

Questi problemi son divisi in 10 paragrafi: nel primo ci sono quelli relativi ai segmenti, nel secondo quelli relativi ai triangoli, ecc., ed, infine, il decimo comprende dei problemi di ripetizione ed alcuni temi degli esami di licenza degli istituti tecnici (sezione F. M.).

I problemi di ciascun paragrafo sono posti in ordine progressivo di difficoltà, e sono preceduti dalle formole che riguardano le proprietà fondamentali della figura a cui i problemi si riferiscono.

Gli insegnanti delle scuole secondarie, considerando l'utilità di questa raccolta di problemi, saranno certamente grati all'autore per averla compilata con tanta cura e diligenza, e non mancheranno di accoglierla favorevolmente.

K.

RIVELLI. — *Stereometria applicata allo sviluppo dei solidi ed alla loro costruzione in carta.* — Manuali Hœpli — Serie artistica.

Questo nuovo manuale pubblicato dal solerte editore U. Hœpli non ha altro scopo, come dice il suo titolo, che quello di addestrare i giovani studenti specialmente delle scuole tecniche e industriali a costruire con poca spesa i modelli in cartoncino dei principali solidi che si presentano nello studio della geometria. — Questo scopo può dirsi felicemente raggiunto; l'eleganza dell'edizione contribuirà ad invogliare i giovanetti a darsi a questo utile passatempo.

A. B.

---

## ESAMI DI BACCALAUREATO DELL'APRILE 1896

(Continuazione vedi pag. 69)

---

### Accademia di Rennes.

1°. *Quistioni a scelta.* — a) In qual caso si dice che alcune relazioni fra più variabili sono distinte? Quante relazioni distinte esistono fra le sei linee trigonometriche di uno stesso angolo? Trovarle, e mostrare perchè esse sono distinte. Dedurne i valori di  $\sin x$  e  $\cos x$  in funzione di  $\tan x$ .

b) Calcolare  $\sin \frac{x}{2}$  e  $\cos \frac{x}{2}$  in funzione di  $\sin x$ .

Discussione.

c) Risolvere un triangolo conoscendo due lati e l'angolo opposto ad uno di essi. Discussione.

*Problema.* — Si formi 1° il quadrato della somma dei quadrati di due numeri interi consecutivi  $a, a - 1$ , 2° il quadrato del doppio  $2a$  del maggiore di essi; dimostrare che nella divisione di questi due quadrati la parte intera del quoziente ed il resto sono pure dei quadrati. Se  $a$  è il numero che segue immediatamente un quadrato, il resto è il quadrato che segue immediatamente il quadruplo del quoziente.

### Accademia di Tolosa.

Per gli estremi A e B d'un diametro d'una circonferenza data, di raggio R e centro O, si conducano le tangenti AC, BD a questa circonferenza, e s'indichino con C, D i punti d'incontro con una tangente CD alla circonferenza.



- 1°. Dimostrare che il triangolo COD è rettangolo e che  $AC \times BD = R^2$ .
- 2°. Determinare la tangente CD in modo che l'area del trapezio ACDB sia equivalente a quella d'un quadrato di lato dato  $a$ .
- 3°. Determinare il minimo dell'area del trapezio ACDB, quando si fa variare la tangente CD.

---

## WEIERSTRASS

---

Il 19 febbraio ultimo scorso si è spento a Berlino Carlo Teodoro Guglielmo Weierstrass, al quale poco più di un anno prima, in occasione del suo ottantesimo anniversario, tutta la Germania aveva reso solenni onoranze come al più illustre dei Matematici tedeschi.

L'indole del *Periodico* non ci consente di parlare delle opere insigni di lui, per le quali fu detto il padre dell'analisi moderna; crediamo però di fare cosa grata ai lettori dando qualche cenno sulla sua vita.

C. Weierstrass nacque il 31 ottobre 1815 a Ostenfelde in Vestfalia. Dal 1834 al 1838 studiò diritto e scienza delle finanze nell'Università di Bonn; ma poco soddisfatto degli studi giuridici all'età di 23 anni si dedicò alle matematiche, che studiò privatamente a Münster dove nell'estate del 1841 dette l'esame *pro facultate docendi*.

Dal 1842 insegnò in vari Ginnasi e pubblicò i lavori sulle funzioni Abelianhe, che furono il fondamento della sua gloria, e gli dischiusero nel 1856 le porte dell'Università di Berlino, che ha illustrato per oltre 40 anni.

Inchiamoci reverenti dinanzi alla tomba, che chiude il corpo di C. W. ma non il suo spirito, il quale vivè e vivrà nelle sue opere.

---

## CONCORSI

---

**Accademia delle scienze fisiche e matematiche.** — L'Accademia, non avendo ritenuta degna di premio nessuna delle due memorie presentate per il concorso del 1896, ha bandito il concorso per un premio di L. 1000 sul medesimo tema, che è il seguente:

*Esporre, discutere e coordinare in forma possibilmente compendiosa tutte le ricerche concernenti la determinazione della totalità dei numeri primi, apportando qualche notevole contributo alle leggi secondo le quali questi numeri si distribuiscono fra i numeri interi.*

Le memorie dovranno essere inviate al segretario dell'Accademia non più tardi del 31 marzo 1898.

**Accademia Pontoniana (Concorso al premio Tenore).** — Si ripropone al concorso pel premio di L. 500 il seguente tema:

*Le Matematiche in Napoli dalla fondazione dell'antica Reale Accademia delle Scienze (1762) alla nuova (1861).*

I lavori dovranno farsi pervenire, franchi da ogni spesa, al Segretario generale dell'Accademia non più tardi del 31 marzo 1898.

---

**Errata-Corrige.** — Nel fascicolo II a pag. 57, riga 7<sup>a</sup>, alle parole: ....*apparisce come fattore coseno*, devono seguire le altre: *mentre la seconda parte ci dà tutti i termini in cui lo stesso arco apparisce come fattore seno*;...

---

GIULIO LAZZERI — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 4 Maggio 1897.



## UN' OSSERVAZIONE SULL' EQUIVALENZA DEI POLIEDRI

### per congruenza delle parti

Quando un poliedro convesso  $P$  è diviso in parti poliedriche convesse in modo che, se un punto è vertice di una delle parti, esso sia vertice anche di tutte quelle parti cui appartiene, noi diremo che  $P$  è diviso in parti *annodate*, e diremo *nodo* ogni punto in cui cadano i vertici delle parti.

Ciò posto vale il seguente

**TEOREMA.** — *Se un poliedro convesso  $P$  è diviso in parti poliedriche convesse annodate, la somma degli angoloidi delle parti aumentata o diminuita di un multiplo di un diedro piatto eguaglia la somma di convenienti multipli, secondo numeri non minori di 2, dei diedri di  $P$ .*

*Dimostrazione.* — Consideriamo infatti i 4 seguenti possibili casi relativi alle varie posizioni di un nodo.

1. *Il nodo sia interno a  $P$ .* In tal caso tutti gli angoloidi delle parti che hanno il vertice in esso riempiono l'intero spazio, cioè sommano due diedri piatti. Se dunque  $n$  è il numero di tali nodi ed  $S_1$  è la somma di tutti quegli angoloidi delle parti che hanno i vertici in essi, si avrà  $S_1 = 2n\pi$ .

2. *Il nodo sia interno ad una faccia di  $P$ .* Allora tutti gli angoloidi delle parti che hanno il vertice in quel nodo riempiono soltanto quella metà dello spazio in cui cade  $P$ , cioè un diedro piatto. Se dunque  $m$  è il numero di tali nodi ed  $S_2$  è la somma degli angoloidi delle parti che hanno i vertici in essi, si avrà  $S_2 = m\pi$ .

3. *Il nodo sia interno a uno spigolo di  $P$ .* Allora tutti gli angoloidi delle parti di  $P$  che hanno il vertice in esso riempiono il diedro  $D_i$  corrispondente a quello spigolo. Se dunque  $r_i$  è il numero dei nodi interni a



tale spigolo ed  $S_3$  è la somma di tutti gli angoloidi delle parti che hanno i vertici in nodi interni agli spigoli di  $P$ , sarà  $S_3 = r_1 D_1 + r_2 D_2 + \dots$

4. *Il nodo cada infine in un vertice di  $P$ .* Allora gli angoloidi delle parti che hanno il vertice in esso riempiono quell'angoloide di  $P$  che ha il vertice in quel nodo. Detta dunque  $A$  la somma degli angoloidi di  $P$  ed  $S_4$  la somma di tutti quegli angoloidi delle parti di  $P$  che hanno i vertici nei vertici di  $P$ , sarà  $S_4 = A$ .

D'altronde, se  $A_1$  è un angoloide di  $P$ ,  $n_1$  il numero degli spigoli di  $A_1$  e  $\Sigma_1$  la somma dei diedri di  $A_1$ , si ha  $A_1 = \Sigma_1 - (n_1 - 2)\pi$ .

Perciò

$$S_4 = (\Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots) - (n_1 + n_2 + \dots - 2V)\pi,$$

essendo  $V$  il numero dei vertici di  $P$ . Ma, poichè ogni diedro di  $P$  appartiene a due angoloidi, si ha

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots = 2D_1 + 2D_2 + \dots, \quad n_1 + n_2 + \dots = 2C,$$

essendo  $C$  il numero degli spigoli di  $P$ .

Rimane dunque in ultimo

$$S_4 = 2D_1 + 2D_2 + \dots - (2C - 2V)\pi.$$

Raccogliendo ora in una sola  $S$  le quattro somme  $S_1, S_2, S_3, S_4$ , e facendo

$$\mp K = 2n + m - 2V + 2C,$$

otterremo appunto

$$S \pm K\pi = (r_1 + 2)D_1 + (r_2 + 2)D_2 + \dots$$

conformemente all'enunciato.

Da questo teorema si può ricavare un notevole corollario, che richiede però due particolari lemmi.

**LEMMA 1°.** — *Se  $D$  è il diedro del tetraedro regolare  $R$  e  $\delta$  il diedro acuto del tetraedro trirettangolo isoscele  $T$ , si ha*

$$2\delta = \pi - D.$$

*Dimostrazione.* — Bisogna ricordare che in ogni tetraedro una faccia qualunque è la somma delle proiezioni delle altre tre su di essa. Applicando questo principio ad  $R$  avremo dunque (se  $\alpha$  indica l'area di una faccia di  $R$ )  $\alpha = 3\alpha \cos D$ , donde

$$\cos D = \frac{1}{3}.$$



Applichiamo poi lo stesso principio a T; allora, indicando con  $\beta$  l'area della base e con  $\gamma$  l'area di una qualunque delle tre faccie rettangole di T, avremo le due equazioni

$$\beta = 3 \gamma \cos \delta,$$

$$\gamma = \beta \cos \delta,$$

donde, moltiplicando,

$$\cos^2 \delta = \frac{1}{3}.$$

Da questa si ha successivamente

$$2 \cos^2 \delta = 2 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi}{2} - \delta \right) = 1 - \cos (\pi - 2\delta) = \frac{2}{3},$$

epperò

$$\cos (\pi - 2\delta) = \frac{1}{3} = \cos D.$$

Ora, essendo  $\delta < \frac{\pi}{2}$ , si ha

$$\pi > \pi - 2\delta > 0; \text{ ed è poi } \pi < D < \pi,$$

dunque

$$D = \pi - 2\delta.$$

LEMMA 2°. — Il diedro D del tetraedro regolare è incommensurabile con  $\pi$ .

Infatti, essendo (lemma 1°)  $\cos D = \frac{1}{3}$ , si ha  $\operatorname{sen} D = \frac{\sqrt{8}}{3}$ .

Allora, ponendo

$$\epsilon = \frac{1 \pm i \sqrt{8}}{3},$$

se fosse

$$(1) \quad D = \frac{m}{n} \pi$$

sarebbe

$$\epsilon = \cos \frac{m}{n} \pi + i \operatorname{sen} \frac{m}{n} \pi;$$

e perciò

$$\epsilon^n \pm 1 = 0.$$

Ma  $\epsilon$  è radice dell'equazione  $3x^2 - 2x + 3 = 0$ , dunque nell'ipotesi (1) deve essere  $x^n \pm 1$  divisibile per  $P = 3x^2 - 2x + 3$ .

Sia  $\frac{Q}{K}$  il quoziente di tale divisione, ed indichi Q un polinomio intero (di grado  $n - 2$ ) e K un numero intero primo con Q.

Potremo scrivere

$$K(x^n \pm 1) = QP.$$



Detto  $\alpha_0$  il coefficiente di  $x^{n-2}$  in  $Q$ , dovrà essere intanto

$$K = 3\alpha_0,$$

epperò  $QP$  dovrà essere divisibile per 3. Ora 3 non può dividere  $Q$ , perchè 3 divide  $K$ , dunque (BERTRAND, *Alg. elem.*) 3 deve dividere  $P$ . Ma poichè 3 non divide  $P$ ,  $Q$  non esiste e quindi  $D$  è incommensurabile con  $\pi$ . (<sup>1</sup>)

Veniamo ora all'accennato

**COROLLARIO.** — *Un tetraedro regolare R e un tetraedro trirettangolo isoscele T non si possono dividere in uno stesso numero di parti annodate rispettivamente simili (e tanto meno congruenti).*

Sia infatti possibile dividere  $R$  e  $T$  in parti annodate rispettivamente simili; allora la somma degli angoloidi delle parti di  $R$  o di  $T$  sarebbe la stessa. Perciò, indicando con  $r, \rho, \sigma, K$  degli interi non negativi dovrebbe essere pel teorema dimostrato

$$(r + 12)D = (\rho + 6)\delta + (\sigma + 6)\frac{\pi}{2} \pm K\pi,$$

(<sup>1</sup>) Anche i diedri dell'ottaedro, del dodecaedro e dell'icosaedro regolare sono incommensurabili con  $\pi$ . Infatti, se si chiama  $D$  il diedro di un poliedro regolare convesso, si trova (v. *Traité de Géom.* di ROUCHE e COMBEROUSSE pag. 245 del 2° vol. 3ª edizione)

$$\operatorname{sen} \frac{D}{2} = \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}},$$

ove  $m$  è il numero degli spigoli di ciascun angoloide e  $n$  il numero dei lati di ciascuna faccia. Facendo allora

$$z = \cos D + i \operatorname{sen} D,$$

si vede facilmente che pel tetraedro

$$\sqrt{z} = \frac{\sqrt{2+i}}{\sqrt{3}};$$

per l'ottaedro

$$\sqrt{z} = \frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

per l'icosaedro

$$\sqrt{z} = \frac{(\sqrt{5}-1) + i(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{3}}$$

e infine pel dodecaedro

$$\sqrt{z} = \frac{(\sqrt{5}-1) + 2i}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}.$$

Si trova perciò che per i primi due solidi  $z$  è radice della stessa equazione  $3x^2 - 2x + 3 = 0$  (e quindi i  $D$  corrispondenti sono supplementari); mentre per l'icosaedro  $z$  è radice della

$$9x^4 - 2x^2 + 9 = 0,$$

e per il dodecaedro  $z$  è radice della

$$5x^4 + 8x^2 + 5 = 0,$$

e si prova come pel caso del tetraedro (e dell'ottaedro) che questi due ultimi diedri sono incommensurabili con  $\pi$ . Nel testo citato è detto invece che il diedro dell'icosaedro è dato esattamente da

$$133^\circ.11'.22'',75.$$



ossia

$$(2r + 24) D = (\rho + 6) \cdot 2\delta \pm \tau\pi,$$

ove  $\tau$  è un intero,  $D$  è il diedro di  $B$  e  $\delta$  è il diedro acuto di  $T$ .

Ma pel lemma. 1°  $2\delta = \pi - D$ , dunque la precedente relazione diviene

$$(2r + 24) D = (\rho + 6) \pi - (\rho + 6) D \pm \tau\pi$$

ossia

$$(2r + \rho + 30) D = (\rho + 6 \pm \tau)\pi;$$

e quindi, poichè  $2r + \rho + 30$  non può essere zero perchè  $r$  e  $\rho$  debbono essere positivi o nulli, dovrà essere  $D = \frac{m}{n} \pi$ , cioè  $D$  commensurabile con  $\pi$ , ciò che è contrario al lemma 2°.

Aprile 1897.

G. SFORZA.

## Una definizione di poligono convesso

1. Le definizioni di poligono convesso, che comunemente vengono date nei trattati di geometria elementare per le scuole secondarie, sono *sovrabbondanti*, cioè contengono più di quanto è strettamente necessario per *definire*, nel vero senso di questa parola, tale figura. Propositioni di tal fatta le chiamerei piuttosto *denominazioni*.

Mi propongo in questa Nota di esporre una *definizione* di poligono convesso. Le citazioni che si trovano nel seguito si riferiscono agli "Elementi di Geometria di Giuseppe Veronese trattati con la collaborazione di Paolo Gazzaniga". Avrei potuto conseguire forse maggior brevità nell'esposizione, ricorrendo per le citazioni ad un lavoro nel quale fosse svolto più completamente l'argomento della divisione del piano in parti mediante rette, ma preferisco attenermi al libro accennato come quello che più è conforme al metodo di trattazione da me seguito in altre Note sui fondamenti della geometria. Ho invece pensato di tener distinto ciò che è affatto inerente alla quistione che mi son proposto di trattare, da quanto è, dirò così, d'indole più generale, e che espongo in alcune

OSSERVAZIONI PRELIMINARI. — I°. Dal fatto che una retta  $\alpha$  divide il piano in due parti  $M, N$  (n. 3 oss. e def.) e che se una retta  $\beta$  taglia  $\alpha$  in un punto, essa vien divisa in due raggi posti uno in  $M$  e uno in  $N$  (n. 23 t. III), risulta immediatamente con dimostrazione per assurdo che, se un segmento ha gli estremi in una delle due parti  $M, N$  vi giace per intero.

II°. Se  $C$  è un punto di  $\alpha$  e  $CQ$  un raggio di  $N$ , esso divide questa regione in due parti, corrispondenti a quelle in cui vien diviso da esso il mezzo fascio con centro in  $C$  posto in  $N$  (n. 23 lemma), parti che sono due angoli piani (n. 21 def. I 4)  $\widehat{KCQ}, \widehat{QCH}$ . Se si prende un punto  $X$  in  $\widehat{KCQ}$  ed uno  $Y$  in  $\widehat{QCH}$ , cioè da bande



opposte rispetto alla retta  $CQ$ , il segmento  $(XY)$  taglia questa (c. t. III) e precisamente il raggio  $CQ$ , trovandosi tutto in  $N$ . Cioè:

*Un semipiano è diviso da un suo raggio qualunque  $CQ$ , uscente da un punto  $C$  della retta origine  $a$  in due parti, e ogni segmento che ha un estremo in una e l'altro nell'altra di queste taglia il raggio  $CQ$ , e perciò, se una retta non parallela ad  $a$  taglia il raggio opposto a  $CQ$ , quel suo raggio che si trova nel semipiano in discorso giace tutto in una delle due parti considerate.*

III<sup>a</sup>. Dato un triangolo  $ABC$  (lascio le figure alla cura del lettore), il suo lato  $BC$  divide il piano in due parti, di cui chiameremo  $M$  quella che contiene il triangolo,  $N$  l'altra. Il raggio  $CQ$  opposto a  $CA$  si trova nella seconda (u. 23 t. III) e la divide (oss. prelim. II) in due angoli piani  $\widehat{BCQ}$ ,  $\widehat{QCH}$  ( $CH$  opposto a  $CB$ ), ed ogni raggio  $AS$  che taglia la  $BC$  in un punto  $S$  e che perciò appartiene, a partire da  $S$ , ad  $N$ , deve trovarsi, a partire da  $S$ , tutto o in  $\widehat{BCQ}$  o in  $\widehat{QCH}$  (oss. II). Per conseguenza tutti e soli quei raggi in discorso, per i quali  $S$  cade sul raggio  $CB$ , saranno in  $\widehat{BCQ}$ , e quelli per cui  $S$  cade in  $(BC)$  danno la parte comune ai due angoli  $\widehat{BCQ}$ ,  $\widehat{BAC}$ , mentre quelli, per i quali  $S$  cade sul raggio  $BK$  (opposto a  $BC$ ), ci danno la parte che il primo non ha in comune col secondo, la quale, essendo  $BK$  da banda opposta a  $BH$  rispetto alla  $AB$ , trovasi rispetto a questa retta da banda opposta all'angolo  $\widehat{BAC}$ . Possiamo concludere: *L'angolo piano interno  $\widehat{BAU}$  del triangolo  $ABC$  e l'angolo esterno  $\widehat{BCQ}$  hanno in comune tutta la parte del primo che si ha astruendo dal triangolo dato, la qual parte è tutta quella che l'angolo esterno ha dalla stessa banda in cui trovasi l'angolo interno considerato rispetto al lato  $AB$ .*

IV<sup>a</sup>. *Dati due angoli adiacenti  $\widehat{ACB}$ ,  $\widehat{ACD}$ , se un raggio  $CE$  dell'angolo piatto opposto a quello che risulta dalla somma dei due nominati determina col raggio  $CA$  un angolo  $\widehat{ACE}$  convesso che contenga il raggio  $CB$ , l'opposto di  $CE$  cade in  $\widehat{ACD}$ . Difatti  $CF$ , opposto di  $CE$ , deve trovarsi o nell'uno o nell'altro dei due angoli adiacenti anzidetti (23 t. III). Ma essendo  $\widehat{ACE}$  convesso, il raggio opposto a  $CE$  cade fuori di esso (21 def.), e quindi anche di  $\widehat{ACB}$ , perciò si trova in  $\widehat{ACD}$ .*

2. Consideriamo una retta  $A_1A_2$  che divide il piano in due parti  $M$ ,  $N$ , ed in una di queste, per es. in  $M$ , prendiamo un punto  $A_3$ ; vien così determinato un triangolo  $A_1A_2A_3$  di  $M$ .

Nella parte che  $A_1A_2K$  ( $A_2K$  opposto a  $A_3A_2$ ) ha in  $M$  si prenda un punto  $A_4$ ; nella parte che  $A_1A_2L$  ( $A_1L$  opposto ad  $A_3A_1$ ) ha in  $M$  si prenda un punto  $A_5$ , e così si proceda fino ad un ultimo punto  $A_n$ . I punti  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  determinano un poligono che chiamerò *convesso*. Possiamo perciò porre la seguente

**DEFINIZIONE.** — *Chiamasi convesso ogni poligono che sia tutto da una parte rispetto uno dei suoi lati  $A_1A_2$ , e sia tale che ognuno dei triangoli determinati da un vertice  $A_1$  di questo lato con le coppie  $A_2, A_3; A_3, A_4; \dots, A_{n-1}, A_n$  abbia il vertice, che non è comune col precedente, nell'angolo esterno di questo che è adiacente al lato comune, e che non ha il vertice in  $A_1$ .*

3. Conduco (supposto eseguita la figura determinata dalla definizione) la  $A_2A_1$ . Essendo  $A_1$  in  $A_1A_2K$  e in  $M$ , è pure (u. 1 oss. III) in  $A_1A_2A_3$ , nel quale trovasi adunque il raggio  $A_2A_1$ , che perciò taglia  $(A_1A_3)$ , per cui il raggio  $A_2A_3$  trovasi in  $A_1A_2A_3$ , e così i raggi  $A_2A_1, A_1A_3$  si trovano da parte opposta rispetto alla retta  $A_1A_2$ . Perciò i due angoli adiacenti  $A_2A_1A_3, A_1A_2P$  ( $A_1P$  opposto ad  $A_1A_2$ ) e  $A_1A_3$  si trovano nelle condizioni dell'oss. IV, e quindi  $A_2L$  è in  $A_1A_2P$  e  $A_1A_2L$  è parte di  $A_1A_2P$ , per cui  $A_3$  cadendo in quello per definizione, si trova pure in



questo, dunque (oss. III) essendo  $A_3$  anche in  $M$ , trovasi pure in  $\widehat{A_1 A_2 A_4}$  fuori del triangolo  $A_1 A_2 A_4$ . Così proseguendo si veda che gli angoli  $\widehat{A_1 A_2 A_3}$ ,  $\widehat{A_2 A_3 A_4}$ ,  $\dots$ ,  $\widehat{A_{n-2} A_{n-1} A_n}$  sono successivi, e che il poligono trovasi tutto nell'angolo  $\widehat{A_1 A_2 A_3}$ , cioè tutto da una parte rispetto al lato  $A_1 A_2$ .

Ora abbiamo gli angoli adiacenti  $\widehat{A_2 A_1 A_3}$ ,  $\widehat{A_1 A_2 P}$  e in quest'ultimo c'è  $A_3 L$ , per cui  $\widehat{A_1 A_2 L}$  è consecutivo a  $\widehat{A_2 A_1 A_3}$ , cioè  $\widehat{A_1 A_2 L}$  è interno all'angolo convesso (minore del piatto  $\widehat{A_2 A_1 P}$ )  $\widehat{A_2 A_1 L}$ , perciò  $A_3$  cadendo per ipotesi in  $\widehat{A_1 A_2 L}$ , trovasi anche in  $\widehat{A_2 A_1 L}$ . Così continuando si conclude: *Se un poligono è convesso in un dato verso a partire da un suo vertice  $A_1$ , esso lo è anche a partire dal suo successivo  $A_2$ , nello stesso verso, e quindi da ogni altro.*

Dalla definizione e da questi teoremi si ricava facilmente: *Ogni angolo di un poligono convesso è convesso. (Per il triangolo ciò si suppone già noto.) Il poligono è tutto contenuto in ciascuno dei suoi angoli. Ogni diagonale divide il poligono in due poligoni convessi. Considerando le diagonali uscenti da un vertice, il poligono risulta somma di  $n - 2$  triangoli.*

4. Riferendoci alla figura precedente, e supponendo, per fissare le idee, che sia  $A_7$  l'ultimo vertice, esso è situato in  $\widehat{A_1 A_6 V}$  ( $A_6 V$  opposto ad  $A_6 A_5$ ), perciò i raggi  $A_6 A_1$ ,  $A_6 V$  sono da bande opposte rispetto alla  $A_7 A_6$ , ed applicando agli angoli adiacenti  $\widehat{A_1 A_6 A_7}$ ,  $\widehat{A_1 A_6 R}$  ( $A_6 R$  opposto ad  $A_6 A_7$ ) l'oss. IV, si vede che  $A_7$  cade in  $\widehat{A_1 A_6 R}$ . Così continuando si arriva a concludere: *Ogni poligono che è convesso a partire da un vertice  $A_1$  in un dato verso, lo è pure nel verso opposto.*

5. Arrivati nella costruzione del nostro poligono per es. al vertice  $A_5$ , si prenda  $A_4$  in  $\widehat{A_1 A_2 A_4}$ . Allora la  $A_2 A_4$  deve tagliare ( $A_1 A_4$ ), che ha gli estremi sui lati dell'angolo; e perciò taglierà un altro lato (segmento) del triangolo  $A_1 A_2 A_4$ . Proseguendo si vede che  $A_2 A_5$  deve tagliare un lato del poligono, che così non rimane tutto da una parte rispetto a quella retta. Analogamente avviene se  $A_2$  si prende nell'opposto di  $\widehat{A_1 A_2 A_4}$ . Prendendolo poi nell'opposto di  $\widehat{A_1 A_2 U}$  ( $A_2 U$  opposto ad  $A_2 A_1$ ) viene a trovarsi con  $A_1$  da parte opposta rispetto  $A_1 A_2$ , e perciò continuando nella costruzione si dovrà arrivare ad un vertice che converrà unire con  $A_1$  o con un altro vertice che si trova dalla stessa banda di  $A_1$ , e allora il lato che si ottiene è segato dalla  $A_1 A_2$ , rispetto alla quale dunque il poligono non trovasi tutto da una parte. Concludendo: *Un poligono non convesso non si trova tutto da una parte rispetto ad ognuno dei suoi lati. Un poligono che si trova tutto da una parte rispetto ciascuno dei suoi lati è convesso.*

Ed ora rimane tolto l'inconveniente lamentato dal Prof. Frattini nel Periodico del 1896, al quale si può del resto ovviare mantenendo anche la solita definizione, come trovasi dimostrato nel Trattato di Geometria dei signori Lazzari e Bassani.

Sondrio febbraio 1897.

FRANCESCO PALATINI.

## NECROLOGIO

La scienza matematica ha perduto uno dei suoi più illustri cultori.

**GIACOMO GIUSEPPE SYLVESTER**

è morto a Londra il 15 marzo scorso nella grave età di 83 anni.



## ALCUNE PROPRIETÀ DELLA SVILUPPANTE DI CERCHIO

*(Continuazione e fine vedi fascicolo precedente).*

§ 3. *Dividere un arco AB di  $\Lambda$  in due parti, aventi un dato rapporto m.* — Chiamando C il punto di divisione ed  $x$  il raggio vettore OC, si ha:

$$m = \frac{AC}{CB} = \frac{x^2 - R^2}{R^2 - x^2}$$

d'onde:

$$(6) \quad x = \sqrt{\frac{mR^2 + R^2}{m + 1}}$$

Se dunque  $m$  è razionale, il problema proposto si risolve colla riga e col compasso.

A questo problema si può connettere l'altro di dividere un dato arco AB di  $\Lambda$  in  $n$  parti eguali. Basta fare nella (6)  $m = \frac{1}{n-1}$ .

Facendo nella (6)  $m = 1$ , si ha la formola (facilmente costruibile):

$$(7) \quad x = \sqrt{\frac{R^2 + R^2}{2}}$$

corrispondente alla divisione del dato arco AB per metà.

Nella (7) si supponga  $R_1 = nR$ , con  $n$  intero; si ottiene allora:

$$x = R \sqrt{\frac{n^2 + 1}{2}}$$

Se si metta la condizione che anche  $x$  sia multiplo di  $R$ , il numero  $\frac{n^2 + 1}{2}$  deve essere un quadrato perfetto intero e perciò  $n$  dispari. Posto allora  $n = 2p + 1$ , si ha:

$$\frac{n^2 + 1}{2} = p^2 + (p + 1)^2$$

e, dovendo il secondo membro, che è la somma dei quadrati di due numeri interi consecutivi, essere un quadrato perfetto, si deve avere necessariamente  $p = 3$  e per conseguenza:

$$n = 7, \quad x = 5R.$$

Dunque:

« *Se in una sviluppante di cerchio si tirano, dal centro del cerchio*



evoluta, tre raggi vettori proporzionali ai numeri 1, 5, 7, il medio divide per metà l'arco intercetto dagli estremi ».

Questo è il solo caso possibile, quando si metta la condizione che il secondo e il terzo raggio vettore siano multipli del primo.

Se nell'equazione (6) si suppone  $m = \frac{R}{R_1}$ , risulta:

$$x = \sqrt{RR_1}.$$

Perciò:

« Se in una sviluppante di cerchio si tirano, dal centro del cerchio evoluta, tre raggi vettori, di cui il medio sia media proporzionale fra gli altri due, esso divide l'arco in due parti proporzionali ai raggi vettori estremi ».

Siccome, qualunque sia  $m$ , si può scrivere:

$$x = \sqrt{(mR) \cdot \frac{R_1}{m}},$$

si ha:

« Vi sono infiniti archi  $AB$  i quali, da un punto fisso  $C$ , sono divisi in parti proporzionali ai raggi vettori estremi; il prodotto di questi raggi è costante ed eguale al quadrato del raggio vettore  $OC$  ».

Dividere un arco di sviluppante in sezione aurea. —

Tenute ferme le notazioni del problema precedente, se la parte aurea è  $AC$ , deve essere:

$$AB : AC = AC : CB$$

Si ha dunque l'equazione:

$$(R^2 - R^2)(R^2 - x^2) = x^2 - R^2$$

che, risolta rispetto ad  $x^2$ , dà:

$$(8) \quad x^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot R^2 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot R_1^2,$$

essendo l'altra radice da escludere.

Perciò:

« Il quadrato del raggio vettore  $x$  è eguale alla somma di due rettangoli, uno dei quali è la parte minore del quadrato di  $R$  diviso in sezione aurea e l'altro è la parte aurea del quadrato di  $R_1$  »

Se invece si mette la condizione che la parte aurea dell'arco  $AB$  sia  $CB$ , si ottiene per  $x^2$  l'espressione a cui si riduce (8) scambiando fra loro  $R$  e  $R_1$ .

Esprimere il rapporto anarmonico di quattro punti della sviluppante.

I quattro punti siano  $A, B, C, D$  e si supponga che i primi due siano separati dagli altri; si ha:

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$



ossia, in causa dell'equazione (4):

$$(ABCD) = \frac{(R^2_2 - R^2)(R^2_3 - R^2_1)}{(R^2_2 - R^2_1)(R^2_3 - R^2)}$$

Ponendo:

$$(ABCD) = \lambda$$

e risolvendo l'equazione precedente rispetto a  $R^2_3$ , si trova:

$$R^2_3 = \frac{R^2_1(R^2 - R^2_2) - \lambda R^2(R^2_1 - R^2_2)}{(R^2 - R^2_2) - \lambda(R^2_1 - R^2_2)}$$

Con questa formola si può determinare il quarto punto di una sviluppante di cerchio che, insieme a tre punti dati della medesima, formano un gruppo di punti avente un dato rapporto anarmonico.

Fatto  $\lambda = -1$ , si ha il teorema:

« Se in una sviluppante di cerchio, e a partire dal centro del cerchio evoluta, si descrivono quattro raggi vettori  $R, R_1, R_2, R_3$ , i primi tre arbitrari e il quarto definito dalla relazione:

$$(9) \quad R^2_3 = \frac{2R^2R^2_1 - (R^2 + R^2_1)R^2_2}{R^2 + R^2_1 - 2R^2_2}$$

i quattro estremi formano, sulla spirale, un gruppo armonico ».

Siccome l'equazione (9) è identicamente soddisfatta da:

$$(10) \quad R_2 = \sqrt{R^2 - RR_1 + R^2_1}, \quad R_3 = \sqrt{R^2 + RR_1 + R^2_1}$$

si ha:

« I quattro punti della sviluppante che corrispondono ai due raggi vettori arbitrari  $R, R_1$  e ai due altri  $R_2, R_3$  definiti dalle equazioni (10), costituiscono un gruppo armonico ».

§ 4. Ci proponiamo di trovare l'area di un settore compreso fra due raggi vettori qualunque e l'arco compreso fra i loro estremi.

