r_{n-1}},\ \ldots$$

senza che si giunga ad ottenere $r_n = 0$, si avrà

$$\frac{a}{b}=\sum_0^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\underline{|q_n}};$$

significando col simbolo $\underline{|q_n}$ *il prodotto* $q_0 q_1 q_2 \ldots q_n$.

Dimostrazione. Dalle [1] si ricava

$$[2]\ b=aq_0+r_0,\quad b=r_0q_1+r_1,\quad b=r_1q_2+r_2,\ \ldots$$
$$\ldots\ b=r_{n-2}q_{n-1}+r_{n-1},\quad b=r_{n-1}q_n+r_n,\ \ldots$$

quindi

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{q_0}-\frac{r_0}{bq_0},\quad \frac{r_0}{b}=\frac{1}{q_1}-\frac{r_1}{bq_1},\quad \frac{r_1}{b}=\frac{1}{q_2}-\frac{r_2}{bq_2},\ \ldots$$
$$\ldots\ \frac{r_{n-2}}{b}=\frac{1}{q_{n-1}}-\frac{r_{n-1}}{bq_{n-1}},\quad \frac{r_{n-1}}{b}=\frac{1}{q_n}-\frac{r_n}{bq_n},\ \ldots$$

Si dividano queste eguaglianze, incominciando dalla seconda, ordinatamente per

$$q_0,\ q_0q_1,\ \ldots\ q_0q_1q_2\ldots q_{n-2},\ q_0q_1q_2\ldots q_{n-1},\ \ldots$$

poi si addizionino le nuove eguaglianze ottenute coll'avvertenza di cambiare i segni a quelle di posto pari. Avremo

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_0q_1}+\frac{1}{q_0q_1q_2}-\ldots\pm\frac{1}{q_0q_1\cdots q_{n-1}}\mp\frac{1}{q_0q_1\cdots q_n}\ldots \text{ c. d. d.}$$

Corollario 1°. Supponendo nelle [1] $r_0 < a$, $r_1 < r_0$, $r_2 < r_1$ .... cosicchè r_0, r_1, r_2, ... possono riguardarsi come i resti delle divisioni indicate dai primi membri, poichè questi resti vanno continuamente diminuendo, i quozienti q_0, q_1, q_2, ... vanno di continuo aumentando.

Corollario 2°. Le due grandezze a e b sono incommensurabili.

Supponiamo infatti che a e b abbiano una comune misura c. Dalle [2] si vede che i resti r_0, r_1, r_2, ... sarebbero tutti multipli di c; di guisa che si avrebbe $r_0 = \alpha_0 . c$, $r_1 = \alpha_1 . c$, $r_2 = \alpha_2 . c, \ldots$ con $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots.$ numeri interi, e poichè $\alpha_0 c > \alpha_1 c > \alpha_2 c > \ldots$ risulterebbe $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots.$

Ma una serie di numeri interi decrescenti deve contenere il termine zero, dunque uno dei resti dovrebbe essere zero; ciò che contraddice all'ipotesi.

2. La serie

$$[3] \quad S_n = \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_0 q_1} + \frac{1}{q_0 q_1 q_2} - \ldots . (-1)^n \frac{1}{q_0 q_1 q_2 \ldots . q_n}$$

è convergente. Pongasi infatti

$$S'_n = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} + \frac{1}{q_0 q_1 q_2} + \ldots . + \frac{1}{q_0 q_1 q_2 \ldots . q_n},$$

sarà

$$S'_n > S_n.$$

Ora avendosi $q_1 < q_2 < \ldots.$ segue $\frac{1}{q_1} > \frac{1}{q_2} > \ldots.$ quindi

$$S'_n = \frac{1}{q_0}\left[1 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \ldots . + \frac{1}{q_1 q_2 \ldots . q_n}\right] < \frac{1}{q_0}\left[1 + \frac{1}{q_1} + \left(\frac{1}{q_1}\right)^2 + \ldots . + \left(\frac{1}{q_1}\right)^n\right]$$

e poichè l'ultima espressione entro parentesi ha per somma

$$\frac{1-\left(\frac{1}{q_1}\right)^n}{1-\frac{1}{q_1}}, \text{ si deduce infine } S'_n < \frac{1}{q_0} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{q_1}\right)^n}{1-\frac{1}{q_1}}$$

e perciò

$$\lim_{n=\infty} S'_n < \frac{q_1}{q_0 q_1 - q_0} \text{ e conseguentemente } \lim_{n=\infty} S_n < \frac{q_1}{q_0 q_1 - q_0}.$$

La serie [3] è dunque convergente.

3. Nella [3] suppongasi che n vada all'infinito e poniamo S_∞ sotto forma di frazione continua illimitata. Dico che si ha identicamente

$$[4] \quad S_\infty = \frac{1}{q_0} \dotplus \frac{q_0}{q_1 - 1} \dotplus \frac{q_1}{q_2 - 1} \dotplus \ldots . \dotplus \frac{q_s}{q_{s+1} - 1} \dotplus \ldots .$$

Intanto

$$\frac{1}{q_0} = \frac{1}{q_0}, \; \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_0 q_1} = \frac{1}{q_0 + \frac{q_0}{q_1 - 1}}, \; \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_0 q_1} + \frac{1}{q_0 q_1 q_2} = \frac{1}{q_0 + \frac{q_0}{q_1 - 1 + \frac{q_1}{q_2 - 1}}}.$$

Ora ammettiamo che il teorema valga quando nella serie [3] vi sono $n+1$ termini, mostrerò che esso vale anche quando ve ne sono $n+2$. Infatti si muti q_n in $q_n + \frac{q_n}{q_{n+1}-1}$, allora l'$(n+1)^{\text{esimo}}$ termine $\frac{1}{q_0 q_1 q_2 \cdots q_n}$ si cambia in

$$\frac{1}{q_0 q_1 \cdots q_{n-1}\left(q_n + \frac{q_n}{q_{n+1}-1}\right)} = \frac{q_{n+1}-1}{q_0 q_1 \cdots q_n q_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{q_0 q_1 \cdots q_n} - \frac{1}{q_0 q_1 \cdots q_{n+1}};$$

sicchè un altro termine si è nel fatto aggiunto alla serie. Facendo lo stesso mutamento di q_n in $q_n + \frac{q_n}{q_{n+1}-1}$ nella frazione continua con $n+1$ componenti, se ne ottiene un'altra con $n+2$ componenti formata colla stessa legge. Quindi se il teorema vale quando la serie ha $n+1$ termini esso vale quando ha un termine di più; e siccome per tre termini il teorema è stato verificato, esso sussiste in generale. Inoltre essendo la serie convergente, esso è valido anche per n infinito.

4. Dimostriamo ora che, a motivo di $q_{s+1} - 1 \geqq q_s$, il valore della frazione continua [4], come apparisce naturale, è un numero irrazionale.

Infatti suppongasi, se è possibile, che questo valore sia il numero razionale $\frac{m}{n}$, con m ed n interi. Sarà allora $\frac{m}{n} = \frac{1}{q_0 + \rho_1}$ dove ρ_1 denota la frazione continua illimitata che incomincia colla componente $\frac{q_0}{q_1 - 1}$. Segue $\rho_1 = \frac{n - m q_0}{m} = \frac{n_1}{m}$ con $n_1 > 0$, poichè $\rho_1 > 0$ siccome le q sono maggiori di 1.

Similmente si faccia $\frac{m}{n} = \cfrac{1}{q_0 + \cfrac{q_0}{q_1 - 1 + \rho_2}}$ dove ρ_2 indica la frazione continua illimitata che principia colla componente $\frac{q_1}{q_2 - 1}$. Si ha allora $\rho_2 = \frac{m q_0 q_1 - n(q_1 - 1)}{n - m q_0} = \frac{n_2}{m_1}$ con $n_2 > 0$, e così di seguito.

Ora $\frac{m}{n}, \frac{n_1}{m}, \frac{n_2}{n_1}, \ldots$ sono tutte frazioni pure. Lo è $\frac{m}{n}$, perchè dall'essere $b > a$ si trae $\frac{a}{b} < 1$, cosicchè il valore della frazione continua, che rappresenta lo sviluppo di $\frac{a}{b}$, è < 1. Il valore di $\frac{n_1}{m}$ è minore della frazione $\frac{q_0}{q_1 - 1}$, la quale è pura od eguale all'unità, essendo $q_1 - 1 \geqq q_0$; perciò $\frac{n_1}{m} < 1$. Analogamente $\frac{n_2}{n_1}$ è minore di $\frac{q_1}{q_2 - 1}$, che è o frazione pura od eguale all'unità a motivo di $q_2 - 1 \geqq q_1$, quindi $\frac{n_2}{n_1} < 1$ e così via.

Si ha dunque $m < n$, $n_1 < m$, $n_2 < n_1$, ..., cioè $n, m, n_1, n_2, \ldots$ sarebbe una serie di numeri interi, positivi e decrescenti e non pertanto infiniti di numero. Ciò è assurdo, per conseguenza il valore della frazione continua illimitata [4] è un numero irrazionale.

Inoltre la frazione continua medesima non potendo essere periodica, poichè le q vanno sempre aumentando, il suo valore non è la radice quadrata di un numero razionale.

5. Dalle eguaglianze [2] si vede che se a e b sono due numeri, e quindi si giunge ad un resto $r_n = 0$, il resto precedente r_{n-1} è o il massimo comun divisore di a e b o un suo multiplo. Ora se dividiamo a per r_{n-1}, quindi b per i successivi resti, si giungerà ad un resto zero; sia r'_s il penultimo resto, od è esso il m. c. d. di a ed r_{n-1} o ne è un multiplo. Per verificare ciò basta cercare se r'_s divide a; se questo non avviene si divida allora r_{n-1} per r'_s, e così via per i successivi resti. Poichè questi resti vanno diminuendo, si giungerà necessariamente ad un resto che è il m. c. d. dei due numeri a e b.

D. Gambioli.

SULLA FORMA DEL QUOZIENTE
NEL TEOREMA DI *FERMAT*

(Continuazione e fine: V. pag. 16).

3. Abbiamo

$$\Sigma \binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2} = \binom{a}{1}\binom{a}{p-1} + \binom{a}{2}\binom{a}{p-2} + \cdots + \binom{a}{p-1}\binom{a}{1}$$
$$= \binom{2a}{p} - 2\binom{a}{p}$$

come risulta dalla formola combinatoria

$$\binom{r+s}{p} = \binom{r}{p} + \binom{r}{p-1}\binom{s}{1} + \dots + \binom{r}{1}\binom{s}{p-1} + \binom{s}{p}$$

facendo $r = s = a$.

Analogamente la $\sum \binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\binom{a}{i_3}$ colla condizione

$$i_1 + i_2 + i_3 = p$$

dove le i devono essere interi positivi non nulli, rappresentando il numero di combinazioni semplici della classe p formate colla scelta di tre elementi da ognuno di tre gruppi prescelti, fra i p dati, equivale al numero delle combinazioni della classe p formate coi $3a$ elementi che entrano nei 3 gruppi scelti, diminuito del numero delle combinazioni della classe p formate con elementi appartenenti a due soli o ad uno solo dei gruppi considerati, e però avremo

$$\sum \binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\binom{a}{i_3} = \binom{3a}{p} - 3\left\{\binom{2a}{p} - 2\binom{a}{p}\right\} - 3\binom{a}{p}$$
$$= \binom{3a}{p} - 3\binom{2a}{p} + 3\binom{a}{p} = \sum_{i=0}^{i=2} (-1)^i \binom{3}{i}\binom{(3-i)a}{p}.$$

Analogamente avremo

$$\sum \binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\binom{a}{i_3}\binom{a}{i_4} = \binom{4a}{p} - 4\left\{\binom{3a}{p} - 3\binom{2a}{p} + 3\binom{a}{p}\right\}$$
$$- 6\left\{\binom{2a}{p} - 2\binom{a}{p}\right\} - 4\binom{a}{p}$$
$$= \binom{4a}{p} - 4\binom{3a}{p} + 6\binom{2a}{p} - 4\binom{a}{p} = \sum_{i=0}^{i=3} (-1)^i \binom{4}{i}\binom{(4-i)a}{p}.$$

Ammettiamo che questa legge sia valida fino ad un intero n e che si abbia quindi

$$\sum \binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\binom{a}{i_3}\dots\binom{a}{i_n} = \sum_{i=0}^{i=n-1} (-1)^i \binom{n}{i}\binom{(n-i)a}{p}$$

dico che essa sarà valida anche per $n+1$ e che si avrà quindi

$$\sum \binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\dots\binom{a}{i_n}\binom{a}{i_{n+1}} = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \binom{n+1}{i}\binom{(n+1-i)a}{p}.$$

Infatti seguendo il metodo tenuto per il caso di $n=2$ ed $n=3$, $n=4$, avremo

$$\Sigma \binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\cdots\binom{a}{i_n}\binom{a}{i_{n+1}} = \binom{(n+1)a}{p} -$$

$$\binom{n+1}{1}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{(n-i)a}{p} - \binom{n+1}{2}\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^i\binom{n-1}{i}\binom{(n-1-i)a}{p}$$

$$-\binom{n+1}{3}\sum_{i=0}^{n-3}(-1)^i\binom{n-2}{i}\binom{(n-2-i)a}{p} - \cdots - \binom{n+1}{n}\sum_{i=0}^{0}(-1)^i\binom{1}{i}\binom{(1-i)a}{p}.$$

Separiamo da ciascuna sommatoria del secondo membro il termine generale $\binom{(n+1-i)a}{p} = \binom{(n-(i-1))a}{p}$; avremo allora come somma dei coefficienti di questo termine l'espressione

$$(-1)^{i-1}\binom{n+1}{1}\binom{n}{i-1} - (-1)^{i-2}\binom{n+1}{2}\binom{n-1}{i-2}$$
$$-(-1)^{i-3}\binom{n+1}{3}\binom{n-2}{i-3}\cdots - (-1)^1\binom{n+1}{i-1}\binom{n-i+2}{1}$$
$$-(-1)^0\binom{n+1}{i}\binom{n-i+1}{0}\ \ldots\ldots\ldots\ [\alpha]$$

Se trascuriamo l'ultimo termine di questa somma vediamo che i rimanenti, alternativamente positivi e negativi, hanno per numeratore comune il prodotto

$$(n+1)\,n\,(n-1)\ldots(n+2-i)$$

che potremo raccogliere; i denominatori sono rispettivamente $\underline{|1}\ \underline{|i-1}$, $\underline{|2}\,.\,\underline{|i-2}$, $\underline{|3}\,.\,\underline{|i-3}$, ..., $\underline{|i-1}$, $\underline{|1}$. Ma si sa che $\underline{|i}$ è sempre divisibile per il prodotto $\underline{|r}\,.\,\underline{|i-r}$ per $r < i$ e che si ha

$$\frac{\underline{|i}}{\underline{|r}\ \underline{|i-r}} = \binom{i}{r}.$$

Da questa eguaglianza facendo $r = 1, 2, 3 \ldots (i-1)$ si riconosce che si possono ridurre le precedenti frazioni ad avere per denominatore comune $\underline{|i}$ ed avremo allora come somma dei numeratori (non tenendo conto del fattore già raccolto)

$$(-1)^{i-1}\binom{i}{1} - (-1)^{i-2}\binom{i}{2} - (-1)^{i-3}\binom{i}{3}\cdots - (-1)^1\binom{i}{i-1}\ [\beta]$$

Ora dalla nota formola

$$0 = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3}\cdots + (-1)^n\binom{n}{n}$$

si ricava per n pari

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3}\cdots + \binom{n}{n-1} = 2$$

e per n dispari

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} \dots - \binom{n}{n-1} = 0$$

quindi per i pari la somma dei termini della [β] è uguale a 2 e però tenendo conto dell' ultimo termine non considerato nella [α] questa espressione si riduce a

$$2\,\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\dots(n+2-i)}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,i} - (-1)^0 \binom{n+1}{i}\binom{n-i+1}{0}$$
$$= \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\dots(n+2-i)}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,i} = \binom{n+1}{i}$$

e però il coefficiente del termine generale $\binom{(n+1-i)\,a}{p}$ troviamo che è uguale, quando i è pari, a quello che si avrebbe dallo sviluppo che si voleva dimostrare.

Quando i è dispari lo sviluppo [β] sarà eguale a zero e però la [α] si ridurrà al suo ultimo termine cioè a

$$-\binom{n+1}{i}$$

che coincide appunto col coefficiente del termine generale nello sviluppo che si voleva dimostrare quando i è dispari.

Lo sviluppo delle $\sum$ essendo dimostrato per $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ sarà quindi valido qualunque sia n.

4. Se facciamo $n = p$ e notiamo che $\sum \binom{a}{i_1}\binom{a}{i_2}\dots\binom{a}{i_p}$ rappresentando il numero delle combinazioni contenenti elementi di ciascuno dei p gruppi dati è uguale ad a^p avremo

$$a^p = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \binom{p}{i}\binom{(p-i)\,a}{p}$$

separando il termine corrispondente ad $i = 0$ e procedendo sul termine $\binom{a\,p}{p}$ come già si è operato nel numero 2, si riconosce la divisibilità di $a^p - a$ per il numero primo p e si ha modo di determinarne il quoziente.

In particolare si potrà scrivere

$$a^p - a = \binom{a\,p}{p} - a + \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i \binom{p}{i}\binom{(p-i)\,a}{p}$$

e poichè

$$\frac{\binom{p}{i}}{p} = \frac{(p-1)\,(p-2)\,\ldots\,(p-i+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,i} = \frac{1}{i}\binom{p-1}{i-1},$$

si avrà

$$\frac{a^p - a}{p} = \frac{\binom{a\,p}{p} - a}{p} + \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i\,\frac{1}{i}\binom{p-1}{i-1}\binom{(p-i)\,a}{p}.$$

FRANCESCO PANIZZA.

TEMI DI MATEMATICA DATI PER L'ESAME DI MATURITÀ

IN GINNASI E SCUOLE REALI SUPERIORI DELL'AUSTRIA-UNGHERIA

alla fine degli anni scolastici 1891-92 e 1892-93

(*Continuazione*: *V. pag. 27, 55, 97, 148, 184 dell'anno IX e 25 dell'anno X*).

GRAZ: I. *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Due fiamme A e B sono distanti l'una dall'altra $a = 40\,m$; A ha alla distanza 1 l'intensità luminosa 1 e B alla stessa distanza l'intensità luminosa 2. Si deve determinare sulla retta a il punto che viene illuminato egualmente dalle due fiamme.

