

quella medesima dell'istituto tecnico e del liceo. Quest'ultima teoria, che nella scuola normale è tra quelle dell'aritmetica generale, nell'istituto e nel liceo è stata assegnata all'algebra come applicazione della teoria delle equazioni e delle funzioni; ed in questo posto la teoria stessa può ricevere un più alto grado di generalità.

25. Nell'aritmetica generale, da insegnarsi anch'essa, secondo me, a base essenziale di grandezza, come i procedimenti dimostrativi debbono aver carattere di generalità e di rigore scientifico, così sarà opportunissima da bel principio la rappresentazione di numeri per mezzo di lettere.

Dissi *a base essenziale di grandezza*, riferendomi soprattutto, s'intende, a ragioni di convenienza didattica. Un'aritmetica, dirò così, astratta, in cui alla teoria delle operazioni sia dato un fondamento puramente analitico, sarà pregevole come esercizio logico e come speculazione scientifica, ma riuscirebbe una di quelle scienze che Francesco Bacone da Verulamio nel *Novum organum* chiama appunto *scientiae speculatione pulchrae, sed operae inactivae, inactivae*, intendiamo, nel rispetto didascalico ed avuto riguardo al primo periodo dell'insegnamento matematico razionale.

L'uso di simboli o lettere per le rappresentazioni di numeri è, ripeto, opportunissimo, tranne il caso, s'intende, di dimostrazioni facili per sè, e nelle quali basti discorrere in termini generici per far comprendere nella generalità sua la dimostrazione di un teorema. Del resto, l'introduzione dei simboli non può spaventare l'allunno, perchè è negli usi quotidiani della vita e delle amministrazioni che, quando si voglia porre una questione sotto aspetto generico e darne una soluzione comprensiva di tutti i casi particolari ad essa subordinati, non si nominano mai oggetti determinati o persone di nostra immediata conoscenza, le cui qualità particolari potrebbero far perder di mira il carattere generale della questione; e bensì, dovendo, ad esempio, parlar di persone, sogliamo dire Tizio, Caio, Sempronio.

e)

26. Gli elementi di algebra sono assegnati soltanto alla classe 2^a liceale ed alla 3^a d'istituto tecnico, e con un'unica estensione e qualità di argomenti, salvochè alla teoria della proporzionalità nel liceo si dà un maggior grado di generalità, facendo derivare la proporzionalità per rapporto dalla proporzionalità per ragione.

27. Alla scuola normale è sottratta quell'algebretta di cui già avemmo occasione di far cenno (IV, 12), assegnata dal vigente programma ufficiale alla classe 1^a; e spero di non averne rimprovero da parte dei professori. Essi converranno, credo e spero, con me che insegnare quel tantino di algebra che vuole il programma ed insegnarlo a quel modo e tra quelle strettoie, non può non turbare e inquinare lo spirito di razionalità che deve informare l'intero insegnamento matematico della scuola normale. D'altra parte si avrebbero a superare difficoltà non lievi per dare a modo la teoria dei numeri negativi, e per somministrare in tutto il resto concetti esatti e pieni; e si

avrebbero da superare a solo scopo di mettere l'allievo maestro in condizione di poter risolvere problemi che, tradotti in calcolo, dieno luogo ad equazioni di primo grado ad una sola incognita. Ora, tutto considerato, mi par proprio che non franchi la spesa. Ma vedete, dicono alcuni: frequentemente capitano problemi d'aritmetica a risolvere i quali si richiede un certo acume, non proprio di tutti, e uno sforzo considerevole d'intelletto, mentre riesce facile e spedito risolverli se ci adoperiamo subito a tradurli in equazione. Verissimo questo, non lo nego; ma c'è un'importante riflessione a fare. Io dico cose che ognuno di voi m'insegna, lo so, ma debbo dirle, o meglio, ricordarle, per giustificare le mie proposte, non per altro. Il principio d'uguaglianza è un principio organico che vivifica e domina ogni sorta di conoscenze, empiriche o razionali, riguardanti la grandezza. L'uguaglianza nelle sue due specie di uguaglianza identica e di equazione comprende da una parte le leggi e i modi di trasformazioni e di collegamenti, dall'altra le varie ricerche sotto i tre aspetti di quantità, di relazione e di forma. Non v'ha questione, anche del più volgare conteggio e di facilità estrema, che tacitamente od esplicitamente non si risolva per via di equazioni. Noi, senza avvertirlo, quando ci si presenta un quesito, ci mettiamo subito in cerca di un punto di appoggio, procurando di costituire attorno a questo la mente nostra in una specie di equilibrio tra un complesso ed un altro di elementi, e tentando di snidarne qualcuno; cosa che, naturalmente, riesce più o men facile, più o men difficile, secondo i casi. In noi dunque c'è come il senso dell'uguaglianza, il quale, al pari degli altri sensi, è ufficio dell'educatore svolgere e disciplinare. E siffatto svolgimento può sino ad un certo punto conseguirsi senza bisogno di veruna teoria di equazioni. Accade quel medesimo che nel primo studio dei fenomeni naturali: altro è la percezione e l'applicazione immediata di un fatto fisico, ed altro la sua spiegazione, la designazione, cioè, del posto che gli compete tra le classi dei fenomeni. Il maestro pertanto si regolerà saggiamente e provvidamente nel far contrarre ai ragazzi, non solo nello studio dell'aritmetica generale, ma prima anche, per altro con la debita conveniente gradazione, in quello dell'aritmetica pratica, nel far contrarre, dico, l'abitudine di rappresentare con un simbolo l'incognita di un quesito proposto e di esprimere sopra di questa o attorno a questa e ai dati le operazioni che si richiedono. Ne risulterà sempre, in ultim'analisi, una relazione di uguaglianza; e spesso accadrà, nei comuni quesiti, che l'equazione è di primo grado, e tale che con semplici ragionamenti, senza bisogno di teoria di equazioni, riesca d'isolare l'incognita. L'intento dunque può, se non in tutto, in gran parte conseguirsi: e si avrà un acconcio espediente didattico che agevola la risoluzione dei quesiti, e serve di preparazione alla teoria delle equazioni, da svolgersi a tempo e luogo.

28. Per queste stesse considerazioni, ed a maggior ragione, non ho compreso nello schema d'insegnamento della matematica elementare delle scuole secondarie inferiori quella parte che è voluta dal

vigente programma ufficiale delle scuole tecniche, indicata con le seguenti parole: *Uso ed applicazione dell'algoritmo algebrico in alcuni problemi semplici.*

VI.

29. È tempo omai che raccogliamo le forze per farle convergere verso una conclusione, ma senza pistolotti pedagogici; e per parte mia concludo addirittura proponendovi di proporre all'amministrazione centrale della pubblica istruzione: 1° che nel promesso piano di riordinamento dell'istruzione secondaria sia mantenuta la separazione dell'istruzione classica dalla tecnica, e per guisa che la biforcazione continui ad aver luogo subito dopo il periodo delle scuole elementari; 2° che si affretti lo sdoppiamento dell'attuale scuola tecnica, mercè la istituzione di scuole di arti e mestieri; 3° che la sezione fisico-matematica dell'istituto tecnico sia direttamente congiunta con la scuola d'applicazione per gli ingegneri; 4° che si costituiscano due gradi di matematica elementare: la propedeutica matematica per le scuole secondarie inferiori o la matematica razionale per le superiori, comprendendo la prima in unico corso triennale di studio per la scuola tecnica, la complementare femminile e il ginnasio inferiore; 5° che la sostituzione ai programmi ufficiali di precisi e determinati limiti venga estesa alle scuole e agli istituti tecnici ed alle scuole complementari e normali; 6° che l'insegnamento della matematica tra i vari gradi e ordini di scuole secondarie venga ripartito nel modo che apparisce dai seguenti quadri, i primi tre dei quali (*A*, *B*, *C*) e l'ottavo (*I*) sono tipici, perchè da essi prendono forma, corrispondentemente, gli altri tutti:

Propedeutica matematica per le scuole secondarie inferiori.

(SCUOLA TECNICA, SCUOLA COMPLEMENTARE FEMMINILE E GINNASIO INFERIORE)

Classe 1^a — *Geometria fisica pura*: 2 ore settimanali.

QUADRO A.

I. Preliminari.

1. Corpo e estensione: luogo, intrinseco ed estrinseco; posizione; movimento. Le tre dimensioni. — 2. Spazio: superficie, linea, punto. Elementi fondamentali dello spazio: il punto, la retta e il piano. La linea curva, piana o gobba, e la superficie curva. Le figure: loro movimento. — 3. Grandezza e forma nelle figure. Le grandezze geometriche, estese ed intense: la lunghezza, l'area e il volume: l'angolo, la striscia e lo strato. (*) — 4. Oggetto della geometria. La congruenza; la misura, l'equivalenza e la simiglianza: geometria pura e geometria metrica.

(*) Fra le tre specie di grandezze *lunghezza*, *area* o *volume* e ciascuna delle altre tre *angolo*, *striscia* e *strato* v'ha, fuor di dubbio, una differenza essenziale. In vero so, comunque o dovunque, stacciamo dall'estensione lineare o superficiale o spaziale corrispondentemente una porzione qualsiasi, questa sarà sempre una lunghezza o un'area o un volume; ma non è così relativamente alle altre tre specie di grandezze, perchè la porzione staccata di estensione superficiale piana rispetto all'angolo piano e alla striscia, di estensione spaziale rispetto all'angolo diedro, al poliedrico e allo strato dev'essere staccata in maniera determinata affinchè mantenga il carattere rispettivo di angolo piano e di striscia, di angolo diedro o poliedrico o di strato. Pertanto, se è utile avere riguardo nell'angolo piano e nella striscia alle porzioni di piano rispettivamente da essi determinate, e ana-

II. La congruenza.

5. Figure congruenti. — 6. Rette. — 7. Intersezione e parallelismo: rette, piani, rette e piani. Rette a sghembo. Angoli: rettilinei, diedri, poliedrici (angoloidi). Angoli di rette a sghembo. Angoli di rette con piani. — 8. Intersezioni di linee, di superficie, di linee e superficie. — 9. La curvatura: la tangenza e l'angolo di contingenza. — 10. Poligoni, poliedri. Poligoni regolari, poliedri regolari platonici. — 11. Circoli, sfere. — 12. Cilindri, coni.

Classe 2ª — *Aritmetica pratica*: 4 ore settimanali.

QUADRO B.

I. Preliminari.

1. Il contare. L'uno e il numero; l'unità e la pluralità: il modulo e la collezione. (*) — 2. Oggetto dell'aritmetica pratica: l'arte del fare i conti e i quesiti attinenti ai bisogni e agli usi della vita.

II. I numeri.

3. La numerazione: sistema decimale. — 4. Addizione e sottrazione: trasformazione di quesiti che danno luogo a sottrazioni impossibili. — 5. Moltiplicazione e divisione. Quoto e quoziente: il resto della divisione. — 6. Multiplo e summultiplo: caratteri di divisibilità. — 7. Multiplo e summultiplo comune di più numeri: minimo e massimo. — 8. Numero semplice e numero composto. (**) Numeri

logamente nell'angolo diedro, nell'angolo poliedrico e nello strato alle porzioni di spazio, non sarà lecito però riferire come specie a genere l'angolo piano e la striscia all'area, gli angoli diedro e poliedrico e lo strato al volume. Per queste considerazioni ho proposto di lasciare alla lunghezza, all'area e al volume la qualificazione, in comune, di grandezze propriamente estese, alle altre quella, pure in comune, di grandezze intense. Quanto all'angolo, in particolare, la distinzione è giustificata anche dal carattere metrico suo, essenzialmente diverso da quello della lunghezza, dell'area e del volume: non parlo della striscia e dello strato, che non entrano mai in veruna guisa nelle relazioni metriche tra gli elementi delle figure. All'angolo, in vero, è fatto divieto assoluto d'intervenire personalmente in cotale relazioni, d'intervenirvi, cioè, in forma algebrica e con la propria misura, immediata o mediata che sia, intendendosi per misura immediata quella che è riferita ad un dato stato angolare, per mediata quella che è riferita allo stato angolare corrispondente, negli archi di un cerchio di dato raggio, all'unità di lunghezza; fatta eccezione, si capisce, per la relazione metrica tra gli elementi del cerchio di raggio r , nella quale appunto, $a = \frac{1}{2} r\alpha$, l'angolo interviene con en-

trambe le proprie misure, la immediata a , riferita all'angolo retto, la mediata α , riferita allo stato angolare corrispondente, tra gli archi, all'unità di lunghezza. Del rimanente, l'angolo, se non può intervenire personalmente nelle relazioni metriche, può farsi però rappresentare, e si fa rappresentare, da uno qualunque de' suoi sei rapporti goniometrici. Qui però la parola, per sé stessa, snatura il concetto che si vorrebbe con essa esprimere, perchè que' rapporti sono bensì i rappresentanti dell'angolo, ma non i misuratori di lui. Per questa ragione al termine *goniometrico* io avrei sostituito l'altro, pur derivante dal greco, di *goniodittivo* (Quadro K, 13), cioè indicativo, dimostrativo, determinativo, rappresentativo dell'angolo. Dell'accennata impossibilità di una relazione algebrica tra le misure degli angoli e delle rette di una figura, può darsi una rigorosa dimostrazione, la quale però eccederebbe le forze della matematica elementare. Il maestro, per altro, dove, pare a me, non astenersi dal farne chiaro annuncio, indispensabile alla giusta orientazione del discepolo nella teoria della misura: ed a me ha sempre recato e reca meraviglia che in nessun trattato elementare, di quelli, almeno, che io conosco, trovisi fatto accenno a codesto punto, che pur mi sembra di capitale importanza.

(*) La parola *modulo* (modello, esemplare, dal latino *modulus*, diminutivo di *modus*, misura), per significare l'elemento della collezione, è acconciamente adoperata da F. VALLÉ nell'*Études philosophiques sur la science du calcul* (Paris, 1841). Quello che è l'uno rispetto al numero è il modulo rispetto alla collezione: e nella stessa guisa che *unità* è, propriamente, l'astratto di uno, modularità, se il vocabolario registrasse questa parola, sarebbe l'astratto di modulo. Non sarebbe però lecito, a rigor logico di termini, dire che uno è l'astratto di *modulo* e numero l'astratto di collezione. (Ved. a pag. 102 e seg. il mio libretto citato nel § IV, 14 della presente relazione).

(**) Chiamar *primo* un numero che non ammetta divisori all'infuori dell'uno e di sé stesso, e *primi tra loro* quelli che non ammettono verun divisore comune all'infuori dell'uno, non mi sembra ben fatto, perchè si contravviene alla provvida legge della economia nel definire e nel distinguere, e vi si contravviene col concetto *primo* un vero *intruso*, non potendosi in veruna guisa riferir ad esso come a comun genere le due diverse classi *primi ognuno in sé o primi tra loro*. Mi par più giusto chiamar *semplice o composto* il numero secondo che non ammetta o ammetta divisori nel senso dichiarato, e dir poi *primi o non primi*, senz'altro, due o più numeri non aventi od aventi divisori comuni. Se è lecito ai chimici chiamar semplice una sostanza fin qui indecomposta, sebbene non dimostrata indecomponibile in fattori. E qui mi sovviene la *chimica* dei numeri; così battezzata, efficacemente, in un suo scritto da Giovanni Frattini, la parte dell'aritmetica che studia le proprietà *chimiche*, com'ei appunto le chiama, dei numeri, la proprietà, cioè, *più recondite, che mettono capo ai fattori primi dei numeri medesimi*; ed io aggiungo che, in base della medesima analogia, potrebbe l'algoritmo chiamarsi la *fisica* dei numeri. Il Frattini poi, per rimaver conseguente a sé medesimo, avrebbe dovuto chiamar anch'esso *semplici* quei fattori che chiama *primi*.

primi. — 9. La serie naturale dei numeri e quella, pur naturale, dei numeri semplici. — 10. Scomposizione d'un numero ne' suoi fattori semplici. Fattori composti. — 11. Elevamento a potenza: radice e logaritmo. La serie naturale dei numeri e quelle, pur naturali, delle loro potenze successive. Estrazione delle radici seconda e terza: il resto dell'estrazione.

III. Le frazioni.

12. Frazione. Proprietà e trasformazione delle frazioni. — 13. Addizione e sottrazione. — 14. Moltiplicazione e divisione. — 15. Elevamento a potenza: radice e logaritmo. Significato di radice approssimata di dato grado di numeri o frazioni non potenze di quel grado. Estrazione delle radici seconda e terza.

IV. Le frazioni decimali.

16. Frazione decimale. Proprietà delle frazioni decimali. — 17. Addizione e sottrazione. — 18. Moltiplicazione e divisione. — 19. Trasformazione di una frazione non decimale in decimale e viceversa: frazione decimale periodica; semplice e mista. — 20. Estrazione delle radici seconda e terza.

V. I numeri e le frazioni.

21. Specificazione nominale del numero dipendentemente dalla specificazione reale dell'azione quantitativa sul modulo: il numero intero e il fratto. — 22. La legge commutativa della somma e del prodotto. La legge associativa della somma e la distributiva del prodotto. — 23. Nesso delle operazioni: additive e sottrattive, dirette e inverse. Il perchè della corrispondenza di una sola operazione inversa alla somma e al prodotto, di due alla potenza.

VI. (*) Le misure.

24. Grandezza. Grandezza misurabile o no. Quantità. Misurazione, misura, unità di misura. — 25. Grandezza molteplice e grandezza summolteplice: caratteri di

(*) Nelle conoscenze riguardanti le misure, i sistemi di misura e la proporzionalità, e quindi anche nell'intera geometria fisica metrica, dobbiamo vigilare che non entrino mai pulci nell'orecchio dei giovinetti: alludo alle grandezze incommensurabili e, ancor più, ai numeri irrazionali, che farebbero davvero il molesto ufficio di pulci; e quanto ai numeri irrazionali e al loro calcolo, dovremo astenerci dal parlarne anche nella matematica razionale della scuola normale.

Si sa che fisicamente, cioè in ordine alla realtà oggettiva, non si danno né possono darsi grandezze incommensurabili; nel campo logico sì. V'ha chi afferma essere la incommensurabilità un fatto naturale, più frequente assai della commensurabilità: la incommensurabilità, si vuol dire, è la regola, la commensurabilità l'eccezione: e se ne trae da alcuni metodisti la convenienza di gittare nelle scuole secondarie inferiori, e magari nelle stesse scuole elementari, i germi delle conoscenze attinenti ad incommensurabilità. Se con le parole naturalezza o conformità a natura intendiamo riferirci all'ordine naturale delle idee, non c'è nulla a ridire: di fatto, essendo ingenta in noi la potenza di dividere e suddividere mentalmente all'infinito, ci è sempre possibile concepire che veruna parte aliquota, quanto piccola si voglia, di una data grandezza, e per quanto s'immagini continuata la divisione, sia ad un tempo parte aliquota di altra grandezza omogenea alla prima; e nello stesso naturale ordine logico è pur vero che la grande maggioranza delle grandezze, in combinazioni binarie omogenee, sono incommensurabili. Ma codesta infinita divisibilità non è davvero trasferibile alla realtà oggettiva; e fu proprio la trascuranza di distinzioni di tal fatta quella che trasse il filosofo Zenone a combattere, vanamente, la realtà del movimento. Consideriamo le due grandezze g , g' incommensurabili, e la parte aliquota secondo n di g , che supponiamo minore di g' . Essendo $m \cdot \frac{1}{n}g$ il massimo multiplo secondo m di $\frac{1}{n}g$ contenuto in g' , e crescendo n , convergeranno a zero

$\frac{1}{n}g$ e $g' - \frac{m}{n}g < \frac{1}{n}g$. Nell'ordine logico $g' - \frac{m}{n}g$ non disparirà giammai; ma nell'ordine reale oggettivo dovrà una volta disparire, certo tanto più tardi quanto più perfetti i mezzi onde operiamo sulle grandezze g , g' , e quanto maggiori altresì la precisione e l'accuratezza riposte nelle operazioni.

Insisto dunque perchè nell'insegnamento secondario inferiore sia tenuta assolutamente lontana qualsiasi idea di numeri irrazionali e di grandezze incommensurabili. Ma come si toglierà d'impaccio il povero maestro: 1° quando, data la misura a e v dell'area e del volume di un quadrato e di un cubo, non seconda o terza potenza di verun numero, si voglia la misura del lato del quadrato e del lato del cubo? 2° quando, data la misura l del lato di un quadrato o di un cubo, si voglia la misura della diagonale, e viceversa? 3° quando si avrà a parlare del rapporto della circonferenza al diametro? — Il procedimento da seguirsi mi par facile e piano. In relazione alla prima delle tre ricerche sarà bene, anzi, che nell'aritmetica pratica il bisogno delle regole per l'estrazione delle radici seconda e terza si faccia nascere appunto dalla ricerca del lato del quadrato e del cubo quando ne sien dati l'area e il volume, richiamando all'uopo le regole pratiche delle misurazioni geome-

misurabilità. Molteplice e summolteplice comune di più grandezze: minima e massima. — 26. Corrispondenze ed analogie: numero e misura; modulo e unità di misura; dividere e misurare; divisione e misurazione, divisione e partizione; quoziente e misura, quoto e parte; divisore e unità di misura, resto della divisione e resto della misurazione; numero semplice o composto e grandezza non misurabile o misurabile; numero multiplo o summultiplo e grandezza molteplice o summolteplice; caratteri di divisibilità e caratteri di misurabilità; minimo o massimo comun multiplo o summultiplo di più numeri, e minima o massima comun molteplice o summolteplice di più grandezze; operazioni tra numeri e operazioni tra grandezze e tra grandezze e numeri. — 27. I sistemi di misura: sistema metrico

triche apprese già dagli alunni nelle scuole elementari. Si cominci dall'annunziare e far capir bene, per via di verificazioni su esempi: 1° che la potenza o la radice n^{ma} di un numero fratto è un numero fratto i cui termini sono la potenza o la radice n^{ma} dei corrispondenti termini del primo, e viceversa; 2° che non v'ha numero né intero né fratto che, elevato alla n^{ma} potenza, dia luogo rispettivamente ad uno qualsiasi dei numeri interposti nella serie naturale delle potenze successive; 3° che, essendo q un numero non potenza n^{ma} ed h^n la massima potenza n^{ma} contenutavi, sarà

$r = q - h^n$ il resto dell'estrazione, ed $h = \sqrt[n]{q}$ significherà esser h la radice n^{ma} di un numero che

differisce di r da q per difetto, mentre $h + 1 = \sqrt[n]{q}$ significherà esser $h + 1$ la radice n^{ma} di un numero che differisce di $r' = (h + 1)^n - q$ da q per eccesso. Dopo ciò si farà concepire l'estrazione di radice approssimata di grado n da un numero q , non potenza n^{ma} , quale determinazione di un numero k , compreso tra h ed $h + 1$, la cui potenza n^{ma} vada indefinitamente accostandosi al numero q , senza poterlo mai raggiungere. Se poi, passando dai numeri alle misure di grandezza, a sia la misura, non potenza 2^{a} , dell'area di un quadrato, r la misura, non potenza 3^{a} , del volume di un cubo, si mostrerà come l'estrazione approssimata della radice 2^{a} o 3^{a} da a o da r consista nella determinazione di una misura z , compresa tra h ed $h + 1$, di una lunghezza che va accostandosi a quella del lato, visibile e palpabile, del quadrato o del cubo; ed analogamente, se l sia la misura del lato di un quadrato o di un cubo, si mostrerà come l'estrazione approssimata della radice 2^{a} da l^2 o da l^3 consista nella determinazione di una misura δ , compresa tra h ed $h + 1$, di una lunghezza che va accostandosi a quella della diagonale, parimente visibile e palpabile, del quadrato o del cubo: ne' quali casi le misure z e δ dovranno finire presto o tardi per pareggiare rispettivamente la lunghezza del lato del quadrato e del cubo, o la lunghezza della diagonale pur del quadrato e del cubo. Procedendo in questo modo non si correrà rischio di dare, neanche provvisoriamente, concetti storti, che poi riuscirebbe assai malagevole raddrizzare; né che gli alunni si formino una falsa idea della estrazione di radici detta per approssimazione, e considerino della medesima natura l'approssimazione decimale nella estrazione di radici e quella che si ottiene trasformando in

decimale una frazione che dia luogo ad una periodica. Tra lo svolgimento, a mo' d'esempio, di $\sqrt{\frac{1}{3}}$ e

di $\sqrt{2}$ in frazione decimale il maestro deve con argomenti chiari e visibili far comprender bene all'alunno in concreto e in astratto la intrinseca differenza. Quanto al rapporto della circonferenza al diametro, basterà che, tenuta sempre lontana qualsiasi idea di incommensurabilità, si dimostri prima, sperimentalmente, la costanza di tale rapporto, e poi si annunzi esser questo approssimativamente $3,1415\dots$; la qual cosa potrà pure direttamente verificarsi stendendo in linea retta una circonferenza

e misurandola col diametro. Si lasci in pace, per carità, Archimede col suo $\frac{22}{7}$, perchè sarebbe difficile, senza insinuare concetti malsani, far capire all'alunno che $\frac{22}{7}$ è un rapporto in eccesso, e d'altra parte potrebbe l'alunno essere indotto a credere che la frazione decimale $3,1415\dots$ sia un'approssimazione verso $\frac{22}{7}$, e crederla del genere di quella di una frazione decimale periodica verso la propria generatrice.

Ho detto che dei numeri irrazionali e del loro calcolo dovremo serbar silenzio anche nell'insegnamento proprio della scuola normale: non così però delle grandezze incommensurabili (Quadro E: 27 e 38). Se le due grandezze g, g' sono incommensurabili, ciò vuol dire che non esiste verun numero intero né fratto secondo cui operando sopra una di esse venga riprodotta l'altra; ond'è che nell'ordine logico (e nel campo, s'intende, dei numeri interi o fratti; ma questo non c'è bisogno di dirlo agli scolari), perchè non si sarebbe sugo a turbarne la digestione) quelle due grandezze non hanno né possono avere verun rapporto. Dovrà, per altro, stabilirsi il significato convenzionale, ma utilmente e razionalmente convenzionale, da darsi alle locuzioni *misura comune approssimata, rapporto approssimato* tra le grandezze g, g' . Ci sentiremo tanto più autorizzati a considerare $\frac{1}{n} g$ quale

misura anche di g' , quanto più grande sarà n , e quindi quanto più piccola $\frac{1}{n} g$, perocchè, crescendo n e decrescendo quindi $\frac{1}{n} g$ indefinitamente, $\frac{m}{n} g$ si accosta pur indefinitamente a g' . Il rapporto poi variabile crescente n/m lo chiameremo rapporto approssimato delle due grandezze g, g' non perchè esso si accosti al vero rapporto, che non esiste né può esistere, di queste, ma perchè è il rapporto della grandezza g ad una grandezza che col crescere indefinito di n si accosta indefinitamente a g' .

Nell'estrazione di radici si coltiverà la significazione, che già nelle scuole secondarie inferiori fu data, di radice approssimata di grado n da un numero q non potenza n^{ma} .

decimale. — 28. Misure miste. (*) — 29. Relazioni tra le misure antiche e le decimali. — 30. Approssimazioni decimali relative alle sei operazioni: limite dell'errore, grado di approssimazione e corrispondenti regole di abbreviazione.

VII. La proporzionalità.

31. Rapporto e proporzione. Proporzionalità: diretta o inversa, semplice o composta. Proporzione e proporzionalità: il proporzionato e il proporzionale. — 32. Misurabilità e proporzionalità: misure immediate e mediate. Rappresentabilità in genere o misurabilità in specie: rappresentazione e misura. — 33. Regole del tre. — 34. Regole d'interesse e di sconto. — 35. Partizione di una quantità secondo numeri dati: regole di società, di miscuglio e di alligazione.

Classe 3^a — *Geometria fisica metrica*: 3 ore settimanali.

QUADRO C.

I. La misurazione geometrica.

1. L'angolo. — 2. La lunghezza rettilinea e la circolare. — 3. L'area poligonale e la poliedrica; la circolare e la sferica: la cilindrica e la conica. — 4. Il volume poliedrico; lo sferico; il cilindrico e il conico.

II. L'equivalenza.

5. Figure equivalenti. — 6. Poligoni e poliedri; cerchi e sfere; cilindri e coni. — 7. Trasformazioni di figure. — 8. La rettificazione, la quadratura e la cubatura. — 9. Figure solide simmetricamente uguali.

III. La simiglianza.

10. Figure simili. — 11. Segmenti, angoli. — 12. Poligoni, poliedri. Poligoni regolari di ugual numero di lati; poliedri regolari platonici di ugual numero di facce. — 13. Cerchi, sfere, cilindri, coni. — 14. Figure solide simmetricamente simili. — 15. Ingrandimento o impiccolimento di figure in data scala.

IV. Riassunto e conclusione del corso triennale.

16. Correlazioni tra l'aritmetica e la geometria. — 17. Oggetto, scopo e rilevanza della matematica, suo fondamento nello studio, separato ed unito, del numero e dell'estensione.

Matematica razionale per le scuole secondarie superiori.

SCUOLA NORMALE

Classe 1^a — *Geometria pura*: 2 ore settimanali.

QUADRO D (A).

Valga il quadro A.

Classe 2^a — *Aritmetica generale*: 4 ore settimanali.

QUADRO E (B).

Valga il quadro B con le seguenti variazioni:

Il n. 2 del gruppo I e il n. 3 del gruppo II si riferiscano entrambi al gruppo I, ma si sostituiscono così:

2. *Sistema di numerazione decimale.* — 3. *Fatti numerici indipendenti e fatti numerici dipendenti dal sistema di numerazione: indipendenza dei concetti delle*

(*) Alla denominazione *numeri complessi* ho sostituita l'altra di *misure miste* per doppia ragione, e perchè questa parmi esprimere più correttamente di quella ciò che vogliamo significare, e perchè la dizione *numero complesso* sarà poi destinata nell'algebra ad esprimere ben altro concetto.

operazioni da qualsiasi sistema. Oggetto dell'aritmetica generale: il calcolo e i problemi, e la teoria del numero: l'algoritmo e l'aritmologia.

Dopo il n. 11 si aggiunga:

12. Sistemi di numerazione.

In fine del n. 19, divenuto 20, si aggiunga: *Generatrici delle frazioni decimali periodiche.*

In fine del n. 23, divenuto 24, si aggiunga: *Significato in cui l'estrazione di logaritmo è detta operazione trascendente.*

I numeri 24 e 25, divenuti 25 e 26, si sostituiscano così:

25. *Grandezza. Grandezza misurabile o no. Quantità. Criteri di quantità: l'uguaglianza e la somma; il molteplice e il summolteplice. Misurazione, misura, unità di misura.* — 26. *Grandezze commensurabili. Grandezza molteplice e grandezza summolteplice comune di più grandezze: minima e massima.* — 27. *Grandezze incommensurabili. Significato di misura comune approssimata di grandezze incommensurabili.*

Nel n. 26, divenuto 28, prima di operazioni ecc. si ponga: *numeri primi e grandezze incommensurabili.*

Il n. 31, divenuto 33, si sostituisca così:

33. *Rapporto: significato di rapporto approssimato di grandezze incommensurabili. Proporzione. Proporzionalità: diretta o inversa, semplice o composta. Proporzione e proporzionalità: il proporzionato e il proporzionale. Grandezze proporzionali: corrispondenza nell'uguaglianza e nella somma. Limiti di grandezze proporzionali.*

I numeri 33, 34 e 35, divenuti 35, 36 e 37, si sostituiscano così:

35. *Problemi di regole del $2n + 1$.* — 36. *Problemi d'interesse e di sconto.* — 37. *Partizione di una quantità secondo numeri dati: problemi di società, di miscuglio e di alligazione.*

Classe 3^a — *Geometria metrica: 3 ore settimanali.*

QUADRO F (C).

Valga il quadro C.

ISTITUTO TECNICO

Classe 1^a — *Geometria pura: 3 ore settimanali.*

QUADRO G (D A).

Valga il quadro D con le seguenti variazioni:

In fine del n. 2 si aggiunga: *I luoghi geometrici.*

In fine del n. 8 si aggiunga: *Luoghi geometrici.*

Il n. 4 si modifichi così:

4. *Oggetto della geometria. La congruenza e l'equivalenza; la misura e la simiglianza: geometria pura e geometria metrica.*

Dopo il gruppo II venga il seguente gruppo:

III. *L'equivalenza.*

13. *Figure equivalenti.* — 14. *Poligoni e poliedri; cerchi e sfere; cilindri e coni.* — 15. *Trasformazioni di figure.* — 16. *La rettificazione, la quadratura e la cubatura.* — 17. *Figure solide simmetricamente uguali.* — 18. *Luoghi geometrici.*

Classe 2^a — *Aritmetica generale: 3 ore settimanali.*

QUADRO H (E B).

Valga il quadro E con le seguenti variazioni:

Il n. 21 e l'ultimo periodo del n. 16 si sostituiscano così: *Estrazione di radici.*

Si sopprima l'intero gruppo VII.

Classe 3^a — Algebra: 5 ore settimanali.

QUADRO I.

I. Preliminari.

1. Formola e suo valor numerico. Oggetto dell'algebra. — 2. Concetto generale di operazione algebrica, e di traduzione algebrica dei problemi. Uguaglianza di espressioni algebriche; uguaglianza identica ed equazione: l'algoritmo e la teoria delle equazioni.

II. Algoritmo.

3. Addizione e sottrazione: teoria delle quantità negative. Regola dei segni. — 4. Moltiplicazione. Divisione dei monomi. Regole dei segni. Divisione di un polinomio per un monomio. Concetto della divisione tra due polinomi. Caratteri di divisibilità e quozienti di speciali forme polinomie di uso nell'algebra elementare. — 5. Elevamento a potenza: radice e logaritmo. Regole dei segni. La quantità immaginaria.

III. Equazioni.

6. Equazione numerica ed equazione algebrica: equazione trascendente. Equazione numerica od algebrica a forma razionale o a forma irrazionale: a forma razionale intera o fratta. Trasformazioni di equazioni. — 7. Sistema di equazioni: determinato e indeterminato; più che determinato e assurdo. Grado del sistema. Radici del sistema. Sistemi equivalenti. — 8. Risoluzione dei sistemi determinati di primo grado: risoluzione numerica e risoluzione algebrica. Discussione delle formole risolutive. Soluzioni negative. Le forme $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{d}$. — 9. Risoluzione dei sistemi determinati di secondo grado: risoluzione numerica e risoluzione algebrica. Discussione delle formole risolutive. Soluzioni negative e immaginarie. Le forme $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{d}$.

IV. Funzioni. (*)

10. Sistema indeterminato di equazioni come occasione alla teoria delle funzioni. — 11. Mutua dipendenza tra grandezze; condizioni e leggi di dipendenza; stati delle grandezze in mutua dipendenza; corrispondenza di stati, univoca o no.

