costituiscono il tetraedro richiesto. Il 3° tetraedro del sistema desmico è quello dei 4 centri di omologia di ABCD, OO'O''O'''. Tenendo conto di ciò che si è detto nel numero precedente, risulta pure la seguente costruzione del sistema desmico coniugato. In ogni spigolo del tetraedro ABCD si trovi un punto di appoggio di una delle tre rette OO', OO'', OO''', si costruisca di questo punto il coniugato armonico rispetto agli estremi dello spigolo; si otterranno così 6 punti, che, insieme ai 6 punti di appoggio, costituiscono i vertici dei tre tetraedri del sistema coniugato.

GENEROSO GALLUCCI.

UN TEOREMA ANALOGO A QUELLO DI SIMSON

1. — È notissimo il seguente teorema dovuto a Simson: (*)

« *Il luogo dei punti del piano di un triangolo tali che le loro proiezioni ortogonali sui tre lati sieno in linea retta,* (**) *è il circolo circoscritto al triangolo* ». (***)

In questa breve nota io mi propongo di dimostrare un teorema che col precedente ha assai analogia:

« *Il luogo dei punti del piano di un parallelogrammo, tali che le loro proiezioni ortogonali sui quattro lati sieno concicliche, è l' iperbole equilatera circoscritta al parallelogrammo* ».

Sia infatti ABA'B' il parallelogrammo dato: si riferisca la figura ad un sistema di assi cartesiani ortogonali di cui l'asse x sia la bisettrice della striscia (B'A, A'B) e l'origine sia nel centro del parallelogrammo.

Evidentemente le equazioni dei lati saranno:

$$\begin{array}{ll} \text{B'A)} & y = k \\ \text{A'B)} & y = -k \\ \text{AB)} & y = mx + n \\ \text{A'B')} & y = mx - n \end{array}$$

e perciò le proiezioni ortogonali di un punto qualunque $P \equiv (x, y)$ del piano su questi lati avranno rispettivamente per coordinate:

$$(1)\left\{\begin{array}{l} (x, k);\quad (x, -k) \\ \left(\dfrac{x+my-mn}{1+m^2},\ \dfrac{mx+m^2y+n}{1+m^2}\right);\quad \left(\dfrac{x+my+mn}{1+m^2},\ \dfrac{mx+m^2y-n}{1+m^2}\right) \end{array}\right.$$

(*) Da alcuni è attribuito invece a WALLACE.

(**) La retta che contiene le tre proiezioni è detta anche " *retta di* SIMSON ". È noto come essa inviluppi una *ipocicloide tricuspide;* anzi questa quartica che gode di tante belle proprietà e che può immaginarsi generata in tanti modi diversi, fu studiata la prima volta da STEINER sotto questo aspetto nella classica memoria " *Ueber eine besondere Curve dritten Klassen und vierten Ordnung.* " (Journ. f. die reine etc., von CRELLE, 1857).

(***) Per una generalizzazione di questo teorema vedasi la recente nota di M. GRAND. (*Journ. de math. élém. de* MARIAUD, 1898)

L'equazione del luogo dei punti (x, y), tali che le loro proiezioni ortogonali sui lati del parallelogrammo sieno concicliche, sarà perciò:

$$\begin{vmatrix} x^2+k^2 & x & k & 1 \\ x^2+k^2 & x & -k & 1 \\ (x+my)^2+n^2 & x+my-mn & mx+m^2y+n & 1+m^2 \\ (x+my)^2+n^2 & x+my+mn & mx+m^2y-n & 1+m^2 \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$m^2(x^2-y^2)-2m\,xy+k^2(1+m^2)-n^2=0 \tag{2}$$

la quale rappresenta un'iperbole equilatera.

Alla (2) può darsi ancora un'altra forma; supponendo che sia:

$$A \equiv (a, k),\ B \equiv (b, -k),\ A' \equiv (-a, -k),\ B' \equiv (-b, k),$$

senza difficoltà si trova, sia analiticamente, sia con considerazioni geometriche:

$$m=\frac{2k}{a-b};\quad n=\frac{k(a+b)}{a+b}$$

e quindi la (2) diviene:

$$x^2-y^2-\frac{a-b}{k}xy+k^2-ab=0. \tag{3}$$

Osserviamo ora che l'equazione generale di un'iperbole equilatera avente il centro nell'origine è

$$x^2-y^2+2\lambda xy+\mu=0. \tag{4}$$

Le due indeterminate λ, μ assumeranno valori fissi quando sieno conosciuti due punti dell'iperbole. Se questa deve passare per i due vertici A e B del parallelogrammo dato (e per conseguenza anche per i simmetrici A',B'), indicando con $f(x, y)$ il primo membro della (4), dovremo avere:

$$f(a, k)=a^2-k^2+2ak\lambda+\mu=0$$
$$f(b, -k)=b^2-k^2-2bk\lambda+\mu=0$$

dalle quali si ha

$$\lambda=-\frac{a-b}{2k};\quad \mu=k^2-ab.$$

La (4) dunque in tal caso diviene identica alla (3) e perciò resta dimostrato il teorema propostoci.

Se il parallelogrammo dato è un rettangolo l'iperbole (3) ha gli assi paralleli ai lati; se invece è un rombo la (3) degenera in una coppia di rette ortogonali e precisamente nelle diagonali del rombo stesso. (Ciò può anche dimostrarsi direttamente per via geometrica con grande facilità).

Osserviamo ora che l'equazione del circolo su cui giacciono le quattro proiezioni ortogonali di un punto $x_1\,y_1$ della (2) (3) sui lati del parallelogrammo, per le (2), e quando si tenga conto dell'identità

$$(x_1+my_1)^2+n^2=(x_1^2+k^2)(1+m^2),$$

che vale in forza della (2), resulta

$$x^2 + y^2 = x^2_1 + k^2$$

la quale equazione mostra che tutti i circoli che si ottengono per gli infiniti valori di x_1 sono concentrici nel centro del parallelogrammo.

2. — Il teorema ora dimostrato può anche enunciarsi:

« *Il luogo dei punti tali che i prodotti delle loro distanze dai lati opposti di un parallelogrammo sieno eguali, è l' iperbole equilatera circoscritta al parallelogrammo* ».

Posto sotto questa forma, il teorema può ancora dimostrarsi nel seguente modo:

Assumiamo per assi coordinati le bisettrici delle striscie formate dai lati opposti del parallelogrammo e sia ω l'angolo delle direzioni positive. Si ha che le distanze di un punto (x, y) qualunque del piano dai lati del parallelogrammo, quando a queste distanze si attribuisca un conveniente segno, sono:

$$(y-p) \operatorname{sen} \omega\,, \quad (x-q) \operatorname{sen} \omega\,,$$
$$(y+p) \operatorname{sen} \omega\,, \quad (x+q) \operatorname{sen} \omega\,,$$

dove $2p$, $2q$ indicano le lunghezze dei lati.

Perciò l'equazione del luogo cercato sarà

$$y^2 - p^2 = x^2 - q^2. \tag{5}$$

Se cambiamo l'asse y, prendendo per nuovo asse Y la perpendicolare condotta all'asse x nell'origine, cioè riconducendoci al sistema prima considerato, avremo le formole di trasformazione:

$$x = \mathrm{X} - \mathrm{Y} \operatorname{cotg} \omega$$
$$y = \mathrm{Y} \operatorname{cosec} \omega$$

per le quali la (5) diviene

$$\mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2 - 2\mathrm{X}\mathrm{Y} \operatorname{cotg} \omega + p^2 - q^2 = 0 \tag{6}$$

e quando si osservi che

$$q = \frac{n}{\operatorname{tg} \omega} = \frac{n}{m}$$
$$p = \frac{k}{\operatorname{sen} \omega} = \frac{k(1+m^2)}{m}$$

dove k, m, n hanno il significato loro attribuito nel n. 1, la (6) si potrà scrivere anche:

$$\mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2 - \frac{2}{m}\mathrm{X}\mathrm{Y} + \frac{k^2(1+m^2)}{m^2} - \frac{n^2}{m^2} = 0$$

e, moltiplicando il 1° membro per m^2, la precedente diviene identica alla (2).

Questo teorema potrebbe ancora dimostrarsi facilmente per via geometrica.

GIULIO CARDOSO-LAYNES.

SULLA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI NUMERICHE
di terzo e di quarto grado

Il signor A. C. Burnham di Berlino in una nota inserita nell'*American Mathematical Monthly* (*) si occupa delle radici complesse delle equazioni e ne trae conseguenze notevoli. La lettura di tale nota mi ha suggerito un metodo, in generale semplice e facile, per la risoluzione delle equazioni numeriche del 3° e del 4° grado, siano esse incomplete o complete, e che trovo opportuno esporre, quantunque di tali metodi ve ne siano parecchi di notevoli, che portano tuttora i nomi di illustri matematici, quali Cardano, Descartes, Waring, Simpson ed Eulero, tanto più perchè mi si offre così l'occasione di applicare qualcuno dei metodi conosciuti per la determinazione approssimata di una radice reale di una equazione.

I. **Equazione cubica.** — Consideriamo una equazione cubica completa e nella sua forma più semplice

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Si sa dall'Algebra complementare che una equazione di grado dispari ha almeno una radice reale; per la (1) tale radice sia α. Le altre due radici potranno essere reali o complesse, nel qual caso saranno complesse coniugate. Consideriamo separatamente i due casi.

Caso 1°. — Siano $\alpha, \alpha', \alpha''$ le tre radici reali della (1). Sappiamo che i coefficienti di una equazione numerica, data nella sua forma più semplice, sono funzioni simmetriche delle sue radici, e precisamente che il coefficiente del secondo termine col suo segno mutato è uguale alla somma delle radici, che il coefficiente del terzo termine è uguale alla somma dei prodotti delle radici prese a due a due, ecc. Applicando queste proprietà al caso nostro si ottengono le relazioni

$$\begin{cases} \alpha + \alpha' + \alpha'' = -a, \\ \alpha(\alpha' + \alpha'') + \alpha'\alpha'' = b, \\ \alpha\alpha'\alpha'' = -c, \end{cases} \tag{2}$$

nelle quali α, α', α' sono quantità incognite.

Supposto che α sia determinato, si hanno per α' e per α'' le seguenti formole:

$$\begin{cases} \alpha' = -\frac{1}{2}\left\{(a+\alpha) + \sqrt{(a+\alpha)^2 + \frac{4c}{\alpha}}\right\}, \\ \alpha'' = -\frac{1}{2}\left\{(a+\alpha) - \sqrt{(a+\alpha)^2 + \frac{4c}{\alpha}}\right\}, \end{cases} \tag{3}$$

che servono a determinarle.

Esempio. — Si debba risolvere l'equazione:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 7x + 60 = 0.$$

(*) *The American Mathematical Monthly* edited by B. F. Finkel (Springfield-Missouri) and J. M. Colaw (Monterey-Virginia). Vol. IV, Nos 8-9, August-September, 1897, page 201.

Si ha subito: $a = -6$, $b = -7$, $c = 60$. L'equazione data ha una radice reale negativa, perchè il coefficiente del termine di 3° grado è 1 ed il termine noto è positivo; cerchiamo tale radice applicando la regola che l'Algebra complementare dà per calcolare i valori di una funzione, quando all'incognita si attribuiscano differenti valori.

Applicando la regola di Ruffini si trova: $f(-1) = 60$, $f(-2) = 42$, $f(-3) = 0$; quindi è $\alpha = -3$. Applicando le formole (3) si ottiene facilmente:

$$\alpha' = 4 \text{ e } \alpha'' = 5.$$

Caso 2°. — La radice α sia reale; le altre due siano complesse; indichiamole con $\beta + \gamma i$ e $\beta - \gamma i$, essendo, come di solito, $i = \sqrt{-1}$.

In questo caso il sistema (2) diventa:

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha + 2\beta = -a, \\ \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta = b, \\ \alpha(\beta^2 + \gamma^2) = -c. \end{cases}$$

Dalla prima e dalla terza di queste equazioni si ricava:

$$(5) \qquad \alpha = -(a + 2\beta) \quad , \quad \beta^2 + \gamma^2 = -\frac{c}{\alpha} = \frac{c}{a + 2\beta};$$

sostituendo nella seconda delle (4) e riducendo si ha:

$$(6) \qquad 8\beta^3 + 8a\beta^2 + 2(a^2 + b)\beta + (ab - c) = 0.$$

Dalla terza delle (4) si ha: $\gamma^2 = -\frac{c}{\alpha} - \beta^2$; tenendo conto della prima delle (5), sostituendo e riducendo si ottiene:

$$\gamma^2 = \frac{c - a\beta^2 + 2\beta^3}{a + 2\beta};$$

dalla prima delle (4) si ricava pure:

$$(7) \qquad \beta = -\frac{1}{2}(a + \alpha);$$

quindi si può anche scrivere:

$$\gamma^2 = \frac{-c - \frac{1}{4}(a + \alpha)^2\alpha}{\alpha};$$

perciò si hanno per γ le relazioni:

$$(8) \qquad \gamma = \pm\sqrt{-\frac{c}{\alpha} - \beta^2} = \pm\sqrt{\frac{c - a\beta^2 + 2\beta^3}{a + 2\beta}} = \pm\sqrt{\frac{-c - \frac{1}{4}(a + \alpha)^2\alpha}{\alpha}}.$$

Per mezzo delle relazioni (5), (6), (7) e (8) si possono calcolare, con quel grado di approssimazione che si desidera, i valori di α, β e γ, e con ciò quelli delle tre radici della (1). Cioè, determinata per tentativi o con uno qualunque dei metodi di approssimazione che offre l'Algebra complementare la radice reale α della equazione (1), per mezzo della (7) e di una qualunque delle (8) possiamo determinare facilmente β e γ, e quindi anche $\beta + \gamma i$ e $\beta - \gamma i$. Analogamente possiamo determinare la radice reale β della (6) e con semplici sostituzioni ottenere α e γ dalla prima delle (5) e da una qualunque delle (8).

Osservazione. — Dalle (8) risulta che γ può avere due valori uguali e contrari; ciò non offre ambiguità, poichè nei valori delle radici della (1) la quantità γ è presa una volta come positiva ed una volta come negativa.

Esempio. — Consideriamo l'equazione:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 4 = 0.$$

Si ha $a = -5$, $b = 6$, $c = -4$. Determiniamo fra quali valori interi è compresa la radice reale positiva α. Applicando la regola di Ruffini si trova $f(1) = -2$, $f(2) = -4$, $f(3) = -4$, $f(4) = 4$.

Essendo dunque: $f(3) < 0$ ed $f(4) > 0$, la radice cercata è compresa fra 3 e 4. Calcoliamola per approssimazione col metodo di Lagrange.

Avendosi

$$f(3) = 4, \quad f'(3) = 3 \quad \frac{1}{2} f''(3) = 4,$$

l'equazione ausiliaria in y, avendo posto: $x = 3 + \frac{1}{y}$, è:

$$-4y^3 + 3y^2 + 4y + 1 = 0,$$

e riducendo alla forma più semplice

$$\varphi(y) = y^3 - \frac{3}{4} y^2 - y - \frac{1}{4} = 0.$$

Anche questa equazione ha una radice reale positiva, che si trova facilmente essere compresa fra 1 e 2. Si ha quindi:

$$\varphi(1) = -1, \ \varphi'(1) = \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}\varphi''(1) = \frac{9}{4};$$

perciò l'equazione ausiliaria in z, avendo posto $y = 1 + \frac{1}{z}$, è

$$-z^3 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{9}{4} z + 1 = 0,$$

ossia anche:

$$\psi(z) = z^3 - \frac{1}{2} z^2 - \frac{9}{4} z - 1 = 0.$$

La radice reale positiva di $\psi(z) = 0$ è compresa fra 1 e 2; inoltre si ha

$$\psi(1) = -\frac{11}{4}, \ \psi'(1) = -\frac{1}{4}, \ \frac{1}{2}\psi''(1) = \frac{5}{2}.$$

L'equazione ausiliaria in u, ponendo $z = 1 + \frac{1}{u}$, è

$$-\frac{11}{4} u^3 - \frac{1}{4} u^2 + \frac{5}{2} u + 1 = 0,$$

ossia:

$$\chi(u) = u^3 + \frac{1}{11} u^2 - \frac{10}{11} u - \frac{4}{11} = 0,$$

di cui la radice reale positiva è compresa ancora fra 1 e 2. Avendosi:

$$\chi(1) = -\frac{2}{11}, \ \chi'(1) = \frac{25}{11}, \ \frac{1}{2}\chi''(1) = \frac{34}{11};$$

e ponendo $u = 1 + \frac{1}{v}$, si ottiene l'equazione ausiliaria:

$$v^3 - \frac{25}{2} v^2 - 17v - \frac{11}{2} = 0,$$

della quale la radice reale positiva è compresa fra 13 e 14. Si ha quindi per i risultati ottenuti e per approssimazione:

$$\alpha = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{13 + \dots}}}} = 3{,}6585.$$

Le convergenti corrispondenti a questa frazione continua che dà il valore di α sono 3, 4, $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{3}$; e $\frac{150}{41}$; la differenza fra $\frac{150}{41} = 3{,}6585$ e il valore esatto della radice α è minore di $\frac{1}{41\,(41+3)} = \frac{1}{1804}$; qualora questa approssimazione non fosse sufficiente, basterebbe seguitare ancora nel calcolo delle equazioni ausiliarie.

Dalla (7) e dalla (8) si ha:

$$\beta = -\frac{1}{2}(-5 + 3{,}6585) = 0{,}67075,$$

$$\gamma = \pm\sqrt{-\frac{-4}{3{,}6585} - (0{,}67075)^2} = \pm\sqrt{0{,}64343871} = \pm\, 0{,}80214.$$

Le radici cercate sono dunque

$$3{,}6585;\ 0{,}67075 + i\,.\,0{,}80214 \ \text{ e } \ 0{,}67075 - i\,.\,0{,}80214.$$

Nota. — Riesce un po' lungo il calcolo per determinare la radice reale dell'equazione data o della (6); ma una volta che questa in casi particolari si conosca o si possa determinare facilmente, le altre due radici si hanno subito con semplici operazioni aritmetiche. Data ad esempio l'equazione:

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = 0,$$

la (6) dà: $8\beta^3 + 27\beta^2 = 0$, ossia: $\beta - 3 = 0$, da cui $\beta = 3$; e si ha così molto semplicemente: $\alpha = -3$, $\gamma = 0$.

(continua) PROF. UMBERTO CERETTI.

SULLE QUISTIONI 293 E 398

(T. X (1895), pag. 186; — T. XIII (1898), pag. 47-48 e pag. 84).

Se P è la proiezione ortogonale di O sul piano $\pi \equiv (ABC)$ e α, β, γ, sono gli angoli POA, POB, POC, la notissima relazione

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

può scriversi

$$(1)\qquad \frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{1}{\overline{OB}^2} + \frac{1}{\overline{OC}^2} = \frac{1}{\overline{OP}^2},$$

ma dal triangolo OMM' abbiamo $\overline{OM}^2 - \overline{OM'}^2 = 2\,\overline{MM'}\,.\,OP$, dunque

$$\frac{(2\,MM')^2}{(OM^2 - OM'^2)^2} = \frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{1}{\overline{OB}^2} + \frac{1}{\overline{OC}^2},$$

che è la relazione proposta a dimostrare nella quistione 293.

Quanto alla relazione della quistione 398, nella quale per O deve intendersi il centro di proiezione, esprime esattamente la stessa cosa, perchè il triedro O (ABC) è trirettangolo in O, e il raggio R del cerchio di distanza non è altro che OP.

Profitto di questa occasione per fare una osservazione, che non sembra priva d'interesse: i sigg. Scharp e Marks (*) analiticamente ed io, geometricamente, (**) abbiamo dimostrato che se ρ, ρ_a, ρ_b, ρ_c, sono i raggi di quattro cerchi complanari e due a due ortogonali,

$$\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho_a^2}+\frac{1}{\rho_b^2}+\frac{1}{\rho_c^2}=0, \tag{2}$$

ma il triangolo ABC è autopolare rispetto al cerchio imaginario K_p^2 col centro P e il raggio $OP\sqrt{-1}=Ri$, ed i quattro cerchi (reali) ortogonali a K_p^2 e coi centri in A, B, C hanno ordinatamente per raggi OA, OB, OC, dunque, tenendo presente che i quattro cerchi nominati sono ortogonali due a due, la (2) può considerarsi come una notevole interpretazione planimetrica della relazione stereometrica (1).

V. Retali.

SUI SISTEMI PENTASFERICI ORTOGONALI

Se OAB è un Δ rettangolo in O, e P la proiezione ortogonale di O sopra AB il teorema Pitagorico esprime che i cerchi A^2, B^2 coi centri respettivamente in A, B e i raggi $\overline{OA}=\rho_a$, $\overline{OB}=\rho_b$, sono fra loro ortogonali; se scriviamo però il teorema Pitagorico nella forma

$$\left(\frac{1}{OA}\right)^2+\left(\frac{1}{OB}\right)^2+\left(\frac{1}{OP\,.\,i}\right)^2=0$$

e poniamo $OP\,.\,i=P$, abbiamo

$$\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho_a^2}+\frac{1}{\rho_b^2}=0\,,$$

che è la relazione che vige fra i raggi di tre cerchi appartenenti a uno stesso fascio e due a due ortogonali. Analogamente, se OABC è un tetraedro trirettangolo in O, e P la proiezione ortogonale di O sul piano $(ABC)\equiv\pi$, il teorema Pitagorico (stereometrico)

$$(BOC)^2+(COA)^2+(AOB)^2=(ABC)^2,$$

scritto nella forma

$$\left(\frac{1}{OA}\right)^2+\left(\frac{1}{OB}\right)^2+\left(\frac{1}{OC}\right)^2=\left(\frac{1}{OP}\right)^2,$$

esprime che, nel piano π, il cerchio K_p^2, di centro P e raggio $\rho=OP\,.\,\sqrt{-1}$, in-

(*) *Mathematical question, with their sol. from the Ed. Times* etc. vol. LI.

(**) *Sur le double contact et le contact quartiponctuel* etc. Mem. de la Soc. royale des sciences de Liège, 2ª serie T. XVIII, § 8.

sieme ai tre cerchi A^2, B^2, C^2, coi centri respettivi in A, B, C e i raggi $OA = \rho_a$, $OB = \rho_b$, $OC = \rho_c$, forma un sistema di quattro cerchi due a due ortogonali, ed equivale perciò alla relazione

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho_a^2} + \frac{1}{\rho_b^2} + \frac{1}{\rho_c^2} = 0,$$

che lega i raggi di quattro cerchi complanari e due a due ortogonali: ognuno dei quattro cerchi ammette per triangolo autopolare quello formato dai centri degli altri tre: due cerchi qualunque della quaterna si segano in due punti reciproci rispetto agli altri due ecc. (Cfr. la mia nota precedente sulle questioni 293 e 398).

Consideriamo ora un tetraedro reale ABCD $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ coniugato rispetto ad una sfera reale Σ^2 di centro R e raggio ρ: sia A il vertice interno a Σ^2, e denotino $\rho_a, \rho_b, \rho_c, \rho_d$, i raggi delle quattro sfere $A^2, B^2, \Gamma^2, \Delta^2$, ortogonali a Σ^2 e coi centri respettivi nei punti A, B, C, D; queste quattro sfere, delle quali la prima A^2 è immaginaria, segano ordinatamente Σ^2 sui piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, e si segano fra di loro tre a tre in coppie di punti reciproci rispetto a Σ^2; di più ognuna di esse è coniugata rispetto al tetraedro che ha per vertici R e i centri delle altre tre. Poichè le cinque sfere $\Sigma^2, A^2, B^2, \Gamma^2, \Delta^2$ figurano in modo simmetrico nel gruppo, le proprietà indicate per le ultime quattro rispetto a Σ^2, valgono naturalmente per ogni quaderna considerata in rispetto alla quinta sfera, e si potrebbero enunciare semplicemente mutando le notazioni e distinguendo le cinque sfere con indici.

Le tre sfere B^2, Γ^2, Δ^2 si seghino nei due punti A_1, A_2 (reali) reciproci rispetto a Σ^2 e situati sul raggio $|RA| \equiv a$, normale al piano $[BCD] \equiv \alpha$: il triedro $A_1(BCD)$ è trirettangolo in A_1, perchè A_1 essendo comune per es. alle due sfere ortogonali B^2 e Γ^2, l'angolo BA_1C è retto, se dunque poniamo $(a\,\alpha) \equiv P$ avremo:

$$(1) \qquad \left(\frac{1}{A_1P}\right)^2 = \left(\frac{1}{A_1B}\right)^2 + \left(\frac{1}{A_1C}\right)^2 + \left(\frac{1}{A_1D}\right)^2 = \frac{1}{\rho_b^2} + \frac{1}{\rho_c^2} + \frac{1}{\rho_d^2},$$

se ora è M il punto di contatto con Σ^2 di una tangente uscente da P, e μ la proiezione di M sopra la $a \equiv |RA|$, dal triangolo rettangolo PMR si ha

$$\frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{1}{PM}\right)^2 = \left(\frac{1}{M\mu}\right)^2,$$

la quale, osservando che $\overline{A_1P} = \overline{PM}$ e che il raggio ρ_a della sfera A^2 è $\overline{M\mu}\,.\sqrt{-1}$, può scriversi

$$(2) \qquad -\frac{1}{\rho_a^2} = \frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{1}{A_1P}\right)^2;$$

sommando membro a membro le (1), (2) otteniamo finalmente

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho_a^2} + \frac{1}{\rho_b^2} + \frac{1}{\rho_c^2} + \frac{1}{\rho_d^2} = 0.$$

Abbiamo così dimostrato geometricamente la relazione importante che lega i raggi di cinque sfere due a due fra di loro ortogonali, e chiarito come tal relazione possa considerarsi in un certo senso, quale una naturale estensione del teorema Pitagorico.

V. Retali.

SULLA RISOLUZIONE DI ALCUNE EQUAZIONI
del terzo e quarto grado

I. — Equazioni del terzo grado.

1. Accenneremo qui brevemente a due classi particolari di equazioni: *a quelle a radici in progressione per differenza e a quelle a radici in progressione per quoziente*, facilmente risolvibili usando delle funzioni simmetriche delle radici.

a) Equazioni a radici in progressione per differenza.

2. Sia

(1) $$f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

l'equazione nella sua forma generale, e x_1, x_2, x_3 dinotino le radici. Sarà

(α) $$\Sigma x_1 = -A\,,\ \Sigma x_1 x_2 = B\,,\ x_1 x_2 x_3 = -C.$$

Ma $x_2 = x_1 + d$, $x_3 = x_1 + 2d$ (essendo d la differenza), e perciò dalla prima delle (α) risulterà

$$x_2 = -\frac{A}{3}.$$

Determinato x_2 l'equazione potrà essere abbassata di un grado e quindi tosto risoluta.

3. Osserviamo intanto che per questa classe di equazioni, se si passa alla trasformata, si trova una forma semplicissima, perchè posto nella (1)

(β) $$x = y + h$$

è

$$h = \frac{\Sigma x_1}{3} = -\frac{A}{3} = x_2.$$

cioè $y = 0$ radice: si deve perciò avere

$$y^3 + ny = 0.$$

Ciò segue infatti direttamente, perchè, sostituendo nella (1) il valore di x dato dalla (β) e raccogliendo, si ha

(1)' $$y^3 + (B - 3x_2^2)\,y + (Bx_2 - 2x_2^3 + C) = 0.$$

Sviluppando il coefficiente di y e il termine noto secondo le (α), e sostituendo poi $x_2 - d$ ad x_1 e $x_2 + d$ ad x_3, risulta

(γ) $$\begin{cases} B - 3x_2^2 = -d^2 \\ Bx_2 - 2x_2^3 + C = 0. \end{cases}$$

E quindi per la trasformata si ha la formola generale

(2) $$y^3 - d^2 y = 0.$$

Se è $d = 0$, le radici sono tutte e tre eguali, e la (2) mostra tosto come per tale caso essa si riduca alla nota forma $y^3 = 0$.

Questo caso, riportato all'equazione primitiva (1)', è espresso dalla coesistenza delle relazioni $3B = A^2$ (ricavata dalla prima delle (γ)) e $C = \left(\frac{A}{3}\right)^3$.

4. Le considerazioni precedenti valgono qualunque sia la natura delle radici e qualunque sia d, cioè nullo, complesso o reale, e perciò esse ci porgono un mezzo facile per risolvere tutta una classe di equazioni.

Se d è reale (essendo x_1 pure reale) esse risolvono il *caso particolare importante di radici reali, disegnali, in progressione per differenza*, caso che, trattato con la formola di Cardano, non si potrebbe risolvere, conducendo, come è noto, all'*irriducibile*.

5. La condizione a cui devono soddisfare i coefficienti delle equazioni a radici in progressione per differenza, qualunque sia la natura di queste, si potrebbe ricavare dalle relazioni (α). Tale condizione però risulta anche, e più semplicemente, dalla seconda delle (γ), corrispondente ad $r = 0$ nella trasformata generale

$$(\delta)\qquad x^3 + qx + r = 0.$$

Ponendo in essa $-\frac{A}{3}$ al posto di x_2 si ha la condizione espressa da

$$(3)\qquad 2\left(\frac{A}{3}\right)^3 - \frac{AB}{3} + C = 0.$$

6. Che questa relazione sia tale da permetterci di conchiudere, ove sia soddisfatta, che l'equazione rientra nella classe a radici in progressione per differenza, si può anche provare direttamente. Posto infatti che essa abbia luogo, si ha

$$\frac{2}{27}(x_1 + x_2 + x_3)^3 - \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + x_1x_2x_3 = 0.$$

Dividendo per $(x_1 + x_2 + x_3)$, sviluppando e riducendo, si ottiene

$$(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 = 3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - \frac{27\, x_1 x_2 x_3}{x_1 + x_2 + x_3}.$$

Ponendo $x_2 - x_1 = d$, ciò che dà $x_1 = x_2 - d$, sviluppando e riducendo, risulta

$$2(x_3 - x_2)^3 + 3d(x_3 - x_2)^2 - 3d^2(x_3 - x_2) - 2d^3 = 0.$$

E facendo $x_3 - x_2 = z$, è

$$(4)\qquad 2(z^3 - d^3) + 3dz(z - d) = 0;$$

equazione che evidentemente ammette la radice $z = d$. Dividendola per $z - d$ essa riducesi a

$$2z^2 + 5dz + 2d^2 = 0.$$

Da questa si ricava $z = \frac{-5 \pm 3}{4} d$, e quindi quali radici della (4) si hanno

$$z_1 = -2d, \qquad z_2 = d, \qquad z_3 = -\frac{1}{2}d.$$

Ma ponemmo $d = x_2 - x_1$, $z = x_3 - x_2$, e perciò sostituendo risulta

$$(5)\qquad x_1 = \frac{x_2 + x_3}{2}, \qquad x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}, \qquad x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Osserviamo che, in generale, una sola di queste relazioni sarà soddisfatta, perchè se contemporaneamente lo fossero due, seguirebbe $x_1 = x_2 = x_3$; caso affatto speciale e corrispondente al valore particolare $z = d = 0$.

Qualunque sia delle (5) la relazione soddisfatta, le radici sono in progressione per differenza, come si disse.

7. Volendo limitarsi al *caso di radici reali e diseguali*, è d'uopo ricordare che la condizione della realtà e diseguaglianza loro in (δ) è data da

$$\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}<0.$$

Riportandoci alla nostra trasformata (1)', questa condizione prende la forma

$$\frac{1}{4}\left[2\left(\frac{A}{3}\right)^3-\frac{AB}{3}+C\right]^2+\frac{1}{27}\left(B-\frac{A^2}{3}\right)^3<0.$$

e se la (3) ha luogo, essa riducesi a

(6) $$3B-A^2<0,$$

corrispondente alla $q<0$ della precedente forma (δ).

La coesistenza della (3) *e della* (6) *è adunque la condizione necessaria e sufficiente affinchè le tre radici sieno in progressione per differenza, reali e diseguali.*

Esempi. — 1°. Sia l'equazione

$$f(x)=x^3-6x^2+21x-26=0.$$

I suoi coefficienti soddisfano alla (3), ma non alla (6). Segue quindi

$$x_2=-\frac{A}{3}=2$$

$$f(x)=(x^2-4x+13)(x-2).$$

E quali radici dell'equazione proposta si ha

$$x_1=2-3i,\quad x_2=2,\quad x_3=2+3i,$$

essendo $d=3i$.

Per la trasformata si sarebbe ottenuto

$$y^3+9y=0.$$

2°. Sia l'equazione

(1) $$f(x)=27x^3+135x^2+189x+65=0.$$

Ridotta alla forma

$$x^3+5x^2+7x+\frac{65}{27}=0,$$

si ha che i suoi coefficienti soddisfano alle relazioni (3) e (6). E quindi

$$x_2=-\frac{A}{3}=-\frac{5}{3}$$

$$f(x)=\left(x^2+\frac{10}{3}x+\frac{13}{9}\right)\left(x+\frac{5}{3}\right).$$

E quali radici si ottiene

$$x_1=-\frac{5+2\sqrt{3}}{3},\ x_2=-\frac{5}{3},\ x_3=-\frac{5-2\sqrt{3}}{3},\ \text{in cui è } d=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Per la trasformata si sarebbe ottenuto

$$y^3-\frac{4}{3}y=0.$$

3°. Presi due numeri A e B tali da soddisfare alla (6), per es.: $-6=A$, $3=B$, e scelto C in modo da soddisfare alla (3) (facendolo in questo caso eguale a 10), si ha l'equazione

$$f(x)=x^3-6x^2+3x+10=0.$$

Risolvendola si trovano le radici

$$x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 5$$

in cui è $d = 3$.

b) Equazioni a radici in progressione per quoziente.

8. Se nell'equazione completa

(1) $$f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

facciamo $x = y - \frac{A}{3}$, otteniamo la trasformata

(2) $$y^3 + \left(B - \frac{A^2}{3}\right) y + \left(\frac{2}{27} A^3 - \frac{AB}{3} + C\right) = 0.$$

La sua risoluzione dipende, come è noto, dalla natura della quantità

(3) $$\Delta = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{27} A^3 - \frac{AB}{3} + C\right)^2 + \frac{1}{27}\left(B - \frac{A^2}{3}\right)^3,$$

corrispondente alla quantità

$$\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}$$

della trasformata generale $x^3 + qx + r = 0$; sarà quindi necessario fare su di essa qualche osservazione.

Sviluppando e riducendo si ottiene

(4) $$\Delta = \frac{1}{4 \cdot 27}(27C^2 + 4A^3C + 4B^3 - A^2B^2 - 18ABC).$$

Però, se r indica il rapporto esistente tra due radici successive, è

$$A^3C = B^3,$$

perchè

(α) $$-A = x_1(1 + r + r^2),\ B = x_1^2 r(1 + r + r^2),\ -C = x_1^3 r^3,$$

e sostituendo si ha

$$x_1^6 r^3 (1 + r + r^2)^3 = x_1^6 r^3 (1 + r + r^2)^3.$$

Quindi la (4) prende la forma

(5) $$\Delta = \frac{1}{4 \cdot 27}(27C^2 + 8B^3 - A^2B^2 - 18ABC).$$

Se ad A, B, C sostituiamo i loro valori e raccogliamo $x_1^6 r^6$, risulta

(6) $$\Delta = \frac{x_1^6 r^6}{4.27}\left\{27 + 8\left(\frac{1 + r + r^2}{r}\right)^3 - \left(\frac{1 + r + r^2}{r}\right)^4 - 18\left(\frac{1 + r + r^2}{r}\right)^2\right\};$$

quantità variabile con x_1 e con r. Abbiamo quindi:

1°. Se è $r = \pm 1$ l'espressione $\left(\frac{1 + r + r^2}{r}\right) = 1 + r + \frac{1}{r}$ riducesi a $+3$ oppure a -1.

Per tali valori la (6) è uguale allo 0.

Ciò conferma il noto caso di radici eguali dato da $\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27} = 0$ nella trasformata generale.

a) In particolare, se è $r = 1$, nella (2) si ha

$$B - \frac{A^2}{3} = 0,\quad \frac{2}{27} A^3 - \frac{AB}{3} + C = 0.$$

Donde deducesi tosto che la trasformata, trattandosi di *radici tutte e tre eguali, sieno esse reali o complesse*, prende la nota forma

$$y^3 = 0. \tag{7}$$

b) Se è $r = -1$, si hanno due radici eguali e la terza solo diversa nel segno. Per questo valore è

$$B - \frac{A^2}{3} = -\frac{4}{3}\left(\frac{B}{A}\right)^2, \quad \frac{2}{27}A^3 - \frac{AB}{3} + C = \frac{16}{27}C.$$

E quindi in questo caso la trasformata riducesi alla forma

$$y^3 - \frac{4}{3}\left(\frac{B}{A}\right)^2 y + \frac{16}{27}C = 0. \tag{8}$$

2°. Se è $r = a + bi$ si può avere: x_1 complesso e quindi tre radici complesse; e si può avere x_1 reale, cioè una radice reale e due complesse.

3°. Se è $r \gtrless 0$, esclusi i casi $r = \pm 1$ già considerati, ed x_1 è reale, si ha il *caso importante di radici in progressione per quoziente, reali e diseguali. Volendo applicare ad esso la formola cardanica si cadrebbe*, come è noto, *nell'irriducibile*, e tale fatto è reso tosto manifesto anche dalla (6).

Infatti per $r = \pm 1$ essa prende le forme

$$\Delta_1 = \frac{x_1^6}{4}(1 + 8 - 6 - 3), \quad \Delta_2 = \frac{x_1^6}{4{,}27}(27 - 8 - 18 - 1).$$

E poichè per $r \gtrless 0$, esclusi i valori $r = \pm 1$, l'espressione $\left(1 + r + \frac{1}{r}\right)$ assume valori > 3 oppure < -1, segue che Δ è minore di zero.

4°. Come caso particolare noteremo anche qui quello in cui nella posizione

$$x = y - \frac{A}{3}$$

per passare alla trasformata, si abbia $-\frac{A}{3} = x$, cioè radice. Per esso, come abbiamo trovato, risulta la forma

$$y^3 + ny = 0. \tag{β}$$

Dall'essere $A = -3x$, si ha $x(1 + r + r^2) = -3x$, cioè $r^2 + r - 2 = 0$, che dà $r_1 = 1$, $r_2 = -2$.

E quindi nei soli casi di $r = 1$, $r = -2$ (o ciò che è lo stesso $r = -\frac{1}{2}$, suo valore reciproco), si può avere la precedente forma (β).

Il caso $r = 1$ fu già considerato.

Per il caso $r = -2$ (avendosi per tale valore $1 + r + r^2 = 3$) abbiamo per le (α): $A = -3x_1$, $B = -6x_1^2$, $C = 8x_1^3$, e quindi

$$B - \frac{A^2}{3} = -9x_1^2, \quad \frac{2}{27}A^3 - \frac{AB}{3} + C = 0.$$

Analogamente: se è $r = -\frac{1}{2}$ si ha $1 + r + r^2 = \frac{3}{4}$, $A = -\frac{3}{4}x_1$, $B = -\frac{3}{8}x_1^2$, $C = \frac{x_1^3}{8}$, cioè $B - \frac{A^2}{3} = -\frac{9}{16}x_2^2$, $\frac{2}{27}A^3 - \frac{AB}{3} + C = 0$.

Per cui la forma della trasformata è la (β), essendo $n = -9x_1^2$ oppure

$$n = -\frac{9}{16}x_1^2.$$

5°. Per $r = x_1$ abbiamo il caso speciale di radici potenze successive di un numero.

9. La risoluzione delle equazioni appartenenti alla classe precedente, qualunque sia la natura delle radici loro, riesce facilissima ove si ricorra alle relazioni (α). Infatti da esse si ha

$$-\frac{B}{A}=\frac{\Sigma x_1 x_2}{\Sigma x_1}=\frac{x_1 r(x_1+x_1 r+x_1 r^2)}{(x_1+x_1 r+x_1 r^2)}=x_1 r=x_2\,,$$

e nota una radice l'equazione può esser abbassata di un grado e quindi tosto risoluta.

10. Prima però di passare alla risoluzione numerica, ricercheremo quale relazione deve esistere tra i coefficienti di queste equazioni. Abbiamo $-\frac{B}{A}=x_1 r$. Da ciò

$$x_1^3 r^3=-\left(\frac{B}{A}\right)^3.$$

Ma $x_1^3 r^3=-C$, quindi

$$C=\left(\frac{B}{A}\right)^3, \tag{1}$$

relazione facile a verificare.

11. Si perviene alla stessa passando per il valore di r. Infatti si ha

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} -A=x_1\,(1+r+r^2)\\ \quad B=x_1^2\,r\,(1+r+r^2)\\ -C=x_1^3\,r^3. \end{cases}$$

Dalla prima eguaglianza si ha $x_1=-\frac{A}{1+r+r^2}$, e sostituendo questo valore nelle successive e riducendo, risulta

$$\frac{A^2 r}{1+r+r^2}=B-\frac{A^3 r^3}{(1+r+r^2)^3}=-C,$$

donde

$$(2)\qquad \begin{cases} r^2-\dfrac{A^2-B}{B}\,r+1=0\\[2ex] r^2-\dfrac{A-\sqrt[3]{C}}{\sqrt[3]{C}}\,r+1=0. \end{cases}$$

Dalle quali equazioni si deduce

$$\frac{A^2-B}{B}=\frac{A-\sqrt[3]{C}}{\sqrt[3]{C}},\ \text{e quindi come precedentemente } C=\left(\frac{B}{A}\right)^3.$$

12. Osserviamo intanto che le due radici dell'equazione (2) sono reciproche, perchè il loro prodotto è 1.

È indifferente prendere l'uno o l'altro, perchè determinando x_2, ed ottenendosi le altre due radici da x_2 col moltiplicarla e dividerla per la ragione, i risultati sono scambiati solo di ordine.

13. La relazione

$$C=\left(\frac{B}{A}\right)^3$$

è tale che, ove i coefficienti di una data equazione la soddisfino, l'equazione appartiene alla classe di cui ci occupiamo, e quindi può essere tosto risoluta.

Infatti, se sussiste la $C = \left(\frac{B}{A}\right)^3$, si avrà

$$x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3)^3 = (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)^3;$$

sviluppando, riducendo e trasportando tutto nel primo membro, risulta

$$x_1^4 x_2 x_3 + x_1 x_2^4 x_3 + x_1 x_2 x_3^4 - x_1^3 x_2^3 - x_1^3 x_3^3 - x_2^3 x_3^3 = 0,$$

ossia

$$(x_1^2 - x_2 x_3)(x_2^2 - x_1 x_3)(x_3^2 - x_1 x_2) = 0.$$

donde segue che deve essere eguale a zero almeno una delle espressioni in parentesi.

Notiamo che in generale sarà nulla una sola, perchè. se contemporaneamente fossero eguali a zero due delle dette espressioni, seguirebbe $x_1 = x_2 = x_3$, e sarebbe nulla anche l'altra. Caso affatto speciale e corrispondente al valore $r = 1$ già considerato.

Qualunque sia l'espressione verificata si ha che le radici sono in progressione per quoziente, *c. d. d.*

14. Come caso particolare importante noteremo quello in cui, essendo A,B,C reali, sono soddisfatte le relazioni

(1)
$$C = \left(\frac{B}{A}\right)^3$$

(1)′
$$27C^2 + 8B^3 - A^2B^2 - 18ABC \gtrless 0,$$

corrispondente quest'ultima al caso di $\frac{r^2}{4} + \frac{9^3}{27} > 0$ nella forma generale citata. La coesistenza loro dà la condizione affinchè le radici sieno in progressione per quoziente, reali e diseguali. Si può però trovare per altra via una relazione molto più semplice della (1)′. Posto infatti che i coefficienti A,B,C sieno reali, se la (1) è soddisfatta, riesce implicitamente determinato x_2, e quindi

$$f(x) = (x^2 + px + q)(x - x_2).$$

Essendo x_2 reale, basterà sapere quando sono reali, e inoltre diseguali, le altre due radici x_1, x_3, date dall'equazione al 2^0 grado, perchè ove si abbia $x_1 \gtrless x_3$ le radici sono diseguali tutte e tre. Infatti posto $x_1 = x_2$, oppure $x_3 = x_2$, dalle relazioni $x_2 = x_1 r$, $x_3 = x_2 r$ si avrebbe $r = 1$, cioè $x_1 = x_2 = x_3$ contro l'ipotesi.

La condizione per la realtà e diseguaglianza di queste radici è data, come è noto, da $\frac{p^2}{4} - q > 0$. E poichè è $p = A + x_2$, $q = -\frac{C}{x_2}$, essendo $x_2 = -\frac{B}{A}$ e $C = \frac{B^3}{A^3}$ tale condizione, ricondotta all'equazione del terzo grado, diventa

(2)
$$A^2 - 2B - 3\left(\frac{B}{A}\right)^2 > 0,$$

abbastanza facile quando si noti che la quantità $\frac{B}{A}$ si trova determinata nella (1).

Che la (2) soddisfi, si può anche vedere direttamente, perchè sostituendo ad A e B secondo le (α) e riducendo, essa prende la forma $x_1^2 (r^2 - 1)^2 > 0$, la quale (escluso $r = bi$, incompatibile con la realtà di A, B, C già posta) è vera per $x_1 \gtrless 0$ ed $r \gtrless 0$, esclusi però i valori $r = \pm 1$, cioè è vera solo per radici reali e diseguali.

La coesistenza quindi delle relazioni (1) *e* (2) *dà la condizione di radici in progressione per quoziente, reali e diseguali.*

Se è $\frac{p^2}{4} - q = 0$ le radici x_1, x_3 sono eguali e per le relazioni $x_3 = x_2 r = x_1 r^2$, $x_2 = x_1 r$, segue $r = \pm 1$ e $x_1 = \pm x_2 = x_3$. Ciò rilevasi anche dalla (3), che in questo caso si riduce a $r^2 - 1 = 0$. E perciò:

La coesistenza della (1) *e della* (2) *eguagliata a zero, qualunque sieno* A,B,C, *dà la condizione di radici tutte e tre eguali, oppure di due radici eguali e la terza solo diversa nel segno.*

Esempi. — 1°. Sia l'equazione

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 8 = 0 \tag{1}$$

a coefficienti reali. In essa la relazione $C = \left(\frac{B}{A}\right)^3$ è soddisfatta; ma non lo è la $A^2 - 2B - 3\left(\frac{B}{A}\right)^2 > 0$.

Le radici saranno perciò in progressione per quoziente, ma non saranno tutte reali. Infatti risolvendo si trova

$$x_2 = -\frac{B}{A} = 2$$

$$f(x) = (x^2 + 3x + 4)(x - 2)$$

$$x_1 = -\frac{3 + \sqrt{-7}}{2}, \quad x_3 = -\frac{3 - \sqrt{-7}}{2},$$

essendo

$$r = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{4}.$$

2°. Sia l'equazione

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + x + \frac{1}{27} = 0 \tag{1}$$

a coefficienti reali. In essa le relazioni (I) e (II) sono soddisfatte e perciò le radici saranno in progressione per quoziente, reali e diseguali.

Se si volesse applicare alla (1) la formola di Cardano si cadrebbe, come è noto, nel *caso irriducibile*. Ponendo infatti $x = y - 1$ risulterebbe la trasformata

$$y^3 - 2y + \frac{28}{27} = 0 \quad \text{in cui è} \quad \left(\frac{14}{27}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 < 0.$$

Ma dopo ciò che precede si ha

$$x_2 = -\frac{B}{A} = -\frac{1}{3},$$

$$f(x) = \left(x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{1}{9}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right),$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{15}}{3};$$

e quindi

$$x_1 = -\frac{4 + \sqrt{15}}{3}, \quad x_2 = -\frac{1}{3}, \quad x_3 = -\frac{4 - \sqrt{15}}{3}$$

essendo

$$r = \frac{-4 + \sqrt{15}}{3} : \left(-\frac{1}{3}\right) = 4 - \sqrt{15}$$

oppure

$$r = \frac{A^2 - B}{2B} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2 - B}{2B}\right)^2 - 1} = 4 \pm \sqrt{15}$$

Prof. Floreste Malfel.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 381 397 398 399 400 402 403 404

381. *Due parabole omofocali hanno le direttrici parallele, ed* r *è la bisettrice della striscia formata da queste due direttrici: dimostrare che lo inviluppo delle rette simmetriche di* r *rispetto a una tangente variabile dell'una o dell'altra parabola è un medesimo cerchio.*

V. Retali.

Risoluzione del Prof. G. Cardoso-Laynes.

È stato dimostrato (Quistione 380) che l'inviluppo delle rette simmetriche di una retta data r, parallela alla direttrice d di una parabola, rispetto alle tangenti di questa, è un circolo che ha il centro nel fuoco F della parabola e che ha per raggio la distanza delle rette d e r. Perciò, se indichiamo con d, d' le direttrici di due parabole omofocali in F e con r la bisettrice della striscia (dd'), poichè le distanze di d e d' da r in valore assoluto sono eguali, si avrà evidentemente che tanto per l'una, quanto per l'altra parabola, l'inviluppo delle rette simmetriche di r rispetto ad una tangente variabile, sarà il cerchio di centro F e che ha per raggio la distanza delle rette d,r (o d',r) ossia la metà della distanza delle due direttrici.

Altre risoluzioni dei sigg. Dott. C. Merizzi, Prof. Radolfe, E. Tucci.

397. *Un determinante* D_n *di ordine* n, *in cui un termine qualunque* a_{rs} *è nullo, se* r *e* s *differiscono fra loro per più che un'unità, diventa* $(-1)^n D_n$ *se si cambiano di segno gli elementi della diagonale principale.*

Se n *è dispari ed i termini principali sono anch'essi nulli, il determinante* D_n *è nullo.*

G. Fubini.

Risoluzione del Prof. G. Cardoso-Laynes.

Sia D_n un determinante della forma data (*) e D'_n quello che si ottiene cambiando di segno in D_n gli elementi principali.

In D'_n cambiamo di segno gli elem. della 1ª linea e sia Δ_1 il determ. che si ottiene;
" Δ_1 " " " " 2ª colonna " Δ_2 " "
" Δ_2 " " " " 3ª linea " Δ_3 " "
" Δ_3 " " " " 4ª colonna " Δ_4 " "
e così proseguendo costruiamo i determinanti Δ_5, Δ_6 .... Δ_{n-1}, Δ_n.

È facile vedere che risulta $\Delta_n = D_n$, ma d'altra parte è evidente che $\Delta_n = (-1)^n D'_n$, perciò sarà $D_n = (-1)^n D'_n$.

Se in D_n tutti gli elementi principali fossero nulli, sarebbe $D_n = D'_n$ per ogni valore di n, ma siccome per n dispari deve essere $D_n = -D'_n$, in questo caso avremo $D_n = -D_n$ cioè $D_n = 0$.

Altre risoluzioni dei Prof. Scarpis e Radolfe.

(*) Un determinante di questa forma ha molta analogia coi *continuanti* (v. Pascal, *I determinanti*, II, § 45), anzi questi ne sono un caso particolare.

398. *Se A, B, C sono i punti di fuga di 3 rette 2 a 2 ortogonali sopra un piano σ d'una rappresentazione prospettiva, e sono rispettivamente O, R il centro ed il raggio del cerchio di distanza, si ha identicamente*

$$\frac{1}{\overline{OA}^2}+\frac{1}{\overline{OB}^2}+\frac{1}{\overline{OC}^2}=\left(\frac{1}{R}\right)^2.$$

In che senso questa quistione si può considerare come un corollario della quistione 293?

A. Del Re.

Vedi risoluzione del **Prof. Retali** a p. 107-108.

Altra risoluzione del sig. Mundici Curio, studente.

399. *Un punto A percorre una curva $f(X, Y)=0$; un altro punto B si muove in modo che restino costanti la distanza BA e l'angolo che il raggio vettore BA fa colla tangente della traiettoria di B.*

Si domanda in qual modo si può determinare: 1° l'equazione della traiettoria di B; 2° il rapporto delle velocità di B ed A.

Si studi particolarmente il caso in cui A percorre una retta con moto uniforme.

(Questo problema si presenta nel caso che una nave voglia inseguirne un'altra, mantenendosi a distanza determinata da essa e rilevandola sotto un angolo determinato).

G. Lazzeri.

Risoluzione dei sigg. E. Stretti e G. Chinaglia allievi della R. A. N.

Caso generale. — Essendo x, y le coordinate di B, si ha che il coefficiente angolare della traiettoria di B è $\frac{dy}{dx}$, quello della retta BA è $\frac{Y-y}{X-x}$, perciò

$$\text{tang}\,\alpha=\frac{\frac{dy}{dx}-\frac{Y-y}{X-x}}{1+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{Y-y}{X-x}}.$$

Riducendo e ponendo $\text{tg}\,\alpha=m$, si ha dunque per l'enunciato il sistema

$$\begin{cases} f(X, Y)=0 \\ (X-x)^2+(Y-y)^2=d^2 \\ (X-x)\left\{m-\frac{dy}{dx}\right\}+(Y-y)\left\{1+m\frac{dy}{dx}\right\}=0. \end{cases}$$

Eliminando X, Y si ottiene l'equazione differenziale della traiettoria di B, e bisognerà integrarla per avere l'equazione in termini finiti della traiettoria stessa.

Trovata questa si potrà calcolare il rapporto k delle velocità di B e di A per mezzo della formola

$$k=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{dX^2+dY^2}}.$$

Caso particolare. — Supponendo che A percorra una retta, che possiamo scegliere per asse delle Y, il sistema precedente diventa

$$\begin{cases} X=0 \\ x^2+(Y-y)^2=a^2 \\ x\left(m-\frac{dy}{dx}\right)=(Y-y)\left(1+m\frac{dy}{dx}\right). \end{cases}$$

Sostituendo nella terza equazione il valore d'$(Y-y)$ data dalla seconda, si trova

$$\left(1+m\frac{dy}{dx}\right)\sqrt{a^2-x^2}=x\left(m-\frac{dy}{dx}\right),$$

dove il radicale può esser preso col doppio segno.

