amicizia; ma tuttavia dare pure il nome di *amicizia* a tale scrittura, esprimente amicizia fra **c** e **d**, non sarebbe al certo conveniente; riterrei più opportuno dire che scrittura **c** A **d** è **una referenza** (dal latino *referre*) esprimente la **relazione** *di amicizia fra i* **termini c** e **d** (**membri** di quella referenza). Ad ogni referenza esprimente la relazione di uguaglianza si dà per brevità lo stesso nome di uguaglianza; lo stesso può farsi anche in altri casi; ma non si deve confondere una referenza con la relazione che essa esprime.[1] *L'affermazione*, p. es., del tutto particolare, *del parallellismo della retta* **e** *alla retta* **f** non deve essere confusa con *la relazione*, del tutto generale, *di parallellismo*. E scrivendo **e** ∥ **f** (leggo **e** *è parallela a* **f**) non scrivo una *relazione*, ma bensì una *referenza* (esprimente la relazione di parallellismo fra le rette **e** ed **f**). Veda la precitata memorietta, pag. 2, 3, 13, ove invece di *referenza* avevo scritto *corrispondenza;* l'uso troppo vario di quest'ultima parola mi ha poi persuaso a cambiarla. Ma forse, senz'avvedermene, mi son lasciato ire a far da maestro a persona che può tutto insegnarmi; la quale però, almeno vo' sperarlo, saprà pure scusare il mio peccato, che è peccato d'abitudine, dovuto cioè alla mia condizione d'insegnante.

Alla stessa pag. 22, infine dell'art. 22, parmi che non si possa accettare così in generale che " qualsiasi relazione di grandezze è una relazione di uguaglianza o di disuguaglianza "; p. es., quando dico " l'angolo α ed il segmento r sono grandezze etereogenee ", affermo bene che fra le grandezze α e r ha luogo una certa relazione, eppure questa relazione (eterogeneità) non è al certo uguaglianza e nemmeno potrebbe dirsi disuguaglianza. Nè basterebbe aggiungere, in quella frase, al sostantivo *grandezze* l'aggettivo *omogenee;* p. es., quando dico " l'angolo α è adiacente all'angolo β ", io fuor di dubbio affermo che fra le due grandezze omogenee α e β ha luogo una certa relazione, eppure questa relazione (adiacenza) non è nè uguaglianza, nè disuguaglianza.

Trovo pure eccessivamente generale, a pag. 21, l'affermazione " *due grandezze uguali sono ... sostituibili in* **tutte** *le relazioni in cui esse figurano* ". Suppongasi, p. es., che **r** e **s** siano segmenti *equipollenti* e che **t** sia un segmento *uguale* ad **r**; è sempre lecito nell'*equipollenza* **r** $\triangleq$ **s** sostituire **t** ad **r**? No certamente (se **t** non è parallelo ad **r**,...).

---

[1] Sono queste, è ben vero, *questioni di parole;* ma, come giustamente osserva il VAILATI nello scritto precitato (p. 5 e 6), noi *vediamo esser stati frequentissimi gli errori e i ritardi all'acquisto di nuove cognizioni, dovuti, se non esclusivamente almeno principalmente, a ciò, che, in date circostanze, certe utili e indispensabili " questioni di parole " non furono sollevate, o non poterono esser discusse*. Nel caso attuale poi la distinzione fra *relazione* e *referenza*, *termini* e *membri*, mi pare utile perchè, se non altro, senza tale distinzione riuscirebbe malagevole l'esatta enunciazione di alcune proposizioni della teoria delle relazioni; valga di esempio il teorema: " Supposto che coesistano due *referenze*, esprimenti entrambe una medesima *relazione*, l'una fra due dati *termini* e l'altra fra altri due, coesisterà con esse una terza *referenza* avente per *membri* un *membro* dell'una e un *membro* dell'altra delle due *referenze* date, ed esprimente pure quella stessa relazione, allora, ed allora soltanto, quando simultaneamente avvenga che i rimanenti due *termini* siano *membri* di un'altra *referenza* ancora, esprimente quella medesima *relazione* "; p. es.: Se $a = b$ e $A = B$, perchè si abbia $b = B$ è sufficiente ed è necessario che si abbia $a = A$ (cfr. *Dipendenza ecc.* pag. 3).

Pure a pag. 24, e a pag. 25, trovo che Ella pone prima il concetto di *somma* e poi il concetto di *maggiore* e *minore* stato. Io credo invece che si debba parlare *prima* di maggiore e minore e *poi* di somma, poichè è certo più natural cosa che prima si parli delle *relazioni* (almeno delle più semplici) e poi delle *operazioni*. Giova infatti notare che non si perviene ad una *somma* se non che a patto di eseguire un'*addizione*. Ora per esprimere che eseguendo una certa addizione si ottiene una certa somma non ci serviamo forse della relazione di uguaglianza? E, inoltre, non è forse un atto del tutto spontaneo della nostra mente, appena eseguita un'operazione, p. es., su un numero razionale positivo mediante un altro numero razionale positivo, la quale dia pure per risultato un numero razionale positivo, il cercare di giudicare dell'effetto dell'operazione medesima? E per farci un'adeguata idea di tale effetto non ci conviene forse sapere almeno riscontrare se l'operazione ha dato luogo o no ad una modificazione, e se sì *in che senso?* E ciò implica appunto che si posseggano *già*, relativamente ai numeri razionali positivi, oltre i concetti di *uguale* e *disuguale*, anche quelli di *maggiore* e *minore*. E si tratta eziandio, almeno per me, di amore dell'ordine, o, se vogliamo, del desiderio di non lasciare le cose in asso; perchè è appunto appena dopo di aver stabilito che " se a e b sono numeri razionali positivi, necessariamente deve aversi o $a = b$ o $a \neq b$ „ che trova la sua propria sede la nozione " e quando $a \neq b$ si avrà poi o $a > b$ o $a < b$, naturale e indispensabile completamento della nozione precedente. Ed in particolare ritengo che delle due affermazioni " $a > b$ „, " esiste un numero razionale positivo tale che $a = b + d$ „ la seconda debba costituire la tesi di un *teorema* di cui la prima è l'ipotesi: oggi invece è di moda prendere la seconda come definizione della prima: questa nuova via è certamente più comoda, ma *non è la più naturale*, e pertanto io non saprei seguirla; e del resto, e lo vedo con piacere, neppure Ella la segue, poichè a pag. 25, parlando di grandezze in generale, scrive " ammetteremo come postulato che se $A > B$, esiste un terzo stato D tale che $D + B = A$ „. E mi sarebbe stato di somma soddisfazione saperla meco eziandio nel ritenere conveniente di *dare la precedenza alle relazioni piuttosto che alle operazioni*, tantopiù che è precisamente questo uno dei concetti fondamentali che mi hanno guidato nello scrivere per un nuovo testo di Aritmetica razionale, (1) pubblicato appunto in questi giorni, la teoria (puramente analitica) delle frazioni ordinarie, la quale ho diviso così: § 1° *Relazioni fra i numeri razionali* (trentadue pagine), § 2° *Operazioni fra i numeri razionali* (trentaquattro pagine).

Pensatamente ho detto più sopra *non si perviene ad una* **somma** *se non che a patto di eseguire un'***addizione** perchè, sempre a pag. 24

(1) G. GABBIERI. *Elementi di Aritmetica razionale secondo i programmi dei ginnasi superiori*, 1a edizione con la collaborazione di E. DE AMICIS. Milano, 1899.

e 25, ho veduto che Ella parla di *somma* e non già di *addizione*. Chi tace non dice niente, e pertanto io non so se il Suo silenzio confermi un'opinione che oggi pure viene in moda, che cioè si possa *trattare della* **somma** *senza parlare dell'***addizione**, [1] e in generale di un *risultato* senza parlare dell'*operazione* che lo produce. Non dico che un tal modo di procedere sia assolutamente impossibile: ma non dispose natura che le sorgenti della Scrivia scendessero a Genova; nè per una via naturale andrà un giorno il Sele a dissetare le Puglie. La cosa poi rasenta a dirittura il controsenso (almeno se, per non essere costretti a dichiarar guerra al vocabolario e alla grammatica, vogliamo stare quanto più è possibile al significato comune delle parole) quando si parla di *prodotto* senza parlare di *moltiplicazione*, rinunciando così a pensare che la parola *prodotto*, aggettivo verbale sostantivato, non è se non che l'abbreviazione della perifrasi " *ciò che è prodotto* „; prodotto, dunque, da che cosa se non dalla operazione della moltiplicazione? Che vuole! quel povero " prodotto „ senza " moltiplicazione „ a me fa proprio l'impressione di un figlio senza genitori; e a chi mi dicesse " I genitori del prodotto sono i fattori „ risponderei " Sicuro! Ma nemmeno i fattori possono diventar genitori senza eseguire l'operazione della moltiplicazione „. E quando, parlando con un collega a proposito di numeri naturali e di moltiplicazione, mi sentii dare, per la prima volta, la *definizione* (?) " Dicesi moltiplicazione l'operazione con la quale si *calcola* il prodotto di due numeri „, mi parve anzitutto di vedere un carro camminare dinnanzi ai buoi; ma poi, ripensandoci su e non sapendo capacitarmi di tale stravaganza, capii, o almeno mi parve, di che sorta di *moltiplicazione* si trattava e dimandai: " Ma *allora*, di grazia, di *quale moltiplicazione* volete dire? Di quella solita *per scacchiero* o di quella *a crocetta? Romboidale* o *piramidale? A castelluccio*, o *per quadretto*, o *per gelosia? A ripiego, a scapezzo, alla russa, all'egiziana*, o *col regolo*...? Poichè al certo con codesta vostra *definizione* non potete alludere se non che ad uno qualunque dei tanti procedimenti pratici, o magari meccanici, che possono appunto servire per calcolare il risultato della vera ed unica operazione teorica della moltiplicazione dei numeri naturali „. Ed è appunto alle prime due fra le predette *regole di moltiplicazione*, cioè *esecuzioni materiali della moltiplicazione propriamenta detta*, che allude l'alunno di terza classe elementare dicendo al compagno: " Come! Non *sai* ancora *la moltiplicazione?* neppure *quella più facile* (a scacchiero)? Io *so* anche *la moltiplicazione abbreviata:* guarda si fa così e così (*a crocetta*) „; mentre invece allude precisamente alla moltiplicazione dei numeri naturali (*in se stessa*, cioè indipendentemente dalle

---

[1] Fra le altre cose, *così facendo*, credo che non dovrebbe nemmeno esser lecito, a stretto rigore di termini, di indicare la somma di **a** e **b** colla notazione $a+b$, che si legge " **a** *più* **b** „; infatti, per universale consenso, il segno $+$ è appunto il segno dell'*addizione* e non già della *somma*, la quale *allora* dovrebbe indicarsi altrimenti (p. es., col simbolo S(a, b), da leggersi precisamente " *somma* di **a** e **b** „).

multiformi maniere di calcolarne il risultato) il loro maestro interrompendo: " Ebbene! E tu, che fai il saccente, sapresti poi dirmi *che cosa è veramente la moltiplicazione?* ". Certamente accettare quella *definizione* (?) sarebbe cosa assai comoda, poichè essa non dà proprio niente a pensare nè all'alunno che l'ascolta, nè, tanto meno, all'insegnante che la dice; ma qui pure lascio che altri s'avvii per la strada più comoda, ma artificiale, e prescelgo quella più alpestre, ma tracciata dalla natura medesima, la quale non vuole che si premetta l'effetto alla causa, e perciò neppure il risultato all'operazione, il *prodotto* alla *moltiplicazione*, la *somma* all'*addizione*, il *residuo* alla *sottrazione*, il *quoto* alla *divisione*. (1)

Nella stessa pag. 25, se si voleva chiamare D **differenza** fra A e B, si doveva, secondo me, scrivere (essendo $A > B$) $A = B + D$, piuttosto che $D + B = A$ (la quale uguaglianza, a rigore, equivale all'altra $A - B = D$, che dice " sottraendo dalla grandezza A la grandezza B si ottiene per **residuo** *la grandezza* D "). Naturalmente, parlandosi là in via affatto generale sia rispetto all'addizione che rispetto all'uguaglianza, non si sa *ancora* se $D + B = B + D$, nè se quando $X = Y$ sia pure $Y = X$, non si sa cioè se per le grandezze considerate l'addizione sia un'*operazione commutativa*, (2) nè se l'uguaglianza sia una relazione *conversiva*, com' io son solito dire, (3) o *simetrica*, come preferisce il Prof. PEANO. (4)

Sempre a pag. 25, a linea 7, ad *assiomi* sostituirei *definizioni*.

---

(1) Come particolarmente io la pensi a quest'ultimo riguardo Ella potrà vedere in un paragrafo dei precitati *Elementi di Aritmetica razionale secondo i programmi dei Ginnasi superiori*, che, scritto da me, rispecchia precisamente le mie idee in proposito: è l'ultimo paragrafo della *Parte prima (Numeri naturali)* e porta il titolo " Operazione inversa della moltiplicazione (*Divisione* considerata come ricerca di *quoto*) ".

(2) Vale a dire *un'operazione che gode della proprietà commutativa*. La spiegazione è superflua, ma *pongo i punti sugl'i* per avere occasione di ottemperare al precetto *date Caesari quod est Caesaris*, cioè per rivendicare alle operazioni anche i loro diritti di proprietà; poichè, p. es., (se *a*, *b*, *c* sono numeri naturali) le proprietà espresse dalle eguaglianze $a + b = b + a$, $(a + b) + c = a + (b + c)$, $a \times b = b \times a$, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$, e che fino ad ora erano state concordemente ritenute come legittime proprietà dell'addizione e moltiplicazione dei numeri naturali, si vorrebbero attribuire da qualcuno alla *somma* e al *prodotto*. Veda in proposito l'opera già citata di C. BURALI-FORTI e A. RAMORINO, ove, p. es., a pag. 28 (27) è detto che *il prodotto, come la somma, gode della proprietà* **commutativa (associativa)**. Non Le pare questa una vera spogliazione delle *operazioni* in favore dei *risultati?* Taluno fa la stessa spogliazione a favore d'altri: p. es., il BIASI, nei suoi *Elementi di Aritmetica e Geometria esposti con metodo sintetico*, Sassari, 1892, (opera pregevolissima sotto molti riguardi, originariamente e profondamente pensata) a pag. 30 dice che *i numeri naturali godono la proprietà commutativa (associativa)* come addendi e come fattori. Nè per giustificare, p. es., il trasferimento della proprietà commutativa dalla moltiplicazione al prodotto, ovvero ai fattori, varrebbe l'osservare che, p. es., *la moltiplicazione dei quaternioni* (che è associativa) *non è commutativa*, concludendo " dunque la proprietà commutativa non è veramente una proprietà della moltiplicazione "; ciò infatti prova solamente che invece di dire genericamente " la moltiplicazione è commutativa " conviene dire, p. es., nel caso antecedentemente considerato " la moltiplicazione dei numeri naturali è commutativa "; e d'altronde, se è vero che nel caso dei quaternioni la moltiplicazione non gode della proprietà commutativa, nello stesso caso, peraltro, nessuno verrà a dire che ne godano i fattori, nè tampoco il prodotto. E altrettanto sarebbe a ripetersi se si tirasse in ballo anche *la moltiplicazione delle trasformazioni, o delle sostituzioni*, per cui sussiste pure la proprietà associativa ma non la commutativa (v., p. es., F. GIUDICE, *Nozioni sulle Trasformazioni puntuali e sui Gruppi continui*, Brescia, 1898, e SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure*), o qualche altra operazione relativa a qualche altro sistema di enti, alla quale per avventura fosse dato il nome di moltiplicazione senza che godesse di siffatta proprietà.

(3) " Dipendenza fra alcune proprietà notevoli delle relazioni fra enti di un medesimo sistema " (pag. 1 e 12), *Rivista di Matematica*, 1892. Già il COMMANDINO nel suo *Euclide* (Urbino, 1575, pag. 22) aveva designato le relazioni conversive colla giustissima perifrasi " quelle che *si convertono* univocamente "; travide pure che la proprietà *adequatica* " *quae convenium cum tertio conveniunt inter sese* " non poteva sussistere se non che per relazioni conversive (Cfr. " Dipendenza ecc. ", Teorema III e note 5 e 6).

(4) *Notations de Logique Mathématique* par G. PEANO, Turin, 1894, pag. 45.

Pure a pag. 25, alla fine dell'art. 26, avrei desiderato almeno un esempio delle grandezze di cui ivi si parla.

Subito dopo, invece delle parole *dei nominati criterî di quantità*, porrei *relativa alle predette caratteristiche della grandezza.*

A pag. 34, linea 6 risalendo, dopo *mediata* aggiungerei *o dimostrativa.*

A pag. 45, linea 10: *corpo*. E se quel *corpo* fosse un pezzo di *ghiaccio* o di *cera*, e via dicendo?...

Nella stessa pag. 45 si parla dell'*etere cosmico:* per me *è un mito* (Veda l'annotazione, alquanto arrischiata, a pag. 2 della mia " *Introduzione alla teoria matematica della propagazione del calore* [*nei corpi solidi atermani*] „ Torino, Loescher, 1891).

Pag. 46: *senso della temperatura:* non si dice invece *tatto termico*. appunto per far distinzione dal *tatto meccanico* (tutti e due poi costituiscono insieme il *senso del tatto*)?

Pag. 48: *archetti* **impercettibili** *o quasi:* guardiamoli col microscopio e non saranno più tali. Bisogna proprio pronunziare *la parola superiore* " **infinitesimi** „, non c'è verso.

Poco più sotto: *elica circolare:* direi *cilindrica*, poichè, p. es., anche l'*elica conica* potrebbe dirsi *circolare*.

Pag. 53: piuttosto che assumere come espressione vettoriale $r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$, prenderei senz'altro r_α; anche con questa semplicissima forma, irriducibile, la relativa teoria può svolgersi egualmente. [1]

E così sono nuovamente alla fine, e questa volta sul serio, poichè, bene o male (certo più male che bene) anche le *correzioni*, che Ella voleva, son fatte; e se, per farle, sarò più volte *montato in cattedra*, ciò, L'assicuro, è avvenuto a mia insaputa e solamente per vizio d'abitudine, come più sopra ho detto; a buon conto, come allora, del fallo mio invocherò assoluzione, e non sarà indarno, poichè la Sua bontà

.... ha sì gran braccia
che prende ciò che si rivolge a lei.

Prima di chiudere ho riletto la presente e ne ho provato qua e là una certa impressione come di lettera aperta; tale, nella mia intenzione, non doveva essere certamente; ma se tale tuttavia Ella vorrà considerarla, faccia pure; ormai la lettera è Sua, ed Ella può farne ogni Suo beneplacito; ed anzi io mi terrò molto onorato se Ella sarà per giudicare meritevole di pubblicazione questa povera mia prosa, a titolo di recensione del Suo notevolissimo *Discorso primo*.

Con ogni ossequio mi dico

Brescia, 2 novembre 1898.

Suo dev.mo
ENRICO DE AMICIS.

(1) Il Prof. LAZZERI, osservando che la notazione r_α (adottata p. es., anche dall'HOÜEL, *Cours de Calcul infinitésimale*, Paris, 1878-81) riesce incomoda se r, α sono espressioni graficamente alquanto complicate, assume invece come espressione vettoriale la notazione, pure semplicissima, (r, α).

SOPRA UNA CLASSE

di triangoli e tetraedri isobaricentrici

1. Nel piano tre punti A', B', C' tali che le loro coordinate baricentriche riferite ad un triangolo fondamentale ABC sieno rispettivamente $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\gamma_1, \alpha_1, \beta_1)$, $(\beta_1, \gamma_1, \alpha_1)$ si chiamano *isobarici* rispetto ad ABC ed il triangolo $A'B'C'$ si chiama *isobarico* rispetto ad ABC. (Reciprocamente ABC risulta isobarico rispetto ad $A'B'C'$, e due triangoli isobarici rispetto ad uno stesso risultano isobarici l'uno rispetto all'altro).

Nello spazio quattro punti P_1, P_2, P_3, P_4 tali che le loro coordinate baricentriche riferite a un tetraedro fondamentale $A_1A_2A_3A_4$ sieno rispettivamente

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1),\ (\delta_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1),\ (\gamma_1, \delta_1, \alpha_1, \beta_1),\ (\beta_1, \gamma_1, \delta_1, \alpha_1)$$

oppure

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1),\ (\beta_1, \alpha_1, \delta_1, \gamma_1),\ (\gamma_1, \delta_1, \alpha_1, \beta_1),\ (\delta_1, \gamma_1, \beta_1, \alpha_1)$$

dirò che sono isobarici (di 1ª o di 2ª specie) rispetto ad $A_1A_2A_3A_4$. (Reciprocamente $A_1A_2A_3A_4$ risulta isobarico rispetto a $P_1P_2P_3P_4$ e due tetraedri isobarici rispetto a uno stesso risultano isobarici l'uno rispetto all'altro).

Fra le numerose proprietà (*) di questi triangoli e tetraedri isobarici richiamo le seguenti:

a) Due triangoli isobarici l'uno rispetto all'altro hanno lo stesso centro di gravità.

Della quale in alcuni casi è vera anche la reciproca; p. es. *i triangoli inscritti o circoscritti ad un triangolo* ABC *ed aventi lo stesso centro di gravità di* ABC *sono isobarici rispetto ad* ABC.

b) Due triangoli $A'B'C'$, ABC *isobarici l'uno rispetto all'altro sono triomologici, e tanto i tre centri che i tre assi d'omologia formano altri triangoli isobarici rispetto ad uno dei primi.*

Le tre omologie si ottengono unendo rispettivamente A', B', C' con A, C, B, e con C, B, A, o con B, A, C.

c) Tutti i triangoli isobarici rispetto ad uno stesso hanno lo stesso angolo di Brocard, e quindi è costante per essi la somma delle cotangenti degli angoli.

(*) Vedi: "Su un triangolo notevole" *Periodico di Matematica*, anno IX, 1894; "Alcune proprietà dei punti isobarici" *Giornale di Battaglini*, vol. 34, 1896.

d) Due tetraedri isobarici l'uno rispetto all'altro hanno lo stesso centro di gravità.

Della quale proprietà è vera in alcuni casi la reciproca, p. es.: *i tetraedri che hanno i vertici sui quattro lati (o le faccie passanti pei quattro lati) di un quadrangolo gobbo* $A_1A_2A_3A_4$, *e che hanno lo stesso centro di gravità del tetraedro* $A_1A_2A_3A_4$ *sono isobarici rispetto a questo.*

e) Due tetraedri isobarici l'uno rispetto all'altro sono tali che in quattro modi diversi si possono unire i vertici dell'uno coi vertici dell'altro così da ottenere quattro quaderne di rette iperboloidiche.

Se $P_1P_2P_3P_4$, $A_1A_2A_3A_4$ sono isobarici di 1ª specie, i quattro quadrupli iperboloidici si ottengono unendo rispettivamente P_1, P_2, P_3, P_4 con A_4, A_3, A_2, A_1, o con A_3, A_2, A_1, A_4, o con A_2, A_1, A_4, A_3, o con A_1, A_4, A_3, A_2; se sono isobarici di 2ª specie, i quattro quadrupli si ottengono unendo rispettivamente P_1, P_2, P_3, P_4 con A_1, A_2, A_3, A_4, o con A_2, A_3, A_4, A_1 ecc. permutando. E poichè $P_1P_2P_3P_4$, $A_1A_2A_3A_4$ possono anche essere isobarici di 1ª e di 2ª specie (ciò accade se $\beta_1 = \delta_1$), si ha pure:

f) Due tetraedri fra loro isobarici di 1ª e di 2ª specie sono tali che in otto modi diversi si possono unire i vertici dell'uno con quelli dell'altro così da ottenere otto quaderne di rette iperboloidiche.