2. Costruire e calcolare quel triangolo nel quale r è il raggio del cerchio circoscritto, h l'altezza da C e l'angolo $CAB = \alpha$ ($r = 92{,}5\ cm$, $h = 140\ cm$, $\alpha = 53^0\ 7'\ 48''$).

3. Una tangente condotta all'ellisse $4\,x^2 + 9\,y^2 = 36$ taglia gli assi positivi delle coordinate ad egual distanza dall'origine; qual'è l'equazione della tangente e dove giace il punto di contatto?

GRAZ: II. *i. r. Ginnasio sup.* — 1. La subnormale d'una tangente alla parabola è 8, l'ascissa del punto di contatto 9; che angolo forma la normale col raggio vettore del punto di contatto?

2. Un arco di cerchio colla saetta $p = 5$ ruota intorno a questa, se l'angolo al centro che corrisponde all'arco è $\alpha = 32^0\ 18'\ 28''$, qual'è la superficie ed il volume del segmento sferico che risulta?

3. Dei tre angoli d'un triangolo, che contano un numero intiero di gradi, il primo è divisibile per 11, il secondo per 17 ed il terzo è di 4^0 maggiore del doppio del primo; quanti gradi conta ognuno?

4. Un tale paga per 12 anni al principio di ogni anno un premio di 250 f., onde cominciando colla fine del 18^0 anno e poi per altri 14 anni alla fine di ogni anno, percepisce una rendita. Quale sarà questa rendita calcolando il 4,5 % d'interesse?

SALISBURGO: *Ginnasio sup. Borromeo.* — 1. Data l'equazione $8\,x^3 + 16\,x^2 - 8\,a\,x - a^3 = 0$, determinare a in modo che tutti i valori di x diventino razionali.

2. Il rettangolo $ABCD$ ha il lato $AB = 3\,cm$, il lato $BC = 2\,cm$. Si descriva un cerchio che tocchi DC in D ed un altro che tocchi BC in B. Ambedue i cerchi si devono pure toccare scambievolmente e la loro centrale essere parallela alla diagonale AC del rettangolo. Quanto importano i raggi dei due circoli?

3. Il diametro della base di un cono obliquo è $d = 16$, l'asse $a = 15$ e questo forma colla base l'angolo $\alpha = 79^0\,20'$. Si calcolino i lati e gli angoli di quella sezione assiale la di cui area è il medio geometrico fra le aree delle sezioni assiali massima e minima del cono.

4. L'ipotenusa di un triangolo rettangolo ABC il cui vertice opposto A ha le coordinate $x_1 = 9$, $y_1 = 5$, giace nella corda di contatto corrispondente a quel punto rispetto al cerchio $x^2 + y^2 = 64$, e la retta $7x - 5y = 0$ dimezza quest'ipotenusa. Devesi determinare la cordale del dato cerchio e del cerchio circoscritto al triangolo.

KREMSMÜNSTER: *i. r. Ginnasio sup. dei Benedettini.* — Si scriva la proporzione nella quale la somma dei termini estremi è 24, quella dei medi è 16 e la somma dei quadrati di tutti i termini è 580.

2. In un cerchio di raggio $r = 1$ un angolo alla periferia è $\alpha = 18^0$ e la somma delle due corde che lo formano è $s = 3$. Quanto importa ognuna delle corde e quanto la parte del cerchio fra esse compresa?

3. Si determini il volume di un segmento sferico nel quale la superficie curva sta alla superficie piana come $1 : n$, se il raggio della sfera è $r = 7{,}5$ ed $n = 0{,}6$.

4. Nei punti d'intersezione della retta $x + y = 3$ colla parabola $y^2 = 4\,x$, sono condotte tangenti alla parabola; si determini l'area del triangolo compreso dalla data retta e dalle due tangenti.

INNSBRUCK: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Un orefice adopera argento del titolo di 900, 840 e 600 millesimi per ottenere 54 kg. di argento del titolo di 750 millesimi; come può esser fatto il miscuglio volendone adoperare un numero intiero di kg. di ogni qualità?

2. Sul circolo $x^2 + y^2 = 25$ si sono presi due punti colle ascisse $x_1 = -4$ e $x_2 = 3$ e con ordinate positive; si determini l'angolo formato dalla segante che passa per i due punti colla tangente condotta al cerchio per il secondo punto.

3. Un triangolo ABC coi lati $a = 221$ cm., $b = 149$ cm. e $c = 222$ cm. ruota intorno ad un asse parallelo al lato BC che ha una distanza da questo lato eguale all'altezza sul medesimo; si deve determinare la superficie ed il volume del corpo di rotazione.

4. In un quadrilatro inscritto $ABCD$ è il lato $AB = a = 14$ dm, $CD = c = 13$ dm., l'angolo $DAB = \alpha = 106^0\,15'\,37''$ ed il raggio del cerchio circoscritto $r = 8{,}125$ dm; si calcolino gli altri elementi del quadrilatero.

VILLACO: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. La frazione $\frac{7}{470}$ si deve rappresentare come differenza di due frazioni proprie positive, delle quali il minuendo abbia il denominatore 10 ed il sottraendo il denominatore 47. Soluzione mediante le frazioni continue.

2. Qual'è il volume di un tronco di cono retto la cui superficie laterale $M = 200,25$ cm.^{2} e il cui lato $s = 8,2$ cm., se questo forma colla base maggiore l'angolo $\alpha = 70^\circ\ 21'\ 35''$?

3. Calcolare l'area del rettangolo formato dai raggi vettori che si tagliano ad angolo retto nell'ellisse $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Bressanone: *Ginnasio sup. privato.* — 1. In una progressione aritmetica ed in una progressione geometrica con termini positivi e che hanno il primo termine 1, l'ottavo termine della prima è eguale al quarto della seconda, e la somma dei primi quattro termini della geometrica supera di 21 l'ottavo termine dell'altra. Quali sono le due progressioni?

2. Un esagono regolare col lato $a = 1$ ruota intorno ad un asse che passa per un vertice ed è parallelo alla simmetrale dei lati; si calcoli la superficie ed il volume del corpo di rotazione.

3. Si calcolino le coordinate del punto di intersezione delle altezze e l'equazione del circolo circoscritto ad un triangolo che ha i vertici $(-3, -2)$, $(6, -5)$ e $(5, 2)$.

Reichenberg: *i. r. Scuola media (Ginn. sup. e Sc. reale inf.)* — 1. Un padre lascia ai suoi 5 figli una sostanza di 20000 corone, che frutta il 4 % d'interesse composto a maturazione semestrale; alla fine d'ogni semestre i figli ricevono assieme 600 corone. Quando riceve ognuno dei figli dopo 10 anni?

2. Quanto importa la parte di superficie terrestre visibile da un punto alto $h = 620$ m (raggio terrestre $r = 6377,5$ km).

3. Cercare l'equazione del cerchio che passa per i tre punti $(2, 3)$, $(-2, 3)$ $(0, -2)$.

Brünn: *i. r. I. Ginnasio sup. ted.* — 1. Il numero $1\frac{23}{30}$ si deve scomporre in tre frazioni coi denominatori 2, 3, 5 così che il triplo numeratore della prima frazione aumentato del doppio numeratore della seconda sia eguale al doppio numeratore della terza aumentato di 1.

2. Un tale dopo 6 anni ha il diritto di percepire per la prima volta una rendita annuale anticipata che dura per 18 anni; ma egli vende tosto questo diritto per 12000 f.; quanto importa questa rendita se l'interesse viene calcolato al $5\frac{1}{2}$ % e capitalizzato semestralmente?

3. Un trapezio inscritto ad un cerchio di raggio r coi lati paralleli $2r$ e $\frac{2r}{3}$ ruota attorno al lato $2r$; qual'è il volume e la superficie del corpo di rotazione? ($r = 5,23$ dm).

4. Quali sono le equazioni di quelle tangenti all'ellisse $9x^2 + 16y^2 = 144$, le quali sono parallele alla retta $y = 0,4x + 6$? Qual'è l'equazione del rispettivo diametro, quale la sua lunghezza e quale l'angolo che esso forma col diametro coniugato?

(Continua).

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Sulle proprietà fondamentali delle operazioni dell'aritmetica. — Ho riunito insieme, in questa breve nota, alcune delle proprietà relative alle operazioni fondamentali dell'aritmetica, e specialmente quelle che si riferiscono ad operazioni successive e dello stesso ordine eseguite su di un numero dato, tra le quali, com'è notissimo, si riscontrano tante analogie.

1. Ciascuna delle operazioni, che si possono eseguire sopra un dato numero a, è completamente determinata quando, oltre ad essere indicata la specie dell'operazione, sia dato un altro numero b che, secondo i casi, sarà quello che si deve aggiungere ad a, o togliere da a, o il numero per il quale il numero a deve essere moltiplicato o diviso, o l'esponente della potenza a cui deve essere elevato il numero a, o infine l'indice della radice che deve essere estratta dallo stesso numero.

Indico, per brevità, una qualunque di queste operazioni col simbolo M_b, dove la lettera M, presa isolatamente, sta a dinotare la specie dell'operazione, mentre la lettera b ha il significato suddetto; e col simbolo

$$a M_b$$

il risultato dell'operazione M_b eseguita sul numero a. In generale, indico con

$$a M_b N_c P_d \dots$$

il risultato che si ottiene eseguendo sul numero a dapprima l'operazione M_b, poi sul risultato l'operazione N_c, sul nuovo risultato l'operazione P_d e così via.

Infine indico con M^{-1} l'operazione inversa della M, ossia tale che si abbia

$$(1) \quad \dots\dots\dots \quad a M_b^{-1} M_b = a$$

qualunque siano i numeri a e b; e ammetto che assieme alla (1) si abbia anche

$$(2) \quad \dots\dots\dots \quad a M_b M_b^{-1} = a.$$

Ciò posto, ecco alcune proprietà riferibili in pari tempo a diverse specie di operazioni.

2. I. *Posto che, qualunque siano i numeri* a, b, c, *si abbia:*

$$(3) \quad \dots\dots\dots \quad \mathrm{a\,M_b M_c = a\,M_c M_b}:$$

si dovrà anche avere:

$$(4) \quad \dots\dots\dots \quad \mathrm{a\,M_b M_c^{-1} = a\,M_c^{-1} M_b}.$$

Invero, a motivo della (2) si ha:

$$a M_c^{-1} M_b = a M_c^{-1} M_b M_c M_c^{-1},$$

e in seguito all'ipotesi fatta (3):

$$a M_c^{-1} M_b = a M_c^{-1} M_c M_b M_c^{-1},$$

d'onde, a motivo della (1):

$$a M_c^{-1} M_b = a M_b M_c^{-1} .$$

Osservazione. — Poichè l'ipotesi (3) si realizza in ognuna delle operazioni dirette: addizione, moltiplicazione e inalzamento a potenza, ne segue che la (4) vale per ciascuna di esse e la sua inversa. Quindi particolarizzando la specie dell'operazione M e impiegando gli usuali segni, si può, da ciò che precede, ricavare la dimostrazione della permutabilità di due operazioni, una diretta e l'altra inversa, eseguite successivamente su di un dato numero, posto che la permutabilità sia già stata stabilita per le operazioni dirette. Se p. es. le operazioni M sono inalzamenti a potenza si ha il teorema:

$$\sqrt[c]{a^b} = \sqrt[c]{a}^{\,b}$$

ed ecco la dimostrazione precedente, facendo uso degli ordinari segni dell'operazione di cui si tratta:

$$\sqrt[c]{a}^{\,b} = \sqrt[c]{\left(\sqrt[c]{a}^{\,b}\right)^c} = \sqrt[c]{\left(\sqrt[c]{a}^{\,c}\right)^b} = \sqrt[c]{a^b} .$$

3. II. *Ammessa la* (3), *si deve anche avere:*

(5) . . . . $\mathrm{a\,M_b^{-1}M_c^{-1} = a\,M_c^{-1}M_b^{-1}}$.

Invero, a motivo della (2), si ha:

$$a M_b^{-1} M_c^{-1} = a M_b^{-1} M_c^{-1} M_b M_b^{-1} ,$$

e per la (4) che, come abbiamo osservato, è conseguenza della (3):

$$a M_b^{-1} M_c^{-1} = a M_b^{-1} M_b M_c^{-1} M_b^{-1} ,$$

d'onde, a motivo della (1):

$$a M_b^{-1} M_c^{-1} = a M_c^{-1} M_b^{-1} .$$

Osservazione. — Atteso l'osservazione fatta precedentemente sull'ipotesi (3), possiamo dire che la proprietà (5) vale anch'essa per tutte le operazioni inverse. Supposto ad es. che le operazioni M siano innalzamenti a potenza, si ha il teorema:

$$\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}} = \sqrt[b]{\sqrt[c]{a}}$$

colla dimostrazione seguente:

$$\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}} = \sqrt[b]{\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}}^{\,b}} = \sqrt[b]{\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}^{\,b}}} = \sqrt[b]{\sqrt[c]{a}} .$$

4. III. *Ammessa la* (3) *e posto che qualunque siano i numeri* a, b, c *si abbia:*

(6) . . . . $\mathrm{a\,M_b M_c = a\,M_{\varphi(b,c)}}$;

si deve anche avere:

(7) . . . . $a M_b^{-1} M_c^{-1} = a M_{\varphi(b,c)}^{-1}$.

Invero, a motivo della (2) si ha:

$$a M_b^{-1} M_c^{-1} = a M_b^{-1} M_c^{-1} M_{\varphi(b,c)} M_{\varphi(b,c)}^{-1} ,$$

e per le ipotesi fatte (6) e (3):

$$a M_b^{-1} M_c^{-1} = a M_b^{-1} M_c^{-1} M_c M_b M_{\varphi(b,c)}^{-1} ,$$

infine per la (1):

$$a M_b^{-1} M_c^{-1} = a M_{\varphi(b,c)}^{-1} .$$

Osservazione. — Se $\varphi(b, c) = b + c$, l'ipotesi (6) si realizza nell'addizione; se $\varphi(b,c) = bc$ la stessa ipotesi si realizza nella moltiplicazione e nell' innalzamento a potenza. Quindi nella precedente sono comprese le dimostrazioni delle formule:

$$a - b - c = a - (b + c); \quad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}; \quad \sqrt[c]{\sqrt[b]{a}} = \sqrt[bc]{a} .$$

Se p. es. le operazioni M sono innalzamenti a potenza, bisognerà fare $\varphi(b, c) = bc$, e la dimostrazione precedente diventa:

$$\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}} = \sqrt[bc]{\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}}^{\,bc}} = \sqrt[bc]{\left(\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}}^{\,c}\right)^{b}} = \sqrt[bc]{a} .$$

5. IV. *Ammesse le* (3) *e* (6), *si deve anche avere:*

$$a M_b M_c^{-1} = a M_{\varphi(b,d)} M_{\varphi(c,d)}^{-1} ,$$

qualunque siano i numeri a, b, c, d.

Invero, a motivo della (2) si ha:

$$a M_b M_c^{-1} = a M_b M_c^{-1} M_d M_d^{-1} ,$$

e per la (4):

$$a M_b M_c^{-1} = a M_b M_d M_c^{-1} M_d^{-1} ,$$

e infine per le (6) e (7):

$$a M_b M_c^{-1} = a M_{\varphi(b,d)} M_{\varphi(c,d)}^{-1} .$$

Osservazione. — Se $\varphi(b, c) = b + c$, si può ricavare dalla precedente la dimostrazione della proprietà:

$$a + b - c = a + (b + d) - (c + d);$$

se $\varphi(b, c) = bc$ si possono invece avere le dimostrazioni delle proprietà seguenti:

$$\frac{ab}{c} = \frac{abd}{cd} ; \qquad \sqrt[c]{a^b} = \sqrt[cd]{a^{bd}} .$$

Se p. es. le operazioni M sono innalzamenti a potenza, si ha la dimostrazione:

$$\sqrt[c]{a^b} = \sqrt[d]{\sqrt[c]{a^b}^{\,d}} = \sqrt[d]{\sqrt[c]{(a^b)^d}} = \sqrt[cd]{a^{b\,d}}\,.$$

6. V. *Se, qualunque siano i numeri* a, b, c, *si ha:*

(8) . . . . $\varphi(\mathrm{a}, \mathrm{b})\,\mathrm{M_c} = \varphi(\mathrm{a}\,\mathrm{M_c}, \mathrm{b}\,\mathrm{M_c})$,

si deve avere anche:

$$\varphi(\mathrm{a}, \mathrm{b})\,\mathrm{M_c^{-1}} = \varphi\left(\mathrm{a}\,\mathrm{M_c^{-1}}, \mathrm{b}\,\mathrm{M_c^{-1}}\right).$$

Invero, a motivo della (2), si ha:

$$\varphi\left(a M_c^{-1}, b M_c^{-1}\right) = \varphi\left(a M_c^{-1}, b M_c^{-1}\right) M_c M_c^{-1},$$

e per l'ipotesi fatta (8):

$$\varphi\left(a M_c^{-1}, b M_c^{-1}\right) = \varphi\left(a M_c^{-1} M_c, b M_c^{-1} M_c\right) M_c^{-1},$$

e infine a motivo della (1):

$$\varphi\left(a M_c^{-1}, b M_c^{-1}\right) = \varphi\left(a, b\right) M_c^{-1}.$$

Osservazione. — Se $\varphi(a, b) = a \pm b$ l'ipotesi (8) si realizza se l'operazione M è moltiplicazione; quindi allora si ha anche:

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}.$$

Se $\varphi(a, b) = a\,b$, oppure $\varphi(a, b) = \frac{a}{b}$, la stessa ipotesi (8) si realizza se M è un innalzamento a potenza; quindi allora si ha anche:

$$\sqrt[c]{a\,b} = \sqrt[c]{a}\,.\,\sqrt[c]{b}\,; \quad \sqrt[c]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[c]{a}}{\sqrt[c]{b}}.$$

Fermo, gennaio 1895.

C. Ciamberlini.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI
217*, 218*, 219, 220*, 221*, 223*, 224* e 225*

217*. *Nella serie* $x_1, x_2, x_3, \ldots . \, x_n, \ldots .$ *è costante il rapporto* h *di ciascun termine alla potenza di grado* μ *del termine precedente. Esprimere* x_n *per mezzo di* x_1, n, h, μ. (A. Tagiuri).

Soluzioni completamente analoghe dai Sigg. *E. Marchi*, studente a Livorno; *G. Scorza*, studente a Pisa; *M. Carmina*, alunno del R. Istituto tecnico di Girgenti; *V. Columbo*, studente a Napoli; *E. Lugaro*, studente a Palermo; *A. Parsi*, studente a Genova (*).