(*) I concetti fondamentali che avviano a quello di funzione e lo preparano, e all'altro di limite, si presentano quasi spontanei in più occasioni nella stessa aritmetica pratica e nella geometria fisica; e sta all'abilità o alla sagacia del maestro il profittare di queste occasioni con vantaggio, isillando a poco a poco nelle tenere menti idee chiare ed esatte per via di esercizi e di esempi pratici. Nell'aritmetica generale poi e nella geometria razionale, e cioè, anche precedentemente allo studio dell'algebra, il principio del limite, per casi particolari ma in modo esplicito, si rende indispensabile. Ma uno studio sistematico elementare, che tali conoscenze compia e coordini, a me sembra che possa farsi opportunamente ingranare nella teoria delle equazioni. In vero, un sistema determinato di n equazioni tra n incognite ne conduce alla ricerca di queste; un sistema più che determinato di $n+k$ equazioni tra n incognite alla ricerca delle k relazioni tra i dati della questione; finalmente ad un sistema indeterminato di $n-k$ equazioni tra n incognite metton capo i concetti coordinati di funzionalità, e con esso si finisce per assegnare la forma di una funzione di k variabili. E da questo momento il concetto di funzione, integrato dal fecondo concetto di limite, pur subordinato in origine a quello di uguaglianza, lo soprattra e lo domina. Difatti, quanto al concetto di limite, come schivarlo e perchè schivarlo se pur sempre si ha a subirlo, e se, quale mezzo potente di rappresentazione psichica di note caratteristiche di oggetti, è, possiamo dire, la pietra angolare di tutto l'edificio? Perchè sostituirgli, come si fa in alcuni trattatelli, nozioni particolarissime a contorni sfumati, quasi sempre men facili per la mente dello studioso e meno soddisfacenti nel rispetto del rigore scientifico? La sincerità scientifica è da tenersi in conto quasi quanto la morale: i punti deboli od oscuri debbono essere schiettamente rivati, lungi l'artificio di mascherarli con simulacri di ragionamenti. Ho detto che il concetto di limite è mezzo potente di rappresentazione psichica, ed ora aggiungo che ne è strumento talvolta indispensabile. In prova scelgo due esempi, tra i moltissimi: uno tratto dalla geometria elementare, l'altro dall'aritmetica. Proponiamoci, per caso, di studiare le proprietà della circonferenza. Nel campo logico potremo proporre lo studio del luogo dei punti di un piano equidistanti da un punto fisso del piano stesso; e a siffatto luogo daremo appunto il nome di circonferenza. Dalla nozione medesima discende in prima la possibilità di segnare nel piano quanti punti si vogliano, appartenenti tutti al definito luogo; e così pure, preso un punto quale si voglia nel piano, avremo la maniera pronta e sicura di riconoscere se appartenga o no al luogo. Di qui poi avremo una sequela ordinata di parecchie altre proprietà della circonferenza: queste, ad esempio: una retta che ha un punto comune con una circonferenza, potrà anche averne un secondo, ma non più; a qualsiasi punto della circonferenza ne corrisponde un secondo simmetrico rispetto ad un diametro qualsiasi; ecc. ecc. Ma fin qui non entra per nulla il concetto di linea continua e chiusa, dividente il piano in due parti, l'una interna, limitata dalla linea, l'altra esterna illimitata;

Grandezze costanti e grandezze variabili; variabili indipendenti e variabile funzione. Funzione pura o analitica, implicita od esplicita: forma della funzione e sue specie. — 12. Limite di grandezza variabile: tendenza al limite. Teoria dei limiti.

V. Applicazione della teoria delle funzioni: le quantità irrazionali e le immaginarie.

13. Limite di grandezze variabili convergenti. Grandezze incommensurabili: la quantità irrazionale. Irrazionalità relativa all'estrazione di radice di dato grado da numero con potenza di quel grado. Operazioni sulle quantità irrazionali. — 14. La quantità immaginaria: la quantità complessa. Operazioni sulle quantità complesse. — 15. Operazioni sulle quantità potenziali e radicali.

VI. I numeri, le frazioni, le quantità irrazionali e le complesse.

16. Specificazione nominale del numero dipendentemente dalla specificazione reale dell'azione qualitativa o quantitativa sul modulo: numero positivo e negativo; positivo o negativo reale e complesso; reale razionale e irrazionale; razionale intero e fratto. — 17. La legge commutativa della somma algebrica e del prodotto. La legge associativa della somma e la distributiva del prodotto. — 18. Nesso delle operazioni algebriche: additive e sottrattive, dirette e inverse. Il perchè della corrispondenza di una sola operazione inversa alla somma e al prodotto, di due alla potenza. Significato in cui l'estrazione di logaritmo è detta operazione trascendente. Operazioni monovalenti e operazioni plurivalenti. — 19. Adombramento della teoria generale delle operazioni sulle grandezze.

VII. Applicazione della teoria delle equazioni e delle funzioni: la proporzionalità.

20. Rapporto: significato di rapporto approssimato di grandezze incommensurabili. Proporzioni. Proporzionalità: diretta o inversa, semplice o composta. Proporzione e proporzionalità: il proporzionato e il proporzionale. — 21. Grandezze proporzionali: corrispondenza nell'uguaglianza e nella somma. Limiti di grandezze proporzionali. — 22. Funzionalità analitica tra grandezze proporzionali. — 23. Misurabilità e proporzionalità: misure immediate e mediate. Rappresentabilità in genere e misurabilità in specie: rappresentazione e misura. — 24. Problemi di regola del $2n + 1$. — 25. Problemi d'interesse e di sconto. — 26. Partizione di una quantità secondo numeri dati: problemi di società, di miscuglio e di alligazione.

concetto che noi ci formiamo, per via di astrazione, da ciò che ne fornisce l'esperienza. Ecco pertanto la necessità di un primo accostamento dei concetti logici agli sperimentali, accostamento che si ottiene concedendo il seguente postulato: se un segmento OP in un piano ruota nel piano stesso intorno ad O in qualunque dei due versi sino a che si ritrovi nella posizione iniziale, il punto P descrive una linea continua, necessariamente chiusa, e che è la medesima, qualunque sia il verso della rotazione. A questo postulato equivale l'altro, indipendente dal moto: esiste nel piano una linea continua chiusa, in cui, e in cui soltanto, trovansi i termini P non comuni di tutti i possibili segmenti uguali ad un segmento dato, di infinito direzioni, nel piano medesimo, uscenti da O . Dopo ciò acquisteremo il concetto di retta tangente della circonferenza; e verranno in evidenza le proprietà di rette tangenti e secanti e di poligoni iscritti e circoscritti. Ma siamo ancora lontani dal concetto della special forma della circonferenza, dal concetto della rotondità sua perfetta, della uniforme curvatura, e da quello infine della sua lunghezza, la quale noi, per via d'intuizione, percepiamo applicando, o immaginando applicato, sopra una circonferenza un filo sino a coprirlo interamente, e poi distendendolo, o immaginandolo disteso, in linea retta. Si richiede pertanto un secondo e maggiore avvicinamento tra i due ordini di concetti, il logico e lo sperimentale; e lo consegniamo mercè il concetto di limite e mercè sua soltanto. Nel campo logico ci facciamo a dimostrare il teorema: i perimetri variabili di due poligoni regolari di ugual numero di lati, uno iscritto, l'altro circoscritto alla circonferenza, e variabili per guisa che il numero dei lati cresca raddoppiandosi senza fine, individuano un segmento come loro limite. Ne consegue che, mentre cresce senza fine l'ugual numero dei lati dei due poligoni, cresce anche senza fine il numero dei punti comuni a ciascun di essi e alla circonferenza, e decresce pur senza fine la distanza tra due consecutivi di tali punti. Nel campo fisico poi, disegnando i successivi poligoni, vedremo che, per quanto sottili le linee tracciate e per quanto perfetti gli strumenti, i poligoni tenderanno a confondersi con la circonferenza così rapidamente, che ben presto l'occhio non riuscirà a distinguerli da essa. Abbiamo così due serie di operazioni o costruzioni, caratteristiche della circonferenza: l'una logica, l'altra fisica. La seconda certamente ha fine, fine più o meno vicina, più o meno lontana, dipendentemente dalle dette condizioni e anche, giova notare, dalla grandezza del raggio della circonferenza. La prima sopravvive sempre, e col suo sopravvivere ci rappresenta appunto il fatto della variabilità del termine delle operazioni della seconda specie; cosicchè in qualsiasi caso di termine lontanissimo potremo sempre attingere dalla serie logica di costruzioni il corrispondente stato rappresentativo. Laonde, con evidente fondamento nell'esperienza, il concetto di quel segmento limite sarà il rappresentante legittimo e universale delle lunghezze percepite in esperimenti analoghi a quello del filo avvolto nella circonferenza e poi disteso in linea retta, il rappresentante, cioè, della circonferenza

VIII. Equazioni trascendenti.

27. Lacuna da colmare relativamente all'operazione inversa trascendente dell'elevamento a potenza. Equazioni esponenziali: prima classe di equazioni trascendenti. Risoluzione della forma fondamentale $p = r^l$ rispetto ad l , dati r e p . — 28. Sistemi di logaritmi. Proprietà generali indipendenti dal sistema. — 29. Tavole di logaritmi: logaritmi volgari. Risoluzione numerica della forma fondamentale per mezzo delle tavole. — 30. Relazione tra i logaritmi di un medesimo numero in

rettificata: in pari tempo la convergenza logica, verso quel limite, di quei poligoni sottoposti alla condizione di essere regolari, cioè equilateri ed equiangoli, risponderà alla percezione della forma della circonferenza, della rotondità perfetta e della uniforme curvatura, o riuscirà rappresentativa di siffatte tre affezioni, idealizzate, della circonferenza stessa. — Immaginiamo ora tracciato sulla carta un segmento rettilineo, e di questo sia preso $\frac{1}{3}$. Il procedimento logico operativo 0,333... non ha

mai fine: mentre, per n indefinitamente crescente, converge indefinitamente a zero la frazione $\frac{3}{10^n}$,

la somma dei primi n termini della serie tende indefinitamente ad $\frac{1}{3}$, cioè ha per limite $\frac{1}{3}$. L'operazione grafica, invece, dopo la costruzione successiva di un certo numero di termini di quella serie, avrà fine, ma lo avrà tanto più tardi, quanto più perfetti gli strumenti e quanto maggiore il segmento su cui si opera. Quella particolare tendenza indefinita della somma dei primi n termini della detta serie, tendenza caratteristica della frazione $\frac{1}{3}$, e sopravvivente sempre al procedimento gra-

fico finito, diversamente finito, ci rappresenta appunto la trasformazione della frazione $\frac{1}{3}$ in decimale

con quella maggiore approssimazione che ci piacerà. — Non va poi trascurato di far notare agli alunni delle scuole secondarie superiori che l'anello di congiunzione tra il concetto di limite e di grandezza variabile tendente al limite è il concetto dell'infinito e dell'infinitesimo, parole da adoperarsi, peraltro, *cum grano salis*, circondandole delle necessarie cautele. Anzitutto bisogna far comprendere bene questo, che l'infinito matematico non ha che far nulla con l'infinito reale assoluto, nella significazione filosofica della parola, il quale esclude da sé qualsiasi idea di limitazione in qualunque senso: esso è ciò che, *non circoscritto, pur tutto circoscritto*, come stupendamente si esprime l'Alighieri nel XIV del *Paradiso*, e non può essere oggetto di speculazione matematica. L'infinito matematico è tale *secundum quid, non simpliciter*, per usare il linguaggio di Tommaso d'Aquino, che (*Summa theologiae*) alla questione *utrum aliquid aliud quam Deus possit esse infinitum per essentiam*, risponde appunto: *Aliquid praeter Deum potest esse infinitum secundum quid, sed non simpliciter*. Due sorta d'infinito e d'infinitesimo matematici si distinguono oggi: il *potenziato* e l'*attuale*. Il primo, come si sa, consiste nel concetto di una grandezza variabile crescente o decrescente senza limite, e tale quindi da poter diventare maggiore o minore di qualsiasi grandezza data, omogenea ad essa: il secondo consisterebbe nel concetto di una grandezza determinata e tale che, comunque diminuita o comunque moltiplicata, fornirebbe sempre una grandezza rispettivamente maggiore o minore di qualsiasi grandezza assegnabile, ad essa omogenea. Lasciando da parte le questioni che oggi più che mai si agitano intorno ai concetti di infinito ed infinitesimo attuali, a noi basta che, per lo meno, non possa, come non può, mettersi in dubbio l'esistenza dell'infinito e dell'infinitesimo potenziati, i quali trovano corrispondenza nella realtà obbiettiva, che ne è perciò rappresentata; e in trovano precisamente in una serie di operazioni o costruzioni effettive, relativamente e diversamente limitate, dipendentemente dai nostri mezzi di percezione. L'infinito e l'infinitesimo attuali troverebbero corrispondenza nelle nozioni fisiche di grandissimo e di piccolissimo, aventi per carattere rispettivo la relativa esclusione di vincoli alle nostre fisiche apprezzazioni e il relativo sfuggire ai nostri sensi, ossia la relativa illimitazione e la relativa imparcettibilità. E pertanto sono da schivare, specie nelle scuole secondarie inferiori, i concetti, nebulosi sempre, morbosi spesso e comunque prematuri, di poligono infinitilatero, numero infinito di lati infinitesimi, e via dicendo. Nella geometria fisica, invece di prendere a prestito concetti che in essa non troverebbero senso pratico, ricorreremo al concetto di limite, tenendo presente la distinzione necessaria a farsi tra limite razionale e limite fisico, del quale ultimo soltanto dobbiamo valerci. Il primo non viene mai raggiunto dalle grandezze variabili: il secondo sì, dopo un numero finito di accrescimenti o decrescimenti, numero tanto più remoto, quanto più perfetti i mezzi di operazioni meccaniche, e quanto maggiore accuratezza e precisione si pone in queste. Ma un'altra circostanza importantissima va notata. Iscrivendo in un circolo poligoni regolari i cui numeri dei lati siano le potenze successive del 2 a cominciare dalla 2^a, accadrà che tutti i latercoli del poligono regolare fisico si confonderanno simultaneamente, nel limite, coi corrispondenti archetti del circolo, pur fisico; e se la identificazione non fosse simultanea, noi non riusciremmo a realizzare con questo procedimento la trasformazione del poligono in circolo. La simultaneità è indispensabile, e c'è, perchè i lati del poligono si mantengono sempre uguali, come si mantengono sempre uguali i corrispondenti archi di circonferenza. Se, invece, immaginiamo divisa una ellissi successivamente in 4, 8, ... 2ⁿ parti uguali, la serie dei corrispondenti poligoni iscritti che ne derivano ha per limite razionale la ellissi; ma que' poligoni medesimi non può dirsi che abbiano la ellissi anche a limite fisico, perocchè, essendo disuguali in ciascuna operazione gli archi ellittici, l'identificazione loro coi corrispondenti latercoli dei poligoni iscritti non è simultanea; e verrà il momento in cui alcuni di questi latercoli si troveranno confusi coi corrispondenti archi, altri no; e allora siamo nella impossibilità di continuare in modo analogo l'operazione, e non siamo davvero autorizzati a considerare il poligono trasformato in ellissi. Per questa ragione sarebbe atto improvvido, sempre nelle scuole inferiori, mettere a fondamento del modo di ricavare la regola di misurazione del volume della piramide la considerazione di questa quale limite della somma dei prismi iscritti, perocchè la identificazione fisica dei singoli prismi ai corrispondenti tronchi di piramide non potrebbe essere simultanea.

due sistemi. — 31. Equazioni logaritmiche: seconda classe di equazioni trascendenti. Risoluzione numerica rispetto ad n della forma fondamentale $\log_2 n = l$. per mezzo delle tavole. — 32. Progressioni per differenza e per quoziente. Relazione tra un sistema di logaritmi e un sistema di due progressioni, per differenza e per quoziente, in date condizioni. — 33. Il sistema delle due equazioni tra i cinque elementi di un gruppo chiuso di termini di una progressione per differenza: dati tre qualunque di essi elementi, trovare gli altri due. Il sistema delle due equazioni tra i cinque elementi di un gruppo chiuso di termini di una progressione per quoziente: dati tre qualunque di essi elementi, escluse le due combinazioni $t_1 n s_n$, $t_n s_n$, trovare gli altri due. — 34. Problemi d'interesse semplice e composto, di sconto, di annualità e di ammortamento.

Classe 4^a — Geometria metrica: 4 ore settimanali.

QUADRO K (F C).

Valga il quadro F con le seguenti variazioni:

Dopo il numero 4 si aggiunga:

5. *Verificazione metrica dei teoremi di geometria pura concernenti l'equivalenza.*

Si sopprima l'intero gruppo II.

Dopo il num. 15, divenuto 11, si aggiunga:

12. *Luoghi geometrici.*

Dopo il gruppo III, divenuto II, venga il seguente gruppo:

III. *Trigonometria rettilinea: per la sola sezione fisico-matematica.*

13. *Problemi metrici tra i cui dati o le cui incognite sieno angoli. L'angolo e i sei rapporti goniometrici: i tre diretti (il seno, il coseno e la tangente) e i tre corrispondentemente inversi (la cosecante, la secante e la cotangente). Opportunità e necessità di far rappresentare gli angoli dai rapporti goniometrici nelle relazioni metriche. (*) Perché e come tra le grandezze geometriche la lunghezza è la fondamentale irriducibile, e la sola che interviene nelle relazioni metriche tra gli elementi delle figure. — 14. Funzionalità tra l'angolo e ciascuno de' suoi rapporti goniometrici. Discussione delle relazioni tra l'angolo ed ognuno de' suoi rapporti goniometrici. — 15. Il sistema delle cinque equazioni tra i sei rapporti goniometrici di un angolo. Dato un qualunque di essi, trovare gli altri cinque. — 16. Equazioni goniometriche: terza ed ultima classe di equazioni trascendenti tra quelle di cui si occupa la matematica elementare. Risoluzione della forma fondamentale rapp. $a = r$ rispetto ad r o ad a , dato a od r . — 17. Sostituzione delle linee ai rapporti goniometrici. Tavole logaritmo-goniometriche: risoluzione numerica della forma fondamentale lin. $a = l$ rispetto ad l o ad a per mezzo delle tavole. — 18. Il sistema delle quattro equazioni tra i sette elementi metrici del triangolo: i*

(*) Il principio di omogeneità nelle relazioni metriche, al quale non vedo data molta importanza nei libri scolastici, a me pare invece che dovrebbe averne moltissima, siccome quello che è il regolatore dell'algoritmo applicato a questioni tra grandezze, ed è vitale per una sana educazione metrica dei nostri ragazzi, quando si ammette, come ammetto io, che i due insegnamenti di aritmetica generale ed algebra abbiano ad impartirsi a base essenziale di grandezza (V, 25). Il principio stesso dev'esser però presentato non tutto in una volta e tutto d'un pezzo, ma per via di graduale svolgimento, prendendo le mosse dalla stessa aritmetica pratica. Com'è noto, il principio complesso della omogeneità si adagia tutto quanto sopra questi due più semplici: 1° la misura di una grandezza è direttamente proporzionale ad essa ed inversamente al modulo, talchè un medesimo numero può esser misura di grandezze disuguali, e numeri disuguali possono esser misure di una medesima grandezza o di grandezze uguali; 2° il rapporto tra due grandezze omogenee è indipendente dal loro comun modulo. Movendo da questi due principi perverremo per una breve serie ordinata di proposizioni a stabilire il criterio per riconoscere se una relazione metrica possa aver luogo conformemente alla natura delle grandezze in questione, oppure abbia bisogno di alcune modificazioni per divenir tale. Allora, e soltanto allora, ci sarà lecito di considerare svincolata dai moduli la relazione, e di considerarla in questo senso appunto omogenea, cioè quale semplice relazione numerica.

Diasi che lo svolgimento graduale del principio di omogeneità debba incominciare nella stessa aritmetica pratica e nella geometria fisico metrica. Come conseguenza immediata di que' due principi, su' quali riposa il principio complesso di omogeneità, si mostrerà, ad esempio, che fra tre grandezze omogenee a, b, c , riferibili ad un medesimo modulo, non sempre è possibile qualsiasi forma di relazione indipendente dalla grandezza del modulo. Così, può sussistere, poniamo, la relazione $a^2 = b^2 + c^2$, e sussiste di fatto so, ad esempio, a è l'ipotenusa e b e c i cateti d'un triangolo ret-

tre lati, i tre angoli e l'area. Dati tre qualunque di essi, purchè non sieno i tre angoli, trovare, con risoluzione numerica del sistema, gli altri quattro.

Il gruppo IV si sostituisca così:

IV. Riassunto e conclusione del corso quadriennale.

19. *Correlazioni tra l'algebra e la geometria.* — 20. *Oggetto, scopo e rilevanza della matematica: suo fondamento nello studio, separato e unito, del numero e dell'estensione; e suo svolgimento dal concetto organico e mediante il concetto organico di uguaglianza.*

GINNASIO SUPERIORE E LICEO

Classe 4^a ginnasiale. — *Geometria pura: la congruenza: 2 ore settimanali.*

QUADRO L (G D A).

Valga il quadro G, togliendone il gruppo III, e modificando il n. 4 così:

4. *Oggetto della geometria. La congruenza, l'equivalenza e la simiglianza; la misura: geometria pura e geometria metrica.*

Classe 5^a ginnasiale. — *Geometria pura: l'equivalenza e la simiglianza: 3 ore settimanali.*

QUADRO M (G D A).

Valga il quadro G, togliendone i gruppi I e II, e ponendo dopo il gruppo III, divenuto I, il seguente gruppo:

II. La simiglianza.

7. *Ragione di due grandezze. Teoria delle proporzioni. Proporzionalità: diretta o inversa, semplice o composta.* — 8. *Figure simili.* — 9. *Segmenti, angoli.* — 10. *Poligoni, poliedri. Poligoni regolari di ugual numero di lati; poliedri regolari platonici di ugual numero di facce.* — 11. *Circoli, sfere.* — 12. *Cilindri, coni.* — 13. *Figure solide simmetricamente simili.* — 14. *Luoghi geometrici.*

Classe 1^a liceale. — *Aritmetica generale: 3 ore settimanali.*

QUADRO N (H E B).

Valga il quadro H.

tangolo, perchè in tal caso quella relazione ha un significato effettivo, non empirico; ma non potrebbe sussistere la $a = bc$. In vero, assumendo un nuovo modulo nel rapporto $b/1$ col primo, la prima relazione rimarrebbe indipendente da k , la seconda no, perchè questa si trasformerebbe in $a = kbc$. Se fosse possibile $a = bc$, il rapporto a/b , quando si variasse il comun modulo, sarebbe ad un tempo costante e variabile, cosa assurda. Se le tre grandezze non sono tutte e tre omogenee tra loro, allora è possibile una loro relazione indipendente dai moduli, purchè a sia omogenea a b o a c , rimanendo così c o b eterogenea ad a e b , ad a e c . In questo caso, difatti, per ogni dato e qualsiasi modulo di c o di b , non varierebbe c o b , perchè indipendente dal modulo di a e b o di a e c , il quale, pur variando, non può indurre variazioni nel rapporto a/b o a/c . Il caso di a, b, c tutte e tre eterogenee tra loro, e l'altro di b e c omogenee tra loro con a eterogenea, sono evidentemente da escludere. In vero, per un dato modulo di a corrisponderebbe ad a non un solo prodotto bc , ma tanti quanti le possibili variazioni dei due moduli o del comun modulo di b e c . Questi criteri sono evidentemente applicabili alla moltiplicazione e alla divisione. Difatti, le tre grandezze che danno origine ad un prodotto (il dividendo) e ai due fattori (il divisore e il quoziente) non possono essere tutte e tre omogenee tra loro, tranne il caso, naturalmente, di numeri, nè tutte e tre eterogenee: quella che dà origine al prodotto (il dividendo) dev'essere essenzialmente omogenea ad una, e ad una sola, delle due che danno origine ai fattori (il divisore e il quoziente). Se l ed l' sieno i lati disuguali di un rettangolo r , il principiante può essere indotto a pensare che la relazione $r = ll'$ contraddica a queste asserzioni; ma toccherà al provvido maestro il fargli capire che qui, ed analogamente in casi analoghi, le grandezze tra cui si concepiscono o si eseguiscano le operazioni sono due aree riferite alla stessa unità di misura ed una lunghezza, e che l'unità di area è il quadrato dell'unità di lunghezza.

Classe 2^a liceale. — Algebra: 5 ore settimanali.

QUADRO O (I).

Valga il quadro I, modificando così il num. 20 del gruppo VII:

20. *Rapporto: significato di rapporto approssimato di grandezze incommensurabili. Ragione e rapporto. Proporzione per rapporto e proporzione per ragione. Proporzionalità per rapporto e proporzionalità per ragione diretta o inversa, semplice o composta. Proporzione e proporzionalità: il proporzionato e il proporzionale. Il rapporto, la proporzione e la proporzionalità per rapporto sono casi speciali, rispettivamente, della ragione, della proporzione e proporzionalità per ragione. Proprietà specifiche della proporzionalità per rapporto.*

Classe 3^a liceale. — Geometria metrica: 3 ore settimanali.

QUADRO P (K F C).

Valga il quadro K con le seguenti variazioni:

Al num. 5 dopo la parola *equivalenza* si aggiunga *e la simiglianza*.

Dopo il num. 5 si aggiunga:

6. *Ingrandimento o impiccolimento di figure in data scala.*

Si sopprima l'intero gruppo II.

Il gruppo IV, divenuto III, si sostituisca così:

III. **Riassunto e conclusione del corso quinquennale.**

13. *Correlazioni tra l'algebra e la geometria.* — 14. *Caratteri dei tre possibili sistemi di geometria: la euclidea, detta anche parabolica, e le due non-euclidee, dette anche rispettivamente ellittica ed iperbolica; ciascuna delle quali ultime viene anche sotto il nome di geometria astratta o ideale, o di pangeometria. La geometria euclidea e la sua verifica sperimentale. Distinzione tra le proposizioni dipendenti e le indipendenti dal postulato della parallela unica nella geometria euclidea.* — 15. *Oggetto, scopo e rilevanza della matematica: suo fondamento nello studio, separato e unito, del numero e dell'estensione; e suo svolgimento dal concetto organico e mediante il concetto organico di uguaglianza.*

30. I particolari modi di attuazione delle indicate proposte, che sono il riepilogo della mia relazione, potranno essere, preve le debite correzioni, beninteso, da parte vostra, quei medesimi da me accennati, o altri essenzialmente diversi. M'accorgo però, e ne provo rimorso, di avere oltrepassato il segno, per non aver mantenuta la promessa di limitarmi all'ufficio di cote, consigliatomi dal Venosino; chè anzi ho praticato talvolta anche qualche piccolo taglio. Ma cosa fatta capo ha, e, seguendo ora per davvero i dettami del Venosino stesso, dirò, fidente e supplice, ad ognun di voi:

. *Si quid novisti rectius istis,
candidus imperti; si non, his utere mecum.*

Se poi crederete di bocciarmi addirittura e interamente, mi rasse-
gnerò alla mia sorte, e mi studierò di far meglio un'altra volta.

Prof. ANTON MARIA BUSTELLI.

QUISTIONE PROPOSTA DAL PROFESSORE GIOVANNI RIBONI

Proposta che sia concesso ai licenziati agrimensori degli istituti tecnici di adire alla facoltà matematica, esclusivamente però per le scuole d'applicazione degli ingegneri.

EGREGI COLLEGHI,

La quistione ch'io pongo innanzi si connette intimamente, anzi è un caso specialissimo della questione assai complessa, che riguarda la riforma *ab imis* delle scuole secondarie; riforma vivamente sollecitata anche dalla pubblica opinione ed intorno a cui più di un progetto fu escogitato, senza che alcuno abbia potuto giungere in porto: nè per ora sembra si voglia tornarvi. E perciò *rebus sic stantibus*, in attesa cioè di questa radicale riforma, io mi permetto di richiamare l'attenzione degli egregi colleghi su questo caso particolare e cioè sulla condizione, non equa secondo il mio giudizio, fatta dagli attuali ordinamenti scolastici ai licenziati in agrimensura che desiderassero continuare gli studi ed adire ai corsi d'ingegneria, poichè da essi si richiedono esami d'integramento per conseguire la licenza in fisica-matematica, la quale sola negli istituti tecnici dà il diritto, come la liceale, all'ammissione alla facoltà matematica.

Ora basta stabilire un confronto tra i programmi delle due sezioni, per persuadersi che, sia per coltura generale, sia per coltura speciale, i primi non possono ritenersi inferiori ai secondi.

Ed infatti in materia letteraria la sezione fisica-matematica presenta in più il tedesco o l'inglese. In fatto di scienze ha un corso complementare di fisica, nel quale non si espone nulla di sostanzialmente nuovo, ma consiste principalmente in dimostrazioni matematiche di leggi già studiate e verificate coll'esperienza, od in esercizi su problemi attinenti a teorie già prima studiate.

E circa più specialmente alla matematica, degli argomenti svolti nel 2° biennio, alcuni sono comuni alle due sezioni (come la trigonometria rettilinea, la geometria descrittiva; quest'ultima svolta più ampiamente assai agli agrimensori), altri inutili a questo punto per gli aspiranti ingegneri, come la trigonometria sferica, la quale viene di necessità trattata nelle scuole d'applicazione come premessa al corso di geodesia; e non serve che a quei licenziati in fisica matematica che si presentano alla scuola navale sup.; altri di cui si ha occasione di trattare anche nel 1° biennio, come il binomio di Newton, la simmetria, l'omotetia delle figure etc.; altri infine, come l'analisi indeterminata, che non costituiscono una deficienza tale da non potersi dir preparato in modo conveniente alla facoltà

matematica chi ne fosse digiuno. Del resto con lievi rimaneggiamenti nei programmi si toglierebbero anche queste differenze insignificanti.

Di qui risulta adunque che la deficienza sostanziale sta nella lingua tedesca od inglese. Certamente che è assai utile, per non dir necessario, che il giovane aspirante ingegnere possieda oltre il francese l'una o l'altra di dette lingue per poter consultare le pubblicazioni straniere e tenersi così al corrente dei progressi scientifici e tecnici all'estero. Ma a questo punto è lecito lasciare anche all'iniziativa individuale il supplire a questa od altra deficienza, o meglio se si vuole, porre l'obbligo di frequentare il corso di una delle dette lingue nella facoltà letteraria o nel biennio preparatorio alla scuola d'applicazione, come si è fatto a Milano.

È d'altra parte i licenziati dai licei non presentano anch'essi le stesse anzi maggiori deficienze, poichè oltre al non conoscere il tedesco o l'inglese, ben poco devono ricordare anche del francese imparato in Ginnasio e poi messo da parte, e di più hanno una scarsa coltura matematica?

In compenso invece faccio osservare, che nella sezione agrimensura i corsi di topografia e di costruzioni, oltre al fornire fino da queste scuole ai giovani la parte elementare di queste materie professionali, che vengono poi svolte più ampiamente ed in un campo più elevato nelle scuole d'applicazione, li costringono ad una continua trattazione di svariate questioni analitiche e geometriche sì da far loro acquistare una familiarità colla geometria e col calcolo sia numerico che letterale non inferiore per non dir superiore a quella dei licenziati stessi in fisica-matematica. Non parlo poi del corso speciale di geometria descrittiva di poco inferiore a quel che si teneva trenta o quarant'anni or sono in certe università: non parlo dei corsi di disegno d'ogni specie ornamentale, geometrico, architettonico, topografico a cui sono tenuti e che tanto importano all'ingegnere: non parlo poi di altri corsi speciali attinenti all'ingegneria quali l'agraria, l'estimo, la legislazione rurale ecc.... Anzi più ci rifletto, sono tentato ad affermare che gli agrimensori sono i meglio preparati per le scuole d'ingegneria.

E mi conforta il trovare un'assai autorevole conferma di questa asserzione nella relazione(*) che il chiaris. prof. Bardelli del Politecnico milanese, preside dell'Istituto tecnico C. Cattaneo presentava alla Giunta di Vigilanza dell'Istituto stesso intorno alle modificazioni da farsi nelle sezioni della detta scuola, e ciò in seguito alla lettera-circolare del Ministero del 30 novembre 1894, e specialmente là dove così si esprime:

« Nel volume di Emilio Morpurgo sugli Istituti tecnici; nella
« relazione della Commissione presieduta dall'onor. Domenico Berti,
« che elaborò la riforma del 1871; in una importante monografia
« sugli studi tecnici dell'onor. Gerolamo Boccardo, ed in numerose
« altre pubblicazioni (chè si può dire ormai abbiano gli Istituti
« tecnici una storia ed una letteratura), pubblicazioni non conosciute

(*) Questa Relazione fu stampata per deliberazione della Giunta stessa. Tip. di G. Rebeschini, 1895.

« o dimenticate, con validissimi argomenti è stato dimostrato, come, « a provvedere ai bisogni del vasto ed esteso svolgimento della ingegneria moderna, sia necessario che fino dalle scuole secondarie gli insegnanti vi sieno indirizzati ». Ora chi soddisfa a questa necessità tra i licenziati dalle scuole secondarie meglio del perito agrimensore?

Nè si creda che questa concessione fatta agli agrimensori sia un allettamento per gli studenti dell'istituto ad abbandonare la sezione fisico-matematica per l'agrimensura. Se si confrontano i programmi e gli orari, si vede subito che la sez. agrimensura è più aggravata dell'altra. E del resto se qualcuno fosse tentato a farlo, pel fatto che, nel caso non potesse continuare gli studi, avrebbe intanto un diploma professionale, non ci vedo alcun inconveniente.

Qui verrebbe in campo per incidente la questione, se non convenga (come è stato anche proposto) abolire la sezione agrimensura o meglio fonderla colla fisico-matematica. Ma noi non vogliamo ora occuparcene, tanto più che dovremmo entrare anche nel campo pratico delle difficoltà che gli agrimensori incontrano nell'esercizio della professione per la concorrenza loro fatta dagli stessi ingegneri. Lasciando le cose allo stato attuale, perchè impedire agli agrimensori di continuare, ove si sentano, la via naturale dei loro studi col passare alle scuole degl'ingegneri?

Sarebbe ora naturale che facessi un confronto coi licenziati dal liceo. Ma parmi inutile la cosa, poichè gli insegnanti di matematica sono in massima concordi nel ritenere insufficiente la preparazione del liceo agli studi di matematica, specie per gli ingegneri. Basterebbe del resto leggere la sullodata relazione a pag. 17, 18, 19 per convincersene: ivi tra l'altro si lamenta la mancanza assoluta del disegno, delle lingue moderne, di alcuni argomenti di matematica indispensabili, della parte applicativa, specie numerica, che nei riguardi professionali è forse più importante della teoria: e quasi le stesse osservazioni si fanno per la fisica e la chimica. Risultano perciò evidenti le condizioni migliori in cui si trovano gli agrimensori rispetto ai licenziati dal liceo.

Ma la difficoltà maggiore da superare per conseguire il nostro intento sta secondo il mio avviso nella comune opinione, che le scuole classiche sieno quelle che meglio preparano ad ogni sorta di studi; che sieno ad un livello superiore alle altre scuole secondarie, e che perciò la licenza liceale debba avere il privilegio sopra le altre di aprire l'adito a tutte le scuole superiori.

Constato il fatto, non lo discuto. In una assai recente circolare ministeriale (del 4 maggio a. c. inserita nel Bollettino del 12) ai prefetti ed ai presidenti delle giunte di vigilanza è detto:

I licenziati dalle sezioni di commercio e ragioneria, agrimensura ed agronomia degli istituti tecnici saranno dispensati, nell'esame di licenza liceale, dalla sola prova di scienze naturali. Dunque un agrimensore nel caso (quasi improbabile del resto) che volesse ottenere la licenza liceale, dovrebbe ridare gli esami non solo d'italiano, nel quale è stato chiamato alla pari coi licenziati dal liceo sullo stesso tema alla gara d'onore, ma ancora gli esami di matematica, fisica,

chimica, geografia etc. . . . in materie cioè dove ha una cultura superiore, come risulta dai programmi, agli studenti liceali. E questo perchè? molto probabilmente, perchè l'agrimensore non sa di latino.

Così risalendo ad alcuni anni or sono, Aristide Gabelli (per citare delle autorità in materia) in un articolo in difesa dell'istruzione classica (vedasi il fasc. 1° ottobre 1888, *Nuova Antologia*) dice: « Brioschi e Cremona, tutti e due direttori di scuole d'applicazione, tutti e due celebri nelle scienze, affermano concordemente per lunga e costante esperienza loro propria, che gli alunni provenienti dal liceo, dopo essersi trovati inferiori nel 1° anno a quelli degli istituti tecnici, vanno loro innanzi, quantunque in questi sia molto maggiore la preparazione diretta. Tanto l'indiretta prevale! »

Quest'asserzione tante volte citata, e che fu una delle principali ragioni che mossero S. E. il Ministro Baccelli nella prelodata circolare del 30 novembre 1894 a dire che la sezione fisico-matematica può essere considerata come un liceo senza l'insegnamento delle lingue e letterature classiche, ossia privo dell'essenza stessa del liceo, e perciò a studiare, se non era il caso di abolirla in molti istituti (e perchè allora non in tutti?), non ha sempre avuto secondo il mio avviso una giusta interpretazione. Io mi domando: ma questo risultato è proprio dovuto in tutto, come crede il Gabelli, alla prevalenza della preparazione indiretta? Mi faccio lecito di dubitarne; prima perchè, come osserva la prelodata relazione Bardelli, quei giovani del liceo che per la successiva carriera di studi si sono determinati per le scienze fisiche e matematiche, trascurano o curano molto meno l'insegnamenti letterari degli scientifici, onde loro vien meno quella tal preparazione indiretta di cui sopra. Ma ammesso anche che ciò non sia, io trovo un'altra spiegazione non meno probabile del fatto in ciò, che tra gli studenti di liceo chi studia matematica rappresenta l'eccezione e precisamente chi sente una disposizione speciale a questi studi; perciò non dee recar meraviglia che possa non solo rimediare da sè alle lacune che trova passando alla università, ma mettersi alla pari e superare anche gli altri. Superarli però, io credo, nella parte razionale o teorica, perchè a lui farà sempre difetto la pratica, che non ha acquisita nel liceo e di cui sdegherà occuparsi alle scuole superiori. L'istituto tecnico invece e più propriamente la sezione fisico-matematica insieme a giovani distinti fornirà anche la parte mediocre alle scuole degli ingegneri, perchè molti o per circostanze di famiglia o per tradizione o per altro vi si avviano anche senza disposizione e senza avere la chiara coscienza di quel che fanno; e poichè questa sezione non offre altra via da scegliere (se ne eccettui la scuola navale superiore), si trovano in certo modo costretti a studiare matematica anche se poco o nulla disposti.