Queste proprietà bastano a dimostrare che lo studio di questi triangoli e tetraedri isobarici può avere qualche interesse. E perciò ai numerosi casi di triangoli e tetraedri isobarici esaminati nelle note citate aggiungo qui i seguenti:

2. Nel piano vi sono evidentemente linee di qualunque grado tali che, riferite a un triangolo fondamentale ABC, ad un punto A′ di una di esse corrispondono come 2° e 3° punto isobarico punti B′, C′ che giacciono sulla linea stessa (tale linea dirò che è *isobarica* rispetto al triangolo ABC); così pure vi sono sistemi di tre linee di qualunque grado tali che ad un punto A′ di una linea di uno di tali sistemi corrispondono come 2° e 3° punto isobarico punti B′, C′ che si trovano rispettivamente sulle altre due linee di quel sistema (un sistema di tre tali linee dirò che è *isobarico* rispetto ad ABC).

Allora si vede tosto che si avrà:

I punti che una linea isobarica rispetto ad ABC *ha comuni con un'altra linea isobarica o colle tre linee di un sistema isobarico formano triangoli isobarici rispetto ad* ABC.

I punti che le tre linee di un sistema isobarico rispetto ad ABC *hanno comuni fra loro o colle tre linee corrispondenti di un altro sistema isobarico rispetto ad* ABC *formano triangoli isobarici rispetto ad* ABC.

Necessariamente, ad un punto reale A′ corrispondendo in modo unico come 2° e 3° punto isobarico due punti B′, C′ pure reali, accadrà che una linea isobarica s non potrà avere in comune con un'altra linea isobarica s' che $3n$ punti reali ($n = 0, 1, 2 \ldots$); che se una linea isobarica s ha in comune con una delle tre linee s_1, s_2, s_3 di un sistema isobarico n punti reali, s dovrà avere in comune n punti reali anche con ciascuna delle altre; che se s_1 ha in comune n punti reali con s_2, altrettanti ne dovrà avere s_2 con s_3, e s_3 con s_1; che se due dei punti comuni ad s e s_1 coincidono, i due punti corrispondenti comuni ad s e s_2 dovranno pure coincidere ecc.; e che quindi in particolare ad una tangente ad s corrisponderanno come 2ª e 3ª retta di un sistema isobarico altre tangenti ad s, e ad una tangente ad s_1 corrisponderanno come 2ª e 3ª retta di un sistema isobarico due tangenti rispettivamente ad s_2 e ad s_3 ecc. E perciò *sarà vero anche il teorema correlativo del precedente.*

3. Fra le rette l'unica isobarica è la retta all'infinito $\alpha + \beta + \gamma = 0$. I sistemi isobarici di tre rette sono quelli rappresentati dalle equazioni

$$\begin{aligned} u\alpha + v\beta + w\gamma &= 0 \\ w\alpha + u\beta + v\gamma &= 0 \\ v\alpha + w\beta + u\gamma &= 0 \end{aligned}$$

che danno luogo a teoremi indicati nella 1ª nota citata.

4. Fra le coniche sono isobariche quelle rappresentate dall'equazione

$$(1) \qquad m(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + n(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 0$$

le quali sono ellissi, che hanno il centro nel baricentro G del triangolo fondamentale ABC, e che non hanno punti reali comuni fra loro.

E allora si avrà:

I punti che una ellisse (1) (*in particolare la ellisse* G *circoscritta ad* ABC, *la ellisse* G *inscritta in* ABC, *la ellisse* G *che passa per tre punti che dividono i lati di* ABC *nello stesso rapporto positivo o negativo* ρ, *la ellisse* G *tangente alle rette che uniscono* A, B, C *con tre punti che dividono i lati di* ABC *nello stesso rapporto* ρ) (*) *ha comuni con un sistema isobarico di tre rette, p. es., coi lati del triangolo* ABC, *o colle mediane di* ABC, *o colle parallele da* A, B, C *ai lati o alle mediane di* A, B, C *o colle parallele da* G *ai lati di* ABC, *o colle congiungenti tre punti che dividono i lati di* ABC *nello stesso rapporto, o colle congiungenti questi tre punti a* G *o ad* A, B, C *ecc., formano triangoli isobarici rispetto ad* ABC.

Le tangenti condotte ad una ellisse (1) *da tre punti isobarici rispetto ad* ABC, *p. es., da* A, B, C, *o da tre punti che dividono i lati di* ABC *nello stesso rapporto, o parallelamente ai lati o alle mediane di* ABC *ecc. formano triangoli isobarici rispetto ad* ABC, *e i punti di contatto altri triangoli isobarici.*

(*) Le equazioni di queste ellissi sono rispettivamente, come è facile verificare,

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0, \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 0,$

$\rho(\alpha^2 + \ldots) - (1 + \rho^2)(\alpha\beta + \ldots) = 0, \qquad (1 + \rho)^2(\alpha^2 + \ldots) - 2(1 + \rho^2)(\alpha\beta + \ldots) = 0.$

5. Poichè un triangolo inscritto (circoscritto) a una ellisse e avente il baricentro nel centro della elisse è determinato da un suo vertice (un lato), e un triangolo isobarico rispetto ad ABC è pure determinato da un suo vertice o lato, si ha anche: *ogni triangolo inscritto o circoscritto ad una ellisse* (1) *e avente il baricentro nel centro della ellisse, ossia isobaricentrico con* ABC, *è isobarico rispetto ad* ABC; *e quindi i suoi lati segano un sistema isobarico di tre rette* (*i tre lati di* ABC, *le tre mediane ecc.*) *secondo triangoli isobarici rispetto ad* ABC.

6. Sieno A', B', C' tre punti isobarici rispetto ad ABC, e ad A_1, B_1, C_1 tre punti isobarici su una ellisse (1). Le rette $A'A_1, B'B_1, C'C_1$ formeranno un sistema isobarico e segheranno questa ellisse in altri tre punti isobarici A_2, B_2, C_2, sicchè (A', B', C'), (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2) saranno tre terne di punti isobarici posti rispettivamente sulle rette di un sistema isobarico, e perciò (vedi nota citata) A', B', C' divideranno nello stesso rapporto le corde A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Allora i coniugati armonici A'', B'', C'' di A', B', C', rispetto a queste corde divideranno pure le corde stesse in uno stesso rapporto, e saranno perciò anch'essi punti isobarici rispetto ad ABC. Ripetendo la stessa costruzione per altri tre punti isobarici della stessa ellisse, si otterranno altri tre punti A''', B''', C''' analoghi ad A'', B'', C'' ed isobarici rispetto ad ABC, e perciò le rette $A''A'''$, $B''B'''$, $C''C'''$ formeranno un sistema isobarico rispetto ad ABC, ossia quindi un triangolo $C_1' A_1' B_1'$ isobarico rispetto ad ABC, cioè:

Se $A'B'C'$ *è un triangolo isobarico rispetto ad* ABC, *il triangolo* $A'_1B'_1C'_1$ *polare di* $A'B'C'$ *rispetto ad una ellisse* (1) *è pure isobarico rispetto ad* ABC (*e quindi rispetto* $A'B'C'$).

Da cui, tenendo presente la proprietà *b*), e ricordando che fra due triangoli polari rispetto a una conica $A'B'C'$, $A'_1B'_1C'_1$, sussiste la omologia $(A'B'C', A'_1B'_1C'_1)$ deriva che:

Se $A'B'C'$ *è un triangolo isobarico rispetto ad* ABC, *il suo triangolo polare rispetto ad una ellisse* (1) *è quadriomologico con esso.*

7. Sistemi isobarici rispetto ad ABC di tre coniche sono quelli rappresentati dalle tre equazioni

$$(2)\qquad \begin{cases} m(a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2) + n(a'\beta\gamma + b'\gamma\alpha + c'\alpha\beta) = 0 \\ m(c\alpha^2 + a\beta^2 + b\gamma^2) + n(c'\beta\gamma + a'\gamma\alpha + b'\alpha\beta) = 0 \\ m(b\alpha^2 + c\beta^2 + a\gamma^2) + n(b'\beta\gamma + c'\gamma\alpha + a'\alpha\beta) = 0. \end{cases}$$

Ad essi in particolare appartiene il sistema di tre coniche circoscritte ad ABC ed aventi per poli d'omologia rispetto ad ABC tre punti isobarici (a', b', c'), (c', a', b'), (b', c', a'), cioè il sistema

$$\begin{cases} a'\beta\gamma + b'\gamma\alpha + c'\alpha\beta = 0 \\ c'\beta\gamma + a'\gamma\alpha + b'\alpha\beta = 0 \\ b'\beta\gamma + c'\gamma\alpha + a'\alpha\beta = 0 \end{cases}$$

ed il sistema di tre coniche inscritte in ABC ed aventi per poli d'omologia rispetto ad ABC tre punti isobarici (a', b', c'), (c', a', b'), (b', c', a'),

$$\left(\frac{\alpha^2}{a'^2}+\frac{\beta^2}{b'^2}+\frac{\gamma^2}{c'^2}\right)-2\left(\frac{\beta\gamma}{b'c'}+\frac{\gamma\alpha}{c'a'}+\frac{\alpha\beta}{a'b'}\right)=0,$$

e dalle due che si ottengono da essa permutando tra α, β, γ. Come anche il sistema delle tre parabole di Arzt

$$\alpha^2-4\beta\gamma=0, \quad \beta^2-4\gamma\alpha=0, \quad \gamma^2-4\alpha\beta=0.$$

Quindi combinando un sistema (2) con un sistema isobarico di tre rette o con tre punti isobarici rispetto ABC *si avranno teoremi affatto analoghi a quelli del n. 4;* combinando le tre coniche di un sistema (2) con una ellisse (1) o fra di loro o colle tre coniche di un altro sistema (2) si avranno altri teoremi, come in particolare i seguenti:

Tre coniche circoscritte ad ABC *ed aventi per poli d'omologia rispetto ad* ABC *tre punti isobarici rispetto ad* ABC *sono incontrate dalla ellisse* G *circoscritta ad* ABC *in altri tre punti che formano un triangolo isobarico rispetto ad* ABC, *ed hanno fra loro comuni altri tre punti che formano un triangolo isobarico rispetto ad* ABC.

Le tangenti comuni alle tre coniche predette, o quelle che esse hanno rispettivamente in comune colla ellisse G *circoscritta ad* ABC, *formano altri triangoli isobarici rispetto ad* ABC.

Tre coniche inscritte in ABC *ed aventi per poli d'omologia rispetto ad* ABC *tre punti isobarici rispetto ad* ABC *hanno in comune colla ellisse* G *inscritta in* ABC *altre tre tangenti, che formano un triangolo isobarico rispetto ad* ABC, *ed hanno fra loro comuni altre tre tangenti che formano un altro triangolo isobarico rispetto ad* ABC.

I punti comuni alle tre coniche predette, o quelli che esse hanno rispettivamente comuni colla ellisse G *inscritta in* ABC, *formano altri triangoli isobarici rispetto ad* ABC.

Le tre parabole di Arzt segano la ellisse G *inscritta secondo due triangoli isobarici di* ABC *ecc.*

E con un ragionamento analogo a quello del n. 6 si avrà anche:

Se A'B'C' *è un triangolo isobarico rispetto ad* ABC, *le tre polari dei punti* A', B', C' *rispetto alle corrispondenti tre coniche di un sistema isobarico* (2) *formano un triangolo isobarico rispetto ad* ABC.

8. Nello spazio vi sono pure evidentemente linee e superficie tali che, riferite ad un tetraedro fondamentale $A_1A_2A_3A_4$, ad un punto P_1 di una di esse corrispondono come 2°, 3° e 4° punto isobarico rispetto ad $A_1 A_2 A_3 A_4$ punti che si trovano sulla linea o sulla superficie stessa (linea o superficie isobarica rispetto $A_1A_2A_3A_4$). Come pure vi sono sistemi di 4 linee o di 4 superficie tali che ad un punto P_1 di una delle linee o delle superficie di quel sistema corrispondono come 2°, 3° e 4° punto isobarico rispetto $A_1A_2A_3A_4$ punti P_2, P_3, P_4 che si trovano rispettivamente sulle altre linee o sulle altre superficie di quello stesso sistema. E allora è chiaro che si avrà:

I punti che una linea isobarica rispetto ad $A_1A_2A_3A_4$ *ha comuni con un'altra linea isobarica o con una superficie isobarica o colle linee o le superficie di un sistema isobarico formano tetraedri isobarici rispetto ad* $A_1A_2A_3A_4$.

I punti che le quattro linee di un sistema isobarico hanno comuni fra loro o con una superficie isobarica o colle quattro linee corrispondenti di un altro sistema isobarico o colle quattro superficie corrispondenti di un sistema isobarico formano tetraedri isobarici rispetto ad $A_1A_2A_3A_4$.

I punti che una superficie isobarica ha comuni con un'altra superficie isobarica o colle quattro superficie di un sistema isobarico, come i punti che le quattro superficie di un sistema isobarico hanno comuni fra loro o colle quattro superficie di un altro sistema isobarico formano tetraedri isobarici rispetto ad $A_1A_2A_3A_4$ (questi punti comuni, se le superficie dette non sono tangenti costituiranno linee isobariche o sistemi isobarici di linee).

Valgono poi osservazioni analoghe a quelle fatte al teorema corrispondente del n. 2.

9. Nello spazio fra i piani non vi è che il piano all'infinito che sia isobarico rispetto $A_1A_2A_3A_4$.

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0).$$

Esistono invece sistemi isobarici di quattro rette o di quattro piani, e i teoremi a cui questi danno luogo fanno parte della 2ª nota citata.

10. Fra le quadriche è isobarica ognuna di quelle rappresentate dall'equazione

$$m\Sigma\alpha^2 + n\Sigma\alpha\beta = 0 \tag{3}$$

le quali sono elissoidi che hanno il centro nel baricentro G del tetraedro $A_1A_2A_3A_4$ e che non hanno punti reali comuni fra loro.

E allora si avrà:

I punti che una quadrica (3) [*in particolare l'elissoide* G *circoscritto ad* $A_1A_2A_3A_4$ *ed avente i piani tangenti in* A_1, A_2, A_3, A_4 *paralleli alle faccie opposte, l'elissoide* G *inscritto in* $A_1A_2A_3A_4$ *coi punti di contatto nei baricentri delle faccie di* $A_1A_2A_3A_4$ *l'elissoide* G *tangente nei punti medi dei sei spigoli di* $A_1A_2A_3A_4$ *l'elissoide* G *che divide i sei spigoli di* $A_1A_2A_3A_4$ *nello stesso rapporto* ρ, *l'elissoide* G *tangente alle rette che uniscono* A_1, A_2, A_3, A_4 *con punti che dividono* $A_2A_3, \ldots$ *nello stesso rapporto* ρ (*)] *ha comuni con un sistema isobarico di 4 rette, p. es., coi lati del quadrangolo* $A_1A_2A_3A_4$,

(*) Le equazioni di questi elissoidi, come è facile verificare sono rispettivamente
$\Sigma\alpha\beta=0$, $\Sigma\alpha^2-\Sigma\alpha\beta=0$, $\Sigma\alpha^2-2\Sigma\alpha\beta=0$, $\rho\Sigma\alpha^2-(1+\rho^2)\Sigma\alpha\beta=0$, $(1+\rho)^2\Sigma\alpha^2-2(1+\rho^2)\Sigma\alpha\beta=0$
che appartengono alla (3).

o colle diagonali A_1A_3, A_2A_4, *o colle congiungenti* A_1, A_2, A_3, A_4 *a punti che dividono* $A_2A_3, \ldots$ *nello stesso rapporto, o colle congiungenti fra loro questi punti, o colle congiungenti* A_1, A_2, A_3, A_4 *ai baricentri delle faccie, o colle congiungenti il baricentro* G *ai punti che dividono i lati del quadrangolo* $A_1A_2A_3A_4$ *nello stesso rapporto o ai vertici, o colle parallele condotte da* G *ai lati del quadrangolo o colle parallele condotte da* A_1, A_2, A_3, A_4, *ai lati del quadrangolo o colle parallele condotte da* A_1, A_2, A_3, A_4, *ai lati del quadrangolo o alle congiungenti i vertici coi baricentri delle faccie ecc. formano tetraedri isobarici rispetto ad* $A_1A_2A_3A_4$.

I piani tangenti ad una quadrica (3) *dalle rette di un sistema isobarico formano tetraedri isobarici rispetto ad* $A_1A_2A_3A_4$, *e i punti di contatto altri tetraedri isobarici.*

11. Con un ragionamento analogo a quello del n. 6 si ottiene pure il teorema:

Se $P_1P_2P_3P_4$ *è un tetraedro isobarico rispetto ad* $A_1A_2A_3A_4$, *il suo tetraedro polare* $P'_1P'_2P'_3P'_4$ *rispetto ad un elissoide* (3) *è pure isobarico rispetto ad* $A_1A_2A_3A_4$ (*e quindi anche rispetto a* $P_1P_2P_3P_4$);

Inoltre sussistendo anche il quadruplo iperboloidico $P_1\,P_2\,P_3\,P_4$, $P'_1P'_2P'_3P'_4$ fra due tetraedri polari rispetto alla stessa quadrica si avrà:

Un tetraedro $P_1P_2P_3P_4$ *isobarico di prima specie rispetto ad* $A_1A_2A_3A_4$ *ed il suo tetraedro polare rispetto ad un elissoide* (3) *formano colle congiungenti i loro vertici cinque quadrupli iperboloidici.*

Un tetraedro $P_1P_2P_3P_4$ *isobarico di 1ª e 2ª specie ed il suo polare rispetto ad un elissoide* (3) *formano colle congiungenti i loro vertici otto quadrupli iperboloidici* (*uno di essi si riduce a un quadruplo omologico col centro in* G).

12. Sistemi isobarici di prima specie di quattro quadriche sono quelli dati dall'equazione

$$(4) \qquad m(a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2) + n\,(a'\alpha\beta + \ldots) = 0$$

e dalle tre che si ottengono permutando circolarmente fra le $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; sistemi isobarici di 2ª specie quelli dati dall'equazione stessa e dalle tre che si ottengono scambiando $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$, in $\beta\ \alpha\ \delta\ \gamma$, in $\gamma\ \delta\ \alpha\ \beta$, ed in $\delta\ \gamma\ \beta\ \alpha$; ai quali appartengono sistemi particolari analoghi a quelli del n. 7.

Combinando quindi un sistema (4) con un sistema isobarico di 4 rette o di 4 piani *si avranno teoremi affatto analoghi a quelli del n. 10* come anche il seguente analogo al primo del n. 11:

Se $P_1P_2P_3P_4$ *è un tetraedro isobarico rispetto ad* $A_1A_2A_3A_4$, *i quattro piani polari di* P_1, P_2, P_3, P_4 *rispetto alle corrispondenti 4 quadriche di un sistema* (4) *formano un tetraedro isobarico rispetto ad* $A_1A_2A_3A_4$.

Bologna, febbraio 1899.

Francesco Ferrari.

PROIEZIONE STEREOGRAFICA

e sua applicazione allo studio di alcune linee sferiche

§ I. — La figura F che si ottiene proiettando da un punto qualunque Q di una sfera S una figura Φ di questa sfera, sopra un piano π parallelo al piano tangente in Q, si chiama *proiezione stereografica di* Φ.

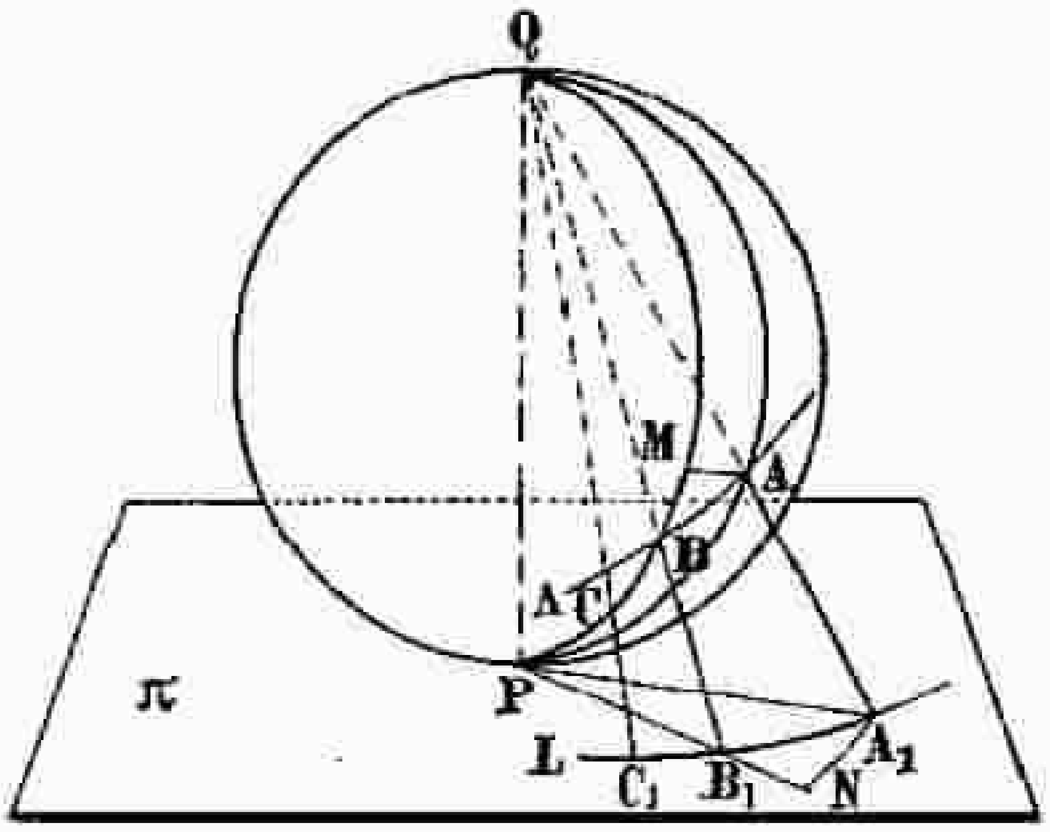

Fig. 1.

Le proiezioni stereografiche di una data figura, fatte da un medesimo punto Q, sono figure omotetiche. Nel caso in cui il piano π passi per il centro di S e nell'altro in cui il piano π sia tangente ad S nel punto P diametralmente opposto a Q, la proiezione stereografica si dice rispettivamente *centrale, polare.*

Se Λ (A, B, C, ...) è una linea di S, L (A_1, B_1, C_1, ...) la sua proiezione stereografica polare e se si pone (fig. 1)

$$PQ = k \quad , \quad \text{arco } PA = \rho \quad , \quad \text{raggio vettore } PA_1 = r,$$

si ha

$$(1) \qquad QA \, . \, QA_1 = k^2; \quad QA = k \cos\left(\frac{\rho}{k}\right) \quad ; \quad \overline{QA_1}^2 = k^2 + r^2.$$

Dalle prime due di queste eguaglianze si ricava

$$QA_1 = \frac{k^2}{QA} = \frac{k}{\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)} .$$

Sostituendo questo valore nella terza, si ottiene

$$r^2 = \overline{QA_1}^2 - k^2 = k^2 \operatorname{tang}^2\left(\frac{\rho}{k}\right),$$

d'onde

$$(2) \qquad r = k \operatorname{tang}\left(\frac{\rho}{k}\right).$$

Quest'equazione, risolta rispetto a ρ, dà

$$(3) \qquad \rho = k \, . \operatorname{ang\,tang}\left(\frac{r}{k}\right).$$

Avendosi

$$k^2 = QA \cdot QA_1 = QB \cdot QB_1 ,$$

si deduce

$$QA : QB_1 = QB : QA_1 ;$$

se dunque si tirano le corde AB, A_1B_1, i triangoli QAB, QA_1B_1 risultano simili e conseguentemente dànno:

$$\frac{\text{corda } AB}{\text{corda } A_1B_1} = \frac{QB}{QA} .$$

Supponiamo che il punto B vada indefinitamente avvicinandosi ad A e quindi B_1 ad A_1; quando B e B_1 sono vicinissimi ad A, A_1, le corde BA, B_1A_1 hanno lunghezze che differiscono pochissimo dagli archi infinitamente piccoli corrispondenti delle linee A, L.