(*) Soluzioni vennero anche inviate da *B. Armano*, studente a Torino, *F. Celestri* (R. Ist. tec. Modica), *G. Giovannetti*, studente a Pavia, *C. Montanari*, studente a Pisa; *M. Morale* e *B. Zurria*, studenti a Catania.

Dalle relazioni successive

$$x_2 = hx_1^{\mu}, \quad x_3 = hx_2^{\mu}, \quad x_4 = hx_3^{\mu}, \quad \ldots\ldots,$$

si ricavano, sostituendo, le altre

$$x_3 = h^{\mu+1} \cdot x_1^{\mu^2}, \quad x_4 = h^{\mu^2+\mu+1} x_1^{\mu^3}, \quad \ldots\ldots$$

Ora, si ha in generale

$$x_n = h^{\mu^{n-2}+\mu^{n-1}+\ldots+\mu+1} x_1^{\mu^{n-1}}.$$

Infatti quest'uguaglianza si verifica per $n = 1, 2, 3, 4$ e supponendola soddisfatta per $n-1$ lo è anchè per n, poichè

$$x_n = hx_{n-1}^{\mu} = h\left(h^{\mu^{n-3}+\mu^{n-4}+\ldots+\mu+1} \cdot x_1^{\mu^{n-2}}\right)^{\mu} = \\ h^{\mu^{n-2}+\mu^{n-3}+\ldots+\mu^2+\mu+1} \cdot x_1^{\mu^{n-1}},$$

quindi essa è sempre vera.

Ma si ha $\mu^{n-2} + \mu^{n-1} + \ldots + \mu^2 + \mu + 1 = \dfrac{\mu^{n-1}-1}{\mu-1}$ dunque, più semplicemente

$$x_n = h^{\frac{\mu^{n-1}-1}{\mu-1}} \cdot x_1^{\mu^{n-1}}.$$

218*. *Determinare il termine generale della serie*

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots \qquad \text{(A. Tagiuri).}$$

Soluzione del Sig. *F. Celestri*, alunno del R. Istituto tecnico di Modica (*).

È evidente che il termine n^{esimo} della serie, per n impari è $\dfrac{n+1}{2}$ e per n pari $\dfrac{n}{2}$. Se adunque lo si indica con N potremo scrivere nel primo caso $N = \dfrac{2n+1+1}{4}$ e nel secondo $N = \dfrac{2n+1+(-1)}{4}$. La quistione è in tal modo ridotta a far sì che l'ultimo termine del numeratore di queste due espressioni sia positivo quando n è dispari e negativo quando n è pari, ciò che si ottiene prendendo

$$N = \frac{2n+1-(-1)^n}{4}.$$

Se in luogo della serie data si considerasse la serie

[1] $$a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, a_4, a_4, \ldots$$

dove primieramente $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ sono numeri in progressione aritmetica di ragione d, il termine di posto $2n$, come pure quello che lo precede,

(*) Altre soluzioni pervennero dal Sigg. *M. Carmina* (R. Ist. tec. Girgenti), *V. Colombo* (studente a Napoli), *M. Morale* (stud. Catania), *A. Parsi* (stud. Genova).

avrebbe per espressione $a_1 + (n - 1)\,d$, quindi il termine n^{esimo} sarebbe, per n impari $a_1 + \left(\frac{n+1}{2} - 1\right) d$ e per n pari $a_1 + \left(\frac{n}{2} - 1\right) d$ ossia in generale, servendoci dell'artificio usato sopra:

$$a_1 + \left\{\frac{2n + 1 - (-1)^n}{4} - 1\right\} d = a_1 + \frac{2n - 3 - (-1)^n}{4} \,.\, d.$$

Qualora poi nella [1], a_1, a_2, a_3, a_4, ... fossero i termini di una progressione geometrica avente q per quoziente, siccome $a_n = a_1 q^{n-1}$ per n impari il termine n^{esimo} della serie sarebbe $a_1 q^{\frac{n+1}{2} - 1}$ e per n pari $a_1 q^{\frac{n}{2} - 1}$, quindi avremmo per termine generale

$$a_1 q^{\frac{2n - 3 - (-1)^n}{4}}.$$

219. *Nella serie* $y_1\ y_2\ \ldots.\ y_n\ \ldots.$ *si ha per* $n > 1$

$$y_n = h y_{n-1} + l n + k.$$

Dato il valore a_r *di* y_r *determinare* y_n *in funzione di* n, h, l, k, a_r.

(A. Targiuri).

Soluzioni analoghe dei Sigg. Prof. V. *Carpaneto* ad Acqui, *V. Columbo*, studente nella R. Università di Napoli, *A. Parsi*, studente nella R. Scuola Navale Superiore di Genova e *G. Scorza*, studente nella R. Università di Pisa.

Dalle relazioni

$$y_n = h y_{n-1} + l n + k, \quad y_{n-1} = h y_{n-2} + l(n - 1) + k$$
$$\ldots\ldots\ldots \quad y_{n-(s-1)} = h y_{n-s} + l[n - (s - 1)] + k;$$

moltiplicando successivamente per 1, h, h^2, ... h^{s-1} e addizionando si ricava

$$y_n = h^s y_{n-s} + (ln + k)(h^{s-1} + h^{s-2} \ldots. + h + 1)$$
$$- l[(s-1)\,h^{s-1} + (s-2)\,h^{s-2} + \ldots. + 2h^2 + h].$$

Ma si ha: $h^{s-1} + h^{s-2} + \ldots. + h + 1 = \frac{h^s - 1}{h - 1}$ e

$$(s-1)\,h^{s-1} + (s-2)\,h^{s-2} + \ldots. + 2h^2 + h = \frac{h}{h-1}\left(s h^{s-1} - \frac{h^s - 1}{h - 1}\right)$$

e sostituendo

$$y_n = h^s y_{n-s} + (ln + k)\frac{h^s - 1}{h - 1} - \frac{lh}{h-1}\left(s h^{s-1} - \frac{h^s - 1}{h - 1}\right);$$

questa formola, che facilmente si dimostra esatta col metodo di conclusione da n ad $n + 1$, si può scrivere nel seguente modo

$$y_n = h^s y_{n-s} + \frac{l}{h-1}[(n-s)\,h^s - n] + \left(k + \frac{lh}{h-1}\right)\frac{h^s - 1}{h - 1}.$$

Ponendo $n - s = r$, donde $s = n - r$, si ottiene

$$y_n = h^{n-r} y_r + \frac{l}{h-1}(r h^{n-r} - n) + \left(k + \frac{lh}{h-1}\right)\frac{h^{n-r}-1}{h-1}.$$

Tale formola vale anche per $r > n$. Se ne ricava infatti

$$y_r = h^{r-n} y_n + \frac{l}{h-1}(n h^{r-n} - r) + \left(k + \frac{lh}{h-1}\right)\frac{h^{r-n}-1}{h-1};$$

e ponendo n per r ed r per n si ricade appunto nella precedente.

220*. *Data in un cerchio una corda* AC, *e, dato un punto* K *situato in essa, condurre per* K *un' altra corda* BD *in modo che il quadrilatero* ABCD *risulti circoscrittibile.* (S. Catania).

Soluzioni del Sig. *G. Scorza*, studente a Pisa.

1.° Supponiamo il problema risoluto e poniamo $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = m$, $DB = n$. Allora poichè il quadrilatero $ABCD$ è inscrittibile, gli angoli ABC e ADC sono supplementari: quindi $BK : KD = \triangle ABC : \triangle ADC = ab : cd$. Inoltre si sa pel teorema di Stewart che se un punto K divide la base di un triangolo OBD nel rapporto $u : v$, si ha

$$\overline{OK}^2 = \frac{v}{u+v} \cdot \overline{OB}^2 + \frac{u}{u+v} \cdot \overline{OD}^2 - \frac{uv}{(u+v)^2} \cdot \overline{BD}^2$$

e nel nostro caso $u : v = ab : cd$, $OB = OD = R$, indicando con R il raggio del circolo circoscritto e designando O il centro di questo circolo, $BD = n$, dunque

$$\overline{OK}^2 = R^2 - \frac{abcdn^2}{(ab + cd)^2}.$$

Ora indicando con S l'area del quadrilatero $ABCD$ egli è $S = \triangle ABC + \triangle ADC = \frac{abm}{4R} + \frac{cdm}{4R} = \frac{m}{4R}(ab + cd)$ e d'altra parte $S^2 = abcd$ perchè il quadrilatero $ABCD$ è inscrittibile e circoscrittibile al tempo stesso: dunque sostituendo:

$$\overline{OK}^2 = R^2 - \frac{m^2 n^2}{16 R^2}.$$

Da questa uguaglianza si ricava

$$nm = 4R\sqrt{(R + OK)(R - OK)}, \quad n = \frac{4R}{m}\sqrt{(R + OK)(R - OK)}$$

la qual formola dà il valore di n che risolve il problema (*).

Conducendo il diametro MN passante per K e per K la semicorda KP perdendicolare ad MN, si vede facilmente che $KP = \sqrt{(R + OK)(R - OK)}$, onde la diagonale n non è altro che la quarta proporzionale dopo m, il doppio

(*) Questa soluzione è inspirata ad alcuni risultati a cui perviene il Sig. Foucart nel *Journal de Math. élém.* publié par H. Vuibert (Anno XVIII, p. 146).

del diametro MN ed il segmento KP. La costruzione del quadrilatero $ABCD$ è ridotta poi ad inscrivere in un cerchio una corda di data lunghezza passante per un punto dato, problema di molto facile soluzione.

2.° Considerando ancora il problema come risoluto, sia I il centro del cerchio inscritto nel quadrilatero $ABCD$. Se tiriamo IA, IC sarà $\angle AIC + ICD + CDA + DAI = 360°$. Ma la somma degli angoli ICD, DAI è uguale a un retto poichè sono metà di angoli supplementari, dunque si ha $\angle AIC = 270° - CDA$. Ora l'angolo CDA è noto perchè inscritto nell'arco ADC, dunque abbiamo intanto, che il punto I deve trovarsi sopra un arco di cerchio capace dell'angolo $270° - CAD$ descritto sulla corda AC. D'altra parte si sa che se un quadrilatero è inscrittibile e circoscrittibile nel medesimo tempo, i centri del circolo inscritto e circoscritto stanno sopra una medesima retta insieme col punto d'incontro delle diagonali, dunque il punto I è determinato dalla intersezione della retta OK (O essendo il centro del circolo dato) coll'arco di cerchio AIC.

Trovato il punto I, la costruzione del quadrilatero $ABCD$ è ovvia, poichè si riduce a tirare per K una trasversale BD in modo che IC bisechi l'angolo DCB e si sa che tutte le trasversali BD, tali che l'angolo DCB risulti bisecato da IC, sono parallele.

Osservazione. Del teorema citato sui quadrilateri inscrittibili e circoscrittibili al tempo stesso, ci si può facilmente rendere ragione nel modo che segue:

Siano P e Q i punti ove si incontrano le coppie di rette AB e CD, AD e BC rispettivamente, allora la retta PQ sarà la polare del punto K tanto rispetto al circolo O quanto rispetto al circolo I. Ma la polare di un punto rispetto a un cerchio è perpendicolare al diametro passante per esso, dunque PQ è perpendicolare tanto ad OK quanto a KI, e perciò O, I e K giacciono, come volevasi dimostrare, in linea retta.

221*. *In un triangolo* ABC *determinato per gli elementi* a, B, C *iscrivere due circonferenze eguali, tangenti a due lati ed esternamente tra loro; si riduca atta al calcolo logaritmico la formola del raggio. Se* O, O′ *siano i centri dei due cerchi qual condizione deve sussistere fra gli angoli* B, C *affinchè il triangolo* AOO′ *risulti rettangolo in* O′? (G. Bellacchi).

Risoluzione del Sig. *E. Marchi* già studente nel R. Istituto tecnico di Livorno (*).

Siano D, E i punti di contatto delle due circonferenze O, O' col lato $BC = a$. Si ha $a = BD + 2r + EC$ e poichè $BD = r \cot \frac{B}{2}$, $EC = r \cot \frac{C}{2}$, risulta $a = r\left(2 + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$, donde

$$r = \frac{a}{2 + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}}.$$

(*) Altra soluzione venne inviata dal Sig. *M. Morale*, studente a Catania e risoluzioni eguali nei risultati dai Sigg. *A. Parsi*, studente a Genova e *G. Scorza*, studente a Pisa.

Per ridurre questa formola atta al calcolo logaritmico si osservi che

$$\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{\cos\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{B+C}{2}}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}},$$

onde posto $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{B+C}{2}}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}}=2\tan^2\varphi$ segue

$$r=\frac{a}{2(1+\tan^2\varphi)}=\frac{a}{2}\cos^2\varphi.$$

Se il $\triangle\ AO'O$ risulta rettangolo in O', allora $AO'E$ sarà l'altezza del $\triangle\ ABC$ relativa al lato BC e si avrà $AE=BE\operatorname{tang}B=(BD+2r)\operatorname{tang}B$ $=r\left(2+\cot\frac{B}{2}\right)\tan B$ ed $AE=EC\,.\,\tan C=r\cot\frac{C}{2}\tan C$, onde uguagliando

$$\left(2+\cot\frac{B}{2}\right)\tan B=\cot\frac{C}{2}\tan C,$$

che esprime la condizione richiesta.

Questa relazione si può peraltro mettere sotto una forma più elegante osservando che

$$\left(2+\cot\frac{B}{2}\right)\tan B=\frac{2\operatorname{sen}\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}}\cdot\frac{2\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos B}=$$

$$2\,\frac{\operatorname{sen}B+\cos^2\frac{B}{2}}{\cos B}=\frac{2\operatorname{sen}B+1+\cos B}{\cos B},$$

$$\cot\frac{C}{2}\tan C=\frac{2\cot\frac{C}{2}\tan\frac{C}{2}}{1-\tan^2\frac{C}{2}}=\frac{2\cos^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{C}{2}}=\frac{1+\cos C}{\cos C}$$

donde segue, dopo fatte le riduzioni

$$\cos B-\cos C=2\operatorname{sen}B\cos C.$$

223*. *Dimostrare che l'espressione*

$$3^{4m+1}+10\,.\,3^{2m}-13,$$

per m intero e positivo qualunque, è divisibile per 64. (V. Columbo)

Dimostrazione del Sig. *C. Montanari*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Livorno.

Si ha

$$3^{4m+1} + 10 \,.\, 3^{2m} - 13 = 3\,(3^{4m} - 1) + 10\,(3^{2m} - 1) =$$
$$(3^{2m} - 1)\left\{ 3\,(3^{2m} + 1) + 10 \right\} = (3^{2m} - 1)\left\{ 3\,(3^{2m} - 1) + 2\,(3^2 - 1) \right\}.$$

Ora i due fattori dell'ultimo prodotto, qualunque sia m, sono divisibili per $3^2 - 1$, quindi l'espressione considerata è divisibile per $(3^2 - 1)^2 = 64$, c. d. d. (*).

Dimostrazione del Sig. *G. Scorza*, studente a Pisa.

Verificato il teorema per $m = 1, 2, \ldots\ldots$ supponiamolo vero per $m = n$; esso sarà dimostrato in generale quando si provi che, fatta tale ipotesi, esso si verifica ugualmente per $m = n + 1$.

Per $m = n + 1$ la nostra espressione prende la forma

$$A = 3^{4n+5} + 10 \,.\, 3^{2n+2} - 13$$

da cui, sottraendo

$$B = 3^{4n+1} + 10 \,.\, 3^{2n} - 13,$$

si ha

$$(A - B) = 3^{4n+1}\,(3^4 - 1) + 10 \,.\, 3^{2n}\,(3^2 - 1) = 80 \left\{ 3^{4n+1} + 3^{2n} \right\} =$$
$$80 \,.\, 3^{2n}\,(3^{2n+1} + 1).$$

Ora basta osservare che una potenza dispari di 3 è uguale a un multiplo di 4 meno l'unità per accorgersi che $A - B$ è divisibile per 64: ma anche B per ipotesi è divisibile per 64, dunque il teorema resta dimostrato anche per A. c. d. d..

Dimostrazione del Sig. *G. Candido*, studente a Pisa.

Consideriamo l'espressione

$$m^{4p+1} + [(m + n)^2 - 2mn^{2p}]\, m^{2p} - [(m + n)^2 - mn^{2p}]\, n^{2p}$$

in cui m, n, p sono numeri interi e positivi. Ponendola sotto la forma

$$(m^p + n^p)\,(m^p - n^p)\,[m\,(m^p + n^p)\,(m^p - n^p) + (m + n)^2]$$

si scorge con facilità che 1° se m ed n sono pari essa è divisibile per $2\,(m + n)^2 \times (m - n)$, 2° se $\dfrac{m + n}{m - n}$ è un numero intero essa è divisibile per $(m^2 - n^2)^2$.

In particolare fatto $m = 3$, $n = 1$ si ha l'espressione

$$3^{4p+1} + 10 \,.\, 3^{2p} - 13$$

e siccome siamo nel caso di $\dfrac{m + n}{m - n} =$ intero, essa è divisibile per $(3^2 - 1)^2 = 64$ (**).

(*) Dimostrazioni completamente analoghe dai Sigg. *M. Carmina* (alunno del R. Ist. tec. Girgenti), *E. Lugaro* (licenziato dal R. Liceo Garibaldi Palermo), *E. Marchi* (lic. R. Ist. tec. Livorno), *M. Morale* (lic. R. Ist. naut. Catania), *A. Parsi*, studente a Genova, *M. Piattelli* (lic. R. Liceo Bari), *S. Resta* (alunno R. Ist. tec. Bari).

(**) Altre generalizzazioni della quistione pervennero dai Sigg. *F. Celestri* (alunno del R. Ist. tec. Modica), *V. Columbo* (stud. Napoli) ed *E. Lugaro*.

224*. *Siano* O, O′ *i centri di due cerchi dati che si segano ortogonalmente nei punti* H, K; *si tiri per* H *una retta qualunque che tagli i cerchi* O, O′ *di nuovo in* A, B *rispettivamente. Le rette* AO, BO′ *si taglino in* M. *1° Qual è il luogo del punto* M? *2° Dimostrare che le rette* KA, KH, KB, KM *formano un fascio armonico.* (F. Celestri).

Risposte analoghe dai Sigg. *E. Lugaro*, licenziato dal R. Liceo Garibaldi di Palermo e *S. Resta*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari (*).

1° Essendo gli angoli AHO, $O'HB$ complementari, si vede facilmente che HOA e $BO'H$ sono supplementari (quindi BKA retto): hanno i lati OH, $O'H$ perpendicolari, quindi AM è perpendicolare a BM. Il luogo del punto M è dunque il cerchio di diametro OO'.