Siano  $OA, OA_1$  due raggi vettori vicinissimi,  $Aa, A_1a_1$  i raggi di curvatura corrispondenti,  $AC$  l'arco di centro  $O$  descritto col raggio  $OA$  ed intercetto fra i raggi vettori  $OA, OA_1$ . Abbiamo, applicando i risultati precedenti:

$$\text{Area } OAC = \frac{1}{2} OA \cdot \text{arco } AC = \frac{1}{2} OA \cdot \text{arco } AA_1 \cdot \text{sen } \theta =$$

$$= \frac{1}{2} R \cdot AA_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{h^2}{4R^2}} = \frac{1}{2} AA_1 \cdot \rho$$

$$\text{Area } ACA_1 = \frac{1}{2} AC \cdot CA_1 = \frac{1}{2} AA_1 \cdot \text{sen } \theta \cdot CA_1 =$$

$$= \frac{1}{2} AA_1 \cdot CA_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{h^2}{4R^2}} = \frac{1}{2} AA_1 \cdot \rho \frac{CA_1}{R}$$

Perciò:

$$\text{Area } OAA_1 = \frac{1}{2} AA_1 \cdot \rho \left(1 + \frac{CA_1}{R}\right)$$



D'altronde potendosi considerare la figura  $AA_1aa_1$  come un settore circolare di centro  $a$  e di raggio  $\rho$ , si ha

$$\text{Area } AA_1aa_1 = \frac{1}{2} \rho \cdot AA_1$$

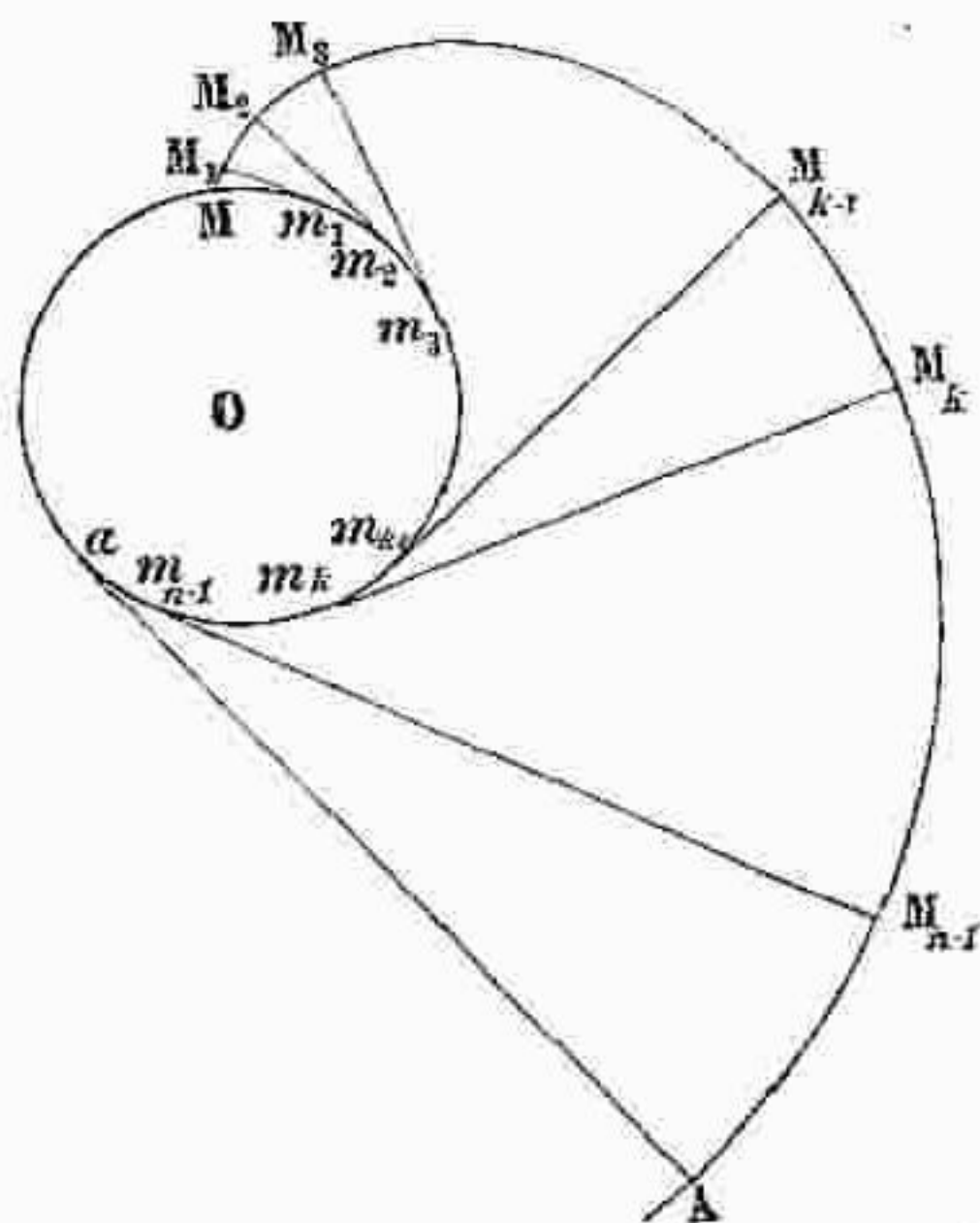
e quindi:

$$\frac{\text{Area } OAA_1}{\text{Area } AA_1aa_1} = 1 + \frac{CA_1}{R}$$

Passando al limite col supporre che  $A_1$  vada avvicinandosi indefinitamente ad  $A$ , si ha:

$$\lim. \text{Area } OAA_1 = \lim. \text{Area } AA_1aa_1$$

Scomponendo quindi un settore qualunque  $OAB$  e l'area corrispondente



$ABab$  in un numero grandissimo di settori analoghi ai precedenti  $OAA_1$ ,  $AA_1aa_1$ , ed applicando la proprietà ora dimostrata, si giunge al teorema:

« In una sviluppante di cerchio l'area  $ABab$  compresa fra l'arco qualsivoglia  $AB$ , l'arco corrispondente  $ab$  dell'evolvente e i due raggi di curvatura estremi  $Aa$   $Bb$  è equivalente all'area del settore  $OAB$  ».

Facendo uso della figura, si ha:

$$\text{Area } M_{k-1} M_k m_{k-1} m_k = \frac{1}{2} m_k M_k \cdot \text{arco } M_k M_{k-1} = \frac{1}{2} kt \cdot \text{arco } M M_{k-1}$$

Siccome (V. § 1):

$$M_{k-1} M_k = kt \cdot \varepsilon = \frac{2}{h} kt^2,$$

risulta:

$$\text{Area } M_{k-1} M_k m_{k-1} m_k = \frac{1}{h} k^2 t^3,$$



e perciò:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=n} M_{k-1} M_k m_{k-1} m_k &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \frac{t^3}{h} = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \frac{t^3}{h} = \frac{1}{6h} nt(nt+t)(2nt+t). \end{aligned}$$

Passando al limite per  $n = \infty$ , si trova:

$$\text{Area } M\Delta a = \frac{\sigma^3}{3h},$$

essendo  $\sigma$  l'arco circolare  $Ma$ .

Se dunque si indica con  $S$  l'area del settore compreso fra il raggio vettore iniziale  $OM$  e un raggio vettore qualunque  $OA$  e si applica il teorema dimostrato in questo § e le formole (1), (2), (3), si trova:

$$(11) \quad S = \frac{(hs)^{\frac{3}{2}}}{3h} = \frac{\rho^3}{3h} = \frac{(4R^2 - h^2)^{\frac{3}{2}}}{24h}$$

Con tale formola si può evidentemente trovare l'area di un settore qualunque  $OAB$ , considerandolo come differenza dei due settori  $OMB$ ,  $OMA$ .

Se  $S$ ,  $S_1$  sono due settori contati dal raggio vettore iniziale  $OM$ ;  $s$ ,  $s_1$  gli archi corrispondenti;  $\rho$ ,  $\rho_1$  i raggi di curvatura nei punti estremi di questi archi, si ha:

$$\frac{S^2}{S_1^2} = \frac{s^3}{s_1^3}, \quad \frac{S}{S_1} = \frac{\rho^3}{\rho_1^3}$$

Dunque:

« I settori, contati dall'origine della sviluppante, sono proporzionali ai cubi dei raggi di curvatura nelle estremità degli archi; e i quadrati di detti settori sono proporzionali ai cubi degli archi corrispondenti ».

Ne viene di conseguenza che:

« Prendendo sopra una sviluppante di cerchio una serie di archi, tutti contati dall'origine, e formanti una progressione geometrica di ragione  $q$ , i corrispondenti settori formano un'altra progressione geometrica di ragione  $q^{\frac{3}{2}}$ , e reciprocamente ».

Se gli archi consecutivi  $MA$ ,  $AA_1$ ,  $A_1A_2$ , ... dell'evolvente sono proporzionali ai numeri dispari, si può mettere:

$$MA = \alpha, \quad AA_1 = 3\alpha, \quad A_1A_2 = 5\alpha, \dots$$

Risultando allora:

$$MA = \alpha, \quad MA_1 = 4\alpha, \quad MA_2 = 9\alpha, \dots$$

dall'equazione (11) si ricava per i settori:

$$MOA = \frac{\sqrt{h}}{3} \alpha^{\frac{3}{2}}; \quad MOA_1 = 8 \cdot \frac{\sqrt{h}}{3} \cdot \alpha^{\frac{3}{2}};$$

$$MOA_2 = 27 \cdot \frac{\sqrt{h}}{3} \cdot \alpha^{\frac{3}{2}}; \dots$$



Perciò:

« Se sopra una sviluppante di cerchio si prendono degli archi successivi proporzionali ai numeri dispari, il primo dei quali abbia un estremo nell'origine, i settori corrispondenti sono proporzionali ai numeri 1, 7, 19, 37, 61, ... differenze dei cubi dei numeri della serie naturale; e reciprocamente ».

§ 5. Se  $MB_1, B_1B_2, B_2B_3, \dots$  sono archi eguali del cerchio evoluta ed  $MA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$  gli archi corrispondenti della sviluppante, ponendo  $MB_1 = \sigma$ , si ha:

$$OA_1 = \sqrt{\sigma^2 + \frac{h^2}{4}}, \quad OA_2 = \sqrt{4\sigma^2 + \frac{h^2}{4}}, \quad OA_3 = \sqrt{9\sigma^2 + \frac{h^2}{4}}, \dots$$

e quindi:

$$MA_1 = \frac{\sigma^2}{h}, \quad MA_2 = \frac{4\sigma^2}{h}, \quad MA_3 = \frac{9\sigma^2}{h}, \dots$$

Avremo dunque:

$$MA_1 = 1MA_1, \quad A_1A_2 = 3MA_1, \quad A_2A_3 = 5 \cdot MA_1, \dots$$

cioè:

« Gli archi della sviluppante di cerchio che corrispondono ad archi eguali del cerchio evoluta, il primo dei quali ha un estremo nell'origine sono proporzionali ai numeri dispari; e conseguentemente (§ 4) i settori che corrispondono a questi archi sono proporzionali ai numeri 1, 7, 19, 37, 61, ... differenze dei cubi dei numeri della serie naturale ».

Soddisfano evidentemente a questo teorema gli archi  $MP_1, P_1P_2, P_2P_3, \dots$  dell'evolvente che sono compresi fra le estremità dei vari cicli (V. § 2).

Siccome poi si ha:

$$MP_1 = h\pi \quad \text{e quindi:} \quad OP_1 = \sqrt{\pi^2 h^2 + \frac{h^2}{4}}$$

sarà:

$$\text{arco } MP_1 = \pi^2 h$$

Dunque:

« L'arco di sviluppante che corrisponde a tutto lo sviluppo del cerchio evoluta è eguale alla circonferenza avente per diametro la circonferenza del cerchio evoluta ».

Se si prendono gli archi  $MA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$  tutti eguali ad  $l$ , si hanno le eguaglianze:

$$(\text{arco } MB_1)^2 = hl; \quad (\text{arco } MB_2)^2 = 2hl; \quad (\text{arco } MB_3)^2 = 3hl; \dots$$

le quali dimostrano il teorema:

« Se più archi successivi della sviluppante (il primo dei quali abbia un estremo nell'origine) sono eguali fra loro, i quadrati degli archi corrispondenti del cerchio evoluta, contati tutti a partire dall'origine, formano una progressione aritmetica di ragione  $hl$ , essendo  $l$  la lunghezza degli archi dell'evolvente ».



Se fra l'arco  $s$  della sviluppante e l'arco corrispondente  $\sigma$  del cerchio evoluta ha luogo la condizione  $s = m\sigma$ , siccome:

$$hs = \sigma^2,$$

si ottiene:

$$s = m^2h, \quad \sigma = mh$$

Dunque:

« *Quell'arco della sviluppante che comincia dall'origine e che è eguale ad  $m$  volte il corrispondente arco dell'evoluta, ha una lunghezza eguale a  $m^2$  volte il diametro del cerchio evoluta, e il raggio di curvatura nella sua estremità è  $m$  volte questo diametro* ».

Se poi la proprietà precedente ha luogo per un arco  $AB$  non cominciante dall'origine, ponendo  $MA_1 = s$ ,  $MA_2 = s_1$ , si ha:

$$hs_1 = \sigma_1^2, \quad hs = \sigma^2$$

e quindi:

$$h(s_1 - s) = (\sigma_1 - \sigma)(\sigma_1 + \sigma) = \frac{1}{m}(s_1 - s)(\sigma_1 + \sigma)$$

Dividendo per  $s_1 - s$ , risulta:

$$\sigma_1 + \sigma = \rho_1 + \rho = mh$$

Dunque:

« *Gli archi della sviluppante che sono eguali ad  $m$  volte i corrispondenti dell'evoluta, sono quelli in cui la somma dei raggi di curvatura estremi è eguale ad  $m$  volte il diametro del cerchio evoluta* ».

Se  $OA_1, OA_2, \dots, OA_{n-1}, OA_n$  sono dei raggi vettori in progressione geometrica di ragione  $q$  e si pone:

$$R = OA_1, s_1 = AA_2, s_2 = A_1A_3, \dots, s_n = A_{n-1}A_n,$$

si ha:

$$s_n = \frac{q^2 - 1}{h} \cdot q^{2(n-1)} \cdot R^2,$$

ovvero:

$$s_n = \frac{1 - q^2}{h} \cdot q^{2(n-1)} \cdot R^2,$$

secondo che gli archi  $s$  sono diretti dalla parte dei raggi vettori crescenti o decrescenti.

Possiamo dunque dire:

« *Se si prendono dei raggi vettori consecutivi in progressione geometrica di ragione  $q$ , gli archi successivi che essi determinano sono in progressione geometrica di ragione  $q^2$*  ».

Se  $q > 1$ , si ha un'infinità di raggi vettori  $R$  e di archi  $s$ ; se  $q < 1$ , dalla parte dei raggi vettori decrescenti si potranno portare  $m$  archi consecutivi purchè si abbia:

$$R \geq \frac{h}{2q^m}.$$



Siano A, B, C tre punti della sviluppante, R, R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub> i loro raggi vettori, e sia:

$$R_1 = mR, \quad R_2 = nR$$

Avendosi:

$$AB = \frac{m^2 - 1}{h} R^2, \quad AC = \frac{n^2 - 1}{h} R^2,$$

risulta:

$$(12) \quad \frac{AB}{AC} = \frac{m^2 - 1}{n^2 - 1}$$

Se ora consideriamo gli altri tre punti A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub> corrispondenti ai raggi vettori qR, qR<sub>1</sub>, qR<sub>2</sub>, si ha pure:

$$A_1B_1 = \frac{m^2 - 1}{h} q^2 R^2, \quad A_1C_1 = \frac{n^2 - 1}{h} q^2 R^2$$

e quindi:

$$\frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{m^2 - 1}{n^2 - 1} = \frac{AB}{AC}$$

Da questo teorema derivano molte proprietà della sviluppante di cerchio. Così ad esempio:

« Se quattro raggi vettori consecutivi di una particolare sviluppante di cerchio determinano tre archi che si possano considerare come i lati di un triangolo rettangolo, i medesimi raggi, o altri ad essi proporzionali, hanno la stessa proprietà in tutte le sviluppanti di cerchio ».

Così pure:

« Il rapporto anarmonico di quattro punti A, B, C, D di una particolare sviluppante di cerchio è eguale al rapporto anarmonico degli altri quattro punti A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub>, D<sub>1</sub> di qualsivoglia sviluppante di cerchio, i cui raggi vettori sono eguali, o proporzionali, a quelli dei primi » ecc. ecc.

Dall'equazione (12) si ricava l'altra:

$$(13) \quad \frac{BC}{AB} = \frac{n^2 - m^2}{m^2 - 1},$$

la quale conduce a molte proprietà della nostra curva.

Supponendo per esempio successivamente  $m = 2, 3, 4, 5$  e determinando per quali valori di  $n$  il rapporto  $\frac{BC}{AB}$  è intero, nonché il valore di detto rapporto, si giunge al teorema:

« Se in una sviluppante di cerchio si conducono tre raggi vettori OA, OB, OC, il primo arbitrario, il secondo multiplo del primo secondo uno dei numeri 2; 3; 4; 5 e il terzo multiplo del primo rispettivamente secondo uno dei numeri:

$3\alpha \pm 1; 8\alpha \pm 1$ , ovvero  $8\alpha \pm 3; 15\alpha \pm 1$ , ovvero  $15\alpha \pm 4; 24\alpha \pm 1$ ,  
ovvero  $24\alpha \pm 5$ , ovvero  $24\alpha \pm 7$ , ovvero  $24\alpha \pm 11$ ,

l'arco BC è multiplo di AB rispettivamente secondo i numeri:



$3\alpha^2 \pm 2\alpha - 1$ ;  $8\alpha^2 \pm 2\alpha - 1$ , ovvero  $8\alpha^2 \pm 6\alpha$ ;  $15\alpha^2 \pm 2\alpha - 1$ , ovvero  $15\alpha^2 \pm 8\alpha$ ;  $24\alpha^2 \pm 2\alpha - 1$ , ovvero  $24\alpha^2 \pm 10\alpha$ , ovvero  $24\alpha^2 \pm 14\alpha + 1$ , ovvero  $24\alpha^2 \pm 22\alpha + 4$ , essendo  $\alpha$  un numero intero qualunque ».

Parma, maggio 1896.

G. PIRONDINI.

## NOTA SOPRA ALCUNE FORMOLE DI STEINER

Si descrivano due circonferenze interne l'una all'altra coi raggi  $R, r$  ed i centri  $O$  ed  $E$  alla distanza  $d$ ; il punto  $D$  della retta  $OE$  di egual potenza rispetto ai due cerchi lontano da  $O$  del segmento  $OD = \delta$ , vien determinato da

$$(1) \quad t^2 = \delta^2 - R^2 = (\delta - d)^2 - r^2;$$

da cui si traggono (2)

$$\delta = \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d}, \quad t = \frac{1}{2d} \sqrt{(d + R + r)(d + R - r)(d - R - r)(d - R + r)}.$$

Sulla stessa  $OE$  prendiamo il punto  $I$  alla distanza  $OI = \delta \pm t$  per centro d'inversione e  $p^2$  per potenza, i cerchi  $O$  ed  $E$  si trasformeranno in due altri concentrici coi raggi (3)  $r' = \frac{p^2 r}{2t(t + \delta - d)}$ ,  $R' = \frac{p^2 R}{2t(t + \delta)}$  e col centro comune  $O'$  definito per  $IO' = \frac{p^2}{2t}$ . Due circonferenze  $C_n, C_{n+1}$  tangenti ai cerchi  $O, E$  ed esternamente fra loro si convertono nei cerchi inversi  $C'_n, C'_{n+1}$ , che toccheranno le circonferenze concentriche  $O'$  e fra loro avranno pure il contatto esterno; la distanza di due centri successivi pari al diametro  $r' - R'$  di ciascuna apparirà dal centro  $O'$  sotto l'angolo  $\omega$  dato per (4)  $\sin \frac{\omega}{2} = \frac{r' - R'}{r' + R'}$ . Supponendo  $m$  cerchi  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_{m-1}, C_m$ , tangenti fra loro e l'ultimo col primo, iscritti nello spazio comune ai cerchi  $O$  ed  $E$ , ne conseguirà i centri degl'inversi  $C'_n$  esser i vertici di un poligono regolare stellato  $m$ -latero e della specie  $h$ ; quindi  $m\omega = 2h\pi$  ed in virtù delle relazioni (1), (2), (3) (4) ricaveremo

$$4 \operatorname{tang}^2 \frac{\pi h}{m} = \frac{(r' - R')^2}{r' R'} = \frac{1}{Rr} \left( \frac{r}{t + \delta - d} - \frac{R}{t + \delta} \right)^2 (t + \delta)(t + \delta - d) = \\ = \frac{1}{Rr} \left[ (R - r)^2 - d \left( \frac{R^2}{t + \delta} - \frac{r^2}{t + \delta - d} \right) \right] = \frac{1}{Rr} [(R - r)^2 - d^2];$$

il qual teorema di Steiner si enuncia « affinché  $m$  cerchi  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_m$  tangenti successivamente fra loro e l'ultimo al primo tocchino due cerchi  $R, r$  interni l'uno all'altro e coi centri alla distanza  $d$ , dovrà sussistere la condizione

$$(5) \quad d^2 = (R - r)^2 - 4Rr \operatorname{tang}^2 \frac{\pi h}{m},$$



essendo  $n$  ed  $m$  interi positivi; la condizione è indipendente dalla situazione del cerchio iniziale.

In secondo luogo consideriamo due cerchi della superficie sferica, descritti coi poli  $O$  ed  $E$ , i raggi sferici  $R, r$  e  $d$  rappresenti l'arco  $OE$  di cerchio massimo; scegliendo per origine d'inversione il punto della sfera opposto ad  $O$ , si denotino con  $R_1, r_1$  i raggi delle proiezioni stereografiche aventi i loro centri  $O_1, E_1$  alla distanza  $d_1$ ; posto uno il raggio della sfera facilmente otterremo le relazioni

$$(6) \quad d_1 = \frac{\operatorname{sen} d}{\cos d + \cos r}, \quad r_1 = \frac{\operatorname{sen} r}{\cos d + \cos r}, \quad R_1 = \operatorname{tang} \frac{R}{2};$$

sostituendo questi valori nella (5), dopo aver messo l'indice 1 ai simboli  $d, R, r$ , deduciamo l'eguaglianza

$$\cos^2 \frac{R}{2} \operatorname{sen}^2 d - \left[ \operatorname{sen} \frac{R}{2} \cos d + \operatorname{sen} \left( \frac{R}{2} - r \right) \right]^2 = 2 \operatorname{sen} R \operatorname{sen} r (\cos r + \cos d) \operatorname{tang}^2 \frac{\pi h}{m}.$$

Osservando il primo membro essera identico a

$$2 \operatorname{sen} \frac{d + R - r}{2} \operatorname{sen} \frac{d + r - R}{2} (\cos d + \cos r),$$

ne scaturisce la seconda formola di Steiner

$$(7) \quad \cos d = \cos (R - r) + 2 \operatorname{sen} r \operatorname{sen} R \operatorname{tang}^2 \frac{\pi h}{m}.$$

Infine due sfere interne l'una all'altra coi centri  $O$  ed  $E$  situati alla distanza  $d$  e coi raggi  $R, r$  mediante l'inversione per le relazioni (3) si cambieranno in due sfere coi raggi  $r', R'$  ed il centro comune  $O'$ ; ogni sfera ad essa tangente avrà il diametro  $r' - R'$ . Ora i centri  $C'_n$  della  $m$  sfere tangenti fra loro successivamente ed alle sfere concentriche sono distanti dal centro  $O'$  dei segmenti eguali ad  $\frac{r' + R'}{2}$  e giacciono in una certa circonferenza avente il centro  $O''$  ed il raggio  $\rho' = \frac{r' - R'}{2} \operatorname{sen} \theta$ , dove  $\theta$  simboleggia l'angolo  $O'O C'_n$ . Gli stessi punti  $C'_n$  saranno vertici di un poligono regolare stellato  $m$ -latero e della specie  $h$ , allorchè l'ultima sfera  $C'_m$  tocchi la prima  $C'_1$ ; ponendo  $\alpha = \frac{2h\pi}{m}$  per l'angolo sotto cui vedesi dal centro  $O''$  la distanza  $C'_n C'_{n+1}$  eguale al diametro di ogni sfera  $C'_n$  troveremo

$$r' - R' = 2\rho' \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2};$$

e eliminando  $\rho'$  ed  $\alpha$  fra le precedenti eguaglianze risulterà

$$(8) \quad \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \frac{h\pi}{m} = \frac{r' - R'}{r' + R'} = \frac{dR - (R - r)(t + \delta)}{(R + r)(t + \delta) - dR}$$

a causa delle (3). Nel caso particolare di  $\theta = \omega$  a motivo della (4) dedurremo

$$\rho' = 2 \left( \frac{r' - R'}{r' + R'} \right) \sqrt{r' R'} \quad , \quad \operatorname{sen}^2 \frac{h\pi}{m} = \frac{(r' + R')^2}{16r' R'}$$

e riducendo con le formole (3) si conchiuderà la terza relazione di Steiner

$$d^2 = (R + r)^2 - 16 Rr \operatorname{sen}^2 \frac{h\pi}{m}.$$



## GRANDEZZE FINITE ED INFINITE

(Estratto di una lettera del Prof. RODOLFO BETTAZZI al direttore del  
" Periodico di Matematica ")

*Carissimo Amico,*

Il tuo articolo « Sul postulato dell'equivalenza » comparso nel fascicolo 2° del Periodico di quest'anno, mi suggerisce alcune osservazioni in proposito, che vedrei volentieri pubblicate sul tuo giornale.

Trovo opportunissimo quello che dici circa la definizione *Frattini-Giudice* della grandezza finita, che cioè un ente, in quanto è grandezza, va giudicato a seconda della classe a cui si considera appartenente, poiché variano insieme a questa gli enti che possono dirsi sue parti; ma osservo che non si è fatto abbastanza quando si siano dette finite od infinite le grandezze, secondochè appartengono a classi di 1<sup>a</sup> o di 2<sup>a</sup> specie.

Infatti nelle classi di 2<sup>a</sup> specie vi possono essere grandezze tali che convenienti multiple di qualunque loro parte le superano, e grandezze per cui esistono parti nessuna multipla delle quali può superarle: e una distinzione fra le une e le altre è opportuna, non essendo conveniente dire infinite tutte quelle grandezze per il solo fatto che appartengono a classi di 2<sup>a</sup> specie. Pure ammettendo dunque che lo studio delle grandezze debba farsi dopo definite le classi a cui si fanno appartenere, (come dico ancor io nella mia « Teoria delle grandezze ») e che nelle classi di 1<sup>a</sup> specie non occorrono altre distinzioni, essendo in esse finite tutte le loro grandezze, resta stabilito che per quelle di 2<sup>a</sup> specie convenga distinguere le grandezze stesse, secondochè hanno il carattere del finito o dell'infinito. Ciò, in particolare, è necessario nella classe di tutte le superficie piane (poligoni, striscie, angoli) e in quella delle parti dello spazio (poliedri, prismi indefiniti, strati, diedri ed angoloidi) le quali sono di 2<sup>a</sup> specie.

Sta bene poi che le grandezze infinite si potrebbero graduare anche per l'ordine d'infinito, secondo quello che tu dici; ma purchè ciò si faccia *nell'interno di ciascuna classe*, potendo una grandezza da dirsi infinita del 1° ordine in una classe divenire di 2°, di 3°,... ed anche di nessun ordine in un'altra.

Venendo all'ultima parte del tuo articolo, alla questione cioè se convenga o no adottare il concetto delle grandezze finite da dirsi trascurabili di fronte a quelle infinite, rispondo che, a mio credere, *non conviene* sia per la complicazione dell'idea eccessiva in un corso elementare, sia



perchè la ritengo come pericolosissima in mano ad uno scolaro, che potrebbe finire facilmente col trascurare anche quello che non è trascurabile.

Si potrebbe eliminare questo secondo pericolo dando al postulato la forma più precisa: « Due grandezze infinite di una classe, tali che l'una si ottenga dall'altra sottraendo una parte finita, o infinita d'ordine inferiore, sono equivalenti » ma non scompaiono nonostante tutte le difficoltà. Ed invero l'equivalenza di cui si parla in questo postulato non può essere in generale l'uguaglianza: per es. un piano non sarà mai uguale ad un piano a cui sia tolto un poligono. Allora o è necessario che venga data una prima definizione d'equivalenza anche per le grandezze infinite di una classe, il che in geometria non si è soliti a fare contentandosi di considerare l'uguaglianza per le grandezze di classi di 1<sup>a</sup> specie (segmenti, angoli, strisce, archi, settori circolari, diedri, strati ecc.) e l'equivalenza per le grandezze finite di classi di 2<sup>a</sup> specie (poligoni nelle superficie piane, poliedri fra le parti di spazio ecc.) oppure il postulato può includersi nelle definizioni di equivalenza, dicendo equivalenti due grandezze infinite di una classe quando sono scomponibili in parti uguali, tranne alcuna finita o infinita di ordine inferiore che compaiono nell'una e non nell'altra.

Che la questione abbia importanza scientificamente debbo essere io il primo ad ammetterlo; giacchè usare il tuo postulato equivale a considerare isolata nella classe di 2<sup>a</sup> specie la sottoclasse delle sue grandezze infinite, e l'isolamento delle sottoclassi introdussi appunto e studiai nella mia « Teoria delle grandezze » (§§ 34 e segg.) Ma credi tu che convenga trattar questo nella scuola? Io giudico di no, quando penso al da fare che, e nella scuola e fuori, dà ai geometri la teoria dell'equivalenza anche per le sole grandezze finite!

Anche ammettendo il postulato o la nuova definizione d'equivalenza, ti confesso poi che non vedo come con esso si semplifichino le dimostrazioni dei teoremi che tu citi, almeno quando queste si vogliono avere rigorose. Esse invero sono fondate sul fatto che due figure equivalenti fra loro in una classe abbiano ad essere equivalenti in un'altra, ed anzi uguali, ciò che, colle osservazioni da me fatte in principio, non è cosa davvero evidente. P. es. nel Teorema 1<sup>o</sup> sulla somma degli angoli di un triangolo tu dimostri che la somma degli angoli esterni (cioè il piano meno il triangolo) è equivalente all'intero piano, il che è giusto, considerando tali figure come grandezze della classe *superficie piane*, nella quale il triangolo, grandezza finita, è trascurabile rispetto all'intero piano, almeno dato il postulato. Ma quando tu consideri la somma degli angoli come un angolo ed il piano come un giro, cioè quando consideri quegli enti non più nella classe delle superficie piane ma bensì in quella degli angoli, come fai a concludere che in questa nuova classe, dove il concetto di equivalenza è diverso, e le parti non sono che angoli, le figure continuino ad essere equivalenti, e più ancora che siano uguali? Ciò sarà



anche vero; ma per lo meno richiede una dimostrazione, che toglie ogni semplicità al teorema.

Concludo che l'idea della graduazione degli ordini d'infinito nelle classi geometriche non mi pare appropriata alla geometria elementare: e, quanto meno, non può usarsi per applicare ad enti, considerati in una classe, conclusioni dedotte quando quegli enti si considerano in un'altra.

Osservo qui di passaggio che l'ammissione del postulato da te chiesto darebbe come conclusione che una grandezza che è infinita in una classe, essendo equivalente a quella che si ottiene trascurandone una parte finita, non soddisferebbe al Postulato De Zolt-De Paolis: e avremmo la distinzione delle grandezze in finite ed infinite secondochè soddisfano o no a tale postulato.

tuo affmo

RODOLFO BETTAZZI.

Torino 23 Marzo 1897.

---

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 339\* 340\* 352\* 356\* 364\* 365\*

---

**339.** Nel cono descritto dalla rotazione dell'angolo  $\theta$  intorno ad un suo lato si conduce un piano perpendicolare ad una generatrice e distante dal segmento  $d$  dal vertice; esprimere in funzione di  $\theta$  e  $d$  gli assi, il parametro della conica e gli angoli formati dalle generatrici passanti per due vertici della curva.

**340.** Per un punto di una superficie conica circolare retta, condurre un piano secante in modo che gli assi della ellisse (o dell'iperbole) abbiano una data ragione  $k$ . Si conosce la distanza  $d$  del punto dal vertice e l'angolo  $2\theta$  del cono.

BELLACCHI.

Risoluzione del sig. Riccardo Micks professore al Ginnasio Comunale di Trieste.

Facendo passare pel vertice del cono un piano normale al piano dato (MN), otterremo le due generatrici e l'asse della conica. Sia O il punto in cui una di queste generatrici viene tagliata dal detto asse,  $d$  la distanza dal punto O dal vertice V del cono e  $\beta$  l'angolo che l'asse forma colla generatrice.

Facendo inoltre passare per un punto qualunque Q di quest'asse un piano parallelo alla base del cono, questo taglierà il cono secondo un cerchio di raggio TR (diametro STR) ed il piano della conica nella retta PQ, ove P è un punto della conica.

Prendendo O quale origine delle coordinate, il menzionato asse della conica come asse delle ascisse ed una parallela alla PQ come asse delle ordinate avremo

$$OQ = x \quad \text{e} \quad PQ = y.$$

Essendo  $2\theta$  l'angolo delle due generatrici del cono, avremo che l'angolo OQR del triangolo OQR sarà  $= 90^\circ - (\beta - \theta)$  e quindi, applicando al triangolo OQR il



teorema dei seni, avremo

$$OR = \frac{x \cos(\beta - \theta)}{\cos \theta} \quad \text{e} \quad QR = \frac{x \sin \beta}{\cos \theta}.$$

E quindi il raggio  $TR = (VO + OR) \sin \theta$ ,

$$TR = \left( d + \frac{x \cos(\beta - \theta)}{\cos \theta} \right) \sin \theta,$$

ed

$$SQ = SR - QR = 2 \cdot TR - QR.$$

Da un teorema noto si ha

$$\overline{PQ^2} = \overline{SQ \cdot QR};$$

da cui, sostituendo tutti i valori e riducendo, si ottiene

$$(1) \quad y^2 = 2d \cdot \operatorname{tg} \theta \cdot \sin \beta \cdot x - \frac{\sin \beta \cdot \sin(\beta - 2\theta)}{\cos^2 \theta} x^2,$$

la quale equazione della conica confrontata coll'equazioni

$$\begin{aligned} y^2 &= 2px - qx^2 && \text{per l'elisse} \\ y^2 &= 2px && \text{" la parabola} \\ y^2 &= 2px + qx^2 && \text{" l'iperbole,} \end{aligned}$$

dà

$$(2) \quad \begin{cases} \text{per l'elisse la condizione } \beta > 2\theta \\ \text{" la parabola } & \beta = 2\theta \\ \text{" l'iperbole } & \beta < 2\theta. \end{cases}$$

Calcoliamo ora i semiassi.

Dalla (1) risulta  $p = d \operatorname{tg} \theta \cdot \sin \beta$ , e

$$q = \frac{p}{\alpha} = \frac{\sin \beta \cdot \sin(\beta - 2\theta)}{\cos^2 \theta};$$

per cui otteniamo facilmente i semiassi

$$a = d \sin \theta \cdot \frac{\cos \theta}{\sin(\beta - 2\theta)}$$

$$b = d \sin \theta \cdot \sqrt{\frac{\sin \beta}{\sin(\beta - 2\theta)}}$$

*Problema 339.* — Dalle condizioni (2) risulta che per caso speciale  $\beta = 90^\circ$  avremo

una elisse se  $2\theta < 90^\circ$ , una parabola se  $2\theta = 90^\circ$ , ed un'iperbole se  $2\theta > 90^\circ$ .

I semiassi si ottengono dalla (3) per  $\beta = 90^\circ$ ,

$$a = \frac{d}{2} \operatorname{tg} 2\theta \quad \text{e} \quad b = d \sqrt{\frac{\sin \theta}{\cos 2\theta}};$$

per cui in tal caso l'angolo ( $\varphi$ ) che inchiodono le due generatrici, che passano pei vertici della conica, si ottiene dall'equazione

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \theta}{\cos 2\theta} \sqrt{3 \cos^2 \theta - 1}.$$

*Problema 340.* — Sia la ragione dei semiassi  $\frac{a}{b} = k$ .

Da (3) si ottiene allora

$$\sin \beta \cdot \sin(\beta - 2\theta) = \frac{\cos^2 \theta}{k^2},$$



e quindi

$$\cos 2(\beta - \theta) = \cos 2\theta - \frac{2 \cos^2 \theta}{k^2}$$

ci dà l'angolo  $\beta$ , che deve in tal caso includere il piano.

Altre risoluzioni della questione 340 del Prof. Retali, delle 339 e 340 del sig. Guido Fubini studente della Scuola normale superiore di Pisa e del sig. Ernesto Laura allievo del R. Istituto tecnico di Torino.

352.\* *Determinare una piramide triangolare regolare, conoscendo la superficie totale  $s$  e la distanza  $h$  dei vertici della base dalle facce opposte.*

LUIGI BOSI.

Risoluzione del sig. Ernesto Tucci, alunno del R. Istituto Tecnico di Livorno.

Sia  $(S, ABC)$  la piramide,  $SD = z$  l'apotema di essa,  $SP = y$  l'altezza relativa ad  $ABC$ ,  $x$  il lato della base,  $m$  la sua mediana. — Poniamo, per l'omogeneità  $s = a^2$ .

Si ha per dato:

$$(I) \quad \frac{3xz}{2} + \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} = a^2, \text{ ossia } 6xz + x^2 \sqrt{3} = 4a^2.$$

Dal triangolo rettangolo  $SPD$  si ha  $z^2 = y^2 + PD^2$ .

P essendo il baricentro del triangolo  $ABC$ , è  $PD = \frac{1}{3}m = \frac{x\sqrt{3}}{6}$  e quindi  $PD^2 = \frac{x^2}{12}$ , per cui

$$(II) \quad z^2 = y^2 + \frac{x^2}{12}$$

Si ha pure

$$(III) \quad \frac{1}{6} xzh = \frac{1}{6} yx^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ da cui } z = \frac{xy\sqrt{3}}{2h}.$$

Innalzando a quadrato e sostituendo nella (II) avremo,

$$(IV) \quad \frac{3x^2 y^2}{4h^2} = y^2 + \frac{x^2}{12}, \text{ da cui } x^2 = \frac{12h^2 y^2}{9y^2 - h^2}$$

Sostituendo nella (I) il valore di  $z$  dato dalla (III), avremo

$$x^2 \sqrt{3} (3y + h) = 4a^2 h, \text{ e per la (IV) } \frac{12h^2 y^2 \sqrt{3} (3y + h)}{9y^2 - h^2} = 4a^2 h,$$

ovvero

$$(V) \quad f(y) = 3hy^2 \sqrt{3} - 3a^2 y + a^2 h = 0$$

$$y = \frac{a^2 \sqrt{3} \pm a \sqrt{3a^2 - 4h^2 \sqrt{3}}}{6h}.$$

DISCUSSIONE. — Affinché  $y$  sia reale dev'essere  $3a^2 \geq 4h^2 \sqrt{3}$ , ossia

$$(VI) \quad a \geq \frac{2h}{\sqrt{3}}.$$

Soddisfatta questa condizione, le due radici della (V) sono positive, però  $y$  dev'essere tale da rendere positivo il secondo membro della (IV) e così dev'essere

$y > \frac{h}{3}$ . Ora sostituendo nella (V) si ha:  $f\left(\frac{h}{3}\right) = \frac{h^2 \sqrt{3}}{3} > 0$ ; d'altra parte la semisomma delle radici della (V) è espressa da  $\frac{a^2}{2h\sqrt{3}}$ , quindi, in causa della (VI), sarà



maggiore di  $\frac{2h}{3}$  e a fortiori di  $\frac{h}{3}$ . Si conclude che, soddisfatta la (VI), entrambi le radici sono reali e maggiori di  $\frac{h}{3}$ . Il problema ha quindi, in tale ipotesi, due soluzioni che si riducono ad una nel

CASO PARTICOLARE  $\alpha = \frac{2h}{\sqrt{3}}$ . Sarà in questo caso  $x = \frac{4h}{3}$ ,  $y = \frac{2h}{3}$ ,  $z = \frac{4h\sqrt{3}}{9}$ ;

e quindi: "Data solamente  $h$ , la superficie totale  $s$  è minima ed uguale a  $\frac{4h^2}{\sqrt{3}}$ , quando

il lato della base è uguale a  $\frac{4h}{3}$ ."