Se dunque chiamiamo σ, s gli archi delle linee A, L contati a cominciare dai punti corrispondenti A, A_1, avremo

$$\lim_{\sigma=0} \left(\frac{\sigma}{s}\right) = \frac{QA}{QA_1} ;$$

e, facendo uso delle formole (1),

$$\lim_{\sigma=0} \left(\frac{\sigma}{s}\right) = \cos^2 \left(\frac{\rho}{k}\right) = \frac{k^2}{k^2 + r^2} . \tag{4}$$

§ 2. — Le formole precedenti sono importantissime, e con esse si possono studiare tutte le proprietà della proiezione. Ci limiteremo però ad esporne soltanto due, cioè la conservazione degli angoli e la trasformazione di un circolo della sfera in un circolo del piano e viceversa.

Sia AB un arco piccolissimo di A e A_1B_1 l'arco corrispondente di L. Col centro Q e col raggio sferico QA si descriva l'arco di parallelo AM compreso fra i meridiani PAQ, PBQ: col centro P e col raggio PA_1 si descriva l'arco A_1N compreso fra i raggi vettori PA_1, PB_1.

Chiamando θ l'angolo MBA e θ_1 l'angolo NB_1A_1, dai triangoli rettangoli piccolissimi ABM, A_1B_1N, considerati come rettilinei, si deduce

$$\cos\theta = \frac{BM}{AB} \quad , \quad \cos\theta_1 = \frac{B_1N}{A_1B_1} ,$$

d'onde:

$$\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta} = \frac{B_1N}{BM} \cdot \frac{AB}{A_1B_1} .$$

E passando al limite per $\sigma = 0$,

$$\lim_{\sigma=0} \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta} = \lim_{\sigma=0} \frac{B_1N}{BM} \cdot \lim_{\sigma=0} \frac{AB}{A_1B_1} .$$

ossia, in causa della (4):

$$\lim_{\sigma=0} \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta} = \cos^2 \left(\frac{\rho}{k}\right) \cdot \lim_{\sigma=0} \frac{B_1N}{BM}. \tag{5}$$

Ora abbiamo, in causa di (2),

$$B_1N = PA_1 - PB_1 = k \operatorname{tang}\left(\frac{\rho}{k}\right) - k \operatorname{tang}\left(\frac{\rho - MB}{k}\right) =$$

$$= k \operatorname{tang}\left(\frac{MB}{k}\right) \cdot \frac{1 + \operatorname{tang}^2\left(\frac{\rho}{k}\right)}{1 + \operatorname{tang}\left(\frac{\rho}{k}\right) \cdot \operatorname{tang}\left(\frac{MB}{k}\right)},$$

e di qui si ricava

$$\frac{B_1N}{BM} = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{MB}{k}\right)}{\left(\frac{MB}{k}\right)} \cdot \frac{1 + \operatorname{tang}^2\left(\frac{\rho}{k}\right)}{1 + \operatorname{tang}\left(\frac{\rho}{k}\right) \cdot \operatorname{tang}\left(\frac{MB}{k}\right)}.$$

Notando che mentre σ va a zero, va pure a zero la variabile MB, risulta

$$\lim_{\sigma=0} \frac{B_1N}{BM} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\rho}{k}\right)};$$

e sostituendo nella (5),

$$\lim_{\sigma=0} \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta} = 1.$$

Questa eguaglianza dimostra che le due linee Λ, L segano rispettivamente i meridiani della sfera passanti per P, Q e i raggi vettori del piano uscenti da P sotto angoli θ, θ_1, che, in punti corrispondenti sono eguali. Se dunque Λ, Λ_1 sono due linee arbitrarie della sfera segantisi in A, ed L, L_1 le loro proiezioni stereografiche segantisi in A_1, chiamando θ, ω le inclinazioni delle Λ, Λ_1 sui meridiani (ed anche delle L, L_1 sui raggi vettori) avremo che nei punti corrispondenti A, A_1 la quantità $\theta \pm \omega$ è la medesima tanto per le linee sferiche, quanto per le linee piane. Ciò prova che le due linee sferiche Λ, Λ_1 in A si segano sotto un angolo eguale a quello sotto il quale le due linee piane corrispondenti L, L_1 si segano in A_1.

La proiezione stereografica è dunque una trasformazione che conserva gli angoli.

La linea sferica Λ sia un cerchio, e sia L la sua proiezione stereografica sul piano π. Si prendano sopra Λ tre punti qualunque A, B, C e siano A_1, B_1, C_1 i loro corrispondenti. Per i quattro punti A, B, C, A_1 si faccia passare una sfera Σ; essa viene tagliata dal piano passante per A, B, C secondo il cerchio Λ e dal piano π lungo un cerchio l passante per A_1.

Se poi H, H_1 sono due altri punti corrispondenti qualunque di Λ, L, si ha:

$$QH \, . \, QH_1 = QA \, . \, QA_1 \, ,$$

il che prova che il punto del piano Π si trova anche sulla sfera Σ e per conseguenza è un punto del cerchio l.

L'arbitrarietà assoluta del punto H sul cerchio Λ porta a concludere che L coincide col cerchio l. Dunque la proiezione stereografica del cerchio Λ è un altro cerchio L. (*)

La proprietà reciproca si dimostra analogamente.

Le due proprietà fondamentali dimostrate consigliano di applicare la proiezione stereografica alla costruzione delle carte geografiche, quando si voglia che nel disegno siano conservate le direzioni della figura obbiettiva. Il sistema dei meridiani terrestri viene rappresentato da un fascio di rette concorrenti; i paralleli da una serie di circoli col centro comune nel centro del fascio.

§ 3. — Considerando come nel § 1, i meridiani passanti per gli stessi poli P, Q e una linea sferica Λ, questa è completamente nota di forma quando si dia, in un modo qualunque, il raggio vettore sferico ρ per mezzo dell'arco σ della linea.

Infatti, supposto che sia

$$\rho = f(\sigma), \tag{6}$$

se si pone (fig. 1) AB $= \tau$, risulta

$$\cos\theta = \lim_{\tau=0} \frac{MB}{\tau} = \lim_{\tau=0} \frac{PA - PB}{\tau} = \lim_{\tau=0} \frac{f(\sigma) - f(\sigma + \tau)}{\tau} \, .$$

Supposto quindi che il limite del secondo membro sia $\varphi(\sigma)$, risulta

$$\cos\theta = \varphi(\sigma), \tag{7}$$

e l'eliminazione di σ fra le (6), (7) conduce alla relazione

$$\cos\theta = \psi(\rho), \tag{8}$$

essendo ψ il simbolo di una funzione nota.

La linea Λ può dunque costruirsi idealmente così: Si descriva un numero grandissimo di meridiani tutti passanti per gli stessi poli P, Q e a partire dal punto A del primo di essi si conduca un arco di cerchio massimo inclinato sul meridiano stesso dell'angolo θ definito dalla (8); l'estremità di questo arco è un punto B posto sul secondo meridiano.

Partendo da B, si ripeta ancora la stessa costruzione e si ha così un nuovo arco BC, avente l'estremità C sul terzo meridiano, ecc.

(*) Questa proprietà è stata argomento della II quistione a concorso proposta nel *Supplemento al Periodico di matematica* (v. anno I, fasc. II e IV). Nota di G. L.

Così continuando, si arriva a costruire una linea, la quale (se i meridiani sono estremamente vicini l'uno all'altro) può ritenersi coincidente colla linea domandata.

Fra le varie linee che si possono fissare sulla sfera mediante una relazione fra ρ e σ sarebbe specialmente importante quella definita dall'equazione

$$\rho = \sqrt{a\sigma + \frac{a^2}{4}}.$$

Infatti le proprietà fondamentali di tale linea, sopra tutto quelle che non si riferiscono ad aree di porzioni di superficie sferica, possono venire dimostrate con metodo affatto simile a quello tenuto nell'altro articolo: *Alcune proprietà della sviluppante di cerchio.* (*)

Ma spesso allo studio diretto della linea sferica si preferisce l'altro indiretto che deriva da qualche trasformazione speciale, non esclusa la proiezione stereografica.

Dimostreremo l'utilità di tale metodo, studiando, nelle loro proprietà essenziali, due linee sferiche notevolissime, quali sono la curva avente per proiezione stereografica una sviluppante di cerchio e la lossodromia.

§ 4. — La linea sferica Λ che ha per proiezione stereografica una sviluppante di cerchio può evidentemente definirsi come una traiettoria ortogonale di un sistema di cerchi minori eguali passanti per un punto fisso (polo Q). Questa curva comincia da un punto determinato Ω (corrispondente all'origine della sviluppante di cerchio) e va verso uno dei poli, avvolgendosi infinite volte assintoticamente attorno ad esso.

Tutta la difficoltà consiste nel potere ricavare, con metodo elementare, la relazione fra gli archi σ, s delle due linee Λ, L, partendo dalla relazione fondamentale (4).

Si divida l'arco AB di Λ in un numero assai grande p di parti piccolissime τ; siano t gli archi piccolissimi di L che corrispodono agli altri τ.

Ricordando che la sviluppante di un cerchio di diametro a è definita dall'equazione (**) $r = \sqrt{as + \frac{a^2}{4}}$, si ha dalla relazione (4)

$$\frac{\tau}{t} = \frac{k^2}{\left(k^2 + \frac{a^2}{4}\right) + as} = \frac{k^2}{a} \cdot \frac{\dfrac{a}{k^2 + \frac{a^2}{4}}}{1 + \dfrac{a}{k^2 + \frac{a^2}{4}} \cdot s},$$

(*) *Periodico di Matematica*, anno 1897.
(**) *Periodico di Matematica*, anno 1897, *loc. cit.*

Posto

$$\frac{a}{k^2 + \frac{a^2}{4}} = m,$$

ed applicato alla frazione $\frac{m}{1 + ms}$ il processo ordinario della divisione algebrica, si ottiene

$$\frac{\tau}{t} = \frac{k^2}{a}(m - m^2 s + m^3 s^2 - m^4 s^3 + \ldots.),$$

essendo la somma in parentesi composta d'infiniti termini. Si ottiene di qui

$$(9) \qquad \Sigma\tau = \frac{k^2}{a}(m\Sigma t - m^2\Sigma st + m^3\Sigma s^2 t - m^4 \Sigma s^3 t + \ldots.) =$$

$$= \frac{k^2}{a}\left(m\Sigma t - \frac{m^2}{2}\Sigma 2st + \frac{m^3}{3}\Sigma 3s^2 t - \frac{m^4}{4}\Sigma 4s^3 t + \ldots.\right),$$

dove ciascuna di queste somme si estende a tanti termini, quante sono le parti in cui fu diviso l'arco σ.

Ora, in generale, si ha

$$(s + t)^n = s^n + ns^{n-1}t + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} s^{n-2}t^2 + \ldots,$$

d'onde

$$\frac{(s + t)^n - s^n}{t} = ns^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} s^{n-2} t + \ldots,$$

la quale ci dà

$$\lim_{t=0}\left[\frac{(s + t)^n - s^n}{t}\right] = ns^{n-1}.$$

Supponendo quindi le quantità τ, e quindi anche le t, piccolissime, tanto da potere trascurare (senza errori sensibili) le potenze superiori alla prima, si può prendere

$$(s + t)^n - s^n = n \,.\, s^{n-1} t.$$

Risulta allora

$$\Sigma ns^{n-1}t = \Sigma[(s + t)^n - s^n] = [(s + t)^n - s^n] + [(s + 2t)^n - (s + t)^n] +$$
$$+ [(s + 3t)^n - (s + 2t)^n] + \ldots. + [(s + ht)^n - (s + (h-1)t)^n] =$$
$$= (s + ht)^n - s^n = s_1^n - s^n,$$

indicando con s, s_1 i valori dell'arco s di L nelle estremità A_1, B_1 dell'arco che corrisponde all'arco AB di A.

Facendo in questa $n = 1, 2, 3, \ldots. p - 1, p$, sostituendo nella formola (9) e passando poi al limite per $p = \infty$, si ricava

$$\Sigma\tau = (-1)^{h+1}\frac{k^2}{a}\sum_{h=1}^{h=\infty}\left(\frac{m^h}{h}s_1^h\right) - (-1)^{h+1}\frac{k^2}{a}\sum_{h=1}^{h=\infty}\left(\frac{m^h}{h}s^h\right).$$

La somma $\Sigma\tau$, comunque sia fatta la divisione di AB, è la lunghezza dell'arco AB di Λ, cioè la differenza $\sigma_1 - \sigma$ fra i due archi ΩB, ΩA; le due somme del secondo membro rappresentano rispettivamente i logaritmi neperiani delle quantità

$$1 + ms_1 \quad , \quad 1 + ms. \text{ (*)}$$

Abbiamo quindi

$$\sigma_1 - \sigma = \frac{k^2}{2} \log \left(\frac{1 + ms_1}{1 + ms}\right).$$

Ora se si suppone che i punti A, A_1 dai quali si contano gli archi di Λ e di L siano rispettivamente le origini di queste curve, si ha $\sigma = 0$, $s = 0$; cambiando allora σ_1 in σ, s_1 in s, e ricordando inoltre il valore di m si trova

$$\text{(10)} \qquad \sigma = \frac{k^2}{a} \log \left[\frac{(4k^2 + a^2) + 4as}{4k^2 + a^2}\right]$$

(intendendosi qui per log il simbolo del logaritmo neperiano).

Avendosi dalla formola (10)

$$\log \left[\frac{(4k^2 + a^2) + 4as}{4k^2 + a^2}\right] = \frac{a\sigma}{k^2};$$

si deduce, passando dai logaritmi ai numeri,

$$\frac{(4k^2 + a^2) + 4as}{4k^2 + a^2} = e^{\frac{a\sigma}{k^2}},$$

essendo e il numero irrazionale, compreso fra 2 e 3, che serve di base al sistema logaritmico di *Napier*. (**)

Si deduce di qui:

$$\text{(11)} \qquad s = \frac{a^2 + 4k^2}{4a} \left(e^{\frac{a\sigma}{k^2}} - 1\right).$$

Siccome poi la formola (3) dà:

$$\rho = k \,.\, \text{ang tang} \left[\frac{\sqrt{as + \frac{a^4}{4}}}{k}\right],$$

sostituendo in questa eguaglianza il valore (11) di s, si ottiene

$$\text{(12)} \qquad \rho = k \,.\, \text{ang tang} \sqrt{\frac{a^2 + 4k^2}{4k^2} \,.\, e^{\frac{a\sigma}{k^2}} - 1}\,.$$

§ 5. — Sono principalmente le formole (10), (11), (12) quelle colle quali si possono studiare le proprietà della curva e risolvere per essa molte questioni, come ora mostreremo con qualche esempio.

(*) V. BALTZER, *Aritmetica generale, tradotta dal Cremona*, § 32, n. 5, pag. 186.
(**) V. BALTZER, *loc. cit.*, § 31, n. 4, pag. 172.

Consideriamo un arco qualunque AB della curva sferica e si supponga che i raggi vettori sferici corrispondenti ai punti A, B siano ρ, ρ_1.

Applicando la formola (12), che potremo anche scrivere

$$\sigma = \frac{2k^2}{a}\left\{\log\left(\frac{2k}{\sqrt{a^2+4k^2}}\right) - \log\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)\right\}$$

si deduce, chiamando Ω l'origine della curva Λ e de' suoi archi σ,

$$\text{arco } \Omega\text{A} = \frac{2k^2}{a}\left\{\log\left(\frac{2k}{\sqrt{a^2+4k^2}}\right) - \log\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)\right\},$$

$$\text{arco } \Omega\text{B} = \frac{2k^2}{a}\left\{\log\left(\frac{2k}{\sqrt{a^2+4k^2}}\right) - \log\cos\left(\frac{\rho_1}{k}\right)\right\};$$

e conseguentemente

$$\text{arco AB} = \text{arco } \Omega\text{B} - \text{arco } \Omega\text{A} = \frac{2k^2}{a}\left\{\log\cos\left(\frac{\rho}{k}\right) - \log\cos\left(\frac{\rho_1}{k}\right)\right\}.$$

Abbiamo dunque

$$\text{arco AB} = \frac{2k^2}{a}\log . \frac{\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)}{\cos\left(\frac{\rho_1}{k}\right)} \tag{13}$$

Il valore di ρ nell'origine degli archi σ si ottiene dalla (12) facendovi $\sigma = 0$; si ha dunque in questo punto:

$$\rho = k . \text{ang tang}\left(\frac{a}{2k}\right).$$

Il valore di ρ nel polo Q è $\frac{\pi k}{2}$; se dunque si applica la (13), si trova che *la lunghezza totale della linea Λ dalla sua origine Ω al polo Q è infinita.*

Osservando che il valore di ρ per un punto posto sull'equatore della sfera è $\frac{\pi k}{4}$, si trova che la lunghezza l della porzione di Λ, compresa fra l'origine Ω e il punto dove essa attraversa l'equatore, è data così

$$l = \frac{2k^2}{a} . \log\left[\sqrt{2} . \cos\left(\text{ang tang}\,\frac{a}{2k}\right)\right]$$

cioè:

$$l = \frac{2k^2}{a} . \log\left(\frac{2\sqrt{2}\,k}{\sqrt{4k^2+a^2}}\right), \text{ ecc. ecc.}$$

In quanto ai problemi relativi alla linea sferica Λ, essi possono essere risolti sia direttamente, col sussidio delle date formole, sia coll'intervento della sviluppante di cerchio L.

Per mostrare, almeno con un esempio, la via da seguire nelle varie questioni, risolveremo, con ambo i metodi, il problema di *dividere per metà un dato arco* AB *della linea sferica* A.

1° metodo. — Sia C il punto di mezzo di AB ed x il suo raggio vettore sferico. Siccome

$$\text{arco AC} = \frac{2k^2}{a} \log \frac{\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)}{\cos\left(\frac{x}{k}\right)},$$

dovendo AC essere la metà di AB, la formola (13) dà

$$\log \frac{\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)}{\cos\left(\frac{\rho_1}{k}\right)} = \log \left[\frac{\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)}{\cos\left(\frac{x}{k}\right)}\right]^2,$$

da cui si deduce

$$\cos\left(\frac{x}{k}\right) = \sqrt{\cos\left(\frac{\rho}{k}\right) . \cos\left(\frac{\rho_1}{k}\right)}.$$

Ora quando sono dati i punti A e B, sono noti ρ e ρ_1; quindi, colla formola trovata, si può avere x, il che equivale alla completa determinazione del punto C.

2° metodo. — Posto

$$\text{arco } \Omega\text{A} = \sigma \quad , \quad \text{arco } \Omega\text{B} = \sigma_1 ,$$

deve essere

$$\text{arco } \Omega\text{C} = \frac{\sigma + \sigma_1}{2}.$$

Chiamando quindi s, s_1, s_2 gli archi corrispondenti di L, si deve avere, in causa dell'equazione (11)

$$(14) \quad \begin{cases} s = \dfrac{a^2 + 4k^2}{4a}\left(e^{\frac{a\sigma}{k^2}} - 1\right) \; ; \quad s_1 = \dfrac{a^2 + 4k^2}{4a}\left(e^{\frac{a\sigma_1}{k^2}} - 1\right) ; \\ \qquad s_2 = \dfrac{a^4 + 4k^2}{4a}\left[e^{\frac{a(\sigma+\sigma_1)}{2k^2}} - 1\right]. \end{cases}$$

Dalle due prime si ricava

$$e^{\frac{a\sigma}{k^2}} = \frac{4as + (a^2 + 4k^2)}{a^2 + 4k^2} \quad , \quad e^{\frac{a\sigma_1}{k^2}} = \frac{4as_1 + (a^2 + 4k^2)}{a^2 + 4k^2},$$

le quali, moltiplicate fra loro, dànno:

$$(15) \qquad e^{\frac{a(\sigma+\sigma_1)}{k^2}} = \frac{[4as + (a^2 + 4k^2)]\,[4as_1 + (a^2 + 4k^2)]}{(a^2 + 4k^2)^2}.$$

Dalla terza (14) si ricava

$$(16) \qquad e^{\frac{a(\sigma+\sigma_1)}{k^2}} = \frac{[4as_2 + (a^2 + 4k^2)]^2}{(a^2 + 4k^2)^2}.$$

Eguagliando i valori (15), (16), si trova un'equazione, alla quale si può dare la forma seguente,

$$(17) \qquad 4ass_1 + (a^2 + 4k^2)(s + s_1) = 4as_2^2 + 2(a^2 + 4k^2)s_2.$$

Chiamando quindi r, r_1, x i raggi vettori della sviluppante di cerchio nei punti $A_1(s)$, $B_1(s_1)$ e $C_1(s_2)$, che corrispondono ai punti A, B, C della linea sferica Λ, e ricordando l'equazione della sviluppante di cerchio

$$r = \sqrt{as + \frac{a^2}{4}},$$

si ricava

$$s = \frac{4r^2 - a^2}{4a}, \quad s_1 = \frac{4r_1^2 - a^2}{4a}, \quad s_2 = \frac{4x^2 - a^2}{4a}.$$

L'equazione (17) diviene allora:

$$(4x^2 - a^2)^2 + 2(a^2 + 4k^2)(4x^2 - a^2) - 16r^2r_1^2 - 16k^2(r^2 + r_1^2) + a^4 + 8a^2k^2 = 0,$$

la quale, risolta rispetto ad x (e tenuto presente che il valore che si cerca deve essere reale e positivo) dà,

$$(18) \qquad x = \sqrt{-k^2 \pm \sqrt{r^2r_1^2 + k^2(r^2 + r_1^2) + k^4}}.$$

Per risolvere quindi il problema, si trovano i punti A_1, B_1 della sviluppante di cerchio che corrispondono ai punti A, B di Λ e si determina il punto C_1 dell'arco A_1B_1 il cui raggio vettore è dato dalla relazione (18). Il punto C di Λ che corrisponde a C_1, risolve il problema.

(Continua)

GEMINIANO PIRONDINI.

*UNA CONVERSAZIONE COI FUSIONISTI [1]

Il Prof. Lazzeri, nelle sue *Note alla discussione della prima quistione trattata dal Congresso,* [2] osserva (pag. 120 ultimo capoverso) che: (*è doloroso a constatarsi, ma è vero*) *gli oppositori* (della fusione, ecc.) *ripetono con insistenza molto monotona e sconfortante le stesse obiezioni che in fondo si riducono a questo: 1° son duemila anni che si fa così e non occorre cambiare; 2° l'unico risultato ottenuto è quello di rendere indipendente dalle proporzioni la divisione di un angolo in 5 parti eguali.*

AVVERTENZA. — Gli articoli contrassegnati con asterisco (*) sono stati inviati dal Comitato dell'Associazione *Mathesis.*

(1) Pubblicando per debito d'imparzialità il presente articolo, ci asteniamo dal fare commenti e solo ci permettiamo di richiamare l'attenzione dei lettori su quello che l'autorevole *Enseignement mathématique* dice a proposito della fusione. (Veggasi pag. 225 del presente fascicolo).

Nota di G. LAZZERI.

(2) Dei professori di matematica, promosso dall'Associazione *Mathesis,* tenuto in Torino dal 9 al 14 settembre 1898 (*Periodico di Matematica,* serie II^a, vol. I, fasc. I, II, III).

Questa accusa è semplicemente priva di fondamento dopo le osservazioni fatte dal Prof. Retali nell'Adunanza ch'ebbe luogo a Milano il 3 aprile '98 e di cui vien riportato il sunto nel n. 6, anno II, del *Bollettino dell'Associazione Mathesis*, e dopo la pubblicazione nel n. 5, anno II, del *Bollettino* stesso delle mie *Osservazioni sulla Nota « Pro Fusione » del Professor De Amicis*, la qual Nota del De Amicis è certo a tutti conosciuta per la larghissima diffusione che ha avuto (Lazzeri, pag. 122, 2° capoverso) per essere stata, oltre che inserita nel n. 4, anno II, del *Bollettino di Mathesis*, pubblicata anche nel *Periodico di Matematica*. Però per accondiscendere ai desideri del Prof. Lazzeri, ritorno sull'argomento.