2° Sia C il punto d'incontro di AK con BM. Si ha $\angle KCB = 90° - CBK = \frac{KO'B}{2}$, e quindi C si trova nel cerchio O'.

In oltre, essendo A, M, K, B conciclici: $\angle AKM = ABM = HKC$. Cosicchè le due rette KM, KH e le bisettrici dei loro angoli, KA, KB, formano un fascio armonico, c. d. d..

225*. *Dimostrare che le due progressioni geometriche*

$$\div 1 : 2 : 4 : \ldots \qquad \div 1 : 3 : 9 \ldots$$

godono della proprietà che combinando i loro termini, o tutti o in parte, per addizione o per addizione e sottrazione dal 1° (a_1) *fino all'* n$^{\text{esimo}}$ (a_n), *si hanno per risultati i numeri da* 1 *fino ad* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. (A. Lugli).

Dimostrazione del Sig. *M. Morale*, studente a Catania.

Considerando la prima progressione la cui ragione è 2, si ha

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{2a_n - a_1}{2 - 1} = 2a_n - 1.$$

Ogni numero $N < 2a_n - 1$, che non sia termine della progressione, si potrà mettere sotto la forma $a_k + \alpha$ con a_k termine della progressione ed $\alpha < a_k$. Similmente α potrà porsi sotto la forma $a_{k_1} + \alpha_1$ con $\alpha_1 < a_{k_1}$ e così via. Egli è chiaro chè si giungerà in ultimo a trovare $\alpha_n = a_{k_n}$ poichè $\alpha > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots$ e la progressione comincia con 1. Si avrà così

$$N = a_k + a_{k_1} + \ldots + a_{k_n}.$$

Considerando poi la seconda progressione la cui ragione è 3, si ha

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{3a_n - a_1}{3 - 1} = a_n + \frac{a_n - 1}{2} = a_n + m$$

dove m è un numero intero minore di $\frac{a_n}{2}$. Ora ogni numero $N < a_n + m$, che non sia termine della progressione dà luogo alla limitazione $a_k < N < a_{k+1}$, e poichè $a_{k+1} - a_k = 2a_k$ risulta che una delle differenze $N - a_k$ od $a_{k+1} - N$

(*) Altra risposta pervenne dal Sig. *C. Montanari* studente a Pisa.

è minore e l'altra maggiore di a_k od ambedue sono eguali ad a_k. In questo ultimo caso sarà $N = a_{k+1} - a_k$ e nell'altro caso si potrà scrivere $N = a_k + \alpha$ o $N = a_{k+1} - \alpha$, con $\alpha < a_k$. Ponendo appresso $a_{k_1} < \alpha < 3a_{k_1}$, si troverà o $\alpha = a_{k_1+1} - a_{k_1}$ oppure $\alpha = a_{k_1} + \alpha_1$ od $\alpha = a_{k_1+1} - \alpha_1$ con $\alpha_1 < a_{k_1}$ e così di seguito; e poichè le α diminuiscono continuamente e la progressione ha per primo termine 1, si arriverà infine ad avere $\alpha_n = a_{k_n+1} - a_{k_n}$, oppure $\alpha_n = a_{k_n}$, per modo che sarà

$$N = a_k \pm a_{k_1} \pm a_{k_2} \pm \ldots\ldots \pm a_{k_n} \qquad \text{c. d. d..}$$

QUISTIONI PROPOSTE (*)

251**. Se r è un intero arbitrario non negativo, e n un intero pure arbitrario ma superiore a r, si avrà

$$\binom{n}{0}\binom{n}{r} - \binom{n}{1}\binom{n-1}{r} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{r} - \ldots\ldots + (-1)^{n-r}\binom{n}{n-r}\binom{r}{r} = 0.$$

G. Nonni.

252. Si dimostri, senza ricorrere alla teoria delle differenze, che se la relazione

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x_1 + \binom{n}{2}x_2 + \ldots\ldots + \binom{n}{n}x_n = \underline{|n}$$

è soddisfatta qualunque sia l'intero positivo n, si avrà

$$x_n = \underline{|n}\left(1 - \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} - \frac{1}{\underline{|3}} + \ldots\ldots + (-1)^n \frac{1}{\underline{|n}}\right).$$

G. Nonni.

253. Valendosi del risultato della quistione precedente si determini il numero delle permutazioni degli elementi $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ nelle quali nessun elemento occupa il posto rappresentato dal proprio indice.

G. Nonni.

254. Si hanno due urne, in ognuna delle quali sono contenuti i numeri 1, 2, 3, ..., n. Si estraggono contemporaneamente due numeri, uno da un'urna e uno dall'altra; poi, senza rimettere nelle urne i numeri sortiti, si estraggono di nuovo due numeri, uno da un'urna e uno dall'altra; e così si continua finchè tutti i numeri siano stati estratti. Determinare la probabilità che non sortano mai

(*) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

in una stessa estrazione due numeri eguali; e dimostrare che tale probabilità vale $\frac{1}{e}$ a meno di $\frac{1}{n\,\lfloor n}$.

G. Nonni.

255**. Dimostrare che per due triangoli sferici polari sussiste la seguente proprietà: I tre circoli massimi passanti per le coppie di vertici corrispondenti (cioè tali che uno sia polo del lato opposto dell'altro) s'incontrano negli estremi di uno stesso diametro; mentre le tre coppie di lati corrispondenti s'incontrano in punti di uno stesso circolo massimo, il cui piano risulta perpendicolare al suddetto diametro.

M. Chini.

256**. Mostrare che, risolvendo le equazioni

$$\xi' = \xi - \frac{2u}{u^2+v^2+w^2}(u\xi + v\eta + w\zeta + 1)$$
$$\eta' = \eta - \frac{2v}{u^2+v^2+w^2}(u\xi + v\eta + w\zeta + 1)$$
$$\zeta' = \zeta - \frac{2w}{u^2+v^2+w^2}(u\xi + v\eta + w\zeta + 1),$$

rispetto alle u, v, w, si ha

$$u = -\frac{a}{a\xi + b\eta + c\zeta - 1} = \frac{2(\xi' - \xi)}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)}$$
$$v = -\frac{b}{a\xi + b\eta + c\zeta - 1} = \frac{2(\eta' - \eta)}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)}$$
$$w = -\frac{c}{a\xi + b\eta + c\zeta - 1} = \frac{2(\zeta' - \zeta)}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)},$$

ove si è messo, per brevità,

$$a = 2(\xi - \xi')\delta^{-2}, \quad b = 2(\eta - \eta')\delta^{-2}, \quad c = 2(\zeta - \zeta')\delta^{-2}$$
$$\delta^2 = (\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2.$$

A. Del Re.

257**. Il processo di eliminazione delle quantità λ, λ' fra le equazioni

$$a - \lambda b = 0, \quad a' - \lambda' b' = 0$$
$$\alpha\lambda\lambda' + \beta\lambda + \gamma\lambda' + \delta = 0,$$

ove $a = a_1 x + a_2$, $b = b_1 x + b_2$, $a' = a'_1 x' + a'_2$, $b' = b'_1 x' + b'_2$ ed a_i, a'_i, b_i, b'_i $(i = 1, 2)$, α, β, γ, δ sono delle costanti date, vale il processo di composizione successiva di tre proiettività. Dedurne, senza ulteriori calcoli, che il determinante della equazione bilineare

$$\alpha a a' + \beta a b' + \gamma a' b + \delta b b' = 0$$

è dato dal prodotto

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 \\ b'_1 & b'_2 \end{vmatrix}.$$

A. Del Re.

258**. Due fasci proiettivi di raggi (S, σ), (S', σ') essendo dati in due piani diversi, ed intorno a due diversi punti, proiettare l'uno di essi (S', σ') nel fascio (S_1, σ) sul piano dell'altro, per modo che, in σ, il centro di proiettività di (S), (S_1) sia un dato punto S_2.

A. Del Re.

259**. Si vuole proiettare una u' di due punteggiate proiettive, sopra un piano σ condotto pel sostegno u dell'altra, per modo che la proiezione contenga un assegnato punto M di σ, ed abbia con (u) un dato asse di proiettività u''.

A. Del Re.

260**. Costruire due punteggiate proiettive (u), (u') conoscendo due punti corrispondenti A, A', l'asse di proiettività u'', la proiezione I'', su u'', del punto limite di (u'), fatta da A, e l'angolo θ di u, u'.

Per θ diverso da 0^0 e da 90^0 questo problema ha due soluzioni. Mostrare che le due posizioni (u_1), (u'_1) di (u') che corrispondono ad esse, sono prospettive col centro di prospettiva in A.

A. Del Re.

261*. Eliminare a e δ dalle tre equazioni

$$s_1 = \frac{a}{\tan(\delta + \varphi_1)}, \quad s_2 = \frac{a}{\tan(\delta + \varphi_2)}, \quad s_3 = \frac{a}{\tan(\delta + \varphi_3)}.$$

G. Pesci.

262*. Trovare col solo compasso il raggio del cerchio inscritto in un dato triangolo rettangolo. G. Candido.

263*. Di un trapezio simmetrico calcolare i lati ed il raggio del cerchio circoscritto in funzione dell'angolo acuto A, della diagonale $2d$ e dell'area m^2.

G. Bellacchi.

264*. Se A', B', C' sono punti dei lati a, b, c di un triangolo ABC tali che $BA' : A'C = CB' : B'A = AC' : C'B = m : n$, posto $B'C' = a'$, $C'A' = b'$, $A'B' = c'$, dimostrare la relazione

$$\Sigma \overline{AA'}^2 + \frac{(m-n)^2 - mn}{(m+n)^2} \Sigma a^2 = 2 \Sigma a'^2.$$

P. Castelli.

265*. Dimostrare che, per n intero e positivo qualunque, la espressione

$$3^n [1296 \,.\, 3^{4n-3} + 3(3^{4n-1} - 2^{4n+4}) - 2^{4n}]^n - 2^{4n} \left(\frac{9^{2n} - 4^{2n}}{13}\right)^n$$

è divisibile per 1895.

S. Gatti.

266*. Se di un triangolo ABC inscritto in un cerchio il vertice A rimane fisso e i vertici B e C variano così che la somma $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ rimanga costante, dimostrare che il luogo del punto medio di BC è una retta perpendicolare al diametro passante per A.

G. Gallucci.

267*. Se si costruiscono i punti simmetrici I', I'', I''' del centro I del cerchio inscritto in un triangolo ABC rispetto ai lati BC, CA, AB, le rette che congiungono questi punti ordinatamente con A, B, C concorrono in un punto.

S. Catania.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

E. NANNEI. — *Elementi di Geometria.* — Vol. 1°: *Planimetria* (1892) - Prezzo: L. 3. — Vol. 2°: *Stereometria* (1894) - Prezzo: L. 3 - Milano, dott. F. Vallardi.

Questo libro, di cui la prima parte fu pubblicata fino dal 1892, e la seconda è uscita pochi mesi or sono, presenta subito, a chi lo legge, due notevoli qualità didattiche: l'ordine e la chiarezza.

Lo scopo dell'A. si fa evidente sin dalle prime pagine; egli ha voluto fare un libro rigoroso e possibilmente facile; un libro che riunendo in sè i pregi dei migliori trattati che vennero alla luce in quest' ultimo quarto di secolo, fosse alla portata anche degli alunni mediocri delle nostre scuole secondarie, i quali ne costituiscono la maggioranza.

E fare un libro che schiettamente si adatti alle scuole, come ben dice l'illustre prof. Cremona nella prefazione de' suoi magistrali *Elementi di Geometria proiettiva*, è cosa difficilissima e che richiede molto e molto tempo; è una impresa piena di dubbi e di sacrifizi per la quale occorre di continuo venire a lite coll'abbiccì della scienza; fare, disfare e rifare il lavoro tre, quattro e più volte. — Assai arduo era dunque il compito assuntosi dal prof. Nannei, ed a me pare che egli meriti sincere lodi sia per averlo coraggiosamente impreso e sia più ancora per il modo come l'ha condotto a termine.

Seguace per indole d' ogni reale progresso, egli ha con diligenza tenuto dietro a tutto ciò che di meglio si venne pubblicando riguardo a geometria elementare sia in trattati e sia in giornali di matematica, e tutto, bene assimilando, ha poi fuso egregiamente in questi suoi *Elementi di Geometria*.

Ed infatti egli ha innestato in essi qualche proprietà sul tronco di prisma, sulla superficie e sul volume del toro, togliendo la prima parte, da alcune note del prof. Besso, apparse nel *Periodico di matematica*, e l'altra parte dal bellissimo trattato di geometria dei prof. Lazzari e Bassani; e v'inserì, risolti, parecchi importanti problemi di applicazione dell'algebra alla geometria, fra i quali è degno di nota quello originale dell'*Algebra* del geniale prof. Bellacchi.

Nè mancò di dare un giusto cenno circa la *Geometria del triangolo*, trattando delle *coniugate isogonali*, *coniugate isotomiche*, *antiparallele*, *simediane* e del *punto di Lemoine*.

Il metodo tenuto dal Nannei nello svolgere le teorie geometriche è il seguente. Premessi i postulati fondamentali, viene a considerare le grandezze geometriche, le quali divide in tre generi, studiando poi separatamente le proprietà per ciascuno di essi sia nella planimetria che nella stereometria, rendendo così possibile, a chi il volesse, di svolgere contemporaneamente le due parti. — Denomina *equispigola* o *equilatera* la piramide che altri chiamano *regolare*, perchè, come giustamente osserva, è strano l'appellar regolare un poliedro che non è compreso fra i cinque che si dimostra essere i soli regolari.

Alcune dimostrazioni sono del tutto sue, e fra queste vanno in particolar modo segnalate per la loro semplicità ed eleganza quella del teorema *in ogni triedro una faccia è minore della somma delle altre due* e l'altra relativa al *volume del segmento di sfera a due basi.*

Altre proposiziani e dimostrazioni fanno a volta a volta ricordare i più pregevoli trattati di geometria, quali: il SANNIA e D'OVIDIO, il FAIFOFER, il DE PAOLIS, il LAZZERI e BASSANI, il GREMIGNI, nonchè la *Teoria delle Grandezze* del prof. BETTAZZI, e qualche nota di quest'ultimo apparsa nel *Periodico di matematica*, ai quali lavori, oltrecchè alle *lezioni* date dal prof. DE AMICIS nel R. Istituto tecnico di Bari, il NANNEI si è inspirato, e dei quali si è saputo efficacemente giovare, facendolo tuttavia in modo da comporne un insieme armonicamente omogeneo, steso con grande naturalezza e con linguaggio sobrio e piano di maniera che questi *Elementi* potranno nelle mani dei giovani, divenire un ottima guida per avviarli al pieno possesso dei principî geometrici, che costituiscono senza dubbio i più belli e più rigorosi esempi di logica.

Quanto alla chiarezza credo che non si potrebbe desiderare di meglio; anzi, a voler cercare il pelo nell'uovo, mi sembra che in qualche punto l'A. abbia voluto sacrificarle un po' di quel rigore, che di solito egli non abbandona mai.

Così la definizione delle grandezze di terzo genere mi pare che andrebbe ritoccata; e andrebbe pure, a mio avviso, ritoccato il capitolo della misura, dove un deplorevole errore d'impaginazione genera un po' di confusione, e dove ancora manca una definizione generale di misura.

Inoltre non è abbastanza ben precisato l'inverso del teorema di *Menelao* che egli enuncia in questi termini:

« Se sopra ognuna delle rette dei lati d'un triangolo si sceglie un punto,
« tale che il prodotto delle lunghezze di tre segmenti non consecutivi, deter-
« minati da tali punti e dai vertici, sia eguale al prodotto degli altri tre, i
« punti scelti sono su una medesima retta ».

Evidentemente, così espressa, questa proposizione non regge, giacchè altrimenti condurrebbe ad affermare, fra le altre cose non vere, che i punti medii dei tre lati d'un triangolo giacciono sopra una stessa retta.

Ma questi son nei che si eviteranno facilmente in una seconda edizione, la quale non dovrebbe tardare a lungo perchè gli *Elementi di geometria* del NANNEI meritano davvero di essere raccomandati ai professori di matematica affinchè li adottino come libro di testo nei loro corsi.

E in una novella edizione potranno altresì migliorare le figure della *Planimetria* e riuscire nitide quanto sono ora quelle della *Stereometria*; e se l'A. vorrà aggiungervi ancora un capitolo che tratti della *moltiplicazione delle curve* e delle *figure inverse*, i suoi *Elementi di geometria*, potranno fornire, a chi li studierà, un altro ottimo e moderno strumento per la risoluzione dei problemi di costruzioni geometriche, quello cioè conosciuto sotto il nome di *metodo per inversione.*

Novara, 27 gennaio 1895.

STEFANO GATTI
Professore nel R. Liceo di Novara.

Finita la Redazione il dì 20 marzo 1895.

SULLA TEORIA DELLA EQUIVALENZA GEOMETRICA (*)

Nota del Prof. G. LAZZERI

È noto che la teoria dell'equivalenza geometrica, completamente trascurata fino a pochi anni fa, è stata ridotta rigorosa specialmente da De Zolt, De Paolis ed altri, ammettendo come postulato l'una o l'altra delle proposizioni seguenti: « Se una grandezza è comunque divisa in parti, trascurandone alcune non è possibile disporre le altre in modo da formare la stessa grandezza ». « Se due grandezze A, B sono divise in parti in modo che in A si trovino parti rispettivamente eguali a quelle di B insieme ad altre, non è possibile trovare un'altra scomposizione di A e B per la quale in A si trovino parti rispettivamente eguali a tutte quelle di B e nessuna di più, oppure in B si trovino parti rispettivamente eguali a quelle di A insieme ad altre ».

Dal 1886 in poi sono stati fatti vari infelici tentativi per dimostrare il postulato suddetto, senza raggiungere lo scopo. Recentemente però i signori SCHUR (**) e RAUSENBERGER (***) hanno dato delle dimostrazioni, le quali, sebbene sieno giuste nel concetto fondamentale, e mettano fuor di dubbio che la teoria dell'equivalenza si deve poter rendere indipendente dal postulato che è stato ammesso sin qui, lasciano però ancora abbastanza a desiderare e presentano delle lacune.

Spero quindi che possa riuscire non completamente priva d'interesse questa nota, nella quale valendomi di quanto è stato fatto fin qui, mi son proposto di tracciare una teoria della equivalenza per le tre classi di grandezze costituite dai poligoni piani, dai poligoni sferici di una stessa sfera, e dai prismi, indipendentemente

---

(*) Questo lavoro era già in corso di stampa, quando è venuta in luce una nota sullo stesso argomento del Prof. VERONESE (Atti del R. Istituto Veneto).

