E, poichè

$$\operatorname{tang}a' - \operatorname{tang}(a' - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos(a' - \alpha)\cos a'}$$

$$\operatorname{tang}(a' + \alpha) - \operatorname{tang}a' = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos(a' + \alpha)\cos a'}$$

e

$$\cos(a' - \alpha) > \cos(a' + \alpha),$$

avremo

$$\operatorname{tang}a' - \frac{\alpha}{\cos a' \cos(a'+\alpha)} < \operatorname{tang}a < \operatorname{tang}a' + \frac{\alpha}{\cos(a'+\alpha)\cos a'}.$$

È dunque *tanga' un valore di tanga, approssimato a meno di* $\frac{\alpha}{\cos a' \cos(a' + \alpha)}$.

Sempre pel n° 2 si ha che $\log_{10} \operatorname{tang}a'$ è un valore di $\log_{10} \operatorname{tang}a$, approssimato a meno di

$$\frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{\operatorname{sen}a' \cos(a' + \alpha) - \alpha}.$$

È inoltre

$$2\operatorname{sen}a' \cos(a' + \alpha) = \operatorname{sen}(2a' + \alpha) - \operatorname{sen}\alpha,\ \operatorname{sen}\alpha < \alpha,$$

epperò sarà $\log_{10} \operatorname{tang}a'$, un valore di $\log_{10} \operatorname{tang}a$, approssimato anche a meno di

$$\frac{\alpha}{\operatorname{sen}(2a' + \alpha) - 3\alpha}.$$

Ettore Ricordi.

(Il seguito al prossimo fascicolo).

CORRELAZIONE FRA I TEOREMI DELLE OPERAZIONI SUI NUMERI INTERI

II.

Operazioni inverse

13. Dicesi *resto* o *differenza* di due numeri il risultato che si ottiene diminuendo

13. Dicesi *quoziente* di un numero per un altro quel numero che indica quanti ter-

il numero maggiore di tante unità quante ne contiene il numero minore. — Oppure, quel numero che aggiunto al *diminutore* riproduce il *diminuendo*.

mini eguali al secondo sono contenuti nel primo.

Oppure, quel numero che moltiplicato per il *divisore* riproduce il *dividendo*.

I teoremi che andiamo ad esporre sono limitati alla possibilità di avere resti positivi e quozienti interi.

14. Teorema 1° — *Per sottrarre da una somma uno dei suoi termini basta sopprimere questo termine nella somma.*

14. Teorema 1° — *Per dividere un prodotto per uno dei suoi fattori basta sopprimere questo fattore nel prodotto.*

Difatti $(2 + 3 + 4 + 5) - 3$ per il teorema 1° del n. 2 $= 2 + 4 + 5 + 3 - 3 = 2 + 4 + 5$.

15. Teorema 2° — *Per sottrarre da una somma un numero basta sottrarlo da uno dei termini della somma.*

15. Teorema 2° — *Per dividere un prodotto per un numero basta dividere uno solo dei fattori pel numero.*

Difatti $(2 + 10 + 4 + 5) - 7$ per il teorema 2° del n° 3 $= (2 + 3 + 7 + 4 + 5) - 7$ e, pel n. 14, $= 2 + 3 + 4 + 5 = 2 + (10 - 7) + 4 + 5$.

16. Teorema 3° — *Se si aumenta il diminuendo o si diminuisce il diminutore di un numero, senza alterare l'altro termine della sottrazione, il resto viene aumentato dello stesso numero.*

16. Teorema 3° — *Se si moltiplica il dividendo o si divide il divisore per un numero, senza alterare l'altro termine della divisione, il quoziente viene moltiplicato per lo stesso numero.*

Sia $12 - 5 = 7$, dico 1° che $(12 + 3) - 5 = 7 + 3$, e 2° che $12 - (5 - 3) = 7 + 3$.

1° Difatti, $12 = 5 + 7$ e quindi per un assioma e per il teor. 3° del n. 4, $12 + 3 = 5 + (7 + 3)$ e perciò $(12 + 3) - 5 = 7 + 3$.

2° Difatti, essendo $12 = 5 + 7$, si ha pure, per un assioma e per il teorema del n. 15, $12 = (5 - 3) + 7 + 3$ e perciò $12 - (5 - 3) = 7 + 3$.

Corollario. — *Per aggiungere ad una differenza un numero si può aggiungere il numero al sottraendo oppure sottrarlo, se si può, dal sottrattore.*

17. Teorema 4.° — *Se si diminuisce il diminuendo o si aumenta il diminutore di un numero, senza alterare l'altro termine della sottrazione, il resto viene diminuito dello stesso numero.*

Corollario. — *Per moltiplicare un quoziente per un numero si può moltiplicare il dividendo oppure dividere il divisore, se si può, per quel numero.*

17. Teorema 4.° — *Se si divide il dividendo o si moltiplica il divisore per un numero, senza alterare l'altro termine della divisione, il quoziente viene diviso per lo stesso numero.*

La dimostrazione è correlativa alla precedente.

Corollario. — *Per sottrarre da una differenza un numero si può aggiungere il numero al sottrattore oppure sottrarlo dal sottraendo.* (*)

18. Teorema 5.° — *Se si aumenta o si diminuisce il sottraendo ed il sottrattore di uno stesso numero il resto non si altera.*

Corollario. — *Per dividere un quoziente per un numero si può moltiplicare il divisore oppure dividere il dividendo per quel numero.*

18. Teorema 5.° — *Se si moltiplica o si divide il dividendo ed il divisore per uno stesso numero il quoziente non si altera.*

Sia $12-5=7$, dico che $(12+3)-(5+3)=7$, e che $(12-3)-(5-3)=7$.

Difatti, $12=5+7$, e quindi $12+3=(5+3)+7$ e perciò $(12+3)-(5+3)=7$.

E correlativamente: essendo $12=5+7$ è pure $12-3=(5-3)+7$ e perciò $(12-3)-(5-3)=7$.

Questo teorema si può anche fare dipendere dai due precedenti.

19 Teorema 6.° — *Per sottrarre da un numero una somma si possono sottrarre dal numero successivamente i singoli termini della somma nell'ordine che piace.*

19. Teorema 6° — *Per dividere un numero per un prodotto si può dividere il numero successivamente per i singoli fattori del prodotto nell'ordine che piace.*

(*) Il teorema 2° ed i corollari dei teoremi 3.° e 4.° sono correlativi del teorema del n, 4 della rispettiva colonna.

Dico che $21 - (5 + 6 + 7) = 21 - 5 - 6 - 7$.

Difatti $21 - (5 + 6 + 7)$, per il teorema del n. 18 e per quello del n. 14, $= (21 - 5) - (6 + 7) = (21 - 5 - 6) - 7 = 21 - 5 - 6 - 7$.

20. Teorema 7.° — *Per aggiungere ad un numero una differenza si può aggiungere al numero il sottraendo, e sottrarre dal risultato il sottrattore.*

20. Teorema 7.° — *Per moltiplicare un numero per un quoziente si può moltiplicare il numero per il dividendo, e dividere il risultato per il divisore.*

Difatti $21 + (5 - 3)$ per il teor. 1° del n. $2 = (5 - 3) + 21$ e pel Corollario del n. $16 = (21 + 5) - 3$.

21. Teorema 8.° — *Per sottrarre da un numero una differenza si può aggiungere il sottrattore, e sottrarre dal risultato il sottraendo.* (*)

21. Teorema 8.° — *Per dividere un numero per un quoziente si può moltiplicare il numero pel divisore e dividere il risultato pel dividendo.*

Difatti $21 - (5 - 3)$ per il teor. del n.° $18 = (21 + 3) - (5 - 3 + 3)$ $= (21 + 3) - 5$.

22. Teorema 9.° — *La somma di due o più differenze è eguale ad un'unica differenza che ha per sottraendo la somma dei sottraendi e per sottrattore la somma dei sottrattori.*

22. Teorema 9.° — *Il prodotto di due o più quozienti è eguale ad un unico quoziente che ha per dividendo il prodotto dei dividendi e per divisore il prodotto dei divisori.*

Considerando solo il caso di due differenze, dico che $(8 - 2) + (5 - 3) = (8 + 5) - (2 + 3)$.

Difatti, $(8-2)+(5-3)$ per il teorema del n. $20 = [(8-2)+5] - 3$ e pel corollario del n. $16 = [(8 + 5) - 2] - 3$ e pel corollario del n. $17 = (8 + 5) - (2 + 3)$.

23. Teorema 10.° — *La differenza di due differenze è eguale ad un unica differenza*

23. Teorema 10.° — *Il quoziente di due quozienti è eguale ad un'unico quoziente*

(*) I teoremi 6°, 7° e 8° sono correlativi del teorema del n. 5 della rispettiva colonna.

che ha per sottraendo la somma del sottraendo della prima e del sottrattore della seconda, e per sottrattore la somma degli altri due termini. (*)

che ha per dividendo il prodotto del dividendo del primo per il divisore del secondo, e per divisore il prodotto degli altri due termini.

La dimostrazione è correlativa alla precedente.

I teoremi che seguono sono correlativi rispettivamente ai teoremi dei n. 8, 9, 10, 11 della rispettiva colonna.

24. Teorema 11.° – *La differenza di due multipli della stessa base è un multiplo della stessa base che ha per coefficiente l'eccesso del coefficiente del sottraendo su quello del sottrattore.*

24. Teorema 11.° – *Il quoziente di due potenze della stessa base è una potenza della stessa base che ha per esponente l'eccesso dell'esponente del dividendo su quello del divisore.*

Difatti $(8 \times 5) - (8 \times 3) = (8 + 8 + 8 + 8 + 8) - (8 + 8 + 8)$ e per il teorema del n. 19. $= 8 + 8 = 8 \times (5 - 3)$.

25. Teorema 12.° Viceversa: *Il multiplo di un numero si può scomporre in una differenza di due multipli dello stesso numero, i cui coefficienti abbiano per differenza il coefficiente del multiplo dato.*

Ovvero: *Il prodotto di un numero per una differenza è eguale alla differenza dei prodotti del numero per ciascun termine della differenza.*

25. Teorema 12.° – *La potenza di un numero si può scomporre nel quoziente di due potenze dello stesso numero, i cui esponenti abbiano per differenza l' esponente della potenza data.*

26. Teorema 13.° – *Un multiplo di una differenza è eguale alla differenza dei multipli dei suoi singoli termini.*

26. Teorema 13.° – *La potenza di un quoziente è eguale al quoziente delle potenze dei suoi singoli termini.*

(*) I teoremi 9° e 10° sono correlativi del teorema del n. 6 della stessa colonna.

Ovvero. — *Il prodotto di una differenza per un numero è eguale alla differenza dei prodotti di ciascun termine della differenza pel numero.*

Difatti $(7-5)\times 3 = (7-5)+(7-5)+(7-5)$ e per il teorema del n. 22 $= (7+7+7)-(5+5+5) = 7\times 3 - 5\times 3$.

27. Teorema 14°. Viceversa: *La differenza di due multipli, che hanno lo stesso coefficiente ma basi differenti, è eguale ad un multiplo che ha per base la differenza delle basi e per coefficiente lo stesso coefficiente.*

27. Teorema 14°. Viceversa: *Il quoziente di due potenze, che hanno lo stesso esponente e basi differenti, è eguale ad una potenza che ha per base il quoziente delle basi e per esponente lo stesso esponente.*

Per brevità tralasciamo di trascrivere il correlativo del teorema del n. 12.

Nell' ipotesi della nota del n. 12 i teoremi dei n. 10 e 26, considerati come teoremi della moltiplicazione, avrebbero per correlativi i seguenti nella divisione:

a) *Il quoziente di una somma per un numero è eguale alla somma dei quozienti di ciascun termine della somma pel numero.*

b) *Il quoziente di una differenza per un numero è eguale alla differenza dei quozienti di ciascun termine della differenza per il numero.*

Napoli, Dicembre 1887.

F. Amodeo.

NOTA
SUI POLIEDRI REGOLARI E SEMI-REGOLARI CONVESSI
(Continuazione).

Poliedri semi-regolari od Archimedici.

In questi poliedri le facce devono essere regolari ma non tutte dello stesso numero di lati; gli angoloidi devono essere od eguali o simmetrici; perciò non se ne potranno avere che di due specie, la prima avente per facce due poligoni regolari con diverso numero di lati, la seconda tre. (Se i quattro poligoni regolari più semplici concorressero in ogni vertice la somma degli angoli piani supererebbe già 4 Retti). La prima di queste due specie si suddivide in 3 gruppi, a seconda che le facce si riuniscono intorno ad ogni vertice a 3 a 3, o a 4 a 4, o a 5 a 5; non è possibile che le facce si riuniscano in numero maggiore poichè il caso che si presenterebbe il più semplice di 5 triangoli equilateri e un quadrato intorno a un vertice darebbe già una somma di angoli piani maggiore di 4 Retti. La seconda poi in due gruppi, a seconda che le facce si riuniscono intorno ad ogni vertice a 3 e 3 od a 4 a 4.

Si presenta perciò naturale in questa ricerca della possibilità di poliedri semi-segolari, di combinare in ciascuna specie in tutti i modi possibili i vari poligoni regolari cominciando dai più semplici e di esprimere con una incognita opportunamente scelta i numeri da sostituirsi nella formola di Eulero.

Poliedri semi-regolari della 1ª Specie con facce regolari di due numeri diversi di lati.

I° Gruppo

Le facce concorrono a 3 a 3 nei vertici.

In questo Gruppo è inutile considerare quei poliedri, nei vertici dei quali concorrono tre facce aventi tutte e tre od anche due solamente un numero dispari di lati, poichè in ambedue i casi scegliendo quel poligono che in ogni vertice compare due volte e cercando di disporre le facce intorno ai suoi vertici a partire da un primo, si riconosce percorrendo il contorno che nel vertice di partenza dovrebbero per il numero dispari dei lati concorrere due poligoni dell'altra specie, contro l'ipotesi.

Perciò non avremo a considerare in questo Gruppo i casi, in cui concorrano in un vertice due triangoli equilateri e un quadrato, oppure due triangoli e un pentagono, o due pentagoni e un quadrato, o due pentagoni e un esagono, due pentagoni e un ottagono e due ettagoni e un quadrato; escludendo questi casi avremo in ordine di semplicità da considerare i seguenti.

1.° Caso

Un triangolo e due quadrati intorno a un vertice.

Se x è il numero degli angoli piani appartenenti ai triangoli, $2x$ sarà quello degli angoli appartenenti ai quadrati, quindi $3x$ il numero totale degli angoli piani; $\frac{3x}{2}$ sarà quindi il numero degli spigoli, e poichè ogni terna di angoli piani x determina un triangolo, ed ogni quaderna degli angoli $2x$ determina un quadrato, sarà $\frac{x}{3}$ il numero delle facce triangolari e $\frac{x}{2}$ il numero dei quadrati; sostituendo questi valori nella formola di Eulero, avremo

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} + x = \frac{3x}{2} + 2 \qquad x = 6.$$

Poliedro semi-regolare a 6 facce, 2 triangolari e 4 quadrate – spigoli 9 – vertici 6. Questo poliedro non può essere che un prisma a base triangolare e si può facilmente costruire.

Osservazione Iª — In questo primo Gruppo della prima specie rientrano tutti i prismi retti a basi regolari con facce laterali quadrate; quello considerato nel caso 1° sarebbe il più semplice di essi; ometteremo per ciò in seguito di esaminare questi poliedri che formano una serie illimitata di questo 1º Gruppo.

Osservazione IIª. — Due triangoli equilateri non possono concorrere in un vertice con un esagono regolare o con un poligono di un numero maggiore di lati, poichè la somma di due angoli piani di ogni angoloide sarebbe eguale o minore del terzo.

2º Caso

In un vertice concorrono un triangolo equilatero e due esagoni regolari.

Rappresentando con x il numero degli angoli piani appartenenti ai triangoli, $2x$ sarà quello degli angoli appartenenti agli esagoni, e con una analisi simile a quella tenuta nel caso 1° si avrà

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$x + 2x$	x	$\frac{3x}{2}$	$\frac{x}{3} + \frac{x}{3}$.

$$\frac{2x}{3} + x = \frac{3x}{2} + 2, \qquad x = 12.$$

Poliedro semi-regolare ad 8 facce, 4 triangolari e 4 esagonali — vertici 12 — spigoli 18.

Tetraedro–tronco di Kepler (1). Per il modo di ottenere questo e gli altri poliedri Archimedici dai regolari si veda la — Genetische Geometrie von Heinze. Pag. 155.

3° Caso

In un vertice concorrono un triangolo equilatero e due ottagoni regolari.

Chiamando x il numero dei vertici, x sarà pure il nu-

(1) Kepler. Harmonia mundi.

mero degli angoli piani appartenenti ai triangoli, $2x$ quello degli angoli appartenenti agli ottagoni e si avrà

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$x + 2x$	x	$\frac{3x}{2}$	$\frac{x}{3} + \frac{x}{4}$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + x = \frac{3x}{2} + 2, \qquad x = 24.$$

Poliedro semi-regolare di 14 facce, 8 triangolari e 6 ottagonali – spigoli 36 – vertici 24.

Cubo tronco di Kepler. – Si può ottenere con smussamenti dall'esaedro regolare. (1)

4° Caso.

In un vertice concorrono un triangolo equilatero e due decagoni regolari.

Rappresentando con x il numero dei vertici si ha

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$x + 2x$	x	$\frac{3x}{2}$	$\frac{x}{3} + \frac{x}{5}$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + x = \frac{3x}{2} + 2, \qquad x = 60.$$

Poliedro semi-regolare a 32 facce – 20 triangolari e 12 decagone – vertici 60 – spigoli 90.

Dodecaedro tronco di Kepler. – Si ottiene con smussamenti dal dodecaedro regolare.

Osservazione 1ª – Non è possibile in questo Gruppo l'esistenza di altri poliedri semi-regolari con facce triangolari, poichè proseguendo nell'ordine tenuto, la somma delle facce degli angoloidi sarebbe maggiore di quattro retti.

Osservazione 2.ª – La riunione di due quadrati con un

(1) Collo smussamento si segano tutti gli spigoli di un angoloide e si tralascia la piramide così determinata. Colle sfaldature si fanno sezioni parallele agli spigoli e si tralasciano i cunei così determinati.

pentagono regolare o un esagono ecc., intorno a un vertice, darebbe un poliedro semi-regolare della famiglia dei prismi.

5° Caso

In un vertice concorrono un quadrato e due esagoni.

Rappresentando con x il numero dei vertici, si ha

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$x + 2x$	x	$\frac{3x}{2}$	$\frac{x}{4} + \frac{x}{3}$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + x = \frac{3x}{2} + 2, \quad x = 24.$$

Poliedro semi-regolare a 14 facce, 6 quadrate ed 8 esagonali — vertici 24 — spigoli 36.

Ottaedro-tronco di Kepler. — Si ottiene con smussamenti dall'ottaedro regolare.

Osservazione. — Non sono possibili altri poliedri semi-regolari di questo gruppo a facce quadrate (esclusi i prismi) poichè il caso più semplice dopo i considerati, quello cioè di un quadrato e di due ottagoni intorno a un vertice, darebbe già per somma degli angoli piani di ogni angoloide 4 angoli retti.

6° Caso

In un vertice concorrono due esagoni e un pentagono

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$x + 2x$	x	$\frac{3x}{2}$	$\frac{x}{5} + \frac{x}{3}$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + x = \frac{3x}{2} + 2, \quad x = 60.$$

Poliedro semi-regolare a 32 facce — 12 pentagonali e 20 esagonali — vertici 60 — spigoli 90.

Icosaedro tronco di Kepler. — Si ottiene con smussamenti dall'icosaedro regolare.

Osservazione. — Non sono possibili nel 1° Gruppo altri poliedri semi-regolari, poichè il caso più semplice dopo quelli considerati, quello cioè di un pentagono regolare e due ottagoni regolari intorno a un vertice darebbe in ogni angoloide una somma di angoli piani maggiore di 4 angoli retti; in questo gruppo abbiamo quindi, oltre la classe illimitata dei prismi retti, cinque poliedri Archimedici.

II° Gruppo

Le facce concorrono a quattro a quattro in un vertice

1° Caso

In un vertice concorrono tre triangoli equil. ed un quadrato.

Rappresentando con x il numero dei vertici si ha:

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$x + 3x$	x	$2x$	$\frac{x}{4} + x$

$$\frac{x}{4} + 2x = 2x + 2, \quad x = 8.$$

Poliedro semi-regolare a 10 facce, 2 quadrate ed 8 triangolari – vertici 8 – spigoli 16.

Osservazione. – Questo poliedro è il più semplice fra quelli che Heinze nominò – Antiprismi – che si dedurrebbero dai prismi retti a base regolare, facendo ruotare una delle basi intorno al suo centro e facendo poi corrispondere, ad ogni vertice dell'una, due vertici successivi dell'altra in modo da formare i triangoli laterali. È chiaro che il poliedro trovato deve avere i due quadrati paralleli e quindi appartiene a questa classe; come quella dei prismi semi-regolari, anche questa degli Antiprismi semi-regolari è illimitata; perciò in seguito ci dispensiamo dalla ricerca di poliedri così fatti.

2° Caso

In un vertice concorrono due triang. equil. e due quadrati

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$2x + 2x$	x	$2x$	$\frac{2x}{3} + \frac{x}{2}$

$$\frac{2x}{3}+\frac{x}{2}+x=2x+2\,,\qquad x=12.$$

Poliedro semi-regolare a 14 facce, 6 quadrate, 8 triangolari — vertici 12 — spigoli 24.

Cubottaedro di Kepler. — Si può dedurre con sfaldature dal cubo e dall'ottaedro regolare.

3.° Caso

In un vertice concorrono 3 quadrati e un triangolo equilatero.

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$x+3x$	x	$2x$	$\frac{x}{3}+\frac{3x}{4}$

$$\frac{x}{3}+\frac{3x}{4}+x=2x+2,\qquad x=24.$$

Poliedro semi-regolare a 26 facce, 8 triangolari e 18 quadrate — vertici 24 — spigoli 48.

Rombicubottaedro di Kepler. — Si può ottenerlo con sfaldature dal cubo o dall'ottaedro regolare.

4.° Caso

In un vertice concorrono due triangoli equilateri e due pentagoni regolari.

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$2x+2x$	x	$2x$	$\frac{2x}{3}+\frac{2x}{5}$

$$\frac{3x}{3}+\frac{2x}{5}+x=2x+2,\qquad x=30.$$

Poliedro semi-regolare a 32 facce — 20 triangolari — 12 pentagone — 30 vertici — 60 spigoli.