356. Costruire le parabole che hanno una data direttrice, e

- a) passano per due punti dati;
- b) passano per un punto e toccano una retta data;
- c) toccano due rette date.

RELLI.

Risoluzione del sig. Ernesto Tucci, alunno nel R. Istituto Tecnico di Livorno.

Basta, per ogni caso costruire il fuoco della curva.

a) Siano M ed N i punti dati. Centro in M ed in N successivamente si descrivano due circonferenze tangenti alla direttrice. Il fuoco, per una proprietà della parabola, dovendo appartenere ad ambedue le circonferenze sarà sulla loro intersezione. Avremo quindi due, una, o nessuna soluzione, secondo che le circonferenze sono secanti, tangenti esternamente o esterne l'una all'altra. Se sono tangenti esternamente, i punti e il fuoco sono in linea retta. Se la retta MN è perpendicolare alla direttrice, le circonferenze sono tangenti internamente e la parabola degenera in una semiretta.

b) Sia M il punto dato,  $t$  la retta data. Centro in M si descriva la circonferenza tangente alla direttrice.

Per il punto d'incontro P della retta  $t$  colla direttrice conducasi la retta PQ simmetrica della direttrice rispetto alla  $t$ . Il fuoco, per un noto teorema, dovendo appartenere alla PQ e alla circonferenza, sarà sulla loro intersezione. Avremo quindi due, una o nessuna soluzione, secondo che la PQ è secante, tangente o esterna alla circonferenza. Per avere il punto di contatto della tangente  $t$ , basta costruire il simmetrico del fuoco rispetto a  $t$ , il quale apparterrà alla direttrice, e da quel punto innalzare una perpendicolare alla direttrice fino all'incontro della  $t$  in un punto, che sarà quello richiesto. Oppure si può innalzare dal fuoco una perpendicolare alla PQ fino all'incontro della  $t$  in un punto, etc. Se la PQ è tangente alla circonferenza M, il punto M, il fuoco ed il punto di contatto saranno in linea retta.

c) Si conducano le simmetriche  $d, d'$  della direttrice rispetto alle tangenti date  $t, t'$ . Il loro punto d'incontro F è il fuoco della parabola. Al solito i punti di contatto si troveranno, determinando le intersezioni rispettive della  $t$  e  $t'$  con le normali alle  $d, d'$  condotte da F.

Se le tangenti  $t$  e  $t'$  sono parallele, oppure se fanno con la direttrice angoli uguali a un semiretto, allora le  $d$  e  $d'$  saranno parallele ed il problema non avrà soluzione.

Altre risoluzioni del Prof. Umberto Ceretti e del sig. Emilio Stretti, allievo della R. Accademia navale.



364. Indicando in generale con  $f(a, b)$  l'espressione:

$$d_1 \cdot d_2 \dots d_n \cdot \varphi \left( \frac{a}{d_1 \cdot d_2 \dots d_n} \right),$$

nella quale è

$$d_1 = D(a, b), d_2 = D\left(\frac{a}{d_1}, d_1\right), d_3 = D\left(\frac{a}{d_1 d_2}, d_2\right); \dots d_n = D\left(\frac{a}{d_1 d_2 \dots d_{n-1}}, d_{n-1}\right),$$

e si suppone  $d_{n+1} = 1$ , dimostrare che, se  $a, b$  sono divisori di  $m$ , sussiste la relazione

$$f(m, a) \cdot f(a, b) \cdot b = f(m, b) f(b, a) \cdot a.$$

365. Sia  $m$  multiplo di  $a$  e  $b$ .

Se  $m$  non contiene altri fattori primi oltre quelli di  $a, b$  sussiste la relazione:

$$f(a, b) \cdot m = f(m, b) \cdot a;$$

ed inversamente, se ha luogo tale relazione,  $m$  si compone con soli fattori primi di  $a, b$ .

U. SCARPIS.

Risoluzione del sig. Eugenio Stocchi alunno del R. Istituto tecnico di Ravenna.

LEMMA. — Condizione necessaria e sufficiente affinché ogni fattore primo di  $p$  sia fattore primo di  $q$  e viceversa, è che i due numeri siano proporzionali ai loro indicatori.

Sia

$$p = a^\alpha b^\beta \dots l^\lambda, \quad q = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \dots l^{\lambda_1};$$

si ha quindi

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= p \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{l}\right), & \varphi(q) &= q \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{l}\right); \\ \frac{\varphi(p)}{p} &= \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{l}\right), & \frac{\varphi(q)}{q} &= \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{l}\right); \end{aligned}$$

quindi

$$\frac{\varphi(p)}{p} = \frac{\varphi(q)}{q}$$

La condizione è dunque necessaria.

Si abbia ora

$$\frac{\varphi(p)}{p} = \frac{\varphi(q)}{q},$$

e si ponga

$$\begin{aligned} q &= a^{\alpha_1} b^{\beta_1} c^{\gamma_1} \dots \\ p &= a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots \end{aligned}$$

Allora si ha

$$\frac{\varphi(p)}{p} = \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right) \dots, \quad \frac{\varphi(q)}{q} = \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right) \dots;$$

quindi per ipotesi

$$\left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right) \dots = \left(1 - \frac{1}{a_1}\right) \left(1 - \frac{1}{b_1}\right) \left(1 - \frac{1}{c_1}\right) \dots;$$

ossia

$$(1) \quad \frac{(a-1)(b-1)(c-1)\dots}{a \cdot b \cdot c \dots} = \frac{(a_1-1)(b_1-1)(c_1-1)\dots}{a_1 b_1 c_1 \dots}$$

Ed ora riducendo, ai minimi termini la frazione  $\frac{(a-1)(b-1)\dots}{ab\dots}$ , otterremo la



frazione  $\frac{h}{k}$ , in cui  $k$ , non potendo essere eguale al 1, perchè la frazione considerata è evidentemente minore dell'unità, contiene qualunco dei fattori primi  $a, b, c, \dots$ . Supponiamo che contenga  $a$ . — D'altra parte la frazione  $\frac{(a_1-1)(b_1-1)\dots}{b_1 b_1 \dots}$  ha i suoi termini equimultipli dei termini della  $\frac{h}{k}$ , dunque il prodotto dei fattori primi  $a, b, c, \dots$  è divisibile per  $k$  e quindi per  $a$ ; ma allora  $a$  è eguale ad uno di essi; sia eguale ad  $a_1$ . Allora si ha  $\frac{a-1}{a} = \frac{a_1-1}{a_1}$ , per cui dalla (1) si ricava

$$(2) \quad \frac{(b-1)(c-1)\dots}{b c \dots} = \frac{(b_1-1)(c_1-1)\dots}{b_1 c_1 \dots}$$

In modo analogo possiamo provare che uno dei fattori primi  $b, c, \dots$  è uguale ad uno dei fattori primi  $b_1, c_1, \dots$ ; sia  $b = b_1$ . Ma allora si ricava  $\frac{b-1}{b} = \frac{b_1-1}{b_1}$ , per cui dalla (2) si ha

$$\frac{(c-1)\dots}{c \dots} = \frac{(c_1-1)\dots}{c_1 \dots}$$

È chiaro che così continuando potremo provare che ciascuno dei fattori primi  $a, b, c, \dots$  è eguale ad uno dei fattori primi  $a_1, b_1, c_1, \dots$ ; e non può darsi che si esaurisca l'una serie di fattori prima dell'altra perchè allora si avrebbe un'eguaglianza della forma

$$1 = \frac{(m-1)(n-1)\dots}{m \cdot n \dots},$$

il che è evidentemente impossibile.

La condizione è quindi anche sufficiente.

Passiamo ora alla risoluzione delle quistioni proposte.

364. Si formino i seguenti specchi di eguaglianze:

<p>(1)</p> <p>(5) <math>a = d\alpha</math> <math>b = d\beta</math>; <math>\alpha</math> primo con <math>\beta</math></p> <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> <p>(5) <math>\alpha = d_1\alpha_1</math>; <math>\alpha_1</math> primo con <math>\beta_1</math> <math>d = d_1\beta_1</math></p> <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> <p>(5) <math>\alpha_1 = d_2\alpha_2</math>; <math>\alpha_2</math> primo con <math>\beta_2</math> <math>d_1 = d_2\beta_2</math></p> <p style="text-align: center;">. . . . .</p> <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> <p>(5) <math>\alpha_{h-2} = d_{h-1}\alpha_{h-1}</math>; <math>\alpha_{h-1}</math> primo con <math>\beta_{h-1}</math> <math>d_{h-2} = d_{h-1}\beta_{h-1}</math></p> <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> <p>(5) <math>\alpha_{h-1} = d_h\alpha_h</math>; <math>\alpha_h</math> primo con <math>\beta_h</math> <math>d_{h-1} = d_h\beta_h</math>; <math>\alpha_h</math> " " " <math>d_h</math></p>	<p>(2)</p> <p>(6) <math>m = a \cdot r</math> <math>a = a \cdot 1</math></p> <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> <p>(6) <math>r = t_1\omega_1</math>; <math>\omega_1</math> primo con <math>\mu_1</math> <math>a = t_1\mu_1</math></p> <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> <p>(6) <math>\omega_1 = t_2\omega_2</math>; <math>\omega_2</math> primo con <math>\mu_2</math> <math>t_1 = t_2\mu_2</math></p> <p style="text-align: center;">. . . . .</p> <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> <p>(6) <math>\omega_{p-2} = t_{p-1}\omega_{p-1}</math>; <math>\omega_{p-1}</math> primo con <math>\mu_{p-1}</math> <math>t_{p-2} = t_{p-1}\mu_{p-1}</math></p> <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> <p>(6) <math>\omega_{p-1} = t_p\omega_p</math>; <math>\omega_p</math> primo con <math>\mu_p</math> <math>t_{p-1} = t_p\mu_p</math>; <math>\omega_p</math> " " " <math>t_p</math></p>
---	---



$$\begin{array}{l}
 (3) \\
 (7) \frac{b}{a} = \frac{d}{d\alpha}; \beta \text{ primo con } \alpha \\
 \hline
 (7) \frac{\beta}{d} = \frac{\delta_1 \rho_1}{\delta_1 \sigma_1}; \rho_1 \text{ primo con } \sigma_1 \\
 \hline
 (7) \frac{\rho_1}{\delta_1} = \frac{\delta_2 \rho_2}{\delta_2 \sigma_2}; \rho_2 \text{ primo con } \sigma_2 \\
 \hline
 \dots \dots \dots \\
 \hline
 (7) \frac{\rho_{k-2}}{\delta_{k-2}} = \frac{\delta_{k-1} \rho_{k-1}}{\delta_{k-1} \sigma_{k-1}}; \rho_{k-1} \text{ primo con } \sigma_{k-1} \\
 \hline
 (7) \frac{\rho_{k-1}}{\delta_{k-1}} = \frac{\delta_k \rho_k}{\delta_k \sigma_k}; \rho_k \text{ primo con } \sigma_k \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 (4) \\
 (8) \frac{m}{h} = \frac{b s}{b \cdot 1} \\
 \hline
 (8) \frac{s}{b} = \frac{u_1 \psi_1}{u_1 \theta_1}; \psi_1 \text{ primo con } \theta_1 \\
 \hline
 (8) \frac{\psi_1}{u_1} = \frac{u_2 \psi_2}{u_2 \theta_2}; \psi_2 \text{ primo con } \theta_2 \\
 \hline
 \dots \dots \dots \\
 \hline
 (8) \frac{\psi_{q-2}}{u_{q-2}} = \frac{u_{q-1} \psi_{q-1}}{u_{q-1} \theta_{q-1}}; \psi_{q-1} \text{ primo con } \theta_{q-1} \\
 \hline
 (8) \frac{\psi_{q-1}}{u_{q-1}} = \frac{u_q \psi_q}{u_q \theta_q}; \psi_q \text{ primo con } \theta_q \\
 \hline
 \end{array}$$

Si consideri uno qualunque di questi specchi, il 1° p. es.; è facile vedere che si ha:

$$\begin{aligned}
 d = D(a, b); d_1 = D(\alpha, d) = D\left(\frac{a}{d}, d\right); d_2 = D(\alpha, d_1) = D\left(\frac{a}{d d_1}, d_1\right) \dots \\
 d_h = D(\alpha_{h-1}, d_{h-1}) = D\left(\frac{a}{d d_1 \dots d_{h-1}}, d_{h-1}\right);
 \end{aligned}$$

infine  $d_{h-1} = D(\alpha_h, d_h) = D\left(\frac{a}{d d_1 \dots d_h}\right) = 1$ ; a quest'ultimo risultato si giunge necessariamente, perchè le  $\alpha$  e le  $d$  vanno continuamente decrescendo.

Sopra i medesimi specchi facciamo le seguenti osservazioni, che ci serviranno in seguito:

Si consideri lo specchio (1), e sia  $\gamma$  un fattore primo di  $a$ , non comune a  $b$ ; non potendo  $\gamma$  dividere  $b$ , non può dividere  $d$ ; e allora dividendo  $a$  dovrà dividere  $\alpha$ ; non dividendo  $d$  non può dividere  $d_1$ , ma, dividendo  $\alpha$ , dovrà dividere  $\alpha_1$ ; non dividendo  $d_1$  non divide  $d_2$  e dividendo  $\alpha_1$  dovrà dividere  $\alpha_2$ ; ecc. Così proseguendo si arriva a provare che  $\gamma$  divide  $\alpha_h$ . Sia ora  $\gamma$  un fattore primo di  $\alpha_h$ ; esso non può dividere nè  $\beta_h$  nè  $d_h$  (perchè primi con  $\alpha_h$ ), non può dunque dividere  $d_{h-1}$ , però dividendo  $\alpha_h$  divide  $\alpha_{h-1}$ , e allora non può dividere  $\beta_{h-1}$  (perchè  $\beta_{h-1}$  è primo con  $\alpha_{h-1}$ ), quindi non dividendo nè  $d_{h-1}$  nè  $\beta_{h-1}$  non divide  $\alpha_{h-1}$  ecc. Continuando si arriva a provare che  $\gamma$  divide  $a$  e non  $b$ . Si può osservare che conseguenza di queste considerazioni è che  $\alpha_h$  è formato con tutti e coi soli fattori di  $a$  non comuni a  $b$ .

Si tratta dunque di provare che:

$$\begin{aligned}
 (2) \ a t_1 t_2 \dots t_p \cdot \varphi\left(\frac{m}{a t_1 t_2 \dots t_p}\right) \cdot d_1 d_2 \dots d_h \cdot \varphi\left(\frac{a}{d d_1 \dots d_h}\right) \cdot b = \\
 = b u_1 u_2 \dots u_q \cdot \varphi\left(\frac{m}{b u_1 u_2 \dots u_q}\right) \cdot d \delta_1 \delta_2 \dots \delta_k \cdot \varphi\left(\frac{b}{d_1 \delta_2 \dots \delta_k}\right).
 \end{aligned}$$

Moltiplicando membro a membro le (5) dello specchio (1); e lo stesso facendo per le (6) dello specchio (2); per le (7) dello specchio (3); per le (8) dello specchio (4), si ha facilmente:



$$\left\{ \begin{array}{l} a = d d_1 d_2 \dots d_h \alpha_h \\ m = \alpha t_1 t_2 \dots t_p \omega_p \\ b = d \delta_1 \delta_2 \dots \delta_k \rho_k \\ m = b u_1 u_2 \dots u_q \psi_q \end{array} \right. \quad \text{da cui} \quad \left\{ \begin{array}{l} d d_1 \dots d_h = \frac{a}{\alpha_h} \\ \alpha t_1 \dots t_p = \frac{m}{\omega_p} \\ d \delta_1 \dots \delta_k = \frac{b}{\rho_k} \\ b u_1 \dots u_q = \frac{m}{\psi_q} \end{array} \right.$$

e sostituendo nella (9) essa diviene:

$$\frac{m}{\omega_p} \cdot \varphi\left(\frac{m}{\omega_p}\right) \cdot \frac{a}{\alpha_h} \cdot \varphi\left(\frac{a}{\alpha_h}\right) \cdot b = \frac{m}{\psi_q} \cdot \varphi\left(\frac{m}{\psi_q}\right) \cdot \frac{b}{\rho_k} \cdot \varphi\left(\frac{b}{\rho_k}\right) \cdot a$$

ossia:

$$(10) \quad \frac{\varphi(\omega_p) \cdot \varphi(\alpha_h)}{\omega_p \cdot \alpha_h} = \frac{\varphi(\psi_q) \cdot \varphi(\rho_k)}{\psi_q \cdot \rho_k}$$

Consideriamo ora un fattore primo  $\gamma$  di  $\alpha_h$ ; sappiamo che esso divide  $a$ . Supponiamo che  $\gamma$  divida anche  $\omega_p$ ; allora esso (specchio 2) non può dividere  $a$ , il che è assurdo. Dunque  $\alpha_h$  è primo con  $\omega_p$ .

Analogamente si prova che  $\rho_k$  è primo con  $\psi_q$ . Dunque si ha

$$\varphi(\omega_p) \cdot \varphi(\alpha_h) = \varphi(\omega_p \cdot \alpha_h) \quad , \quad \varphi(\psi_q) \cdot \varphi(\rho_k) = \varphi(\psi_q \cdot \rho_k)$$

Quindi la (10) diviene:

$$(11) \quad \frac{\varphi(\omega_p \cdot \alpha_h)}{\omega_p \cdot \alpha_h} = \frac{\varphi(\psi_q \cdot \rho_k)}{\psi_q \cdot \rho_k}$$

Prendiamo un fattore primo  $\gamma$  del prodotto  $\omega_p \alpha_h$ , esso dividerà  $\omega_p$  od  $\alpha_h$ ; supponiamo che divida  $\alpha_h$ ; ma allora specchio (1) divide  $a$  e non  $b$ ; dividendo  $a$  divide  $m$ ; quindi dividendo  $m$  e non  $b$  specchio (4) divide  $\psi_q$  e per conseguenza il prodotto  $\psi_q \rho_k$ . Supponiamo ora che  $\gamma$  divida  $\omega_p$  allora specchio (2) divide  $m$  e non  $a$ ; dividendo  $m$  potrà dividere  $b$  e potrà non dividerlo. Lo divida, allora specchio (3) dividendo  $b$  e non  $a$  divide  $\rho_k$  quindi  $\psi_q \rho_k$ . Infine si supponga che  $\gamma$  non divida  $b$ , allora specchio (4) dividendo  $m$  e non  $b$  divide  $\psi_q$ . Concludiamo dunque che un fattore primo di  $\omega_p \alpha_h$  è pure fattore di  $\psi_q \rho_k$ ; in modo analogo possiamo provare che ogni fattore primo di  $\psi_q \rho_k$  divide  $\omega_p \alpha_h$ ; ma allora per il Lemma premesso la (11) è vera, quindi anche la (10) ed infine la (9).

365. Si formino gli specchi:

$$(1) \quad \begin{array}{l} (3) \ a = d \alpha \\ \quad b = d \beta; \ \alpha \text{ primo con } \beta \end{array}$$

$$(3) \ \alpha = d_1 \alpha_1; \ \alpha_1 \text{ primo con } \beta_1 \\ d = d_2 \beta_1$$

$$(3) \ \alpha_1 = d_2 \alpha_2; \ \alpha_2 \text{ primo con } \beta_2 \\ d_1 = d_2 \beta_2$$

.....

$$(2) \quad \begin{array}{l} (4) \ m = b \cdot n \\ \quad b = b \cdot 1 \end{array}$$

$$(4) \ n = \delta_1 \rho_1; \ \rho_1 \text{ primo con } \sigma_1 \\ b = \delta_1 \sigma_1$$

$$(4) \ \rho_1 = \delta_2 \rho_2; \ \rho_2 \text{ primo con } \sigma_2 \\ \delta_1 = \delta_2 \sigma_2$$

.....



$$\begin{array}{l|l}
 (3) \alpha_{h-2} = d_{h-1} \alpha_{h-1} & (4) \rho_{k-2} = \delta_{k-1} \rho_{k-1} \\
 d_{h-2} = d_{h-1} \beta_{h-1} ; \alpha_{h-1} \text{ primo con } \beta_{h-1} & \delta_{k-1} = \delta_{k-1} \sigma_{k-1} ; \rho_{k-1} \text{ primo con } \sigma_{k-1} \\
 \hline
 (3) \alpha_{h-1} = d_h \alpha_h ; \alpha_h \text{ primo con } \beta_h & (4) \rho_{k-1} = \delta_k \rho_k ; \rho_k \text{ primo con } \sigma_k \\
 d_{h-1} = d_h \beta_h ; \alpha_h \text{ " " } d_h & \delta_{k-1} = \delta_k \sigma_k ; \rho_k \text{ " " } \delta_k
 \end{array}$$

La condizione posta dal problema è:

$$(5) \quad dd_1 d_2 \dots d_h \cdot \varphi \left( \frac{a}{dd_1 \dots d_h} \right) m = b \delta_1 \delta_2 \dots \delta_h \cdot \varphi \left( \frac{m}{b \delta_1 \delta_2 \dots \delta_h} \right) \cdot a.$$

Ma moltiplicando membro a membro le (3) dello specchio (1); poscia le (4) dello specchio (2) si ha

$$a = dd_1 \dots d_h \alpha_h, \quad m = b \delta_1 \delta_2 \dots \delta_h \rho_h,$$

da cui

$$dd_1 \dots d_h = \frac{a}{\alpha_h}, \quad b \delta_1 \delta_2 \dots \delta_h = \frac{m}{\rho_h};$$

per le quali la (5) diviene

$$\frac{a}{\alpha_h} \cdot \varphi \left( \frac{a}{\alpha_h} \right) m = \frac{m}{\rho_h} \cdot \varphi \left( \frac{m}{\rho_h} \right) \cdot a,$$

ossia

$$(6) \quad \frac{\varphi(\alpha_h)}{\alpha_h} = \frac{\varphi(\rho_h)}{\rho_h}.$$

Supponiamo che  $m$  sia formato da soli fattori semplici di  $a$ ,  $b$ . Sia  $\gamma$  un fattore primo di  $\alpha_h$ ; per le considerazioni fatte nella risoluzione della precedente quistione, si ha che  $\gamma$  divide  $a$  e non  $b$ . Ma dividendo  $a$  divide  $m$ , e allora divide  $m$  e non  $b$  per cui specchio (2) divide  $\rho_h$ . Inversamente sia  $\gamma$  un fattore primo di  $\rho_h$ , esso divide  $m$  e non  $b$ , quindi per l'ipotesi fatta dovrà dividere  $a$ ; ma allora dividendo  $a$  e non  $b$  specchio (1) divide  $\alpha_h$ . Ma allora per il Lemma promesso sussiste la (6), quindi la (5).

La condizione è necessaria.

Supponiamo ora che la (5) sia vera, quindi anche la (6), allora per il suddetto Lemma  $\alpha_h$  è formato con tutti e coi soli fattori semplici di  $\rho_h$ . Sia  $\gamma$  un fattore primo di  $m$ , esso dividerà  $b$  o non lo dividerà: se non lo divide, dividendo  $m$  e non  $b$  specchio (2) divide  $\rho_h$ , ma allora divide  $\alpha_h$  quindi  $a$ . Dunque qualunque fattore primo di  $m$  o divide  $b$  o se non divide  $b$  divide  $a$ .

La condizione è dunque anche sufficiente.

## QUISTIONI PROPOSTE (\*)

**359\***. In un triangolo qualunque ciascuna bisettrice è divisa dal centro del circolo iscritto in due parti, che stanno fra loro come la somma dei lati che comprendono l'angolo bisecato sta al terzo lato.

(\*) Le quistioni contrassegnate con un asterisco sono proposte particolarmente agli studenti delle scuole secondarie; le altre a tutti gli studiosi indistintamente.



**360\***. In un triangolo qualunque il rettangolo dei due segmenti determinati su ciascuna altezza dal punto d'incontro con le altre due è costante (ed equivalente al quadruplo del rettangolo che ha per lati i raggi dei cerchi iscritto e circoscritto al triangolo, che ha per vertici i piedi delle altezze).

G. CARDOSO-LAYNES.

**361\***. Costruire il triangolo conoscendo un lato, l'angolo opposto e la bisettrice dell'angolo noto.

A. VIVARELLI.

**362\***. 1<sup>a</sup>. Determinare tre numeri in progressione geometrica, conoscendo la loro somma  $S$  e quella  $P^3$  dei loro cubi.

Supposto che  $S$  e  $P$  siano reali e positivi, quali condizioni si richiedono perchè siano reali e positivi anche i tre numeri domandati?

**363\***. 2<sup>a</sup>. Sui lati  $AB, BC, CD, DA$  di un quadrilatero gobbo  $ABCD$  siano quattro punti  $A_1, B_1, C_1, D_1$  presi in modo che il loro baricentro coincida con quello dei vertici  $A, B, C, D$  del quadrilatero dato. Dimostrare che si ha

$$\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{BB_1}{B_1C} = \frac{CC_1}{C_1D} = \frac{DD_1}{D_1A}.$$

LUIGI BOSI.

**366\***. 1<sup>o</sup>. La condizione necessaria e sufficiente, perchè un numero  $a$  sia eguale alla somma di  $p$  numeri dispari consecutivi è che  $p$  sia un divisore di  $a$  tale che

$$\frac{a}{p} - p = \text{numero pari (lo 0 compreso)}.$$

**367\***. 2<sup>o</sup>. La condizione necessaria e sufficiente, perchè un numero  $a$  sia eguale alla somma di  $p$  numeri pari consecutivi è che  $p$  sia un divisore di  $a$  tale che

$$\frac{a}{p} - p = \text{numero dispari}.$$

A. FONTEBASSO.

**368.** Dimostrare che

$$2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+\frac{3}{2n}}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+\frac{5}{2n}}} \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2-\frac{1}{n}}} \right\}$$

G. FUBINI.

**369\***. Se  $T$  è un tronco di prisma, che ha per base un poligono regolare  $S$ ,  $P$  è il punto d'incontro dell'altra base  $S'$  colla retta parallela agli spigoli laterali condotta per il centro del circolo circoscritto ad  $S$ ,  $h$  la distanza di  $P$  dal piano di  $S$ ,  $h_1$  la media aritmetica delle distanze dei vertici di  $S'$  dal piano di  $S$ , si dimostri che  $T$  è equivalente alla somma di tre piramidi, che hanno la base eguale ad  $S$  e l'altezza una eguale ad  $h$  e due ad  $h_1$ .

**370\***. Il volume di un segmento sferico ad una base di altezza  $h$  ha per misura  $\frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h)$ . Da questa misura si deducano quelle più comunemente usate per il segmento sferico ad una e due basi.

G. LAZZERI.



## BIBLIOGRAFIA

PAOLO GAZZANIGA. — *Libro di Aritmetica ed Algebra elementare.* — (II<sup>a</sup> edizione. Padova, Tip. Prosperini, 1897. L. 3,50).

La letteratura matematica, in questo ultimo decennio, specialmente, si è arricchita anche in Italia di opere pregevoli, che al rigore scientifico uniscono eccellenti qualità didattiche. Non sono, purtroppo, ancora scomparsi i mestieranti, che pubblicano libri per le scuole raffazzonati alla peggio, e che incontrano il favore dei pigri e degli ignoranti, ma alla loro azione deleteria si oppone ora quella benefica (che dovrà pure trionfare) di egregi scienziati, i quali non isdegnano di scendere dalla loro altezza per occuparsi della scienza elementare. Anche nelle scuole secondarie deve penetrare un soffio di vita nuova, che, iniziandole nei metodi della scienza moderna, tolga quella discontinuità tanto deplorata quanto dannosa fra gli studi secondari e quelli superiori. È doveroso, in un tempo che alla scienza deve tante conquiste, dare ad essa la dovuta importanza nella scuola, cominciando dalla più bella, dalla più pura, da quella che alle altre dà forza e diritto di esistere: la matematica.

Il libro del Gazzaniga per l'aritmetica razionale e per l'Algebra elementare mira a questo scopo nobilissimo e lo raggiunge.

Il libro del Gazzaniga in 324 pagine comprende tutto il programma attuale di Aritmetica ed Algebra elementare del corso secondario, compresa la trigonometria piana e qualche argomento, che, sebbene non compreso nei programmi ufficiali, può, ove l'indole della scuola lo permetta, essere svolto anche nel Liceo, perché importante e divertente.

Della prima edizione di questo libro si occupò nel *Periodico* il prof. Ciamberlini (anno XI, fascicolo IV-V, 1896), quindi io mi limiterò ad accennare alle differenze esistenti tra la prima e la seconda edizione, per non ripetere un'altra recensione pubblicata da me nel *Comune* di Padova del 3 marzo 1896.

Nel § 7, n. 44, del cap. I, il Gazzaniga, accogliendo volentieri un'osservazione rivoltagli, modificò il teorema: *Se fra i numeri 1, ..., E ( $\sqrt{n}$ ) non vi è alcun divisore primo di n, il numero stesso n o è primo, oppure è il quadrato di un numero primo*, sopprimendo l'ultima parte. Nel § 10 " Osservazioni ed aggiunte " sono trasportati i principi dell'analisi combinatoria, che nella I<sup>a</sup> edizione comparivano nel § 8, e così chiunque voglia non oltrepassare mai i limiti dei programmi ufficiali, può omettere nella scuola lo svolgimento di quella parte del testo, del resto interessante e piacevole. Nelle osservazioni è accennato in modo breve e chiaro alle condizioni sufficienti perché un gruppo sia numerabile.

Nel § 11 " Prime proprietà dei numeri frazionari " le frazioni sono introdotte in modo formale: le osservazioni preliminari sono utili per togliere quel senso di arbitrarietà, che presenta ai giovani il sistema formale, l'unico però da adottarsi in un insegnamento veramente razionale dell'aritmetica e dell'algebra.

Nel § 12, n. 80 vi è un breve cenno sulla proporzionalità dei numeri interi e frazionari dedotto dalla teoria delle frazioni.

Il § 13 (corrispondente al 12° della I<sup>a</sup> edizione) contiene le *proprietà generali dei numeri razionali* (con una nota storica importante che riferisce il vero significato della parola *irrazionale*), salvo il cenno sulle frazioni continue trasportato al § 11 " osservazioni ed aggiunte, " anche qui collo scopo di separare nettamente lo svolgimento del programma ufficiale da quelle nozioni che, per quanto importanti, non figurano in esso. Approvo anche l'aggiunta del § 19, ove, dopo aver introdotto formalmente lo zero ed i numeri negativi, e studiate le operazioni con i numeri algebrici positivi e negativi, si accenna al fatto che anche i numeri negativi servono ad esprimere aggregati di oggetti o rapporti di grandezze, e quindi le operazioni con questi numeri possono servire a risolvere questioni di importanza pratica. Fra le aggiunte di questo § troviamo un cenno sulla teoria delle congruenze,



i teoremi di Wilson e di Fermat (che nella prima edizione appartenevano al § 8 "altre proprietà dei numeri"), e sul n.º dei termini periodici di  $\frac{1}{n}$  con  $n$  primo o potenza di numero primo.

La teoria dei numeri reali, svolta magistralmente anche nella 1ª edizione, non presentava ragione alcuna per essere modificata; soltanto nella ristampa del libro le osservazioni e le aggiunte, prima sparse per il capitolo vennero raccolte nell'ultimo paragrafo (il 27º).

In fine del cap. Vº (*Numeri complessi*) una tabella riassume i diversi numeri studiati fin allora, e si passa quindi all'Algebra propriamente detta.

È a proposito dei numeri complessi ripeto quanto scrissi altrove qualche tempo fa: non so perché la loro teoria, bella, semplice e feconda, non faccia parte del programma liceale, quando è accettata quella degli irrazionali, introdotti per uno scopo, che viene raggiunto completamente soltanto coll'introduzione dei numeri complessi: alludo all'estrazione di radice, di qualunque indice, di un numero reale. Nel primo § dell'algebra è introdotto esplicitamente il concetto di *numero finito e determinato* (di solito ammesso in silenzio dagli autori e dai docenti) e alla definizione di *espressione algebrica* e di ciò che s'intende per suo valore fa seguito l'osservazione: *Non sempre una espressione algebrica produce un numero finito e determinato*, che mancava nella prima edizione.

Il teorema n. 45 a pag. 222 è enunciato, nella ristampa, in modo completo e chiaro, mentre la sua distinzione in parti (adottata da quasi tutti gli altri autori) lascia sempre dei dubbi ai discenti.

L'applicazione della teoria generale delle equazioni alle equazioni ad una incognita di Iº, IIº, IIIº e IVº grado è opportunamente raccolta in un solo paragrafo, nel quale il docente, ove non sia persuaso di estendere il suo programma, può sopprimere i cenni sulle equazioni di IIIº e IVº grado, indipendenti da quelle di Iº e IIº, svolte con brevità, semplicità ed eleganza.

Al § sui sistemi di equazioni segue un'aggiunta interessante sulle equazioni non algebriche, (esponenziale, logaritmica, applicazione dei logaritmi ai problemi d'interesse composto, ecc.).

Il libro termina con l'applicazione dell'Algebra alla Geometria, svolgendo la trigonometria piana. La chiusa è degno epilogo del libro bellissimo, prova luminosa dell'alto sapere e delle ottime qualità didattiche di chi lo scrisse.

L'autore nella ristampa ha tenuto conto delle lievi osservazioni degli amici, ha raccolto una maggior quantità di esercizi per ogni paragrafo, ha distinto con caratteri speciali tutte le definizioni, le proprietà caratteristiche e gli enunciati dei teoremi, e infine ha esteso qualche nota storica interessante. Il libro del Gazzaniga a mio parere, è uno dei migliori fra quanti uscirono finora in Italia per l'insegnamento dell'aritmetica e dell'algebra nei Licei e ad esso non può, non deve mancare il favore degli insegnanti colti e studiosi.

D. G. B. MARANGONI.

GIUSEPPE VERONESE (con la collaborazione di P. GAZZANIGA). — *Elementi di Geometria, ad uso dei Licei e degli Istituti Tecnici (1º biennio)*.

Questo del Prof. Veronese è diverso dagli altri trattati di geometria, che sono in uso nelle nostre scuole secondarie. Le ragioni del libro sono svolte nella Prefazione, e si riducono alle seguenti: coordinare gli *Elementi* di Euclide allo stretto rigore scientifico dei metodi moderni; formare della geometria un sistema di verità tale che l'osservazione empirica dia i concetti limitati e concreti, l'intuizione ne tragga alimento a concetti generali, e la scienza dia a questi ultimi leggi indipendenti dall'esperienza e logicamente connesse ognuna alla successiva.

Notevole è specialmente: 1º la soppressione del concetto del movimento senza deformazione nello studio della eguaglianza delle figure, per non restringere il concetto di eguaglianza a quello di congruenza; 2º l'applicazione di un principio moderno, secondo il quale: se è data una figura A mediante alcuni postulati e un'altra figura B in tale corrispondenza con A che collo scambio di alcune parole valgono per B le proposizioni contenute nei postulati di A, allora valgono pure per B, con lo scambio di quelle medesime parole, tutte le proposizioni dedotte per A.

Il Libro è preciso, è chiaro, è breve, ma non è facile, nel senso volgare della



parola; offerto a menti, non addestrate alla perfezione logica, reca fatica in sul principio ma poi — io lo dico per l'esperimento che ne ho fatto quest'anno — riesce più facile di ogni altro, e reca diletto ed utile a scolari e a maestri.

Anche gli esercizi, che sono numerosi, e divisi paragrafo per paragrafo, danno argomento di utile ricapitolazione della materia, ed aggiungono pregio didattico al trattato.

Questo è diviso in IX Capitoli, ed è preceduto da alcune nozioni generali sui gruppi, sulle serie e sulla corrispondenza univoca e del medesimo ordine tra i gruppi; nozioni che hanno importanza essenziale nel testo.

Senza volere addentrarci in un esame minuto di tutti i capitoli, che richiederebbe spazio non breve, mi limiterò per ora ad accennare i punti più importanti e le piccole lacune che, a parer mio, si riscontrano in quelle parti che furono argomento delle mie lezioni al 1° corso dell'Istituto.