È vero che circa *due* (non *uno* come dice il Prof. Lazzeri a pag. 121 ultimo capoverso) anni fa io asserivo che le proposizioni che si dimostrano più semplicemente coll'aiuto di considerazioni stereometriche sono ben poche e di poca entità, se si faccia astrazione dal problema della costruzione di $^1/_5$ di angolo retto, e nelle mie citate *Osservazioni, fra altre cose,* ho ripetuta quella considerazione, sostenendola col prendere in esame non più solo i risultati contenuti in fatto di fusione nel *Testo* del De Paolis, ma ben anco quegli altri che il De Amicis riferisce, e che nella mia « Risposta alla questione V » di circa due anni fa (alla quale il Prof. Lazzeri allude) non avevo considerati perchè, almeno quelli importanti, non riguardano la geometria che s'insegna nei Licei e nel primo biennio degli Istituti tecnici (ed ecco il motivo per cui non ho parlato allora d'altre opere all'infuori di quella del De Paolis). Ora aggiungerò qualche altra osservazione.

Anzitutto tengo a dichiarare esplicitamente che con le mie critiche tendo esclusivamente a provare che non è giustificato lo sfrenato entusiasmo che spinge i fusionisti a voler a qualunque costo introdurre nella scuola secondaria un metodo, che per ora non è che allo stato di formazione, e che io son ben lungi dal disconoscere che, dal punto di vista puramente scientifico, le ricerche dei fusionisti abbiano realmente condotto a dimostrazioni aventi un certo interesse [fra le quali mi piacciono più che altre quelle che riguardano gli assi e i piani radicali, benchè peraltro preferisca le definizioni di asse e di piano radicale come luoghi dei punti ognuno di egual potenza rispetto a due cerchi o a due sfere, che l'altra (che conviene sostituire a questa, seguendo il procedimento del Lazzeri) di luoghi dei punti da ognuno dei quali possono condursi tangenti eguali a due cerchi (di un piano) o a due sfere, oltre che per le ragioni già esposte nelle citate *Osservazioni*, anche perchè con questa seconda definizione, nel caso in cui i cerchi o le sfere si tagliano, bisogna escludere i punti rispettivamente del segmento compreso fra le intersezioni dei due cerchi e la parte interna del cerchio in cui le due sfere si segano], non però superiore a quello delle dimostrazioni già esistenti, tanto che penso che se fin qui fossero date le dimostrazioni dei fusionisti, ed oggi altri dessero le dimostrazioni già esistenti, che sono ora in vigore, questi ultimi vorrebbero esser salutati come liberatori della tale o tal'altra teoria delle figure piane dagli artigli della stereometria, appunto come i fusionisti ci tengono ad aver liberate certe teorie, p. es., da quella delle proporzioni mediante considerazioni stereometriche. Però, ammessa anche la parità di valore scientifico, non solo non trovo necessarie le innovazioni cui mirano i fusionisti, ma anzi preferisco (dal momento che vantaggi didattici nella fusione non ne riscontro, come ho notato nella mia citata « Risposta alla questione V » e nelle mie citate *Osservazioni*) il metodo che ha il vanto dell'antichità, e son certo che questa massima è accettata anche dai fusionisti, come risulta dalle dichiarazioni che fa il Prof. De Amicis là dove nella sua citata Nota (pag. 88) parla della definizione di uguaglianza data dal Prof. Veronese.

Nelle *Note alla discussione*, ecc., il Prof. Lazzeri insiste sull'importanza della fusione, specialmente *dal punto di vista della semplificazione che si ottiene in alcune teorie di geometria piana, trattandole con l'aiuto di nozioni stereometriche,* considerando questo come il principale fra gli argomenti che militano a favore della fusione. A sostegno della sua opinione rammenta la dimostrazione che dà il De Paolis nel suo *Trattato* (pag. 303) del teorema (riportato anche negli *Elementi di Geometria,* di G. Lazzeri e A. Bassani, 2ª edizione, pag. 210): *Dati due triangoli, se ciascun angolo di uno è eguale ad un angolo corrispondente dell'altro, il rettangolo di un lato di uno e di un lato non corrispondente dell'altro è equivalente al rettangolo dei lati corrispondenti,* senza ricorrere alla teoria delle proporzioni, fondandosi su considerazioni stereometriche, donde risulta che alcuni teoremi di geometria piana (fra cui quello ora enunciato; altri sono quelli dei paragrafi 260, 265, 266, 267, 268 dei citati *Elementi,* i cui corrispondenti nella teoria dei segmenti proporzionali sono riportati a pag. 305), che ordinariamente si deducono come corollari di teoremi relativi ai segmenti proporzionali, si possono ricavare indipendentemente da questi, i quali ultimi in seguito vengono dati come corollari di quelli. Se non che sottrarre, p. es., il citato teorema del De Paolis (e lo stesso dicasi per gli altri) dalla teoria delle proporzioni per ricavarne poi come corollario l'altro che *dati due triangoli con gli angoli rispettivamente eguali, i lati dell'uno sono proporzionali ai lati corrispondenti del secondo,* significa subordinare questo secondo alla teoria dell'equivalenza, oltre che alla stereometria, mentre proprio non dipende nè dall'una nè dall'altra. In altre parole, si libera uno schiavo da un padrone per dare un libero cittadino in servitù a due padroni. A meno che non s' intenda di dimostrare il primo teorema nel modo indicato dal De Paolis (o analogo), ed il secondo nel modo ordinario, ed allora addio economia di tempo tanto vagheggiata.

Comunque, la maggior parte dei teoremi che i fusionisti dimostrano indipendentemente dalla teoria delle proporzioni sulla quale le attuali dimostrazioni si fondano, si basa (o si può basare) sul teorema: *Se due triangoli si corrispondono in modo che le rette congiungenti i vertici corrispondenti concorrano in un punto, e che due lati dell'uno siano* *paralleli ai corrispondenti lati dell'altro, anche i due lati rimanenti sono paralleli,* del quale si può dare anche una semplicissima dimostrazione planimetrica affatto indipendente dalla teoria delle proporzioni e dell'equivalenza, e con questa dimostrazione porrò termine alla presente conversazione.

Siano AC, BC rispettivamente parallele ad A'C', B'C'. Supponiamo che AB, A'B' non siano parallele; allora conducendo per B', A' le parallele alla AB, o la prima taglia (AA') o la seconda (BB'): sia la prima che incontri (AA') in D'. Prendiamo di (OA) un summultiplo minore di (A'D') (ciò che è possibile per un corollario del postulato d'Archimede), e prendiamo sul raggio OA' una serie di segmenti eguali a questo summultiplo, dei quali il primo abbia l'origine in O; uno di questi avrà l'estremo in A. Per i punti di divisione si conducano le parallele alla AC (e A'C'), e per i punti che queste determinano sul raggio OC' le parallele alla CB (e C'B'), e consideriamo le intersezioni di queste col raggio OB'. Si ottengono allora sui raggi OC', OB' due serie di segmenti eguali, dei quali uno della prima serie ha l'estremo in C e il corrispondente della seconda un estremo in B. Le congiungenti gli estremi dei segmenti di OA' con gli estremi dei corrispondenti di OB' sono parallele fra loro, e precisamente ad AB, perchè A, B sono due estremi corrispondenti. Ora l'estremo di uno dei segmenti di OA' cade certo in (D'A'), ed il suo corrispondente di OB' (per il modo di costruzione) cade in (BB'), perciò la retta determinata da questi due estremi corrispondenti è parallela alla AB e taglia la B'D' (congiungendo due punti situati da bande opposte rispetto a questa retta) pure parallela ad AB, il che è assurdo. Perciò è A'B' parallela ad AB.

Dunque? È proprio vero che nulla prova che non si possano col tempo trovare dimostrazioni planimetriche altrettanto semplici di quelle stereometriche, e che le idee più semplici sono ordinariamente le più tarde a presentarsi.

Sondrio, 4 gennaio 1899.

FRANCESCO PALATINI.

PICCOLE NOTE

1ª. Quadratura della parabola. — Siano A il vertice, F il fuoco, D il punto d'incontro dell'asse con la direttrice e B un punto qualunque della parabola. Dividasi AB negli archi ugnali $AM_1, M_1M_2, \ldots, M_{n-1}M_n, M_nB$; si conducano $M_1P_1, \ldots, M_nP_n$, BC perpendicolari alla direttrice e si traccino i raggi vettori $FM_1, FM_2, \ldots, FM_n$, FB. Essendo ugnali BC e BF per le proprietà della parabola, il rapporto del rettangolo $\overline{BC \cdot CP_n}$ al triangolo FBM_n è il doppio del rapporto delle distanze di M_n da BC e da BF; questo rapporto tende ad 1 col tendere a zero dell'arco BM_n.

cioè col tendere della retta BM_n a divenir tangente in B, perchè questa tangente dimezza l'angolo $\widehat{FBC}$ per una nota proprietà della parabola; e tendono contemporaneamente ad 1 i rapporti del rettangolo $\overline{BC \cdot CP_n}$ e del triangolo FBM_n al trapezio ed al triangolo mistilinei BCP_nM_n, FBM_n. Pongasi quindi

$$\begin{aligned} AM_1P_1D &= (2+\alpha_1) \quad FAM_1 \\ M_{r-1}M_rP_rP_{r-1} &= (2+\alpha_r) \quad FM_{r-1}M_r \ (r=2,\ldots,n), \\ BCP_nM_n &= (2+\alpha_{n+1})\, FBM_n \end{aligned}$$

e per l'osservazione fatta, che si potrebbe ripetere per ciascun trapezio e corrispondente triangolo mistilinei,

$$\lim_{n=\infty} \alpha_r = 0 \qquad (r = 1, \ldots, n+1).$$

Dalle precedenti relazioni, se s'indicano con α ed α' il minimo ed il massimo dei numeri $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$, deducesi che

$$(2+\alpha)\, FAB < ABCD < (2+\alpha')\, FAB$$

e di qui, facendo crescere n indefinitamente, si deduce che

$$ABCD = 2FAB.$$

2ª. Volume del tetraedro. — Siano M ed N i punti d'incontro del piano condotto per D parallelamente ad ABC con le parallele ad AD condotte per B e per C. Sia P il punto d'incontro di AM con BD, o punto di mezzo dello spigolo BD, e sia Q il punto di mezzo dello spigolo AC. Le faccie laterali del prisma triangolare ABCNMD sono rispettivamente doppie di ABD, ACD e BCM: il volume del prisma, essendo il prodotto della sezione retta per lo spigolo laterale, è il prodotto di AD per il triangolo di lati

$$\frac{2ABD}{AD}\ , \quad \frac{2ACD}{AD}\ , \quad \frac{2BCM}{AD}$$

per cui, se Ω è il triangolo di lati ABD, ACD, BCM,

$$ABCNMD = \frac{4}{AD}\,\Omega,$$

per cui si vede che: *il volume d'un tetraedro è $\frac{4}{3}$ del rapporto, che ha ad uno spigolo il triangolo, che ha due lati uguali alle due faccie adiacenti a tale spigolo ed ha il terzo lato uguale al triangolo, che ha per lati il detto spigolo e l'opposto ed il segmento doppio della distanza dei centri di altri due spigoli opposti.*

Calcolando AP e CP, come mediane di ABD e CBD, e poi PQ, come mediana di APC, ed esprimendo le aree dei triangoli mediante i lati, si trova così che, se

$$BC = a \ \ , \ \ CA = b \ \ , \ \ AB = c \ \ , \ \ DA = d_1 \ \ , \ \ DB = d_2 \ \ , \ \ DC = d_3\,,$$

allora

$$ABCD = \frac{T}{12d_1}\,,$$

dove T è l'area del triangolo di lati uguali a

$$\sqrt{4b^2d_1^2 - (b^2 + d_1^2 - d_3^2)^2} \ \ , \ \ \sqrt{4c^2d_1^2 - (c^2 + d_1^2 - d_2^2)^2} \ \ ,$$
$$\sqrt{4a^2d_1^2 - (b^2 + d_2^2 - c^2 - d_3^2)^2}\,.$$

Si trova così la nota espressione del volume per mezzo degli spigoli.

Giova notare che sono equivalenti i triangoli BCM, BCN, i quali hanno una coppia di lati uguali alla stessa coppia di spigoli opposti, AD e BC, mentre i rimanenti lati CM e BN sono doppi delle distanze dei centri dell'altre due coppie di spigoli opposti, BD, AC e CD, AB.

3ª. Sviluppi di sen x e di cos x in serie. — Tendendo ad uno il rapporto dell'arco alla tangente, se l'arco tende a zero, si ha che

$$\operatorname{tg} x = \lim_{n=\infty} \operatorname{tg}\left(x \frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right) = \lim \operatorname{tg}\left(n \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{n}\right).$$

Per la nota formula esprimente la tangente della somma di più archi mediante le tangenti di questi archi, (*) si ha che:

$$\operatorname{tg}\left(n \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{n}\right) = \frac{n\frac{x}{n} - \binom{n}{3}\frac{x^3}{n^3} + \binom{n}{5}\frac{x^5}{n^5} - \binom{n}{7}\frac{x^7}{n^7} + \dots}{1 - \binom{n}{2}\frac{x^2}{n^2} + \binom{n}{4}\frac{x^4}{n^4} - \binom{n}{6}\frac{x^6}{n^6} + \dots}.$$

Se s'indicano con P_n e Q_n il numeratore ed il denominatore della precedente frazione, supponendo x positivo e p intero e sufficientemente grande rispetto ad x, si ha che

$$\sum_{m=0}^{m=2p-1} (-1)^m \binom{n}{2m+1} \frac{x^{2m+1}}{n^{2m+1}} < P_n < \sum_{m=0}^{m=2p} (-1)^m \binom{n}{2m+1} \frac{x^{2m+1}}{n^{2m+1}}$$

per cui

$$x - \frac{x^3}{3!} + \dots - \frac{x^{4p-1}}{(4p-1)!} < \lim_{n=\infty} P_n < x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{4p+1}}{(4p+1)!}$$

Siccome questa sussiste per ogni p sufficientemente grande rispetto ad x, e, p. es., se $p > x$, così si ha che:

$$\lim_{n=\infty} P_n = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Si trova similmente che

$$\lim_{n=\infty} Q_n = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots$$

E perchè, conseguentemente a quanto precede,

$$\operatorname{tg} x = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \dots}$$

segue che:

$$\operatorname{sen} x = \rho(x)\left[x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right]$$

$$\cos x = \rho(x)\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \dots\right].$$

(*) V., p. es., ANDREINI, *Periodico di Matematica*, 1897, pag. 57, formula (3).

preferite: basti il dire che per la Cardioide, invece dell'equazione polare, semplicissima ed usata, riporta quella parametrica che si ottiene considerando la Cardioide come un'epicicloide particolare.

Manca un cenno di molte curve assai importanti, la parabola cubica per esempio, e si dà per equazione di una lemniscata, quella della lemniscata di Bernoulli e per equazione di una strofoide quella della strofoide retta.

A pag. 156 si legge: L'iperbole si dice equilatera quando assume la forma

$$x^2 - y^2 = a^2 \ (!)$$

Nella parte che riguarda il calcolo differenziale si trova a pag. 169 la seguente formula che riporto senza commenti:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h}.$$

Voglio credere che questo sarà un errore di stampa, com'è certamente quello di pag. 76, dove, fra le formule di Geometria elementare, si riportano le seguenti relative ai lati a, b, c di un triangolo

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2bc \text{ ed analoghe.}$$

A pag. 199 poi è detto:

« Se l'equazione della curva è data per mezzo delle equazioni $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, si ha

$$\text{area} = \int\int dx\, dy \ (?) \text{ »}$$

Anche la parte delle applicazioni del calcolo è troppo scarsa. Nella teoria delle curve gobbe si omettono perfino le formule di Serret, che ne sono, può dirsi, il fondamento. Dell'applicazione del calcolo differenziale alla teoria generale della superficie, teoria che specie in questi ultimi anni ha acquistato tanta importanza, non si fa parola.

Prima di chiudere questo mio cenno sul Repertorio di Matematica e Fisica mi piace notare, ad onore della casa editrice, che il volume è impresso nitidamente ed elegantissimo.

Il 2° volume conterrà le formule di Fisica e di Meccanica razionale.

G. C. L.

GIULIO VIVANTI — *Corso di Calcolo Infinitesimale.* — Messina, Libreria editrice Antonio Trimarchi, 1899.

Il chiarissimo A. in una breve prefazione a questo suo libro accenna alle precipue ragioni per le quali lo studio del Calcolo infinitesimale riesce difficile ai giovani studiosi, e dice, giustamente, che fra esse quella di maggior peso deriva dalla natura stessa del metodo infinitesimale, il quale, se non sia ben chiarito, viene scambiato con un metodo di approssimazione. Partendo da questa idea l'A. si studia in ogni circostanza di dileguare dallo spirito dello studioso l'erroneo concetto, e vi riesce magistralmente con la massima chiarezza non scompagnata dal più stretto rigore di ragionamento. Anzi, per maggiormente mettere in vista la differenza tra i metodi, egli, seguendo le tracce indicate dal CLIFFORD nel suo libro *Il senso comune nelle scienze esatte*, mostra che quei metodi d'approssimazione, i quali si adoperano nella vita pratica, sono gli stessi che poi conducono, mediante il metodo infinitesimale, all'esattezza. Queste sono le due più spiccate caratteristiche del pregevolissimo lavoro.

Il libro si apre con taluni preliminari, in cui l'A. si propone di dare un'idea generale del metodo infinitesimale, quasi per stabilire, direi, la definizione del Calcolo infinitesimale; ma, a mio avviso, essi sono inopportuni, perchè gl'indotti non c'imparano niente, e i periti li conoscono. Il materiale poi, che costituisce il *Corso*, è quello ordinario che trovasi in tutti i trattati di Calcolo; ma la sua distribuzione non è la consueta, avendo l'A. abolita la separazione del calcolo differenziale dall'integrale. La fusione dei due calcoli, già tentata, fin da molti anni, negli *Elementi di calcolo infinitesimale* del GAMBARDELLA, e poi praticata con maggior rigore e vantaggio nelle lezioni che l'ARZELÀ detta da parecchi anni nell'Ateneo bolognese, nell'opera del Vivanti è molto ben riuscita, sia per aver messa in chiara luce l'utilità, che da essa deriva all'insegnamento di tale materia, sia per aver resa più intima la reciproca dipendenza fra i due processi di differenziazione e d'integrazione.

Nelle recensioni di nuovi lavori, che appaiono nel mondo scientifico, è invalso l'uso di mettere in vista i difetti che per avventura vi si trovino, quali che essi siano; ma io son d'opinione che, se quelli non sono tali da gridare: guardati dall'appestato, non debbasene punto parlare. Del resto nel lavoro dell'egregio A. si potrà trovare, forse, qualche neo, ma non certo macchie, e *de minimis* non conviene occuparsi. Pur tuttavia farò notare che per mio gusto avrei desiderato il libro più ricco di applicazioni, specie nella parte di geometria differenziale, o almeno provvisto di una scelta raccolta di esercizi con qualche nota esplicativa qua e là.

Spero che questo mio cenno di recensione possa valere a rendere più noto non il nome dell'A., che è già tanto conosciuto, ma il suo libro, il quale per le sue pregevolissime qualità molto si addice agli studenti universitari. Peccato che l'edizione, nitidissima nei tipi, non sia molto scrupolosamente corretta nella composizione.

R. M.

L'enseignement mathématique, revue internationale. — Directeurs: C. A. LAISANT et H. FEHR.

È uscito il primo numero di questa interessante rivista d'indole essenzialmente didattica, che la ditta editrice G. CARRÉ e C. NAUD di Parigi pubblicherà in fascicoli bimestrali di circa 80 pag. ciascuno.

Gli egregi direttori in un primo articolo spiegano quale sia la natura e lo scopo della nuova rivista, che si può riassumere così. Tutti gl'insegnanti matematica nei vari paesi sono persuasi che nei mezzi pedagogici impiegati sono possibili dei miglioramenti, che i programmi richiedono riforme e semplificazioni più o meno radicali. Per procedere ragionevolmente a queste riforme è necessario stabilire rapporti fra i matematici dei varii paesi, in guisa che ognuno possa facilmente conoscere ciò che per l'insegnamento si fa nei paesi vicini.

" Noi, dicono i direttori, abbiamo voluto colla pubblicazione della nostra rivista,
" abbattere gli ostacoli che si oppongono a queste comunicazioni reciproche e creare
" una specie di corrispondenza mutua, continua fra gli uomini che hanno consacrato
" la loro vita a questa nobile missione: l'insegnamento matematico della gioventù ".

Per conseguenza la rivista avrà carattere internazionale e conterrà: 1° articoli generali, 2° studi pedagogici, 3° una cronaca e delle corrispondenze, 4° una parte bibliografica.

Un tale programma è molto pratico ed interessante e ci affrettiamo a mandare i più cordiali auguri al nuovo confratello, che, non ne dubitiamo, recherà importanti servizi all'insegnamento della matematica.

Il fascicolo contiene poi i seguenti articoli:

1°. Galdeano. *Le matematiche in Spagna.* — In questo articolo l'illustre professore dell'Università di Saragozza espone con molta profondità di dottrina ed ampiezza di vedute una rapida sintesi degli studi matematici del suo paese.

2°. Laisant. *Le quistioni di terminologia.* — Di questo argomento si è occupato anche il congresso tenuto a Torino nel settembre scorso, e speriamo di poter presto pubblicare la relazione del prof. De Amicis, esso è quindi per noi di attualità. L'egregio autore si domanda come dei giovani che studiano per la prima volta la matematica, possano raccapezzarsi con un vocabolario complicato, talvolta assurdo e contrario alla logica; e dopo aver portato una quantità di esempi, alcuni dei quali relativi alla sola lingua francese, altri applicabili a tutte le lingue, fa la seguente proposta:

Si nomini una commissione internazionale incaricata di formare una specie di vocabolario matematico internazionale, che si riunisca alla fine del Congresso di Parigi del 1900, e in due o tre sedute stabilisca il piano d'insieme dei lavori. Negli anni successivi si potrà preparare il materiale necessario alla compilazione di un interessante rapporto parziale o totale da discutersi nel successivo Congresso.

La proposta mi sembra ottima, e crederei conveniente che l'Associazione *Mathesis* la facesse sua per quel che si riferisce alla nostra lingua.

3°. Binet. *La pedagogia scientifica.* — L'autore, che dirige il laboratorio di psicologia fisiologica della Sorbona, espone ciò che egli crede dovrebbe farsi per rendere la pedagogia una scienza basata sopra l'osservazione e l'esperienza.

4°. H. Laurent. *Considerazioni sull' insegnamento delle matematiche nelle classi speciali in Francia.* — Le scuole speciali preparano, come è noto, alla scuola politecnica; dopo varie considerazioni relative all'organizzazione di queste scuole, l'A. fa osservazioni giustissime, e applicabili anche al nostro paese, sui danni provenienti dall'eccessivo aumento del proletariato intellettuale causato dalla soverchia produzione di laureati.

5°. Fehr. *Sull' insegnamento degli elementi di trigonometria.*

6°. Fontené. *Sull' insegnamento della teoria dei vettori.*

Segue la cronaca e la bibliografia. In questa sono analizzati coscienziosamente i seguenti libri: *Lazzeri e Bassani.* Elementi di geometria (Ripert). — *Appell.* Eléments d'analyse mathématique (Greenhill). — *Oltramare.* Calcul de généralisation (Laisant) ecc.

Ci sia lecito riportare le parole colle quali si chiude la recensione del primo fra i libri citati.

„ Riassumendo, il libro dei Sigg. Lazzeri e Bassani, ben pensato, scritto con „ metodo e rigore, ci sembra dover richiamare l'attenzione la più seria di tutte „ le persone che s'interessano all'insegnamento. Il principio della fusione delle „ due geometrie, considerato ieri ancora come un'utopia, oggi divenuto un'idea il „ cui studio s'impone, è destinato forse a trasformarsi, in un prossimo avvenire „ in metodo classico per l'insegnamento della geometria elementare, attendendo „ la sua adozione in tutte le branche della geometria. Se questo progresso si „ realizzerà, il libro dei professori dell'Accademia Navale Italiana, già convalidato „ da 12 anni d'insegnamento vi avrà potentemente contribuito „.