E tornando all'asserzione citata dal Gabelli e che risale certamente ad una ventina d'anni fa per lo meno, io dubito non poco che l'illustre direttore del politecnico milanese, se fosse ancor vivo, non che l'on. sen. Cremona oggi la ripeterebbero; la statistica per quanto mi consta pel politecnico milanese non la conferma più. E finalmente mi si permetta di osservare che, se dai licei escono di-

stinti ingegneri e scienziati, non mancano esempi per contrapposto di distinti letterati usciti dagli istituti, dove pure manca il sussidio degli studi classici: Marco Praga ed Ugo Valcarenghi provenienti dall'istituto di Milano per tacere d'altri.

Il che prova nuovamente che, più che tutto, è questione di naturale disposizione e di attività individuale.

Con tutto ciò non ho inteso di porre il benchè minimo dubbio sulla felice influenza che hanno gli studi classici, oltre che ad eccitare al culto del bello e dei più alti ideali, a sviluppare ed invigorire le facoltà intellettuali, a predisporre la mente ad ogni genere di studi. Ho voluto solamente dire che non trovo giusto oggi il ritenere la scuola classica ad un livello superiore alle altre scuole secondarie: che la facoltà data ai licenziati dal liceo di accedere alla facoltà matematica va intesa, secondo me, come una concessione loro fatta in vista appunto dei benefici effetti degli studi classici, sicchè sebbene insufficienti a principio, possono in seguito mettersi alla pari e distinguersi fra gli altri.

E perchè allora non potranno fruire di eguale concessione gli agrimensori assai meglio preparati per le scuole d'ingegneria, come mi sembra d'aver dimostrato?

Si richiegga pure, se lo si crede utile, la licenza liceale od almeno l'esame di latino a chi aspira al dottorato in scienze ed a professare le medesime come insegnante; ma non si precluda la via all'agrimensore di passare alla scuola degli ingegneri, che, ripeto a mio avviso, ne è il naturale proseguimento e compimento.

Io spero che gli egregi colleghi, che hanno avuto la compiacenza di ascoltarmi fin qui, saranno convinti della equità della mia proposta e vorranno perciò votare in favore della mozione seguente che presento al banco della presidenza:

« L'Associazione « MATHESIS » riunita in Torino nel settembre '98 in occasione del congresso pedagogico;

« Considerato che i licenziati dalla sezione agrimensura degli istituti tecnici hanno una coltura generale scientifica, che si può ritenere non inferiore a quella dei licenziati in fisico-matematica e dai licei, anzi rispetto a questi ultimi superiore;

« Considerato che circa la coltura letteraria la deficienza del tedesco o dell'inglese (rispetto ai licenziati in fisico-matematica) può essere colmata, come pei licenziati dal liceo, colla iscrizione al corso di una di dette lingue nelle scuole sup. senza pregiudizio dei loro studi, e che in ogni caso non è tale da impedir loro un buon profitto negli studi;

« Considerato infine che gli agrimensori sono già al corrente della parte elementare dei corsi delle scuole d'applicazione di topografia, costruzioni, disegni relativi, estimo, agraria, ecc....; il che li pone a questo riguardo in condizioni più favorevoli, che non sieno i licenziati dai licei e dalla sezione fisico-matematica per accedere a dette scuole;

« Fa voti a S. E. il Ministro della P. I. perchè si compiaccia concedere anche agli agrimensori, che la desiderano, l'ammissione senza esami alla facoltà matematica od al biennio preparatorio pel passaggio alla scuola d'applicazione degli ingegneri ».

QUISTIONE PROPOSTA DAL PROFESSORE SAULLE PIAZZA

*Insegnamento della matematica
nella sezione di commercio e ragioneria nell'istituto tecnico.*

EGREGI COLLEGGI,

Fra tutte le questioni da discutersi nel prossimo congresso degli insegnanti di matematica nelle scuole secondarie, quella che a me sembra di maggiore importanza pratica è la IV. Ed in questa questione può entrare una mia proposta che, modesta da un lato poichè riguarda un solo ordine di scuole, sarebbe d'altra parte, se accettata, di reale, indiscutibile giovamento ad un gran numero di giovani. È da molto tempo che io mi fo la seguente domanda: « *È utile ed opportuno che il programma di matematica del primo biennio dell'istituto tecnico sia comune ai giovani di tutte le sezioni?* »

Dato l'attuale ordinamento degli Istituti Tecnici, la scelta dell'una piuttostochè dell'altra sezione vien fatta dopo il primo anno, ed è per questo che nel rispondere alla mia domanda non posso occuparmi se non del II corso.

Che l'insegnamento della geometria solida fatto ai giovani della sezione di commercio e ragioneria con la stessa estensione che ai giovani delle altre sezioni, sia ai primi perfettamente inutile nell'esercizio della loro professione è cosa evidente. Nè si ripeta la solita obiezione dell'utilità che può avere detto studio come mezzo efficacissimo allo svolgimento dell'intelligenza, dappoichè gli argomenti che posson valere pei futuri laureati in qualunque scienza sembrami non debbano avere la stessa importanza pei futuri ragionieri: altro è l'insegnamento classico, altro il tecnico; e d'altronde una parte di quest'utile i futuri ragionieri l'hanno già avuto con lo studio della geometria nel primo corso.

In quasi nessuna delle scuole commerciali all'estero, corrispondenti alle sezioni di commercio e ragioneria dei nostri istituti tecnici, havvi un programma di geometria, mentre essa si insegna, come da noi, nelle scuole inferiori corrispondenti alle nostre scuole tecniche.

Anche il programma d'algebra del II corso potrebbe essere svolto ai giovani della sezione di commercio e ragioneria con metodo molto più pratico che non si segua adesso. Se, ad esempio, si può comprendere (benchè molti vi siano contrari) l'insegnamento completo della teorica degli irrazionali fatto nel primo biennio ai giovani delle sezioni fisico-matematica e di agrimensura, si può davvero asserire utile ed opportuno pei giovani della sezione di commercio e ragioneria?

Nè posso tacere del danno che da questa promiscuità deriva alla coltura matematica degli alunni delle prime due sezioni. Nessun maggiore inconveniente che avere un corso frequentato da giovani

che a quell'insegnamento danno poca importanza ritenendolo ad essi quasi inutile: il vantaggio che avrebbero i giovani delle sezioni fisico-matematica e di agrimensura quando dovessero *da soli* assistere al corso di matematica, sarebbe grandissimo.

Quando però tutti gli inconvenienti si riducessero a quelli sinora accennati, potrebbe sembrar prematura la necessità di un cambiamento di programma. Ma v'ha di più e di ben più importante.

Nessuno ignora come da qualche anno anche in Italia si vada estendendo uno studio che da moltissimi anni ha una importanza grandissima all'estero, specie in Inghilterra: quello cioè dell'*aritmetica politica o matematica sociale*.

La statistica, la teoria delle assicurazioni, i bilanci tecnici delle società di mutuo soccorso ecc. si basano tutte su teorie matematiche, prima fra esse la teoria delle probabilità. In tutte le scuole commerciali dell'estero (parlo di scuole *medie* e non *superiori*) fa parte del programma di matematica un corso di matematica sociale; nella sola Italia si è creduto ciò inutile, e si limitarono queste cattedre alle tre scuole superiori di commercio.

Se pur non si vuole introdurre un corso completo di matematica sociale, perchè non insegnare almeno ai giovani delle sezioni di commercio e ragioneria gli elementi del calcolo delle probabilità con qualche applicazione, e dare così il mezzo di proseguire tali studi a quelli che se ne sentissero la vocazione?

Inspirata a questi concetti sorse in me l'idea della seguente proposta:

Nel II corso dell'istituto tecnico l'insegnamento della matematica sia diviso, e precisamente: *5 ore settimanali* ai giovani delle sezioni fisico-matematica e di agrimensura con l'attuale programma e *5 ore settimanali* ai giovani della sezione di commercio e ragioneria. Il programma per questa ultima sezione dovrebbe essere il seguente:

a) Nozioni di geometria solida (poco più che una semplice ripetizione di quanto i giovani già impararono nelle scuole tecniche);

b) L'attuale programma d'algebra svolto con metodo molto più pratico, dando massima importanza alle applicazioni dell'interesse composto e delle annualità;

c) Permutazioni, disposizioni, combinazioni. — Binomio di Newton per esponente intero. — Elementi del calcolo delle probabilità con qualche applicazione;

d) Nozioni fondamentali sulle coordinate cartesiane. (Questa parte del programma deve avere il solo scopo di render chiaro agli alunni il modo di poter rappresentare per punti con una curva una funzione qualunque, per es. la mortalità nelle varie età, ecc.)

Con tale innovazione bisognerebbe aumentare l'orario complessivo di 5 ore settimanali, e quindi i due professori di matematica avrebbero cumulativamente 25 anziché 20 ore settimanali. Ma non saranno certo gli insegnanti di matematica che si lasceranno impressionare da un aumento d'orario, essi che primi fra tutti, colla fondazione di Mathesis, hanno mostrato esser precipuo loro sentimento l'amore alla scuola.

RELAZIONE SULLA QUINTA QUISTIONE.

proposto dal Comitato dell'Associazione " MATHESIS "

Modificazioni da introdursi nell'ordinamento degli studi matematici universitari, affine di ottenere buoni insegnanti secondari.

EGREGI E CHIARISSIMI COLLEGGI,

Il presidente dell'Associazione « MATHESIS » volle affidare a me l'incarico di riferire intorno alla quistione quinta, ricordandomi che io la mossi, la studiai e la discussi nell'adunanza di Palermo del 27 febbraio 1897. (*)

Nell'accingermi all'adempimento del compito da me accettato non senza trepidazione, io domando che voi, che mi fate l'onore di ascoltar mi, vogliate perdonarmi se, spinto dalla importanza dello scopo cui mira la quistione quinta, allargherò alquanto i limiti di questa.

Incomincio col rilevare una strana e pernicioso consuetudine che vige in Italia. Mentre si fanno commissioni distinte di calcolo infinitesimale, di algebra complementare, di geometria superiore, e via dicendo, distinguendo i competenti in ciascuna di queste discipline, tutti i professori delle facoltà matematiche universitarie si reputano e sono reputati adatti e competenti a giudicare in materia di matematiche elementari. Ora vi è minore differenza tra uno specialista, per es., di algebra superiore e uno specialista di geometria superiore, che tra ciascuno di questi due e un vero specialista di matematica elementare.

Questa parte elementare della matematica ha una letteratura antica e moderna varia ed immensa. In essa oggidì segue un continuo perfezionarsi di metodi, una cura incessante di consolidare le basi, una tendenza ad esporre in modo sempre più rigoroso e inappuntabile, il solo proficuamente e sinceramente educativo dell'intelligenza e perfino del carattere, il solo che non inculchi nei giovani false illusioni e non ingeneri abiti fallaci, e direi disonesti, di ragionare. In essa ferve il lavoro per mantener vive ed estendere ed approfondire le cognizioni antiche e nuove in tutti i rami, delle stesse matematiche superiori, dai quali può trarsi luce sul campo elementare, per recare sotto miglior disegno e far dominare da più perfetti principî i vari argomenti speciali. E l'insegnante di matematiche elementari, che sia abituato a impartire le sue lezioni con amore e coscienza, sa quante cure egli deve tutto di spendere per avvicini-

(*) Bollettino dell'Associazione " MATHESIS " anno II, pag. 9.

narsi all'ideale della perfezione in ciascuna teoria e nel legame armonico delle diverse teorie fra loro; egli ogni anno scopre nuovi difetti nel modo come generalmente si insegnano e nel modo tutto suo proprio com'egli ha fino allora insegnato quelle teorie; e gli vien fatto ogni anno di orientarle diversamente, di ritoccarle nella sostanza e nella forma; ed egli, dopo lunghe e annualmente sovrappoventesi variazioni fatte, trova tuttavia il nuovo anno necessario meditare ancora nuove semplificazioni, nuovi perfezionamenti, nuove correzioni.

Sarà dunque possibile che chi ha sempre e soltanto occupato una cattedra universitaria abbia tutti i requisiti necessari per essere competente nel campo elementare?

Anche se prescindiamo dalla esperienza della scuola, troviamo molto esiguo il numero dei professori universitari italiani che prendono parte al movimento scientifico odierno su accennato, e non dirò a quale si riduca il numero di quelli che ciò fanno con successo.

Quindi in concorsi a cattedra di matematiche elementari si vedono commissari che non sanno o non vogliono dare il giusto valore a certe ricerche, sol perchè stimate di indole elementare, in confronto di altre dalle quali restano abbagliati, perchè appartengono a rami superiori, mentre che, appunto per questo, non dovrebbero tenersi in conto speciale in quel concorso, per ragioni ancora più forti di quelle che non fanno contare una nota, per quanto importante, sulla teoria dei numeri, per es., come titolo speciale in un concorso di geometria proiettiva e descrittiva.

Quindi si videro professori universitari di matematica, anche reputati valorosi, che, andati a ispezionare professori di scuole secondarie, riuscirono ad essere viceversa essi ispezionati, e che, per difetto di prudenza, fecero perfino delle tristi figure innanzi alla numerosa scolaresca, che contemplò attonita lo spettacolo del suo professore obbligato a dare ammaestramenti elementarissimi e di ordine fondamentale all'ispettore, che era stato ad essa annunziato come una illustrazione della tale cattedra, della tale università.

Io non voglio dire che invece nella schiera dei professori secondari di matematica ve ne siano moltissimi che stanno all'altezza degli studi speciali come io li ho delineati; ma dico che è questa schiera il solo terreno naturale dove si producono e devono rintracciarsi gli eccellenti veri specialisti e competenti in materia di matematica elementare.

E lo scopo della quistione quinta è precisamente di accrescere sempre più il numero di questi eletti specialisti e il valore di ciascuno di essi.

Ma il complesso dei mezzi che debbono adoperarsi per raggiungere questo scopo è da cercarsi in un campo più vasto di quello nel quale si restringe la detta quistione.

Basterà infatti, ch'io accenni alla sfuggita, le condizioni miserevoli nelle quali è lasciato l'insegnante secondario italiano, a cui è riserbata una carriera che è un'ironia, grazie alla colpevole grettezza e noncuranza delle classi politicanti e dirigenti per ciò che riguarda la istruzione, la cultura, l'educazione nazionale.

Basta pensare, in particolare, al falso posto che occupa nella opinione, non che del pubblico, degli stessi matematici, l'insegnante di matematiche elementari.

La doppia inferiorità economica e morale, in cui è tenuto questo insegnante, è cagione che molti dei più forti, capitati ignari o illusi nella magra derelitta carriera, sentendo in sé la forza e la volontà di lavorare, dirigono la navicella dell'ingegno a tutt'altro che a diventare eccellenti cultori e insegnanti della disciplina che ad essi ufficialmente fu affidata; e qualcuno, mettendo in non cale il suo ufficio, provvisoriamente a malincuore sopportato, naviga diritto verso l'approdo avventuroso d'una cattedra universitaria, preoccupandosi, non della propria perfezione e cultura razionale e completa, ma di secondare i gusti delle commissioni che dovranno giudicarlo.

Quegli altri che, malgrado il gagliardo ed attivissimo ingegno, rimasero nell'insegnamento secondario, perchè, come ad un apostolato, vi consacrarono tutta la loro esistenza, sono dai più riputati malaccorti o peggio; ed hanno il conforto di non veder adeguatamente apprezzate le qualità speciali e l'infaticabile lavoro che dovettero spendere per cercar di raggiungere la eccellenza nella loro professione, per prendere, come dal loro ufficio particolarmente è richiesto, un degno posto in quella categoria di matematici, che FELIX KLEIN chiama dei *matematici logici*, dove, per questo sommo geometra, « la parola logico serve semplicemente ad indicare che la principale forza degli uomini che fanno parte di questa classe consiste nella loro potenza logica e critica, nel loro potere di dare delle definizioni precise, e di trarre da queste ultime delle deduzioni rigorose ». (*)

Lasciando da banda la questione del miglioramento economico, la quale non deve essere toccata dalla nostra associazione, concludo questa prima parte della mia relazione col presentare le seguenti proposte, alcune già parzialmente accennate nell'adunanza di Palermo sopra citata:

A. *Si promuova un mutamento nella opinione pubblica e specialmente nella opinione degli stessi matematici, perchè sieno considerati gli studj sui fondamenti delle matematiche, e in particolare sulle matematiche elementari, come un ramo speciale di studj, che stia alla pari dei rami così detti superiori.*

B. *Siano affidate le sorti dell'insegnamento di matematica elementare completamente nelle mani dei migliori insegnanti di questa disciplina. Così di essi soltanto si compongano il corpo degl'ispettori, le commissioni giudicatrici dei concorsi alle cattedre, le commissioni per le promozioni, quelle pei libri di testo, quella per la compilazione dei programmi.*

[Questa proposta è un corollario del seguente voto di ordine generale che sarebbe da caldeggiare:

La pubblica istruzione sia tolta completamente all'influenza della

(*) *Conférences sur les mathématiques faites au congrès de mathématiques tenu à l'occasion de l'exposition de Chicago, recueillies par A. ZIWET, traduites par L. LAGEL, Paris, 1898, pag. 2.*

fluttuante politica; le lettere e le scienze siano assolutamente padrone di sè stesse; il governo della istruzion pubblica sia affidato a quelli che la istruzion pubblica impartiscono.]

C. *Per conseguire una cattedra universitaria sia condizione necessaria avere insegnato con lode per un certo numero di anni nelle scuole secondarie, ed essersi occupato efficacemente del progresso delle matematiche elementari.*



Passando ora alla precisa quistione quinta, incominciamo col domandarci:

Quali sono gli scopi che deve e può proporsi una Facoltà universitaria di matematica, oltre quello di fornire le conoscenze matematiche necessarie ai giovani che dovranno diventare ingegneri?

Sembra che siano questi tre:

1°. Fare apprendere al giovane la parte essenziale già ben definita delle scienze matematiche;

2°. Condurre il giovane sino agli ultimi confini, ancora forse malsicuri, in tale o in tal'altra regione della scienza; porlo in grado di raffermare il possesso di quelle estreme plaghe, di oltrepassarle per avventurarsi all'onore e alla gloria di nuove conquiste; formare, cioè, il matematico, direi, *conquistatore*;

3°. Addestrare il giovane nell'arte di rassodare le basi e di rintracciare lo sviluppo storico e le ragioni ultime delle verità matematiche già acquisite, di migliorare e semplificare la concatenazione di queste verità, di perfezionare i metodi della esposizione di esse, per renderle più chiare, assimilabili e proficue; formare insomma il matematico *logico* di KLEIN, il matematico, vorrei dire, *cultore*, e, in particolare, il matematico *professore*.

Ma queste due maniere di essere del matematico conviene e si può tenerle nettamente separate fra loro?

Un matematico conquistatore fa con vera sicurezza e con gloria imperitura le sue scientifiche conquiste soltanto quando è posseduto e diretto dallo spirito logico e critico del matematico logico, e d'altra parte nella pratica vediamo che è obbligato o è tratto a fare il matematico professore. Viceversa un matematico professore acquista lustro e sente grandi soddisfazioni e torna con maggior lena alla sua arte, facendo qualche escursione nel campo del conquistatore.

Ed ora la domanda:

Sono bene ordinate ai tre indicati scopi le presenti facoltà matematiche, poniamo anche di primo ordine?

In quanto al primo scopo la risposta è per comune consenso affermativa.

Quanto al secondo il prof. ERNESTO PASCAL, nel suo articolo « Sugli insegnamenti di matematica superiore nelle università italiane, » (*) ha per la prima volta risposto in modo assoluto negativamente, ed

(*) *Rivista di Matematica*, vol. III, 1893.

ha accennato alle riforme da effettuarsi. Io accetto completamente le idee del prof. E. PASCAL. Esse furono sostenute dal prof. E. CREPAS al Congresso universitario di Torino del 1894, che le approvò ad unanimità. Lo stesso prof. CREPAS ha ripreso a trattare l'argomento, (*) venendo ad alcuni particolari intorno al modo in cui si dovrebbero coordinare gli studj di matematiche superiori (2° biennio) in tre sezioni distinte; ma pare ch'egli così siasi allontanato dalle idee di libertà assoluta del prof. E. PASCAL, il quale si ispirava alla *Lern-und-Lehr-Freiheit* delle università tedesche.

Noi qui non dobbiamo occuparci di questo argomento; e passeremo a riconoscere il perfetto accordo che vi è nel rispondere negativamente a quella stessa domanda in quanto concerne il terzo degli scopi sopra riferiti. È questo accordo che ha fatto porre la questione quinta, in particolare.

Le scuole di magistero presso le facoltà di filosofia e lettere e quelle presso le facoltà di scienze matematiche e naturali dovrebbero, giusta l'art. 2 del loro regolamento, avere *per fine di rendere gli alunni esperti nell'arte d'insegnare le discipline che, secondo le vigenti leggi, sono insegnate nei licei, nei ginnasi, nelle scuole tecniche e normali e negli istituti tecnici*. Ma quasi tutte le poche scuole di magistero che furono istituite presso le facoltà di scienze matematiche non risposero e non rispondono punto a questo scopo; e con vero compiacimento ho appreso dal processo verbale dell'adunanza parziale della nostra associazione, tenuta a Bologna il 3 aprile 1898, che la scuola di magistero di Bologna fa onorevole eccezione. Per le altre son restate lettera morta perfino quelle buone, sebbene scarse, disposizioni prescritte dal regolamento. E che le dette disposizioni sieno insufficienti non se lo dissimula nemmeno lo stesso ministro VILLARI, che le promulgò; poichè egli comincia la relazione che precede il regio decreto 29 novembre 1891, approvante il regolamento, col dichiarare: « Una riforma sostanziale delle scuole di magistero non è possibile senza connetterla con una riforma delle università. Ma per questa occorre tempo, ed è necessario una legge del Parlamento. Intanto da più parti si domanda con grande insistenza un qualche provvedimento, perchè i molti e diversi regolamenti che furono pubblicati per le scuole di magistero, lasciarono le cose in una grande incertezza, accresciuta dal fatto che l'ultimo di essi non venne attuato, sicchè non si sa precisamente quale di essi debba essere posto in vigore.

Un provvedimento perciò è divenuto urgente. Ma non si tratta per ora di fare una istituzione nuova affatto, perchè bisogna tener conto dell'ordinamento presente delle nostre università, ed ancora di uno stato di fatto, che ha creato delle consuetudini e degli interessi, dei quali non è sempre facile non tenere alcun conto. Quello che importa è che alla incertezza presente si ponga un termine, e che le cose non peggiorino in modo da rendere sempre più difficile una riforma più radicale, la quale non è ora possibile ».

(*) *Scuola secondaria italiana*, 1898.

Dopo che il comitato direttivo dell'Associazione « MATHESIS » ebbe proposta la questione quinta, e ancora più, dopo che volle scegliere me relatore di essa, io fui impegnato a ritornare sulle proposte discusse il 27 febbraio 1897, per svilupparle e completarle; e, come risultato definitivo del mio studio, ecco qui appresso i provvedimenti che io ora propongo siano introdotti nelle facoltà complete di matematica, perchè queste abbiano modo di fornire il corredo di cognizioni e di esercitazioni più adatte a preparare quegli che dovrà degnamente occupare una cattedra di matematica.

I. *Stabilire un Corso sui FONDAMENTI DELLE MATEMATICHE.*

Chi dettasse questo corso potrebbe specialmente attingere, per la Geometria ai due volumi, testè finiti di stampare, « Einführung in die Grundlagen der Geometrie » di W. KILING, e alle pubblicazioni di GRASSMANN, HELMOLTZ, RIEMANN, LEGENDRE, HOÜEL, F. KLEIN, PASCH, PEANO; per l'Arithmetica ai lavori di GRASSMANN, HANKEL, DEDEKIND, KRONECKER, WEIRSTRASS, G. CANTOR; per la teoria delle grandezze alle pubblicazioni di GRASSMANN, BETTAZZI, BURALI-FORTI.

II. *Stabilire delle Conferenze sui METODI D'INSEGNAMENTO DELLE MATEMATICHE nelle varie scuole.*

Queste conferenze potrebbero ispirarsi per es. ai libri di *Lacroix*, di P. SERRET, di DCHAMEL; e dovrebbero specialmente discutere i vari modi come ogni teoria può essere odiernamente presentata e trattata, e indicare i vantaggi di ciascuno o della combinazione di alcuni sugli altri, in corrispondenza di questo o quello scopo che l'insegnante deve proporsi.

III. *Stabilire delle Conferenze di CRITICA sui più notevoli libri di testo proposti o adottati nelle varie scuole italiane ed estere.*

IV. *Stabilire l'obbligo di un certo periodo di SAGGI DI LEZIONI, che ciascuno studente, sotto la vigilanza dei suoi professori, e secondo norme precedentemente discusse, dovrebbe impartire, o innanzi ai colleghi della facoltà, o meglio, se fosse possibile, in una scuola secondaria; e l'obbligo di ESERCITAZIONI PRATICHE sui criteri da seguirsi per scegliere e per correggere le questioni che effettivamente si proporrebbero e si farebbero risolvere o ai propri colleghi o agli alunni della detta scuola secondaria.*

V. *Stabilire un Corso sulla STORIA DELLA MATEMATICA.*

VI. *Stabilire un Corso di LOGICA MATEMATICA.*

VII. *Istituire una BIBLIOTECA che, oltre a contenere opere riguardanti i varj rami di matematiche superiori, abbia una speciale COLLEZIONE DEI LIBRI DI TESTO E DEI LIBRI DI ESERCIZI che sono stati pubblicati dovunque nel campo delle matematiche elementari.*

VIII. Affidare, per un biennio, a un professore il corso sui *fondamenti* (proposta I); a un altro le conferenze sui *metodi d'insegnamento* (proposta II) e le conferenze di *critica* (proposta III); ad entrambi, ma con *preponderanza al secondo*, i saggi di lezioni e le esercitazioni (proposta IV).

Scegliere il secondo di questi due professori esclusivamente fra coloro che hanno almeno per un decennio insegnato con zelo ed efficacia nelle scuole secondarie, e siensi segnalati per ingegno, atticità scientifica e soda cultura; scegliere il primo professore o in questa medesima categoria o anche fra quei professori universitari, che alle ricerche originali nelle alte regioni della loro scienza abbiano associati lunghi e meditati studi sui fondamenti di essa, e che non abbiano disdegnato di scendere spesso nell'unile dominio della matematica elementare.

Affidare i corsi di storia della matematica e di Logica matematica a due chiari cultori di queste discipline.

IX. Istituire delle CONFERENZE AUTUNNALI, che qualche professore opportunamente scelto fra quelli nominati colle norme della proposta VIII, e anche un eminente matematico in generale, dovrebbero dare, in una città centrale del regno, intorno ad argomenti che hanno attinenza colle matematiche elementari, o che possono contribuire a migliorare l'insegnamento di queste. A tali conferenze (*) dovrebbero assistere sia gli studenti del secondo biennio delle facoltà di matematica, sia i professori di scuole secondarie.

X. Attuare il piano delle riforme qui presentato, dapprima soltanto in una o in due facoltà, che sieno tra le più importanti e che meglio si prestino allo scopo delle riforme stesse.

Perocchè sarebbe presentemente impossibile trovare un numero di persone che potessero degnamente occupare le nuove cattedre, quando le riforme si attuassero in un maggior numero di università. Sarà invece l'attuazione, fatta così limitatamente, incitamento ad una gara che farà crescere il numero di queste persone; e si potrà poi estendere la riforma stessa a qualche altra facoltà matematica di primo ordine. Valgono in gran parte anche a questo proposito le giuste considerazioni nel citato articolo fatte dal prof. E. PASCAL intorno alla smania di tener su in Italia un numero di facoltà matematiche complete che sorpassa la presente potenzialità scientifica del nostro paese.

XI. Il corso, le conferenze, i saggi di lezioni e le esercitazioni, di cui nei numeri I-IV, costituiranno la nuova SCUOLA DI MAGISTERO della facoltà di matematica.

Per ottenere il diploma di questa scuola sarà necessario, non solo aver frequentato il corso biennale della scuola stessa, averne superate

(*) Di cui si ha un modello in quelle di F. KLEIN, pubblicate sotto il titolo *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*, ausgearbeitet von F. TÄUBER, Leipzig, 1895. Vedi la traduzione italiana di F. GIUDICIZ, Torino, 1896.

le prove, aver conseguita la laurea in matematica, ma altresì aver frequentati i corsi di storia della matematica e di logica matematica, e averne superati gli esami.

*
* *

Ed ora incomincio dal notare che il citato regolamento per le Scuole di magistero sostanzialmente contiene (art. 5 e 6) le disposizioni delle precedenti proposte II, III e IV.

Osservo poi che le adunanze di Bologna, di Sassari, di Recanati, che, fra quelle promosse dall'Associazione « MATHESIS », discussero la questione quinta, (*) si mostrarono favorevoli, alle proposte I e V l'adunanza di Bologna; alle proposte I e V e specialmente alla IV, l'adunanza di Sassari; alla proposta V e forse (se ho bene interpretato) alle proposte I, II e IV, l'adunanza di Recanati.

Passerò finalmente alle risposte individuali date alla questione quinta.

Il dott. E. CREPAS, in due articoli pubblicati nella « Scuola secondaria italiana », uno dei quali ho già innanzi citato, si manifesta favorevole alle proposte II-V.

Il prof. C. LAZZERI, dice semplicemente e indeterminatamente: « Ritengo utile l'istituzione di cattedre di matematiche elementari nel 2° biennio dell'università, affidate a chi di insegnamento secondario ha fatto lunga pratica ».

Il prof. O. BUZZI insiste sulla proposta V.

Il prof. F. ANGELERI vorrebbe ridurre a due soli i professori di scienze nei licei, « l'uno dei quali insegnasse Matematica e Meccanica, l'altro il resto della Fisica e le Scienze naturali »; e soggiunge: « per poter creare tali insegnanti sarei di parere che il primo biennio di università fosse per tutte le facoltà scientifiche in comune, e nel secondo biennio, che vorrei fosse una vera scuola normale superiore, avvenisse la divisione, essendovi tuttavia delle materie in comune. Vorrei di più che tutti gli studenti di scienze fossero obbligati a frequentare una materia letteraria filosofica, come quelli di lettere dovessero prender parte a qualche lezione di scienze ».

Il prof. F. PALATINI è favorevole alla istituzione della cattedra di cui nella proposta I; ma vorrebbe che a questa cattedra fosse nominato esclusivamente un provetto e distinto insegnante di scuola secondaria, allontanandosi così, in parte, dalla proposta VIII; e vorrebbe (d'accordo con la proposta VIII) che la nomina fosse temporanea, per ragioni ch'ei riferisce.

Il prof. G. B. MARANGONI richiede che « nei concorsi il titolo di ingegnere non sia ritenuto equipollente a quello di dottore in matematica pura ».

Ed io dirò che in fatti la legge non lo ritiene equipollente; ché anzi domanda come titolo necessario per ottenere una cattedra di matematica nelle scuole secondarie superiori la laurea in matematiche pure.

(*) *Bollettino*, anno II, n. 6, e anno III, n. 1.

Ma pur troppo alle volte abbiamo visto, in onta alla legge, nominare professore a una tale cattedra, in città di primo ordine, senza concorso, qualche giovane fornito della sola laurea d'ingegnere, a marcio dispetto di tanti che avevano il diritto di aspirarvi.

Ond'io sottopongo al vostro giudizio un'altra proposta (la XIII), che formulerò più oltre.

Finalmente il prof. D. GAMBOLI non trova utile cambiare l'odierno ordinamento delle facoltà matematiche, ch'ei giudica ottimo.

Da quel che ho detto innanzi risulta perchè e come questo giudizio è erroneo.

Il prof. GAMBOLI dice poi che a lui sembra superfluo istituire la cattedra sui fondamenti delle matematiche, principalmente perchè questi sono inclusi tanto nel corso di analisi superiore quanto in quello di geometria superiore. Io posso anche asserire di più, che nell'analisi si raccoglie e compendia tutta la matematica. Ma non da questo potrò dedurre la superfluità, per es., delle cattedre di calcolo infinitesimale, di algebra complementare, di geometria analitica, e via dicendo, che invece servono a dei fini definiti e costanti, riconosciuti indispensabili a formare la cultura matematica.

In terzo luogo il prof. GAMBOLI vorrebbe « sopprresse le scuole di magistero annesse alle facoltà di matematica, perchè non rispondono punto al fine, pel quale sono state istituite, e non sono che delle vere sinecure per alcuni docenti; e in luogo di esse, soggiunge, sarebbe assai meglio che i giovani appena laureati fossero nominati assistenti del professore di matematica delle scuole secondarie inferiori delle grandi città ». A queste parole il prof. GAMBOLI fa seguire i particolari della retribuzione, delle incombenze, etc.; e in ultimo la dichiarazione che la sua proposta istituzione degli assistenti è modellata su quella vigente presso il municipio di Milano per le scuole elementari.

Di questa proposta, la prima parte, distruttiva, non posso accettarla; perocchè non è ragionevole ed umano condannare alla morte un organismo sol perchè malato, quando è possibile ridargli la salute e infondergli vita e vigore; ed è perciò che io al contrario ho a voi presentate le proposte I-XI. La seconda parte della stessa proposta del prof. GAMBOLI, la parte creativa, l'accetto nella sostanza, e la presento sotto la forma della proposta XII, che qui segue.

Ecco dunque le due ultime proposte già preannunziate:

XII. Ogni anno sarà bandito un concorso fra i giovani che hanno ottenuto il diploma di una scuola di magistero, allo scopo di classificarli per ordine di merito. Quindi i giovani classificati si andranno ordinatamente nominando, al più presto, come assistenti, per due anni in una scuola secondaria inferiore, e per i due anni successivi in una scuola secondaria superiore. Si sceglieranno le scuole che hanno le classi più numerose. Le retribuzioni saranno a carico del governo, della provincia e del comune ove risiede la scuola, etc.

SARÀ ASSOLUTAMENTE VIETATA LA NOMINA AD ASSISTENTE IN UN MODO DIFFERENTE DA QUELLO ORA DESCRITTO.

XIII. NON SI PUÒ ESSERE NOMINATO PROFESSORE DI UNA SCUOLA SECONDARIA SE NON PER CONCORSO.

Perciò ogni anno si farà un concorso a cattedre già vacanti o che si renderanno vacanti durante l'anno nelle scuole secondarie. Sarà titolo necessario per la eleggibilità la laurea in matematiche pure; sarà titolo di grande preferenza il diploma di una scuola di magistero e il certificato di assistenza alle conferenze di cui nella proposta IX; sarà nuovo titolo di preferenza l'avere lodatamente esercitato l'ufficio di assistente di cui nella proposta XII.

*
* *

Mi si concedano ancora poche parole perch' io possa spezzare una lancia in favore d'una nuova Cenerentola.