Icosidodecaedro di Kepler. — Si può dedurre con smussamenti dall'icosaedro o dal dodecaedro regolare. Non sono possibili altri poliedri semi-regolari in questo secondo gruppo (esclusi gli Antiprismi), il caso di un triangolo e 3 pentagoni è impossibile (somma delle facce > 4 Retti) — quello di 3 triangoli con un pentagono od un esagono dà un Antiprisma — quello di due triangoli e due esagoni dà una somma di angoli piani in ogni angoloide = 4 Retti — così pure tutti gli altri casi in cui le facce non siano triangolari. Al II° Gruppo appartengono quindi 3 poliedri Archimedici.

III° Gruppo

Le facce concorrono a 5 a 5 a formare i vertici.

In questo Gruppo non sono possibili che due poliedri semi-regolari, quello avente quattro triangoli equilateri e un quadrato intorno ad ogni vertice, e quello di quattro triangoli equilateri e un pentagono.

1° Caso

Intorno a un vertice 4 triangoli equilateri e un quadrato.

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$x + 4x$	x	$\frac{5x}{2}$	$\frac{x}{4} + \frac{4x}{3}$

$$\frac{x}{4} + \frac{4x}{3} + x = \frac{5x}{2} + 2, \quad x = 24.$$

Poliedro semi-regolare a 38 facce — 6 quadrate — 32 triangolari — vertici 24 — spigoli 60.

Cubo-simo di Kepler.

2° Caso

In un vertice concorrono 4 triangoli equilateri ed un pentagono.

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$4x + x$	x	$\frac{5x}{2}$	$\frac{4x}{3} + \frac{x}{5}$

$$\frac{4x}{3} + \frac{x}{5} + x = \frac{5x}{2} + 2, \quad x = 60.$$

Poliedro semi-regolare a 92 facce — 12 pentagonali — 80 triangolari — vertici 60 — spigoli 150.

Dodecaedro-simo di Kepler.

Nella prima specie sono dunque possibili, oltre ai prismi ed antiprismi semi-regolari, solo 10 poliedri semi-regolari, 5 appartenenti al I° Gruppo, 3 al II° e 2 al III°

II^a Specie

In un vertice concorrono poligoni regolari con 3 numeri diversi di lati.

I° Gruppo

In un vertice concorrono 3 poligoni regolari.

Per l'osservazione già fatta nel I.° Gruppo della I^a Specie sarà inutile tener conto di quei poliedri, nei vertici dei quali concorrono od una sola o due facce regolari con numero dispari di lati, il caso di 3 poligoni regolari con numero dispari di lati non è del pari ammissibile, quindi in ordine di semplicità otteniamo:

1° Caso

Concorrono in un vertice un quadrato, un esagono e un ottagono regolare.

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$3x$	x	$\frac{3x}{2}$	$\frac{x}{4}+\frac{x}{6}+\frac{x}{8}$

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{6}+\frac{x}{8}+x=\frac{3x}{2}+2, \quad x=48.$$

Poliedro semi-regolare a 26 facce, 12 quadrate — 8 esagonali — 6 ottagonali — vertici 48 — spigoli 72.

Cubottaedro-tronco di Kepler. — Si può dedurre con sfaldature dall'ottaedro e dall'esaedro regolare.

2° Caso

In un vertice concorrono un quadr. — un esag. — un decag.

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$3x$	x	$\frac{3x}{2}$	$\frac{x}{4}+\frac{x}{6}+\frac{x}{10}$, $x=120$.

Poliedro semi-regolare con 62 facce — 30 quadrate — 20 esagonali — 12 decagone — vertici 120 — spigoli 180.

Icosidodecaedro-tronco di Kepler. — Si ottiene con sfaldature dall'icosaedro e dal dodecaedro.

In questo 1.° Gruppo della 2^a specie non sono chiaramente possibili altri poliedri semi-regolari.

II.° Gruppo

Le facce concorrono a 4 a 4 a formare un vertice.

In questo Gruppo non possono figurare poliedri nei vertici dei quali concorre un numero dispari di facce con un numero dispari di lati, poichè in tal caso il numero degli angoli piani sarebbe dispari, mentre, dovendo essere doppio del numero degli spigoli esso è di necessità un numero pari; quindi non dovremo considerare i due casi in cui concorrano in un vertice due triangoli equilateri, un quadrato e un pentagono, oppure un triangolo equilatero, un quadrato e due pentagoni — resta quindi un caso solo nel Gruppo.

Caso unico

Intorno a un vertice concorrono un triangolo equilatero, due quadrati, un pentagono regolare.

angoli piani	vertici	spigoli	facce
$4x$	x	$2x$	$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} + \frac{x}{5}$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + x = 2x + 2, \quad x = 60.$$

Poliedro semi-regolare con 62 facce — 20 triangol. — 30 quadrate — 12 pentagone — vertici 60 — spigoli 120.

Rombicosidodecaedro di Kepler. — Si può ottenere con sfaldatura dall'icosaedro e dal dodecaedro. Sono quindi possibili in questa II.ª Specie tre soli poliedri semi-regolari — in totale abbiamo quindi ottenuto oltre le due classi di prismi e di Antiprismi che contengono un numero illimitato di poliedri semi-regolari, 13 soli poliedri semi-regolari (Archimedici) convessi,

Alessandria, 1.° Giugno 1887.

Francesco Panizza.

ESERCIZI PER LA SCUOLA

Sulla media aritmetica.

1. Confrontare la media aritmetica dei quadrati di due numeri col quadrato della loro media aritmetica.
2. Confrontare la media aritmetica delle radici quadrate di due numeri colla radice quadrata della loro media aritmetica.
3. Confrontare la media aritmetica dei cubi di due numeri col cubo della loro media aritmetica.
4. Confrontare la media aritmetica delle radici cubiche di due numeri colla radice cubica della loro media aritmetica.
5. Dimostrare che, per a e b positivi ed m intero e positivo, si ha

$$\frac{a^m + b^m}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^m,$$

e che l'eguaglianza ha luogo nel solo caso di $a = b$. (Porre $a = c + \beta$, $b = c - \beta$, ed applicare il teorema del binomio).
6. Confrontare la media aritmetica delle radici m^{me} di due numeri colla radice m^{ma} della loro media aritmetica.
7. Confrontare la media aritmetica di due numeri positivi colla loro media geometrica.
8. Dimostrare che il logaritmo della media aritmetica di due numeri è maggiore della media aritmetica dei loro logaritmi.
9. Dimostrare che il seno della media aritmetica di due angoli acuti è maggiore della media arimetica dei loro seni.
10. Dimostrare che la tangente della media aritmetica di due angoli acuti è minore della media aritmetica delle loro tangenti.
11. Verificare l'identità:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \tfrac{1}{2}(a + b + c)\ \{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$$

12. Mediante la precedente identità dimostrare che la media

aritmetica di tre numeri positivi non è mai minore della loro media geometrica, e che le due medie sono eguali nel solo caso in cui i tre numeri sieno fra loro eguali. *)

13. Trovare i valori positivi di x, y, z che soddisfanno alle due equazioni

$$x + y + z = 15$$

$$(x + y + z)^3 - 27xyz = 0.$$

14. Provare che, se la somma di tre numeri positivi è eguale a 24, il loro prodotto non può essere maggiore di 64.
15. Quando è massimo il prodotto di tre numeri positivi la somma dei quali è eguale ad un numero dato?
16. Quando è minima la somma di tre numeri positivi il prodotto dei quali è eguale ad un numero dato?
17. Fra tutti i triangoli di dato perimetro trovare quello di massima area.
18. Fra tutti i parallelepipedi retto rettangoli di data superficie totale, trovare quello di massimo volume.
19. Fra tutti i parallepipedi retto rettangoli di dato volume, trovare quello che ha la minima superficie totale.
20. Sieno x e y due numeri positivi tali che la loro somma sia eguale ad un numero dato. Quando è massimo il prodotto x^2y ?
21. Sieno x e y due numeri positivi tali che il prodotto x^2y sia eguale ad un numero dato. Quando è minima la somma di quei due numeri?
22. Fra tutti i cilindri retti inscritti in una data sfera trovare quello di massimo volume.
23. Dato il volume d'un cilindro retto, determinare le sue dimensioni in modo che la sfera ad esso circoscritta abbia la minima superficie.

---

*) Il teorema vale per quanti si vogliano numeri, ed è stato dimostrato da *Cauchy* nel suo *Cours d'Analyse*. Un'altra dimostrazione si trova nella memoria intitolata: *Teoremi elementari sui massimi e minimi*, inserita nell'Annuario del R. Istituto tecnico di Roma, anno 1879.

24. Confrontare la lunghezza del segmento, equidistante dalle basi d'un trapezio e terminato ai lati non paralleli, colla media aritmetica delle due basi.

25. Confrontare l'area d'un trapezio colla media aritmetica delle aree dei due rettangoli di eguale altezza che hanno le basi eguali rispettivamente alla base maggiore ed alla base minore del trapezio.

26. Confrontare l'area della sezione determinata in un tronco di piramide dal piano equidistante dalle basi: 1) colla media aritmetica delle aree delle basi; 2) colla loro media geometrica.

27. Confrontare l'area della sezione, determinata in un segmento sferico a due basi dal piano equidistante dalle basi, colla media aritmetica delle aree delle basi.

28. Confrontare il volume d'un tronco di piramide colla media aritmetica dei due prismi d'eguale altezza aventi le basi eguali rispettivamente alla base maggiore ed alla base minore del tronco.

29. Un prismatoide ha per basi due rettangoli e per facce laterali dei trapezi. Confrontare l'area della sezione, determinata dal piano equidistante dalle basi, colla media aritmetica delle aree delle basi.

30. Confrontare il volume del prismatoide considerato nel precedente esercizio: 1) col volume del prisma di eguale altezza l'area della cui base è la semisomma delle aree dei due rettangoli; 2) col volume di un prisma d'eguale altezza avente per base quel rettangolo le cui dimensioni sono: la media aritmetica di due lati paralleli delle due basi del prismatoide, e la media aritmetica di altri due lati paralleli, a quelli rispettivamente contigui.

D. Besso.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 7, 9, 10 PROPOSTE A PAG. 92.

(7) *È dato il volume complessivo delle pareti laterali e del fondo di un vaso della forma di un parallelepipedo retto rettangolo, e sono date la grossezza uniforme delle pareti e la grossezza uniforme del fondo. Determinare le dimensioni del vaso in modo che sia massima la sua capacità.*

D. BESSO.

Soluzione del Prof. *F. Viaggi.*

Sieno a, b, c le differenze tra le dimensioni di un parallelepipedo retto rettangolo e quelle d'un altro, $abcd$ quella dei loro volumi: a, b, c, d costanti positive. Se ax, by, cz sono le dimensioni del parallelepido minore e quindi $a(x+1)$, $b(y+1)$, $c(z+1)$ quelle del maggiore si ha:

$$(x+1)(y+1)(z+1) - xyz = d \quad \ldots \quad (\alpha)$$

che può scriversi anche così:

$$x(y+1) + y(z+1) + z(x+1) = d - 1,$$

in cui ad x, y, z vanno attribuiti valori positivi.

Ora essendo costante la somma dei tre numeri positivi $x(y+1)$, $y(z+1)$, $z(x+1)$, funzioni di due variabili indipendenti, il loro prodotto, $xyz(x+1)\ (y+1)\ (z+1)$, diventa massimo quando

$$x(y+1) = y(z+1) = z(x+1),$$

cioè quando

$$x = y = z\,;$$

infatti nel penultimo sistema d'equazioni eliminando un'incognita, p. e. z, si ha:

$$(x-y)\ (xy + x + 1) = 0,$$

donde, non potendo il secondo fattore del primo membro annullarsi per valori positivi delle variabili, risulta $x = y$; e così analogamente $y = z$.

In virtù della (α) si ha:

$$xyz(x+1)\ (y+1)\ (z+1) = (xyz)^2 + d(xyz),$$

da cui, ricordando che le lettere rappresentano valori positivi,

$$xyz = \tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{4xyz(x+1)(y+1)(z+1)+d^2}-d\right\},$$

la quale relazione mostra che le due funzioni xyz e $xyz(x+1)(y+1)(z+1)$ assumono lo stato di massimo per gli stessi valori delle variabili, quando cioè $x=y=z$; il che torna quanto dire che il parallelepido minore (e anche quello maggiore che ne differisce per una costante) diventa massimo quando le sue dimensioni sono proporzionali ad a, b, c.

Nel caso particolare del problema proposto, si vede che il vaso ha la massima capacità quando il fondo è un quadrato e il suo lato sta all'altezza del vaso come la doppia grossezza delle pareti alla grossezza del fondo: qui le dimensioni del vaso le intendiamo prese o tutte sulla superficie esterna o tutte sulla interna.

(9) *Se due triangoli diseguali hanno cinque elementi eguali, il rapporto del maggiore dei tre lati al minore è, in ciascuno dei due triangoli, minore di* $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

D. Besso.

Dimostrazione del Prof. *F. Viaggi*.

I cinque elementi eguali non possono essere che i tre angoli e due lati; i due triangoli dunque sono simili. Sieno a, b, c i lati d'un triangolo, che suppongo disposti nell'ordine di grandezza decrescente, sieno a', b', c' gli omologhi nell'altro: suppongo che i lati del primo sieno rispettivamente maggiori degli omologhi. Dovendo due lati dell'uno essere uguali a due dell'altro, bisogna porre $b = a'$, $c = b'$; quindi la proporzione $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ tra lati omologhi dà luogo all'altra $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, donde $b^2 = ac$. E poichè un lato d'un triangolo è maggiore della differenza degli altri due, così

(*) Un'altra dimostrazione è stata inviata dal prof. *A. Matteucci*.

$b^2 > (a-c)^2$ e, per l' eguaglianza precedente, $ac > (a-c)^2$, da cui si desume

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{a}{c} < \frac{3+\sqrt{5}}{2};$$

la prima diseguaglianza è superflua perchè inclusa nell'altra, fatta per ipotesi, $\frac{a}{c} > 1$.

Si possono ottenere le altre diseguaglianze:

$$\frac{c'}{b'} = \frac{b'}{a'} = \frac{c}{b} = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{c}{a}} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

che possono enunciarsi così: in ciascuno dei due triangoli ciascun lato supera il segmento aureo del lato immediatamente maggiore.

Il Prof. *Matteucci* insegna poi a costruire due triangoli che si trovino nella condizione dell' enunciato, operando come appresso. — Poichè in tali triangoli il lato di media grandezza è medio proporzionale fra gli altri due, assume un triangolo ABC, il cui lato medio sia AB, pel quale si abbia BC : BA = BA : AC e preso sopra AB, a partire da A, un segmento AD = AC, conduce una parallela a BC fino ad incontrare AC in E; oppure presa su AC a partire da C, una lunghezza CF = AB, conduce una parallela ad AB fino ad incontrare BC in G. I due triangoli ottenuti ADE, FGC hanno con ABC cinque elementi uguali, senza essere congruenti con esso, e sono gli unici che godano di tale proprietà, com'è facile verificare.

(10) *Esiste un triangolo nel quale il centro del circolo circoscritto e il punto d'incontro delle altezze sieno ambedue situati sulla circonferenza inscritta?* D.: Besso.

Soluzioni del Prof. *F. Viaggi*.

Soluzione geometrica. — Sia ABC un triangolo acutangolo; AA', BB', CC' sieno le sue altezze che s'incontrino in H; M, O i centri del cerchio circoscritto e dell' inscritto; A'', B'', C'' i punti medi dei lati.

Se esiste un triangolo inscritto in una circonferenza M e circoscritto ad un circolo O, un punto qualunque della circonferenza M può esser vertice d'un triangolo pure inscritto in M e circoscritto ad O (conseguenza del teorema a § 14, 4 Plan. del Baltzer).

Ora se il centro M si trova sulla circonferenza O, conducendo il diametro di M tangente ad O e per gli estremi pure le tangenti ad O, le tre tangenti formano un triangolo isoscele rettangolo. Quindi condizione necessaria e sufficiente perchè il centro della circonferenza circoscritta sia sulla circonferenza inscritta, è che si possa costruire un triangolo isoscele rettangolo inscritto nella prima e circoscritto alla seconda.

Suppongo ora anche H situato sulla circonferenza O. Questa viene divisa dai punti di contatto in tre archi: ed H, M o cadono su uno dei tre archi, p. e. su quello che volge la convessità ad A; o su due di essi, p. e. su quelli che volgono la concavità ad A; in ciascuna di queste ipotesi (delle quali, propriamente, si può dimostrare ammissibile solo la seconda) essendo i triangoli rettangoli AHC$'$, AMB$''$ equiangoli, e quindi AH, AM egualmente inclinati sulle tangenti condotte da A ad O, essi segmenti sono eguali. Perciò i triangoli AHC$'$, AMB$''$ sono eguali, ed eguali i lati C$'$H, MB$''$; ma MB$''$ è metà di BH, perchè i triangoli MA$''$B$''$, HAB sono omotetici e A$''$B$''$ metà di AB; dunque C$'$H è metà di BH, donde si deduce che l' angolo HBC$'$, ossia B$'$BA, è la terza parte di un retto, e l'angolo A del triangolo proposto due terzi di retto. Con le stesse considerazioni fatte in ordine inverso si vede che se l' angolo in A è due terzi d'angolo retto i segmenti AH, AM egualmente inclinati sui lati AB, AC sono eguali, e quindi se uno dei due punti H, M si trova sulla circonferenza O anche l'altro si trova su essa.

Ciò premesso: in un triangolo isoscele rettangolo inscrivo la circonferenza O e circoscrivo la circonferenza M; e descrivo il luogo geometrico dei punti da cui O è veduta sotto l'angolo eguale a due terzi di retto, il qual luogo, come è agevole provare, incontra la circonferenza M; assumendo una delle intersezioni come vertice d' un triangolo inscritto in M e circoscritto ad O, si ottiene un triangolo che soddisfa alle condizioni del problema; e ogni triangolo che risponde al problema si può ottenere con costruzione analoga.

Soluzione trigonometrica. – Sia ABC il triangolo che risponde al problema. Il cerchio circoscritto ad ABC, quello inscritto in esso e quello inscritto nel triangolo che ha i vertici nei piedi delle altezze di ABC, abbiano rispettivamente i centri in M, O, H e per raggi R, r, ρ: H è anche il punto d'incontro delle altezze.

In generale si ha: $OM^2 = R^2 - 2Rr$, $OH^2 = 2r^2 - 2R\rho$ (cf. Baltzer Plan. § 14, 4 e Trig. § 4, 14), e, dovendo essere per ipotesi $OM = OH = r$, si hanno le due equazioni

$$r^2 = R^2 - 2\,Rr\,, \qquad r^2 = 2R\rho\,,$$

dalle quali si deducono le altre:

$$\frac{r}{R} = \sqrt{2} - 1, \quad \frac{\rho}{R} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2};$$

e poichè in un triangolo qualunque si hanno le relazioni

$$r = 4R\ \mathrm{sen}\frac{A}{2}\,.\ \mathrm{sen}\frac{B}{2}\,.\ \mathrm{sen}\frac{C}{2}\,,\ \ \rho = 2R\cos A\,.\cos B\,.\cos C$$

(cf. Baltz. Trig. §4, 13 e 14), così si hanno per gli angoli del triangolo che si considera le due equazioni:

$$\mathrm{sen}\frac{A}{2}\,.\ \mathrm{sen}\frac{B}{2}\,.\ \mathrm{sen}\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{4} \qquad (1$$

$$\cos A\,.\cos B\,.\cos C = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4}, \qquad (2$$

Dall' identità

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\mathrm{sen}\frac{A}{2}\,\mathrm{sen}\frac{B}{2}\,\mathrm{sen}\frac{C}{2}$$

vera per gli angoli d' un triangolo qualunque, combinata con (1), si ricava

$$\cos A + \cos B + \cos C = \sqrt{2}. \qquad 3)$$

In (1) esprimendo i seni in funzione dei coseni degli angoli doppi, e combinando il risultato con (2), (3) si ottiene:

$$\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A = \frac{5 - 2\sqrt{2}}{4}. \qquad 4)$$

Le relazioni (3) (4) (2) mostrano che $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ sono le radici dell'equazione cubica

$$x^3 - \sqrt{2}\, x^2 + \frac{5 - 2\sqrt{2}}{4}\, x - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4} = 0,$$

epperciò hanno i valori:

$$\tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{4}\left\{2\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{12\sqrt{2} - 15}\right\}.$$

Uno degli angoli del triangolo è quindi di 60° e gli altri, a meno di $1''$, sono di $36^\circ\, 5'\, 39''$, $83^\circ\, 54'\, 21''$.

QUISTIONI PROPOSTE

11. — Dimostrare che, per n intero e positivo, si ha

$$\frac{}{+1} - \frac{n}{(n+1)(n+2)} + \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \ldots + (-1)^n \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{(n+1)(n+2)\ldots(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}$$

12. — Dimostrare che la potenza n^a della media aritmetica delle radici n^{me} di più numeri positivi diminuisce al crescere di n.

D. Besso.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des Mathématiques publié par *Gustav Eneström.* Stockholm, 1888; N. 2.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche pubblicato da *B. Boncompagni.* Tomo XX. Ottobre e Novembre 1887. Roma.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane pubblicato per cura del professore *G. Battaglini.* Vol. XXVI. Maggio-Giugno, Napoli, 1888.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy,* Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe. 3e série. Douzième année. N. 7, 8, Juillet, Août. Paris, 1888.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par *H. Vuibert*. 12ᵉ Année. N. 19, 20. Paris. M. Nony et C.ie, 17 Rue des Écoles, 1888.

Le Scuole Secondarie eco dell'Associazione nazionale fra gl'insegnanti delle scuole secondarie. Anno V. N. 21. Milano 1888.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome huitième: Juillet, Août-Septembre 1888.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). — Serie 2.ª Vol. 2. — Giugno 1888.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. — Tomo II. Fascicolo 4.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XX. N. 11 e 12. Firenze, 1888.

Agamennone (G.) e Bonetti (F.) — Sopra un nuovo modello di barometro normale. Nota I. (Rend. R. Acc. Lincei, 1888).

Giuliani (G.) — Alcune osservazioni sopra le funzioni sferiche di ordine superiore al secondo e sopra altre funzioni che se ne possono derivare (Giorn. di Batt., Napoli 1888).

Lozzi (G.) — Nota sull'art. 32 del Regolamento 23 ott. 1884 per le Scuole classiche. Modica, 1888.

Magrini (F). — Ricerche intorno alla magnetizzazione del ferro. Nota preliminare. (Nuovo Cimento. Vol. XXIII, 1888).

Marcolongo (R.) — Sull'analisi indeterminata di 2° grado. Nota II (Gior. di Battaglini, Vol. XXVI) — Sulla rappresentazione conforme della Pseudosfera e sue applicazioni (Rend. R. Acca. Napoli, 1888).