Ad es. nel § 1° del libro primo le dimostrazioni dei teoremi, che per l'addizione dei segmenti valgono la legge associativa e la legge commutativa, non sono estese al caso di un numero qualsivoglia di segmenti. Al Teorema I (pag. 18) sui segmenti multipli, convrebbe mettere innanzi alcuni cenni sul metodo di conclusione da  $n$  ad  $n + 1$ , che è opportunamente applicato qui ed altrove.

Notevoli sono: la definizione di *figure opposte* rispetto ad un punto; quella dell'eguaglianza di esse, che viene data prima e indipendentemente dalla nozione del piano, e quella di rette parallele, che discende immediatamente dal concetto di figure opposte.

Non intendo piuttosto come, date le definizioni di figure eguali e di coppie rettilinee, non debba dedursi immediatamente che gli angoli di due coppie rettilinee eguali e gli angoli opposti al vertice sono eguali. Perchè, se l'angolo è definito come una parte del fascio limitato da due raggi, esso è una figura di una coppia. Il teorema, ad es., che: "due figure  $F, F'$  eguali ad una terza  $F''$ , sono eguali tra loro", non è rigorosamente dimostrato nel caso che le figure non siano rettilinee; perchè la figura rettilinea che stabilisce la corrispondenza di eguaglianza tra  $F''$  ed  $F$  può essere diversa da quella che stabilisce la corrispondenza d'eguaglianza tra  $F''$  ed  $F'$ .

Nota ancora che il perimetro di un triangolo è considerato da Veronese come *parte esterna*, il che lascia dubbio su alcune altre definizioni, come ad es. su quella di *parte interna* del poligono convesso cioè "parte interna dei triangoli che hanno un vertice comune in un vertice del poligono, e per lati le rette congiungenti il vertice comune cogli altri vertici del poligono", perchè in tal modo i punti delle diagonali del poligono potrebbero essere supposti esterni al poligono stesso.

Il Postulato IV (pag. 85) dovrebbe essere preceduto da un teorema che dimostrasse la possibilità di costruire i segmenti  $a$  e  $b$ .

Ma queste ed altre poche osservazioni che si potrebbero fare sugli altri capitoli sono di poca importanza per sè medesime, e possono essere completate o illustrate dal maestro.

Ciò che importa di dire è che il trattato è un'opera originale e degna del suo autore; il quale, dedicando il suo intelletto alla soluzione del problema dell'insegnamento della Geometria elementare, ha bene meritato della scienza; tanto meglio ha meritato, quanto più il suo libro è lontano dalla speculazione materiale.

Per parte mia io lo ringrazio, perchè con questo suo lavoro egli mi ha procurato più vivo il piacere di insegnare le cose vecchie e di trovarvi dentro insieme il fresco spirito delle nuove.

G. BORDIGA.

#### ERRATA-CORRIGE.

Le quistioni dalla 354 alla 358 pubblicate nel fascicolo III sono del *Prof. Retali* il cui nome fu omissso per errore d'impaginazione. Per la stessa ragione fu errata la numerazione delle quistioni saltando i numeri da 359 a 362. Correggiamo tale errore nel presente fascicolo.

GIULIO LAZZERI — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 2 Luglio 1897.



## GENERALIZZAZIONE DI UN TEOREMA DEL PROF. E. CESÀRO

1. All'illustre prof. E. Cesàro è dovuto il seguente elegantissimo teorema:

Se con  $\alpha$  si rappresentano gli interi positivi per i quali

$$E\left(\frac{2n}{\alpha}\right) = 2k + 1,$$

essendo  $n$  un numero intero positivo qualunque, si ha:

$$\Sigma \varphi(\alpha) = n^2. (*)$$

Il simbolo  $E\left(\frac{2n}{\alpha}\right)$  indica la parte intera del quoziente  $\frac{2n}{\alpha}$  e la funzione  $\varphi(\alpha)$  è la nota funzione di Gauss, la quale rappresenta il numero dei numeri primi con  $\alpha$  e inferiori ad esso.

Il teorema precedente può essere notevolmente esteso in base alla generalizzazione da me fatta della funzione  $\varphi$  di Gauss. (\*\*)

2. Col simbolo  $\varphi_p(\alpha)$  indicheremo il numero dei gruppi costituiti ciascuno di  $p$  numeri non superiori ad  $\alpha$ , il cui massimo comun divisore è primo con  $\alpha$ . La funzione  $\varphi_p(\alpha)$  è definita da una delle seguenti uguaglianze:

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi_p(\alpha) = \alpha^p \left(1 - \frac{1}{a^p}\right) \left(1 - \frac{1}{b^p}\right) \dots, \\ \Sigma \varphi_p(\delta) = \alpha^p, \end{cases}$$

dove  $a, b, \dots$  sono i divisori primi del numero  $\alpha$  e la sommatoria s'intende estesa a tutti i divisori  $\delta$  di  $\alpha$ .

Faremo uso del simbolo  $s_m^{(p)}$  per indicare la somma delle  $p^{\text{me}}$  potenze dei primi  $m$  numeri naturali.

(\*) U. SCARPIS: *Primi elementi della teoria dei numeri* - pag. 24, vol. 225. - Mannali Hoepli.

(\*\*) Veggasi la mia nota: *Sopra un problema della teoria dei numeri* (Roma, *Periodico di matematica*, anno 1891, pag. 119) e l'articolo del Prof. E. Cesàro: *A proposito di una generalizzazione della funzione  $\varphi$  di Gauss*, (Roma, *Periodico*, anno 1892, pag. 1).



TEOREMA. — Se con  $\alpha$  si rappresentano gli interi positivi, pei quali  
 $E\left(\frac{2n}{\alpha}\right) = 2k + 1$ , essendo  $n$  un intero positivo qualunque, si ha:

$$\Sigma\varphi_p(\alpha) = s_{2n}^{(p)} - 2s_n^{(p)}.$$

Indichiamo con  $\beta$  quei numeri che entrano, esattamente o no, un numero dispari di volte in  $2(n-1)$ , con  $h$  tutti i divisori di  $2n-1$ , tolta l'unità, e con  $k$  tutti i divisori pari di  $2n$ , che danno quozienti dispari.

È chiaro che il gruppo dei numeri  $\alpha$  sarà costituito:

1° di tutti i numeri  $\beta$ , meno però quei numeri  $\beta_1 > 1$  divisori di  $2n$  che danno quozienti pari;

2° di tutti i numeri  $h$ ;

3° di tutti i numeri  $k$ .

Avremo quindi

$$(2) \quad \Sigma\varphi_p(\alpha) = \Sigma\varphi_p(\beta) - \Sigma\varphi_p(\beta_1) + \Sigma\varphi_p(h) + \Sigma\varphi_p(k).$$

Poniamo

$$n = 2^v n_1,$$

essendo  $n_1$  un numero dispari (è evidente che se  $n$  è dispari, deve essere  $v = 0$ ).

I numeri  $\beta_1 > 1$ , cioè i divisori di  $2n$ , tolta l'unità, che danno quozienti pari sono della forma  $2^{v'}\delta$ , essendo  $v' < v + 1$  e  $\delta$  divisore di  $n_1$ ; i divisori di  $2n$  che invece danno quozienti dispari, sono della forma  $2^{v+1}\delta$ . Quindi, se indichiamo con  $d$  tutti i divisori di  $2n$ , avremo

$$\Sigma\varphi_p(\beta_1) = \Sigma\varphi_p(d) - \Sigma\varphi_p(2^{v+1}\delta) - \varphi_p(1).$$

Ora, essendo  $\delta$  numero dispari e quindi primo con  $2^{v+1}$ , ed osservando la prima delle (1), ricaviamo

$$\varphi_p(2^{v+1}\delta) = \varphi_p(2^{v+1})\varphi_p(\delta) = 2^{v+1}(2^p - 1)\varphi_p(\delta);$$

applicando la seconda delle (1), abbiamo inoltre

$$\Sigma\varphi_p(d) = 2^v n^p,$$

$$\Sigma\varphi_p(2^{v+1}\delta) = 2^{v+1}(2^p - 1)\Sigma\varphi_p(\delta) = 2^{v+1}(2^p - 1)n_1^p = (2^p - 1)n^p.$$

Pertanto avremo, giacchè è  $\varphi_p(1) = 1$ ,

$$\Sigma\varphi_p(\beta_1) = 2^v n^p - (2^p - 1)n^p - 1,$$

ossia

$$\Sigma\varphi_p(\beta_1) = n^p - 1.$$

I numeri  $h$  sono i divisori di  $2n - 1$ , esclusa l'unità, quindi sarà:

$$\Sigma\varphi_p(h) = (2n - 1)^p - \varphi_p(1) = (2n - 1)^p - 1.$$



















Osserviamo che i resti sono primi con  $b$ , come subito si ricava dalla  

$$a \cdot 10^k \equiv r_k \pmod{b}.$$

Questo conferma la nota proprietà che  $x$  può essere al più eguale a  $\varphi(b)$ , e mostra che la frazione  $\frac{r_k}{b}$  è essa pure ridotta ai minimi termini. È poi evidente che i resti corrispondenti a questa frazione sono  $r_{k+1}, \dots, r_x, \dots, r_{k+x}$ , e che il periodo è la corrispondente permutazione circolare di quello relativo alla  $\frac{a}{b}$ .

2. Supponiamo che  $x$  sia scomponibile in due fattori interi  $m$  e  $q$ ; dove  $q > 1$ , e, per conseguenza,  $x > 1$ . (Ciò esclude quindi il solo caso  $x = 1$ , epperò  $b = 3$  oppure  $9$ ). Il periodo allora si può spezzare in  $q$  gruppi successivi di  $m$  cifre l'uno,  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_q$ , e sarà eguale a

$$P = p_1 \cdot 10^{(q-1)m} + p_2 \cdot 10^{(q-2)m} + \dots + p_{q-1} \cdot 10^m + p_q.$$

Avremo poi, per lo stesso procedimento della divisione

$$a \cdot 10^m = b p_1 + r_m$$

$$a \cdot 10^{2m} = b (p_1 \cdot 10^m + p_2) + r_{2m}$$

$$a \cdot 10^{3m} = b (p_1 \cdot 10^{2m} + p_2 \cdot 10^m + p_3) + r_{3m}$$

$$\dots$$

$$a \cdot 10^{qm} = b (p_1 \cdot 10^{(q-1)m} + p_2 \cdot 10^{(q-2)m} + \dots + p_{q-1} \cdot 10^m + p_q) + r_{qm}.$$

Levando da ognuna di queste eguaglianze, moltiplicata per  $10^m$ , la successiva, otterremo

$$10^m \cdot r_m = b \cdot p_2 + r_{2m}$$

$$10^m \cdot r_{2m} = b \cdot p_3 + r_{3m}$$

$$\dots$$

$$10^m \cdot r_{(q-1)m} = b \cdot p_q + r_{qm};$$

cui si può aggiungere

$$10^m \cdot r_{qm} = b \cdot p_1 + r_m,$$

che è la prima delle eguaglianze precedenti, per essere  $r_{qm} = a$ .

Poniamo

$$\Sigma r = r_m + r_{2m} + \dots + r_{qm}, \quad \Sigma p = p_1 + \dots + p_q.$$

Sommando le eguaglianze precedenti avremo

$$(10^m - 1) \Sigma r = b \Sigma p.$$

Supponiamo ora, e supporremo sempre in tutto quanto segue, che  $b$  sia primo con  $10^m - 1$ . Dovrà allora  $b$  essere contenuto in  $\Sigma r$ , e per conseguenza,  $10^m - 1$  in  $\Sigma p$ ; avremo cioè, detto  $k$  un intero:

$$(I) \quad \frac{\Sigma r}{b} = \frac{\Sigma p}{10^m - 1} = k$$

Risulta chiaro in tal modo che la somma dei resti di posto  $m, 2m, 3m, \dots, qm$ , è multipla di  $b$ , e la somma dei corrispondenti gruppi con-



securivi di  $m$  cifre, in cui il periodo si può scomporre, è multipla, secondo lo stesso fattore, del numero composto di  $m$  cifre eguali a 9.

3. Il teorema si può estendere in questo senso: che i  $q$  resti, invece di contarli a partire dal primo, si potrebbero contare, sempre di  $m$  in  $m$ , a partire da uno qualunque di essi; ed i  $q$  gruppi di  $m$  cifre andrebbero contati in modo corrispondente, supposta continuata la successione delle cifre al quoziente, anche dopo l'ultima cifra del periodo.

E infatti, questi nuovi resti e questi corrispondenti nuovi gruppi, contati a partire dal  $k^{\text{esimo}}$  resto, sarebbero resti e gruppi, contati a partire dal primo resto, nella divisione che si farebbe per convertire in decimali la  $\frac{r_{k-1}}{b}$ . E per questa, essendo essa ridotta ai minimi termini (n. 1), vale il teorema precedente.

Abbiamo dunque:

*Se il periodo corrispondente alla  $\frac{a}{b}$  ha  $x = mq$  cifre, dove  $q > 1$ , e (supposto continuata indefinitivamente la divisione necessaria per convertire  $\frac{a}{b}$  in decimali) si considerano  $q$  resti di posto  $m, 2m, 3m, \dots$  a partire dal  $k^{\text{esimo}}$ ; e, parimenti a partire dalla  $k^{\text{esima}}$  cifra del periodo si considerano in esso  $q$  gruppi consecutivi di  $m$  cifre l'uno, le somme di quei resti e le somme di quei gruppi saranno equimultiple di  $b$  e del numero formato da  $m$  cifre eguali a 9.*

4. Ci sia permesso porgere qui un esempio un po' minuzioso, per fissare meglio le idee sulle cose dette e su quelle che diremo.

Convertendo in decimali la frazione  $\frac{12}{19}$  si ottengono al periodo le cifre

631. 578. 947. 368. 421. 052

e, come resti successivi, i numeri

6, 8, 11; 15, 17, 18; 9, 14, 7; 13, 16, 8; 4, 2, 1; 10, 5, 12.

Ora abbiamo, scomponendo in tutti i modi possibili il periodo in gruppi, a cominciare dalla prima cifra:

Somma dei gruppi di 9 cifre = 631.578.947 + 368.421.052 = 999.999  $\times$  1.  
 " " 6 " = 631.578 + 947.368 + 421.052 = 999.999  $\times$  2.  
 " " 3 " = 631 + 578 + 947 + 368 + 421 + 052 = 999  $\times$  3.  
 " " 2 " = 63 + 15 + 78 + 94 + 73 + 68 + 42 + 10 + 52 = 99  $\times$  5.  
 " di tutte le 8 " = 6 + 3 + .... + 5 + 2 = 9  $\times$  9.

E per i resti, contati a partire dal primo:

Somma dei resti di 9 in 9 = 7 + 12 = 19  $\times$  1.  
 " " 6 " = 18 + 8 + 12 = 19  $\times$  2.  
 " " 3 " = 11 + 18 + 7 + 8 + 1 + 12 = 19  $\times$  3.  
 " " 2 " = 3 + 15 + 18 + 14 + 13 + 8 + 2 + 10 + 12 = 19  $\times$  5.  
 " di tutti i resti = 6 + 3 + .... + 10 + 5 + 12 = 19  $\times$  9.



Se i gruppi si contassero a partire dalla seconda cifra, invece che dalla prima, si avrebbe:

$$\begin{aligned} \text{Somma dei gruppi di 9 cifre} &= 315.789.473 + 684.210.526 = 999.999.999 \times 1. \\ \text{" " 6 " } &= 315.789 + 473.684 + 210.526 = 999.999 \times 1. \\ \text{" " 3 " } &= 315 + 789 + 473 + 684 + 210 + 526 = 999 \times 3. \\ \text{" " 2 " } &= 31 + 57 + 89 + 47 + 36 + 84 + 21 + 05 + 26 = 99 \times 4. \\ \text{" di tutte le " } &= 3 + 1 + \dots + 2 + 6 = 9 \times 9. \end{aligned}$$

Le analoghe somme dei resti, contati a partire dal secondo di essi, 3, sono rispettivamente eguali a 19 moltiplicato per gli stessi coefficienti che si sono trovati per i corrispondenti gruppi di cifre, e cioè per 1, 1, 3, 4, 9.

5. Si può determinare la condizione perchè il periodo abbia  $mq$  cifre, essendo  $q$  un numero primo contenuto in  $b - 1$ .

Dovendosi infatti avere, (sempre rispetto al modulo  $b$ ) le congruenze

$$a \cdot 10^m \equiv r_m \quad a \cdot 10^{mq} \equiv a$$

si avrà, innalzando i membri della prima di queste alla  $q^{\text{esima}}$  potenza

$$a^q \cdot 10^{mq} \equiv r_m^q;$$

e moltiplicando per  $a^{q-1}$  quelli della seconda,

$$a^q \cdot 10^{mq} \equiv a^q,$$

donde

$$r_m^q \equiv a^q$$

L' $m^{\text{esimo}}$  resto deve quindi essere un numero  $x$  che soddisfi alla congruenza

$$(II) \quad x^q \equiv a^q \pmod{b}$$

E la condizione è anche sufficiente e cioè se l' $m^{\text{esimo}}$  resto è il primo che soddisfi a questa congruenza, ed è diverso da  $a$ , il periodo avrà  $qm$  cifre. E infatti essendo in questo caso

$$r_m^q \equiv a^q, \quad a \cdot 10^m \equiv r_m,$$

si avrà

$$a^q \cdot 10^{mq} \equiv r_m^q \equiv a^q, \quad \text{onde } a \cdot 10^{mq} \equiv a,$$

la quale dimostra che l' $mq^{\text{esimo}}$  resto è  $a$ , epperò il periodo finisce alla  $qm^{\text{esima}}$  cifra. E non prima; vale a dire il trovato periodo di  $qm$  cifre non può essere la riunione di periodi irriducibili di un altro numero di cifre,  $y$ . Perchè, se ciò fosse, dovrebbe  $y$  essere contenuto in  $qm$ , e due casi potrebbero darsi: o la  $y$  contiene il fattore  $q$ , ed è quindi della forma  $qm'$ , con  $m' < m$ , oppure non contiene  $q$  ed allora, essendo esso un numero primo, epperò primo con  $q$ , divide  $m$ , e sarà per es. eguale ad  $\frac{m}{s}$ . Nel primo caso, della congruenza  $a \cdot 10^{mq} \equiv a$  si ricaverebbe  $a^q \cdot 10^{m'q} \equiv a^q$  e dalla  $a \cdot 10^{m'} \equiv r_m$  si avrebbe  $a^q \cdot 10^{m'q} \equiv r_m^q$  onde  $r_m^q \equiv a^q$  e



non sarebbe l'  $m^{\text{esimo}}$  resto il primo che verifica la (II). Nel secondo il periodo sarebbe finito alla  $\left(\frac{m}{s}\right)^{\text{esimo}}$  cifra, epperò  $m$ , resto di posto  $m$ , (che dovrebbe essere una ripetizione di quello di posto  $\frac{m}{s}$ ) sarebbe  $a$ , contro il supposto.

Osserviamo poi che la (II) ha, come è noto,  $q$  soluzioni, (perchè una ne ha certamente, ed è  $x = a$ ), e che nel caso che una di queste fosse il resto di posto  $m$ , le altre sarebbero rispettivamente i resti di posto  $2m, 3m, \dots, qm$ .

Si può dunque dire:

« Il periodo della frazione irriducibile  $\frac{a}{b}$  si potrà scomporre in  $q$  (  $q$  numero primo contenuto in  $b - 1$  ) gruppi di  $m$  cifre aventi le proprietà vedute, quando, e solo quando, l'  $m^{\text{esimo}}$  resto sia il primo resto « diverso da  $a$ , che soddisfi alla congruenza (II). I resti poi di posto «  $2m, 3m, \dots, qm$  saranno le rimanenti radici della stessa ».

6. Dei teoremi ora veduti sono degni di speciale menzione i casi particolari di  $m = 1$  e di  $q = 2, 3$ , che esamineremo quindi separatamente.

Se si suppone  $m = 1$ , ossia se si considerano tutte le cifre del periodo e tutti i resti ottenuti nella divisione di  $a$  per  $b$ , si ha subito:

« La somma delle cifre del periodo è multipla di 9, e quella dei resti « è multipla di  $b$ , denominatore della frazione, secondo lo stesso numero « nel caso che  $b$  sia primo con 3 ».

Che la somma delle cifre del periodo sia multipla di 9, qualora  $b$  sia primo con 3, si ricava anche immediatamente dalla  $\frac{P}{10^x - 1} = \frac{a}{b}$ , dalla quale appare essere  $P$  un multiplo di 9. Ma che la somma dei resti debba essere multipla di  $b$ , e precisamente secondo lo stesso numero, non è ancora stato da altri, ch'io sappia, dimostrato.

Così per le frazioni aventi per denominatori i numeri primi

7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67,  
71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127,

i periodi delle quali hanno rispettivamente

6, 2, 6, 16, 18, 22, 28, 15, 3, 5, 21, 46, 13, 58, 60, 33,  
35, 8, 13, 41, 44, 96, 4, 34, 53, 108, 112, 42

cifre, (\*) ho verificato (e riporto questi numeri per comodo di chi volesse studiar meglio l'argomento) che la somma delle cifre del periodo è 9 moltiplicato risp. per

3, 1, 3, 8, 9, 11, 14, 6, 1, 2, 10, 23, 7, 29, 30, 16,  
14, 4, 6, 19, 22, 48, 2, 17, 25, 54, 56, 21

(\*) Vedasi anche la tav. che il prof. Bettini pubblica in altro numero di questo periodico, dove è bene osservare che è incorso un errore: per  $p = 23$ ,  $n$  deve essere 22 e non 32.



e la somma dei resti è il rispettivo denominatore, moltiplicato per questi stessi numeri. Si noti che questi numeri sono la metà del numero delle cifre del corrispondente periodo, nel caso che tal numero sia pari (cioè che è evidente dalle proprietà generali esposte e si vedrà meglio nel n. seg.), e press'a. poco la metà negli altri casi (non saprei formulare, né tanto meno dimostrare, una regola più precisa).

7. Pongasi ora invece  $q = 2$ , il che presuppone che le cifre del periodo (periodo binario) siano in numero pari. Allora il periodo si potrà

dividere in due semiperiodi di  $\frac{x}{2} = m$  cifre l'uno, i quali avranno per somma un numero composto di 9. Si osservi che il valore  $k$  nella formula (I) non può evidentemente essere diverso da 1. Segue che l' $m^{\text{mo}}$  resto sommato col  $2m^{\text{esimo}}$  darà  $b$ , epperò sarà  $b - a$ , poichè quest'ultimo è  $a$ ; e parimente daranno per somma  $b$  due resti qualunque che distano di  $m$  posti.

Viceversa, se l' $m^{\text{mo}}$  resto è  $b - a$ , avendosi, sempre rispetto al modulo  $b$ ,

$$r_m \equiv b - a \equiv -a, \text{ epperò } r_{m^2} \equiv a^2,$$

il periodo avrà  $2m$  cifre, per quanto è detto nel n. 5. Dunque:

*Se l' $m^{\text{esimo}}$  resto (e non un altro precedente) è  $b - a$ , il periodo avrà  $2m$  cifre. Arrivati al resto  $b - a$ , si sarà ottenuta la prima metà del periodo e quella dei resti. Le rimanenti cifre del periodo si avranno levando dal 9 quelle del primo semiperiodo, e parimente si otterranno i resti successivi all' $m^{\text{esimo}}$  levando da  $b$  quelli che li precedono di  $m$  posti. (\*)*

In questo caso il periodo si può anche scomporre in  $m$  gruppi di 2 cifre, tanto a cominciare dalla prima cifra che dalla seconda, e parimente i resti si possono raggruppare nella due somme di quelle di posto pari e di quelli di posto dispari. E perchè tutti insieme i resti hanno per somma  $bm$ , se la somma dei resti di posto pari è  $km$ , quella dei resti di posto dispari sarà  $(m - k)b$ : e i coefficienti  $k$  e  $m - k$  saranno necessariamente diversi se  $m$  dispari, mentre sono eguali per  $m$  pari. Parimente la somma dei gruppi di 2 cifre in cui si può dividere il periodo sarà  $99 \times k$  oppure  $99(m - k)$ , a seconda che i gruppi si cominciano a partire dalla prima o dalla seconda cifra. Se poi, essendo  $m'$  un divisore di  $m$ , si scompone il periodo in gruppi di  $m'$  cifre (sottogruppi del semiperiodo) la somma di questi gruppi sarà sempre (qualunque sia la cifra da cui si comincia), eguale al numero composto di  $m'$  cifre 9, mol-

tuplicato per  $\frac{m}{m'}$ ; e quindi la corrispondente somma dei gruppi di  $m'$  resti

sarà  $b \times \frac{m}{m'}$ . E infatti quei gruppi si possono associare in modo da for-

mare  $\frac{m}{m'}$  coppie, che danno per somma numeri composti di tutti 9.

(\*) Questo teor. fu già dimostrato dal Lugi per il solo caso di  $a = 1$  e  $b$  numero primo (*Periodico di Matem.* Anno II), e poi da me con metodo differente, ma colle stesse restrizioni, nell'accennata nota inserita nel giornale *Il Pitagora*.



Così per la frazione  $\frac{12}{19}$  la somma dei resti di posto dispari, è, come vedemmo,  $19 \times 5$ , e quella dei resti di posto pari è  $19 \times 4$ ; mentre la somma dei resti di 3 in 3, da qualunque s'incominci, è  $19 \times \frac{9}{3}$ .

Meglio si vedono queste cose considerando la frazione  $\frac{1}{97}$ , il periodo della quale ha le seguenti 96 cifre

010. 309. 278. 850. 515. 453. 917. 525. 773. 195. 876. 288. 659. 793. 814. 432.  
989. 690. 721. 649. 484. 536. 082. 474. 226. 804. 123. 711. 340. 208. 155. 567.

I resti poi sono

10, 9, 30; 9, 90, 27; 76, 81, 34; 49, 5, 59; 15, 53, 45; 62, 38, 89; 17, 73, 51; 25, 56, 75;  
71, 31, 19; 93, 57, 85; 74, 61, 28; 86, 84, 64; 58, 95, 77; 91, 31, 79; 14, 43, 42; 32, 29, 96;  
87, 94, 67; 88, 7, 70; 21, 18, 63; 48, 92, 47; 82, 44, 52; 85, 59, 8; 80, 24, 46; 72, 41, 22;  
25, 86, 78; 4, 40, 12; 23, 36, 69; 11, 13, 33; 39, 2, 20; 6, 60, 18; 83, 54, 55; 65, 68, 1.

Qui si ha che il valore di  $k$  (vedi formola (I)) è per la somma dei gruppi di 48 cifre = 1, epperò 48 per la somma di tutte le cifre. Per i gruppi di 24, 12, 8, 6, 4, 3, 2 cifre è quindi rispettivamente di  $\frac{48}{24} = 2$ ,  $\frac{48}{12} = 4$ ,  $\frac{48}{8} = 6$ ,  $\frac{48}{6} = 8$ ,  $\frac{48}{4} = 12$ ,  $\frac{48}{3} = 16$ ,  $\frac{48}{2} = 24$ . Invece per le somme dei gruppi di 32 cifre, epperò anche dei resti, di 32 in 32, (dove 32 non è divisore di 48, numero delle cifre del semiperiodo), si ha  $k = 1$ , se s'incomincia dalla prima cifra, ma non sempre per gli altri punti di partenza. Così mentre i resti di posto 32, 64, 96 sono 61, 35, 1, che hanno per somma 97, quelli di posto 35, 67 e 99 ovvero di posto 3, 35, 67 sono 30, 84, 80 la cui somma è 97. E che  $k$  non possa sempre essere eguale a 1 per le somme dei resti di 32 in 32 lo si poteva prevedere dal fatto che, se così fosse, la somma dei resti dovrebbe essere  $97 \times 32$ , mentre è invece  $97 \times 48$ . (\*)

Le stesse cose si possono ripetere per qualunque altra frazione avente per denominatore 97, il periodo e i resti delle quali si possono subito dedurre, con permutazione circolare, da quelli che ora abbiamo riportato (vedi n. 1).

Non parmi inopportuno richiamare poi l'attenzione del lettore su questo fatto, che le cose ora dette per i periodi binari valgono per qualunque denominatore  $b$  che sia primo con  $10^m - 1$ , (dove  $m$  è la metà del numero delle cifre del periodo); epperò, in particolare, quando  $b$  è primo, sempre escluso, s'intende,  $b = 3$ .

Ad es.  $\frac{45}{77}$  dà per periodo 584. 415 e per resti 65, 34, 32; 12, 43, 45, i quali soddisfano alle leggi suesposte, essendo appunto il 77 primo

(\*) I resti sono collocati, per modo che il lettore possa subito verificare, (anche per correggere qualche eventuale errore di stampa), che le somme dei 4 resti contati di 24 in 24, è sempre  $97 \times 2 = 194$ .



con  $10^3 - 1$ . Non così avviene per  $\frac{1}{99}$  o per  $\frac{1}{259}$ , cui corrispondono i periodi 01 o 003. 861; ma qui 99 non è primo con  $10 - 1$ , né 259 con  $10^3 - 1$ .

8. Suppongasi ora che sia  $q = 3$ . Il periodo potrà dunque scomporsi in 3 gruppi di  $m$  cifre l'uno (periodo *ternario*) i quali, sommati, daranno  $k$  volte il numero composto di  $m$  cifre 9. Il valore di  $k$  non può evidentemente superare il 2; ma può essere tanto 1 che 2. Si può osservare che  $k$  sarà = 1 quando  $a$  sia  $< 3$ , e cioè per le frazioni  $\frac{1}{b}$   $\frac{2}{b}$ ; supponendo i gruppi siano contati dalla prima cifra. E infatti le somme dei resti di posto  $m, 2m, 3m$  deve dare  $bk$ ; e siccome l'ultimo di esso è  $a$ , i primi due daranno per somma  $bk - a$ . Ma questa somma non può superare  $2b - 3$ , perchè questi resti saranno al più  $b - 1$  e  $b - 2$ , onde se  $a < 3$ , sarà  $k = 1$ .

Può bastare però che sia  $a = 3$  perchè sia  $k = 2$ . La frazione  $\frac{3}{7}$ , ad es. dà il periodo 428.571 e i resti 2, 6, 4, 5, 1, 3. Ora si ha

$$42 + 85 + 71 = 99 \times 2 \text{ e, analogamente, } 6 + 5 + 3 = 6 \times 2.$$

Quando il periodo è *ternario*, trovati i due primi gruppi del periodo, è subito determinato il terzo, sommando i due primi, e levando questa somma dal numero composto di tutti 9 oppure dal doppio di questo. Quale di questi due casi (se cioè  $k = 1$  oppure  $k = 2$ ) si verifichi, non può essere dubbio, nei casi pratici.

La condizione perchè il periodo sia ternario è, per quanto si disse nel n. 5, che tra i resti ottenuti ci sia una delle radici (diversa da  $a$ ) della

$$x^3 \equiv a^3 \pmod{b}$$

oppure, poichè il numero delle cifre del periodo non dipende da  $a$ , che, convertendo la frazione  $\frac{1}{b}$  in decimali, si giunga a un resto, diverso da 1, che soddisfi la

$$x^3 \equiv 1 \pmod{b}.$$

Questa congruenza ha sempre 3 radici non congruenti, se  $b - 1$  è divisibile per 3.

La condizione si può presentare sotto un'altra forma più pratica. Se il periodo ha  $3m$  cifre dovrà essere  $r_m + r_{2m} + r_{3m} = kb$ ; ed essendo  $r_{3m} = a$  sarà  $r_m + r_{2m} = kb - a$ . Ed è poi sufficiente che si abbia  $r_m + r_{2m} = kb - a$  (con  $k = 1$  oppure 2), perchè il periodo abbia  $3m$  cifre. Infatti si ha, sempre rispetto al modulo  $b$ ,

$$a \cdot 10^m \equiv r_m, \quad a \cdot 10^{2m} \equiv r_{2m};$$

epperò 
$$r_m + r_{2m} = kb - a \equiv a(10^m + 10^{2m}) \equiv -a,$$

e quindi 
$$a(10^{2m} + 10^m + 1) \equiv 0.$$

Sarà pertanto

$$a(10^m - 1)(10^{2m} + 10^m + 1) \equiv 0;$$



cioè  $a(10^{3m} - 1) \equiv 0$  epperò anche:  $10^{3m} - 1 \equiv 0$ ,

dalla quale si ha

$$a \cdot 10^{3m} \equiv a.$$

Questa dimostra essere  $a$  il  $3m$ esimo resto, epperò avere il periodo  $3m$  cifre

Nè può nascere il dubbio che questo periodo di  $3m$  cifre possa poi essere la riunione di periodi irriducibili (in questo caso il periodo vero avrebbe meno di  $3m$  cifre). Basta ripetere il ragionamento generale fatto nel n. 5. Si ha quindi:

*Se il  $2m$ esimo resto, che si ottiene dalla divisione di  $a$  per  $b$ , è il primo che sommato coll'  $m$ esimo dà  $kb - a$  (dove  $k = 1$  oppure  $2$ ), la frazione periodica equivalente alla  $\frac{a}{b}$  avrà  $3m$  cifre. Trovate le prime  $2m$  cifre del periodo, si potranno ottenere le altre  $m$ , e dai primi  $2m$  resti si potranno avere i seguenti  $m$ , applicando le ora vedute proprietà dei periodi ternari.*

Così nell'esempio citato della frazione  $\frac{1}{97}$ , arrivati al resto di posto  $64 = 2 \cdot 32$ , si vede che esso, sommato con quello di posto  $32$ , dà  $61 + 35 = 96$ , che è la differenza fra il denominatore e il numeratore della frazione. Si può dunque dire che i primi due terzi del periodo sono già trovati, e che l'altro terzo si otterrà sommando i primi due e levando le cifre della somma dal  $9$ . E parimente si troveranno tutti i resti dopo il  $64$ esimo con questa formola:  $r_{64+n} = k \cdot 97 - r_n - r_{32+n}$  dove tra il valore  $1$  e il valor  $2$ , che  $k$  può avere, non è possibile ambiguità.

E si ha:  $r_{65} = k \cdot 97 - r_1 - r_{33} = k \cdot 97 - 10 - 28 = 97 - 10 - 28 = 59$ ;  
 $r_{66} = k \cdot 97 - r_2 - r_{34} = k \cdot 97 - 3 - 86 = 97 - 3 - 86 = 8$ ,.....  
 $r_{70} = k \cdot 97 - r_6 - r_{38} = k \cdot 97 - 27 - 95 = 2 \cdot 97 - 27 - 95 = 72$ , ecc. ecc.

Anche qui insisteremo nel far notare che queste proprietà furono dimostrate nella ipotesi che  $b$  sia primo con  $10^m - 1$ ; epperò, possono sussistere anche in altri casi, oltre quello considerato in precedenti lavori sulle frazioni periodiche, cioè di  $b$  primo, diverso da  $3$ .

Così la frazione  $\frac{72}{259}$  dà luogo al periodo  $27.79.92$  e ai resti  $202, 207, 257, 239, 59, 72$ . Essi soddisfanno alle leggi del periodo ternario, avendosi che il  $259$  è primo con  $10^3 - 1 = 99$ .

Alessandria, 24 marzo 1897.

V. MURER.



## INTERMEZZO

I lettori di questa Rassegna mi useranno indulgenza, se usurpo alquanto spazio a cose di maggiore importanza per occuparlo con la mia persona. Rispondo al Prof. F. AMODEO, che in una lettera aperta " *A proposito dei postulati della Geometria Proiettiva* " comparsa da poco sul Giornale di Matematiche (vol. 34) discorre con mirabile disinvoltura de' fatti miei, preso argomento da poche osservazioni, da me volute inserire in un articolo " *Sugli enti primitivi della Geometria Proiettiva* " (che può vedersi agli atti di Torino del gennaio 1897) per far palese la temerità di qualche giudizio dello stesso sig. AMODEO circa un mio precedente lavoro. Trattandosi di cose molto pedestri, il lettore, che non fosse al corrente dell'antefatto, non si ritragga per ciò dal seguirmi: chè non gli sarà forse discaro ricrearsi alquanto con me di alcuni amenissimi inganni, nei quali è, non volendo, caduto il geniale e intraprendente geometra di Napoli.

\* ... Il sig. Pieri (così l'AMODEO) ha messo un postulato soverchio, il X. (\*) Il suo post. IX, che dice *se  $\pi$  è un piano proiettivo, fuori di esso giace almeno un punto, ...* afferma l'esistenza dell' $S_1$  (\*\*) e i punti o rette non complanari e i piani differenti fra loro di cui si può parlare non possono che far parte di quelli che mediante il piano  $\pi$  e il punto fuori di esso si possono costruire. — Quest'ultimo giudizio, per chi nol sapesse, equivale precisamente al (mio) post. X: nel senso che da una proposizione si deduce l'altra, e viceversa, presenti le più comuni notizie circa la retta ed il piano. Per la qual cosa avviene che il sig. AMODEO si valga senza saperlo di quel principio, introdotto furtivamente nel discorso; anzi lo adopera appunto per mostrarne l'inutilità.