Risolvendo rispetto a $\frac{dy}{dx}$, si ha

$$\frac{dy}{dx}=\frac{mx-\sqrt{a^2-x^2}}{x+m\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Riducendo razionale il denominatore del 2° membro di questa equazione e facendo qualche riduzione, si ha

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a^2\frac{m}{1+m^2}-x\sqrt{a^2-x^2}}{x^2-a^2\frac{m^2}{1+m^2}}.$$

Essendo $m=\operatorname{tang}\alpha$, si ha $\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}=\operatorname{sen}\alpha$, $\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}=\cos\alpha$, e ponendo per brevità $a\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}=a\operatorname{sen}\alpha=b$, l'equazione si riduce a

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b^2}{m}\cdot\frac{1}{x^2-b^2}+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{b^2-x^2},$$

od anche

$$dy=\frac{b^2}{2m}\left(\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x+b}\right)dx+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{b^2-x^2}dx,$$

da cui

$$y=\frac{b^2}{2m}\,\mathrm{L}\frac{x-b}{x+b}+\mathrm{H}=\frac{a\cos\alpha}{2}\cdot\mathrm{L}\frac{x-a\operatorname{sen}\alpha}{x+a\operatorname{sen}\alpha}+\mathrm{H},$$

dove L indica il logaritmo neperiano ed è

$$\mathrm{H}=\int\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{b^2-x^2}dx.$$

Per calcolare H, si ponga $\sqrt{a^2-x^2}=z$, e quindi $x^2=a^2-z^2$, $xdx=-zdz$, e si ha

$$\mathrm{H}=-\int\frac{z^2dz}{(b^2-a^2)+z^2}=-\int\frac{(b^2-a^2)+z^2}{(b^2-a^2)+z^2}dz+\int\frac{(b^2-a^2)\,dz}{(b^2-a^2)+z^2}$$

$$=-z-\int\frac{a^2\cos^2\alpha}{z^2-a^2\cos\alpha^2}dz=-z-\int\frac{a\cos\alpha}{2}\left\{\frac{1}{z-a\cos\alpha}-\frac{1}{z+a\cos\alpha}\right\}dz$$

$$=-z-\frac{a\cos\alpha}{2}\cdot\mathrm{L}\frac{z-a\cos\alpha}{z+a\cos\alpha}+\mathrm{C}$$

$$=-\sqrt{a^2-x^2}-\frac{a\cos\alpha}{2}\,\mathrm{L}\frac{\sqrt{a^2-x^2}-a\cos\alpha}{\sqrt{a^2-x^2}+a\cos\alpha}+\mathrm{C}.$$

Dunque l'equazione della traiettoria di B è

$$y=\frac{a\cos\alpha}{2}\left\{\mathrm{L}\,\frac{x-a\operatorname{sen}\alpha}{x+a\operatorname{sen}\alpha}-\mathrm{L}\,\frac{\sqrt{a^2-x^2}-a\cos\alpha}{\sqrt{a^2-x^2}+a\cos\alpha}\right\}-\sqrt{a^2-x^2}+\mathrm{C}$$

ovvero

$$\frac{2}{a\cos\alpha}\left(y+\sqrt{a^2-x^2}-\mathrm{C}\right)=\mathrm{L}\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}-a\cos\alpha}{x+a\operatorname{sen}\alpha}\right)^5$$

od anche

$$\frac{\sqrt{a^2+x^2}+a\cos\alpha}{x-a\operatorname{sen}\alpha}=\mathrm{K}\,e^{\frac{y+\sqrt{a^2-x^2}}{a\cos\alpha}},$$

dove K è una costante arbitraria che si può determinare conoscendo le posizioni iniziali dei due punti.

400. *Un punto* A *percorre una curva* $f(\mathrm{X},\mathrm{Y})=0$ *con velocità* V. *Un punto* B *percorre con velocità* V' *una curva tale che in ogni istante la tangente in* B *passi pel punto* A. *Si domanda come si possa trovare l'equazione della traiettoria di* B. *Si studi il caso particolare in cui* A *percorre una retta, o altri casi particolari.*

G. Lazzeri.

Risoluzione dei sigg. Chinaglia e Stretti allievi della R. A. N.

Caso generale. — Indicando con x ed y le coordinate correnti di B avremo le tre equazioni

$$f(\mathrm{X},\mathrm{Y})=0,\qquad \frac{\mathrm{Y}-y}{\mathrm{X}-x}=\frac{dy}{dx},\qquad \frac{\overline{d\mathrm{Y}}^2+\overline{d\mathrm{X}}^2}{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}=\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{V}'^2}=m^2,$$

che sono l'equazione della curva percorsa da A, l'equazione della tangente in B, e quella che stabilisce l'eguaglianza fra il rapporto delle velocità ed m. Eliminando fra queste X e Y si ottiene così un'equazione differenziale, che integrata dà l'equazione della traiettoria descritta dal punto B.

Caso particolare. — Consideriamo il caso in cui il punto A percorra una retta, che possiamo prendere per asse delle Y; allora la sua equazione sarà $\mathrm{X}=0$, e il sistema precedente diventa

$$\mathrm{X}=0,\quad \mathrm{Y}=y-x\frac{dy}{dx},\quad d\mathrm{Y}=m\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Differenziando la seconda di queste equazioni si trova

$$d\mathrm{Y}=dy-dx\frac{dy}{dx}-x\frac{d^2y}{dx^2}dx,$$

ovvero

$$d\mathrm{Y}=-x\frac{d^2y}{dx^2}dx$$

pongo $\frac{dy}{dx}=z$; sarà $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}$, e quindi dalle equazioni precedenti si ricava

$$d\mathrm{Y}=m\sqrt{1+z^2}\,dz,\quad d\mathrm{Y}=-x\,dz;$$

quindi

$$-x\,dz=m\sqrt{1+z^2}\,dx$$

ovvero

$$m\frac{dx}{x}=-\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}};$$

integrando
$$m \,\mathrm{L}\, x = -\mathrm{L}\left(z + \sqrt{1+z^2}\right) + \mathrm{L}\, \mathrm{C},$$
da cui
$$\mathrm{L}\, x^m \left(z + \sqrt{1+z^2}\right) = \mathrm{L}\, \mathrm{C},$$
quindi
$$x^m \left(z + \sqrt{1+z^2}\right) = \mathrm{C},$$
e
$$\sqrt{1+z^2} = \frac{\mathrm{C}}{x^m} - z;$$
elevando a quadrato e ricavando il valore di z,
$$z = \frac{\mathrm{C}}{2x^m} - \frac{x^m}{2\mathrm{C}};$$
ma $z = \frac{dy}{dx}$, quindi
$$dy = \frac{\mathrm{C}}{2} x^{-m}\, dx - \frac{1}{2\mathrm{C}} x^m\, dx,$$
integrando
$$y = -\frac{\mathrm{C}}{2(m-1)\,x^{m-1}} - \frac{1}{2\mathrm{C}} \frac{x^{m+1}}{m+1} + \mathrm{C}',$$
dunque
$$y = \mathrm{C}' - \frac{1}{2}\left\{\frac{\mathrm{C}}{(m-1)\,x^{m-1}} + \frac{x^{m+1}}{(m+1)\,\mathrm{C}}\right\}$$
è l'equazione della curva descritta da B.

I valori delle costanti si determinano facilmente conoscendo le posizioni iniziali dei due punti A, B.

402. *Il luogo geometrico del vertice di un triangolo di cui la base rimane fissa, e nel quale gli angoli ad essa adiacenti differiscono costantemente di 90°, è un'iperbole equilatera.*

E. Piccioli.

Risoluzione e generalizzazione del Prof. G. Cardoso-Laynes di Livorno.

Questa proposizione può considerarsi come *corollario* di un'altra più generale che può ottenersi supponendo che I DUE ANGOLI, ANZICHÈ DI $\frac{\pi}{2}$, DIFFERISCANO DI UN ANGOLO φ (*essendo φ costante e diverso da zero*).

Infatti sia $2a$ il lato dato e β, γ gli angoli ad esso adiacenti: supponiamo $\gamma = \beta + \varphi$.

Assumendo per asse x la retta a cui appartiene la base data e per asse y la perpendicolare condotta a questo segmento per il punto medio, si ha evidentemente che le coordinate del vertice mobile son legate dalle relazioni

(1) $$y = (x+a)\,\mathrm{tg}\,\beta \quad ; \quad y = (x-a)\,\mathrm{tg}\,(\pi - \gamma) = -(x-a)\,\mathrm{tg}\,(\beta + \varphi).$$

Da queste, eliminando β, si ha per il luogo cercato l'equazione
$$(x^2 - y^2 - a^2)\,\mathrm{tg}\,\varphi + 2xy = 0$$
e, se φ è diverso da 0, la precedente equazione può scriversi

(2) $$x^2 + 2xy\,\mathrm{cotg}\,\varphi - y^2 = a^2$$

la quale rappresenta un'iperbole equilatera.

Se $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (caso particolare corrispondente alla Quist. 402) la (2) diviene

(3) $$x^2 - y^2 = a^2,$$

e perciò in questo caso il lato dato è l'asse principale dell'iperbole.

Del resto, si giunge allo stesso resultato direttamente, osservando che se $\varphi = \frac{\pi}{2}$ le (1) divengono

$$y = (x + a) \operatorname{tg} \beta \quad ; \quad y = (x - a) \operatorname{cotg} \beta$$

le quali, moltiplicate membro a membro, dànno: $y^2 = x^2 - a^2$ cioè la (3).

Risoluzione del Prof. R. Bettazzi di Torino.

Sia AB il lato dato, X il vertice cercato, e si indichi con α l'angolo XAB: sarà per ipotesi $XBA = \frac{\pi}{2} + \alpha$, e quindi sarà $= \frac{\pi}{2} - \alpha$ l'angolo esterno XBB'. Useremo il calcolo vettoriale; (*) prendendo per vettore di riferimento I il vettore B − A e indicando con m, n, le lunghezze di XA, XB, avremo

$$B - A = I; \; X - A = m\, e^{i\alpha} I; \; X - B = n\, e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} I = n\, e^{-i\alpha}\, i I,$$

talchè

(1) $$I - m\, e^{i\alpha} I + n\, e^{-i\alpha}\, i I = 0,$$

(2) $$X = B + (X - B) = B + n e^{-i\alpha}\, i I.$$

Dalla (1) si ha:

$$1 - m e^{i\alpha} + n i e^{-i\alpha} = 0,$$

donde, uguagliando a 0 la parte reale e l'immaginaria, e risolvendo le equazioni risultanti, si ricava

$$n = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos 2\alpha}.$$

L'espressione (2) del punto cercato diverrà, ponendo $0 = B - \frac{I}{2}$

$$X = O + \frac{I}{2} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos 2\alpha} e^{i\alpha} i I,$$

donde

$$X = O + \frac{1}{2 \cos 2\alpha} I + \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2 \cos 2\alpha}\, i\, I.$$

Chiamando x ed y le coordinate $\frac{1}{2 \cos 2\alpha}$ e $\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2 \cos 2\alpha}$ di X riferimento all'origine O ed ai vettori I, i I, si verifica agevolmente che

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{4}.$$

Il luogo cercato è quindi un'iperbole equilatera col centro nel punto O medio di AB, e coi vertici in A e B.

Altre risoluzioni dei professori Retali e Radolfe, del dott. Merizzi e dei signori Cassuto, Celestri e Tucci, studenti della R. Università di Pisa e Santacroce, studente della R. Università di Napoli.

(*) PEANO, *Calcolo geometrico*. Torino, 1888 e *Lezioni di Analisi infinitesimale*, vol. II. Torino, 1893.

403. *Sieno* c *e* c' *due circoli posti nello stesso piano, che s'incontrano in due punti* H *e* K. *Considerando un tr. variabile* AMB, *il cui lato* AB *passi per* H *e gli altri due lati* AM, BM *sieno tangenti rispettivamente ai circoli* c *e* c' *nei punti* A *e* B, *dimostrare che il luogo del terzo vertice* M *una è* cardioide *che ha per regresso il punto* K.

G. Cardoso-Laynes.

Risoluzione del prof. V. Retali di Milano.

Sieno H, K, I, J i punti comuni a due coniche c, c', conduciamo le tangenti a, b a c e c' nei punti A, B ove queste sono ulteriormente segate da una trasversale condotta per H: i due fasci di seconda classe $c(a \ldots .)$, $c'(b \ldots .)$ sono proiettivi, perchè le punteggiate del 2° ordine $c(\mathrm{A} \ldots .)$, $c'(\mathrm{B}, \ldots .)$ sono prospettive al fascio (di 1ª classe) H; il loro prodotto è dunque una curva del quart'ordine (in generale della sesta classe); ma quando due fasci di seconda classe, formati dalle tangenti di due coniche c, c', sono proiettivi, e di più le tangenti in uno dei punti K comune a c, c', costituiscono un paio di raggi omologhi, K è una cuspide sul prodotto dei due fasci (teorema noto), dunque nel caso nostro la quartica luogo del punto $(ab) \equiv \mathrm{M}$ ha una cuspide in ognuno dei tre punti H, I, J e tocca le coniche date nei punti ove esse sono segate dalle tangenti in H. Assumendo per I, J i punti ciclici, abbiamo il teorema proposto.

Altra risoluzione del Prof. Barozzini.

404. *Il luogo dei fuochi di tutte le iperbole equilatere di un piano, concentriche in* O *e passanti per uno stesso punto* M *è la* lemniscata di Bernoulli *che ha il centro in* O *e un fuoco in* M.

G. Cardoso-Laynes.

Risoluzione del sig. Francesco Celestri di Pisa.

Consideriamo una delle iperbole equilatere, che abbia il centro in O e che passi per M. Siano F, F' i suoi fuochi e il ramo dell'iperbole che passa per M sia quello che ha per fuoco F. Allora l'altro ramo dell'iperbole passerà pel punto M' simmetrico di M rispetto al centro O. Indichiamo ora con δ, δ' rispettivamente le distanze FM, FM', ed essendo il quadrilatero MFM'F' un parallelogrammo (poichè le sue diagonali si dimezzano scambievolmente) avremo $\mathrm{MF'} = \mathrm{FM'} = \delta'$, e quindi i segmenti FM, FM' ossia δ, δ' sono uguali alle distanze del punto M dai fuochi F, F' e perciò per una nota proprietà dell'iperbole avremo $\delta' - \delta = 2a$ essendo $2a$ la lunghezza di ciascun asse dell'iperbole.

Indicando con c la distanza OM per un noto teorema si ha $\delta\delta' = c^2$.

Adunque il fuoco F gode della proprietà che il prodotto delle sue distanze dai due punti fissi M, M' è costante ed uguale a c^2 ossia ad $\overline{\mathrm{OM}}^2$ e quindi il luogo di F è la *lemniscata di Bernoulli* che ha per fuochi i punti M, M' e per centro il punto medio di MM' ossia O.

L'altro fuoco F' essendo il simmetrico di F rispetto al centro O, giacerà pure sulla lemniscata trovata questa è pure il luogo del fuoco F'.

Osservazione. — Nello stesso modo si dimostra che " Il luogo dei fuochi delle *lemniscate di Bernoulli* di un piano concentriche in O e passanti per uno stesso punto M è un'iperbole equilatera che ha il centro in O e un fuoco in M ".

Altre risoluzioni dei Prof. Retali e Radolfo, del Dott. Merizzi e del sig. Tucci.

QUISTIONI PROPOSTE

405. Essendo P un punto mobile di una parabola di cui F è il fuoco e N il punto in cui la tangente in P incontra l'asse, dimostrare:

1° che il luogo del centro del circolo circoscritto al triangolo PFN è una cubica razionale che ha un punto isolato in F.

2° che il luogo dell'ortocentro dello stesso triangolo è una cubica razionale che ha in F un nodo.

3° che le congiungenti i punti corrispondenti delle due cubiche passano tutte per il fuoco F della parabola (ossia: la retta d'Eulero del triangolo PFN, al moversi di P sulla parabola, ruota attorno ad F).

G. Cardoso-Laynes.

406. Luogo dei fuochi delle parabole che toccano una curva data (algebrica) e hanno per direttrice una medesima retta, del suo piano.

V. Retali.

407. Sopra una retta si fissino due punti A, B: essendo C un punto variabile della medesima, esterno ad AB, e B' il simmetrico di B rispetto a C, trovare il luogo dei punti medi delle tangenti comuni ai due cerchi descritti sui diametri CA, CB'.

C. Merizzi.

408. Da un punto O di un piano si conducano n raggi in modo da dividere il piano in n angoli uguali, e da un punto P preso nel piano si conducano le perpendicolari agli n raggi. Dimostrare che al variare di P sopra una circonferenza di centro O rimane costante:

1° la somma dei quadrati delle distanze dal punto P ai raggi;

2° l'area del poligono che ha per vertici i piedi delle perpendicolari condotte da P ai raggi.

Dedurre che il teorema è pure vero, allorchè le rette condotte per P siano tutte inclinate di uno stesso angolo α e nello stesso verso sui rispettivi raggi.

F. Celestri.

409. Determinare la forma generale di una funzione di quattro lettere x, y, z, u, tale che, sostituendo x ad y, essa si riduca identicamente a $\frac{z^m}{u^n}$, e sostituendo z ad u, si riduca identicamente ad $\left(\frac{x}{y}\right)^p$, essendo m, n, p costanti note.

410. Determinare la forma generale di una funzione di cinque lettere x, y, z, u, v, tale che, sostituendo ad x una qualunque delle altre lettere, la funzione si riduca identicamente al prodotto delle tre lettere rimanenti.

411. ABC è un triangolo sferico trirettangolo appartenente ad una sfera σ di centro O e raggio R. Si consideri una superficie cilindrica σ' avente le generatrici perpendicolari al piano AOB e per direttrice l'arco AB di una parabola, situata in questo piano, col vertice in A ed avente per asse la retta AO. Dimostrare che la porzione del triangolo sferico limitata dai lati AC, BC di questo e dalla intersezione di σ con σ' è equivalente al quadrato del raggio della sfera.

P. Aussant-Carà.

BIBLIOGRAFIA

Pascal. — *Repertorio di matematiche superiori - I. Analisi.* — Manuali Hoepli.

Segnaliamo con piacere ai lettori del *Periodico* questo libro, che in 642 pagine di stampa contiene una miniera ricchissima di notizie.

" Lo scopo di questo libro, dice il chiaro autore nella prefazione, è semplice-
" mente il seguente: riunire nel più breve spazio possibile un riassunto di quasi
" tutte le principali teorie della matematica moderna, dando di ciascuna teoria
" solo quanto basti, perchè un lettore possa in essa orientarsi e sapere a qual
" libro ha da ricorrere per avere maggiori particolari e più diffuse indicazioni ".

Per raggiungere questo scopo occorreva una erudizione profonda e tale da maravigliare ogni studioso della matematica, che non può ignorare l'immensa ampiezza di ogni ramo di questa scienza. Bisogna essere dunque riconoscenti all'egregio autore che si è sentito la forza di condurre a termine un tale lavoro.

In esso lo studioso non deve credere di potere apprendere una od un'altra teoria; vi son invece accennate per ogni teoria le definizioni, i teoremi principali senza dimostrazione, ed una bibliografia che indica le fonti alle quali bisogna ricorrere per approfondire l'argomento. Così anche chi vive lontano da un centro scientifico avrà a sua disposizione con una piccola spesa una guida per dedicarsi agli studi che preferisce.

Il volume pubblicato contiene in 23 capitoli un cenno di tutte le teorie dell'analisi, dalle più semplici alle più elevate. Si annunzia poi che entro l'anno verrà pubblicato un secondo volume dedicato alla geometria. K.

W. W. Rouse Ball. — *Récréations et problèmes mathématiques des temps anciens et modernes.* 3^{me} édition revue et augmentée par l'auteur, traduite par S. Fitz-Patrick.

La letteratura francese che già possedeva preziose raccolte di ricreazioni e curiosità matematiche, come le opere ormai classiche del *Bachet* e del *Lucas*, si è ora arricchita di un altro libro pregevolissimo sullo stesso argomento colla traduzione ora pubblicata dalla libreria Hermann.

Il libro si divide in due parti: I. *Ricreazioni matematiche* - II. *Problemi e teorie.*

Nella prima divisa in 7 capitoli sono raccolti moltissimi paradossi matematici, problemi curiosi di aritmetica, algebra, geometria e meccanica, molti dei quali sono legati a nomi di illustri matematici, ed alcuni sono nuovi.

La seconda, divisa in 5 capitoli, è di carattere principalmente storico.

Nel 1° di questi capitoli è fatto un rapido e diligente cenno storico dei tre celebri problemi dell'antichità, *la duplicazione del cubo, la trisezione dell'angolo e la quadratura del circolo.* Nel 2° capitolo è dato un cenno sulle regole usate nel medio evo per esercitare l'*astrologia* che, non sappiamo perchè, l'autore chiama scienza.

Il 3° capitolo (uno dei più interessanti del libro) è dedicato allo studio degli *iperspazi* e alla geometria non euclidea. È riportato il vecchio confronto delle sensazioni e pensieri che dovrebbe avere un essere ragionante a una o due dimensioni, con quelle che dovrebbe provare un essere a tre dimensioni, in presenza di una quarta dimensione, che i nostri sensi non ci permettono neanche di concepire; ed è mostrato assai lucidamente come l'esistenza della 4ª dimensione potrebbe spiegare molti fatti fisici che si spiegano spesso colla vibrazione dell'etere.

Nel 4° capitolo si tratta del tempo e della sua misura sino dalla più remota antichità; nel 5° ed ultimo delle varie ipotesi emesse sulla materia e sull'etere.

Tutto il libro è scritto con molta chiarezza, evitando quasi sempre le formole che spaventano i profani, di guisa che esso è una lettura gradevole ed alla portata di ogni persona che abbia una cultura matematica anche superficiale; e perciò lo raccomandiamo con piacere specialmente ai giovani. K.

Bollettino dell'Associazione Mathesis.

Il Num. 3 contiene, oltre gli atti dell'associazione, due elenchi di pubblicazioni matematiche recenti, italiane e tedesche, un elenco bibliografico di pubblicazioni sui principii dell'equivalenza geometrica, e un cenno sull'insegnamento della matematica nelle scuole medie germaniche, coi relativi programmi ed orari: in fine sunti di periodici, e una risposta del prof. Frattini, ai prof. Lazzeri e Certo, relativa ad obiezioni da questi ultimi fatte alle sue definizioni di grandezza finita.

Il Num. 4 contiene un articolo del prof. Ciamberlini sugli attuali programmi di Scuole Normali, in risposta alla questione III del *Bollettino;* e la relazione sulla questione V, del prof. De Amicis, col titolo *Pro-fusione* riprodotta in questo periodico: inoltre elenchi di pubblicazioni, sunti di giornali e notizie.

Gélin E. — *Traité d'Arithmétique élémentaire.* — Huy, 1897.

Questo trattato dell'abate Gélin, già noto e stimato autore di altre pregevoli opere, è molto ricco di svariati argomenti, esposti con ordine e chiarezza mirabili. Perciò esso non solo potrà essere utile all'insegnamento, ma potrà anche essere consultato utilmente da chi nelle Matematiche già sia esperto, poichè in questo trattato, specie nell'ultima parte, che riguarda la risoluzione dei problemi, vi si trova davvero una miniera di cognizioni, come difficilmente può trovarsi negli ordinari trattati di aritmetica.

Non è il caso di parlare di mende: non dico che il libro sia perfetto, ma certo che a raggiungere la perfezione l'A. non è rimasto troppo discosto. G. C.-L.

Laisant. — *La mathématique. Philosophie-enseignement.* — Paris, Carré et Nand, 1898.

Questo libro, dice l'autore non può insegnare nulla ai sapienti e non potrebbe essere compreso dai profani; ma è destinato ad una categoria di persone che diviene ogni giorno più numerosa; quella degli uomini che studiano, che hanno studiato, che insegnano e che applicano gli elementi della scienza matematica senza dedicarsi a lavori puramente scientifici. Composto sopra riflessioni e grazie ad alcuni ricordi, deve esser considerato come una specie di conversazione senza pretesa, piuttosto che come un libro grave.

Malgrado la modestia di queste premesse, il libro contiene una rapida rassegna di tutti i principali argomenti della matematica sotto il triplice aspetto della scienza pura, delle applicazioni, dell'insegnamento.

Sono esposti con molta chiarezza le origini, i postulati, lo scopo di ciascun ramo, partendo dalla premessa che la matematica è una scienza sperimentale. Ad ogni passo si trovano osservazioni giuste e profonde.

Nell'ultima parte è esposto quello che è, specialmente in Francia, e quello che dovrebbe essere l'insegnamento delle matematiche, a proposito del quale l'autore stabilisce i seguenti assiomi che volentieri sottoscriviamo:

1°. *Nelle condizioni attuali, a tutti son necessarie delle nozioni di matematica.*

2°. *Ogni intelligenza media è atta ad acquistare queste nozioni, ristrette entro certi limiti.*

Sono segnalate le varie calamità dell'insegnamento in Francia, alcune delle quali fanno provare a noi italiani la consolazione dei disperati *mal comune mezzo gaudio.*

Con questo cenno non abbiamo preteso di dare un'idea di questa opera, ma abbiamo voluto soltanto richiamare su di essa l'attenzione di coloro che amano di leggere dei libri che fanno pensare. (K).

Bellacchi Prof. **Giacomo.** — *Lezioni ed esercizi di Algebra complementare* - Fascicolo primo. — Firenze, Barbèra, 1898.

Questo volumetto, che si può considerare come un seguito alla pregevolissima opera dell'A. *Lezioni ed esercizi di Algebra,* Firenze, Le Monnier; contiene oltre ad una elegante e chiara esposizione di alcune teorie di algebra complementare, una ricca e svariata raccolta di applicazioni geometriche, che è senza dubbio la parte più bella e più interessante del libro.

Nella scelta di queste applicazioni l'A. dimostra una cultura non comune ed una facilità straordinaria, sia nel coordinare fra loro questioni apparentemente diverse, sia nel ridurre a forma elementare dimostrazioni che ordinariamente si fanno con l'aiuto di teorie di grado più elevato. Per citare un esempio notiamo che, nel cap. III *Linee quartiche circolari,* l'A. studiando certi luoghi del 3° ordine, che deriva dal cerchio con costruzioni elementari, mostra come da uno di questi derivino come caso particolare la *cissoide* e la *strofoide* e da un altro, la *versiera dell'Agnesi* e il *serpe di Newton.*

In complesso questo lavoro, di cui ci auguriamo di veder presto pubblicata la 2ª parte, ha molti pregi, e se non è di quelli adottabili nella scuola, è però da consigliarsi a tutti i giovani che desiderano, senza troppa fatica, ampliare il campo delle loro cognizioni matematiche.

A. MARTINI ZUCCAGNI.

FEDERIGO ENRIQUES. — *Lezioni di Geometria proiettiva.* — Bologna, Zanichelli, 1898.

Il libro, lungamente meditato, è armonico nell'insieme ed accurato nei particolari: preciso negli enunciati delle proposizioni, rigoroso e chiaro nelle dimostrazioni.

L'autore segue l'indirizzo della Geometria di posizione di Staudt; però, con l'introduzione di alcuni postulati, rende più rigoroso e nello stesso tempo più facile lo sviluppo della Geometria proiettiva. È degno di nota il modo come l'A. svolge la legge di dualità nello spazio e nel piano.

Seguendo lo Staudt ed anche, fra gli altri, il De Paolis, l'A. definisce le coniche mediante le polarità, e così può dedurre più facilmente le principali proprietà di queste curve.

Qualche appunto di poco momento si potrebbe fare al libro, specialmente dal punto di vista didattico; però non mette conto il farlo.

P. VISALLI.

Primo congresso

degli insegnanti di matematiche delle scuole medie in Torino (5, 6, 7 settembre 1898).

Il Comitato direttivo dell'Associazione *Mathesis* ha avuto l'ottima idea di costituirsi in sottosezione del Congresso pedagogico nazionale, che si terrà in Torino nel prossimo settembre, e con lettera circolare del 18 marzo scorso ha convocato tutti gli insegnanti di matematica delle scuole medie. Nutriamo fiducia che questi risponderanno volenterosi all'appello, e vorranno con un numeroso concorso rendere solenne ed importante questa prima riunione, che speriamo sarà seguita da altre.

Tutti i professori non soci che intendono aderire al Congresso devono inviare al presidente prof. Rodolfo Bettazzi (via San Martino, 1, Torino) L. 2, ed i soci L. 1; e riceveranno le tessere per la riduzione di prezzo sui viaggi ferroviari, per l'ingresso alle adunanze e per usufruire di tutte le altre facilitazioni, che il Comitato ordinatore si occupa fin d'ora alacremente di procurare agli aderenti.

Le quistioni che saranno trattate sono le seguenti.

" 1ª. Data la possibilità della fusione della Geometria piana colla solida nell'insegnamento, proporre un programma che permetta agl'insegnanti la libera scelta fra il metodo della fusione e quello della separazione.

" 2ª. Uniformità nel linguaggio e nelle notazioni della Matematica elementare. Fissare i vocaboli da adottarsi definitivamente per gli enti, pei quali se ne usano più di uno (per esempio: cerchio, circolo, circonferenza; quoto, quoziente, ecc.); stabilire quali vocaboli e quali notazioni possono abolirsi senza danno.

" 3ª. I libri di testo dal punto di vista scientifico e didattico. Errori che vi dominano; mezzi perchè si limiti, per quanto si può, il danno che tali errori arrecano alla scuola.

" 4ª. Ripartizione dell'insegnamento della Matematica elementare fra i vari gradi e le varie specie di scuole secondarie.

" 5ª. Modificazioni da introdursi nell'ordinamento degli studi matematici universitari, affine di ottenere buoni insegnanti secondari ".

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 25 Aprile 1898.

SOPRA UNA CLASSE NOTEVOLE DI ALTERNANTI D'ORDINE QUALSIVOGLIA

DI

GINO LORIA [1]

Nel fascicolo di Marzo-Aprile 1897 del *Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario*, ho fissata l'attenzione degli studiosi sopra i determinanti che appartengono ai due tipi seguenti:

$$\text{(A)} \quad | \operatorname{sen} m_1\alpha_h\,,\ \operatorname{sen} m_2\alpha_h\,,\ \ldots,\ \operatorname{sen} m_k\alpha_h\,,\ \cos m_{k+1}\alpha_h\,,\ \ldots,\ \cos m_n\,\alpha_h\ | \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\text{(B)} \quad \left| \operatorname{sen}^{m_1}\alpha_h,\ \operatorname{sen}^{m_2}\alpha_h, \ldots,\ \operatorname{sen}^{m_k}\alpha_h,\ \cos^{m_{k+1}}\alpha_h, \ldots,\ \cos^{m_n}\alpha_h \right| \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

ove $m_1\, m_2, \ldots, m_n$ sono numeri interi che, nei determinanti del secondo tipo, si suppongono positivi — determinanti che notoriamente appartengono alla classe degli alternanti. [2] Ivi ho dato, senza dimostrazione, il risultato del calcolo di alcuni fra i più semplici determinanti del primo tipo ed ho notato che sarebbe interessante il possedere un metodo per calcolarli tutti. Più tardi ho osservato un procedimento per ridurre i determinanti anzidetti ad altri alternanti conosciutissimi, il quale procedimento si traduce in un metodo uniforme di calcolo e conduce a scoprire la forma generale, che ha lo sviluppo dei determinanti dei tipi (A) e (B). Visto l'interesse, che oggi si attacca allo studio dei determinanti speciali e tenuto conto delle frequenti applicazioni che trovano i determinanti di cui è parola, reputo non inopportuno esporre qui le conclusioni alle quali pervenni.

1. Prima di entrare in materia osservo, che tra i determinanti del tipo (A) i primi che si presentano sono i due seguenti:

$$C = |\ \cos(n-1)\alpha_h\,,\ \cos(n-2)\alpha_h\,,\ \ldots,\ \cos\alpha_h\,,\ 1\ |$$
$$S = |\ \operatorname{sen} n\alpha_h\,,\ \operatorname{sen}(n-1)\alpha_h\,,\ \ldots,\ \operatorname{sen} 2\alpha_h\,,\ \operatorname{sen}\alpha_h\ |$$

e fra quelli del tipo (B) gli altri

$$\Gamma = |\ \cos^{n-1}\alpha_h\,,\ \cos^{n-2}\alpha_h\,,\ \ldots,\ \cos\alpha_h\,,\ 1\ |$$
$$\Sigma = |\ \operatorname{sen}^n\alpha_h\,,\ \operatorname{sen}^{n-1}\alpha_h\,,\ \ldots,\ \operatorname{sen}^2\alpha_h\,,\ \operatorname{sen}\alpha_h\ |$$

Ora i determinanti Γ e Σ, essendo formati con potenze consecutive

---

[1] Dai *Rendiconti della Società boema delle Scienze*, 1897.

[2] Muir, *A Treatise on the Theory of Determinants* (London, 1882, p. 161).

di n quantità, possono svolgersi in prodotto applicando un noto teorema di Cauchy; si ottiene quindi:

$$\Gamma = \prod_{p,q} (\cos \alpha_p - \cos \alpha_q),$$

$$\Sigma = \operatorname{sen} \alpha_1 \,.\, \operatorname{sen} \alpha_2 \ldots \operatorname{sen} \alpha_n \,.\, \prod_{p,q} (\operatorname{sen} \alpha_p - \operatorname{sen} \alpha_q),$$

dove il simbolo $\prod_{p,q} (\cos \alpha_p - \cos \alpha_q)$ rappresenta il prodotto degli $\frac{n(n-1)}{2}$ fattori analoghi a $\cos \alpha_p - \cos \alpha_q$, supposto $p < q$, e significato analogo ha il simbolo $\prod_{p,q} (\operatorname{sen} \alpha_p - \operatorname{sen} \alpha_q)$. Applicando ora notissime formole trigonometriche si può anche scrivere:

(1) $$\Gamma = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \,.\, 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \,.\, \prod \operatorname{sen} \frac{\alpha_p + \alpha_q}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha_p - \alpha_q}{2}$$

(2) $$\Sigma = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \operatorname{sen} \alpha_1 \,.\, \operatorname{sen}_2 \ldots \operatorname{sen} \alpha_n \prod_{p,q} \cos \frac{\alpha_p + \alpha_q}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha_p - \alpha_q}{2}.$$

Per calcolare poi i determinanti C e S osserviamo che $\cos m\alpha$ è esprimibile come un polinomio intero di grado m in $\cos \alpha$ in cui il coefficiente di $\cos^m \alpha = 1 + \binom{m}{2} + \binom{m}{4} + \ldots = 2^{m-1}$; perciò se nel determinante C sostituiamo ai coseni i loro sviluppi otterremo facilmente

$$C = \begin{vmatrix} \cos^{n-1} \alpha_1, & \cos^{n-2} \alpha_1, & \ldots, & \cos \alpha_1, & 1 \\ \cos^{n-1} \alpha_2, & \cos^{n-2} \alpha_2, & \ldots, & \cos \alpha_2, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos^{n-1} \alpha_{n-1}, & \cos^{n-2} \alpha_{n-1}, & \ldots, & \cos \alpha_{n-1}, & 1 \\ \cos^{n-1} \alpha_n, & \cos^{n-2} \alpha_n, & \ldots, & \cos \alpha_n, & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2^{n-2} & * & * \cdots * & * \\ 0 & 2^{n-3} & * \cdots * & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

ove gli $*$ indicano coefficienti numerici di cui non ci interessa il valore; si conclude pertanto

(3) $$C = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \Gamma$$

Similmente osservando che $\frac{\operatorname{sen} m\alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$ è espresso da un polinomio di grado $m-1$ in $\cos \alpha$, nel quale $\cos^{m-1} \alpha$ ha per coefficiente

$$m + \binom{m}{3} + \binom{m}{5} + \ldots = 2^{m-1},$$

si trova

$$S = \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2 \ldots \operatorname{sen} \alpha_n \begin{vmatrix} \frac{\operatorname{sen} n\alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha_1}, & \frac{\operatorname{sen} (n-1)\alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha_1}, & \ldots, & \frac{\operatorname{sen} 2\alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha_1}, & 1 \\ \frac{\operatorname{sen} n\alpha_2}{\operatorname{sen} \alpha_2}, & \frac{\operatorname{sen} (n-1)\alpha_2}{\operatorname{sen} \alpha_2}, & \ldots, & \frac{\operatorname{sen} 2\alpha_2}{\operatorname{sen} \alpha_2}, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\operatorname{sen} n\alpha_{n-1}}{\operatorname{sen} \alpha_{n-1}}, & \frac{\operatorname{sen} (n-1)\alpha_{n-1}}{\operatorname{sen} \alpha_{n-1}}, & \ldots, & \frac{\operatorname{sen} 2\alpha_{n-1}}{\operatorname{sen} \alpha_n}, & 1 \\ \frac{\operatorname{sen} n\alpha_n}{\operatorname{sen} \alpha_n}, & \frac{\operatorname{sen} (n-1)\alpha_n}{\operatorname{sen} \alpha_n}, & \ldots, & \frac{\operatorname{sen} 2\alpha_n}{\operatorname{sen} \alpha_n}, & 1 \end{vmatrix} =$$

$$
= \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 \dots \operatorname{sen}\alpha_n
\begin{vmatrix}
\cos^{n-1}\alpha_1 & \dots & \cos\alpha_1 & 1 \\
\cos^{n-1}\alpha_2 & \dots & \cos\alpha_2 & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\cos^{n-1}\alpha_{n-1} & \dots & \cos\alpha_{n-1} & 1 \\
\cos^{n-1}\alpha_n & \dots & \cos\alpha_n & 1
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
2^{n-2} & * & * & \dots & * & * \\
0 & 2^{n-3} & * & \dots & * & * \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{vmatrix};
$$

donde si trae

$$
(4) \qquad S = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 \dots \operatorname{sen}\alpha_n \,.\, \Gamma .
$$

Mediante le formole (3) e (4), che furono già date senza dimostrazione dal Muir, (1) il calcolo dei determinanti C e S è ridotto a quello del determinante Γ e questo è effettuato dalle formole (2).

Analogamente si vede come possano calcolarsi tutti i determinanti del tipo (B) ove non entrano che soli coseni o soli seni, (2) e come in funzione di quelli fra essi contenenti coseni possano esprimersi i determinanti del tipo (A) ove pure entrino o soltanto seni o soltanto coseni. Per la determinazione di tutti gli altri determinanti dei tipi anzidetti fa mestieri premettere quanto segue.

2. Posto

$$
A = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha ,
$$

si ottiene

$$
\cos\alpha = \frac{1 - A^2}{1 + A^2}, \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{2A}{1 + A^2},
$$

e quindi

$$
(\cos m\alpha + i \operatorname{sen} m\alpha) = (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^m = \frac{(1 + iA)^{2m}}{(1 + A^2)^m} .
$$

Si deduce pertanto:

$$
\cos m\alpha = \frac{\sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=m} (-1)^{\lambda} \binom{2m}{2\lambda} A^{2\lambda}}{(1 + A^2)^m}, \quad \operatorname{sen} m\alpha = \frac{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=m} (-1)^{\lambda-1} \binom{2m}{2\lambda - 1} A^{2\lambda-1}}{(1 + A^2)^m};
$$

relazioni che, per brevità, scriveremo come segue:

$$
\cos m\alpha = \frac{\gamma_m(A)}{(1 + A^2)^m}, \qquad \operatorname{sen} m\alpha = \frac{\sigma_m(A)}{(1 + A^2)^m},
$$

osservando che γ_m e σ_m sono polinomi interi in A dei gradi risp. $2m$ e $2m - 1$.

---

(1) Op. cit. p. 181.

(2) Si veda l'articolo del Prof. STUDNICKA, *Odvozeni novych obecnych vzorcu goniometrickych* (Vestnik Ceské Akademie cisare Frantiska Josefa pro vedy, slovesnost a umeni, Roc. VI).

3. Ciò posto sia Δ_n un determinante del tipo (A):

$$\Delta_n = |\,\mathrm{sen}\, m_1\alpha_h\,,\ \mathrm{sen}\, m_2\alpha_h\,, \ldots,\ \mathrm{sen}\, m_k\alpha_h\,,\ \cos m_{k+1}\alpha_h\,, \ldots,\ \cos m_n\alpha_h\,|\,;$$

applicando ai singoli elementi di esso le formole (5) si ottiene,

$$\Delta_n = \left| \frac{\sigma_{m_1}(A_h)}{(1+A_h^2)^{m_1}}, \ldots, \frac{\sigma_{m_k}(A_h)}{(1+A_h^2)^{m_k}},\ \frac{\gamma_{m_{k+1}}(A_h)}{(1+A_h^2)^{m_{k+1}}}, \ldots, \frac{\gamma_{m_n}(A_h)}{(1+A_h^2)^{m_n}} \right|.$$

Se ora M è il massimo degli interi $m_1, m_2, \ldots, m_n$ potremo surrogare questa formola con la seguente:

$$\Delta_n = \frac{1}{(1+A_1^2)^M\,(1+A_2^2)^M \ldots (1+A_n^2)^M} \times$$

$$\left|(1+A_h^2)^{M-m_1}\sigma_{m_1}(A_h), \ldots, (1+A_h^2)^{M-m_k}\sigma_{m_k}(A_h),\right.$$

$$\left.(1+A_h^2)^{M-m_{k+1}}\gamma_{m_{k+1}}(A_h), \ldots, (1+A_h^2)^{M-m_n}\gamma_{m_n}(A_h)\right|.$$

Si osservi adesso che i singoli termini della h^{ma} orizzontale di questo determinante sono polinomî di grado $\geqq 2M$ in A_h, i cui coefficienti sono indipendenti da h; in conseguenza potremo scrivere:

$$(1+A_h^2)^{M-m_r}\sigma_{m_r}(A_h) = \sum_{\mu=0}^{\mu=2M} p_{r,\mu}\, A_h^{2M-\mu}\,,\ (r = 1, 2, \ldots, k)$$

$$(1+A_h^2)^{M-m_s}\gamma_{m_s}(A_h) = \sum_{\mu=0}^{\mu=2M} p_{s,h}\, A_h^{2M-\mu}\,,\ (s = k+1,\ k+2, \ldots, n)\,.$$

Si osservi ancora che, essendo

$$\frac{1}{1+A_h^2} = \cos^2\frac{\alpha_h}{2},$$

il fattore esterno nell'espressione di Δ_n è

$$\left(\cos\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2}\ldots\cos\frac{\alpha_n}{2}\right)^{2M}$$

Si vedrà in conseguenza che, a meno di questo fattore, Δ_n è il prodotto delle due matrici rettangolari seguenti:

$$\|\,p_{k0}\,,\ p_{k1}\,, \ldots,\ p_{k,2M-1}\ p_{k,2M}\,\|,\quad \|\,A_k^{2M},\ A_k^{2M-1}, \ldots,\ A_k\,,\ 1\,\|\,;$$

ora questo è la somma dei prodotti dei determinanti omologhi estratti dalle due matrici stesse; d'altronde i determinanti estratti dalle prime sono numeri interi dipendenti da $m_1, m_2, \ldots, m_n, n$, che si possono determinare in ogni singolo caso, mentre quelli estratti dalla seconda sono della forma

$$|\,A_h^{r_1},\ A_h^{r_2}, \ldots,\ A_h^{r_{n-1}},\ A_h^{r_n}\,|,$$

$$|\,A_h^{n-1},\ A_h^{n-2}, \ldots,\ A_h\,,\ 1\,| \times F(A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n),$$

ove F è una funzione simmetrica delle $A_1, A_2, \ldots, A_n$ il cui grado è espresso da $r_1 + r_2 + \ldots + r_n - \frac{n(n-1)}{2}$. Si rifletta finalmente essere

$$|A_h^{n-1} A_h^{n-2} \ldots A_h 1| = \prod_{pq} (A_p - A_q) =$$

(5) $$= \frac{\prod_{pq} \operatorname{sen} \frac{\alpha_p - \alpha_q}{2}}{\prod_{pq} \cos \frac{\alpha_p}{2} \cos \frac{\alpha_q}{2}} = \frac{\prod_{pq} \operatorname{sen} \frac{\alpha_p - \alpha_q}{2}}{\left(\cos \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_2}{2} \ldots \cos \frac{\alpha_n}{2}\right)^{n-1}};$$

e si vedrà potersi ritenere dimostrato il seguente

Teorema. — *Ogni determinante del tipo* (A) *ha una espressione della seguente forma*

(6) $$|\operatorname{sen} m_1 \alpha_h, \ldots, \operatorname{sen} m_k \alpha_h, \cos m_{k+1} \alpha_h, \ldots, \cos m_n \alpha_h| =$$

$$= \left(\cos \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_2}{2} \ldots \cos \frac{\alpha_n}{2}\right)^{2M-n+1} \cdot \prod \operatorname{sen} \frac{\alpha_p - \alpha_q}{2} \cdot f\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}, \ldots, \operatorname{tg} \frac{\alpha_n}{2}\right),$$

ove M *è il massimo dei numeri* $m_1\ m_2, \ldots, m_n$ *e* f *è una funzione simmetrica delle quantità da cui dipende.*

Servendosi delle relazioni che intercedono tra le funzioni trigonometriche, alla funzione f potremo dare varie forme fra cui si preferirà la più conveniente in ogni caso, come vedremo negli esempi esposti più avanti.

È appena necessario avvertire che l'identico procedimento di trasformazione è effettuabile sui determinanti (B), onde per questi sussiste un teorema analogo al precedente.

4. È opportuno illustrare quanto precede sopra alcuni esempi: come tali sceglierò quelli appunto che addussi nel mio articolo dianzi citato. Avverto che indicherò sempre con A, B, C le quantità $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$.

I. *Esempio.*

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} \alpha, & \cos \alpha, & 1 \\ \operatorname{sen} \beta, & \cos \beta, & 1 \\ \operatorname{sen} \gamma, & \cos \gamma, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2A}{1+A^2}, & \frac{1-A^2}{1+A^2}, & 1 \\ \frac{2B}{1+B^2}, & \frac{1-B^2}{1+B^2}, & 1 \\ \frac{2C}{1+C^2}, & \frac{1-C^2}{1+C^2}, & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= - \frac{4}{(1+A^2)(1+B^2)(1+C^2)} \begin{vmatrix} A^2, & A, & 1 \\ B^2, & B, & 1 \\ C^2, & C, & 1 \end{vmatrix} = - \frac{4(A-B)(A-C)(B-C)}{(1+A^2)(1+B^2)(1+C^2)}.$$

Si conclude adunque: [1]

(7) $$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} \alpha, & \cos \alpha, & 1 \\ \operatorname{sen} \beta, & \cos \beta, & 1 \\ \operatorname{sen} \gamma, & \cos \gamma, & 1 \end{vmatrix} = 4 \operatorname{sen} \frac{\beta - \gamma}{2} \operatorname{sen} \frac{\gamma - \alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2}$$

---

[1] Mansion, *Elemente der Theorie der Determinanten* (Leipzig, 1878), p. 22.

II. *Esempio.*

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha, & \cos\alpha, & \operatorname{sen}2\alpha \\ \operatorname{sen}\beta, & \cos\beta, & \operatorname{sen}2\beta \\ \operatorname{sen}\gamma, & \cos\gamma, & \operatorname{sen}2\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{2A}{1+A^2}, & \dfrac{1-A^2}{1+A^2}, & \dfrac{4A(1-A^2)}{(1+A^2)^2} \\ \dfrac{2B}{1+B^2}, & \dfrac{1-B^2}{1+B^2}, & \dfrac{4B(1-B^2)}{(1+B^2)^2} \\ \dfrac{2C}{1+C^2}, & \dfrac{1-C^2}{1-C^2}, & \dfrac{4C(1-C^2)}{(1+C^2)^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{8}{(1+A^2)^2(1+B^2)^2(1+C^2)^2} \begin{vmatrix} A^3+A, & A^4-1, & A^3-A \\ B^3+B, & B^4-1, & B^3-B \\ C^3+C, & C^4-1, & C^3-C \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{16}{(1+A^2)^2(1+B^2)^2(1+C^2)^2} \left\{ - \begin{vmatrix} A^4 & A^3 & A \\ B^4 & B^3 & B \\ C^4 & C^3 & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A^3 & A & 1 \\ B^3 & B & 1 \\ C^3 & C & 1 \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= \frac{16(B-C)(C-A)(A-B)}{(1+A^2)^2(1+B^2)^2(1+C^2)^2} \{A+B+C-ABC(BC+CA+AB)\}.$$

Il calcolo del determinante proposto si può considerare come effettuato; ma il risultato può scriversi più elegantemente osservando in primo luogo che il fattore che precede la $\{\}$ vale

$$16 \operatorname{sen}\frac{\beta-\gamma}{2} \operatorname{sen}\frac{\gamma-\alpha}{2} \operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2} \cos^2\frac{\alpha}{2} \cos^2\frac{\beta}{2} \cos^2\frac{\gamma}{2},$$

osservando in secondo luogo che sussiste la identità

$$A(1-B^2C^2) = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\beta}{2}\cos^2\dfrac{\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha(\cos\beta+\cos\gamma)}{4\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\beta}{2}\cos^2\dfrac{\gamma}{2}},$$

assieme alle due analoghe. Quel determinante vale dunque:

$$4 \operatorname{sen}\frac{\beta-\gamma}{2} \operatorname{sen}\frac{\gamma-\alpha}{2} \operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2} \times$$
$$\times [\operatorname{sen}\alpha(\cos\beta+\cos\gamma) + \operatorname{sen}\beta(\cos\gamma+\cos\alpha) + \operatorname{sen}\gamma(\cos\alpha+\cos\beta)];$$

epperò si conclude: (¹)

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha, & \cos\alpha, & \operatorname{sen}2\alpha \\ \operatorname{sen}\beta, & \cos\beta, & \operatorname{sen}2\beta \\ \operatorname{sen}\gamma, & \cos\gamma, & \operatorname{sen}2\gamma \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \operatorname{sen}\frac{\beta-\gamma}{2} \operatorname{sen}\frac{\gamma-\alpha}{2} \operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2} [\operatorname{sen}(\beta+\gamma) + \operatorname{sen}(\gamma+\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha+\beta)]$$

---

(1) *Mathésis*, T. VI (1886), p. 88.