(**) *Sull'area delle figure piane limitate da linee rette.* — Periodico, anno VIII, 1893. — Vedi anche BIASI: *Sull'equivalenza dei poligoni.* — Periodico, anno IX, 1894, pag. 21 e 85.

(***) *Das Grundproblem der Flächen-und Rauminhaltslehre.* — Mat. Annalen, Bd. XLIII, 1893.

da qualsiasi postulato speciale per la teoria stessa, dal concetto di aree negative adoperato dal RAUSENBERGER, e da qualsiasi nozione aritmetica o algebrica.

Ho cercato di evitare per quanto era possibile anche la teoria della similitudine, ma non ho potuto fare a meno di ricorrere ad essa per la dimostrazione del § 6.

Pei maggiori sviluppi, che qui ometto per amore di brevità, rimando il lettore ai miei *Elementi di geometria*, che richiamerò sempre con la scrittura (*G*).

I. — NOZIONI GENERALI RELATIVE ALL'EQUIVALENZA.

1. Le prime classi di grandezze, che si presentano nello studio della geometria, e delle quali si può considerare come tipo la classe dei segmenti, godono delle seguenti proprietà caratteristiche:

1° Riunendo due o più grandezze della medesima classe, si ottiene una nuova grandezza, appartenente alla stessa classe, che si chiama la loro somma.

2° La somma di più grandezze di una classe gode della proprietà commutativa, cioè tutte le somme, che si possono ottenere riunendo in diversi modi le medesime grandezze, sono eguali.

3° Date due grandezze della stessa classe, una deve essere necessariamente maggiore, eguale o minore dell'altra, cioè la prima deve essere eguale alla somma della seconda e di un'altra grandezza, oppure la prima deve essere eguale alla seconda, oppure la seconda deve essere eguale alla somma della prima e di un'altra grandezza; e questi tre casi si escludono a vicenda.

Tutte le altre proprietà di queste classi di grandezze sono conseguenza di queste tre proprietà caratteristiche.

Esempi di classi di grandezze che si trovano in queste condizioni sono quella dei segmenti, quella degli angoli, quella dei diedri (*G.* Lib. I - Cap. II), quella delle striscie, quella degli strati, quella degli archi appartenenti ad un circolo od a circoli eguali, quella dei settori appartenenti ad uno stesso cerchio od a cerchi eguali, quella degli angoli sferici appartenenti ad una stessa superficie sferica od a superficie sferiche eguali, quella degli spicchi sferici appartenenti a sfere eguali (*G.* § 32), quella dei parallelogrammi di una serie (*G.* § 110), quella dei prismi di una serie (*G.* § 151). Chiamo *classi di grandezze di 1ª specie* tutte queste classi, caratterizzate dalle tre proprietà sopra citate (*G.* § 275).

Per altre classi di grandezze come per esempio per quella dei poligoni piani, e per quella dei poligoni sferici appartenenti ad una data superficie sferica, è evidente che sussiste la prima delle tre proprietà caratteristiche citate sopra, non esiste la seconda, e non si può asserire *a priori* se sussiste la terza. Queste sono le classi di grandezze che mi propongo di studiare. Le considerazioni seguenti si possono applicare a tutte quelle grandezze, per le quali si può ammettere la seguente proprietà:

« Se una grandezza è scomposta in parti in due modi diversi, si può produrre una terza scomposizione della data grandezza in parti, le quali sono le parti risultanti dalla prima divisione suddivise mediante la seconda divisione, oppure le parti risultanti dalla seconda divisione suddivise per mezzo della prima divisione ».

2. Definizione. — *Due grandezze si dicono* equivalenti, *se sono eguali, oppure se si possono scomporre in parti rispettivamente eguali.*

Indicherò l'equivalenza di due grandezze A, B colla scrittura

$$A = B$$

che si legge « A è equivalente a B », mentre indicherò l'eguaglianza (congruenza) colla scrittura

$$A \equiv B$$

che si legge « A è eguale a B. »

Stabilita questa definizione, è facile dimostrare i teoremi seguenti (*G.* §§ 271, 272, 278):

1° *Due grandezze equivalenti ad una terza sono equivalenti fra loro.*

2° *Tutte le infinite somme delle medesime grandezze sono equivalenti.*

3° *Se una grandezza è somma di più altre grandezze, anche ogni grandezza ad essa equivalente è somma delle medesime.*

4° *Se una grandezza è somma di più altre, è anche somma di grandezze ad esse rispettivamente equivalenti.*

5° *Sono equivalenti due grandezze somme di grandezze rispettivamente equivalenti.*

6° *Una grandezza, somma di più altre, è anche somma della somma di alcune di esse e delle rimanenti.*

7° *Tutti i multipli di una medesima grandezza, secondo uno stesso numero, sono equivalenti.*

8° *Se una grandezza è multipla di un'altra secondo un dato numero, ogni grandezza equivalente alla prima è anche multipla dell'altra secondo lo stesso numero.*

9° *Se una grandezza* A *è multipla di una grandezza* B *secondo un dato numero, è pure multipla secondo lo stesso numero di ogni grandezza equivalente a* B.

10° *Se due grandezze sono equivalenti, sono pure equivalenti due loro equimultipli.*

Ecc.

II. — Equivalenza dei poligoni piani.

3. Teorema. *Due triangoli che hanno un lato eguale ed eguale l'altezza corrispondente, sono equivalenti.*

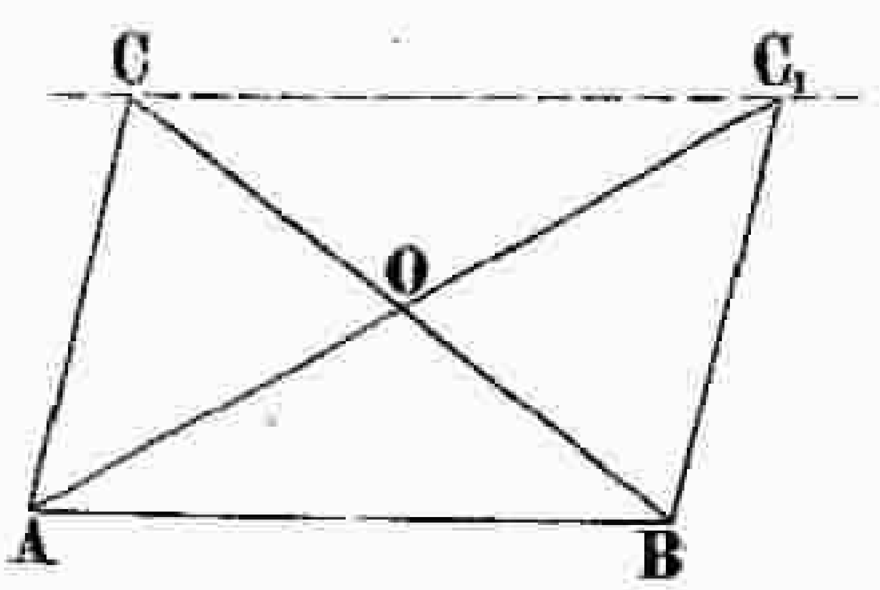


Fig. 1ª.

Si dispongano i due triangoli in modo che abbiano un lato AB in comune, e che i due vertici rimanenti C, C_1 sieno situati dalla medesima parte della retta AB, e per conseguenza la retta CC_1 risulti parallela alla AB. Si possono allora considerare tre casi, secondo che il segmento CC_1 è eguale, minore o maggiore di AB.

1° Se $CC_1 \equiv AB$ (fig. 1ª), la figura ABC_1C è un parallelogrammo, e i lati AC_1, BC si tagliano nel loro punto di mezzo O. È facile allora vedere che i due triangoli AOC, C_1OB sono eguali, e che perciò sono equivalenti i due triangoli ABC, ABC_1, che si ottengono sommando il triangolo AOB coi due triangoli suddetti rispettivamente.

2° Se $CC_1 < AB$ (fig. 2ª), si conduca la retta parallela alle rette AB, CC_1 ed equidistante da esse, la quale incontrerà i lati AC, BC, AC_1, BC_1 nei loro punti di mezzo M, N, M_1, N_1. Si conduca poi per C la parallela CP alla C_1B; essa taglia il lato AB e perciò è interna all'angolo ACB. Similmente la retta C_1Q, parallela alla AC, è interna all'angolo AC_1B. È allora facile vedere che si ha

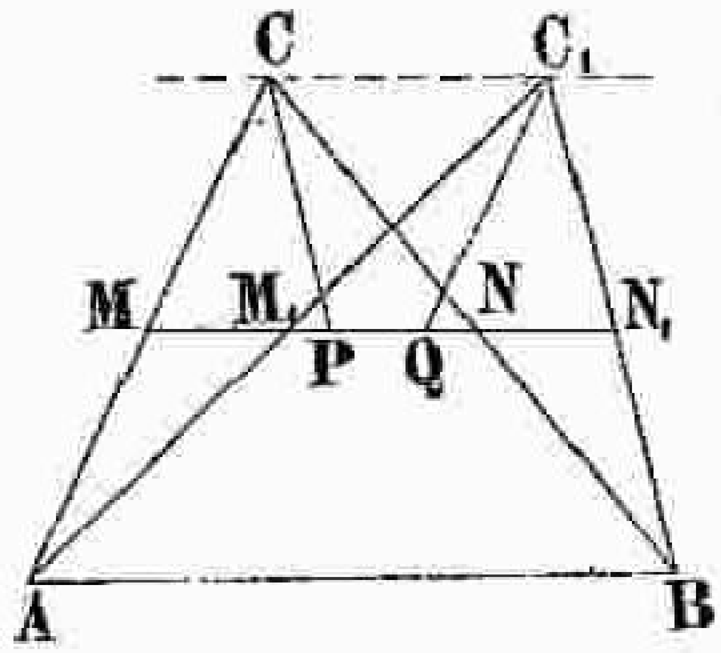


Fig. 2ª.

$$CMP \equiv C_1QN_1\,, \qquad CPN \equiv BN_1N\,,$$
$$AMM_1 \equiv C_1QM_1\,, \qquad AM_1NB \equiv AM_1NB\,,$$

e quindi, sommando tutte queste eguaglianze,

$$ABC = ABC_1 \quad (^*).$$

3° Se $CC_1 > AB$, riportiamo sul segmento CC_1, a partire da C, il segmento AB tante volte quante è possibile, in modo che sia $CD_1 \equiv D_1D_2 \equiv \ldots \equiv D_{n-1}D_n \equiv AB$, essendo D_nC_1 eguale o minore di AB. Per le dimostrazioni precedenti sarà $ABC = ABD_1 = ABD_2 = \ldots = ABD_{n-1} = ABC_1$ e quindi $ABC = ABC_1$.

Corollario. — *Due parallelogrammi che hanno uguali due coppie di lati opposti ed eguali le altezze corrispondenti, sono equivalenti.*

Infatti essi sono doppi di due triangoli equivalenti.

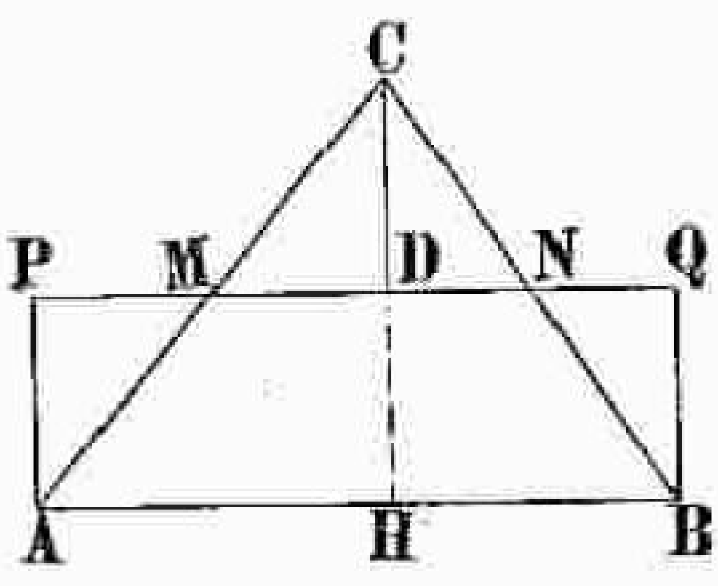


Fig. 3ª.

4. Teorema. — *Ogni triangolo è equivalente al rettangolo di uno dei suoi lati e della metà dell'altezza corrispondente.*

Sia ABC (fig. 3ª) il dato triangolo e supponiamo dapprima che la perpendicolare condotta dal vertice C alla retta

(*) V. Rethy — *Endlich-gleiche Flächen.* M. Ann. Bd. XXXVIII. S. 409.

AB incontri questa retta in un punto H non esterno al segmento AB. Per il punto di mezzo D della CH si conduca la parallela PQ alla AB, e per i punti A, B le rette AP, BQ perpendicolari alla AB. È facile vedere che i triangoli MDC, NDC sono rispettivamente eguali ai triangoli MPA, NQB, e perciò il triangolo ABC è equivalente al rettangolo $ABQP$.

Se il punto H è esterno al segmento AB, si costruisca un triangolo, equivalente a quello dato, che abbia la stessa base AB e la stessa altezza del dato triangolo, ma in modo che il piede dell'altezza sia interno al segmento AB, e poi su questo nuovo triangolo si eseguisca la costruzione sopra indicata. Il rettangolo che si ottiene sarà equivalente anche al dato triangolo.

Corollario. — *Ogni triangolo è equivalente al rettangolo del suo perimetro e della metà del raggio del circolo inscritto in esso.*

5. Teorema. — *Se due rettangoli* ABCD, A'BC'D' *hanno un angolo* B *comune e le rette* AC', A'C *sono parallele, essi sono equivalenti* (fig. 4ª).

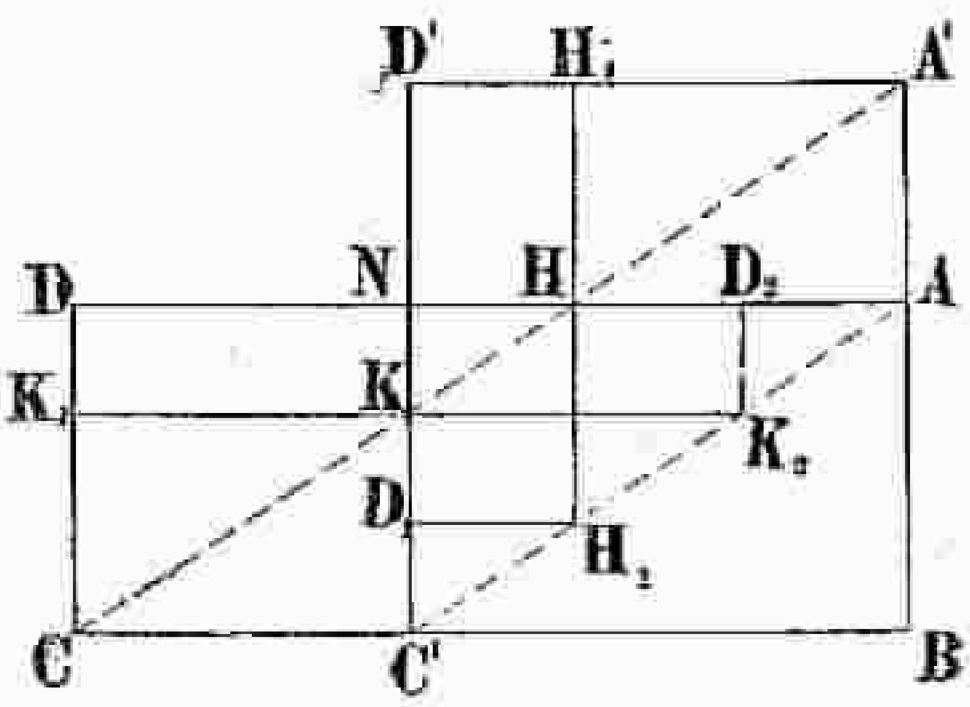


Fig. 4ª.

Per il punto H, intersezione delle rette AD, $A'C$, si conduca la retta H_1H_2 parallela alla AB, e per il punto K, intersezione delle rette $C'D'$, $A'C$, si conduca la retta K_1K_2 parallela alla CB, poi per H_2 si tracci la H_2D_1 parallela a BC e per K_2 la K_2D_2 parallela ad AB.

È facile vedere che si ha

$$KC' \equiv HH_2 \equiv A'A \equiv H_1H$$
$$HA \equiv KK_2 \equiv CC' \equiv K_1K,$$

e per conseguenza

$$DNKK_1 \equiv ND_2K_2K \qquad C'D_1H_2 \equiv K_2D_2A$$
$$NHH_2D_1 \equiv D'H_1HN \qquad H_2HA \equiv C'KK_2$$
$$K_1KC'C \equiv H_1A'AH \qquad ABC' \equiv ABC'.$$

Sommando tutte queste eguaglianze, si ha

$$ABCD = A'BC'D'.$$

Corollario. — *Un dato rettangolo si può sempre trasformare in un rettangolo di una data serie ad esso equivalente.*

Sia $ABDC$ (fig. 5ª) un dato rettangolo; sulla semiretta AC si prenda un segmento AM eguale all'altezza comune a tutti i rettangoli della data serie; dal punto C si tracci la retta CN, parallela alla retta MB. Il rettangolo $AMPN$ che ha per lati AM, AN, è un rettangolo della serie data equivalente al rettangolo $ABDC$.

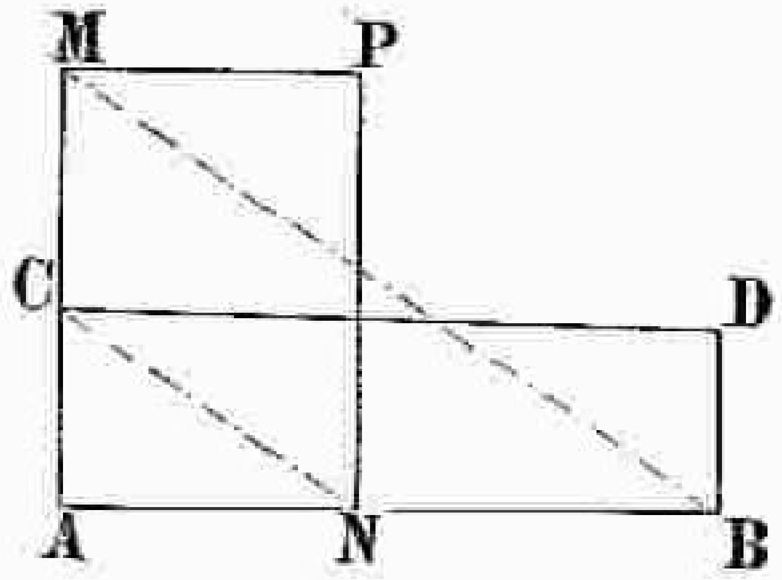


Fig. 5ª.