Si sarà notato che, delle mie proposte I-VI, l'unica che non abbia trovato consenso in nessuno degli egregi colleghi, dei quali ho riferite le opinioni, è quella che mira a istituire un corso di logica matematica.

Ebbene io ho grande fede nel molto bene che i metodi del calcolo logico, dalla maggior parte degli scienziati disprezzato o deriso, son destinati a portare, non solo nell'insegnamento, ma nelle ricerche scientifiche in generale. Dico questo per intimo convincimento, e non perchè so di trovarmi nella cittadella dove quei metodi sono così pertinacemente e con tanto valore propugnati. E potrei recare esempi, anche recentissimi, di lavori che, pur rivelando una forte potenza investigatrice delle più profonde questioni scientifiche, sono tanto deficienti dal punto di vista logico, (sia per le proposizioni malamente poste a fondamento o non poste addirittura, sia nella concatenazione delle proposizioni dedotte), che fanno deplorare che i loro autori sieno così ignoranti o noncuranti o dispregiatori dei prelodati metodi, i quali li avrebbero salvati dalla macchia d'un peccato, ch'io reputo capitale!

Perocchè, o egregi e chiarissimi colleghi, la scienza veramente assodata per sempre, la scienza che ha il bollo e l'aureola dell'eternità è soltanto quella che è perfettamente scevra di questo peccato.

Ond'io intendo che il corso di logica matematica debba essere istituito come obbligatorio per ogni sorta di studenti di matematiche pure.

Ed ora che, come ho potuto, ho esaurito il mio compito, domando la vostra benevola indulgenza. Non dubito che il vostro senno, la vostra cultura, l'esperienza vostra suppliranno alla deficienza del relatore, e che dalla discussione che seguirà verranno fuori dei risultati che faranno onore a questa adunanza e all'Associazione « MATHESIS », contribuendo a quel miglioramento dell'insegnamento della matematica che è lo spirito che anima la nostra associazione.

Prof. LUIGI CERTO.

NOTE ALLA DISCUSSIONE DELLA PRIMA QUISTIONE

TRATTATA DAL CONGRESSO

Non essendo stata completamente risolta la questione della fusione della geometria piana e solida, credo che sia utile ripetere qui e completare quanto ebbi l'onore di esporre al Congresso.

E prima di tutto facciamo un po' di cronaca per mettere bene in chiaro a qual punto è giunta attualmente la quistione.

In quasi tutte le adunanze parziali, promosse dal comitato dell'Associazione « MATHESIS » prima del congresso, era stata affermata l'opportunità di modificare gli attuali programmi in guisa che ogni insegnante potesse liberamente scegliere fra il metodo della separazione e quello della fusione della geometria piana e solida.

L'opportunità di questa modificazione è stata proclamata solennemente dal congresso *a unanimità di voti*, nella prima seduta dopo aver ben precisato il significato delle parole « fusione delle due geometrie ». Infatti nelle adunanze parziali tenute a Torino nei giorni 21 e 22 febbraio fu proposto che *per ora s'intenda per fusione un metodo didattico di alternazione di geometria piana e solida*, e in quelle tenute a Recanati nei giorni 28 e 29 giugno fu proposto invece che *per fusione debba intendersi un metodo didattico secondo il quale fin da principio si studiano simultaneamente gli argomenti affini di geometria piana e solida, e si vengono in seguito applicando le proprietà dell'una e dell'altra per trarne il maggior vantaggio possibile*.

Fra queste due interpretazioni il congresso accettò la seconda, che è la più ampia e più precisa.

In seguito a ciò, allo scopo di giungere ad una soluzione pratica, nell'ultima seduta fu proposta la seguente distribuzione della materia, che permette appunto la libertà di scelta fra i due metodi:

- nei Licei: 1° anno — *Proprietà di posizione e di eguaglianza.*
 2° anno — *Equivalenza, similitudine.*
 3° anno — *Misura. Trigonometria piana.*
- negli Istituti tecnici: 1° anno — *Proprietà di posizione ed eguaglianza.*
 2° anno — *Equivalenza, similitudine e misura.*
 3° e 4° anno — *Trigonometria e teorie complementari.*

Tale proposta fu fatta con un ordine del giorno, che portava le firme illustri dei professori Veronese e Segre insieme a quelle di molti fusionisti e separatisti; ma non fu messa ai voti, perchè dopo aver votato la sospensiva sopra la relazione BUSTELLI, nella quale si progetta un completo rimaneggiamento dell'istruzione secondaria, non parve opportuno un voto su proposte parziali.

Malgrado ciò, a nessuno può sfuggire quale e quanta importanza abbia il fatto che i rappresentanti delle opinioni più disparate sul proposito della fusione abbiano trovato il modo di mettersi d'accordo sopra una proposta conciliativa e tale da contentare tutti i gusti. Ed è logico che questa proposta debba finire coll'essere favorevolmente accolta dall'uomo illustre, che regge le sorti della pubblica istruzione, in omaggio a quei principî di libertà, che egli vuole introdurre in tutti i rami del pubblico insegnamento dal più elementare al più elevato.

Questo lo stato attuale di fatto, del quale, se volgono uno sguardo indietro non possono chiamarsi scontenti tutti coloro che, come me, sono fautori della fusione. Pensando agli ostacoli di ogni maniera che questa idea ha incontrato nel suo cammino, e confrontando il passato al presente, non possiamo fare a meno di provare una legittima soddisfazione. Quattordici anni fa, quando il compianto DE PAOLIS pubblicò i suoi *elementi*, la quistione della fusione era ignorata dai più, i fusionisti si potevan contare sulle dita di una sola mano, ed erano considerati come mattoidi o poco meno; oggi sono legione, mentre il numero degli oppositori diventa sempre più ristretto, e la quistione ha fatto tanto cammino che ha l'onore di occupare i professori di matematica il primo giorno che si adunano per il loro primo congresso; è proclamata la necessità di fare su larga scala l'esperimento, che è già stato fatto con successo nella R. Accademia navale ed in alcune scuole secondarie; e da un nucleo di professori viene presentato un progetto per render possibile questo esperimento.

Tenendo conto dei risultati ottenuti e di quanto già è stato scritto sull'argomento, parrebbe superfluo scrivere ancora sui vantaggi della fusione. Tuttavia, come ho già detto, non credo inutile ripetere qui quanto già ebbi l'onore di esporre al congresso, allo scopo di richiamare sull'importante argomento l'attenzione dei pochi che ancora non l'hanno studiato con tutta l'attenzione che merita.

È noto che i principali argomenti che militano a favore della fusione si possono raggruppare così:

1° *risparmio di tempo che si ottiene trattando simultaneamente gli argomenti affini di geometria piana e solida;*

2° *semplificazione di talune teorie di geometria piana, trattandole coll'aiuto di considerazioni stereometriche;*

3° *miglior coordinamento dello studio delle matematiche con quello delle altre materie, che s'insegnano nei licei ed istituti tecnici.*

Dall'interpettazione che fu proposta nelle adunanze di Torino, e che ho sopra ricordato, apparisce che in quella adunanza non si volle discutere la quistione nel suo triplice aspetto, ma si volle considerare soltanto il primo ed un poco il terzo, escludendo a priori il secondo.

È soddisfacente per noi fusionisti che due soli degli argomenti, su cui noi ci fondiamo, abbia indotto tanti e sì autorevoli insegnanti a ritenere utile l'esperimento su larga scala del metodo della fusione; ma credo necessario osservare che l'argomento più importante è precisamente quello che si è voluto escludere, e che forse non è stato fin'ora apprezzato come merita. Mi si permetta dunque d'insistere particolarmente su questo senza occuparmi degli altri due, che oramai possono dirsi quasi fuori di discussione.

È ormai cosa universalmente riconosciuta che la geometria elementare deve essere insegnata indipendentemente da ogni aiuto dell'algebra, affinchè raggiunga il suo alto scopo educativo e sia una scuola di logica; che gli esercizi misti di algebra e geometria, ai quali abitualmente i giovani s'interessano, devono essere un'applicazione, non un mezzo per dimostrare le verità geometriche. La teoria delle proporzioni è, secondo me, collegata al concetto di numero e di misura più di quanto si voglia ammettere, ma anche trattata col metodo Euclideo nella mente degli studenti si collega colle proporzioni fra numeri, e perciò, quando si fa largo uso delle proporzioni, l'idea di numero che si vuol cacciare dalla porta rientra dalla finestra.

Ebbene nel Trattato del DE PAOLIS il teorema « *Se due triangoli sono equiangoli fra loro, il rettangolo di un lato dell'uno e di uno non corrispondente dell'altro è equivalente al rettangolo dei lati corrispondenti a quelli considerati* » è dimostrato per mezzo di poche e semplici considerazioni stereometriche; e per mezzo di esso tutte le proposizioni relative alla teoria dell'equivalenza delle superficie piane, che, seguendo Euclide, si dimostrano in modo assai contorto e laborioso, si dimostrano invece colla stessa semplicità ed eleganza che il Legendre ottiene, facendo uso della teoria delle proporzioni e della misura.

Dopo di che anche lo studio delle superficie e dei volumi dei corpi rotondi, con, cilindri sfero e parti di queste, che anche in

molti buoni libri si fa per mezzo delle misure o almeno coll'aiuto della teoria delle proporzioni, si può fare invece senza ricorrere a misure o a proporzioni, dando anche agli enunciati forme più rispondenti alla intuizione geometrica.

Insomma l'uso delle considerazioni stereometriche ha semplificato assai la teoria dell'equivalenza, e l'ha resa assolutamente indipendente dalla teoria delle proporzioni, in guisa che si può trattare prima di questa.

Altri notevoli risultati si ottengono, stabilendo il concetto di omotetia per mezzo di poche nozioni sulle rette e piani paralleli, e deducendo poi da quello la teoria della similitudine, come abbiamo fatto il professor Bassani ed io nei nostri *Elementi di geometria*.

In tal guisa tutte le proprietà puramente geometriche che si possono dedurre dalla considerazione di figure simili, benchè non si riferiscano a proporzioni, si possono rendere assolutamente indipendenti dalla teoria delle proporzioni medesime, come per es. il teorema « Se le rette di un fascio sono tagliate da due rette parallele, a due segmenti eguali della prima retta corrispondono segmenti eguali della seconda ».

Mi si permetta infine di osservare che nei nostri *Elementi* sopra citati, abbiamo trattata la teoria degli assi e piani radicali basandoci su proprietà elementarissime di circoli e sfere senza fare uso di proporzioni e di misure. In tal guisa una gran quantità di problemi, come le costruzioni di circoli o sfere, che passano per punti dati e sono tangenti a rette e circoli o a piani e sfere date, si risolvono senza ricorrere alle proporzioni, come prima pareva necessario.

Ciò che ho esposto si riferisce alle semplificazioni che le considerazioni stereometriche hanno introdotto in intere teorie, e che hanno permesso di studiare ciascuna delle quattro parti essenziali della geometria elementare e cioè: proprietà posizione e di eguaglianza, equivalenza, similitudine, misura, in guisa da poterle esporre nel loro ordine logico e naturale senza bisogno di ricorrere alle successive teorie. È inutile dunque che entri in dettagli e parli delle semplificazioni che si possano ottenere anche nei singoli teoremi, poichè ciò mi porterebbe troppo in lungo.

Mi sembra un po' difficile disconoscere l'importanza di questi risultati, ma pure (è doloroso a constatarsi, ma è vero) gli oppositori sistematici si ostinano a non occuparsene; e mentre da parte dei fusionisti si cercano sempre nuove prove del valore del metodo da noi propugnato gli oppositori ripetono con insistenza molto monotona e sconfortante le stesse obiezioni che in fondo si riducono

a questo: 1° son duemila anni che si fa così e non occorre cambiare; 2° l'unico risultato ottenuto è quello di rendere indipendente dalle proporzioni la divisione di un angolo piatto in cinque parti eguali.

Della prima obiezione non vale la pena di occuparsi; per quel che si riferisce alla seconda non voglio indagare se è ripetuta continuamente, perchè non si vogliono leggere spassionatamente gli articoli scritti in proposito dai fusionisti, o perchè non si sa come ribatterli: in ogni modo però si raggiunge l'intento di impedire che la discussione seria e feconda faccia cammino e di conservare lo *statu quo*, che è la vittoria dei separatisti.

E per provare quanto asserisco basterà che citi qualche fatto.

Il mio illustre e compianto maestro DE-PAOLIS circa 14 anni fa, cioè quando venne alla luce il suo ottimo libro, che ha dato origine in Italia alla presente discussione, mi raccontava sorridendo che un valente e assai noto professore (chiamiamolo il prof. X) aveva dichiarato che il libro in questione era stato pubblicato unicamente per far conoscere la nuova dimostrazione trovata dal DE-PAOLIS per costruire un quinto di angolo piatto, e che unicamente per dare importanza a questa scoperta il DE-PAOLIS aveva inventata la fusione delle due geometrie, che il prof. X in tuono dispregiativo chiamava *confusione*.

Così con una frase che era, o pretendeva di essere, spiritosa, col voler far dipendere da una particolarità piccina un concetto, del quale anche gli oppositori non possono disconoscere l'importanza, la generalità, la vastità, si cercava di demolire l'opera di quattro anni di lavoro assiduo, fatta da uno dei migliori ingegni che abbiano onorato in questi ultimi anni gli studi geometrici in Italia.

Ho già dimostrato che i risultati ottenuti alla prima dal DE-PAOLIS, e che si possono trovare nel suo libro, sono assai numerosi, e che questi risultati sono stati accresciuti in seguito. Ebbene circa un anno fa il professore PALATINI asseriva che le proposizioni che si dimostrano più semplicemente coll'aiuto di considerazioni stereometriche sono ben poche e di poca entità, se si faccia astrazione dal problema già più volte citato della costruzione di $\frac{1}{5}$ di angolo piatto; faceva la critica del libro del DE-PAOLIS, e dell'opera nostra, qualunque essa sia, non si occupava affatto, neanche per dirne male. Aggiungeva che nulla prova che non si possano col tempo trovare dimostrazioni planimetriche altrettanto semplici di quelle stereometriche.

Il prof. DE-AMICIS nel suo brillante articolo *pro-fusione* ribatteva queste osservazioni del prof. PALATINI, faceva una enumerazione già abbastanza lunga di dimostrazioni planimetriche fatte in modo semplice ed elegante coll'aiuto della stereometria, ed aggiungeva, molto giustamente, che mentre è logico e ragionevole sperare di far nuove conquiste nel campo della geometria elementare col metodo della fusione, che si adopera solo da pochi anni, è poco probabile ottenere progressi notevoli col metodo della separazione che in 22 secoli è stato sviscerato.

Malgrado la larghissima diffusione che ha avuto l'articolo del prof. DE-AMICIS, nel n. del 31 agosto della *scuola secondaria* il professore ANGELERI, che pure cita con parole simpatiche i trattati di De-Paolis, Lazzeri e Bassani, Veronese, Brestschneider, Steen, Galdeano, ecc. dice: « Tutto il vantaggio, se mal non mi appongo, si
« riduce, restando ben s'intende nella geometria elementare al pro-
« blema di costruire un triangolo isoscele con gli angoli alla base
« doppi dell'angolo al vertice; e qui un vantaggio c'è davvero, per-
« chè si può svolgere l'intera teoria dei poligoni regolari subito
« dopo la teoria del circolo; ma per quest'unico vantaggio andar
« contro le norme più elementari della pedagogia, a me almeno non
« sembra corretto ».

Ecco, io sarei sinceramente addolorato ed afflitto di aver mancato alle regole più elementari di buona creanza verso una signora così rispettabile come la pedagogia, ma nè io, nè tutti coloro che sono della mia opinione, ci potremo riconoscere rei del delitto di lesa-pedagogia, finchè non ci sarà mostrato in qual modo la fusione è contraria ai principi di questa scienza.

Non posso terminare queste righe senza aver risposto ad una osservazione assai arguta ed ingegnosa del mio carissimo amico e collega prof. RETALI, che però non credo giusta. Egli dice essere ormai rigorosamente *dimostrato da Riemann, come per istudiare uno spazio a $n - 1$ dimensioni possa farsi astrazione dallo spazio di n dimensioni che la contiene. . . . Per converso non è possibile muovere un passo nello studio dello spazio ad n dimensioni senza invocare proprietà di spazi aventi un minor numero di dimensioni.*

Tutto ciò è perfettamente giusto dal punto di vista puramente scientifico, quando si tratta di stabilire i postulati fondamentali degl'iperspazi. In questi l'intuizione, che ci aiuta immensamente nello spazio ordinario, non giova affatto. Quest'iperspazi non hanno una rappresentazione reale immediata e la nostra mente gli ha creati per via induttiva, perciò non possiamo studiare i caratteri

fondamentali di uno spazio a n dimensioni senza l'aiuto di spazi con un numero minore di dimensioni.

Ma questo non prova che una volta stabilite le proprietà fondamentali di un iperspazio non si possano ricavare dalle sue proprietà più elementari, in modo semplice e breve, altre proprietà più complicate di figure appartenenti a spazi con un numero minore di dimensioni.

Gli esempi che si potrebbero citare in proposito, ricavandoli dalla geometria superiore per mostrare come dalle proprietà di un iperspazio si possano dedurre immediatamente altre di spazi con un numero minore di dimensioni sono innumerevoli. Basterà che citi le rappresentazioni piane delle superficie, per mezzo delle quali si possono da proprietà delle superficie ricavarne altre di curve, e viceversa; la rappresentazione dei complessi di rette oppure di sfere sullo spazio ordinario, lo studio dell'esagono di Pascal dedotto dalla figura di sei complessi di sei connessi due a due in involuzione e molte altre.

In particolare citerò due altri esempi. Le configurazioni di Caporali, di cui io detti un'esposizione elementare nel n. 1, 1897 di questo Periodico, non è che la sezione prodotta da un piano nella figura che in un iperspazio S_n è definita da p punti e dagli iperspazi S_{n-1} , S_{n-2} , che essi determinino.

I teoremi che mi hanno servito a stabilire una teoria geometrica delle curve polari si dimostrano molto più semplicemente coll'aiuto di iperspazi. (Rendiconto del R. Ist. Lombardo 1891).

Ma anche restando nel campo della geometria elementare è facile vedere che è conveniente, anzi necessario, come disse l'illustre prof. Veronese al congresso, risalire dalle forme più semplici alle più complesse per stabilire rigorosamente i concetti di retta, piano e spazio, ma una volta stabiliti questi concetti, si possono avere, e si hanno in fatti, molti vantaggi, ricavando le proprietà delle forme di un minor numero di dimensioni da altre proprietà di forme con un numero maggiore di dimensioni.

E infatti se si volesse applicare il principio dimostrato da Riemann in tutta la sua estensione si dovrebbe fare tutta la geometria dalla retta prima di parlare di piano. Ma operando in tal guisa ci troveremo nell'impossibilità di risolvere i problemi più elementari. Per esempio come si fa a dividere un segmento in due o in n parti eguali, a costruire il quarto armonico dopo tre punti senza uscire dalla retta? Come si divide per metà un angolo senza fare uso altro che del fascio, al quale appartengono i due lati dell'angolo?

Se dunque non si può studiare completamente la retta senza ricorrere al piano, non è naturale il pensare, quand'anche mancassero prove positive e dirette, che lo studio del piano possa essere per lo meno agevolato dalla nozione dello spazio?

Riepilogando, io credo che, sebbene il Congresso non abbia risolto in modo definitivo la quistione, e l'abbia rimessa per un ulteriore esame al congresso futuro, le abbia però fatto fare tanto cammino, da potersi ritenere come probabile, anzi quasi certa, una prossima risoluzione favorevole.

Eppure colui, che ha lanciato per primo l'idea, che per altezza d'ingegno e per la posizione scientifica che occupava avrebbe potuto più efficacemente cooperare a farla trionfare, il prof. DE-PAOLIS, è morto, ma la sua idea è rimasta, e per forza propria ha germogliato, e forse porterà presto i suoi frutti. Mi è grato quindi per l'affettuosa amicizia che mi legava a Lui ricordare il suo nome a proposito di una discussione, che può dirsi un omaggio alla sua memoria.

Ormai la quistione è matura, ed è necessario che i programmi siano modificati in modo che ogni insegnante sia libero di scegliere fra il metodo della fusione e quello della separazione.

Allora soltanto, quando ognuno avrà avuto agio di sperimentare i due metodi, e si sarà reso padrone egualmente di tutti e due, i preconcetti che naturalmente la forza dell'abitudine fa nascere contro tutte le novità, dilegneranno, e tutti diverranno fusionisti.

E mi sia lecito terminare, applicando al caso nostro le parole di un illustre scrittore « *la verità è in marcia* », e di esprimere la speranza che presto si possa dire « *la verità è arrivata* ». Il presente risveglio mi fa sperare che ciò avverrà specialmente per opera di noi Italiani, che per accettare un'idea nata e germogliata in Italia non vorremo attendere che essa ci ritorni dall'estero.

G. LAZZERI.

Il relatore della 2ª quistione prof. ENRICO DE-AMICIS non ha potuto per malattia inviare la sua relazione. Questa sarà pubblicata in uno dei prossimi numeri del Periodico.

GIULIO LAZZERI — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 22 Dicembre 1898.

SULLA TRASFORMAZIONE D'UN PRODOTTO DI DUE SOMME DI n QUADRATI

IN UNA SOMMA DI n QUADRATI

Nota di **ELCIA SADUN** (*)

Col titolo « *Intorno alla moltiplicazione di alcune forme quadratiche* » (**) il professore GENOCCHI pubblicò una breve Nota, nella quale si propose di dimostrare che la proprietà di riprodursi, per moltiplicazione, appartenente alle forme quadratiche $x^2 + ay^2$, $x^2 + ay^2 + bz^2 + abt^2$, con due e con quattro indeterminate, si verificava per forme consimili contenenti 2^n indeterminate.

Avendo avuto occasione di analizzare quella dimostrazione, ho riconosciuto ch'essa è errata laddove da un caso particolare l'Autore passa ad estenderla al caso generale. Ciò apparirà dalle considerazioni svolte nel § 1, il quale è altresì dedicato a porre in chiaro che la via prescelta dall'Autore non è adatta a stabilire la verità della proposizione neppure per le forme con quattro o con otto indeterminate.

Del resto, ogni tentativo di estendere la proposizione alle forme contenenti più di otto indeterminate doveva riuscire infruttuoso, perchè già il KIRKMAN nella Memoria: *On Pluquaternions and Homoid Products of Sums of n Squares*, (***) ne aveva dimostrata l'impossibilità.

Il CAYLEY poi, nella sua « *Demonstration of a theorem relating to the products of sums of squares*, » (****) semplificò in parte la dimostrazione del KIRKMAN, ma non tanto da non far sentire il desiderio di risolvere l'interessante quesito con metodi più elementari. A me sembra di esservi riuscito nel modo che si troverà esposto nei susseguenti §§ 3 e 4.

Il § 2 contiene alcune osservazioni riferentisi all'importante Nota del prof. BRIOSCHI « *Sur l'analogie entre une classe de déterminants etc.* » (*****) ove si trova incidentalmente trattato il problema per il caso relativo al prodotto di due somme di otto quadrati.

Chiude infine questo lavoro l'osservazione che le forme $x^2 + ay^2$, $x^2 + ay^2 + bz^2 + abt^2$ ecc. non hanno, come sembrerebbe, in tale questione, una generalità maggiore delle forme $x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, ecc. che da quelle si deducono supponendo che i valori di a , b ecc., siano uguali all'unità.

(*) Pubblichiamo volentieri questa Nota che l'autore fece stampare in pochi esemplari, nell'anno 1896, per l'occasione di un concorso. (N. d. R).

(**) *Annali di Matematica pura ed applicata*, pubblicati da B. TORRICELLI, Tomo III, pagg. 202-205.

(***) *Phil. Mag.* Serie III, Vol. XXXIII, pagg. 447-459 o pagg. 404-509.

(****) *The collected mathematical papers*, Vol. II, n. 112.

(*****) *CRELLE, Journal*, Bd. LII, pagg. 133-141.

§ 1.

Il prof. GENOCCHI comincia dal considerare il prodotto di n binomi

$$p_1^2 + a_1 q_1^2, p_2^2 + a_2 q_2^2, \dots, p_n^2 + a_n q_n^2,$$

e lo rappresenta mediante il polinomio

$$X = x_0^2 + \sum a_m x_m^2 + \sum \sum a_{m_1} a_{m_2} x_{m_1, m_2}^2 + \sum \sum \sum a_{m_1} a_{m_2} a_{m_3} x_{m_1, m_2, m_3}^2 + \dots + a_1 a_2 \dots a_n x_{1, \dots, n}^2$$

ove i fattori quadrati $x_0^2, x_m^2, \dots, x_{1, \dots, n}^2$ resultano dal moltiplicare n quadrati delle $2n$ indeterminate p_m, q_m . Egli dà poi analoghe rappresentazioni per il prodotto Y degli n binomi

$$r_1^2 + a_1 s_1^2, r_2^2 + a_2 s_2^2, \dots, r_n^2 + a_n s_n^2$$

e per il prodotto Z degli altri n binomi

$$t_1^2 + a_1 u_1^2, t_2^2 + a_2 u_2^2, \dots, t_n^2 + a_n u_n^2,$$

ed afferma giustamente che se si suppone

$$(1) \quad t_m^2 + a_m u_m^2 = (p_m^2 + a_m q_m^2)(r_m^2 + a_m s_m^2)$$

si avrà $XY = Z$, e la forma Z sarà il prodotto delle due simili X e Y .

E poichè la (1) è, come si sa, verificata col porre

$$t_m = p_m r_m - a_m q_m s_m, \quad u_m = p_m s_m + q_m r_m$$

l'A. ne trae argomento per notare che le z si potranno esprimere razionalmente per mezzo delle a , delle x e delle y , e per intrattenersi poi a rilevare le relazioni che collegano fra loro le x , e conseguentemente anche le y .

Stabilito dunque che « l'equazione $XY = Z$, i cui membri sono poli-
« nomi di secondo grado rispetto a ciascuna delle accennate quantità
« $x_{m_1, m_2}, y_{m_1, m_2}, \dots$ ecc. è verificata per certi valori particolari di queste
« indeterminate » riflette che per provare la generalità della stessa equazione « basterà dimostrare che il quadrato di ciascuna indeterminata ha
« il medesimo coefficiente in ambi i membri ».

Ora è qui appunto il caso di osservare che questa dimostrazione, la quale è pure *necessaria*, non è *sufficiente* a provare la generalità dell'equazione $XY = Z$. Ed invero, quando, valendosi delle supposizioni fatte, si esprimono le z in funzioni delle x e delle y , ognuna delle z risulta espressa da un polinomio di 2^n termini; e se s'immagina di sviluppare i quadrati di queste z si avranno certamente i termini contenenti i prodotti dei quadrati delle indeterminate x e y , dei quali il prof. GENOCCHI dimostra trovarsi i corrispondenti nel prodotto XY , ma si troveranno *inoltre* i termini contenenti i prodotti a quattro a quattro delle stesse indeterminate; e poichè questi prodotti non compariscono nello sviluppo di XY , doveva l'A. proporsi di dimostrare che tali termini si elidevano scambievolmente, e ciò, ben inteso, supponendo che tanto le x quanto le y fossero indipendenti fra loro. Se questo egli avesse fatto, si sarebbe accorto dell'impossibilità di completare la dimostrazione, perchè

l'equazione $XY = Z$, stabilita col metodo precedente, è vera solamente quando le x e le y hanno quei particolari valori loro assegnati, che non sono tutti fra loro indipendenti.

Per dimostrare la verità di quest'affermazione potremo limitarci a considerare il caso in cui si ha $n = 2$ e tutte le costanti a_m sono ridotte all'unità. Colle precedenti notazioni si avrà

$$\begin{aligned} X &= (p_1^2 + q_1^2)(p_2^2 + q_2^2) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_{1,2}^2 \\ Y &= (r_1^2 + s_1^2)(r_2^2 + s_2^2) = y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_{1,2}^2 \\ Z &= (t_1^2 + u_1^2)(t_2^2 + u_2^2) = z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_{1,2}^2 \end{aligned}$$

ove si ritenga essere

$$(2) \quad \begin{cases} x_0 = p_1 p_2 & , & x_1 = p_2 q_1 & , & x_2 = p_1 q_2 & , & x_{1,2} = q_1 q_2 \\ y_0 = r_1 r_2 & , & y_1 = r_2 s_1 & , & y_2 = r_1 s_2 & , & y_{1,2} = s_1 s_2 \\ z_0 = t_1 t_2 & , & z_1 = t_2 u_1 & , & z_2 = t_1 u_2 & , & z_{1,2} = u_1 u_2 \end{cases}$$

Ammesso poi che si abbia

$$(3) \quad \begin{cases} t_1 = p_1 r_1 - q_1 s_1 & , & u_1 = p_1 s_1 + q_1 r_1 \\ t_2 = p_2 r_2 - q_2 s_2 & , & u_2 = p_2 s_2 + q_2 r_2 \end{cases}$$

ne risulterà

$$\begin{aligned} t_1^2 + u_1^2 &= (p_1^2 + q_1^2)(r_1^2 + s_1^2) \\ t_2^2 + u_2^2 &= (p_2^2 + q_2^2)(r_2^2 + s_2^2) \end{aligned}$$

e quindi sarà evidentemente $XY = Z$, ossia:

$$(4) \quad (x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_{1,2}^2)(y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_{1,2}^2) = z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_{1,2}^2$$

Se ora, avendo riguardo alle (2) e alle (3), esprimiamo le z in funzioni delle x e delle y , si trova:

$$(5) \quad \begin{cases} z_0 = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 + x_{1,2} y_{1,2} \\ z_1 = x_0 y_1 + x_1 y_0 - x_2 y_{1,2} - x_{1,2} y_2 \\ z_2 = x_0 y_2 - x_1 y_{1,2} + x_2 y_0 - x_{1,2} y_1 \\ z_{1,2} = x_0 y_{1,2} + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_{1,2} y_0 \end{cases}$$

ed è certo che la (4) sarà verificata ponendo nel secondo membro questi valori delle z , purchè le x e le y abbiano i valori dati dalle prime due linee delle (2). Ma se si toglie questa condizione, la (4) non è più vera, e per assicurarsene basta osservare che non si distruggono tutti i doppi prodotti che si hanno sviluppando i quadrati di $z_0, z_1, z_2, z_{1,2}$. Per esempio il prodotto $2x_1 y_1 x_2 y_2$ che compare nello sviluppo di z_0^2 non si elimina col prodotto simile $2x_1 y_2 x_2 y_1$ che è dato da $z_{1,2}^2$, perchè entrambi hanno il segno positivo, ecc. ecc.

Nonpertanto, come fu trovato per la prima volta da EULERO, il prodotto $(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_{1,2}^2)(y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_{1,2}^2)$ è effettivamente, e in vari modi, trasformabile nella somma $z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_{1,2}^2$. Una di queste trasformazioni si ottiene ponendo

$$\begin{aligned} z_0 &= x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 + x_{1,2} y_{1,2} \\ z_1 &= x_0 y_1 + x_1 y_0 - x_2 y_{1,2} - x_{1,2} y_2 \\ z_2 &= x_0 y_2 + x_1 y_{1,2} + x_2 y_0 + x_{1,2} y_1 \\ z_{1,2} &= x_0 y_{1,2} - x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_{1,2} y_0 \end{aligned}$$

dove i soli valori di z_0 e z_1 combinano coi corrispondenti delle (5).

§ 2.

Leggendo nella Nota stessa del prof. GENOCCHI, che per la somma di otto quadrati il teorema era stato dato dal prof. BRIOSCHI e riferito pure nel medesimo caso dal signor LEBESGUE nei suoi *Exercices d'analyse numérique*, (*) sono stato invogliato a fare le relative ricerche e confronti, da cui m'è risultato non essere la formola citata dal LEBESGUE, e da lui attribuita ai signori PROUHET e CAYLEY, eguale a quella trovata dal prof. BRIOSCHI, tantochè solamente la prima soddisfa veramente alla questione. Il difetto in cui trovasi la formola data dal prof. BRIOSCHI nell'ultimo paragrafo della sua Nota, è dovuto al non avverarsi di *tutte* le condizioni necessarie affinché al caso particolare ivi considerato siano applicabili i risultati generali dimostrati nei paragrafi precedenti. Ed infatti, se con A s'indica il determinante dell'ottavo ordine

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ -b & a & -d & c & -f & e & -h & g \\ -c & d & a & -b & -g & h & e & -f \\ -d & -c & b & a & -h & -g & f & e \\ e & f & g & h & a & b & c & d \\ -f & e & -h & g & -b & a & -d & c \\ -g & h & e & -f & -c & d & a & -b \\ -h & -g & f & e & -d & -c & b & a \end{vmatrix},$$

il suo quadrato, ottenuto moltiplicando A per il determinante

$$\begin{vmatrix} b & -a & d & -c & f & -e & h & -g \\ a & b & c & d & e & f & g & h \\ d & c & -b & -a & h & g & -f & -e \\ -c & d & a & -b & -g & h & e & -f \\ f & -e & h & -g & b & -a & d & -c \\ e & f & g & h & a & b & c & d \\ h & g & -f & -e & d & c & -b & -a \\ -g & h & e & -f & -c & d & a & -b \end{vmatrix}$$

uguale in valore ad A, dovrebbe essere un determinante gobbo simmetrico

$$A^2 = L = \sum \pm l_{11}l_{22}l_{33} \dots l_{88}$$

nel quale, avendosi

$$l_{12} = -l_{21} = l_{34} = -l_{43} = l_{56} = -l_{65} = l_{78} = -l_{87} = t,$$

fossero poi nulle *tutte* le rimanenti l_{rs} . Ora questo non si verifica perchè, per esempio, si ha:

$$l_{15} = -l_{51} = l_{52} = -l_{25} = l_{38} = -l_{83} = l_{74} = -l_{47} = 2(ae + bf + cg + dh)$$

differente da zero. Quindi non ne può discendere la conseguenza che, essendo

$$t = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2$$

(*) Paris, LEMER et FARAGUET éditeurs, 1859, pag. 104.

e similmente

$$u = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 + e_1^2 + f_1^2 + g_1^2 + h_1^2,$$

si abbia, per i valori di $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{18}$, determinati dall'Autore,

$$A_{11}^2 + A_{12}^2 + \dots + A_{18}^2 = tu.$$

Ciò è pure confermato dal fatto che non si elidono tutti i doppi prodotti che si hanno sviluppando i quadrati A_{11}^2, A_{12}^2 , ecc., come lo richiederebbe la verità dell'ultima eguaglianza.

È possibile, tuttavia, modificare il determinante A, conservandone inalterata la 1^a, 2^a, 4^a o 7^a linea, e cambiando i segni ad alcuni elementi delle rimanenti linee, in modo che tutte le condizioni imposte alle l_r siano soddisfatte. Questo ha luogo, per esempio, prendendo per A il determinante

$$(6) \quad A = \begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ -b & a & -d & c & -f & e & -h & g \\ -c & d & a & -b & g & -h & -e & f \\ -d & -c & b & a & -h & -g & f & e \\ -e & f & -g & h & a & -b & c & -d \\ -f & -e & h & g & b & a & -d & -c \\ -g & h & e & -f & -c & d & a & -b \\ -h & -g & -f & -e & d & c & b & a \end{vmatrix}$$

e moltiplicandolo per il determinante

$$\begin{vmatrix} b & -a & d & -c & f & -e & h & -g \\ a & b & e & d & e & f & g & h \\ d & c & -b & -a & h & g & -f & -e \\ -c & d & a & -b & g & -h & -e & f \\ f & e & -h & -g & -b & -a & d & c \\ -e & f & -g & h & a & -b & c & -d \\ h & g & f & c & -d & -c & -b & -a \\ -g & h & e & -f & -c & d & a & -b \end{vmatrix}$$

che ha lo stesso valore di A. Ed allora, se s'indica con C il determinante analogo al (6) che si ottiene sostituendo a_1, b_1, c_1, \dots ad a, b, c, \dots , e del prodotto AC si calcolano gli elementi $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{18}$, si avranno i seguenti valori

$$(7) \quad \begin{cases} A_{11} = aa_1 + bb_1 + cc_1 + dd_1 + ee_1 + ff_1 + gg_1 + hh_1 \\ -A_{12} = ab_1 - ba_1 + cd_1 - dc_1 + ef_1 - fe_1 + gh_1 - hg_1 \\ -A_{13} = ac_1 - bd_1 - ca_1 + db_1 - eg_1 + fh_1 + ge_1 - hf_1 \\ -A_{14} = ad_1 + bc_1 - cb_1 - da_1 + eh_1 + fg_1 - gf_1 - he_1 \\ -A_{15} = ae_1 - bf_1 + cg_1 - dh_1 - ea_1 + fb_1 - gc_1 + hd_1 \\ -A_{16} = af_1 + be_1 - ch_1 - dg_1 - eb_1 - fa_1 + gd_1 + hc_1 \\ -A_{17} = ag_1 - bh_1 - ce_1 + df_1 + ec_1 - fd_1 - ga_1 + hb_1 \\ -A_{18} = ah_1 + bg_1 + cf_1 + de_1 - ed_1 - fc_1 - gb_1 - ha_1 \end{cases}$$

i quali rendono vera l'equazione

$$(8) \quad A_{11}^2 + A_{12}^2 + \dots + A_{1n}^2 = (a^2 + b^2 + \dots + h^2)(a_1^2 + b_1^2 + \dots + h_1^2). (*)$$

I valori testè trovati per le $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$, non combinano completamente con quelli riportati dal LEBESGUE, per avere i quali basterà

(*) Per dedurre dal (6) il determinante successivo, è stato tenuto conto di quanto è detto nel § 4 della Nota del prof. BROSINI. Ma non è privo d'interesse l'osservare che potrebbero rinunziare all'ultimo determinante e prendere per quadrato di A il determinante simmetrico che si ottiene col metodo ordinario, se nella prima parte della Nota citata s'introducessero queste modificazioni.