Cambiando ivi α, β, γ risp. in $\frac{\pi}{4}-\alpha$, $\frac{\pi}{4}-\beta$, $\frac{\pi}{4}-\gamma$ si ottiene, dopo qualche trasformazione,

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha, & \cos\alpha, & \cos^2\alpha \\ \operatorname{sen}\beta, & \cos\beta, & \cos^2\beta \\ \operatorname{sen}\gamma, & \cos\gamma, & \cos^2\gamma \end{vmatrix} =$$

$$= -4\operatorname{sen}\frac{\beta-\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma-\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}[\cos(\beta+\gamma)+\cos(\gamma+\alpha)+\cos(\alpha+\beta)]$$

III. *Esempio.*

$$\begin{vmatrix} \cos 2\alpha, \operatorname{sen}\alpha, 1 \\ \cos 2\beta, \operatorname{sen}\beta, 1 \\ \cos 2\gamma, \operatorname{sen}\gamma, 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \cos^2\alpha, \operatorname{sen}\alpha, 1 \\ \cos^2\beta, \operatorname{sen}\beta, 1 \\ \cos^2\gamma, \operatorname{sen}\gamma, 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \frac{(1-A^2)^2}{(1+A^2)^2}, & \frac{2A}{1+A^2}, & 1 \\ \frac{(1-B^2)^2}{(1+B^2)^2}, & \frac{2B}{1+B^2}, & 1 \\ \frac{(1-C^2)^2}{(1+C^2)^2}, & \frac{2C}{1+C^2}, & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{16}{(1+A^2)^2(1+B^2)^2(1+C^2)^2}\begin{vmatrix} A^4+1, & A^3+A, & A^2 \\ B^4+1, & B^3+B, & B^2 \\ C^4+1, & C^3+C, & C^2 \end{vmatrix}$$

$$= 16\cos^4\frac{\alpha}{2}.\cos^4\frac{\beta}{2}.\cos^4\frac{\gamma}{2}$$

$$\left\{A^2B^2C^2\begin{vmatrix} A^2, A, 1 \\ B^2, A, 1 \\ C^2, C, 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A^3, A^2, 1 \\ B^3, B^2, 1 \\ C^3, C^2, 1 \end{vmatrix} - ABC\begin{vmatrix} A^3, A, 1 \\ B^3, B, 1 \\ C^3, C, 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A^2, A, 1 \\ B^2, B, 1 \\ C^2, C, 1 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= 16\cos^4\frac{\alpha}{2}.\cos^4\frac{\beta}{2}.\cos^4\frac{\gamma}{2}(A-B)(A-C)(B-C)\times$$

$$[A^2B^2C^2+(BC+CA+AB)-ABC(A+B+C)-1]$$

$$= -16\cos^4\frac{\alpha}{2}.\cos^4\frac{\beta}{2}.\cos^4\frac{\gamma}{2}\times$$

$$(B-C)(C-A)(A-B)(BC-1)(CA-1)(AB-1).$$

Se ora si osserva essere

$$BC-1 = -\frac{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}},$$

si concluderà:

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} \cos 2\alpha, & \operatorname{sen}\alpha, & 1 \\ \cos 2\beta, & \operatorname{sen}\beta, & 1 \\ \cos 2\gamma, & \operatorname{sen}\gamma, & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 16\operatorname{sen}\frac{\beta-\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma-\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

IV. *Esempio.*

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha, & \mathrm{sen}\, 2\alpha, & 1 \\ \cos\beta, & \mathrm{sen}\, 2\beta, & 1 \\ \cos\gamma, & \mathrm{sen}\, 2\gamma, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1-A^2}{1+A^2}, & \frac{4A(1-A^2)}{(1+A^2)^2}, & 1 \\ \frac{1-B^2}{1+B^2}, & \frac{4B(1-B^2)}{(1+B^2)^2}, & 1 \\ \frac{1-C^2}{1+C^2}, & \frac{4C(1-C^2)}{(1+C^2)^2}, & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{8}{(1+A^2)^2(1+B^2)^2(1+C^2)^2} \begin{vmatrix} A^4-1, A^3-A, A^2+1 \\ B^4-1, B^3-B, B^2+1 \\ C^4-1, C^3-C, C^2+1 \end{vmatrix} = \frac{8}{(1+A^2)^2(1+B^2)^2(1+C^2)^2} \times$$

$$\times \left\{ \begin{vmatrix} A^2, A, 1 \\ B^2, B, 1 \\ C^2, C, 1 \end{vmatrix} A^2B^2C^2 + \begin{vmatrix} A^4, A^3, 1 \\ B^4, B^3, 1 \\ C^4, C^3, 1 \end{vmatrix} + ABC \begin{vmatrix} A^3, A, 1 \\ B^3, B, 1 \\ C^3, C, 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A^4, A, 1 \\ B^4, B, 1 \\ C^4, C, 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A^3, A^2, 1 \\ B^3, B^2, 1 \\ C^3, C^2, 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A^2, A, 1 \\ B^2, B, 1 \\ C^2, C, 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \frac{8(A-B)(A-C)(B-C)}{(1+A^2)^2(1+B^2)^2(1+C^2)^2} \left\{ A^2B^2C^2 - (A+B+C)^2 + (BC+CA+AB) - 1 \right\}.$$

Il primo fattore di questa espressione vale

$$-8\, \mathrm{sen}\, \frac{\beta-\gamma}{2}\, \mathrm{sen}\, \frac{\gamma-\alpha}{2}\, \mathrm{sen}\, \frac{\alpha-\beta}{2} \cos^2\frac{\alpha}{2} \cos^2\frac{\beta}{2} \cos^2\frac{\gamma}{2};$$

e riguardo alla quantità in $\{\}$ essa si trasforma successivamente come segue

$$(ABC+A+B+C)(ABC-A-B-C)+(BC+CA+AB+1)(BC+CA+AB-1)=$$

$$= \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}} \left\{ -\frac{1}{2}\, \mathrm{sen}\, \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \times \right.$$

$$\left[\mathrm{sen}\, \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} + \mathrm{sen}\, \frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2} + \mathrm{sen}\, \frac{\alpha-\beta+\gamma}{2} + \mathrm{sen}\, \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \times$$

$$\left. \left[-\cos \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} + \cos \frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2} + \cos \frac{\alpha-\beta+\gamma}{2} + \cos \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}} \left\{ \cos(\alpha+\beta+\gamma) - \cos\alpha - \cos\beta - \cos\gamma \right\}.$$

Dunque siamo autorizzati a concludere:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha, & \mathrm{sen}\, 2\alpha, & 1 \\ \cos\beta, & \mathrm{sen}\, 2\alpha, & 1 \\ \cos\gamma, & \mathrm{sen}\, 2\gamma, & 1 \end{vmatrix} = \tag{11}$$

$$= 4\, \mathrm{sen}\, \frac{\beta-\gamma}{2}\, \mathrm{sen}\, \frac{\gamma-\alpha}{2}\, \mathrm{sen}\, \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$[\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - \cos(\alpha+\beta+\gamma)].$$

5. Quando siansi calcolati i determinanti del tipo (A), possiamo dedurre i valori di altri somiglianti contenenti altre funzioni trigonometriche avvalendosi delle relazioni che intercedono fra queste. Come esempio consideriamo il determinante (di cui ho dato il valore nel mio articolo succitato)

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha, & \operatorname{tg}\alpha, & 1 \\ \cos\beta, & \operatorname{tg}\beta, & 1 \\ \cos\gamma, & \operatorname{tg}\gamma, & 1 \end{vmatrix}$$

e poniamolo successivamente sotto le forme seguenti:

$$\frac{1}{\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma}\begin{vmatrix} \cos^2\alpha, & \operatorname{sen}\alpha, & \cos\alpha \\ \cos^2\beta, & \operatorname{sen}\beta, & \cos\beta \\ \cos^2\gamma, & \operatorname{sen}\gamma, & \cos\gamma \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\begin{vmatrix} 1+\cos 2\alpha, & \operatorname{sen}\alpha, & \cos\alpha \\ 1+\cos 2\beta, & \operatorname{sen}\beta, & \cos\beta \\ 1+\cos 2\gamma, & \operatorname{sen}\gamma, & \cos\gamma \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\left\{\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha, & \cos\alpha, & 1 \\ \operatorname{sen}\beta, & \cos\beta, & 1 \\ \operatorname{sen}\gamma, & \cos\gamma, & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha, & \cos\alpha, & \cos 2\alpha \\ \operatorname{sen}\beta, & \cos\beta, & \cos 2\beta \\ \operatorname{sen}\gamma, & \cos\gamma, & \cos 2\gamma \end{vmatrix}\right\}.$$

Servendosi ora delle formole (7) e (9) si conclude:

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} \cos\alpha, & \operatorname{tg}\alpha, & 1 \\ \cos\beta, & \operatorname{tg}\beta, & 1 \\ \cos\gamma, & \operatorname{tg}\gamma, & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}\frac{\beta-\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma-\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma}$$

$$\{1-\cos(\beta+\gamma)-\cos(\gamma+\alpha)-\cos(\alpha+\beta)\}.$$

Analogamente dimostrerebbesi essere:

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} \operatorname{sen}2\alpha, & \operatorname{tg}\alpha, & 1 \\ \operatorname{sen}2\beta, & \operatorname{tg}\beta, & 1 \\ \operatorname{sen}2\gamma, & \operatorname{tg}\gamma, & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}\frac{\beta-\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma-\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma}\ [1]$$

6. Il teorema dimostrato nel n. 3 può estendersi a determinanti del medesimo tipo, ma ove i numeri $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sono, non interi, ma razionali. Supposto infatti che, ridotti i valori delle m alla loro più semplice espressione, sia

$$m_1 = \frac{p_1}{q_1},\ m_2 = \frac{p_2}{q_2}, \ldots, m_n = \frac{p_n}{q_n},$$

$$r_1 = p_1\frac{D}{q_1},\ \ r_2 = p_2\frac{D}{q_2}, \ldots,\ \ r_n = p_n\frac{D}{q_n}$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{D},\ \ \beta_2 = \frac{\alpha_2}{D}, \ldots,\ \ \beta_n = \frac{\alpha_n}{D}.$$

---

[1] Perciò, se α, β, γ sono angoli di un triangolo, il determinante che sia al primo membro della (13) è nullo: conformemente ad un'asserzione del sig. J. R. Scott (*A Treatise on the Theory of Determinants*. Cambridge, 1880, p. 213).

Sarà allora identicamente

$$\left| \operatorname{sen} m_1 \alpha_h, \ldots, \operatorname{sen} m_k \alpha_h, \cos m_{k+1} \alpha_h, \ldots, \cos m_n \alpha_h \right|$$
$$= \left| \operatorname{sen} r_1 \beta_h, \ldots, \operatorname{sen} r_k \beta_h, \cos r_{k+1} \beta_h, \ldots, \cos r_n \beta_h \right|.$$

Ora quest'ultimo determinante rientra nel tipo già studiato onde ha una espressione della seguente forma

$$\left(\cos\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\beta_2}{2}\ldots\cos\frac{\beta_n}{2}\right)^{2R-n+1}$$
$$\Pi \operatorname{sen}\frac{\beta_p-\beta_q}{2}\cdot f\left(\operatorname{tg}\frac{\beta_1}{2},\ \operatorname{tg}\frac{\beta_2}{2},\ldots,\operatorname{tg}\frac{\beta_n}{2}\right),$$

essendo R il massimo dei numeri $r_1\ r_2 \ldots r_n$, ossia dei numeri

$$D\frac{p_1}{q_1},\quad D\frac{p_2}{q_2},\ldots,\quad D\frac{p_n}{q_n},$$

in altre parole R è il prodotto del massimo fra i numeri $m_1, m_2, \ldots, m_n$ pel minimo multiplo comune dei denominatori dei numeri stessi. Riponendo per le quantità β i loro valori si conclude:

$$(14)\qquad \left| \operatorname{sen} m_1 \alpha_h, \ldots, \operatorname{sen} m_k \alpha_h, \cos m_{k+1} \alpha_h, \ldots, \cos m_n \alpha_h \right| =$$
$$= \left(\cos\frac{\alpha_1}{2D}\cos\frac{\alpha_2}{2D}\ldots\cos\frac{\alpha_n}{2D}\right)^{2R-n+1}$$
$$\Pi \operatorname{sen}\frac{\alpha_p-\alpha_q}{2D} f\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2D},\ldots,\operatorname{tg}\frac{\alpha_n}{2D}\right),$$

ove f è al solito una funzione simmetrica de' suoi argomenti.

RELAZIONE FRA L'AREA E LA SOMMA DEGLI ANGOLI

di un poligono sferico qualunque

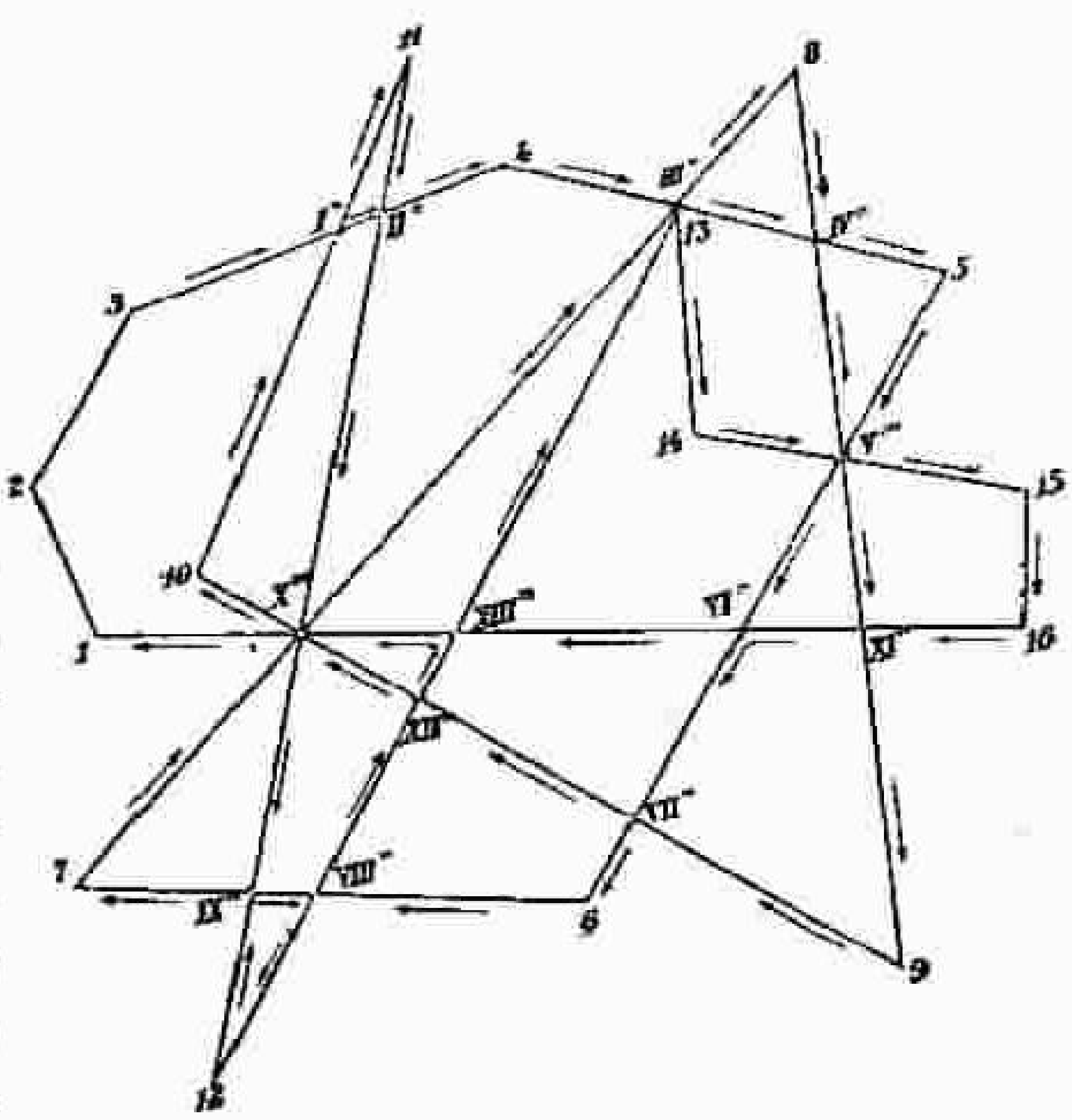
1. Al § 2, n. 9 della planimetria del Baltzer, trovasi enunciato e dimostrato il seguente teorema: *Se il perimetro di un poligono è intrecciato, la somma degli angoli sarà un multiplo pari o dispari di 180°, secondochè il numero dei vertici è pari o dispari.*

Questo teorema lascia però troppa indeterminazione nel valore di quella somma; non sarà quindi del tutto inutile la ricerca di una regola che permetta di determinare la detta somma con tutta esattezza. Col presente scritto mi propongo, pertanto, di risolvere la seguente questione più generale: *Trovare per un poligono sferico intrecciato qualunque, la relazione che passa fra la somma dei suoi angoli e l'area da esso determinata.* Sarà poi facile dedurre da questo resultato, il teorema relativo alla somma degli angoli di un poligono piano intrecciato. (1)

(1) POINSOT. *Mémoires sur les polygones et les polyèdres* ("Journal de l'École polyt.", Cah. X, p. 16), aveva già dato un teorema relativo alla somma degli angoli di un poligono regolare intrecciato;

2. Un *poligono intrecciato* qualunque con *nodi semplici*, può decomporsi in *poligoni ordinari* disgiungendo gli angoli formati dai *rami* che concorrono in uno stesso nodo, conservando però inalterata la direzione dei rami medesimi. (1)

Il senso secondo il quale debbono essere percorsi i singoli poligoni ordinari, è quello stesso del poligono dato. Stabilita poi quale delle due regioni, *destra* o *sinistra* (relativamente ad una persona che percorra in un determinato senso il perimetro del poligono) debba considerarsi come quella limitata dal dato poligono, rimane fissata anche la regione circoscritta dai singoli circuiti ordinari. Dopo ciò intenderemo per area limitata in un poligono intrecciato, la *somma* delle aree limitate dai diversi poligoni ordinari. (2) È chiaro che l'accennata scomposizione non può effettuarsi che in un sol modo, e che la somma dei due angoli disgiunti in uno stesso nodo, è *sempre* eguale, tenuto conto del senso dei lati, a 4 *angoli retti*.



Anche per un poligono intrecciato con *nodi multipli*, può effettuarsi una scomposizione analoga a quella ora detta. Il poligono rappresentato dall'annessa figura, ha 16 vertici e XIII nodi, distinti rispettivamente con numeri arabici e romani. Tanto gli uni quanto gli altri sono numerati nell'ordine secondo cui s' incontrano, allorchè si percorre il poligono nel senso delle freccie. Gli apici apposti ai numeri romani, indicano la *multiplicità del nodo.*

I poligoni ordinari a cui dà luogo la scomposizione suddetta sono i 5 seguenti:

P_1.... 1, 2, 3, I, 11, II, 4, III, 8, IV, 5, V, 15, 16, XI, 9, VII, 6, VIII, XII, X, IX, 7, X, 1.
P_2.... 10, I, II, X, 10.
P_3.... 12, IX, VIII, 12.
P_4.... 13, 14, V, VI, XIII, 13.
P_5.... X, III, IV, XI, VI, VII, XII, XIII, X.

---

ma la dimostrazione vale solo pei poligoni regolari o almeno solamente per quei poligoni che nel loro intreccio si comportano come i regolari.

V. anche Dostor, *Théorie générale des polygones étoilés*, " Journal de Mathém. pures et appl. ", 3e série, t. VI; 1880.

(1) Cremona, *Elementi di calcolo grafico*, n. 21.

V. anche Clifford, *Il senso comune nelle scienze esatte*, pag. 159 e segg. (Milano, F.lli Dumolard, 1886).

(2) La parola *somma* è presa qui nel senso aritmetico, giacchè noi non faremo la distinzione delle aree in *positive* e *negative* come è stabilito per i *circuiti* piani intrecciati, nelle opere citate del Cremona e del Clifford.

È però necessario di avvertire che nella precedente scomposizione si verifica una certa arbitrarietà relativamente al passaggio da un ramo ad un altro, nei nodi multipli (nodo V e X); ma senza preoccuparci qui delle differenti scomposizioni che si possono ottenere, dipendentemente dal modo secondo il quale è stato regolato il passaggio da un ramo ad un altro, basterà solo di osservare che ad ogni angolo, disgiunto da un nodo di *multiplicità pari* (nodo X), ne corrisponde sempre un altro opposto al vertice, e che perciò, tenuto conto del senso dei lati, la loro somma *è sempre uguale a quattro retti*. Pel caso di un nodo di multiplicità dispari (nodo V), è da osservare che dopo aver disgiunti due a due gli angoli, rimangono infine due rami (IV-V; V-XI) l'uno sul prolungamento dell'altro, e tali da costituire *un unico lato* (IV-XI) di uno dei poligoni ordinari della scomposizione.

Possiamo dunque affermare che se il nodo è di multiplicità $2n$ o $2n+1$, la somma di tutti gli angoli appartenenti a poligoni che hanno un vertice in quel nodo, è uguale $n.\ 360^\circ$, ossia a $2n.\ 180^\circ$. È ancora da avvertire, che se in coincidenza di un nodo si trovano uno o più vertici del poligono (vertice 13, coincidente col nodo III), i lati di questi, non debbono prender mai parte al disgiungimento degli angoli in quel nodo.

3. Allorchè un poligono intrecciato si decompone in σ poligoni ordinari, lo diremo di *specie* σ. Ognuno di questi poligoni, oltre contenere dei vertici appartenenti al poligono dato, ne conterrà ancora uno o più, provenienti dal disgiungimento dei nodi.

In ciò che segue indicheremo con L il numero dei lati del poligono intrecciato; con λ la somma del numero dei *lati* e dei *rami* dello stesso poligono, con

$$n_1, n_2, n_3, \ldots\ldots n_p$$

i p nodi, rispettivamente di multiplicità

$$O_1, O_2, O_3, \ldots\ldots O_p\,;$$

con ν il numero dei nodi di multiplicità dispari; con

$$l_1,\ l_2,\ l_3, \ldots\ldots l_\sigma$$

il numero dei lati (rami o lati del dato poligono intrecciato) che compariscono rispettivamente nei σ poligoni ordinari della scomposizione.

È facile ora dimostrare che hanno luogo le relazioni

$$\lambda = \mathrm{L} + \sum_1^p O_h \,.\, n_h\,,$$

$$\sum_1^\sigma l_r = \lambda - \nu.$$

La prima di queste relazioni si rende manifesta coll'osservare che percorrendo con continuità il perimetro del poligono intrecciato, ad ogni passaggio per un vertice o nodo, si deve contare o un lato od un ramo del poligono dato.

La seconda è pure chiara ricordando ciò che abbiamo detto sopra, e cioè che nel disgiungimento degli angoli rimangono sempre in ultimo, per ogni nodo di multiplicità dispari, *due raggi*, l'uno sul prolungamento dell'altro, tali da costituire un *unico lato* di uno dei poligoni ordinari.

Dalle due relazioni precedenti si ricava poi,

$$\sum_1^{\sigma} l_r = \mathrm{L} + \sum_1^{h} 0_h n_h - \nu. \tag{1}$$

4. La porzione di superficie sferica compresa fra due poligoni ordinari l'uno interno all'altro, è la differenza fra le regioni limitate dai singoli poligoni. In questo caso possiamo anche dire che il poligono interno determina una *lacuna* in quello nel quale si trova tutto compreso..

Quando si hanno due poligoni intrecciati (che supporremo di avere scomposti, indipendentemente l'uno dall'altro, in poligoni ordinari) ammetteremo che le parti dell'uno producano altrettante lacune in parti corrispondenti dell'altro. Anche qui si presenta dell'arbitrarietà relativamente alla scelta dei poligoni ordinari dell'uno, nei quali si presentano le *lacune* prodotte dai poligoni ordinarii dell'altro; ma ciò non ha alcuna influenza nè sulla somma degli angoli dei due poligoni intrecciati, nè sull'area determinata dal loro insieme. È quindi inutile, per la ricerca che faremo tra poco, di tener conto di questa diversità. Dobbiamo soltanto avvertire che per serbare un carattere concreto alle nostre considerazioni è necessario supporre che ogni poligono, che determina una lacuna, sia *tutto* compreso nella porzione di superficie sferica determinata da uno o più poligoni ordinari del primo poligono intrecciato. Il numero delle lacune di un poligono lo chiameremo *genere* del poligono.

5. Premesse queste considerazioni (che valgono del resto per un circuito intrecciato qualunque giacente su di una superficie arbitraria) veniamo a determinare la relazione che passa tra l'area A, il numero L dei lati, la somma s degli angoli, la specie σ ed il genere γ di un poligono sferico.

Cominciamo intanto a dimostrare che il noto teorema: *un poligono sferico convesso è equivalente alla somma dei suoi angoli diminuita di tanti angoli piatti quanti sono i suoi lati meno due,* sussiste per un poligono sferico non intrecciato con angoli e lati superiori a 180°.

Infatti, mediante un numero p_1 di punti presi convenientemente sul perimetro del dato poligono, e che considereremo come nuovi vertici, potremo ridurre tutti i lati ad essere inferiori a 180°, e mediante un numero p_2 di punti presi opportunamente nell'interno del poligono, potremo, riunendoli convenientemente tra di loro e coi vertici e i punti p_1, scomporre il poligono in n triangoli ordinari a ciascuno dei quali è applicabile il teorema su riportato. Indicando con a_r, s_r, l_r, rispettivamente l'area, la somma degli angoli ed il numero dei lati di uno di questi triangoli, avremo, sommando poi membro a membro tutte le eguaglianze,

$$\sum_1^n h_r = \sum_1^n s_r - n180^\circ;$$

ma

$$\sum_1^n a_r = A; \ \sum_1^n s_r = S + p_1 180^\circ + p_2 360^\circ$$

e quindi

$$A = S - 180^\circ \{n - p_1 - 2p_2\}.$$

Ora si riconosce facilmente che questa rete di n triangoli possiede $L + p_1 + p_2$ vertici e $\frac{3n + L + p_1}{2}$ lati, e quindi pel teorema di Eulero sui poliedri, applicato ad una rete aperta, avremo

$$(L + p_1 + p_2) + n = \frac{3n + L + p_1}{2} + 1$$

da cui

$$n - p_1 - 2p_2 = L - 2,$$

il quale valore sostituito nella precedente relazione, dà

(2) $$A = S - 180^\circ(L - 2)$$

formola che esprime, per il poligono considerato, il teorema enunciato sopra.

6. Veniamo ora a considerare un poligono intrecciato, pel quale manterremo le notazioni già stabilite ai n. 3 e 4, ed indichiamo inoltre con

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots a_\sigma$$
$$s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots\ldots s_\sigma$$

respettivamente l'area e la somma degli angoli dei singoli poligoni ordinari della scomposizione. Stabilendo per ognuno di questi la relazione (2), e sommando poi membro a membro, otterremo

$$A = \Sigma a_r = \Sigma s_r - 180_0 \left\{ \sum_1^\sigma l_r - 2\sigma \right\}.$$

Ma tenendo conto di quanto è stato detto alla fine del n. 2, abbiamo che l'altra relazione

$$\Sigma s_r = S + \left(\sum_1^p n_h\, o_h - \nu \right) 180^\circ,$$

e quindi sostituendo questo valore di Σs_r nella precedente, insieme a quello dato dalla (1) per $\sum_1^\sigma l_r$, avremo

(3) $$A = S - 180^\circ(L - 2\sigma)$$

7. Sieno ancora i due poligoni intrecciati P_1 e P_2 e indichiamo con P il poligono formato da P_1 colle *lacune* prodottevi da P_2 nel modo già spiegato al n. 3. Se

$$L_1, A_1, S_1, \sigma_1 \,;\; L_2, A_2, S_2, \sigma_2 \,;\; L, A, S, \sigma, \gamma$$

hanno rispettivamente per P_1, P_2 e P il significato già attribuito a queste lettere, si ha

$$L = L_1 + L_2 \,;\; A = A_1 - A_2 \,;\; \sigma = \sigma_1 \,;\; \gamma = \sigma_2 \,;\; S = S_1 + (L_2 360^\circ - S_2),$$

la quale ultima può anche scriversi: $S_1 - S_2 = S - L_2 360$.

Applicando ora ai poligoni P_1 e P_2 la relazione (3) e sottraendo poi membro a membro, avremo

$$A_1 - A_2 = S_1 - S_2 - 180^\circ\left\{(L_1 - L_2) - 2(\sigma_1 - \sigma_2)\right\}$$

nella quale facendo le sostituzioni indicate dalle uguaglianze precedenti, e riducendo otterremo:

$$A = S - 180^\circ \left\{L - 2(\sigma - \gamma)\right\}. \tag{4}$$

Questa formola, che è quella che volevamo trovare, conduce al teorema:

L'area di un poligono sferico qualunque è uguale alla somma dei suoi angoli diminuita di tante volte 180° quant'è la differenza tra il numero dei lati e il doppio della differenza tra la specie ed il genere.

8. Se a ed s indicano la misura di A e di S espresse rispettivamente in triangoli trirettangoli ed in angoli retti, la formola (3) può scriversi

$$a = s - 2\,(L - 2\sigma). \tag{5}$$

Se il poligono intrecciato (senza lacune) è di dimensioni infinitamente piccole rispetto alla sfera sulla quale è tracciato, è chiaro che alcuni dei poligoni ordinari della sua scomposizione, hanno un'area infinitamente piccola, mentre altri differiranno per una quantità infinitesima dalla intera superficie sferica.

Se chiamiamo dunque con α e con β rispettivamente i poligoni della prima e della seconda specie, è facile riconoscere che la (5), a meno di quantità trascurabili, può scriversi

$$8\beta = s - 2\left\{L - 2\,(\alpha + \beta)\right\},$$

da cui

$$s = 2\left\{L + 2(\beta - \alpha)\right\} = 2\left\{L + 2\,k\right\}, \tag{6}$$

avendo fatto k (che chiameremo *classe* del poligono intrecciato) uguale $\beta - \alpha$.

9. Un poligono piano è, rispetto al piano indefinitamente esteso, nelle stesse condizioni di grandezza di un poligono sferico infinitesimo, rispetto alla sfera (di raggio finito) sulla quale è tracciato. Ad un poligono piano è quindi applicabile la formola (6).

Ricordando poi quanto abbiamo detto al principio del n. 2 relativamente alle aree determinate dai singoli poligoni ordinari della scomposizione, e che dei due angoli che si possono considerare in ciascun vertice di ogni poligono (il convesso ed il concavo) deve sempre prendersi quello che si estende nella regione determinata dal poligono stesso, si può enunciare il teorema seguente:

La somma degli angoli di un poligono piano intrecciato qualsiasi è uguale a tante volte due angoli retti quanti sono i lati del poligono aumentati del numero che esprime la classe del poligono stesso.

Questo teorema, sostituito a quello del Baltzer riportato in principio, toglie completamente la accennata indeterminazione nel valore della somma degli angoli di un poligono intrecciato.

Applicazione. — Per un poligono regolare intrecciato di L lati, pel quale si considerino come angoli del poligono quelli *convessi*, si ha sempre $\beta = 0$ e quindi $k = -\alpha$.

La classe, considerata nel suo valore assoluto, non differisce dunque dal numero che Poinsot chiama *specie* del poligono regolare intrecciato. La formola (6), in questa ipotesi, diviene dunque

$$s = 2(L - 2k)$$

che è la nota formola data dal Poinsot. (1)

Il lettore può verificare l'esattezza della formola (7) per il poligono rappresentato dalla figura o per qualunque altro poligono, intrecciato nel modo più complicato. Basta che abbia sempre cura di fare la scomposizione in conformità del procedimento accennato, e di distinguer bene per ogni vertice, quale dei due angoli (il convesso od il concavo) deve essere considerato.

Per rendere anche più facilmente riconoscibili gli angoli dei diversi poligoni ordinari, sarà utile di tratteggiarne il perimetro sempre dalla stessa banda, destra o sinistra di chi percorre il perimetro in un senso determinato. (2)

10. Porrò termine a questo scritto accennando ad un'applicazione della formola (6).

Dato un circuito intrecciato qualunque, che immagineremo costituito da un filo riunito per le due estremità, e giacente su di un piano o altra superficie qualsiasi, si comprende subito come sia possibile di eliminare alcuni nodi rimuovendo in maniera conveniente le diverse parti del filo; e come, dopo ciò, possano rimanerne ancora degli altri che non è possibile di fare sparire, senza una corrispondente torsione del filo. Si può ora domandare: esiste una regola che dia il mezzo di determinare quanti sono i nodi che non è possibile di fare scomparire senza torsioni? A questa domanda risponde il seguente teorema:

Il numero dei nodi che non è possibile di eliminare da un circuito intrecciato, senza altrettante torsioni del filo, è dato dal numero che esprime la classe del circuito, diminuito di un'unità.

Lascio alla cura del lettore, la dimostrazione di questo teorema.

A. ANDREINI.

---

(1) L. c. Vedi anche AMIOT, *Geometria*, pag. 65 (Firenze, Le Monnier, 1858).
(2) Cfr. BALTZER, l. c., e § 9, n. 10.

UNA PROPRIETÀ DELLE CONICHE

Th. Reye nella sua *Geometria di posizione* (Parte 2ª, lezione 25ª) definisce la cubica piana come *il luogo dei punti pei quali passano contemporaneamente le rette omologhe di tre piani omografici sovraposti.*

Indichiamo, per intenderci, con α_1, α_2, α_3 i tre piani omografici e con π_{ij} (i diverso da j) la proiettività che intercede fra il piano α_i e il piano α_j.

È manifesto il seguente

Teorema. — *I punti uniti delle omografie π_{ij} appartengono alla cubica generata dai tre piani omografici α_1, α_2, α_3.*

Dopo ciò è facile dimostrare il

Teorema. — *Se tre coniche hanno una tangente in comune, i tre triangoli costituiti dalle ulteriori tangenti comuni a ciascuna coppia di quelle coniche sono inscritti in una medesima conica.*

Dimostrazione. — Siano k_1, k_2, k_3 tre coniche aventi una medesima tangente a.

Noi potremo assumere per omografie π_{12}, π_{13} quelle in cui a k_1 corrispondono rispettivamente k_2 e k_3 nelle prospettività di asse a.

Con ciò tutti i punti della retta a vengono ad appartenere alla cubica generata dai tre piani omografici α_1, α_2, α_3. Questa cubica degenera adunque nella retta a e in un'ulteriore conica cui apparterranno i punti uniti delle omografie π_{12}, π_{13}, π_{23}, i quali sono precisamente i vertici dei triangoli costituiti delle ulteriori tangenti comuni a ciascuna coppia delle coniche k_1, k_2, k_3.

Osservazione. — È lecito supporre che in qualche caso, date tre coniche aventi una tangente a comune e riferitele prospettivamente, le omografie π_{12}, π_{13} risultino tali che tutti i punti del piano si possano considerare come intersezione di tre rette omologhe. Se ciò avvenisse non sarebbe provato il teorema precedente. Ora osservo che, se k_1, k_2, k_3 non appartengono alla stessa schiera di coniche, ciò non accade. Invero sia r una tangente comune solo a k_1 e k_2. Si prenda su r un punto R_1 che non giaccia su nessun'altra tangente comune. L'omologo R_2 di R_1 in π_{12} giace su r; non così invece l'omologo R_3 di R_1 in π_{13}. Le rette r ed $R_1 R_3$ non sono manifestamente omologhe in π_{23} se no R_1 giacerebbe su A ; dunque per R_1 non passano contemporaneamente tre rette omologhe dei tre piani omografici α_1, α_2, α_3.

Il correlativo del teorema precedente dovrà enunciarsi così

Se tre coniche hanno un punto in comune i tre triangoli aventi i vertici nelle ulteriori intersezioni di ciascuna coppia di quelle coniche inviluppano una conica.

Nei due rami di questo teorema consiste la doppia proprietà delle coniche che io volevo render nota.

Ora, mi intratterrò brevemente a dimostrare alcuni noti teoremi, o servendomi della proprietà precedente, o seguendo lo stesso metodo che ho seguito per provar quella.

1°. *Due triangoli circoscritti ad una conica sono inscrittibili in una conica.* Infatti k_2 e k_3 si possono scegliere in guisa che le loro tangenti comuni con k_1 siano arbitrarie. Tali tangenti danno due triangoli che insieme col triangolo circoscritto a k_2 e k_3 contemporaneamente sono inscrittibili in una medesima conica.

2°. *Se tre coniche hanno due tangenti* a e b *a comune, le intersezioni delle ulteriori tangenti comuni a ciascuna coppia di quelle coniche sono allineate.*

Infatti la conica circoscritta ai triangoli circoscritti a ciascuna coppia delle coniche date e non aventi per lato la retta a degenera nella retta b e in un'ulteriore retta cui appartengono le intersezioni delle ulteriori tangenti comuni a ciascuna coppia delle coniche date.

Ci giova enunciare il *correlativo* di questo teorema, che è il seguente:

Se tre coniche hanno due punti A e B *in comune le congiungenti le ulteriori intersezioni di ciascuna coppia di quelle coniche passano per un punto.*

3°. *Una conica* k *passante per due punti base di un fascio di coniche è segata da queste in involuzione.*

Infatti la congiungente le ulteriori intersezioni di una conica qualunque del fascio con k passa pel punto comune alla congiungente gli ulteriori punti base e alla congiungente le intersezioni di k con una conica k' del fascio.

Giuseppe Vitali.

SOPRA LA DIFFERENZA DI DUE DETERMINANTI QUALUNQUE

Nota del D^r. N. TRAVERSO a Savona.

Dato un determinante d'ordine n

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

indichiamo con Δ' il determinante ottenuto da Δ cambiando $m \leq n^2$ elementi qualsiasi $a_{r_1 s_1}, \dots a_{r_m s_m}$ rispettivamente in $a'_{r_1 s_1}, \dots a'_{r_m s_m}$. Mi propongo di trovare una formola atta ad esprimere la differenza $\Delta' - \Delta$ mediante le differenze

$$a'_{r_1 s_1} - a_{r_1 s_1}, \dots a'_{r_m s_m} - a_{r_m s_m},$$

e di generalizzare, servendomi di alcuni casi particolari d'essa, alcuni noti risultati della teoria dei determinanti. Indichiamo in generale con $\Delta_{r_1 s_1, \dots r_q s_q}$ il determinante ottenuto da Δ sopprimendo le orizzontali $r_1^{me}, \dots r_q^{me}$ e le verticali $s_1^{me}, \dots s_q$, preso col segno $\pm(-1)^{r_1+s_1 \dots + r_q + s_q}$ secondochè le due permutazioni $r_1 \dots r_q$, $s_1 \dots s_q$ sono (segno $+$) o no (segno $-$) della stessa classe.

Cominciamo a cambiare in Δ l'elemento $a_{r_1 s_1}$ in $a'_{r_1 s_1}$, e diciamo $\Delta^{r_1 s_1}$ il nuovo determinante ottenuto. Si ha evidentemente:

$$\Delta^{r_1 s_1} - \Delta = \Delta_{r_1 s_1} (a'_{r_1 s_1} - a_{r_1 s_1})$$

Cambiando in questa $a_{r_2 s_2}$ in $a'_{r_2 s_2}$ ed indicando con $\Delta^{r_1 s_1, r_2 s_2}$ ciò che diventa $\Delta^{r_1 s_1}$, si ha:

$$\begin{aligned}\Delta^{r_1 s_1, r_2 s_2} - \Delta = \Delta_{r_1 s_1}(a'_{r_1 s_1} - a_{r_1 s_1}) + \Delta_{r_2 s_2}(a'_{r_2 s_2} - a_{r_2 s_2}) \\ \pm \Delta_{r_1 s_1, r_2 s_2}(a'_{r_1 s_1} - a_{r_1 s_1})(a'_{r_2 s_2} - a_{r_2 s_2})\end{aligned} \tag{1}$$

perchè si prenda per segno di $\Delta_{r_1 s_1, r_2 s_2}$ il segno $\pm(-1)^{r_1+s_1+r_2+s_2}$ secondochè le due permutazioni $r_1\, r_2$, $s_1\, s_2$ sono o no della stessa classe. Infatti nello sviluppo di $\Delta^{r_1 s_1, r_2 s_2}$ il termine contenente come fattori $a'_{s_1 r_1}$ ed $a'_{r_2 s_2}$ si ottiene moltiplicando l'elemento $a'_{r_1 s_1}$ per quel termine del suo complemento algebrico $\Delta_{r_1 s_1}$ che contiene $a'_{r_2 s_2}$. Quest'ultimo termine si ottiene, salvo il segno, moltiplicando $a'_{r_2 s_2}$ per il suo complemento algebrico in $\Delta^{r_2 s_2}_{r_1 s_1}$. Ora se vogliamo apporre gli indici agli elementi di $\Delta^{r_2 s_2}_{r_1 s_1}$, è chiaro che all'elemento indicato con $a'_{r_2 s_2}$ competono gli indici r_2, s_2 se $r_1 > r_2$, $s_1 > s_2$; $r_2 - 1, s_2$ se $r_2 > r_1, s_1 > s_2$; $r_2, s_2 - 1$ se $r_1 > r_2$, $s_2 > s_1$; $r_2 - 1, s_2 - 1$ se $r_2 > r_1$, $s_2 > s_1$. Considerando ora uno dei quattro casi, ad es. il 2°, si vede che il termine di $\Delta^{r_1 s_1, r_2 s_2}$ contenente $a'_{r_1 s_1}$ ed $a'_{r_2 s_2}$ è $(-1)^{r_1+s_1+r_2-1+s_2} a'_{r_1 s_1} a'_{r_2 s_2} \Delta_{r_1 s_1, r_2 s_2}$, (intendendo qui $\Delta_{r_1 s_1, r_2 s_2}$ preso col segno $+$), od anche $-(-1)^{r_1+s_1+r_2+s_2} a'_{r_1 s_1} a'_{r_2 s_2} \Delta_{r_1 s_1, r_2 s_2}$, e come vedesi in tal caso le due permutazioni $r_1\, r_2$, $s_1\, s_2$ sono di classe contraria. Ora l'unico termine del 2° membro della (1) che contenga $a'_{r_1 s_1}$ ed $a'_{r_2 s_2}$ ha per coefficiente $\Delta_{r_1 s_1, r_2 s_2}$ il quale quindi devesi prendere col segno $-(-1)^{r_1+s_1+r_2+s_2}$. Analogamente dicasi degli altri tre casi.

Consideriamo ora le espressioni:

$$(a'_{r_1 s_1} - a_{r_1 s_1})\,\Delta_{r_1 s_1}, \ldots\ldots (a'_{r_m s_m} - a_{r_m s_m})\,\Delta_{r_m s_m} \tag{2}$$

e conveniamo di considerare $(a'_{r_1 s_1} - a_{r_1 s_1})(a'_{r_2 s_2} - a_{r_2 s_2}) \ldots \Delta_{r_1 s_1, r_2 s_2, \ldots}$ come prodotto delle espressioni $(a'_{r_1 s_1} - a_{r_1 s_1})\,\Delta_{r_1 s_1}$, $(a'_{r_2 s_2} - a'_{r_2 s_2})\,\Delta_{r_2 s_2}, \ldots$ intendendo sempre di attribuire a $\Delta_{r_1 s_1, r_2 s_2, \ldots}$, per ciò che riguarda il valore ed il segno, il significato già noto. Nell'espressione $(a'_{r_i s_i} - a_{r_i s_i})\,\Delta_{r_i s_i}$ diciamo r_i primo indice ed s_i secondo. Supponiamo vera la formola

$$\Delta' - \Delta = S_1 + S_2 + \ldots + S_n \tag{3}$$

nella quale S_p rappresenta la somma dei prodotti p a p delle espressioni (2), estesa però a quei soli prodotti per i quali i primi indici di tutti i fattori sono differenti e così pure i secondi (ossia a quei prodotti che contengono delle a' appartenenti ad orizzontali e verticali diverse di Δ').

Supposto $m \leq n^2 - 1$ possiamo provare che la (3) è anche vera quando si cambiano in Δ, $m + 1 \leq n^2$ elementi. Infatti cambiamo in ambo i membri della (3) l'elemento $a_{r_{m+1} s_{m+1}}$ in $a'_{r_{m+1} s_{m+1}}$ e diciamo Δ' ciò che diventa Δ'. Allora Δ diventa $\Delta^{r_{m+1} s_{m+1}}$ ossia $\Delta + (a'_{r_{m+1} s_{m+1}} - a_{r_{m+1} s_{m+1}})\,\Delta_{r_{m+1} s_{m+1}}$. I termini del 2° membro che cambiano sono evidentemente quelli della forma

$$\begin{gathered}(a'_{r_{\lambda_1} s_{\lambda_1}} - a_{r_{\lambda_1} s_{\lambda_1}}) \ldots (a'_{r_{\lambda_p} s_{\lambda_p}} - a_{r_{\lambda_p} s_{\lambda_p}})\,\Delta_{r_{\lambda_1} s_{\lambda_1}, \ldots r_{\lambda_p} s_{\lambda_p}}; \\ p < n;\ r_{\lambda_1}, \ldots r_{\lambda_p} \lesseqgtr r_{m+1},\ s_{\lambda_1}, \ldots s_{\lambda_p} \lesseqgtr s_{m+1};\end{gathered}$$

e in ognuno d'essi il determinante $\Delta_{r_{\lambda_1} s_{\lambda_1}, \ldots r_{\lambda_p} s_{\lambda_p}}$ si muta in $\Delta^{r_{m+1} s_{m+1}}_{r_{\lambda_1} s_{\lambda_1}, \ldots r_{\lambda_p} s_{\lambda_p}}$ ossia

$$\Delta_{r_{\lambda_1} s_{\lambda_1}, \ldots r_{\lambda_p} s_{\lambda_p}} + (a'_{r_{m+1} s_{m+1}} - a_{r_{m+1} s_{m+1}})\,\Delta_{r_{\lambda_1} s_{\lambda_1}, \ldots r_{\lambda_p} s_{\lambda_p}, r_{m+1} s_{m+1}}$$

come il lettore può facilmente comprendere. Adunque la (3) si muta nella relazione analoga capace di determinare $\Delta'' - \Delta$, quando Δ'' si ottiene da Δ cambiando in esso $m + 1 \leq n^2$ elementi, e poichè la (3) è stata provata per $m = 2$, possiamo ritenerla vera in generale.

Un' interessante applicazione che può farsi della (3) consiste nello sviluppo di un determinante mediante altri soddisfacenti a determinate condizioni. Mostrerò ciò esponendo alcuni casi particolari.

Supponiamo che sia $a'_{r_i s_i} - a_{r_i s_i} = x_{r_i s_i}$; $i = 1, 2, \ldots. m$.

Allora si ha dalla (3): *La differenza $\Delta' - \Delta$ tra un determinante Δ d'ordine* n *ed il determinante Δ' ottenuto da Δ aggiungendo determinate quantità* $x_{r_1 s_1}, x_{r_2 s_2}, \ldots$ *a determinati elementi di esso* $a_{r_1 s_1}, a_{r_2 s_2}, \ldots.$ *è uguale alla somma dei prodotti* 1 *ad* 1, 2 *a* 2, ... n *ad* n *delle espressioni* $x_{r_1 s_1} \Delta_{r_1 s_1}, x_{r_2 s_2} \Delta_{r_2 s_2}, \ldots.$ *fatti colla legge* $x_{r_h s_h} \Delta_{r_h s_h} x_{r_k s_k} \Delta_{r_k s_k} \ldots. = x_{r_h s_h} x_{r_k s_k} \ldots. \Delta_{r_h s_h, r_k s_k}, \ldots.$ *dove* $\Delta_{r_h s_h, r_k s_k}, \ldots.$ *ha il significato noto, e le* $r_h, r_k \ldots.$ *come pure le* $s_h, s_k, \ldots.$ *sono tutte differenti.*

Come caso particolare si può supporre che le quantità x vengano aggiunte a tutti gli elementi delle due diagonali, principale e secondaria, di Δ, oppure ad una sola di esse; si possono poi supporre tutte le x uguali e si hanno allora noti risultati del calcolo dei determinanti.

Supponiamo ora $a'_{r_i s_i} = (x_{r_i s_i} + 1)\, a_{r_i s_i}$; $i = 1, 2, \ldots m$.

Si deduce allora dalla (3):

Se in un determinante Δ d'ordine n *si moltiplicano* $m \leq n^2$ *elementi* $a_{r_1 s_1}, \ldots a_{r_m s_m}$ *rispettivamente per* $x_{r_1 s_1} + 1, \ldots. x_{r_m s_m} + 1$, *e si indica con Δ' il nuovo determinante ottenuto, la differenza $\Delta' - \Delta$ è uguale alla somma dei prodotti* 1 *ad* 1, 2 *a* 2, ... n *ad* n *delle espressioni* $x_{r_1 s_1} a_{r_1 s_1} \Delta_{r_1 s_1}, \ldots. x_{r_m s_m} a_{r_m s_m} \Delta_{r_m s_m}$ *fatti colla legge nota.*

Se in particolare è $x_{r_1 s_1} = x_{r_2 s_2} = \ldots. = x_{r_m s_m} = x$ si ha:

$$\Delta' - \Delta = x\, P_1 + x^2\, P_2 + \ldots. + x^n\, P_n \tag{4}$$

dove P_r è la somma dei prodotti r ad r, fatti colla solita legge, delle espressioni $a_{r_1 s_1} \Delta_{r_1 s_1}, \ldots. a_{r_m s_m} \Delta_{r_m s_m}$.

Un notevole caso particolare della (4) si ha quando $x = -1$.

Allora è: $a'_{r_1 s_1} = \ldots. = a_{r_m s_m} = 0$ e la (4) permette di esprimere un determinante mediante altri aventi alcuni elementi nulli.

Assumendo per determinante Δ' un determinante nel quale gli elementi d' indici $r_1 s_1, \ldots. r_m s_m$ siano nulli, e per determinante Δ quello ottenuto da Δ' sostituendo ad essi gli elementi $a_{r_1 s_1}, \ldots. a_{r_m s_m}$, si può applicare la (4) scambiando Δ con Δ' e ponendo $x = -1$. Si ha quindi:

$$\Delta = \Delta' - \sigma_1 + \sigma_2 - \ldots. + (-1)^n \sigma_n$$

dove σ_r è la somma dei prodotti r ad r, fatti colla legge nota, delle espressioni $-a_{r_1 s_1} \Delta'_{r_1 s_1}, \ldots. - a_{r_m s_m} \Delta'_{r_m s_m}$. Come caso particolare si può supporre che $r_1 s_1, \ldots. r_m s_m$ siano gli indici degli elementi delle due diagonali, principale e secondaria, di Δ, oppure di una sola di esse, ed allora si ha lo sviluppo di un determinante mediante altri che ha tali diagonali, od una sola di esse, ad elementi nulli, o come suol dirsi vuote. (1)

La (3) permette molti altri sviluppi analoghi ai considerati.

Per es. si può supporre che le a' siano uguali ad 1, oppure a -1, oppure alle $-a$; che le a abbiano dati esponenti e le a' non siano che le a con tali esponenti diminuiti di 1, di 2.... Il lettore potrà facilmente, in questi ed altri simili casi, applicare la (3).

---

(1) Cfr. su tale argomento l'*Analisi Algebrica* di CAPELLI e GARBIERI. Padova, 1886, pag. 337.

CARATTERI DI DIVISIBILITÀ

Oggetto di questa piccola nota è di mettere in rilievo come possano stabilirsi dei criteri di divisibilità affatto generali per numeri primi di ciascuna delle forme $10\,K+9$, $10\,K+7$, $10\,K+3$, $10\,K+1$; criteri, i quali bene spesso, in casi particolari, assumono una notevole semplicità.

Mi limito, come si vede, al sistema di numerazione decimale ed al caso di numeri primi maggiori di 10, ma i risultati potrebbero, io credo, essere ancora generalizzati.

1. Il sistema di equazioni a coefficienti interi

$$\begin{cases} ax + by = p \\ Ax + By = pz, \end{cases}$$

dove p è un numero primo, e perciò a e b sono primi tra loro, sia soddisfatto dai valori interi

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma.$$

Allora, essendo α e β primi tra loro e con p, sarà $aB - Ab$ divisibile per p. Ma, poichè, qualunque valore intero si attribuisca a δ, i valori

$$X = \alpha - b\delta, \quad y = \beta + a\delta$$

soddisfano la prima equazione, e poichè sostituendo questi valori nella seconda si ha

$$A\alpha + B\beta + (aB - Ab)\,\delta = pz,$$

è chiaro che per ogni valore intero di δ è determinabile per z un valore γ', pure intero, tale che la seconda equazione sia soddisfatta. Quindi per due valori interi qualunque α' e β' di x ed y, che soddisfano alla prima equazione, si può determinare un valore intero γ' di z, tale che per $x = \alpha'$, $y = \beta'$, $z = \gamma'$ la seconda equazione sia soddisfatta.

2. Supponiamo ora che a indichi il numero delle diecine di p e b la cifra delle unità dello stesso p, che A e B siano pure, rispettivamente, il numero delle diecine e la cifra delle unità di un numero $N \geqq p$. Le due equazioni precedenti, se $N = hp$, sono soddisfatte dal sistema di valori

$$x = 10, \quad y = 1, \quad z = h \qquad (h \text{ numero intero})$$

quindi: *se per* $x = \alpha$, $y = \beta$ (α e β interi ed $\alpha \gtrless 10$) *si ha* $a\alpha + b\beta = p$, *si ha pure* $A\alpha + B\beta = h'p$ (h' numero intero). E reciprocamente: *se* $10\,a + b = a\alpha + b\beta = p$ *e se* $A\alpha + B\beta = h'p$, *è* $10\,A + B = N = hp$.

Di qui il criterio di divisibilità per p: *determinati i due numeri* α e β, *il numero* $N = 10\,A + B$ *è divisibile per* p, *se tale è il numero* $A\alpha + B\beta$.

Affinchè il criterio sia praticamente vantaggioso, i due numeri α e β dovranno esser tali che risulti:

$$10\,A + B > A\alpha + B\beta.$$

Se, peraltro, il valore di α si scelga tra **1** ed 8 inclusivi, il che si può sempre, e quindi si abbia, per β, la limitazione:

$$\frac{2\,a}{b} + 1 \leqq \beta \leqq \frac{9\,a}{b} + 1.$$

la precedente disuguaglianza ci permetterà di *prestabilire quanti multipli di* p *occorre tenere a mente per poter applicare la regola*. Infatti, perchè quella disuguaglianza sia soddisfatta, basta che sia in generale:

$$A > \frac{B(\beta - 1)}{10 - \alpha}$$

3. I numeri primi maggiori di 10 possono aver per cifra delle unità o 9, o 7, o 3 od 1; quindi, avuto riguardo alle identità

$$\begin{aligned} 10a + 9 &= a + 9(a + 1) \\ 10a + 7 &= 3a + 7(a + 1) \\ 10a + 3 &= a + 3(3a + 1) \\ 10a + 1 &= a + 1(9a + 1) \end{aligned}$$

si può assumere, pei numeri della prima specie, $\alpha = 1$, $\beta = a + 1$; per quelli della seconda, $\alpha = 3$, $\beta = a + 1$; per quelli della terza, $\alpha = 1$, $\beta = 3a + 1$; per quelli della quarta, $\alpha = 1$, $\beta = 9a + 1$. Perciò si ha per es.: $N = 10A + B$ *è divisibile per un numero primo, della forma* $10a + 9$, *se* $A + (a + 1)B$ *è divisibile pel numero primo.*

E per ciascuna delle altre tre specie di numeri si ha una regola analoga, che non istiamo ad enunciare per amore di brevità.

Se il modulo è della forma $10a + 9$, la regola di divisibilità sarà utile se si ha:

$$A > a$$

quindi per ogni numero maggiore di p.

Se il modulo è della forma $10a + 7$, ci sarà vantaggio, applicando la regola a qualunque numero maggiore del modulo stesso.

Se il modulo è della forma $10a + 3$, la regola sarà vantaggiosa solo pei numeri N tali che sia $A > 3a$; ed infine se il modulo è della forma $10a + 1$, il vantaggio comincia coi numeri pei quali $A > 9a$.

4. Esempi. — *Un numero è divisibile per 19, se è tale la somma del numero delle diecine e del doppio della cifra delle unità del numero.* Non occorre conoscere multipli di 19.

Così, il numero 285 è un multiplo di 19, perchè: $28 + 2.5 = 38$. $3 + 2.8 = 19$. Il numero 478 non è multiplo di 19 perchè: $47 + 2.8 = 63$, $6 + 2.3 = 12$.

Non è più complicata la *regola di divisibilità per 29.*

Per 23 abbiamo: *un numero è divisibile per 23, se il numero delle diecine del numero aumentato di sette volte la cifra delle unità è divisibile per 23.* Si richiede di conoscere i multipli 46 e 69.

Così, 2967 è multiplo di 23, perchè: $296 + 7.7 = 345$ e $34 + 7.5 = 69$. Anche 2714 è un multiplo di 23; $271 + 28 = 299$, $29 + 63 = 92$, $9 + 14 = 23$ ed infine il numero 1426 è pure multiplo di 23 perchè $142 + 42 = 184$, $18 + 28 = 46$.

Pel numero 13 si avrebbe la regola che si trova nel *Libro di Aritmetica e di Algebra elem.* del Prof. Gazzaniga.

Per 17 si ha: *un numero è divisibile per 17, se è tale la somma del triplo del numero delle diecine e del doppio della cifra delle unità del numero.* Non occorre conoscere alcun multiplo di 17.

Così: 595 è multiplo di 17, perchè $3.59 + 2.5 = 187$, $3.18 + 2.7 = 68$, $3.6 + 2.8 = 34$, $3.3 + 2.4 = 17$.