Millosevich (E.) — Orbita della cometa 1879 IV (Hartwig e 1879). (Mem. Soc. Spettroscopisti, 1888). — Benedetto IX e l'eclisse di Sole del 29 giugno 1033. (Rend. R. Acc. Lincei, 1888). — Intorno ad alcuni problemi geografici e cronologici collegati coi movimenti della terra (Boll. Società geografica, 1888).

Mollini (M.) — Formole sulle rendite periodiche e sulle annualità in progressione. Tipografia Azzoguidi, Bologna. — Prezzo: L. 1.

Murer (V.) — Generazione della superficie d'ordine n con retta $(n-2)$-*pla* (Rend. Circ. mat. Palermo, Tomo II).

Padova (E.) — Sull'uso delle coordinate curvilinee in alcuni problemi della teoria matematica della elasticità (Padova, 1888).

Panizza (F.) — Nota su alcune somme di potenze e di prodotti (Gior. della Società di Lettura e Convers. scientifiche. Genova, 1888).

Pincherle (S.) — Sur la nature arithmétique des coefficients des séries intégrales des équations différentielles linéaires (Journal für Mathematik, Bd. 103).

Riccardi (P.) — Ancora del trattato *De quadratura circuli* di G. B. della Porta (Bull. di Bibl. e Storia delle Scien. mat. e fisiche, tomo XX).

Ricordi (E.) — I movimenti infinitesimi nella generale determinazione di misura proiettiva (Viterbo, 1882). — Una generalizzazione del teorema dei nove punti di Feuerbach nella geometria non-Euclidea (Reggio-Emilia, 1886).

Righi (A.) — Sulla forza elettromotrice del selenio (Padova, 1888).

Torelli (G.) — Alcune formole relative agli integrali ellittici (Annali R. Ist. tecnico Napoli, 1887). — Su qualche proprietà delle curve piane del terz'ordine fornite di un punto doppio (id. id, 1888).

Errata-Corrige. — A pag. 88 nell'ultima linea in luogo di PAA'..., PDD',..., PEE'..; leggasi PAA'...., PDD'..; PBB'..., PEE'..; a pag. 91 sestultima linea in luogo di — dunque (I), (III) — leggasi — dunque (I), (II).

CONDIZIONI DI DIVISIBILITÀ D'UN POLINOMIO PER UN BINOMIO DELLA FORMA $x^r - a^r$

1.

Nella mia Nota « *su alcuni teoremi relativi alla divisione algebrica* » pubblicata in questo Periodico (*), ho dimostrato come, senza eseguire direttamente la divisione per D d'un polinomio

$$P = P_1 P_2 \ldots . P_m + a_n ,$$

si giunge a stabilire la formula:

$$P = D(K+q) + (R + a_n) \quad (^{**})$$

È facile vedere che la condizione allora fissata, di essere a_n indipendente dalla x, può cangiarsi, senza nulla alterare nella dimostrazione, in un'altra più generale, cioè in quella d'essere un polinomio di grado inferiore a D. Scriveremo dunque:

$$P = D\,(K+q) + (R + p_n),$$

dove, all'infuori di p_n, tutte le altre lettere conservano il significato già loro attribuito.

Riprendiamo a considerare il caso particolare di $m = 2$, e siano ora:

$$P_1 = a_0 x^{n-r} + a_1 x^{n-r-1} + \ldots\ldots + a_{n-r-1}\, x + a_{n-r}, \quad P_2 = x^r$$

$$p_n = a_{n-r+1}\, x^{r-1} + a_{n-r+2}\, x^{r-2} + \ldots . + a_{n-1}\, x + a_n .$$

Avremo

$$P = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}\, x + a_n = P_1 P_2 + p_n = P_1 x^r + p_n ;$$

od anche, per tener presente il grado dei polinomi:

$$P^{(n)} = P^{(n-r)}\, x^r + p_n .$$

(*) Anno II. Fascicolo VI.

(**) I valori di K, q, R sono definiti dalle relazioni:

$$P_s = DQ_s + R_s, \quad P = (DQ_1 + R_1)\,(DQ_2 + R_2) \ldots . (DQ_m + R_m) + a_n$$
$$= DK + R_1 R_2 \ldots . R_m + a_n , \quad R_1 R_2 \ldots . R_m = Dq + R.$$

Si prenda per divisore

$$D = x^r - a^r.$$

Indicando d'or innanzi con Q_s e R_s il quoziente ed il resto che provengono dalla divisione per D del polinomio $P^{(s)}$, l'applicazione del metodo generale al nostro caso darà:

$$P^{(n-r)} = (x^r - a^r)\, Q_{n-r} + R_{n-r}$$

$$x^r = (x^r - a^r) + a^r$$

e perciò dopo aver sostituito e fatte tutte le riduzioni:

$$P^{(n)} = (x^r - a^r)\left[Q_{n-r}\, x^r + R_{n-r}\right] + \left[R_{n-r}\, a^r + p_n\right].$$

Dunque abbiamo

$$Q_n = Q_{n-r}\, x^r + R_{n-r}$$

$$R_n = R_{n-r}\, a^r + p_n$$

e si vede intanto, — come estensione della proprietà già nota, quando avevasi $D = x - a$, — che R_n è formato con R_{n-r} ed a^r nella stessa guisa che $P^{(n)}$ è composto di $P^{(n-r)}$ e di x^r.

Sia

$$n = kr + h \qquad (h < r);$$

il quoziente Q_n sarà del grado $n - r = (k-1)r + h$ e potrà calcolarsi in funzione delle R_{n-sr} $(s = 1, 2, \ldots (k-1))$. Infatti avendosi:

$$(1)\quad \begin{cases} Q_{n-tr} = Q_{n-(t+1)r}\, x^r + R_{n-(t+1)r} & (t = 0, 1, 2, \ldots (k-2)) \\ Q_{n-(k-1)r} = a_0 x^h + a_1 x^{h-1} + \ldots a_{h-1}\, x + a_h \end{cases}$$

se ne dedurrà moltiplicandole ordinatamente, — ad incominciare dalla seconda —, per $x^r, x^{2r}, \ldots x^{(k-1)r}$ e poi sommando e riducendo:

$$(2)\qquad Q_n = a_0 x^{(k-1)r+h} + a_1 x^{(k-1)r+h-1} + \ldots$$
$$+ a_h x^{(k-1)r} + R_{n-(k-1)r}\, x^{(k-2)r} + R_{n-(k-2)r}\, x^{(k-3)r} + \ldots +$$
$$+ R_{n-2r}\, x^r + R_{n-r}.$$

Analogamente per il calcolo di R_n si trova:

$$(3)\begin{cases} R_{n-tr} = R_{n-(t+1)r}\, a^r + p_{n-tr} \quad (t = 0,\ 1,\ 2, \ldots (k-2)) \\ R_{n-(k-1)r} = a_{h+1}\, x^{r-1} + a_{h+2}\, x^{r-2} + \ldots\ldots + a_{r-1}\, x^{h+1} \\ \qquad + (a_0 a^r + a_r)\, x^h + (a_1 a^r + a_{r+1})\, x^{h-1} + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + (a_{h-1}\, a^r + a_{r+h-1})\, x + (a_h a^r + a_{r+h}) \quad (*) \end{cases}$$

e da queste, moltiplicando la 2ª, 3ª, ... k^{ma}, per a^r, a^{2r}, ... $a^{(k-1)r}$, sommando e facendo le riduzioni:

$$R_n = [a_{h+1}\, x^{r-1} + \ldots\ldots + (a_h a^r + a_{r+h})]\, a^{(k-1)r}$$
$$+ p_{n-(k-2)r}\, a^{(k-2)r} + p_{n-(k-3)r}\, a^{(k-3)r} + \ldots\ldots + p_{n-r}\, a^r + p_n.$$

Ora si osservi che, per definizione, si ha:

$$p_{n-tr} = a_{n-(t+1)r+1}\, x^{r-1} + a_{n-(t+1)r+2}\, x^{r-2} + \ldots\ldots + a_{n-tr-1}\, x + a_{n-tr}$$

ove t ha i valori 0, 1, 2, ... $(k-2)$; per cui intanto:

$$p_{n-(k-2)r}\, a^{(k-2)r} + \ldots\ldots + p_{n-r}\, a^r + p_n =$$
$$(a_{n-(k-1)r+1}\, a^{(k-2)r} + a_{n-(k-2)r+1} a^{(k-3)r} + \ldots + a_{n-2r+1} a^r + a_{n-r+1}) x^{r-1}$$
$$+ (a_{n-(k-1)r+2}\, a^{(k-2)r} + a_{n-(k-2)r+2} a^{(k-3)r} + \ldots + a_{n-2r+2} a^r + a_{n-r+2}) x^{r-2}$$
$$+ \cdot\ \cdot$$
$$+ (a_{n-(k-2)r-1} a^{(k-2)r} + a_{n-(k-3)r-1} a^{(k-3)r} + \ldots + a_{n-r-1} a^r + a_{n-1}) x$$
$$+ (a_{n-(k-2)r}\, a^{(k-2)r} + a_{n-(k-3)r}\, a^{(k-3)r} + \ldots\ldots + a_{n-r}\, a^r + a_n).$$

Per avere il valore di R_n non manca altro che aggiungere convenientemente a questa somma i termini che provengono da:

$$[a_{h+1} x^{r-1} + \ldots\ldots + (a_h a^r + a_{r+h})]\, a^{(k-1)r}$$

e, – avendo riguardo alla relazione $h = n - kr$, ed alle altre che da questa dipendono per $h+1$, $h+2$, $h-1$, $r+h-1$, $r-h$, – si vede subito che si troverà:

$$(4)\ R_n = (a_{n-kr+1} a^{(k-1)r} + a_{n-(k-1)r+1} a^{(k-2)r} + \ldots\ldots + a_{n-2r+1}\, a^r + a_{n-r+1})\, x^{r-1}$$
$$+ (a_{n-kr+2} a^{(k-1)r} + a_{n-(k-1)r+2} a^{(k-2)r} + \ldots\ldots + a_{n-2r+2} a^r + a_{n-r+2}) x^{r-2}$$
$$+ \cdot\ \cdot$$
$$+ (a_{n-kr-1}\, a^{kr} + a_{n-(k-1)r-1}\, a^{(k-1)r} + \ldots\ldots + a_{n-r-1}\, a^r + a_{n-1}) x$$
$$+ (a_{n-kr}\, a^{kr} + a_{n-(k-1)r}\, a^{(k-1)r} + \ldots\ldots + a_{n-r}\, a^r + a_n).$$

(*) Questa espressione di $R_{n-(k-1)r}$ si ottiene dalla relazione:
$$R_{n-(k-1)r} = P^{[n-(k-1)r]} - (x^r - a^r)\, Q_{n-(k-1)r}$$
sostituendo a $Q_{n-(k-1)r}$ il suo valore valore dato dall'ultima delle (1).

L'analisi di questa formula mostra con quanta facilità potrà essere stabilita in ogni caso particolare. Così se, ad esempio, si ha $n = 17$, $r = 5$, vale a dire se trattasi del resto della divisione per $x^5 - a^5$ del polinomio:

$$a_0x^{17} + a_1x^{16} + a_2x^{15} + \dots + a_{15}x^2 + a_{16}x + a_{17}$$

si porrà dapprima questo polinomio sotto la forma:

$$(a_{17} + a_{12}x^5 + a_7 x^{10} + a_2x^{15}) + x(a_{16} + a_{11} x^5 + a_6x^{10} + a_1x^{15}) \\ + x^2(a_{15} + a_{10}x^5 + a_5x^{10} + a_0x^{15}) + \\ + x^3(a_{14} + a_9x^5 + a_4x^{10}) + x^4 (a_{13} + a_8x^5 + a_3x^{10}),$$

e la sostituzione di a^5 ad x^5 o, ciò ch'è lo stesso, di a ad x nei polinomi in parentesi darà immediatamente:

$$R_{17} = (a_3a^{10} + a_8a^5 + a_{13})\, x^4 + (a_4a^{10} + a_9a^5 + a_{14})x^3 \\ + (a_0a^{15} + a_5a^{10} + a_{10}a^5 + a_{15})x^2 + \\ + (a_1a^{15} + a_6a^{10} + a_{11}a^5 + a_{16})\, x + (a_2a^{15} + a_7a^{10} + a_{12}a^5 + a_{17}).$$

È altresì evidente che le formule (3) servono pure al calcolo dei valori di R_{n-r}, R_{n-2r} .... $R_{n-(k-1)r}$ che compariscono nell'espressione data dalla (2) per il quoziente Q_n, del quale si potranno in tal modo rendere indipendenti dalla x ed espressi per le a_s e a^r tutti i coefficienti.

Per l'esempio scelto di $n = 17$, $r = 5$, la (2) dà subito

$$Q_{17} = a_0x^{12} + a_1x^{11} + a_2x^{10} + R_7x^5 + R_{12},$$

e poichè

$$R_7 = a_3x^4 + a_4x^3 + (a_0a^5 + a_5)\, x^2 + (a_1a^5 + a_6)\, x + (a_2a^5 + a_7)$$
$$R_{12} = (a_3a^5 + a_8)\, x^4 + (a_4a^5 + a_9)\, x^3 + (a_0a^{10} + a_5a^5 + a_{10})\, x^2 \\ + (a_1a^{10} + a_6a^5 + a_{11})x + (a_2a^{10} + a_7a^5 + a_{12})$$

avremo, sostituendo:

$$Q_{17} = a_0x^{12} + a_1x^{11} + a_2x^{10} + a_3x^9 + a_4x^8 + (a_0a^5 + a_5)x^7 \\ + (a_1a^5 + a_6)\, x^6 + (a_2a^5 + a_7)x^5 + \\ + (a_3a^5+a_8)x^4+(a_4a^5+a_9)x^3+(a_0a^{10}+a_5a^5+a_{10})x^2+(a_1a^{10}+a_6a^5+a_{11})x+ \\ + (a_2a^{10} + a_7a^5+a_{12}).$$

In generale il quoziente è dato da:

$$
\begin{aligned}
Q_n = & a_0 x^{n-r} + a_1 x^{n-r-1} + \ldots\ldots + a_{r-1} x^{n-2r+1} + \\
& + (a_0 a^r + a_r) x^{n-2r} + (a_1 a^r + a_{r+1}) x^{n-2r-1} + \ldots + (a_{r-1} a^r + a_{2r-1}) x^{n-3r+1} + \\
& + (a_0 a^{2r} + a_r a^r + a_{2r}) x^{n-3r} + \ldots + (a_{r-1} a^{2r} + a_{2r-1} a^r + a_{3r-1}) x^{n-4r+1} + \\
& + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + \\
& + (a_0 a^{(k-2)r} + \ldots + a_{(k-2)r}) x^{n-(k-1)r} + \ldots + (a_{r-1} a^{(k-2)r} + \ldots + a_{(k-1)r-1}) x^{n-kr+1} + \\
& + (a_0 a^{(k-1)r} + \ldots + a_{(k-1)r}) x^h + \ldots + (a_h a^{(k-1)r} + \ldots + a_{(k-1)r+h})
\end{aligned}
$$

dove in una linea qualunque t^{ma}, che è della forma:

$$
\begin{aligned}
& (a_0 a^{(t-1)r} + a_r a^{(t-2)r} + \ldots + a_{(t-1)r}) x^{n-tr} + \\
& + (a_1 a^{(t-1)r} + a_{r+1} a^{(t+2)r} + \ldots + a_{(t-1)r+1}) x^{n-tr-1} + \\
& + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + \\
& + (a_{r-1} a^{(t-1)r} + a_{2r-1} a^{(t-2)r} + \ldots + a_{tr-1}) x^{n-(t+1)r+1}
\end{aligned}
$$

si trovano raggruppati r termini e solo nell'ultima ve ne sono $h+1$, a meno che non si abbia $h = r - 1$.

2.

Quando per determinati valori di a, tutti i coefficienti di R_n si annullano, si trovano soddisfatte le condizioni necessarie e sufficienti affinchè il polinomio

$$
P^{(n)} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n
$$

sia divisibile per $x^r - a^r$.

Si comprende dunque come possa essere conveniente la considerazione del sistema di polinomi:

$$
(5) \quad \left\{
\begin{array}{l}
a_{n-kr+1} x^{(k-1)r} + a_{n-(k-1)r+1} x^{(k-2)r} + \ldots + a_{n-2r+1} x^r + a_{n-r+1} \\
a_{n-kr+2} x^{(k-1)r} + a_{n-(k-1)r+2} x^{(k-2)r} + \ldots + a_{n-2r+2} x^r + a_{n-r+2} \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
a_{n-kr-1} x^{kr} + a_{n-(k-1)r-1} x^{(k-1)r} + \ldots + a_{n-r-1} x^r + a_{n-1} \\
a_{n-kr} x^{kr} + a_{n-(k-1)r} x^{(k-1)r} + \ldots + a_{n-r} x^r + a_n
\end{array}
\right.
$$

in questioni relative alla riduttibilità del polinomio $P^{(n)}$ o, in particolare, all'abbassamento del grado dell'equazione $P^{(n)} = 0$.

Notiamo di passaggio che quando i polinomi (5) sono tutti identicamente nulli per $x = a$, tale sarà anche la loro somma ottenuta dopo averli moltiplicati ordinatamente per a^{r-1}, a^{r-2}, ..., a^1, a^0; e questa somma, che combina con ciò che diviene R_n per $x = a$, altro non è che il resto della divisione di $P^{(n)}$ per $x - a$. Di singolare semplicità è poi il risultato della sostituzione di ± 1 ad x nei polinomi (5), perchè si riducono a somme algebriche dei coefficienti. Così nel citato esempio, le condizioni necessarie e sufficienti affinchè il polinomio $P^{(17)}$ sia divisibile per $x^5 - 1$ sono date da:

$$\begin{aligned} a_3 + a_8 + a_{13} &= 0 \\ a_4 + a_9 + a_{14} &= 0 \\ a_0 + a_5 + a_{10} + a_{15} &= 0 \\ a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16} &= 0 \\ a_2 + a_7 + a_{12} + a_{17} &= 0 \end{aligned}$$

che potranno in facil modo essere dedotte anche dal quadro:

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_5 & a_{10} & a_{15} \\ a_1 & a_6 & a_{11} & a_{16} \\ a_2 & a_7 & a_{12} & a_{17} \\ a_3 & a_8 & a_{13} & . \\ a_4 & a_9 & a_{14} & . \end{array}$$

supposto scritto per colonne. È d'altronde chiaro che il coefficiente a_0 sarà sempre il primo in uno dei polinomi (5) e precisamente nell'$(h+1)^{mo}$, contando dal basso, il quale è della forma

$$a_{n-kr-h}\, x^{kr} + a_{n-(k-1)r-h}\, x^{(k-1)r} + \ldots.. + a_{n-r-h}\, x^r + a_{n-h}$$

ossia:

$$a_0 x^{kr} + a_r x^{(k-1)r} + \ldots.. + a_{(k-1)r}\, x^r + a_{kr}\,.$$

Il sistema dei polinomi (5) contiene in tutto $n+1$ termini, e generalmente se ne trovano k in ciascuno dei primi $r-(h+1)$ e $k+1$ in ognuno degli $h+1$ polinomi rimanenti. V'è però un caso in cui *tutti* gli r polinomi contengono $k+1$ termini ed ha luogo quando sussiste la relazione:

$$(k+1)r = n+1$$

dalla quale si rileva

$$r = n - kr + 1 = h + 1.$$

Vedesi allora che il termine iniziale $a_{n-kr+1}\, x^{(k-1)r}$ del primo dei polinomi (5) dovrà essere il secondo di quello che incomincia per a_0; e che perciò il sistema (5) sarà immediatamente deducibile del segnente quadro:

$$\begin{array}{cccccc}
a_0 & a_r & a_{2r} & . & . & a_{kr} \\
a_1 & a_{r+1} & a_{2r+1} & . & . & a_{kr+1} \\
a_2 & a_{r+2} & a_{2r+2} & . & . & a_{kr+2} \\
. & . & . & . & . & . \\
a_{r-1} & a_{2r-1} & a_{3r-1} & . & . & a_n ;
\end{array}$$

Un caso particolare, che si collega coll'esempio precedente, si ha prendendo $r = 5$, $n = 19$.

3.

I divisori interi della forma $x^r - a^r$ appartenenti al polinomio $P^{(n)}$ ridotto ad avere il coefficiente del primo termine uguale all'unità ed interi tutti gli altri, si possono determinare con una regola del tutto analoga a quella di *Bezout*. Stabilendo, difatti, l' uguaglianza:

$$\begin{gathered}
x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{r-1} x^{n-r+1} + a_r x^{n-r} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = \\
(x^r - a^r)\,(x^{n-r} + b_1 x^{n-r-1} + b_2 x^{n-r-2} + \ldots \\
+ b_{r-1}\, x^{n-2r+1} + b_r x^{n-2r} + \ldots + b_{n-r-1}\, x + b_{n-r})
\end{gathered}$$

si trovano le relazioni:

$$(6)\;\left\{\begin{array}{l}
a_1 = b_1\,,\; a_2 = b_2\,, \;\ldots\ldots\; a_{r-1} = b_{r-1}\,, \\
a_r = b_r - a^r,\, a_{r+1} = b_{r+1} - b_1 a^r, \ldots, a_{n-r} = b_{n-r} - b_{n-2r}\, a^r, \\
a_{n-r+1} = -b_{n-2r+1} a^r, a_{n-r+2} = -b_{n-2r+2} a^r, \ldots\ldots a_n = -b_{n-r}\, a^r
\end{array}\right.$$

che servono al calcolo delle b. Dalle ultime r delle (6) si rileva che a^r dev'essere un divisore di tutti gli r coefficienti

$$a_{n-r+1}\,,\; a_{n-r+2}\,,\; \ldots\; a_n\,;$$

donde una limitazione ai numeri interi da provare. Così è possibile che il polinomio

$$P^{(7)} = x^7 - 2x^6 - 7x^5 - 13x^4 + 13x^3 + 56x^2 + 40x + 24$$

ammetta il divisore $x^3 - 2^3$, perchè i tre ultimi coefficienti decomposti in fattori primi sono

$$56 = 7.2^3, \quad 40 = 5.2^3, \quad 24 = 3.2^3.$$

E poichè anche tutte le altre condizioni imposte dalle (6) si trovano soddisfatte, abbiamo effettivamente:

$$P^{(7)} = (x^3 - 8)\ (x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 5x - 3).$$

Osserviamo inoltre che fra i divisori degli ultimi r coefficienti sono da escludere quelli che non dànno un quoziente intero per resultato della divisione $\frac{f(\pm 1)}{a^r \mp 1}$ (dove si suppone $f(x) = P^{(n)}$), come rilevasi dall'eguaglianza identica

$$(7) \qquad f(x) = (x^r - a^r)\,\varphi(x)$$

che deve aver luogo quando $x^r - a^r$ è un divisore di $f(x)$. In questa stessa ipotesi la (7) mostra in generale, che il numero $f(m)$, qualunque sia il valore intero di m, dev'essere divisibile per $m^r - a^r$; vale a dire che deve aversi — con riguardo al segno di $\varphi(m)$ il quale può essere positivo o negativo —,

$$(8) \qquad m^r - a^r = \pm d$$

indicando con d uno qualunque dei divisori positivi di $f(m)$. Ma dalla (8) si trae

$$a^r = m^r \mp d$$

e perciò costruendo i numeri della forma $m^r \mp d$ col dare ad m successivamente valori interi scelti ad arbitrio, i soli numeri a^r comuni a queste serie potranno dar luogo ai divisori $x^r - a^r$. Anche questa regola è un'estensione di quella data da *Newton* per la ricerca dei divisori razionali della forma $x - a$.