Conservando, per chiarezza, tutte le notazioni ivi adottate, e perciò indicando con

$$A = \Sigma \pm a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

un determinante d'ordine n , senza neppure richiedere che n sia un numero pari, si può ancora porre

$$A^2 = L = \Sigma \pm l_{11}l_{22} \dots l_{nn}$$

sostituendo alla equazione (1) della Nota la seguente:

$$l_{rs} = ar_1a_{r1} + ar_2a_{r2} + \dots + ar_na_{rn}.$$

Conseguentemente, le due equazioni (2) della Nota si compendiano nell'unica

$$Aa_{r1} = a_{11}l_{r1} + a_{21}l_{r2} + \dots + a_{n1}l_{rn}$$

e le due equazioni (3) nell'altra

$$Aa_{ri} = a_{1i}l_{r1} + a_{2i}l_{r2} + \dots + a_{ni}l_{rn}$$

ove le a_{rs} o le l_{rs} sono gli elementi reciproci di a_{rs} , l_{rs} rispettivamente.

Per un secondo determinante

$$C = \Sigma \pm c_{11}c_{22} \dots c_{nn}$$

e per il suo quadrato

$$C^2 = P = \Sigma \pm p_{11}p_{22} \dots p_{nn}$$

si porrà analogamente

$$p_{rs} = cr_1c_{r1} + cr_2c_{r2} + \dots + cr_nc_{rn}$$

ed invece delle due equazioni (4) si avrà, indicando con γ_{rs} l'elemento reciproco di c_{rs}

$$Cc_{s1} = \gamma_{11}p_{s1} + \gamma_{21}p_{s2} + \dots + \gamma_{n1}p_{sn}.$$

Mantenendo inalterata la equazione (5) della Nota, vale a dire ponendo

$$ar_1c_{r1} + ar_2c_{r2} + \dots + ar_nc_{rn} = A_{rs}$$

o considerando quindi il determinante $\Sigma \pm A_{11}A_{22} \dots A_{nn}$, prodotto dei due determinanti A e C , e il suo quadrato $\Sigma \pm L_{11}L_{22} \dots L_{nn}$, converrà mettere in luogo della (6) l'equazione

$$L_{rs} = A_{r1}A_{s1} + A_{r2}A_{s2} + \dots + A_{rn}A_{sn}$$

e in luogo della (7) l'equazione

$$k_{jr} = \gamma_{j1}a_{r1} + \gamma_{j2}a_{r2} + \dots + \gamma_{jn}a_{rn}$$

e ne conseguiranno le equazioni

$$CA_{jr} = k_{j1}p_{r1} + k_{j2}p_{r2} + \dots + k_{jn}p_{rn}$$

$$AB_{jr} = k_{j1}l_{r1} + k_{j2}l_{r2} + \dots + k_{jn}l_{rn}$$

$$Ak_{jr} = B_{j1}l_{r1} + B_{j2}l_{r2} + \dots + B_{jn}l_{rn}$$

nelle quali B_{ji} rappresenta l'elemento reciproco di A_{ri} .

Da questo punto, per la questione di cui ci occupiamo, si può, senz'altro, passare al § 5 della Nota, e sostituire alle (10) le condizioni analoghe, da supporre verificate

$$l_{11} = l_{22} = \dots = l_{nn} = l$$

$$p_{11} = p_{22} = \dots = p_{nn} = p$$

insieme con $l_{rs} = p_{rs} = 0$ per $r > s$. Allora, a causa delle modificazioni già introdotte, invece delle due relazioni

$$u^m A_{rs} = -k_{r-1,s} \quad , \quad u^m A_{s,r-1} = k_{rs}$$

si troverà l'unica relazione

$$u^m A_{rs} = k_{rs}$$

ov'è supposto che sia $m = \frac{1}{2}n - 1$. Le successive quattro relazioni

$$l^{m+1} A_{ir} = + B_{i-1,r-1} \quad , \quad l^{m+1} A_{i-1,r} = - B_{i,r-1}$$

$$l^{m+1} A_{i,r-1} = - B_{-1,r} \quad , \quad l^{m+1} A_{i-1,r-1} = + B_{ir}$$

si raccoglieranno unicamente in

$$l^{m+1} A_{ir} = B_{ir}$$

mantenere inalterati i valori assoluti dei termini nel quadro costituito dai secondi membri delle (7), e attribuire ai termini della 1^a, 2^a, 8^a linea i segni che appartengono alla 1^a, 2^a, 8^a colonna rispettivamente.

La ragione intima di ciò è facile conseguenza di quanto verrà detto nei paragrafi seguenti. Intanto non è da trascurare l'osservazione che in questo problema si può, da un sistema di valori delle $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{15}$ il quale soddisfa all'equazione (8), dedurre altri sistemi che del pari vi soddisfano, cambiando i segni ad una o più delle quantità $a, b, \dots, h, a_1, b_1, \dots, h_1$.

§ 3.

Si considerino n quantità indipendenti

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

ed altrettante

$$c_1, c_2, \dots, c_n$$

indipendenti fra loro e dalle prime. Il prodotto

$$(9) \quad P = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2)$$

consta di n^2 quadrati della forma $a^2 c^2$, ed il problema di convertire il prodotto P in una somma di n quadrati, si può ridurre a determinare n somme

$$(10) \quad \begin{cases} a_1 c_{11} + a_2 c_{12} + \dots + a_n c_{1n} \\ a_1 c_{21} + a_2 c_{22} + \dots + a_n c_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_1 c_{n1} + a_2 c_{n2} + \dots + a_n c_{nn} \end{cases}$$

ove gli elementi

$$(11) \quad c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}$$

di una linea o gli elementi

$$(12) \quad c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj}$$

di una colonna stanno a rappresentare le quantità c_1, c_2, \dots, c_n , inclusi il segno, che per alcune sarà necessariamente negativo, perchè si richiede che sviluppando i quadrati delle somme (10) si riproducano gli n^2 termini del prodotto (9), e si eliminino tutti i rimanenti. Non è

e questa combinata coll'equazione sostituita alla (6) darà:

$$t^{m+n} L_{ij} = A_1 B_{i1} + A_2 B_{i2} + \dots + A_n B_{in}$$

donde si trarrà infine:

$$L_{ii} = tu, \quad L_{is} = 0 \quad (i \geq s)$$

Applicando questi risultati al caso particolare di $n=8$, risulta subito che se s'identificano le a_r cogli elementi del nostro determinante (6) si ha:

$$l_{rr} = t = a^2 + b^2 + \dots + h^2$$

mentre per $r \geq s$ si ha $l_{rs} = 0$. Parimente, identificando le c_r cogli elementi del determinante dedotto dal (6) sostituendo a_j, b_j, h_j, \dots ad a, b, \dots, h si avrà

$$p_{rr} = u = a^2 + \dots + h^2, \quad p_{rs} = 0 \quad (r \geq s)$$

ed allora una qualunque delle equazioni $L_{ii} = tu$, per esempio la $L_{11} = tu$, darà appunto

$$A_{11}^2 + A_{12}^2 + \dots + A_{18}^2 = tu,$$

difficile riconoscere che da queste condizioni scaturisce intanto che gli elementi (11) o (12) debbono costituire, col variare di i o di j , permutazioni differenti di c_1, c_2, \dots, c_n , tali che due elementi di una medesima linea o colonna del quadro

$$(13) \quad \begin{cases} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} & \dots & c_{1i} & \dots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ip} & \dots & c_{ii} & \dots & c_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{s1} & c_{s2} & \dots & c_{sp} & \dots & c_{si} & \dots & c_{sn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{np} & \dots & c_{ni} & \dots & c_{nn} \end{cases}$$

non abbiano mai lo stesso valore assoluto. Ed inverò, non potrebbero due elementi della p -esima colonna, per es. c_{rp}, c_{sp} essere in valore assoluto uguali a c_m , perchè avendo essi nelle (10) lo stesso coefficiente a_p , si troverebbero, nello sviluppo di quei quadrati, due termini della forma $a_p^2 c_m^2$, ciò che non è consentito dalla (9). Così pure, ammesso che due termini della r -esima linea, per es. c_{rp}, c_{ri} , fossero in valore assoluto uguali a c_m , il doppio prodotto dei corrispondenti termini nella p -esima linea delle (10) sarebbe della forma $\pm 2a_p a_i c_m^2$ e non potrebbe essere annullato altrimenti che da un termine simile $\mp 2a_p a_i c_m^2$ proveniente da un'altra linea, per esempio dalla s -esima. Ma in tal caso ognuna delle due colonne p -esima e i -esima avrebbe due elementi uguali, il che abbiamo già visto essere inammissibile.

Ciò premesso, è chiaro che sviluppando i quadrati delle (10) si troveranno univocamente gli n^2 termini del prodotto (9); e perciò non rimane altro che da vedere quali nuove condizioni, tenendo conto anche dei segni, debbono essere imposte agli elementi del quadro (13) affinché si verifichi che, negli stessi sviluppi, tutti i doppi prodotti si elidano.

Ora, se $2a_p a_i c_{rp} c_{ri}$ è un doppio prodotto dato dalla r -esima linea delle (10), esso dovrà essere annullato da un doppio prodotto di un'altra linea, per esempio della s -esima, e precisamente da quello che contenendo le stesse quantità a_p, a_i è della forma $2a_p a_i c_{sp} c_{si}$. Dovrà dunque essere soddisfatta *identicamente* l'eguaglianza

$$(14) \quad c_{rp} c_{ri} = - c_{sp} c_{si}$$

la quale, per quanto è stato sopra osservato, si scinde nelle due:

$$(15) \quad \begin{cases} c_{rp} = \pm c_{si} \\ c_{ri} = \mp c_{sp} \end{cases}$$

Ma da queste si deduce:

$$(16) \quad c_{rp} c_{sp} = - c_{ri} c_{si}$$

e perciò abbiamo che: *Il quadro (13) deve essere composto in guisa che, presi due elementi di qualsivoglia linea, c_{rp}, c_{ri} , se ne trovino, sulle stesse colonne cui essi appartengono, due altri, c_{sp}, c_{si} facenti parte di una medesima linea, tali che i valori assoluti di questi due ultimi siano in*

ordine inverso uguali a quelli dei primi due, com'è indicato dalle (15), e tali inoltre che abbiano valore contrario i prodotti degli elementi delle due linee, o i prodotti degli elementi delle due colonne, come apparisce dalle (14) e (16) rispettivamente.

Per la formazione effettiva del quadro (13), dovendosi dunque aver riguardo alla disposizione degli elementi e al loro segno, tratteremo separatamente le due questioni, cominciando da quella della disposizione degli elementi che, per semplicità, ritorneremo ad indicare con c_1, c_2, \dots, c_n .

È ben evidente che, senza scapito della generalità, si potrà supporre che le due permutazioni costituenti la prima linea e la prima colonna del quadro siano fra loro uguali e rappresentate da $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n$. Così, in virtù delle (15), nelle quali si fa, per ora, astrazione dai segni dei secondi membri, l'elemento c_1 occuperà il secondo posto della seconda linea, il terzo della terza linea ecc., vale a dire si troverà sulla diagonale che va da sinistra a destra, come si scorge nel seguente quadro:

$$(17) \quad \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-1} & c_n \\ c_2 & c_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_3 & \dots & c_1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & \dots & \dots & \dots & c_1 & \dots \\ c_n & \dots & \dots & \dots & \dots & c_1 \end{pmatrix}$$

L'impossibilità, che si manifesta immediatamente, di completare questo quadro nel caso particolare di $n=3$, può essere dimostrata in generale per tutti i valori dispari del numero n .

Infatti, se per uno di questi valori s'indica la prima linea con

$$c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_k \quad \dots \quad c_p \quad \dots \quad c_r \quad \dots \quad c_s \quad \dots \quad c_n$$

si potrà supporre che nella seconda linea, che indicheremo con

$$c_2 \quad c_1 \quad \dots \quad c_n \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad c_k$$

sia stato assegnato il posto ad $n-3$ elementi, e rimangano da collocare soltanto i tre elementi c_p, c_r, c_s . Ora è chiaro che se si colloca, nella seconda linea, l'elemento c_r sotto l'elemento c_p della prima linea si dovrà, per riguardo alle (15), porre l'elemento c_p sotto l'elemento c_r della prima linea; ma allora, contro quello che è stato dimostrato, i due elementi c_s verranno a trovarsi nella stessa colonna. Lo stesso succederebbe per gli elementi c_r , se nella seconda linea si collocasse l'elemento c_s sotto l'elemento c_p della prima linea.

È altresì facile dimostrare che il quadro (17) non si può comporre neppure per valori di n della forma $2^m k$, ove k rappresenta un numero dispari non minore di 3.

Difatti, ammesso, in generale, che per un valore pari di n siano state stabilite le (10) in guisa da aversi identicamente

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2) = (a_1 c_{11} + a_2 c_{12} + \dots + a_n c_{1n})^2 + \dots + (a_1 c_{n1} + a_2 c_{n2} + \dots + a_n c_{nn})^2,$$

è evidente che se si uguagliano a zero tutte le a_s e tutte le c_s , aventi l'indice maggiore di $\frac{n}{2}$, riducendosi il primo membro di questa identità alla forma

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{\frac{n}{2}}^2\right) \left(c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_{\frac{n}{2}}^2\right)$$

dovrà anche il secondo membro ridursi ad una somma di $\frac{n}{2}$ quadrati della forma

$$\left(a_1 c'_{1, \frac{n}{2}} + a_2 c'_{2, \frac{n}{2}} + \dots + a_{\frac{n}{2}} c'_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}\right)^2 + \dots + \left(a_1 c'_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}} + a_2 c'_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}} + \dots + a_{\frac{n}{2}} c'_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}\right)^2.$$

Analogamente poi, se $\frac{n}{2}$ è un numero pari, dall'identità relativa al prodotto di due somme di $\frac{n}{2}$ quadrati si dedurrebbe quella relativa al prodotto di due somme di $\frac{n}{4}$ quadrati ecc. ecc. Onde, nell'ipotesi di $n = 2^m k$, si perverrebbe dopo m di queste operazioni a trovare il prodotto di due somme di k quadrati (k dispari) trasformato nella somma di k quadrati; ciò che contraddice all'impossibilità già dimostrata di comporre il quadro (17) per valori dispari del numero n .

Non rimane dunque altro che considerare il caso di $n = 2^m$.

Le condizioni (15) che, per quanto concerne i valori assoluti, sono soddisfatte nel caso più semplice di $m = 1$ dal quadro

$$\begin{array}{cc} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_1 \end{array}$$

si trovano altresì verificate, quando è $m = 2$ e perciò $n = 4$, componendo il quadro

$$\begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_2 & c_1 & c_4 & c_3 \\ c_3 & c_4 & c_1 & c_2 \\ c_4 & c_3 & c_2 & c_1 \end{array}$$

Si supponga, in generale, che il quadro (17) si sia potuto comporre con un numero di elementi espresso da $n = 2^m$; dico che si potrà da esso dedurne un altro contenente un numero doppio di elementi.

Infatti, se a tutti gl'indici degli elementi del quadro (17) si aggiunge il numero n si avrà il quadro

$$\begin{array}{cccccc} c_{1+n} & c_{2+n} & c_{3+n} & \dots & c_{(n-1)+n} & c_{n+n} \\ c_{2+n} & c_{1+n} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{3+n} & \dots & c_{1+n} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{(n-1)+n} & \dots & \dots & \dots & c_{1+n} & \dots \\ c_{n+n} & \dots & \dots & \dots & \dots & c_{1+n} \end{array}$$

mediante il quale, insieme col (17), si può comporre il quadro di 2^{m+1} elementi

$$(18) \begin{array}{c|cccccc|cccccc} c_1 & c_2 & c_3 & \cdot & c_{n-1} & c_n & c_{1+n} & c_{2+n} & c_{3+n} & \cdot & c_{(n-1)+n} & c_{n+n} \\ c_2 & c_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{2+n} & c_{1+n} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_3 & \cdot & c_1 & \cdot & \cdot & \cdot & c_{3+n} & \cdot & c_{1+n} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_1 & \cdot & c_{(n-1)+n} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1+n} & \cdot \\ c_n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_1 & c_{n+n} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1+n} \\ \hline c_{1+n} & c_{2+n} & c_{3+n} & \cdot & c_{(n-1)+n} & c_{n+n} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdot & c_{n-1} & c_n \\ c_{2+n} & c_{1+n} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_2 & c_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{3+n} & \cdot & c_{1+n} & \cdot & \cdot & \cdot & c_3 & \cdot & c_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{(n-1)+n} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1+n} & \cdot & c_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_1 & \cdot \\ c_{n+n} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1+n} & c_n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_1 \end{array}$$

In questo le condizioni (15) sono certamente soddisfatte nei quadri parziali che indicheremo coi numeri 1, 2, 3, 4 secondo l'ordine dato dallo schema $\frac{1|2}{3|4}$, e basterà dimostrare che le stesse condizioni sono verificate per quattro elementi appartenenti a differenti quadri. Siano dunque

$$\dots c_k \dots c_{r+n} \dots$$

due elementi presi sopra una qualunque linea e appartenenti rispettivamente ai quadri 1 e 2. Se, per fissare le idee, si suppone che nel quadro parziale 1 e sulla medesima linea degli elementi c_k, c_{r+n} , l'elemento c_r si trovi alla sinistra di c_k , e si suppone inoltre che gli elementi c_k, c_r i quali, nel quadro 1, soddisfano alle condizioni (15), siano situati al disopra dei corrispondenti c_r, c_k , avremo evidentemente la seguente disposizione:

$$(19) \begin{cases} c_k \dots c_r \\ \dots \dots \dots \\ c_r \dots c_k \dots c_{r+n} \end{cases}$$

Ora si osservi che, per il modo col quale è stato composto il quadro (18), esisterà nel quadro parziale 2 l'elemento c_{k+n} che si troverà sulla linea $c_k \dots c_r$ e nella colonna di c_{r+n} , in guisa che dalla (19) si giungerà alla disposizione

$$(20) \begin{cases} c_k \dots c_r \dots c_{k+n} \\ \dots \dots \dots \\ c_r \dots c_k \dots c_{r+n} \end{cases}$$

E, sempre per la stessa composizione del quadro (18), se si considerano la seconda e terza colonna della (20), e si contano n elementi al disotto degli elementi c_r e c_{k+n} si troveranno sulla medesima linea e nei quadri parziali 3 e 4 gli elementi c_{r+n} e c_k che completano la (20) nel seguente modo:

$$(21) \begin{cases} c_k \dots c_r \dots c_{k+n} \\ \dots \dots \dots \\ c_r \dots c_k \dots c_{r+n} \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad c_{r+n} \dots c_k \end{cases}$$

Le posizioni che occupano gli elementi c_k e c_{r+a} nelle due ultime linee e colonne della (21) provano all'evidenza che anche nel quadro (18) sono soddisfatte le condizioni (15).

Il quadro relativo ai quattro elementi c_1, c_2, c_3, c_4 , potendosi riguardare dedotto da quello dei due elementi c_1, c_2 , secondo la regola indicata nel quadro (18), colla medesima regola, e senza veruna difficoltà, si comporranno successivamente i quadri relativi a 8, 16, 2^m elementi, per qualunque valore intero dell'esponente m .

§ 4.

Passiamo ora a dimostrare che se le condizioni (15) debbono essere verificate, oltre che nei valori assoluti, anche nei segni dei due membri, non è possibile comporre il quadro (17) per valori di n maggiori di 8.

Fissando, per semplicità, di dare il segno positivo agli elementi situati nella prima linea e nella prima colonna, si avrà, per il caso di $n=2$, il quadro

$$\begin{array}{cc} + c_1 & + c_2 \\ + c_2 & - c_1 \end{array}$$

da cui risalendo alle (10), si hanno i binomi

$$a_1 c_1 + a_2 c_2, \quad a_1 c_2 - a_2 c_1$$

e conseguentemente l'identità

$$(a_1^2 + a_2^2) (c_1^2 + c_2^2) = (a_1 c_1 + a_2 c_2)^2 + (a_1 c_2 - a_2 c_1)^2$$

dovuta al FIBONACCI.

Nel caso di $n=4$, s'incomincia coll'avere il quadro

$$\begin{array}{cccc} + c_1 & + c_2 & + c_3 & + c_4 \\ + c_2 & - c_1 & c_4 & c_3 \\ + c_3 & c_4 & - c_1 & c_2 \\ + c_4 & c_3 & c_2 & - c_1 \end{array}$$

ove i segni negativi degli elementi c_i sono necessaria conseguenza dei segni positivi attribuiti agli elementi della prima linea e della prima colonna. Si può poi scegliere ad arbitrio il segno di uno dei rimanenti elementi; e se, per esempio, si vuole che l'elemento c_4 della seconda linea abbia il segno +, tutti gli altri elementi del quadro dovranno avere, in virtù delle (15), segni determinati. È facile riconoscere che si ottiene il seguente risultato

$$\begin{array}{cccc} + c_1 & + c_2 & + c_3 & + c_4 \\ + c_2 & - c_1 & + c_4 & - c_3 \\ + c_3 & - c_4 & - c_1 & + c_2 \\ + c_4 & + c_3 & - c_2 & - c_1 \end{array}$$

Con riguardo alle (10), se ne trarrà dunque la nota identità euleriana:

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2) = \\ (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + a_4 c_4)^2 + (a_1 c_2 - a_2 c_1 + a_3 c_4 - a_4 c_3)^2 + (a_1 c_3 - a_2 c_4 - a_3 c_1 + a_4 c_2)^2 + \\ + (a_1 c_4 + a_2 c_3 - a_3 c_2 - a_4 c_1)^2. \end{aligned}$$

Per agevolare la determinazione dei segni nel caso di $n=8$, osservando che da esso deve potersi dedurre il caso particolare di $n=4$, si fisserà che il quadro parziale, contrassegnato nel (18) col numero 1, abbia i segni testè stabiliti per $n=4$. Così si avrà intanto:

$+ c_1$	$+ c_2$	$+ c_3$	$+ c_4$	$+ c_5$	$+ c_6$	$+ c_7$	$+ c_8$
$+ c_2$	$- c_1$	$+ c_4$	$- c_3$	c_6	c_5	c_8	c_7
$+ c_3$	$- c_4$	$- c_1$	$+ c_2$	c_7	c_8	c_5	c_6
$+ c_4$	$+ c_3$	$- c_2$	$- c_1$	c_8	c_7	c_6	c_5
$+ c_5$	c_6	c_7	c_8	$- c_1$	c_2	c_3	c_4
$+ c_6$	c_5	c_8	c_7	c_2	$- c_1$	c_4	c_3
$+ c_7$	c_8	c_5	c_6	c_3	c_4	$- c_1$	c_2
$+ c_8$	c_7	c_6	c_5	c_4	c_3	c_2	$- c_1$

Attribuendo poi il segno $+$ agli elementi c_6 e c_8 della seconda linea, e il segno $-$ all'elemento c_7 della terza linea rimarranno determinati i segni di tutti gli altri elementi del quadro che risulterà costituito nel modo seguente:

$+ c_1$	$+ c_2$	$+ c_3$	$+ c_4$	$+ c_5$	$+ c_6$	$+ c_7$	$+ c_8$
$+ c_2$	$- c_1$	$+ c_4$	$- c_3$	$+ c_6$	$- c_5$	$+ c_8$	$- c_7$
$+ c_3$	$- c_4$	$- c_1$	$+ c_2$	$- c_7$	$+ c_8$	$+ c_5$	$- c_6$
$+ c_4$	$+ c_3$	$- c_2$	$- c_1$	$+ c_8$	$+ c_7$	$- c_6$	$- c_5$
$+ c_5$	$- c_6$	$+ c_7$	$- c_8$	$- c_1$	$+ c_2$	$- c_3$	$+ c_4$
$+ c_6$	$+ c_5$	$- c_8$	$- c_7$	$- c_2$	$- c_1$	$+ c_4$	$+ c_3$
$+ c_7$	$- c_8$	$- c_5$	$+ c_6$	$+ c_3$	$- c_4$	$- c_1$	$+ c_2$
$+ c_8$	$+ c_7$	$+ c_6$	$+ c_5$	$- c_4$	$- c_3$	$- c_2$	$- c_1$

Da questo quadro si deducono immediatamente i secondi membri delle (7), identificando, nelle (10), c_1, c_2, \dots, c_8 con a_1, b_1, \dots, h_1 , ed a_1, a_2, \dots, a_8 con a, b, \dots, h .

Il metodo finora seguito, il quale ha dato le soluzioni del problema nei casi di $n=2, 4, 8$, serve altresì a provarne l'impossibilità per $n=16$, ed *a fortiori* quindi per $n=2^m$, con $m > 4$.

Infatti, per $n=16$, si può stabilire il quadro

$+ c_1$	$+ c_2$	$+ c_3$	$+ c_4$	$+ c_5$	$+ c_6$	$+ c_7$	$+ c_8$	$+ c_9$	$+ c_{10}$	$+ c_{11}$	$+ c_{12}$	$+ c_{13}$	$+ c_{14}$	$+ c_{15}$	$+ c_{16}$
$+ c_2$	$- c_1$	$+ c_4$	$- c_3$	$+ c_6$	$- c_5$	$+ c_8$	$- c_7$	$+ c_{10}$	$- c_9$	$+ c_{12}$	$- c_{11}$	c_{14}	c_{13}	c_{16}	c_{15}
$+ c_3$	$- c_4$	$- c_1$	$+ c_2$	$- c_7$	$+ c_8$	$+ c_5$	$- c_6$	$- c_{11}$	$+ c_{12}$	$+ c_9$	$- c_{10}$	c_{15}	c_{16}	c_{13}	c_{14}
$+ c_4$	$+ c_3$	$- c_2$	$- c_1$	$+ c_8$	$+ c_7$	$- c_6$	$- c_5$	$+ c_{12}$	$+ c_{11}$	$- c_{10}$	$- c_9$	c_{15}	c_{16}	c_{14}	c_{13}
$+ c_5$	$- c_6$	$+ c_7$	$- c_8$	$- c_1$	$+ c_2$	$- c_3$	$+ c_4$	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}
$+ c_6$	$+ c_5$	$- c_8$	$- c_7$	$- c_2$	$- c_1$	$+ c_3$	c_{14}	c_{13}	c_{15}	c_{16}	c_{10}	c_9	c_{12}	c_{11}	c_{12}
$+ c_7$	$- c_8$	$- c_5$	$+ c_6$	$+ c_3$	$- c_4$	$- c_1$	$+ c_2$	c_{15}	c_{16}	c_{13}	c_{14}	c_{11}	c_{12}	c_9	c_{10}
$+ c_8$	$+ c_7$	$+ c_6$	$+ c_5$	$- c_4$	$- c_3$	$- c_2$	$- c_1$	c_{16}	c_{15}	c_{14}	c_{13}	c_{12}	c_{11}	c_{10}	c_9
$+ c_9$	$- c_{10}$	$+ c_{11}$	$- c_{12}$	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}	$- c_1$	$+ c_2$	$- c_3$	$+ c_4$	c_5	c_6	c_7	c_8
$+ c_{10}$	$+ c_9$	$- c_{12}$	$- c_{11}$	c_{14}	c_{13}	c_{16}	c_{15}	$- c_2$	$- c_1$	$+ c_4$	$+ c_3$	c_6	c_5	c_8	c_7
$+ c_{11}$	$- c_{12}$	$- c_9$	$+ c_{10}$	c_{15}	c_{16}	c_{13}	c_{14}	$+ c_3$	$- c_4$	$- c_1$	$+ c_2$	c_7	c_8	c_6	c_5
$+ c_{12}$	$+ c_{11}$	$+ c_{10}$	$+ c_9$	c_{16}	c_{15}	c_{14}	c_{13}	$- c_4$	$- c_3$	$- c_2$	$- c_1$	c_8	c_7	c_6	c_5
$+ c_{13}$	c_{14}	c_{15}	c_{16}	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_5	c_6	c_7	c_8	$- c_1$	c_2	c_3	c_4
$+ c_{14}$	c_{13}	c_{16}	c_{15}	c_{10}	c_9	c_{12}	c_{11}	c_6	c_5	c_8	c_7	c_2	$- c_1$	c_4	c_3
$+ c_{15}$	c_{16}	c_{13}	c_{14}	c_{11}	c_{12}	c_9	c_{10}	c_7	c_8	c_5	c_6	c_3	c_4	$- c_1$	c_2
$+ c_{16}$	c_{15}	c_{14}	c_{13}	c_{12}	c_{11}	c_{10}	c_9	c_8	c_7	c_6	c_5	c_4	c_3	c_2	$- c_1$

dove, secondo il solito, sono stati attribuiti i segni positivi agli elementi della prima linea e della prima colonna, e dove il quadro parziale, già designato nel (18) col numero 1, è quello precedentemente ottenuto nel caso di $n=8$, e i segni d'una parte degli altri elementi (esclusi quelli degli elementi c_1 che dipendono, come si sa, dai segni della prima linea e della prima colonna) sono determinati, dopochè agli elementi c_{10} e c_{12} della seconda linea è stato attribuito il segno $+$ e all'elemento c_{11} della terza linea il segno $-$.

Si prenda ora a considerare il quadrato centrale contenente gli elementi $c_1, c_2, c_3, c_4, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}$. Tenendo conto anche dei segni che già vi si trovano, esso è:

$$\begin{array}{cccccccc}
 -c_1 & +c_2 & -c_3 & +c_4 & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\
 -c_2 & -c_1 & +c_4 & +c_3 & c_{14} & c_{13} & c_{16} & c_{15} \\
 +c_3 & -c_4 & -c_1 & +c_2 & c_{15} & c_{16} & c_{13} & c_{14} \\
 -c_4 & -c_3 & -c_2 & -c_1 & c_{16} & c_{15} & c_{14} & c_{13} \\
 c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & -c_1 & +c_2 & -c_3 & +c_4 \\
 c_{14} & c_{13} & c_{16} & c_{15} & -c_2 & -c_1 & +c_4 & +c_3 \\
 c_{15} & c_{16} & c_{13} & c_{14} & +c_3 & -c_4 & -c_1 & +c_2 \\
 c_{16} & c_{15} & c_{14} & c_{13} & -c_4 & -c_3 & -c_2 & -c_1
 \end{array}$$

Se all'elemento c_{13} della prima linea, il cui segno può essere scelto ad arbitrio, si attribuisce, per esempio, il segno $+$, ne verrà di conseguenza che l'elemento c_{16} della 5^a linea dovrà avere il segno $-$, e gli elementi c_{13} della 6^a, 7^a e 8^a linea il segno $+$. Ma allora, con queste nuove determinazioni di segni, l'elemento c_{13} della seconda linea che può essere, per così dire, riguardato tanto come quarto vertice a destra del rettangolo

$$\begin{array}{ccc}
 +c_3 & \cdot & c_{13} \dots \dots (2^a \text{ linea}) \\
 \vdots & & \vdots \\
 \vdots & & \vdots \\
 \vdots & & \vdots \\
 +c_{13} & \cdot & -c_3 \dots \dots (8^a \text{ linea})
 \end{array}$$

quanto come quarto vertice a destra del rettangolo

$$\begin{array}{ccc}
 -c_2 \dots \dots & c_{13} \dots \dots & (2^a \text{ linea}) \\
 \vdots & \vdots & \\
 -c_{13} \dots \dots & +c_2 \dots \dots & (5^a \text{ linea})
 \end{array}$$

dovrebbe avere nel primo caso il segno $+$ e nel secondo il segno $-$. Questo è contraddittorio; e perciò dall'impossibilità di completare la determinazione dei segni nel quadro relativo ai 16 elementi c_1, c_2, \dots, c_{16} ; consegue l'impossibilità di trasformare il prodotto di due somme di 16 quadrati in una somma di 16 quadrati.

§ 5.

Non vogliamo lasciare questo argomento senz'aggiungere la seguente osservazione.

Se nelle somme $a^2 + b^2 + \dots + h^2$, $a_1^2 + b_1^2 + \dots + h_1^2$, lasciando inalterate le quantità a ed a_1 si sostituiscono a

$b, b_1, c, c_1, d, d_1, e, e_1, f, f_1, g, g_1, h, h_1$ rispettivamente le quantità

$$b\sqrt{p}, b_1\sqrt{p}, c\sqrt{q}, c_1\sqrt{q}, d\sqrt{pq}, d_1\sqrt{pq}, e\sqrt{r}, e_1\sqrt{r}, \\ f\sqrt{pr}, f_1\sqrt{pr}, g\sqrt{qr}, g_1\sqrt{qr}, h\sqrt{pqr}, h_1\sqrt{pqr}$$

si hanno i polinomi

$$(22) \quad \begin{cases} a^2 + pb^2 + qc^2 + pqd^2 + re^2 + prf^2 + qrg^2 + pqrh^2 \\ a_1^2 + pb_1^2 + qc_1^2 + pqd_1^2 + re_1^2 + prf_1^2 + qrg_1^2 + pqrh_1^2. \end{cases}$$

E se le stesse sostituzioni si fanno nei secondi membri delle (7), si trovano subito espressioni tali che dimostrano essere il prodotto dei polinomi (22) trasformabile in un polinomio della stessa forma dei fattori.

L'identità, a cui così si dà luogo, non è dunque da ritenere come *più generale*, ma come *equivalente* a quella già avuta nell'ipotesi di $p = q = r = 1$.

Roma, Giugno 1896.

ALCUNE FORMOLE DI TRIGONOMETRIA

per mezzo delle quali si possono calcolare rapidamente degli integrali di uso frequente

I. PROBLEMA 1°. — *Trasformare un prodotto di coseni o seni in una somma di coseni o seni.*

a) In virtù delle identità

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}, \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2},$$

si ha

$$\prod_{i=1}^n \operatorname{cos} \alpha_i = \operatorname{cos} \alpha_1 \cdot \operatorname{cos} \alpha_2 \cdot \operatorname{cos} \alpha_3 \dots \operatorname{cos} \alpha_n = \\ = \frac{1}{2^n} (e^{i\alpha_1} + e^{-i\alpha_1}) (e^{i\alpha_2} + e^{-i\alpha_2}) \dots (e^{i\alpha_n} + e^{-i\alpha_n}).$$

Eseguendo i prodotti indicati, e raggruppando convenientemente i termini, si deduce

$$(1) \quad \operatorname{cos} \alpha_1 \cdot \operatorname{cos} \alpha_2 \dots \operatorname{cos} \alpha_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum \operatorname{cos} (\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \alpha_3 \dots \pm \alpha_n),$$

dove la somma che comparisce nel secondo membro s'intende estesa a tutti i termini che s'ottengono combinando in tutti i modi possibili i segni \pm . Il loro numero è dunque 2^{n-1} .