Per i numeri della forma $10K + 1$, risultano regole troppo complesse, in generale, perchè possano essere utili in pratica.

Un numero è divisibile per 11, se tale è la somma del numero delle sue diecine *e del decuplo della cifra delle sua unità.* Occorre conoscere i multipli di 11 fino al 99. Esempio: sia 3784 il numero; abbiamo $378 + 40 = 418$, $41 + 80 = 121$, $12 + 10 = 22$.

Un numero è divisibile per 31, se tale è la somma del numero delle sue diecine e di 28 volte la cifra delle sue unità. Occorre conoscere i multipli di 31 fino al 279. Sia il numero 2604; abbiamo $260 + 28.4 = 372$, $37 + 28.2 = 93 = 3.31$, dunque il numero 2604 è multiplo di 31.

Osserviamo come i multipli che si dovrebbero ritenere a memoria soddisfino alla condizione $10\,A + B = A\alpha + B\beta$ e come, perciò, sia facilissimo riconoscerli. Infine è bene tener presente che le nostre regole di divisibilità permettono *soltanto* di riconoscere se un dato numero sia divisibile per un altro, e non di determinare il resto della divisione del primo pel secondo.

F. Mariantoni.

SULLE RELAZIONI

che intercedono tra i multirapporti di due n-uple di elementi di una forma geometrica di prima specie

1. Dati, in un certo ordine, $2n$ elementi d'una forma di prima specie, ripartiti in due n-uple $a_1 a_2 \dots a_n$, $b_1 b_2 \dots b_n$, chiamiamo *multirapporto di quegli elementi* considerati in quell'ordine, *o multirapporto delle due n-uple di elementi*, il prodotto di rapporti semplici [1]

$$R = (a_1 a_2 b_1)(a_2 a_3 b_2) \dots (a_{n-1} a_n b_{n-1})(a_n a_1 b_n) \tag{1}$$

che rappresenteremo col simbolo

$$(a_1 a_2 \dots a_n,\ b_1, b_2, \dots b_n). \tag{2}$$

Ci proponiamo di sviluppare, in questa nota, alcune considerazioni aventi rapporto colle relazioni che intercedono tra i multirapporti, che si hanno al variare dell'ordine con cui si prendono gli elementi dati, e di dedurre anche alcune di queste relazioni, notevoli almeno per la loro forma.

2. Volendo ottenere una espressione di R mediante doppi rapporti, la quale riuscirà più comoda della (1), moltiplichiamo e dividiamo il secondo membro di questa per $(a_1 a_n b_{n-1})$; avremo

$$R = (a_1 a_2 \dots a_{n-1},\ b_1 b_2 \dots b_{n-1})(a_1 a_n b_{n-1} b_n)$$

talchè si avrà il seguente sistema di relazioni:

$$(a_1 a_2 \dots a_s, b_1 b_2 \dots b_s) = (a_1 a_2 \dots a_{s-1}, b_1 b_2 \dots b_{s-1})(a_1 a_s b_{s-1} b_s), (s = n, n-1, \dots 4, 3)$$

dalle quali, moltiplicandole membro a membro, ricaveremo

$$R = (a_1 a_2 b_1 b_2)(a_1 a_3 b_2 b_3) \dots (a_1 a_n b_{n-1} b_n). \tag{3}$$

[1] Questa definizione di multirapporto mi fu gentilmente suggerita dal ch. Prof. Del Re. Delle definizioni alquanto diverse sono state date dal Bellavitis (*Elem. di Geom. Trigonom.* ecc. Padova, 1862, p. 158) e dal Battaglini (*Giornale di Matem.*, vol. 1, p. 2 e seg.) Anche in Baltzer (*Anal. G.*) si trova un cenno sui multirapporti, ma non conosco lavori aventi relazione colle considerazioni che svolgo in questa nota.

Questa relazione ci dice intanto che le operazioni della geometria proiettiva non alterano il valore dei multirapporti, e che perciò, senza nuocere alla generalità dei ragionamenti, possono considerarsi elementi di una qualunque delle forme di prima specie.

Inoltre si può dire che, qualunque sistema di riferimento si sia fissato nella forma che si considera, se x_s ed y_s sono rispettivamente le coordinate di a_s e di b_s $(s = 1, 2, \ldots n)$, si ha sempre:

$$\text{(3')} \qquad R = \frac{x_1 - y_1}{x_2 - y_1} \cdot \frac{x_2 - y_2}{x_3 - y_2} \cdots \frac{x_n - y_n}{x_1 - y_n}.$$

3. Il multirapporto R è suscettibile di una espressione mediante multirapporti contenenti ciascuno un numero di elementi minore di $2n$. Ciò risulta manifesto dalla espressione, che ora daremo, di R mediante multirapporti contenenti ciascuno due elementi di meno di quelli che figurano in R.

Premettiamo la relazione seguente che lega n elementi $a_1, a_2, \ldots a_n$ di una forma di prima specie:

$$(a_1\, a_{n-1}\, a_n)\,(a_2\, a_n\, a_1)\,(a_3\, a_1\, a_2) \ldots (a_n\, a_{n-2}\, a_{n-1}) = (-1)^n,$$

la quale può scriversi

$$1 = (-1)^n\,(a_{n-1}\, a_1\, a_n)\,(a_n\, a_2\, a_1)\,(a_1\, a_3\, a_2) \ldots (a_{n-2}\, a_n\, a_{n-1}).$$

Ora dalla (1) si ha

$$R^{n-2} = [(a_1\, a_2\, b_1)\,(a_2\, a_3\, b_2) \ldots (a_{n-2}\, a_{n-1}\, b_{n-2})]\,[(a_2\, a_3\, b_2)\,(a_3\, a_4\, b_3) \ldots (a_{n-1}\, a_n\, b_n)] \ldots$$
$$[(a_n\, a_1\, b_n)\,(a_1\, a_2\, b_1) \ldots (a_{n-3}\, a_{n-2}\, b_{n-3})]$$

la quale moltiplicata per la precedente dà:

$$R^{n-2} = (-1)^n \prod_{s=1}^{s=n} (a_s\, a_{s+1} \ldots a_{s+n-2},\, b_s\, b_{s+1} \ldots b_{s+n-3}\, a_{s+n-1}) \qquad (n > 2).$$

In questa relazione, agli indici maggiori di n si intende che vadano sostituiti i residui della loro divisione per n; questa avvertenza sarà tenuta presente anche per le formule che seguiranno.

Supponendo, per es., $n = 3$, questa formula ci dà

$$(a_1\, a_2\, a_3\, b_1\, b_2\, b_3) = (a_1\, a_2\, b_1\, a_3)\,(a_2\, a_3\, b_2\, a_1)\,(a_3\, a_1\, b_3\, a_2)$$

espressione diversa da quella che si avrebbe dalla (3).

4. Esaminiamo ora quanti dei multirapporti che corrispondono alle permutazioni degli elementi $a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_n$, possono essere tra loro distinti ossia non risultanti dal prodotto degli stessi rapporti semplici. Perciò osserviamo:

1°. Due multirapporti i quali si deducono da (2) mantenendo fisso un elemento non possono essere uguali: ciò risulta evidente dalla (3').

2°. Se si permutano circolarmente gli indici $1, 2, \ldots n$, i rapporti semplici di (1) si permutano anch'essi circolarmente e quindi si avrà:

$$(a_s\, a_{s+1} \ldots a_{s+n-1},\, b_s\, b_{s+1}, \ldots b_{s+n-1}) = R \qquad (s = 1, 2, \ldots n)$$

e perciò si avranno anche altre $n - 1$ relazioni come la (3).

3°. Dalla (3) e da queste altre relazioni, si dedurrà

$$(b_{s+n-1}\, b_{s+n-2} \ldots b_s\,,\, a_{s+n-1}\, a_{s+n-2} \ldots a_s) = R \qquad (s = 1, 2, \ldots n).$$

Raccogliendo questi risultati si ha: *fra tutti i multirapporti di* 2n *elementi ve ne sono sempre* $\lfloor 2n - 1$ *fra loro distinti e solo tanti in generale.*

Considereremo il sistema di multirapporti distinti i quali hanno per primo elemento a_1.

5. Nel nostro sistema di multirapporti distinti, quanti multirapporti vi saranno tra loro indipendenti? La (3) fornisce subito la risposta a questa domanda. Infatti tutti i doppi rapporti che possono formarsi cogli elementi $a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_n$, quando si assumono tre di questi elementi come elementi di riferimento, si riducono facilmente a dipendere da $2n-3$ soltanto di essi, cioè da quelli formati, coi tre elementi fondamentali, da ciascuno dei $2n-3$ elementi rimanenti. Così, possiamo ottenere le espressioni di tutti i multirapporti del sistema mediante i suddetti $2n-3$ doppi rapporti i quali, evidentemente, saranno tutti indipendenti tra loro. Eliminando questi $2n-3$ doppi rapporti fra le $\underline{|2n}$ espressioni si otterranno quindi $\underline{|2n-3}$ relazioni distinte tra i multirapporti del sistema, le quali permetteranno, in generale, di esprimerli tutti in funzione di $2n-3$ soltanto. Così per es.: se $n=2$, ossia se si tratta di doppi rapporti, si possono avere l'espressioni di tutti per mezzo di uno soltanto, come è noto: mentre per $n=3$ (tripli-rapporti) si possono esprimere tutti i tripli rapporti in funzione di tre di essi tra loro indipendenti.

Queste considerazioni indicano anche in qual modo potrebbe procedersi alla ricerca delle relazioni che legano i multirapporti del sistema che consideriamo. Si avranno immediatamente le espressioni di tutti i multirapporti mediante $2n-3$ quantità soltanto, valendosi della (3') e delle espressioni analoghe che se ne deducono per gli altri multirapporti. Infatti, se, per es., assumiamo come elementi fondamentali, nella forma, a_1, a_2, a_3, basterà porre nelle espressioni ora dette $x_1 = \infty$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ per avere le espressioni cercate.

Del resto si potrebbe valersi anche, per lo scopo a cui alludo, delle espressioni che, pei multirapporti del sistema, fornisce la (3) e della nota relazione che lega cinque elementi a, b, p, q, r di una forma di prima specie, cioè:

$$(a\,b\,p\,q)\,(a\,b\,q\,r)\,(a\,b\,r\,p) = 1.$$

6. Indipendentemente da quanto abbiamo ora detto si giunge assai facilmente a ricavare alcune relazioni notevoli tra i nostri multirapporti distinti.

1°. Abbiamo immediatamente dalla (1) per le proprietà dei rapporti semplici,

$$(a_1\,a_2 \ldots a_n,\, b_1\,b_2 \ldots b_n)\,(a_1\,a_n \ldots a_2,\, b_n\,b_{n-1} \ldots b_1) = 1.$$

Quindi *nel sistema di multirapporti distinti, di ogni multirapporto ce n'è uno inverso, ed in generale uno soltanto.*

2°. Si ha ancora:

$$\prod_{s=1}^{s=n} (a_1\,a_2 \ldots a_n,\, b_s\,b_{s+1} \ldots b_{s+n-1}) = 1$$

da cui si deduce che è *uguale all'unità il prodotto di tutti i multirapporti i quali differiscono soltanto per l'ordine degli elementi di una delle due n-uple.*

Le due relazioni ora enunciate possono esser riguardate entrambe come la generalizzazione della relazione $(a_1\,a_2\,b_1\,b_2)\,(a_1\,a_2\,b_2\,b_1) = 1$ che lega due doppi rapporti inversi.

3°. Chiamiamo R' il multirapporto in cui si muta R quando si scambia a_{r+1} con b_r; in virtù della (3) si avrà (n. 4, 2°):

$$\text{(4)} \qquad R + R' = (a_1\,a_2 \ldots a_r\,a_{r+2} \ldots a_n,\; b_1\,b_2 \ldots b_{r-1}\,b_{r+1} \ldots b_n)$$

ossia: *la somma di due multirapporti, i quali differiscono soltanto per lo scambio dell'*r*mo elemento della seconda n-upla coll'*(r + 1)*mo della prima, è uguale al multi-rapporto di* 2n − 2 *elementi, che si ha da uno di essi cancellandovi i due elementi suddetti.*

La (4) può anche riguardarsi come *una espressione, contenente due elementi arbitrari di un multirapporto dato.*

4°. Se nella (4) facciamo gli scambi pei quali il secondo membro si inverte e se indichiamo con R_1 ed R_1' i multirapporti nei quali si cangiano rispettivamente R ed R', avremo:

$$(R + R')(R_1 + R'_1) = 1$$

relazione che non ha riscontro nel caso dei doppi rapporti.

Se invece nella (4) stessa permutiamo circolarmente gli elementi $b_1, b_2, \ldots b_{r-1}$ $b_{r+1} \ldots b_n$ e se chiamiamo R_1 ed R'_1, R_2 ed $R'_2 \ldots R_{n-1}$ ed R'_{n-1} i multirapporti nei quali si mutano R ed R' in corrispondenza alle successive permutazioni, avremo:

$$(R + R')(R_1 + R'_1) \ldots (R_{n-1} + R'_{n-1}) = 1$$

la quale è di grado n^{mo} (come del resto lo era la seconda di questo numero).

5°. Se sul secondo membro della (4) si ripetono scambi analoghi a quello fatto in R per dedurre R', si giunge facilmente ad *una relazione analoga alla* (4) *stessa fra una somma di* 2^s $(s < n - 1)$ *multirapporti del sistema ed un certo multirapporto di* $2(n - s)$ *elementi.*

In particolare, considerando il multirapporto R e gli altri che se ne deducono scambiando successivamente, a_2 con b_1, a_3 con $b_2, \ldots a_{n-1}$ con b_{n-2} e poi facendo simultaneamente questi scambi a due a due, a tre a tre.... ad $n-2$ ad $n-2$, ed indicando con $R_1, R_2 \ldots R_{2^{n-2}-1}$ i multirapporti che così si ottengono da R, si ha tra essi ed R la relazione importante:

$$R + R_1 + R_2 + \ldots + R_{2^{n-2}-1} = (a_1\, a_n\, b_{n-1}\, b_n) \tag{5}$$

la quale può riguardarsi come *una espressione, contenente* $2(n-2)$ *elementi arbitrari, del doppio rapporto* $(a_1\, a_n\, b_{n-1}\, b_n)'$ scambiando nelle (5) a_n con b_{n-1} ed indicando con $R', R'_1, \ldots R'_{2^{n-2}-1}$ i multirapporti nei quali si mutano rispettivamente $R, R_1, \ldots R_{2^{n-2}-1}$, si ha:

$$R + R_1 + \ldots + R_{2^{n-2}-1} + R' + R'_1 + \ldots + R_{2^{n-2}-1} = 1$$

e se invece si indicano con $R', R'_1, \ldots$ i multirapporti nei quali si mutano $R, R_1, \ldots$ rispettivamente, per lo scambio di b_{n-1} con b_n si ha

$$[R + R_1 + \ldots + R_{2^{n-2}-1}][R' + R'_1 + \ldots + R'_{2^{n-2}-1}] = 1.$$

Ecco, dunque, estese ai multirapporti le relazioni che intercedono tra i doppi rapporti di quattro dati elementi.

6°. Per accennare ad altre forme di relazioni intercedenti tra i nostri multirapporti, osserviamo che il primo membro della (5) non varierà di valore permutando gli elementi $a_2, a_3, \ldots a_{n-1}\, b_1, b_2, \ldots b_{n-2}$ e che perciò facendo queste permutazioni si avrà un gruppo di $\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2(n-2)}{2^{n-2}}$ somme come la (5) uguali fra loro. Aggiungiamo che per la prima relazione del n. 2, detto R' il multirapporto che differisce da R per lo scambio di a_n con b_n, si ha

$$\frac{R}{R'} = -(a_1\, b_{n-1}\, a_n\, b_n) \tag{5'}$$

donde segue che si hanno relazioni delle forme seguenti:

1° $$\frac{R}{R'} = \frac{R_1}{R'_1} = \ldots = \frac{R_k}{R'_k}$$

2° $$\frac{R}{R'} + \frac{R_1}{R'_1} = -1$$

3° $$\frac{R}{R'} = \Sigma \qquad \text{etc. etc.}$$

dove R_1, R'_1 ecc. indicano multirapporti, e Σ indica una somma analoga a (5).

7. Limitiamo ai pochi accennati, gli esempi di relazioni tra i multirapporti del nostro sistema. Aggiungiamo peraltro che le (5) e (5') sono due relazioni le quali permettono di fare, quando si voglia, senza difficoltà la eliminazione accennata al n. 5.

8. Senza entrare nella discussione dei casi particolari che possono presentarsi trattandosi di multirapporti, pure diremo che quando l'n^{mo} elemento d'un multirapporto è all'∞, il multirapporto si riduce in fondo al prodotto di $n-1$ rapporti semplici non contenenti quell'elemento all'∞, per accennare alla convenienza che si avrebbe, quando si volesse, definendo quel prodotto come un multirapporto dei $2n-1$ elementi al finito. Se poniamo la definizione

$$(a_1\, a_2 \ldots a_n,\, b_1\, b_2 \ldots b_{n-1}) = (a_1\, a_2\, b_1)\,(a_2\, a_3\, b_2) \ldots (a_{n-1}\, a_n\, b_{n-1})$$

possiamo facilmente dedurre, essendo R il solito multirapporto (1),

$$R = \left\{ \prod_{s=1}^{s=n} (a_s\, a_{s+1} \ldots a_{s+n-1},\, b_s\, b_{s+1} \ldots b_{s+n-2}) \right\}^{\frac{1}{n-1}}.$$

F. Mariantoni.

SULLA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI NUMERICHE
di terzo e di quarto grado

(Continuazione c. fasc. III, p. 104).

II. **Equazione biquadratica.** — Consideriamo ora una equazione biquadratica completa e nella sua forma più semplice:

$$f(x) = x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0. \tag{9}$$

Distingueremo qui tre casi, secondo che le quattro radici saranno tutte reali, o lo saranno due sole o nessuna.

Caso 1°. — Supponiamo che le radici della (9) siano tutte reali; indichiamole con α, α', γ e γ'. Per le proprietà delle funzioni simmetriche delle radici si ottiene il seguente sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} (\alpha + \alpha') + (\gamma + \gamma') = -m, \\ (\alpha + \alpha)(\gamma + \gamma') + \alpha\alpha' + \gamma\gamma' = n, \\ \alpha\alpha'(\gamma + \gamma') + (\alpha + \alpha')\gamma\gamma' = -p, \\ \alpha\alpha'\gamma\gamma' = q, \end{array}\right. \tag{10}$$

in cui α, α', γ e γ' sono quantità incognite. Poniamo $\alpha + \alpha' = X$, $\gamma + \gamma' = Y$, $\alpha\alpha' = Z$, $\gamma\gamma' = T$; allora il sistema diventa

$$\left\{\begin{array}{l} X + Y = -m, \\ XY + Z + T = n, \\ YZ + XT = -p, \\ ZT = q. \end{array}\right. \tag{11}$$

Dalla prima, dalla terza e dalla quarta di queste equazioni otteniamo:

$$(12)\quad X = -(m + Y), \qquad (13)\quad Y = \frac{mT - p}{Z - T}, \qquad (14)\quad T = \frac{q}{Z};$$

sostituendo nella seconda e riducendo si arriva alla seguente equazione in Z:

$$(15)\quad Z^6 - nZ^5 + (mp - q)Z^4 + (2nq - p^2 - m^2q)Z^3 + (mpq - q^2)Z^2 - nq^2Z + q^4 = 0.$$

Cosicchè ricavando dalla (15) con uno qualunque dei metodi di approssimazione una radice reale, (e ne devono esistere due per la posizione: $\alpha\alpha' = Z$), con semplici sostituzioni si hanno i valori di X, di Y e di T dalle (12), (13) e (14).

Dopo ciò formiamo i sistemi seguenti:

$$\begin{cases} \alpha + \alpha' = X, \\ \alpha\alpha' = Z; \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma + \gamma' = Y, \\ \gamma\gamma' = T; \end{cases}$$

risolvendo rispetto ad α, α', γ e γ' si ottengono le seguenti formole risolutive:

$$(16)\quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}\left(X \pm \sqrt{X^2 - 4Z}\right), & \alpha' = \frac{1}{2}\left(X \mp \sqrt{X^2 - 4Z}\right), \\ \gamma = \frac{1}{2}\left(Y \pm \sqrt{Y^2 - 4T}\right), & \gamma' = \frac{1}{2}\left(Y \mp \sqrt{Y^2 - 4T}\right). \end{cases}$$

Osservazione. — Ciascuna di queste formole risolutive dà apparentemente due valori per ciascuna radice, valori uguali e contrari; ma si vede subito che, ad esempio, il primo valore di α è il secondo di α', che il secondo di γ è il primo di γ'; cioè si ha un solo sistema di valori, come del resto deve essere.

Esempio. — Si debba risolvere l'equazione biquadratica:

$$f(x) = x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30 = 0;$$

avendosi: $m = 5$, $n = -7$, $p = -29$, $q = 30$; dalla (15), sostituendo, si ottiene l'equazione:

$$Z^6 + 7Z^5 - 175Z^4 - 2011Z^3 - 5250Z^2 + 6300Z + 27000 = 0.$$

Applicando il noto procedimento si ha:

	1	7	-175	-2011	-5250	6300	27000	
per $x = -1$;		-1	-6	181	1830	3420	-9720	
		6	-181	-1830	-3420	9720	17280	$= f(-1)$,
per $x = -2$;		-2	-10	370	3482	3536	-19672	
		5	-185	-1741	-1768	9836	7328	$= f(-2)$,
per $x = -3$;		-3	-12	561	4350	2700	-27000	
		4	-187	-1450	-900	9000	0	$= f(-3)$,
per $x = -4$;		-4	-12	748	5052	792	-28368	
		3	-187	-1263	-198	7092	-1368	$= f(-4)$,
per $x = -5$;		-5	-10	925	5430	-900	-27000	
		2	-185	-1086	180	5400	0	$= f(-5)$.

È dunque $Z_1 = -3$, $Z_2 = -5$. Dalle (12), (13) e (14) si hanno subito i valori seguenti: $X_1 = -2$, $Y_1 = -3$, $T_1 = -10$, ed anche $X_2 = -4$, $Y_2 = -1$, $T_2 = -6$; e quindi per le formole (16) si ottengono i due sistemi di valori:

$$1^\circ \begin{cases} \alpha = 1, \alpha' = -3, \gamma = 2, \gamma' = -5, \\ \alpha = 1, \alpha' = -5, \gamma = 2, \gamma' = -3, \end{cases} \qquad 2^\circ \begin{cases} \alpha = -3, \alpha' = 1, \gamma = -5, \gamma' = 2, \\ \alpha = -5, \alpha' = 1, \gamma = -3, \gamma' = 2, \end{cases}$$

evidentemente uguali.

Caso 2°. — Supponiamo ora che due radici siano reali e due complesse coniugate; siano le prime α e α', le altre $\gamma + \delta i$ e $\gamma - \delta i$. In tale caso il sistema (10) diventa:

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \alpha' + 2\gamma = -m, \\ \alpha\alpha' + 2\gamma(\alpha + \alpha') + (\gamma^2 + \delta^2) = n, \\ 2\alpha\alpha'\gamma + (\alpha + \alpha')(\gamma^2 + \delta^2) = -p, \\ \alpha\alpha'(\gamma^2 + \delta^2) = q. \end{array} \right.$$

Ricavando $(\alpha + \alpha')$ dalla prima, $\alpha\alpha'$ dalla terza e $(\gamma^2 + \delta^2)$ dalla seconda equazione di questo sistema, sostituendo nella quarta e riducendo, si ha

$$(18) \qquad 64\gamma^6 + 96m\gamma^5 + 16(3m^2 + 2n)\gamma^4 + 8m(m^2 + 4n)\gamma^3 + 4(2m^2 n + n^2 + \\ + mp - 4q)\gamma^2 + 2m(mp + n^2 - 4q)\gamma + (mnp - p^2 - m^2 q) = 0,$$

che corrisponde alla (15). Inoltre dal sistema (17) si ricavano le formole che danno δ, α e α', conosciuto che sia un valore di γ per la (18). Tali formole sono:

$$(19) \qquad \delta = \pm \sqrt{\frac{8\gamma^3 + 4m\gamma^2 + 2n\gamma + p}{4\gamma + m} - \gamma^2},$$

$$(20) \qquad \alpha = -\frac{1}{2}\left\{(2\gamma + m) \mp \sqrt{(2\gamma + m)^2 - 4q\frac{4\gamma + m}{8\gamma^3 + 4m\gamma^2 + 2n\gamma + p}}\right\},$$

$$(21) \qquad \alpha' = -\frac{1}{2}\left\{(2\gamma + m) \pm \sqrt{(2\gamma + m)^2 - 4q\frac{4\gamma + m}{8\gamma^3 + 4m\gamma^2 + 2n\gamma + p}}\right\}.$$

Osservazioni. — 1ª. Anche per questo caso vale l'osservazione fatta precedentemente circa l'unicità dei valori di α e di α'.

2ª. Se risulta $\delta = 0$, vuol dire che si hanno due radici reali uguali invece delle due complesse coniugate.

Esempio. — Consideriamo l'equazione:

$$f(x) = x^4 - 15x^3 + 72x^2 - 72x - 160 = 0;$$

dalla (18), tenendo conto che si ha $m = -15$, $n = 72$, $p = -72$, $q = -160$, si ricava

$$8\gamma^6 - 180\gamma^5 + 1638\gamma^4 - 7695\gamma^3 + 19652\gamma^2 - 25890\gamma + 13572 = 0;$$

ed applicando il solito procedimento si trova per $\gamma = 6$

8	-180	1638	-7695	19652	-25890	13572
	48	-792	5076	-15714	23628	-13572
	-132	846	-2619	3938	-2262	0,

e quindi è: $\gamma = 6$. Dalle (19), (20) e (21) sostituendo ed eseguendo, si ha

$$\delta = \pm 2 \quad , \quad \alpha = -1 \quad , \quad \alpha' = 4;$$

quindi le radici cercate sono: $-1, 4, 6 + 2i$ e $6 - 2i$.

Nota. — Invece di trovare una relazione in γ, come la (18), dal sistema (17) si possono ricavare i valori di α e di α', e poi quelli di γ e di δ. Se poniamo $\alpha + \alpha' = X$ e $\alpha\alpha' = Y$, eliminando $2\gamma = -m - X$ per la prima e $(\gamma^2 + \delta^2)$ dalla seconda, dalla terza e dalla quarta del sistema (17), si ha la relazione:

$$(22) \qquad X^6 + 3mX^5 + (3m^2 + 2n)X^4 + m(m^2 + 4nX^3) + (2m^2 n + mp + \\ + n^2 - 4q)X^2 + m(mp + n^2 - 4q)X + (mnp - p^2 - m^2 q) = 0.$$

Determinata una radice reale della (22) con quell'approssimazione che si vuole, si ha in corrispondenza un valore Y per mezzo della relazione:

$$\text{(23)} \qquad Y = \frac{X^3 + mX^2 + nX + p}{2X + m};$$

e perciò dalle posizioni $\alpha + \alpha' = X$, $\alpha\alpha' = Y$, risolvendo rispetto ad α e α', si hanno le due formole risolutive:

$$\text{(24)} \qquad \alpha = \frac{1}{2}\left(X \pm \sqrt{X^2 - 4Y}\right),$$

$$\text{(25)} \qquad \alpha' = \frac{1}{2}\left(X \mp \sqrt{X^2 - 4Y}\right).$$

per le quali vale l'osservazione precedente circa la unicità dei valori di α e di α'. Inoltre dal sistema (17) si ricava facilmente

$$\text{(26)} \qquad \gamma = -\frac{1}{2}(m + X),$$

$$\text{(27)} \qquad \delta = \pm\sqrt{\frac{q}{Y} - \frac{(m + X)^2}{4}}.$$

Così le quattro radici della (9) sono completamente determinate anche in questo caso.

Esempi. — 1°. Se consideriamo l'equazione precedente

$$f(x) = x^4 - 15x^3 + 72x^2 - 72x - 160 = 0,$$

dalla (22) si ha:

$$X^6 - 45X^5 + 819X^4 - 7695X^3 + 39304X^2 - 103560X + 108576 = 0;$$

ed avendo per $X = 3$

1	−45	819	−7695	39304	−103560	108576
	3	−126	2079	−16848	67368	−108576
	−42	693	−5616	22456	−36192	0

si ha: $X = 3$; e quindi dalla (23): $Y = -4$; perciò dalle (24) e (25) $\alpha = -1$ e $\alpha' = 4$. Inoltre le (26) e (27) danno $\gamma = 6$ e $\delta = \pm 2$; quindi le quattro radici sono $-1, 4, 6 + 2i$ e $6 - 2i$, come nel primo caso.

2°. Consideriamo l'equazione

$$f(x) = 4x^4 - 11x^2 + 7x - 6 = 0;$$

riducendola alla forma più semplice diventa

$$x^4 - \frac{11}{4}x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{6}{4} = 0;$$

e trasformandola in altra a coefficienti interi si ha, ponendo $x = \frac{y}{2}$,

$$\varphi(y) = y^4 - 11y^2 + 14y - 24 = 0.$$

Applicando note proprietà delle equazioni si possono determinare i limiti delle radici di $\varphi(y) = 0$; essi sono: $1 + 2\sqrt{6}$ e $-1 - 2\sqrt{6}$. Per determinare qualche radice di $\varphi(y) = 0$ applichiamo il metodo dei divisori o, come anche viene chiamato, metodo di Newton. I divisori dell'ultimo termine, che devono essere presi in esame, sono: 1, 2, 3, 4, −1, −2, −3 e −4; si trascurano 6, 8, −6, −8, perchè superiori in valore assoluto ai valori assoluti dei limiti trovati. Con semplici sostituzioni si vede subito che nè 1, nè -1 sono radici della $\varphi(y)=0$. Si ha quindi il seguente quadro:

4	3	2	−2	−3	−4
$-24:4=-6$;	$-24:3=-8$;	$-24:2=-12$;	$-24:-2=12$;	$-24:-3=8$;	$-24:-4=6$;
$-6+14=8$:	$-8+14=6$;	$-12+14=2$;	$12+14=26$;	$8+14=22$;	$6+14=20$;
$8:4=2$;	$6:3=2$;	$2:2=1$;	$26:-2=-13$;	—	$20:(-4)=-5$;
$2-11=-9$;	$2-11=-9$;	$1-11=-10$;	$-13-11=-24$;	—	$-5-11=-16$:
—	$-9:3=-3$;	$-10:2=-5$;	$-24:-2=12$;	—	$-16:(-4)=4$;
—	$0-3=-3$;	$0-5=-5$;	$0+12=12$;	—	$0+4=4$;
—	$-3:3=-1$;	—	$12:(-2)=-6$;	—	$4:(-4)=-1$;

quindi solamente 3 e -4 sono radici di $\varphi(y)=0$.

Ponendo: $\alpha=3$ e $\alpha'=-4$, si ricava: $X=-1$ e $Y=-12$, perciò dalle (26) e (27) con semplici sostituzioni si ottiene:

$$\gamma=-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}; \quad \delta=\pm\sqrt{\frac{-24}{-12}-\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{7}}{2};$$

e quindi è:

$$\gamma+\delta i=\frac{1+i\sqrt{7}}{2} \qquad \text{e} \qquad \gamma-\delta i=\frac{1-i\sqrt{7}}{3}.$$

Ma avendo posto: $x=\frac{y}{2}$, si ha che le radici della proposta equazione $f(x)=0$ sono: $\frac{3}{2}$, -2, $\frac{1+i\sqrt{7}}{4}$ e $\frac{1-i\sqrt{7}}{4}$.

Caso 3°. — Consideriamo ora il caso più generale, cioè le quattro radici siano complesse; indichiamole con $\alpha+\beta i$, $\alpha-\beta i$, $\gamma+\delta i$ e $\gamma-\delta i$. Per la proprietà delle radici, eseguendo e riducendo, si ottiene il sistema

$$(28) \qquad \begin{cases} 2(\alpha+\gamma)=-m, \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+4\alpha\gamma=n, \\ 2\gamma(\alpha^2+\beta^2)+2\alpha(\gamma^2+\delta^2)=-p, \\ (\alpha^2+\beta^2)\,.\,(\gamma^2+\delta^2)=q, \end{cases}$$

in cui α, β, γ e δ sono quantità incognite. Dalla prima delle (28) si ha

$$(29) \qquad \alpha=-\frac{1}{2}(m+2\gamma), \qquad\qquad (30) \qquad \gamma=-\frac{1}{2}(m+2\alpha);$$

ricavando $(\alpha^2+\beta^2)$ dalla seconda e dalla terza si ottiene

$$(31) \qquad \gamma^2+\delta^2=\frac{8\gamma^3+4m\gamma^2+2n\gamma+p}{4\gamma+m},$$

e sostituendo nella quarta risulta

$$(32) \qquad \alpha^2+\beta^2=\frac{(4\gamma+m)\,.\,q}{8\gamma^3+4m\gamma^2+2n\gamma+p};$$

dalla (31) e dalla (32), sostituendo nella seconda delle (28), e tenendo presente la (29), si ottiene la seguente equazione in γ:

$$(33) \qquad 64\gamma^6+96m\gamma^5+16(3m^2+2n)\gamma^4+8m(m^2+4n)\gamma^3+4(2m^2n+n^2+mp-4q)\gamma^2+$$
$$+2m(mp+n^2-4q)\gamma+(mnp-p^2-m^2q)=0,$$

analoga alla (18). Risolvendo poi la (31) rispetto a δ e la (32) rispetto a β, si hanno le relazioni:

(34) $$\delta = \pm \sqrt{\frac{8\gamma^3 + 4m\gamma^2 + 2n\gamma + p}{4\gamma + m} - \gamma^2}$$

(35) $$\beta = \pm \sqrt{\frac{(4\gamma + m)\,q}{8\gamma^3 + 4m\gamma^2 + 2n\gamma + p} - \alpha^2}.$$

Perciò se dalla (33) con uno qualunque dei metodi di approssimazione ricaviamo il valore di una radice reale, per mezzo della (29) determineremo α, e per le (34) e (35) anche δ e β; cosicchè le quattro radici della (9) sono completamente determinate.

Osservazioni. — 1ª. Anche in questo caso non risulta alcuna ambiguità per il doppio segno di δ e di β.

2ª. Se in casi particolari si ha $\delta = 0$, oppure $\beta = 0$, due radici sono reali ed uguali; se si ha invece nello stesso tempo $\beta = 0$ e $\delta = 0$, le quattro radici della (9) sono reali ed uguali a due a due.

Esempio. — Determiniamo le radici dell'equazione

$$f(x) = 16x^4 + 32x^3 - 40x^2 - 56x + 85 = 0,$$

ossia

$$x^4 + 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{85}{16} = 0;$$

per cui è $m = 2$; $n = -2,5$; $p = -3,5$ e $q = 5,3125$.

Dalla (33) sostituendo e semplificando, si ha

$$\varphi(\gamma) = 8\gamma^6 + 24\gamma^5 + 14\gamma^4 - 12\gamma^3 - 21\gamma^2 - 11\gamma - 2 = 0.$$

Si vede subito che è $\gamma = 1$; perciò dalle (29), (34) e (35) si ha subito

$$\alpha = -\frac{1}{2}(2+2) = -2; \quad \beta = \pm\sqrt{\frac{75}{60} - 1} = \pm\frac{1}{2}; \quad \gamma = \pm\sqrt{\frac{31875}{7500} - 4} = \pm\frac{1}{2};$$

quindi le radici cercate sono: $-2 + \frac{i}{2}$; $-2 - \frac{i}{2}$; $1 + \frac{i}{2}$ e $1 - \frac{i}{2}$.

Nota. — È opportuno applicare questo terzo caso, quando nulla si sappia delle radici della proposta equazione, perchè si hanno anche in casi particolari radici reali e radici immaginarie.

Esempio. — Se si ha l'equazione

$$f(x) = 2x^4 - 12x^3 + 19x^2 - 6x + 9 = 0,$$

da cui anche

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 9,5x^2 - 3x + 4,5 = 0,$$

avendosi: $m = -6$; $n = 9,5$; $p = -3$; $q = 4,5$, dalla (33), sostituendo e semplificando, si ha

$$16\gamma^6 - 144\gamma^5 + 508\gamma^4 - 864\gamma^3 - 774,25\gamma^2 - 270,75\gamma = 0,$$

e quindi: $\gamma = 0$. Perciò si ha facilmente dalle (29), (34) e (35):

$$\alpha = -\frac{1}{2}(-6) = 3; \quad \delta = \pm\sqrt{\frac{-3}{-6}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}; \quad \beta = \pm\sqrt{\frac{(-6)\,.\,4,5}{-3} - 9} = 0;$$

perciò le radici cercate sono: $3, 3, i\sqrt{\frac{1}{2}}$ e $-i\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Dott. U. Ceretti.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 356 405 406 407 408 410 411

356. *Costruire le parabole che hanno direttrice data e sono*
a) *bitangenti ad un cerchio dato*
b) *osculatrici ad un cerchio dato.*

RETALI.

Risoluzione del Prof. Arturo Barozzini, di Mirandola.

Prendo per $y=0$ la direttrice data, $x=0$ la perpendicolare condotta da A, centro del cerchio dato, alla direttrice: allora se r è il raggio, a (positiva) la distanza dell'origine da A, (α, β) coordinate del fuoco della parabola, le due curve avranno per equazione

$$(1) \qquad (x-a)^2+y^2=r^2, \qquad (y-\beta)^2+\alpha^2-2\alpha x=0.$$

Eliminando fra queste x, ho per le ordinate dei punti comuni.

$$(2) \qquad [(y-\beta)^2+\alpha^2-2a\alpha]^2+4\alpha^2[y^2-r^2]=0$$

a) La parabola è bitangente al cerchio se il primo membro della (2) è un quadrato perfetto: confronto perciò colla espressione $[y^2+2my+n]^2$, dalle equazioni di condizione elimino m, n ed ho per le coordinate del fuoco della parabola richiesta

$$(3) \qquad \beta=0, \qquad \alpha=\frac{a\pm\sqrt{a^2-2r^2}}{2}.$$

Sostituendo tali valori nelle (2), (1), ho pei punti di contatto

$$(4) \qquad y^2=\alpha[2a-3\alpha], \qquad x=a-\alpha,$$

dove α ha uno dei valori dati dalla (3).

Vi sono in generale due soluzioni del problema: i fuochi F_1, F_2 stanno su OA, sono simmetrici rispetto a B, punto medio di OA; la corda di contatto corrispondente a F_1 passa per F_2, quella di F_2 per F_1; BF uguaglia la metà della tangente condotta da O al cerchio circoscritto al quadrato circoscritto al cerchio dato.

Se $a^2<2r^2$, le due parabole sono immaginarie.

Se $a^2=2r^2$, si ha una sola parabola, reale, col fuoco in B, corda di contatto pure per B, coi punti di contatto che distano dall'asse della lunghezza $y=\pm$ OB.

Se $a^2>2r^2$ si hanno due parabole reali, distinte. Posto $r\sqrt{2}=a \operatorname{sen}\delta$, si ha pelle due parabole

$$\alpha_1=a \operatorname{sen}\frac{\delta}{2} \qquad y_1^2=\alpha_1 a\frac{1+3\cos\delta}{2}$$

$$\alpha_2=a\cos\frac{\delta}{2} \qquad y_2^2=\alpha_2 a\frac{1-3\cos\delta}{2}.$$

La prima ha i punti di contatto col cerchio sempre reali.

La seconda ha tali punti reali, se $\quad r\sqrt{2}<a<\dfrac{3r}{2}$

" " immaginari, se $\quad a>\dfrac{3r}{2}$.

Se $a = \frac{3r}{2}$, ossia $\cos\delta = \frac{1}{3}$, la seconda ha col cerchio un contatto di terzo ordine in $x = \frac{r}{2}$, $y = 0$. Allora l'ascissa del fuoco è r.

b) Se la parabola oscula il circolo, debbono coesistere la (2) e le sue derivate prima e seconda, cioè le

$$(5) \qquad \begin{cases} [(y-\beta)^2 + \alpha^2 - 2a\alpha]^2 + 4\alpha^2 [y^2 - r^2] = 0 \\ (y-\beta)[(y-\beta)^2 + \alpha^2 - 2a\alpha] + 2\alpha^2 y = 0 \\ (y-\beta)^2 + \alpha^2 - \dfrac{2a\alpha}{3} \qquad\qquad = 0. \end{cases}$$

Sostituisco nelle due prime ad $(y-\beta)^2 + \alpha^2$ il valore uguale $\frac{2a\alpha}{3}$, dato dall'ultima, e trascurando il valore $\alpha = 0$ impossibile, scrivo invece delle (5) le

$$(6) \qquad \begin{cases} y^2 = r^2 - \dfrac{4}{9} a^2 \\ (3\alpha + 2a)\, y = 2a\beta \\ (y-\beta)^2 + \alpha^2 = \dfrac{2a\alpha}{3}. \end{cases}$$

Da queste ottengo poi facilmente le

$$(7) \qquad y^2 = r^2 - \frac{4}{9} a^2, \qquad r^2\alpha = \left(\frac{2a}{3}\right)^3, \qquad r^2\beta = -y^3,$$

nell'ultima delle quali $y = \pm\sqrt{r^2 - \frac{4}{9}a^2}$, valore dato dalla prima.

Si hanno in generale due parabole soddisfacenti alle condizioni del problema; i loro fuochi sono simmetrici rispetto ad OA; le parabole hanno un punto comune su OA e si osculano all'∞.

I punti H_1, H_2, in cui le parabole osculano il cerchio, hanno per coordinate

$$x = \frac{a}{3}, \qquad y = \pm\sqrt{r^2 - \frac{4}{9}a^2}.$$

Tagliano pure i cerchi nei punti K_1, K_2 di coordinate

$$x = \frac{5a}{3}, \qquad y = \mp\sqrt{r^2 - \frac{4}{9}a^2}.$$

Le $H_1 K_1$, $H_2 K_2$ sono dimezzate da A, centro del cerchio dato, ecc.

Pella costruzione si hanno subito facilmente i punti H_1, K_1, H_2, K_2 posti sul cerchio, quindi ogni parabola vien determinata da due punti e dalla direttrice.

Se $a = \frac{3r}{2}$, le parabole sono reali distinte, s $a > \frac{3r}{2}$ immaginarie.

Se $a = \frac{3r}{2}$, si ha una sola parabola avente contatto di 3° ordine col cerchio; come s'è visto nel problema (*a*).

405. *Essendo* P *un punto mobile di una parabola di cui* F *è il fuoco e* N *il punto in cui la tangente in* P *incontra l'asse, dimostrare:*

1° *che il luogo del centro del circolo circoscritto al triangolo* PFN *è una cubica razionale che ha un punto isolato in* F;

2° *che il luogo dell'ortocentro dello stesso triangolo è una cubica razionale che ha in* F *un nodo;*

3° *che le congiungenti i punti corrispondenti delle due cubiche passano tutte pel fuoco della parabola (ossia la* retta d'Eulero *del triangolo* PFN, *al moversi di* P *sulla parabola, ruota attorno ad* F).

G. Cardoso-Laynes.

Risoluzione del Prof. Retali di Milano.

Se A è l'intersezione della tangente al vertice con la tangente PN, poichè l'angolo $\widehat{PAF}$ è retto, e PA = AN, la FA è ad un tempo altezza del triangolo PFN ed asse del segmento PN, ciò che dimostra il teorema 3°.

Denotando con α e β le coordinate di P, le equazioni (assi ortogonali) della parabola, della retta FA e dell'asse del segmento $\overline{FN}$ sono

(1) $$y^2 = 4mx,$$
(2) $$2my = \beta(m-x),$$
(3) $$2x = m - \alpha;$$

e perciò le coordinate dell'ortocentro H e del centro C del cerchio circoscritto al triangolo PFN sono rispettivamente

(4) $$x = \alpha, \qquad y = \frac{\beta}{2m}(m-\alpha)$$

(5) $$x = \frac{m-\alpha}{2}, \qquad y = \frac{\beta}{4m}(m+\alpha);$$

eliminando α e β fra la (4) e la

(6) $$\beta^2 = 4m\alpha$$

troviamo per equazione del luogo di H

(7) $$my^2 = (m-x)^2 x.$$

Analogamente, eliminando α e β fra le (5), (6), troviamo subito per equazione del luogo di C

(8) $$my^2 = (m-2x)(m-x)^2.$$

Se trasportiamo ora gli assi parallelamente in F, le (7), (8) divengono

(9) $$x^3 = m(y^2 - x^2),$$
(10) $$2x^3 + m(x^2 + y^2) = 0:$$

la (9) rappresenta un *folium parabolico retto*, avente il punto doppio (nodo a tangenti ortogonali, in F, e il vertice nel vertice della parabola; la retta all'infinito è per questa cubica tangente d'inflessione, nel punto all'infinito dell'asse delle y. Il teorema 2° esprime dunque una *nuova* generazione del *folium* parabolico retto. La (10) è una cubica con un punto doppio isolato in F, simmetrica rispetto all'asse della parabola, tangente a questa (e al *folium*) nel vertice; astrazion fatta dal punto doppio, consta di un solo ramo parabolico doppiamente inflesso e volgente la sua convessità alla tangente della parabola nel vertice. L'equazione polare di questa cubica, assumendo per polo il punto doppio e per asse polare quello delle x è

(11) $$\rho = \frac{d}{\cos^3\omega},$$

dove si è posto $d = -\frac{m}{2}$; la (11) mostra subito che la inversa di (10) rispetto al punto doppio è un *bifolium* retto, e che per $\omega = \pm\frac{\pi}{6}$ si hanno i due flessi al finito della cubica.

Le due cubiche (9) *e* (10) *ammettono altre generazioni semplicissime e, credo, non conosciute, che mi riservo di indicare in altra occasione.*

Altre risoluzioni analitica e geometrica del Dott. Ing. Merizzi di Udine.

406. *Luogo dei fuochi delle parabole che toccano una curva data (algebrica) ed hanno per direttrice una medesima retta del suo piano.*

V. Retali.

Risoluzione del Prof. Cardoso-Laynes di Livorno.

Riferiamoci ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, di cui l'asse x sia la retta data. Indicando con α, β le coordinate del fuoco, l'equazione di una parabola che abbia per direttrice la retta data sarà

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=y^2$$

cioè

$$x^2-2\,\alpha x-2\,\beta y+\alpha^2+\beta^2=0. \tag{1}$$

Se questa deve esser tangente ad una curva, la cui equazione sia

$$y=f(x), \tag{2}$$

l'equazione

$$\varphi(x)=x^2-2\,\alpha x-2\,\beta . f(x)+\alpha^2+\beta^2=0, \tag{3}$$

che si ottiene eliminando y fra le (1), (2), dovrà avere una radice doppia, che sarà radice semplice della $\frac{d\varphi}{dx}=0$, cioè

$$x-\alpha-\beta . f'(x)=0. \tag{4}$$

La resultante

$$F(\alpha,\beta)=0 \tag{5}$$

delle (3), (4) sarà evidentemente l'equazione del luogo cercato.

Notiamo che la (4) è risolubile per mezzo della serie di Lagrange (V. Pascal, *Repertorio di Matematiche superiori*, pag. 537).

Altra risoluzione del Sig. Dott. C. Merizzi.

407. *Sopra una retta si fissino due punti* A, B: *essendo* C *un punto variabile della medesima, esterno ad* AB, *e* B′ *il simmetrico di* B *rispetto a* C, *trovare il luogo dei punti medî delle tangenti comuni ai due cerchi descritti sui diametri* $\overline{CA}$, $\overline{CB'}$.

Merizzi.

Risoluzione del sig. Pietro Santacroce studente della R. Università di Napoli.

Sia TT′ la tangente comune, e la normale in C alla retta data la seghi in P. Sarà PT = PT′ = PC: donde $\widehat{PTC}=\widehat{PCT}$; $\widehat{PT'C}=\widehat{PCT'}$ ossia $\widehat{TCT'}$ è retto.

Segue che pure retto è l'angolo $\widehat{OPO'}$ e quindi

$$PC^2=\overline{OC}\,.\,\overline{O'C}.$$

Se chiamiamo $2a$ la lunghezza AB, e se riferiamo la figura a due assi ortogonali, di cui l'asse delle x coincide colla retta data e l'asse delle y è la normale che biseca il segmento AB, la precedente equazione diventa

$$y^2=\frac{x-a}{2}\,\frac{x+a}{2}=\frac{x^2}{4}-\frac{a^2}{4}$$

ossia

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}=1,$$

equazione di una iperbole, che ha per asse trasverso l'asse delle x ed il centro nell'origine delle coordinate.

408. *Da un punto* O *del piano si conducano* n *raggi in modo da dividere il piano in* n *angoli uguali. Dimostrare che al variare di* P *sulla circonferenza di centro* O *rimane costante:* 1°. *La somma dei quadrati delle distanze dal punto* P *ai raggi.* — 2°. *L'area del poligono che ha per vertici i piedi delle perpendicolari condotte da* P *ai raggi.*

Dedurre che il teorema è vero, anche se le rette condotte per P *ai raggi siano tutte inclinate di uno stesso angolo* α *sui rispettivi raggi.*

F. Celestri.

Risoluzione del Sig. Dott. Ing. C. Merizzi di Udine.

Indichiamo con ρ la lunghezza costante OP. I piedi delle perpendicolari condotte da P sugli n raggi uscenti da O, giacciono sulla circonferenza che ha per diametro OP e la dividono in n archi uguali: congiungendo ciascun punto di divisione con quello successivo, si forma un poligono stellato regolare di n lati, se n è dispari, e un poligono regolare stellato di $\frac{n}{2}$ lati contato due volte, se n è pari, la cui area, essendo costante ρ, è pure costante.

Indicando con h l'angolo $\frac{2\pi}{n}$, e con ω l'angolo di OP con uno qualunque degli n raggi, e quindi con $\omega+h$, $\omega+2h\ldots.\ \omega+(n-1)h$ gli angoli di OP coi rimanenti, rispettivamente, la somma dei quadrati delle distanze da P ai raggi è esprimibile mediante il sommatorio $\rho^2\sum\limits_{p=1}^{p=n}\operatorname{sen}^2\left\{\omega+(p-1)h\right\}$, il quale può così trasformarsi

$$\rho^2\sum_{p=1}^{p=n}\frac{1-\cos\left\{2\omega+2(p-1)h\right\}}{2}$$

$$\rho^2\left\{\frac{n}{2}-\sum_{p=1}^{p=n}\frac{\cos\left\{2\omega+2(p-1)h\right\}}{2}\right\}$$

(vedasi Serret, *Trig.* II, 49)

$$\rho^2\left\{\frac{n}{2}-\frac{\operatorname{sen} nh\cos(\omega+(n-1)h)}{2\operatorname{sen} h}\right\}$$

e, supponendo il denominatore $2\operatorname{sen} h$ *non nullo, cioè* $n>2$, *si ha*

$$\frac{n\rho^2}{2}$$

che è pure costante, non dipendendo da ω.

Supponiamo ora di inclinare tutte le rette condotte da P ai raggi di uno stesso angolo α: allora tutti i termini del sommatorio precedente vengono moltiplicati per il fattore costante $\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$, ed il sommatorio stesso diventa uguale a $\frac{n\rho^2}{2\operatorname{sen}^2\alpha}$, che è pure costante.

Finalmente, indicando con $d_1\, d_2\ldots.\ d_n$ le distanze da P ai raggi, l'area S del poligono determinato dai piedi delle distanze stesse, è

$$S=\frac{1}{2}\left\{d_1\,d_2\operatorname{sen}\widehat{d_1\,d_2}+d_2\,d_3\operatorname{sen}\widehat{d_2\,d_3}+\ldots.+d_n\,d_1\operatorname{sen}\widehat{d_n\,d_1}\right\};$$

indicando ora con $\delta_1\,\delta_2\ldots.\ \delta_n$ le lunghezze delle corrispondenti inclinate, l'area S' del poligono determinato dai piedi delle inclinate stesse, è

$$S'=\frac{1}{2}\left\{\delta_1\,\delta_2\operatorname{sen}\widehat{\delta_1\,\delta_2}+\delta_2\,\delta_3\operatorname{sen}\widehat{\delta_2\,\delta_3}+\ldots.+\delta_n\,\delta_1\operatorname{sen}\widehat{\delta_n\,\delta_1}\right\}.$$

Ma osservando che $\frac{d_1}{\delta_1}=\frac{d_2}{\delta_2}=\ldots.=\frac{d_n}{\delta_n}=\operatorname{sen}\alpha$, che $\widehat{d_1\,d_2}=\widehat{\delta_1\,\delta_2};\ldots\widehat{d_n\,d_1}=\widehat{\delta_n\,\delta_1}$, si ricava subito $S'=S\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$ e perciò S' è costante.

Osservazione. — *Il teorema, come abbiamo visto, cade in difetto per* $n=1$, $n=2$, *e quindi l'enunciato di esso deve modificarsi nel senso di supporre* $n>2$.

410. *Determinare la forma generale di una funzione di cinque lettere* x, y, z, u, v, *tale che sostituendo ad* x *una qualunque delle altre lettere, la funzione si riduce identicamente al prodotto delle tre lettere rimanenti.*

P. Aussant-Carà.

Risoluzione del sig. Ing. Claudio Merizzi.

La forma più semplice di tale funzione è evidentemente

$$\frac{yzuv}{x}$$

e si può rendere generale, moltiplicandola per una funzione che diventi uguale ad 1 per x uguale ad una delle y, z, u, v, ed al prodotto così ottenuto aggiungendo altra funzione che per gli stessi valori di x si annulli: avremo così la forma generale richiesta

$$\frac{yzuv}{x}\,a^{(x-y)(x-z)(x-u)(x-v)\,f(x,y,z,u,v)}+(x-\ )(x-z)(x-u)(x-v)\;\varphi(x,y,z,u,v)$$

essendo a una costante arbitraria finita, ed $f(x,y,z,u,v)$, $\varphi(x,y,z,u,v)$ due funzioni qualunque, soggette alla sola condizione di non diventare infinite, quando si faccia x uguale ad una delle y, z, u, v.