6. Teorema. — *Se due rette* r, r′ *in un piano sono tagliate da due rette parallele nei punti* A, B *e* A′, B *rispettivamente, e si tracciano le rette che congiungono un punto* C *preso sulla* r *coi punti* A′, B′, *le rette ad esse parallele condotte per i punti* B, A *rispettivamente, si tagliano in un punto della* r′.

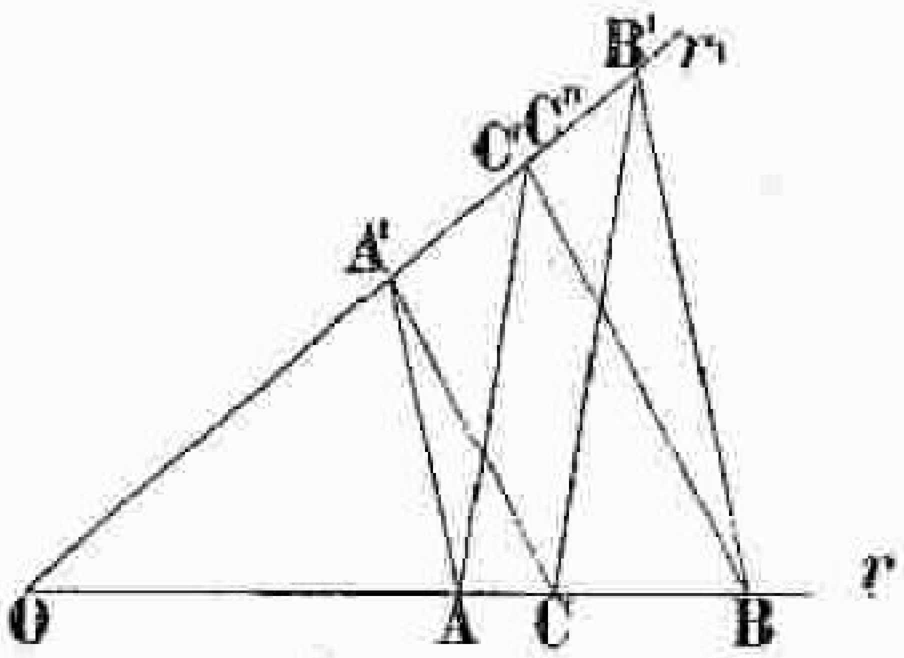


Fig. 6ª.

Sieno C', C'' (fig. 6ª) i punti di incontro della r' colla retta parallela a $B'C$ condotta per A e colla retta parallela ad $A'C$ condotta per B.

Per il teorema di Talete si hanno le proporzioni

$$OC : OA :: OB' : OC'$$
$$OC : OB :: OA' : OC''$$
$$OA : OB :: OA' : OB'.$$

Dalle ultime due proporzioni si ricava l'altra

$$OC : OA :: OB' : OC''.$$

Confrontando questa proporzione colla prima, si trova $OC' \equiv OC''$; e ciò prova che i punti C' C'' coincidono.

7. Teorema. — *Se due rettangoli* ABCD, A′BC′D′ (fig. 4ª) *hanno un angolo* B *in comune, e le rette* AC′, A′C *sono parallele, i rettangoli di una data serie ad essi equivalenti, ottenuti colla costruzione del* § 5 (Cor.), *sono eguali.*

Infatti se riguardiamo i segmenti BC, BC' come basi e i segmenti BA, BA' come altezze dei due rettangoli, per eseguire su questi la costruzione indicata nel Cor. del § 5 dovremo sulla semiretta BA prendere un segmento BM ugnale all'altezza comune ai rettangoli dalla serie considerata, tracciare le rette MC, MC' e per A ed A' condurre le parallale a MC e MC' rispettivamente. Per il teorema precedente queste parallele s' incontrano in un punto della retta BC, e quindi i due rettangoli della serie equivalenti ai due rettangoli dati sono eguali.

Corollario. — *Il rettangolo di una data serie equivalente ad un dato rettangolo ottenuto colla costruzione del* § 5 (Cor.) *è sempre lo stesso, qualunque sia il lato del rettangolo che si prende per base.*

Supponendo nella fig. 4ª $BA \equiv BC'$, $BA' \equiv BC$, i due triangoli BAC', $BA'C$ risultano isosceli, e le rette AC', $A'C$ risultano parallele. Possiamo allora ripetere la dimostrazione precedente.

Definizione. — *Chiameremo rettangolo di una data serie associato ad un dato rettangolo; quello ad esso equivalente ottenuto mediante la costruzione indicata nel corollario del* § 5.

In virtù del corollario precedente il rettangolo di una serie associato ad uno dato è sempre lo stesso, qualunque sia il lato che si prende per base.

8. Teorema. — *Se un rettangoto è somma di altri due, il rettangolo di una data serie ad esso associato è la somma dei rettangoli della stessa serie associati alle sue parti.*

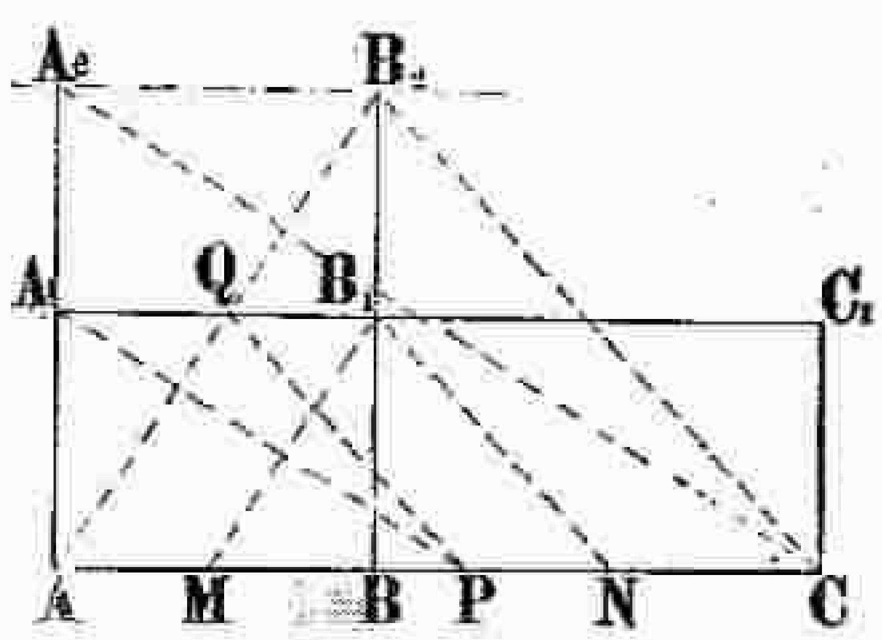


Fig. 7ª.

Sia $R \equiv ACC_1A_1$ (fig. 7ª) un rettangolo somma di due rettangoli $R_1 \equiv ABB_1A_1$, $R_2 = BCC_1B_1$, e facciamo le costruzioni note per ottenere i rettangoli R', R'_1, R'_2 di una serie associati ad R, R_1, R_2; cioè, esssendo $AA_2 \equiv BB_2$ l'altezza comune a tutti i rettangoli della serie, si traccino per B_1 le rette B_1M, B_1N, parallele alle rette B_2A, B_2C, e per A_1 la retta A_1P parallela alla A_2C. I segmenti AP, MB,

BN, saranno le basi dei rettangoli R', R_1', R_2', ed è facile vedere che $AP \equiv MB + BN$, di guisa che è $R' \equiv R_1' + R_2'$.

Infatti, essendo Q il punto d'incontro delle rette AB_2, A_1C_1, i due triangoli A_1QP, A_2B_2C sono omotetici, perchè hanno due coppie di lati A_1Q, A_2B_2 e A_1P, A_2C paralleli, e le tre rette A_1A_2, QB_2, PC, che congiungono le coppie di vertici corrispondenti, concorrono nel punto A. Ne segue che anche i lati QP, B_2C sono paralleli, e per conseguenza anche QP è parallelo ed eguale a B_1N, e i due triangoli AQP, MB_1N sono eguali, di guisa che si ha

$$AP \equiv MN \equiv MB + BN.$$

9. Teorema. — *Un triangolo qualunque può trasformarsi in un rettangolo di una data serie ad esso equivalente.*

Si costruisca il rettangolo che ha due lati opposti eguali ad un lato del dato triangolo, gli altri due eguali alla metà dell'altezza corrispondente, quindi per mezzo della costruzione indicata nel corollario del § 5 si trovi il rettangolo della data serie ad esso equivalente. Questo sarà equivalente anche al dato triangolo.

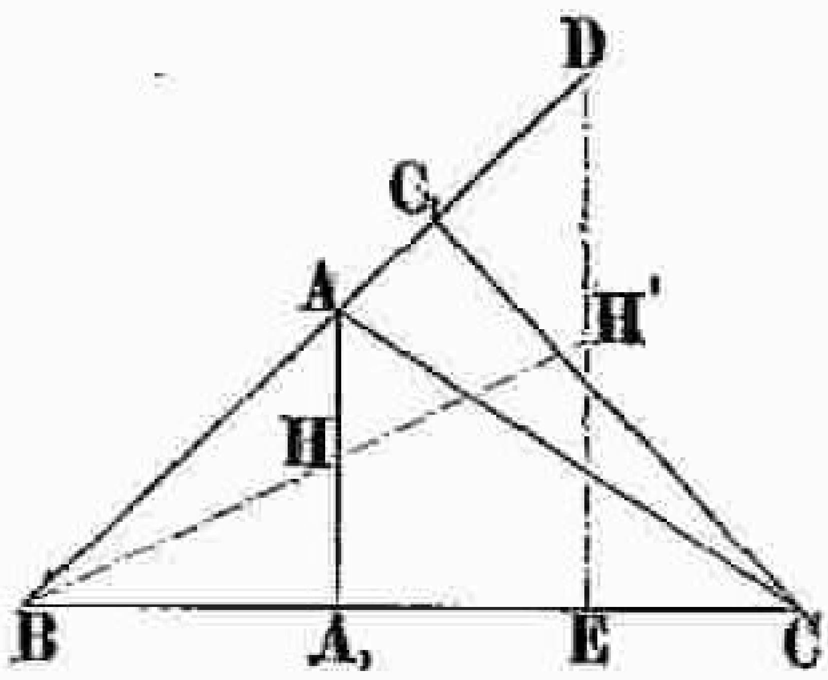


Fig. 8ª.

Se si ripete la stessa costruzione, prendendo successivamente per basi i tre lati del triangolo, è chiaro che otterremo tre rettangoli della serie equivalenti a quel triangolo; ma si può dimostrare che questi sono eguali.

Consideriamo per esempio come basi successivamente i lati BC, AB (fig. 8ª) e sieno AA_1, CC_1 le altezze corrispondenti. — Se sulla semiretta BA si prende $BD \equiv BC$, e sulla semiretta BC si prenda $BE \equiv BC_1$, il triangolo BDE risulta eguale al triangolo BCC_1 ed equiangolo al triangolo BAA_1, e perciò la retta DE risulta parallela alla AA_1, e la retta, che passa per B e per il punto di mezzo H del segmento AA_1, divide per metà il segmento DE (G. § 144).

Costruito un triangolo $OLM \equiv DBH'$ (fig. 9ª), si prendano sopra i suoi lati OL, OM i segmenti $OL' \equiv AB$, $OM' \equiv AH$. Il triangolo $O L' M'$ risulta eguale al triangolo $A B H$ ed equiangolo al triangolo $O L M$, e perciò le rette $L M$, $L' M'$ sono parallele.

In un piano, condotto per OL, distinto dal piano del triangolo $O L M$, si conduca una semiretta perpendicolare ad $O L$, e sopra di essa si prendano due seguenti $O M_1 \equiv O M$, $O M_1' \equiv O M'$. I due triangoli $O M M_1$, $O M' M_1'$ essendo isosceli ed avendo un angolo comune, le rette $M M_1$, $M' M_1'$ risultano parallele; perciò i piani $L M M_1$ $L' M' M_1'$, individuati dalle due coppie di rette parallele $L M$, $L' M'$ e $M M_1$, $M' M_1'$, sono paralleli, e tagliano il piano $L O M$ secondo due rette $L M_1$, $L' M_1'$ parallele.

Ora i rettangoli, che hanno per basi i lati BC, $A B$ e per altezze le metà delle altezze corrispondenti del triangolo, sono precisamente quello che ha per lati $O L$ e $O M_1'$, e quello che ha per lati $O L'$ e $O M_1$. Se trasformiamo questi due rettangoli in altri di una data serie ad essi equivalenti per mezzo della costruzione del corollario del § 5, otterremo due rettangoli eguali a causa del teorema del § 7, poichè le rette $L M_1$, $L' M_1'$ sono parallele.

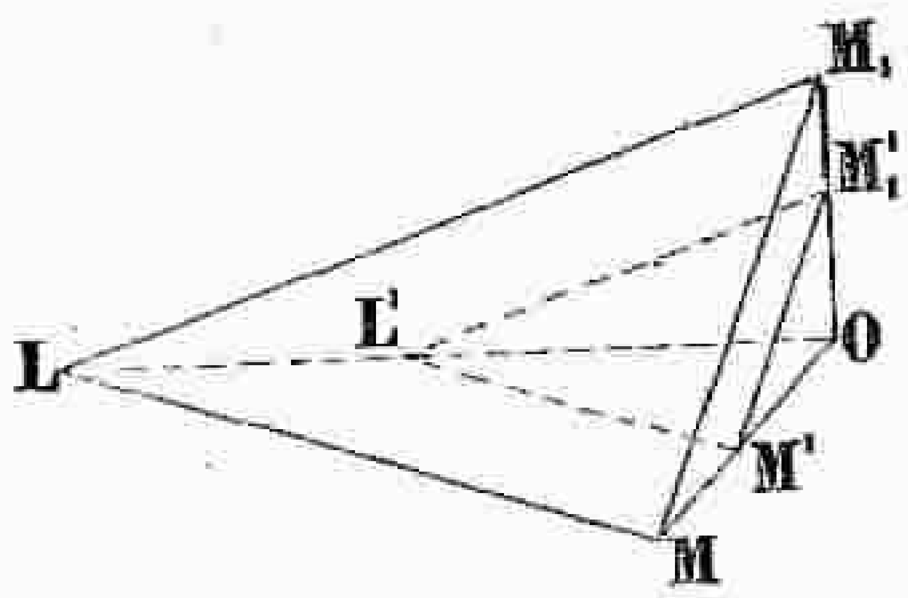


Fig. 9ª.

Per mezzo delle costruzioni indicate si possono dunque ottenere tre rettangoli di una data serie equivalenti ad un dato triangolo. Siccome però questi tre rettangoli sono eguali, possiamo dire che, qualunque sia il lato del triangolo che si considera come base, si ottiene sempre lo stesso rettangolo della serie equivalente al dato triangolo, purchè si facciano le costruzioni indicate. Si osservi però che non è esclusa *per ora* la possibilità di trovare per mezzo di altre costruzioni altri rettangoli della medesima serie, equivalenti al dato triangolo ma non eguali a quello ottenuto colle costruzioni sopra indicate.

Definizione. — *Chiameremo* rettangolo *di una data serie associato ad un triangolo quello ottenuto colle costruzioni dei* § *9, 5.*

Colla scrittura $(A B C)_h$ indicheremo il rettangolo che ha una data altezza h e che è associato ad un triangolo $A B C$.

Corollario. — *I rettangoli di una data serie associati a due triangoli che hanno un lato e l'altezza corrispondente rispettivamente eguali, sono eguali.*

10. Teorema. — *Se un triangolo è scomposto in due o tre triangoli in un modo qualsiasi, il rettangolo di una data serie ad esso associato è eguale alla somma dei rettangoli della stessa serie associati alle sue parti.*

1° Sia $T \equiv ABC$ un triangolo scomposto in due parti $T_1 \equiv ABD$, $T_2 \equiv BDC$ per mezzo di una retta che passa per il vertice B, di guisa che i tre triangoli T, T_1, T_2 abbiano la stessa altezza k, e la base AC di T sia la somma delle basi AD, DC di T_1 e T_2. Chiamando R', R_1', R_2' i rettangoli che hanno per basi AC, AD, DC e per altezza la metà di k, e che sono equivalenti ai triangoli T, T_1, T_2 rispettivamente, risulta R' eguale alla somma di R_1' e R_2', e per conseguenza (§ 8) si ha

$$(ABC)_h \equiv (ABD)_h + (BDC)_h$$

2° Il triangolo ABC sia scomposto in tre parti triangolari. Ciò può avvenire in due modi. Presi due punti D, E su due lati, per es. AB, AC, il triangolo ABC resta scomposto in un triangolo ADE e in un quadrangolo $DBCE$, che da una sua diagonale, per es. BE, è scomposto in due triangoli DBE, BCE. Per il caso precedente si ha:

$$(ABC)_h \equiv (ABE)_h + (BCE)_h$$
$$(ABE)_h \equiv (ADE)_h + (DEB)_h,$$

e quindi

$$(ABC)_h \equiv (ADE)_h + (DEB)_h + (BCE)_h .$$

Oppure, essendo O un punto interno al triangolo ABC, questo è scomposto nei tre triangoli OBC, OCA, OAB. Se D è il punto d'incontro delle rette AO, BC, si ha:

$$(ABC)_h \equiv (ABD)_h + (ADC)_h$$
$$(ABD)_h \equiv (OAB)_h + (OBD)_h$$
$$(ADC)_h \equiv (ODC)_h + (OCA)_h$$

e quindi

$$(ABC)_h \equiv (OAB)_h + (OBD)_h + (ODC)_h + (OCA)_h,$$

e siccome

$$(O\,B\,D)_h + (O\,D\,C)_h \equiv (O\,B\,C)_h,$$

si ha pure

$$(A\,B\,C)_h = (O\,B\,C)_h + (O\,C\,A)_h + (O\,A\,B)_h.$$

11. Teorema. — *Le somme dei rettangoli di una serie associati ai triangoli, nei quali un quadrangolo convesso è scomposto da una qualunque delle sue diagonali, sono eguali.*

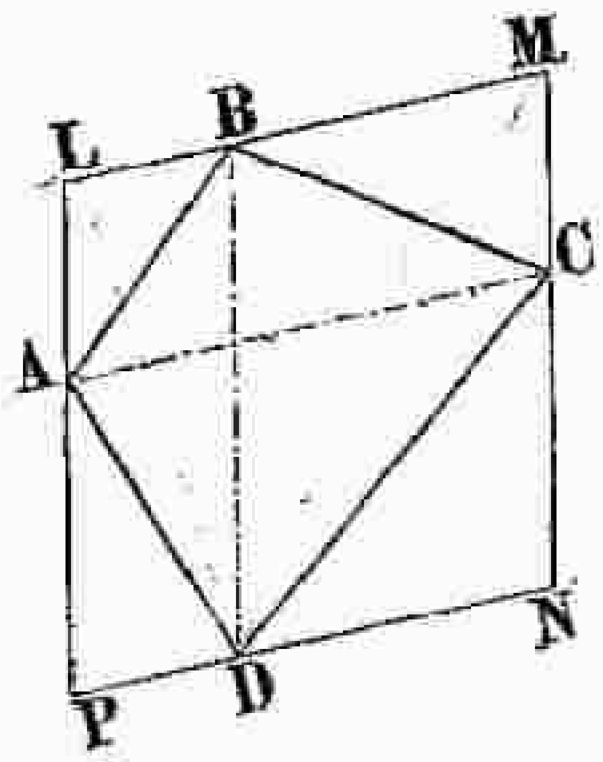


Fig. 10ª.