Lieti di un giudizio così lusinghiero gli autori del libro inviano i loro ringraziamenti al sig. Ripert per mezzo del *Periodico*. G. L.

*DA GIORNALI E RIVISTE

Giornale di Matematiche. Vol. XXXVI, 1898 (Napoli, Benedetto Pellerano).

Fasc. II (marzo e aprile). *R. Viterbi.* Le equazioni differenziali lineari a coefficenti algebrici integrabili algebricamente ecc. (continuazione e fine). — *E. Ciani.* Alcune osservazioni sopra la configurazione di Kummer. [L'A. considera in primo luogo quelle delle ∞^3 configurazioni di Kummer che vengono individuate da 6 complessi lineari a due a due in involuzione (dati nel modo più generale possibile), le quali hanno più di due punti singolari in linea retta; in secondo luogo, posto di dire che per 6 punti di una conica passa un sistema σ quando delle 15 rette da esse individuate tre concorrono in un punto (diverso da quei 6), stabilisce quanti e quali sistemi σ si possono far passare per 6 punti opportunamente scelti sulla conica. (*)] — *C. Pietrococola.* Sulla risoluzione per numeri interi dell'equazione $x^4 + 4hx^2y^2 + (2h-1)^2y^4 = z^2$ ove $4h-1$ e $2h-1$ sono numeri primi. [Si tratta, come avverte l'A., di un problema suggerito dalla ricerca della soluzione di una questione proposta dal sig. P. Tannery nell'*Intermédiaire des mathématiciens* (833, anno 1896), nella quale chiedesi se l'equazione $x^4 + 4x^2 + 1 = y^2$ ammette una soluzione in numeri razionali]. — *M. Pannelli.* Sopra alcuni significati geometrici degli invarianti del connesso ternario di primo grado. [I significati a cui si riferisce il titolo sono dedotti dalla considerazione delle coniche isologhe corrispondenti ai punti ed alle rette di un piano in cui il connesso venga rappresentato]. — *A. Bassi.* Studio sulle funzioni di genere qualunque e in particolare sulle funzioni di genere zero e di genere uno. [In questo lavoro l'A. si propone di riunire e ordinare i principali risultati ottenuti, e di metterne in luce di nuovi, relativamente alle funzioni *olomorfe* (funzioni uniformi che si mantengono finite e continue in tutto il piano), limitandosi a quelle dotate di genere (chiamate di prima classe dal Vivanti), e prendendo fra queste in particolare considerazione quelle di genere zero, che hanno molte proprietà in comune coi polinomi, i quali ne sono casi particolari, e quelle di genere uno, alle quali appartengono le funzioni trigonometriche, e che hanno in comune con le prime le proprietà più essenziali].

Fasc. III (maggio e giugno). — *A. Bassi.* Sullo studio sulle funzioni di genere qualunque ecc. (continuazione). — *T. Cifarelli.* Sull'analisi intrinseca delle congruenze. [L'A. partendo dalle formole fondamentali per l'analisi intrinseca delle superficie e delle congruenze, date dal Prof. Cesàro nella " Geometria intrinseca, „ si propone di esporre alcune delle più importanti proprietà dei sistemi di ∞^2 di rette]. — *F. De Astis.* Sulla derivabilità di un sistema di forme binarie da un'unica forma con applicazione al sistema di due cubiche binarie. [Dopo aver esposto un metodo che serve a dedurre un numero qualunque di forme binarie di grado n da una stessa forma di grado più elevato mediante le derivate parziali di questa rispetto alle sue variabili binarie, l'A. applica questo metodo per trattare il problema, già risolto dal Clebsch nella " Theorie der binären algebraischen Formen „, di trovare una sostituzione lineare tale, che date due cubiche binarie qualsiansi, si trasformino in altre due che siano derivate parziali prime rispetto alle variabili binarie

(*) Questo problema è stato svolto anche da F. Palatini nella Nota: *Sopra i triangoli formati coi lati dell'esagrammo di Pascal, i quali possono ridursi ad un punto.* Palmi, 1891.

d'una stessa biquadratica]. — *L. Sinigallia.* Sulle superficie di area minima applicabili su se stesse. [L'A. si propone di risolvere il problema indicato dal titolo nel caso delle superficie riferite univocamente al piano, e trova 5 classi di superficie minime dotate di un numero finito di applicabilità su se stesse, e viene a stabilire che in quattro di queste classi vi sono sempre applicabilità che si riducono a movimenti della superfice su sè stessa, ciò che avviene per tutte le applicabilità di una di queste 4 classi]. — *T. Cifarelli.* Sopra una classe di curve intrinsecamente analoghe alla catenaria di eguale resistenza. [Si tratta delle curve definite dall'equazione intrinseca $\rho = \frac{a}{2k}(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}})$]. — *G. Urzì.* Un caso particolare del problema della rotazione d'un corpo solido di rivoluzione sospeso per un punto del suo asse di simmetria. [Si tratta un caso particolare di un problema segnalato dal Darboux nella memoria " Sur le mouvement d'un corps solide de révolution fixé par un point de son axe "].

Fasc. IV (luglio e agosto). — *G. Urzì.* Un caso particolare ecc. (continuazione e fine). — *A. Vaccaro.* Equilibrio delle superficie piane elastiche isotrope. [Viene studiato un caso particolare d'un problema trattato dal Prof. Somigliana, caso per il quale, come il Somigliana stesso osserva, occorre una trattazione a parte]. — *F. Giudice.* Sull'analisi indeterminata di primo grado. [Dopo aver dimostrato le formole contenenti $\frac{n(n-1)}{2}$ interi arbitrari, che il Betti ricavò per le soluzioni intere d'un'equazione lineare ad n incognite, della quale sia nota una soluzione particolare, generalizzando le formole date per le soluzioni intere dell'equazione a tre incognite nell'Algebra del Bertrand, e dopo aver date di queste ultime una dimostrazione più semplice di quella che trovasi in detta Algebra, l'A. espone un metodo comodo per esprimere le soluzioni intere dell'equazione a n incognite mediante $n-1$ interi arbitrari]. — *J. H. Graf.* Quelques notions sur la série hypergéométrique de Gauss. [Il presente articolo, che sarà continuato in numeri successivi del Giornale, è uno studio sulla serie indicata, inspirato ai metodi di Schläfli].

Fasc. V (settembre e ottobre). — *J. H. Graf.* Quelques notions ecc. (continuazione e fine). — *L. Restellini.* Generalizzazione d'una formola d'integrabilità. [Data una funzione F di $x, y, z, r, \ldots$ (dove x è variabile indipendente e $y, z, r, \ldots$ variabili dipendenti, ciascuna funzione di x e di quelle che la precedono e, se si vuole, z anche delle derivate di y rispetto ad x, e r delle derivate di y e di z ecc. e delle derivate di y rispetto ad x e di quelle di z rispetto ad x ed y ecc., l'A. si propone di trovare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la F sia integrabile, indipendentemente dalla conoscenza dei legami che esistono fra le funzioni e la variabile indipendente. Il problema è stato già trattato da Eulero e dal march. di Condorcet nel caso in cui $y, z, \ldots$ siano funzioni solamente della x]. — *E. Piccioli.* Sulle curve in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni. [Vengono studiate *a)* le eliche cilindriche, cioè quelle curve cilindriche la cui tangente fa in ogni punto un angolo costante con una direzione fissa, *b)* quelle curve la cui ultima direzione principale (cioè perpendicolare all'iperpiano osculatore) fa un angolo costante con una direzione fissa, *c)* le geodetiche del cono e le curve che hanno gli iperpiani osculatori equidistanti da un punto]. — *A. Perna.* Sulle deformazioni infinitesime delle curve. [Poste le formole fondamentali per lo studio delle deformazioni infinitesime sia delle curve piane che delle storte, l'A. tratta alcuni problemi relativi a tali deformazioni. Quanto alle curve storte prende in particolare esame quelle di una sfera nell'ipotesi che le deformazioni abbiano luogo sulla sfera stessa]. *E. Veneroni.* Sopra una rappresentazione univoca dello spazio rigato nello spazio punteggiato a quattro dimensioni. [Posti i punti di due piani α, β dello spazio rigato R in corrispondenza proiettiva rispettivamente coi piani di due reti di piani (a), (b) dello spazio punteggiato a 4 dimensioni s, ad ogni retta generica di R corrisponde in s il punto d'incontro dei due piani che corrispondono in (a), (b) alle intersezioni di quella retta con α, β e viceversa. Di questa rappresentazione è caso particolare l'ordinaria rappresentazione che si ottiene colla proiezione stereografica]. — *Fr. Meyer.* Sullo stato presente della teoria degli invarianti (continuazione). — *A. Ramorino.* Gli elementi immaginari nella geometria (continuazione e fine). F. PALATINI.

Nouvelles Annales de math. T. XVII, 1898 (Paris, Gauthier Villars).

Fasc. XII (decembre). Necrologia del Prof. *Carlo Brisse.* Secondo concorso delle N. A. (prorogato al 15 marzo 1899). — *E. M. Lemeray.* (Metodo di approssimazione che esige solo operazioni *dirette*). (*) — *Karagiannidès.* Sopra una estensione d'una formola del Sig. Léauté. — *Ch. Bioche.* Sulle coniche che sono le proiezioni d'una cubica gobba (le proiezioni d'una cubica gobba, fatte sopra un piano π dai punti della curva, sono coniche circoscritte a un triangolo, tali che le rette di Pascal corrispondenti passano per un punto fisso). (**) — *Dumont.* Osservazione sull'applicazione della logica alla teoria delle regioni. — Corrispondenza. — Certificato di studi superiori delle facoltà di scienze (Sessione di luglio 1898; Caen, Tolosa, Montpellier, Lyon, Rennes, Dijon, Poitiers). — Bibliografia. — Soluzioni di quistioni proposte, 929 (nota della redaz.), 1716. (*Barisien, Servais*). (***)

T. XVIII, 1899, Fasc. I (gennaio). *H. Duport.* Dimostrazione di alcuni teoremi di cinematica. — *G. Candido.* Formole per lo studio di una figura notevole. — *C. Bioche.* Sulle quadriche circoscritte a un tetraedro. (In generale il tetraedro formato da 4 punti d'una quadrica non sviluppabile e quello dei 4 piani tangenti non sono omologici, ma possono sempre trovarsi sulla quadrica sistemi di 4 punti che presentano queste particolarità). — Certificati di studi sup. delle facoltà di scienze. (Sessione di luglio 1898, Besançon. — Sessione di novembre, Besançon Montpellier Paris). — Bibliografia. — Pubblicazioni recenti. Quistioni 434, 439, 448 (già proposte nel 1858). V. R.

(*) L'A. chiama *operazioni dirette* quelle che entrano nella costruzione del primo membro della equazione proposta. (V. R.)

(**) Il punto fisso è il *fuoco* del piano π nel sistema focale definito dalla cubica gobba; il teorema del Sig. BIOCHE si ottiene subito come caso particolare del teorema di CREMONA (*Nouvelles ann.* Deux. Serie T. I, p. 287) prendendo per esagono inscritto nella cubica quello avente per vertici i tre punti in cui essa è segata da π e i 3 punti a loro consecutivi. (Cfr. anche SCHRÖTER, *Oberflächen 2ter Ordnung und Raumcurven 3ter Ordnung*, pag. 247. (V. R.)

(***) Il punto N non è un punto cuspidale, come è detto (pag. 579) nella elegante soluzione del Prof. SERVAIS, autore della quistione 1716; esso è invece un punto tacnodale. La quartica è la trasformata di un cerchio avente per centro il punto medio di OV nella inversione indicata nella quistione 428 del *Periodico di Matematica* (T. XIII, p. 200). (V. R.)

ERRATA-CORRIGE DEL FASCICOLO PRECEDENTE.

A pagina 152, verso 10:

invece di $\left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{m-1}{m}}+\left(\frac{v}{b}\right)^{\frac{m-1}{m}}+\left(\frac{w}{c}\right)^{\frac{m-1}{m}}=0.$ leggasi $\left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{m}{m-1}}+\left(\frac{v}{b}\right)^{\frac{m}{m-1}}+\left(\frac{w}{c}\right)^{\frac{m}{m-1}}=0.$

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 9 Marzo 1899.

PROIEZIONE STEREOGRAFICA

e sua applicazione allo studio di alcune linee sferiche

(Continuazione e fine).

§ 6. — Considerando sulla sfera la serie di meridiani passanti per lo stesso diametro PQ, una trajettoria di questi punti sotto angolo costante (trajettoria isagonale) è una linea Λ detta *lossodromia*. Ritenuta la terra sferica, tale linea rappresenterebbe evidentemente la rotta di un vascello che naviga sotto il medesimo rombo di vento.

La proiezione stereografica della lossodromia Λ è una linea L che sega i raggi vettori uscenti da P sotto angolo costante. Una tale linea si chiama *spirale logaritmica* e P è il suo polo.

Mentre la spirale logaritmica L si avvolge infinite volte attorno al polo P e dall'altra parte va all'infinito, la lossodromia sferica Λ invece si avvolge in infinite spire attorno ai due poli P, Q (punti assintotici).

Una lossodromia sferica è una linea piana soltanto quando si riduce a un parallelo. Infatti una linea piana Λ tracciata sopra una sfera è un cerchio, e la sua proiezione stereografica L è un altro cerchio. Ora una traiettoria isagonale di un fascio di raggi è un cerchio solamente quando questo ha il centro nel centro del fascio, nel qual caso tale linea è ortogonale ai raggi del fascio. Il cerchio L in tali condizioni è la proiezione stereografica di un parallelo della sfera.

A partire dall'origine Ω degli archi σ della lossodromia si prenda un arco qualunque $\Omega A = \sigma$ e si divida in n parti eguali nei punti A_1, A_2, A_3, ... A_{h-1}, A_h, ... A_{n-1}. Si congiungano questi punti col polo P mediante archi di cerchio massimo, e da A_{h-1} si conduca l'arco di parallelo $A_{h-1} M_h$ compreso fra i meridiani PA_{h-1}, PA_h. Tirata la corda $A_{h-1} A_h = c_h$, il triangolo rettangolo $A_{h-1} A_h M_h$ può considerarsi come rettilineo; se dunque θ è l'inclinazione costante della lossodromia sui meridiani, si ha:

$$A_h M_h = c_h \, . \cos \theta.$$

Perciò

$$PA = P\Omega + \left(\sum_{h=1}^{h=n} c_h \right) . \cos \theta.$$

Supponendo che n cresca indefinitamente, si ha

$$\rho = \rho_0 + \sigma \cdot \cos\theta, \tag{19}$$

essendo ρ, ρ_0 i raggi vettori sferici PA, PQ.

Preso poi un altro punto B corrispondente al raggio vettore sferico $PB = \rho_1$, si deduce dalla (19)

$$\rho = \rho_0 + \Omega A \cdot \cos\theta$$
$$\rho_1 = \rho_0 + \Omega B \cdot \cos\theta,$$

d'onde

$$\text{arco } AB = \frac{\rho_1 - \rho}{\cos\theta}. \tag{20}$$

Se si vuole la lunghezza di tutta la lossodromia dal polo P all'altro Q, bisogna fare nella (20) $\rho = 0$, $\rho_1 = \frac{\pi k}{2}$, e si ha

$$\text{Lunghezza lossodromia} = \frac{\pi k}{2\cos\theta}.$$

Benchè dunque la linea si avvolga infinite volte attorno ai due poli, essa ha tuttavia una lunghezza finita. Per $\theta = 60^0$, la lunghezza della lossodromia eguaglia quella di un meridiano. Per $\theta > 60^0$ la lossodromia è maggiore del meridiano; per $\theta < 60^0$ è invece minore.

Posto arco $AM = \pm l$, secondo che esso è contato in una direzione o nell'altra, e $PM = x$, si ha

$$\pm l = \frac{x - \rho}{\cos\theta},$$

d'onde

$$x = \rho \pm l \cdot \cos\theta.$$

Questa formola serve per portare sulla lossodromia, in una data direzione, un arco di data lunghezza l.

Considerando separatamente il caso del segno + e quello del segno —, si ha

$$x = \rho + l \cdot \cos\theta, \qquad y = \rho - l\cos\theta,$$

d'onde sommando

$$x + y = 2\rho.$$

Perciò « *La somma dei raggi vettori che vanno a punti situati da bande opposte di un punto* A *ed equidistanti da esso, è costante ed eguale al doppio del raggio vettore che va ad* A ».

Se C è un punto qualunque intermedio fra A e B, si ha

$$AC = \frac{x - \rho}{\cos\theta}, \qquad CB = \frac{\rho_1 - x}{\cos\theta}.$$

Se dunque: $\frac{AC}{CB} = m$, risulta

$$x = \frac{\rho + m\rho_1}{1 + m}.$$

In particolare « *Il raggio vettore che divide per metà un arco qualunque di una lossodromia è la media aritmetica dei raggi vettori estremi* ». (Conformemente al teorema precedente).

Se s'incomincia a contare l'arco di una lossodromia Λ dal polo P, si ha $\rho_0 = 0$. Chiamando quindi σ e σ_1 le lunghezze dei due archi di Λ compresi fra un determinato punto A e i due paralleli della sfera corrispondenti ai raggi vettori sferici ρ, ρ_1, si ha in causa della (19)

$$\sigma = \frac{\rho}{\cos\theta}, \qquad \sigma_1 = \frac{\rho_1}{\cos\theta},$$

d'onde

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} = \frac{\rho_1}{\rho}.$$

Perciò « *Considerando gli archi di tutte le lossodromie passanti per un determinato punto* A *della sfera, che sono compresi fra due paralleli fissi, il rapporto delle parti in cui rimangono divisi quegli archi dal punto* A *è costante ed eguale al rapporto delle parti in cui rimane diviso l'arco corrispondente del meridiano* ».

In particolare « *Considerando tutte le intere lossodromie che passano per un determinato punto* A *della sfera, il rapporto delle parti in cui esse rimangono divise da quel punto è costante ed eguale al rapporto delle parti in cui rimane diviso il semi-meridiano di quel punto* A ».

In questo caso si ha

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} = \frac{\pi k - 2\rho}{2\rho}.$$

Questi risultati sono molto interessanti e servono a semplificare la soluzione di molte questioni e la dimostrazione di molte proprietà inerenti alla lossodromia.

Se ad esempio si vuol dividere l'intera lossodromia, o un suo arco, in parti eguali o proporzionali a numeri dati, basta fare l'analoga operazione sopra l'arco corrispondente di meridiano.

Altrettanto si dica se si vuole dividere la lossodromia, o un arco di essa, in sezione aurea ecc. ecc.

Il rapporto anarmonico di quattro punti di una lossodromia è eguale al rapporto anarmonico dei quattro punti corrispondenti di un meridiano. E quindi i primi quattro punti formano un gruppo armonico, quando lo formano gli altri ecc. ecc.

Posto che sia

$$AC : CB = \rho : \rho_1,$$

risulta

$$\frac{x-\rho}{\cos\theta}:\frac{\rho_1-x}{\cos\theta}=\rho:\rho_1,$$

d'onde

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_1}\right).$$

Dunque « *Il raggio vettore che divide un arco di lossodromia in parti proporzionali ai raggi vettori estremi, è media armonica fra questi raggi* ».

Se nel triangolo PAB, avente per base un arco di lossodromia e per lati i due raggi vettori estremi si suppone verificata la relazione

$$\rho^2_1=\rho^2+(\text{arco AB})^2,$$

si deduce

$$\rho_1=\frac{1+\cos^2\theta}{\text{sen}^2\,\theta}\cdot\rho. \tag{21}$$

Perciò « *Se dopo avere condotto un raggio vettore* ρ (o ρ_1) *di una lossodromia, se ne conduce un secondo* ρ_1 (o ρ) *tale che sia soddisfatta la condizione* (21), *nel triangolo che risulta è verificato il teorema di Pitagora, quando si consideri come ipotenusa il raggio vettore maggiore* ».

Supposto che l'ipotenusa sia rappresentata dall'arco AB di lossodromia, si deve avere

$$\rho^2_1\,\text{sen}^2\,\theta-2\rho\rho_1+\rho^2\,\text{sen}^2\,\theta=0,$$

d'onde

$$\rho_1=\frac{\rho\,(1\pm\cos\theta\sqrt{1+\text{sen}^2\,\theta})}{\text{sen}^2\,\theta}.$$

Si vede quindi che « *Condotto un raggio vettore arbitrario* ρ, *se ne possono condurre altri due* ρ_1, ρ_2 *in modo, che per i due triangoli che risultano sia soddisfatto il teorema di Pitagora, quando l'arco di lossodromia che ne congiunge le estremità, rappresenti l'ipotenusa* ».

Siccome $\rho_1\rho_2=\rho^2$, si conclude che « *Costrutti i due triangoli precedenti, si trova che il raggio vettore dato è media proporzionale fra i due raggi vettori condotti* ».

§ 7. — Le proprietà precedentemente dimostrate per la lossodromia valgono, per la massima parte, anche per la spirale logaritmica; e una tale reciproca dipendenza fra una linea sferica Λ e la sua proiezione stereografica L ha luogo qualunque sia Λ.

Per mostrare il profitto che si può trarre da tale reciproca dipendenza, andremo a dimostrare due proprietà notevoli della spirale logaritmica, estendendole poi alla lossodromia sferica.

Siano (fig. 2) PAB, PBC, ... triangoli simili consecutivi. I raggi vettori PA, PB, PC, ... sono inclinati sulle basi dei triangoli di un angolo costante, che si chiamerà θ; i lati A_0A, B_0B, C_0C, ... sono inclinati sui lati PA, PB, PC, ... di un altro angolo costante, che si chiamerà i.

Chiamando H l'intersezione delle rette AA_0, PB, si considerino i due triangoli APH, BA_0H i quali, avendo due angoli eguali, hanno pure eguali i terzi angoli APH, BA_0H; dal che consegue che, essendo costanti gli angoli APB, BPC, ... sono pure costanti gli altri AA_0B, BB_0C. ...

I triangoli AA_0B, BB_0C, ... avendo quindi due angoli rispettivamente costanti, sono simili e si avrà

$$\frac{PA}{PB}=\frac{AB}{BC}, \qquad \frac{A_0A}{B_0B}=\frac{AB}{BC},$$

d'onde

$$\frac{PA}{PB}=\frac{A_0A}{B_0B}.$$

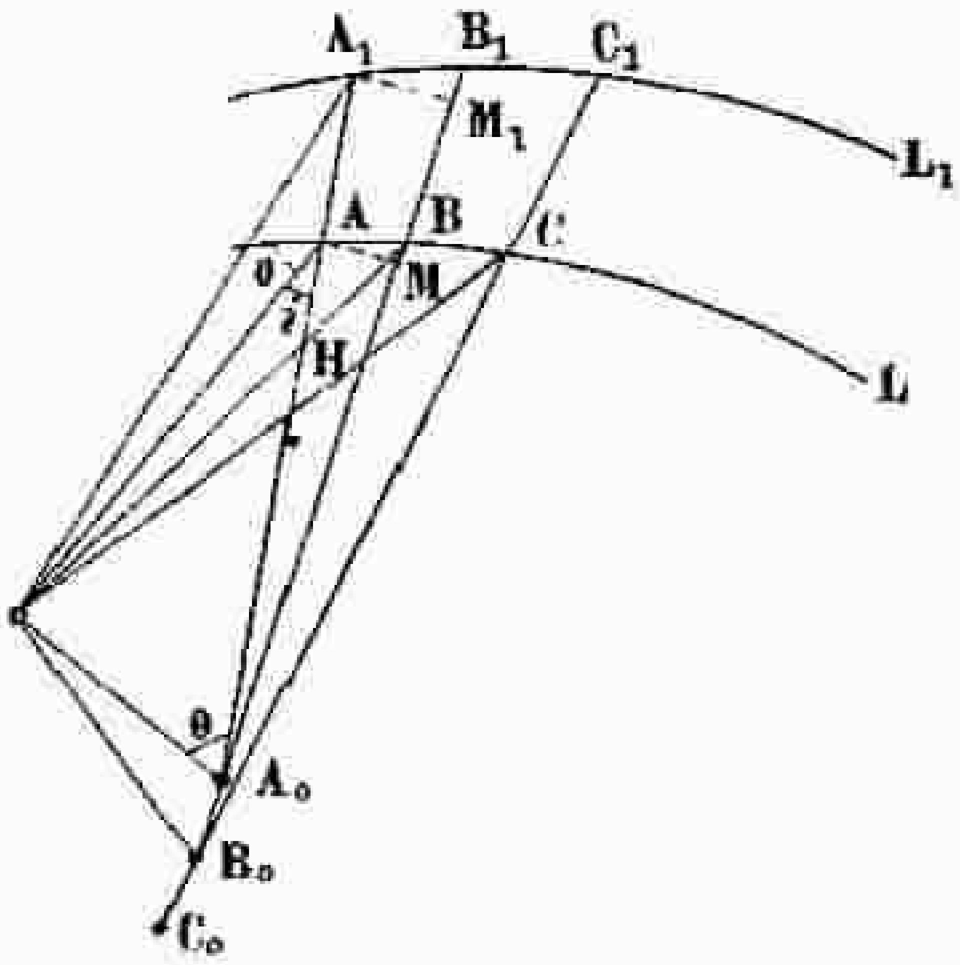

Fig. 2.