QUISTIONI PROPOSTE

412. Due cerchi posti in un piano si tagliano in H, K, ed hanno per centri, il primo A il secondo B; una retta variabile per H taglia il primo cerchio in M, il secondo in N:

1°. Il luogo dell'intersezione delle rette AN, BM è una quartica con tre punti doppi reali, posti sulla circonferenza circoscritta al triangolo ABH.

2°. La curva coniugata isogonale alla quartica rispetto al triangolo dei punti doppi è un cerchio che ha per centro uno dei tre punti doppi.

Barozzini.

413. Sia P il punto d'incontro delle tangenti in A e in B ad una conica, AA′ il diametro che passa per A, C il punto d'incontro di questo diametro colla retta condotta per B parallela al diametro coniugato ad esso, M il punto d'incontro della BC con PA′.

1°. Si dimostri che M è il punto medio di BC.

2°. Si trovi il luogo di M allorchè A rimane fisso e B si muove sulla conica.

Celestri.

414. Se la grandezza A_0 sia minore della B_0, e siano ordinatamente A_1 e B_1 le medie armonica ed aritmetica di A_0, B_0; A_2 e B_2 le medie armonica ed aritmetica di A_1, B_1; e così indefinitamente, le classi (A_n) e (B_n) sono contigue e definiscono la media geometrica delle grandezze A_0, B_0.

De Zolt.

415. Provare che la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{h}\frac{d^r\varphi}{dz^r}=a\,\frac{d^n\varphi}{dz^n}$$

dove a è diverso da 1, è data da

$$\varphi=\sum_{s=1}^{n}c_s\,e^{\frac{z}{1-\alpha_s}}$$

dove $a_1 a_2 \ldots a_s \ldots a_n$ sono le n radici n^{me} di a, e $c_1 c_2 \ldots c_n$ sono n costanti arbitrarie. VITALI.

416. Luogo dei fuochi delle parabole che osculano una parabola data in un punto dato. MERIZZI.

417. In un circolo (C) di centro C e raggio R si traccino due diametri perpendicolari JI', EF; indi, preso un punto arbitrario M_1 nel suo piano si costruiscano successivamente i punti M_2, M_3, M_4, da quella stessa parte di JI' dalla quale si trova il punto M_1, per modo che, detto genericamente P_i il punto comune alla JM_i ed alla $p \equiv EF$, si abbia per $i = 1, 2, 3$;

$$JM_i \,.\, I'M_{i+1} = 2R^2.$$

Si avranno allora le proprietà seguenti:

1° le rette $JM_4, I'M_1$ si taglieranno su p e sarà soddisfatta la relazione

$$JM_4 \,.\, I'M_1 = 2R^2;$$

2° il quadrangolo $M_1 M_2 M_3 M_4$ è armonico, ed il cerchio che lo contiene è ortogonale al cerchio (C);

3° sono armonici pure i quadrangoli EFM_1M_3, EFM_2M_4, e sono soddisfatte le relazioni

$$CM_1 \,.\, CM_3 = CM_2 \,.\, CM_4 = R^2$$
$$M_1\widehat{C}E = E\widehat{C}M_3, \quad M_2\widehat{C}E = E\widehat{C}M_4.$$

DEL RE.

418. Un triangolo ABC ha fissi i vertici A e B ed il terzo vertice C scorre lungo una retta data r; dimostrare che:

1°. Il luogo dell'ortocentro del triangolo ABC è una conica K^2 e precisamente una parabola, un'iperbole od una coppia di rette ortogonali a seconda che r è parallela, obliqua o perpendicolare ad AB.

2°. Indicando con S il punto d'incontro della perpendicolare innalzata ad AB dal suo punto medio M con la r, se si fa rotare la r attorno ad S, il luogo dei centri delle coniche K^2 è una parabola che ha il vertice in M e tocca in M la AB.

3°. Facendo invece scorrere la r parallelamente a sè stessa, il luogo dei centri delle coniche K^2 è una retta.

4°. Se, rimanendo fissa la r ed il punto M, varia la lunghezza c del lato AB, le ∞ coniche K^2 che si ottengono sono concentriche ed il luogo dei loro fuochi è un'iperbole equilatera.

G. CARDOSO-LAYNES.

BIBLIOGRAFIA

CHARRUIT. — *Cours de géométrie cotée à l'usage des candidats à l'École spéciale militaire de Saint-Cyr.* — Nary et C.ie, Paris, 1898.

Questo corso contiene quanto basta per imparare a conoscere i metodi della proiezione quotata e poterli applicare ai casi pratici. Il nome dell'egregio autore era già conosciuto ed apprezzato in Francia per una pregevole raccolta di *Problèmes et épures de Géométrie descriptive cotée;* in ambedue questi lavori è notevole la chiarezza, la semplicità dei mezzi adoperati, lo studio grandissimo di mantenersi sempre al livello adatto all'intelligenza media dei giovani; perciò raccomandiamo con piacere questi libri a quelli fra i nostri lettori che si occupano di geometria descrittiva. K.

Dott. Federico Occella. — *Questioni di massimo e minimo dipendenti da equazioni di secondo grado* ad uso delle scuole secondarie superiori. — Casale, Tip. e Litog. C. Cassone, 1898.

Il Prof. Dott. Federico Occella ha raccolto in poche pagine una geniale teoria riguardante *Questioni di massimo e minimo.*

I massimi ed i minimi delle funzioni ad una sola variabile sono in generale determinati nei trattati elementari in uso nelle scuole, ricorrendo alle inequazioni di secondo grado, e nei trattati stessi non si dà, a mio credere, a questa teoria quell'importanza che l'argomento merita, in ispecie per le molteplici applicazioni nei diversi campi della scienza; e neppure la si svolge con quella generalità che, senza sorpassare i limiti delle matematiche elementari, potrebbe essere consentita dalle nozioni che posseggono i giovani delle scuole nostre.

L'egregio Prof. Occella accogliendo un voto fatto dall'Ill.mo Prof. G. Bardelli con una lettera indirizzata il 1° aprile 1893 al compianto Prof. Lugli, e pubblicata nel *Periodico di Matematica* di quell'anno, ha studiato con cura l'argomento e ha dato alle stampe un opuscolo che può tornare grandemente vantaggioso alle scuole secondarie superiori e specialmente agli alunni degli Istituti Tecnici.

La determinazione dei massimi e dei minimi nei diversi problemi presi in esame dal Prof. Occella si fa *coll'ottenere anzitutto il valore della variabile,* a cui corrispondono il massimo ed il minimo e l'equazione di 2° grado, alla quale si perviene è facile a ricordarsi, essendo i coefficienti rappresentati da determinanti.

Lo studio fatto in una forma concisa si aggira intorno alla funzione

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$$

e a quelle che se ne deducono mediante ovvii cambiamenti di variabile. Sono poi trattate e discusse alcune applicazioni importanti, e alla fine dell'opuscolo si trova una raccolta di 30 esercizi proposti allo studio dei giovani.

Il lavoro dell'egregio e modesto Prof. Occella può raggiungere efficacia di risultati pel profitto degli alunni ai quali è destinato.

A. Matteucci.

A. Battelli e F. Battelli. — *Trattato pratico per le ricerche di elettricità con circa 800 figure.* — Pagine xxxiv-1220. — Roma, Soc. Edit. Dante Alighieri, 1898.

Data l'indole di questo periodico non ci è possibile analizzare minutamente la importante opera del giovane e illustre fisico della Università di Pisa, e di suo fratello aiuto alla cattedra di fisiologia a Ginevra. Diremo solamente che tanto il fisico di professione, e l'ingegnere elettricista, quanto il medico e il semplice dilettante vi troveranno un riassunto lucido e rigoroso dei principii e delle leggi della scienza (parte prima); un trattato completo di tutti gli apparecchi adoperati per la produzione e la misura dell'energia elettrica (parte seconda), e dei metodi di misura delle varie grandezze e delle costanti dei corpi ed istrumenti. Finalmente la parte IV^a si occupa dei metodi da seguire negli studi elettrofisiologici, e nelle applicazioni dell'elettricità alla terapia; e si chiude con uno studio breve ma accurato sulla radiografia. Trentasei tavole numeriche, un copioso indice alfabetico, rendono ancor più prezioso il libro, nel quale oltre non poche novità, si trovano tali indicazioni pratiche da poter fare a meno di un maestro e da rendersi rapidamente padroni dei metodi insegnati.

Quest'opera, che conduce il lettore a cognizione degli ultimi resultati della scienza, è unica nella nostra letteratura e fors'anche nella letteratura europea del genere.

K.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 1° Luglio 1898.

INTORNO AD ALCUNI DETERMINANTI

NOTA DI ALBERTO BRAMBILLA.

I determinanti *speciali*, di cui qui ci occupiamo, sono molto simili ad altri noti, differendone soltanto per la sostituzione di potenze fattoriali: parecchi di essi sono sviluppabili a prima vista. Lo studio di questi determinanti è utile almeno per esercitare il lettore, cui non sia ciò famigliare, nel calcolo sulle potenze fattoriali.

1. Si dice, potenza fattoriale n^{ma} del numero x, l'espressione

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\ldots(x+n-1), \tag{1}$$

dove intendiamo che sia n un intero positivo.

Hanno luogo le seguenti identità:

$$(x+1)^{\overline{n}} - x^{\overline{n}} = n(x+1)^{\overline{n-1}}, \tag{2}$$

$$x^{\overline{n}} - y(x+1)^{\overline{n-1}} = (x-y)(x+1)^{\overline{n-1}} \tag{3}$$

$$x^{\overline{n+1}} - (y+n)x^{\overline{n}} = (x-y)x^{\overline{n}} \tag{3'}$$

$$x^{\overline{n}} - y^{\overline{n}} = (x-y)\left\{x^{\overline{n-1}} + (y+n-1)x^{\overline{n-2}} + \ldots + (y+2)^{\overline{n-2}}x + (y+1)^{\overline{n-1}}\right\} \text{ (*)} \tag{4}$$

2. È noto che il determinante di *Vandermonde* (o *Cauchy*) si sviluppa in prodotto di differenze nel seguente modo:

$$V_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \ldots a^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 \ldots a_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & a_n^2 \ldots a_n^n \end{vmatrix} = \begin{matrix} (a_1-a)(a_2-a)\ldots(a_n-a) \\ (a_2-a_1)\ldots(a_n-a_1) \\ \ldots\ldots \\ (a_n-a_{n-1}). \end{matrix} \tag{5}$$

È ben facile il riconoscere che in simil modo si sviluppa il determinante che si ottiene sostituendo in questo le potenze fattoriali alle potenze ordinarie. Esso è infatti

$$W_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^{\overline{2}} \ldots a^{\overline{n}} \\ 1 & a_1 & a_1^{\overline{2}} \ldots a_1^{\overline{n}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & a_n^{\overline{2}} \ldots a_n^{\overline{n}} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

(*) CAPELLI, *L'analisi algebrica e l'interpretazione fattoriale delle potenze*, Giornale di Battaglini, vol. 31.

e sottraendo da ciascuna r—ma verticale la precedente moltiplicata per $a+r-2$ $[r=2, 3, \ldots, n+1]$, avendo riguardo alla identità (3'), si ottiene

$$\mathbf{W}_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a_1-a & (a_1-a)\,a_1 & (a_1-a)\,a_1^{\overline{2}} & \ldots & (a_1-a)\,a_1^{\overline{n-1}} \\ 1 & a_2-a & (a_2-a)\,a_2 & (a_2-a)\,a_2^{\overline{2}} & \ldots & (a_2-a)\,a_2^{\overline{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n-a & (a_n-a)\,a_n & (a_n-a)\,a_n^{\overline{2}} & \ldots & (a_n-a)\,a_n^{\overline{n-1}} \end{vmatrix}$$

$$=(a_1-a)(a_2-a)\ldots(a_n-a)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^{\overline{2}} \ldots a_1^{\overline{n-1}} \\ 1 & a_2 & a_2^{\overline{2}} \ldots a_2^{\overline{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^{\overline{2}} \ldots a_n^{\overline{n-1}} \end{vmatrix};$$

e quindi potremo affermare, per un'induzione facile a giustificarsi, che

$$\text{(7)} \qquad \begin{aligned} \mathbf{W}_{n+1}=(a_1-a)(a_2-a)\ldots&(a_n-a) \\ (a_2-a_1)\ldots&(a_n-a_1) \\ \cdots&\cdots \\ &(a_n-a_{n-1})=\mathbf{V}_{n+1} \end{aligned}$$

Cosicchè concludiamo che *il determinante di Vandermonde non si altera sostituendo alle potenze ordinarie le potenze fattoriali.*

3. Consideriamo adesso il determinante

$$\text{(8)} \qquad \mathbf{A}_{k+1}^{(n)}=\begin{vmatrix} a^{\overline{n}} & (a+1)^{\overline{n}} & (a+2)^{\overline{n}} & \ldots & (a+k)^{\overline{n}} \\ a_1^{\overline{n}} & (a_1+1)^{\overline{n}} & (a_1+2)^{\overline{n}} & \ldots & (a_1+k)^{\overline{n}} \\ a_2^{\overline{n}} & (a_2+1)^{\overline{n}} & (a_2+2)^{\overline{n}} & \ldots & (a_2+k)^{\overline{n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_k^{\overline{n}} & (a_k+1)^{\overline{n}} & (a_k+2)^{\overline{n}} & \ldots & (a_k+k)^{\overline{n}} \end{vmatrix}.$$

Sottragghiamo dall'ultima verticale la penultima, da questa la terz'ultima, da questa la quart'ultima; e così via; si isola così, in virtù dell'identità (2), il fattore n in tutte le colonne 2^a, 3^a,... $(n+1)^{ma}$ che noi raccoglieremo. Avremo così

$$\mathbf{A}_{k+1}^{(n)}=n^k\begin{vmatrix} a^{\overline{n}} & (a+1)^{\overline{n-1}} & (a+2)^{\overline{n-1}} & \ldots & (a+k)^{\overline{n-1}} \\ a_1^{\overline{n}} & (a_1+1)^{\overline{n-1}} & (a_1+2)^{\overline{n-1}} & \ldots & (a_1+k)^{\overline{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_k^{\overline{n}} & (a_k+1)^{\overline{n-1}} & (a_k+2)^{\overline{n-1}} & \ldots & (a_k+k)^{\overline{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Ripetendo il medesimo procedimento su questo ultimo determinante, arrestandoci alla sottrazione della seconda verticale dalla terza, si otterrà

$$A^{(n)}_{k+1} = n^k(n-1)^{k-1} \begin{vmatrix} a^{\overline{n}} & (a+1)^{\overline{n-1}} & (a+2)^{\overline{n-2}} & \dots & (a+k)^{\overline{n-2}} \\ a_1^{\overline{n}} & (a_1+1)^{\overline{n-1}} & (a_1+2)^{\overline{n-2}} & \dots & (a_1+k)^{\overline{n-2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k^{\overline{n}} & (a_k+1)^{\overline{n-1}} & (a_k+2)^{\overline{n-2}} & \dots & (a_k+k)^{\overline{n-2}} \end{vmatrix}$$

Così continuando, e se $n \geq k$, si finirà coll'ottenere

$$(9) \qquad A^{(n)}_{k+1} = n^k (n-1)^{k-1} \dots (n-k+1) \times$$
$$\times \begin{vmatrix} a^{\overline{n}} & (a+1)^{\overline{n-1}} & \dots & (a+k-1)^{\overline{n-k+1}} & (a+k)^{\overline{n-k}} \\ a_1^{\overline{n}} & (a_1+1)^{\overline{n-1}} & \dots & (a_1+k-1)^{\overline{n-k+1}} & (a_1+k)^{\overline{n-k}} \\ a_2^{\overline{n}} & (a_2+1)^{\overline{n-1}} & \dots & (a_2+k-1)^{\overline{n-k+1}} & (a_2+k)^{\overline{n-k}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k^{\overline{n}} & (a_k+1)^{\overline{n-1}} & \dots & (a_k+k-1)^{\overline{n-k+1}} & (a_k+k)^{\overline{n-k}} \end{vmatrix}.$$

Se invece è $n < k$, dopo di aver eseguito n volte quei sistemi di sottrazioni di verticali da verticali, si vedrà che $A_{k+1} = 0$.

Occupiamoci ora del determinante

$$(10) \qquad B^{(n)}_{k+1} = \begin{vmatrix} a^{\overline{n}} & (a+1)^{\overline{n-1}} \dots & (a+k-1)^{\overline{n-k+1}} & (a+k)^{\overline{n-k}} \\ a_1^{\overline{n}} & (a_1+1)^{\overline{n-1}} \dots & (a_1+k-1)^{\overline{n-k+1}} & (a_1+k)^{\overline{n-k}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k^{\overline{n}} & (a_k+1)^{\overline{n-1}} \dots & (a_k+k-1)^{\overline{n-k+1}} & (a_k+k)^{\overline{n-k}} \end{vmatrix},$$

sempre nell'ipotesi $n \geq k$.

Sottraendo dalla prima verticale la seconda moltiplicata per a, poi dalla seconda togliendo la terza moltiplicata per $a+1$, ecc. e tenendo sempre conto dell'identità (3), si otterrà infine

$$B^{(n)}_{k+1} = (-1)^k \times (a+k)^{\overline{n-k}} \times (a_1-a)(a_2-a)\dots(a_k-a) \times$$
$$\times \begin{vmatrix} (a_1+1)^{\overline{n-1}} & (a_1+2)^{\overline{n-2}} \dots & (a_1+k)^{\overline{n-k}} \\ (a_2+1)^{\overline{n-1}} & (a_2+2)^{\overline{n-2}} \dots & (a_2+k)^{\overline{n-k}} \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_k+1)^{\overline{n-1}} & (a_k+2)^{\overline{n-2}} \dots & (a_k+k)^{\overline{n-k}} \end{vmatrix}.$$

E poichè quest'ultimo determinante è del tipo B_{k+1}, ma di un ordine inferiore, si vede che, conservandone il tipo, si può scendere fino al determinante di 2° ordine

$$\begin{vmatrix} (a_{k-1}+k-1)^{\overline{n-k+1}} & (a_{k-1}+k)^{\overline{n-k}} \\ (a_k+k-1)^{\overline{n-k+1}} & (a_k+k)^{\overline{n-k}} \end{vmatrix}$$
$$= (-1)(a_{k-1}+k)^{\overline{n-k}}(a_k+k)^{\overline{n-k}}(a_k-a_{k-1}).$$

Se ne conclude che

$$(11) \qquad B^{(n)}_{k+1} = (-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)} \times (a+k)^{\overline{n-k}}(a_1+k)^{\overline{n-k}} \dots (a_k+k)^{\overline{n-k}}.$$
$$\begin{aligned} \times (a_1-a) \quad & (a_2-a) \quad \dots (a_k-a) \\ & (a_2-a_1) \quad \dots (a_k-a_1) \\ & \qquad \dots\dots\dots \\ & \qquad\qquad (a_k-a_{k-1}). \end{aligned}$$

Riassumendo abbiamo

$$(12)\quad \mathbf{A}^{(n)}_{k+1} = n^k(n-1)^{k-1}(n-2)^{k-2}\ldots(n-k+1)\,\mathrm{B}^{(n)}_{k+1}$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)} \times n^k(n-1)^{k-1}\ldots(n-k+1)$$
$$\times (a+k)^{\overline{n-k}}(a_1+k)^{\overline{n-k}}\ldots(a_k+k)^{\overline{n-k}} \times \mathbf{V}_{n+1}$$

4. Considerando ancora il determinante $\mathrm{A}^{(n)}_{k+1}$, possiamo raccogliere fuori di esso i fattori $(a+k)^{\overline{n-k}}$ anche in altro modo. Si osservino le seguenti identità:

$$\begin{aligned}
a_i^{\overline{n}} &= a_i^{\overline{k}}\,(a_i+k)^{\overline{n-k}},\\
(a_i+1)^{\overline{n}} &= (a_i+1)^{\overline{k-1}}(a_i+k)^{\overline{n-k}}(a_i+n),\\
(a_i+2)^{\overline{n}} &= (a_i+2)^{\overline{k-2}}(a_i+k)^{\overline{n-k}}(a_i+n)^{\overline{2}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(a_i+k)^{\overline{n}} &= \qquad\qquad (a_i+k)^{\overline{n-k}}(a_i+n)^{\overline{k}}.
\end{aligned}$$

Ne vien di conseguenza che

$$(13)\quad \mathbf{A}^{(n)}_{k+1} = (a+k)^{\overline{n-k}}\ldots(a_k+k)^{\overline{n-k}} \times$$
$$\times \begin{vmatrix}
a^{\overline{k}} & (a+1)^{\overline{k-1}}(a+n) & (a+2)^{\overline{k-2}}(a+n)^{\overline{2}}\ldots & (a+n)^{\overline{k}}\\
a_1^{\overline{k}} & (a_1+1)^{\overline{k-1}}(a_1+n) & (a_1+2)^{\overline{k-2}}(a_1+n)^{\overline{2}}\ldots & (a_1+n)^{\overline{k}}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a_k^{\overline{k}} & (a_k+1)^{\overline{k-1}}(a_k+n) & (a_k+2)^{\overline{k-2}}(a_k+n)^{\overline{2}}\ldots & (a_k+n)^{\overline{k}}
\end{vmatrix}.$$

Possiamo quindi affermare che è

$$(14)\quad \mathbf{C}^{(n)}_{k+1} = \begin{vmatrix}
a^{\overline{k}} & (a+1)^{\overline{k-1}}(a+n)\ldots & (a+n)^{\overline{k}}\\
a_1^{\overline{k}} & (a_1+1)^{\overline{k-1}}(a_1+n)\ldots & (a_1+n)^{\overline{k}}\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
a_k^{\overline{k}} & (a_k\times 1)^{\overline{k-1}}(a_k+n)\ldots & (a_k+n)^{\overline{k}}
\end{vmatrix} =$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)}\,n^k(n-1)^{k-1}\ldots(n-k+1) \times \mathbf{V}_{n+1}$$

5. Il determinante del tipo Hankel (*)

$$\mathbf{H}^{(n)}_{m+1} = \begin{vmatrix}
\binom{m+n}{m} & \binom{m+n+1}{m} & \ldots & \binom{2m+n}{m}\\
\binom{m+n+1}{m} & \binom{m+n+2}{m} & \ldots & \binom{2m+n+1}{m}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\binom{2m+n}{m} & \binom{2m+n+1}{m} & \ldots & \binom{3m+n}{m}
\end{vmatrix}$$

si collega coi determinanti $\mathbf{B}_{k+1}$. Ed invero si può scrivere

(*) Veggasi Pascal, *I determinanti*, Manuale Hoepli.

è caso particolare del determinante **A**, a meno del fattore $\dfrac{1}{(\underline{|m})^{m+1}}$.
Infatti, se nel determinante $\mathbf{H}^{(n)}_{m+1}$ si raccoglie il fattore $\dfrac{1}{\underline{|m}}$ comune a tutti gli elementi, si trova

$$\mathbf{H}^{(n)}_{m+1}=\begin{vmatrix} (n+1)^{\overline{m}} & (n+2)^{\overline{m}} & \ldots (n+m+1)^{\overline{m}} \\ (n+2)^{\overline{m}} & (n+3)^{\overline{m}} & \ldots (m+m+2)^{\overline{m}} \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n+m+1)^{\overline{m}} & (n+m+2)^{\overline{m}} & \ldots (n+2m+1)^{\overline{m}} \end{vmatrix} \frac{1}{(\underline{|m})^{m+1}}$$

epperò il determinante $\mathbf{A}^{(n)}_{k+1}$, nel quale si faccia $n=m$, $k=m$: $a=n+1$; $a_1=n+2\ldots a_m=n+m+1$.

Segue da ciò che

$$(15)\quad \mathbf{H}^{(n)}_{m+1}=\frac{(-1)^{\frac{1}{2}m(m+1)}}{(\underline{|m})^{m+1}}1^1.\,2^2.\ldots m^m\times \underline{|1}\;\underline{|2}\;\underline{|3}\ldots \underline{|m}=(-1)^{\frac{1}{2}m(m+1)}.$$

6. Anche il determinante di Stern scaturisce immediatamente da $\mathbf{B}^{(k)}_{k+1}$. Infatti tale determinante è del tipo

$$(16)\quad \mathbf{S}_{k+1}=\begin{vmatrix} 1 & \binom{a}{1} & \binom{a}{2} & \cdots & \binom{a}{k} \\ 1 & \binom{a_1}{1} & \binom{a_1}{2} & \cdots & \binom{a_1}{k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \binom{a_k}{1} & \binom{a_k}{2} & \cdots & \binom{a_k}{k} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)}}{\underline{|1}\;\underline{|2}\ldots\underline{|k}} \begin{vmatrix} (a-k+1)^{\overline{k}} & (a-k+2)^{\overline{k-1}} & \ldots & 1 \\ (a_1-k-1)^{\overline{k}} & (a_1-k+2)^{\overline{k-1}} & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_k-k+1)^{\overline{k}} & (a_1-k+2)^{\overline{k-1}} & \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

quindi, a meno del fattore

$$\frac{(-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)}}{\underline{|1}\;\underline{|2}\ldots\underline{|k}}$$

il determinante $\mathbf{S}_{k+1}$ coincide col determinante $\mathbf{B}^{(k)}_{k+1}$, nel quale siano posti $a-k+1$, $a_1-k+1, \ldots, a_k-k+1$ in luogo di $a, a_1, \ldots, a_k$. Ne consegue naturalmente che

$$(17)\qquad \mathbf{S}_{k+1}=\frac{\mathbf{V}_{k+1}}{\underline{|1}\;\underline{|2}\ldots\underline{|k}}$$

7. Il determinante di Zeipel

$$(18)\qquad \mathbf{Z}^{(m,\,p)}_{k+1}=\begin{vmatrix} \binom{m}{p} & \binom{m}{p+1} & \cdots & \binom{m}{p+k} \\ \binom{m+1}{p} & \binom{m+1}{p+1} & \cdots & \binom{m+1}{p+k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{m+k}{p} & \binom{m+k}{p+1} & \cdots & \binom{m+k}{p+k} \end{vmatrix}$$

(19) $\mathbf{Z}_{k+1}^{(m,\,p)} =$

$$\begin{vmatrix} \binom{m}{p} & \binom{m}{p}\frac{m-p}{p+1} & \binom{m}{p}\frac{(m-p)(m-p-1)}{(p+1)(p+2)}\cdots & \binom{m}{p}\frac{(m-p)(m-p-1)\dots(m-p-k+1)}{(p+1)(p+2)\dots(p+k)} \\ \binom{m+1}{p} & \binom{m+1}{p}\frac{m-p+1}{p+1} & \binom{m+1}{p}\frac{(m-p+1)(m-p)}{(p+1)(p+2)}\cdots & \binom{m+1}{p}\frac{(m-p+1)(m-p)\dots(m-p-k+2)}{(p+1)(p+2)\dots(p+k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{m+k}{p} & \binom{m+k}{p}\frac{m-p+k}{p+1} & \binom{m+k}{p}\frac{(m-p+k)(m-p+k-1)}{(p+1)(p+2)}\cdots & \binom{m+k}{p}\frac{(m-p+k)(m-p+k-1)\dots(m-p+1)}{(p+1)(p+2)\dots(p+k)} \end{vmatrix},$$

ossia, raccogliendo i fattori binomiali di ciascuna orizzontale, e quindi invertendo l'ordine delle verticali, raccogliendone pure fuori determinante i denominatori comuni,

$$\mathbf{Z}_{k+1}^{(m,\,p)} = (-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)} \frac{\binom{m}{p}\binom{m+1}{p}\cdots\binom{m+k}{p}}{(p+1)(p+1)^{\overline{2}}\cdots(p+1)^{\overline{k}}} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} (m-p-k+1)^{\overline{k}} & (m-p-k+2)^{\overline{k-1}}\dots & (m-p) & 1 \\ (m-p-k+2)^{\overline{k}} & (m-p-k+3)^{\overline{k-1}}\dots & (m-p+1) & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (m-p+1)^{\overline{k}} & (m-p+2)^{\overline{k-1}} & \dots(m-p+k) & 1 \end{vmatrix}.$$

Il determinante quì ultimo scritto è manifestamente un $\mathbf{B}_{k+1}^{(k)}$, dove sono $m-p-k+1,\ m-p-k+2, \dots, m-p+1$ ordinatamente in luogo di $a, a_1, a_2 \dots, a_k$.

Per tal modo si trova

$$(20)\qquad \mathbf{Z}_{k+1}^{(m,\,p)} = \binom{m}{p} \frac{\binom{m+1}{p}\binom{m+2}{p}\cdots\binom{m+k}{p}}{\binom{p+1}{1}\binom{p+2}{2}\cdots\binom{p+k}{k}}.$$

Nel Manuale del prof. Pascal, già menzionato, si trova

$$(20')\qquad \mathbf{Z}_{k+1}^{(m,\,p)} = \frac{\binom{m+k}{k+1}\binom{m+k-1}{k+1}\cdots\binom{m+k-p+1}{k+1}}{\binom{p+k}{k+1}\binom{p+k-1}{k+1}\cdots\binom{k+1}{k+1}}.$$

Io propongo ai lettori del *Periodico* la diretta dimostrazione dall'identità

$$(21)\qquad \binom{m}{p}\frac{\binom{m+1}{p}\binom{m+2}{p}\cdots\binom{m+k}{p}}{\binom{p+1}{1}\binom{p+2}{2}\cdots\binom{p+k}{k}} = \frac{\binom{m+k}{k+1}\binom{m+k-1}{k+1}\cdots\binom{m+k-p+1}{k+1}}{\binom{p+k}{k+1}\binom{p+k-1}{k+1}\cdots\binom{k+1}{k+1}}$$

8. Appartengono al tipo **A** certi determinanti che presentano uno smussamento ricolmo di zeri. Per es., se α è un intero positivo minore di k, e si considera il determinante di HANKEL del tipo $\mathbf{A}^{(n)}_{k+1}$, che incomincia con $(-\alpha)^{\overline{n}}$, per $n \geq k$,

$$\begin{vmatrix}
(-\alpha)^{\overline{n}} & (-\alpha+1)^{\overline{n}} & \dots (-\alpha+\alpha)^{\overline{n}} & (-\alpha+\alpha+1)^{\overline{n}} & (-\alpha+\alpha+2)^{\overline{n}} & \dots (-\alpha+k)^{\overline{n}} \\
(-\alpha+1)^{\overline{n}} & (-\alpha+2)^{\overline{n}} & \dots (-\alpha+\alpha+1)^{\overline{n}} & (-\alpha-\alpha+2)^{\overline{n}} & (-\alpha+\alpha+3)^{\overline{n}} & \dots (-\alpha+k+1)^{\overline{n}} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
(-\alpha+\alpha)^{\overline{n}} & (-\alpha+\alpha+1)^{\overline{n}} & \dots (-\alpha+2\alpha)^{\overline{n}} & (-\alpha+2\alpha+1)^{\overline{n}} & (-\alpha+2\alpha+2)^{\overline{n}} & \dots (-\alpha+\alpha+k)^{\overline{n}} \\
(-\alpha+\alpha+1)^{\overline{n}} & (-\alpha+\alpha+2)^{\overline{n}} & \dots (-\alpha+2\alpha+1)^{\overline{n}} & (-\alpha+2\alpha+2)^{\overline{n}} & (-\alpha+2\alpha+3)^{\overline{n}} & \dots (-\alpha+\alpha+k+1)^{\overline{n}} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
(-\alpha+k)^{\overline{n}} & (-\alpha+k+1)^{\overline{n}} & \dots (-\alpha+\alpha+k)^{\overline{n}} & (-\alpha+\alpha+k+1)^{\overline{n}} & (-\alpha+\alpha+k+2)^{\overline{n}} & \dots (-\alpha+2k)^{\overline{n}}
\end{vmatrix}$$

esso è appunto il determinante

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & \dots\ 0 & 1^{\overline{n}} & \dots\ (k-\alpha)^{\overline{n}} \\
0 & 0 & \dots\ 1^{\overline{n}} & 2^{\overline{n}} & \dots\ (k-\alpha+1)^{\overline{n}} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 1^{\overline{n}} & \dots\ \alpha^{\overline{n}} & (\alpha+1)^{\overline{n}} & \dots\ k^{\overline{n}} \\
1^{\overline{n}} & 2^{\overline{n}} & \dots\ (\alpha+1)^{\overline{n}} & (\alpha+2)^{\overline{n}} & \dots\ (k+1)^{\overline{n}} \\
2^{\overline{n}} & 3^{\overline{n}} & \dots\ (\alpha+2)^{\overline{n}} & (\alpha+3)^{\overline{n}} & \dots\ (k+2)^{\overline{n}} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
(k-\alpha)^{\overline{n}} & (k-\alpha+1)^{\overline{n}} & \dots\ k^{\overline{n}} & (k+1)^{\overline{n}} & \dots\ (2k-\alpha)^{\overline{n}}
\end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
= (-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)} & \times (k-\alpha)^{\overline{n-k}}(k-\alpha+1)^{\overline{n-k}} \dots (2k-\alpha)^{\overline{n-k}} \\
& \times n^{k} \qquad (n-1)^{k+1} \qquad \dots (n-k+1) \\
& \times \underline{|1}\ \underline{|2} \dots \underline{|n-1}\ \underline{|n}
\end{aligned}$$

Per conservare questo smussamento è ben chiaro che basterà conservare la legge indicata per la successione degli elementi fino alla $(\alpha+2)$-esima orizzontale ritornando alla arbitrarietà per gli elementi iniziali delle rimanenti. Si potrà allora disporre di questi primi elementi in maniera che il determinante di tipo A presenti uno smussamento simile anche nel vertice opposto a quello considerato.

Così pure sono facili a studiarsi certi altri determinanti consimili, nei quali si trovi una distribuzione di elementi nulli in striscie oblique e parallele fra loro.

Napoli, Giugno 1898.

SUPPLEMENTO ALL'ARTICOLO

SULLA TEORIA DELLA DIVISIONE E DELL'ESTRAZIONE DI RADICE (*)

DI

OTTO STOLZ

DELL'UNIVERSITÀ DI INNSBRUCK

Mi sembra opportuno aggiungere al § I " Divisione dei numeri interi " anche la dimostrazione del seguente teorema, il quale tratta della determinazione delle successive cifre del quoziente completo o incompleto.

A) *Essendo* a *un numero di* m *cifre,* b *un numero di* n *cifre, e* a' *il numero formato dalle prime* n *cifre di* a, *se si ha* $a' \geqq b$, *il quoziente di* a' *per* b, *sarà*

$$q = c_0\, 10^{m-n} + c_1\, 10^{m-n-1} + \ldots.$$

ove c_0 *è quella cifra per cui si ha:*

$$c_0 b \leqq a' < (c_0 + 1)\, b. \qquad (\alpha)$$

B) *Se si ha invece* $a' < b$, *il quoziente di* a *per* b, *sarà*

$$q = c_0\, 10^{m-n-1} + c_1\, 10^{m-n-2} + \ldots.$$

ove c_0 *è quella cifra che si determina come segue.*

Si ponga:

$$a = (10a' + a_n)\, 10^{m-n-1} + a''' \; (0 \leqq a''' < 10^{m-n-1}) \qquad (\beta)$$

ove a_n *indica la* $(n+1)^{\text{esima}}$ *cifra di* a, *contando da sinistra a destra; dovrà allora* c_0 *soddisfare alla condizione*

$$c_0 b \leqq 10a' + a_n < (c_0 + 1)\, b. \qquad (\gamma)$$

Dimostrazione.

A) Dalle (3) e (4) (nel luogo citato) e dalla precedente relazione (α) resulta subito

$$a \geqq a'\, 10^{m-n} \geqq c_0\, 10^{m-n}\, b.$$

Ma dalla relazione (α) abbiamo pure

$$(c_0 + 1)\, b - 1 \geqq a',$$

dunque

$$(c_0 + 1)\, 10^{m-n}\, b - 10^{m-n} \geqq a'\, 10^{m-n},$$

e poichè per la (3)

$$10^{m-n} > a'',$$

(*) Confronta a pag. 89 di questo periodico. Si prega di eseguire nell'articolo citato la seguente correzione pag. 94, linea 14 invece di (12) porre (10).

avremo infine

$$(c_0 + 1)\, 10^{m-n}\, b > a'\, 10^{m-n} + a'' = a.$$

B) Dalle relazioni (β) e (γ) risulta subito

$$a \geqq (\,10a' + a_n\,)\, 10^{m-n-1} \geqq c_0\, 10^{m-n-1}\, b.$$

Ma dalla relazione (γ) abbiamo ancora

$$(c_0 + 1)\, b - 1 \geqq 10a' + a_n\,,$$

da cui segue

$$(c_0 + 1)\, 10^{m-n-1}\, b - 10^{m-n-1} \geqq (\,10a' + a_n\,)\, 10^{m-n-1}.$$

Inoltre è

$$10^{m-n-1} > a'''.$$

Dall'addizione delle 2 ultime relazioni segue a causa di (β) la disuguaglianza

$$(c_0 + 1)\, 10^{m-n-1}\, b > a.$$

SULLA RISOLUZIONE IN NUMERI INTERI DELLA EQUAZIONE

$ax + by + cz = k$

Nella maggior parte dei trattati di algebra le formole risolventi della equazione

$$(1) \qquad ax + by + cz = k$$

contengono tre indeterminate, e quindi dànno infinite volte una medesima soluzione, perchè il numero delle soluzioni della (1) è soltanto doppiamente infinito. Esse formole perciò non son molto comode, specialmente quando si voglion dedurre da esse le soluzioni intere e positive della equazione stessa. Stimo perciò non inutile dar qui delle formole che non hanno questo inconveniente, dimostrando che in esse rientrano tutte le soluzioni intere della (1). La dimostrazione è del tutto analoga a quella che trovasi nell'algebra del Bertrand per le formole contenenti tre indeterminate.

È evidente esser condizione necessaria per l'esistenza di soluzioni intere della equazione (1) che, ammettendo, come è sempre lecito, che a, b, c, k siano primi tra loro, tali siano anche a, b, c. Nel dimostrare che essa condizione è anche sufficiente verremo a stabilire le formole di cui trattiamo.

Infatti, se δ è il m. c. d. di a e b, si può scrivere

$$(2) \qquad \frac{a}{\delta}x + \frac{b}{\delta}y = t\,,$$

purchè si ponga $\frac{k - cz}{\delta} = t$, cioè

$$\delta t + cz = k. \tag{3}$$

Siccome a, b, c sono primi fra loro, δ è primo con c, dunque la (3) ammette soluzioni intere; se (t_0, z_0) è una di esse, e (x_0, y_0) una qualunque dell'altra equazione

$$\frac{a}{\delta} x + \frac{b}{\delta} y = 1,$$

che ammette sempre soluzioni intere, è chiaro che

$$\alpha = x_0 t_0, \qquad \beta = y_0 t_0, \qquad \gamma = z_0$$

è una soluzione della (1).

Osservando poi che tutte le soluzioni della (2) son date da

$$x = x_0 t - \frac{b}{\delta} \vartheta, \qquad y = y_0 t + \frac{a}{\delta} \vartheta,$$

e tutte quelle della (3) da

$$t = t_0 - c\varphi, \qquad z = z_0 + \delta\varphi,$$

si vede che tutte le terne di numeri date dalle formole

$$\left\{\begin{aligned} x &= \alpha - cx_0\varphi - \frac{b}{\delta}\vartheta \\ y &= \beta - cy_0\varphi + \frac{a}{\delta}\vartheta \\ z &= \gamma + \delta\varphi, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

sono altrettante soluzioni della (1). Dimostriamo che in queste formole rientrano tutte le soluzioni di essa equazione.

Chiamando x', y', z' una di esse, occorre provare l'esistenza di valori interi di ϑ e φ capaci di soddisfare le equazioni

$$\begin{aligned} x' - \alpha &= - cx_0\varphi - \frac{b}{\delta}\vartheta \\ y' - \beta &= - cy_0\varphi + \frac{a}{\delta}\vartheta \\ z' - \gamma &= \delta\varphi. \end{aligned}$$

Di queste intanto l'ultima è conseguenza delle prime due: infatti da esse si ha

$$a(x' - \alpha) + b(y' - \beta) = - c\varphi(ax_0 + by_0);$$

e siccome per l'identità

$$a(x' - \alpha) + b(y' - \beta) + c(z' - \gamma) = 0 \tag{5}$$

il primo membro si riduce a $-c(z' - \gamma)$, e il secondo membro è eguale a $-c\delta\varphi$, perchè è evidentemente

$$ax_0 + by_0 = \delta, \tag{6}$$

si ricade nella terza.

Ora le prime due

$$-cx_0\varphi - \frac{b}{\delta}\vartheta = x' - \alpha$$

$$-cy_0\varphi + \frac{a}{\delta}\vartheta = y' - \beta$$

ammettono ciascuna, rispetto a φ e ϑ, soluzioni intere, perchè $\frac{b}{\delta}$ e $\frac{a}{\delta}$ sono, come facilmente si deduce dalla (6), primi rispettivamente con x_0 e y_0; e un fattore comune di c e $\frac{b}{\delta}$, oppure di c e $\frac{a}{\delta}$, è anche divisore di $x' - \alpha$, o di $y' - \beta$, come mostra chiaramente la (5) dopo averne divisi i due membri per δ.

Se dunque δ_1 è il m. c. d. di b e c, e δ_2 quello di a e c (i quali coincidono rispettivamente con quelli di $\frac{b}{\delta}$ e c, e di $\frac{a}{\delta}$ e c) potranno considerarsi due coppie di soluzioni intere (φ_1, ϑ_1) e (φ_2, ϑ_2) delle equazioni

$$-\frac{cx_0}{\delta_1}\varphi - \frac{b}{\delta\delta_1}\vartheta = \frac{x'-\alpha}{\delta_1}$$

$$-\frac{cy_0}{\delta_2}\varphi + \frac{a}{\delta\delta_2}\vartheta = \frac{y'-\beta}{\delta_2},$$

e tutte le altre soluzioni saranno date dalle formole

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{b}{\delta\delta_1}\lambda, \qquad \vartheta = \vartheta_1 - \frac{cx_0}{\delta_1}\lambda;$$

$$\varphi = \varphi_2 - \frac{a}{\delta\delta_2}\mu, \qquad \vartheta = \vartheta_2 - \frac{cy_0}{\delta_2}\mu.$$

Rimane perciò da provare che da queste formole potranno ricavarsi per φ e ϑ due valori interi rispettivamente eguali, che, per maggiore chiarezza, potremo chiamare φ' e ϑ'. Si avranno dunque da risolvere le equazioni

$$-\frac{b}{\delta\delta_1}\lambda - \frac{a}{\delta\delta_2}\mu = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$\frac{cx_0}{\delta_1}\lambda - \frac{cy_0}{\delta_2}\mu = \vartheta_1 - \vartheta_2,$$

le quali dànno

$$(7)\qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{-(\varphi_1-\varphi_2)\dfrac{cy_0}{\delta_2} + (\vartheta_1-\vartheta_2)\dfrac{a}{\delta\delta_2}}{\dfrac{c}{\delta_1\delta_2}}. \\[2ex] \mu = \dfrac{-(\varphi_1-\varphi_2)\dfrac{cx_0}{\delta_1} - (\vartheta_1-\vartheta_2)\dfrac{b}{\delta\delta_1}}{\dfrac{c}{\delta_1\delta_2}}. \end{cases}$$

Ora dalle identità

$$-cx_0\varphi_1 - \frac{b}{\delta}\vartheta_1 = x' - \alpha$$

$$-cy_0\varphi_2 - \frac{a}{\delta}\vartheta_2 = y' - \beta$$

facilmente si ha, ricordando la terza delle (4) e dividendo per $\delta_1\delta_2$,

$$-\frac{c}{\delta_1\delta_2}(ax_0\varphi_1 + by_0\varphi_2 + \delta\varphi') - \frac{ab}{\delta\delta_1\delta_2}(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0,$$

e siccome $\frac{c}{\delta_1\delta_2}$ è primo con $\frac{ab}{\delta\delta_1\delta_2}$, resulta che $\vartheta_1 - \vartheta_2$ è divisibile per $\frac{c}{\delta_1\delta_2}$: dunque i valori che si ricavano dalle formole (7) sono numeri interi. È dunque possibile che le coppie di valori di φ e di ϑ, di cui è stato detto, siano eguali, e perciò rimane dimostrato che le soluzioni della (1) sono tutte quelle che si hanno dalle (4), quando a ϑ e φ si attribuiscono tutti i valori interi possibili positivi o negativi.

Pesaro, 5 febbraio del 1898.

GIUSEPPE M. TESTI.

SULLA DIVISIBILITÀ DEI NUMERI

§ 1. **Notizie storiche.** — Nei principali trattati di aritmetica, per tacere dei minori, la teoria della divisibilità dei numeri non è trattata in un modo così completo come sarebbe desiderabile, perchè non vi è contenuto un criterio generale di divisibilità indipendente dalla teoria dei numeri primi, ma soltanto vi sono raccolti pochi caratteri di divisibilità per alcuni dei primi numeri naturali, i quali caratteri sono stabiliti con dimostrazioni tra loro assai simili, ma non appariscono derivazioni di un carattere generale unico, in guisa che sia posto in evidenza l'intimo legame esistente tra quei singoli caratteri come pure tra le loro dimostrazioni.

È chiaro inoltre che per l'applicazione stessa del criterio generale di divisibilità dei numeri, dato dalla teoria dei numeri primi, sarebbe utile in vari casi la conoscenza di un numero di *caratteri particolari di divisibilità*, un po' maggiore di quello, assai limitato, finora contenuto nella più parte dei trattati.

Queste considerazioni mi hanno spinto a scrivere la seguente nota, nella quale mi propongo di dedurre dalle proprietà più elementari della teoria delle congruenze, un criterio generale di divisibilità, che io chiamerò *Criterio di Pascal*, perchè per stabilirlo io non ho fatto che dare una maggiore estensione ai principi contenuti in un trattato di quell'illustre matematico, che è forse una delle sue opere meno conosciute. (*)

(*) PASCAL, *De Numeris multiplicibus ex sola characterum Numericorum Additione agnoscendis.* Trad. italiana di M. R. luogotenente nel R. Corpo di Stato Maggiore. Pisa, Tip. Nistri, 1865.

Occupandomi di questo argomento, trovai nella *Zeitschrift für Mathematik und Physik von Dr O. Schlömilch, Kahl u. Cantor (Berlin, 1891)*, alcune ricerche particolari di *Dietrichkeit*, le quali, fatte nell'anno 1891, diedero luogo ad altre ricerche e osservazioni di *Speckmann*, di *Dorsten* e di *Haas*, comparse nella predetta rivista nell'anno successivo, e particolarmente dalle osservazioni del Dr Dorsten mi resultò che le regole date da Dietrichkeit nel quarto e nel quinto fascicolo della *Zeitschrift* del '91 potevano considerarsi tutte come casi particolari di un criterio più generale del signor *Perrin*, pubblicato nei *Comptes Rendus de l'Association française pour l'avancement des Sciences (Séance du 9 août 1889)*. Consultai pure questo criterio e non lo trovai abbastanza generale nè fondato su proprietà di teoria dei numeri così semplici come quelle mercè le quali io ho stabilito il criterio che adesso esporrò, dopo le precedenti considerazioni e notizie che mi è parso opportuno premettere.

§ 2. **Criterio generale di divisibilità.** — Sia n un numero intero qualunque, scritto in un sistema di numerazione qualsivoglia di base b. Rappresentiamo con $a_1, a_2, \ldots . a_s \ldots . . a_{p-1}, a^p$ le cifre di questo numero n respettivamente degli ordini 1°, 2°, . . . , $(p-1)^{esimo}$, p^{esimo}, p essendo qualunque e supponendo che sia in generale

$$0 \leq a_s < b.$$

se indichiamo con lo zero la mancanza di unità di un ordine qualsiasi in ogni sistema di numerazione, ed escludiamo che le a_s possano esser tutte nulle.

Sia d un altro numero intero, scritto nello stesso sistema di numerazione in cui è scritto n, e pel quale supponiamo soltanto che abbia almeno una cifra di meno del numero n.

Evidentemente questo numero d sarà compreso fra due successive potenze intere della base b, onde potremo scrivere:

$$b^{q-1} < d < b^q\,,$$

ove q è un numero intero qualunque minore di p. (*)

Rispetto a questo numero d preso come modulo, si può stabilire il seguente gruppo di congruenze:

$$(1)\qquad \left.\begin{array}{r}
1 \equiv 1 \\
b \equiv b \\
b^2 \equiv b^2 \\
\ldots\ldots\ldots \\
b^{q-1} \equiv b^{q-1} \\
b^q \equiv r_1 \\
r_1\, b \equiv r_2 \\
\ldots\ldots\ldots \\
r_{p-q-1} \equiv r_{p-q}
\end{array}\right\} \pmod{d}$$

ove $r_1, r_2, \ldots . r_{p-q}$ sono $p-q$ resti successivi della divisione di b^q per d.

Dalla $(q+1)^{esima}$ di queste, moltiplicandone ambi i membri per b, si ha:

$$b^{q+1} \equiv r_1\, b \pmod{d}$$

onde, per la $(q+2)^{esima}$ troviamo:

$$b^{q+1} \equiv r_2 \pmod{d}$$

(*) Escludiamo che sia $d = b^m$, ossia che d sia una potenza intera della base b, caso questo, la cui trattazione particolare è ovvia a farsi.

Questa congruenza può essere sostituita nel gruppo (1) alla $(q+2)^{esima}$ congruenza del gruppo stesso, e, operando adesso analogamente con la $(q+2)^{esima}$ e la $(q+3)^{esima}$ congruenza di questo gruppo, e così continuando, fino a che si sia operato in simil modo, tra le due ultime congruenze del $(p-q-1)^{esimo}$ gruppo ottenuto, perverremo evidentemente al seguente gruppo:

$$\left.\begin{array}{r} 1 \equiv 1 \\ b \equiv b \\ \cdots\cdots\cdots \\ b^{q-1} \equiv b^{q-1} \\ b^q \equiv r_1 \\ b^{q+1} \equiv r_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ b^{p-1} \equiv r_{p-q} \end{array}\right\} \pmod{d}$$

Da questo, moltiplicando ordinatamente per $a_1, a_2, \ldots a_p$ ambi i membri delle p congruenze, deduciamo pure il seguente gruppo:

$$\left.\begin{array}{r} a_1 \equiv a_1 \\ a_2\, b \equiv a_2\, b \\ a_3\, b^2 \equiv a_3\, b^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_q\, b^{q-1} \equiv a_q\, b^{q-1} \\ a_{q+1}\, b^q \equiv a_{q+1}\, r_1 \\ a_{q+2}\, b^{q+1} \equiv a_{q+2}\, r_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_p\, b^{p-1} \equiv a_p\, r_{p-q} \end{array}\right\} \pmod{d}$$

donde, sommando membro a membro tutte le p congruenze, otteniamo

$$(a_1 + a_2 b + a_3 b^2 + \ldots + a_p\, b^{p-1}) \equiv (a_1 + a_2 b + \ldots + a^q\, b^{q-1}) + \\ + a^{q+1} r_1 + a^{q+2} r_2 + \ldots + a_p\, r_{p-q} \pmod{d}.$$

Ora è evidente che il numero proposto n è il primo membro della precedente congruenza, dalla quale dunque deriva la seguente

$$n \equiv (a_1 + a_2 b + \ldots + a_q\, b^{q-1}) + a_{q+1} r_1 + a_{q+2} r_2 + \ldots a_p\, r_{p-q} \pmod{d};$$

e da questa resulta il seguente

Teorema. — *Il resto della divisione d'un numero intero* n *di* p *cifre per un altro numero* d *di* q *cifre* $(q \leq p-1)$, *è eguale al resto della divisione per* d *della somma del numero dedotto da* n, *prendendone le prime* q *cifre (degli ordini* 1°, 2°, ... q^{esimo}) *più la somma dei prodotti delle rimanenti cifre di* n, *moltiplicate ordinatamente (cioè la* $(q+1)^{esima}$ *pel* 1° *resto, la* $q+2)^{esima}$ *pel* 2° *resto e così via) pei primi* p — q *resti successivi della divisione per* d *della prima potenza della base* b *che supera* d *stesso.*

Esempio: Supponiamo dato nel sistema di numerazione decimale il numero $n = 4618$ e il numero $d = 61$.

Poichè i numeri r_1, r_2, corrispondenti a 61 sono 39 e 24, avremo

$$4618 \equiv 18 + 6 \,.\, 39 + 4 \,.\, 24 \pmod{61}$$

ossia

$$4618 \equiv 348 \equiv 48 + 3 \,.\, 39 \equiv 165 \equiv 65 + 1 \,.\, 39 \equiv 104 \pmod{61}$$

cioè

$$4618 \equiv 104 \equiv 4 + 1 \,.\, 39 \equiv 43 \pmod{61}$$

Dunque 4618 diviso per 61 dà 43 di resto come può verificarsi facilmente.

I resti successivi della divisione per d della prima potenza della base b che supera d stesso, cioè i numeri $r_1, r_2, \dots r_{p-q}$, che possono essere anche nulli *tutti o da un dato momento in poi*, corrispondono in modo determinato a ogni divisore d, e sono con esso invariabili, rispetto a qualunque dividendo n; li chiameremo perciò *moltiplicatori fissi*.

Ciò premesso, pel teorema precedentemente dimostrato, enunciamo senz'altro esplicitamente il *Criterio generale di divisibilità* che volevamo stabilire, e cui diamo il nome di

CRITERIO DI PASCAL. — *Dato un numero qualunque intero* n *di* p *cifre e un altro numero intero qualunque* d *di* q *cifre* ($q \leq p-1$), *per sapere il resto della divisione di* n *per* d, *si calcolino i primi* p — q *moltiplicatori fissi corrispondenti a* d; *si stacchi da* n *il numero formato dalle sue prime* q *cifre a destra, e si aggiunga ad esso la somma dei prodotti delle rimanenti cifre di* n *moltiplicate ordinatamente (cioè la* $(q+1)^{esima}$ *da destra pel primo, la* $(q+2)^{esima}$ *pel secondo e così via) pei moltiplicatori fissi calcolati. Il numero* n' *così ottenuto è congruo ad* n *rispetto a* d; *e operando con* n' *come si è operato con* n, *e così proseguendo, perverremo infine a un numero congruo a tutti i precedenti* n, n', ... *e così piccolo che si possa calcolare a memoria il resto della sua divisione per* d. *Questo sarà il resto domandato, onde se questo resto sia zero,* n *sarà divisibile per* d.