ESEMPLI.

$$\cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 = \frac{1}{2} \left\{ \cos (\alpha_1 + \alpha_2) + \cos (\alpha_1 - \alpha_2) \right\}.$$

$$\cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_3 =$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ \cos (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \cos (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) + \cos (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) + \cos (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ \cos (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \cos (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) + \cos (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) + \cos (-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \right\}.$$

b) Si può ora trasformare in una somma il prodotto

$$\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \dots \sin \alpha_h \cos \alpha_{h+1} \dots \cos \alpha_n,$$

mettendo nella (1) al posto di $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h$ rispettivamente $\frac{\pi}{2} - \alpha_1, \frac{\pi}{2} - \alpha_2, \dots, \frac{\pi}{2} - \alpha_h$. Operando in tal guisa i termini del secondo membro restano tutti della forma $\pm \cos (\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \alpha_3 \dots \pm \alpha_n)$ oppure $\pm \sin (\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \alpha_3 \dots \pm \alpha_n)$.

2. Applichiamo quanto abbiamo detto alla trasformazione di

$$\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \dots \sin \alpha_n,$$

e distinguiamo perciò il caso di n pari da n dispari.

a) Sia $n = 2m$. Si avrà per la (1)

$$\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \dots \sin \alpha_{2m} = \frac{1}{2^{2m-1}} \sum \cos \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 \right) \pm \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 \right) \pm \dots \pm \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{2m} \right) \right\}.$$

Per vedere come si trasforma il secondo membro, consideriamone un termine qualunque che abbia s segni $-$ e $2m - s$ segni $+$, per esempio

$$K = \cos \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 \right) + \dots + \right. \\ \left. + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{2m-s} \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{2m-s+1} \right) - \dots - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{2m} \right) \right\}.$$

Si ha

$$K = \cos \left\{ 2(m-s) \frac{\pi}{2} - [\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2m-s} - \alpha_{2m-s+1} - \dots - \alpha_{2m}] \right\} \\ = \cos \left\{ (m-s) \pi - [\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2m-s} - \alpha_{2m-s+1} - \dots - \alpha_{2m}] \right\}$$

Se $(m-s)$ è pari risulta

$$K = \cos (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2m-s} - \alpha_{2m-s+1} - \dots - \alpha_{2m});$$

se $(m-s)$ è dispari risulta

$$K = -\cos (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2m-s} - \alpha_{2m-s+1} - \dots - \alpha_{2m}).$$

Possiamo dunque scrivere

$$(2) \quad \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \dots \sin \alpha_{2m} = \frac{1}{2^{2m-1}} \sum \pm \cos \{ \alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \alpha_3 \dots \pm \alpha_{2m} \};$$

la somma che comparisce nel secondo membro è estesa a tutte le combinazioni dei segni \pm , ed ogni termine è preso col segno $+$ o $-$ secondo che (indicando con s il numero dei segni $-$ che precedono la α , è $m-s$ pari o dispari.

ESEMPL.

$$\operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2 = \frac{1}{2} \left\{ -\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \right\}.$$

$$8 \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2 \operatorname{sen} \alpha_3 \operatorname{sen} \alpha_4 = \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - \cos(-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - \cos(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - \cos(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4) - \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) + \cos(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4) + \cos(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) + \cos(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4).$$

b) Supponiamo ora $n = 2m + 1$. Per la (1) si ha

$$\operatorname{sen} \alpha_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha_2 \dots \operatorname{sen} \alpha_{2m+1} =$$

$$= \frac{1}{2^{2m}} \sum \cos \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 \right) \pm \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 \right) \pm \dots \pm \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{2m+1} \right) \right\}.$$

Per trasformare il secondo membro consideriamone un termine che abbia s segni $-$ e $(2m + 1 - s)$ segni $+$, per esempio

$$K = \cos \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 \right) \dots + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{2m+1-s} \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{2m+2-s} \right) \dots - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{2m+1} \right) \right\}.$$

Si ha

$$K = \cos \left\{ (2m + 1 - 2s) \frac{\pi}{2} - [\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2m+1-s} - \alpha_{2m+2-s} - \dots - \alpha_{2m+1}] \right\} \\ = \cos \left\{ (m - s) \pi + \frac{\pi}{2} - [\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2m+1-s} - \alpha_{2m+2-s} - \dots - \alpha_{2m+1}] \right\}.$$

Se $(m - s)$ è pari, risulta

$$K = \cos \left\{ \frac{\pi}{2} - [\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2m+1-s} - \alpha_{2m+2-s} - \dots - \alpha_{2m+1}] \right\} \\ = \operatorname{sen} \left\{ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2m+1-s} - \alpha_{2m+2-s} - \dots - \alpha_{2m+1} \right\}.$$

Se $(m - s)$ è dispari, si ha

$$K = -\cos \left\{ \frac{\pi}{2} - [\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2m+1-s} - \alpha_{2m+2-s} - \dots - \alpha_{2m+1}] \right\} \\ = -\operatorname{sen} \left\{ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2m+1-s} - \alpha_{2m+2-s} - \dots - \alpha_{2m+1} \right\}.$$

Si ha dunque

$$(3) \quad \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2 \dots \operatorname{sen} \alpha_{2m+1} = \frac{1}{2^{2m}} \sum \pm \operatorname{sen} (\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \alpha_3 \dots \pm \alpha_{2m+1}),$$

dove ogni termine del 2° membro è preso col segno $+$ o $-$, secondo che $(m - s)$ è pari o dispari.

A questi risultati si può giungere anche direttamente collo stesso procedimento adoperato per ottenere la (1). Si ha infatti

$$\operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2 \dots \operatorname{sen} \alpha_{2m} = \frac{1}{(2i)^{2m}} (e^{i\alpha_1} - e^{-i\alpha_1}) \dots (e^{i\alpha_{2m}} - e^{-i\alpha_{2m}}) \\ = \frac{-1^m}{2^{2m-1}} \sum (e^{i(\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \dots \pm \alpha_{2m})} + e^{-i(\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \dots \pm \alpha_{2m})}).$$

3. Le formule (1), (2), (3) permettono di calcolare molto rapidamente alcuni integrali.

$$(4) \int \cos \alpha_1 x \cdot \cos \alpha_2 x \dots \cos \alpha_n x \cdot dx = \frac{1}{2^{n-1}} \sum \int \cos (\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \dots \pm \alpha_n) x \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \sum \frac{\operatorname{sen} (\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \dots \pm \alpha_n) x}{\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \dots \pm \alpha_n}$$

$$(5) \int \operatorname{sen} \alpha_1 x \operatorname{sen} \alpha_2 x \dots \operatorname{sen} \alpha_{2m} x \cdot dx = \frac{1}{2^{2m-1}} \sum \pm \frac{\operatorname{sen} (\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \dots \pm \alpha_{2m}) x}{\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \dots \pm \alpha_{2m}}$$

$$(6) \int \operatorname{sen} \alpha_1 x \operatorname{sen} \alpha_2 x \dots \operatorname{sen} \alpha_{2m+1} x \cdot dx = \frac{1}{2^{2m}} \sum \mp \frac{\cos (\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \dots \pm \alpha_{2m+1}) x}{\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \dots \pm \alpha_{2m+1}}$$

4. PROBLEMA. — Trasformare la potenza n^{ma} (n intero e positivo) di un seno o coseno in una somma di seni o coseni.

Se nelle formule (1), (2), (3) si pone $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = \alpha$, si trovano immediatamente le formule richieste, le quali però si possono anche ricavare direttamente come segue. Distingueremo il caso di n pari da quello di n dispari.

$$a) \cos^{2m} x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^{2m}$$

$$= \frac{1}{2^{2m}} \left\{ \binom{2m}{0} (e^{i2mx} + e^{-i2mx}) + \binom{2m}{1} (e^{i3(m-1)x} + e^{-i3(m-1)x}) + \dots + \binom{2m}{m-1} (e^{i2x} + e^{-i2x}) + \binom{2m}{m} \right\}$$

e quindi

$$(7) 2^{2m-1} \cos^{2m} x = \frac{1}{2} \binom{2m}{m} +$$

$$+ \binom{2m}{m-1} \cos 2x + \binom{2m}{m-2} \cos 4x + \dots + \binom{2m}{1} \cos 2(m-1)x + \cos 2mx :$$

$$\cos^{2m+1} x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^{2m+1}$$

$$= \frac{1}{2^{2m+1}} \left\{ \binom{2m+1}{0} (e^{i(2m+1)x} + e^{-i(2m+1)x}) + \binom{2m+1}{1} (e^{i(2m-1)x} + e^{-i(2m-1)x}) \dots + \binom{2m+1}{m-1} (e^{i3x} + e^{-i3x}) + \binom{2m+1}{m} (e^{ix} + e^{-ix}) \right\}$$

ossia

$$(8) 2^{2m} \cos^{2m+1} x = \binom{2m+1}{m} \cos x + \binom{2m+1}{m-1} \cos 3x + \binom{2m+1}{m-2} \cos 5x +$$

$$\dots + \binom{2m+1}{1} \cos (2m-1)x + \cos (2m+1)x.$$

In simil guisa si possono trovare gli sviluppi di $\operatorname{sen}^{2m} x$, $\operatorname{sen}^{2m+1} x$. Ma si giunge più facilmente agli stessi risultati ponendo nelle (7) e

(8) $\frac{\pi}{2} - x$ al posto di x . Si ha

$$\cos 2k \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos (k\pi - 2kx) = \pm \cos 2kx$$

$$\cos (2k+1) \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos \left(k\pi + \frac{\pi}{2} - 2kx \right) = \pm \operatorname{sen} 2kx,$$

dove il segno dell'ultimo membro è + o - secondo che k è pari o dispari.

Si ha dunque

$$(9) \quad 2^{2m-1} \operatorname{sen}^{2m} x = \frac{1}{2} \binom{2m}{m} - \binom{2m}{m-1} \cos 2x + \binom{2m}{m-2} \cos 4x - \dots + (-1)^m \cos 2mx$$

$$(10) \quad 2^{2m} \operatorname{sen}^{2m+1} x = \binom{2m+1}{m} \operatorname{sen} x - \binom{2m+1}{m-1} \operatorname{sen} 3x + \binom{2m+1}{m-2} \operatorname{sen} 5x - \dots + (-1)^m \operatorname{sen} (2m+1)x.$$

5. Le formule (7), (8), (9), (10) permettono di calcolare degli integrali di uso frequente. Infatti da esse si deduce

$$(11) \quad 2^{2m-1} \int \cos^{2m} x \, dx = \frac{1}{2} \binom{2m}{m} x + \binom{2m}{m-1} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \binom{2m}{m-3} \cos \frac{4x}{4} + \dots + \frac{\operatorname{sen} 2mx}{2m} + C.$$

$$(12) \quad 2^{2m-1} \int \operatorname{sen}^{2m} x \, dx = \frac{1}{2} \binom{2m}{m} x - \binom{2m}{m-1} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \binom{2m}{m-3} \frac{\cos 4x}{4} - \dots + (-1)^m \frac{\operatorname{sen} 2mx}{2m} + C.$$

$$(13) \quad 2^{2m} \int \cos^{2m+1} x \, dx = \binom{2m+1}{m} \operatorname{sen} x + \binom{2m+1}{m-1} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \binom{2m+1}{m-2} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \dots + \frac{\operatorname{sen} (2m+1)x}{2m+1} + C.$$

$$(14) \quad 2^{2m} \int \operatorname{sen}^{2m+1} x \, dx = -\binom{2m+1}{m} \cos x + \binom{2m+1}{m-1} \frac{\cos 3x}{3} - \binom{2m+1}{m-2} \frac{\cos 5x}{5} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{\cos (2m+1)x}{2m+1} + C.$$

G. LAZZERI.

TEOREMI SULLE FRAZIONI CONTINUE PERIODICHE

1. È noto (*) che:

a) le radici irrazionali di un'equazione di 2° grado a coefficienti razionali sono sviluppabili, indipendentemente dal segno, in frazioni continue periodiche, aventi per numeratori parziali l'unità positiva, e per denominatori parziali numeri interi e positivi;

b) qualunque frazione continua periodica, della forma anzidetta, è radice di un'equazione di 2° grado a coefficienti razionali;

c) un'equazione di 2° grado, avente una radice uguale ad una periodica semplice, ha le radici di segno contrario; ed un'equazione di 2° grado,

(*) NOVI G., *Trattato di Algebra Superiore*; SERRET, *Cours d'Algebra Supérieure*.

avente una radice uguale ad una periodica mista, con più di un elemento prima del periodo, ha le radici dello stesso segno;

d) se un'equazione di 2° grado ha una radice uguale ad una periodica semplice, l'altra radice è l'unità negativa divisa per la periodica semplice, che ha il periodo composto degli stessi elementi presi nell'ordine inverso;

e) due periodiche miste, radici di un'equazione di 2° grado, hanno i periodi composti degli stessi elementi, disposti in ordine inverso a partire da uno di essi.

2. Per quanto si è detto (1; a, c, d), un'equazione di 2° grado a coefficienti razionali, avente le radici (irrazionali) di segno contrario, può avere per radici o due periodiche semplici, o due periodiche miste coll'antiperiodo di un solo elemento; ci proponiamo ora di determinare in quali casi dette radici siano periodiche semplici, ed in quali periodiche miste.

3. **TEOREMA.** — *Due frazioni continue periodiche miste coll'antiperiodo di un solo elemento, non possono essere, indipendentemente dal segno, radici di una stessa equazione di 2° grado a coefficienti razionali, avente le radici di segno contrario, se le frazioni sono l'una maggiore e l'altra minore dell'unità.*

Supponiamo che, indicando con x_1 ed x_2 le radici dell'equazione, e con p e q due numeri interi e positivi, si abbia (1; e):

$$x_1 = p + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_r + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_1 + \dots}}}}}}} \quad -x_2 = -\frac{1}{q + \frac{1}{a_r + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_1 + \dots}}}}}} + \frac{1}{a_r + \dots} + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_1 + \dots}}}}} + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_1 + \dots}}} + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_1 + \dots}} + \frac{1}{a_1 + \dots}$$

Facendo dell'equazione la trasformata in $y = x - p$, ed indicando con y_1 ed y_2 le radici della trasformata, si avrebbe:

$$y_1 = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_r + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_1 + \dots}}}}}}} \quad -y_2 = p + \frac{1}{q + \frac{1}{a_r + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_1 + \dots}}}}}} + \frac{1}{a_r + \dots} + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_1 + \dots}}}}} + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_1 + \dots}}} + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_1 + \dots}} + \frac{1}{a_1 + \dots}$$

E poichè y_1 è una periodica semplice, anche $-y_2$ dovrebbe essere una periodica semplice (1; d), e quindi:

$$q = a_{r+1}, \quad p = a_{r+2};$$

ma allora x_1 e $-x_2$ sarebbero due periodiche semplici, e ciò è contro l'ipotesi.

Si giunge alla stessa conclusione, supponendo x_1 negativa, x_2 positiva, e facendo dell'equazione la trasformata in $y = x + p$.

4. TEOREMA. — Se a, b, c sono numeri interi e positivi, affinché l'equazione

$$ax^2 \pm bx - c = 0$$

abbia le radici sviluppabili in frazioni continue periodiche semplici, è necessario e sufficiente che si abbia

$$a + b > c > a - b.$$

Per quanto si disse (1; d), e pel teorema ora dimostrato, affinché detta equazione abbia per radici due periodiche semplici, è condizione necessaria e sufficiente che una delle radici sia maggiore e l'altra minore dell'unità, in valore numerico. Ora, considerando dapprima l'equazione

$$ax^2 + bx - c = 0,$$

dalla quale si ha

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}, \quad -x_2 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a},$$

dovrà essere

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} < 1, \quad \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} > 1,$$

ossia

$$\sqrt{b^2 + 4ac} < 2a + b, \quad \sqrt{b^2 + 4ac} > 2a - b,$$

e quindi, per $2a > b$,

$$c < a + b, \quad c > a - b;$$

per $2a = b$,

$$c < a + b, \quad \sqrt{b^2 + 4ac} > 0 \text{ (condizione sempre soddisfatta);}$$

per $2a < b$,

$$c < a + b, \quad \sqrt{b^2 + 4ac} > -b \text{ (condizione sempre soddisfatta).}$$

Si ha dunque, in generale, l'unica condizione

$$a + b > c > a - b.$$

Considerando poi l'equazione

$$ax^2 - bx - c = 0,$$

dalla quale si ha

$$x_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}, \quad -x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a},$$

dovrà essere

$$\frac{b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} > 1, \quad \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} < 1,$$

e si ha così la condizione precedente.

5. Quando non sia soddisfatta l'anzidetta condizione, l'equazione:

$$ax^2 \pm bx - c = 0$$

ammette necessariamente per radici due periodiche miste coll'antiperiodo di un solo elemento.

Nel caso particolare di $c = a \pm b$, le radici sono razionali; si ha infatti in tale ipotesi

$$b^2 + 4ac = b^2 + 4a(a \pm b) = b^2 + 4a^2 \pm 4ab = (2a \pm b)^2.$$

6. Nell'ipotesi di $b = 0$, la condizione, di cui al precedente teorema, non è soddisfatta, e quindi, considerando l'equazione

$$ax^2 - c = 0,$$

si deduce che la radice quadrata irrazionale non solo di un numero intero (com'è noto), ma benanche di un numero frazionario, sviluppata in frazione continua, dà sempre origine ad una periodica mista coll'antiperiodo di un solo elemento.

7. Relativamente all'equazione con radici di ugual segno, si ha il seguente

TEOREMA. — *Due frazioni continue periodiche miste coll'antiperiodo di un solo elemento, non possono essere, indipendentemente dal segno, radici di una stessa equazione di 2° grado a coefficienti razionali, avente le radici di ugual segno, se le frazioni sono ambedue maggiori, od ambedue minori dell'unità.*

Infatti, supponiamo che le radici siano positive, e che, indicando con x_1 ed x_2 le radici e con p e q due numeri interi e positivi, si abbia

$$x_1 = p + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_r + \dots}}}}$$

$$x_2 = q + \frac{1}{a_r + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \dots + \frac{1}{a_1 + \dots}}}}}}$$

Quando fosse $p = q$, facendo la trasformata in $y = x - p$, tale trasformata, che pure avrebbe tutte due le radici positive, ammetterebbe per radici due periodiche semplici; il che è impossibile. Quando fosse $p < q$, ad esempio $p < q$, facendo dell'equazione la trasformata in $y = x - p$, tale trasformata, che pure avrebbe tutte due le radici positive, avrebbe almeno una radice uguale ad una periodica semplice; il che è del pari impossibile.

Supponiamo in secondo luogo che si abbia

$$x_1 = \frac{1}{p + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}}$$

$$x_2 = \frac{1}{q + \frac{1}{a_r + \frac{1}{a_{r+1} + \frac{1}{a_{r+2} + \frac{1}{a_{r+3} + \dots}}}}}$$

$$x_3 = \frac{1}{r + \frac{1}{a_{r+1} + \frac{1}{a_{r+2} + \frac{1}{a_{r+3} + \frac{1}{a_{r+4} + \dots}}}}}$$

$$x_4 = \frac{1}{s + \frac{1}{a_{r+2} + \frac{1}{a_{r+3} + \frac{1}{a_{r+4} + \frac{1}{a_{r+5} + \dots}}}}}$$

$$x_5 = \frac{1}{t + \frac{1}{a_{r+3} + \frac{1}{a_{r+4} + \frac{1}{a_{r+5} + \frac{1}{a_{r+6} + \dots}}}}}$$

$$x_6 = \frac{1}{u + \frac{1}{a_{r+4} + \frac{1}{a_{r+5} + \frac{1}{a_{r+6} + \frac{1}{a_{r+7} + \dots}}}}}$$

$$x_7 = \frac{1}{v + \frac{1}{a_{r+5} + \frac{1}{a_{r+6} + \frac{1}{a_{r+7} + \frac{1}{a_{r+8} + \dots}}}}}$$

$$x_8 = \frac{1}{w + \frac{1}{a_{r+6} + \frac{1}{a_{r+7} + \frac{1}{a_{r+8} + \frac{1}{a_{r+9} + \dots}}}}}$$

$$x_9 = \frac{1}{z + \frac{1}{a_{r+7} + \frac{1}{a_{r+8} + \frac{1}{a_{r+9} + \frac{1}{a_{r+10} + \dots}}}}}$$

Facendo dell'equazione la trasformata in $y = \frac{1}{x}$, e di questa, come precedentemente, la trasformata in $z = y - p$, si cadrebbe nell'impossibilità di cui sopra.

Se infine le radici dell'equazione primitiva fossero negative ed ambedue maggiori o minori dell'unità, facendo dell'equazione la trasformata in $y = -x$, saremmo ricondotti ai casi precedenti.

DIEGO FELLINI.

DI UNA NUOVA SUCCESSIONE DI NUMERI

1. A complemento della mia nota sulla funzione $\psi(a, b)$, comparsa nell'ultimo fascicolo dell'anno 1897 di questo Periodico, ecco alcuni teoremi analoghi con brevissimi cenni delle dimostrazioni, il cui completo sviluppo lascio al benevolo lettore. I due corollari finali mi sembrano notevoli, perchè con facili considerazioni risalgono *elementarmente* da proprietà delle funzioni trascendenti elementari alle funzioni stesse, stabilendo così proprietà e *caratteristiche* di dette funzioni.

LEMMA. — Se nella successione

$$(1) \quad a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}, a_n, b_n,$$

in cui $a_1 > 0, b_1 > 0$, valgono a partire dal terzo termine le relazioni

$$(2) \quad a_n = + \sqrt{a_{n-1} \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}} \quad b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$$

la classe dei numeri a_1, a_2, a_3, \dots è contigua a quella dei numeri b_1, b_2, b_3, \dots , e il numero che separa queste due classi è il limite cui tende la data successione.

Dimostrazione. — Analogamente alla dimostrazione di esistenza di $\psi(a, b)$ si noti: che le a variano sempre in un senso; le b nel senso opposto; che il segno di $a_n - b_n$ è uguale a quello di $a_{n-1} - b_{n-1}$, e quindi è costantemente uguale al segno di $a_1 - b_1$; finalmente che $a_n^2 - b_n^2$ decresce indefinitamente al crescere

di n ; e infatti $|a_n^2 - b_n^2| < \left| \frac{a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2}{2} \right|$, perchè

$$|a_n^2 - b_n^2| = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} \left| \frac{a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2}{2} \right|;$$

perciò a_n e b_n tendono a un medesimo limite.

2. Chiamato $\Phi(a_1, b_1)$ questo limite e ricordata la definizione da me data di $\psi(a, b)$ sussistono i seguenti teoremi:

TEOREMA I. — *Indicato con $\Phi^2(a, b)$ il quadrato di $\Phi(a, b)$, si ha*

$$a \cdot \psi(a, b) = \Phi^2(a, b).$$

TEOREMA II. — *Se a, b sono rispettivamente la media aritmetica e geometrica di quei numeri positivi m, n , delle cui radici quadrate $+\sqrt{m}, +\sqrt{n}$ i numeri p e q sono rispettivamente la media aritmetica e geometrica, si ha:*

$$\psi(a, b) = \psi(p, q).$$

TEOREMA III. — *Se $a^2 + c^2 = b^2$, con $c > 0$, si ha $\text{arctg} \frac{c}{a} = \text{arcsen} \frac{c}{b} = \text{arccos} \frac{a}{b} = \frac{ac}{\Phi^2(a, b)}$.*

TEOREMA IV. — *Se m_0 ed n_0 sono rispettivamente la media aritmetica e la media geometrica di m ed n , si ha $\log_r \frac{m}{n} = \frac{1}{2} \frac{m^2 - n^2}{\Phi^2(m_0, n_0)}$.*

TEOREMA V. — *Se p_0 e q_0 sono rispettivamente la media aritmetica e geometrica di \sqrt{p} e \sqrt{q} , si ha*

$$\log_r \frac{p}{q} = \frac{p - q}{\Phi^2(p_0, q_0)}.$$

TEOREMA VI. — *Se $a^2 + c^2 = b^2$, con $c > 0$, si ha*

$$\frac{1}{\Phi^2(a, b)} + \frac{1}{\Phi^2(c, b)} = \frac{\pi}{2ab}.$$

per tutti i valori positivi di a e b con $a < b$.

Dimostrazione. — L'espressione $\varepsilon = \frac{ac}{\text{arccos} \frac{a}{b}}$ non muta di valore quando,

fatto $a = a_1, b = b_1$, si pongono per a_1, b_1 rispettivamente a_2, b_2 , ciò che con un facile calcolo si riconosce. Non muterà quindi neppure se in luogo di a_1, b_1 pongo a_3, b_3 ecc.

oppure a_k, b_k . Ma, poichè $c = +\sqrt{b^2 - a^2}$ e poichè $\lim_{a \rightarrow b} \frac{\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}}{\text{arccos} \frac{a}{b}} = 1$, si vede

che quando a e b tendono a un limite λ , ε tende al limite λ^2 . E perchè col crescere di n , a_n e b_n tendono a $\Phi(a, b)$, si vede immediatamente, per l'invariabilità del valore di ε (quando in luogo di a, b , si pongono a_n, b_n), che $\frac{ac}{\text{arccos} \frac{a}{b}} = \Phi^2(a, b)$.

Dimostrato così il teor. III, il teor. VI è evidente, perchè esso ci dice soltanto che $\text{arccos} \frac{a}{b} + \text{arcsen} \frac{a}{b} = \frac{\pi}{2}$. Per dimostrare il teor. IV si esprimono m, n per m_0 ed n_0 ; e, fatto $m_0 = a_1, n_0 = b_1$, si ripetano per la frazione $\frac{1}{2} \frac{m^2 - n^2}{\log_r \frac{m}{n}}$, espressa

in funzioni di m ed n le considerazioni testè fatte per la frazione $\frac{ac}{\arccos \frac{a}{b}}$. Il

teor. V si può quindi dedurre dal IV, facendo $p = m^2$, $q = n^2$; i primi due teoremi si ottengono dal confronto delle formole ora ottenute con quelle esposte nella nota già citata sulla $\psi(a, b)$.

3. Come corollari delle precedenti teorie, ecco le seguenti proprietà.

TEOREMA. — Condizioni necessarie e sufficienti affinché sia $\varphi(x) = \cos x$, sono le:

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \varphi(x)}{2}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - [\varphi(x)]^2}}{x} = 1.$$

TEOREMA. — Condizioni necessarie e sufficienti affinché sia $\varphi(x) = \log_r x$, cioè proprietà caratteristiche della funzione $\log_r x$, sono le:

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\varphi(x)} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\varphi(x)}{x-1} = 1.$$

Dimostrazione. — Infatti queste sole proprietà bastarono nelle precedenti dimostrazioni ad esprimere $\arccos \frac{a}{b}$ e $\log_r \frac{a}{b}$ in funzione di a e b .

4. Allo studioso propongo ora i seguenti problemi:

PROBLEMA I. — Esprimere $\operatorname{arccosh} \frac{a}{b}$, $\operatorname{arcsenh} \frac{a}{b}$ per mezzo della funzione Φ .

PROBLEMA II. — Trovare teoremi analoghi a quelli del § 3 per le funzioni iperboliche.

PROBLEMA III. — Come si modificano i teoremi del § 3, per $\varphi(x) = \arccos x$? E come si modificano, quando $\varphi(x) = \log_r x$, senza che la base del sistema dei logaritmi sia determinata?

GUIDO FUBINI.

SOPRA LA RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI

NOTA DEL DOTT. N. M. LEONCINI

Nella serie delle importanti conseguenze che discendono dal corollario di Lindemann (*) sulla trascendenza del numero e merita di essere notata la seguente, che riguarda direttamente la geometria elementare.

È impossibile che tra i lati e gli angoli di un triangolo qualunque sussista una relazione algebrica in cui vi comparisca almeno un lato.

Questa proposizione mostra la necessità della introduzione delle funzioni circolari per la risoluzione dei triangoli, e si deduce dal sopra citato corollario semplicemente così:

Siano con a, b, c e con α, β, γ indicati rispettivamente i tre lati di un triangolo e gli angoli opposti. Una relazione fra questi elementi, in cui comparisca almeno

(*) F. KLEIN, Conferenze sopra alcune questioni di geometria elementare. Trad. di F. Giudice.

un lato ed un angolo conterrà almeno quattro di tali elementi, e fra questi almeno due lati perchè fra i tre angoli sussiste la relazione

$$(1) \quad \alpha + \beta - \gamma = 2\pi.$$

Siano a, b i lati che vi compariscono, e la relazione sia *algebraica*.

Mediante le note relazioni della trigonometria

$$a = \frac{c \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} = \frac{c \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \beta} + \operatorname{sen} \beta \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}$$

$$b = \frac{c \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)} = \frac{c \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \beta} + \operatorname{sen} \beta \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}$$

e la (1), essa si trasformerà in una relazione ancora *algebraica*

$$F(c, \operatorname{sen} \alpha, \operatorname{sen} \beta, \alpha, \beta) = 0$$

in $c, \operatorname{sen} \alpha, \operatorname{sen} \beta, \alpha, \beta$, la quale dovrà esser soddisfatta identicamente quali si siano i valori di c, α, β , che rappresentano un lato e i due angoli adiacenti di un triangolo.

Mediante le formole di Eulero

$$2i \operatorname{sen} \alpha = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha},$$

$$2i \operatorname{sen} \beta = e^{i\beta} - e^{-i\beta},$$

essa si potrà trasformare in una relazione *algebraica*

$$\Phi(c, e^{i\alpha}, e^{i\beta}, \alpha, \beta) = c$$

alla quale verrebbe a soddisfare il numero e .

Se supponiamo che α, β, c assumano valori *algebrici*, il corollario del Lindemann ci assicura della *impossibilità* di una tale relazione per il numero e .

La nostra proposizione è dunque dimostrata.

Aquila, novembre 1898.

LUOGHI ED INVILUPPI

(ESERCIZI DI GEOMETRIA ANALITICA).

1. Se P_1, P_2, P_3, P_4 sono quattro punti situati sopra una retta di un piano e si suppone $P_1P_2 = P_3P_4$, indicando con δ_i la distanza del punto P_i da un punto variabile P del piano, dimostrare che:

a) Il luogo di P per cui è $\delta_1\delta_3 = \delta_2\delta_4$ si compone di un circolo e di una retta

b) quello per cui è $\delta_1\delta_4 = \delta_2\delta_3$ è un'iperbole equilatera

c) e quello per cui è $\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 = \text{cost.}^e$ è un circolo.

2. Il luogo dei fuochi (o *dei vertici*) delle parabole la cui direttrice passa per un punto dato ed il cui vertice (o *fuoco*) è dato, è un circolo.

3. Se un triangolo ABC ha fissi i vertici A e B ed il terzo vertice C scorre sopra una retta data, perpendicolare ad AB , l'inviluppo della retta d'Eulero del triangolo è in generale, un'iperbole.

4. Il luogo del punto di Lemoine del triangolo determinato da un raggio fisso OA o da un mobile OM di uno stesso circolo è un'ellisse.

5. Il luogo dei baricentri dei triangoli che un raggio mobile di un fascio forma con due rette ortogonali del suo piano è un'iperbole.

6. Sia c' un circolo variabile che ha il centro P sopra un circolo dato c di centro O ed è tangente ad un diametro fisso di questo circolo. Il luogo della intersezione P_1, P_2 della OP con c' è composto di due cardioidi aventi il punto di regresso in O .

7. Il luogo del baricentro del triangolo che una tangente mobile di un'ellisse forma con gli assi è una *Kreuzcurva* (se l'ellisse si riduce a un circolo, la *Kreuzcurva* diviene equilatera).

8. Sieno c_1, c_2 due circoli eguali di centro O_1, O_2 che s'incontrano in due punti H e K . Sia r una retta mobile del fascio H che incontri rispettivamente in M_1, M_2 i due circoli.

I luoghi delle intersezioni delle rette M_1O_1, M_2K (o M_2O_2, M_1K) e delle rette M_1O_2, M_2K (o M_2O_1, M_1K) sono cubiche razionali circolari aventi K per punto doppio.

9. Sia M un punto mobile di un circolo, AB un diametro fisso. Si congiunga M con A e da A si conduca la perpendicolare AP ad AM . Il luogo del punto P d'intersezione di AP con la tangente in M è una *cissoide di Diocle*.

10. Sieno date due rette parallele r e r' e su r un punto O ; se OV è un raggio mobile del fascio O che incontri in S la r' , se si proietta ortogonalmente S su r in T e poi, facendo centro in T , si descrive un circolo di raggio OT che tagli ulteriormente la OV in M , il luogo di M è una *cissoide di Diocle*.

11. Considerando una parabola $y^2 = 2px$ e la perpendicolare condotta all'asse del punto $(2p, 0)$, se un raggio mobile r uscente dal vertice V incontra rispettivamente in P e R la parabola e la retta e si riporta il segmento VP su r (nello stesso senso) in RM , il luogo di M è una *cubica mista*.

12. Sia n la normale in un punto mobile P di una parabola e sieno M, N i piedi delle perpendicolari condotte ad n rispettivamente dal vertice V e dal fuoco F . I luoghi di M e di N sono *quartiche circolari* con un punto triplo rispettivamente in V o in F .

(Continua)

G. CARDOSO-LAYNES.

SOPRA UNA CURVA PIANA DEL SEST'ORDINE

La equazione (v. *Intermédiaire des Mathématiciens*, tomo V, p. 258, questione 1243, Novembre 1898)

$$(1) \quad x^6 + y^6 + z^6 - 2(y^3z^3 + z^3x^3 + x^3y^3) = 0$$

può scriversi nella forma

$$(1)^{piu} \quad x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}} = 0,$$

e perciò la sestica (1) appartiene alla famiglia delle *curve triangolari simmetriche* $(ax)^m + (by)^m + (cz)^m = 0$, la cui equazione tangenziale è (v. SALMON-FIEDLER, *Höheren Ebenen Kurven*, p. 98) (*)

$$\left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{m-1}{m}} + \left(\frac{v}{b}\right)^{\frac{m-1}{m}} + \left(\frac{w}{c}\right)^{\frac{m-1}{m}} = 0.$$

Ponendo in questa $a = b = c = 1$ ed $m = \frac{3}{2}$ abbiamo per equazione tangenziale di (1), $u^3 + v^3 + w^3 = 0$. La sestica in discorso è dunque la reciproca della cubica equianarmonica $x^3 + y^3 + z^3 = 0$: e se ne conclude senz'altro che possiede zero punti doppi ordinari e nove cuspidi; le sue caratteristiche plückeriane sono dunque:

$$\begin{aligned} m &= 6, & \delta &= 0, & k &= 9 \\ n &= 3, & \tau &= 0, & \iota &= 0. \end{aligned}$$

Le 9 cuspidi giacciono tre a tre sui lati del triangolo fondamentale; le corrispondenti tangenti cuspidali si segano tre a tre in tre punti; ogni tangente sega la curva, oltrechè nei due riuniti nel punto di contatto, in quattro punti che formano, sulla tangente, un gruppo equianarmonico. La (1) può dunque dirsi *curva equianarmonica della terza classe*.

Milano, 18 Novembre 1898.

RETTALI.

CORRISPONDENZA

EGREGIO COLLEGA,

La relazione del prof. Ciamberlini, che ascoltai a Torino con vivo piacere, fu da me riletta stampata nel *Periodico di Matematica*, p. 37, con piacere crescente. Sulle inesattezze e errori, che l'A. rileva in trattati comuni, non vi può essere di-

(*) Nella edizione francese (p. 110) sono invertiti, per errore di stampa, i due termini degli esponenti. Lo studio delle curve triangolari simmetriche, la cui bibliografia è già assai estesa, è stato ripreso recentemente dal sig. H. E. TIMMERDING nella Mem. " *Sur une certaine famille de courbes algébriques* " (*Nouv. Ann. de Math.*, Aout 1898); pel caso di m intero e positivo si trovano importanti risultati sulle stesse curve, chiamate dall'autore *curve A*, nella bella Memoria del Prof. VERONESI " *Sopra alcune notevoli configurazioni ecc.* " (Mem. della R. Acc. dei Lincei, anno 1880-81, Teorema XXXII, XXXIII e XXXIV). Notiamo ancora che nel lavoro sopra citato dal sig. TIMMERDING a p. 365 linea 23 e a p. 367, linea 18, forse per errore di stampa, non è detto che i tre punti e i sei punti di cui si tratta sono cuspidali.

le norme igieniche nelle Scuole e negl'Istituti, affidandone gran parte al titolare di scienze naturali).