Altre conseguenze particolari, qui tralasciate per brevità, potrà il lettore agevolmente dedurre dalle proprietà generali sovraesposte.

Roma, Luglio 1888.

Elcia Sadun.

SULL'APPROSSIMAZIONE DELL'ORDINARIA INTERPOLAZIONE NELLE TAVOLE DI LOGARITMI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE

II.

7. Veniamo ora a risolvere la questione propostaci. Perciò dimostriamo la formula seguente

$$\mathrm{sen}(a+h) - \mathrm{sen}a = h\cos(a+\theta h),$$

ssendo $0<\theta<1$, ossia, essendo $a+\theta h$ un valore compreso ra a e $(a+h)$.

Supponiamo dapprima h positivo. Si ha

$$\mathrm{sen}(a+h) - \mathrm{sen}a = 2\mathrm{sen}\frac{h}{2}\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)$$

, poichè è

$$\mathrm{sen}\frac{h}{2} < \frac{h}{2}, \quad \cos\left(a+\frac{h}{2}\right) < \cos a,$$

arà

$$\frac{\mathrm{sen}(a+h) - \mathrm{sen}a}{h} < \cos a,$$

osì, essendo

$$\frac{\mathrm{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} > \cos\frac{h}{2}$$

arà

$$\frac{\mathrm{sen}(a+h) - \mathrm{sen}a}{h} > \cos\frac{h}{2}\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)$$

, a fortiori,

$$\frac{\mathrm{sen}(a+h) - \mathrm{sen}a}{h} > \cos(a+h)$$

l rapporto

$$\frac{\mathrm{sen}(a+h) - \mathrm{sen}a}{h}$$

rappresenta quindi il valore del coseno di un angolo $a+\theta h$ compreso fra a e $a+h$.

Se h è negativo ed h_1 è il suo valore assoluto, avremo, posto $a-h_1=b$

$$\frac{\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}(a-h_1)}{h_1}=\frac{\operatorname{sen}(b+h_1)-\operatorname{sen}b}{h_1}$$

ma, per quanto si è detto prima

$$\operatorname{sen}(b+h_1)-\operatorname{sen}b=h_1\cos(b+\theta h_1)\ ,$$

con $0<\theta<1$, o

$$\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}(a-h_1)=h_1\cos\left[a-(1-\theta)\,h_1\right]$$

e posto $1-0=\theta_1$ sarà

$$\operatorname{sen}(a-h_1)-\operatorname{sen}a=-h_1\cos(a-\theta_1 h_1)$$

con $1>\theta_1>0$.

8. Dati i logaritmi di $\operatorname{sen}a$ e $\operatorname{sen}(a+d)$ $\left(a<\frac{\pi}{2}\right)$, se il logaritmo del seno dell'angolo $(a+h)$ compreso fra a e $a+d$ viene calcolato colla proporzione

$$\frac{\log\operatorname{sen}(a+h)-\log\operatorname{sen}a}{\log\operatorname{sen}(a+d)-\log\operatorname{sen}a}=\frac{h}{d}$$

vale a dire si calcola $\log\operatorname{sen}(a+h)$ colla formula

$$\log\operatorname{sen}(a+h)=\log\operatorname{sen}a+\frac{h}{d}\left\{\log\operatorname{sen}(a+d)-\log\operatorname{sen}a\right\}\ ,$$

si commette un errore, il quale si compone di due parti. Una di queste E_1 è dovuta agli errori di cui sono affetti i logaritmi di $\operatorname{sen}a$ e $\operatorname{sen}(a+d)$, l'altra parte è la differenza

$$E_2=\log\operatorname{sen}(a+h)-\log\operatorname{sen}a-\frac{h}{d}\left[\log\operatorname{sen}(a+d)-\log\operatorname{sen}a\right]$$

Se $\log\operatorname{sen}(a+d)$ e $\log\operatorname{sen}a$ sono approssimati a meno di g l'errore E_1 nel calcolo di

$$\log\operatorname{sen}(a+h)=\left(1-\frac{h}{d}\right)\log\operatorname{sen}a+\frac{h}{d}\log\operatorname{sen}(a+d)$$

sarà minore di

$$\frac{h}{d}g + \left(1 - \frac{h}{d}\right)g$$

ossia minore di g.

Per determinare una limitazione di E_2, potremo scrivere tale differenza sotto la forma

$$E_2 = \log \operatorname{sen}(a+h) - \log \operatorname{sen} a -$$

$$- \frac{h\cos(a+\theta_1 h)}{d\cos(a+\theta_2 d)} \{\log \operatorname{sen}(a+d) - \log \operatorname{sen} a\} +$$

$$+ \frac{h}{d}\left\{\frac{\cos(a+\theta_1 h)}{\cos(a+\theta_2 d)} - 1\right\} \{\log \operatorname{sen}(a+d) - \log \operatorname{sen} a\}$$

ove $h\cos(a+\theta_1 h)$ e $d\cos(a+\theta_2 d)$, stanno ad indicare gli aumenti subìti dall'argomento $\operatorname{sen} a$ dei logaritmi, corrispondenti agli aumenti h e d di a. La differenza

$$\log \operatorname{sen}(a+h) - \log \operatorname{sen} a - \frac{h\cos(a+\theta_1 h)}{d\cos(a+\theta_2 d)} \{\log \operatorname{sen}(a+d) - \log \operatorname{sen} a\}$$

è pel I° dei teoremi ricordati al n° 1, in valore assoluto minore di

$$\frac{d\cos(a+\theta_2 d)}{\operatorname{sen} a} \log\left\{1 + \frac{d\cos(a+\theta_2 d)}{\operatorname{sen} a}\right\}$$

e quindi anche, essendo

$$\cos a > \cos(a+\theta_2 d)$$

minore di

$$\frac{d}{\operatorname{tang} a} \log\left(1 + \frac{d}{\operatorname{tang} a}\right)$$

Cerchiamo ora una limitazione della seconda parte di E_2.

Dalla

$$\frac{\operatorname{sen}(a+d)}{\operatorname{sen} a} = 1 + \frac{d\cos(a+\theta_2 d)}{\operatorname{sen} a}$$

si ricava

$$\log \operatorname{sen}(a+d) - \log \operatorname{sen} a = \log\left(1 + \frac{d\cos(a+\theta_2 d)}{\operatorname{sen} a}\right)$$

e quindi, quando i logaritmi sieno presi in una base maggiore di 1,

$$\log \operatorname{sen}(a + d) - \log \operatorname{sen} a < \log\left(1 + \frac{d}{\operatorname{tang} a}\right)$$

Ma, riducendo ad una frazione unica, trasformando di questa il numeratore nel prodotto di due funzioni goniometriche, si ha

$$\frac{\cos(a + \theta_1 h)}{\cos(a + \theta_2 d)} - 1 = \frac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\theta_2 d - \theta_1 h)\operatorname{sen}\left(a + \frac{\theta_1 h + \theta_2 d}{2}\right)}{\cos(a + \theta_2 d)}$$

e quindi, poichè sono

$$\theta_2 d - \theta_1 h < d, \quad 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\theta_2 d - \theta_1 h) < d, \quad \cos(a + d) < \cos(a + \theta_1 d),$$

sarà

$$\frac{\cos(a + \theta_1 h)}{\cos(a + \theta_2 d)} - 1 < d \operatorname{tang}(a + d)$$

Abbiamo dunque in valore assoluto

$$E_2 < d \left\{ \frac{1}{\operatorname{tang} a} + \operatorname{tang}(a + d) \right\} \log\left(1 + \frac{d}{\operatorname{tang} a}\right)$$

Se i logaritmi si prendono nel sistema a base 10, nell'ipotesi

$$\operatorname{tang} d < \frac{1}{10 \operatorname{tang} a} \qquad (1)$$

si ha

$$\operatorname{tang}(a + d) < \frac{10 \operatorname{tang}^2 a + 1}{9 \operatorname{tang} a}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tang} a} + \operatorname{tang}(a + d) < \frac{10}{9} \frac{1}{\operatorname{sen} a \cos a}$$

Sarà in conseguenza

$$E_2 < d \frac{10}{9} \frac{1}{\operatorname{sen} a \cos a} \log_{10}\left(1 + \frac{d}{\operatorname{tang} a}\right)$$

---

(1) A questa diseguaglianza, posto $d = 10''$ soddisfano tutti gli angoli $a < 89^\circ\, 58'\, 20''$, mentre posto $d = 1'$ soddisfano gli angoli $a < 89^\circ 50'$.

ma, come è stato dimostrato al n.° 1, si ha

$$\log_{10}\left(1+\frac{d}{\tan g a}\right)<\frac{9}{20}\frac{d}{\tan g a}$$

epperò sarà

$$E_2<\frac{1}{2}\frac{d^2}{\operatorname{sen}^2 a}$$

L'errore totale E sarà in valore assoluto inferiore a

$$g+\frac{1}{2}\frac{d^2}{\operatorname{sen}^2 a} \qquad (1)$$

9. Determiniamo ora l'errore dell'angolo corrispondente ad un logaritmo-seno dato.

Sia il logaritmo dato compreso fra $\log\operatorname{sen}(a+d)$ e $\log\operatorname{sen}a$;

---

(1) Notiamo che col sussidio dell'analisi algebrica si dimostra che $E_2<\frac{1}{8}\frac{d^2}{\operatorname{sen}^2 a}$, epperò

$$E<g+\frac{1}{8}\frac{d^2}{\operatorname{sen}^2 a}$$

Colle tavole logaritmiche a sette decimali si ha $g<\frac{5}{10^8}$; però, quando, come nelle tavole del Sig. Ludwig Schrön, sia noto se ogni logaritmo è dato per eccesso o per difetto, si potrà rendere $g<\frac{2.5}{10^8}$. Riducendo il $\log\operatorname{sen}(a+h)$, calcolato col principio delle parti proporzionali, alle sue prime sette cifre decimali, si commette un nuovo errore che non può raggiungere $\frac{5}{10^8}$ e questo con g dà $\frac{7.5}{10^8}$, quindi dato d, volendo di $\operatorname{sen}(a+h)$ un valore approssimato a meno di $\frac{1}{10^7}$ bisognerà prendere a in modo che sia

$$\frac{1}{8}\frac{d^2}{\operatorname{sen}^2 a}<\frac{2.5}{10^8} \quad \text{o} \quad \operatorname{sen}a>d.10^3\sqrt{5}$$

Affinchè si possa applicare con piena fiducia l'ordinario metodo di interpolazione, si dovrebbe quindi adoperare una tavola per i logaritmi-seni

di 1'' in 1'' da 1° a 6° 30'
di 10'' in 10'' da 6°30' a 45°

Il Signor Brühns adotta una consimile disposizione nel suo manuale logaritmico, dando i logaritmi seni di 1'' in 1'' per i primi sette gradi del quadrante.

Per le tavole a 5 decimali dovrebbero calcolarsi i logaritmi — seni

di 10'' in 10'' da 1° a 4°
di 1' in 1' da 4° a 45°

indicando con $(a+h)$ l'angolo, a cui corrisponde il logaritmo seno dato, si calcoli h colla proporzione

$$\frac{h}{d}=\frac{\log \operatorname{sen}(a+h)-\log \operatorname{sen} a}{\log \operatorname{sen}(a+d)-\log \operatorname{sen} a}$$

L'errore commesso nel computo di h si compone di due parti, una delle quali è la differenza

$$\sum\nolimits_1 = d\,\frac{\log \operatorname{sen}(a+h)-\log \operatorname{sen} a}{\log \operatorname{sen}(a+d)-\log \operatorname{sen} a}-h$$

ossia

$$\sum\nolimits_1 = d\,\frac{E_2}{\log \operatorname{sen}(a+d)-\log \operatorname{sen} a}$$

ove ad E_2 è stato attribuito lo stesso significato che al numero precedente, epperò, essendo in valore assoluto

$$E_2<\frac{1}{2}\,\frac{d^2}{\operatorname{sen}^2 a}$$

sarà il valore assoluto di $\sum_1$ minore di

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{\log \operatorname{sen}(a+d)-\log \operatorname{sen} a}\cdot\frac{d^2}{\operatorname{sen}^2 a}$$

L'altra parte è dovuta agli errori dei logaritmi delle tavole e all'eventuale errore del logaritmo-seno dato. Se quelli sono approssimati a meno di g e questo a meno di ε il quoziente

$$\frac{\log \operatorname{sen}(a+h)-\log \operatorname{sen} a}{\log \operatorname{sen}(a+d)-\log \operatorname{sen} a}$$

potrà essere calcolato a meno di

$$\frac{\varepsilon+g}{\log \operatorname{sen}(a+d)-\log \operatorname{sen} a-2g}\ \text{(*)}$$

Dunque l'errore totale $\sum$ nel calcolo di un angolo cor-

(*) V. la nota sulle approssimazioni numeriche nella trigonometria del Prof. D. Besso.

rispondente a un dato logaritmo-seno di cui si conosce un valore a meno di ε compreso fra $\log \operatorname{sen}(a+d)$ e $\log \operatorname{sen} a$, noti a meno di g è inferiore a

$$\frac{d}{\log \operatorname{sen}(a+d) - \log \operatorname{sen} a - 2g}\left\{\frac{1}{2}\frac{d^2}{\operatorname{sen}^2 a} + \varepsilon + g\right\} \quad (*)$$

Quindi nel caso che si faccia uso di tavole a sette decimali, supposto

$$\varepsilon = 0,\ a + d \leq 6°30,\ a > 1°,\ d = 1''$$

si ha

$$\sum < 0'',0004$$

mentre per $a \overline{\overline{>}} 6°30'$ e $d = 10''$ si ha

$$\sum < 0'',003$$

10. Determiniamo ora una limitazione dell'errore nel calcolo del logaritmo tangente di un angolo non compreso nelle tavole.

Dati i logaritmi di $\operatorname{tang} a$ e $\operatorname{tang}(a+d)$, se il logaritmo della tangente di un angolo $(a+h)$, non compreso nelle tavole viene calcolato colla proporzione

$$\frac{\log \operatorname{tang}(a+h) - \log \operatorname{tang} a}{\log \operatorname{tang}(a+d) - \log \operatorname{tang} a} = \frac{h}{d}$$

vale a dire se si calcola $\log \operatorname{tang}(a+h)$ colla formula

$$\log \operatorname{tang}(a+h) = \log \operatorname{tang} a + \frac{h}{d}\{\log \operatorname{tang}(a+d) - \log \operatorname{tang} a\}$$

si commette un errore di cui la parte, dovuta agli errori di cui sono affetti $\log \operatorname{tang} a$ e $\log \operatorname{tang}(a+d)$, è minore di g se questi logaritmi sono entrambi dati a meno di g. L'altra parte E è misurata dalla differenza

$$\log \operatorname{tang}(a+h) - \log \operatorname{tang} a - \frac{h}{d}[\log \operatorname{tang}(a+d) - \log \operatorname{tang} a]$$

(*) Per quanto è stato detto nella nota al n.° precedente potrà ridursi

$$\Sigma < \frac{d}{\log \operatorname{sen}(a+d) - \log \operatorname{sen} a - 2g}\left\{\frac{1}{8}\frac{d^2}{\operatorname{sen}^2 a} + \varepsilon + g\right\}$$

che può porsi anche sotto la forma

$$\log \operatorname{sen}(a+h) - \log \operatorname{sen} a - \frac{h}{d}\left[\log \operatorname{sen}(a+d) - \log \operatorname{sen} a\right] -$$

$$- \left\{ \log \cos(a+h) - \log \cos a - \frac{h}{d}\left[\log \cos(a+d) - \log \cos a\right] \right\}$$

Ma per quanto si è detto al n. 9 i due termini di questa differenza sono inferiori in valore assoluto rispettivamente a

$$\frac{1}{2}\,\frac{d^2}{\operatorname{sen}^2 a} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{\cos^2 a};$$

sarà quindi in valore assoluto

$$E < \frac{2d^2}{\operatorname{sen}^2 2a}$$

L'errore totale sarà quindi in valore assoluto inferiore a

$$g + \frac{2d^2}{\operatorname{sen}^2 2a} \quad (^*)$$

11. La determinazione dell'angolo corrispondente ad un dato logaritmo-tangente si compie in modo analogo a quello tenuto pel seno e si giunge a stabilire che un tale errore è inferiore a

$$\frac{d}{\log \operatorname{tang}(a+d) - \log \operatorname{tang} a - 2g}\left\{ \frac{2d_1^2}{\operatorname{sen}^2 2a} + \varepsilon + g \right\}$$

ove ε, g e d hanno significati analoghi a quelli loro attribuiti al n° 10.

Ettore Ricordi.

(*) Facendo uso del valore dato nella nota al n° 8 questo errore potrà rendersi minore di

$$g + \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{\operatorname{sen}^2 2a}$$

ESERCIZI PER LA SCUOLA (*)

1. I numeri positivi a, b, c, sono legati dalla relazione

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 = 0.$$

Esiste un triangolo coi lati misurati da quei tre numeri?

2. Se i numeri a, b, c misurano i tre lati d'un triangolo, il polinomio

$$a^3 + b^3 + c^3 - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a) + 2abc$$

è negativo. È vera la reciproca?

3. I tre lati d'un triangolo sono misurati dai numeri a, b, c fra i quali ha luogo la relazione

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = 0.$$

Dimostrare che quel triangolo è isoscele.

4. Se i numeri a, b, c che misurano i tre lati d'un triangolo sono legati dalla relazione

$$a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2 = 0,$$

quel triangolo dev'essere equilatero.

5. Se i numeri a, b, c che misurano i tre lati d'un triangolo sono legati dalla relazione

$$a^4+b^4+c^4-2ab(a^2+b^2)-2bc(b^2+c^2)-2ca(c^2+a^2)+3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=0,$$

quel triangolo dev'essere equilatero.

6. Se i numeri positivi a, b, c sono legati dalla relazione

$$a^6+b^6+c^6-a^2b^2(a^2+b^2)-b^2c^2(b^2+c^2)-c^2a^2(c^2+a^2)+2a^2b^2c^2=0,$$

essi misurano i lati d'un triangolo rettangolo.

7. Se i numeri positivi a, b, c sono legati dalla relazione

$$a^3 = b^3 + c^3,$$

esiste un triangolo acutangolo coi lati misurati da quei trè numeri.

(*) Le proposizioni che sono qui enunciate si riferiscono, per la maggior parte, a trasformazioni di alcuni polinomi in prodotti di più fattori o in somme di potenze di più binomi, e ad alcuni teoremi di geometria elementare.

8. I tre lati d'un triangolo sono misurati dai numeri, a, b, c il maggiore dei quali è a; i tre lati d'un altro triangolo sono misurati dai numeri a_1, b_1, c_1 il maggiore dei quali è a_1 e questi numeri verificano la relazione:

$$a^5+b^5+c^5-a^2b^2(a+b)-a^2c^2(a+c)+b^2c^2(c+b)=a_1^2-b_1^2-c_1^2.$$

Dimostrare che se il primo triangolo è rettangolo dev'essere tale anche il secondo. È vera la reciproca?

9. I numeri a e b, che misurano il maggior lato d'un triangolo e il segmento che unisce il suo punto di mezzo al vertice dell'angolo opposto, sono legati al numero c dalla relazione

$$a^5-a^3(4b^2-6b)+8a^2b^2-24ab^3-32b^4=c(a^3+6ab+8b^3).$$

Si domanda se il triangolo sia rettangolo, acutangolo od ottusangolo.

10. I cateti d'un triangolo rettangolo sono misurati dai numeri a, b, e quelli d'un altro triangolo rettangolo dai numeri m, n. Dimostrare che, se questi quattro numeri sono legati dalle relazioni

$$a+b=2-(m+n) \qquad ab=2+mn-2(m+n),$$

i circoli circoscritti ai due triangoli devono essere uguali.

11. Gli angoli ai vertici di due triangoli isosceli sono misurati dai numeri a, b fra i quali ha luogo la relazione

$$\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}=\sqrt{2a};$$

la base del primo triangolo è doppia di quella del secondo. Assegnare il rapporto del rapporto dei perimetri dei due triangoli a quello delle loro aree.

12. I tre lati d'un triangolo sono misurati dai numeri a, b, c, i tre lati d'un altro triangolo dai numeri a_1, b_1, c_1, e questi numeri sono legati dalla relazione

$$4a^2b_1^2+4a_1^2b^2+9a^2c_1^2+9a_1^2c^2=8aba_1b_1+18aca_1c_1.$$

Dimostrare che, se uno dei due triangoli è rettangolo, dev'essere tale anche l'altro.

13. I cinque angoli d'un pentagono inscritto in un circolo sono misurati dai numeri a, b, c, d, e. Dimostrare che il pentagono dev'essere regolare se questi numeri sono legati dalla relazione

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = ab + bc + cd + de + ea.$$

14. I sei lati d'un esagono inscritto in un circolo sono misurati dai numeri a, b, c, d, e, f i quali verificano le relazioni

$$b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = bc + cd + de + ef + fb$$

$$(a - b + c)\ (a - b - c) = b\ (d - c - f).$$

Assegnare il rapporto del perimetro dell'esagono alla maggiore delle sue diagonali.

15. Due lati consecutivi d'un quadrilatero circoscritto ad un circolo sono misurati dai numeri a, b i quali sono legati dalla relazione

$$3a^5 + 2a^4b + a^2 - 3ab^4 - 2b^5 - b^2 = 0.$$

Dimostrare che le diagonali di quel quadrilatero sono fra loro perpendicolari.

D. Besso.

SOLUZIONE DELLE QUISTIONI 11 E 12 PROPOSTE A PAG. 127.

(11) *Dimostrare che, per* n *intero e positivo, si ha:*

$$\frac{1}{n+1} - \frac{n}{(n+1)(n+2)} + \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \ldots + (-1)^n \frac{n(n-1)\ldots.2.1}{(n+1)(n+2)\ldots.(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}$$

D. Besso.

Dimostrazione del Prof. *G. Frattini* (*).