Esempio: Sia $n = 264329$ e $d = 13$ nel sistema di numerazione decimale.

Il numero n avendo 6 cifre, e d avendone 2, occorrono 4 moltiplicatori fissi corrispondenti al 13, i quali, come si trova assai speditamente, sono 9, 12, 3, 4; onde il numero dato

$$n \equiv 29 + 3.9 + 12.4 + 6.3 + 2.4 \equiv 130 \equiv 30 + 1.9 \equiv 39 \equiv 0 \pmod{13}.$$

Ne concludiamo che il 264329 è divisibile per 13, come può verificarsi direttamente colla divisione.

Sia ancora $n = 68903254$ e $d = 7$ pure nel sistema di numerazione decimale. Occorrono adesso 7 moltiplicatori fissi corrispondenti al divisore 7, i quali sono 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3; onde il numero dato

$$n \equiv 4 + 5.3 + 2.2 + 3.6 + . + 9.5 + 8.1 + 6.3 \equiv 112 \equiv 2 + 1.3 + 1.2 \equiv 0 \pmod{7}$$

onde concludiamo che il 68903254 è divisibile per 7.

OSSERVAZIONI. — 1ª. All'obiezione che può esserci fatta relativamente alla utilità pratica del criterio testè stabilito, rispondiamo col fare osservare che in generale, appunto nella pratica, un divisore d non ha più di tre o quattro cifre ed n non ne ha più di cinque o sei. Onde per un divisore di tre o quattro cifre si hanno da calcolare soltanto due o tre moltiplicatori fissi, e per un divisore di una o due cifre, i moltiplicatori fissi si possono calcolare con tutta facilità e a memoria, quando non si disponga addirittura d'una tavola, come quella che diamo in fine di questo lavoro, nella quale sono calcolati quelli d'uso più frequente, corrispondenti ai numeri primi da 1 a 101 incluso, nel sistema di numerazione decimale.

2ª. L'algoritmo mediante il quale possono essere calcolati i *moltiplicatori fissi* corrispondenti ad un qualunque divisore d, è assai semplice; e se vogliamo, può considerarsi ridotto a un numero finito di moltiplicazioni e sottrazioni. Ora, dall'algoritmo medesimo col quale si calcolano questi *moltiplicatori fissi* apparisce che essi, da un dato momento in poi devono ripetersi tutti o in parte.

Tre casi possono darsi:

1° d è primo colla base b (e quindi anche con b^q, prima potenza di b, che supera d).

2° d non è primo con b, ma $\frac{d}{\delta}$ è primo con b, essendo δ il massimo comun divisore di d e b^n.

3° d non è primo con b e neppure $\frac{d}{\delta}$ è primo con b.

Per esempio, nel sistema di numerazione decimale, i numeri 23, 28, 24, sono respettivamente nel primo, secondo e terzo caso.

Nel terzo dei casi di sopra distinti è contenuto anche ogni numero d tale che $\frac{d}{\delta}$ non abbia fattori primi diversi da quelli della base b, come per esempio i numeri 32, 80, etc. nel sistema di numerazione decimale.

Allora, dalle note condizioni necessarie e sufficienti affinchè una frazione irriducibile sia trasformabile in un numero decimale finito o in un numero decimale infinito, periodico semplice o misto, resulta immediatamente che nel primo e nel secondo caso i *moltiplicatori fissi* corrispondenti a d si ripeteranno tutti quanti da un dato momento in poi, mentre nel terzo caso vi sarà un gruppo di *moltiplicatori fissi*, che non si ripeterà, seguito da un altro gruppo di essi, riproducentesi indefinitamente; non escluso beninteso in tutti i casi che il gruppo riproducentesi indefinitamente sia costituito pure unicamente dallo zero.

Chiameremo *periodo* il gruppo dei *moltiplicatori fissi*, che si riproduce indefinitamente, ed *antiperiodo* il gruppo di essi, che non si riproduce. Nel caso in cui si abbia antiperiodo e periodo, adopreremo, per distinguere queste due parti, una piccola linea orizzontale che porremo al disopra dell'insieme delle cifre, di cui è costituito il periodo.

I *moltiplicatori fissi* corrispondenti a un divisore qualunque d formano dunque sempre un gruppo *periodico*, a cui aggiungeremo il nome di *semplice* o *misto*, secondochè non esisterà oppure esisterà l'antiperiodo.

Per esempio, i moltiplicatori fissi corrispondenti al 7 formano il gruppo periodico semplice (3, 2, 6, 5, 4, 1), e così quelli corrispondenti al 37 formano il gruppo periodico semplice (26, 1, 10); mentre quelli corrispondenti al 24 formano il gruppo periodico misto $(4, \overline{16})$ e così al 48 corrisponde il gruppo periodico misto $(4, 40, \overline{16})$.

§ 3. **Criteri particolari di divisibilità.** — È adesso interessante mostrare come dal Criterio generale di Pascal derivano tutti i caratteri particolari, già noti, nel sistema di numerazione decimale.

A $d = 2$ corrisponde il gruppo periodico semplice $(\overline{0})$; onde secondo il criterio di Pascal, un numero qualunque n, diviso per 2, dà lo stesso resto della sua cifra delle unità semplici.

A $d = 3$ corrisponde il gruppo periodico semplice $\overline{1}$; onde, un numero qualunque n, diviso per 3, dà lo stesso resto della somma di tutte le sue cifre considerate nel loro valore assoluto.

„ $d = 4$ corrisponde il gruppo periodico misto $(2, \overline{0})$; onde, un numero qualunque n diviso per 4 dà lo stesso resto della somma della cifra delle sue unità semplici, più il doppio della cifra delle diecine. (*)

„ $d = 5$ come a $d = 2$ corrisponde il gruppo $(\overline{0})$, onde il carattere di divisibilità del 5 è lo stesso di quello del 2.

(*) Cfr. Arzelà e Ingrami, *Aritmetica razionale*, pag. 58. Bologna, Zanichelli.

A $d=8$ corrisponde il gruppo $(\overline{2, 4, 0})$, onde un numero qualunque n diviso per 8 dà lo stesso resto della somma della cifra delle sue unità semplici, più il doppio della cifra delle diecine, più il quadruplo di quella delle centinaia. (*)

" $d=9$ come a $d=3$ corrisponde il gruppo $(\overline{1})$, onde il carattere di divisibilità del 9 è lo stesso di quello del 3.

E qui torna opportuno osservare che in generale un numero n, scritto in un sistema di numerazione qualsivoglia di base b, dà, diviso per $b-1$, lo stesso resto della somma delle sue cifre considerate nel loro valore assoluto.

" $d=11$ corrisponde il gruppo $(\overline{1, 10})$ onde un numero qualunque n, diviso per 11 dà lo stesso resto della somma delle sue cifre di posto dispari, da destra più il decuplo della somma delle sue cifre di posto pari. (**)

Così, in generale, in un sistema di numerazione qualunque, di base b, un numero n, diviso per $b+1$ dà lo stesso resto della somma delle sue cifre di posto dispari da destra, più tante volte la somma delle sue cifre di posto pari quante sono le unità della base b.

" $d=25$ e a $d=125$ corrisponde lo stesso gruppo $(\overline{0})$, onde un numero qualunque n, diviso per 25 o per 125, dà lo stesso resto del numero formato dalle due cifre dell'unità semplici e delle diecine, o di quello formato dalle tre cifre dell'unità semplici, delle diecine e delle centinaia.

Abbiamo così ritrovati i caratteri particolari già noti (e osserviamo che i caratteri del 4 dell'8, e dell'11 non sono presentati nella maggior parte dei trattati di aritmetica sotto una forma così semplice come quella da noi riportata) e li abbiamo derivati tutti dal carattere generale di divisibilità, da noi stabilito.

§ 4. Tabella dei moltiplicatori fissi corrispondenti ai numeri primi da 1 a 101. — Per accrescere il numero dei caratteri particolari di divisibilità, e facilitare l'applicazione del Criterio generale di Pascal, uniamo alle precedenti considerazioni la seguente tabella, la quale contiene i gruppi di moltiplicatori fissi corrispondenti a tutti i numeri primi, da 1 a 101 incluso, nel sistema di numerazione decimale.

Divisore primo d	GRUPPO CORRISPONDENTE	Divisore primo d	GRUPPO CORRISPONDENTE
2	(0)	47	(6, 13, 36, 31, 28, ...)
3	(1)	53	(47, 46, 36, 42, ...)
5	(0)	59	(41, 56, 29, 54, 9, ...)
7	(3, 2, 6, 4, 5, 1)	61	(39, 24, 57, 21, 27, ...)
11	(1, 10)	67	(33, 62, 17, 36, 25, ...)
13	(9, 12, 3, 4, 1, 10)	71	(29, 6, 60, 32, 36, ...)
17	(15, 14, 4, 6, 9, ...)	73	(27, 51, 72, 63, 46, 22, 1, 10)
19	(5, 12, 6, 3, 11, ...)	79	(21, 52, 46, 65, 18, ...)
23	(8, 11, 18, 19, 6, ...)	83	(17, 4, 40, 68, 16, ...)
29	(13, 14, 24, 8, 2, ...)	89	(11, 21, 32, 53, ...)
31	(7, 8, 18, 25, 2, ...)	97	(3, 30, 9, 90, ...)
37	(26, 1, 10)	101	(91, 1, 10, 100, ...)
41	(18, 16, 37, 1, 10)		
43	(14, 11, 24, 25, 35, ...)		

(*) Cfr. ARZELÀ e INGRAMI, *Aritmetica razionale*, pag. 258 esercizio 181. Bologna, Zanichelli.
(**) " " " " " " 61.

Il gruppo corrispondente ad ogni numero primo è necessariamente periodico semplice; perciò nella precedente tabella abbiamo tralasciato, per semplicità, la linea al disopra del periodo, racchiudendolo semplicemente entro parentesi.

Osservazione. — Si può anche determinare a priori il numero dei numeri del gruppo corrispondente a ogni divisore d; questa ricerca coincide coll'altra della determinazione *del numero delle cifre del periodo delle frazioni periodiche*, ricerca recentemente fatta con chiarezza ed eleganza dal prof. Bettini. (*) In base ai risultati cui l'egregio prof. Bettini è pervenuto, si può affermare che: *il numero dei numeri del gruppo corrispondente a un divisore primo* d *è eguale al quoziente della divisione* d — 1 *per il massimo comun divisore di* d — 1 *e dell'indice della base* b *del sistema di numerazione rispetto al modulo* d. Così il gruppo corrispondente al 37 nel sistema di numerazione decimale, si compone di 3 numeri; quello corrispondente al 73 si compone di 8 numeri, etc., mentre quello corrispondente al 23 si compone di 22 numeri etc., come è confermato dalla precedente tabella.

Alla ricerca precedente è poi facilmente riducibile quella più generale della determinazione del numero dei numeri del gruppo corrispondente a un numero qualunque composto di più fattori primi.

In un successivo articolo dedurrò dal criterio generale di Pascal altri criteri particolari di divisibilità.

Belluno, Marzo 1898.

Prof. Alberto Conti.

GENERALIZZAZIONE DEI SISTEMI DI NUMERAZIONE

1. Il sistema di numerazione decimale è sufficiente a rappresentare qualunque numero reale e positivo, sia intero che frazionario od irrazionale, usando (s'intende) della virgola e, se occorre, di un numero infinito di cifre: e raggiunge questo scopo esprimendo i numeri con un seguito di cifre scelte fra quelle 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ciascuna delle quali, a seconda del posto che occupa, acquista un valore speciale, appartenente alle categorie dei 10^n, o dei $\frac{1}{10^n}$. Ogni numero si esprime dunque colla somma di convenienti numeri (costituenti un gruppo finito od infinito) scelti fra quelli del gruppo

$$\ldots \underset{(1)}{10^n},\ \underset{(2)}{10^n}, \ldots \underset{(9)}{10^n}, \ldots \underset{(1)}{100},\ \underset{(2)}{100}, \ldots \underset{(9)}{100},\ \underset{(1)}{10},\ \underset{(2)}{10}, \ldots \underset{(9)}{10},\ \underset{(1)}{1},\ \underset{(2)}{1}, \ldots \underset{(9)}{1},$$

e dell'altro

$$\underset{(1)}{\frac{1}{10}},\ \underset{(2)}{\frac{1}{10}}, \ldots \underset{(9)}{\frac{1}{10}},\ \underset{(1)}{\frac{1}{100}},\ \underset{(2)}{\frac{1}{100}}, \ldots \underset{(9)}{\frac{1}{100}}, \ldots,\ \underset{(1)}{\frac{1}{10^n}},\ \underset{(2)}{\frac{1}{10^n}}, \ldots \underset{(9)}{\frac{1}{10^n}}, \ldots;$$

(*) Cfr. *Periodico di Matematica* diretto dal Prof. Lazzeri, anno XII, fascicolo II.

i quali possono complessivamente ordinarsi in un'unica serie, per es.

$$\underset{(1)}{1},\dots\underset{(9)}{1},\ \underset{(1)}{\frac{1}{10}},\dots\underset{(9)}{\frac{1}{10}},\ \underset{(1)}{10},\dots\underset{(9)}{10},\ \underset{(1)}{\frac{1}{100}},\dots\underset{(9)}{\frac{1}{100}},\ \underset{(1)}{100},\dots\underset{(9)}{100},\dots,\ \underset{(1)}{\frac{1}{10^n}},\dots\underset{(9)}{\frac{1}{10^n}},\ \underset{(1)}{10^n},\dots\underset{(9)}{10^n}\dots$$

In tale sistema di numerazione ogni numero ha un solo modo di scrittura, eccezione fatta per i numeri che si esprimono con un numero finito di cifre, nei quali una delle unità dell'infima specie può esser soppressa, mettendo in sua vece le cifre 9 di tutte le specie di unità seguenti. Tali numeri con doppio modo di scrittura costituiscono per altro un gruppo di 1ª potenza, come risulta per corollario da un noto teorema del Cantor, (*) poichè le combinazioni di gruppi finiti di segni scelti in un sistema numerabile, costituiscono un gruppo di prima potenza; il continuo di tutti i numeri positivi è invece di potenza superiore alla prima.

Lo stesso può dirsi, per es., del sistema binario, il quale si serve delle sole cifre 0 ed 1, applicate ai numeri dei gruppi

$$\dots 2^n,\ 2^{n-1},\dots,4,\ 2,\ 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2},\frac{1}{4},\dots\frac{1}{2^n},\dots,$$

i cui termini possono pure disporsi in serie, per es.,

$$1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ 4,\ \frac{1}{4},\ 8,\ \frac{1}{8},\dots 2^n,\ \frac{1}{2^n},\dots:$$

e così può ripetersi anche dei sistemi di numerazione con altre basi.

In sostanza, in uno di tali sistemi di numerazione a base unica ogni numero positivo può ottenersi come somma di un gruppo finito od infinito di termini scelti in una conveniente serie.

2. Viene spontanea la domanda se la questione è suscettibile di essere generalizzata, cioè se possono darsi altre serie, e quali siano, tali che prendendo tutte le somme e tutte le serie dei loro termini, con esse si rappresentino tutti i numeri reali positivi.

È stato dimostrato (**) che sono in queste condizioni tutte e sole le serie divergenti, che godono le seguenti proprietà: 1° il limite inferiore dei loro termini è lo zero; 2° per ogni numero positivo α si ha che la somma dei termini minori di α è non minore di α.

Da questa ultima condizione discende l'altra che la somma dei termini della serie minori di uno di essi u_p, deve essere $\geq u_p$; ma questa condizione non è sufficiente, e perciò non può sostituirsi all'altra, se non per le serie i cui termini si possono disporre anche sotto forma di una serie illimitata in uno o in due sensi, tale che ciascun termine sia, in questa disposizione, maggiore od uguale al seguente. (***) Peraltro, se per ogni termine u_p la somma dei termini minori di esso è *uguale* ad u_p, questa condizione (non più necessaria) diviene sufficiente, cioè:

(*) Cfr. anche BETTAZZI, *Sui sistemi di numerazione pei numeri reali, Periodico*, vol. V.

(**) BETTAZZI, *Sulle serie a termini positivi le cui parti rappresentano un continuo*, § 6. Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Torino. Anno 1897-98.

(***) BETTAZZI, *l. c.* § 8.

Una serie divergente di cui i termini (tutti positivi) abbiano per limite lo zero, e tale che per ogni suo termine u_q la somma dei termini della serie minori di u_q sia uguale ad u_q, gode la proprietà che ogni numero reale positivo può rappresentarsi con una somma di un numero finito o di un numero infinito dei suoi termini. (*)

Queste ultime serie si dicono *serie minime*.

3. Se una serie è tale che le somme delle parti finite od infinite di essa rappresentano tutti i numeri reali positivi, si vede facilmente che i numeri uguali alla somma di un numero finito di termini sono uguali anche alla somma di un numero infinito di termini convenientemente scelti. (**)

Ma le serie minime sono inoltre tali che tutti i numeri non possono esprimersi che *in un modo solo* sotto forma di somme di numero infinito di termini: ed alcuni, costituenti un gruppo che è soltanto dalla prima potenza, anche come somme di un numero finito di termini, e ciò pure in un modo solo, ed inoltre sopprimendo allora in questa somma finita uno dei termini minimi (o il termine minimo) e sostituendo ad esso tutti i termini delle serie minori di esso, si ha quella somma di infiniti termini che rappresenta lo stesso numero. (***)

E le serie minime sono le sole che godono di tale proprietà, perchè nelle serie rappresentative e che non sono minime vi sono infiniti numeri, costituenti un continuo, che hanno più modi di rappresentazione.

Le serie citate al § 1 e che servono di base ai sistemi di numerazione binaria, decimale ecc., sono appunto, com'è facile vedere, serie minime: ed infatti sappiamo che con esse un numero può esprimersi sempre, e in un modo solo, sotto forma di decimale illimitato, e che ogni numero intero o decimale finito si può trasformare (in un modo solo) in decimale illimitato diminuendo di un'unità la cifra ultima, e sostituendo ad essa tutte le seguenti cifre 1 o 9 risp.

Le serie che saranno adatte ad una utile generalizzazione dei sistemi di numerazione saranno quindi soltanto le serie minime, delle quali perciò sarà conveniente accennare la costituzione.

4. In una serie divergente minima si vede facilmente (****) che devono essere in numero finito i termini uguali ad un medesimo, eccezione fatta per quelli uguali al termine massimo, se c'è, i quali dovranno essere infiniti. La serie quindi consterà o di un numero infinito di termini maggiori, e di una serie ordinabile in modo non crescente, o di termini che si potranno disporre in una serie illimitata nei due sensi

$$\ldots. u_{-n}, \ldots. u_{-3}, u_{-2}, u_{-1}, u_1, u_2, u_3, \ldots. u_n, \ldots.$$

ordinata in modo non crescente. Inoltre si riconosce che ciascun termine sarà sottomultiplo del più prossimo precedente diverso da esso, con una

(*) BETTAZZI, *l. c.* § 9.
(**) BETTAZZI, *l. c.* § 12.
(***) BETTAZZI, *l. c.* § 13.
(****) BETTAZZI, *l. c.* § 10.

sottomultiplicità data dal successivo del numero dei termini uguali ad esso. La serie si potrà dunque ridurre o alla forma:

$$(1)\qquad \ldots\, a, \ldots, a, a, a, \overbrace{\frac{a}{s_1}, \ldots \frac{a}{s_1}}^{s_1-1}, \overbrace{\frac{a}{s_1 s_2}, \ldots \frac{a}{s_1 s_2}}^{s_2-1}, \overbrace{\frac{a}{s_1 s_2 s_3}, \ldots \frac{a}{s_1 s_2 s_3}}^{s_3-1}, \ldots$$

$$\ldots\, \overbrace{\frac{a}{s_1 s_2 \ldots s_n}, \ldots \frac{a}{s_1 s_2 \ldots s_n}}^{s_n-1}, \ldots \qquad .$$

o all'altra

$$(2)\quad \ldots \overbrace{(r_n r_{n-1} \ldots r_2 r_1 a), \ldots, (r_n r_{n-1} r_2 r_1 a)}^{r_{n+1}-1}, \overbrace{(r_{n-1} \ldots r_2 r_1 a) \ldots (r_{n-1} r_2 r_1 a)}^{r_n-1}, \ldots$$

$$\ldots \overbrace{r_2 r_1 a, \ldots r_2 r_1 a}^{r_3-1}, \overbrace{r_1 a, \ldots r_1 a}^{r_2-1}, \overbrace{a, \ldots a}^{r_1-1}, \overbrace{\frac{a}{s_1}, \ldots \frac{a}{s_1}}^{s_1-1}, \overbrace{\frac{a}{s_1 s_2}, \ldots \frac{a}{s_1 s_2}}^{s_2-1}, \ldots \overbrace{\frac{a}{s_1 s_2 \ldots s_n}, \ldots \frac{a}{s_1 s_2 \ldots s_n}}^{s_n-1}, \ldots$$

dove gli r e gli s sono interi >1, ed a è un numero positivo qualunque. Ed una serie delle forme precedenti, qualunque sia a, rappresenterà sempre tutti i numeri reali.

Se nelle serie minime si vuole che tutti i termini uguali debbano essere in ugual numero, per es. $p-1$ $(p>1)$, la serie dovrà potersi disporre così:

$$(3)\quad \ldots\, \overbrace{p^n a, \ldots p^n a}^{p-1}, \ldots, \overbrace{pa, \ldots pa}^{p-1}, \overbrace{a, \ldots a}^{p-1}, \overbrace{\frac{a}{p}, \ldots \frac{a}{p}}^{p-1}, \overbrace{\frac{a}{p^2}, \ldots \frac{a}{p^2}}^{p-1}, \ldots \overbrace{\frac{a}{p^n}, \ldots \frac{a}{p^n}}^{p-1}, \ldots,$$

e se in particolare non deve contenere termini uguali $(p=2)$ dovrà potersi ordinare così:

$$(4)\qquad \ldots\, 2^n a,\ 2^{n-1} a, \ldots 4a,\ 2a,\ a,\ \frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \ldots \frac{a}{2^n}, \ldots$$

Sono di queste ultime due specie le serie che stanno a base dei sistemi di numerazione risp. decimale e binario, nelle quali $a=1$, $p=10$.

5. Colle serie minime si possono costruire sistemi di numerazione che generalizzino quelli in uso, sistemi nei quali l'unità di un certo ordine ne valga s di quelle dell'ordine seguente, dove s può esser variabile; e ciò sommando termini di serie della forma (1) o (2).

Se si prende una serie divergente, la quale si possa ordinare in serie illimitata in un sol senso che sia non crescente, e in cui i termini abbiano per limite lo zero, con essa si potrà rappresentare qualunque numero positivo, essendo soddisfatta la condizione richiesta nel § 3, giacchè la somma dei termini minori di un numero dato consta di tutto un pezzo di serie da un certo termine in poi, ed è perciò infinita. Ma, appunto per tale ultima ragione, la serie non sarà minima, e quindi non vi sarà l'unicità del modo di rappresentazione di ogni numero: che anzi ogni numero si potrà rappresentare in infiniti modi. Ed invero se un numero è la somma di termini, dei quali quello coll'indice minimo sia u_p, sopprimendo nella serie i primi termini, fino a tutti quelli che sono $= u_p$, dalla serie restante potremo ottenere un'altra rappresentazione del numero diversa dalla prima e da quella; operando analogamente una terza, e così via.

Per es. la serie armonica

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots \frac{1}{n}, \dots$$

rappresenta qualunque numero positivo, ma ciascun numero in infiniti modi.

6. Possiamo esaminare la questione se per istituire un sistema di numerazione per tutti i numeri reali si possa ricorrere a un gruppo qualunque di segni arbitrari ma distinti variamente combinati o per l'ordine (cioè per il posto che occupano), o per la loro qualità, o per il loro numero.

Osserviamo intanto che, siccome un medesimo segno scritto in diversi posti acquista diversi significati, e quindi corrisponde ad altrettanti segni distinti, possiamo, senza ledere la generalità, chiederci se possiamo servirci di un gruppo qualunque di segni distinti, variamente combinati e per la qualità e per la quantità.

Se si tratta di un gruppo finito di segni, chiaramente con esso non può (comunque i segni si combinino) rappresentarsi che un gruppo finito di numeri. Occorre dunque che il gruppo dei segni sia infinito.

Vediamo se è sufficiente un gruppo infinito della minima potenza possibile, cioè un gruppo numerabile di segni.

Prendendo da esso gruppi finiti di segni, e combinandoli comunque, sia per il vario numero di termini, sia per le varie qualità di essi, si ottengono infiniti gruppi distinti, ma insufficienti a rappresentare tutti i numeri reali, come discende da teoremi di Cantor, e come esplicitamente dimostrai in questo *Periodico;* (*) tali gruppi, presi come enti, costituiscono un gruppo di prima potenza, mentre il gruppo di tutti i numeri reali è di potenza superiore alla prima.

Se si accetta di prendere *anche,* oppure *soltanto,* gruppi di infiniti segni, allora la cosa è possibile, qualunque sia il gruppo numerabile di segni proposti. Infatti premettiamo il

Teorema. — *Dato un gruppo numerabile di enti distinti fra loro, se si considerano come enti tutti i gruppi infiniti, parti di esso, il gruppo di questi enti è della potenza del continuo.*

Basta provare il teorema per uno speciale gruppo numerabile G, giacchè preso qualunque altro gruppo numerabile G_1 si vede che si può stabilire una corrispondenza univoca fra le parti di G e quelle composte di enti che occupano un analogo posto in G_1, e che quindi i gruppi ottenuti da G e da G_1 hanno uguale potenza. Ma se per gruppo G si prende una serie minima, poichè le somme delle sue parti infinite ci

(*) Bettazzi, *Dei sistemi di numerazione per i numeri reali,* § 3 (*Periodico,* T. V). — Id. *Fondamenti per una teoria generale dei gruppi,* § 95 (ivi, T. XI).

danno tutti i numeri reali positivi e ciascuno una volta sola (§ 3), si conclude che il gruppo di queste sue parti infinite è della potenza del continuo; dunque il teorema è provato per un gruppo numerabile qualunque.

Corollario. — *Il gruppo avente per enti tutti i gruppi o finiti od infiniti, parti di un gruppo numerabile di enti distinti fra loro, è della potenza del continuo:* giacchè un gruppo composto di due, uno numerabile ed uno avente la potenza del continuo, è esso pure della potenza del continuo.

Possiamo concludere da questo teorema che con un gruppo numerabile qualsivoglia di segni si può stabilire un sistema di numerazione tale che ciascun numero venga rappresentato una volta ed una sola, mediante un gruppo di infiniti segni tolti da quelli della serie data, e in modo che ogni possibile gruppo di infiniti fra quei segni rappresenti un numero. Inoltre si potranno anche rappresentare altri numeri (ripetendo, per es., alcuni di quelli già rappresentati) adoprando gruppi finiti di segni, scelti fra quelli proposti; ma i numeri così rappresentati costituiranno un gruppo numerabile. Per es. si potrebbero rappresentare tutti i numeri positivi reali coi gruppi di infiniti segni, e coi gruppi finiti i numeri razionali, i quali costituiscono appunto un gruppo numerabile.

Torino, Febbraio 1898.

Rodolfo Bettazzi.

PICCOLE NOTE

Caratteri di divisibilità. — Nell'ultimo fascicolo di questo *Periodico* il signor Mariantoni pubblicò un articolo sui " Caratteri di divisibilità " di un numero per un *numero primo p* di almeno due cifre. Il metodo del sig. Mariantoni si fonda sopra una elegante osservazione relativa alle soluzioni intere del sistema indeterminato

$$\begin{cases} ax+by=p \\ \mathrm{A}x+\mathrm{B}y=pz. \text{ (*)} \end{cases}$$

Si ricorre però in tal modo a cognizioni superiori al necessario, ottenendo intanto meno di quanto sia possibile.

A trovare i caratteri del sig. Mariantoni (**) ed altri simili ed assai più semplici, (***) e valevoli per *qualunque numero p* terminato in 1, 3, 7, 9, basta invero

(*) La quale osservazione però, per l'esattezza, richiede che si *suppongano* α e β tali che $a\alpha$ e $b\beta$ siano entrambi positivi, o, più generalmente, α e β primi con p: così è effettivamente nell'applicazione che se ne fa.

(**) Non si ottiene il carattere dato dal sig. Mariantoni pei numeri terminati in 7; ma se ne sostituisce un altro più semplice.

(***) Si ottengono per es. caratteri pratici pei numeri terminati in 1.

la seguente semplicissima osservazione di aritmetica elementare: Di ogni numero della forma indicata esistono multipli terminati con k cifre 9 e multipli terminati con $k-1$ cifre 0 e una cifra 1, dove k è un numero arbitrario. Detto P un tal multiplo, sarà cioè

$$P = 10^k \mu + (10^k - 1) \text{ ovvero } P = 10^k \nu + 1.$$

Sia ora N un numero: $N = 10^k A + B$ dove B è il gruppo delle k ultime cifre di N. Sarà

$$N \equiv N \pm PB \pmod{p}.$$

1°. Ma per $P = 10^k \mu + (10^k - 1)$

$$N + PB = 10^k [A + (\mu + 1) B];$$

2°. Ma per $P = 10^k \nu + 1$.

$$N - PB = 10^k [A - \nu B].$$

Quindi, poichè p è primo con 10, N *sarà divisibile per* p, *se tale è* $A + (\mu + 1) B$ *o* $A - \nu B$.

In generale: *Se un numero è scritto in un sistema di numerazione di base* a, *la sua divisibilità pei divisori di* a *si riconosce sull'ultima cifra. Dei numeri primi con* a *esistono sempre multipli terminati in un gruppo di cifre dato ad arbitrio: in particolare con k cifre* $a - 1$ *e con $k - 1$ cifre* 0 *e una* 1. *Per tutti i numeri primi con* a *si hanno quindi caratteri analoghi ai suesposti.*

Ho esposta la precedente semplicissima osservazione perchè, per quanto io so, non si usa fare nei libri di aritmetica un ragionamento di questo genere, e l'articolo del sig. Mariantoni viene a confermarmi in questo pensiero. Ora mi pare che il precedente ragionamento, esposto naturalmente colla necessaria facilità, possa ben stare, in un insegnamento di aritmetica elementare, al confronto di quelli che si usano per la dimostrazione dei caratteri di divisibilità per 3, 9, 11 (che comprende d'altronde come casi particolari); e sia, per la sua generalità, didatticamente non inutile.

Il carattere trovato può poi subire trasformazioni talvolta convenienti. Se si decompone N in gruppi di K cifre, a partire da destra, e quindi, incominciando da sinistra, si moltiplicano i gruppi successivi rispettivamente per $1, \mu + 1, (\mu + 1)^2, \ldots$ ovvero: per $1, -\nu, \nu^2, -\nu^3, \ldots$ e si sommano algebricamente i prodotti, il risultato differisce per un multiplo di P da quello ottenuto coll'applicazione ripetuta della regola suesposta. E i moltiplicatori $\mu + 1, (\mu + 1)^2, \ldots, -\nu, \nu^2, \ldots$ si potranno ancora alterare per multipli di p: in tal modo si vede che più o meno presto si ritornerà al moltiplicatore ± 1: è quindi finito il numero dei moltiplicatori differenti (per 7 saranno 3; per 37 pure 3, per $k = 1$, uno solo — precisamente 1 —, per $k = 3$; ecc.).

Il lettore potrà formarsi esempi da se stesso.

B. Levi.

Sulla Quistione 278. — Ristabilendo i coefficienti del termine in xy e di quello in x, che devono essere rispettivamente $2(a'^2 \cos^3 \omega + b'^2 \cos \omega)$ e $(-2a'^3 \cos^3 \omega)$ la equazione trovata dal sig. *Gallucci* per il luogo, si spezza nelle due

(1) $\quad x(a'^2 + b'^2) \cos \omega + y(2a'^2 \cos^2 \omega - a'^2 + b'^2) - a'(a'^2 - b'^2) \cos \omega = 0$

(2) $\quad x \cos \omega + y - a' \cos \omega = 0,$

la prima sola delle quali rappresenta il luogo cercato, la (2) è la normale alla conica data nel vertice fisso, retta estranea alla quistione. Se la conica data è parabola la equazione trovata dal sig. *Gallucci*, che deve scriversi

$$x^2 \cos^2 \omega + 2xy \cos^3 \omega + y^2 \cos 2\omega - px \cos^2 \omega - py \cos \omega = 0,$$

si spezza nelle due

$$(1)' \qquad x \cos \omega + y = 0$$

$$(2)' \qquad x \cos \omega + y \cos 2\omega = p \cos \omega$$

la prima delle quali rappresenta al solito la normale nel vertice fisso; il luogo cercato non è dunque una iperbole ma si riduce alla retta (2)′.

In una lettera del 27 maggio, il sig. Prof. *Dror-Farny*, di Porretruy, esprimendomi il dubbio che la soluzione della quistione 278 fosse errata mi comunicava la seguente elegante soluzione sintetica, che dà la interpretazione delle equazioni (1). (2)′: „ Poichè la direzione MM′ rimane fissa il cerchio AMM′ sega la conica in un quarto punto D tale che la direzione AD è antiparallela a quella della tangente in A, rispetto agli assi della conica; AD è dunque fissa e il luogo del cerchio circoscritto ad MMM′D è *la mediatrice del segmento* AD „.

V. Retali.

Sulla Quistione 356. — Le due parabole osculano il cerchio nei punti H_1, H_2 di coordinate $x = \frac{a}{3}$, $y = \pm \sqrt{9r^2 - 4a^2} : 3$, come trova il Prof. Barozzini, ma i punti K_1, K_2, de' quali dà le coordinate più sotto sono, è vero, i punti diametralmente opposti ad H_1, H_2 ma non già le ulteriori intersezioni delle parabole col cerchio: ciò si vede subito ricordando che, detto P_1, P_2 queste intersezioni, la corda H_1P_1 e la tangente in H_1 sono egualmente inclinate sulla ordinata H_1H_2. La costruzione, semplicissima, delle parabole osculatrici al cerchio e aventi ecc. ecc. è la seguente: *Preso* $\overline{OC} = \frac{1}{3}\overline{OA}$, la parallela $| H_1H_2 |$ *condotta da* C *alla direttrice data sega il cerchio dato nei punti di osculazione, se* A_1, A_2 *sono le projezioni ortogonali di* H_1, H_2 *sulla direttrice i fuochi delle parabole sono i simmetrici di* A_1, A_2 *rispetto alle tangenti in* H_1, H_2. Si può aggiungere, ma non è necessario per la costruzione, che le rette simmetriche rispetto ad $| H_1H_2 |$ delle tangenti in H_1, H_2, segano il cerchio in punti delle parabole cercate. I fuochi di queste due parabole sono le cuspidi al finito della curva del sest'ordine corrispondente al cerchio dato, nelle trasformazioni indicate nelle quistioni 401 e 406 (*Periodico*, T. XIII, pp. 85 e 125).

V. Retali.

Sulla Quistione 408. — La seconda parte della quistione 408 è ancora vera in un caso più generale, e cioè allorchè gli n raggi condotti per O formano fra di loro angoli disuguali. Dò una dimostrazione geometrica. Siano OA_1, OA_2, ... OA_n gli n raggi uscenti da O e PH_1, PH_2, ..., PH_n le perpendicolari condotte da O rispettivamente su OA_1, OA_2, ... OA_n. Allora è chiaro anzitutto che i punti H_1, H_2, ... H_n giacciono tutti sulla circonferenza che ha per diametro OP. Essendo poi i lati dell'angolo H_1PH_2 rispettivamente perpendicolari ai lati dell'angolo A_1OA_2, questi angoli saranno uguali o supplementari, e quindi in ogni caso la corda H_1H_2, che sottende l'angolo H_1PH_2 rimane costante al variare di P sulla circonferenza di centro O. Analogamente si dimostra che rimangono costanti le lunghezze dei lati H_2H_3, H_3H_4.... H_nH_1. Adunque il poligono $H_1H_2 \ldots H_n$, avendo sempre i suoi lati costanti e rimanendo sempre iscritto nella stessa circonferenza, rimarrà costante in forma e grandezza al variare di P su una circonferenza di centro O.

Nel caso poi che le rette PH_1, PH_2, ... PH_n invece di essere condotte perpendicolarmente sui raggi OA_1, OA_2, ..., OA_n fossero condotte oblique tutte nello stesso senso e inclinate di uno stesso angolo α, allora si vede chiaramente che i vertici H_1, H_2, ..., H_n del poligono giacciono tutti su una stessa circonferenza passante per O e P e in modo che uno degli archi OP sia capace dell'angolo α, e quindi si dimostra con un procedimento del tutto analogo al precedente che anche in questo caso il poligono $H_1H_2 \ldots H_n$ rimane costante in forma e grandezza al variare di P su una circonferenza di centro O. Sicchè potremo dire in generale: *Se da un punto O di un piano sono condotti nel piano* n *raggi, al variare di un punto P in una circonferenza di centro O, rimane costante in forma e grandezza il poligono che ha per vertici i piedi delle perpendicolari (o delle oblique condotte tutte nello stesso senso e inclinate di uno stesso angolo) da* P *sugli* n *raggi.*

Notiamo ancora, come è facile vedere, che ogni qualvolta due raggi del piano coincidono in direzione il poligono viene ad avere due lati coincidenti. Nel caso poi in cui tutti gli angoli in cui si divide il piano sono uguali fra di loro, se il loro numero è dispari, si ha un poligono stellato di n lati, se invece è pari, allora i raggi coincidono a due a due in direzione, e quindi si ha un poligono di numero metà di lati contato due volte.

Nel caso che gli n raggi dividono il piano in n angoli uguali si può trovare facilmente una semplice formula che esprime l'area del poligono. Scegliendo uno dei raggi, per es. OA, per asse delle x e la perpendicolare ad esso in O per asse delle y, si possono esprimere facilmente le equazioni dei raggi e quelle delle perpendicolari condotte ad essi da O, e quindi accoppiando l'equazione di ciascun raggio con quella della perpendicolare rispettiva e risolvendo i sistemi d'equazioni così ottenuti si trovano le coordinate dei piedi delle perpendicolari, dopo di che applicando la nota formola, che esprime l'area di un poligono in funzione delle coordinate dei suoi vertici, si perviene con facili riduzioni alla formola

$$S = \frac{n\rho^2}{8} \operatorname{sen} \frac{4\pi}{n},$$

essendo ρ il raggio della circonferenza su cui può muoversi il punto P. Notiamo però, come risulta da quello detto precedentemente, che nel caso di n pari questa formola esprime il doppio dell'area del poligono. Sicchè in generale avremo, qualunque sia n,

$$S = \frac{2}{3+(-1)^n} \frac{n\rho^2}{8} \operatorname{sen} \frac{4\pi}{n},$$

e nel caso che le rette OH_1, OH_2, ..., OH_n venissero condotte oblique tutte nello stesso senso e di uno stesso angolo α nei raggi, si ha evidentemente

$$S' = \frac{2}{3+(-1)^n} \frac{n\rho^2}{8} \operatorname{sen} \frac{4\pi}{n} : \operatorname{sen}^2 \alpha .$$

F. Celestri.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 273*, 409, 411, 413, 414, 415

273*. *Un cerchio di centro O è segato da un altro cerchio M in due punti opposti A e B: dimostrare che ogni cerchio avente per diametro una corda di M passante per O, sega il primo cerchio nei due estremi di un diametro perpendicolare alla corda.*

RETALI.

Risoluzione del Sig. Francesco Celestri studente della R. Università di Pisa.

Sia CD una corda del cerchio M passante per O, e supponiamo descritto il cerchio di diametro CD il cui centro indicheremo con O'. Conduciamo nel cerchio O' la corda HK che passi per O e che sia perpendicolare al diametro CD.

Essendo COD, AOB corde dello stesso cerchio M, si ha per un noto teorema

$$OC \times OD = OA \times OB = \overline{OA}^2 = \overline{OB}^2. \tag{1}$$

Essendo ancora nel cerchio O' la corda HK perpendicolare al diametro CD nel punto O, si ha

$$OC \times OD = \overline{OH}^2 = \overline{OK}^2. \tag{2}$$

Deriva dalle eguaglianze (1) e (2)

$$OA = OH = OK = OB,$$

e quindi i punti H,K appartengono pure al cerchio O, e sono perciò i punti d'intersezione dei cerchi O,O' e inoltre la HK è un diametro del cerchio O. Adunque i cerchi O,O' si segano nei due termini di un diametro di O perpendicolare alla corda CD.

409. *Determinare la forma generale di una funzione di quattro lettere* x, y, z, u, *tale che sostituendo* x *ad* y, *essa si riduca identicamente a* $\frac{z^m}{u^n}$, *e sostituendo* z *ad* u, *si riduca identicamente a* $\left(\frac{x}{y}\right)^p$, *essendo* m, n, p, *costanti note.*

AUSSANT-CARÀ.

Risoluzione del dott. ing. Claudio Merizzi di Udine.

Se consideriamo la funzione

$$\left(\frac{x}{y}\right)^p\left(\frac{z^m}{u^n}\right)^{\left\{(z-u)^{x-y}\right\}}$$

è facile vedere che per $x=y$ si riduce a $\frac{z^m}{u^n}$, e per $z=u$ si riduce a $\left(\frac{x}{y}\right)^p$. Se la si moltiplica per una funzione che per $x=y$, e per $z=u$ diventa $=1$, ed al prodotto ottenuto si aggiunge un'altra funzione, che per $x=y$ e per $z=u$ si annulla, si ottiene la forma generale di una funzione che soddisfa alle condizioni del problema. Essa è dunque

$$a^{(x-y)(z-u)f(x,y,z,u)}\left(\frac{x}{y}\right)^p\left(\frac{z^m}{u^n}\right)^{\left\{(z-u)^{x-y}\right\}}+(x-y)(z-u)\varphi(x,y,z,u),$$

essendo a una costante arbitraria finita, ed $f(x, y, z, u)$, $\varphi(x, y, z, u)$ due funzioni delle x, y, z, u, soggette alla sola condizione di non diventare infinite, quando si faccia $x = y$, oppure $z = u$.

411. ABC *è un triangolo sferico trirettangolo appartenente ad una sfera* σ *di centro* O *e raggio* R. *Si consideri una superficie cilindrica* σ' *avente la generatrice perpendicolare al piano* AOB *e per direttrice l'arco* AB *di una parabola, situata in questo piano, col vertice in* A *ed avente per asse la retta* AO. *Dimostrare che la porzione del triangolo sferico limitata dai lati* AC, BC *di questo e dalla intersezione di* σ *con* σ' *è equivalente al quadrato del raggio della sfera.*

P. AUSSANT-CARÀ.

Risoluzione del prof. V. Retali e del sig. E. Stretti.

L'equazione del cilindro parabolico $y^2 = R(R + x)$ e quella della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, dànno

$$x = \frac{y^2 - R^2}{R}$$

e

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2 - x^2}};$$

l'area cercata è dunque

$$S = R\int_0^R dy \int_0^{\frac{y^2-R^2}{R}} \frac{dx}{\sqrt{(R^2 - y^2) - x^2}} = R\int_0^R \text{arc sen} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2}\, dy,$$

e, integrando per parti,

$$S = R\left[y \,\text{arc sen} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2} - \sqrt{R^2 - y^2}\right]_0^R = R^2.$$

413. *Sia* P *il punto d'incontro delle tangenti in* A *e in* B *ad una conica,* AA' *il diametro che passa per* A, C *il punto d'incontro di questo diametro colla retta condotta per* B *parallela al diametro coniugato ad esso,* M *il punto d'incontro della* BC *con* PA'.

1°. Si dimostri che M *è il punto medio di* BC.

2°. Si trovi il luogo di M *allorchè* A *rimane fisso e* B *si muove sulla conica.*

CELESTRI.

Risoluzione del sig. Pietro Pioppa, studente della R. Università di Pisa.

1°. Detto H il punto di incontro di AA' con PB, è H polo della BC; d'onde segue che i quattro punti HCA'A formano un gruppo armonico; proiettando da P sulla retta BC sarà armonico pure il gruppo dei punti BCM∞. È dunque M il punto medio di BC.

2°. Se si indica con P' il punto di intersezione della tangente in A' con la PB, la AP' passerà manifestamente per M: dunque il punto M è dato dalla intersezione dei due raggi AP' ed A'P. Ed ogni altro punto della specie di M, ottenuto facendo muovere il punto B sulla conica, mentre A ed A' rimangono fissi, è in modo analogo dato dalla intersezione di due raggi dei fasci (A) ed (A').

Ma questi fasci sono proiettivi, perchè rispettivamente prospettivi alle due punteggiate proiettive, che la tangente nel punto mobile B segna sulle tangenti fisse in A ed A'; quindi essi generano una conica.

Si può osservare che la conica è della specie della data. Ed invero se questa è una ellisse i punti M per le costruzioni con cui si ottengono, sono tutti a distanza finita; se è una parabola, è a distanza infinita il punto dato dai due raggi paralleli proiettanti da A ed A′ i punti corrispondenti P_∞ e P'_∞ segnati dalla tangente all'infinito. Se è una iperbola sono all'infinito i due punti dati dalle coppie di raggi paralleli che proiettano la intersezione delle due tangenti fisse con i due assintoti.

Altre risoluzioni analitica e geometrica del dott. C. Merizzi, del prof. V. Retali e del prof. Radolfo.

414. *Se la grandezza* A_0 *sia minore della* B_0, *e siano ordinatamente* A_1 *e* B_1 *le medie armonica ed aritmetica di* A_0, *e* B_0; A_2 *e* B_2 *le medie armonica ed aritmetica di* A_1 *e* B_1; *e così indefinitamente, le classi* (A_n) e (B_n) *sono contigue e definiscono la media geometrica delle grandezze* A_0, B_0. DE ZOLT.

Risoluzione del dott. ing. Claudio Merizzi e del sig. Aldo Finzi studente della R. Università di Padova.

Dalla nota disuguaglianza $2\,A_0B_0 < A_0^2 + B_0^2$, aggiungendo ad ambo i membri $2\,A_0B_0$ ed estraendo la radice quadratica, si ricava

$$\left|\sqrt{A_0B_0}\right| < \frac{A_0 + B_0}{2}.$$

Da quest'ultima poi, che si può scrivere sotto la forma $\dfrac{A_0B_0}{\left|\sqrt{A_0B_0}\right|} < \dfrac{A_0 - B_0}{2}$, si ricava subito

$$\left|\sqrt{A_0B_0}\right| > \frac{2\,A_0B_0}{A_0 + B_0}$$

cioè la media geometrica di due grandezze date è maggiore della loro media armonica, e minore della loro media aritmetica.

Segue da ciò, ponendo mente alla legge di generazione, delle due classi, che è $(B_n) > (A_n)$. La differenza tra i primi termini delle due classi è $B_0 - A_0$: la differenza tra i secondi termini è

$$B_1 - A_1 = \frac{A_0 + B_0}{2} - \frac{2\,A_0B_0}{A_0 + B_0} = (B_0 - A_0)\frac{B_0 + A_0}{2\,(A_0 + B_0)}.$$

Essendo $\dfrac{B_0 - A_0}{2\,(A_0 + B_0)}$ una frazione propria $\left(\text{certamente} < \dfrac{1}{2}\right)$ si può dedurne in generale che la differenza tra due termini corrispondenti, essendo una frazione della precedente, va indefinitamente decrescendo Dunque le due classi sono contigue. Osserviamo finalmente che $A_1B_1 = \dfrac{2\,A_0B_0}{A_0 + B_0}\cdot\dfrac{A_0 + B_0}{2} = A_0B_0$, e quindi è in generale $A_0B_0 = A_1B_1 = \ldots = A_nB_n$.

Ma la media geometrica delle grandezze A_n, B_n (che è uguale alla media geometrica di A_0, B_0) è compresa tra B_n ed A_n: e poichè crescendo n indefinitamente, la differenza $B_n - A_n$ ha per limite zero, si deduce che la media geometrica di A_0, B_0 è il limite comune delle due classi (A_n), (B_n), e può così essere da loro definita.

415. *Provare che la soluzione generale dell'equazione differenziale*

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\frac{d^r\varphi}{dz^r}=a\,\frac{d^n\varphi}{dz^n},$$

dove a *è diverso da* 1, *è data da*

$$\varphi=\sum_{s=1}^{n}c_s\,e^{\frac{r}{1-a_s}},$$

dove $a_1\ a_2\dots a_s\dots a_n$ *sono le* n *radici* n^{me} *di* a, *e* $c_1\ c_2\dots c_n$ *sono* n *costanti arbitrarie.*

VITALI.

Risoluzione del prof. Radolfo di Lecce.

L'equazione differenziale data è lineare, di ordine n, incompleta ed a coefficienti costanti; per trovare quindi l'integrale generale, basterà risolvere l'*equazione caratteristica* $\sum_{r=1}^{n}(-1)^r\binom{r}{n}k^r=ak^n$, che può anche scriversi $(1-k)^n=ak^n$, cioè $1-k=a_s k$, a_s essendo una delle n radici n^{me} di a. Si ha così $k=\frac{1}{1+a_s}$, e però l'integrale generale dell'equazione differenziale proposta è

$$\varphi=\sum_{s=1}^{n}c_s\,e^{\frac{z}{1+a_s}},$$

dove $c_1,\ c_2,\ c_3\dots c_n$ sono n costanti arbitrarie.

Se n è pari ed a_s è radice n^{ma} di a, è anche $-a_s$ radice n^{ma}, e quindi può scriversi indifferentemente $k=\frac{1}{1+a_s}$ o $k=\frac{1}{1-a_s}$, e però, per n pari, può dirsi anche che

$$\varphi=\sum_{s=1}^{n}c_s\,e^{\frac{z}{1-a_s}}$$

è integrale generale dell'equazione differenziale data. Per n dispari a dev'essere diverso da -1, per n pari, a dev'essere diverso da 1.

QUISTIONI PROPOSTE

419. 1°. Una medesima iperbole equilatera passa pei vertici d'un triangolo e pei punti H, K, O del medesimo.

2°. Tale iperbole equilatera è il luogo dei punti tali che le antiparallele ai lati d'un triangolo rispetto agli angoli rispettivamente opposti, condotte da essi, tagliano i lati del triangolo in 6 punti posti sopra una conica.

BAROZZINI.

420. Se si considera il sistema delle formole

$$\xi'_i\equiv\varphi\xi_i-u_\xi\frac{\partial\varphi}{\partial u_i},\quad \eta'_i\equiv\varphi\eta_i-u_\eta\frac{\partial\varphi}{\partial u_i},\quad \zeta'_i\equiv\varphi\zeta_i-u_\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\ (i=1,2,3,4)$$

ove φ è la forma quadratica (nelle u_i)

$$\varphi = \Sigma\, a_{ik}\, u_i\, u_k$$

ed è $u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4$ $(x \equiv \xi, \eta, \zeta)$, la equazione

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \xi'_1 & \xi'_2 & \xi'_3 & \xi'_4 \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \eta'_3 & \eta'_4 \\ \zeta'_1 & \zeta'_2 & \zeta'_3 & \zeta'_4 \end{vmatrix} = 0$$

si confonde, a meno del fattore φ^2, con l'altra

$$\varphi\lambda_x - u_\xi\left(\chi\eta\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) - u_\eta\left(\chi\zeta\xi\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) - u_\zeta\left(\chi\xi\eta\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) = 0$$

ove, per es., è $\left(\chi\eta\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)$ ciò che diventa il determinante precedente, quando al posto degli elementi della 2ª, 3ª, 4ª orizzontale si pongono rispettivamente le η_i, le ζ_i, le $\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}$; e dove λ_x, è invece, ciò che diventa lo stesso determinante, quando al posto degli elementi delle medesime orizzontali si pongono ordinatamente le ξ_i, η_i, ζ_i.

Del Re.

421. Chiamando $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots r_n \ldots$ i valori dei resti successivi, che si ottengono nella ricerca d'una comune misura tra la diagonale d e il lato l d'un quadrato, e ponendo per simmetria $l = r_0$, dimostrare che si ha:

1°. $$\frac{d}{2} = \lim \sum_0^\infty (-1)^n r_n$$

$$\lim \sum_0^\infty (r_{2n} - n r_n) = 0$$

2°. Per tutti i valori dell'indice p da 1 a ∞

$$r_{p-1} = 2r_p + r_{p+1}\,, \qquad r^2_{p-1} = 6r^2_p - r^2_{p+1}$$

e in generale

$$r^n_{p-1} = a_n r^n_p - (-1)^n r^n_{p+1}$$

dove le a_n sono legate dalla relazione

$$a_{n+1} = 2\,a_n + a_{n-1}.$$

3°. $$a_n = 2\left\{1 + 2\,C^2_n + 2^2\,C^4_n + 2^3\,C^6_n + \ldots\right\},$$

indicando con C^m_n le combinazioni di n elementi m ad m.

N. B. Relazioni analoghe alle precedenti si potrebbero ricercare tra i valori dei resti che si ottengono da un segmento e la sua *sezione aurea*, e in generale tra i termini di qualunque progressione geometrica decrescente.

B. Bettini.

422. Un cerchio col centro in un punto variabile P di un'ellisse passa per uno dei fuochi O' e sega il raggio vettore che unisce P all'altro fuoco O nei punti P_1, P_2. Dimostrare che il luogo dei punti P_1, P_2 è una curva del sesto ordine che si spezza in un cerchio di centro O e in una quartica razionale (curva di Jerabék) avente in O un nodo e in O′ un punto tacnodale.