\* E siccome in base al post. IX si dimostra che *nello  $S_2$  un  $S_2$  e un  $S_1$  che non si appartengono hanno un  $S_0$  a comune*, risulta che è inutile introdurre il postulato X. — Tra parentesi, non è pur vero che il teorema citato si regga " in base al post. IX " : anzi questo potrebbe esser tolto, senza niuna offesa alla stabilità di quella proposizione, contenente già nell'ipotesi il giudizio esistenziale espresso da IX. Ma il sig. AMODEO non ristà dal produrre argomenti contro la propria tesi, neanche dopo avere smentito con singolare efficacia ed eleganza (come abbiain visto) quella sua conclusione circa l'inutilità del post. X. Ed eccola poche righe appresso ad ammettere, che " *con quel post. si chiude lo spazio, e lo si limita alla terza dimensione* ". Un servizio da nulla, come ognun vede! Ben è vero che una dimensione di più o di meno poco importa al sig. AMODEO: *de minimis non curat praetor*.

Nè, del resto, può darsi in una scienza deduttiva un postulato assolutamente soverchio: fuorchè nel caso, che esso sia conseguenza delle altre premesse. Inutile potrà esser soltanto di fronte allo scopo che l'autor si prefigge. Sicchè bisognerebbe al sig. AMODEO di provare, che il X è conseguenza di altre premesse da me pure accettate; o che certi fini (p. es. la dualità fra gli enti punto proj<sup>o</sup>.

(\*) Questo: " *Una retta (proiettiva) e un piano (proiettivo) hanno sempre almeno un punto (proiettivo) a comune* ".

(\*\*) Per  $S_2$  s'intende l'insieme dei punti pr.<sup>i</sup> (degli  $S_0$ ) che stanno in raggi proiettanti i vari punti d'un piano pr.<sup>o</sup> (di un  $S_2$ ) da un punto esterno al medesimo. L' $S_1$  è la retta pr.<sup>a</sup>.



o piano proj<sup>o</sup>., ed il fatto che l'ambiente proiettivo, o classe dei punti proiettivi, risulti precisamente un  $S_2$  si possono egualmente raggiungere con gli altri miei postulati. Impresa vana ed assurda; parecchè si dimostra, come due e due fanno quattro, che è vero appunto il contrario. (\*)

A chi mi chiedesse, onde nascono gli equivoci del sig. AMODEO in questa parte, direi senza punto esitare: da poca avvertenza a certe particolarità di un'ipotesi; da poco o niun conto di certe differenze ideali, che paion piccine, e son grandi: particolarità e differenze, che men facilmente si scuoprono a chi non è familiare con quelle tali " idee ai simboli logici ", di cui tocca elegantemente il mio critico verso la fine. Se per es. si faccia astrazione dal post. X, corre un'enorme distanza fra il dire " una retta ed un piano " e il dire " una retta ed un piano d'un  $S_2$  ". Chi non avverte una tal differenza, non potrà neanche avvedersi dell'ufficio di quel postulato. — E come spiegarsi altrimenti l'ingenuità di chi pronunzia, ad es.: " avere io implicitamente accettata altrove la soppressione del post. X, non avendolo più ripresentato in un'altra Nota sopra *Un sistema di postulati per la Geometria proiettiva degli iperspazi*: " nota, che ha per iscopo appunto il definire l'ambiente proiettivo assoluto, senz'alcun limite al numero delle dimensioni? (\*\*)

Poiscia il sig. AMODEO, guidato dal suo " buon senso geometrico ", che " gli fa riconoscer distinte due proposizioni deducibili immediatamente l'una dall'altra per assurdo " (dunque, per es., anche queste: ogni  $a$  è  $b$ , ogni non  $b$  è non  $a$ ) mi domanda ancora una dimostrazione del come e perchè succeda che nella proposizione: 1<sup>o</sup>) " Due  $S_0$  indipendenti A e B individuano una (ed una sola) classe AB di infiniti  $S_0$ , di cui fan parte quei due " sia affermata senz'altro anche questa: 2<sup>o</sup>) " Se C, D sono due  $S_0$  di AB, sarà  $CD = AB$  ". Ma, forse presago dell'imbarazzo in che mi poneva con questa (veramente non troppo discreta) esigenza, (\*\*\*)

(\*) Da questa confusione dell' $S_2$  con la classe dei punti neppure si guardan sempre i Maestri. Nessun dubbio che il post. X si possa evitare, come qualunque altra premessa; ma a patto di sopprimere o mutare sostanzialmente parecchie proposizioni. Così p. es. una trattazione della Geometria Elementare indipendente da quel postulato (o da un altro che ne faccia le veci) — com'è quella recata dal prof. VERONESE negli *Elementi di Geometria*, Verona, 1897 — porterebbe a modificar gli enunciati consuetudinari d'un gran numero di proposizioni; a motivo della clausola " il tutto essendo supposto giacere in un dato spazio a tre dimensioni " — cioè dentro una figura definita p. es. come al loc. cit., pag. 108 — che bisognerebbe inserir nelle ipotesi. Questa regola è in fatti osservata sul principio del Libro terzo (op. cit., pag. 105); benchè il prof. Veronese adopari la frase " giacenti nello spazio, " troppo alta ad insinuar nella mente de' giovani l'idea che di quelle figure non esista più d'una, cioè ad introdurre tacitamente il postulato che si vorrebbe appunto evitare. Ma essa è già trascurata sin dal § 1 (vedi a pag. 113 il teorema V e il corollario che lo precede), per poi cadere in dimenticanza al § 3: risultandone proposizioni (come gli importantissimi teoremi I, II e III a pagg. 118-19) le quali, così come stanno e senza una qualche premessa che riduca la classe de' punti ne' confini d'uno spazio da tre dimensioni, non possono aver si per dimostrate; giacchè non son vere se l'ambiente geometrico può anche suppersi maggiormente esteso.

(\*\*) Tralascio a malincuore di alcune altre riflessioni del Sig. Am., che toccano da vicino al suo modo di vedere e d'intendere in certe questioni fondamentali di logica e senso comune: ma disgraziatamente vi manca ogni appiglio per una discussione un po' concludente. — Altra bontà d'idee chiare e ben definite, altra precisione di linguaggio, altro stile, altri metodi insomma ci vogliono ormai per trattare con qualche frutto di certi argomenti... Che costrutto si può cavare ad es. da tutti i discorsi che allegramente si rincorrono a pag. 2 fra le linee 2<sup>o</sup> e 20<sup>o</sup> della sua lettera?

(\*\*\*) " ... Che poi nella 1<sup>a</sup> sia affermata esplicitamente la 2<sup>a</sup> sarà manifesto a chiunque consideri un poco addentro il senso della prop. stessa, la quale in somma consiste nelle due affermazioni seguenti: a) Dati due  $S_0$  indipendenti A e B, esiste una classe d'infiniti  $S_0$  contenente que' due; b) questa classe è determinata dai punti stessi ed unica. — Or che cosa può mai significare la prop. b), se non vuol dire, che la classe AB non deve mutare, quando al posto di A, B s'introduca un'altra coppia di punti C, D, presi a piacere tra gli infiniti che compongono AB? " (PERRI, loc. cit.) — Togliasi il punto interrogativo (se così piace) e si legga: le prop. 1) e 2) rivestono entrambe un solo e medesimo concetto in forme grammaticali alquanto diverse (diversità che sparisce immediatamente alla prova, p. es., dei simboli logici).



candidamente si affretta a porgermi con le sue proprie mani l'invocata riprova; facendo ben constatare qualmente agli dimostri la proposizione 2<sup>a</sup> a questo modo: " infatti, se non fosse  $AB = CD$ , per C e D passerebbero due S, distinti CD ed AB, — che è quanto dire: " infatti, se non fosse vera la 2), non sarebbe vera la 1. Deduzione di ottima lega, e tale iuvero, che neanche il sig. Simplicio stenterebbe a riconoscer perfetta: ma che nel vigore della sua natività e concisione rivela appunto e tradisce la bontà del mio asserto.

Ma i confini segnati alla controversia paiono ormai troppo angusti alle armi cortesi del prof. AMODEO: il quale preso del campo a sua posta (sempre a cavallo del " buon senso geometrico ") corre una impresa più illustre facendosi incontro alcuni degli altri miei principi:

" Col IV [Se A, B sono punti distinti, la classe AB contiene il punto A] si afferma che in AB è il punto A, non B, e che in BC vi è il punto B, non C; col V [Se... C è un punto della classe AB, purchè diverso da B, sarà sempre  $AB = BC$  (\*)] si afferma che le classi AB, BC, che non hanno alcun punto comune, sono identiche... Una chiosa, per quanto arguta, qui non servirebbe che ad oscurar le bellezze del testo, con poco riguardo ai lettori. Ai quali voglio anzi batter le mani per avermi ascoltato fin qui: l'intermezzo è finito.

Torino, luglio 1897.

M. PIERI.

## SULLA QUESTIONE 342\*

In questa piccola nota osservo come la formola c) della questione indicata non è estensibile all' $n$ -gono inscritto in un circolo, ( $n > 4$ ).

Indichiamo di detto  $n$ -gono tre vertici consecutivi con  $i, i + 1, i + 2$ ; con  $a_{i,i+1}, a_{i+1,i+2}$  rispettivamente i lati congiungenti i vertici  $i, i + 1$ ;  $i + 1, i + 2$ ; e con  $d_{i,i+2}$  la congiungente i vertici  $i, i + 2$ . Di più indichiamo con  $h_{i,a_{i+1,i+2}}$  la distanza del vertice  $i$  dal lato  $a_{i+1,i+2}$  ed analogamente per  $h_{i+2,a_{i,i+1}}$ . Allora manifestamente si ha

$$(A) \begin{cases} h_{i+2,a_{i,i+1}} = \frac{d_{i,i+2} \times a_{i+1,i+2}}{2R} \\ h_{i,a_{i+1,i+2}} = \frac{d_{i,i+2} \times a_{i,i+1}}{2R} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n)$$

badando, nell'applicare queste formole, che gli indici della forma  $n + k, n + t$  vanno ritenuti solamente come indici  $k, t$ , e che lo scambio di posto degli indici

(\*) Questa prop. fu poi risolta in principi di minor peso nei lavori, che fanno seguito a quello preso in mira dal Sig. AM. : e il simile fu fatto di parecchi altri postulati; aggiungendo o togliendo, mutando o modificando in ogni parte. Con tutto ciò, (a sentir l'AM.) " il Sig. Pieri... dichiara che ad essi [i primi sei postulati del mio primissimo saggio] ha nulla da aggiungere o togliere ". — Un tale solocco e presuntuoso giudizio non fu mai da me pronunziato: nè in quella forma (dico a tutela del mio buon nome in grammatica) nè in altra.



stessi lascia inalterato l'elemento. È subito visto intanto che l'unico aggruppamento che possa dedursi dalla (A) e della natura della formola c), in generale, è il seguente:

$$(B) \sum_{i=1}^{i=n} \left[ h_{1, a_{i+1, i+2}} + h_{i+2, a_{i, i+1}} \right] \left[ \frac{1}{h_{1, a_{i+1, i+2}}} + \frac{1}{h_{i+2, a_{i, i+1}}} \right] = \\ = \sum_{i=1}^{i=n} \left[ a_{i, i+1} + a_{i+1, i+2} \right] \left[ \frac{1}{a_{i, i+1}} + \frac{1}{a_{i+1, i+2}} \right] \dots$$

Diciamo in generale, perché, oltre al triangolo ed al quadrangolo, per i quali si hanno rispettivamente le formole

$$\text{per il triangolo} \quad \left[ \begin{array}{l} h_{1, a_{23}} = \frac{a_{13} a_{12}}{2R}, \quad h_{3, a_{12}} = \frac{a_{13} a_{23}}{2R} \\ h_{2, a_{31}} = \frac{a_{23} a_{21}}{2R}, \quad h_{1, a_{23}} = \frac{a_{21} a_{31}}{2R} \\ h_{3, a_{12}} = \frac{a_{32} a_{31}}{2R}, \quad h_{2, a_{31}} = \frac{a_{32} a_{12}}{2R} \end{array} \right.$$

$$\text{per il quadrangolo} \quad \left[ \begin{array}{l} h_{1, a_{23}} = \frac{d_{13} a_{12}}{2R}, \quad h_{3, a_{12}} = \frac{d_{13} a_{23}}{2R} \\ h_{2, a_{31}} = \frac{d_{23} a_{21}}{2R}, \quad h_{4, a_{23}} = \frac{d_{23} a_{31}}{2R} \\ h_{3, a_{41}} = \frac{d_{31} a_{34}}{2R}, \quad h_{1, a_{31}} = \frac{d_{31} a_{41}}{2R} \\ h_{4, a_{12}} = \frac{d_{12} a_{11}}{2R}, \quad h_{2, a_{41}} = \frac{d_{12} a_{12}}{2R} \end{array} \right.$$

che permettono gli aggruppamenti noti, non vi sono altri casi: Di vero, perché le espressioni delle somme delle distanze dei vertici moltiplicate per le inverse di quelle siano confrontabili nel modo noto, con le espressioni della somma dei lati moltiplicate per la somma delle inverse di questi, è necessario che la espressione che ci dà ciascuna delle dette distanze non contenga più di una diagonale, ossia che questa diagonale sia il terzo lato di un triangolo di cui i due altri lati sono lati del poligono che si considera, epperò concludiamo che di formole analoghe alla c) per l' $n^{\text{esimo}}$  inscritto in un circolo ( $n > 4$ ) non vi è che la (B).

G. CANDIDO.

### SOLUZIONE DELLE QUISTIONI

271\* 272 276 279 282\* 338\* 351\* 355 366\* 367\* 368 369\*

271\*. Il trinomio:

$$a^{n+1} - (n+1)ab^n + nb^{n+1}$$

è divisibile per  $(a-b)^2$ ; dare l'espressione del quoziente. Dedurne poi che le espressioni  $2^{2n} + 15n - 1$  e  $2^{4n} - 15n - 1$  per  $n$  intero e positivo sono multiple rispettivamente di 9 e 25.

G. BELLACCHI.



Risoluzione del sig. G. Gallucci, studente a Napoli.

Sostituendo in  $a^{n+1} - (n+1)ab^n + nb^{n+1}$  alla  $b$  la  $a$  si ottiene zero, perciò essa è divisibile per  $a-b$ . Se nel quoziente  $a^n + ba^{n-1} + b^2a^{n-2} + \dots + b^{n-1}a - nb^n$  si sostituisce alla  $b$  la  $a$  si ottiene di nuovo zero, quindi il trinomio proposto è divisibile per  $(a-b)^2$ . Il quoziente è:

$$a^{n-1} + 2ba^{n-2} + 3b^2a^{n-3} + \dots + (n-1)b^{n-2}a + nb^{n-1}.$$

Invece di  $a, b, n+1$  poniamo  $4, 1, n$ ; l'espressione data si cangia in

$$4^n - n \cdot 4 + n - 1 = 4^n - 3n - 1$$

che dovrà essere divisibile per  $(4-1)^2 = 9$ . Aggiungendo  $18n$  non si cambia questo carattere di divisibilità, onde  $4^n + 15n - 1$  è multiplo di 9. Invece di  $a, b, n+1$  poniamo  $4, -1, 2n$ ; l'espressione data si cambia in

$$4^{2n} + 2n \cdot 4 + 2n - 1 = 2^{4n} + 10n - 1$$

che dovrà essere divisibile per  $[4 - (-1)]^2 = 25$ . Togliendo  $25n$  non si cambia questo carattere di divisibilità, onde  $2^{4n} - 15n - 1$  è multiplo di 25.

272. *Le coniche, passanti per un punto e bitangenti sopra una retta fissa alle coniche di un fascio, formano un altro fascio; gli 8 punti base dei due fasci sono in una conica.*

V. RETALI.

Risoluzione del sig. G. Gallucci.

Sia  $\varphi - k\psi = 0$  il fascio dato di coniche individuato dalle due coniche  $\varphi = 0$  e  $\psi = 0$ ;  $L = 0$  la retta fissa;  $\varphi_1, \psi_1, L_1$  ciò che diventano le espressioni  $\varphi, \psi, L$  quando alle coordinate correnti si sostituiscono quelle del punto dato. La conica passante per questo punto e bitangente secondo  $L$  alla  $\varphi$  è  $\varphi - k_1 L^2 = 0$ , ove

$$k_1 = \frac{\varphi_1}{L_1^2}.$$

Similmente la conica passante pel punto e bitangente alla  $\psi$  secondo  $L$  è

$$\psi - k_2 L^2 = 0 \text{ ove } k_2 = \frac{\psi_1}{L_1^2}.$$

Una conica qualunque del fascio individuato da queste due coniche è

$$(1) \quad \varphi - k_1 L^2 - k_2 (\psi - k_2 L^2) = 0,$$

che si può porre sotto la forma  $\varphi - k_2 \psi - k' L^2 = 0$ , e perciò è bitangente ad una conica del fascio dato. Dunque il fascio (1) è quello delle coniche passanti pel punto e bitangenti secondo  $L$  alle coniche del fascio dato. Prendiamo per  $k_2$

il valore speciale  $\frac{k_1}{k_2}$ ; otterremo la conica

$$\varphi - k_1 L^2 - \frac{k_1}{k_2} (\psi - k_2 L^2) = \varphi - \frac{k_1}{k_2} \psi = 0,$$

che appartiene anche all'altro fascio; dunque gli 8 punti base dei due fasci

stanno sulla conica  $\varphi - \frac{k_1}{k_2} \psi = 0$ .

276. *Fra tutti i triangoli le cui mediane formano una progressione aritmetica di data ragione, quali sono rettangoli, quali acutangoli, quali ottusangoli.*

L. BOSI.



Risoluzione del sig. G. Gallucci.

Sia  $m$  la ragione ed  $x$  la mediana minore, saranno  $m+x$ ,  $2m+x$  le altre due mediane. Ad  $x$  corrisponde il lato maggiore  $a$ , ad  $m+x$  il lato medio  $b$ , ad  $x+2m$  il lato minore  $c$ . Si avrà

$$b^2 + c^2 = 2x^2 + \frac{1}{2}a^2; \quad c^2 + a^2 = 2(m+x)^2 + \frac{1}{2}b^2; \quad a^2 + b^2 = 2(2m+x)^2 + \frac{1}{2}c^2;$$

da questa si deduce

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3} \left[ x^2 + (m+x)^2 + (2m+x)^2 \right].$$

Sostituendo in questa eguaglianza  $2x^2 + \frac{1}{2}a^2$  a  $b^2 + c^2$ , si ricava

$$a^2 + \frac{1}{2}a^2 + 2x^2 = \frac{4}{3} \left[ x^2 + (m+x)^2 + (2m+x)^2 \right],$$

da cui

$$\frac{9}{8}a^2 = \frac{3}{2}x^2 + 6mx + 5m^2,$$

In modo analogo si ricava:

$$\frac{9}{8}b^2 = \frac{3}{2}x^2 + 3m \times + \frac{7}{2}m^2, \quad \frac{9}{8}c^2 = \frac{3}{2}x^2 - m^2.$$

Il triangolo dato è rettangolo, acutangolo od ottusangolo secondo che  $a^2 \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} b^2 + c^2$  cioè secondo che

$$\frac{3}{2}x^2 + 6m \times + 5m^2 \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \frac{3}{2}x^2 + 3m \times + \frac{7}{2}m^2 + \frac{3}{2}x^2 - m^2$$

e riducendo  $3x^2 - 6m \times - 5m^2 \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0$ . Le radici dell'equazione, che si ottiene eguagliando a 0 il trinomio, sono

$$x_1 = m \left( 1 + \sqrt{\frac{8}{3}} \right), \quad x_2 = m \left( 1 - \sqrt{\frac{8}{3}} \right),$$

quindi si ha

$$3x^2 - 6mx - 5m = 3 \left[ x - \left( 1 + \sqrt{\frac{8}{3}} \right) m \right] \left[ x - \left( 1 - \sqrt{\frac{8}{3}} \right) m \right],$$

ed essendo  $x_2$  negativa, il segno del trinomio per valori positivi della  $x$  dipende solo dal fattore

$$x - \left( 1 + \sqrt{\frac{8}{3}} \right) m.$$

Per conseguenza il triangolo sarà rettangolo acutangolo ed ottusangolo secondo che  $x \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} m \left( 1 + \sqrt{\frac{8}{3}} \right)$ .

Altra risoluzione del sig. F. Celestri.

279. Si considerino tutte le coniche aventi a comune un fuoco  $F$  e la direttrice  $f$  corrispondente,  $F$  ed  $f$  essendo dati.



1°. Per ogni punto  $M$  del piano passa una ed una sola di queste coniche. Dire in quale regione deve trovarsi il punto  $M$ , perchè la conica corrispondente sia un'ellisse, una parabola od un'iperbole.

2°. Trovare il luogo dei vertici posti sugli assi non focali.

G. SCORZA.

Risoluzione del prof. U. Ceretti a Badia Polesine.

1°. Si sa che una conica può definirsi come il luogo di un punto, di cui la distanza da un punto fisso (fuoco) ha un rapporto costante  $e$  (eccentricità) colla distanza da una retta fissa (direttrice).

Prendendo per asse delle ordinate la retta fissa e per asse delle ascisse la perpendicolare alla direttrice condotta per il fuoco, l'equazione della conica (indicando con  $a$  la distanza dal fuoco alla direttrice) è

$$(1) \quad e^2 = \frac{(x-a)^2 + y^2}{x^2}.$$

Poichè ciascuna conica deve passare per il punto  $M$  del piano, indicando con  $X$  ed  $Y$  le sue coordinate, si ha

$$(2) \quad e^2 = \frac{(X-a)^2 + Y^2}{X^2};$$

e quindi secondo che  $e^2$ , e perciò  $e$ , al variare di  $X$  e di  $Y$  sarà minore, maggiore od uguale ad 1, la conica sarà ellisse, iperbole o parabola.

Risulta perciò evidente che, se il punto  $X, Y$  appartiene alla parabola rappresentata dall'equazione (2) ovvero

$$(3) \quad Y^2 = 2a \left( X - \frac{a}{2} \right)$$

che ha  $f$  per direttrice ed  $F$  per fuoco, la conica del fascio è la parabola stessa.

Per ogni punto  $M$  interno alla parabola (3) risulta:  $Y^2 < 2a \left( X - \frac{a}{2} \right)$ , e però anche:  $e^2 < 1$ ,  $e < 1$ ; mentre per ogni punto  $M$  esterno si ha analogamente:  $e > 1$ ; quindi in corrispondenza la conica del fascio è un'ellisse od un'iperbole. E' perciò: per ogni punto  $M$  interno alla parabola:  $Y^2 = 2a \left( X - \frac{a}{2} \right)$  la conica del fascio è un'ellisse; per ogni punto esterno è un'iperbole.

OSSERVAZIONE. — Per il caso particolare:  $X = a$ ,  $Y = 0$ , si ha:  $e = 0$ ; questo risultato dice che la conica del fascio si riduce al punto  $F$ , considerato come cerchio di raggio nullo.

2°. Dalle relazioni 1) e 2), eliminando  $e^2$ , si ottiene l'equazione della conica passante per il punto  $(X, Y)$ , e cioè:

$$x^2(a^2 + Y^2 - 2aX) - X^2y^2 + 2aX^2x = a^2X^2,$$

questa equazione si può anche scrivere:

$$\left( x + \frac{aX^2}{a^2 + Y^2 - 2aX} \right)^2 (a^2 + Y^2 - 2aX) - X^2y^2 = a^2X^2 \left( 1 + \frac{X^2}{a^2 + Y^2 - 2aX} \right);$$

le coordinate dei vertici situati sull'asse non focale, sono le soluzioni del sistema formato da questa equazione e dall'altra

$$x + \frac{aX^2}{a^2 + Y^2 - 2aX} = 0,$$



ovvero del sistema

$$\begin{cases} x = -\frac{aX^2}{a^2 + Y^2 - 2aX} \\ -X^2y^2 = a^2X^2 \left(1 + \frac{X^2}{a^2 + Y^2 - 2aX}\right) \end{cases}$$

Da queste equazioni eliminando  $\frac{X^2}{a^2 + Y^2 - 2aX}$  si deduce

$$y^2 = -a^2 \left(1 - \frac{x}{a}\right) = a(x - a);$$

quindi: il luogo dei vertici posti sugli assi non focali è la parabola d'equazione:  $y^2 = a(x - a)$ ; tale parabola, ha per asse l'asse delle ascisse, si ha per vertice il punto  $F(x = a, y = 0)$  ha per fuoco il punto  $\left(\frac{5a}{4}, 0\right)$  e per direttrice la retta  $x = \frac{3}{4}a$ .

282\*. Date due circonferenze concentriche di centro  $O$  ed un punto  $S$ , si tiri  $SO$  ad incontrare la circonferenza esterna in  $A$  e si congiunga un punto qualunque  $C$  di questa circonferenza con  $A$ . Condotta  $CO$  che sega la circonferenza interna in  $B$  e poi  $SB$  che incontra  $CA$  in  $M$ , trovare il luogo descritto dal punto  $M$  al variare di  $C$  sul cerchio.

A. LUGLI.

Risoluzione del sig. G. Gallucci.

Sia  $A'$  l'incontro di  $SO$  con la circonferenza interna. Siccome le due circonferenze sono concentriche risulta  $CA$  parallela a  $BA'$ , e per conseguenza  $\frac{SB}{SM} = \frac{SA'}{SA}$ . Dunque al variare di  $C$  sul cerchio il rapporto  $\frac{SB}{SM}$  è sempre eguale ad  $\frac{SA'}{SA}$ , quindi il punto  $M$  descrive una circonferenza omotetica alla circonferenza interna col centro di omotetia in  $S$  e col rapporto di omotetia  $\frac{SA'}{SA}$ .

Altra risoluzione del sig. F. Celestri.

338\*. Determinare la parte di superficie sferica racchiusa fra due archi l'uno di circolo massimo, l'altro di circolo minore terminati alla corda comune.

BELLACCHI.

Risoluzione del prof. V. Retali.

Sopra una sfera di centro  $O$  e raggio  $r$ , sieno tracciati un cerchio minore  $ACBD$  di centro  $H$  e raggio  $a$ , e un cerchio massimo  $ECFD$ : vuolsi determinare la superficie  $S$  del fuso sferico di prima specie (\*),  $CADEC$ , limitato da due archi  $CAD$  e  $CED$  supposti entrambi minori della metà delle circonferenze cui appartengono. Se  $P$  e  $P'$  sono i poli del cerchio minore, condotti i cerchi massimi  $PCP'$  e  $PDP'$ , la superficie cercata è la differenza fra il settore di calotta sferica  $PCADP$  (limitato dall'arco  $CAD$  e dai due archi eguali  $PC$  e  $PD$ ) e il triangolo sferico isoscele  $PCD$ ; denotando con  $\alpha$  e  $\beta$  le misure dell'arco di circolo di raggio  $1$  cor-

(\*) Dicesi essere un fuso sferico (Zweieck, Onglet), di prima o di seconda specie, secondo che uno solo o entrambi gli archi che lo limitano appartengono a cerchi minori.



rispondenti all'angolo CHD, e all'angolo sferico C del triangolo PCD, con  $h$  la distanza OH del centro della sfera del cerchio minore, avremo:

$$S = r(r-h)\alpha - r^2(\alpha + 2\beta - \pi) = 2r^2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - rh\alpha;$$

per le superficie  $S'$ ,  $S''$ ,  $S'''$  degli altri tre fusi CBDEC, CBDFC, CFDAC, abbiamo:

$$S' = \text{calotta PACBD} - S = 2r^2\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) - rh(2\pi - \alpha)$$

$$S'' = \text{emisf.} - S' = 2r^2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + rh(2\pi - \alpha).$$

$$S''' = \text{emisf.} - S = 2r^2\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) + rh\alpha.$$

Osservando ora che nelle espressioni di  $S$ ,  $S'$ ,  $S''$ ,  $S'''$  il coefficiente di  $2r^2$  è l'angolo  $\eta$  formato dalle tangenti in C ai lati del fuso; e che il coefficiente di  $rh$  è l'angolo  $\lambda$  corrispondente all'arco del cerchio minore, le quattro formole precedenti si riducono all'altra

$$\Sigma = 2r^2\eta \mp rh \cdot \lambda,$$

ove deve prendersi il segno  $-$  o il segno  $+$ , secondoche l'arco di cerchio massimo che è lato del fuso, è minore o maggiore di un semicerchio massimo. Fissando, arbitrariamente, il senso positivo dei lati del fuso vale la formola generale

$$\Sigma = 2r^2\eta - rh\lambda,$$

che esprime il teorema: *« la superficie di un fuso sferico di prima specie eguaglia quella di un fuso ordinario avente uguale angolo (delle tangenti) diminuita di un settore di zona sferica, la cui altezza è la distanza del cerchio minore dal centro della sfera, e il cui angolo è misurato dall'arco del cerchio minore ».*

L'ultima formola risolve completamente la quistione proposta, ma possiamo anche esprimere facilmente  $\Sigma$  in funzione della corda comune  $2s$  e dei raggi  $r$ ,  $\rho$ .

Abbiamo infatti,  $s = \rho \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$ ,

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{s}{\sqrt{\rho^2 - s^2}}, \quad h = \sqrt{r^2 - \rho^2}, \quad \cos \widehat{PC} = \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - \rho^2};$$

del triangolo sferico isoscele CPD abbiamo poi;

$$\cot PC \cdot \operatorname{sen} DP = \cot C \cdot \operatorname{sen} P + \cos DP \cdot \cos P$$

dalla quale,

$$\cot C = \cot \beta = \cos PC \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - \rho^2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

$$\cot \beta = \frac{s}{r} \sqrt{\frac{r^2 - \rho^2}{\rho^2 - s^2}},$$

e finalmente

$$\Sigma = 2r^2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \left( \frac{s}{r} \sqrt{\frac{r^2 - \rho^2}{\rho^2 - s^2}} \right) - 2r \sqrt{r^2 - \rho^2} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{sec} \frac{s}{\rho};$$

che è la formola a cui si perviene col Calcolo Integrale.

Le superficie di ogni poligono sferico limitato da archi di cerchi minori può esprimersi mediante quelle di fusi di prima specie, come mostrerò in altra occasione, in una nota su questo argomento.

Altra risoluzione del sig. Emanuele Palumbo Todaro.



351\*. Risolvere il sistema

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = a^2 \\ (2) \quad & y(x + z + u) = b \\ (3) \quad & x(z + u) + uz = c \\ (4) \quad & xz = d. \end{aligned}$$

CANDIDO.

Risoluzione del sig. Egidio Tamagnini alunno del R. Istituto Tecnico A. Secchi, Reggio Emilia.

Dalla (2) ottengo

$$x + z + u = \frac{b}{y},$$

e quadrando

$$x^2 + z^2 + u^2 + 2xz + 2xu + 2uz = \frac{b^2}{y^2}.$$

Ma  $x^2 + z^2 + u^2 = a^2 - y^2$  e  $2xz + 2xu + 2uz = 2c$ , quindi si ha

$$a^2 - y^2 + 2c = \frac{b^2}{y^2}$$

oppure

$$y^4 - (a^2 + 2c)y^2 + b^2 = 0,$$

La quale risolta dà:

$$y = \pm \sqrt{\frac{a^2 + 2c \pm \sqrt{(a^2 + 2c)^2 - 4b^2}}{2}}.$$

Conosciuto  $y$  il sistema diventa:

$$\begin{aligned} (1)' \quad & x^2 + z^2 + u^2 = a^2 - y^2 = a' \\ (2)' \quad & x + z + u = \frac{b}{y} = b' \\ (3)' \quad & xz + xu + uz = c \\ (4)' \quad & xz = d. \end{aligned}$$

Dalla (2)' ho ancora

$$x + z = b' - u,$$

e quadrando di nuovo

$$x^2 + z^2 + 2xz = b'^2 + u^2 - 2b'u.$$

Ma dalla (1)' ho  $x^2 + z^2 = a' - u^2$  e dalla (4)'  $2xz = 2d$  e di conseguenza

$$a' - u^2 + 2d = b'^2 + u^2 - 2b'u,$$

ossia

$$2u^2 - 2b'u + b'^2 - a' - 2d = 0,$$

che risolta mi dà

$$u = \frac{b' \pm \sqrt{2a' + 4d - b'^2}}{2}.$$

Restano le due incognite  $x, z$  di cui conosco la somma

$$x + z = b' - u = b''$$

e il prodotto

$$xz = d.$$



Posso quindi scrivere l'equazione in  $t$  che ha per radici  $x$  e  $z$

$$t^2 - b't + d = 0,$$

la quale mi dà

$$t = \frac{b'' \pm \sqrt{b''^2 - 4d}}{2};$$

e avrò finalmente

$$x = \frac{b'' \pm \sqrt{b''^2 - 4d}}{2} \quad z = \frac{b'' \mp \sqrt{b''^2 - 4d}}{2}$$

Altre soluzioni dei sigg. Guido Bordi, Gino Lubrano, Attilio Crepas, Michele Bello.

355. Se due cerchi eguali si segano sotto un angolo di  $60^\circ$ , il loro cerchio radicale è il luogo della proiezione (ortogonale) di un punto dell'un cerchio sulla sua polare rispetto all'altro.

RETAGLI.

Risoluzione del prof. Cardoso-Laynes.

Indicando con  $2a$  la distanza dei centri e con  $r$  il raggio, supposta la figura riferita ad un sistema cartesiano formato dalla retta centrale (asse  $x$ ) e dall'asse radicale (asse  $y$ ), le equazioni di due cerchi eguali qualunque saranno

$$(1) \quad (x - a)^2 + y^2 - r^2 = 0 \quad ; \quad (2) \quad (x + a)^2 + y^2 - r^2 = 0$$

e quella del loro cerchio radicale sarà:

$$x^2 + y^2 + a^2 - r^2 = 0.$$

Nel caso particolare in cui si supponga che i due cerchi s'incontrino secondo un angolo  $= \frac{\pi}{3}$ , se congiungiamo il centro di uno dei cerchi dati con uno dei punti d'intersezione degli stessi cerchi, dal triangolo che questa retta forma con gli assi coordinati si ha

$$(3) \quad a = r \cos \frac{\pi}{6} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

e perciò l'equazione del cerchio radicale diviene

$$(4) \quad x^2 + y^2 = \frac{r^2}{4}.$$

Ciò posto, consideriamo la polare, rispetto al cerchio (2), di un punto  $(x_1, y_1)$  appartenente al cerchio (1). Essa sarà:

$$(5) \quad (x + a)(x_1 + a) + yy_1 - r^2 = 0.$$

La normale a questa, condotta da  $(x_1, y_1)$  è

$$(6) \quad y - y_1 = \frac{y_1}{x_1 + a}(x - x_1).$$

Risolvendo il sistema (5) (6) rispetto a  $x_1, y_1$  si ha

$$(7) \quad x_1 = \frac{r^2(x + a) - a[(x + a)^2 + y^2]}{(x + a)^2 + y^2}; \quad y_1 = \frac{r^2 y}{(x + a)^2 + y^2}$$

nelle quali formole  $x, y$  indicano le coordinate della proiezione ortogonale di  $(x_1, y_1)$  sulla polare (5).



Sostituendo le (7) nella (1) si avrà l'equazione del luogo cercato, cioè:

$$r^4 - 4ar^2(x+a) + (4a^2 - r^2)\{(x+a)^2 + y^2\} = 0.$$

Tenendo conto della (3), la (8) si trasforma nella (4), il che dimostra il teorema.

Altra risoluzione del sig. Ernesto Laura.

**366<sup>a</sup>.** La condizione necessaria e sufficiente perchè un numero  $a$  sia eguale alla somma di  $p$  numeri dispari consecutivi è che  $p$  sia un divisore di  $a$  tale che

$$\frac{a}{p} - p = \text{numero pari (lo 0 compreso)}.$$

**367<sup>a</sup>.** La condizione necessaria e sufficiente perchè un numero  $a$  sia eguale alla somma di  $p$  numeri pari consecutivi è che  $p$  sia un divisore di  $a$  tale che

$$\frac{a}{p} - p = \text{numero dispari}.$$

A. FONTBRASSO.

Risoluzione del prof. Cardoso-Laynes.

Se indichiamo con  $S_k$  la somma dei primi  $k$  numeri dispari, avremo:

$$a = (2n+1) + (2n+3) + (2n+5) + \dots + (2n+2p-1) = S_{n+p} - S_n$$

ossia

$$a = (n+p)^2 - n^2 = p^2 + 2np$$

da cui

$$\frac{a}{p} - p = 2n$$

e inversamente da quest'ultima formola si risale facilmente alla prima, perciò il teorema del n. 366 resta dimostrato.