Per verificare la precedente eguaglianza trasporto nel 2°

(*) Una dimostrazione consimile è stata inviata dal Sig. *A. De Zolt*iry.

membro il 1.° termine del 1° membro, riduco nel nuovo 2° membro e sopprimo il fattore comune $\frac{n}{n+1}$ nei due membri. Ottengo:

$$(A)\quad -\frac{1}{n+2}+\frac{n-1}{(n+2)(n+3)}-\ldots+(-1)^n\frac{(n-1)\ldots.2.1}{(n+2)\ldots(2n+1)}=-\frac{1}{2n+1}.$$

Questa eguaglianza è quella nella quale si muta l'eguaglianza da verificare, quando nei numeratori e nei denominatori dei singoli termini del suo 1° membro si sopprima il 1° fattore e nel medesimo tempo si cambi segno al 2° membro (purchè si convenga di non considerare il termine $\frac{1}{n+1}$ nel numeratore del quale il fattore soppresso sarebbe l'unità). Di nuovo: trasportiamo nel 2° membro il 1° termine del 1.° membro dell'eguaglianza (A), riduciamo nel nuovo 2° membro e sopprimiamo il fattore comune $\frac{n-1}{n+2}$. Otterremo quella eguaglianza nella quale si muta la (A) quando nei numeratori e nei denominatori dei singoli termini del 1.° membro si sopprima il 1.° fattore (colla convenzione ecc.), e si cambi segno al 2° membro.

Dopo n operazioni il 1° membro si troverà ridotto a un solo termine e precisamente al termine $(-1)^n.\frac{1}{2n+1}$ ed, evidentemente, il 2.° membro al termine medesimo. L'eguaglianza è così verificata.

Dimostrazione del Prof *F. Viaggi.*

Da una formola notissima del calcolo combinatorio si deducono le seguenti eguaglianze:

$$\left|\begin{matrix}2n+1\\ n\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}2n\\ n\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}2n\\ n-1\end{matrix}\right|$$

$$-\left|\begin{matrix}2n+1\\ n\end{matrix}\right| = -\left|\begin{matrix}2n\\ n-1\end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix}2n\\ n-2\end{matrix}\right|$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(-1)^{n-1}\left|\begin{matrix}2n+1\\1\end{matrix}\right| = (-1)^{n-1}\left|\begin{matrix}2n\\1\end{matrix}\right| + (-1)^{n-1}\left|\begin{matrix}2n\\0\end{matrix}\right|$$

$$(-1)^{n}\left|\begin{matrix}2n+1\\0\end{matrix}\right| = (-1)^{n}\left|\begin{matrix}2n\\0\end{matrix}\right|$$

Addizionando membro a membro, e riducendo, si ha l'identità:

$$(\alpha)\quad \left|\begin{matrix}2n+1\\n\end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix}2n+1\\n-1\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}2n+1\\n-2\end{matrix}\right| - \ldots + (-1)^n \left|\begin{matrix}2n+1\\0\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}2n\\n\end{matrix}\right|.$$

Dalla quale, sostituendo ai simboli d'Euler le frazioni equivalenti e moltiplicando tutti i termini per $\dfrac{n(n-1)\ldots.2.1}{(n+1)(n+2)\ldots(2n+1)}$, dopo facili semplificazioni si ricava l'identità proposta.

Osservazione. — L'identità (α) si potrebbe ottenere anche facilmente sviluppando nella identità $(1-x)^{2n+1}(1-x)^{-1}=(1-x)^{2n}$ le potenze ascendenti d'x ed eguagliando i coefficienti d'x^n nei due membri.

(12) — *Dimostrare che la potenza* n^a *della media aritmetica delle radici* n^e *di più numeri positivi diminuisce al crescere di* n.

D. Besso.

Dimostrazione del Prof. *G. Frattini.*

Dobbiamo dimostrare che:

$$\left(\frac{\sqrt[n+1]{a_1}+\sqrt[n+1]{a_2}+\ldots+\sqrt[n+1]{a_m}}{m}\right)^{n+1} \overline{\gtrless} \left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^{n},$$

ovvero che:

$$\text{(A)}\qquad \left(\sqrt[n+1]{a_1}+\ldots+\sqrt[n+1]{a_m}\right)^{n+1} \overline{\gtrless}\, m\left(\sqrt[n]{a_1}+\ldots+\sqrt[n]{a_m}\right)^{n}.$$

I. Per $n=1$ la (A) è vera. Infatti essa diviene:

$$\text{(B)}\qquad (\sqrt{a_1}+\ldots+\sqrt{a_m})^2 \overline{\gtrless}\, m(a_1+\ldots+a_m).$$

Ora, se scriviamo gli m^2 termini del prodotto della quantità $\sqrt{a_1}+\ldots+\sqrt{a_m}$ per sè stessa, e se invece di $\sqrt{a_\mu}.\sqrt{a_\nu}$ (termine qualsivoglia) poniamo la quantità non minore $\dfrac{a_\mu+a_\nu}{2}$, poichè ciascuno dei radicali $\sqrt[n]{a_1}$, $\sqrt[n]{a_2}$, ... $\sqrt[n]{a_m}$ è fattore $2m$ volte ne' vari termini del prodotto, il 1.° membro della (B) si muterà in $2m\left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2}+\ldots+\frac{a_m}{2}\right)$ ossia in $m(a_1+a_2+\ldots+a_m)$, divenendo identico al 2.°

II. Dimostriamo ora che, se la proprietà (A) è vera per un certo valore di n, essa è anche vera pel valore $n+1$. Intanto, ponendo $\sqrt[n(n+1)]{a_i}=x_i$, la (A), supposta vera, ci dà:

(C) $(x_1^n+x_2^n+\ldots+x_m^n)^{n+1} \overline{\gtrless} m(x_1^{n+1}+x_2^{n+1}+\ldots+x_m^{n+1})^n$.

Ma si ha ancora:

$$\text{(D)}\qquad (x_1^{n+1}+x_2^{n+1}+\ldots+x_m^{n+1})^2$$
$$\overline{\gtrless}(x_1^n+x_2^n+\ldots+x_m^n)(x_1^{n+2}+x_2^{n+2}+\ldots+x_m^{n+2})$$

perchè, sviluppando il quadrato del 1° membro, a ciascun doppio prodotto $(2x_p^{n+1}\,x_q^{n+1})$ dello sviluppo corrisponde nel 2° membro il binomio $x_p^n\,x_q^{n+2}+x_q^n\,x_p^{n+2}$ (che non ne è minore, essendo $x_p^2+x_q^2 \overline{\gtrless} 2x_px_q$), mentre le parti restanti dei due membri sono le medesime.

Elevando i due membri della (D) alla potenza $(n+1)^a$, moltiplicando la diseguaglianza che si ricava per la (C), si ottiene, fatte le riduzioni:

$$(x_1^{n+1}+\ldots+x_m^{n+1})^{n+2} \overline{\gtrless} m(x_1^{n+2}+\ldots+x_m^{n+2})^{n+1}.$$

E qui ponendo: $x_i=\sqrt[(n+1)(n+2)]{a_i}$, si ha finalmente:

$$\left(\sqrt[n+2]{a_1}+\ldots+\sqrt[n+2]{a_m}\right)^{n+2} \overline{\gtrless} m\left(\sqrt[n+1]{a_1}+\ldots+\sqrt[n+1]{a_m}\right)^{n+1} \quad (*)$$

(*) Un altra dimostrazione di questo teorema, diversa dalla presente, del Sig. Prof. *Viaggi*, verrà pubblicata nel venturo fascicolo.

QUISTIONI PROPOSTE

13. Assegnare, senza il sussidio del calcolo differenziale, il limite al quale tende la funzione

$$y = \frac{\sqrt{2x - x^4} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[4]{x^3}}$$

quando la variabile x tende ad 1.

14. Dimostrare che, posto

$$1^{h+1} - 2^{h+1} + 3^{h+1} - \ldots + (-1)^{n-1}\, n^{h+1} = s_n \,,$$

si ha, qualunque sia l' intero positivo h, purchè indipendente da m,

$$\lim\left(\frac{s_{2m} + s_{2m+1}}{m^h}\right)_{m=\infty} = (h+1)\, 2^{h-1}.$$

15. Dimostrare che il numero dei modi nei quali un intero positivo n può essere formato, per via di addizione, coi numeri 1, 2, 3, è dato dalla formola

$$\frac{(n+3)^2}{12} + \frac{(-1)^n}{8} - \frac{7}{72} + \frac{2}{9}\cos\frac{2n\pi}{3}.$$

16. Dedurre il postulato delle parallele dalla proposizione: Il quadrato del numero che misura l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo è eguale alla somma dei quadrati dei numeri che misurano i due cateti.

D. Besso.

17. Preso un punto sulla bisettrice di un angolo retto e condotta per questo punto una secante ai lati, determinare la posizione che deve avere la secante affinchè sia minima

1.° la somma dei segmenti staccati dai lati dell'angolo a partire dal vertice,

2.° la porzione della secante limitata ai lati,

3.° l'area del triangolo formato dalla secante e dai lati dell'angolo.

18. Se col simbolo $S^m(x)$ s'indica la somma delle potenze m^{esime} dei primi x numeri interi e positivi e $a, b, c, \ldots l$ sono numeri primi due a due, dimostrare che

$$\frac{S^n(abc\ldots l)}{abc\ldots l} - \frac{S^n(a)}{a} - \frac{S^n(b)}{b} - \frac{S^n(c)}{c} - \ldots\ldots - \frac{S^n(l)}{l}$$

è un numero intero.

19. Se col simbolo $S^m(x)$ s'indica la somma delle potenze m^{esime} dei primi x numeri interi e positivi; $a, b, c, \ldots l$ sono numeri primi due a due ed $n, \alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ numeri interi positivi arbitrari, dimostrare che

$$\frac{S^{2n}(a^\alpha.b^\beta.c^\gamma\ldots l^\lambda)}{a^\alpha.b^\beta.c^\gamma\ldots l^\lambda} - \frac{S^{2n}(a)}{a} - \frac{S^{2n}(b)}{b} - \frac{S^{2n}(c)}{c} - \ldots\ldots - \frac{S^{2n}(l)}{l}$$

è un numero intero.

A. Lugli.

Correzione. – Il teorema n. 8 proposto a pag. 92 dev'essere così enunciato:

8. Se un pentagono ha la proprietà che le congiungenti i vertici ai punti di mezzo dei lati rispettivamente opposti passino per uno stesso punto, e sieno in questo punto divise in modo che il rapporto delle sue distanze da un vertice e dal punto di mezzo del lato opposto sia eguale per tutte, quel rapporto deve avere lo stesso valore che gli corrisponde nel pentagono regolare convesso o stellato.

D. Besso.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Was sind und was sollen die Zahlen? Von RICHARD DEDEKIND. (p. XV–58; Braunschweig, F. Vieweg u. S.; 1888).

Uno dei caratteri più salienti della Matematica del nostro secolo e specialmente della seconda metà di esso, è il complesso di ricerche sui fondamenti della Scienza; mentre un tempo gli scienziati accettavano, quasi senza discuterle, le dottrine classiche e si proponevano unicamente di perfezionarle e di accrescerle, i moderni non le pongono a fondamento di ulteriori deduzioni senza averle prima discusse e trovate legittime. È appunto al desiderio di rendere pienamente rigorosi i principî fondamentali che sono dovute le accurate indagini che i geometri fecero sulla natura degli elementi all'infinito e degli elementi imaginari e che gli analisti fecero sull'estensione successiva dell'idea di numero. È a questo stesso spirito critico che son dovute quelle belle ricerche sui fondamenti della Matematica che hanno per iscopo di determinare quali proposizioni sia indispensabile dedurre dall'esperienza ed assumere come postulati per fondare una Scienza dell'estensione e una Scienza dei numeri. Per quanto riguarda la Geometria, è inutile che ci arrestiamo a rammentare le ricerche fatte in questa direzione da Riemann, Helmholtz, Beltrami ed altri, le quali fortunatamente sono conosciute anche dai meno dotti fra i cultori delle Scienze esatte. Meno note son quelle che si propongono l'analogo problema per l'Aritmetica e di cui le più recenti son dovute a Helmholtz (1), Krone-

(1) HELMHOLTZ. *Zählen und Messen erkenntnisstheoretisch betrachtet* (*Sammlung der an* E. ZELLER *gerichteten philosophischen Aufsätzen*, Leipzig 1887). Cfr. il sunto di questo lavoro che trovasi nella *Revue scientifique* dell'anno corrente.

Le linee seguenti, che estragghiamo dalla memoria di Helmholtz, possono servire a dare un'idea del contenuto di essa:

« In alcuni lavori precedenti mi sono sforzato di mostrare come gli assiomi della Geometria non siano proposizioni date *a priori*, ma siano anzi da sostenere o da rigettare con argomenti forniti dalla esperienza... Ora è chiaro che la teoria empiristica da me adottata, se nega agli assiomi della Geometria il carattere di proposizioni indimostrabili e non aventi bisogno di dimostrazione, deve rendersi conto anche degli assiomi dell'Aritmetica i quali stanno in una relazione analoga col nostro modo di concepire il tempo ».

cker (1) e Dedekind (2).

Per quanto pregevoli siano i lavori dei primi due fra questi scienziati, non esitiamo a dichiararli meno interessanti di quello dell'ultimo dal punto di vista della Scienza pura; quelli per giungere all'idea di numero e alle operazioni sui numeri invocano le successioni che ci presenta la natura nello spazio e nel tempo, mentre questo riuscì a stabilire il concetto di numero senza ricorrere a fatti materiali (3) e alla domanda « Che cosa sono i numeri e qual'è il loro ufficio? » potè rispondere « I numeri sono creazioni volontarie della mente umana, essi servono come mezzo per concepire più facilmente ed esattamente le differenze fra le cose ».

Gli è del lavoro del Sig. Dedekind che vogliamo occuparci in questa rivista; ci sforzeremo di caratterizzare il metodo tenuto dall'a., il quale metodo — diciamolo subito per giustificare la lunghezza di questa bibliografia — se è ingegnosissimo è in pari tempo molto artificioso (4), e, per l'astrattezza delle considerazioni su cui poggia, difficile, malgrado la perfezione dello stile dell'a.. A ragione il Sig. Dedekind congettura che la complicazione della soluzione è probabilmente dovuta alla natura del problema da risolvere; a noi però sia concesso lo sperare che su questo argomento non sia ancora stata detta l'ultima parola, chè altrimenti farebbe d'uopo rinunciare all'idea d'insegnare l'Aritmetica senza invocare il sussidio di rappresentazioni sullo spazio o nel tempo.

Si consideri un *complesso* di cose (indicate colle lettere $a, b, c, \dots, s, \dots$) che siano *elementi* di uno o più *sistemi* indicati colle lettere A, B, C, ..., S, ...). Di fondamentale importanza è la relazione che intercede fra due sistemi A, S quando ogni elemento di A è elemento di S; si dice allora

(1) Kronecker. *Ueber den Zahlbegriff* (*Philosophische Aufsätze* già citati oppure *Journal f. d. r. u. a. Mathematik*, T. C).

(2) Il titolo del lavoro di Dedekind è scritto in testa del presente articolo.

(3) Questi fatti non hanno alcuna parte nei ragionamenti del Sig. Dedekind, ma servono però a additar loro lo scopo da raggiungere.

(4) L'a. stesso lo riconobbe implicitamente nella prefazione asserendo che « molti riconosceranno appena nelle oscure figure che egli presenta quei numeri che furono loro amici intimi e fedeli durante tutta la vita ».

che A è una *parte* di S; se in particolare A è diverso da S, A si dirà *parte propria* di S. Altrettanto importanti sono le nozioni di *sistema composto di più altri* A, B, C,... e di *parte comune a più sistemi*; il primo sistema risulta da tutte quelle cose che sono elementi o di A, o di B, o di C ecc.; l'altra da quelle cose che sono contemporaneamente elementi di A, di B, di C ecc.; è chiaro che mentre più sistemi dànno sempre luogo a un sistema composto, essi possono non avere alcuna parte comune.

Conviene esprimere queste relazioni mediante simboli: il sistema composto dei sistemi A, B, C, ... s'indicherà con $A + B + C + \ldots$, mentre la parte comune ad essi con $ABC\ldots$; la scrittura $A \leq S$ significherà che A è parte di S e la $A < S$ che è A è parte propria di S (1).

Un'altra nozione di capitale importanza — che anzi può dirsi la chiave di volta di tutto l'edificio del Sig. Dedekind — è quella di *rappresentazione* φ di un sistema su un altro; con questo nome si indica una legge secondo la quale ad ogni elemento s di un sistema S si fa corrispondere una determinata cosa, che si chiamerà *imagine* di s e si indicherà con $\varphi(s)$. Se T è una parte di S, $\varphi(T)$ sarà il sistema avente per elementi le imagini degli elementi di T. Qualunque sia la rappresentazione φ sussisteranno le seguenti proprietà:

I. Se $A \leq B$ sarà $\varphi(A) \leq \varphi(B)$;

II. $\varphi(A + B + C + \ldots) = \varphi(A) + \varphi(B) + \varphi(C) + \ldots$

III. $\varphi(ABC\ldots) \leq \varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\ldots$

Come dal sistema S si passa al sistema $\varphi(S)$ mediante la rappresentazione φ, da questo si giungerà a un altro sistema mediante un'altra rappresentazione ψ: la rappresentazione con cui si passa da S a quest'ultimo sistema si chiamerà *composta* di φ e ψ e si indicherà con $\varphi\psi$; le rappresentazioni $\varphi\psi$ e $\psi\varphi$ sono generalmente differenti.

(1) Questi simboli sono diversi da quelli del Sig. Dedekind; e furono scelti coi criteri seguiti nelle trattazioni matematiche della Logica; mi sembra questa scelta consigliabile perchè essa porge delle enunciazioni simboliche espressive di quasi tutti i teoremi che dobbiamo riportare e porge un nuovo esempio della utilità che si trae anche in questo caso dal Calcolo della logica.

Fra le rappresentazioni φ di un sistema S son degne di speciale menzione quelle (che chiameremo *simili*) tali che due elementi diversi a, b di S hanno per imagini due elementi diversi $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$ del sistema $\varphi(S) = S'$ (1). Una rappresentazione di tal fatta ne ammette una *inversa*; esiste cioè una legge tale che ad ogni elemento di S' corrisponde una cosa di S che ne è l'imagine. Quando φ è una rappresentazione simile, se $\varphi(A) \leq \varphi(B)$ sarà $A \leq B$ e se $\varphi(A) = \varphi(B)$ sarà $A = B$; inoltre $\varphi(ABC...) = \varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)....$

La nozione di rappresentazioni simili conduce a quella di *sistemi simili*: due sistemi si diranno simili se esiste una rappresentazione dell'uno che sia simile all'altro.

È frequente il caso in cui un sistema venga rappresentato sopra sè medesimo. Un sistema C tale che sia $\varphi(C) \leq C$, si dirà una *catena* (si noti che la proprietà di un sistema di essere una catena è legata sempre alla considerazione di una determinata rappresentazione φ). Considerando sempre la stessa rappresentazione, l'imagine di una catena è un'altra catena e lo stesso può dirsi del sistema composto di più catene e della parte comune ad esse. Se A è una parte del sistema S il simbolo A_0 o $\varphi_0(A)$ rappresenterà la parte comune a tutte le catene del sistema S che contengono il sistema A e s'indicherà col nome di *catena del sistema* A.

Premesse queste definizioni e questi teoremi si hanno elementi sufficienti per fare una distinzione di gran peso.

Un sistema dicesi *infinito* se è simile a una sua parte propria: altrimenti si dice *finito*. È facile far vedere con degli esempi l'esistenza di sistemi di queste due specie; si può poi facilmente mostrare che « due sistemi simili sono contemporaneamente finiti o infiniti », che « ogni sistema il quale sia parte di un sistema finito o sia simile a una tale parte è un sistema finito » e che « se togliendo un elemento da un sistema S si ottiene un sistema finito, S è pure finito ».

Un sistema N dicesi *semplicemente infinito* se esiste una rappresentazione φ di N su sè stesso tale che N si presenti come catena di un elemento non contenuto in $\varphi(N) = N'$. Questo elemento si indicherà col nome di *elemento fondamen-*

(1) Lo scrivere a' invece di $\varphi(a)$ è lecito solo quando non possa nascer dubbio sulla rappresentazione in virtù della quale a' è imagine di a.

tale e col simbolo 1; si dirà inoltre che **N** è *ordinato* mediante la rappresentazione φ. Servendosi dei simboli introdotti si può dire che il sistema N è semplicemente infinito se esiste una rappresentazione φ e un elemento 1 di N tali che sussistano le quattro relazioni seguenti:

α. $N' \leq N$

β. $N = 1_0$

γ. 1 non è contenuto in N'

δ. φ è una rappresentazione simile.

Se in un sistema semplicemente infinito N ordinato mediante una rappresentazione φ si prescinde completamente dalle proprietà specifiche degli elementi e si tien conto unicamente della possibilità di distinguerli gli uni dagli altri e delle relazioni che fra essi intercedono grazie a quella rappresentazione φ, questi elementi si chiamano *numeri naturali* o *numeri ordinali* o semplicemente *numeri*; l'elemento fondamentale 1 si chiama *elemento fondamentale della serie dei numeri*. Còmpito della *Scienza dei numeri* o *Aritmetica* è il dedurre dalle proprietà α., β., γ., δ. le leggi che regolano gli enti così definiti e le loro scambievoli relazioni.

Stabilito per tal modo il concetto di numero, è agevole, applicando le proposizioni generali esposte, di dimostrare un gran numero di teoremi d'Aritmetica, di definire che cosa s'intende per numero maggiore o minore di un altro, di stabilire criteri atti a distinguere le porzioni finite della serie dei numeri dalle infinite, ecc..

Per giungere poi alle operazioni (dirette) sui numeri è necessario premettere il Teorema generale seguente (1):

« Data ad arbitrio una rappresentazione θ di un sistema Ω su sè stesso e dato inoltre in Ω un determinato elemento ω, esiste una rappresentazione ψ della serie di numeri N sodisfacente, qualunque sia il numero n, alle condizioni:

I. $\psi(N) \leq \Omega$

II. $\psi(1) = \omega$

III. $\psi(n') = \theta\psi(n)$ ».

(1) Questo teorema sembra di grande importanza non solo nell'attuale ricerca ma in molte altre, p. e. in certe questioni della teoria dei gruppi.

Come conseguenze di essa notiamo anzitutto le due proposizioni: « Tutti i sistemi semplicemente infiniti sono simili fra loro »; « Tutti i sistemi simili ad un sistema semplicemente infinito sono pure semplicemente infiniti ».