423. Un triangolo OVP ha due vertici fissi mentre il terzo P percorre un cerchio C^2 passante per V: dimostrare che il luogo del punto P′ separato armonicamente da P mediante il punto-circolo V, e allineato con O, è una cubica razionale circolare; inversa di ellisse, parabola o iperbole rispetto a un suo punto, secondochè il centro di C^2 è interno, sopra o fuori della parabola avente O per fuoco, e per direttrice la perpendicolare a |OV| in V.

424. Due cerchi tangenti nel punto V, si corrispondono nella inversione di Hirst avente per conica dei punti uniti il punto-circolo V, e per polo l'altro centro di similitudine dei cerchi dati: si desidera una dimostrazione analitica.

425. Trovare lo inviluppo delle iperboli passanti per un punto O, avente un assintoto dato a, e per secondo assintoto una tangente variabile di un cerchio passante per O.

426. Da un punto fisso O nel piano di una iperbole si conduce a un punto variabile P della curva un raggio g segante un assintoto a nel punto A; poi, a partire da A e in senso opposto a quello del segmento $\overline{OP}$, si stacca su g il segmento $\overline{AP'} = -\overline{OP}$: trovare il luogo del punto P′.

427. Una retta h è simmetrica di un assintoto di una iperbole H^2 rispetto a un punto O della curva, e una trasversale arbitraria g, condotta per O, sega h in P e, di nuovo, la curva in P′: dimostrare che il luogo del centro del segmento PP′ è una retta equidistante da O e dall'altro assintoto: concluderne la soluzione dei due problemi seguenti: costruire la iperbole:

a) dati un assintoto a e tre punti O, P′ Q′;

b) dati un assintoto a, due punti O, P′ e la direzione dell'altro assintoto.

428. O è un punto di un cerchio di centro C e raggio R, e la retta m, perpendicolare ad |OC|, dista da O di $\frac{R}{4}$: se prendiamo, sopra un raggio variabile g del fascio O, il simmetrico P′ rispetto a (mp) della ulteriore intersezione P di g col cerchio.

1°. Dimostrare che il luogo di P′ è una trisettrice di Mac-Laurin avente O per punto doppio, e |OC| per asse.

2°. Costruire l'assintoto, la tangente in P′ e le intersezioni della curva con una retta.

V. Retali.

429. La sola superficie di rotazione le cui linee di curvatura sono geodetiche è il cilindro circolare retto.

430. Sia P un punto mobile di una retta r e PP_1, PP_2 le perpendicolari condotte da P a due rette r_1, r_2 complanari di r: l'inviluppo della retta $P_1 P_2$ è una parabola.

Cardoso-Laynes.

BIBLIOGRAFIA

I. Tonta. — *Raggi di Röntgen e loro pratiche applicazioni.* — Hoepli, Milano, 1898.

Quest'opera va giudicata soltanto in quella parte che riguarda le applicazioni dei raggi X alla medicina ed alla chirurgia; tutto ciò che l'autore ha scritto intorno agli studi teorici su queste radiazioni, al loro comportamento ed alle loro proprietà fisiche, è un po' troppo superficiale, nè sempre trattato con esattezza scientifica o sufficiente cognizione dell'argomento. Non è qui il caso di farne un esame particolareggiato; nè d'altra parte si poteva chieder molto all'Autore, medico di professione. Ci limitiamo soltanto ad accennare che egli avrebbe dovuto almeno dire qualcosa di più, della contribuzione italiana, che in questo genere di studii non fu poca, nè di poca importanza; (*) che forse nessun fisico si troverà disposto a seguir l'autore in certe sue considerazioni di forze elettro-chimiche e di analogie fulgurali, per assegnare una non definita genesi ai raggi di Röntgen; che la stessa parte relativa alla produzione di questi raggi ed al modo migliore di ottenere le radiografie, dovrebbe essere molto più sviluppata e completata da avvertenze pratiche. (**)

Per ciò che si riferisce alle applicazioni, in specie a quelle medico-chirurgiche, il quadro è abbastanza completo, e lo svolgimento non lascia, forse, a desiderare in confronto a ciò che già si trova in altre opere.

L'opera va colla solita linda e accurata veste tipografica che il benemerito editore Hoepli dà ai suoi manuali; è ricca di figure e di tavole, alcune delle quali, se non nuove, sempre notevoli.

Meritano attenzione i casi personalmente studiati dall'autore nelle cliniche tedesche.

K.

C. Burali-Forti e A. Ramorino. — *Aritmetica e norme per l'insegnamento nelle scuole elementari* ad uso della 2ª e 3ª delle scuole normali. — *Elementi di algebra* ad uso della 3ª classe tecnica.

Da una nota alla prefazione al 1º di questi volumi risulta che il Prof. A. Ramorino ha compilati gli *Elementi di algebra*, e corredato i due libri di una numerosa raccolta di esercizi. Resta così assodato che autore della prima operetta è il Prof. C. Burali-Forti, cosa del resto evidente per chi aveva lette le *Lezioni di aritmetica pratica* e le *Note scientifiche e critiche alle lezioni di aritmetica pratica* del medesimo autore. Che anzi si può dire che il nuovo libro di aritmetica è nel suo ordito una emulsione delle lezioni di aritmetica pratica e delle note scientifiche e critiche. Questo mescolare discussioni e elementi della scienza ha, specie nelle prime pagine, reso il libro oscuro e alquanto pesante. È certo che se l'a. in una nuova edizione vorrà migliorare il suo libro, dovrà sfrondarlo da tutto ciò che è discussione e critica.

(*) Cfr. la monografia, completa per ciò che riguarda la letteratura italiana, di R. Pitoni, *Raggi di Röntgen*, Torino, Unione Tipogr. Editrice, e la nota opera del Murani.

(**) Vedi le monografie sui raggi di Röntgen, di Guillaume, Majorana, Murani, Pitoni, Thompson e l'opera di A. ed F. Battelli, *Trattato pratico per le ricerche di elettricità.*

È da sperare che tutti gl'insegnanti di matematica, scosso ormai l'antico torpore, facciano prosperare la società, e, lavorando *viribus unitis*, riescano a migliorare la scuola e con essa la loro posizione morale e materiale.

Qualche giornale, come l'autorevole *Scuola secondaria*, nel rendere conto dell'operato del congresso ha fatto delle critiche sull'andamento e sulle condizioni di esso. Non è il caso di entrare qui nel merito di queste critiche (alcune delle quali potrei io stesso sottoscrivere), e che sono utili, poichè dalla discussione, dall'attrito delle idee sorge il vero, poichè serviranno a far meglio un'altra volta; ma ci sembra che insieme alle critiche sarebbe stata utile la constatazione dell'importanza di questo primo passo.

Soltanto nelle favole della mitologia si legge che Minerva uscì armata e perfetta dalla testa di Giove; ma i mortali non sono Giove, ed è ben raro che le loro opere riescano alla prima perfette. Se dunque il comitato ordinatore del congresso ha errato in qualche dettaglio, ciò non diminuisce il merito di aver provocato, senza chiasso, senza volgari colpi di gran cassa, la prima riunione di una serie che spero lunghissima. Queste riunioni, affratellando fra loro i professori di tutte le parti d'Italia, mettendoli in condizione di comunicarsi e scambiarsi le loro idee, saranno di gran giovamento alla scuola.

Ed intanto a proposito di questa prima riunione mi piace ricordare le parole, che alla fine del banchetto di addio disse l'illustre decano della facoltà di matematica dell'Università di Torino Prof. Enrico D'Ovidio, che accettò di presiedere il congresso medesimo, e che insieme ai suoi colleghi della facoltà prese attiva parte ai lavori dei congressisti e fece squisitamente gli onori di casa.

" Mirabile congresso (disse ad un dipresso il Prof. D'Ovidio) questo, " di cui non si trova cenno sui giornali politici, che fa così poco " parlare di sè, ed in cui si tratta serenamente e senza preoccupa- " zioni personali il modo di migliorare la scuola, in cui invece di " favori si chiede al Ministro un aumento di orario, e di lavoro! "

Non so se l'aver fatto parlare di noi, tanto poco che le autorità cittadine, le quali fecero tante festose accoglienze non solo ai medici, agl'ingegneri, ai letterati, ma anche ai ginnasti e ai tiratori, ecc., non si accorsero affatto della nostra presenza, sia stato un bene o un male.

In ogni modo però queste parole caratterizzano la serietà di propositi e il disinteresse con cui tutti i convenuti, ciascuno dal proprio punto di vista, presero parte alle discussioni. — Di queste parole, del Prof. D'Ovidio tutti abbiamo diritto di esser superbi e lieti, e credo farmi interprete dei miei colleghi inviando ad esso un ringraziamento ed un saluto.

Se andrà crescendo il numero di coloro che con la stessa serietà di propositi vorranno prender parte ai lavori futuri dell'associazione, è certo che questa diverrà un organismo importante, e che per mezzo di essa si potrà far giungere *sin là dove si puote ciò che si vuole,* l'espressione dei voti, dei desideri della maggioranza degli insegnanti, i quali fino ad ora non avevano alcun modo per far conoscere la loro opinione sui programmi che dovevano svolgere e che nessuno di loro aveva mai compilato.

Sono lieto intanto che il *Periodico* sia diventato l'organo dell'associazione, e che l'autorità che può aver acquistato in 14 anni di vita non inonorata, sia messa a servigio di essa e cooperi a farla rapidamente stabilire su solide basi.

G. LAZZERI.

DI ALCUNE CONDENSAZIONI DELLO SPAZIO

entro una sfera infinitesima in relazione col gruppo delle sostituzioni lineari

1. Una trasformazione dello spazio può esser tale che, ripetuta più volte, tenda ad avvicinare tutti i punti dello spazio medesimo a un punto fisso, come a loro limite comune. In tal caso, fissato un punto dello spazio, potremo, applicando ad esso la trasformazione un conveniente numero di volte, portarlo entro una sfera di raggio σ, arbitrariamente piccolo, col centro nel punto limite della trasformazione. Ma il numero delle volte che la trasformazione dovrà essere ripetuta per ottener questo effetto, dipenderà generalmente dalla scelta del punto: cosicchè non sarà possibile, generalmente parlando, portare ogni punto dello spazio entro la sfera di raggio σ con un numero di trasformazioni *finito ed unico per tutti.* Se l'operazione di trasformazione consistesse per esempio in una compressione ordinaria, vale a dire nella riduzione del raggio vettore di un punto secondo un certo rapporto $\frac{1}{k}$ minore dell'unità, è certo che, dopo un conveniente numero n di riduzioni consecutive, un determinato punto dello spazio sarebbe portato entro la sfera di raggio σ o alla sua superficie: ma quel numero n di riduzioni, per quanto grande, non sarà sufficiente a portare entro la detta sfera quei punti la cui distanza dal centro è maggiore di $k^n . \sigma$.

Ora si domanda: *Esistono trasformazioni atte a condensare tutto lo spazio entro una sfera di raggio σ arbitrariamente piccolo, qualora siano applicate un numero di volte* finito ed unico *a tutti i punti dello spazio medesimo?* — La risposta è affermativa: anzi si può aggiungere che siffatte trasformazioni possono avere comuni con l'ordinaria compressione i seguenti caratteri: 1°. Di essere univoche; 2°. Di portare *con* *moto centrale* tutti i punti dello spazio entro la sfera di raggio σ; 3°. Di trasformare le sfere concentriche a quest'ultima in altre sfere. A prova di ciò basta il fatto che, se si pone

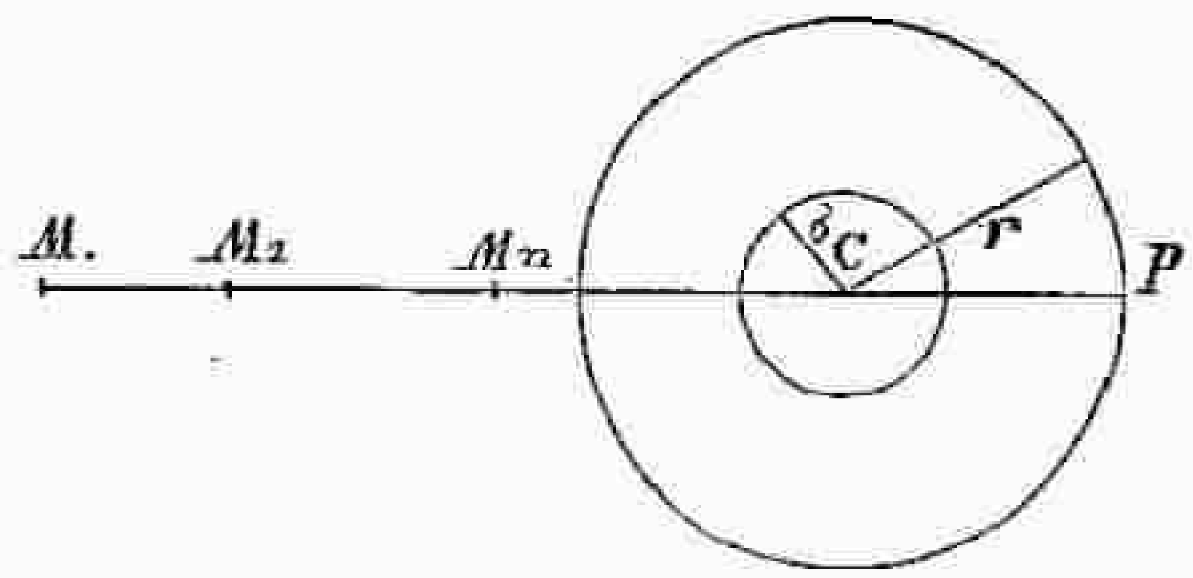
$$z' = \frac{\sigma z}{z+\sigma}$$

intendendo con z il raggio vettore di un punto dello spazio, che con moto diretto e centrale viene portato nel punto il cui raggio vettore è z', le tre precedenti condizioni sono soddisfatte, e di più si ha, per ogni valore finito o infinito di z,

$$z' \leq \sigma.$$

Chiamerò siffatte trasformazioni dello spazio *compressioni perfette*, e dimostrerò il seguente teorema notabile: *Esistono gruppi di compressioni perfette dello spazio, in isomorfismo col gruppo delle compressioni ordinarie.*

2. Fatto centro un punto C, si descriva una sfera di raggio r. Preso poi un qualsivoglia punto M dello spazio, e detto P quel punto



della superficie sferica che è alla massima distanza da M, e k un numero positivo maggiore dell'unità, si faccia corrispondere al punto M il punto M_1 allineato con esso e col centro C, e definito inoltre dalla relazione

$$\frac{\overline{M_1P}}{M_1C} = k \cdot \frac{\overline{MP}}{MC}. \tag{1}$$

Questa trasformazione, applicata a tutti i punti dello spazio, è una compressione perfetta. Infatti, dopo n operazioni consecutive, il punto M verrà portato nel punto M_n allineato con esso rispetto al centro, e determinato dalla relazione

$$\frac{\overline{M_nP}}{M_nC} = k^n \frac{\overline{MP}}{MC}. \tag{2}$$

Dalla quale è evidente, perchè k è maggior dell'unità, che il rapporto

$$\frac{\overline{M_nP}}{M_nC} = 1 + \frac{r}{M_nC}$$

cresce indefinitamente con n, e che perciò, $\overline{M_nC}$, distanza del punto trasformato dal centro, tende a zero col crescere di n.

Rimane a dimostrare che si può assegnare per n un limite superiore, tale che dopo n operazioni consecutive la distanza $\overline{M_nC}$ diventi minore di un segmento σ arbitrariamente piccolo, *indipendentemente dalla scelta del punto* M. A tal fine si chiamino z e z_n i raggi vettori di un punto M e del suo trasformato M_n, pongasi cioè

$$\overline{MC} = z, \quad \overline{M_nC} = z_n.$$

E la (2) diverrà

$$\frac{z_n + r}{z_n} = k^n \cdot \frac{z + r}{z};$$

d'onde

$$z_n = \frac{rz}{z(k^n - 1) + rk^n}.$$

Si risolva ora la diseguaglianza $z_n \leq \sigma$ rispetto a k^n e si avrà

$$k^n \geq \frac{z}{r + z}\left(1 + \frac{r}{\sigma}\right).$$

Essendo il rapporto $\frac{z}{r + z}$ minor dell'unità, ed eguale all'unità per $z = \infty$, si vede che, soddisfatta l'ultima diseguaglianza per $z = \infty$, essa sarà soddisfatta, a più forte ragione, per qualsiasi altro valore di z. Poniamo dunque

$$(3) \qquad k^n \geq 1 + \frac{r}{\sigma},$$

condizione necessaria affinchè i punti all'infinito dello spazio si trovino a distanza non maggior di σ dal punto C.

Dopo il minimo numero n di operazioni determinato dalla (3), *tutti* i punti dello spazio disteranno da C meno di σ. Il numero di trasformazioni necessario e sufficiente per condensare tutto lo spazio entro la sfera di raggio σ col centro in C è dunque dato dal quoziente

$$\frac{\log\left(1 + \frac{r}{\sigma}\right)}{\log k}$$

se questo è un numero intero, o dall'unità accresciuta della parte intera del quoziente medesimo, se esso non è intero.

3. Fissato il raggio r, le compressioni perfette dianzi studiate sono infinite, corrispondenti agl'infiniti valori del parametro k. Dalla (1) apparisce poi che esse formano un gruppo G_1. Applicando difatti consecutivamente ad un punto M le due compressioni (k) e (k') e dicendo M_1 il trasformato di M mediante (k) ed M'_1 il trasformato di M_1 mediante (k'), si avrà consecutivamente

$$\frac{\overline{M_1P}}{\overline{M_1C}} = k \cdot \frac{\overline{MP}}{\overline{MC}}$$

$$\frac{\overline{M'_1P}}{\overline{M'_1C}} = k' \cdot \frac{\overline{M_1P}}{\overline{M_1C}};$$

d'onde

$$\frac{\overline{M'_1P}}{\overline{M'_1C}} = kk' \cdot \frac{\overline{MP}}{\overline{MC}} \cdot$$

Il prodotto delle due compressioni (k) e (k') equivale dunque alla compressione (kk'). Se poi alla compressione perfetta (k) si fa corrispondere la compressione ordinaria nella quale il coefficiente di riduzione del raggio vettore di un punto è $\frac{1}{k}$, si scorge altresì che il gruppo G_r è isomorfo al gruppo delle compressioni ordinarie.

Dalla (1) si vede che il gruppo G_r coincide col gruppo delle sostituzioni lineari

$$\left[z, \quad \frac{rz}{z(k-1)+rk}\right]$$

qualora s'intenda che un punto a distanza z dal centro della sfera di raggio r, passi, con moto diretto verso il centro medesimo, alla distanza da esso data dalla formola

$$\frac{rz}{z(k-1)+rk} \cdot$$

L'isomorfismo di G_r col gruppo

$$\left(z, \quad \frac{z}{k}\right)$$

delle compressioni ordinarie risulta così anche dalle formole facilmente verificabili

$$\left(z, \quad \frac{z}{k}\right) \cdot \left(z, \quad \frac{z}{k'}\right) = \left(z, \quad \frac{z}{kk'}\right)$$

$$\left[z, \frac{rz}{z(k-1)+rk}\right] \cdot \left[z, \frac{rz}{z(k'-1)+rk'}\right] = \left[z, \frac{rz}{z(kk'-1)+rkk'}\right] \cdot$$

4. Generalizzando la (2) e con essa il concetto di potenza n^{ma} della sostituzione

$$\left[z, \quad \frac{rz}{z(k-1)+rk}\right]$$

con l'estendere l'una e l'altro al caso di n positivo qualunque, il numero delle operazioni necessarie e sufficienti per condensare lo spazio entro la sfera di raggio σ mediante la compressione (k) sarà dato dall'equazione

$$k^n = 1 + \frac{r}{\sigma} \cdot$$

Si dirà che *la compressione* (k) *appartiene all'esponente* n *rispetto alla sfera di raggio* r *e all'infinitesimo* σ.

Siano n ed n_1 gli esponenti ai quali appartengono le due compressioni (k) e (k_1) rispetto a una stessa sfera e ad uno stesso infinitesimo; e sia N l'esponente al quale appartiene il loro prodotto. Si avrà

$$\left(1+\frac{r}{\sigma}\right)^{\frac{1}{n}}=k$$

$$\left(1+\frac{r}{\sigma}\right)^{\frac{1}{n_1}}=k_1$$

$$\left(1+\frac{r}{\sigma}\right)^{\frac{1}{N}}=kk_1=\left(1+\frac{r}{\sigma}\right)^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n_1}}.$$

D'onde:

$$\frac{1}{N}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n_1}.$$

ossia: *l'inversa dell'esponente al quale appartiene il prodotto eguaglia la somma delle inverse degli esponenti ai quali appartengono i fattori.*

G. Frattini.

SULLA DIVISIBILITÀ DEI NUMERI

(*Continuazione v. p. 180*).

Abbiamo veduto come dal Criterio generale di Pascal derivino tutti i noti caratteri di divisibilità per 2 e per 5, per 4 e per 25, per 8 e per 125, per 3 e per 9 e per 11; adesso deduciamone altri caratteri particolari, di pratica utilità.

Sia n un numero qualunque di p cifre, scritto nel sistema di numerazione decimale, e ancora $a_1, a_2, \dots a_{p-1}, a_p$ rappresentino le sue cifre, degli ordini rispettivi $1^{\circ}, 2^{\circ}, \dots (p-1)^{\text{esimo}}\ p^{\text{esimo}}$.

Sia 7 il numero che prendiam come divisore, e supponiamo che il numero p delle cifre di n, sia maggiore di 7.

Pel Criterio di Pascal è

$$(1)\qquad n\equiv a_1+a_2 3+a_3 2+a_4 6+a_5 4+a_6 5+a_7 1+a_8 3+\dots \qquad (\text{mod. } 7)$$

in quanto al 7 corrisponde il gruppo $\overline{(3, 2, 6, 4, 5, 1)}$.

Supponiamo adesso di dividere il numero n in gruppi di 6 cifre, da destra verso sinistra, e indichiamo questi gruppi con $g_1, g_2, \dots g_\mu$ (non escludendo, per l'ipotesi generale fatta per p, che l'ultimo gruppo g_μ così ottenuto possa contenere anche meno di 6 cifre, ma avendo l'avvertenza in tal caso di immaginare che le cifre mancanti siano sostituite da altrettanti zeri). Avremo ancora, pel Criterio di Pascal.

$$(2)\left\{\begin{array}{l} g_1\equiv a_1+a_2.3+a_3.2+a_4.6+a_5.4+a_6.5 \\ g_2\equiv a_7+a_8.3+a_9.2+a_{10}.6+a_{11}.4+a_{12}.5 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_\mu\equiv a_{6(\mu-1)+1}+a_{6(\mu-1)+2}3+a_{6(\mu-1)+3}.2+a_{6(\mu-1)+4}.6+a_{6(\mu-1)+5}.4+a_{6\mu}.5 \end{array}\right. \qquad (\text{mod. } 7)$$

ove $6(\mu-1)+1 \leqq p \leqq 6\mu$ ed $a_r=0$, per tutti i valori dell'indice r maggiori di p.

Deriva allora immediatamente dalla (1) e dal gruppo (2) la segnente congruenza.

$$n\equiv(g_1+g_2+\dots+g_\mu) \qquad (\text{mod. } 7)$$

È facile vedere, seguendo lo stesso procedimento, che si può stabilire questa medesima congruenza rispetto al divisore 13 a cui corrisponde il gruppo $(\overline{9,12,3,4,1,10})$ onde possiamo enunciare il seguente carattere particolare di divisibilità per 7 e pel 13.

a. *Diviso un numero in gruppi di sei cifre, da destra verso sinistra, esso è congruo con la somma di questi gruppi (mod. 7 e 13).*

Esempi: 1°. Sia $n = 125046842346$

Avremo $n \equiv (842346 + 125046)$ (mod. 7 e 13)

ossia $n \equiv 967392$ (mod. 7 e 13).

E adesso adoperando i moltiplicatori fissi, corrispondenti al 7 e al 13, si trovano facilmente i resti delle divisioni del numero dato per 7 e per 13.

2°. Sia $n = 62345238$

Avremo $n \equiv 345238 + 62$ (mod. 7 e 13)

cioè $n \equiv 345300$ (mod. 7 e 13).

Per 7, per 11 e per 13 si può anche dedurre dal Criterio di Pascal, un altro carattere di divisibilità assai pratico, che adesso esponiamo.

Consideriamo un numero qualunque, per esempio 142319458, e sia 11 il divisore cui ci riferiamo. Si è visto che all'11 corrisponde il gruppo $(\overline{1,10})$, dunque:

$$142319458 \equiv 58 + 4 . + 9 . 10 + 1 . 1 + 3 . 10 + 2 . 1 + 4 . 10 + 1 . 1 \pmod{11}$$

Supponiamo adesso di dividere il numero in gruppi ternari, da destra verso sinistra e di applicare poi nuovamente ad ognuno di questi gruppi il Criterio di Pascal. Avremo:

$$\begin{cases} 458 \equiv 58 + 4 . 1 \\ 319 \equiv 9 + 1 . 10 + 3 . 1 \\ 142 \equiv 2 + 4 . 10 + 1 . 1 \end{cases} \pmod{11}$$

ossia

$$\begin{cases} 458 \equiv 58 + 4 . 1 \\ 319 \equiv 9(11 - 10) + 1(11 - 1) + 3(11 - 10) \equiv - 9 . 10 - 1 . 1 - 3 . 10 \pmod{11} \\ 142 \equiv 2 + 4 . 10 + 1 . 1 \end{cases}$$

e per conseguenza:

$$(458 + 142) - 319 \equiv 58 + 4 1 + 9 10 + 1.1 + 3.10 + 2.1 + 4.10 + 1.1 \equiv 142319458 \pmod{11}$$

Una medesima congruenza si può stabilire, seguendo lo stesso procedimento, con qualunque numero come dividendo e con 7 o 13 per divisore, onde possiamo enunciare pure il seguente carattere particolare di divisibilità per 7, per 11 e per 13.

b. *Diviso un numero in gruppi ternari, da destra verso sinistra, esso è congruo con la differenza fra la somma dei gruppi di posto dispari e quella dei gruppi di posto pari (mod. 7, 11, e 13).*

Così, con metodi analoghi ai due testè adoperati, si deducono facilmente dal Criterio di Pascal i seguenti criteri particolari:

c. *Diviso un numero in gruppi binari, da destra verso sinistra, esso è congruo con la somma di questi gruppi (mod. 11, e 33 e 99).*

d. *Diviso un numero in gruppi ternari da destra verso sinistra, esso è congruo con la somma di questi gruppi (mod. 27, 37, 111, 333, 999).*

e. *Diviso un numero in gruppi quaternari da destra verso sinistra, esso è congruo con la somma di questi gruppi (mod. 101, 303, 909).*

f. *Diviso un numero in gruppi quaternari da destra verso sinistra, esso è congruo con la differenza fra la somma dei gruppi di posto dispari e quella dei gruppi di posto pari (mod. 73 e 137).*

g. *Diviso un numero in gruppi di cinque cifre da destra verso sinistra, esso è congruo con la somma di questi gruppi (mod. 41, 123, 369).*

h. *Diviso un numero in gruppi di otto cifre da destra verso sinistra, esso è congruo con la somma di questi gruppi (mod. 73 e 137, 219, 657, 411).*

Ai quali criteri aggiungiamo pure i seguenti, che derivano immediatamente dalla semplice applicazione del Criterio di Pascal.

i. *Un numero qualunque è congruo con la somma ottenuta aggiungendo alla cifra delle unità semplici il quadruplo della somma delle cifre rimanenti (mod. 12).*

l. *Un numero è congruo colla somma ottenuta aggiungendo al numero formato dalle cifre dell'unità semplici e delle diecine, il quadruplo della cifra delle centinaia e l'ottuplo della cifra delle migliaia (mod. 16).*

m. *Un numero è congruo colla somma ottenuta aggiungendo al numero formato dalle cifre dell'unità semplici e delle diecine, il quadruplo della cifra delle centinaia, l'ottuplo della cifra delle migliaia e sedici volte la cifra delle diecine di migliaia (mod. 32).*

Tutti questi criteri particolari ed altri ancora, molto probabilmente deducibili dal Criterio di Pascal, associati al Criterio generale e fra loro, possono portare considerevole semplificazione nella pratica; al quale scopo, si avrà cura altresì, di lasciare, via via che si trovano, tutti i resultati (prodotti e somme) parziali che, a memoria, appariscano multipli del divisore a cui ci riferiremo; ed inoltre, ogniqualvolta nel numero dato o in quelli ad esso congrui, via via trovati, esistano degli zeri, salteremo ogni zero incontrato *avvertendo* di fare un corrispondente salto nella serie dei moltiplicatori fissi che staremo adoperando.

Resulta così evidente che il Criterio di Pascal, oltrechè un'importanza teorica, in quanto dà unità e generalità a una delle principali teorie dell'aritmetica, ha pure una notevole importanza pratica, conferitagli dalla sua generalità stessa, che permette di dedurne moltissimi criteri particolari di pratica utilità.

Belluno, marzo '98.

ALBERTO CONTI.

NOTA SOPRA UN'APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI WILSON

e sulla formula di Stirling

1. TEOREMA. — *Se* a *e* ρ *sono numeri interi primi fra loro, ed* r *non è zero, vi è un intero* α *tale che si ha*

$$\alpha \,.\, a \equiv r \qquad (\text{mod. } \rho).$$

Si considerino i resti delle divisioni per ρ dei termini della serie:

(1) $$a,\ 2a,\ 3a, \dots (\rho - 1)\, a.$$

Essendo per ipotesi ρ primo con a, nessuno di questi resti è nullo; di più essi son tutti disuguali fra loro; poichè se fosse $m \cdot a \equiv n \cdot a$ (mod. ρ), ove m ed n sono minori di ρ, ne verrebbe che $m \cdot a - n \cdot a = (m - n) \cdot a$ sarebbe divisibile per ρ; quindi lo dovrebbe essere $m - n$, il che è assurdo, essendo $m - n < \rho$. Perciò questi resti son tutti disuguali fra loro, e quindi sono $\rho - 1$ e nessun d'essi è nullo; perciò si avrà un termine αa della serie (1) che diviso per ρ dà lo stesso resto di r.

2. Teorema (di Wilson). — *Se* p *è un numero primo, il prodotto* $\underline{|p-1}$ *diviso per* p *dà per resto* p — 1.

Infatti si rappresenti con a uno dei fattori

$$1,\ 2,\ 3 \ldots ,\ (p-2),\ (p-1);$$

e si consideri la serie

$$a,\ 2a,\ 3a, \ldots (p-2)a,\ (p-1)a. \tag{2}$$

Pel teor. 1 si sa che un sol termine di questa serie, diviso per p, dà per resto 1; sia desso αa; sicchè avremo

$$\alpha \cdot a \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p).$$

I numeri a ed α son disuguali, se a è diverso da 1 e da $p - 1$. Infatti se poniamo $\alpha = a$, si ha $a^2 \equiv 1$ (mod. p); onde $a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1) \equiv 0$ (mod. p); quindi

$$a + 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$
$$a - 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p);$$

ma ciò non può verificarsi che nei casi rispettivamente di $a = p - 1$, $a = 1$. Ne segue da ciò che i numeri, che sono in numeri pari: 2, 3, 4, ... $p - 2$, possono essere accoppiati in modo, che il prodotto dei due associati diviso per p dia per resto 1, cioè sia congruente con 1 rispetto al modulo p; e quindi, moltiplicando fra loro le congruenze così ottenute si avrà:

$$2,\ 3,\ 4, \ldots (p-2) \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p);$$

da cui, moltiplicando per $p - 1$, si ha

$$\underline{|p-1} \equiv p - 1 \qquad (\text{mod. } p).$$

3. Teorema. — *Se* $\underline{|p-1}$ *diviso per* p *dà per resto* p — 1, *il numero* p *è primo.*

Infatti se p non fosse primo, esso sarebbe della forma

$$p = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \ldots ,$$

in cui α, β, γ .... sono uguali o disuguali fra loro e diversi da 1, ciascuno di essi è uguale ad uno dei numeri:

$$2,\ 3,\ 4 \ldots p-1.$$

Poichè è

$$\underline{|p-1} = Q \cdot p + (p-1), \tag{3}$$

ossia

$$\underline{|p-1} = Q \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \ldots + (p-1),$$

il numero α divide una somma di due parti e una di queste, e perciò deve dividere anche l'altra $\underline{|p-1}$. Ma allora p, $p - 1$ ammettono lo stesso divisore α, e ciò è assurdo. Dunque p è un numero primo.

4. Da quanto precede ne consegue che se la divisione

$$\underline{|p-1} : p \tag{4}$$

dà per resto $p-1$, il numero p è primo; perciò l'algoritmo (4) fornisce il mezzo per far riconoscere se un numero dato è o no primo e dà pure il mezzo per poter formare una tavola di numeri primi.

Però questo metodo è puramente teorico, poichè da quello che segue apparirà chiaro che desso non è di alcuna utilità pratica.

5. *Formula di Stirling.*

Si sa che è

$$\log\frac{n+1}{n} = 2\sum_1^{\infty}{}_s \frac{\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)^{2s-1}}{2s-1};$$

e perciò

$$\log(n+1) - \log n = \frac{2}{2n+1}\left[1 + \frac{\theta}{12n(n+1)}\right], \tag{5}$$

ove è $1 > \theta > 0$, poichè è

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)(2n+1)} + \ldots = \frac{1}{3}\cdot\frac{\theta}{2n(2n+2)} =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{\theta}{4n(n+1)} = \frac{\theta}{12\,.\,1\,n(n+)}.$$

Quindi dalla (5) si ha

$$\frac{\theta}{12n(n+1)} = -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)[\log(n+1) - \log n]. \tag{6}$$

Ponendovi

$$\varphi(n) = \frac{\underline{|n}}{e^{-n}\,.\,n^{n+\frac{1}{2}}}; \tag{7}$$

la (6) diviene

$$\frac{\theta}{12n(n+1)} = \log\varphi(n) - \log\varphi(n+1); \tag{8}$$

e quindi ne consegue che è

$$\log\varphi(n) > \log\varphi(n+1)$$

e
$$\log\varphi(n+1) - \frac{1}{12n} < \log\varphi(n+1) - \frac{1}{12(n+1)};$$

cioè $\varphi(n)$, $\varphi(n+1)\,.\,e^{-\frac{1}{12n}}$ sono la 1ª decrescente e la 2ª crescente, quando l'intero n cresce.

Designando con p un numero intero qualunque, si ha

$$\varphi(n) > \varphi(n+p), \quad \varphi(n)\,.\,e^{-\frac{1}{12n}} < \varphi(n+p)\,.\,e^{-\frac{1}{12(n+p)}},$$

l'ultima delle quali si può scrivere così

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+p)} = e^{\frac{\theta}{12n(n+p)}}, \text{ ove } 1 > \theta > 0. \tag{9}$$

Da questa si ricava facilmente la formula di Stirling *per calcolare approssimativamente il prodotto* $\underline{|n}$ per n abbastanza grande.

Facendo nella (9) $n = p$, si ha

$$\lim_{p=\infty}\frac{\varphi(p)}{\varphi(2p)} = \lim_{p=\infty} e^{\frac{\theta}{24p^2}} = 1;$$

e quindi

$$\lim_{p=\infty} \varphi(p) = \lim_{p=\infty} \frac{\varphi(p)^2}{\varphi(2p)};$$

e per la (7) avremo

$$\lim_{p=\infty} \varphi(p) = \lim_{p=\infty} \sqrt{4 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2p-2}{2p-1} \cdot \frac{2p}{2p-1}};$$

e pel teorema di Wallis

(10) $$\lim_{p=\infty} \varphi(p) = \sqrt{2\pi}.$$

Da qui, se nell'eguaglianza (9) si lascia n fisso e si fa crescere p indefinitamente, si ottiene

(11) $$\frac{\varphi(n)}{\sqrt{2\pi}} = e^{\frac{\theta}{2n}};$$

e per la (7) si ha

(12) $$\underline{|n} = \sqrt{2\pi n} \,.\, n^n \,.\, e^{-n} \,.\, e^{\frac{\theta}{12n}},$$

che è la formula di Stirling; quindi si ha la limitazione seguente:

$$\sqrt{2\pi n} \,.\, n^n\, e^{-n} > \underline{|n} > \sqrt{2\pi \,.\, n} \,.\, n^n\, e^{-n} \,.\, \frac{1}{e^{\frac{1}{12n}}}.$$

6. Osservazione. — Per $n = 5009$ il valore di $\underline{|5009}$ è un numero di 16360 cifre; quindi per riconoscere se il numero 5009 è primo bisognerebbe, oltre a calcolarsi un prodotto di 16360 cifre, dividere un numero di 16360 cifre; il che praticamente può dirsi impossibile. Questa osservazione appieno giustifica quanto abbiamo asserito in fine del n. 4.

Milano, 31 marzo 1898.

Prof. Dionisio Gambioli.

UNA SORGENTE DI IDENTITÀ NUMERICHE

Nota di ALBERTO BRAMBILLA

La comoda notazione proposta dal prof. A. Capelli per le potenze fattoriali (*)

(1) $$x^{\overline{n}} = x\,(x+1)\,(x+2)\ldots(x+n-1)$$

ne suggerisce l'uso per la deduzione di certe identità e per l'effettuazione di certe somme notevoli, di cui è bene conoscere esempi. I calcoli sono molto semplici, e gli argomenti sono di quelli che possono destare l'attenzione degli alunni delle scuole secondarie, cosicchè ai nostri colleghi sarà utile averne un saggio, che io offro in questo breve scritto.

(*) Capelli, *L'Analisi algebrica e l'interpretazione fattoriale delle potenze*, Giornale di Battaglini, 1894. — Oppure *Lezioni di Algebra complementare*. In entrambe queste opere del prof. Capelli trovansi molte altre identità dimostrate nel nostro ordine di idee.

1. — *L'n-ma potenza ordinaria* (n *intiero*) *di un qualunque numero* x *è esprimibile come aggregato (additivo) di potenze fattoriali del medesimo numero.*

Infatti si ha:

$$\begin{aligned}
x^n &= x \,.\, x^{n-1} \\
&= \left\{ x^{\overline{2}} - x \right\} x^{n-2} \\
&= \left\{ x^{\overline{3}} - 3\,x^{\overline{2}} + x \right\} x^{n-3} \\
(2) \quad &= \left\{ x^{\overline{4}} - 6\,x^{\overline{3}} + 7\,x^{\overline{2}} - x \right\} x^{n-4} \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \left\{ x^{\overline{k}} - e_1{}^{(k)}\, x^{\overline{k-1}} + e_2{}^{(k)}\, x^{\overline{k-2}} - e_3{}^{(k)} . x^{\overline{k-3}} + \ldots - (-1)^k . x \right\} x^{n-k} \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= x^{\overline{n}} - e_1{}^{(n)}\, x^{\overline{n-1}} + e_2{}^{(n)}\, x^{\overline{n-2}} - e_3{}^{(n)} . x^{\overline{n-3}} + \ldots + (-1)^n\, e^{(n)}_{n-2}\, x^{\overline{2}} - (-1)^n . x .
\end{aligned}$$

E ciò dimostra l'enunciato.

Per il calcolo effettivo dei coefficienti e, servono le seguenti relazioni ricorrenti:

$$(3) \qquad \begin{aligned}
e_1{}^{(k+1)} - e_1{}^{(k)} &= k, \\
e_2{}^{(k+1)} - e_2{}^{(k)} &= (k-1)\, e_1{}^{(k)}, \\
e_3{}^{(k+1)} - e_3{}^{(k)} &= (k-2)\, e_2{}^{(k)}, \\
\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots \\
e^{(k+1)}_{h-2} - e^{(k)}_{h-2} &= 3\, e^{(k)}_{h-3}, \\
e^{(k+1)}_{h+1} - e^{(k)}_{h-1} &= 2\, e^{(k)}_{h-2}, \\
e^{(k+1)}_{h} &= 1\, e^{(k)}_{h-1} = 1,
\end{aligned}$$

da cui si ricavano:

$$\begin{aligned}
&e_1{}^{(2)} = 1; \\
&e_1{}^{(3)} = 3,\ e_2{}^{(3)} = 1; \\
&e_1{}^{(4)} = 6,\ e_2{}^{(4)} = 7,\ e_3{}^{(4)} = 1; \\
&e_1{}^{(5)} = 10,\ e_2{}^{(5)} = 25,\ e_3{}^{(5)} = 15,\ e_4{}^{(5)} = 1; \\
&e_1{}^{(6)} = 15,\ e_2{}^{(6)} = 65,\ e_3{}^{(6)} = 90,\ e_4{}^{(6)} = 31,\ e_5{}^{(6)} = 1; \\
&e_1{}^{(7)} = 21;\ e_2{}^{(7)} = 140,\ e_3{}^{(7)} = 350,\ e_4{}^{(7)} = 301,\ e_5{}^{(7)} = 63,\ e_6{}^{(7)} = 1. \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Dando poi a k i successivi valori $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$, si trovano ad esempio,

$$\begin{aligned}
e_1{}^{(2)} - e_1{}^{(1)} &= 1, \\
e_1{}^{(3)} - e_1{}^{(2)} &= 2, \\
\ldots\ldots&\ldots \\
e_1{}^{(k-1)} - e_1{}^{(k-2)} &= k-2, \\
e_1{}^{(k)} \quad - e_1{}^{(k-1)} &= k-1,
\end{aligned}$$

epperò, sommando,

$$(4) \qquad e_1{}^{(k)} = 1 + 2 + \ldots + (k-1) = \frac{1}{2} k(k-1)$$

Similmente,

$$\begin{aligned}
e_2{}^{(3)} - e_2{}^{(2)} &= 1 \\
e_2{}^{(4)} - e_2{}^{(3)} &= 2 . e_1{}^{(3)}, \\
\ldots\ldots&\ldots \\
e_2{}^{(k-1)} - e_2{}^{(k-2)} &= (k-3) . e_1{}^{(k-2)}, \\
e_2{}^{(k)} \quad - e_2{}^{(k-1)} &= (k-2) . e_1{}^{(k-1)},
\end{aligned}$$

e, sommando,

$$\begin{aligned}
e_2{}^{(k)} &= 1 + 2 e_1{}^{(3)} + 3 e_1{}^{(4)} + \ldots + (k-3) e_1{}^{(k-2)} + (k-2)\, e_1{}^{(k-1)} \\
&= 1 + 2 . \frac{3.2}{2} + 3 . \frac{4.3}{2} + \ldots + (k-3)\frac{(k-2)(k-3)}{2} + (k-2)\frac{(k-1)(k-2)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left\{ 1^2.2 + 2^2.3 + 3^2.4 + \ldots + (k-3)^2(k-2) + (k-2)^2(k-1) \right\}.
\end{aligned}$$

Ma

$$x^2(x+1)=x(x+1)(x+2-2)=x^{\overline{3}}-2x^{\overline{2}},$$

e quindi

$$e_2^{(k)}=\frac{1}{2}(1^{\overline{3}}+2^{\overline{3}}+\dots+(k-2)^{\overline{3}})-(1^{\overline{2}}+2^{\overline{2}}+\dots(+k-2)^{\overline{2}}),$$

epperò, in virtù dell'identità

(5) $$1^{\overline{n}}+2^{\overline{n}}+\dots+\alpha^{\overline{n}}=\frac{\alpha^{\overline{n+1}}}{n+1}.\ (*)$$

si avrà ancora

$$e_2^{(k)}=\frac{(k-2)^{\overline{4}}}{8}-\frac{(k-2)^{\overline{3}}}{3}$$

$$=\frac{1}{24}(3(k-2)^{\overline{4}}-8(k-2)^{\overline{3}})$$

(6) $$=\frac{1}{24}(k-2)(k-1)k(3k-5).$$

E poi si troveranno

$$\begin{aligned}
e_3^{(4)} &- e_3^{(3)} = 1\\
e_3^{(5)} &- e_3^{(4)} = 2\,.\,e_2^{(4)}\\
e_3^{(6)} &- e_3^{(5)} = 3\,.\,e_2^{(5)}\\
&\dots\dots\dots\dots\\
e_3^{(k-1)} &- e_3^{(k-2)} = (k-4)\,e_2^{(k-2)}\\
e_3^{(k)} &- e_3^{(k-1)} = (k-3)\,e_2^{(k-1)}.
\end{aligned}$$

epperò, sommando,

$$e_3^{(k)}=1+2e_2^{(4)}+3e_2^{(5)}+\dots+(k-4)e_2^{(k-2)}+(k-3)e_2^{(k-1)}$$

$$=1+\frac{1}{24}\times2\times2.3.4(3.4-5)+\frac{1}{24}\times3\times3.4.5(3.5-5)+\dots$$

$$\dots+\frac{1}{24}\times(k-3)\times(k-3)(k-2)(k-1)(3(k-1)-5)$$

$$=\frac{1}{24}\left\{1^2.2.3(3.3-5)+2^2.3.4(3.4-5)+\dots+(k-3)^2(k-2)(k-1)(3(k-1)-5)\right\}$$

Ora il termine generico di questa somma tra $\{\ \}$ è

$$x^2(x+1)(x+2)(3(x+2)-5)$$

e la x va da 1 fino a $k-3$. Svolgendo questo prodotto si trova che esso è esprimibile nella forma

$$3(x-1)^{\overline{5}}-8(x-1)^{\overline{4}}+3x^{\overline{4}}-8x^{\overline{3}}.$$

Quindi si otterrà

$$e_3^{(k)}=\frac{1}{24}\left\{3[1^{\overline{5}}+2^{\overline{5}}+\dots+(k-4)^{\overline{5}}]-8[1^{\overline{4}}+2^{\overline{4}}+\dots+(k-4)^{\overline{4}}]\right.$$

$$\left.+3[1^{\overline{4}}+2^{\overline{4}}+\dots+(k-3)^{\overline{4}}]-8[1^{\overline{3}}+2^{\overline{3}}+\dots+(k-3)^{\overline{3}}]\right\}.$$

E finalmente, avvalendosi della (5), risulterà

$$e_3^{(k)}=\frac{1}{48}(k-3)(k-2)(k-1)(k^2-5k+6).$$

E così via. Sarebbe interessante che qualcuno studiasse la determinazione di $e_h^{(k)}$.

2. — *L'n-ma potenza fattoriale di un numero qualunque* x *può sempre esprimersi come aggregato di potenze fattoriali di un altro numero qualunque* y.

Infatti, se poniamo

$$x=y+z,$$

(*) Veggasi, per esempio, CAPELLI, *L'analisi algebrica* ecc. menzionata. — Si trova pure la dimostrazione della formola a pag. 43 del *Pitagora*, Anno II (1896) del prof. FAZZARI di Avellino, nel quale periodico sono altre esercitazioni di questa specie.

si sa (VANDERMONDE) che (*)

$$x^{\overline{n}}=(y+z)^{\overline{n}}=y^{\overline{n}}+\binom{n}{1}zy^{\overline{n-1}}+\binom{n}{2}z^{\overline{2}}y^{\overline{n-2}}+\ldots+z^{\overline{n}},$$

e ciò dimostra l'enunciato.

Come corollario si può affermare che *l'n-ma potenza ordinaria di* x *si può esprimere come aggregato di potenze fattoriali di un altro numero qualunque* y.

3. — *Il prodotto* $x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}$, *dove sono* x_1 *ed* x_2 *dei numeri qualunque ed* α_1, α_2 *degli interi (che basterà considerare positivi) è esprimibile come aggregato di potenze fattoriali di un numero qualsiasi.*

Infatti, per il n. 1, si hanno le relazioni

$$x_1^{\alpha_1}=x_1^{\overline{\alpha_1}}-e_1^{(\alpha_1)}x_1^{\overline{\alpha_1-1}}+\ldots-(-1)^{\alpha_1}x_1,$$
$$x_2^{\alpha_2}=x_2^{\overline{\alpha_2}}-e_1^{(\alpha_2)}x_2^{\overline{\alpha_2-1}}+\ldots-(-1)^{\alpha_2}x_2;$$

e quindi il prodotto $x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}$ è una somma di termini, de' quali il generico è

$$(-1)^{r+s}\,e_r^{(\alpha_1)}\,e_s^{(\alpha_2)}\,x_1^{\overline{\alpha_1-r}}\,x_2^{\overline{\alpha_2-s}}.$$

Ora, non occupandoci del coefficiente $(-1)^{r+s}e_r^{(\alpha_1)}e_s^{(\alpha_2)}$, osserviamo che per il n. 2, la potenza $x_2^{\overline{\alpha_2-s}}$ è esprimibile come aggregato di potenze fattoriali di $x_1+\alpha_1-r$, e quindi sarà

$$x_1^{\overline{\alpha_1-r}}.x_2^{\overline{\alpha_2-s}}=x_1^{\overline{\alpha_1-r}}\left\{(x_1+\alpha_1-r)^{\overline{\alpha_2-s}}+\binom{\alpha_2-s}{1}(x_2-x_1-\alpha_1+r)(x_1+\alpha_1-r)^{\overline{\alpha_2-s-1}}+\ldots\right.$$
$$=x_1^{\overline{\alpha_1+\alpha_2-r-s}}+\binom{\alpha_2-s}{1}(x_2-x_1-\alpha_1+r)\,x_1^{\overline{\alpha_1+\alpha_2-r-s-1}}+\ldots$$

In questo modo si vede che $x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}$ è esprimibile come aggregato di potenze fattoriali di x_1 (oppure di x_2): ed allora per il n. 2, si potrà asserire che lo è pure mediante potenze fattoriali di un numero qualunque, come si è affermato.

In modo analogo si dimostra che un prodotto della forma

$$x_1^{\alpha_1}\,x_2^{\alpha_2}\,x_3^{\alpha_3}\ldots x_i^{\alpha_i}$$

è esprimibile come aggregato di potenze fattoriali di un numero qualunque.

Inoltre, osserviamo che queste dimostrazioni si possono condurre anche in varie altre maniere.

4. — Debbasi eseguire la somma

$$1^2.2^2\ldots h^2+2^2.3^2\ldots(h+1)^2+\ldots+n^2(n+1)^2\ldots(n+h-1)^2.$$

Osserviamo anzitutto che il termine generale è

$$x^2(x+1)^2\ldots(x+h-1)^2=(x^{\overline{h}})^2=x^{\overline{h}}(x+h-h)^{\overline{h}}$$

ossia,

$$x^{\overline{h}}\left\{(x+h)^{\overline{h}}+\binom{h}{1}(-h)(x+h)^{\overline{h-1}}+\binom{h}{2}(-h)^{\overline{2}}(x+h)^{\overline{h-2}}+\ldots+(-h)^{\overline{h}}\right\},$$

vale a dire

$$x^{\overline{2h}}-\frac{h^2}{\lfloor 1}x^{\overline{2h-1}}+\frac{[h(h-1)]^2}{\lfloor 2}x^{\overline{2h-2}}-\frac{[h(h-1)(h-2)]^2}{\lfloor 3}x^{\overline{2h-3}}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^h\,h(h-1)\ldots 2.1.x^{\overline{h}}.$$

(*) Veggasi CAPELLI, *L'analisi Algebrica* ecc., ed anche *Pitagora*, Anno citato, pag. 28.

In virtù della (5) se ne conclude che la somma da calcolare vale

$$\frac{n^{\overline{2h+1}}}{2h+1}-\frac{h^2}{\underline{|1}}\frac{n^{\overline{2h}}}{2h}+\frac{[h(h-1)]^2}{\underline{|2}}\frac{n^{\overline{2h-1}}}{2h-1}-\frac{[h(n-1)(h-2)]^2}{\underline{|3}}\frac{n^{\overline{2h-2}}}{2h-2}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^h\, h(h-1)\ldots 2.1.\frac{n^{\overline{h+1}}}{h+1}.$$

Se invece della data somma si dovesse calcolare

$$1^3.2^3\ldots h^3+\ldots+n^3(n+1)^3\ldots(n+h-1),$$

si osserverebbe che il termine generale è $(x^{\overline{h}})^3=(x^{\overline{h}})^2 x^{\overline{h}}$ e quindi, in forza del precedente sviluppo di $(x^{\overline{h}})^2$, esso è

$$x^{\overline{2h}}(x+2h-2h)^{\overline{h}}-\frac{h^2}{\underline{|1}}x^{\overline{2h-1}}(x+2h-1-2h+1)^{\overline{h}}+\ldots+(-1)^{h}h(h-1)\ldots 2.1.x^{\overline{h}}(x+h)^{\overline{h}}$$

e quindi si applicherebbero gli sviluppi e le identità ricordate.

5. — Proponiamoci di calcolare le somme seguenti:

I) $\quad 1.2+2.3^2+\ldots+n(n+1)^2$

II) $\quad 1.2^2.3^3+2.3^2.4^3+\ldots+n(n+1)^2(n+2)^3$

III) $\quad 1.2^2.3^3.4^4+2.3^2.4^3.5^4+\ldots+n(n+1)^2(n+2)^3(n+3)^4$

. . . .