Se indichiamo con  $\Sigma_k$  la somma dei primi  $k$  numeri pari avremo:

$$a = (2n+2) + (2n+4) + \dots + (2n+2p) = \Sigma_{n+p} - \Sigma_n$$

ossia

$$a = (n+p)(n+p+1) - n(n+1) = p^2 + (2n+1)p$$

da cui

$$\frac{a}{p} - p = 2n+1$$

e inversamente da quest'ultima formola si può risalire alla prima e quindi il teorema del n. 367 resta dimostrato.

Altra risoluzione del sig. Michele Belfo.

**368.** Dimostrare che

$$2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}} \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2-\frac{1}{2n}}} \right\}$$

G. FUBINI.

Risoluzione del sig. E. Strocchi.

È noto che:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ; e si ha pure (Vedi: CESÀRO, *Corso di analisi algebrica*, pag. 149, § 18) indicando con  $\log a$  il logaritmo naturale di  $a$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{4n-1} \right) = \frac{1}{2} \log 2$$



Ciò premesso si ha:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{2n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\frac{3}{2n}} \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2-\frac{1}{2n}} \right\} = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{2n} + 1+\frac{3}{2n} + \dots + 2-\frac{1}{2n}} \right\} = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{2n+1} + \frac{2n}{2n+3} + \dots + \frac{2n}{4n-1}} \right\} = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}^{\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{4n-1}\right)} = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}^{2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{4n-1}\right)} = \\ & = e^{2 \cdot \frac{1}{2} \log_e 2} = e^{\log_e 2} = 2. \end{aligned}$$

Altre risoluzioni del sig. Angiolo Pensa e del Prof. Riccardo Micks.

369\*. Se T è un tronco di prisma, che ha per base un poligono regolare S, P è il punto d'incontro dell'altra base S colla retta parallela agli spigoli laterali condotta per il centro del circolo circoscritto ad S, h la distanza di P dal piano di S, h', la media aritmetica delle distanze dei vertici di S' dal piano di S; si dimostri che T è equivalente alla somma di tre piramidi che hanno la base eguale ad S e l'altezza una eguale ad h e due ad h'.

G. LAZZERI.

Risoluzione del sig. Prof. R. Micks di Trieste.

I semipiani condotti per la retta che congiunge P col centro del circolo circoscritto ad S e per gli spigoli laterali del tronco rispettivamente, scompongono il tronco in n tronchi di prismi triangolari le cui basi sono eguali ad  $s = \frac{S}{n}$ . — Chiamando  $h', h'', h''', \dots, h^{(n)}$ , le distanze dei vertici di S' dal piano di S, la misura del volume di uno di questi prismi triangolari è

$$v = \frac{s}{3} (h + h' + h'').$$

E quindi quella dell'intero tronco dato è

$$T = \frac{s}{3} [(h + h' + h'') + (h + h' + h''') + \dots + (h + h^{(n-1)} + h^{(n)}) + (h + h^{(n)} + h')]$$

ovvero 
$$T = \frac{s}{3} [n \cdot h + 2(h' + h'' + h''' + \dots + h^{(n)})].$$

Essendo 
$$h_1 = \frac{h' + h'' + h''' + \dots + h^{(n)}}{n},$$

si ha pure 
$$T = \frac{s}{3} [nh + 2nh_1],$$

$$T = \frac{ns \cdot h}{3} + 2 \frac{ns \cdot h_1}{3},$$

che (essendo  $ns = S$ ) si può scrivere

$$T = \frac{S \cdot h}{3} + 2 \frac{S \cdot h_1}{3}$$

q. e. d.



## QUISTIONI PROPOSTE (\*)

**371\***. Se  $N$  indica il numero dei numeri che hanno per caratteristica  $n$ , ed  $N'$  indica il numero dei numeri i cui reciproci hanno per caratteristica  $-n'$ , si ha  $\frac{N}{N'} = 10^{n-n'+1}$

**372\***. La sesta potenza di qualunque numero intero è congrua a 0, o ad 1 rispetto al modulo 9.

**373.** La terza potenza d'ogni numero intero è congrua a 0, o a  $\pm 1$ , o  $\pm 5$  rispetto al modulo 13.

**374\***. La sesta potenza di ogni numero intero è congrua a 0, o a  $\pm 1$ , rispetto al modulo 13.

**375\***. La quarta potenza di qualunque numero intero è congrua a 0, o ad 1, o a 6, o a 10 rispetto al modulo 15.

**376\***. Se si ha  $N \equiv 6 \pmod{15}$ , qualunque potenza di  $N$  sarà congrua a 6 rispetto al modulo 15.

**377.** Se si ha  $N \equiv 10 \pmod{15}$ , qualunque potenza di  $N$  sarà congrua a 10 rispetto al modulo 15.

BONOLIS.

**378.** Dimostrare le identità

$$\begin{aligned} \text{Sen}(nx) &= \begin{vmatrix} 2 \cos x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos x & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \cos x & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \cos x & \dots \end{vmatrix} \\ \text{Cos}(nx) &= \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos x & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \cos x & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \cos x & \dots \end{vmatrix} \end{aligned}$$

dove il primo determinante è di ordine  $n - 1$  ed il secondo di ordine  $n$ .

BETTINI.

**379.** Se  $A, A'; B, B'; C, C'; D, D'$  sono quattro coppie di elementi coniugati in una involuzione quadratica  $I$ , i coniugati di  $A', B', C'$  rispettivamente nelle involuzioni  $(B, C; D, D'), (C, A; D, D'), (A, B; D, D')$  sono un medesimo elemento  $E$ ; e i coniugati rispettivi di  $A, B, C$  nelle involuzioni  $(B', C'; D, D'), (C', A'; D, D'), (A', B'; D, D')$  coincidono nell'elemento  $E'$  coniugato ad  $E$  nella  $I$ .

**380.** Determinare lo involuppo di un cerchio, il cui centro percorre una parabola data e che tocca una retta parallela alla direttrice. Trovare il punto di contatto del cerchio mobile col suo involuppo; e dimostrare che quest'ultimo è pure lo involuppo delle rette simmetriche della retta data rispetto alle tangenti della parabola.

(\*) Le quistioni contrassegnate con un asterisco sono proposte agli studenti delle scuole secondarie; le altre a tutti gli studiosi indistintamente.



**381.** Due parabole omofocali hanno le direttrici parallele, ed  $r$  è la bisettrice della striscia formata da queste direttrici: dimostrare che lo involuppo delle bisettrici degli angoli formati da una tangente variabile dell'una o dell'altra parabola con  $r$  è un medesimo cerchio.

**382.** Luogo dei fuochi delle parabole, che toccano una parabola data e hanno per direttrice una medesima retta, parallela alla direttrice della parabola data.

RETALI.

---

ERRATA-CORRIGE. — Alla questione 360, proposta nel precedente fascicolo, va aggiunto quanto segue, che fu omissso:  
 ..... se il triangolo dato è acutangolo. (Modificare la seconda parte del teorema negli altri casi).

---

## BIBLIOGRAFIA

Coi tipi di Raffaello Giusti (Livorno) sono uscite 5 operette didattiche del Dottor GIUSEPPE M. TESTI, delle quali diamo qui un breve cenno.

1°. — *Elementi di Algebra ad uso più specialmente dei licenziandi delle Scuole Tecniche.* — 5ª ediz. conforme ai programmi, con 235 esercizi appropriati a ciascun argomento. — Pagine 107. L. 1,20.

Questo libretto contiene le quattro operazioni razionali fondamentali, un cenno del calcolo dei radicali (su esempi), le equazioni di 1° e 2° grado a un'incognita, i sistemi di 1° grado a due incognite e anche (su esempi) a tre o più incognite. Buona mi sembra l'esposizione della regola per la divisione dei polinomi, perchè mentre è pratica è anche ragionata. I numeri negativi sono introdotti senza sottilizzare molto sulla legittimità delle operazioni con esse, e ciò è bene in un corso elementarissimo. In un punto mi è parso che l'A. non abbia ben espresso il suo pensiero ed è là dove per spiegare l'uso della parentesi presenta come differenti le espressioni  $a + b \times c$ ,  $(a + b \times c)$ .

2°. — *Corso di Aritmetica con 500 esercizi e problemi ad uso degli alunni delle Scuole Tecniche, dei Ginnasi inferiori e delle Scuole Complementari.* — 5ª ediz. nuovamente corretta. — Pagine 295. L. 1,75.

Il pubblico, cui si indirizza l'A., è senza dubbio immaturo per certe dimostrazioni, e l'A. le ha molto opportunamente tralasciate; in compenso poi la materia è copiosa e ben disposta a preparare l'allunno allo studio dell'algebra; infatti nel nostro libro troviamo anche un capitolo pel calcolo con espressioni numeriche e l'uso delle parentesi. Lo studio dell'A. per conciliare la facilità coll'esattezza, se in generale può dirsi ben riuscito, mi sembra non abbia ben raggiunto lo scopo nel delicato argomento della misura (Cap. VI). Ecco il pensiero dell'A. Premessa una definizione di misura numerica, che equivale sostanzialmente a quella di rapporto di una grandezza all'unità nel caso che la grandezza sia commensurabile coll'unità, l'A. accennando al caso dell'incommensurabilità pone in evidenza la necessità delle misure inesatte.

Ora questo modo di vedere è intanto contrario all'usuale, perchè generalmente per misura numerica di una grandezza si intende quel numero cui si perviene misurando la grandezza data coll'unità o con parti aliquote prescritte dell'unità; il



qual numero può essere il rapporto della grandezza all'unità, ma in generale non è che un numero variabile col suo denominatore il quale ha per limite il rapporto della grandezza all'unità, anche se questo rapporto è razionale (come accade ad es. misurando  $\frac{1}{3}$  di litro in decilitri o centilitri, ecc.). Inoltre il punto di vista dell'A. è contrario (mi sembra) al buon metodo, perchè, mentre lo mette nella necessità di accennare senza poterlo sufficientemente sviluppare (nemmeno su un esempio) il concetto sottile di incommensurabilità, non gli consente poi di evitare l'inconveniente che presenta il concetto usuale di misura numerica, che cioè una stessa grandezza abbia rispetto a una stessa unità infinite misure rappresentate da frazioni non equivalenti; perchè l'A. urta appunto in tale inconveniente, quando considera le misure inesatte nel caso dell'incommensurabilità.

In seguito poi l'A. definisce il *rapporto* di due grandezze come il quoziente delle loro misure (supposte esatte), lasciando così senza rapporto due grandezze aventi misure inesatte; mentre stando al concetto comune di rapporto (che è quello di misura esatta o che si considera come esatta) può avvenire che abbiano rapporto anche due grandezze aventi misure inesatte. Naturalmente accettando il concetto usuale di rapporto, invece di dimostrare come fa l'A. (pag. 220) che il rapporto di due grandezze è eguale alla misura della prima per mezzo della seconda, sarebbe da provare che, se esistono i rapporti di due grandezze ad una terza, il loro quoziente è il rapporto di una delle grandezze all'altra.

Queste osservazioni di indole tutta teorica non possono certo in niun modo menomare un lavoro d'intenti tutti pratici, il quale rimane sempre un pregevole libro di testo per le nostre Scuole.

3°. — *Elementi di Aritmetica teorico-pratica ad uso più specialmente delle Scuole Normali con numerosi esercizi e problemi. Parte 1ª. Operazioni e proprietà dei numeri (per 1º corso normale). 300 esercizi. Pagine 171 — 2ª edizione. L. 1,50.*

A differenza del precedente questo libretto è naturalmente tutto ragionato e contiene le teorie che riguardano l'Aritmetica pura o non le applicazioni. Mi sembra molto chiaro e ben fatto. Spero che l'A. nella 3ª edizione (che non può mancare) inserirà quella comoda disposizione di calcolo suggerita dal Bertrand per l'estrazione della radice cubica, senza della quale l'operazione è quasi impraticabile.

4°. — *Elementi di geometria ad uso degli alunni delle Scuole Tecniche e Normali con 177 figure e 510 esercizi. — 4ª edizione riveduta. — Pagine 208. L. 1,75.*

I programmi delle Scuole Tecniche e Normali sembrano esigere che le relazioni fra le grandezze geometriche siano ricavate il più che si può dalle relazioni fra i numeri che le rappresentano; e poichè in una Scuola Tecnica o Normale non si può parlare con esattezza degli irrazionali, questa esigenza conduce a delle dimostrazioni che valgono solo in certi casi.

Il nostro A., che scrive appunto per le Scuole Tecniche e Normali, ha quindi questo peccato originale nel metodo, e bisogna perdonargli se scrive una geometria dirò così approssimata. Anche accettando il suo metodo dovrei però intanto ripetere qui le osservazioni ai suoi concetti di misura e di rapporto che ho già



fatte parlando del 2° libretto. Inoltre non posso tacere che le qualità imprecise del metodo si sono comunicate talora allo stile dell'A., come per es. nella definizione di tangente al cerchio (pag. 60), nella dimostrazione del teor. 236 sull'equivalenza dei prismi e nell'introduzione di certe locuzioni poco corrette, come quella di poligono di un numero infinitamente grande di lati (pag. 103).

Infine debbo notare che vi è grande incertezza sui criteri che hanno guidato l'A. talora a esporre tal'altra a tacere le dimostrazioni delle proposizioni; per es. le principali proprietà degli angoli solidi nonchè le descrizioni dei solidi regolari sono date senza dimostrazione, mentre si pretende dimostrare la formola pel calcolo della circonferenza per mezzo del raggio (col poligono di infiniti lati) o del volume della sfera (come somma d'infinita piramidi), oppure si danno dimostrazioni alquanto difficili come quella del teor. 279 sull'equivalenza dei prismi. Tutti questi difetti sono poi compensati da molti buoni capitoli, come quello sulle parallele sulle posizioni relative di rette e piani, ecc., i quali provano ancora una volta che, ove lo scrittore non fosse stato traviato dal metodo (quasi obbligatorio), avrebbe saputo darci un volumetto incensurabile.

5°. — *Nozioni di geometria ad uso più specialmente delle allieve dei Corsi complementari (già Scuole preparatorie alle Normali) con 124 figure e 180 esercizi.* — Pagine 92. L. 1.

Qui l'A. vuole di proposito dare non dimostrazioni ma semplici illustrazioni delle proposizioni enunciate; e francamente mi sembra che, sia per la forma dell'esposizione, sia per la cura con cui sono disegnate le figure, Egli sia perfettamente riuscito a comporre un buon libro di testo.

G. SFORZA.

B. CARRARA. — *Raccolta di problemi di fisica e chimica.* — G. B. Paravia 1897.

La prima parte (pag. 368, L. 5) contiene settecento problemi sui vari rami della fisica che s'insegna nelle nostre scuole secondarie. Molti di essi sono seguiti da soluzioni assai sviluppate, che devono servire di esempio all'allievo, e che sono sempre semplici ed eleganti: indichiamo, per tutte, quelle relative ai problemi di ottica. Di tutti gli altri è data almeno la risposta; cosa utile, se gli errori di stampa fanno difetto, ad avvertire, nel caso, il giovane sia di un calcolo errato, sia di una soluzione sbagliata.

Parecchi problemi ci sembrano assolutamente superflui; perchè si riducono a vane applicazioni numeriche senza riscontro alcuno nei casi della vita ordinaria, o della pratica scientifica. Citiamo, abbreviandolo, questo che è fra i più innocenti: " quanti pezzi da 10 centesimi abbisognerebbero per fabbricare un emisfero della stessa lega di cm. 50 di diametro? (prob. 90) „

Altresi avremmo desiderato che si avesse avuto, sempre e dovunque, riguardo alla realtà scientifica. Così leggiamo: " Un vaso è fatto di una sostanza il cui calore specifico è 0,5... (prob. 393) „. Ora l'unico corpo che risponda a questo dato è il ghiaccio, il quale non può certo adoperarsi per farne un vaso calorimetrico. Ma ci affrettiamo subito a dire che questi medesimi difetti si trovano in tutte le opere congeneri.

Con molta cura è fatta la parte seconda, (pag. 87, L. 2) la quale contiene i problemi di chimica; sono notevoli specialmente quelli svolti ad esempio.



In complesso si tratta di una buona raccolta da consigliarsi ai professori ed ai giovani, che vogliono realmente impadronirsi delle teoriche esposte nei corsi. Un breve riassunto dei principii applicati nei varii problemi torna comodo allo studioso, ed opportune figure servono ad illustrare molte delle questioni sviluppate.

R. PITONI.

G. Z. REGGIO. — *Complementi di Algebra per gli allievi degli istituti tecnici* (2° biennio). — G. B. Paravia, 1897.

Nel primo libro (*calcolo combinatorio*) l'autore espone, in modo molto chiaro e preciso, gli ordinari teoremi sulle combinazioni, disposizioni e permutazioni e lo sviluppo della potenza intera e positiva di un binomio e di un polinomio. Seguono poi le formole che danno le somme delle varie potenze dei termini di una progressione aritmetica; un cenno, forse troppo limitato, sulle probabilità, e la teorica dei determinanti quale comunemente s'insegna nei libri per le scuole secondarie.

Nel secondo libro (*numeri e grandezze*) l'autore, premesso il concetto di numero intero, ricorda brevemente le caratteristiche delle operazioni dirette e inverse su questi numeri. Partendo poi dal bisogno di render sempre possibili quest'ultime operazioni, l'autore si fa strada a parlare dei numeri frazionari e negativi, ed estende ad essi le operazioni già indicate per i numeri interi. Dopo questo breve riassunto, l'autore si ferma più a lungo sui numeri irrazionali sviluppando il concetto del Dedekind, un po' più difficile, secondo noi, a farsi capire ai principianti di quello del Cantor. Vero è che quest'ultimo concetto, di riguardare cioè gli irrazionali come limiti di due serie convergenti di numeri razionali, è ripreso nel libro terzo e il chiarissimo autore se ne serve per illustrare le operazioni sugli irrazionali medesimi. Ma si poteva perciò appunto in un libro elementare evitare il primo modo di vedere, e dare un più ampio sviluppo al secondo. I numeri complessivi sono dall'autore esposti tanto col metodo del Cauchy quanto colla rappresentazione del Gauss.

Nel libro terzo si dichiarano, col rigore voluto dalla scienza moderna i concetti di frazioni e di limite e si sviluppa ampiamente la teorica delle frazioni continue.

Il quarto libro comincia con un riassunto, che poteva forse anche tralasciarsi, sulle equazioni di 1° e 2° grado, per accennare poi alla risoluzione dell'equazioni binomie, ed all'analisi indeterminata di primo grado. Segue un brevissimo capitolo, che può omettersi dall'insegnante, sulle congruenze, e il libro si chiude con cenni molto ben fatti sulle disequaglianze e sui massimi e minimi.

Trattandosi di soggetti così elementari e disparati il libro non contiene, né poteva contenere, nulla di nuovo. Si ha soltanto il diritto di richiedere una esposizione chiara, precisa e sicura e a questo l'autore soddisfa completamente. L'essere poi il libro giunto alla seconda edizione ci dispensa da qualunque altro giudizio.

Soltanto ci auguriamo che in una prossima ristampa siano più curate le note storiche, alcune delle quali si riducono ad un puro accenno di nomi senza indicazioni di date.

Buoni e bene scelti sono i problemi posti alla fine di ogni capitolo.

R. PITONI.

---

GIULIO LAZZERI — *Direttore responsabile*

---

Finito di stampare il 31 Agosto 1897.



# NUOVO METODO PER LO STUDIO E PER IL CALCOLO DELLE FUNZIONI TRASCENDENTI ELEMENTARI

## I. — Funzioni circolari.

1. - LEMMA 1°. — Essendo  $a, b$  due numeri tali che sia  $|b| > |a|$ , si formi la successione

$$(1) \quad a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}, a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}, \dots$$

colla seguente legge. Sia  $a_1$  la media aritmetica di  $a$  e di  $b$ ; sia  $b_1$  la media geometrica di  $b$  e di  $a_1$ ; in generale sia:

$$(2) \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad (3) \quad b_{n+1} = \sqrt{b_n a_{n+1}}$$

Se tutti i radicali, che ci danno le  $b_n$  vengono presi con lo stesso segno del numero  $b$ , allora  $a_n, b_n$  sono variabili convergenti, che tendono, col crescere di  $n$ , ad un medesimo limite  $\psi(a, b)$ .

Distingueremo due casi secondo il segno di  $b$ ; sia dapprima  $b > 0$ , allora tutte le  $b_n$  sono per ipotesi positive: poichè  $|b| > |a|$  ed  $a_1 = \frac{a+b}{2}$ , il numero  $a_1$  sarà positivo, minore di  $b$  e maggiore di  $a$ ;

poichè  $b_1 = \sqrt{a_1 b}$  e  $b > a_1$ , si avrà  $a_1 < b_1 < b$ ; quindi  $b > b_1 > a_1 > a$ . Nell'identico modo si dimostra essere:  $b_1 > b_2 > a_2 > a_1$ ;  $b_2 > b_3 > a_3 > a_2$ ; ecc. dalle quali disequaglianze risulta che col crescere dell'indice le  $b$  vanno diminuendo, le  $a$  aumentando; ma le  $b$  restano sempre superiori alle  $a$ . Inoltre la differenza  $a_n - b_n$  decresce indefinitamente: infatti

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}) \text{ e per conseguenza } a_n - b_{n-1} = \frac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1});$$

e siccome  $b_n$  è compreso tra  $b_{n-1}$  ed  $a_n$  si ha

$$a_n - b_n < \frac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1}).$$

Ne segue che  $a_n, b_n$  sono due variabili convergenti, ed hanno un limite.



Sia ora  $b < 0$ , tutte le  $b_n$  saranno per ipotesi negative; anzi si riconosce immediatamente che se poniamo:  $a' = -a$ ,  $b' = -b$  e formiamo i numeri

$$(a) \quad a', b', a'_{11}, b'_{11}, a'_{21}, b'_{21}, \dots$$

in modo che (analogamente a quanto si è indicato per la (1)) ogni  $a'_n$  sia la media aritmetica e ogni  $b'_n$  sia la media geometrica dei due numeri che lo precedono, un numero qualunque della (1) non differisce che nel segno dal corrispondente della (a). Ma per il primo caso il limite di  $a'_n$  e di  $b'_n$  (per  $n$  crescente indefinitamente) esiste ed è positivo, perchè  $b' > 0$ ; questo limite cambiato di segno sarà dunque il limite di  $a_n$  e di  $b_n$ , limite che perciò esiste ed è negativo.

Indicherò con  $\psi(a, b)$  il limite delle variabili convergenti  $a_n, b_n$  per  $n$  crescente all'infinito.

COROLLARIO. — Il limite  $\psi(a, b)$  è dello stesso segno di  $b$  e resta moltiplicato per un numero qualunque  $K$ , se si moltiplicano per  $K$  i numeri  $a, b$ .

LEMMA 2°. — Se  $b > 0$ , il limite  $\psi(a, b)$  non solo è compreso tra un numero  $a$  e un numero  $b$  (consecutivi o no) qualunque, ma anche, per ogni valore di  $m$  tra  $b_m - \frac{1}{3}(b_{m-1} - b_m)$  ed  $\frac{1}{3}(a_m + 2b_m)$ .

La prima parte di questo lemma, importante non per la teoria ma per il calcolo numerico di  $\psi(a, b)$ , risulta subito dalla dimostrazione precedente. Per la seconda parte si osservi che seguendo la via indicata nel *Traité de Géométrie* par E. ROUCHÉ et CH. DE COMBEROUSSE a proposito del teorema di Schwab, si ha

$$b_m - \frac{1}{3}(b_{m-1} - b_m) < \psi(a, b) < a_m + \frac{1}{3}(a_m - a_{m-1});$$

ora, posto nel terzo membro di questa disuguaglianza  $m + 1$  in luogo di  $m$ , otteniamo appunto a causa della (2)

$$b_m - \frac{1}{3}(b_{m-1} - b_m) < \psi(a, b) < \frac{1}{3}(a_m + 2b_m)$$

2. - TEOREMA. — Se  $a^2 + c^2 = b^2$ , sussiste la identità

$$(3) \quad \text{arc. cos } \frac{a}{b} = \frac{c}{\psi(a, b)} \dots$$

che dà un arco in funzione del suo coseno. In questa identità il segno di  $c$  è indifferente, e per  $\text{arc cos } \frac{a}{b}$  s'intende un arco il cui valore assoluto non supera un angolo piatto.



Sia dapprima  $b > 0$ ; quando  $a, b$  tendono ad uno stesso limite  $t$  la frazione  $\frac{a}{b}$  tende ad 1, l'arc cos  $\frac{a}{b}$  tende a zero e perciò il rap-

porto fra il suo seno  $\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$ , e l'arco stesso  $\frac{\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}}{\text{arc cos } \frac{a}{b}}$  tende ad 1

e perciò

$$b \frac{\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}}{\text{arc cos } \frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\text{arc cos } \frac{a}{b}} = \frac{c}{\text{arc cos } \frac{a}{b}}$$

tende precisamente a  $t$ . In altre parole: se noi possiamo far sì che  $a, b$  differiscano da un numero  $t$  di una quantità piccola ad arbitrio, lo

stesso accadrà di  $\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\text{arc cos } \frac{a}{b}}$ .

Se in questa frazione pongo ora in luogo di  $a$  e di  $b$  rispettivamente  $a_1$  e  $b_1$ , essa diventa

$$\frac{\sqrt{b_1^2 - a_1^2}}{\text{arc cos } \frac{a_1}{b_1}} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{b^2 - a^2}}{\text{arc cos } \frac{a+b}{2\sqrt{b \frac{a+b}{2}}}} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2 \text{ arc cos } \sqrt{\frac{a+b}{2b}}};$$

ma se  $\cos y = \frac{a}{b}$ ,  $\cos \frac{1}{2} y = \sqrt{\frac{a+b}{2b}}$ ; quindi

$$\text{arc cos } \frac{a}{b} = 2 \text{ arc cos } \sqrt{\frac{a+b}{2b}}$$

e quindi

$$\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\text{arc cos } \frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{b_1^2 - a_1^2}}{\text{arc cos } \frac{a_1}{b_1}}$$

Nell'identico modo si prova

$$\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\text{arc cos } \frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{b_1^2 - a_1^2}}{\text{arc cos } \frac{a_1}{b_1}} = \frac{\sqrt{b_2^2 - a_2^2}}{\text{arc cos } \frac{a_2}{b_2}} = \dots \dots \frac{\sqrt{b_n^2 - a_n^2}}{\text{arc cos } \frac{a_n}{b_n}} = \dots \dots$$

Ma coll'ingrandire abbastanza  $n$  posso fare sì che  $a_n$  e  $b_n$  differiscano da  $\psi(a, b)$  di una quantità piccola ad arbitrio; lo stesso, per il già

detto, accadrà di  $\frac{\sqrt{b_n^2 - a_n^2}}{\text{arc cos } \frac{a_n}{b_n}}$ , ma questa frazione è eguale a  $\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\text{arc cos } \frac{a}{b}}$



quindi la differenza fra  $\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\text{arc cos } \frac{a}{b}}$ , e  $\psi(a, b)$  è minore di qualsiasi quan-

tità arbitraria  $\varepsilon$ , ossia (ricordando che  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ).

$$\frac{c}{\text{arc cos } \frac{a}{b}} = \psi(a, b)$$

e la (3) è dimostrata. Il segno dato a  $c$  è indifferente, perchè archi differenti solo per il segno hanno uguali coseni.

Se  $b < 0$  si ha:  $-b > 0$  e per il caso precedente

$\text{arc cos } \frac{a}{b} = \text{arc cos } \frac{-a}{-b} = \frac{c}{\psi(-a, -b)} = -\frac{c}{\psi(a, b)}$  e la (4) è ancor vera, sia perchè il segno meno si può anche dare a  $c$ , sia perchè, come ora si fece notare,

$$\cos\left(-\text{arc cos } \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}.$$

Al lettore poi che chiedesse per qual ragione tra i valori di  $\text{arc cos } \frac{a}{b}$  la (3) ce ne dia uno minore di  $\pi$  in valore assoluto, ricorderò che per la dimostrazione si usò la proprietà, che  $\text{arc cos } \frac{a}{b}$  tende a zero per  $a, b$  tendente ad uno stesso valore  $t$  e che per  $b > 0$  abbiamo supposto, come si vede dal corso della dimostrazione che la metà, il quarto, l'ottavo ecc. del nostro arco abbiano positivo il coseno.

Sia p. es. da trovarsi  $x = \text{arc cos } \frac{3}{5}$  coll'approssimazione di 2:100000.

Si avrà

|                  |                  |
|------------------|------------------|
| $a = 3$          | $b = 5$          |
| $a_1 = 4$        | $b_1 = 4,47214$  |
| $a_2 = 4,23607$  | $b_2 = 4,352500$ |
| $a_3 = 4,294283$ | $b_3 = 4,32329$  |

per il secondo lemma  $\psi(a, b) = \psi(3, 5)$  è compreso tra  $b_2 - \frac{1}{3}(b_2 - b_3)$  e  $\frac{1}{3}(a_3 + 2b_3)$  cioè tra 4,31355 e 4,313621 e per la (4) l'arc cos  $\frac{3}{5}$  è compreso tra 0,92729 e 0,92731; la media aritmetica dei due ultimi numeri cioè 0,92730 è il valore cercato; valore ottenuto con la ricerca di tre medie geometriche, una divisione (facilmente esigibili coi logaritmi) ed altre poche semplicissime operazioni.



L'ampiezza dell'arco  $x$  è  $9273 : 174,533 = 53^{\circ}, 7', 49''$ , essendo  $0,0174532925\dots$  la lunghezza dell'arco di  $1^{\circ}$ .

3. - PROBLEMA. — *Trovare arc sen  $\frac{a}{b}$  per  $a, b$  positivi.*

Essendo  $a^2 + c^2 = b^2$ , si ha

$$\text{arc sen } \frac{a}{b} = \text{arc cos } \frac{c}{b} = \psi(c, b).$$

Così per es.

$$(4) \quad \text{arc sen } \frac{4}{5} = \text{arc cos } \frac{3}{5} = \psi(3, 5) = 0,92730 = 53^{\circ} 7' 49''.$$

Similmente si troverebbero arc tg  $\frac{a}{b}$ , ecc.

4. - PROBLEMA. — *Dedurre dalle precedenti formule il teorema di Schwab.* Questo elegantissimo teorema non è che un caso particolare della (3). Poniamo nella (3)  $a = 0$  (si noti che non si può porre  $b = 0$  perchè per ipotesi  $|b| > |a|$ ) ed otteniamo  $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2b} \psi(0, b)$ , che per  $b = \frac{1}{2}$  ci dice appunto

$$\frac{1}{\pi} = \psi\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

5. - TEOREMA. — *Se  $a, b, c$  sono tre numeri positivi tali che  $a^2 + c^2 = b^2$ , hanno luogo le identità:*

$$(5) \quad \frac{c}{\psi(a, b)} + \frac{a}{\psi(c, b)} = \frac{\pi}{2} \dots\dots$$

$$(6) \quad \frac{1}{\psi(a, b)} + \frac{1}{\psi(-a, b)} = \frac{\pi}{c} \dots\dots$$

$$(7) \quad \frac{c}{\psi(-a, b)} - \frac{a}{\psi(c, b)} = \frac{\pi}{2} \dots\dots$$

La (5) si ottiene sostituendo in arc cos  $\frac{a}{b} + \text{arc sen } \frac{a}{b} = \frac{\pi}{2}$  i valori che per arc cos  $\frac{a}{b}$  e per arc sen  $\frac{a}{b}$  ci danno la (3) e la (4).

La (6) si dimostra sostituendo in arc cos  $\frac{a}{b} + \text{arc cos } \frac{-a}{b} = \pi$  i valori che per arc cos  $\frac{a}{b}$  e per arc cos  $\frac{-a}{b}$  ci dà la (3) e dividendo per  $c$ .

La (7) risulta dall'eliminazione di  $\psi(a, b)$  tra la (5) e la (6).

Tutte queste identità sono molto più generali del teorema di Schwab, che ne è un particolarissimo caso.



## II. — Definizione elementare delle funzioni iperboliche.

6. - Se  $a, b$  sono positivi, ma  $a > b$  si riconosce facilmente, anche in questo caso, l'esistenza di  $\psi(a, b)$ ; la (3) diventa in tale caso

$\text{arc cos } \frac{a}{b} = i \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\psi(a, b)}$ , ed è naturale il definire

$$(8) \quad \text{arc cosh } \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\psi(a, b)} \dots\dots$$

Nello stesso modo s'introdurrebbero le altre funzioni iperboliche. La (8) e le formule analoghe facilmente scopribili ci possono servire a calcolarne i valori e trovarne, come si dirà più avanti, le proprietà; ecco ora un esempio semplicissimo del modo, con cui queste si potrebbero studiare. Per definizione del limite  $\psi(a, b)$  si ha

$$\psi(a, b) = \psi(a_1, b_1) = \psi\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{b \cdot \frac{a+b}{2}}\right).$$

Sostituendo per il primo ed il terzo membro di queste identità i loro valori dati dalla (8) si ottiene la nota proprietà

$$\text{arc cosh } \frac{a}{b} = \text{arc cosh } \sqrt{\frac{a+b}{2b}}.$$

## III. — Funzione logaritmica.

7. - LEMMA. — Quando  $x$  tende ad 1 la frazione  $\frac{x-1}{\log x}$  tende ad un limite.

Questa proprietà è notissima, ma voglio stabilirne qui una elegantissima dimostrazione.

Posto  $y = \log x$ , per  $y > 0$  la frazione  $\frac{x-1}{\log x} = \frac{10^y - 1}{y}$  è sempre positiva; basta quindi provare che essa diminuisce con  $y$  per dimostrare che tende ad un limite.

Moltiplichiamo  $y$  per la frazione  $\frac{h}{k}$  minore di 1 ed a termini interi.

Ponendo  $y_1 = \frac{y}{k} = \log x_1$  ed  $y_2 = \frac{h}{k}y = hy_1 = \log x_2$  otteniamo poichè  $x = x_2^{\frac{1}{h}}$

$$(9) \quad \frac{y}{10^y - 1} = \frac{x - 1}{\log x} = \frac{x_1^{k-1} + x_1^{k-2} + \dots + x_1 + 1}{k} \cdot \frac{x_1 - 1}{\log x_1} \dots\dots$$



e poichè  $x_2 = x_1^h$

$$(\gamma) \quad \frac{10^{y_2} - 1}{y_2} = \frac{x_2 - 1}{\log x_2} = \frac{x_1^{h-1} + x_1^{h-2} + \dots + x_1 + 1}{h} \cdot \frac{x_1 - 1}{\log x_1} \dots$$

Ma essendo  $x_1 > 1$ , la frazione  $\frac{x_1^{m-1} + x_1^{m-2} + \dots + 1}{m}$  con  $m$  intero aumenta, se si accresce  $m$  di una unità, perchè

$$\begin{aligned} \frac{x_1^m + \dots + 1}{m+1} - \frac{x_1^{m-1} + \dots + 1}{m} &= \frac{m x_1^m - x_1^{m-1} - \dots - 1}{m(m+1)} = \\ &= \frac{(x_1^m - x_1^{m-1}) + \dots + (x_1^m - 1)}{m(m+1)} > 0, \end{aligned}$$

ed aumenta a fortiori anche se si accresce  $m$  di più unità. Quindi, essendo  $k > h$ , si ha

$$\frac{x_1^{k-1} + x_1^{k-2} + \dots + x_1 + 1}{k} > \frac{x_1^{h-1} + x_1^{h-2} + \dots + x_1 + 1}{h},$$

ed in virtù delle (β) e (γ) la  $\frac{10^y - 1}{y}$  è diminuita moltiplicando  $y$  per la  $\frac{h}{k} > 1$ .

Coi metodi con cui si trattano ora i numeri irrazionali si dimostra che ciò avviene anche se  $\frac{h}{k}$  è irrazionale.

8. - TEOREMA. — Se  $a, b$  sono rispettivamente la media aritmetica e la media geometrica dei due numeri  $a_0$  e  $b_0$ , esiste l'identità

$$(9) \quad \log \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{b_0} \frac{a_0 - b_0}{\phi(a, b)} \dots$$

dove  $\frac{1}{q}$  è una costante per un medesimo sistema di logaritmi.

Per dimostrare la (9) seguiremo la stessa via tenuta per dimostrare la (3). Quando  $a$  e  $b$  tendono ad un medesimo limite  $t$ , i numeri  $a_n$  e  $b_n$  tendono pure allo stesso limite  $t$ , la frazione  $\frac{a_n}{b_n}$  tende ad 1 e la frazione

$$\frac{a_n - b_n}{\log \frac{a_n}{b_n}} = b_n \frac{\frac{a_n}{b_n} - 1}{\log \frac{a_n}{b_n}}$$

tende quindi al numero  $t$  moltiplicato per il limite  $q$  di  $\frac{x-1}{\log x}$  quando  $x$  tende ad 1.



In altre parole: Se si possono rendere  $a$  e  $b$  tanto poco differenti, quanto si vuole, da un numero  $t$ , la frazione  $\varphi = \frac{a_0 - b_0}{\log \frac{a_0}{b_0}}$  differisce di quanto poco si vuole da  $qt$ .