I due triangoli PAA_0, PBB_0 hanno dunque un angolo rispettivamente eguale compreso fra lati proporzionali; sono quindi simili.

Possiamo dire perciò che i raggi vettori PA_0, PB_0, ... sono inclinati di un angolo costante sulle rette A_0A, B_0B, ... Essendo poi

$$\text{angolo } APA_0 = \text{angolo } BPB_0,$$

sopprimendo la parte comune angolo BPA_0, rimane

$$\text{angolo } APB = \text{angolo } A_0PB_0.$$

Avendosi inoltre

$$\frac{PA}{PA_0}=\frac{PB}{PB_0},$$

i triangoli PAB, PA_0B_0 risultano simili e perciò

$$\text{angolo } PB_0A_0 = \text{angolo } PBA = \theta.$$

Passando al limite col diminuire indefinitamente le basi AB, BC, ... dei primitivi triangoli, si giunge al teorema *« Se per i vari punti di una spirale logaritmica si conducono delle rette inclinate sui raggi vettori di un angolo costante, quelle rette inviluppano un'altra spirale logaritmica eguale alla data ed avente il medesimo polo di essa ».*

In particolare, supponendo $\theta + i = 90^0$, si ha *« La sviluppata di una spirale logaritmica è un'altra spirale logaritmica eguale alla data ed avente il medesimo polo di essa ».*

Per i vari punti A, B, C, ... di una spirale logaritmica L si conducano delle rette inclinate di un angolo costante i sui raggi vettori e sopra di queste si prendano i segmenti AA_1, BB_1, ... proporzionali all'arco di L contato dal polo P.

Sia L_1 il luogo degli estremi A_1, B_1, C_1, ... (fig. 2). Dal triangolo APA_0 si ricava

$$\frac{A_0A}{PA}=\frac{\text{sen}\, APA_0}{\text{sen}\, PA_0A}=\frac{\text{sen}\,(\theta+i)}{\text{sen}\,\theta};$$

e poichè per la spirale logaritmica si ha

$$PA=\cos\theta\,.\,s, \tag{22}$$

[analogamente a ciò che si ha per la lossodromia. V. la formola (19)] risulta

$$A_0A=\text{sen}\,(\theta+i)\,.\cot\theta\,.\,s. \tag{23}$$

Se il rapporto di proporzionalità dei segmenti AA_1, BB_1, CC_1, ... all'arco corrispondente di L è m, si ha

$$AA_1=ms \tag{24}$$

e allora dal triangolo PAA_1 si deduce

$$\begin{aligned}PA_1&=\sqrt{\overline{PA}^2+\overline{AA_1}^2-2PA\,.\,AA_1\,.\cos(\widehat{PAA_1})}=\\&=s\sqrt{\cos^2\theta+m^2+2m\cos\theta\cos i}.\end{aligned} \tag{25}$$

Troviamo ora una relazione fra l'arco s di L e l'arco s_1 di L_1. Col centro A_0 e coi raggi A_0A, A_0A_1 si descrivano i due archi circolari AM, A_1M_1 compresi fra i raggi vettori A_0A_1, A_0B_1. Si ha

$$AA_1=ms,\qquad BB_1=m\,(s+AB),$$

d'onde

$$BB_1-AA_1=m\,.\,AB$$

$$(BB_1-BM_1)-BM=m\,.\,AB\,;\qquad B_1M_1-BM=m\,.\,AB\,;$$

$$B_1M_1=m\,.\,AB+BM=m\,.\,AB+AB\,.\cos(\theta+i)=[m+\cos(\theta+i)]\,.\,AB. \tag{26}$$

D'altronde

$$A_1M_1:AM=A_0A_1:A_0A,$$

da cui, applicando le relazioni (21), (22), si deduce

$$A_1M_1=\frac{m+\text{sen}\,(\theta+i)\cot\theta}{\text{sen}\,(\theta+i)\cot\theta}\,.\,AM$$

e poichè: $AM=AB\,.\,\text{sen}\,(\theta+i)$, risulta

$$A_1M_1=\frac{m+\text{sen}\,(\theta+i)\cot\theta}{\cot\theta}\,.\,AB. \tag{27}$$

Ricordando le relazioni (26), (27), si deduce dal triangolo rettangolo $A_1M_1B_1$

$$A_1B_1 = \frac{\sqrt{[m + \operatorname{sen}(\theta + i)\cot\theta]^2 + [m + \cos(\theta + i)]^2 \cot^2\theta}}{\cot\theta} \, . \, AB =$$

$$= \frac{\sqrt{\cos^2\theta + m^2 + 2m\cos\theta \, . \, \cos i}}{\cos\theta} \, . \, AB.$$

Da questa relazione si passa facilmente all'altra

$$s_1 = \frac{\sqrt{\cos^2\theta + m^2 + 2m\cos\theta\cos i}}{\cos\theta} \, . \, s$$

e sostituendo nella (23)

$$PA_1 = \cos\theta \, . \, s_1$$

la quale dimostra che L_1 è una spirale logaritmica di polo P segante i raggi vettori sotto l'angolo θ. Dunque « *Se per i vari punti di una spirale logaritmica* L *si conducono delle rette inclinate sulla curva di un angolo costante e sopra queste rette si prendono dei segmenti proporzionali all'arco di* L *contato dal polo, il luogo degli estremi è un'altra spirale logaritmica* L_1 *eguale alla data ed avente il medesimo polo di essa* ».

Supponendo che le rette che si conducono per i punti di L siano le tangenti e che il fattore di proporzionalità sia 1, si ha « *La sviluppante di una spirale logaritmica cominciante dal polo di questa, è un'altra spirale logaritmica eguale alla data ed avente il medesimo polo di essa* ».

§ 8. — Proponiamoci ora di estendere alla lossodromia sferica i teoremi testè dimostrati per la spirale logaritmica.

La prima delle proprietà precedenti dà luogo senz'altro al teorema: « *Se per uno dei poli* Q *di una lossodromia* Λ *si conduce una serie di circoli inclinati sopra la curva di un angolo costante qualunque, quei circoli inviluppano un'altra lossodromia* Λ_1 *eguale alla data ed avente i medesimi poli di essa* ».

Ma si può anche dare a questo teorema altra forma, calcolando il diametro sferico di questi cerchi, in funzione dell'arco σ di Λ.

Per questo, si noti anzitutto che se per il punto A_1 del piano π (fig. 1) si conduce una retta r perpendicolare a PA_1, l'immagine sferica di questa retta è un cerchio avente per diametro sferico l'arco QA.

Ora se si pone $PA_1 = h$, si ha

$$QA = \frac{k^2}{QA_1} = \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + h^2}}.$$

Se dunque si chiama 2α l'angolo al centro O della sfera che sottende l'arco QA, si ha

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{QA}}{\mathrm{OQ}} = \frac{k}{\sqrt{k^2 - h^2}},$$

d'onde

$$\alpha = \operatorname{ang}.\operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{k^2 - h^2}}\right).$$

Il diametro sferico D del cerchio immagine della retta r è dunque

$$\mathrm{D} = \operatorname{arco}\mathrm{QA} = k\,.\operatorname{ang}\operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + h^2}}\right). \tag{28}$$

Ora se dal polo P (fig. 2) si conduce la perpendicolare PK sulla retta AA_0, si ha

$$h = \mathrm{AP}\operatorname{sen} i = s\,.\cos\theta\operatorname{sen} i$$

e l'equazione (26) diviene

$$\mathrm{D} = k\,.\operatorname{ang}\operatorname{sen}\left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + s^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2 i}}\right). \tag{29}$$

Ma siccome abbiamo

$$\rho = \sigma\,.\cos\theta, \qquad r = s\,.\cos\theta,$$

la condizione fondamentale (2) dà

$$s\cos\theta = k\,.\operatorname{tang}\left(\frac{\sigma\cos\theta}{k}\right).$$

Abbiamo dunque

$$\mathrm{D} = k\,.\operatorname{ang}\operatorname{sen}\left[\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 i\,.\operatorname{tang}^2\left(\frac{\sigma\cos\theta}{k}\right)}}\right] = \tag{30}$$

$$= k\,.\operatorname{ang}\cot\left[\operatorname{sen} i\,.\operatorname{tang}\left(\frac{\sigma\cos\theta}{k}\right)\right].$$

Perciò « *Se per il polo* Q *di una lossodromia* Λ, *segante i meridiani sotto l'angolo* θ, *e per i vari punti di questa linea si fa passare una serie di cerchi col diametro sferico dato dalla* (30), *essendo* σ *l'arco di* Λ *contato dal polo* P:

1° *questi cerchi segano* Λ *sotto l'angolo costante* $\theta + i$.

2° *essi inviluppano una seconda lossodromia eguale alla data ed avente i medesimi poli di essa* ».

Per $i = 90°$, la (30) dà

$$\mathrm{D} = \frac{1}{2}\pi k - \sigma\,.\cos\theta.$$

Perciò « *Se per il polo* Q *di una lossodromia e per i vari punti di essa si fa passare una serie di cerchi coi diametri sferici eguali alle distanze fra questi punti e l'altro polo* P, *essi inviluppano un'altra lossodromia eguale alla data ed avente i medesimi poli di essa* ».

Andiamo ora alla seconda proprietà dimostrata nel paragrafo precedente.

Sia L la spirale logaritmica data ed L_1 quella che si ottiene da essa conducendo dai vari punti delle rette inclinate sui raggi vettori dell'angolo i e staccando su di esse dei segmenti proporzionali all'arco ($A_1T_1 = ms$).

Siano Λ, Λ_1 le lossodromie proiezioni sferiche delle L, L_1; si tratta di trovare la lunghezza dell'arco circolare AT (corrispondente al segmento rettilineo A_1T_1) in funzione dell'arco σ di Λ.

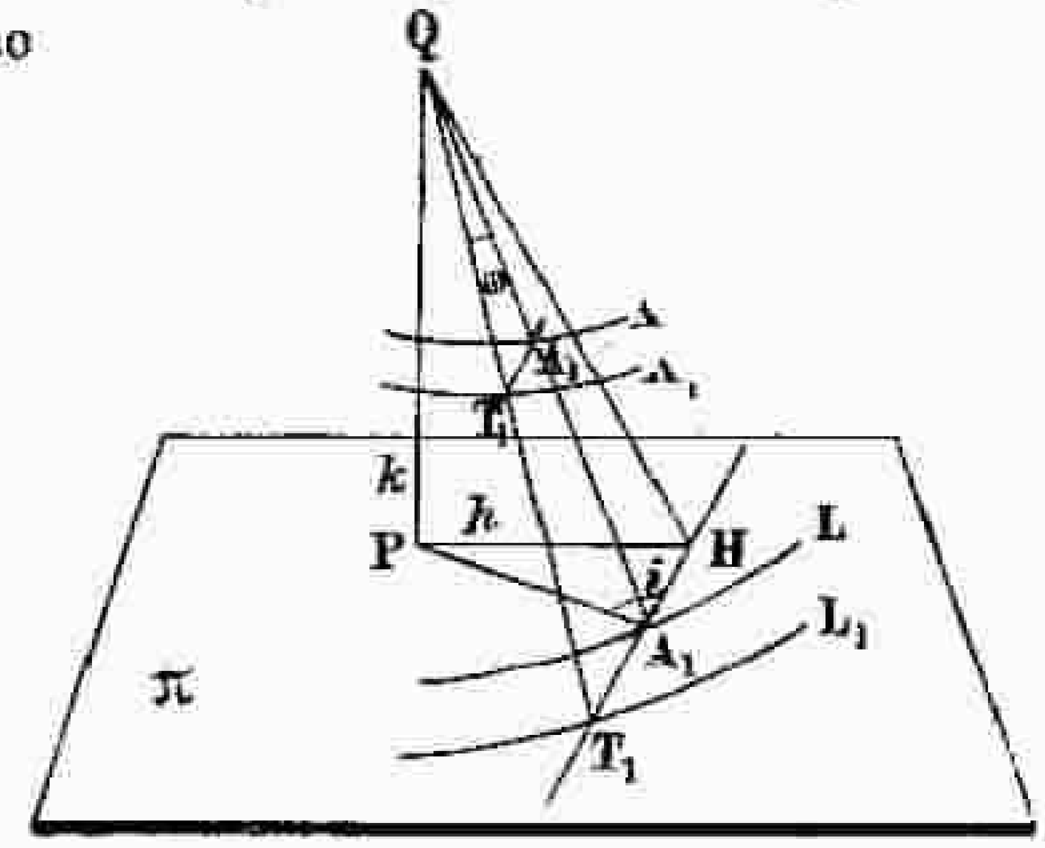

Fig. 3.

Posto (fig. 3)

angolo $A_1QT_1 = \omega$, arco $AT = \delta$,

si ha $\omega = \dfrac{\delta}{k}$, e perciò

$$\overline{A_1T_1}^2 = \overline{A_1Q}^2 + \overline{T_1Q}^2 + \\ + 2A_1Q \,.\, T_1Q \cos\left(\frac{\delta}{k}\right).$$

Ma se da P si conduce PH perpendicolare alla direzione A_1T_1 e si pone $PH = h$, si ha:

$$\overline{A_1Q}^2 = \overline{QH}^2 + \overline{A_1H}^2 = k^2 + h^2 + \overline{A_1H}^2$$
$$\overline{T_1Q}^2 = \overline{QH}^2 + \overline{T_1H}^2 = k^2 + h^2 + \overline{T_1H}^2.$$

Sostituendo nella precedente, si ottiene:

$$\overline{A_1T_1}^2 = 2k^2 + 2h^2 + \overline{A_1H}^2 + \overline{T_1H} - \\ 2\sqrt{(k^2 + h^2 + \overline{A_1H}^2)\,(k^2 + h^2 + \overline{T_1H}^2)} \,.\, \cos\left(\frac{\delta}{k}\right).$$

Osservando si ha:

$$h = PH = PA_1 \operatorname{sen} i = s \,.\, \cos\theta \operatorname{sen} i$$
$$A_1H = PA_1 \cos i = s \,.\, \cos\theta \cos i$$
$$A_1T_1 = ms;\; HT_1 = (\cos\theta \cos i + m)\, s,$$

si ricava dall'ultima relazione:

$$\cos\left(\frac{\delta}{k}\right) = \frac{k^2 + (\cos\theta + m\cos i)\cos\theta \,.\, s^2}{\sqrt{(k^2 + s^2\cos^2\theta)\left\{k^2 + (m^2 + 2m\cos\theta\cos i + \cos^2\theta)\, s^2\right\}}}.$$

Ricordando poi che in questo stesso paragrafo si è trovato:

$$s = \frac{k}{\cos\theta}\,\mathrm{tang}\left(\frac{\sigma\cos\theta}{k}\right),$$

si ottiene, eliminando s:

$$\cos\left(\frac{\delta}{k}\right) = \frac{\cos\theta + m\cos i\,.\,\mathrm{sen}^2.\left(\frac{\sigma\cos\theta}{k}\right)}{\sqrt{\cos^2\theta + m\,(m + 2\cos\theta\,.\,\cos i)\,.\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\sigma\cos\theta}{k}\right)}}$$

d'onde infine:

$$(31)\qquad \delta = k\,.\,\mathrm{ang}\cos\left[\frac{\cos\theta + m\,(\cos i\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\sigma\cos\theta}{k}\right)}{\sqrt{\cos^2\theta + m\,(m + 2\cos\theta\cos i)\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\sigma\cos\theta}{k}\right)}}\right].$$

Si ha così il

TEOREMA. — *Se per il polo* Q *di una lossodromia sferica* Λ *(segante i meridiani sotto l'angolo* θ*) e per i vari punti di essa si conduce una serie di archi inclinati sulla curva dell'angolo* $\theta + i$*, e sopra questi cerchi si prendono, a partire da* Λ*, degli archi* δ *dati dalla* (31) *(essendo* σ *contato a partire dall'altro polo* P*) il luogo degli estremi è un'altra lossodromia* Λ_1 *identica alla prima ed avente i medesimi poli di essa.*

Osservazione. — Si ottengono i casi particolari in cui i cerchi che si conducono sono tangenti o normali alla lossodromia Λ, facendo nella formola (31) rispettivamente $i = -\theta$, $i = \frac{\pi}{2} - \theta$.

§ **9.** — Qualora alle proprietà precedenti si volesse aggiungere quelle relative alle aree, si sarebbe costretti, il più delle volte, a ricorrere al calcolo infinitesimale. Per mostrare però, con un esempio, come qualche volta si possa risolvere la questione non uscendo dal campo elementare, andremo a determinare l'area della porzione di superficie sferica compresa fra un arco qualunque AA_n di lossodromia e i raggi vettori estremi $PA = \rho$, $PA_n = \rho_n$ (fig. 4).

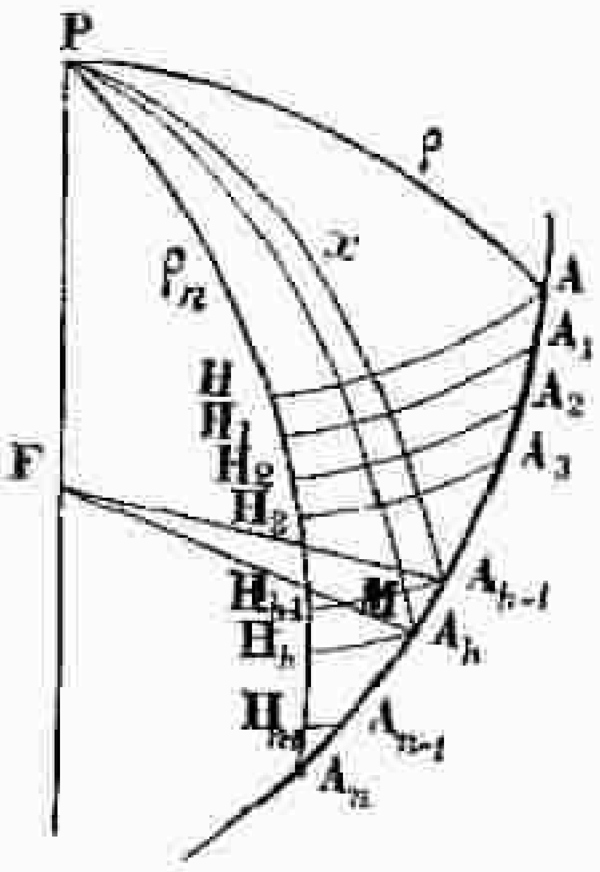

Fig. 4.

Dopo aver portato l'arco PA sopra PA_n in PH, si divida l'intervallo HA_n in n parti eguali; e dai punti di divisione $H_1, H_2, H_3, \ldots H_{h-1}, H_h, \ldots H_{n-1}$, si conducano gli archi di paralleli fino ad incontrare l'arco AA_n nei punti $A_1, A_2, A_3, \ldots A_{h-1}, A_h, \ldots A_{n-1}$.

Considerando l'arco $A_{h-1}A_h$, si ponga per brevità

$$PA_{h-1} = x,\ A_{h-1}A_h = \varepsilon_h,\ M_{h-1}A_h = H_{h-1}H_h = \frac{\rho_n - \rho}{n} = \tau.$$

Si conduca poi il piano del parallelo $A_{h-1}M_{h-1}$ e questo tagli l'asse PQ della sfera nel punto F. Avremo dal triangolo $A_{h-1}A_h M_{h-1}$ considerato come rettilineo

$$M_{h-1}A_h = A_{h-1}A_h \,.\, \cos\theta\,, \qquad A_{h-1}M_{h-1} = M_{h-1}A_h \,.\, \mathrm{tang}\,\theta,$$

cioè

$$\tau = \varepsilon_h \,.\, \cos\theta\,, \qquad A_{h-1}M_{h-1} = \tau \,.\, \mathrm{tang}\,\theta.$$

D'altronde, indicando con O il centro della sfera, si ha

$$\text{angolo } POA_{h-1} = \frac{\text{arco } PA_{h-1}}{\text{raggio}} = \frac{2x}{k}$$

e quindi

$$FA_{h-1} = \frac{k}{2}\,\mathrm{sen}\,(POA_{h-1}) = \frac{k}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2x}{k}\right); \quad PF = \frac{2}{k}\left[1 - \cos\left(\frac{2x}{k}\right)\right]$$

$$\text{angolo } (A_{h-1}FM_{h-1}) = \frac{\text{arco } A_{h-1}M_{h-1}}{FA_{h-1}} = \frac{2\,\mathrm{tang}\,\theta}{k} \cdot \frac{\tau}{\mathrm{sen}\left(\frac{2x}{k}\right)}\,.$$

Chiamando a l'arco di cerchio massimo che misura l'angolo diedro formato dai piani degli archi PA_{h-1}, PA_h, si ha

$$a : A_{h-1}M_{h-1} = \frac{k}{2} : \frac{k}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2x}{k}\right),$$

d'onde

$$a = \frac{\tau\,\mathrm{tang}\,\theta}{\mathrm{sen}\left(\frac{2x}{k}\right)}\,.$$

Avremo dunque

$$\text{area } PA_{h-1}M_{h-1} = FP \times a = \frac{k\,\mathrm{tang}\,\theta}{2} \cdot \frac{1 - \cos\left(\frac{2x}{k}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{2x}{k}\right)}\,\tau = \frac{k\,\mathrm{tang}\,\theta}{2} \,.\, \mathrm{tang}\left(\frac{x}{k}\right)\tau.$$

Considerando poi il triangolo rettangolo $A_{h-1}M_{h-1}A_h$ come rettilineo, si ha

$$\text{area } A_{h-1}M_{h-1}A_h = \frac{1}{2}\,A_{h-1}M_{h-1} \times M_{h-1}A_h = \frac{1}{2}\,\mathrm{tang}\,\theta \,.\, \tau^2.$$

Perciò

$$\text{area } PA_{h-1}A_h = \frac{k\,\mathrm{tang}\,\theta}{2}\,\mathrm{tang}\left(\frac{x}{k}\right).\,\tau + \frac{1}{2}\,\mathrm{tang}\,\theta \,.\, \tau^2.$$

Ponendo dunque

$$PA_{h-1}A_h = s_h\,,$$

si ha

$$\frac{s_h}{\tau} = \frac{k\,\mathrm{tang}\,\theta}{2} \,.\, \mathrm{tang}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{tang}\,\theta \,.\, \tau.$$

Ora se si fa crescere indefinitamente n, τ tende al limite zero; perciò si ha

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{s_h}{\tau}\right)=\frac{h\,\mathrm{tang}\,\theta}{2}\,.\,\mathrm{tang}\left(\frac{x}{k}\right). \tag{32}$$