Per l'importanza dell'argomento in se, come per le vicende che nella lunga discussione ebbe a subire il Tema, diamo qui un più ampio cenno della relazione dei proff. *Schülde* e *Pietzker* sul Tema: *Con che si proceda ad un continuo progresso nell'insegnamento.*

(Il prof. *Schülde* accenna anzi tutto alla vastità che la letteratura pedagogica ha raggiunto in questi ultimi tempi e alla conseguente difficoltà di orientarsi in questo mare magno di proposte, di libri di testo, di giornali, di congressi, ecc. e di poter decidere da dove si riconosca essersi veramente fatto un progresso, o no. Perciò egli non troverebbe altra via d'uscita se non ricorrendo al giudizio da pronunciarsi in ultima istanza dai membri della Società, promossa dal presidente. Il correferente prof. *Pietzker* osserva che la istituzione di un comitato centrale che debba decidere definitivamente nei riguardi del progresso scientifico nell'insegnamento avrebbe vari inconvenienti, e lasciando pur da parte il pericolo delle personalità, potrebbe sembrare restrittiva alla libertà d'insegnamento. Egli però ritiene che questi inconvenienti possono essere facilmente rimossi; ma bisognerebbe che si prescrivesse qualche confine tra il troppo rigido attenersi all'antico di taluni, e la troppo vivace accoglienza ai più recenti progressi della scienza di altri: le decisioni finali dovrebbero essere devolute a insegnanti, i quali dovrebbero essere liberamente interpellati; sarebbe quindi opportuno l'intervento di insegnanti dell'Università, onde stabilire il maggior contatto possibile fra l'indagine scientifica e la esigenza scolastica; infine l'incarico della funzione di questa suprema Corte d'appello dovrebbe essere affidato ad autorità autonoma, piuttosto che al presidente della società, ad imitazione per es. della Deputazione scientifica per la classe dei medici. Sorge a parlar contro il progetto il Presidente *Schatten* dichiarando che egli non vorrà mai seppellire la libertà d'insegnamento; parla contro anche il prof. *Thaer*, asserendo non doversi procurare altre autorità, oltre quelle che ci sono; gli insegnanti dover esser contenti anzi che deplorare che vi siano delle lacune nei programmi scolastici, e quanto alla tanto invocata unità nello svolgimento dei programmi, tutto il malanno ridursi a pochi scolari che emigrano da un luogo all'altro; dello stesso avviso è il prof. *Schwalbe*, il quale dice desiderare egli un Comitato centrale istruttivo, non già autoritativo; ecc.

La riunione dei soci respinge quindi la proposta *Schülde-Pietzker* quale esorbitante; e si dichiara invece propensa ad accettare una soluzione somigliante ad una proposta già fatta in altra sede, della istituzione di un centro di informazioni circa i mezzi per l'insegnamento delle scienze fisico-chimiche).

In seguito a ciò la riunione dei soci si suddivide in due sezioni: la matematico-fisica e la chimico-storia naturale.

Nella prima sottosezione parlò il prof. *Wehner*: *Sul volume dei corpi e il teorema di Cavalieri*; indi il prof. *Weise*: *Sulle dimensioni nella Fisica*. E nella seconda il prof. *Lohrmann*: *Sulla divisione del materiale d'insegnamento in riguardo all'Antropologia*; e il prof. *Löwenhardt*: *Sulla necessità di opportuni compiti nell'insegnamento della Chimica*.

A suo luogo il prof. *Hoffmann* prese la parola per commemorare, come matematico e come insegnante, il compianto prof. *Bardey*. In fine il prof. *Scotten* lesse un lavoretto dal titolo: *Il processo combinatorio della Matematica*, accennando all'utilità di esso, applicato che sia, a talune questioni geometriche.

P. G.

Formulaire de Mathématiques pubblicato dalla *Revue de Mathématiques* (Rivista di Matematica) diretta da G. Peano. — Tomo I (1895). Tomo II, n. 1 (1897). Tomo II, n. 2 (1898).

Nel tomo I di questo formulario fu pubblicato, sotto la direzione del prof. G. Peano e col contributo dell'opera di più studiosi, una raccolta di formule, espresse in simboli di logica, sui seguenti argomenti: I Logica matematica. II Operazioni algebriche. III Aritmetica. IV Teoria delle grandezze. V Classi di numeri. VI Teoria dei gruppi. VII Limiti. VIII Serie. IX Contributo alla teoria dei numeri algebrici. Questa prima raccolta, sebbene assai ricca, venne completandosi ancora per la collaborazione di vari professori, tantochè, due anni dopo che il primo volume

le norme igieniche nelle Scuole e negl'Istituti, affidandone gran parte al titolare di scienze naturali).

Per l'importanza dell'argomento in se, come per le vicende che nella lunga discussione ebbe a subire il Tema, diamo qui un più ampio cenno della relazione dei proff. *Schülde* e *Pietzker* sul Tema: *Con che si proceda ad un continuo progresso nell'insegnamento.*

(Il prof. *Schülde* accenna anzi tutto alla vastità che la letteratura pedagogica ha raggiunto in questi ultimi tempi e alla conseguente difficoltà di orientarsi in questo mare magno di proposte, di libri di testo, di giornali, di congressi, ecc. e di poter decidere da dove si riconosca essersi veramente fatto un progresso, o no. Perciò egli non troverebbe altra via d'uscita se non ricorrendo al giudizio da pronunciarsi in ultima istanza dai membri della Società, promossa dal presidente. Il correferente prof. *Pietzker* osserva che la istituzione di un comitato centrale che debba decidere definitivamente nei riguardi del progresso scientifico nell'insegnamento avrebbe vari inconvenienti, e lasciando pur da parte il pericolo delle personalità, potrebbe sembrare restrittiva alla libertà d'insegnamento. Egli però ritiene che questi inconvenienti possono essere facilmente rimossi; ma bisognerebbe che si prescrivesse qualche confine tra il troppo rigido attenersi all'antico di taluni, e la troppo vivace accoglienza ai più recenti progressi della scienza di altri: le decisioni finali dovrebbero essere devolute a insegnanti, i quali dovrebbero essere liberamente interpellati; sarebbe quindi opportuno l'intervento di insegnanti dell'Università, onde stabilire il maggior contatto possibile fra l'indagine scientifica e la esigenza scolastica; infine l'incarico della funzione di questa suprema Corte d'appello dovrebbe essere affidato ad autorità autonoma, piuttosto che al presidente della società, ad imitazione per es. della Deputazione scientifica per la classe dei medici. Sorge a parlar contro il progetto il Presidente *Schatten* dichiarando che egli non vorrà mai seppellire la libertà d'insegnamento; parla contro anche il prof. *Thaer*, asserendo non doversi procurare altre autorità, oltre quelle che ci sono; gli insegnanti dover esser contenti anzi che deplorare che vi siano delle lacune nei programmi scolastici, e quanto alla tanto invocata unità nello svolgimento dei programmi, tutto il malanno ridursi a pochi scolari che emigrano da un luogo all'altro; dello stesso avviso è il prof. *Schwalbe*, il quale dice desiderare egli un Comitato centrale istruttivo, non già autoritativo; ecc.

La riunione dei soci respinge quindi la proposta *Schülde-Pietzker* quale esorbitante; e si dichiara invece propensa ad accettare una soluzione somigliante ad una proposta già fatta in altra sede, della istituzione di un centro di informazioni circa i mezzi per l'insegnamento delle scienze fisico-chimiche).

In seguito a ciò la riunione dei soci si suddivide in due sezioni: la matematico-fisica e la chimico-storia naturale.

Nella prima sottosezione parlò il prof. *Wehner*: *Sul volume dei corpi e il teorema di Cavalieri*; indi il prof. *Weise*: *Sulle dimensioni nella Fisica*. E nella seconda il prof. *Lohrmann*: *Sulla divisione del materiale d'insegnamento in riguardo all'Antropologia*; e il prof. *Löwenhardt*: *Sulla necessità di opportuni compiti nell'insegnamento della Chimica*.

A suo luogo il prof. *Hoffmann* prese la parola per commemorare, come matematico e come insegnante, il compianto prof. *Bardey*. In fine il prof. *Scotten* lesse un lavoretto dal titolo: *Il processo combinatorio della Matematica*, accennando all'utilità di esso, applicato che sia, a talune questioni geometriche.

P. G.

Formulaire de Mathématiques pubblicato dalla *Revue de Mathématiques* (Rivista di Matematica) diretta da G. Peano. — Tomo I (1895). Tomo II, n. 1 (1897). Tomo II, n. 2 (1898).

Nel tomo I di questo formulario fu pubblicato, sotto la direzione del prof. G. Peano e col contributo dell'opera di più studiosi, una raccolta di formule, espresse in simboli di logica, sui seguenti argomenti: I Logica matematica. II Operazioni algebriche. III Aritmetica. IV Teoria delle grandezze. V Classi di numeri. VI Teoria dei gruppi. VII Limiti. VIII Serie. IX Contributo alla teoria dei numeri algebrici. Questa prima raccolta, sebbene assai ricca, venne completandosi ancora per la collaborazione di vari professori, tantochè, due anni dopo che il primo volume

era uscito alla luce, si potè pubblicare il principio del tomo II, il quale rappresenta la seconda edizione del primo, coi miglioramenti e le aggiunte che mano mano si vanno facendo.

Il tomo II, n. 1 contiene le definizioni e l'analisi dei concetti e dei simboli logici di classe, di deduzione, di uguaglianza, di somma e prodotto logici, di negazione, di assurdo, di esistenza, di funzione ecc., colle relative formule logiche. Il tomo II, n. 2 contiene l'Aritmetica dei numeri interi e fratti, positivi e negativi.

Le formule sono espresse completamente in simboli di logica: tuttavia alcune appendici in linguaggio ordinario (non strettamente indispensabili) dilucidano certe formule o ne mettono in vista l'ufficio e l'importanza. Preziose indicazioni storiche e bibliografiche completano il lavoro.

The Mathematical Gazette. Il n. 14 (giugno 1898) contiene: *H. B. Billups.* Sul legame che corre fra il circolo inscritto e quello circoscritto ad un triangolo. (Passaggio da proprietà relative al primo a quelle relative all'altro col cambiamento degli angoli A, B, C e dei lati a, b, c rispettivamente in $\pi - A, \pi - B, \pi - C, a, -b, -c$. La dimostrazione della legittimità di questo passaggio poggia peraltro su considerazioni geometriche non sufficientemente rigorose, contenendo un passaggio per l'infinito). — *R. F. Muirhead.* Nota sulla dinamica elementare: il moto relativo (modo di presentare la questione nell'insegnamento elementare della meccanica).

Contiene anche le piccole note seguenti: *Genese.* Nota ad un articolo del prof. Tanner nel n. 13. — *Tucker.* Dimostrazione dei teoremi 12, 13, 14 del IV libro d'Euclide. — *W. J. Greenstreet.* Proprietà della retta di Simson, cioè della congiungente i tre piedi delle perpendicolari condotte sui lati di un triangolo da un punto del circuncircolo. — *Id.* Criteri di divisibilità pei numeri 3, 9, 6, 15, 45, 18, 8, 125, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. — *J. Elliot.* Sulla dimostrazione generale della regola per trovare il prodotto di due espressioni algebriche. — *A. C. Dixon.* Sulla misura circolare degli angoli; (modo di definire la lunghezza dell'arco senza l'idea di limite, nel quale peraltro tale idea non è che mascherata). — *Id.* Sul

grado di approssimazione della formula $\Gamma(n) = \lim_{m \rightarrow \infty} m^n \frac{1 \cdot 2 \dots m}{n(n+1) \dots (n+m)}$ —

C. E. M. Vicker. Su alcune trasformazioni di elementi relativi ad un triangolo in certe inversioni nel piano. — Problemi e soluzioni.

Il n. 15 (ottobre 1898) contiene: *W. J. Dobbs., M. A.* Un capitolo di dinamica elementare (modo geometrico di trattare il moto uniformemente accelerato). — *E. M. Langley, M. A.* Curiosità nella divisione (Togliendola dalla "Encyclopaedia Britannica", del 1797, espone una regola per la divisione di un numero intero per un divisore composto di n cifre uguali a 9. Il metodo si estende alle divisioni per $10^n \pm 1, 10^n \pm 2, 10^n \pm 3$ ecc.)

Contiene anche le piccole note seguenti: Nota sull'articolo di Billups del precedente numero, nella quale si danno notizie di altri che hanno trattato la stessa questione. — *C. E. M. Vicker.* Un teorema infinitesimale applicato alle coniche; [Da il teorema "il rapporto delle due parti in cui una corda di una conica è tagliata da una consecutiva è uguale a quello delle aree elementari che dal centro della conica proiettano gli archi elementari negli estremi delle corde", e ne deduce che se un triangolo è circunscritto ad una parabola e ad un'ellisse (circoscritto ad una ed inscritto nell'altra) la somma degli angoli eccentrici dei suoi vertici è costante]. — *F. S. Macaulay.* Teorema sulla geometria del triangolo, se il triangolo è circunscritto ad una parabola e ad una conica. — *H. A. Roberts.* Corda di più rapida e di più lenta discesa da un circolo ad un altro, essendo i due circoli in uno stesso piano verticale e senza punti comuni. — *A. F. Davis.* Nota sulla parabola passante per quattro punti di uno stesso circolo. — *A. Lodge* e *F. S. Macaulay.* Luogo dei punti che vedono sotto un medesimo angolo i circoli aventi a comune una data corda. — *J. C. Palmer.* In un quadrangolo sferico gli archi che uniscono i punti medi delle tre coppie di lati opposti sono concorrenti. — Problemi e soluzioni - Recensione della 2ª edizione degli *Elementi di Geometria di Lazzari e Bassani.*

Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. Vol. XVI, Session 1897-98. — Tale volume contiene: *Gibson.* La trattazione delle progressioni aritmetiche in Archimede: in cui si pone in rilievo l'uso che ha fatto nelle sue opere Ar-

chimedede delle progressioni, riferendosi a grandezze geometriche. — *E. M. Lémery*. Il quarto algoritmo naturale; (studio del simbolo $p = \frac{b}{a} \Big| q$ che rappresenta

$p = a^{a^{\dots a}}$ dove gli a sono in numero di b , e delle nuove funzioni che ne risultano, ossia la superpotenza, cioè p considerato come funzione di a , essendo b e q costanti, e la funzione superesponenziale cioè p considerato come funzione di b , essendo a e q costanti, e quindi le reciproche, la subradice b^{ma} di p , cioè a come funzione di p , e l'iperlogaritmo di p in base a , ossia b come funzione di p : applicazione alla risoluzione di equazioni come $x = a^x$, $x^x = a$ ecc.) — *H. S. Carslaw, M. A.* Nota sulla trasformazione delle equazioni della dinamica. — *John Jack*. Nuova dimostrazione delle formule per i triangoli sferici rettangoli. — *Id.* Nota sulla regola di Napier: per dimostrare e ritenere con una facile tabella le formule di Napier sui triangoli sferici. — *Laurence Crawford, M. A.* La trisezione di un angolo dato; che l'A. dà ricorrendo al problema: costruire analiticamente una conica che passi per i tre punti i quali risolvono la trisezione di un arco α , cioè dei tre punti che staccano ciascuno una terza parte rispettiv. dai tre archi contermini α , $\alpha + 2\pi$, $\alpha + 4\pi$ che cominciano nello stesso punto; l'ordinaria costruzione coll'iperbole equilatera ed altre pur semplici risultano come caso particolare. — *G. E. Crawford, M. A.* Il centro di gravità di un arco circolare (soluzione geometrica con considerazioni meccaniche). — *R. Guinaraes*. Su un problema geometrico (risoluzione del problema: condurre un circolo che tocchi un circolo dato e passi per due punti dati, usando il teorema di Stewart). — Altra soluzione dello stesso problema indicata da *Muirhead*. — *John Dougall, M. A.* Nota sul centro di gravità di un arco circolare (costruzione di detto centro). — *P. H. Schoute*. Estensione della nozione di superficie di onda allo spazio ad n dimensioni. — *Laurence Crawford, M. A., B. Sc.* Sulle seconde soluzioni dell'equazione di Lamé $\frac{d^2U}{du^2} = U\{n(n+1)pu + B\}$. —

A. Ritchie Scott, B. Sc. Sull'illuminazione prodotta da un sole di grandezza non trascurabile. — *Hugh Mitchell*. Le soluzioni singolari di una certa equazione differenziale dal 2° ordine. — *R. F. Muirhead, M. A., B. Sc.* Dimostrazione di formule elementari sulle permutazioni. — *Id.* Su un seguito di trasformazioni: continuazione di un articolo su un metodo per studiare gli spostamenti, che si trova nel precedente volume. — *Sita noth Chokrobarthy*. Metodo di estrazione di radice [estensione di quello noto per la radice quadrata, fondato sullo sviluppo della potenza dal binomio: (estratto da una "Teoria familiare del teorema del binomio"]. — *J. W. Butters, M. A., B. Sc.* Note elementari. I. Sulla scomposizione in fattori di una funzione di n variabili, e ciò quando è di 2° grado, ordinando rispetto ad una delle variabili e basandosi sulla scomposizione, da ottenersi in ugual modo, della funzione che costituisce il terzo termine, e che è con una variabile di meno. II. Sull'uso della parola *prolungato*; inesattezze a cui può dar luogo nei teoremi. — *John Dougall, M. A.* Metodo generale per risolvere le equazioni dell'elasticità. — *Gibson*. Il modo di trattare le proporzioni nella geometria elementare: (nel quale l'A. esamina il modo in uso nei più dei trattati inglesi, di definire le proporzioni come Euclide, e dimostrarne la proprietà come se fossero uguaglianze di rapporti numerici, senza aver provato di ciò la legittimità in generale, la quale non emerge, a rigore, che alla fine della trattazione delle proporzioni: e ritiene necessario nell'insegnamento di svolgere prima la teoria del numero irrazionale, e trattare poi le proporzioni, per definizione, come uguaglianze di quozienti di misure).

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, volume XXXIII, fasc. 3-15. — *Delitala*. Contributo allo studio del prob. di Pothenot. — *Bettazzi R.* Sulle serie a termini positivi le cui parti rappresentano un continuo. — *Volterra V.* Sopra una classe di equazioni dinamiche. Memorie 2. — *Fano G.* I gruppi continui primitivi di trasformazioni cremoniane dello spazio. — *Peano G.* Analisi della teoria dei vettori. — *Vailati G.* Le speculazioni di Giovanni Benedetti sul moto dei gravi. — *Berzolari L.* Sulla curvatura delle varietà tracciate sopra una varietà qualunque. — *Chini M.* Sull'equazione differenziale del 2° ordine lineare omogenea. — *Niccoletti O.* Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie. — *Cazzaniga E.* Funzioni olomorfe nel campo ellittico. — *Jadanza M.*

Alcune osservazioni sul calcolo dell'errore medio di un angolo nel metodo delle combinazioni binarie. — *Leri Civita T.* Sulla integrazione dell'equazione $\Delta_2 \Delta_2 u = 0$. — *Niccoletti O.* Sulla teoria delle trasformazioni delle equazioni a derivate parziali con due variabili indipendenti. — *Lauricella G.* Sulla propagazione del calore. — *Cazzaniga T.* Sulle funzioni oloforme e meromorfe nel campo razionale e nel campo ellittico. — *Sererini C.* Sulla rappresentazione analitica delle funzioni reali discontinue di variabili reali.

Rendiconto delle sessioni della R. Accademia delle Scienze di Bologna, Nuova Serie, vol. II, fasc. 2. — *Pincherle S.* Sul concetto di piano in uno spazio ad infinite dimensioni. — *Id.* Sul confronto delle singularità analitiche. — *Saporetti A.* Analisi di casi singolari geometrici colle relative algebriche forme.

Memorie della R. Accademia delle Scienze di Bologna, serie V, tomo VII, fasc. I. — *Donati L.* Appunti di analisi vettoriale.

Memorie della Società Italiana delle Scienze, serie III, tomo IX. — *Bianchi L.* Sugli spazi a 3 dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti.

Memorie della Ponteficia Accademia dei nuovi Lincei, vol. XIV. — *Sauve A.* Nuovo metodo per costringere la tangente ed i centri di curvatura delle curve piane. — *Papia Th.* Soluzione dell'equazione $x^4 - 8x^2y^2 + 8y^4 = z^2$. — *Valle G.* Sulla totalità dei numeri primi compresi fra due limiti dati.

Atti del R. Istituto di scienze, letture ed arti, serie VII, fasc. IX, disp. 3-8. — *Veronese.* Parole in commemorazione del prof. F. Brioschi. — *D'Arcais.* Sulla funzione di una variabile complessa.

R. Istituto lombardo di scienze e lettere, serie II, vol. XXXI, fasc. V. — *Ciani E.* Sopra una certa configurazione di punti e rette relative alla quartica piana. — *Id.* Le bitangenti della quartica piana studiate mediante le configurazioni di Kummer. — *Cazzaniga T.* Relazione fra i minori di un determinante di Hankel. — *Sererini C.* Sull'integrazione delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. — *Pieri M.* Nuovo metodo di svolgere deduttivamente la geometria proiettiva. — *Sererini C.* Sull'integrazione approssimata delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. — *Cazzaniga T.* Sul teorema di Weierstrass nel campo ellittico. — *Veneroni E.* Sopra certe congruenze di rette e sopra alcune proprietà dei fasci di un complesso generale di 3° grado.

Rendiconto dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche, (Sezione della Società reale di Napoli), serie III, vol. IV, anno XXXVII, fasc. 3-9. — *Amodeo.* La prima data dell'Accademia reale di Napoli. — *Pietrocola C.* Cinematica di un punto assoggettato a giacere sopra due curve piane rigide e mobili nel loro piano comune. — *Id.* Sull'uso dell'algoritmo isobarico nella risoluzione delle serie ricorrenti. — *Gallucci G.* Sui tetraedri inscritti in una cubica gobba. — *Capelli A.* Sulla riduttibilità delle equazioni algebriche. — *Brambilla A.* Estensione di una proprietà della superficie di Steiner. — *Id.* I poligoni principali di una quartica gobba dotata di punto doppio.

Atti dell'Accademia Gioenia di scienze naturali di Catania, anno LXXIV, (1899), serie IV, vol. IX-XI. — *Saija O.* Rappresentazione equivalente naturale di una superficie di rivoluzione (generalizzazione delle proiezioni di Werner, Bonne e Sanson Flamsteed). — *Carrone C.* Le trasformazioni birazionali fra due spazi ad n dimensioni, con particolare considerazione al caso di $n = 4$.

Annali di matematica pura ed applicata già diretti da *F. Brioschi*, e continuati da *E. Beltrami*, *L. Cremona*, *U. Dini*, *L. Jung*. Serie III, tomo I, fasc. 2°, 3°, 4°. Fasc. II. — *Dini.* Un teorema sui limiti superficiali ed infiniti dei moduli delle radici di una equazione algebrica. — *Cazzaniga.* Intorno ad un tipo di determinanti nulli d'ordine infinito. — *Timmerding.* Ueber die quadratische Transformation, durch welche die Ebenen des Raumes in ein System von Flächen zweiter Ordnung mit gemeinsamen Poltetraeder übergeführt werden. — *Baynaru.* La composizione dei gruppi finiti il cui grado è la quinta potenza di un numero primo.

Fasc. III. — *Bagnera*. La composizione ecc. (v. fasc. 2^o), parte II. — *Medolaghi*. Classificazione delle equazioni a derivate parziali del 2^o ordine, che ammettono un gruppo infinito di trasformazioni puntuali.

Fasc. IV. — *Krause*. Über Systeme von Differentialgleichungen, deren die vierfach periodischen Functionen zweiter Art Genüge leisten. — *Tedone*. Su di un sistema generale di equazioni che si può integrare col metodo delle caratteristiche. — *Montesano*. Una estensione del problema della proiettività a gruppi di complessi e di congruenze lineari di rette.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

Il fasc. III-IV contiene: *Viterbi*. Sulla continuazione analitica delle funzioni omogenee uniformi rappresentate col metodo del Mittag-Leffler (continuazione e fine). — *Burali-Forti*. Sopra alcune questioni di geometria differenziale. — *Von Weber*. Sulle trasformazioni infinitesime che lasciano invariata un'equazione pffiana. — *Lo Monaco-Aprile*. Sopra una curva gobba luogo di certi punti parabolici di una rete di superficie generale, dell'ordine n . — *De Franchis*. Sulla riduzione degli integrali estesi a varietà. — *Medolaghi*. Sui gruppi isomorfi al gruppo di tutte le trasformazioni in una variabile (memoria 1^a). — *Bargatti*. Sui metodi d'integrazione per le equazioni differenziali con due variabili indipendenti.

Il fasc. V contiene: *Bargatti*. Sui metodi d'integrazione per le equazioni differenziali con due variabili indipendenti (continuazione e fine). — *Enriques*. Sull'ipotesi che permettono l'introduzione delle coordinate in una varietà a più dimensioni. — *Cordone*. Sopra un problema fondamentale della teoria delle frazioni continue algebriche generalizzate. — *Berzolari*. Sulle spinte formate con potenze di una forma binaria quadratica. — *Bucca*. Sopra certi integrali e certi sviluppi in serie. — *Giudice*. Introduzione alle coordinate triangolari e tetraedriche.

Il fasc. VI contiene: *Giudice*. Introduzione ecc. (cont. e fine). — Estratti dai verbali. — *Puglisi*. Sul movimento di un punto pesante sopra una superficie di induzione. — *Perna*. L'immaginario i ed i numeri alternati i, j, k nello studio delle deformazioni infinitesime delle curve piane e delle curve storte. — *Gordan*. Auszug aus einem Schreiber an Herrn L. Berzolari.

Il *Pitagora*, pubblicato dal prof. *G. Pazzari*. — Il num. 5 dell'anno IV contiene: *Gambioli*. A proposito della dimostrazione del teorema di De Zolt sulla equivalenza, data dal prof. *G. Veronese*. — *Gallucci*. Le proprietà classiche del triangolo (continuazione v. n. 4). — Le matematiche nel IV secolo av. G. C. — *Palatini*. Una lezione sulla teoria della similitudine (continuazione e fine). — *A. Crepus*. Note sul pentagono regolare. — Questioni proposte. — Risposte.

Il num. 5 contiene: — Temi per concorso. — *Gallucci*. Le proprietà classiche del triangolo (continuazione e fine). — *Ciamberlini*. Errori ed inesattezze comuni. — Risposte e questioni. — *Giucoco*. — Circonferenza, cerchio e circolo; opinioni sull'uso di queste parole. — Questioni e paradossi.

Il num. 1 del 2^o semestre (anno IV) contiene: — *Nannei*. Le geometrografia di Lemoine, o l'arte delle costruzioni geometriche (continua). — Sfera, globo; proposta di usare il secondo nome per il solido della sfera. — *Riboni*. Sui logaritmi (continua). — Le matematiche nel V secolo av. G. C. — Risposte a questioni. — Questioni proposte. — Varietà.

Il num. 2-3 del 2^o semestre contiene: — *Nannei*. La geometrografia ecc. (continuazione v. n. 1). — *Ciamberlini*. Una certa corrispondenza fra alcune proprietà dei quadrangoli particolari. — Questioni a concorso. — *Gambioli*. Alcuni teoremi riguardanti la divisione dei polinomi interi e razionali. — Paradosso. — La matematica nel V secolo av. G. C. — *Riboni*. Sui logaritmi (continuazione e fine). — *Giucoco*. — *Testi*. A proposito di un noto teorema di algebra elementare: cioè la divisibilità per $x - a$. — Questioni proposte ed esercizi. — Risposte.

Il num. 4 del 2^o semestre contiene: *Nannei*. La geometrografia ecc. (continuazione v. n. 2-3). — Notizie sul congresso di Mathesis. — *Giucoco*. — *Riboni*. Sulla ricerca del baricentro in alcune figure piane e solide. — Questioni. — Risposte. — Varietà.

Il num. 5 del 2^o semestre contiene: *Nannei*. La geometrografia ecc. (continuazione v. n. 4). — *Ciamberlini*. Esercizi diversi di calcolo accelerato. — *Gambioli*. Un importante teorema sui limiti. — La matematica nel V secolo av. C. — Sulla

divisibilità. — Questioni proposte. — Esercizio sulle " Proprietà classiche del triangolo „

R. B.

Nouvelles Annales de math. T. XVII, 1898, (Paris, Gauthier-Villars et Fils).

Fasc. X (ottobre). *E. Lacour*, Sulla superficie di Steiner (dim. di alcune fra le più semplici e note proprietà della superficie Romana, in coordinate cartesiane). *L. Ripert*. Sull'applicazione del principio di dualità ai teoremi di geometria piana. — Certificati di studj superiori; sessione di luglio 1898, (Paris, Marseille). — Soluzioni di questioni, 1673 (*Lez*), 1697, 1699 e 1703 (*Droz-Farny*). — Quistioni proposte 1808-1811.

Fasc. XI (novembre). Primo concorso delle " N. A. „ pel 1899. — *X. Antomari*. Sopra un caso particolare della trasformazione omografica (studio elementare della involuzione gobba, e direttrici reali, e della collineazione gobba). — *E. Lacour*. Riduzione alla forma canonica delle formule che danno le coordinate d'un punto della superficie di Steiner, in funzione razionale di due parametri (esposizione elementare, ed omessi i casi singolari, della soluzione data da Clebsch, nel t. 67 del G. di Crelle, pel problema indicato). — *M. Dumont*. Sopra una delle forme canoniche dell'equazione delle superficie cubiche. — *E. Bally*. Valutazione geometrica dell'ordine della superficie rigata definita da tre direttrici di ordini m, n, p , (se le tre direttrici di una superficie rigata sono rispett. di ordine m, n, p , e non hanno fra di loro punti comuni, il grado della superficie è $2mnp$). (*) — *M. Ferber*. L'integrazione mediante la iterazione e il calcolo delle funzioni iterative [due importanti osservazioni sulla operazione $f(f(f \dots f(x) \dots)) = f^n(x)$]. — Certificati di studj superiori, Sessione di luglio 1898; (Lille, Grenoble). — *Ph. du Plessis*. Risoluzione della quistione posta pel concorso d'ammissione alla Scuola Politecnica di Parigi nel 1898. — Concorso d'ammissione alla S. C. delle Arti e manif. nel 1898.

Mathesis, recueil math. à l'usage des écoles speciales etc, par MM. *L. Mansion* et *J. Neuberg* (Gand, Ad. Hoste, ed.) T. VIII₂. 1898.

Fasc. IX (ottobre). *De Tilly*. Simple remarque sur le triangle (nota di meta-geometria). — *L. Ripert*. Sulla sfera e le quadriche dei 12 punti del tetraedro generale. — *E. N. Barisien*. Esercizi (continuaz. e fine). — *V. Jerabek*. Sopra una cubica circolare (propr. di una conoide slusiana particolare) - Bibliografia. — Soluzioni di quistioni, 971 (*Servais*), 1860 (*Buysens*), 1131 (*Audibert*), 1158 (*Barisien. Lez, Morin, Deprez e Soons*). — Quistioni di esame (fra le quali una estr. dal " Supplemento al Periodico di Matematica „ 857-859. — Quistioni proposte 1189-1192.

Fasc. X (novembre). Necrologia del Prof. J. N. MISTER; *J. Wasteles*. Sui poliedri regolari (propr. elementari di poliedri regolari correlativi). — *F. Mariantoni*. Sulle potenze dei numeri interi [corollari del teorema d'Eulero, $a^{T(p)} \equiv 1 \pmod{k}$]. — *G. de Rocquigny*. Quistioni di Aritmologia (propr. dei numeri triangolari ecc.) — *A. Boutin*. Somma di una serie (somma di $\sum \frac{u_n x^n}{n!}$, quando Σu_n è ricorrente). — Note matematiche (dualizzazione delle propr. della parabola, del sig. *Ripert*). — Soluzioni di quistioni: 789 (*Deprez*); 944 (*Droz-Farny e Jonesco*); 1064 (*Colart*); 1132 (*Cristesco e Droz-Farny*); 1115 (*Deprez*). — Quistioni d'esame, 960-803. — Quistioni proposte, 1193-1196.

V. R.

(*) La dimostrazione sintetica classica di questo teorema (del Cayley) mi pare preferibile (v. ex. gr. SALMON-FIXOLER, *G. des Raumes*, § 232; WIENER, *Lehrbuch d. D. Geom.* Bd. II, § 388 e STURM, *Liniengeometrie* Bd. I, § 8.

(V. R.)

ERRATA-CORRIGE.

Anno XIII, p. 226 linee 21 e 24; dopo la parola *Kreuzcurve* si aggiunga *circolare*.

GIULIO LAZZERI — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 14 Gennaio 1899.

LA MATEMATICA E I FENOMENI NATURALI⁽¹⁾

Lettera aperta del Prof. Enrico De Amicis all'Autore

Chiar.mo Signor Comm. e Provveditore Stimatissimo,

Soltanto oggi mi riesce trovar tempo sufficiente per poter soddisfare alla meglio al mio desiderio di trattenermi in conversazione con Lei intorno al Suo *Discorso I*, che intanto è stato da me prima scorso, poi letto e finalmente postillato, e che mi ha destato non poca brama di poter presto conoscere gli altri sei che gli dovranno far seguito.

La prego però anzitutto di volere accettare benevolmente, quantunque Le giungano con tanto ritardo, i miei vivissimi ringraziamenti e pel dono Suo graditissimo e per la lettera gentilissima che lo accompagnava, e che sarà da me serbata *fra le cose a me più care*, e più che altro poi per la buona memoria e stima che Ella conserva di me.

Sarebbe certamente per me un onore non piccolo essere giudice del Suo nuovo lavoro, che fino dalla prima delle sette parti che lo comporranno si presenta pieno di originali e profondi e utili concetti, esposti sotto splendida forma, classica sempre, talvolta opportunamente battagliera e spesso argutamente briosa. Ma conscio della pochezza mia e pensato alla quasi totale mia incompetenza nel giudicare la parte filosofica (ed è forse quella preponderante) di cotesti Suoi *Discorsi*, attenderò che il merito dei medesimi venga incontrastabilmente affermato da qualche recensore legittimamente autorevole, il quale, cioè, occupi nell'insegnamento superiore una posizione eminente, piuttosto che da un meschino recensore pari mio, semplice membro dell'*insegnamento secondario*, non solo, ma *tecnico per giunta*.

Per intanto, certo come sono che Ella mi dà facoltà di dirle liberamente l'animo mio, pur stando a quello che si può desumere dalla lettura del solo primo *Discorso*, ritengo che l'intero suo lavoro sarà applaudito, e di buona lena, da una parte dei lettori, e forse tacitamente malmenato dall'altra. Staranno dalla prima parte tutti

(1) *Discorsi* di ANTON MARIA BUSTELLI. Discorso I: I fenomeni naturali e le rappresentazioni matematiche. Milano, Trevisini, 1898. Un vol. in-8 di pag. vi-60.

coloro ai quali sta a cuore che, specialmente nel comune insegnamento, la matematica discenda dalle nuvole e dagli *iperspazi*, dia come in passato fraterna mano e valido aiuto alle scienze affini (cosicchè si possano ricavarne ancora nuove e sempre più utili applicazioni pratiche), si addimostri insomma anzitutto, qual'è, scienza umana e feconda e non già sterile fantasia da superuomini. ⁽¹⁾ Staranno dall'altra parte coloro che non vorranno intenderla, e segnatamente, non occorre dirlo, i *matematici puri* (cfr. Sua pag. 10) o *intransigenti* che dir si vogliano. Taluno di questi, p. es., se avesse a pronunciarsi intorno ai Suoi *Discorsi*, su per giù direbbe così: " Sono *logomachie metafisiche* e perciò **la scienza matematica non può occuparsene** .. E vi potrà pure essere qualche rigido censore che della fine eleganza del Suo stile, non sapendo egli stesso raggiungerla e gustarla, Le farà fors'anche un addebito, cavillosamente argomentando dal fatto che nei libri scientifici d'oggi giorno (pur troppo!) essa più non costuma; così, sott'altra forma, egli rinnoverà la favola di Esopo *Vulpes et uva*, ed Ella non avrà al certo a dolersene.