Ecco ora in qual modo, servendosi del teorema generale or ora riportato, si giunge alle tre operazioni dirette.

Del sistema N noi conosciamo già una rappresentazione simile, quella che serve a ordinarne gli elementi; quindi potremo applicare quel teorema generale nell'ipotesi che Ω sia la serie N e θ sia questa rappresentazione. Per determinare completamente la rappresentazione ψ fa ancora mestieri fissare in N l'elemento corrispondente ad 1: sia tale elemento il numero m diverso da 1.

Siccome la rappresentazione ψ dipende dalla scelta di questo numero m, così noi sostituiremo al simbolo $\psi(n)$ dell'imagine di n un simbolo in cui compaia m e precisamente $m + n$. Chiameremo questo numero *somma* ottenuta dall'*addizione* del numero n al numero m. La condizione I del teorema generale è soddisfatta e le altre due sono espresse nel nostro caso così:

$$m + 1 = m', \quad m + n' = (m + n)';$$

da queste seguono le relazioni

$$m + n = n + m, \ (l + m) + n = l + (m + n)$$

che esprimono le proprietà fondamentali dell'addizione.

Supponiamo ora nel teorema generale che il sistema Ω sia come prima la serie dei numeri N, ma che la rappresentazione θ sia quella individuata dall'eguaglianza $\theta(n) = m + n = n + m$ ove m è un numero fissato ad arbitrio; è ancora arbitraria la scelta dell'imagine di 1, per semplicità noi assumeremo che sia m. La rappresentazione ψ è così determinata. Per mettere in evidenza il numero m da cui essa dipende noi indicheremo con $m \times n$ o con $m.n$ o con mn l'imagine di n e la chiameremo *prodotto* ottenuto colla *moltiplicazione* del numero n pel numero m. Le due ultime condizioni del teorema generale divengono quindi

$$m . 1 = m', \quad mn' = mn + m;$$

da queste derivano le eguaglianze

$$1.n = n,\ mn=nm,\ l(m + n) = lm + ln,\ (lm)\, n = l(mn).$$

espressioni simboliche delle particolarità della moltiplicazione.

Finalmente supponiamo che nel teorema generale, sempre supponendo $\Omega = N$, si faccia $\theta(n) = an$ (a essendo un numero arbitrario) e $\omega = a$. Nasce così una rappresentazione ψ, in grazia della quale l'imagine di n è un certo numero che (per mettere in evidenza il numero a da cui dipende ψ) si indicherà colla scrittura a^n e col nome di *potenza* della base a di *esponente* n. Le eguaglianze II e III del teorema generale diverranno nel caso attuale:

$$a^1 = a,\ a^{n'} = aa^n = a^n a$$

da queste poi scaturiscono come corollari le altre

$$a^{m+n} = a^m a^n,\ (a^m)^n = a^{mn},\ (ab)^n = a^n b^n.$$

Il procedimento tenuto per definire successivamente l'addizione, la moltiplicazione e l'elevamento a potenza è suscettibile di altre applicazioni; esso conduce, p. e., alla quarta operazione diretta, poi alla quinta, e così via all'infinito.

Ma poichè queste operazioni non sono ancora strumenti abituali per l'analista, non è il caso di fermarcisi. È invece interessante lo stabilire la nozione di « numero degli elementi di un sistema finito » lo si può fare colla definizione seguente:

Se Σ è un sistema finito esiste sempre uno e un solo numero n tale che tutti i numeri della serie N non superiori a n formino un sistema simile a Σ; si dice allora che Σ *consta di* n *elementi* o che n è il *numero degli elementi* di Σ. È facile desumere da questa definizione che « tutti i sistemi simili contengono lo stesso numero di elementi » e che « se il sistema A consta di m elementi e il sistema B di n, il sistema composto A + B ne conterrà $m + n$ se A e B non hanno alcun elemento comune, ne conterrà di meno in caso diverso. » Quest'ultima proposizione permette di passare dalla definizione di addizione precedentemente esposta alla definizione ordinaria.

Vena d'Oro (Belluno), 26 Luglio 1888.

GINO LORIA.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des Mathématiques publié par *Gustav Eneström*. Stockholm, 1888; N. 3.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane pubblicato per cura del professore *G. Battaglini*. Vol. XXVI. Luglio-Agosto, Napoli, 1888.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy*, Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe. 3e série. Douzième année. N. 9, 10, Septembre, Octobre. Paris, 1888.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par *H. Vuibert*. 13e Année. N. 1, 2. Paris. M. Nony et C.ie, 17 Rue des Écoles, 1888.

Le Scuole Secondarie eco dell'Associazione nazionale fra gl'insegnanti delle scuole secondarie. Anno V. N. 22, 23, 24. Milano 1888.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). — Serie 2.ª Vol. 2. — Luglio, Agosto 1888.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. — Tomo II. Fascicolo 5.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XX. N. 13—16. Firenze, 1888.

Agamennone (G.) e Bonetti (F.) — Sopra un nuovo modello di barometro normale. Nota II. (Rend. R. Acc. Lincei, 1888).

Bustelli (A. M.) — L'insegnamento dell'aritmetica della geometria e delle scienze naturali secondo i nuovi programmi ufficiali per le Scuole primarie. — Discorso pronunziato in occasione delle conferenze pedagogiche in Assisi il 14 settembre 1888.

Gerbaldi (F.) — Sui sistemi di cubiche gobbe o di sviluppabili di 3ª classe stabiliti col mezzo di due cubiche punteggiate proiettivamente (Atti R. Acc. Torino, 1880). — Sopra il significato geometrico del covariante di 9° ordine di una forma cubica ternaria (id. id.). — La superficie di Steiner studiata nella sua rappresentazione analitica mediante le forme ternarie quadratiche (id. 1881). — Sulla realità dei punti e delle tangenti comuni a due coniche (Cir. mat. Palermo, 1887).

Giuliani (G.) — Aggiunte ad una memoria del Sig. Kummer (Gior. Battaglini, Vol. XXVI, 1888).

Longchamps (G. de). — Sur la transformation orthotangentielle dans le plan et dans l'espace (Buletin de la Société royale des Sciences de Bohème, 1888).

Loria (G.) — Sul concetto di volume in uno spazio lineare qualunque (Gior. Battaglini, Vol. XXVI, 1888). — Notizie storiche sulla Geometria numerativa (Bibliotheca mathematica di G. Eneström, 1888).

Lozzi (G.) — Osservazioni al Regolamento 23 Ottobre 1884 pei ginnasi ed i licei del Regno. Modica 1888.

Margolongo (R.) — Sull'equilibrio di un filo flessibile ed inestensibile (Rend. R. Acc. Napoli, 1888). — Sul teorema di Poisson (id. id.)

Muller Petti (G. D.) — Elementi di aritmetica ad uso delle Scuole tecniche, normali e superiori — G. B. Paravia e C. 1889. — Prezzo L. 2.

Reggio (G. B.) — Complementi d'Algebra per gli allievi degli Istituti tecnici (2° biennio) — Ditta G. B. Paravia e Com. 1888. — Prezzo L. 3,50.

Correzione-Aggiunta. — Nella quistione 18 a pag. 152, alla 3ª linea, dopo le parole: $a, b, c, \ldots l$ sono numeri primi due a due — si aggiunga — ed n è intero e positivo,.

LE PROPRIETÀ DELLA SOMMA E DELLA DIFFERENZA ESTESE AI POLINOMI ALGEBRICI.

1. Ammessa la serie naturale dei numeri, si diranno *mag-iori* d'un numero dato tutti quei numeri che vengono dopo i esso; e *minori* tutti quelli che gli stanno avanti.

Si dirà *somma* di due numeri quel numero che si ottiene ontando in seguito al primo le unità del secondo; e *somma li più numeri* il resultato che si ottiene contando in se-uito alla somma dei primi due le unità del terzo, in se-uito alla somma dei primi tre le unità del quarto, e così ia fino all'ultimo numero.

I diversi numeri che compongono una somma diconsi *ermini* o *parti* di essa.

Si chiamerà invece *differenza* di due numeri il resultato he si ottiene contando indietro al primo, denominato *mi-uendo*, le unità del secondo, detto *sottraendo*.

2. Ciò posto, dalla definizione di somma resulta subito he, se in seguito ad un numero si contano successivamente e unità di molti altri, si ottiene lo stesso risultato che si icava contando la somma di essi; si ha cioè l'eguaglianza:

$$(1) \qquad a + (b + c) = a + b + c\,;$$

a quale in linguaggio ordinario, enunciasi in questa guisa:

Una somma non si altera, sostituendo ad un termine e sue parti; e, reciprocamente:

Una somma non si altera, sostituendo un termine unico a due o più dei suoi termini.

Questa proprietà dicesi: *proprietà associativa* della somma.

3. Un'altra proprietà della somma è la *commutativa* che si esprime così:

Una somma non si altera cambiando l'ordine delle sue parti.

Tale proposizione, quando si tratti della somma di due soli termini, la si ammette facilmente, considerando che le unità d'un numero, essendo identiche fra loro, *tanto vale contarle in un senso, quanto vale contarle in senso contrario* (*).

Quando invece si tratta della somma di più di due termini, allora la detta proposizione si può dimostrare servendosi della proprietà associativa e della commutativa di due termini, in questa maniera:

$$a + b + c = a + (b + c) = a + (c + b) = a + c + b$$

4. Da queste due proprietà ne derivano altre, tra cui ricorderemo solamente la seguente.

La somma di due o più somme vale la somma unica composta colle parti di ciascuna.

5. Dalla definizione di differenza si ricava: prima, che essa è impossibile quando il sottraendo è maggiore del minuendo; poi, che se alla differenza di due numeri si aggiunge il sottraendo ne vien per somma il minuendo; e, reciprocamente, se un numero è somma di altri due, ciascuno di questi è differenza fra la somma e l'altro numero. Onde si conclude che *una differenza è sempre caratterizzata dalla proprietà di dare il minuendo sommata che sia col sottraendo.*

È quindi abbiamo identicamente:

$$(a - b) + b = a$$

$$(a + b) - b = a;$$

cioè: *il valore d'un numero non si altera aggiungendo prima e poi togliendo, oppure prima togliendo e poi aggiungendo ed esso un altro numero.*

(*) Nel fascicolo III di quest'anno, pag. 71, il *Prof. Amodeo* si è servito di questo Postulato per dimostrare il teorema: *La somma di più termini non si altera se si scrivono i termini nell'ordine inverso.* Sembra a noi che, data la definizione di somma, com'egli l'ha posta al n. 1, ciò non si possa rigorosamente fare senza includere la verità del teorema 2°

6. *L'addizione e la sottrazione sono operazioni invertibili.* Dico cioè che le due espressioni $(a+b)-c$; $(a-c)+b$ hanno sempre lo stesso valore, essendo $a>c$. Ciò si prova aggiungendo c alla seconda espressione e verificando se la somma eguaglia $a+b$. Abbiamo infatti:

$$(a-c)+b+c=(a-c)+c+b=a+b;$$

ond'è vera l'eguaglianza:

$$2) \qquad (a+b)-c=(a-c)+b,$$

finchè $a>c$.

Da essa deriva che, se chiamiamo *polinomi* le espressioni della forma $a+b-c-d+e-f$, ove le sottrazioni si suppongono sempre possibili, anche questi polinomi, come la somma di più termini, godono della proprietà commutativa.

7. E godono anche della proprietà associativa, perocchè abbiamo:

$$3) \qquad a+(b-c)=a+b-c$$

dove $b>c$. Infatti, dalla prima espressione invertendo i termini, si ha:

$$a+(b-c)=(b-c)+a;$$

e, per la proprietà commutativa dei polinomi:

$$(b-c)+a=(b+a)-c=a+b-c;$$

sicchè la 3) risulta dimostrata.

Concludiamo perciò che i polinomi, finchè hanno signignificato, godono delle stesse proprietà delle somme di più termini; talchè per essi sussiste il teorema analogo a quello del n. 4, e cioè:

La somma di due o più polinomi vale un polinomio unico composto coi termini di ciascuno.

8. Questo teorema contiene in sè la regola per l'addizione dei polinomi; vediamo ora di stabilire quella per la sottrazione dei medesimi. A tal uopo basterà dimostrare la verità delle due seguenti eguaglianze:

$$4) \qquad a-(b+c)=a-b-c$$

$$5) \qquad a-(b-c)=a-b+c\,;$$

la qual cosa faremo servendoci della proprietà caratteristica d'una differenza. Si ha infatti:

$$\begin{aligned}(a-b-c)+(b+c)&=a-b-c+b+c\\&=a-b+b-c+c=a\end{aligned}$$

dunque la 4) è giusta.

Abbiamo inoltre:

$$\begin{aligned}(a-b+c)+(b-c)&=a-b+c+b-c\\&=a-b+b+c-c=a\end{aligned}$$

onde è vera anche la 5).

9. Dalla 4) e dalle proprietà dei polinomi ricavasi che:

$$a-b+c+d-e-f=(a+c+d)-(b+c+f)\,;$$

cioè: *Un polinomio vale la differenza tra la somma dei termini preceduti dal segno + e quella dei termini preceduti dal segno −.*

Dalla 4) e dalla 5) insieme ricavasi:

$$(a-b+c-d)-(e+f-g)=a-b+c-d-e-f+g$$

cioè: *La differenza di due polinomi vale un polinomio unico composto dei termini del primo, col segno che hanno, e dei termini del secondo, col segno mutato.*

10. Le eguaglianze 1), 2), 3), 4), 5) sussistono finchè le sottrazioni, ivi indicate, sono possibili. Onde renderle generali converrà dunque vincere quest'impossibilità; la qual cosa faremo estendendo l'idea di numero.

Osserviamo intanto, che la differenza di due numeri si può trovare in due modi: o partendo dal minuendo e contando indietro le unità del sottraendo; o partendo dal sottraendo e contando in avanti tante unità quante ne occorrono per giungere al minuendo. Ora è chiaro che, mentre il primo di questi metodi non è effettuabile che quando il minuendo è maggiore del sottraendo, il secondo invece è sempre effettuabile: contando dal sottraendo al minuendo in avanti, quando il primo è maggiore del secondo. Di maniera che se nell'idea di numero includeremo il verso secondo cui si contano le unità, sarà facile rendere possibili tutte le sottrazioni.

Distingueremo quindi i numeri in *positivi* e *negativi*, chiamando positivi quelli le cui unità si contano in avanti, e, negativi, quelli che risultano da unità contate indietro; e stabilendo d'indicare i primi cogli stessi segni usati fin qui, fatti però precedere dal segno +, espresso o sottinteso; ed i secondi, cogli stessi segni preceduti invece dal segno −. Onde i segni + e − vengono ora ad acquistare un doppio significato: *operativo*, quando indicano l'addizione e la sottrazione; *effettivo*, quando simboleggiano i numeri positivi e negativi.

La serie dei numeri si estenderà ora indefinitamente in un senso coi numeri positivi o assoluti; e, nel senso opposto, coi numeri negativi.

Fra gli uni e gli altri stà lo zero. Con tal serie è evidente che la differenza di due numeri positivi qualunque è sempre possibile.

11. Reso più vasto il significato di numero, conviene estendere anche i concetti di somma e di differenza.

Diremo *somma di due numeri, il risultato che si ottiene, contando a partire dal primo le unità del secondo nello stesso verso secondo cui esso è stato formato*; quindi, in avanti, se il numero è positivo, e, indietro, se il numero è negativo. Nel primo di questi casi, non havvi nulla di diverso da ciò che fu già stabilito col primitivo significato di somma; e, nel secondo caso trovasi questo risultato: *l'addizione d'un numero negativo equivale alla sottrazione del suo valore assoluto*, cioè:

$$a + (-b) = a - b,$$

qualunque sia a.

Si chiamerà invece *differenza di due numeri il resultato che si ottiene contando il secondo, dopo il primo, in senso opposto a quello secondo cui esso è stato formato*. Quindi, se il numero che si vuol sottrarre è positivo, lo conteremo indietro, come nel primitivo significato di differenza; e, se è negativo, lo conteremo in avanti; onde avremo *che la sottrazione d' un numero negativo equivale all' addizione del suo valore assoluto*, cioè:

$$a - (-b) = a + b,$$

qualunque sia a.

E poichè, tanto nel primo come nel secondo caso, la differenza aggiunta al sottraendo produce sempre il minuendo, si conclude *che la proprietà caratteristica d'una differenza rimane invariata*.

12. È necessario vedere ora se anche le proprietà della somma continuano sempre a sussistere. Osserviamo intanto che qualunque somma di numeri positivi e negativi si riduce ad un polinomio di valori assoluti, come quelli già studiati al n. 6 e seguenti, colla differenza che ora tali polinomi hanno sempre un significato. Di guisa che se riusciremo a dimostrare come questi polinomi godono sempre delle due proprietà commutative ed associative, riterremo senz'altro che la somma conserva tutte le sue proprietà, anche col significato più generale che ora le si è attribuito.

La questione dipende totalmente dalla 2). Quest' eguaglianza vale, come già si è visto, finchè $a > c$; quando invece fosse a qualunque, cioè positivo minore di c o negativo, allora è facile vedere che la dimostrazione fatta al n. 6, può sempre ripetersi, quando si ammetta vera l'eguaglianza 1) qualunque sia a; cioè, quando si ammetta che, *qualunque sia il numero positivo o negativo da cui si parte, valga lo stesso contare successivamente in avanti più valori assoluti come contare la loro somma*.

Fatta quest' ammissione, si può ritenere che la 2) valga qualunque sia a, e che quindi i polinomi di valori assoluti godano della proprietà commutativa. Ripetendo poi la dimostrazione del n. 7, si vedrà che gli stessi polinomi godono pure della proprietà associativa.

13. Giunti a questo punto, si dimostra subito che la proprietà commutativa della somma di numeri qualunque sussiste sempre.

Abbiamo infatti:

$$a + (-b) + (-c) + d = a - b - c + d = a - c + d - b$$
$$= a + (-c) + d + (-b).$$

Avendosi inoltre:

$$a + [(-b) + (-c) + d] = [(-b) + (-c) + d] + a$$
$$= (-b) + (-c) + d + a$$
$$= a + (-b) + (-c) + d,$$

si deduce che anche la proprietà associativa sussiste sempre.

Laonde, avendo già veduto che le egualianze 1), 2), 3), 4), 5) con tutte le conseguenze che se ne ricavano, si deducono dalle proprietà fondamentali della somma e della differenza, senza stare ora a riportare le stesse dimostrazioni che hanno servito a stabilirle, riterremo che le dette egualianze valgano per tutti i numeri, positivi e negativi.

E allora, se colla parola *polinomio* intendiamo qualunque espressione della forma $a + b - c - d + e$, dove le lettere stanno a rappresentare numeri qualunque, positivi o negativi, diremo che questi polinomi godono della proprietà commutativa ed associativa, e che per essi valgono tutte le proprietà dei polinomi di valori assoluti, e quindi anche le regole d'addizione e di sottrazione dei medesimi.

M. Gremigni.

TEMI DI MATEMATICA
PER LA LICENZA D'ISTITUTO TECNICO
NELLA SEZIONE *FISICO-MATEMATICA* (*)

ESTATE 1872, 1°). – *È dato un recipiente avente la forma di un cono retto, il quale contiene dell'acqua che s'innalza fino ad un'altezza pure data.* $D = 8^m$ *ed* $H = 3^m$ *sono rispettivamente il diametro della base e l'altezza del cono,* $h = 1^m$ *è l'altezza dell'acqua.*

Si domanda il raggio x *d'una sfera di metallo che immersa nel liquido ne faccia sollevare il piano di livello fino a che questo divenga tangente alla sfera medesima.*

Il volume dell'acqua nel recipiente sarà: $\frac{\pi h^3 D^2}{12 H^2}$, quello della sfera: $\frac{4}{3}\pi x^3$. L'altezza h_1 dell'acqua dopo l'immersione della sfera potrà ottenersi osservando che coll'immaginare una sezione meridiana del cono si ha un triangolo rettangolo di cui un vertice A è il vertice del cono, un altro vertice B (quello dell'angolo retto) è il punto di tangenza della superficie di livello dell'acqua colla sfera e il terzo vertice è uno dei punti C in cui la traccia di questa sezione incontra il lato del cono, nel quale la retta congiungente C col centro O della sfera è bisettrice dell'angolo ACB. Sarà quindi:

$$AB : x = AC + CB : CB = D + \sqrt{D^2 + 4H^2} : D$$

donde:

$$AB = h_1 = \frac{x}{D}\left(D + \sqrt{D^2 + 4H^2}\right) = \frac{x}{D} \cdot \alpha.$$

(*) Crediamo fare cosa grata ai professori ed alunni degli Istituti tecnici [illegible]ando quei temi proposti per esame di licenza dalla sezione *fisico-matematica* che ci parvero maggiormente meritevoli di sviluppo, scegliendoli fra della collezione purtroppo incompleta che possediamo.

Il raggio della base del cono d'acqua, dopo l'immersione della sfera, essendo poi $\frac{h_1 D}{2H}$, l'equazione che serve alla determinazione di x sarà:

$$h_1^3 D^2 = 16H^2 x^3 + h^3 D^2,$$

ovvero sostituendo ad h_1 il valor precedente poi ricavando x:

$$x = \frac{hD}{\sqrt[3]{\alpha^3 - 16H^2.D}}.$$

Questa formola mostra che x è sempre reale, ma è facile anche vedere che $x > 0$. Infatti si ha:

$$\alpha^3 = [D + \sqrt{D^2 + 4H^2}]^3 = 12H^2D + 4H^2\sqrt{D^2 + 4H^2} + 4D^3 + 4D^2\sqrt{D^2 + 4H^2}$$

e poichè $\sqrt{D^2 + 4H^2} > D$, segue $\alpha^3 > 16H^2D$.

Il raggio della sfera pel caso numerico proposto è $0^m,4772$.

Estate, 1877, Ia). — *La longitudine di Roma all' ovest di Berlino è* 0,003, *e quella di Vienna all'est della stessa città è* 0,008: *supposte le longitudini espresse in parti decimali del giorno* (= 360°). *Le latitudini di Roma e Vienna, espresse in gradi e parti decimali di grado, sono rispettivamente* 41,902 *e* 48,210. — *Calcolare la minima distanza tra Roma e Vienna, nell'ipotesi che la superficie terrestre sia sferica.*

Risposta: Cm. 765, 123.