Risulta poi da calcoli facili

$$\lim_{\tau=0}\frac{\log\cos\left(\frac{x+\tau}{k}\right)-\log\cos\left(\frac{x}{k}\right)}{\frac{\tau}{k}}=\lim_{\tau=0}\frac{\log\frac{\cos\left(\frac{x+\tau}{k}\right)}{\cos\left(\frac{x}{k}\right)}}{\frac{\tau}{k}}=$$

$$=\lim_{\tau=0}\frac{\log\left\{\cos\frac{\tau}{k}\left[1-\mathrm{tang}\left(\frac{x}{k}\right).\ \mathrm{tang}\left(\frac{\tau}{k}\right)\right]\right\}}{\frac{\tau}{k}}=$$

$$=\lim_{\tau=0}\left[\frac{\log\cos\left(\frac{\tau}{k}\right)}{\frac{\tau}{k}}\right]+\lim_{\tau=0}\left[\frac{\log\left\{1-\mathrm{tang}\left(\frac{x}{k}\right)-\mathrm{tang}\left(\frac{\tau}{k}\right)\right\}}{\frac{\tau}{k}}\right].$$

Ora si ha (*)

$$\log\cos\left(\frac{\tau}{k}\right)=\left(\cos\frac{\tau}{k}-1\right)-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\tau}{k}-1\right)^2+\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\tau}{k}-1\right)^3-\ldots$$

e perciò

$$\frac{\log\cos\left(\frac{\tau}{k}\right)}{\frac{\tau}{k}}=\frac{\left[\cos\left(\frac{\tau}{k}\right)-1\right]}{\frac{\tau}{k}}\left\{1-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\tau}{k}-1\right)+\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\tau}{k}-1\right)^2-\ldots\right\}.$$

Ma siccome (**)

$$\cos\left(\frac{\tau}{k}\right)-1=-\frac{\left(\frac{\tau}{k}\right)^2}{\underline{|2}}+\frac{\left(\frac{\tau}{k}\right)^4}{\underline{|4}}-\frac{\left(\frac{\tau}{k}\right)^6}{\underline{|6}}+\ldots,$$

si avrà

$$\frac{\log\cos\left(\frac{\tau}{k}\right)}{\frac{\tau}{k}}=\left[-\frac{\left(\frac{\tau}{k}\right)}{\underline{|2}}+\frac{\left(\frac{\tau}{k}\right)^3}{\underline{|4}}-\frac{\left(\frac{\tau}{k}\right)^5}{\underline{|6}}+\ldots\right]\times$$

$$\left[1-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\tau}{k}-1\right)+\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\tau}{k}-1\right)^2-\ldots\right]$$

(*) BALTZER, *Aritmetica generale*, tradotta dal *Cremona*, § 32, n. 6, pag. 188.
(**) BALTZER, *loc. cit*, § 31, n. 7, pag. 175.

da cui si vede facilmente che

$$\lim_{\tau=0} \frac{\log\cos\left(\frac{\tau}{k}\right)}{\frac{\tau}{k}} = 0 .$$

Abbiamo poi (*)

$$\log\left[1 - \operatorname{tang}\left(\frac{x}{k}\right) . \operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{k}\right)\right] = -\operatorname{tang}\left(\frac{x}{k}\right) . \operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{k}\right) -$$

$$- \frac{1}{2}\operatorname{tang}^2\left(\frac{x}{k}\right) . \operatorname{tang}^2\left(\frac{\tau}{k}\right) - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\left(\frac{x}{k}\right) . \operatorname{tang}^3\left(\frac{\tau}{k}\right) -$$

$$- \frac{1}{4}\operatorname{tang}^4\left(\frac{x}{k}\right) . \operatorname{tang}^4\left(\frac{\tau}{k}\right) - \ldots ,$$

da cui

$$\frac{\log\left[1 - \operatorname{tang}\left(\frac{x}{k}\right) . \operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{k}\right)\right]}{\frac{\tau}{k}} = -\operatorname{tang}\left(\frac{x}{k}\right) . \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{K}\right)}{\frac{\tau}{k}} -$$

$$- \operatorname{tang}^2\left(\frac{x}{k}\right) \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{k}\right)}{\frac{\tau}{k}} \left\{\frac{1}{2}\operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{k}\right) + \frac{1}{3}\operatorname{tang}\left(\frac{x}{k}\right) \operatorname{tang}^2\left(\frac{\tau}{k}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\operatorname{tang}^2\left(\frac{x}{k}\right) \operatorname{tang}^3\left(\frac{\tau}{k}\right) + \ldots\right\} .$$

Passando al limite per $\tau = 0$ ricordando che

$$\lim_{\tau=0} \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{k}\right)}{\frac{\tau}{k}} = 1 ,$$

risulta

$$\lim_{\tau=0} \frac{\log\left[1 - \operatorname{tang}\left(\frac{x}{k}\right) . \operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{k}\right)\right]}{\frac{\tau}{k}} =$$

$$= \lim_{\tau=0} \frac{\log\cos\left(\frac{x+\tau}{k}\right) - \log\cos\left(\frac{x}{k}\right)}{\frac{\tau}{k}} = -\operatorname{tang}\left(\frac{x}{k}\right) .$$

(*) BALTZER, *loc. cit.*, § 32, n. 6, pag. 188.

Sostituendo nella formola (30), si trova

$$\lim_{\tau=0}\left(\frac{s_h}{\tau}\right)=-\frac{k\,\text{tang}\,\theta}{2}\lim_{\tau=0}\frac{\log\cos\left(\frac{x+\tau}{k}\right)-\log\cos\left(\frac{x}{k}\right)}{\frac{\tau}{k}},$$

da cui segue immediatamente

$$s_h=-\frac{k^2\,\text{tang}\,\theta}{2}\left[\log\cos\left(\frac{x+\tau}{k}\right)-\log\cos\left(\frac{x}{k}\right)\right],$$

$$\sum_{h=1}^{h=n}s_h=-\frac{k^2\,\text{tang}\,\theta}{2}\sum_{h=1}^{h=n}\left[\log\cos\left(\frac{x+\tau}{k}\right)-\log\cos\left(\frac{x}{k}\right)\right].$$

Ora, calcolando la somma del secondo membro, si trova

$$\sum_{h=1}^{h=n}\left[\log\cos\left(\frac{x+\tau}{k}\right)-\log\cos\left(\frac{x}{k}\right)\right]=\left[\log\cos\left(\frac{\rho+\tau}{k}\right)-\log\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)\right]+$$

$$+\left[\log\cos\left(\frac{\rho+2\tau}{k}\right)-\log\cos\left(\frac{\rho+\tau}{k}\right)\right]+\left[\log\cos\left(\frac{\rho+3\tau}{k}\right)-\log\cos\left(\frac{\rho+2\tau}{k}\right)\right]+\ldots$$

$$\ldots+\left[\log\cos\left(\frac{\rho+n\tau}{k}\right)-\log\cos\left(\frac{\rho+(n-1)\tau}{k}\right)\right]=\log\cos\left(\frac{\rho+n\tau}{k}\right)-$$

$$-\log\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)=\log\cos\left(\frac{\rho_n}{k}\right)-\log\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)=\log\frac{\cos\left(\frac{\rho_n}{k}\right)}{\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)}.$$

Possiamo quindi enunciare il

TEOREMA. — *L'area della porzione di sfera compresa fra un dato arco* AB *di lossodromia e i raggi vettori estremi* $QA=\rho$, $QB=\rho_1$ *è dato dalla formola*

$$S=\frac{k^2\,\text{tang}\,\theta}{2}\log.\frac{\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)}{\cos\left(\frac{\rho_1}{k}\right)}. \tag{33}$$

Come applicazione della formola (31) determiniamo l'area di un triangolo racchiuso da tre archi AB, BC, CA di lossodromie aventi gli stessi poli. Le inclinazioni di queste linee sui meridiani siano rispettivamente γ, α, β e sia inoltre

$$PA=\rho,\quad PB=\rho_1,\quad PC=\rho_2.$$

Supponendo ad esempio $\rho<\rho_1<\rho_2$ e che ρ_2 sia compreso fra gli altri due, si ha applicando la (31)

$$\text{area PAB}=\frac{k^2\,\text{tang}\,\gamma}{2}\log\frac{\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)}{\cos\left(\frac{\rho_1}{k}\right)};\quad \text{area PBC}=\frac{k^2\,\text{tang}\,\alpha}{2}\log\frac{\cos\left(\frac{\rho_1}{k}\right)}{\cos\left(\frac{\rho_2}{k}\right)}$$

$$\text{area PAC}=\frac{k^2\,\text{tang}\,\beta}{2}\log\frac{\cos\left(\frac{\rho}{k}\right)}{\cos\left(\frac{\rho_2}{k}\right)}.$$

E quindi, notando che: $ABC = PAC - (PAB + PBC)$, si deduce

$$\text{area } ABC = \frac{k^2}{2} \log \left\{ \left(\cos\frac{\rho}{k}\right)^{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma} \cdot \left(\cos\frac{\rho_1}{k}\right)^{\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha} \cdot \left(\cos\frac{\rho_2}{k}\right)^{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} \right\}.$$

In modo simile si possono considerare gli altri casi nei quali la disposizione dei punti A, B, C è diversa da quella considerata; si può inoltre applicare la data formola alla determinazione dell'area di poligoni lossodromici.

Parma, luglio 1898.

GEMINIANO PIRONDINI.

INTORNO AD UNA PROPRIETÀ SINGOLARE DI ALCUNI NUMERI

ed al criterio di divisibilità ad essi relativo

1. Il numero 37, moltiplicato per un multiplo qualunque di 3 non superiore a 27, dà un prodotto composto sempre di tre cifre eguali tra di loro, la cui somma eguaglia il moltiplicatore.

In ciò che segue mi propongo di risolvere la seguente questione generale: *Determinare, in un sistema di numerazione a base qualunque* B, *le coppie di numeri* N *e* p *tali che il prodotto di* N *per* p *e per tutti i multipli di* p *non superiori a* (B − 1) p, *resultino formati di* p *cifre eguali, la cui somma eguagli il multiplo di* p *pel quale è stata moltiplicata la* N.

Risoluto questo problema, verrò a determinare la forma dei prodotti di N pei multipli di p superiori a $(B-1)\,p$; ed infine stabilirò la condizione di divisibilità pei numeri N e p.

2. È chiaro che la cifra che per p volte comparisce in ognuno dei prodotti di N per i fattori

$$p,\ 2p,\ 3p,\ \ldots\ (B-1)\,p,$$

deve essere differente per i diversi resultati; ed è altresì chiaro che questa cifra ha un valore tanto più grande, quanto più grande è il multiplo di p pel quale la N è stata moltiplicata. E poichè i prodotti in questione sono in numero di $B-1$, le p cifre di ciascuno dei resultati

$$p\,N,\qquad 2p\,N,\qquad 3p\,N,\ \ldots\ldots\ (B-1)\,p\,N,$$

dovranno essere tutte eguali rispettivamente a

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots (B-1).$$

Di qui si deduce che *i numeri* N *e* p *formano una coppia di divisori coniugati di un numero composto di* p *cifre tutte eguali all'unità*, e perciò dovremo avere

$$(1) \qquad p\,N = B^{p-1} + B^{p-2} + B^{p-3} + \ldots\ldots + B^2 + B + 1,$$

e quindi

$$(2) \qquad N = \frac{B^p - 1}{pb},$$

ove, per semplicità, si è posto $b = B - 1$.

Ricordando ora che quando β è il più piccolo esponente pel quale l'espressione $\frac{B^\beta - 1}{pb}$ resulta un numero intero, si dice che β *è l'esponente al quale appartiene* B *relativamente al modulo* pb; e che se $\frac{B^p - 1}{pb}$ è pure un numero intero, l'esponente p è un multiplo di β, possiamo enunciare la regola seguente:

La condizione affinchè i numeri N *e* p *soddisfino al problema, è che* p *sia un multiplo dell'esponente rispetto al quale appartiene* B, *mod.* pb.

È facile poi dimostrare che questa condizione, oltre essere necessaria, è anche sufficiente.

3. Veniamo a stabilire ora altre *condizioni necessarie*, le quali possono servire a facilitare la ricerca delle coppie di numeri in questione; ricerca che non sempre sarebbe agevole, se volessimo servirci, senz'altro, della regola precedentemente enunciata.

1°. *Il numero* p *è primo con* B. Ciò resulta immediatamente dalla (2).

2°. *Il numero* p *non può essere primo con* b. Infatti, detto π il più piccolo fattore primo di p, si ha che $B^{\pi-1} - 1$ (pel teorema di Fermat) e $B^p - 1$ (per la (2)), sono esattamente divisibili per π. Se dunque chiamiamo α, l'esponente al quale appartiene B, mod. π, dovrà essere la α un divisore di $\pi - 1$ e di p; ma poichè questi due numeri sono primi tra di loro, dovrà essere $\alpha = 1$, e conseguentemente $B - 1$, ossia b, è esattamente divisibile per π; ciò mostra appunto che b e p non possono essere primi tra di loro.

Corollario 1°. — *Se* p *è primo, esso è un divisore di* b.

Corollario 2°. — *Qualunque numero primo* p, *superiore a* b, *non può far parte di una coppia di numeri* N, p *che soddisfino al problema.*

4. Diamo anche una *condizione sufficiente*, che può servire a determinare numerose coppie di numeri N, p.

Ogni divisore p *di* b *è un numero che soddisfa al problema.*

Infatti, se p divide b, il resto della divisione di B per p è l'unità, e quindi il numero

$$B^{p-1} + B^{p-2} + \ldots\ldots + B^2 + B + 1$$

è esattamente divisibile per p. Il numero precedente è dunque della forma Np, e per conseguenza N e p, per la (1), formano una coppia di numeri che soddisfa al problema.

Corollario. 1°. — *In qualunque sistema di numerazione a base* B, *i numeri* $p = 1$ *e* $p = b$ *fanno parte di una coppia di numeri che soddisfano al problema. Per* $p = 1$, *si ha pure* $N = 1$.

Corollario. 2°. — *In qualunque sistema di numerazione, di cui la base* B *è un numero dispari, i numeri* 2 *e* $\frac{b}{2}$ *soddisfano al problema.*

5. È ora facile dimostrare che quando $p = \frac{b}{m}$, le differenti cifre di N sono rispettivamente

$$(3) \qquad m, \quad 2m, \quad 3m \ldots\ldots (p-3)\,m, (p-2)\,m, \quad \{(p-1)\,m+1\}$$

Infatti, eseguendo la moltiplicazione di questo numero per p, col tener conto che $pm = b = B - 1$, si ottiene:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & (m) & (2m) & (3m) & \ldots\ldots \{(p-3)\,m\} & \{(p-2)\,m\} & \{(p-1)m+1\} \\
 & & & & & & p \\
\hline
 & (B-1) & (2B-2) & (3B-3)\ldots\ldots & \{(p-3)B-(p-3)\} & \{(p-2)B-(p-2)\} & \{(p-1)B+1\} \\
+1 & +2 & +3 & +4\ \ldots\ldots & +(p-2) & +(p-1) & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1\ \ldots\ldots & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

ove i numeri della prima linea rappresentano i resultati, senza riduzione, che si ottengono dalla moltiplicazione delle singole cifre di N per p; quelli della seconda linea, rappresentano le unità di un dato ordine che si riportano dal resultato precedente, e quelli della terza il prodotto finale. Dalla forma di questo resultato si conclude che p e

$$(4) \qquad N = m\,(2m)\,(3m) \ldots\ldots \{(p-2)\,m\}\{(p-1)\,m+1\}$$

formano una coppia di numeri che soddisfano il problema.

Pel caso particolare di $p = b$ si ha

$$N = 1\,2\,3\,4 \ldots\ldots (b-3)\,(b-2)\,b;$$

e pel caso di $B = 2m+1$ e $p = 2$ si ha $N = m+1$.

6. Da quanto abbiamo detto fin qui è facile verificare che le coppie di numeri (p, N) che soddisfano al problema nei sistemi di numerazione da 1 a 12, limitandoci (a considerare le sole coppie di numeri nelle quali p è inferiore a b, e tralasciando le coppie (1.1)) sono le seguenti:

B	Coppie di numeri (p N)
3	(2; 2)
4	(3; 13)
5	(2; 3); (4; 124)
6	(5; 1235)
7	(2; 4); (3; 25); (6; 12346)
8	(7; 123457)
9	(2; 5); (4; 247); (8; 1234568)
10	(3; 37); (9; 12345679)
11	(2; 6); (4;303); (5;2469); (6;20202); (8;1570157); (10;12345678 (10))
12	(11; 123456789 (11))

7. Risolviamo ora la questione di determinare la forma dei prodotti di N pei multipli mp di p superiori a b.

Se

$$m = bq + r\ ,$$

sarà

$$\mathrm{N}(mp) = \mathrm{N}(bp)\,q + \mathrm{N}(rp) = (bbbb\ldots b)\,q + (rrr\ldots rr) =$$
$$= (\mathrm{B}^p\,q - q) + (rrr\ldots rr)$$

ove le cifre b ed r in parentesi sono in numero di p. Dalla forma dell'ultima espressione si può subito concludere: *Se* N *e* p *costituiscono una coppia di numeri che soddisfano al problema, il prodotto di* N *per* pm, *ove* m *è un numero qualunque che può mettersi sotto la forma* bq + r, *ha la seguente espressione: Comincia con un gruppo di cifre formanti il numero* q, *indi segue un certo numero di cifre tutte eguali ad* r, *ed infine termina con un numero le cui cifre sono respettivamente i complementi ad* r *delle prime cifre che formano il numero* q.

Segue di qui che se la moltiplicazione di N per pm si effettua su di una superficie cilindrica chiusa, in maniera che moltiplicando, moltiplicatori e prodotti vengano scritti su p generatrici, il prodotto totale, sotto tali condizioni, sarà sempre composto di cifre tutte eguali tra di loro.

Esempio. — Nel sistema a base 10 vi è la coppia di numeri $p = 27$, $\mathrm{N} = 41152263374485596707818930$ che soddisfano al problema. Si prenda ora un multiplo qualunque di 27, per es. $34682364 = 27\,(142725 \times 9 + 7)$.

Eseguendo la moltiplicazione su di una superficie cilindrica come abbiamo sopra accennato, tutte le cifre dei diversi prodotti parziali che nella moltiplicazione ordinaria verrebbero a formare il triangolo composto di cifre stampate in carattere più grosso (vedi moltiplicazione più innanzi), vengono invece a disporsi sulla destra secondo uno stesso triangolo. Facendo la somma dei prodotti parziali così ottenuti si trova che il prodotto totale è composto di cifre tutte eguali a 7.

Si avverta che nel sommare i numeri della prima colonna a destra, devesi tener conto del riporto di due unità che si ottiene dalla somma delle cifre dell'ultima colonna a sinistra.

Ecco qui appresso la moltiplicazione del numero N preso sopra, pel multiplo di 27, effettuata in conformità di quanto è stato detto precedentemente.

```
          4115226337448559670781893
                           34682364
       ----------------------------
         16460905349794238683127572
        24691358024691358024691358.
       12345679012345679012345679.1
       8230452674897119341563786. 8
     32921810699588476366255144.329
    24691358024691358024691358.2469
   16460905349794238683127572.16460
  12345679012345679012345679.123456
  ---------------------------------
        777777777777777777777777777
```

L'espressione della forma del prodotto di N per un multiplo qualunque di p, può enunciarsi in modo assai più semplice mediante la seguente definizione, la quale ci sarà utile anche per la ulteriore considerazione che dovremo fare. Se le cifre di un numero qualunque M si dividono in gruppi di p in p cifre da destra verso sinistra, e si sommano poi i numeri formati da questi diversi gruppi; se si opera poi nello stesso modo su questo resultato, e successivamente su quelli che via via si ottengono finchè non si giunga ad un numero M_p di p cifre, si dice che M_p *è il numero* M *ridotto a* p *cifre*.

Dopo ciò è facile riconoscere che: *il prodotto di* N *per un multiplo qualunque di* p, *è un numero che ridotto a* p *cifre resulta espresso da cifre tutte eguali tra di loro.*

8. Ci rimane ora da risolvere l'ultima questione proposta, quella cioè determinare il criterio di divisibilità di un numero M (scritto nel sistema a base B) per i numeri N e p. Questa condizione viene espressa dal seguente teorema:

Il resto della divisione di un numero M, *per* N *e per* p, *è quello stesso che si ottiene dividendo per* N *e per* p *la differenza fra il numero* M_p *e il numero composto di cifre tutte eguali, immediatamente inferiore ad essa.*

Infatti se indichiamo con G il numero formato dalle p cifre dell'$(s+1)^{mo}$ gruppo di M, è chiaro che nell'effettuare l'operazione di riduzione sopra accennata, il numero M, per effetto dello spostamento del solo gruppo G, subisce una diminuzione di $(B^{sp}-1)$G unità, ossia di un multiplo di (B^p-1).

Ora siccome ciò si verifica per tutti i gruppi e per tutte le successive riduzioni, possiamo dire che

$$M = q\,(B^p-1) + M_p$$

Ma B^p-1 è un multiplo di N e di p, quindi il resto della divisione di M, per N e p è quello stesso di M_p per gli stessi numeri. Ma anche il numero M' immediatamente inferiore a M_p, formato di p cifre tutte eguali, è pure esattamente divisibile per N e per p, e quindi la differenza d fra M_p ed M' divisa per N e per p lascia lo stesso resto di M_p, e quindi di M; *c. d. d.*

Esempio 1°. — Resto della divisione di un numero per 37.

$$\begin{array}{r}
58.764.962.168\\
962\\
764\\
58\\
\hline
1.952\\
1\\
\hline
953\\
888\\
\hline
65 = 37 + 28 ;\ \text{resto cercato.}
\end{array}$$

Esempio 2°. — Resto della divisione di un numero per 48 (13) che nel sistema a base 17 forma col 4 una coppia di numeri N, p.

$$\begin{array}{r}
3\,(11)\,(10)\,.\,(12)\,(14)\,(15)\quad 1\\
3\ (11)\,(10)\\
\hline
(13)\quad 0\quad\ 9\ (11)\\
(12)\,(12)\,(12)\,(12)\\
\hline
(4)\,(13)\,(16) = 48\,(13) + 53 ;\ \text{resto cercato.}
\end{array}$$

Osservazione I. — In certi casi può essere più semplice di sottrarre invece il numero M_p dal numero immediatamente superiore formato di cifre tutte eguali; ma allora il resto cercato è il complemento ad N o a p, del resto della divisione di quella differenza, per N o per p.

Osservazione II. — Il criterio di divisibilità enunciato è applicabile a tutti i divisori di B^p-1.

Firenze, marzo 1898.

A. Andreini.

SULLA CONVERSIONE DI UN RADICALE QUADRATICO
in frazione continua

Volendo esprimere la radice quadrata di un intero N, non quadrato perfetto, mediante una frazione continua (infinita) della prima classe, le cui frazioni parziali abbiano per numeratore l'unità, sappiamo che i denominatori q_r delle medesime sono la parte intera di $\frac{\sqrt{N}+a_r}{b_r}$, dove gli interi positivi, a_r e b_r sono legati dalle relazioni

(1) $a_r + a_{r+1} = b_r q_r$, (2) $b_r b_{r+1} = N - a^2_{r+1}$.

Con questo metodo, note a_r e b_r, si calcola prima q_r, quindi dalla (1) si rileva a_{r+1} ed infine dalla (2) b_{r+1} : come punto di partenza poi, se

$$N = k^2 + s,$$

in cui k è il maggior intero contenuto in $\sqrt{N}$, e perciò

$$1 \leq s \leq 2k,$$

rappresentando per simmetria k con q_0, abbiamo $a_0 = 0$, $b_0 = 1$.