Sia $A\,B\,C\,D$ (fig. 10ª), un quadrangolo convesso qualunque, e $L\,M\,P\,N$ il parallelogrammo, che ha i suoi lati paralleli alle diagonali $A\,C$, $B\,D$ ed è circoscritto al quadrangolo. Si ha evidentemente:

$$(A\,B\,D)_h \equiv (L\,B\,D)_h$$
$$(B\,C\,D)_h \equiv (B\,M\,D)_h,$$

e quindi

$$(ABD)_h + (BCD)_h \equiv (LBD)_h + (BMD)_h \equiv (LMD)_h \equiv (LMN)_h.$$

Nello stesso modo si dimostra che

$$(A\,B\,C)_h + (A\,C\,D)_h \equiv (L\,M\,N)_h;$$

e per conseguenza si ha:

$$(A\,B\,D)_h + (B\,C\,D)_h \equiv (A\,B\,C)_h + (A\,C\,D)_h.$$

12. Teorema. — *Se un triangolo è scomposto in triangoli in un modo qualsiasi, il rettangolo di una data serie ad esso associato è eguale alla somma dei rettangoli della stessa serie associati alle sue parti.*

Nel § 10 abbiamo già dimostrato il teorema per il caso in cui il triangolo sia scomposto in due o tre triangoli. Facciamo ora vedere che, supponendo il teorema vero per una scomposizione in un numero di triangoli minore di n, è vero anche per una scomposizione in n parti.

La più generale scomposizione che può ottenersi è quella che si ottiene prendendo vari punti interni e sul contorno e congiungendoli in modo da formare una rete di triangoli che hanno per somma il triangolo dato.

Consideriamo i p triangoli che concorrono in uno di questi punti O; essi formeranno un poligono di p lati, nel quale è noto che devono esistere almeno tre angoli convessi. Fra i tre triangoli che hanno per lati i lati che formano uno dei suddetti angoli ne esistono due almeno ciascuno dei quali è tutto esterno all'altro, e per conseguenza il punto O è esterno ad uno almeno dei suddetti triangoli; per es. LMN. Siccome MO è interno all'angolo convesso LMN ne risulta che il quadrangolo $LMNO$ è convesso e perciò si ha:

$$(LOM)_h + (OMN)_h \equiv (OLN)_h + (LMN)_h .$$

Ripetendo sui $p-1$ triangoli che ancora restano attorno al punto O lo stesso ragionamento, e così di seguito, si giunge a far vedere che la somma dei rettangoli associati ai p triangoli considerati è eguale a quella dei rettangoli associati ad altri $p-3$ o $p-2$ triangoli non concorrenti in O (secondo che O è interno o sul contorno del triangolo) e a 3 o 2 triangoli concorrenti in O. Ma è già noto che la somma dei rettangoli associati a questi 3 o 2 triangoli è eguale al rettangolo associato alla loro somma, e quindi la somma dei rettangoli associati a tutti gli n triangoli, nei quali è scomposto il triangolo ABC, è eguale a quella dei rettangoli associati ad altri $(n-1)$ o $(n-2)$ triangoli, nei quali anche può essere scomposto ABC, e questa somma per ipotesi è eguale al rettangolo associato ad ABC.

13. Teorema. — *Se un poligono è scomposto in triangoli, la somma dei rettangoli di una data serie associati a questi triangoli è sempre lo stesso rettangolo della serie, qualunque sia la scomposizione del poligono in triangoli.*

Dato un poligono P, imaginiamolo scomposto in m triangoli $T_1, T_2 \ldots . T_m$, e poi imaginiamolo scomposto in un altro modo in n triangoli $T_1', T_2' \ldots . T_n'$. Le linee, che determinano ciascuna scomposizione, suddividono le parti provenienti dall'altra in poligoni, e tutti questi si possono scomporre in triangoli T_i'', di guisa che P risulterà eguale alla somma di p triangoli $T_1'', T_2'' \ldots . T_p''$. Chiamiamo R_i, R_i', R_i'' i rettangoli di una data serie associati ai triangoli T_i, T'_i, T''_i. Poichè un triangolo T_i è scomposto in un certo numero di triangoli T''_h, il rettangolo R_i è la somma dei corrispondenti rettangoli R''_h, e perciò

$$\sum_1^m R_i \equiv \sum_1^p R''_h.$$

Per la stessa ragione si ha

$$\sum_1^n R'_k \equiv \sum_1^p R''_h.$$

Siccome una somma di rettangoli di una serie non cambia, variando l'ordine delle parti, risulta

$$\sum_1^m R_i \equiv \sum_1^n R''_k.$$

Definizione. — *Chiameremo rettangolo di una data serie associato ad un dato poligono il rettangolo, ad esso equivalente, somma di tutti i rettangoli della stessa serie, associati ai triangoli in cui si può scomporre il poligono.*

Si osservi che, in virtù del precedente teorema, il rettangolo di una data serie associato ad un poligono è sempre lo stesso, comunque si eseguisca la scomposizione del poligono in triangoli; ma non è *per ora* esclusa la possibilità di trovare con altre costruzioni rettangoli della stessa serie equivalenti al poligono dato, ma non eguali a quello associato ad esso.

14. Teorema. — *Se un poligono è scomposto in più poligoni, il rettangolo di una data serie, associato ad esso, è eguale alla somma dei rettangoli della stessa serie associati alle sue parti.*

Un poligono P sia scomposto in n poligoni $P_1, P_2 \dots P_n$, di guisa che sia

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n.$$

Scomponiamo tutti i poligoni P_i in triangoli. Il rettangolo di una data serie associato ad un poligono P_i è la somma dei rettangoli della serie associati ai triangoli in cui esso è scomposto, e quello associato a P è la somma di tutti i rettangoli della serie associati a tutti i triangoli, nei quali sono scomposti i poligoni P_i; perciò chiamando R, R_i i rettangoli della serie associati a P e a P_i si ha

$$R \equiv R_1 + R_2 + \dots + R_n.$$

Corollari. — 1° *Se due poligoni sono equivalenti, i rettangoli di una data serie, ad essi associati, sono eguali.*

Se due poligoni P, P' sono equivalenti, essi sono somme dei medesimi poligoni $A_1, A_2 \ldots A_n$. Indicando con $R_1, R_2 \ldots R_n$ i rettangoli di una data serie associati a questi poligoni, i rettangoli della medesima serie associati a P e P', sono ambedue somme dei rettangoli $R_1, R_2 \ldots R_n$ e perciò sono eguali, costituendo i rettangoli di una data serie una classe di grandezze di prima specie.

2° *Se un poligono* P *contiene tutti i poligoni in cui è scomposto un altro poligono* P′ *insieme ad altri, il rettangolo di una data serie associato a* P *è maggiore di quello associato a* P′.

Se infatti P' è somma dei poligoni $A_1, A_2, \ldots A_m$ e P è somma dei poligoni $A_1, A_2, \ldots A_m, A_{m+1} \ldots A_{m+n}$, e con $R, R', R_1, R_2 \ldots R_m, R_{m+1}, \ldots R_{m+n}$ indichiamo i rettangoli di una serie associati a $P, P', A_1, A_2 \ldots A_m, A_{m+1} \ldots A_{m+n}$ rispettivamente, si ha

$$R \equiv R_1 + R_2 + \ldots + R_m + R_{m+1} + \ldots + R_{m+n}$$
$$R' \equiv R_1 + R_2 + \ldots + R_m,$$

e perciò

$$R > R'.$$

3° *Se due poligoni si possono scomporre in poligoni rispettivamente eguali, non è possibile trovare un'altra scomposizione per la quale uno di essi contenga tutte le parti dell'altro insieme ad altre parti, e viceversa.*

Sieno P, P' due poligoni, e supponiamo che per una data scomposizione P sia equivalente a P', e per un'altra scomposizione P contenga tutte le parti di P' insieme ad altre. Essendo R, R' i rettangoli di una data serie associati a P e P', dovrebbe essere contemporaneamente $R \equiv R'$ e $R > R'$; il che è assurdo.

4° *Se un poligono si scompone in parti, non è possibile riunire alcune di queste parti in modo da formare di nuovo il poligono dato.*

5° *Se si costruisce in un modo qualsiasi un rettangolo di una data serie equivalente ad un dato poligono, esso è eguale al rettangolo della data serie associato a quel poligono.*

15. Teorema. — *Dati due poligoni* P *e* P′, *è possibile scomporli in un numero* finito *di parti, in modo che le parti di* P *sieno rispettivamente eguali a quelle di* P′, *oppure in modo che* P *contenga tutte le parti di* P′ *insieme ad altre, oppure in modo che* P′ *contenga le parti di* P *insieme ad altre. Quando si verifica uno di questi casi, non è possibile che esista una scomposizione, per la quale si verifichi uno degli altri due.*

Costruiamo in un modo qualunque i rettangoli di una data serie R, R' associati ai poligoni P, P'. Si dovrà dare uno dei seguenti casi:

$$R \equiv R', \; R > R', \; R < R'.$$

Se R è eguale a R', eseguendo contemporaneamente la scomposizione per la quale il rettangolo R si divide in un numero finito di parti rispettivamente eguali a quelle del poligono P, e quella per la quale lo stesso rettangolo R si divide in un numero finito di parti rispettivamente eguali a quelle del poligono P', otterremo una terza scomposizione di R in parti che sono le parti provenienti da ciascuna delle due scomposizioni suddette, suddivise mediante l'altra scomposizione. Riportando queste suddivisioni sulle parti del poligono P e su quelle del poligono P', questi restano scomposti in parti rispettivamente eguali, e perciò sono equivalenti.

Collo stesso ragionamento si dimostra che, se è $R > R'$, i due poligoni P, P' si possono scomporre in parti, in modo che in P si trovino tutte le parti di P' insieme ad altre; e se è $R < R'$, i due poligoni P, P' si possono scomporre in parti, in modo che in P' si trovino tutte le parti di P insieme ad altre.

Definizione 1ª — *Se due poligoni* P, P′ *si possono scomporre in parti, in modo che in* P *si trovino parti eguali a tutte quelle di* P′ *insieme ad altre, si dice che* P *è maggiore di* P′ (P > P′), *oppure* P′ *è minore di* P (P′ < P).

Il teorema precedente, in seguito a questa definizione, si può enunciare così: *Dati due poligoni* P, P′, *si deve dare uno ed un solo dei seguenti casi* P > P′, P = P′, P < P′.

2ª — *Se un poligono* A *è somma di due altri* B, C, *si dice che ciascuno di questi è la differenza fra* A *e il rimanente poligono* (C = A — B).

Corollario. — *Dati due poligoni non equivalenti, esiste sempre la loro differenza. Tutte le differenze che si possono ottenere sono equivalenti.*

In seguito a quanto ho esposto è facile dimostrare tutti i teoremi relativi alle differenze ed ai summultipli di poligoni (*G.* § 274, 276, 277, 278), fra i quali i più notevoli sono i seguenti:

Sono equivalenti i poligoni differenze di poligoni rispettivamente equivalenti.

Sono equivalenti i poligoni equisummultipli di poligoni equivalenti.

(*Continua*).

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

2ª Nota sul Problema del Malfatti, pag. 25 del *Periodico.* — Consideriamo i cerchi iscritti nei triangoli IBC, ICA, IAB; denotino I_1, I_2, I_3 i loro centri ed r_1, r_2, r_3 i rispettivi raggi; a motivo dell'eguaglianza

$$a = r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) = r_1\left(\cot\frac{B}{4} + \cot\frac{C}{4}\right)$$

si deduce $r_1 = \frac{r}{2}\left(1 - \operatorname{tang}\frac{B}{4}\operatorname{tang}\frac{C}{4}\right)$ e similmente risultano

$$r_2 = \frac{r}{2}\left(1 - \operatorname{tang}\frac{C}{4}\operatorname{tang}\frac{A}{4}\right), \quad r_3 = \frac{r}{2}\left(1 - \operatorname{tang}\frac{B}{4}\operatorname{tang}\frac{A}{4}\right).$$

Significando A_1, B_1, C_1 i punti di contatto delle circonferenze I_1, I_2, I_3 coi lati BC, CA, AB si hanno $BA_1 = r_1\cot\frac{B}{4}$, $BC_1 = r_3\cot\frac{B}{4}$, e perciò la distanza dei punti di contatto dei cerchi I_1, I_3 sulla bisettrice BI è data per la differenza $(r_1 - r_3)\cot\frac{B}{4} = \frac{r}{2}\left(\operatorname{tang}\frac{A}{4} - \operatorname{tang}\frac{C}{4}\right)$, così i cerchi I_1, I_3 non si toccano se gli angoli A, C siano diseguali. Dal punto A_1 tiriamo la tangente A_1C_0 al cerchio I_3, in modo che questo cada nell'interno del triangolo A_1BC_0 e proponiamoci di valutare l'angolo $\omega = BA_1C_0$ in funzione degli angoli A, B, C. Essendo $\angle A_1C_0B = \pi - (\omega + B)$ si troverà $C_1C_0 = r_3\operatorname{tang}\frac{(\omega + B)}{2}$ e quindi per il triangolo A_1BC_0 si avranno le ragioni eguali

$$\frac{r_3\cot\frac{B}{4} + r_3\operatorname{tang}\frac{(\omega + B)}{2}}{\operatorname{sen}\omega} = \frac{r_1\cot\frac{B}{4}}{\operatorname{sen}(\omega + B)} = \frac{A_1C_0}{\operatorname{sen} B}.$$

È facile ricavare dalle prime la relazione

$$r_3\operatorname{sen}\frac{\omega + B}{2}\cos\left(\frac{\omega}{2} + \frac{B}{4}\right) = \frac{r_1}{2}\cos\frac{B}{4}\operatorname{sen}\omega,$$

che si trasforma nella quadrica

$$4\, r_3 \operatorname{tang}^2\frac{B}{4}\,.\,x^2 - 2(r_1 + r_3)\operatorname{tang}\frac{B}{4}\left(1 + \operatorname{tang}^2\frac{B}{4}\right)x + r_1\left(1 - \operatorname{tang}^4\frac{B}{4}\right) = 0$$

ove si faccia $x = \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{\omega}{2}$. Sostituendo poi i valori dei raggi r_1, r_3 in funzione di r e degli angoli A, B, C; ponendo per brevità $\alpha = \operatorname{tang}\frac{A}{4}$, $\beta = \operatorname{tang}\frac{B}{4}$, $\gamma = \operatorname{tang}\frac{C}{4}$ la quadrica si scrive

$$4\,\beta^2(1-\alpha\beta)x^2 - 2\,\beta(1+\beta^2)(2-\alpha\beta-\beta\gamma)x + (1-\beta\gamma)(1-\beta^4) = 0.$$

Ora i numeri α, β, γ soddisfano alla condizione $\alpha+\beta+\gamma-\alpha\beta\gamma = 1-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma$ che equivale alle due identità

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) = 2(1+\alpha\beta\gamma),\quad 2(1-\alpha\beta)(1-\beta\gamma) = (1+\alpha)(1+\gamma)(1+\beta^2);$$

da cui ricavando il binomio $1+\beta^2$ e sostituendolo nella quadrica, questa diviene

$$2\beta^2(1+\alpha)(1+\gamma)x^2 - 2\beta(1-\beta\gamma)(2-\alpha\beta-\beta\gamma)x + (1-\beta\gamma)^2(1-\beta^2) = 0$$

che determina

$$x = \frac{1-\beta\gamma}{2\beta(1+\alpha)(1+\gamma)}\left[2-\alpha\beta-\beta\gamma \pm \sqrt{(2-\alpha\beta-\beta\gamma)^2 - 2(1+\alpha)(1+\gamma)(1-\beta^2)}\right].$$

Applicando la prima delle identità surriferite, il polinomio sotto radicale si converte nell'espressione $\beta^2(\alpha+\gamma)^2 - 4\beta(\alpha+\gamma) + 4 - 4(1-\beta)(1+\alpha\beta\gamma)$ riducentesi a $\beta^2(\alpha+\gamma+2)^2$, onde le due radici sono funzioni razionali di α, β, γ, cioè $x' = \dfrac{(1+\beta)(1-\beta\gamma)}{\beta(1+\alpha)(1+\gamma)}$, $x'' = \dfrac{1}{2\beta}(1-\beta\gamma)(1-\beta)$.

La prima soluzione dimostra che il raggio del cerchio iscritto nel triangolo BA_1C_0 ha per valore $\rho' = \dfrac{BA_1}{\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{\omega}{2}} = \dfrac{r}{2\beta x'}(1-\beta\gamma) = \dfrac{r}{2}\,\dfrac{(1+\alpha)(1+\gamma)}{1+\beta}$ e determina quello dei cerchi del MALFATTI che è iscritto nell'angolo B.

L'altra soluzione sarebbe $\rho'' = \dfrac{r}{1-\beta}$ e fornirebbe sul lato BA il segmento $BC_2 = \rho''\cot\dfrac{B}{2} = \dfrac{r}{2\beta}(1+\beta) > BC_1$. Abbiamo dunque provata l'elegante costruzione di STEINER. *Iscrivere i cerchi* I_1, I_2, I_3 *nei triangoli* IBC, ICA, IAB; *dai punti di lor contatto* A_1, B_1, C_1 *coi rispettivi lati* BC, CA, AB *condurre le tangenti* A_1C_0, B_1A_0, C_1B_0 *ai medesimi cerchi, in modo che ciascuno di questi giaccia dalla stessa parte degli angoli corrispondenti* B, C, A *riguardo alle dette tangenti, e le circonferenze iscritte nei triangoli* BA_1C_0, CB_1A_0, AC_1B_0 *coincidere con quelle del* MALFATTI.