Estate 1877, IIb), — *Dimostrare che i punti di concorso delle mediane delle facce d'un tetraedro sono i vertici d'un altro tetraedro, simile al dato — Trovare il rapporto dei loro volumi.*

Sia ABCD un tetraedro e conducansi le mediane BC'', BD'' delle due facce ABD, ABC, sarà $C''D''$ parallela a DC ed uguale ad $\frac{1}{2}$DC. Se si prendono ora sulle due mediane considerate, quei punti C', D' tali che $BC' = 2C'C''$, $BD' = 2D'D''$, C' e D' saranno i baricentri delle facce ABD, ABC, e vertici dell' altro tetraedro, e si avrà $C'D'$ parallela a $C''D''$ e $C'D' = \frac{2}{3} C''D''$, onde $C'D'$ parallela a CD ed $= \frac{1}{3}$ DC. In modo analogo si dimostra che gli altri spigoli del nuovo tetraedro sono tutti paralleli ai rispettivi altri spigoli del primo e perciò i due tetraedri hanno le facce simili e sono simili l'uno all' altro.

Il rapporto dei volumi dei due solidi, uguale a quello del cubo degli spigoli omologhi, sarà $\overline{C'D'}^3 : \overline{CD}^3 = 1 : 27$.

ESTATE, 1878, IIb). — *In quanti triangoli differenti può esser diviso un poligono di* n *lati per mezzo di diagonali, un lato almeno del poligono essendo sempre uno dei lati dei triangoli?*

Risposta: $n(n - 3)$.

AUTUNNO 1878, Ib). — *Dividere un numero* 2a *in due parti tali, che la somma dei quozienti di ciascuna parte divisa per l'altra sia un minimo.*

Chiamando s la somma dei quozienti di ciascuna parte divisa per l' altra ed x una delle parti, l' equazione dalla quale si determinerà x, sarà: $\frac{x}{2a - x} + \frac{2a - x}{x} = s$, da cui $x = a \pm \sqrt{a^2 - \frac{4a^2}{2 + s}}$. Ora poichè x sia reale conviene che si abbia $\frac{4}{2 + s} \leqq 1$, ovvero $s \geqq 2$. Al minimo valore 2 di s corrispondendo ora i valori $x = a$, $2x - a = a$, segue che « Un numero è diviso in due parti tali che la somma dei quozienti di ciascuna parte divisa per l'altra è un minimo, quando queste parti sono uguali ».

ESTATE 1879, Ia). — *Trovare una progressione per quoziente, data la somma de'suoi termini, la somma dei loro quadrati, e la somma dei loro cubi.*

Sia a il primo termine della progressione, q la ragione, n il numero dei termini, A la loro somma, B quella dei loro quadrati e C quella dei loro cubi. Sarà:

$$A = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}; \quad B = \frac{a^2(q^{2n} - 1)}{q^2 - 1}, \quad C = \frac{a^3(q^{3n} - 1)}{q^3 - 1},$$

talchè dall' eliminazione di a si avranno le equazioni:

$$\frac{B}{A^2} = \frac{q^n+1}{q^n-1} \cdot \frac{q-1}{q+1} = \frac{z+1}{z-1} \cdot \frac{q-1}{q+1};$$

$$\frac{C}{A^3} = \frac{q^{2n}+q^n+1}{q^{2n}-2q^n+1} \cdot \frac{(q-1)^2}{q^2+q+1} = \frac{z^2+z+1}{z^2-2z+1} \cdot \frac{(q-1)^2}{q^2+q+1},$$

avendo posto $q^n = z$.

Ricavando z dalla prima si ha:

$$q^n = z = \frac{B(q+1)+A^2(q-1)}{B(q+1)-A^2(q-1)},$$

e sostituendo questo valore nella seconda risulta l'equazione:

$$4AC\,(q^2+q+1) = 3B^2(q+1)^2 + A^4(q-1)^2$$

che è di secondo grado rispetto a q e dalla quale può ricavarsi questa quantità. Facendo il calcolo si ottiene:

$$(1) \qquad q = \frac{3B^2 - 2AC - A^4 \pm 2\sqrt{3A(B^2-AC)(C-A^3)}}{4AC - 3B^2 - A^4}.$$

Il primo termine a si deduce immediatamente dalla $a = \dfrac{A(q-1)}{q^n-1}$, sostituendo a q^n il valore precedentemente determinato ed ha per espressione

$$a = \frac{B(q+1)-A^2(q-1)}{2A}.$$

Il numero dei termini potrà finalmente dedursi dalla relazione

$$n\log q = \log \frac{B\dfrac{q+1}{q-1}+A^2}{B\dfrac{q+1}{q-1}-A^2}$$

sostituendo a $\log q$ il valore che si ha prendendo il logaritmo del 2° membro della (1) ed a q il valore (1) medesimo.

La condizione da soddisfare affinchè il valore di q sia reale è che si abbia o $B^2 > AC > A^4$ oppure $B^2 < AC < A^4$, quella da verificarsi perchè n sia intero è evidentemente che $\frac{B(q+1)+A^2(q-1)}{B(q+1)-A^2(q-1)}$ sia una potenza intera positiva di q.

Estate 1879, IIa). — *Trovare due numeri di cui è data la somma* 2s, *e la somma o la differenza delle loro quarte potenze* 2q.

a). Chiamando x uno dei numeri cercati, l'equazione a cui dà luogo il problema è, nel caso in cui sia data la somma delle loro quarte potenze:

$$x^4 + (2s - x)^4 = 2q$$

ovvero:

$$x^4 - 4sx^3 + 12s^2x^2 - 16s^3x + 8s^4 = q.$$

Per risolvere quest' equazione di quarto grado si faccia scomparire il termine di 3° grado ponendo $x = y + z$ poi determinando convenientemente z. Con la sostituzione si ricava:

$$y^4 + 4(z-s)\,y^3 + 6(z^2 - 2sz + 2s^2)\,y^2 + 4(z^3 - 3sz^2 + 6s^2z - 4s^3)y$$
$$+ z^4 - 4sz^3 + 12s^2z^2 - 16s^3z + 8s^4 = q,$$

onde il valore da darsi a z è quello che annulla il coefficiente di y^3, ossia $z = s$, talchè $x = y + s$. L'equazione precedente diviene dopo ciò

$$y^4 + 6s^2y^2 + s^4 = q,$$

quindi

$$x = y + s = s \pm \sqrt{-3s^2 \pm \sqrt{8s^4 + q}}.$$

Dei quattro valori compresi nella formola precedente quelli corrispondenti al segno — davanti al secondo vincolo radicale sono da rifiutare poichè darebbero per x valori immaginari. Rimangano quindi a considerare i due seguenti:

$$x = s \pm \sqrt{-3s^2 + \sqrt{8s^4 + q}}.$$

Perchè questi siano reali conviene intanto che si abbia $q \geqq s^4$. Consideriamo i due casi. Se $q = s^4$ risulta $x = s$, onde i due numeri sono uguali. Quando poi sia $q > s^4$ allora i valori di x sono reali e differenti e ponendo $q = s^4 . \alpha$, dove $\alpha > 1$, essi possono scriversi:

$$x = s \left\{ 1 \pm \sqrt{-3 + \sqrt{8 + \alpha}} \right\},$$

onde i due numeri cercati saranno

$$s \left\{ 1 + \sqrt{-3 + \sqrt{8 + \alpha}} \right\}, \quad s \left\{ 1 - \sqrt{-3 + \sqrt{8 + \alpha}} \right\}.$$

b). Nel caso poi in cui sia data la differenza delle quarte potenze dei due numeri l'equazione del problema è:

$$x^4 - (2s - x)^4 = 2q,$$

dove x rappresenta il numero maggiore, ovvero

$$4sx^3 - 12s^2x^2 + 16\, s^3x - 8s^4 = q.$$

Facendo sparire il termine di 2° grado col porre, come precedentemente, $x = y + s$, per determinare y si ha l'equazione cubica

$$(1) \qquad y^3 + s^2 y - \frac{q}{4s} = 0.$$

Per risolverla col metodo di *Tartaglia*, pongasi $y = u + v$, poi si determini v in modo che scompaia il secondo termine dell'equazione risultante, ossia facciasi $v = -\frac{s^2}{3u}$. Con ciò l'equazione proposta si riduce alla seguente

$$u^3 + v^3 - \frac{q}{4s} = 0 \quad \text{ossia:} \quad u^6 - \frac{q}{4s} u^3 - \frac{s^6}{27} = 0,$$

quindi

$$u^3 = \frac{q}{8s} \pm \sqrt{\frac{q^2}{64s^2} + \frac{s^6}{27}}, \qquad v^3 = \frac{q}{4s} - u^3 = \frac{q}{8s} \mp \sqrt{\frac{q^2}{64s^2} + \frac{s^6}{27}},$$

da cui deducesi $uv = -\frac{s^2}{3}$.

Le radici della (1) sono per conseguenza

$$y = x - s = \left\{ \frac{q}{8s} + \sqrt{\frac{q^2}{64s^2} + \frac{s^6}{27}} \right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{ \frac{q}{8s} - \sqrt{\frac{q^2}{64s^2} + \frac{s^6}{27}} \right\}^{\frac{1}{3}}.$$

Siccome ogni quantità ha tre radici cubiche, sarebbero nove i valori che si otterrebbero per x, ma tre soli sono accettabili. Per determinare questi ultimi basta come è noto osservare che posto $\beta = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$, le tre radici cubiche di 1 sono 1, β e β^2, onde dinotando con m una delle radici cubiche di u^3, ossia di $\frac{q}{8s} + \sqrt{\frac{q^2}{64s^2} + \frac{s^6}{27}}$ le due altre saranno $m\beta$ ed $m\beta^2$ e dinotando con n una delle radici di v^3 le altre saranno $n\beta$ ed $n\beta^2$. Supponendo che m ed n siano prese in modo da soddisfare la condizione che sia $uv = -\frac{s^2}{3}$, come richiede il procedimento seguìto, i valori di y da accettare saranno solo quelli corrispondenti alle coppie seguenti di valori per u e v:

$$u = m,\ v = n\ ;\ u = \beta m,\ v = \beta^2 n\ ;\ u = \beta^2 m,\ v = \beta n.$$

Ora essendo reali le espressioni di u^3 e v^3, poichè la quantità sotto ai vincoli radicali è necessariamente positiva, i valori cercati di x si riducono a quello solo che si ha prendendo $u = m$, $v = n$ nell'ipotesi che m ed n rappresentino i valori aritmetici delle radici cubiche di u^3 e v^3, giacchè per le due altre coppie di valori di u e v, x sarebbe immaginaria e non può essere $\frac{q^2}{64s^2} + \frac{s^6}{27} = 0$. Il problema anche in questo caso ha dunque un'unica soluzione, quella per la quale i numeri cercati hanno i valori:

$$s + m + n\ ;\quad s - m - n.$$

Osservazione. — Il primo caso del problema, quello cioè in cui è data, oltre alla somma dei due numeri, la somma delle loro quarte potenze, potevasi anche far dipendere dalla risoluzione d'una equazione di 2° grado in modo più elementare, osservando che

$$(x+y)^4 = x^4+y^4+4x^3y+4xy^3+6x^2y^2 = x^4+y^4+4xy(x+y)^2-2x^2y^2,$$

onde chiamando x ed y i numeri cercati, si può determinare xy risolvendo l'equazione di 2° grado

$$16s^4 = 2q + 16s^2\,(xy) - 2(xy)^2.$$

Trovato xy si conosce la somma ed il prodotto dei due numeri ed allora è facile avere i numeri stessi. A. Lugli.

TEOREMI SUL TRONCO DI PRISMA

I.

Sia il quadrilatero convesso ABCD la base d' un tronco di prisma retto, e sieno $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$, $DD_1 = d$ gli spigoli laterali; sia inoltre P il punto d' incontro delle diagonali della base, e OO_1 il segmento parallelo agli spigoli laterali e terminato ai due piani ABCD e $A_1B_1C_1D_1$. Posto

$$\text{area ABCD} = S, \quad \frac{OC}{OA} = h, \quad \frac{OD}{OB} = k,$$

sarà

$$\text{area DCB} = \frac{h}{h+1} S, \quad \text{area ADB} = \frac{1}{h+1} S,$$

$$\text{area ADC} = \frac{k}{k+1} S, \quad \text{area ACB} = \frac{1}{k+1} S,$$

epperciò, indicando con V il volume del tronco, si troverà

$$V = \frac{h}{h+1} S . \frac{b+c+d}{3} + \frac{1}{h+1} S . \frac{a+b+d}{3} \qquad (1)$$

ed anche

$$V = \frac{k}{k+1} S . \frac{a+c+d}{3} + \frac{1}{k+1} S . \frac{a+b+c}{3} \qquad (2)$$

Eguagliando queste due espressioni di V si ottiene, dopo alcune riduzioni,

$$\frac{c+ah}{1+h} = \frac{d+bk}{1+k} \qquad (3)$$

la quale relazione si può altresì dimostrare eguagliando le due espressioni del segmento OO_1 che si ricavano dai due trapezi ACA_1C_1, BDB_1D_1; e questa seconda dimostrazione è indipendente dall'ipotesi che gli spigoli laterali AA_1, BB_1, CC_1 DD_1 sieno perpendicolari alla base ABCD.

Ora se la base è un parallelogramma si ha $h = k = 1$, e dalle (3) (1) si ricava

$$a + c = b + d, \quad V = S\,\frac{a + b + c + d}{4};$$

si hanno così i due teoremi:

1. *Nel tronco di parallelepipedo la somma di due spigoli laterali opposti è eguale alla somma degli altri due spigoli laterali.*

2. *Il volume d'un tronco di parallelepipedo retto è dato dal prodotto dell'area della base per la media aritmetica degli spigoli laterali.*

Supponiamo ora che il quadrilatero ABCD sia diviso dalla diagonale BD in due triangoli equivalenti, e che il volume del tronco sia dato dal prodotto dell'area della base per la media aritmetica degli spigoli laterali. In tali ipotesi sarà

$$h = 1, \quad V = S.\frac{a + b + c + d}{4}$$

epperciò si avrà dalla (1)

$$S.\frac{a + b + c + d}{4} = \tfrac{1}{2}\,S.\frac{b + c + d}{3} + \tfrac{1}{2}\,S.\frac{a + b + d}{3}$$

cioè

$$a + c = b + d,$$

e in conseguenza la (3) diverrà

$$\frac{d + bk}{k + 1} = \frac{b + d}{2}$$

ossia

$$(d - b)\ (k - 1) = 0,$$

la quale richiede che sia $k = 1$, oppure $d = b$; perciò si ha il teorema:

3. *Se la base d'un tronco di prisma retto quadrangolare è divisa da una diagonale in due triangoli equivalenti, e se il volume di quel tronco è dato dal prodotto dell'area della base per la media aritmetica degli spigoli laterali, la base dev'essere un parallelogramma, oppure devono es-*

sere eguali fra loro i due spigoli laterali che partono dagli estremi di quella diagonale.

Sia ABCD un trapezio del quale sieno AB e CD i lati paralleli, e si supponga inoltre che il volume del tronco sia dato dal prodotto dell'area della base per la media aritmetica degli spigoli laterali. Dall' ipotesi risulta

$$k = h, \qquad 2V = S \,.\, \frac{a+b+c+d}{2}\,;$$

perciò addizionando le (1) (2) si avrà

$$\frac{h}{h+1}\; S \,.\, \frac{a+b+2c+2d}{3} + \frac{1}{h+1}\; S . \frac{c+d+2a+2b}{3} = S . \frac{a+b+c+d}{2}$$

e quindi

$$(h-1)\;(c+d) = (h-1)\;(a+b).$$

Perciò escluso il caso di $h = 1$, nel quale la base sarebbe un parallelogramma, dovrà essere

$$c + d = a + b\,.$$

Si ha dunque il teorema :

4. *Se un tronco di prisma retto ha per base un trapezio , e se il suo volume è dato dal prodotto dell'area della base per la media aritmetica degli spigoli laterali , la somma di due spigoli laterali passanti per gli estremi d' uno dei lati paralleli di quel trapezio dev' essere eguale alla somma degli altri due spigoli laterali.*

II.

5. *Se la base d'un tronco di prisma retto è un poligono di numero pari di lati nel quale i lati opposti sieno a due a due eguali e paralleli, il volume di quel tronco si ottiene moltiplicando l'area della base per la media aritmetica degli spigoli laterali.*

Sia ABC . . . A'B'C' . . . la base, e sieno $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$, . . . $A'A'_1 = a_1$, $B'B'_1 = b_1$, $C'C'_1 = c_1$, . . . gli spigoli laterali. Poichè i lati opposti del poligono base sono eguali e paralleli, le congiungenti i vertici opposti passeranno per uno stesso punto O, punto medio di ciascuna di esse; perciò indicando con m la misura di quel segmento OO_1 parallelo agli spigoli laterali, che parte da O ed è terminato al piano della sezione obliqua, i trapezi $AA'A_1A'_1$, $BB'B_1B'_1$, $CC'C_1C'_1$, . . . daranno

$$2m = a + a_1 = b + b_1 = c + c_1 = \dots$$

dalle quali risulta

$$4m = a + b + a_1 + b_1 = b + c + b_1 + c_1 = \dots$$

e risulta pure che m è la media aritmetica delle a, b, c, . . a_1, b_1, c_1 . .

Ora considerando i tronchi di prismi triangolari $OABO_1A_1B_1$, $OA'B'O_1A'_1B'_1$, $OBCO_1B_1C_1$, $OB'C'O_1B'_1C'_1$, ecc. si ottiene

$$\text{Vol. } OABO_1A_1B_1 + \text{Vol. } OA'B'O_1A'_1B'_1 = \tfrac{1}{3}\text{ area } OAB.(a+b+a_1+b_1+2m)$$
$$= 2 \text{ area } OAB.m,$$

$$\text{Vol. } OBCO_1B_1C_1 + \text{Vol. } OB'C'O_1B'_1C'_1 = 2 \text{ area } OBC.m,$$

e l'altre analoghe; perciò è chiaro che il volume del tronco $ABC\,..\,A'B'C'A_1B_1C_1\,..\,A'_1B'_1C'$, sarà dato dal prodotto

$$\text{area } ABC..A'B'C'.m$$

6. *Se una base d'un tronco di prisma è un poligono regolare, il segmento parallelo agli spigoli laterali, condotto pel centro di quel poligono e terminato alle due basi, è eguale alla media aritmetica degli spigoli laterali.*

Se la base ha un numero pari di lati, il teorema risulta da quanto è stato dimostrato al N.º precedente. Sia ora la base un poligono regolare di un numero dispari di lati, p. e. il pentagono ABCDE. Sia O il centro del poligono e sieno A', B', C'. . . i punti in cui le congiungenti il centro coi vertici A, B, C . . . incontrano i lati rispettivamente opposti CD, DE, EA, . . Considerando il trapezio $AA_1A'A'_1$ nel quale è il segmento OO_1 parallelo ai lati paralleli, e ponendo

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{BO}{OB'} = \dots = k,$$

si ottiene

$$\frac{m - a}{A'A'_1 - m} = k\,,$$

ma dal trapezio CDC_1D_1, essendo A' il punto medio di CD, risulta

$$A'A'_1 = \frac{c + d}{2}$$

perciò sarà

$$\frac{m - a}{\frac{c + d}{2} - m} = k$$

e quindi

$$m\,(1 + k) = a + \frac{k}{2}\,(c + d).$$

Si otterrà in modo analogo

$$m\,(1 + k) = b + \frac{k}{2}\,(d + e)$$

$$m\,(1 + k) = c + \frac{k}{2}\,(e + a)$$

$$m\,(1 + k) = d + \frac{k}{2}\,(a + b)$$

$$m\,(1 + k) = e + \frac{k}{2}\,(b + c)$$

le quali cinque eguaglianze addizionate, danno

$$5m(1 + k) = a + b + c + d + e + \frac{k}{2}\,(2a + 2b + 2c + 2d + 2e)$$

cioè

$$5m = a + b + c + d + e.$$

7. *Se un tronco di prisma retto ha per base un poligono regolare, il suo volume è dato dal prodotto dell'area della base per la media aritmetica degli spigoli laterali.*

Questo è un caso particolare del teorema 5. quando la base ha un numero pari di lati. Quando la base ha un numero dispari di lati il teorema si dimostra mediante la decomposizione nei prismi triangolari $OABO_1A_1B_1$, $OBCO_1B_1C_1$, ... e l'applicazione del teorema 6.

ESERCIZI PER LA SCUOLA

Sui triangoli simili.

1. Dal punto B′, medio del lato AB del triangolo ABC, è condotta la parallela al lato BC la quale incontra il lato AC in C′, e dal punto C′ la parallela al lato AB la quale incontra BC in A′. Provare che i due triangoli AB′C′, CC′A′ sono fra loro eguali.
2. Dai punti B′ e B″ che dividono in tre parti eguali il lato AB del triangolo ABC sono condotte le parallele al lato BC le quali incontrano il lato AC nei punti C′ e C″. Provare che i segmenti AC′, C′C″, C″C sono fra loro eguali. In quale caso i segmenti AC′, C′C″, C″C sono eguali ai segmenti AB′, B′B″, B″B?
3. Sulla retta LM sono i segmenti fra loro eguali AB, BC, CD, DE, ... e dai punti A, B, C, D, .. sono condotte tante rette fra loro parallele fino ad incontrare in A′, B′, C′, D′... la retta L′M′. Provare che i segmenti A′B′, B′C′, C′D′, .. sono tutti fra loro eguali. Quando accade che i segmenti A′B′, B′C′, ... sieno eguali ai segmenti AB, BC, CD, ...?
4. Dai punti ABC della retta LM sieno condotte tre rette fra loro parallele fino ad incontrare in A′, B′, C′ l'altra retta L′M′. Provare: 1) che se BC è $\frac{7}{15}$ di AB, dev'essere anche B′C′ $\frac{7}{15}$ di A′B′; 2) che se la BC è maggiore del segmento che contiene 397 volte la millionesima parte della AB, ma minore di quello che la contiene 398 volte, anche B′C′ dev'essere maggiore di 397 volte la millionesima parte di A′B′ e minore di 398 volte questa millionesima parte.
5. Dal punto B′ del lato AB del triangolo ABC sia condotta la parallela al lato BC fino al punto C′ in cui essa incontra il lato AC. Provare che se la AB′ contiene 17 volte la ventinovesima parte della BB′, la B′C′ deve contenere 17 volte la quarantaseiesima parte della BC.
6. Nei triangoli ABC, A′B′C′ sia l'angolo A = A′, e l'angolo B = B′. Provare che, se il triangolo A′B′C′ viene collo-

cato in modo che i lati A'B', A'C' cadano rispettivamente sulle rette AB, AC, la B'C' risulta parallela alla BC.

7. Due triangoli isosceli hanno eguale l'angolo al vertice, e la base dell'uno è $\frac{17}{29}$ di quella dell' altro. Trovare il rapporto delle altezze dei due triangoli, e quello dei loro perimetri.

8. Sia ABC un triangolo rettangolo in B, e dal punto L del cateto BC si conduca la LH perpendicolare all' ipotenusa AC. Dati: $AB = 7$, $LH = 3$, $LC = 6$, trovare la lunghezza della AC.