Di più, se nella  $\varphi$  poniamo in luogo di  $a, b$  rispettivamente  $a_1$  e  $b_1$ , essa diventa (essendo  $a_0 = a + \sqrt{a^2 - b^2}$ ,  $b_0 = a - \sqrt{a^2 - b^2}$ ,  $a_1 = \frac{a+b}{2}$ ,  $b_1 = \sqrt{ba_1}$ ).

$$\frac{2 \sqrt{a^2 - b^2}}{2 \log \frac{a+b+\sqrt{a^2-b^2}}{a+b-\sqrt{a^2-b^2}}} = \frac{2 \sqrt{a^2 - b^2}}{\log \left( \frac{a+b+\sqrt{a^2-b^2}}{a+b-\sqrt{a^2-b^2}} \right)^2} = \frac{a_0 - b_0}{\log \frac{a_0}{b_0}},$$

e la frazione  $\varphi$  non è cambiata per effetto di questa sostituzione, e non muterà quindi di valore neppure se in luogo di  $a, b$  porrò  $a_2, b_2$ , ecc. ecc.

Ma coll'ingrandire abbastanza  $n$  posso fare sì che  $a_n, b_n$  differiscano da  $\psi(a, b)$  di una quantità piccola ad arbitrio;  $q \cdot \psi(a, b)$ , per il già detto, differirà di quanto poco si vuole da  $\varphi$ , dove in luogo di  $a, b$  si sono posti rispettivamente  $a_n, b_n$ ; ma questa sostituzione, si dimostrò testè, non cambia il valore della  $\varphi$ , quindi la differenza fra  $\varphi$  e  $q \cdot \psi(a, b)$  è minore di qualsivoglia numero arbitrario  $\epsilon$ , e perciò

$$\varphi = q \cdot \psi(a, b)$$

e da questa eguaglianza si deduce la (9).

Così la  $\psi(a, b)$  per  $a > b$  (che già ci servì per lo studio delle funzioni iperboliche) serve pure per le funzioni logaritmiche.

Anche in questo caso il secondo lemma del § 1 riesce di massima utilità nei calcoli numerici; per la sua dimostrazione in questo caso, in cui  $a > b$ , basta in tutte le disuguaglianze del *Traité de Géométrie* sopracitato che servirono alla dimostrazione del secondo lemma nel caso di  $a < b$ , sostituire al segno  $<$  il segno  $>$  e viceversa. Si noti

pure che anche  $\sqrt[3]{\frac{1}{2} a_m b_m (a_m + b_m)}$  è un valore approssimato di  $\psi(a, b)$ ; questo radicale è il limite, a cui si tende particolare da  $a_{m+1}, b_{m+1}$  con successive medie geometriche.

#### IV. — Definizione elementare dei logaritmi neperiani.

9. - La (9) serve a trovare i logaritmi dei numeri di qualunque sistema, basta perciò (per un noto teorema di algebra elementare) far



variare la quantità  $q$ ; il più naturale dei sistemi di logaritmi è quello corrispondente a  $q = 1$ , la cui base indicherò provvisoriamente con  $z$ .

**TEOREMA.** — *I logaritmi corrispondenti a  $q = 1$  sono i logaritmi neperiani.*

Infatti poichè  $\log_z \frac{a}{b} = \frac{a_0 - b_0}{\psi(a, b)}$ , la (9) si può scrivere

$$\log_{10} \frac{a_0}{b_0} = \frac{1}{q} \log_z \frac{a_0}{b_0},$$

ma d'altra parte

$$\log_{10} \frac{a_0}{b_0} = \log_{10} z \cdot \log_z \frac{a_0}{b_0}$$

quindi

$$\frac{1}{q} = \log_{10} z; \quad q = \lim_{v=0} \frac{10^v - 1}{v} = \log_z 10$$

e perciò  $z = e = 2,718 \dots$  base dei logaritmi neperiani come v. d.

Si possono quindi *definire elementarmente i logaritmi neperiani dall'uguaglianza*

$$(10) \quad \log \frac{a_0}{b_0} = \frac{a_0 - b_0}{\psi(a, b)}$$

è dedurre poi in modo assai semplice il *logaritmo neperiano di un numero  $p$  eguaglia  $\lim_{v=0} \frac{p^v - 1}{v}$  e che la base dei logaritmi neperiani è  $\lim_{y=0} (1 + y)^{\frac{1}{y}}$ .*

*Esempio.* — Trovare  $\log_e 7$ .

Nel nostro caso

|                    |                   |
|--------------------|-------------------|
| $a_0 = 7$          | $b_0 = 1$         |
| $a = 4$            | $b = 2,645751$    |
| $a_1 = 3,3228755$  | $b_1 = 2,965046$  |
| $a_2 = 3,14396075$ | $b_2 = 3,0531931$ |
| $a_3 = 3,0985769$  | $b_3 = 3,0758$    |
| $a_4 = 3,087188$   | $b_4 = 3,08149$   |

Per il secondo lemma  $\psi(a, b)$  è compreso tra  $\frac{1}{3}(a_1 + 2b_1)$  e  $b_4 + \frac{1}{3}(b_4 - b_3)$ , cioè il suo valore approssimato è 3,083389. Per la (10) si ha che  $\log_e 7 = 1,9459101485 \dots$  e l'errore è minore di  $6 : 10^{10}$ ; a questo risultato si giunge con la ricerca di sole quattro medie geometriche.



## V. — Osservazioni e conclusione.

Ecco dunque dimostrato e generalizzato in più modi nelle (5), (6), (7) il teorema di Schwab e col mezzo della sola funzione  $\psi(a, b)$  espresse tutte le funzioni trascendenti elementari e definite elementarmente alcune (funzioni iperboliche e logaritmi neperiani), il cui vero significato manca nei testi elementari. Questo fatto di essere tutte queste funzioni esprimibili mediante una sola funzione a variabili reali è un fatto capitale e credo nuovo; le loro molteplici relazioni sono facilmente dimostrabili col mezzo delle (3), (8), (9), (10); le loro proprietà si riducono tutte a proprietà della  $\psi(a, b)$  con  $a < b$  oppure con  $a > b$ : dimostrate queste proprietà per  $a < b$  con la (3), per  $a > b$  con le (9) ed (10) si possono, come avevamo promesso, trovare le proprietà delle funzioni iperboliche mediante la (8); ammesse queste ultime come naturale estensione delle proprietà delle funzioni circolari si ottiene dalla (11) un nuovo metodo per trattare la teoria dei logaritmi. Ma a tutto questo basta avere accennato, notando che queste proprietà di  $\psi(a, b)$  possono riuscire preziose nei calcoli numerici di questo limite e cooperare col secondo lemma del § I per una sufficientemente rapida approssimazione. La  $\psi(a, b)$  ha pure una notevole importanza pratica perchè offre un mezzo completo ed elementarmente dimostrabile, (il che fin ora, credo, mancava affatto) di calcolare le tavole trigonometriche e logaritmiche: specialmente le prime, quando si usino le tavole dei logaritmi.

Venezia, 10 ottobre 1897.

GUIDO FUBINI

studente nella R. Scuola Normale sup. di Pisa.

---

## SUL SIGNIFICATO DI UNA NOTA ESPRESSIONE ARITMETICA

---

Nei diversi trattati che si adottano nelle scuole non è stato fino ad oggi ben definito il significato da darsi ad un'espressione della forma:

$$(1) \quad a : b : c : d;$$

è quindi naturale che alcuni insegnanti si attengano al primo, altri al secondo dei due possibili modi d'interpretazione.



Questi due modi d'interpettazione sono, com'è noto, i due seguenti:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & a : b : c : d = [(a : b) : c] : d, \\ (\beta) \quad & a : b : c : d = a : [b : (c : d)]; \end{aligned}$$

ed essendo alcuni abituati a dare all'espressione considerata il significato  $(\alpha)$ , altri il significato  $(\beta)$ , ne nasce una deplorabile confusione nella scrittura e nell'interpettazione delle formole.

Questa confusione può togliersi facendo uso costantemente delle parentesi, ma ciò non mi sembra nè bello nè utile dal momento che tutte le espressioni analoghe:

$$\begin{aligned} a + b + c + d, \\ a - b - c - d, \\ a \times b \times c \times d, \end{aligned}$$

hanno un significato fisso e determinato senza bisogno di alcuna parentesi. Perché la divisione dovrebbe fare eccezione?

Secondo il mio debole parere, sarebbe opportuno stabilire una volta per tutte il significato da darsi all'espressione (1) perchè in matematica, più che in ogni altra scienza, è necessario *uniformità e precisione* di scrittura e di linguaggio.

Io non pretendo di risolvere la questione, mi limito semplicemente ad esporre la mia opinione affinchè altri esponga la sua e si possa così togliere un'ambiguità dannosa sia alla scienza che alla didattica.

Se vogliamo intanto che la *dualità* esistente fra le 2 operazioni inverse di 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> specie (vedi mie lezioni di *Aritmetica teorica*, cap. V) non soffra in nessun caso eccezioni dovremo adottare l'interpettazione  $(\alpha)$  perchè per la sottrazione si ha:

$$a - b - c - d = ([a - b] - c) - d,$$

quindi cambiando il segno  $-$  nel segno corrispondente dell'operazione correlativa, si ha:

$$a : b : c : d = ([a : b] : c) : d.$$

Inoltre, se osserviamo che:

$$a - b - c - d = a - (b + c + d),$$

se vogliamo che la dualità accennata sussista ancora, dovremo cambiare i segni  $-$ ,  $+$  nei segni delle due corrispondenti operazioni e avremo

$$a : b : c : d = a : (b \times c \times d),$$

e siccome per un noto teorema:

$$a : (bcd) = ([a : b] : c) : d;$$

siamo di nuovo condotti a dovere accettare l'interpettazione  $(\alpha)$ .

Infine se ricordiamo che dividere per un numero significa moltiplicare per il suo inverso, avremo:

$$a : b : c : d = a \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{d} = \frac{a}{bcd}$$



che ci conduce pure alla interpretazione ( $\alpha$ ); mentre se si adottasse la 2<sup>a</sup> interpretazione l'applicazione del teorema citato all'espressione:

$$a : b : c : d,$$

ne farebbe mutare il significato.

È bene anche osservare che adottando la 1<sup>a</sup> interpretazione si può enunciare il correlativo del teorema sul valore dei polinomi algebrici, o cioè:

*In un'espressione costituita di termini separati fra loro dai segni delle operazioni di 2<sup>a</sup> specie, ( $\times$  :) [espressione monomia] per avere il valore basta fare il quoziente del prodotto dei termini preceduti dal segno  $\times$  e del prodotto dei termini preceduti dal segno :*

In favore della seconda interpretazione si può dire che scrivendo l'espressione (1) col segno di divisione rappresentato da una linea orizzontale, si avrebbe:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

e che quindi sarebbe logico anche dividere  $b$  per la frazione  $\frac{c}{d}$  e poi dividere  $a$  per il risultato.

Ma si può rispondere che il segno di frazione ha un significato in questo caso indeterminato, perchè, per averlo determinato, bisognerebbe scrivere in uno dei modi seguenti:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \quad \left[ \frac{a}{\frac{b}{\left(\frac{c}{d}\right)}} \right] \quad \left[ \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\frac{c}{d}} \right] \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

i quali conducono, come si vede, all'uno o all'altro dei due citati modi d'interpretazione.

AROLDO MARTINI ZUCCAGNI.

## Per una dimostrazione elementare

La dimostrazione data a pag. 140 del numero precedente (Sett.-Ott.) di questo Periodico è tutt'altro che elementare, relativamente a quella che si suol dare, e che sostanzialmente è questa.

In conseguenza delle (1) è identicamente

$$(x - x_1) \dots (x - x_n) = (x - y_1) \dots (x - y_n);$$



per cui i numeri  $x_1, \dots, x_n$  debbono essere uguali ai numeri  $y_1, \dots, y_n$  indipendentemente dall'ordine.

Questa semplicissima dimostrazione può certamente darsi in una teoria delle equazioni, dove si suppone conosciuto il calcolo letterale con la relativa teoria della scomposizione dei polinomi in fattori primi. Siccome però sono ancora parecchi i libri d'Algebra incompleti o poco rigorosi, così richiamerò le nozioni, che l'esposta dimostrazione presuppone, e delle quali si ha bisogno appena si principia il calcolo letterale, per poterne insegnare le prime operazioni con vero rigore, e senza ambiguità.

Osservo anzitutto che, se  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sono numeri dati ed  $a_0$  non è nullo,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

è diverso da zero per infiniti valori di  $x$ . È infatti sicuramente

$$|a_0x^n| > |a_1x^{n-1} + \dots + a_n|,$$

per cui è anche

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

se  $|x|$  supera il maggiore dei due numeri

$$1, (|a_1| + \dots + |a_n|) : |a_0|.$$

Di qui segue che, se  $b_0, b_1, \dots, b_n$  son numeri dati, dei quali potrebbe esser nullo anche  $b_0$ , e non sono tutte nulle le differenze  $a_0 - b_0, a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n$ , sono allora diversi per infiniti valori di  $x$  così i due polinomi

$$a_0x^n + \dots + a_n, \quad b_0x^n + \dots + b_n$$

come pure i loro prodotti per  $x - x_1, x_1$  essendo un qualsiasi numero dato.

Queste nozioni, che sono già necessarie per stabilire con precisione il significato di uguaglianza di due polinomi, bastano per giustificare l'esposta dimostrazione di poche parole, la quale, negli elementi d'Algebra, si potrebbe sviluppare così.

Il prodotto  $(x - y_1) \dots (x - y_n)$ , essendo uguale ad  $(x - x_1) \dots (x - x_n)$ , si deve annullare per  $x = x_1$ , e ciò esige che uno dei numeri  $y_1, \dots, y_n$  sia uguale ad  $x_1$ ; sia p. es.:

$$y_1 = x_1.$$

Saranno uguali i due prodotti

$$(x - x_2) \dots (x - x_n), \quad (x - y_2) \dots (x - y_n),$$

cioè saranno identici i due polinomi in  $x$  ad essi equivalenti, perchè, se non fossero tali, non sarebbero uguali neppure i loro prodotti per  $x - x_1$ , che sono invece uguali, essendo essi

$$(x - x_1) \dots (x - x_n), \quad (x - y_1) \dots (x - y_n).$$

Essendo

$$(x - x_2) \dots (x - x_n) = (x - y_2) \dots (x - y_n),$$

deve essere  $x_2$  eguale ad uno dei numeri  $y_2, \dots, y_n$ ; se per es. è

$$x_2 = y_2,$$



deve ancor essere

$$(x - x_1) \dots (x - x_n) = (x - y_1) \dots (x - y_n).$$

Continuando, così concludesi appunto che i numeri  $x_1, \dots, x_n$  debbono essere uguali ai numeri  $y_1, \dots, y_n$  indipendentemente dall'ordine.

F. GIUDICE.

## SOPRA UN NUOVO MODO DI DEFINIRE LE RADICI PRIMITIVE di una congruenza

È noto che le radici primitive relative al modulo  $p$ , o le radici primitive della congruenza

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

sono quei numeri che appartengono, secondo il modulo  $p$ , all'esponente  $p-1$ ; o in altri termini:  $a$  è radice primitiva relativamente al modulo  $p$ , se per qualsivoglia valore  $v < p-1$ , è  $a^v$  incongruo all'unità, secondo il modulo  $p$ .

Orbene, è facile dare per queste radici una nuova definizione, che si può anche riguardare come un corollario di un notissimo teorema. Si ha infatti: (\*)

Essendo  $p$  primo, e  $\theta$  un divisore di  $p-1$ , sieno  $x_1$  e  $\xi$  due numeri compresi fra  $\theta$  e  $p$ ; se si ha

$$x_1^\theta \equiv \xi \pmod{p},$$

si ha anche:

$$\xi^{\frac{p-1}{\theta}} \equiv 1 \pmod{p};$$

e reciprocamente, se si ha

$$\xi^{\frac{p-1}{\theta}} \equiv 1 \pmod{p},$$

la congruenza

$$x^\theta \equiv \xi \pmod{p}$$

ha  $\theta$  radici.

Ora, l'ipotesi

$$x_1^\theta \equiv \xi \pmod{p}$$

equivale evidentemente a quest'altra

$$\xi = kp + x_1^\theta;$$

e il dire che la congruenza

$$x^\theta \equiv \xi \pmod{p}$$

(\*) Vedi J. A. SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure*. T. II, pag. 64.



ha  $\theta$  radici, è lo stesso che dire che esistono  $\theta$  numeri, tali che messi al posto di  $x$ , nella

$$\xi = kp + x^\theta,$$

la soddisfano; dunque si ha questa nuova forma per il precedente.

**TEOREMA.** — *La condizione necessaria e sufficiente affinchè si possa determinare un esponente  $\nu < p - 1$ , tale che la congruenza*

$$\xi^\nu \equiv 1 \pmod{p}$$

*sia soddisfatta, è che sia possibile scomporre il numero  $\xi$  nella somma  $kp + x^\theta$ .*

È evidente dopo ciò che ogni numero scomponibile nella somma  $kp + x^\theta$  non potrà essere radice primitiva relativamente al modulo  $p$ ; per conseguenza potremo dire che:

*Un numero  $\xi$  è radice primitiva relativamente al modulo  $p$ , se non è possibile la decomposizione*

$$\xi = kp + x^\theta,$$

*dove  $k$  è un numero intero,  $x$  primo con  $p$ , e  $\theta$  un divisore di  $p - 1$  diverso dall'unità.*

Consideriamo per es. la congruenza

$$\xi^4 \equiv 1 \pmod{5}.$$

Essa ammette 4 radici, che sono i numeri 1, 2, 3, 4: di questi due soltanto appartengono all'esponente 4, ossia sono radici primitive: il 2 e il 3. In conseguenza sarà impossibile porre il 2 e il 3 sotto la forma

$$kp + x^\theta;$$

e poichè si ha  $\theta = 4$  oppure  $\theta = 2$ , sotto una delle forme

$$5k + x^4 \quad ; \quad 5k + x^2.$$

È facile verificarlo: infatti, essendo  $x$  primo con 5, sarà di una delle forme:

$$5n + 1, \quad 5n + 2, \quad 5n + 3, \quad 5n + 4.$$

Ma se supponiamo che  $x$  sia della 1<sup>a</sup> forma o della 4<sup>a</sup>,  $x^2$  e  $x^4$  saranno della forma  $5n + 1$ ; e se supponiamo che  $x$  sia della 2<sup>a</sup> forma o della 3<sup>a</sup>,  $x^2$  e  $x^4$  saranno della forma  $5n + 4$ ; dunque le due espressioni

$$5k + x^4 \quad \text{e} \quad 5k + x^2$$

sono impossibili per i numeri 2 e 3.

Resta poi ancora dimostrato che sotto tale forma possono mettersi i numeri 1 e 4, che non sono radici primitive.

Da ultimo si può osservare che, messo sotto la nuova forma, il teorema che ho ricordato, è suscettibile di una lieve estensione: infatti per poter determinare un esponente  $\nu < p - 1$ , tale che  $\xi^\nu \equiv 1 \pmod{p}$ , nel caso che  $\frac{p-1}{\theta} =$  numero pari e  $k$  positivo, basta che sia, essendo  $x > 0$ ,  $\xi = kp - x^\theta$ ; e che dal teorema stesso segue ancora il



COROLLARIO. — Se  $\theta$  è il più grande divisore di  $p - 1$ , che soddisfa la relazione

$$\xi = kp + x^\theta,$$

nella quale  $x$  è primo con  $p$ , ( $p$  primo e  $k$  un numero intero), sarà  $\frac{p-1}{\theta}$  il minimo valore di  $v$  che soddisfa alla congruenza

$$\xi^v \equiv 1 \pmod{p}.$$

Genova, 25 Gennaio 1897.

G. MUSSO.

## SULLE DEFINIZIONI DI EQUAZIONE E DI SISTEMA DI EQUAZIONI

1. Alcuni autori<sup>(1)</sup> danno la definizione seguente: *equazione* è un'eguaglianza che non è verificata se non per certi valori delle lettere che si trovano nei termini dell'eguaglianza. — Altri<sup>(2)</sup> danno quest'altra: si chiama *equazione* un'eguaglianza la quale non è soddisfatta per qualunque valore delle lettere che in essa compariscono.

Varie obiezioni possono esser mosse contro queste definizioni. Anzitutto si può osservare che non v'è regola generale per stabilire se una data eguaglianza sia soddisfatta soltanto da particolari valori delle lettere, o se non sia soddisfatta da tutti i valori delle lettere contenutevi;<sup>(3)</sup> e quindi, volendo seguire l'una o l'altra delle suddette definizioni, si urta contro la difficoltà di decidere se ad una data eguaglianza spetti il nome di equazione. Allorquando poi la difficoltà si sapia superare, il nome di equazione non potrebbe esser dato che in ultimo, quando cioè non vi sia alcun dubbio sulla specie dell'eguaglianza di cui si tratta. — D'altra parte, le suddette definizioni corrispondono esse nel modo il più esatto a ciò che in pratica s'intende ordinariamente colla parola equazione? Secondo le definizioni stesse, l'equazione apparisce come il contrapposto della identità,<sup>(4)</sup> ma se si va a sfogliare i nostri libri di testo si vedrà che quasi tutti gli autori conservano il nome di equazione anche all'eguaglianza identica. Così ARZELÀ,<sup>(5)</sup> discutendo la formula di risoluzione dell'equazione:

$$ax + b = a'x + b',$$

dice che se  $a - a' = 0$ ,  $b - b' = 0$ , ogni valore che si possa pensare per la  $x$  soddisfa all'equazione; AMANZIO<sup>(6)</sup> dice che se  $P = 0$ ,  $Q = 0$ , l'equazione:

$$Px = Q$$

(1) BELLACCHI, *Lezioni ed esercizi d'algebra*, V. II, P. II, Firenze, Barbera 1891, pag. 2; BERTRAND, *Traité d'algèbre*, Paris, Hachette 1879, V. I, pag. 81; FAIFOPFER, *Algebra*, Venezia, tip. Emiliana 1895, pag. 109; VISALLI e MANDÉS, *Algebra*, Livorno, Giusti 1893, pag. 104; GIULIANI, *Algebra*, Torino, Loescher, pag. 29, ecc.

(2) CUNEO e POGGI, *Algebra*, Torino, Paravia 1895, pag. 96; MORENO, *Algebra*, Napoli, Pellerano 1887, pag. 116; TESTI, *Corso di Matematiche*, VII, Livorno, Giusti, pag. 314; GARBINRI, *Algebra*, Padova, Sacchetto 1896, pag. 106; AMANZIO, *Algebra*, Napoli, Pellerano 1882, pag. 242; ecc.

(3) V. per es. GAZZANIGA, *Libro d'aritmetica e d'algebra elementare*, Padova, Sacchetto 1896, pag. 220.

(4) Su questo punto insistono infatti quasi tutti gli autori. V. per es. ARZELÀ, *Algebra elementare*, Firenze, Le Monnier 1890, pag. 163; TESTI, *o. c.* pag. 313; FAIFOPFER, *o. c.* pag. 108; ecc.

(5) *o. c.* pag. 187.

(6) *o. c.* pag. 258.



si riduce alla identità  $0 = 0$ , e perciò essa stessa è un'identità; BERTRAND<sup>(1)</sup> dice che l'equazione

$$ax + b = ax + b$$

è soddisfatta qualunque sia  $x$ ; ecc. ecc. Insomma da tutti si adopera, anche nel caso considerato la parola *equazione* invece dell'altra *identità*, e ciò contrariamente alla definizione data. Egli è che, con ragione, si trova conveniente di dare alla parola equazione un senso più esteso di quello espresso dalle definizioni suddette. Si può infine aggiungere che, secondo la prima definizione, una eguaglianza come ad es. la seguente:

$$3x + 4 = 3x + 7$$

non potrebbe meritare il nome di equazione, giacchè essa non è verificata da nessun valore, mentre, secondo la definizione stessa, sembrerebbe necessario che, per meritare il nome di equazione, l'eguaglianza dovesse essere soddisfatta da un valore almeno. Limitandosi ai numeri reali, come fanno parecchi autori, neppure si potrebbe chiamare equazione, secondo la prima definizione, un'eguaglianza della forma  $x^{2n} = a$ , dove  $a$  è un numero negativo, appunto perchè anche questa uguaglianza non sarebbe soddisfatta da nessun valore. Tuttavia, gli autori che seguono la prima definizione, conservano anche in questi casi il nome di equazione. P. es.

FALFOFFER<sup>(2)</sup> dice che se  $a = a'$ ,  $b > b'$ , l'equazione:

$$ax + b = a'x + b'$$

non ammette nessuna soluzione. Lo stesso autore,<sup>(3)</sup> considerando l'equazione di 2.º grado:

$$x^2 + px + q = 0,$$

dice che se  $p^2 - 4q < 0$ , l'equazione non ha soluzioni.<sup>(4)</sup>

2. È bene quindi di vedere come deve esser posta la definizione di equazione, se si vuole che contro di essa non si possano muovere le obiezioni suddette, o altre che sieno. A me pare che si potrebbe, a tal uopo, precedere nell'insegnamento come segue.

Con opportuni esempi, si comincerà col fare osservare che, date due espressioni algebriche qualsivogliano,<sup>(5)</sup> possono darsi i casi seguenti: 1º esse assumono valori uguali soltanto per alcuni valori delle lettere; (2º) 2º assumono valori disuguali per tutti i valori delle lettere; 3º assumono valori uguali per tutti i valori delle lettere. — Si dirà poi che, nell'intento di scoprire quale di questi tre casi abbia luogo quando sono date due espressioni algebriche qualsivogliano, si comincia col frapporre a queste il segno =, chiamando *equazione* la scrittura che si ottiene. Cosicché si potrebbe dare la definizione che segue:

(1) o. c. VI, pag. 153.

(2) o. c. pag. 133.

(3) o. c. pag. 259.

(4) V. anche VISALLI e MANDRA, o. c. pag. 173; BERTRAND, o. c. pag. 153; BELLACCHI, o. c. pag. 16.

(5) Le due espressioni potrebbero anche essere l'una aritmetica e l'altra algebrica. — Sul senso dato qui alle espressioni aritmetiche e algebriche e ai valori delle medesime, si legga GAZZANIGA, o. c. pag. 191, 192.

(6) In quanto all'eguaglianza, o meno, delle due espressioni algebriche per il caso in cui per qualche valore delle lettere esse assumono valori infiniti, si veggia quanto ottimamente dice in proposito AMANZO, o. c. pag. 385 e seg.



*Equazione è l'eguaglianza fatta tra due espressioni algebriche nell'intento di scoprire se esistono o no valori delle lettere per i quali le due espressioni algebriche acquistano valori uguali e di trovare tutti i detti valori nel caso che esistano.* (1)

3. Passando ai sistemi di equazioni, trovo che alcuni autori (2) pongono la definizione: *si chiama sistema di equazioni un insieme di equazioni che debbono essere soddisfatte dai medesimi valori delle incognite; mentre altri (3) danno l'altra poco differente: si dice sistema di equazioni un insieme di equazioni che sono soddisfatte dagli stessi valori delle incognite.*

Contro queste definizioni possono pure essere mosse alcune obiezioni. Anzitutto si può osservare che anche qui si urta contro la difficoltà di decidere se ad un insieme di equazioni spetti il nome di *sistema*. Quando poi questa difficoltà si sappia superare, il nome di sistema non potrebbe esser dato che in ultimo. Inoltre le dette definizioni non corrispondono esattamente a ciò che in pratica s'intende ordinariamente per *sistema* di equazioni. Seguendo le definizioni stesse, sembrerebbe che il nome di sistema non si potesse dare ai complessi di equazioni che non sono soddisfatte dagli stessi valori delle incognite, per es. al complesso:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 3x + 4y = 7; \end{cases}$$

tuttavia tutti gli autori citati chiamano sistemi anche i complessi di equazioni incompatibili. Così AMANZIO, (4) considerando il complesso delle due equazioni:

$$\begin{aligned} ax + by &= k \\ a'x + b'y &= k' \end{aligned}$$

nell'ipotesi  $ab' - a'b = 0$ , dice: in questo caso dunque si deve concludere che il dato sistema non ammette soluzione. (5) GAZZANIGA, (6) scostandosi un po' dagli altri autori, contempla dapprima il caso di due equazioni con due incognite e dice che esse costituiscono un sistema se fra le soluzioni dell'una vi sono anche soluzioni dell'altra; e se vi sono inoltre soluzioni dell'una che non sono anche soluzioni dell'altra equazione. Con ciò sono esclusi tanto i sistemi impossibili, come quelli indeterminati. Benchè l'A. si attenga poi scrupolosamente alla definizione posta, io non credo che sia conveniente in pratica di seguirlo in questa definizione più ristretta. Anche in geometria analitica, per esempio, la parola *sistema* ha un significato più largo di quello attribuitole da GAZZANIGA.

4. A me pare che si potrebbe procedere nell'insegnamento come segue. — Con opportuni esempi si comincerà col fare osservare che, date più equazioni con più incognite, sono possibili i seguenti casi: 1° che le equazioni abbiano soltanto alcune soluzioni comuni; 2° che non abbiano nessuna soluzione comune; 3° che abbiano infinite soluzioni comuni. Si potrà quindi dare la seguente definizione:

(1) AMANZIO, o. c. pag. 291; CUNEO e POGGI, o. c. pag. 136; FAIFOPER, o. c. pag. 163; TESTI, o. c. pag. 371; GARBIBI, o. c. pag. 146; MORENO, o. c. pag. 118; BERTRAND, o. c. pag. 97; ecc.

(2) BELLACCHI, o. c. pag. 67; VISALLI e MANDER, o. c. pag. 204; ecc.

(3) Questa mia nota era preparata fin dall'agosto 1896. Nel frattempo, l'egregio mio amico prof. GAZZANIGA, pubblicando la 2ª edizione del suo ottimo libro di *Aritmetica e di Algebra*, tiene conto delle idee che esprimo in questa nota, idee che avevo sottoposto al suo autorevole parere.

(4) o. c. pag. 304.

(5) Si veggia anche FAIFOPER, o. c. pag. 181; TESTI, o. c. pag. 396; VISALLI e MANDER, o. c. pag. 213; ecc.

(6) o. c. pag. 249 e seg.



Chiamasi sistema di equazioni un complesso di equazioni che si considerano contemporaneamente nell'intento di scoprire se esse hanno o no delle soluzioni comuni, e di trovare tutte queste soluzioni nel caso che esistono.

5. Quanto si è detto relativamente alle equazioni e ai sistemi di equazioni può estendersi alle inequazioni e ai sistemi di inequazioni. TESTI <sup>(1)</sup> chiama inequazione (disuguaglianza problematica) una disuguaglianza che sia soddisfatta soltanto quando ai simboli si danno valori maggiori o minori di certi determinati numeri. — VISALLI e MANDÉS <sup>(2)</sup> dicono che inequazione è un'ineguaglianza che non è verificata per tutti i valori delle lettere che contiene.

Contro queste definizioni si possono muovere le solite obiezioni, e quindi mi sembra conveniente, anche per seguire una via analoga a quella indicata per le equazioni, di procedere come segue.

Per mezzo di esempi, si comincerà col fare osservare che date due espressioni algebriche qualsivogliano, può darsi che la prima di esse assuma un valore maggiore o minore di quello che assume la seconda: 1° soltanto per particolari valori delle lettere; 2° per nessun valore delle lettere; 3° per tutti i valori delle lettere. Si dirà poi che, nell'intento di scoprire quale di questi tre casi abbia luogo quando sono date due espressioni algebriche qualsivogliano, si comincia col frapporre a queste il segno  $>$  o  $<$ , chiamando inequazione la scrittura che si ottiene. Cosicché si potrà dare la definizione che segue:

*Inequazione è una disuguaglianza posta tra due espressioni algebriche nell'intento di scoprire se esistono o no valori delle lettere per i quali una delle due espressioni algebriche acquisti un valore maggiore o minore di quello che assume l'altra, e di trovare tutti i detti valori nel caso che esistono.*

Osservazioni analoghe alle precedenti possono essere fatte per i sistemi d'inequazioni.

Fermo, agosto 1896.

CORRADO CIAMBERLINI.

## UN TEOREMA SUL TRIANGOLO <sup>(3)</sup>

*In ogni triangolo, il rettangolo di un'altezza e del segmento che va dall'ortocentro al lato corrispondente a quella, è equivalente al rettangolo delle proiezioni degli altri due lati sul primo.*

Sia ABC un triangolo qualunque; dalla figura risulta che l'angolo B è considerato nei tre casi  $B \leq 90^\circ$ ; sia H l'ortocentro del triangolo e sia D il piede

<sup>(1)</sup> o. c. pag. 182.

<sup>(2)</sup> o. c. pag. 245.

<sup>(3)</sup> Journ. de Mathématiques élémentaires par H. VUIBERT, ann. 21, n. 7.



dell'altezza partente da B. Osservando allora che i due triangoli AHD, BDC sono simili, si ha

$$\frac{HD}{DC} = \frac{AD}{BD},$$

da cui

$$\overline{HD \cdot BD} = \overline{DC \cdot AD}.$$

Siccome si può ripetere la cosa per gli altri due lati del triangolo ABC il teorema è dimostrato.

APPLICAZIONE I. — Indichiamo gli elementi relativi all'altezza con  $h_a, h_a'', \dots$  e quelli relativi al lato con  $a_1, a_2, \dots$ . Dal teorema dimostrato si ha

$$h_a h_a'' = a_1 a_2,$$

da cui

$$a_1^2 + a_2^2 + 2h_a h_a'' = a^2,$$

essendo d'altra parte

$$h_b'^2 - h_a''^2 = a_1^2, \quad h_a'^2 - h_a''^2 = a_2^2, \quad (h_a' = h_a - h_a'')$$

sostituendo questi valori di  $a_1^2, a_2^2$  nella precedente si ottiene

$$2h_a h_a'' + h_c'^2 + h_b'^2 = a^2,$$

ed analogamente si trovano le altre eguaglianze

$$2h_b h_b'' + h_c'^2 + h_a'^2 = b^2,$$

$$2h_c h_c'' + h_a'^2 + h_b'^2 = c^2.$$

Da queste si ha

$$(1) \quad 2[h_a h_a'' + h_b h_b'' + h_c h_c'' + h_a'^2 + h_b'^2 + h_c'^2] = a^2 + b^2 + c^2.$$

È noto ora, essendo  $H'H''$  incognito, che

$$h_a h_a'' = h_b h_b'' = h_c h_c'' = H'H'';$$

ed è noto ancora che

$$a^2 + h_a'^2 = b^2 + h_b'^2 = c^2 + h_c'^2 = 4R^2;$$

e combinando queste due ultime formole colla (1), si ha

$$2(H'H'' + 4R^2) = (a^2 + b^2 + c^2);$$

da cui si ha la formola

$$h_a h_a'' = h_b h_b'' = h_c h_c'' = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - 4R^2.$$

II. — Indicando con  $x, y, z$  le coniugate isogonali delle altezze di un triangolo, si ha

$$\frac{x + y + z}{4RS} = \frac{1}{a(h_a + h_a')} + \frac{1}{b(h_b + h_b'')} + \frac{1}{c(h_c + h_c'')}$$

È noto il seguente teorema di Steiner: se due coniugate isogonali AM, AN dell'angolo BAC del triangolo ABC, incontrano il lato opposto BC in M ed in N, si ha la relazione

$$\overline{AM^2} : \overline{AN^2} = \overline{BM \cdot MC} : \overline{BN \cdot NC}.$$

Osservando allora che la coniugata isogonale dell'altezza passa per il centro del cerchio circoscritto al triangolo, applicando il teorema ora enunciato, si ha

$$\frac{h^2}{x^2} = \frac{h_a h_a''}{\overline{BN \cdot NC}} = \frac{h_a h_a''}{x(2R - x)},$$



da cui

$$x = \frac{2Rh_a}{h_a + h_a''} = \frac{bc}{h_a + h_a''}$$

epperò

$$x = \frac{abc}{a(h_a + h_a'')} = \frac{4RS}{a(h_a + h_a'')}$$

Analogamente operando per  $y$  e  $z$  si ha la formola enunciata.

III. — Indicando con  $D, E, F$  rispettivamente i piedi delle altezze  $h_a, h_b, h_c$  di un triangolo acutangolo  $ABC$  (è facile stabilire le considerazioni analoghe per gli altri casi), si ha la formola

$$\frac{c^2 \cdot DC + h^2 \cdot BD}{h_a + h_a''} = \frac{a^2 \cdot EA + c^2 \cdot CE}{h_b + h_b''} = \frac{h^2 \cdot FB + a^2 \cdot AF}{h_c + h_c''} = S.$$

Dal teorema di Stewart si ha

$$\overline{AB^2} \cdot DC + \overline{AC^2} \cdot BD = BC(\overline{AD^2} + BD \cdot DC),$$

ossia

$$c^2 \cdot DC + b^2 \cdot BD = S(h_a + h_a'').$$

Analogamente si deducono le altre parti della formola enunciata.