Per effettuare il calcolo della I), si cominci ad osservare che il suo termine generale è

$$x(x+1)^2=x^{\overline{3}}-x^{\overline{2}};$$

cosicchè la medesima I) equivale alla seguente:

$$1^{\overline{3}}+2^{\overline{3}}+\ldots+n^{\overline{3}}-(1^{\overline{2}}+2^{\overline{2}}+\ldots+n^{\overline{2}})$$

e per la (5)

$$=\frac{n^{\overline{4}}}{4}-\frac{n^{\overline{3}}}{3}=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5).$$

Per calcolare la II), si noti che

$$x(x+1)^2(x+2)^3=x^{\overline{6}}-7x^{\overline{5}}+10x^{\overline{4}}-2x^{\overline{3}},$$

epperò che la II) è equivalente all'altra

$$1^{\overline{6}}+\ldots+n^{\overline{6}}-7\left\{1^{\overline{5}}+\ldots+n^{\overline{5}}\right\}$$
$$-10\left\{1^{\overline{4}}+\ldots+n^{\overline{4}}\right\}-2\left\{1^{\overline{3}}+\ldots+n^{\overline{3}}\right\}$$

ossia, per la (5), è eguale ad

$$\frac{n^{\overline{7}}}{7}-7\frac{n^{\overline{6}}}{6}+10\frac{n^{\overline{5}}}{5}-2\frac{n^{\overline{4}}}{4}=\frac{n^{\overline{4}}}{42}(6n^3+41n^2+67n-185).$$

Al calcolo della somma III si perverrà nel seguente modo. Il suo termine generale è

$$x(x+1)^2(x+2)^3(x+3)^4,$$

il quale si potrà scrivere pure

$$x^{\overline{4}}(x+1)^{\overline{3}}(x+2)^{\overline{2}}(x+3);$$

sviluppando il secondo fattore secondo le potenze fattoriali di $x+4$ (n. 2), avremo

$$x^{\overline{4}}(x+1)^{\overline{3}}(x+2)^{\overline{2}}(x+3)=x^{\overline{4}}(x+4-3)^{\overline{3}}(x+2)^{\overline{2}}(x+3)$$
$$=x^{\overline{4}}\left\{(x+4)^{\overline{3}}-9(x+4)^{\overline{2}}+18(x+4)-6\right\}(x+2)^{\overline{2}}(x+3)$$
$$=\left\{x^{\overline{7}}-9x^{\overline{6}}+18x^{\overline{5}}-6x^{\overline{4}}\right\}(x+2)^{\overline{2}}(x+3)$$

Questo prodotto si compone della somma di quattro prodotti: ora in ciascuno di questi il fattore $(x+2)^{\overline{2}}$ si potrà esprimere per potenze fattoriali di numeri scelti opportunamente per elevare l'esponente fattoriale del primo fattore. E precisamente, nel primo termine, $(x+2)^{\overline{2}}$ si esprimerà per potenze fattoriali di $(x+7)$, nel secondo per potenze fattoriali di $x+6$, nel terzo di $x+5$, e nel quarto di $x+4$. Si otterrà

$$
\begin{aligned}
x^{\overline{4}}(x+1)^{\overline{3}}(x+2)^{\overline{2}}(x+3)
&= \Big\{ x^{\overline{9}} - 10\,x^{\overline{8}} + 20\,x^{\overline{7}} \\
&\qquad - 9\,x^{\overline{8}} + 72\,x^{\overline{7}} + 108\,x^{\overline{6}} \\
&\qquad\qquad + 18\,x^{\overline{7}} - 108\,x^{\overline{6}} + 108\,x^{\overline{5}} \\
&\qquad\qquad\qquad - 6\,x^{\overline{6}} + 24\,x^{\overline{5}} - 12\,x^{\overline{4}} \Big\}(x+3) \\
&= \Big\{ x^{\overline{9}} - 19\,x^{\overline{8}} + 110\,x^{\overline{7}} - 222\,x^{\overline{6}} + 132\,x^{\overline{5}} - 12\,x^{\overline{4}} \Big\}(x+3).
\end{aligned}
$$

E quindi, nuovamente, ponendo $x+3 = x+9-6 = x+8-5 = \ldots$ rispettivamente,

$$
\begin{aligned}
x^{\overline{4}}(x+1)^{\overline{3}}(x+2)^{\overline{2}}(x+3)
&= x^{\overline{10}} - 6\,x^{\overline{9}} \\
&\qquad - 19\,x^{\overline{9}} + 95\,x^{\overline{8}} \\
&\qquad\qquad + 110\,x^{\overline{8}} - 440\,x^{\overline{7}} \\
&\qquad\qquad\qquad - 222\,x^{\overline{7}} + 666\,x^{\overline{6}} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + 132\,x^{\overline{6}} - 264\,x^{\overline{5}} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 12\,x^{\overline{5}} + 12\,x^{\overline{4}} \\
&= x^{\overline{10}} - 25\,x^{\overline{9}} + 205\,x^{\overline{8}} - 662\,x^{\overline{7}} + 798\,x^{\overline{6}} - 276\,x^{\overline{5}} + 12\,x^{\overline{4}}.
\end{aligned}
$$

Così, applicando la (5) troviamo che la somma III) è eguale a

$$
\frac{n^{\overline{11}}}{11} - 25\,\frac{n^{\overline{10}}}{10} + 205\,\frac{n^{\overline{9}}}{9} - 662\,\frac{n^{\overline{8}}}{8} + 798\,\frac{n^{\overline{7}}}{7} - 276\,\frac{n^{\overline{6}}}{6} - 12\,\frac{n^{\overline{5}}}{5}
$$

6. — Si propone ai volonterosi di cercar la legge dei coefficienti nello sviluppo per potenze fattoriali di ciascuno dei prodotti:

$$
\begin{gathered}
x(x+1)^2\,(x+2)^3 \ldots (x+\alpha-1)^\alpha \\
x^\alpha\,(x+1)^\alpha \ldots (x+k-1)^\alpha\,, \\
x(x+h)(x+2h)\ldots(x+[\alpha-1]h), \\
x(x+h)^2(x+2h)^3\ldots(x+[\alpha-1]h)^\alpha\,, \\
x^\alpha\,(x+h)^\alpha\,(x+2h)^\alpha \ldots (x+[k-1]h)^\alpha\,,
\end{gathered}
$$

e di altri consimili, e quindi l'espressione delle somme analoghe alle I), II), III) per questi casi generali. Non è necessario osservare che converrà cominciar dai casi particolari più semplici: sarà già un bel risultato il poter stabilire delle relazioni ricorrenti fra i coefficienti in ciascuno sviluppo, le quali dovranno poi servire alla scoperta della legge richiesta.

Napoli, luglio 1898.

ANCORA SUI CARATTERI DI DIVISIBILITÀ

A complemento di una mia nota precedente sul soggetto, inserita nel IV fasc. di questo *Periodico,* ed in risposta alle considerazioni che vi aggiunse (V fasc.) il sig. dr. Levi, espongo quanto segue, per mostrare come la questione possa ridursi ad una grande generalità e, nello stesso tempo, ad una estrema semplicità.

Sia p un numero intero qualunque, e lo si ponga nella forma

$$p = a\alpha + b$$

ove sia $a\alpha$ o b primo con p.

Sia inoltre

$$N = -A\alpha_1 + B$$

un altro numero intero maggiore o uguale a p. Stante le ipotesi fatte, è semplicissimo il dimostrare che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè sia* N *un multiplo di* p *è*

$$Ab\alpha_1 - Ba\alpha \equiv 0 \pmod{p}.$$

Infatti:

1° se sono verificate le uguaglianze

$$a\alpha + b = p,$$
$$A\alpha_1 + B = N,$$

moltiplicandole rispettivamente per B e per b e sottraendo membro a membro l'una dall'altra si ha

$$Ab\alpha_1 - aB\alpha = bN - Bp$$

cioè,

$$Ab\alpha_1 - aB\alpha \equiv 0 \pmod{p};$$

2° inversamente se sono verificate le uguaglianze

$$a\alpha + b = p,$$
$$Ab\alpha_1 - aB\alpha = pK,$$

sommando la prima moltiplicata per B con la seconda, si ha

$$(A\alpha_1 + B)\,b = pK_1,$$

che ci dà, pel caso di b primo con p,

$$N \equiv 0 \pmod{p};$$

sottraendo invece la seconda dalla prima moltiplicata B, si ha

$$(A\alpha_1 + B)\,a\alpha = pK_2$$

donde pel caso di $a\alpha$ (e non b) primo con p

$$N \equiv 0 \pmod{p}.$$

Per non dover chiedere troppo spazio al *Periodico*, mi astengo da considerazioni particolari e da deduzioni di regole speciali che ognuno può fare da sè. Avverto per altro che molte delle regole da me precedentemente stabilite (divisibilità per 11, 17, 31 ecc.) possono subire notevolissime semplificazioni, che del resto potevano ottenersi anche indipendentemente da quanto ho esposto ora e da quanto dice il dr. Levi nella sua nota.

È superfluo aggiungere che, applicando convenientemente il criterio ora esposto, si può dedurre una regola di divisibilità per qualesivoglia modulo, sia esso maggiore o minore di 10, pari o dispari. Così, diviene possibile far conoscere parecchi *caratteri particolari di divisibilità* oltre a quelli finora contenuti nei trattati il che, d'accordo col collega dr. Conti, (*) ritengo molto utile per la scuola.

Forlì, ottobre 1898.

Prof. Ferruccio Mariantoni.

(*) V. nel IV fasc. di questo *Periodico* l'artic. *sulla divisibilità dei numeri*.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 420, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 429, 430

420. *Se si considera il sistema delle formule*

$$\xi'_i \equiv \varphi\xi_i - u_\xi \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}, \quad \eta'_i \equiv \varphi\eta_i - u_\eta \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}, \quad \zeta'_i \equiv \varphi\zeta_i - u_\zeta \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}, \ (i=1,2,3,4)$$

dove ψ *è la forma quadratica (nelle* u_i*)*

$$\varphi = \Sigma a_{ik} u_i u_k,$$

ed è $u_x = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4$ $(x \equiv \xi, \eta, \zeta)$, *la equazione*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \xi'_1 & \xi'_2 & \xi'_3 & \xi'_4 \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \eta'_3 & \eta'_4 \\ \zeta'_1 & \zeta'_2 & \zeta'_3 & \zeta'_4 \end{vmatrix} = 0$$

si confonde, a meno del fattore φ^2, *con l'altra*

$$\varphi\lambda_x - u_\xi\left(x\eta\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) - u_\eta\left(x\zeta\xi\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) - u_\zeta\left(x\xi\eta\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) = 0$$

ove, per es., è $\left(x\eta\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)$ *ciò che diventa il determinante precedente, quando al posto degli elementi delle* 2ª, 3ª, 4ª, *orizzontale si pongono rispettivamente le* η_i, *le* ζ_i, *le* $\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}$; *e dove* λ_x *è ciò che diventa lo stesso determinante, quando al posto degli elementi delle medesime orizzontali si pongono ordinatamente le* ξ_i, η_i, ζ_i.

DEL RE.

Risoluzione del Dott. Ing. C. Merizzi di Udine.

Sostituendo nel determinante dato alle ξ'_i, η'_i, ζ'_i i loro valori, la 2ª, 3ª, 4ª linea risultano formate di elementi binomi; perciò il determinante si scompone nella somma di otto determinanti, di cui quattro soli non sono identicamente nulli, e si ha

$$\begin{vmatrix} x_1\, x_2\, x_3\, x_4 \\ \varphi\xi_1 \ldots\ldots \varphi\xi_4 \\ \varphi\eta_1 \ldots\ldots \varphi\eta_4 \\ \varphi\zeta_1 \ldots\ldots \varphi\zeta_4 \end{vmatrix} - u_\xi \begin{vmatrix} x_1\, x_2\, x_3\, x_4 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} \ldots\ldots \frac{\partial\varphi}{\partial u_4} \\ \varphi\eta_1 \ldots\ldots \varphi\eta_4 \\ \varphi\zeta_1 \ldots\ldots \varphi\zeta_4 \end{vmatrix} - u_\eta \begin{vmatrix} x_1\, x_2\, x_3\, x_4 \\ \varphi\xi_1 \ldots\ldots \varphi\xi_4 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} \ldots\ldots \frac{\partial\varphi}{\partial u_4} \\ \varphi\zeta_1 \ldots\ldots \varphi\zeta_4 \end{vmatrix} - u_\zeta \begin{vmatrix} x_1\, x_2\, x_3\, x_4 \\ \varphi\xi_1 \ldots\ldots \varphi\xi_4 \\ \varphi\eta_1 \ldots\ldots \varphi\eta_4 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} \ldots\ldots \frac{\partial\varphi}{\partial u_4} \end{vmatrix} +$$

Se ora nel secondo determinante poniamo la 2ª, 3ª, 4ª linea rispettivamente al posto della 4ª, 2ª, 3ª; nel terzo determinante poniamo la 2ª, 3ª, 4ª linea al posto della 3ª, 4ª, 2ª ed usiamo le espressioni simboliche, abbiamo

$$\varphi^2\left\{\varphi\lambda_x - u_\xi\left(x\eta\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) - u_\eta\left(x\zeta\xi\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) - u_\zeta\left(x\xi\eta\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\right\} = 0.$$

c. d. d.

422. *Un cerchio col centro in un punto variabile* P *di un'ellisse passa per uno dei fuochi* O′ *e sega il raggio vettore che unisce* P *all'altro fuoco* O *nei punti* P_1P_2. *Dimostrare che il luogo dei punti* P_1P_2 *è una curva del sesto ordine che si spezza in un cerchio di centro* O *e in una quartica razionale* (curva di Jerabék) *avente in* O *un nodo e in* O′ *un punto tacnodale.* RETALI.

Risoluzione del Dott. Prof. G. Cardoso-Laynes di Livorno.

Considerando, insieme all'ellisse data, il circolo di centro O e di raggio $2a$ (essendo a il semi-asse maggiore dell'ellisse), se si congiunge con O un punto qualunque P_2 di questo circolo e dal punto P d'intersezione di P_2O con l'ellisse si fa centro e si descrive un circolo che passi per O′; siccome $PO + PO' = 2a$, questo circolo taglierà la OP in due punti di cui uno è P_2; l'altro si indichi con P_1. Segue da ciò che il luogo di P_2 al moversi di P sull'ellisse è il circolo di centro O e di raggio $2a$; in quanto a P_1 può dirsi che genererà una *curva di Jerabék* avente in O il *nodo* e in O′ il *tacnodo*; infatti, siccome l'angolo $P_1O'P_2$ è retto perchè iscritto in mezzo circolo, il punto P_1 può ottenersi nel modo seguente: Dato un circolo di centro O ed un punto fisso O′ del suo piano, sia OP_2 un raggio del fascio O, si conduca da O′ la perpendicolare a $O'P_2$, il punto d'incontro di questa perpendicolare con OP_2 è il punto P_1; questa appunto è la generazione della *curva di Jerabék.* (*)

Del resto, si perviene allo stesso resultato anche riferendoci ad altra generazione della curva. Poichè $OP_1 = \rho - P_1P$ (essendo ρ il raggio vettore dell'ellisse dal fuoco O) ed evidentemente $P_1P = PO'$, poichè inoltre si ha $PO' = 2a - \rho$, ne segue $OP_1 = 2(\rho - a)$. Ma poichè la *concoide* di un'ellisse dal fuoco, ottenuta diminuendo il raggio vettore di un segmento eguale al semi-asse maggiore è una *curva di Jerabék,* si ha che il punto P_1 descrive una tale curva. Inoltre poichè si ha $OP_2 = \rho + PP_2 = \rho + PO'$ e $PO' = 2a - \rho$, avremo $OP_2 = 2a$ ciò che dimostra che P_2 genera un circolo.

OSSERVAZIONE. — Se O si allontana a distanza infinita, cioè se l'ellisse diviene una parabola, la questione 422 può modificarsi nel modo seguente:

Un cerchio col centro in un punto variabile P *di una parabola passa per il fuoco* O′ *e sega la parallela condotta da* P *all'asse nei punti* P_1P_2. *Il luogo dei punti* P_1P_2 *è una cubica che si spezza in una retta (direttrice della parabola) ed in una parabola.*

Ciò si dimostra direttamente senza difficoltà.

Altra risoluzione del Dott. Ing. C. Merizzi di Udine.

423. *Un triangolo* OVP *ha due vertici fissi mentre il terzo* P *percorre un cerchio* C^2 *passante per* O; *dimostrare che il luogo del punto* P′, *separato armonicamente da* P *mediante il punto circolo* V *ed allineato con* O, *è una cubica razionale circolare, inversa di ellisse, parabola o iperbole secondo che il centro di* C^2 *è interno, sopra o fuori della parabola avente* O *per fuoco e per direttrice la perpendicolare ad* |OV| *in* V. RETALI.

Risoluzione del Dott. Prof. G. Cardoso-Laynes.

Assumendo per asse x la OV e per origine O, posto $OV = m$ e $P \equiv (x_1\ y_1)$, l'equazione della retta OP è

$$xy_1 - x_1 y = 0 \tag{1}$$

(*) Questa è la prima generazione data della *curva di Jerabék,* come gentilmente mi comunicò il chiar. Prof. Retali. (V. *Mathesis,* t. V, 1885, pag. 110).

e quella della polare di P rispetto al punto-circolo V è

(2) $$(x-m)(x_1-m)+yy_1=0.$$

Essendo $P \equiv (x, y)$ l'intersezione delle (1) (2), poichè risolvendo queste rispetto a $x_1 y_1$ si ha

(3) $$x_1=\frac{mx(x-m)}{x^2+y^2-mx} \qquad y_1=\frac{my(x-m)}{x^2+y^2-mx},$$

quando P si muove su C^2, l'equazione del luogo di P' sarà data sostituendo con le (3) in quella che rappresenta C^2. E poichè se con a, b s'indicano le coordinate del centro C del circolo C^2 che passa per V, l'equazione di questo sarà

$$x^2+y^2-2ax-2by=0,$$

avremo per il luogo di P', fatte le debite riduzioni:

(4) $$(x^2+y^2)(x[m-2a]-2by)+mx^2(2a-m)-2bm\,xy-m^2y^2=0.$$

Questa cubica è evidentemente razionale ed inoltre passa per i punti ciclici. Ciò prova che la trasformata di un circolo C^2 nell'inversione di *Hirst* che ha per conica dei punti uniti un *punto-circolo* V e per polo un punto qualunque di C^2 è una *cubica razionale circolare*.

L'equazione complessiva delle tangenti nel punto doppio essendo

$$x^2(m-2a)+2bxy+my^2=0,$$

la (4) avrà un *nodo*, un *regresso* od un *punto isolato* secondo che

(5) $$m^2-2am-b^2 \lesseqgtr 0.$$

Osserviamo che la parabola che ha per fuoco O e per direttrice la $x=m$ ha per equazione

$$x^2+y^2=(x-m)^2$$

cioè

(6) $$y^2+2mx-m^2=0$$

e perciò, siccome il discriminante della (6) è negativo, secondo che $C\equiv(a, b)$ sarà esterno alla (6), sulla (6) o interno, avremo

(7) $$b^2+2am-m^2 \gtreqless 0.$$

Confrontando le (5) (7) si conclude che la cubica (4) sarà *nodale, cuspidale* o *acnodale*, e perciò inversa di *iperbole*, di *parabola* o di *ellisse* (preso per polo un punto della curva) secondo che C è esterno alla (6) o sulla (6) o interno a questa come si voleva dimostrare.

OSSERVAZIONE. — Se il circolo C^2, anzichè passare per O passasse per V *(come per errore di stampa* (*) *era detto nell'enunciato della questione proposta)*, prendendo V per origine e per asse x la VO, analogamente si trova per il luogo di P' la cubica razionale circolare

(7) $$(x^2+y^2)(2bx+y[m-2a])-2bmx^2+2amxy=0$$

la quale ha per tangenti nel punto doppio le

(8) $$bx-ay=0 \qquad \text{e} \qquad x=0$$

cioè la VC e la perpendicolare condotta da V alla VO. Perciò se $a \gtrless 0$, $b \gtrless 0$, essendo reali e distinti le (8), la (7) sarà nodale e perciò inversa d'iperbole, se $a=0$ le (8) sono coincidenti e quindi la (7) avrà un regresso (inversa di parabola), se poi è $b=0$ la cubica evidentemente si scinde in una retta ed un circolo.

Può notarsi che l'assintoto reale della (7) è perpendicolare all'assintoto reale della (4).

(*) Nell'enunciato della Questione 423 (pag. 200, linea 4ª) invece di V deve leggersi O.

(V. RETALI).

424. *Due cerchi tangenti nel punto V si corrispondono nella inversione di Hirst avente per conica dei punti uniti il punto-circolo V, e per polo l'altro centro di similitudine dei cerchi dati. Si desidera una dimostrazione analitica.*

RETALI.

Risoluzione del Dott. Ing. C. Merizzi di Udine.

Siano C, C′ i due cerchi, O, O′ i loro centri, r, r' i raggi, e sia P il polo della inversione. Come assi cartesiani prendiamo la retta dei centri e la tangente comune in V. Al punto mobile $M \equiv (x_0, y_0)$ del cerchio C corrisponde nella inversione il punto della retta PM che è coniugato armonico di P rispetto al punto-circolo V, ossia il punto comune alla retta PM, ed alla polare di M rispetto a V. La retta PM, essendo $P \equiv \left(0, \frac{2rr'}{r+r'}\right)$ ed $M \equiv (x_0, y_0)$ ha per equazione

$$(1) \qquad \frac{x - x_0}{x_0 - \dfrac{2rr'}{r+r'}} = \frac{y - y_0}{y_0}.$$

Essendo $x^2 + y^2 = 0$ l'equazione di V, quella della polare di M è

$$(2) \qquad x_0 x + y_0 y = 0.$$

Se tra la (1), la (2) e l'equazione del cerchio C,

$$(3) \qquad x_0^2 + y_0^2 = 2r x_0$$

eliminiamo x_0, y_0, otteniamo l'equazione della curva corrispondente a C, e che si trova difatti essere

$$x^2 + y^2 = 2r' x$$

cioè quella del cerchio C′.

Altra risoluzione del Dott. Prof. G. Cardoso-Laynes.

425. *Trovare l'inviluppo delle iperboli passanti per un punto O, e aventi un assintoto dato* a *e per secondo assintoto una tangente variabile di un cerchio passante per* O.

RETALI.

Risoluzione del Dott. Ing. C. Merizzi di Udine.

Assumendo come assi cartesiani il diametro e la tangente al cerchio, passanti per O, e chiamando r il raggio del cerchio stesso, saranno rispettivamente

$$x \cos\alpha + y \,\mathrm{sen}\,\alpha - p = 0$$
$$(x + r)\cos\omega + y \,\mathrm{sen}\,\omega - r = 0$$

le equazioni dell'assintoto fisso, e di quello mobile. Si ottiene l'equazione della iperbole, scrivendo che il prodotto delle distanze del suo punto corrente (X, Y) dagli assintoti è uguale all'analogo prodotto delle distanze del punto O, cioè

$$[\mathrm{X}\cos\omega + \mathrm{Y}\,\mathrm{sen}\,\omega - r + r\cos\omega]\,[\mathrm{X}\cos\alpha + \mathrm{Y}\,\mathrm{sen}\,\alpha - p] = pr - pr\cos\omega,$$

ossia

$$(1) \quad \cos\omega[\mathrm{X}(\mathrm{X}\cos\alpha + \mathrm{Y}\mathrm{sen}\alpha - p) + r(\mathrm{X}\cos\alpha + \mathrm{Y}\mathrm{sen}\alpha)] + \mathrm{sen}\,\omega[\mathrm{X}\cos\alpha + \mathrm{Y}\mathrm{sen}\alpha - p]\mathrm{Y} = r[\mathrm{X}\cos\alpha + \mathrm{Y}\,\mathrm{sen}\,\alpha].$$

Derivando la (1) rispetto ad ω, abbiamo

$$(2) \quad -\mathrm{sen}\,\omega[\mathrm{X}(\mathrm{X}\cos\alpha + \mathrm{Y}\mathrm{sen}\alpha - p) + r(\mathrm{X}\cos\alpha + \mathrm{Y}\mathrm{sen}\alpha)] + \cos\omega[\mathrm{X}\cos\alpha + \mathrm{Y}\mathrm{sen}\alpha - p]\mathrm{Y} = 0.$$

Per avere l'equazione dell'inviluppo, occorre eliminare ω tra la (1) e la (2): a tal uopo, quadrando e sommando si ha, dopo le debite riduzioni

$$(\mathrm{X}\cos\alpha + \mathrm{Y}\mathrm{sen}\alpha - p)[\mathrm{X}^3\cos\alpha + \mathrm{Y}^3\mathrm{sen}\alpha + \mathrm{X}^2\mathrm{Y}\mathrm{sen}\alpha - \mathrm{X}\mathrm{Y}^2\cos\alpha + \mathrm{X}^2(2r\cos\alpha - p) - p\mathrm{Y}^2 + 2r\mathrm{X}\mathrm{Y}\,\mathrm{sen}\,\alpha] = 0.$$

Cioè l'inviluppo è una quartica, che si spezza in una retta (l'assintoto dato a) ed in una cubica, la quale ha un punto doppio nell'origine O, perchè la sua equazione manca dei termini di 1° grado e del termine noto, e perciò è razionale. (*)

426. *Da un punto fisso* O *nel piano di una iperbole si conduce ad un punto variabile* P *della curva un raggio* g *segante un assintoto* a *nel punto* A: *poi a partire da* A *ed in senso opposto a quello del segmento* $\overline{OP}$ *si stacca su* g *il segmento* $\overline{AP'} = -\overline{OP}$.

Trovare il luogo del punto P'.

RETALI.

Risoluzione del Dott. Ing. C. Merizzi di Udine.

Presi come assi cartesiani gli assintoti della data iperbole, sia $O \equiv (m, n)$, $P \equiv (x_0, y_0)$, $P' \equiv (x, y)$.

Poichè il raggio g intercetta sull'asse delle x (assintoto a) un segmento che si trova essere eguale a $\dfrac{my_0 - nx_0}{y_0 - n}$, abbiamo

$$x = \frac{my_0 - nx_0}{y_0 - n} + m - x_0 \tag{1}$$

$$y = n - y_0 \tag{2}$$

Se tra le (1), (2) e la equazione della iperbole

$$x_0 y_0 = k^2$$

eliminiamo x_0, y_0, troviamo

$$(x - 2m)\, y = k^2 - mn,$$

che è l'equazione del luogo del punto P'. Questo luogo è dunque una iperbole, avente per assintoti a, ed una parallela all'altro assintoto della iperbole data. (**)

427. *Una retta* h *è simmetrica di un assintoto di una iperbole* H^2 *rispetto ad un punto* O *della curva, ed una trasversale arbitraria* g *condotta per* O *sega* h *in* P, *e di nuovo la curva in* P'. *Dimostrare che il luogo del centro del segmento* PP' *è una retta equidistante da* O *e dall'altro assintoto.*

Concludere la soluzione dei due seguenti problemi. Costruire la iperbole: 1° dati un assintoto a, *e tre punti* O, P', Q'; *2° dati un assintoto* a, *la direzione dell'altro assintoto, e due punti* O, P'.

RETALI.

Risoluzione del Dott. Ing. C. Merizzi di Udine.

Detto a l'un assintoto, e b l'altro sia $A \equiv ag$, $B \equiv bg$.

Per una nota proprietà della iperbole sarà $\overline{OA} = BP'$, ed essendo $\overline{OA} = \overline{PO}$, sarà $PO = BP'$; ossia il centro M del segmento PP' è pure centro del segmento OB. Ne consegue che, rotando la g intorno ad O, il punto M descrive una retta equidistante da O e da b.

Risolviamo ora i due problemi proposti.

1°. Condotta la retta OP', seghi a in A: preso su OP' il segmento $\overline{P'B}$ uguale

(*) Facendo rotare gli assi coordinati da un angolo α attorno ad O, e denotando con m la retta equidistante da O ed a, si trova che lo inviluppo cercato è la trasformata del cerchio simmetrico al dato rispetto ad O, nella inversione avente O per polo, e per conica doppia quella formata da m e dalla retta all'infinito. Cioè una inversa di conica rispetto a un suo punto.

(RETALI).

(**) Se m è la retta equidistante da O ed a, il luogo cercato è la trasformata della iperbole data H^2 nella inversione avente O per polo e per conica doppia quella formata da m e della retta all'infinito. — Cioè una iperbola passante pel punto proprio ove H^2 è segata da m, e avente per assintoti a e la retta simmetrica, rispetto ad O dell'altro assintoto della iperbole data.

(RETALI).

e di senso opposto ad $\overline{OA}$, B è un punto dell'assintoto b: analogamente condotta la OQ' a segare a in A' e preso su OQ' il segmento $\overline{Q'B} = -\overline{OA'}$, B' è un secondo punto dell'assintoto b, il quale è così determinato.

2°. Come precedentemente, trovato il punto B, e per esso condotta la parallela alla direzione data, quella è il secondo assintoto b.

Trovati gli assintoti, la iperbole è facilmente costruibile.

Altra risoluzione del sig. A. Maroni, studente nella R. Scuola normale superiore di Pisa.

429. *La sola superficie di rotazione, le cui linee di curvatura sono geodetiche è il cilindro circolare.*

CARDOSO-LAYNES.

Risoluzione del Prof. Castellano di Torino.

Della superficie di rotazione non sferica le sole linee di curvatura sono i meridiani ed i paralleli. I meridiani sono evidentemente geodetiche della superficie; perchè lo siano anche i paralleli è necessario che sia zero l'angolo che la normale al meridiano in un punto qualunque P fa col parallelo passante per P, angolo uguale a quello che la tangente al meridiano fa coll'asse di rotazione. Se assumiamo questo asse come asse delle z, e diciamo r il raggio del parallelo, sarà:

$$\frac{dr}{dz} = 0$$

quindi

$$r = \text{costante}$$

equazione del cilindro circolare retto.

Altre risoluzioni dei Prof. Candido e Piccioli e del sig. Finzi, studente nella R. Università di Padova.

430. *Sia* P *un punto mobile di una retta* r *e* PP_1, PP_2 *le perpendicolari condotte da* P *a due rette* r_1, r_2 *complanari di* r: *l'inviluppo della retta* P_1P_2 *è una parabola.*

CARDOSO-LAYNES.

Risoluzione del Prof. Castellano, del Dott. Ing. C. Merizzi e del sig. Zeno Giambelli, studente della R. Università di Torino.

Le punteggiate r_1, r_2, simili alla r, sono simili tra loro, e quindi la retta P_1P_2 che unisce due punti corrispondenti inviluppa una parabola.

È fuoco di questa parabola il piede della perpendicolare condotta dal punto d'incontro delle r_1, r_2 sulla r; sono tangenti le rette stesse r_1, r_2 e le altezze ad esse corrispondenti nel trilatero r, r_1, r_2, quindi si costruisce facilmente vertice, podoria, direttrice, ecc.

Il teorema sussiste anche nel caso più generale che le rette PP_1, PP_2, anzichè normali ad r_1, r_2, siano rispettivamente parallele a due direzioni date.

Altre risoluzioni dei Prof. Candido e Piccioli e del sig. A. Maroni.

Osservazioni del Prof. Castellano.

I. Ne consegue il *Teorema* " In ogni triangolo i piedi delle perpendicolari abbassate dai piedi di una altezza sugli altri due lati e sulle altre due altezze, sono in linea retta ".

[*Ne propongo la dimostrazione ai lettori del Supplemento*].

II. In un triangolo $A_1A_2A_3$ due lati A_1A_2, A_1A_3 colle altezze corrispondenti A_1H_1, A_2H_2 inviluppano una parabola Π_1 di fuoco H_1. Siano Π_2 e Π_3 le altre due parabole analoghe aventi per fuochi i punti H_2, H_3. Sono tangenti comuni alle Π_1

e Π_2 il lato $A_1 A_2$ e l'altezza $A_3 H_3$. La terza tangente comune è la retta che unisce il punto medio M_3 di $A_1 A_2$ col punto medio N_3 di $A_3 H$, essendo H l'ortocentro. Infatti applicando il noto teorema che la circonferenza circoscritta al triangolo formato da tre tangenti comuni a Π_1 e Π_2, passa per H_1 H_2, e siccome passa anche per H_3, punto d'incontro delle due tangenti comuni note, sarà la circonferenza dei nove punti. Essa incontra le rette $A_1 H_1$, $A_3 H_3$ precisamente nei punti M_3, N_3, e la retta $M_3 N_3$ sarà la terza tangente comune cercata.

Ne segue che le tangenti comuni alle Π_2 e Π_3 sono le rette $A_2 A_3$, $A_1 H_1$, $M_1 N_1$, e le tangenti comuni alle Π_3, Π_1 sono le rette $A_3 A_1$, $A_2 H_2$, $M_2 N_2$.

I punti di contatto di ciascuna di queste tre parabole colle rispettive tangenti sono facili a determinarsi, e mi pare non privo di interesse lo studio della loro distribuzione nel triangolo.

QUISTIONI PROPOSTE

431. Sono dati in un piano un punto O, una retta m, la cui distanza da O è k, e un cerchio C^2 di raggio r passante per O, e col centro sulla perpendicolare condotta da O ad m: se sopra un raggio g variabile del fascio O segante di nuovo C^2 in P, prendiamo il punto P′ simmetrico di P rispetto a (gm), il luogo di P′ è una *concoide Slusiana;* dimostrare che questa concoide è la inversa, rispetto a un vertice, di una conica centrale la cui eccentricità è $\sqrt{\frac{r}{k}}$. Per $r = k$ si ha la *cissoide di Diocle*, per $r = 2k$ la *strofoide retta,* per $r = 4k$ la *trisettrice di Mac-Laurin.*

432. Al grande asse OA di un'ellisse E^2 il cui piccolo asse è $OA : \sqrt{3}$, e in un punto M tale che $\overline{OA} = 8.\overline{OM}$ si conduce la perpendicolare m: se un raggio arbitrario g, condotto dal vertice O seghi ulteriormente E^2 in P, il luogo del punto P′ di g, simmetrico di P rispetto a (gm) è un *folium di Cartesio,* col punto doppio in O. Costruire la tangente in P′ e dimostrare le principali proprietà note della curva, partendo dal nuovo modo di generazione indicato.

433. Dati in un piano un punto O e due rette parallele m, n equidistanti da esso, sopra un raggio variabile del fascio O, facciamo corrispondere a un punto P, il punto P′ separato armonicamente da P mediante m, n: dimostrare che, nella trasformazione quadratica involutoria così definita,

1° le coniche tangenti in O alla bisettrice b della striscia (m, n) si trasformano in cubiche razionali aventi la retta all'infinito per tangente stazionaria;

2° i cerchi passanti per O, in cubiche paraboliche aventi per tangenti nel punto doppio O le rette isotrope;

3° a cerchi passanti per O e coi centri su b corrispondono *cubiche miste*, e a cerchi passanti per O ortogonali ai precedenti *cubiche duplicatrici*;

4° alle parabole col vertice in O e tangenti a b corrisponde un fascio di *parabole di Neil*; alle parabole (d'*Apollonio*) aventi per asse la normale condotta da O ad m, corrispondono quartiche razionali cuspidate in O, aventi la retta all'infinito per tangente tacnodale *(quartiche piriformi, toupies)*

5° a coniche centrali con un vertice in O e un'asse parallelo a m, corrispondono *parabole nodate di Newton*; in particolare, a iperboli equilatere *folii parabolici*.

434. Nella inversione considerata nella quistione precedente:

1° a iperboli equilatere col centro in O e un'asse parallelo ad m corrispondono *lemniscate di Gerono (huits)*; ad iperboli equilatere di centro O con un assintoto parallelo ad m, corrispondono *parabole cubiche*;

2° a una *cubica mista* col punto doppio in O e l'asse di simmetria parallelo ad m, corrisponde una *cissoide di Diocle*;

3° a una *strofoide retta* col nodo in O e l'assintoto parallelo ad m corrisponde la inversa rispetto ad O di un *trifolium retto*;

4° alla *kreuzcurve* col centro in O e un'asse parallelo ad m corrisponde un *cappa*, diretto verso il punto (m, n).

N. B. L'eq. della *cubica mista* (*) è $x^2 + y^2 + 2xy^2 = 0$.
" della *kreuzcurve* è $x^2 + y^2 = a^2x^2y^2$.
" del *cappa* è $(x^2 + y^2)x^2 = a^2y^2$.

Nelle inversioni rispetto ad O (trasf. per raggi vettori reciproci) il raggio del cerchio doppio è 1.

V. R.

435. Sono dati in un piano, una curva algebrica C^p, di grado p, un punto O e due rette parallele m, n equidistanti da esso: una tangente variabile t di C^p seghi m in M ed n in N: determinare lo inviluppo delle parabole circoscritte al triangolo OMN e aventi gli assi paralleli ad m.

Esaminare i casi particolari in cui C^p è

a) una conica;

b) una cissoide di Diocle con la cuspide in O e l'assintoto reale perpendicolare ad m;

c) una parabola cubica col centro sulla bisettrice della striscia (m, n) e la tangente stazionaria perpendicolare ad m;

d) una strofoide retta col nodo in O e l'assintoto reale parallelo ad m.

RETALI.

436. Si riducano razionali le seguenti equazioni:

a) $$x_1^{\frac{1}{3}} + x_2^{\frac{1}{3}} + x_3^{\frac{1}{3}} = 0,$$

b) $$x_1^{\frac{1}{4}} + x_2^{\frac{1}{4}} + x_3^{\frac{1}{4}} = 0,$$

c) $$x_1^{\frac{1}{3}} + x_2^{\frac{1}{3}} + x_3^{\frac{1}{3}} + x_4^{\frac{1}{3}} = 0.$$

LAZZERI.

(*) Studiata dai sigg. Henkel (Inaug. Dissert., Marburg, 1882) e G. de Longchamps (J. S. 1886, pp. 245-247): la denominazione è del secondo.

437. In un tetraedro qualunque $A_1A_2A_3A_4$ si indichino con O il centro della sfera circoscritta, con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ le facce e con a_{ij} la retta condotta nella faccia α_i dal centro del cerchio circoscritto perpendicolarmente alla mediana partente da A_j.

Dimostrare che le sei rette: (*)

$$O(a_{12}, a_{21}),\ O(a_{13}, a_{31}),\ O(a_{14}, a_{41}),\ O(a_{23}, a_{32}),\ O(a_{24}, a_{42}),\ O(a_{34}, a_{43})$$

sono gli spigoli di un angolo tetraedro completo, il cui triedo diagonale è formato da 3 piani perpendicolari alle congiungenti i punti medii delle coppie di spigoli opposti. GALLUCCI.

438. Sono dati in un piano due punti A, A', una retta e un punto O su questa. Preso un punto P del piano, si conducono le rette AP, A'P che incontrino la retta passante per O rispettivamente nei punti H, K. Dimostrare che il luogo del punto P tale che il prodotto OH $\times$ OK sia costante è una conica passante per A e A'. CELESTRI.

439. Se $\dfrac{k(1-z)^{k-1}}{(1-z)^k - a} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1}$ con k numero intero è positivo, ed a è numero qualunque diverso da 1, si ha: $\sum_{r=1}^{k} e^{\frac{z}{1-a_r}} = K + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_n}{\underline{|n}} z_n$, dove $a_1, a_2, \ldots. a_k$ sono le k radici k^{esime} di a.

440. Se $p_1, p_2, \ldots. p_k \ldots.$ sono *tutti* i numeri primi, l'uno escluso, ordinati in modo qualunque ed è $r > 1$ e $S_r = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^r}$, si ha:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k^r} \prod_{s=1}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{p_s^r}\right) = 1 - \frac{1}{S^r}.$$

VITALI.

BIBLIOGRAFIA

R. MAZZOLA. — *Elementi di Aritmetica* (Razionale). — 5ª edizione. Livorno, Raff. Giusti editore, 1898, L. 2,80.

Non è il caso di spendere molte parole per annunziare la recente ristampa di questo Trattato Elementare d'Aritmetica Teorica favorevolmente noto ai colleghi delle nostre scuole secondarie classiche e tecniche: il suo migliore elogio sta nel fatto, che in pochi anni ha già vista la quinta edizione, perchè un successo così rilevante di stima non può disgiungersi da meriti intrinseci.

(*) Con O(a, b) si indica la retta che passa per O e si appoggia alle due rette a, b.

Basta leggere poche pagine di questa Aritmetica per convincersi che è stata pensata con serietà di intenti e curata con amore nella distribuzione della materia, nel coordinamento delle teorie, nella forma dell'esposizione, in tutti i particolari. Evidentemente il Ch. Autore ha lunga pratica delle esigenze e delle difficoltà dell'insegnamento dell'Aritmetica Teorica per giovani, che s'iniziano allo studio delle Matematiche.

La saggia parsimonia nello sviluppo delle teorie e nell'esposizione dei teoremi; la precisione delle definizioni; l'esattezza e la limpidità delle dimostrazioni; l'astensione generalmente osservata da vani cicalecci (non rari anche in Trattati di chiarissimi Autori) che vorrebbero sostituire gli schiarimenti orali dell'insegnante, mentre invece impediscono all'alunno di vedere nettamente le proprietà fondamentali; la mancanza di novità non ancora assodate bene e non ancora rese abbastanza piane per intelligenze giovanili; l'uso accorto dei simboli letterali: tutti questi pregi ben a ragione hanno persuaso non pochi colleghi a preferire gli *Elementi* del Mazzola al classico Trattato del Bertrand, di cui però essi seguono le linee generali e ricordano molte dimostrazioni e del quale i primi capitoli sono indubbiamente insufficienti anche nelle edizioni rivedute degli ultimi anni.

Davanti a siffatte qualità degli *Elementi* del Mazzola — non comuni in libri elementari, benchè negli ultimi anni si sia verificata fra noi una fioritura di Aritmetiche Razionali anche buone od abbastanza buone —, i rilievi delle poche mende facilmente riparabili è giusto indietreggino: d'altronde, potrebbero essere in parte consigliati da vedute individuali, cui non è possibile aver riguardo interamente.

Tuttavia, non vogliamo tacere poche osservazioni d'indole essenzialmente didattica, delle quali il Ch. A. terrà il conto che crederà nella nuova edizione, che gli auguriamo prossima.

Sarebbe bene comprendere nella teoria della divisibilità un breve cenno sulle congruenze, delle quali l'A. dà solo la definizione in una noticina a pag. 65: fra noi, dopo Amanzio, anche Arzelà ed Ingrami, Gazzaniga, Biasi, Chierici, ecc. si sono giovati del concetto di numeri congrui nei loro Trattati elementari. Non crediamo plausibile, specialmente sotto il punto di vista didattico, il divisamento di scindere la teoria dell'estrazione di radice per ripartirla fra' numeri interi ed i frazionari: evidentemente, dimostrazioni inerenti all'estrazione di radice quadrata dai numeri interi possono presentare difficoltà a giovani, che non hanno ancora appreso le teorie della divisibilità, dei numeri primi ecc. e quindi non sono abbastanza svelti nello studio di una dimostrazione piuttosto laboriosa. Non ci pare conveniente porre, sotto l'unico titolo *elevamento a potenza*, i teoremi sui prodotti di più fattori e quelli sulle potenze. Tutte le lunghe enunciazioni delle regole pratiche (num. 18, 28, 37, 61 ecc.) che gli alunni conoscono già per lo studio dell'Aritmetica pratica, possono essere sempre omesse od accennate di volo: e così possono essere omessi quei *cappelli*, che l'A. premette alle definizioni per chiarirle ovvero mostrarne l'opportunità o la necessità, perchè essi sono esclusiva pertinenza dell'esposizione orale dell'insegnante.

Senza dubbio, in questi *Elementi*, soltanto pochissime cose potrebbero essere presentate più sinteticamente (ad es. n. 66, osservaz. a pag. 73, n. 115, n. 175), affinchè gli alunni debbano leggere a casa unicamente quanto è necessario per fissare bene ed approfondire ciò che hanno appreso in classe. Solo pochi punti hanno forse bisogno di maggiori chiarimenti e pochi altri di maggiore estensione: fra' primi segno l'ultimo periodo del penultimo comma della pagina 61, fra' secondi i preliminari (ove però non è a desiderarsi l'eccesso di materia indigesta per principianti, che si deplora in qualche Trattato).

Per le esigenze didattiche, affinchè non rimanga nelle intelligenze immature dei giovanetti il benchè minimo dubbio (dai dubbi è talora generata l'avversione alla materia), è necessario che, specialmente nei primi teoremi:

l'enunciato del teorema traduca colla maggior precisione possibile, nello stesso ordine e colla maggior chiarezza tutte le operazioni fatte sulle lettere: sotto questo rapporto, il corollario I del teorema n. 16 è difettoso;

non si incorpori in una dimostrazione qualche proprietà — forse molto interessante, per quanto evidente —, che può così sfuggire all'alunno; il che avviene nel teorema n. 41;

sia marcata bene (sovrattutto nei primi capitoli) l'applicazione dei singoli teoremi e sieno quindi fatti meticolosamente tutti i passaggi, perchè lo studioso vegga il nesso logico di tutte le parti della dimostrazione e non si abitui a fare salti: ad es., in ciascuna delle proprietà *a)* e *b)* del n. 41 manca un passaggio. Certo, non è necessario che i singoli passaggi sieno preceduti dall'enunciazione del teorema, sul quale si basano: basterà citare il numero di questo, nello scrivere la espressione trasformata. Anzi sarebbe bene che venissero costantemente citati i numeri dei teoremi che si applicano, anche per affermare la necessità che l'alunno ogni volta riveda l'enunciato delle proprietà che permettono i passaggi.

Due minime osservazioni per la forma dell'esposizione. È preferibile dire *condizione necessaria e sufficiente*, anzichè *la condizione* ecc. L'A. usa sempre la parola *alterazione*, invece di *variazione:* non sarebbe meglio conservare il concetto naturale che una qualunque operazione eseguita su di una formola *altera* la composizione della formola, ossia l'aggruppamento delle lettere in essa contenute, per quanto il valore del numero generale da essa rappresentato non *varii?*

Gli esercizi (228 sino alla teoria delle frazioni decimali, compresi quelli sulle radici) sono bene scelti e graduati: tale raccolta però sarebbe bene fosse un po' più ricca, specialmente per le operazioni fondamentali; s'intende, devono essere sempre esclusi quelli, che possono presentare non lievi difficoltà al principiante, dei quali si trovano non pochi esempi negli Elementi di Bertrand e d'Amanzio.

Finora, l'Aritmetica Teorica è, per l'insegnamento tecnico, prescritta al primo biennio dell'Istituto, ove dall'insegnante può essere acconciamente fusa coi preliminari della cosiddetta Algebra Elementare (per formare l'Aritmetica Generale) e così è più in là distribuita opportunamente nel corso biennale di Matematiche Elementari; mentre, nelle scuole classiche, lo studio dell'Aritmetica Razionale appartiene al programma del Ginnasio Superiore e precede quindi l'insegnamento dell'Algebra. Augurandoci che anche in queste ultime scuole sieno adottate le saggie disposizioni vigenti per gli Istituti Tecnici, tanto più che l'insegnamento dell'Aritmetica Generale e dell'Algebra potrebbe essere impartito in un corso quadriennale (da IV ginn. al 2° anno di Liceo), troviamo intanto, in questo libro del prof. Mazzola (ed in molti congeneri), alcune teorie non prescritte, per le scuole nelle quali può essere adottato: esse sono l'estrazione di radice, la teoria generale dei numeri irrazionali (che, secondo noi, non è a posto neanche in un corso iniziale d'Aritmetica Generale e d'Algebra Elementare), il sistema metrico, le proporzioni. Se, in una nuova ristampa, il Ch. A. sopprimesse queste teorie (95 pagine), come hanno fatto nel loro recente Compendio Bevilacqua e Martini e come avevano già fatto Panizza, Testi ed altri, potrebbe offrire ad un prezzo ancor più modico un libro veramente utile alle nostre scuole secondarie. S. Ortu Carboni.

C. Burali-Forti e A. Ramorino. — *Aritmetica e norme per l'insegnamento nelle scuole elementari* ad uso della 2ª e 3ª delle scuole normali. — *Elementi di algebra* ad uso della 3ª classe tecnica. (*)

Il Sig. C. Pacchiani critica nel Fasc. V, Anno XIII del *Periodico di Matematica* la parte didattica da me scritta nel libro *Aritmetica e norme per l'insegnamento nelle scuole elementari*. Non è mio sistema discutere le questioni didattiche, precisamente come non discuto tante altre *opinioni:* ma l'A. citando non convenientemente alcune parti del libro e altre non citandone, fa, con le sue osservazioni, apparire il mio lavoro sotto una forma così diversa dal vero, che sono costretto a confutare con prove *scientifiche* e di *fatto* quanto Egli afferma.

" È bene notare subito che fin qui, nella parte teorica, si parla di numeri *astratti* (l'A. mi perdoni se per comodità uso ancora una vieta distinzione), ... „: così l'A. (pag. 202). Non vi è nulla da perdonare, ma solo da fare alcune osservazioni, perchè ciò che per l'A. sembra essere una semplice questione di nome, diviene poi, come vedremo, il cardine della Sua critica. — Siccome il termine *vieto* non può avere per l'A. il significato di *stantio, rancido* che si applica alle uova e alle carni salate, vorrà significare *invecchiato:* ora i termini composti *numeri astratti, numeri concreti* sono da escludersi, non perchè *vecchi*, ma perchè *errati*. Quando diciamo " *a* è un *fiore bianco* „ intendiamo dire che *a* appartiene ad un tempo alla classe *fiore* e alla classe delle *cose bianche:* per analogia mi sarà lecito affermare che la frase " *a* è un *numero astratto* „ esprime che *a* appartiene ad un tempo alla classe *numero* e alla classe delle *cose astratte*. In virtù, ad es., dei postulati del Dedekind, sappiamo che cosa voglia dir *numero:* resta ora all'A. di *definire* la classe delle *cose astratte* e dirci quali sono le proprietà dei *numeri astratti*. E se gli verrà fatto di dimostrare che ogni numero è una cosa astratta, avrà, per un noto principio di logica, *numero* = *numero astratto:* e se dopo ciò vorrà ancora dire che *concreto* = *non astratto*, anche in questo caso la logica Gli dirà che *non esistono numeri concreti*, cioè che *numero concreto* = *nulla*.

L'A. così continua: " ..... quindi pare che fin dai primi giorni si debba abituare i bimbi a considerare i numeri interi in sè soli, cioè indipendentemente dalle grandezze che possono rappresentare „. Pare, ma non è, perchè a pag. 12 (dove *cominciano* le norme didattiche), 3º capoverso, è detto: " In primo luogo abitui i bambini a contare degli oggetti ..... „ e quindi, per mio conto, anche " i sindaci che vogliono fare delle economie „ non possono sopprimere i " tanti ninnoli immaginati per invitare i bambini a contare „. Pare, ma non è, anche perchè a pag. 79, dico, nella parte didattica: " Le nozioni che ora abbiamo acquistate relativamente alle grandezze ci permettono di far vedere come sia *non solo utile* ma *necessario* introdurre di pari passo con i numeri, e le loro operazioni, un potente ausiliario per l'insegnamento elementare: appunto il concetto di grandezza, che, esposto sotto la sua forma più comune e intuitiva, fa vedere per *quale scopo pratico* si introducono i numeri e le loro operazioni, e quindi permette di poter *procedere dal concreto all'astratto* „. L'A. vede bene che anche io la penso come quei maestri,

(*) Avremmo volentieri risparmiato ai lettori del *Periodico* le uova, le carni salate e i fiori bianchi del Prof. Burali-Forti, con i quali l'A. si propone di distruggere le critiche fatte nel numero precedente dal Prof. Pacchiani al libro *Aritmetica e norme per l'insegnamento elementare.*

Lo pubblichiamo, cedendo alle insistenti richieste dell'autore con una sola osservazione. L'articolo del Pacchiani si poteva riassumere con queste parole: Il libro è buono scientificamente, ma didatticamente è sbagliato. — La risposta non è una risposta, perchè non dimostra la bontà del libro dal punto di vista didattico.

(*Nota della redazione*).

contrari a quei tali sindaci, che Egli dice, " a ragione seguaci del principio pedagogico *procedere dal concreto all'astratto* ".

L'A. è tanto convinto che " si ha una contradizione fra le note del 1° cap. e quelle del 3°..... " che di quest'ultimo cap. cita il seguente periodo (pag. 96): " non si devono, di regola, adoperare i segni $\frac{m}{n}$ isolati, ma bensì tenerli sempre uniti ad una grandezza, ossia considerare gli enti $\frac{m}{n}$ A ". E questo è in contradizione con quanto dico a pag. 79, a pag. 12 e in tutte le norme didattiche? È evidente che la confusione fatta dall'A. tra *vieto* e *errato* lo ha condotto a questa critica sbagliata: e dico evidente perchè la parte principale della critica (pag. 202) si apre con i *numeri astratti* e si chiude con i *numeri che stanno a rappresentare grandezze discrete:* ciò dimostra anche che l'A. non ha un'idea esatta della differenza fra *numero* e *grandezza.*

Errori grossolani come quelli che mi attribuisce l'A. si possono fare e si fanno, ma io non sono solito a farli.

Per finire osservo ancora che l'A. dice a pag. 201 che io " mescolo discussioni e elementi della Scienza ". Se il termine *discussione* sta per indicare che nelle mie note didattiche vi sono delle *affermazioni con dimostrazione* e vi sono *segnalati certi comuni errori scientifici e didattici,* se il termine *mescolo* sta per indicare che ho *intercalate* le norme didattiche nei punti della parte scientifica ove mi parevano in posto conveniente, allora tutto va bene: ma se la cosa è altrimenti, sono dolente dover dire all'A. che Egli fa confusione tra il libro che critica e le mie *Note scientifiche* ...... (*), le quali, del resto, Egli stesso dice di vedere *emulsionate* con le mie *Lezioni di Aritmetica pratica,* per formare l'*Aritmetica e norme*.....

Arezzo, 30 Agosto 1898.

BURALI-FORTI CESARE.
(Torino, Accademia Militare)

C. Z. REGGIO. — *Elementi di Geometria e Trigonometria* ad uso degli Istituti tecnici. Torino, Paravia.

Il prof. Reggio ha inviato al direttore del *Periodico* un lungo articolo in risposta a quello del prof. Visalli (pubblicato nel n. preced.) sugli *Elementi di geometria e trigonometria* dello stesso prof. Reggio.

Crediamo inutile pubblicare la prima parte di tale articolo nella quale l'A. si lamenta che il Visalli non abbia voluto discutere le innovazioni da lui introdotte nel suo libro; per debito d'imparzialità pubblichiamo invece la seconda parte nella quale l'A. risponde direttamente alle critiche del prof. Visalli.

Ma vediamo le sue censure.

Anzitutto per la sua esclamazione *del foglio di carta* vegga il lettore le *mie* parole a pag. 29, n. 28.

Le definizioni di *perimetro* e *strato* che il prof. Visalli riporta virgolando, non so dove le abbia pescate; non sono le mie di pag. 18 e 67.

Sulla contraddizione circa la definizione dell'angolo, nella quale egli mi dice

(*) *Note scientifiche e critiche alle lezioni di Aritmetica pratica.* Torino, G. B. Petrini, 1897.