Venendo a' particolari, Le dirò che approvo assai l'introduzione da Lei fatta del concetto, nuovo, di *addensazione* (il neologismo è appropriato e perciò giustificatissimo), la quale naturalmente è rispetto alla densità ciò che la accelerazione è rispetto alla velocità (o celerità, com' Ella ben dice); si tratta insomma, in entrambi i casi, di una derivata seconda; e forse la cosa può essere estesa ad altri casi molto diversi: p. es.: quando un corpo si riscalda, non si può forse parlare di propagazione di calore e *accalorazione*, e, quando un corpo si tinge, di propagazione di colore e *incolorazione*, ecc.? Leggerò adunque con particolare piacere il *Discorso IV*, nel quale, appunto, Ella parlerà dell'addensazione.

Condivido pienamente il Suo parere (pag. 4) che la propedeutica matematica (per la Scuola secondaria inferiore) debba essere esposta con prevalenza del metodo induttivo, e che la matematica razionale (per la Scuola secondaria superiore) debba invece essere trattata con prevalenza del metodo deduttivo.

Approvo pure intieramente quanto Ella dice nell'articolo 13. Ella ha pienamente ragione: non si può esser molto matematici se non si è un poco filosofi. Eppure vi sono pur troppo molti insegnanti di

(1) A scanso di ogni possibile equivoco mi piace dichiarare esplicitamente, mentre rivedo le bozze di questo scritto, che con questo periodo non ho inteso in alcun modo fare allusioni meno che riguardose verso gli Illustri cultori della *Geometria ad n dimensioni*, la quale anzi, come ebbi a dire in un precedente mio scritto, riprodotto su questo *Periodico*, io considero come una gloria della Scuola matematica italiana: e solamente ho voluto far presente, insieme con l'A., la necessità che non sia troppo trascurata nell'insegnamento della matematica, segnatamente in ogni ordine di scuole medie, la parte applicativa; e che effettivamente tal parte, pure utilissima, sia talvolta dimenticata in alcune di queste scuole lo ha detto recentemente anche il Chiarissimo Prof. G. BARDELLI: " della matematica ... i liceali ricercano quel tanto di cognizioni che varranno ad allontanarli anzichè avvicinarli alle applicazioni, che saranno adatte ad acciarli ai campi della geometria immaginaria o degli *iperspazi*, ma che non li pongono in grado di eseguire con qualche sicurezza e familiarità, non dirò calcolazioni algebriche, ma quelle della ordinaria aritmetica (*expertus loquor*) .. (V. *La Scuola Secondaria Italiana*, Milano, 28 gennaio 1899, pag. 262).

matematica, specialmente fra i più giovani, che non solamente si vergognerebbero di entrare in una disputa filosofica, ma che, senza altro, fra i concetti *geometrici* e *numerici*, riprovano e respingono come *non matematici* tutti quelli che troppo visibilmente palesano alcunchè di *filosofico* o *metafisico*: essi al certo non pensano che ciò che questi palesano, gli altri nascondono. (1)

Per attico sale gustosissimo, quantunque di sapore forse soverchiamente personale (v. p. es., Egregio Signor Commendatore, quel *roluminoso*), è la chiusa del quarto paragrafo.

Sono pure d'accordo con Lei, e lo saranno molti, in tutto il paragrafo sesto; segnatamente mi piace l'ultimo periodo della chiusa (pag. 20).

Molto a proposito è l'obbiezione alla tradizionale definizione di grandezza, per cui una grandezza costante (fissa, immutabile) non sarebbe una grandezza, dappoichè, per dato, non sarebbe suscettibile nè di aumento, nè di diminuzione. Fu già fatta dal BURALI, (2) ma *repetita jurant*. E altrettanto dico per la petizione di principio che Ella fa notare nella definizione medesima e che, sott'altra forma, rilevò pure il BURALI dicendo giustamente "io non riesco a farmi un'idea dell'attitudine che può avere una cosa ad aumentare o diminuire, se non ho già della cosa stessa un'idea „.

Poichè ho citato, ed a cagion d'onore, il BURALI, nostro valorosissimo collega nell'Associazione *Mathesis*, mi permetta di aprire qui una parentesi, sempre sull'argomento delle definizioni di grandezza. Il BURALI, (3) esaminando alcune parti di un libro di " *Aritmetica razionale* „... pubblicato da pochi mesi, senza nominarne l'autore (sorta di anonimata inversa, non migliore della diretta), osserva che la *definizione di grandezza* (?) " *Tutto ciò che si può misurare si chiama grandezza* „ permette di annoverare, ad es., la diagonale del decametro quadrato fra le grandezze quando la si misuri con la diagonale del metro quadrato, ma non quando la si misuri col metro. Tale osservazione non ha maggior valore, p. es., di questa: *A è padre di B, ma non di C; dunque la definizione di genitore* (?) " *Ogni padre si chiama genitore* „ permette di annoverare *A* fra i genitori quando lo si confronti con *B*, ma non quando lo si confronti con *C*. Ed è poi da notare che per poter

(1) Il Chiarissimo Dott. G. VAILATI, nella sua *Prolesione al Corso libero di Storia della Meccanica*, letta il 21 dicembre 1898 nell'Università di Torino, espone molteplici influenze la cui azione egli giustamente si augura che *valga col tempo a modificare, almeno in parte, l'attitudine di disprezzo e di indifferenza che da noi la maggior parte degli uomini di scienza assume verso gli studi filosofici, nei quali essi non vedono che una collezione di infedeli e vane logomachie* (" *Alcune osservazioni sulle Questioni di parole* „ Torino, 1899, pag. 39).

(2) *Note scientifiche e critiche alle Lezioni di Aritmetica pratica*, Torino, 1897. Peraltro a voler essere scrupolosamente esatti l'obbiezione riguarda precisamente la " *definizione della grandezza, in generale, per ciò ch'è suscettibile di aumento e diminuzione* „ come per l'appunto Ella dice: infatti, dicendo p. es. insieme con EULERO (*Éléments d'Algebre, traduits de Vallemant par M. Bernoulli, avec des additions par M. De La Grange*, Lyon, 1714, pag. 1) " *On nomme grandeur ou quantité tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution* „ non si esclude, mi sembra (poichè *tout non è seulement*) che si possa denominare grandezza anche qualche altra cosa che non abbia tale suscettibilità, p. es. l'energia costante dell'universo (la quale, com'è noto e come bene osserva il BURALI, può ritenersi costante).

(3) Sulla questione III proposta dalla *Mathesis* nel Congresso pedagogico di Torino: *I libri di testo dal punto di vista scientifico e didattico. Errori che vi dominano; mezzi perchè si limitino, per quanto si può, il danno che tali errori arrecano alla scuola*. Arezzo, 1898.

fare quell'osservazione il BURALI è costretto a far tutt'uno del *misurabile* col *commensurabile*; e per giustificare tale interpretazione ristretta del vocabolo *misurare* egli riporta le seguenti parole, che l'innominato autore ha fatto precedere alla criticata definizione (?) " Quando si contano le cose costituenti un gruppo o un tutto, si trova *quanto è grande* la collezione o il tutto, cioè se ne trova il *valore* o la *misura* „ e le commenta così: " Come si conta una lunghezza (un tutto credo)? L'Autore in una precedente osservazione pare voglia dire si conta col metro o con una delle sue parti. E sia pure: contiamo col metro la diagonale del metro quadrato! Impossibile, sebbene l'Autore faccia, *molto dopo*, distinzione tra *misura pratica* (che dà sempre un razionale) e *misura teorica* (che può dar luogo ad un irrazionale) „. Senonchè le strane locuzioni *contare un tutto*, *contare col metro* o *con una delle sue parti* sono del BURALI, e non già dell'A., il quale invece nel brano riportato parla di *contare le cose costituenti un tutto*,⁽¹⁾ e nell'osservazione a cui allude il BURALI (e che precede *immediatamente* il brano medesimo) parla di *contare metri, decimetri, ecc.* (contenuti in un tratto rettilineo), cosa questa possibilissima anche per la diagonale del metro quadrato, nella quale successivamente e precisamente si contano *metri 1, decimetri 4, centimetri 1, millimetri 4, decimillimetri 2, ecc.*⁽²⁾ Nè della distinzione, opportunissima, fra *misura pratica* e *misura teorica* si può dire che è data *molto dopo*, dal momento che l'Autore, avvolto nell'ombra del mistero dal Prof. BURALI, comincia a parlarne nella terza pagina (e termina nella sesta) dopo la definizione (?) incriminata, e nelle due pagine intermedie continua sempre a trattare di grandezza e misura.⁽³⁾ Ma prosegue il BURALI: *sono note numerose osservazioni che avrebbero dovuto condurre l'Autore a non dare della grandezza una definizione(?), che, per quanto nuova, almeno credo, non è meno imperfetta delle tante che si trovano nei comuni trattati.* Perchè tale defini-

(1) Come si vede, trattasi semplicemente di un *qui pro quo* grammaticale, al quale veramente si presta il brano riportato, ove però è certo che il passivo *si contano* ha un unico soggetto " *le cose costituenti un gruppo o un tutto* „, o l'attivo *costituenti* ha due oggetti " *un gruppo* „ e " *un tutto* „, mentre invero coll'interpretazione del BURALI si suppone che il *costituenti* abbia un solo oggetto " *un gruppo* „, e il *si contano* due soggetti " *le cose costituenti un gruppo* „ e " *un tutto* „. Il *si contano* o passivo perchè (dicendosi, qui, appunto *si contano* e non *si conta*) non si può credere che si tratti di un *si* analogo al francese *on* o al tedesco *man*, il quale, cioè, stia per soggetto indeterminato (nell'attivo *contano*).

(2) A bello studio dico *precisamente*, perchè di $\sqrt{2}$ si ha nel sistema decimale una rappresentazione cifrale (illimitata) univocamente determinata, tale essendo la successione delle sue cifre decimali (ciascuna delle quali, a qualsiasi ordine appartenga, è sempre algebricamente individuabile).

(3) Del resto io non vedo che inconveniente serio vi possa essere a tenere, p. es. in un testo per le Scuole Normali ed in un paragrafo intitolato *Grandezza e numero*, un tal metodo di esposizione che (al pari di quello seguito dal non nominato autore) potesse indurre il futuro maestro a tenere un bel giorno, mettiamo in una *quarta elementare*, su per giù questo discorso: " Voi bambini, sapete già che cosa vuol dire *misurare certe linee*; anzi ieri Luigino, *misurando col metro e col decimetro, ha trovato la lunghezza* di questa canna. Ma non sapete ancora che cosa voglia dire in generale la parola *misurare*: abbene oggi vi spiegherò pure che cosa vuol dire *misurare certe superficie*, e come esempio *troveremo l'area* di questo pavimento, *misurando col metro quadrato e col decimetro quadrato*, che qui vedete rappresentati grossolanamente da questi due cartoni (vedrete poi come potremo fare, molto più presto, anche senza questi cartoni); e domani *misureremo* anche certe altre cose; e così voi, con molti esempi ed esercizi, finirete poi per farvi una idea generale di quello che vuol dire *misurare*: però fino da ora ricordatevi che *tutte queste cose che impareremo a misurare le indicheremo col nome generico di grandezze*, perchè in aritmetica *tutto ciò che si può misurare si chiama grandezza* „. E tutto questo, se non è assolutamente scientifico, è però indubbiamente sensatissimo ed accessibile.

zione (?) sia imperfetta il BURALI non dice, ma è chiaro che chi dicesse " Si dicono *grandezze* le cose che si possono misurare, e solamente queste „ intenderebbe sicuramente di *dare una definizione della grandezza*, e questa definizione sarebbe imperfetta, non solamente perchè restringerebbe il concetto generale di grandezza alle sole misurabili e quindi implicherebbe per tutte il *Postulato di Archimede*, ma piuttosto perchè *misurare* è un verbo che presuppone sempre e sottintende l'oggetto *grandezza*, e di nessuna operazione (e tanto meno di quella del misurare) possiamo farci una completa idea se già non l'abbiamo delle cose sulle quali quell'operazione è da farsi. (1) Ma l'Autore, che è poi il Prof. GARBIERI (ed il libro in questione è la Parte I del vol. II degli *Elementi di Matematica secondo le istruzioni e i programmi delle Scuole Normali*, Milano, 1898), ha effettivamente inteso di dare una vera e propria definizione di grandezza affermando a pag. 3 del libro medesimo " Tutto ciò che si può misurare si chiama grandezza „? Per quanto ciò possa apparire da una frase (2) di una nota, appiedata tre pagine dopo (ed ivi letteralmente riportata dalla 3^a edizione del *Trattato di Aritmetica razionale* (3) del medesimo Autore), nonchè da un altro libro (4) dell'Autore (ove si trovano quelle stesse parole precedute appunto dall'abbreviazione **Def.**), a me non sembra tuttavia che si possa esser certi che l'Autore in quella parte del suo libro esaminata dal BURALI abbia veramente inteso di definire le grandezze mediante la predetta affermazione (ivi non contrassegnata da verun **Def.**). Nè, p. es., si è voluto definirle scrivendo nel primo articolo di un capitolo intitolato **Grandezze** (5) " Si suol dire comunemente che le *lunghezze*, le *aree*, i *volumi*, i *pesi*,... (6) sono **grandezze** o **quantità** „; nè parimenti, in quello stesso articolo, si è voluto definire l'omogeneità delle grandezze scrivendo " Due o più lunghezze diconsi della *stessa specie*, o **omogenee**, quando sono tutte delle *lunghezze*, o tutte delle *aree*,... „ (7) E pertanto, concludendo, mi sembra che neppure le parole della pagina 3 del vol. II degli *Ele-*

(1) E perciò io non saprei nemmeno accettare la definizione che il BURALI dice essere l'unica esatta che attualmente si conosca (*Sulla questione III ecc.*, p. 6): " Classe omogenea di grandezze è ogni classe di enti per i quali è definita l'operazione $+$ in modo che soddisfi alle tali e tali condizioni „. Cfr. anche le precitate *Note scientifiche ecc.*

(2) " le grandezze, così come noi le abbiamo definite, sono *misurabili* „. Certamente sarebbe stato meglio dire " le grandezze, da noi considerate, sono *misurabili* „.

(3) Pubblicata nel 1894 a Padova. A pag. 116 vi è la nota in questione, e da pag. 107 la solita definizione (?), senza il **Def.** e sotto la forma " In aritmetica chiamasi *grandezza tutto ciò che si può misurare* „.

(4) G. GARBIERI, *Elementi di Geometria per le scuole tecniche e normali*, 3^a edizione con la collaborazione di E. DE AMICIS. Torino, 1896.

(5) C. BURALI-FORTI e A. RAMORINO, *Aritmetica e norme per l'insegnamento nelle scuole elementari, al uso della classe 2^a e 3^a delle scuole normali*, Torino, 1898.

(6) Io non so veramente di che cosa tengano le voci i tre puntini, ma credo di non ingannarmi pensando che stiano appunto a rappresentare *cose tutte misurabili*, al pari di quelle che si è voluto indicare con le parole che li precedono ed in accordo con quanto afferma il GARBIERI nel passo incriminato (nel quale peraltro non si nega che vi possano essere anche altre cose, oltre le misurabili, denominabili grandezze).

(7) E bisognerebbe pure intendersi bene sul significato da darsi a " *lunghezze*, *aree*,... „, poichè, stando all'uso più comunemente accettato, tanto le *lunghezze*, che le *aree* (o parimenti i *volumi*) sarebbero precisamente *numeri*, cioè rispettivamente i *numeri che misurano certe grandezze lineari o superficiali (o solide)*, e non avrebbero quindi alcuna eterogeneità fra loro.

menti di *Matematica* del Prof. GARBIERI " Tutto ciò che si può misurare si chiama *grandezza* „ avrebbero dovuto essere *ivi* considerate come una *definizione di grandezza*; esse, a parer mio, vi compariscono come una semplice *nozione relativa alle grandezze*. Che poi si tratti di novità lo ignoro, so però che le stesse parole si trovano ⁽¹⁾ anche nella 2^a edizione del precitato *Trattato*, pubblicata nel 1891; ed esse mi richiamano alla mente le seguenti: "*Mathesis scientia est quantitatem quatenus mensurabilem* ⁽²⁾ *considerans. Arithmeticae et geometriae finis est dimetiri. Quantitas . . . cui mensura adhibetur dicitur magnitudo* „ ⁽³⁾ che si possono vedere negli *Arithmeticae, Algebrae et Geometriae principia, auctore abbate PARA DU PHANJAS, Venetiis, 1792; Prolegomena*, pag. 17, 19, 20. Chiudo la parentesi e ritorno al Suo *Discorso*.

Penso che Ella sia perfettamente nel vero quando afferma " è solo dopo aver posto più cose fisse della medesima specie che noi possiamo considerarle come gli stati di una sola e medesima cosa variabile „: e volentieri pertanto riconosco di aver fatto in sostanza io pure (*si licet parvis componere magna*) un *giuoco di parole*, analogo a quello che Ella rileva nell' *Helmholtz* (pag. 22), quando in un libretto scolastico ⁽⁴⁾ posi la definizione (?) " Due o più grandezze si dicono **omogenee** fra loro (o della stessa specie, o della stessa classe) quando si possono considerare come *stati di una medesima grandezza variabile* „, quantunque preceduta dall'esempio di " un pezzo di filo sottilissimo e perfettamente elastico, tirato pe' suoi capi, ora più, ora meno, ma però sempre almeno tanto che basti a fargli prendere e mantenere la forma rettilinea „, e quantunque ispirata dal titolo di una memoria del Prof. V. MOLLAME " *Espressione del rapporto fra due stati d'una grandezza (o di due grandezze omogenee) per mezzo d'una serie* „ ⁽⁵⁾

Nelle mie postille, di contro alle Sue parole di pag. 22 " come si può pensare una relazione senza aver prima il concetto di ciascuno dei suoi termini? „ ho scritto " benissimo! „. Mi permetto anzi a questo proposito di riportare le seguenti parole che si trovano a pag. 15 di una mia noticina ⁽⁶⁾ sulla *Teoria delle relazioni* (che Le invio e che ebbe l'onore di essere citata dal Peano, dallo Schröder e da altri):

(1) Senza il Def.

(2) Cioè " *la quantità in quanto è misurabile* „ il che implica che, nel concetto dallo scrittore, la quantità, così come si considerano in matematica, debbano godere della proprietà di essere misurabili.

(3) Le ultime sei parole potrebbero appunto suggerire le seguenti " Ogni cosa a cui si può applicare il concetto di *misura* dicesi *grandezza* „. Mi affretto però a dichiarare che il nostro Abate PARA (francese) ha voluto dire " La quantità a cui si applica (materialmente) la *misura* dicesi *grandezza* „, cioè " Date le quantità (omogenee) A e B, se con B misuriamo A, chiameremo B *misura* o A *grandezza* „, quantunque tre pagine avanti avesse detto esplicitamente che *quantità* e *grandezza* sono sinonimi. Si potrebbe invece riservare il nome di *quantità* appunto alle sole *grandezze misurabili*; ma, per mio conto, quest'ultime seguirei a chiamarle così, e della parola *quantità* mi varrei nel senso accennato a pag. 49 dei precitati *Elementi di Geometria*, che è poi in accordo col senso in cui la usa il Prof. VERONESE a pag. 211 dei suoi *Elementi di Geometria*, (Padova, 1897).

(4) *Elementi di Geometria* precitati (in collaborazione col Prof. GARBIERI).

(5) *Periodico di Scienze Matematiche e Naturali per l'insegnamento secondario*, anno 1, Roma, 1873.

(6) " Dipendenza fra alcune proprietà notevoli delle relazioni fra enti di un medesimo sistema „, *Rivista di Matematica*, Torino, 1892.

« caso per caso, a seconda delle cose, che potranno anche essere del tutto ideali e che converrà definire con precisione, converrà altrettanto precisamente definirne l'eguaglianza ». Ciò è in perfetto accordo colla Sua parentesi « (e questo va bene) », che si trova a pag. 59, e colle parole Sue (di pag. 22) su riferite, nonchè coll'ottimo capoverso finale di pag. 29.

Un altro « benissimo! », trovo in margine a pag. 24, e riguarda le parole « non giudichiamo della uguaglianza per mezzo della sostituibilità, ma all'opposto, di questa per mezzo di quella », le quali però interpreto così: mentre la sostituibilità non ci può mai servire di per se stessa per concludere l'uguaglianza se prima questa non fu definita, invece l'uguaglianza (definita che sia) ci può talora servire per provare la sostituibilità. ⁽¹⁾

Approvo assai l'applicazione che Ella fa del vocabolo *dirittura* ad indicare il concetto contrapposto a quello di *curvatura* (pag. 30).

E, condividendo pienamente la Sua autorevole e valorosamente sostenuta opinione (da pag. 37 a pag. 44), reputo anch'io *inadatto* il numero a fornire una conveniente rappresentazione del profitto e della condotta degli alunni; e secolui mi schiero, per questa parte almeno, insieme coi *laudatores temporis acti* (pag. 38, linee 6 e 5 risalendo).

Sull'importantissima questione dell'angolo (da pag. 48 a pag. 52) non so ancora se potrò condividere la nuova opinione Sua, che si debba cioè far ritorno alla definizione di Euclide. Francamente però, per ora almeno, mi pare che dicendo col geometra alessandrino « l'angolo è la mutua inclinazione di due rette che si incontrano », si venga a ripetere una inesattezza analoga a quella di chi dice che « il segmento (di retta) è la mutua distanza di due punti ». In entrambi i casi la inesattezza, secondo me, consiste nell'identificare una entità concreta con una astratta, e cioè l'angolo con la inclinazione dei suoi lati, il segmento con la distanza dei suoi estremi. Per me, come il segmento \widehat{AB} non è la distanza lineare fra A e B, così l'angolo \widehat{ab} non è la distanza angolare fra a e b . Per me, tanto il segmento (sia che lo si consideri come una certa parte di retta - tratto -, o più semplicemente come il sistema di due punti - intervallo -), quanto l'angolo (sia che lo si riguardi come una certa parte di piano, o più semplicemente come il sistema di due semirette aventi la medesima origine) sono figure geometriche, e perciò cose logicamente concrete e cosmologicamente reali, cioè esistenti di per sè stesse; invece la distanza lineare (o di traslazione), e la distanza angolare (o di rotazione), o, come Euclide dice, l'inclinazione - cataclisi - (o pendenza o meglio disinclinazione o divergenza o apertura), sono due concetti assolutamente astratti, privi di esistenza loro propria, rispettivamente inerenti

(1) Così, p. es., se a, b, c sono numeri razionali, o $a+c=b+c$, cioè se sotto questo riguardo vi è sostituibilità fra a e b , si potrà bensì dimostrare che allora fra a e b vi è pure eguaglianza, ma naturalmente bisogna aver già dato la definizione dell'eguaglianza fra i numeri razionali. All'opposto, data tale definizione, se $a=b$, si potrà dimostrare $a+c=b+c$, e concludere senz'altro dunque sotto questo riguardo vi è sostituibilità fra a e b .

alle predette figure (ed anche ad altre: p. es. *striscia* e *strato* - per la distanza -; *diedro* - per l'inclinazione -), e perciò non sono cose cosmologicamente reali (cfr. pag. 6: secondo capoverso, segnatamente l'ultimo periodo). Io dunque, fino a prova contraria, distinguo l'angolo dall'inclinazione, il segmento dalla distanza. Sarei anzi per dire che inclinazione e distanza, poichè non sono figure, debbano essere bandite dalla Geometria, *amplissima et pulcherrima scientia figurarum*. Aggiungerò ancora che le frasi *il segmento è la distanza ecc.*, *l'angolo è l'inclinazione ecc.* mi sembrano paragonabili a queste altre, indubbiamente inaccettabili, *la retta è la direzione*, *il piano è la giacitura*. E finalmente domanderò: si può forse parlare di *inclinazioni adiacenti* e di *distanze adiacenti*? No certamente: adunque *angolo* e *segmento* non sono rispettivamente *inclinazione* e *distanza*.

A me non pare poi (pag. 52) che agli alunni abbia a riuscire nebuloso il concetto di angolo *iper-ciclico* (superiore al *giro*), purchè nell'esporlo si abbia cura di far costruire da loro medesimi, come io faccio in iscuola, un modello di una parte della nota figura detta *elicoide di Riemann*⁽¹⁾ (o *riemann-piano*, od *ipersfoglio*, od *elicoide piatto* che dir si voglia); cinque o sei dischi, sottili, opportunamente connessi e sovrapposti, sono sufficienti per dare chiara idea della figura considerata (*da cui si possono staccare gli angoli come i segmenti dalla retta*), e riesce chiara ed esatta l'applicazione che vi si fa dei modi di composizione e scomposizione degli angoli. Un filo teso, fissato al centro dell'elicoide piatto e percorrentene, per rotazione, da una data posizione iniziale, le successive spire complanari, dà, p. es., chiarissima idea ai discenti del come si possano addizionare successivamente fra loro tanti angoli quanti si vuole, giungendo via via a risultati *sempre diversi*, perchè rappresentati da angoli di cui resta fisso il lato-origine mentre il lato-termini va successivamente ad occupare sempre nuove posizioni (distinte da tutte le precedenti, o per la direzione o per la spira). Considerando invece la superficie generata da una semiretta, rotante sempre in uno stesso piano attorno al suo punto-origine, non in quanto è superficie, ma in quanto è viaggio, cammino... si fa una considerazione non conforme al vero, poichè ciò che è generato, e rigenerato da tale semiretta è sempre superficie, e non viaggio o cammino, col quale invece, e durante il quale, si genera appunto la superficie medesima: se io non erro, qui si confonde l'atto della generazione col prodotto di tale atto (la causa coll'effetto).

La breve ma efficace ed elegantissima chiusa del Suo *Discorso* (pag. 53) è poi un vero gioiello; il ravvicinamento del settemplice cappello, già maestrevolmente costruito, al corrispondente calzare,

(1) I miei alunni, della prima classe dell'Istituto, vanno a gara nel costruire questo ed altri modelli geometrici, e se ne diletano profittevolmente. Taluno fra essi mi ha recato, a proposito dell'elicoide di Riemann, alcuni *acchani* (frutti secchi) che presentano effettivamente l'aspetto di tale elicoide piatto (del quale essi trovano una chiara descrizione nel loro libro di testo di Geometria, che è quello del Prof. GIUDICE, 2^a edizione, Brescia, 1897).

ancora da provvedersi, è cosa mirabilmente riuscita; ed io mi permetto di fargliene ogni encomio, non servo ma sincero. E provvidamente Ella ha parlato fino da ora non solo del cappello, ma anche del calzare: così Ella ha prevenuto il maligno lettore, il quale del Suo lavoro non potrà dire che si rassomigli a quei bimbi che nel vestirsi cominciano dal cappello e si mettono per ultimo i calzari.

Passando alla *Nota*, trovo giustissime le osservazioni alla *Teoria delle grandezze* di RODOLFO BETTAZZI, principiando dalla prima, riguardante appunto la sonorità del titolo (art. 1), quantunque si tratti di opera di riconosciuta importanza e di indiscutibile valore.

Fondatissima è l'obbiezione fatta nell'art. 2: anzi si può darle maggiore estensione; infatti nelle *nozioni fondamentali per la teoria generale delle operazioni*, che io, quando posso, svolgo a' miei alunni dell'Istituto, provo con facili esempi che " non sempre un *elemento implicito sinistro* (grandezza modulo) di una operazione è anche *elemento implicito destro* per la stessa operazione, e viceversa „; in altri termini, colle notazioni del BETTAZZI (che però non adotto), non sempre le due uguaglianze $S(O, A) = A$, $S(A, O) = A$ sono conseguenza l'una dell'altra. E parimenti provo che " non sempre un *elemento preponderante sinistro* (grandezza infinita) è anche *elemento preponderante destro*, e viceversa „; in altri termini non sempre le due uguaglianze $S(\Omega, A) = \Omega$, $S(A, \Omega) = \Omega$ sono conseguenza l'una dell'altra. Invece di dire *elemento implicito* si può dire, per contrapposto ad *elemento preponderante*, *elemento indifferente* (o *insignificante*).

Giustissima pure è l'obbiezione dell'art. 3: al sostantivo *grandezze* (linea 9 risalendo, pag. 56) doveva seguire l'aggettivo *misurabili*, e, se io non erro, dovevasi poi dimostrare che " *se A e B hanno numeri uguali (o disuguali), per una data unità di misura, hanno pure numeri uguali (o disuguali) per qualunque altra unità di misura* „.

Sono pienamente con Lei, e ne sono veramente lieto, in quanto Ella dice al principio dell'art. 4. A me pure è accaduto di invogliarmi allo studio della grammatica, specialmente dacchè mi occupo dei fondamenti della matematica elementare. Aggiungerò che, solamente dopo penetrato un poco in questi fondamenti, sono andato a ricercare libri di filosofia e segnatamente di logica; e *la grammatica*, Ella lo dice benissimo, è *la logica del linguaggio*; e senza linguaggio non vi può essere scienza alcuna, e tanto meno la matematica, la quale non è se non che *una lingua ben fatta*. (Ella ricorderà le mie parole al Congresso di Torino, dello scorso Settembre, contro certe tendenze ad un eccessivo simbolismo, o graficismo, che, sistematicamente e completamente applicato anche nel nostro comune insegnamento, verrebbe a trasformare gli studiosi di matematica in altrettanti *animali muti*). Nella stessa correzione de' compiuti scolastici di matematica son persuaso che si debba tenere il massimo conto della forma grammaticale, quantunque mi consti dalla più sicura fonte possibile che un

certo professore, che nella revisione degli elaborati di una recente Licenza aveva stimato indispensabili alcune osservazioni grammaticali, si ebbe questa testuale risposta: " *io non mi abbasso fino alla grammatica* „: e se non fosse stato che tale risposta era data da un sperimentato e valente insegnante, si sarebbe fors'anche potuto dubitare che quell'*abbassarsi* dovesse mutarsi nel riflessivo opposto e che si fosse da capo alla favola " *Vulpes et ura* „. Ritengo anzi che sia effettivamente prescritto che nella graduazione de' compiti scientifici si tenga pur conto del *valore letterario*; ma *le leggi son con quel che segue*. E pur troppo non è solamente nelle Scuole secondarie che certi insegnanti di matematica *non si abbassano fino alla grammatica*; poichè con fondamento possiamo affermare che anche fra i professori di matematica delle Università nostre, e specialmente fra i più giovani, ve ne sono alcuni che nei loro scritti dimenticano invero troppo facilmente, non diremo le naturali eleganze della nostra lingua, ma perfino le più ovvie nozioni di grammatica: sta per essi, come pel CARDUCCI (pag. 57 e 58), la scusante " *de minimis non curat praetor* „? non credo, chè le sgrammaticature non sono licenze poetiche, nè tanto meno, matematiche.

A me pure vien fatto sovente di adoperare la parola *enti*. Dico p. es., *enti geometrici* i corpi, le superficie, le linee, i punti; *enti di un medesimo sistema* gli individui di una medesima classe; ma naturalmente ritengo con Lei che si debba evitare la stridente tautologia " *enti esistenti* „ e che non sia certamente il caso di parlare di " *enti... che si sanno esistenti* „ per la buona ragione che gli *enti non esistenti* contraddirebbero al principio di contraddizione.

Stupendo quel doppio-senso dell'*avere riguardo*. In verità, Egregio signor Commendatore, non si potrebbe essere più gentilmente arguti! Ed Ella ha perfettamente ragione: " O che male ci sarà a definirlo tutt'intero quell'*ente*, quando, bene inteso, si possa? „ (pag. 59). Per altro l'eccessivo ritegno del BETTAZZI nel definire *i suoi enti* si capisce: è questione di *reazione*: dopo l'antica smania di definire *perfino l'indefinibile*, è venuta la frenesia moderna di non definire *nemmeno il definibile*; cosa d'altronde assai comoda e conforme al monito " *in dubiis abstine* „ e, come Ella sa (pag. 17), *la prudenza e le cautele in certi casi non sono mai troppe*.

E così sarei giunto all'ultima pagina del Suo aureo libretto, e la lettera è ormai lunga e dovrei terminarla; ma Ella mi domanda eziandio delle *correzioni*; sicchè io, pur di contentarla, anderò come si suol dire a cercare il pelo nell'ovo, e vedrò di trovarne, sobbarcandomi così ad un compito disagevole e rischioso.

A pag. 3, l. 12, piuttosto che *involucro* direi *scheletro* od *ossatura*: la variazione può sembrare sostanziale, ma probabilmente è soltanto formale, dal momento che certi *scheletri* sono *dermascheletri*, cioè *involucri* (e la catafratta rivale del piè-veloce Achille lo dimostra).

A pag. 6, l. 5, dopo la parola *cosa* avrei posto in parentesi la corrispondente voce latina *res*. Così anche pei non latinisti si poneva in assoluta evidenza che l'aggettivo *reale*, derivando da *res*, aggiunto al sostantivo *cosa*, dava luogo, a stretto rigor di termini, ad una reale tautologia: pur troppo gli italiani che conoscono la loro madre-lingua diventano sempre più rari, specie fra certi matematici novelli, che, seguendo la pratica utilitaria di questa fine di secolo, si dedicano più volentieri alle sole lingue moderne.

Cinque linee dopo, invece di *coordinato*, direi *collegato*. (Cfr. precitata memorietta, pag. 2, 9, 15).

A pag. 7, risalendo linea 9 e 8: *non può essere nè sentito nè percepito, ma soltanto concepito*. Non contrasta questo coll'incontrastabile principio *nihil est in intellectu quod prius non fuerit in sensu*, e colle citazioni stesse del KANT e dell'ALIGHIERI, che Ella fa a pag. 20, e 31, e finalmente con le parole Sue medesime, pure di pag. 31, "l'ordine intellettuale ha in noi tale dipendenza oggettiva che senza l'ordine sensitivo non può nè attuarsi, nè svolgersi, nè perfezionarsi". Ben è vero che, alla precitata pag. 20, di fronte alla riportata massima del KANT, che Ella non solo non contrasta ma dichiara di ammettere, Ella trova opportuno di affermare eziandio che "però le cognizioni umane non tutte derivano dall'esperienza"; ma non sempre il porre le mani avanti ci salva dall'inespicare, specie quando il sentiero è malagevole; tanto è vero che la spiegazione colla quale Ella cerca di corroborare la predetta Sua affermazione termina con le parole "potenza costruttrice del pensiero, pur eccitata dalle sensazioni", e, mi scusi, Egregio Signor Provveditore, ma qui è certo il caso di dire *in cauda venenum!*; naturalmente si tratta di veleno logico, cioè di contraddizione. Del resto la questione è grossa, e non è da me il risolverla: dubito anzi fortemente che, per la medesima, due dei Suoi *triumviri*, l'Aquinate e il Galilei, stiano discutendo con soverchio calore, e che il sommo ghibellino, assiso in mezzo a loro, non contribuisca pur troppo a metterli d'accordo.

A pag. 22 già lodai, nella loro sostanza, le sue parole "come si può pensare una relazione senza prima il concetto di ciascuno dei suoi termini?"; ma, riguardo alla forma, e precisamente per la locuzione *termini di una relazione* faccio ora le mie riserve. Ecco: Quando per affermare, per es., che fra i termini (noti) *a* e *b* ha luogo la relazione (nota) di uguaglianza, si scrive $a = b$, a questa medesima scrittura, esprimente uguaglianza, si dà pure il nome di uguaglianza; ma di questa *a* e *b* si dicono membri, non termini. Non sempre poi alla scrittura con la quale concisamente si afferma che fra due termini (noti) *a* e *b* ha luogo una certa relazione (nota) è conveniente dare lo stesso nome di questa relazione: p. es., potremo convenire di affermare mediante la scrittura *c A d*, che potremo leggere "c è amico di d", che fra i due termini *c* e *d* ha luogo la relazione di