IV. — Colle notazioni precedenti si ha in generale

$$\frac{BD \cdot FC}{DC \cdot BE} = \frac{c}{b}$$

Applicando il teorema di Stewart al triangolo  $ABC$ , si ha

$$BC \cdot \overline{AD^2} - BD \cdot \overline{AC^2} - DC \cdot \overline{AB^2} + BC \cdot BD \cdot DC = 0.$$

Applicando lo stesso teorema al triangolo  $BHC$  ( $H$  è l'ortocentro del triangolo  $ABC$ ), si ha

$$BC \cdot \overline{HD^2} - BD \cdot \overline{HC^2} - DC \cdot \overline{HB^2} + BC \cdot BD \cdot DC = 0,$$

Sommando ora queste due formole si ha l'altra

$$BC(\overline{AD^2} + \overline{HD^2}) - BD(\overline{AC^2} + \overline{HC^2}) - DC(\overline{AB^2} + \overline{HB^2}) + 2BC \cdot BD \cdot DC = 0,$$

e tenendo conto che si ha pure

$$\overline{AD^2} + \overline{HD^2} = \overline{HA^2} + 2AD \cdot HD,$$

$$\overline{AC^2} + \overline{CH^2} = \overline{AH^2} + 2AC \cdot FC,$$

$$\overline{AB^2} + \overline{HB^2} = \overline{HA^2} + 2AB \cdot BE,$$

la precedente diviene

$$\overline{HA^2}(BC - BD - DC) + 2BC(AD \cdot HD - BD \cdot DC) + 2(DC \cdot AB \cdot BE - BD \cdot CA \cdot FC) = 0,$$

ma

$$BC - BD - DC = 0, \quad AD \cdot HD - BD \cdot DC = 0,$$

epperò la precedente diviene la formola enunciata.

V. Dal teorema enunciato in principio risulta ancora: Costruendo sui lati di un triangolo  $ABC$  i tre triangoli simmetrici  $A'BC, B'AC, C'BA$ , il cerchio circoscritto al triangolo  $ABC$  taglia le  $AA', BB', CC'$  rispettivamente negli ortocentri di questi triangoli; e le circonferenze a queste circoscritte si tagliano nell'ortocentro del triangolo fondamentale  $ABC$ .



## SOLUZIONE DELLE QUISTIONI

291 292\* 295\* 324\* 359\* 372\* 373\* 374\* 376\* 377\* E 378

291. 1°. Se per un punto  $M$  del piano di un triangolo si tracciano delle parallele ai lati e si costruiscono i coniugati armonici di  $M$  rispetto ai segmenti intercetti dai lati su queste parallele, i tre punti così determinati sono in linea retta.

2°. Le rette ottenute colla costruzione precedente per un punto ed i suoi isobarici, o per i tre punti semireciproci di un punto dato, formano un triangolo che è triplamente omologico a quello fondamentale.

JUAN I. DURÁN LOBIGA.

Risoluzione e generalizzazione del sig. prof. F. Ferrari.

1°. Si tirino dal punto  $M$  tre rette qualunque  $MX, MX', MX''$  ad incontrare rispettivamente i lati  $a, b, c$  (o i loro prolungamenti) del triangolo fondamentale  $ABC$  nei punti  $X, X', X''$ , e sieno  $Q, Q', Q''$  rispettivamente i coniugati armonici di  $M$  rispetto ai segmenti delle rette  $MX, MX', MX''$  intercetti dalle coppie di lati  $(b, c), (c, a), (a, b)$  rispettivamente. La condizione necessaria e sufficiente perchè  $Q, Q', Q''$  sieno in linea retta è che sieno in linea retta i punti  $X, X', X''$ .

Ponendo  $\frac{BX}{CX} = m$ , le coordinate baricentriche di  $X$  rispetto ad  $ABC$  sono  $(0, 1, m)$ , e ponendo dunque in coordinate baricentriche  $M (\alpha', \beta', \gamma'), Q (\alpha, \beta, \gamma)$ , poichè  $M, Q, X$  sono in linea retta, sarà

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} = 0,$$

Chiamando  $Y, Z$  i punti ove  $MX$  sega rispettivamente  $b, c$ ; ed  $M_a, Q_a$  le proiezioni di  $M, Q$  su  $a$  da  $A$ , si ha inoltre

$$(ZYMQ) = (BCM_a Q_a) = -1$$

donde

$$(2) \quad \frac{BQ_a}{Q_a C} = -\frac{BM_a}{M_a C},$$

ossia

$$\frac{\gamma}{\beta} = -\frac{\gamma'}{\beta'}$$

Dalle (1), (2) si ottengono le coordinate di  $Q$ , o cioè

$$\alpha : \beta : \gamma = \alpha' (m\beta' + \gamma') : \beta' (m\beta' - \gamma') : -\gamma' (m\beta' - \gamma').$$

Le coordinate di  $Q', Q''$ , ponendo

$$\frac{OX'}{X'A} = m' \quad , \quad \frac{AX''}{X''B} = m'' \quad ,$$

si avranno evidentemente da quelle di  $Q$ , mutando  $m$  in  $m'$  o in  $m''$ , e permutando circolarmente fra  $\alpha', \beta', \gamma'$  e fra  $\alpha, \beta, \gamma$ ; si avrà dunque per  $Q'$

$$\beta : \gamma : \alpha = \beta' (m'\gamma' + \alpha') : \gamma' (m'\gamma' - \alpha') : -\alpha' (m'\gamma' - \alpha')$$



per  $Q''$

$$\gamma : \alpha : \beta = \gamma'(m''\alpha' + \beta') : \alpha'(m''\alpha' - \beta') : -\beta'(m''\alpha' - \beta').$$

La condizione perchè  $Q, Q', Q''$  sieno in linea retta è quindi

$$\begin{vmatrix} \alpha'(m\beta' + \gamma') & \beta'(m\beta' - \gamma') & -\gamma'(m\beta' - \gamma') \\ -\alpha'(m'\gamma' - \alpha') & \beta'(m'\gamma' - \alpha') & \gamma'(m'\gamma' - \alpha') \\ \alpha'(m''\alpha' - \beta') & -\beta'(m''\alpha' - \beta') & \gamma'(m''\alpha' + \beta') \end{vmatrix} = 0$$

Il determinante è eguale a

$$4\alpha'^2\beta'^2\gamma'^2(m m' m'' + 1);$$

onde la condizione predetta ritenendo che  $M$  non sia sul perimetro di  $ABC$  (cioè che nessuna delle  $\alpha', \beta', \gamma'$  sia zero), nel quale caso evidentemente le  $Q, Q', Q''$  sono sempre in linea retta, perchè due di esse coincidono con  $M$ , si riduce alla

$$(3) \quad m m' m'' = -1,$$

cioè  $X, X', X''$  in linea retta.

2°. Sieno ora  $P(\beta', \gamma', \alpha'), S(\gamma', \alpha', \beta')$  i due punti isobarici di  $M$ . Da  $P$  si tirino tre rette a dividere  $a, b, c$  rispettivamente nei rapporti  $m', m'', m$ , e da  $S$  tre rette a dividere  $a, b, c$  rispettivamente nei rapporti  $m'', m, m'$ , e si costruiscano rispetto a  $P$  e ad  $S$  le due terne di punti

$$(Q_1, Q'_1, Q''_1), (Q_2, Q'_2, Q''_2)$$

analoghe alla terna  $(Q, Q', Q'')$ .

Permutando circolarmente fra  $m, m', m''$  e fra  $\alpha', \beta, \gamma'$ , dalle coordinate di  $Q$  si dedurranno quelle di  $Q_1$  e  $Q_2$ , dalle coordinate di  $Q'$  quelle di  $Q'_1$  e  $Q'_2$ , dalle coordinate di  $Q''$  quelle di  $Q''_1$  e  $Q''_2$ . Fatto ciò, si trova che i punti  $(Q, Q'_1, Q''_2)$  sono fra loro isobarici, come pure i punti  $(Q', Q_1, Q''_2)$ , e i punti  $(Q'', Q'_1, Q_2)$ , e perciò le rette  $QQ', Q'_1Q_1, Q'_2Q''_2$ , ossia, nell'ipotesi (3), le rette  $QQ', Q'_1Q_1, Q'_2Q''_2$ ,  $Q'_1Q_1, Q'_2Q''_2$  si incontrano in tre punti fra loro isobarici, che quindi formano un triangolo triplamente omologico ad  $ABC$ .

Tre punti semireciproci di un punto dato sono fra loro isobarici; onde questo caso rientra nel precedente.

Si noti che, indipendentemente dall'ipotesi (3), i triangoli  $(Q, Q'_1, Q''_2), (Q', Q_1, Q''_2), (Q'', Q'_1, Q_2)$  e i trilateri  $(QQ', Q'_1Q_1, Q'_2Q''_2), (QQ'', Q''_1Q'_1, Q''_2Q_2), (Q'Q'', Q'_1Q''_1, Q'_2Q''_2)$  sono tutti triplamente omologici con  $ABC$ , siccome aventi per vertici terne di punti isobarici.

292\*. *Mostrare che le radici dell'equazione quadratica*

$$(1 - \lambda)x^2 - [a + a' - \lambda(b + b')]x + aa' - \lambda bb' = 0,$$

ove  $a, b, a', b', \lambda$  sono numeri reali, sono sempre reali e distinte se è

$$\lambda(a - b)(a' - b') > 0; \quad \text{e se è } \lambda(a - b)(a' - b') < 0,$$

dette radici possono essere reali e distinte, reali ed eguali, o immaginarie coniugate.

A. DEL RE.

Risoluzione del sig. Guido Bordi alunno del R. Istituto Tecnico di Piacenza.

Calcolo il discriminante dell'equazione quadratica proposta:

$$D = [a + a' - \lambda(b + b')]^2 + 4(\lambda - 1)(aa' - \lambda bb'),$$

$$D = (a + a')^2 + \lambda^2(b + b')^2 - 2\lambda(a + a')(b + b') + 4\lambda aa' - 4\lambda^2 bb' - 4aa' + 4\lambda bb'$$

$$D = a^2 + a'^2 + 2aa' + \lambda^2 b^2 + \lambda^2 b'^2 + 2\lambda^2 bb' - 2\lambda ab - 2\lambda ab' - 2\lambda a'b - 2\lambda a'b' + 4\lambda aa' - 4\lambda^2 bb' - 4aa' + 4\lambda bb',$$



$$D = a^2 + \lambda^2 b^2 - 2\lambda ab + a'^2 + \lambda^2 b'^2 - 2\lambda a'b' - 2aa' - 2\lambda ab' - 2\lambda a'b - 2\lambda^2 bb' + 4\lambda aa' + 4\lambda bb'$$

$$D = (a - \lambda b)^2 + (a' - \lambda b')^2 - 2aa' - 2\lambda bb' + 2\lambda ab' + 2\lambda a'b' + 4\lambda aa' + 4\lambda bb' - 4\lambda ab - 4\lambda a'b,$$

$$D = (a - \lambda b)^2 + (a' - \lambda b')^2 - 2[aa' + \lambda^2 bb' - \lambda ab' - \lambda a'b] + 4\lambda[aa' + bb' - ab - a'b],$$

$$D = (a - \lambda b)^2 + (a' - \lambda b')^2 - 2[a(a' - \lambda b') - \lambda b(a' - \lambda b')] + 4\lambda[a(a' - b') - b(a' - b')],$$

$$D = (a - \lambda b)^2 + (a' - \lambda b')^2 - 2(a - \lambda b)(a' - \lambda b') + 4\lambda(a - b)(a' - b'),$$

$$D = [(a - \lambda b) - (a' - \lambda b')]^2 + 4\lambda(a - b)(a' - b'),$$

$$D = [a - a' - \lambda(b - b')]^2 + 4\lambda(a - b)(a' - b').$$

Ora il primo termine essendo un quadrato è positivo, quindi per

$$\lambda(a - b)(a' - b') \geq 0$$

le radici sono reali e distinte, perchè  $D > 0$ .

Se  $\lambda(a - b)(a' - b') < 0$ , si possono considerare tre casi: che il primo termine superi il secondo in valore assoluto, e allora le radici sono reali e distinte, perchè  $D > 0$ ; che il primo termine sia eguale al secondo in valore assoluto, allora  $D = 0$ , e quindi le radici sono reali ed uguali; in fine che il primo termine sia minore del secondo, e in questo caso, essendo  $D < 0$ , le radici sono immaginarie coniugate.

295\*. Di un triangolo isoscele sono dati il perimetro  $2p$  e l'altezza  $h$ , determinare i lati e gli angoli del triangolo.

Condizione di possibilità del problema e caso in cui il triangolo è equilatero.

BELLACCHI.

Risoluzione del sig. Emanuele Palumbo Todaro, studente della R. Università di Palermo.

Indicando con  $x$  e  $y$  rispettivamente il lato e la base del triangolo isoscele, le equazioni per mezzo delle quali si risolve il problema sono:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 2x + y = 2p \\ (2) \quad 4h^2 + y^2 = 4x^2 \end{array} \right\}$$

Risolvendo la (1) rispetto ad  $y$ , e sostituendo il valore di questo nella (2) si ha riducendo

$$h^2 + p^2 = 2px$$

da cui

$$x = \frac{h^2 + p^2}{2p}.$$

Sostituendo poi questo valore nella (1) e risolvendo rispetto ad  $y$  otteniamo:

$$y = 2p - \frac{h^2 + p^2}{p} = \frac{p^2 - h^2}{p}.$$

Denotando ora con  $\alpha$  uno degli angoli alla base, risulta evidente la seguente relazione

$$\text{sen } \alpha = \frac{2ph}{h^2 + p^2};$$



e chiamando  $\beta$  l'angolo al vertice si ha:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{y}{x} \operatorname{sen} \alpha = \frac{4ph(p^2 - h^2)}{(h^2 + p^2)^2}$$

*Discussione.* — Dalle formole trovate emerge che la condizione di possibilità del problema è che  $p^2 - h^2$  sia maggiore di zero, cioè che  $p$  sia maggiore di  $h$ .

Affinchè il triangolo sia equilatero deve essere  $3x^2 = 4h^2$  ossia  $p = h\sqrt{3}$  essendo in questo caso  $x = \frac{2p}{3}$ .

324\*. Mostrare come, risolvendo rispetto ad  $u, v, w$  le equazioni

$$\begin{cases} u' = \frac{\lambda(-u^2 + v^2 + w^2) - 2(\mu v + \nu w)u}{u^2 + v^2 + w^2 - 2\lambda u - 2\mu v - 2\nu w} \\ v' = \frac{\mu(u^2 - v^2 + w^2) - 2(\nu w + \lambda u)v}{u^2 + v^2 + w^2 - 2\lambda u - 2\mu v - 2\nu w} \\ w' = \frac{\nu(u^2 + v^2 - w^2) - 2(\lambda u + \mu v)w}{u^2 + v^2 + w^2 - 2\lambda u - 2\mu v - 2\nu w} \end{cases}$$

si hanno, posto

$$H = \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2},$$

ed

$$K = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2},$$

le formole

$$\begin{cases} u = \frac{H\lambda \pm Ku'}{H \pm K} \\ v = \frac{H\mu \pm Kv'}{H \pm K} \\ w = \frac{H\nu \pm Kw'}{H \pm K} \end{cases}$$

Risoluzione del sig. Francesco Barbagallo alunno del R. Istituto Tecnico di Catania.

Aggiungendo e sottraendo  $2\lambda u^2, 2\mu v^2, 2\nu w$ , rispettivamente ai numeratori delle frazioni che sono per ipotesi eguali a  $u', v', w'$  rispettivamente, si ha, facendo

$$u^2 + v^2 + w^2 = x, \quad 2(\lambda u + \mu v + \nu w) = y,$$

$$\begin{cases} u' = \frac{\lambda x - \mu u}{x - y} \\ v' = \frac{\mu v - \nu w}{x - y} \\ w' = \frac{\nu x - \gamma w}{x - y}; \end{cases}$$

donde

$$(1) \begin{cases} u(x - y) = \lambda x - \mu u \\ v'(x - y) = \mu x - \nu w \\ w'(x - y) = \nu x - \gamma u \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x(u' - \lambda) = y(u' - u) \\ x(v' - \mu) = y(v' - v) \\ x(w' - \nu) = y(w' - w), \end{cases}$$

per cui

$$(2) \frac{u' - \lambda}{u' - u} = \frac{v' - \mu}{v' - v} = \frac{w' - \nu}{w' - w} = \frac{y}{x}$$



Dalle (1) ora si ha

$$\begin{cases} u'^2 (x-y)^2 = \lambda^2 x^2 + y^2 u'^2 - 2\lambda u'xy \\ v'^2 (x-y)^2 = \mu^2 x^2 + y^2 v'^2 - 2\mu v'xy \\ w'^2 (x-y)^2 = \nu^2 x^2 + y^2 w'^2 - 2\nu w'xy; \end{cases}$$

sommando membro a membro e facendo

$$H^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2; \quad K^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2,$$

si ha

$$H^2 (x-y)^2 = K^2 x^2;$$

ed allora

$$Hx - Hy \pm Kx = 0,$$

ovvero

$$(H \pm K)x = Hy,$$

donde

$$\frac{H \pm K}{H} = \frac{y}{x}.$$

Dalle (2) si ricava

$$\frac{u' - \lambda}{u' - u} = \frac{v' - \mu}{v' - v} = \frac{w' - \nu}{w' - w} = \frac{H \pm K}{H},$$

ovvero

$$\begin{cases} (u' - \lambda)H = (H \pm K)(u' - u) \\ (v' - \mu)H = (H \pm K)(v' - v) \\ (w' - \nu)H = (H \pm K)(w' - w); \end{cases}$$

cioè eseguendo le moltiplicazioni, eliminando i termini simili e raccogliendo a fattor comune si ha:

$$\begin{cases} u(H \pm K) = \lambda H \pm u'K \\ v(H \pm K) = \mu H \pm v'K \\ w(H \pm K) = \nu H \pm w'K \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} u = \frac{\lambda H \pm u'K}{H \pm K} \\ v = \frac{\mu H \pm v'K}{H \pm K} \\ w = \frac{\nu H \pm w'K}{H \pm K} \end{cases}$$

359\*. *In un triangolo qualunque ciascuna bisettrice è divisa dal centro del circolo inscritto in due parti, che stanno fra loro come la somma dei lati che comprendono l'angolo bisecato sta al terzo lato.*

CARDOSO LAYNES.

Risoluzione del sig. Michele Bello alunno dell'Istituto Tecnico di Bari.

Siano ABC il triangolo, ED e AE due bisettrici ed O il centro del circolo inscritto. Essendo BD bisettrice di  $\widehat{B}$  si ha:  $AB:BC::AD:DC$ , e componendo,

$$(1) \quad AB + BC : AB :: AC : AD.$$

Essendo AO bisettrice di  $\widehat{A}$  si ha pure,  $BO:AB::OD:AD$ , e paragonandola con la (1) risulta:  $BO:OD::AB+BC:AC$ , c, d, d.

372\*. *La sesta potenza di qualunque numero intero è congrua a 0 o ad 1 rispetto al mod. 9.*



Risoluzione del sig. Eugenio Strocchi.

Ogni intero  $x$  o è primo con 9 od ha la forma  $3y$ .  
In quest'ultimo caso è evidente che si ha

$$(3y)^6 \equiv 0 \pmod{9}.$$

Nel 1° caso poi, pel teor. di Fermat generalizzato, si ha

$$x^{p(9)} \equiv 1 \pmod{9} \quad \text{ossia} \quad x^6 \equiv 1 \pmod{9}.$$

373\*. La terza potenza di ogni numero intero è congrua a 0 o a  $\pm 1$  o a  $\pm 5$  rispetto al mod. 13.

374\*. La sesta potenza di ogni numero intero è congrua a 0 o a  $\pm 1$  rispetto al mod. 13.

BONOLIS.

Risoluzione del sig. Eugenio Strocchi.

Premettiamo che, essendo  $p$  un numero primo, da

$$a^p \equiv b^p \pmod{p} \quad \text{si ricava} \quad a \equiv \pm b \pmod{p}.$$

Infatti, essendo  $a^p - b^p = (a + b)(a - b)$ ,  $p$  dovrà dividere o  $a + b$  o  $a - b$ .

Osserviamo ora che ogni intero  $x$  o è divisibile per 13 o è primo con 13. —  
Nel primo caso, qualunque sia  $k$ , si ha

$$x^k \equiv 0 \pmod{13}.$$

Supponendo poi che  $x$  sia primo con 13, pel teor. di Fermat si ha

$$x^{12} \equiv 1 \pmod{13}$$

da cui, per quanto si è premesso,

$$(1) \quad x^3 \equiv \pm 1 \pmod{13}.$$

Resta così dimostrata la 2ª questione.

Dalla prima delle congruenze (1), per ciò che abbiamo premesso si ha pure:

$$x^3 \equiv \pm 1 \pmod{13}.$$

Dalla seconda delle congruenze (1) si ha evidentemente

$$x^6 \equiv 25 \pmod{13},$$

da cui

$$x^3 \equiv \pm 5 \pmod{13}.$$

Resta dunque dimostrata la 1ª questione.

376\*. Se si ha  $N \equiv 6 \pmod{15}$ , qualunque potenza di  $N$  sarà congrua a 6, (mod. 15).

377\*. Se si ha  $N \equiv 10 \pmod{15}$ , qualunque potenza di  $N$  sarà congrua a 10, (mod. 15).

BONOLIS.

Risoluzione del sig. Eugenio Strocchi.

Si ha

$$6 \equiv 1 \pmod{5}, \quad 10 \equiv 1 \pmod{3};$$

e qualunque sia  $p$  si ricava

$$6^{p-1} \equiv 1 \pmod{5}, \quad 10^{p-1} \equiv 1 \pmod{3};$$

da cui si ha facilmente

$$6^p \equiv 6 \pmod{15}, \quad 10^p \equiv 10 \pmod{15}.$$



E siccome dall'ipotesi si ricava

$$\begin{aligned} N^p &\equiv 6^p \pmod{15}, & N^p &\equiv 10^p \pmod{15}, \\ \text{si ha infine} & & N^p &\equiv 6 \pmod{15}, & N^p &\equiv 10 \pmod{15}. \end{aligned}$$

578. Dimostrare le identità.

$$\begin{aligned} (1) \quad \text{sen}(nx) &= \begin{vmatrix} 2 \cos x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \cos x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \cos x \end{vmatrix} \quad \text{sen } x \\ (2) \quad \cos(nx) &= \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \cos x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \cos x \end{vmatrix} \end{aligned}$$

dove il primo determinante è di ordine  $n-1$  il secondo di ordine  $n$ .

BETTINI.

Risoluzione del sig. Eugenio Strocchi.

a) Per  $n=2$  la (1) è evidente; infatti essa diventa  $\text{sen } 2x = 2 \cos x \text{ sen } x$ .

Ma essa è poi vera anche per  $n=3$ ; infatti si ha

$$\begin{vmatrix} 2 \cos x & 1 \\ 1 & 2 \cos x \end{vmatrix} \text{sen } x = (4 \cos^2 x - 1) \text{sen } x = (3 - 4 \text{sen}^2 x) \text{sen } x = \text{sen } 3x.$$

Proveremo ora, che se è vera fino ad  $n=p-1$ , è vera anche per  $n=p$ . Indicando con  $D_r$  il determinante di ordine  $r$  della forma (1), ed applicando una nota formola sui determinanti (Vedi CESARO, *Analisi algebrica*, pag. 12, § 7) si ha

$$D_{p-1} = 2 \cos x D_{p-2} - D_{p-3}.$$

Ed essendo per quanto si è supposto,

$$D_{p-2} \text{sen } x = \text{sen}(p-1)x, \quad D_{p-3} \text{sen } x = \text{sen}(p-2)x$$

si ha

$$\begin{aligned} D_{p-1} \text{sen } x &= 2 \cos x \text{sen}(p-1)x - \text{sen}(p-2)x = [\text{sen } px + \text{sen}(p-2)x] - \text{sen}(p-2)x \\ &= D_{p-1} \text{sen } x = \text{sen } px. \end{aligned}$$

Possiamo dunque asserire che la (1) è vera in generale.

b) Lasciaremos al lettore la cura di verificare che la (2) è verificata per  $n=1, 2$ . Per poter affermare che è vera in generale, basta che, supponendola vera fino ad  $n=p-1$ , si dimostri che è vera anche per  $n=p$ .

Indicando con  $D'_r$  il determinante di  $r^{\text{mo}}$  ordine del tipo (2) si ha:

$$D'_p = 2 \cos x D'_{p-1} - D'_{p-2}.$$

Ed essendo per ipotesi

$$D'_{p-1} = \cos(p-1)x, \quad D'_{p-2} = \cos(p-2)x,$$

si ha

$$\begin{aligned} D'_p &= 2 \cos x \cos(p-1)x - \cos(p-2)x = [\cos px + \cos(p-2)x] - \cos(p-2)x \\ &= D'_p = \cos px. \end{aligned}$$

Altra risoluzione del sig. E. Laura.



QUISTIONI PROPOSTE (\*)

**383\***. Trovare l'espressione dell'area d'un quadrilatero ABCP del quale si conoscono due lati consecutivi e l'angolo da essi compreso,  $\overline{AC} = a$ ,  $\overline{BC} = b$ ,  $\widehat{ABC} = B$ , e gli angoli che la diagonale passante pel vertice B forma coi due lati adiacenti nel vertice P,  $\widehat{APB} = \alpha$ ,  $\widehat{BPC} = \beta$ .

**384.** Trovare l'espressione dell'area d'un poligono ABCP<sub>1</sub>P<sub>2</sub>...P<sub>n</sub>P<sub>1</sub> di (n + 3) lati del quale si conoscono due lati consecutivi e l'angolo da essi compreso  $\overline{AB} = a$ ,  $\overline{BC} = b$ ,  $\widehat{ABC} = B$  e gli angoli che le diagonali passanti pel vertice B formano cogli altri lati successivi nei vertici:

$$P_1, P_2, P_n, \widehat{AP_1B} = \alpha_1, \widehat{BP_1P_2} = \beta; \widehat{BP_2P_1} = \alpha_2, \widehat{BP_2P_3} = \beta_2; \dots$$

$$\widehat{BP_nP_{n-1}} = \alpha_n, \widehat{BP_nC} = \beta_n.$$

DELITALA.

**385\***. Dimostrare l'uguaglianza

$$\sqrt[7]{29 + 13\sqrt{5}} - \sqrt[7]{29 - 13\sqrt{5}} = \sqrt[7]{2}.$$

GÉLIN.

**386.** Date in un medesimo piano tre punteggiate simili, il luogo del centro del cerchio circoscritto al triangolo formato da tre punti omologhi è una cubica razionale.

**387.** Date in un piano tre punteggiate eguali trovare il luogo del centro del cerchio circoscritto al triangolo avente per vertici tre punti omologhi.

REYALI.

**388\***. Dati due corpi di forma sferica e di peso P, P', determinare la relazione fra p e p' (pesi specifici), perchè, essendo P = nP', il corpo di peso P', cadendo nell'aria, acquisti una velocità costante maggiore di quella che acquisterebbe il corpo di peso P, ammettendo che la resistenza dell'aria sia proporzionale al quadrato della velocità.

BARBAGALLO.

**389\***. Se N e k sono numeri interi ed r > 1, si ha N<sup>6k+r</sup> ≡ N<sup>r</sup> (modulo 9).

**390\***. La quinta potenza d'ogni numero intero è congrua a 0, o a ± 1 rispetto al modulo 11.

BONOLIS.

(\*) Le quistioni contrassegnate con un asterisco sono proposte agli studenti delle scuole secondarie; le altre a tutti gli studiosi indistintamente.



## BIBLIOGRAFIA

**TOLOMEI.** — *Tavole dei logaritmi a cinque decimali.* — Firenze, Succ. Le Monnier 1897.

Questo manualetto si distingue dagli altri dello stesso genere per la nitidezza ed eleganza dell'edizione. Oltre alle tavole dei numeri e delle linee trigonometriche, precedute da una succinta spiegazione sul loro uso, contiene varie altre tavole di uso frequente. Crediamo quindi che esso potrà esser molto utile agli studenti.

**RIBONI Dott. G.** — *Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie superiori, 2ª edizione con molte aggiunte e correzioni.* — Bologna, Zanichelli 1898.

Della 1ª edizione di questo libro, già favorevolmente conosciuto dal pubblico si occupò diffusamente il *Periodico di Matematica*, (Fasc. III-IV anno 1894). Le aggiunte fatte sono enunciate nella prefazione colle parole seguenti:

“ Fra le innovazioni noterò un maggiore sviluppo nei preliminari; l'aggiunta di alcune nozioni sulle figure direttamente ed inversamente eguali e simili; di qualche teorema sull'equivalenza, sulle serie, sulla misura, sulle grandezze proporzionali; del teorema di Stewart; di qualche nozione sulla divisione armonica; di un'applicazione del teorema di Tolomeo sul quadrilatero iscritto. Infine dove mi si presentò l'occasione, ho dato qualche notizia storica, che credo utile anche agli studenti delle scuole secondarie „

**SERRET.** — *Trattato di trigonometria piana e sferica tradotto da Francesco Grassi, 4ª edizione con note ed aggiunte del traduttore, 1000 esercizi colle risposte, ed un formulario di matematica e fisica.* — Bocca, Firenze 1898.

Questo libro è tanto conosciuto che crediamo inutile parlare di esso. Il rapido succedersi delle edizioni, attesta il favore degli insegnanti per questa ormai vecchia opera.

*Prospetto degli studi della I. R. Accademia di commercio e nautica in Trieste, pubblicato alla fine dell'anno scolastico 1896-97.* — Trieste, Herrmanstorfer.

Questo prospetto contiene oltre i programmi d'insegnamento di quell'importante accademia e la cronaca dell'anno scolastico, una interessante biografia del celebre scienziato e violinista Giuseppe Tartini scritta dal prof. Giorgio Benedetti, e un curioso lavoro inedito dello stesso Tartini, intitolato: *Scienza dei triangoli pitagorici dipendenti dai tre mezzi determinati dalle proporzioni geometriche, discrete di questa scienza di cui sono una parte integrante.*

Lo stesso prof. Benedetti presenta ai lettori l'articolo suddetto colle seguenti parole:

“ Dissi in quei miei studi (su Tartini) di un matematico punto dispregevole di questa città, che essendo stato per parecchi anni a Pirano, mercè la gentilezza del bibliotecario comunale, che gli aveva aperto i battenti del sacrario tartiniano, aveva potuto comporre un suo studio sulla scienza dei triangoli pi-



“ tagorici del Tartini, studio questo che poi ridotto e compendiato ebbe l'alto  
 “ onore di venire stampato nella Rivista dei Ginnasi Austriaci. Il Professore in  
 “ parola è il sig. Enrico Zavagna, che, da me pregato a volere stampare questo  
 “ suo studio, di 20 anni addietro, di buon grado accondiscese, che in questo pro-  
 “ gramma, non più in compendio, ma in tutta la sua interezza, potesse trovar  
 “ posto „

Il prof. Benedetti infine cita le seguenti parole del prof. Zavagna, alle quali  
 volentieri ci associamo. “ Sarebbe desiderabile che i manoscritti del Tartini, an-  
 “ cora inediti, venissero tolti dalla polvere della biblioteca, poichè contengono  
 “ importantissime ricerche nel campo della matematica e della fisica „

---

## ASSOCIAZIONE “ MATHESIS „

---

L'Associazione *Mathesis* pubblicò per due volte il suo Bollettino nel  
 decorso anno sulle pagine di questo giornale. Nell'anno attuale l'Asso-  
 ciazione, resasi indipendente dal *Periodico*, ha pubblicato separatamente  
 i fascicoli 3 e 4. In essi, oltre le notizie interessanti i Soci, si trovano  
 un elenco delle pubblicazioni matematiche recenti, fatte sul catalogo quin-  
 dicinale della Biblioteca Nazionale di Firenze, una rubrica destinata a  
 raccogliere quanto di notevole o di interessante per la matematica ele-  
 mentare si trova in libri o periodici italiani ed esteri, i programmi da  
 insegnamento per la matematica nelle Scuole secondarie estere (per ora  
 di Svizzera e Francia), le relazioni sui lavori dell'Associazione rappre-  
 sentati da adunanze, da risposte alle questioni del Comitato, da memo-  
 riali al Ministero, e infine articoli originali dei Soci.

Il N. 4 contiene già le relazioni sulle risposte spedite dai Soci alla  
 questione II (V. N. 1 del Bollettino) “ Modificazioni da portarsi nei  
 vigenti programmi per l'insegnamento scientifico nelle scuole medie, af-  
 finchè quello di matematica riesca maggiormente coordinato con quello  
 delle scienze affini „ e alla questione VI (ivi) “ Se e come convenga mo-  
 dificare e completare l'insegnamento della matematica attualmente impar-  
 tito nelle scuole secondarie, e specialmente nei Licei, per ottenere un  
 migliore ordinamento con la facoltà di matematica pura ed applicata „.  
 Contiene anche il Memoriale spedito all'on. Ministro dal Comitato; nel  
 quale sono chieste alcune riforme nell'insegnamento della matematica  
 nelle scuole secondarie, suggerite dalle risposte alle questioni del Comi-  
 tato indicate dai Soci. Le riforme domandate sono: che nelle scuole se-  
 condarie classiche sia data alla matematica l'importanza che le spetta,  
 e che nei Licei, alleggerito il programma per la comune degli studenti,  
 sia istituito un corso complementare per i soli iscrivendi alle facoltà  
 scientifiche universitarie, e negli Istituti tecnici sia alleggerito e meglio  
 distribuito il programma della sezione fisico-matematica; che nel Liceo  
 la materia comune a tutti gli studenti si svolga entro i primi due anni;  
 che dell'aritmetica razionale una parte sia tolta al Ginnasio ed al 1°



anno d'Istituto e portata al Liceo ed al 2° biennio d'Istituto; che sia modificato il programma di geometria nel Ginnasio; che sia resa possibile nell'insegnamento della geometria la scelta fra il metodo della separazione e quello della fusione della planimetria e stereometria; che sia ripristinata la prova scritta di matematica almeno negli esami di Licenza.

I N. 3 e 4 del Bollettino portano inoltre i verbali delle adunanze, promosse dall'associazione e tenute fra professori soci e non soci, nelle quali si sono discusse le quistioni proposte dal Comitato: adunanze che hanno potuto aver luogo nella città di Palermo, Milano, Padova, Torino, Chieti, Firenze.

Nel N. 3 sono pubblicate due comunicazioni sulla questione VII relativa all'equivalenza, una del prof. CIAMBERLINI, il quale propone di sostituire al postulato del Giudice «ogni sfera è finita» l'altro «esistono un triangolo e un tetraedro finito» che apparisce più semplice, e che è sufficiente per trattare la teoria dell'equivalenza — l'altra del prof. SERANA nella quale l'autore stabilisce che, a parer suo, i postulati necessari alla teoria delle grandezze, in un corso elementare di Geometria, sono quelle della rovesciabilità dell'angolo, quello sull'equivalenza dei solidi, e quello d'Archimede sui segmenti, e suggerisce come definizione d'equivalenza quello da lui data già nel 1894, che cioè due grandezze si dicano equivalenti, se possono decomporre in modo che ogni parte dell'una abbia la sua corrispondente uguale nell'altra e reciprocamente, sia finito od infinito il numero di queste parti.

Nel N. 4 col titolo «Un appunto agli attuali programmi di matematica del 1° biennio degli Istituti Tecnici» il prof. SFORZA propone una miglior distribuzione delle materie nell'Istituto tecnico per evitare gli inconvenienti che si hanno ora nell'insegnare la teoria delle proporzioni fra grandezze senza ricorrere al concetto di rapporto, mentre dalle Scuole tecniche i giovanetti escono conoscendo le proporzioni numeriche. Il professor BETTAZZI in un suo articolo che risponde alla questione VII suggerisce che per evitare le difficoltà della trattazione della teoria dell'equivalenza nella scuola, si definiscano equivalenti due enti, che siano o somma di enti uguali - o differenza di enti uguali - o equisummultipli di enti uguali - o equivalenti ad uno stesso ente per una di tali ragioni - o somma, differenza, equimultipli, equisummultipli, o equivalenti di enti già riconosciuti equivalenti: e che si scansi il concetto di limite facendo comparire le grandezze, nelle quali esso si suole usare come somme di infinite grandezze. Riferiamo la definizione di equivalenza proposta dal Prof. Bettazzi, ma non l'approviamo affatto, poichè ci sembra della stessa natura di questa evidentemente assurda. *Si chiama parallelogrammo un quadrangolo che ha ogni lato parallelo al suo opposto, oppure che ha ogni lato eguale al suo opposto, oppure che ha ogni angolo eguale al suo opposto, oppure che ha due lati opposti eguali e paralleli, oppure che ha le diagonali che si dividono scambievolmente per metà.*

---

GIULIO LAZZERI — Direttore responsabile

Finito di stampare il 10° Novembre 1897.