9. Dal vertice A dell' angolo retto d' un triangolo rettangolo BAC si guida la AM perpendicolare all'ipotenusa. Date le lunghezze: $AC = 60$, $AB = 80$, trovare quelle dei due segmenti BM e CM, e della perpendicolare AM.

10. Dagli estremi A e B d'un segmento si guidano ad esso, ma da bande opposte, le perpendicolari, le quali vengono incontrate nei punti A' e B' da una retta passante per un punto C del segmento AB. Date: $A'C = 3$, $CB' = 7$, $AB = 30$, calcolare le lunghezze AC e CB.

11. Dimostrare che il rapporto di due lati d'un triangolo è l'inverso del rapporto delle corrispondenti altezze.

12. Nei triangoli ABC, A'B'C' sia l'angolo $A = A'$, AB eguale a $\frac{7}{18}$ di A'B', e $AC = \frac{7}{18}$ di A'C'. Provare che, trasportato il triangolo A'B'C' in guisa che il lato A'B' cada sulla AB e il lato A'C' sulla AC, la B'C' deve risultare parallela a BC.

13. Sieno i punti D, E l'uno sul lato AB del triangolo ABC, e l'altro sul lato AC. Se il rapporto di AD ad AC è eguale al rapporto di AE ad AB, è necessario che la DE sia parallela alla BC?

14. Sia BAC un triangolo rettangolo in A e DEF un triangolo rettangolo in D, e sia AB eguale a $\frac{17}{25}$ di DE, e AC eguale a $\frac{17}{25}$ di DF. Se la EF viene divisa in 100 parti eguali, quante di esse saranno contenute nella BC?

15. Un cateto d'un triangolo rettangolo è $\frac{7}{25}$ dell'ipotenusa;

in un altro triangolo rettangolo il rapporto d'un cateto all'ipotenusa è $\frac{24}{25}$. Provare che il minor angolo del primo triangolo è eguale al minor angolo del secondo.

16. Nei triangoli ABC, A'B'C' sia AB eguale a $\frac{18}{8}$ di A'B', BC eguale a $\frac{18}{8}$ di B'C', e CA eguale a $\frac{18}{8}$ di C'A'. Provare che, se il triangolo A''B''C'' ha l'angolo $A'' = A'$, $A''B'' = AB$, e $A''C'' = AC$, quel triangolo dev'essere eguale al triangolo ABC.

17. Nei triangoli ABC, DHL sia AB eguale a $\frac{19}{20}$ di HL, BC eguale a $\frac{19}{20}$ di LD, e HD eguale a $\frac{20}{19}$ di AC. Provare che l'angolo A è eguale all'angolo H, e l'angolo B all'angolo L.

18. Gli angoli del triangolo ABC sono eguali a quelli del triangolo DEF, ed è il lato AB eguale al lato DE. È necessario che i due triangoli sieno eguali?

19. Trovare due triangoli diseguali i quali abbiano cinque elementi eguali.

20. Nei triangoli ABC, DEF è l'angolo $A = D$, l'angolo $B = E$, e il lato BC doppio di EF. Decomporre il triangolo ABC in quattro triangoli eguali a DEF.

21. Nei triangoli ABC, DEF è l'angolo $A = D$, l'angolo $B = E$, e il lato BC triplo di EF. Provare che il triangolo ABC contiene nove triangoli eguali a DEF.

22. Gli angoli del triangolo ABC sono eguali a quelli del triangolo DEF, e il maggior lato del primo triangolo è $\frac{8}{7}$ del maggior lato del secondo. Trovare il rapporto dell'area ABC all'area DEF.

23. Gli angoli del triangolo ABC sono eguali a quelli del triangolo DEF, e il maggior lato del primo contiene n volte il maggior lato del secondo. Provare che il triangolo ABC contiene tanti triangoli eguali a DEF quant'è la somma

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1),$$

e che questa somma è eguale ad n^2.

24. Un triangolo rettangolo ha un angolo di 32° e l'ipotenusa di 25 metri; un altro triangolo rettangolo ha pure un angolo di 32° ma l'ipotenusa di 42 metri. Se il pe-

rimetro del primo triangolo è diviso in 100 parti eguali, quante di esse saranno contenute nel perimetro del secondo? Se l'area del primo triangolo è divisa in 10000 parti eguali, quante di esse saranno contenute nell'area del secondo?

25. Un triangolo isoscele ha l'angolo al vertice di $37°15'$ e l'area di m.q. 1,5625; un altro triangolo isoscele ha pure l'angolo al vertice di $37°15'$, ma l'area di decimetri quadrati 187,69. Se la base del primo triangolo è divisa in 1000 parti eguali, quante di esse saranno contenute nella base del secondo?

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 8, 12, 13 E 14.

(8) — *Se un pentagono ha la proprietà che le congiungenti i vertici ai punti di mezzo dei lati rispettivamente opposti passino per uno stesso punto, e sieno in questo punto divise in modo che il rapporto delle sue distanze da un vertice e dal punto di mezzo del lato opposto sia eguale per tutte, quel rapporto deve avere lo stesso valore che gli corrisponde nel pentagono regolare convesso o stellato.* (D. Besso).

Dimostrazione del Prof. *F. Viaggi* (*):

Sia $A_1A_2 .. A_5$ il pentagono; $B_1, B_2, . , B_5$ i punti di mezzo dei lati che si oppongono ad $A_1, A_2, ..., A_5$; O il il punto in cui concorrono le A_1B_1, A_2B_2,... e sia

$$\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{OA_2}{OB_2} = ... = k$$

essendo k una costante positiva o negativa.

I pentagoni $A_1A_2 .. A_5$ e $B_1B_2 .B_5$ sono omotetici direttamente o inversamente secondochè $k \gtrless 0$, e quindi $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = k$; ma nel triangolo $A_3A_4A_5$, $\frac{B_1B_2}{A_3A_5} = \frac{1}{2}$ dunque $\frac{A_1A_2}{A_3A_5} = \frac{k}{2}$: così

(*) Una dimostrazione consimile è stata inviata dal Prof. *G. Riboni*.

ogni lato del pentagono è parallelo ad una diagonale e tra loro sussistono le seguenti proporzioni vere pei valori algebrici dei segmenti

$$\frac{A_1A_2}{A_3A_5}=\frac{A_2A_3}{A_4A_1}=\frac{A_3A_4}{A_5A_2}=\frac{A_4A_5}{A_1A_3}=\frac{A_5A_1}{A_2A_4}=\frac{k}{2} \qquad (\alpha)$$

Se k è negativa A_1A_5, A_2A_3 sono paralleli e diretti nello stesso senso di A_2A_4, A_1A_4, dunque i cinque vertici sono in uno stesso piano e A_1, A_3 cadono con A_4 dalla stessa banda del lato A_1A_2; se k è positiva, cadono da bande opposte: la quale osservazione ripetuta pei singoli lati permette di conchiudere che il pentagono proposto è piano, e convesso o stellato secondo che $k \lesseqgtr 0$.

Se le diagonali A_1A_3, A_2A_5, prolungate se è necessario, si tagliano in S, il quadrangolo $A_3A_4A_5S$ è parallelogramma, quindi SA_5 è equipollente ad A_3A_4 e da (α)

$$\frac{SA_5}{A_5A_2}=\frac{k}{2};$$

e poichè A_1A_2, A_3A_5 sono parallele, i triangoli A_1A_2S, A_3A_5S sono simili e per (α)

$$\frac{A_2S}{A_5S}=\frac{A_1A_2}{A_3A_5}=\frac{k}{2}.$$

Le ultime proporzioni permettono di scrivere

$$\frac{A_2S}{A_5S}=\frac{SA_5}{A_5A_2}=\frac{k}{2} \qquad (\beta)$$

da cui, essendo $A_2S+SA_5=A_2A_5$,

$$\frac{A_2A_5}{A_5S+A_5A_2}=\frac{k}{2},$$

quindi, invertendo e componendo,

$$\frac{A_5S}{A_2A_5}=\frac{k+2}{k}$$

e confrontando con (β)

$$\frac{k}{2}=\frac{k+2}{k}$$

epperciò $k = \sqrt{5} + 1$ oppure $k = 1 - \sqrt{5}$ secondo che k è positiva o negativa.

In un pentagono piano regolare convesso o stellato si verificano le condizioni supposte nel teorema, dunque in esso k ha il valore testè determinato.

(12) — *Dimostrare che la potenza* n^a *della media aritmetica delle radici* n^e *di più numeri positivi diminuisce al crescere di* n. (D. Besso).

Dimostrazione del Prof. *F. Viaggi*:

Sia n intero e positivo, a, b positivi e $a > b$. Pongo

$$\mathrm{F} = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}, \quad x = \frac{(a-b)b^n}{a^n + b^n}, \quad y = \frac{(a-b)a^n}{a^n + b^n}.$$

Dividendo membro a membro la prima per la seconda delle seguenti identità

$$a^n - \mathrm{F}^n = (a - \mathrm{F})\ (\mathrm{F}^{n-1} + a\mathrm{F}^{n-2} + \ldots + a^{n-1})$$
$$\mathrm{F}^n - b^n = (\mathrm{F} - b)\ (\mathrm{F}^{n-1} + b\mathrm{F}^{n-2} + \ldots + b^{n-1}),$$

e notando che

$$\frac{a - \mathrm{F}}{\mathrm{F} - b} = \frac{x}{y} = \frac{b^n}{a^n},$$

si ottiene

$$\frac{a^n - \mathrm{F}^n}{\mathrm{F}^n - b^n} = \frac{b^n\mathrm{F}^{n-1} + ab^n\mathrm{F}^{n-2} + \ldots + a^{n-1}b^n}{a^n\mathrm{F}^{n-1} + a^n b\mathrm{F}^{n-2} + \ldots + a^n b^{n-1}}.$$

La frazione che costituisce il secondo membro si può considerare ottenuta dividendo la somma dei numeratori per la somma dei denominatori delle frazioni

$$\frac{b^n\mathrm{F}^{n-1}}{a^n\mathrm{F}^{n-1}}, \quad \frac{ab^n\mathrm{F}^{n-2}}{a^n b\mathrm{F}^{n-2}}, \ldots, \frac{a^{n-1}b^n}{a^n b^{n-1}}$$

tutte minori dell' unità, nell'ipotesi fatta $a > b$; è quindi compresa tra la maggiore e la minore di queste ultime, epperò essa stessa è minore dell'unità, ossia

$$\frac{a^n - \mathrm{F}^n}{\mathrm{F}^n - b^n} < 1,$$

dalla quale si deduce

$$\frac{a^n + b^n}{2} < \left(\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}\right)^n,$$

e da questa

$$\left(\frac{a^n + b^n}{2}\right)^{n+1} < \left(\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{2}\right)^n.$$

Se nell'ultima diseguaglianza si ponga $a = \sqrt[n]{\alpha}$, $b = \sqrt[n]{\beta}$, e si estragga la radice $(n+1)^{ma}$ dai due membri si ottiene

$$(1) \qquad \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}} < \frac{\alpha^{\frac{n+1}{n}} + \beta^{\frac{n+1}{n}}}{2}$$

nella quale α, β sono numeri positivi diseguali.

Applicando ripetutamente tale diseguaglianza si dimostra che

$$(2) \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{m-1} + \alpha_m}{m}\right)^{\frac{n+1}{n}} < \frac{\alpha_1^{\frac{n+1}{n}} + \ldots + \alpha_{m-1}^{\frac{n+1}{n}} + \alpha_m^{\frac{n+1}{n}}}{m}$$

nall'ipotesi che le α sieno numeri positivi non tutti eguali tra loro ed m potenza del 2. Supposta la (2) dimostrata per un certo valore di m è facile dimostrare che essa è vera per $m - 1$: infatti, supponendo

$$\alpha_m = \frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{m-1}}{m-1},$$

il primo membro della (2) si riduce ad $\alpha_m^{\frac{n+1}{n}}$ e, semplificando, la (2) dà luogo alla diseguaglianza

$$\alpha_m^{\frac{n+1}{n}} < \frac{\alpha_1^{\frac{n+1}{n}} + \ldots + \alpha_{m-1}^{\frac{n+1}{n}}}{m-1}$$

ossia

$$\left(\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{m-1}}{m-1}\right)^{\frac{n+1}{n}} < \frac{\alpha_1^{\frac{n+1}{n}} + \ldots + \alpha_{m-1}^{\frac{n+1}{n}}}{m-1}$$

il che prova l'asserto.

Si può dunque ritenere la (2) vera per un valore qualunque di m: in essa ponendo $\alpha_i = \sqrt[n+1]{a_i}$ ed elevando poi i due membri alla potenza n^a si ha

$$(3)\quad \left(\frac{\sqrt[n+1]{a_1}+\sqrt[n+1]{a_2}+\ldots+\sqrt[n+1]{a_m}}{m}\right)^{n+1} < \left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^{n},$$

la quale diseguaglianza bisognava dimostrare.

Nota. — Addizionando alla (3) membro a membro le altre diseguaglianze che se ne deducono ponendo in luogo di n successivamente

$$n+1,\ n+2,\ \ldots,\ p-1\ \ (p > n+1)$$

si ottiene

$$\left(\frac{\sqrt[p]{a_1}+\ldots+\sqrt[p]{a_m}}{m}\right)^{p} < \left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\ldots+\sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^{n};$$

da questa, ponendo una volta $\sqrt[n]{a_i}=\beta_i$ ed estraendo dai due membri la radice p^a, un'altra volta ponendo $\sqrt[p]{a_i}=\gamma_i$ ed estraendo la radice n^a, si ricavano le due diseguaglianze:

$$\frac{\beta_1^{\frac{n}{p}}+\ldots+\beta_m^{\frac{n}{p}}}{m} < \left(\frac{\beta_1+\ldots+\beta_m}{m}\right)^{\frac{n}{p}}$$

$$\left(\frac{\gamma_1+\ldots+\gamma_m}{m}\right)^{\frac{p}{n}} < \frac{\gamma_1^{\frac{p}{n}}+\ldots+\gamma_m^{\frac{p}{n}}}{m}$$

le quali possono scriversi così:

$$(4)\qquad \frac{\alpha_1^{k}+\ldots+\alpha_m^{k}}{m} \lesseqgtr \left(\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_m}{m}\right)^{k}$$

secondo che

$$k \lesseqgtr 1$$

essendo le α e k numeri positivi qualunque. Se k è un numero negativo $-k'$, essendo k' intero o frazionario, ricordando che la media aritmetica di numeri positivi diseguali supera la media geometrica, si può scrivere

$$\frac{a^{k'}+b^{k'}}{2}\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k'} > \sqrt{a^{k'}\,b^{k'}}.\,(\sqrt{ab})^{k'}=(ab)^{k'}$$

da cui

$$\frac{a^{k'}+b^{k'}}{2} > \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^{k'}$$

e se α, β sono i valori reciproci di a, b,

$$\frac{\alpha^k + \beta^k}{2} > \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^k.$$

Con lo stesso procedimento con cui da (1) si è dedotta (2), dalla precedente si ricava

$$\frac{\alpha_1{}^k + \ldots + \alpha_m{}^k}{m} > \left(\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m}{m}\right)^k \tag{5}$$

se

$$k < 0$$

Delle formole (4) (5) si trova nell'aggiunte ai Complementi d'Algebra del Sig. Todhunter una dimostrazione fondata sullo sviluppo del binomio con un esponente qualunque.

(13) *Assegnare, senza il sussidio del calcolo differenziale, il limite al quale tende la funzione*

$$y = \frac{\sqrt{2x - x^4} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[4]{x^3}}$$

quando la variabile x *tende ad* 1. (D. Besso.)

Soluzione del Prof. *G. Riboni*:

Seguendo le norme suggerite dal Bertrand nel suo *Trattato d'Algebra elementare*, Cap. XXII, n. 293, si ha

$$\frac{\sqrt{2x - x^4} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[4]{x^3}} = \frac{(\sqrt{2x - x^4} - \sqrt{1}) - (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{1})}{\sqrt[4]{1} - \sqrt[4]{x^3}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{2x - x^4} - \sqrt{1}}{2x - x^4 - 1} \cdot \dfrac{2x - x^4 - 1}{x - 1} - \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{1}}{x - 1}}{\dfrac{\sqrt[4]{1} - \sqrt[4]{x^3}}{1 - x^3} \cdot \dfrac{1 - x^3}{x - 1}} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2x - x^4} + \sqrt{1}}(1 - x^3 - x^2 - x) - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1}}}{\dfrac{1}{\sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^6} + \sqrt[4]{x^9}}(-x^2 - x - 1)}$$

che per $x = 1$ diventa

$$\frac{\frac{1}{2}\times(-2)-\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}\times(-3)} = \frac{16}{9}.$$

Soluzione del Prof. *F. Viaggi*:

Posto $\sqrt[12]{x} = z$, sarà, dopo facili trasformazioni,

$$y = \frac{z^4}{z^8+z^7+\ldots+z+1}\cdot\frac{\sqrt{2z^4-z^{40}}-1}{1-z} =$$

$$= \frac{z^4}{z^8+z^7+\ldots+z+1}\cdot\frac{z^{40}-2z^4+1}{(z-1)\left(\sqrt{2z^4-z^{40}}+1\right)},$$

e liberando i due termini dell'ultima frazione dal fattor comune $z-1$, si avrà

$$y = \frac{z^4}{z^8+z^7+\ldots+z+1}\cdot\frac{(z^3+z^2+z+1)\,(z^{36}+z^{32}+\ldots+z^4-1)}{\sqrt{2z^4-z^{40}}+1}$$

quindi

$$\lim_{x=1} y = \lim_{z=1} y = \frac{1}{9}\cdot\frac{4.8}{2} = \frac{16}{9}$$

(14) *Dimostrare che, posto*

$$1^{h+1}-2^{h+1}+3^{h+1}-\ldots+(-1)^{n-1}\,n^{h+1} = s_n,$$

si ha, qualunque sia l'intero positivo h, *purchè indipendente da* m,

$$\lim\left(\frac{s_{2m}+s_{2m+1}}{m^h}\right)_{m=\infty} = (h+1)\,2^{h-1}.$$

D. Besso.

Dimostrazione del Prof. *F. Viaggi*:

Se s'indica col simbolo $S^h_{(m)}$ la somma delle potenze h^{me} dei primi m numeri naturali, è noto che

$$\lim_{m=\infty}\frac{S^h_{(m)}}{m^{h+1}} = \frac{1}{h+1}$$

(cfr. *Baltzer* Aritmetica generale § 12,6), e quindi

$$\lim_{m=\infty}\frac{S^h_{(m)}}{m^p} = 0 \quad \text{se } p \geqq h+2$$

Ciò premesso, nella identità

$$(2k+1)^{h+1}-(2k)^{h+1}=\binom{h+1}{1}2^hk^h+\binom{h+1}{2}2^{h-1}k^{h-1}+\dots.$$

ponendo successivamente $k=0, 1, 2, \dots, m$ e addizionando le eguaglianze risultanti, si ottiene

$$s_{2m+1}=\binom{h+1}{1}2^hS^h{}_{(m)}+\binom{h+1}{2}2^{h-1}S^{h-1}{}_{(m)}+\dots+\binom{h+1}{h+1}S^0{}_{(m)} \quad (\alpha)$$

E ponendo nell'identità

$$(2k-1)^{h+1}-(2k)^{h+1}=-\binom{h+1}{1}2^hk^h+\binom{h+1}{2}2^{h-1}k^{h-1}-\dots.$$

successivamente $k=1, 2, \dots, m$ e addizionando le eguaglianze risultanti, si ha

$$s_{2m}=-\binom{h+1}{1}2^hS^h{}_{(m)}+\binom{h+1}{2}2^{h-1}S^{h-1}{}_{(m)}-\dots. \quad (\beta)$$

Addizionando (α) e (β) e dividendo per m^h si ricava

$$\frac{s_{2m}+s_{2m+1}}{m^h}=h(h+1)2^{h-1}.\frac{S^{h-1}{}_{(m)}}{m^h}+\binom{h+1}{4}2^{h-2}.\frac{S^{h-3}{}_{(m)}}{m^h}+\dots.$$

Ora se m tende all'infinito, pei limiti ricordati a principio, il primo termine del secondo membro tende ad $(h+1)2^{h-1}$ e gli altri a 0, dunque sarà

$$\lim_{m=\infty}\left(\frac{s_{2m}+s_{2m+1}}{m^h}\right)=(h+1)2^{h-1}.$$

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Breve cenno sulle principali operazioni di finanza e di previdenza e sulle loro più elementari soluzioni del prof. dott. Enrico de Montel. Reggio d'Emilia 1885.

Operazioni di borsa e di commercio del prof. dott. Enrico de Montel. Reggio d'Emilia 1886.

Queste due opere del prof. de Montel, che si aggirano sopra argomenti, i quali fanno parte dell'insegnamento di matematica applicata delle sezioni commerciali degli istituti tecnici e delle scuole superiori di commercio, furono pubblicate con intendimenti diversi. La prima, scritta nell'occasione che, istituita in Genova una scuola superiore di commercio, era stato aperto un concorso per una cattedra di matematica applicata, è una rapida esposizione delle applicazioni dell'aritmetica generale alle quistioni finanziarie, colla quale l'autore mostra di pienamente conoscere i lavori più recenti degli attuari francesi ed inglesi; ma la fretta colla quale egli ha dovuto procedere alla pubblicazione di questo libro non gli ha concesso di dargli una forma didattica. Se però non possiamo consigliare quest'opera come libro di testo, tanto più che in alcuni punti sono nel lettore supposte cognizioni che non si riscontrano negli alunni degli istituti tecnici, la possiamo raccomandare agli insegnanti che vi troveranno raccolti molti risultati, che spesso occorrono, con brevi ed esatte dimostrazioni. Ne diamo perciò il sommario: Interesse — Parità dei valori — Sulle tavole di mortalità — Vitalizii — Assicurazioni sulla vita — Riscatto — Riserva — Assicurazioni marittime, contro gli incendi ecc. — Teoria dei conti correnti.

Il breve trattato sulle operazioni di borsa e di commercio è destinato invece a fare entrare nella pratica commerciale l'uso sistematico della rappresentazione grafica delle operazioni di banca e di commercio. Scritto con stile facile e scorrevole, basato sulle più elementari nozioni di geometria, questo libro può tranquillamente esser posto fra le mani degli studenti, i quali, oltre all'accennata rappresentazione grafica, utile nei casi di operazioni complesse, vi troveranno chiare spiegazioni, date da persona che si mostra assai pratica e competente nella materia, delle molteplici operazioni che si fanno alla borsa. Sotto questo punto di vista il libro del dott. de Montel completa quello del prof. Martini già in questo stesso periodico raccomandato.

E. Padova