Dati tre cerchi tangenti fra loro due a due descritti con i raggi ρ_1, ρ_2, ρ_3, circoscrittovi il triangolo ABC si potrà determinare analiticamente il cerchio iscritto in ABC, poichè dalle relazioni surriferite $\rho_1 = \dfrac{r}{2}\,\dfrac{(1+\alpha)(1+\gamma)}{1+\beta}$,

$\rho_2 = \frac{r}{2}\,\frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{1+\gamma}$, $\rho_3 = \frac{r}{2}\,\frac{(1+\beta)(1+\gamma)}{1+\alpha}$ si deducono $1+\alpha = \frac{2}{r}\sqrt{\rho_1\rho_2}$, $1+\beta = \frac{2}{r}\sqrt{\rho_2\rho_3}$, $1+\gamma = \frac{2}{r}\sqrt{\rho_3\rho_1}$ che sostituiti nell'identità $(1+\alpha)(1+\beta)\times(1+\gamma) = 2(1+\alpha\beta\gamma)$ danno luogo alla quadrica

$$\left(\sqrt{\frac{1}{\rho_1}}+\sqrt{\frac{1}{\rho_2}}+\sqrt{\frac{1}{\rho_3}}\right) r^2 - 2(\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2}+\sqrt{\rho_3})r + 2\sqrt{\rho_1\rho_2\rho_3} = 0 .$$

Osservazione. Si proietti ortogonalmente il triangolo ABC sopra un piano inclinato ad esso secondo un angolo qualunque α e passante per il lato BC; siano A', I' le proiezioni del vertice A e del centro I del cerchio iscritto, $A'A_0$, $I'M$ quelle di $AA_0 = h$, altezza della base BC, e di $IM = r$, si deducono $A_0A' = c \operatorname{sen} B \cos\alpha$, $AA' = c \operatorname{sen} B \operatorname{sen}\alpha$, $I'M = r\cos\alpha$, $II' = r\operatorname{sen}\alpha$, $BA_0 = c\cos B$, $A_0C = b\cos C$, chiamando B', C', A' le rispettive proiezioni degli angoli B, C, A si troveranno

$$\operatorname{tg} B' = \frac{A_0A'}{BA_0} = \operatorname{tg} B\cos\alpha\,, \quad \operatorname{tg} C' = \operatorname{tg} C\cos\alpha\,, \quad \operatorname{tg} A' = \frac{(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)\cos\alpha}{\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C\cos^2\alpha - 1}\,,$$

$$(1)\qquad A'B = \frac{BA_0}{\cos B'} = c\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 B\operatorname{sen}^2\alpha}\,, \quad CA' = b\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 C\operatorname{sen}^2\alpha}\,;$$

le inclinazioni dei lati AB, AC, sul piano $A'BC$ saranno $\operatorname{tang} A'BA = \frac{\operatorname{sen} B\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 B\operatorname{sen}^2\alpha}}$, $\operatorname{tang} A'CA = \frac{\operatorname{sen} C\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 C\operatorname{sen}^2\alpha}}$. Se in luogo di b, c sostituiamo $\frac{r}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}$, $\frac{r}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}}$ ed in luogo di B, C le loro metà, le formule (1) diverranno $BI' = r\sqrt{\cos^2\alpha + \cot^2\frac{B}{2}}$, $CI' = r\sqrt{\cos^2\alpha + \cot^2\frac{C}{2}}$ e si avranno pure

$$A'I' = \frac{r}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)},$$

$$\operatorname{tang} CBI' = \operatorname{tang}\frac{B}{2}\cos\alpha \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tang} BCI' = \operatorname{tang}\frac{C}{2}\cos\alpha\,.$$

I cerchi del MALFATTI descritti nel triangolo ABC si proiettano secondo ellissi aventi gli assi maggiori $2\rho_1$, $2\rho_2$, $2\rho_3$ paralleli a BC ed i minori eguali a $2\rho_1\cos\alpha$, $2\rho_2\cos\alpha$, $2\rho_3\cos\alpha$.

(*Continua*). (G. BELLACCHI).

Due teoremi di geometria solida che hanno qualche analogia coi teoremi di Pappo e di Pitagora. — 1° *La somma di tre prismi costruiti su tre faccie di un tetraedro e da parti opposte rispetto a questo è equivalente al prisma, che ha per base la faccia restante del tetraedro e per costola laterale il segmento eguale a parallelo a quello, che unisce il vertice comune alle dette tre faccie col punto in cui s'incontrano i piani delle basi dei tre prismi, che sono opposte a queste.*

Sulle tre faccie AVB, BVC, CVA del tetraedro $VABC$, e da parti opposte rispetto a questo, si costruiscano tre prismi arbitrari P_{ab}, P_{bc}, P_{ca}; quindi si unisca il vertice V col punto d'incontro O dei piani di quelle basi dei tre prismi, che non sono faccie del tetraedro. Si vuol dimostrare che la somma dei tre prismi P_{ab}, P_{bc}, P_{ca} è equivalente al prisma che ha per base il triangolo ABC e per costola laterale un segmento eguale e parallelo a VO.

Sia BAC, DEF quest'ultimo prisma e sieno M ed N i punti nei quali il segmento OV prolungato sega i triangoli ABC, DEF. Si congiungano poscia il punto M coi punti B, C, A ed il punto N coi punti E, F, D.

Il prisma NEF, MBC è equivalente al prisma che ha per base VBC e per costola laterale VO, avendo con questo la stessa sezione normale e costole laterali eguali. Ma il secondo di questi prismi è equivalente a P_{bc} avendo comuni con questo la base VBC e l'altezza; dunque il prisma NEF, MBC è equivalente a P_{bc}.

E poichè in modo analogo si dimostra che i due prismi NED, MBA ed NDF, MAC sono rispettivamente equivalenti a P_{ab}, P_{ac}, si conclude che la somma di P_{ab}, P_{bc}, P_{ca} è equivalente al prisma ABC, DEF.

2° Il teorema di PITAGORA può essere considerato un caso particolare di questo:

« Se sui lati di un triangolo rettangolo, presi come basi, si costruiscono tre parallelogrammi colle altezze proporzionali alle basi, quello costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma degli altri due ».

Posto sotto questa forma, il teorema di PITAGORA ne ammette uno analogo nello spazio. Chiamato infatti *rettangolo* un tetraedro, che abbia un angolo triedro trirettangolo, e ricordato che se F_1, F_2, F_3 sieno le aree delle faccie adiacenti a questo ed F quella della faccia opposta, si ha pel teorema di EULERO la relazione *aritmetica*:

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = F^2;$$

ponendo

$$\frac{h_1}{F_1} = \frac{h_2}{F_2} = \frac{h_3}{F_3} = \frac{h}{F},$$

si avrà anche:

$$F_1h_1 + F_2h_2 + F_3h_3 = Fh$$

relazione interpretabile *geometricamente* nel modo seguente:

Costruiti sulle quattro faccie di un tetraedro rettangolo quattro prismi (o 4 *tetraedri*) *colle altezze proporzionali alle basi, quello costruito sulla faccia opposta all'angolo trirettangolo è equivalente alla somma degli altri tre.*

La dimostrazione puramente geometrica di questo teorema si può dare facilmente mediante i lemmi seguenti:

LEMMA I. — *Due prismi* (o *piramidi*), *aventi le basi inversamente proporzionali alle altezze, sono equivalenti.*

Se P, P' sono due prismi colle loro basi B, B' inversamente proporzionali alle loro altezze h, h', dico $P \equiv P'$.

Immaginato infatti un altro prisma P'' di base B e di altezza h', si ha come è noto:

$$P : P'' :: h : h' :: B' : B$$

e

$$P' : P'' :: B' : B,$$

dunque

$$P : P'' :: P' : P''$$

e però

$$P \equiv P'.$$

Lemma II. — *Se due prismi (o piramidi) hanno le basi proporzionali alle altezze, uno di essi sta all' altro, come la base del primo sta ad una figura terza continuamente proporzionale dopo essa base e la base dell' altro prisma (o piramide).*

Siano P, P' due prismi colle loro basi B, B' direttamente proporzionali alle loro altezze h, h'; e sia B'' un poligono terzo continuamente proporzionale dopo B, B', sicchè abbiano luogo le due proporzioni

(1) . . . . $B : B' :: h : h'$

(2) . . . . $B : B' :: B' : B''$.

Dico che

(3) . . . . $P : P' :: B : B''$.

Indicato infatti con P'' un prisma di base B'' e di altezza h, esso (Lemma I) è equivalente a P', quindi

$$P : P' :: P : P'' :: B : B''$$

il che dimostra la proporzione (3).

Lemma III. — *In un tetraedro rettangolo, una qualunque delle faccie adiacenti all'angolo trirettangolo è media proporzionale tra la faccia opposta a quest'angolo e la sua proiezione su questa.*

Dimostrazione del secondo teorema.

Se $VABC$ sia il tetraedro in discorso coll'angolo di vertice V trirettangolo, e se VO sia la perpendicolare calata da V sulla faccia ABC, indicato con D il punto nel quale CO sega AB, è noto che non solo CD, ma anche la retta VD è perpendicolare alla AB, sicchè CD, VD, OD sono le altezze dei triangoli ACB, AVB, AOB, rispetto al lato comune AB. E poichè quelle altezze sono in proporzione continua, lo stesso avverrà di questi ultimi triangoli.

Siano ora P_{ab}, P_{bc}, P_{ca}, P i prismi costruiti sulle quattro faccie VAB, VBC, VCA, ABC del nostro tetraedro rettangolo (ipotesi e costruzioni del lemma precedente) colle altezze proporzionali alle basi.

In virtù dei lemmi II e III si avranno le proporzioni:

$$P_{ab} : P :: \text{triangolo } AOB : \text{triangolo } ABC$$
$$P_{bc} : P :: \text{triangolo } BOC : \text{triangolo } ABC$$
$$P_{ca} : P :: \text{triangolo } AOC : \text{triangolo } ABC$$

quindi:

$$P_{ab} + P_{bc} + P_{ca} : P :: \text{trian. } AOB + \text{trian. } BOC + \text{trian. } COA : \text{trian. } ABC;$$

e poichè la 3ª grandezza di questa proporzione è equivalente alla 4ª, sarà la 1ª equivalente alla 2ª, cioè:

$$P_{ab} + P_{bc} + P_{ca} \equiv P$$

Il che dimostra il teorema.

Osservazione. Il secondo di questi teoremi, come si può con calcoli facili verificare, è un caso particolare del primo.

A. PORCHIESI.

Dimostrazione di un teorema sulle frazioni continue. — Applicando i teoremi relativi ai limiti nelle operazioni, si dimostra facilmente che

il valore di una frazione continua, anche illimitata, non cambia, se a tutta quella parte della sua espressione che ha principio da un denominatore parziale qualunque si sostituisce il valore della parte medesima (*).

Considerando l'irrazionale come numero di separazione di due serie convergenti e volendo fare a meno della teoria dei limiti, si può procedere in questo modo.

Si osservi innanzi tutto che *se* a, b, c, d, m, n *sono numeri positivi ed è* $m > n$, *la frazione* $\frac{am+b}{cm+d}$ *sarà uguale, maggiore, o minore di* $\frac{an+b}{cn+d}$, *secondo che* $\frac{a}{c}$ *è uguale, maggiore, o minore di* $\frac{b}{d}$.

Ciò si prova subito, notando che

$$\frac{am+b}{cm+d} - \frac{an+b}{cn+d} = \frac{(m-n)(ad-bc)}{(cm+d)(cn+d)} = \frac{(m-n)\,cd}{(cm+d)(cn+d)} \left\{ \frac{a}{c} - \frac{b}{d} \right\}.$$

Si consideri poi la frazione continua illimitata

$$(\alpha) \qquad a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 \dots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \dots}}}}}$$

nella quale tutti i denominatori parziali, a cominciare dal secondo, siano maggiori di uno stesso numero positivo, e sia A il valore di essa (**), B quello della frazione pure illimitata

$$a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \dots}$$

e si indichi con $\frac{P_m}{Q_m}$ la ridotta *emmesima* (m qualunque) della (α).

Avremo

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{B}}} = \frac{P_n . B + P_{n-1}}{Q_n . B + Q_{n-1}}.$$

(*) V. ARZELÀ, *Complementi di algebra elementare*, n. 28.

(**) Per la dimostrazione della esistenza di questo valore si vegga ARZELÀ, libro citato.

Se supponiamo n pari, allora

$$\frac{P_n}{Q_n} > \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}};$$

e però, essendo $B > a_{n+1}$, avremo

$$\frac{P_n . B + P_{n-1}}{Q_n . B + Q_{n-1}} > \frac{P_n . a_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n . a_{n+1} + Q_{n-1}}, \text{ ossia } \frac{P_n . B + P_{n-1}}{Q_n . B + Q_{n-1}} > \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}.$$

Essendo poi $B < a_{n+1} + \dfrac{1}{a_{n+2}}$, avremo

$$\frac{P_n . B + P_{n-1}}{Q_n . B + Q_{n-1}} < \frac{P_n \left(a_{n+1} + \dfrac{1}{a_{n+2}}\right) + P_{n-1}}{Q_n \left(a_{n+1} + \dfrac{1}{a_{n+2}}\right) + Q_{n-1}}, \text{ ossia } \frac{P_n . B + P_{n-1}}{Q_n . B + Q_{n-1}} < \frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}},$$

e così di seguito.

L'espressione $\dfrac{P_n . B + P_{n-1}}{Q_n . B + Q_{n-1}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{B}}}$ è dunque maggiore di tutte le ridotte della (α) di ordine impari $\dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}, \dfrac{P_{n+3}}{Q_{n+3}}, \ldots$ e minore di tutte quelle di ordine pari $\dfrac{P_{n+2}}{Q_{n+2}}, \dfrac{P_{n+4}}{Q_{n+4}}, \ldots$ e però essa ha valore uguale a quello della (α).

La dimostrazione si farebbe allo stesso modo, se n fosse dispari.

Teramo, febbraio 1895.

Dott. LUIGI BOSI.

La riduzione all'assurdo nei nostri libri di testo. — I. Nel mentre è opinione comune che la *riduzione all'assurdo* deve essere ordinariamente evitata (*), trovo che nei libri di testo, anche nei più pregevoli, che circolano nelle nostre scuole, essa è applicata alle dimostrazioni di non poche proprietà (**). A me sembra che per alcune di queste si può seguire una dimostrazione diretta abbastanza semplice; o che, per lo meno, pur impiegando il metodo indiretto, si può procedere in guisa che la riduzione all'assurdo apparisca, in certo modo, il meno possibile. Il lettore giudicherà dalle osservazioni seguenti relative ad alcune di quelle proprietà per le quali la riduzione all'assurdo sembrerebbe non potersi evitare. Se egli pensa che il metodo indiretto costringe spesso l'insegnante a fare dei disegni che ripugnano, e che, adoperandolo soverchiamente,

---

(*) V. per es. *Elem. di geom.* di R. DE PAOLIS (Loescher, 1884) pag. 4, e *Elem. di geom.* di A. SANNIA e E. D'OVIDIO (6ª ediz., Pellerano 1886) pag. 3.

(**) Si trova p. es. la riduzione all'assurdo in DE PAOLIS o. c. §§ 41, 42, 43, 45, 46, 47, 67, 68, 69, 70, 77, 100, 105, 107, 135,....; in SANNIA e D'OVIDIO o. c. §§ 17 (Cor. 1º), 32, 33, 34, 46, 49, 51,....; in FAIFOFER (*Elem. di geom.* ad uso dei Licei - Tip. Emil.ª 1894), §§ 72, 103, 109, 111, 116, 117, 124, 127, 129, 130, 132, 140, 142, 147, 164, 176, 177,....

In SANNIA e D'OVIDIO figura un minor numero di dimostrazioni indirette, perchè viene esposta fin dal principio la *legge delle inverse*.

può facilmente accadere che gli alunni finiscano anch'essi coll'abusarne, si persuaderà che le mie considerazioni non sono inutili per l'insegnamento.

2. La riduzione all'assurdo figura specialmente nei primi capitoli della geometria elementare, allorchè vi si stabiliscono le proprietà relative alla perpendicolarità e al parallelismo. Così, per cominciare dalle più semplici, in geometria piana, dopo aver mostrato che per un punto non si può condurre che una perpendicolare ad una retta, e dopo aver ammesso il postulato della parallela, si deduce con la riduzione all'assurdo (*):

a) *due rette perpendicolari ad una stessa retta, non s'incontrano*;

b) *se due rette son parallele, ogni retta che ne incontra una incontra l'altra*;

c) *due rette parallele ad una terza sono parallele tra loro.*

Dimostrando queste proprietà nel modo seguente, la riduzione all'assurdo o non c'è più, o apparisce meno.

a) « Le due rette AB, CD sieno perp. alla EF. Poichè per ogni punto M « della AB non si può condurre che la AB perp. alla EF, l'altra retta CD « non può passare per M. Dunque la CD non può passare per nessun punto « della AB ».

Oppure :

« Poichè per ogni punto M non si può condurre che una perp. alla EF, « le due rette AB, CD non possono passare *ambedue* pel punto M. Dunque nes- « sun punto può esser comune alle due rette AB e CD ».

b) « Le due rette AB, CD sieno parallele e la EF incontri la AB nel « punto H. Poichè pel punto H non si può condurre che la AB parallela alla « CD, ogni altra retta passante per H, e quindi anche la EF, incontra la « CD ».

c) « Le due rette AB, CD sieno parallele alla terza EF. Poichè per ogni « punto M della AB non si può condurre che la AB parallela alla EF, la CD « non può passare per M. Dunque la CD non può passare per nessun punto « della AB ».

Oppure :

« Poichè per ogni punto M non si può condurre che una parallela alla « EF, le due rette AB, CD non possono passare *ambedue* pel punto M. Dunque « nessun punto può essere comune alle due rette AB, CD ».

Le proprietà corrispondenti della geometria solida: *due piani perp. ad una stessa retta son paralleli; se due piani son paralleli, ogni piano che seca l'uno seca l'altro; due piani paralleli ad un terzo sono paralleli tra loro*, possono anch'esse esser dimostrate in modo analogo al precedente.

3. La teoria delle parallele, qual'è sviluppata nei libri di testo d'oggigiorno si riassume nelle due proposizioni:

I. *Se due rette fanno con una terza angoli corrispondenti uguali esse son parallele*;

(*) V. De Paolis o. c. § 45 — Sannia e D'Ovidio o. c. p. 30, 63, 64 — Faifofer o. c. §§ 111, 221, 222.