Orbene si vuole da noi ottenere con più facilità il ciclo dei quozienti ricorrenti: all'uopo, fatto

$$c_r = k - a_r,$$

le (1) e (2) divengono

(3) $2k - c_r = b_r q_r + c_{r+1}$, (4) $b_r b_{r+1} = s + c_{r+1}(2k - c_{r+1})$

e per essere, come è noto, $a_r \leq k$, la c_r intanto non è negativa; inoltre, essendo la parte intera di $\frac{\sqrt{N}+a_r}{b_r}$, ossia di $\frac{\sqrt{N}+k-c_r}{b_r}$, eguale al maggior intero contenuto in $\frac{2k-c_r}{b_r}$, la c_{r+1} rappresenta nella (3) il resto della divisione di $2k - c_r$ per b_r, e quindi $c_{r+1} < b_r$. Per la qual cosa se, a partire da $r=1$, si divide $2k - c_r$ per b_r, si determinano subito q_r e c_{r+1}, e poi dalla (4) b_{r+1}, ecc.; e saremo sicuri di aver completato il ciclo appena verrà per quoziente $2k$, poichè, se u è il numero dei quozienti ricorrenti, si sa essere

$$q_u = 2k, \qquad q_r = q_{u-r} \leq k,\ r = 1, 2, \ldots, u-1.$$

Come casi particolari, si vede facilmente che $u=2$, se $2k$ è divisibile per $s>1$, e che $u=1$ quando $s=1$.

Ricavate poi q_r e c_{r+1}, per determinare b_{r+1} invece della (4) possiamo servirci della seguente formola più semplice

$$(5) \qquad b_{r+1}=b_{r-1}+q_r\,(c_{r+1}-c_r).$$

Per dimostrarla si cangi nella (4) r in $r-1$ e si dividano poi membro a membro la (4) stessa e la formola risultante; allora in virtù della (3) emerge

$$\frac{b_{r+1}}{b_{r-1}}=\frac{s+c_{r+1}\,(b_rq_r+c_r)}{s+c_r\,(b_rq_r+c_{r+1})};$$

sicchè la (5) sarà dimostrata, se proveremo essere

$$\frac{s+c_{r+1}\,(b_rq_r+c_r)}{s+c_r(b_rq_r+c_{r+1})}\cdot b_{r-1}=b_{r-1}+q_r\,(c_{r+1}-c_r).$$

Orbene da quest'eguaglianza si deduce appunto

$$b_{r-1}\,b_r=s+c_r\,(b_rq_r+c_{r+1}),$$

ossia per la (3)

$$b_{r-1}\,b_r=s+c_r\,(2k-c_r),$$

che è la formola (4).

Se facciamo successivamente nella (5) $r=1,2,\ldots,u-1$, ed eguagliamo quindi la somma dei primi membri delle formole risultanti a quella dei secondi, si rileva

$$b_{u-1}+b_u=b_0+b_1+\sum_1^{u-1}q_r\,(c_{r+1}-c_r);$$

ma $b_0+b_u=1$, $b_1=b_{u-1}=s$ per essere, com'è noto,

$$b_r=b_{u-r},\; r=0,1,\ldots,u,$$

adunque abbiamo

$$\sum_1^{u-1}q_r\,(c_{r+1}-c_r)=0,$$

e perciò anche

$$\sum_1^{u-1}q_r\,(a_{r+1}-a_r)=0.$$

Rispetto alle c_r introdotte osserviamo da ultimo che avendosi, come è noto,

$$a_r=a_{u-r+1},\; r=1,2,\ldots,u$$

sarà ancora

$$c_r=c_{u-r+1},\; r=1,2,\ldots,u;$$

e che essendo

$$k=a_1=a_u, \qquad\qquad a_r>0,\; r=1,2,3,\ldots$$

si avrà

$$c_1 = c_u = 0\,, \qquad\qquad c_r < k,\ r = 1,2,3,\ldots$$

Esempio: $N=43$ e perciò $k=6$, $s=7$.

Dividendo	$2k-c_1=12$	per	$b_1=7$	si ottiene	$q_1=1,\ c_2=5$	e dalla (5)	$b_2=6$
»	$2k-c_2=\ 7$	»	$b_2=6$	»	$q_2=1,\ c_3=1$	»	$b_3=3$
»	$2k-c_3=11$	»	$b_3=3$	»	$q_3=3,\ c_4=2$	»	$b_4=9$
»	$2k-c_4=10$	»	$b_4=9$	»	$q_4=1,\ c_5=1$	»	$b_5=2$
»	$2k-c_5=11$	»	$b_5=2$	»	$q_5=5,\ c_6=1$	»	$b_6=9$
»	$2k-c_6=11$	»	$b_6=9$	»	$q_6=1,\ c_7=2$	»	$b_7=3$
»	$2k-c_7=10$	»	$b_7=3$	»	$q_7=3,\ c_8=1$	»	$b_8=6$
»	$2k-c_8=11$	»	$b_8=6$	»	$q_8=1,\ c_9=5$	»	$b_9=7$
»	$2k-c_9=\ 7$	»	$b_9=7$	»	$q_9=1,\ c_{10}=0$	»	$b_{10}=1$
»	$2k-c_{10}=12$	»	$b_{10}=1$	»	$q_{10}=12.$		

Così

$$\sqrt{43}-6=\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{12+\ldots};\quad u=10.$$

Quando poi s è diverso da uno e primo con $2k$, per ottenere convergenti elevate di $\sqrt{N}$ con poca fatica è meglio ricordare che (*)

$$\sqrt{N}-k=\frac{s}{2k+}\,\frac{s}{2k+\ldots}\,;$$

e ciò anche se si considera che nel metodo precedente abbiamo l'elegante formola di Rickard da Birmingham, la quale, dopo aver calcolata la u^{ma} ridotta, ci offre con prestezza le ridotte $(2u)^{ma}$, $(4u)^{ma}$, ecc.

Ed invero, se indichiamo con P_r e Q_r i termini delle ridotte di una frazione continua infinita della prima classe, le cui frazioni abbiano tutte b per numeratore ed a per denominatore, risulta

$$\frac{P_r}{Q_r}=\frac{b}{a+\dfrac{P_{r-1}}{Q_{r-1}}},\quad \text{e perciò}\qquad \begin{array}{ll}(6) & P_r = bQ_{r-1}\\ (7) & Q_r = aQ_{r-1}+P_{r-1}\end{array}$$

ovvero, sostituendo nella (7) a P_{r-1} il valore dato dalla (6),

$$(8)\qquad Q_r = aQ_{r-1}+bQ_{r-2}\,.$$

Orbene, se $\frac{b}{a}$ ed in generale se $\frac{P_{r-1}}{Q_{r-1}}$ è irreducibile, P_r e Q_r sono primi tra loro, ossia, osservando la (6), non esistono divisori comuni nè fra Q_{r-1} e Q_r, nè fra b e Q_r. Difatto un numero che dividesse Q_{r-1} e Q_r dovrebbe per la (7) dividere anche P_{r-1}, contro l'ipotesi che $\frac{P_{r-1}}{Q_{r-1}}$ sia irredu-

(*) Sappiamo che questa formola vale anche se k non è il maggior intero contenuto in $\sqrt{N}$, purchè sia sempre $k^2+s=N$.

cibile: ed un numero che dividesse b e Q_r dividerebbe per la (8) aQ_{r-1}, ovvero Q_{r-1} per essere b primo con a; adunque quel numero dividerebbe tutte le Q di ordine inferiore, e perciò anche $Q_1 = a$, in opposizione all'ipotesi che a e b siano primi fra loro.

Facendo nella (8) $r = 1,2,3,....$ resulta:

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= a \\
Q_2 &= a^2 + b \\
Q_3 &= a^3 + 2ab \\
Q_4 &= a^4 + 3a^2b + b^2 \\
Q_5 &= a^5 + 4a^3b + 3ab^2 \\
Q_6 &= a^6 + 5a^4b + 6a^2b^2 + b^3 \\
Q_7 &= a^7 + 6a^5b + 10a^3b^2 + 4ab^3 \\
Q_8 &= a^8 + 7a^6b + 15a^4b^2 + 10a^2b^3 + b^4 \\
Q_9 &= a^9 + 8a^7b + 21a^5b^2 + 20a^3b^3 + 5ab^4 \\
Q_{10} &= a^{10} + 9a^8b + 28a^6b^2 + 35a^4b^3 + 15a^2b^4 + b^5 ;
\end{aligned}
$$

e per induzione

$$Q_n = a^n + \frac{n-1}{1} a^{n-2} b + \frac{(n-2)(n-3)}{1\,.\,2} a^{n-4} b^2 + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3} a^{n-6} b^3 + \ldots,$$

ossia, se si pone

$$[n, r] = \frac{(n-r)(n-r-1)\ldots.(n-2r+1)}{r\,!},$$

(9) $$Q_n = \Sigma\,[n, r]\, a^{n-2r} b^r ,$$

nella quale r varia da 0 a $\frac{n}{2}$ per n pari, e da 0 a $\frac{n-1}{2}$ per n dispari, purchè conveniamo che $[n, 0]$ rappresenti l'unità positiva. È chiaro che per esser sicuri della legge basta dimostrare che, se la (9) si suppone vera per Q_{n-1} e Q_{n-2}, lo è altresì per Q_n: in tale ipotesi, a cagione della (8), l'r^{mo} coefficiente di Q_n dev'essere la somma dell'r^{mo} coefficiente di Q_{n-1} con l'$(r-1)^{mo}$ coefficiente di Q_{n-2}, e noi abbiamo per l'appunto

$$[n-1, r] + [n-2, r-1] =$$

$$= \frac{(n-r-1)(n-r-2)\ldots(n-2r)}{r\,!} + \frac{(n-r-1)(n-r-2)\ldots(n-2n+1)}{(r-1)\,!} =$$

$$= \frac{(n-r-1)(n-r-2)\ldots(n-2r+1)}{(r-1)\,!}\left(\frac{n-2r}{r} + 1\right) = [n, r].$$

In virtù della (6) abbiamo poi

(10) $$P_n = b\,\Sigma\,[n-1, r] a^{n-2-1} b^r ,$$

in cui r varia da 0 a $\frac{n-2}{2}$, se n è pari, e da 0 a $\frac{n-1}{2}$, se n è dispari.

Ora, nell' ipotesi che sia s diverso da *uno* ed $\frac{s}{2k}$ irreducibile, se ci servissimo della $\frac{1}{q_1+}\frac{1}{q_2+\ldots}+\frac{1}{q_n+\ldots}$, oltre al non avere formole facili (*) che ci diano i termini delle ridotte in funzione delle q_r, la ridotta d'un dato ordine della medesima sarebbe in generale molto meno approssimata alla $\sqrt{N}-k$ che la ridotta dello stesso ordine della $\frac{s}{2k+}\frac{s}{2k+\ldots}$, poichè entrambe le ridotte sarebbero irreducibili ed i termini della prima in generale assai minori di quelli della seconda, che si ottengono facendo nella (10) e nella (9) $a=2k$, $b=s$. Difatto, oltrechè nella prima frazione continua tutti i numeratori parziali sono eguali ad uno, soltanto $q_{mu}=2k$, mentre il massimo valore delle altre q è k, ecc. ecc.

Varallo-Sesia, marzo 1899.

ENRICO DUCCI.

SOPRA UNA SERIE DI SEGNI POSITIVI E NEGATIVI

Occorre in certe questioni d'analisi sapere applicare il segno ai singoli termini di una serie, quando essi succedonsi con una certa legge. Il caso più comune e più semplice, oltre quello in cui i segni sono tutti eguali, si ha quando i termini sono alternativamente positivi e negativi, chè allora l'n^0, posto che il primo sia positivo, ha il segno di $(-1)^{n-1}$. Mi propongo ora di dare un cenno della serie di segni data da $(-1)^{\frac{s}{a_1}+\frac{s}{a_2}+\ldots+\frac{s}{a_p}}$ (a_i interi e positivi), che per brevità indicherò con (α_p), attribuendo ad s i valori interi da $-\infty$ a $+\infty$, e sottintendendo di prendere di ogni quoziente $\frac{s}{a_i}$ la sola parte intera.

Chiamando k il m. c. m. dei denominatori delle frazioni $\frac{s}{a_i}$ e h il numero intero $\frac{k}{a_1}+\frac{k}{a_2}+\ldots+\frac{k}{a_p}$, si vede che dando ad s i valori m, $m+k$ le somme $\frac{m}{a_1}+\frac{m}{a_2}+\ldots+\frac{m}{a_p}$ e $\frac{m+k}{a_1}+\frac{m+k}{a_2}+\ldots+\frac{m+k}{a_p}$ differiscono per il numero h, e di qui deriva che: *Secondo che* h *è pari o dispari la* (α_p) *è periodica con periodo* k, *oppure* 2k, *e nel secondo caso la seconda metà di ogni periodo è contraria della prima.*

(*) Si sa che per ottenere i termini della ridotta n^{ma} della frazione continua $\frac{b_1}{a_1+}\frac{b_2}{a_2+\ldots}$ senza ricorrere alle ridotte precedenti possiamo soltanto stabilire un sistema di $n+1$ equazioni lineari (avente l'unità per determinante), fra le $n+1$ incognite del quale figurano i termini della ridotta che si cerca.

Confrontando la (α_p) con la (α_{p-1}), si vede che per $na_p \leq s < (n+1)a_p$, essendo n un dato numero intero positivo o negativo, la somma $\frac{s}{a_1} + \frac{s}{a_2} + \dots + \frac{s}{a_p}$ differisce dalla $\frac{s}{a_1} + \frac{s}{a_2} + \dots + \frac{s}{a_{p-1}}$ per l'intero n, e secondo che questo è pari o dispari, si ottengono nella (α_p), per s compreso nei limiti indicati, a_p segni eguali, oppure contrari, ai corrispondenti di (α_{p-1}). Abbiamo dunque: *La (α_p) si compone di gruppi di a_p segni che sono alternativamente eguali e contrari ai gruppi corrispondenti di (α_{p-1}). Ognuno di questi gruppi ha principio da un termine di posto na_p contando da zero.* Ne segue che: *Se vi sono denominatori a_i tutti eguali ad un dato numero a, la (a_p) è identica a quella che si ottiene astraendo da un numero pari di frazioni scelte fra quelle aventi quel denominatore.*

Premesse queste considerazioni, senza entrare in una discussione completa sulla serie di segni in discorso, mi limiterò a considerarne un caso particolare, che appunto per la sua semplicità può maggiormente riuscir utile in pratica: è il caso in cui ciascun denominatore sia multiplo del precedente. Porrò adunque: $a_2 = q_1 a_1$, $a_3 = q_2 a_2, \dots a_p = q_{p-1} a_{p-1}$. La (α_1) si compone evidentemente di gruppi di a_1 segni positivi alternati da gruppi di a_1 segni negativi. Chiamando *gruppo di prima specie* quello formato di a_1 segni tutti eguali fra loro, potremo dire: *La (α_1) si compone di gruppi di prima specie.* Il segno che si ha per $s=0$ è il primo di un gruppo. Divisi i segni della (α_1) in gruppi di a_2 (partendo dal segno che si ha per $s=0$) avremo che ognuno di questi si compone di q_1 gruppi di a_1 segni, e siccome i gruppi r^0, $(r+1)^0$, $(r+2)^0 \dots$ (r positivo o negativo) di (α_2) sono formati alternativamente degli stessi segni e dei segni contrari dei corrispondenti di (α_1), così l'$(r+1)^0$ gruppo di (α_2) si compone di q_1 gruppi di a_1 segni, l'ultimo dei quali eguale al primo dell'$(r+2)^0$ ed il primo eguale all'ultimo dell'r^0, cosicchè la (α_2) risulta composta da insiemi di $q_1 - 2$ gruppi di a_1 segni, alternati questi insiemi da gruppi di $2a_1$ segni. Chiamando *gruppo di seconda specie* quello formato di $q_1 - 2$ gruppi di prima specie, e *complesso di prima specie* quello formato di $2a_1$ segni eguali fra loro, si ha che: *La (α_2) si compone di gruppi di seconda specie alternati da complessi di prima specie.* È facile vedere che per $s = ma_2$ (in particolare per $s=0$) si ha il primo segno della seconda metà di un complesso di prima specie. In particolare per $q_1 = 3$ si ha *una serie composta di gruppi alternativamente (a_1 di a_1) segni*, e per $q_1 = 2$ si ha una serie composta di gruppi di $2a_1$ segni e che differisce dalla $(-1)^{\frac{s}{2a_1}}$ solo perchè in questa per $s=0$ si ha il primo segno di un gruppo di $2a_1$ segni ed in quella il primo segno della seconda metà di un tal gruppo.

Dividansi ora i segni della (α_2) in gruppi di a_3 (a partire per esempio dal segno che si ha per $s=0$) L'h^0 gruppo (h positivo o negativo) si compone di q_2 gruppi di seconda specie alternati da complessi di prima specie, e questo insieme, che chiamerò *gruppo di terza specie*, trovasi preceduto e seguito da mezzo complesso di prima specie. E siccome i gruppi $h^0, (h+1)^0, (h+2)^0, \dots$ di (α_3) si compongono alternativamente degli stessi segni e dei contrari di (α_2), così chiamando *complesso di seconda specie* l'insieme di due gruppi di prima specie, avremo che: *La (α_3) si compone di gruppi di terza specie alternati da complessi di seconda specie.* Ora siccome un gruppo di terza specie incomincia e finisce con un gruppo di seconda specie, cioè con $q_1 - 2$ gruppi di prima specie, e siccome due gruppi di terza specie sono separati da un complesso di seconda, così possiamo anche considerare la (α_3) come composta di gruppi di terza specie (considerati come insiemi di $q_2 - 1$

complessi di prima specie alternati da gruppi di seconda specie) alternati da complessi di seconda specie (considerati come insiemi di $2(q_1 - 1)$ gruppi di prima specie). Per $s = 0$ si vede che in ogni caso si ha il primo segno della seconda metà di un complesso di seconda specie.

Per $q_1 = 2$ il gruppo di terza specie, sia conforme alla prima che alla seconda definizione, si compone di $q_2 - 1$ complessi di prima specie, per cui, posto anche $q_2 = 2$, si ottiene *una serie formata di gruppi di* $2a_1$ *segni alternativamente composti di segni tutti eguali e di segni metà di una specie e la seconda metà dell'altra specie.*

Dividendo nella (α_3), considerata com'è indicato nel primo modo, i segni a partire da quello che si ha per $s = 0$, in gruppi di a_4, il k^0 di questi si compone di q_3 gruppi di terza specie alternati da complessi di seconda specie, e questo insieme, che chiamerò *gruppo di quarta specie,* trovasi preceduto e seguito da un gruppo di prima specie. E siccome il k^0, $(k+1)^0$, $(k+2)^0, \ldots$ gruppo di (α_4) sono alternativamente formati dagli stessi segni e dai contrari dei corrispondenti della (α_3), così si vede che: *La* (α_4) *si compone di gruppi di quarta specie alternati da complessi di prima specie.* Per $q_1 = q_2 = q_3 = 2$ il gruppo di quarta specie si compone di due complessi di prima specie alternati da uno di seconda specie, cosicchè ne risulta *una serie composta di complessi di seconda specie alternati da terne di complessi di prima specie.*

Ed ora procedendo col metodo d'induzione e chiamando *gruppo di* p^a *specie* quello formato di q_{p-1} gruppi di $(p-1)^a$ specie alternati da complessi di prima o seconda specie secondo che p è dispari o pari, avremo che: *La* (α_p) *è formata di gruppi di* p^a *specie alternati da complessi di seconda o prima specie, secondo che* p *è dispari o pari.*

Per $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 2$ la (α_5) è *una serie composta di gruppi formati ognuno di tre complessi di seconda specie alternati (questi tre complessi) da complessi di prima, i quali gruppi sono alternati da terne di complessi di prima specie.*

Tralasciando di considerare la scomposizione in gruppi di cui è suscettibile la (α_p) qualora si continui sulla via indicata dalla seconda scomposizione della (α_3), noterò una speciale interpretazione che può darsi alla (α_p) quando sia $q_1 = q_2 = \ldots = q_{p-1} = 2$. Dimostrerò cioè il seguente teorema: *Se si prende una serie di segni tutti positivi divisi in gruppi di* a_1 *ciascuno, e se da questa se ne deduce una seconda intercalando fra ogni gruppo di essa ed il suo successivo un gruppo contrario al primo, e se da questa nuova serie se ne deduce un'altra con la medesima legge, e così via, i segni della* $(n+1)^a$ *serie dedotta sono dati da* $(-1)^{\frac{s}{a_1} + \frac{s}{2a_1} + \ldots + \frac{s}{2^n a_1}}$.

Basterà far la dimostrazione per $a_1 = 1$, chè per gli altri valori di a_1 non c'è altra differenza che quella del numero dei termini componenti ciascun gruppo. Posto che la $(x+1)^a$ serie sia data da $(-1)^{\frac{s}{1} + \frac{s}{2} + \ldots + \frac{s}{2^x}}$ (1) dimostriamo che quella che si deduce da questa mediante la legge indicata è data $(-1)^{\frac{s}{1} + \frac{s}{2} + \ldots + \frac{s}{2^{x+1}}}$ (2). Fissiamo nella (1) il termine di posto $a+1$ (che si ha facendo $s = a$); esso nella serie che si deduce dalla (1) secondo la legge indicata nel teorema viene ad occupare il posto $2a+1$, e quello che s'intercala fra i segni di posti $a+1$, $a+2$ viene ad occupare nella serie dedotta il posto $2a+2$. Resta perciò a dimostrare che i segni di posto $2a+1$, $2a+2$ della (2), che si hanno per $s = 2a$, $s = 2a+1$ sono il primo eguale e il secondo contrario a quello di posto $a+1$ della (1). Facendo $s = 2a$ nella (2) si ha $(-1)^{\frac{2a}{1} + \frac{2a}{2} + \ldots + \frac{2a}{2^{x+1}}} = (-1)^{2a} \cdot (-1)^{\frac{a}{1} + \frac{a}{2} + \ldots + \frac{a}{2^x}}$ (3). Facendo ora nella (2) $s = 2a+1$, osserviamo che, intendendo parlare di quozienti interi, è $\frac{2a+1}{2^y} = \frac{a}{2^{y-1}}$, perchè è $\frac{2a+1}{2^y} = \frac{a}{2^{y-1}} + \frac{1}{2^y}$, e siccome la divisione $\frac{a}{2^{y-1}}$ dà al massimo per resto $2^{y-1}-1$, così chiamando b la parte intera di $\frac{a}{2^{y-1}}$, sarà al massimo $\frac{a}{2^{y-1}} + \frac{1}{2^y} = b + \frac{2^{y-1}-1}{2^{y-1}} + \frac{1}{2^y} = b + \frac{2^y-1}{2^y}$, la cui parte intera è ancora b.

Abbiamo allora: $(-1)^{\frac{2a+1}{1}+\frac{2a+1}{2}+\dots+\frac{2a+1}{2^{x+1}}} = (-1)^{2a+1} \cdot (-1)^{\frac{a}{1}+\frac{a}{2}+\dots+\frac{a}{2^x}}$. Questa e la (3) unitamente alla considerazione che il teorema è vero per $x=0$, $x=1$, dimostrano quanto si voleva.

Sondrio, 13 marzo 1898.

Francesco Palatini.

SUGLI ESAGONI DI PASCAL E DI BRIANCHON

1. È sempre possibile risolvere i problemi seguenti:

a) *Date cinque rette* a, b, c, d, e, *determinarne una sesta* f *in modo che l'esagono semplice* abcdef *sia ad un tempo esagono di* Pascal *ed esagono di* Brianchon.

Detto P il punto in cui s'incontrano a e d, Q il punto in cui s'incontrano b ed e, R il punto in cui la c incontra la PQ, si conduca dal punto R della c la seconda tangente f alla conica H determinata dalle cinque tangenti a, b, c, d, e. (*)

L'esagono delle cinque rette date e della sesta così determinata ha i lati tangenti alla conica H, e poichè inoltre le tre coppie di lati opposti s'incontrano in tre punti P, Q, R di una retta, ha i vertici sopra un'altra conica K.

b) *Dati cinque punti* A,B,C,D,E, *determinarne un sesto* F *in modo che l'esagono semplice* ABCDEF *sia ad un tempo esagono di* Brianchon *ed esagono di* Pascal.

Detta p la retta passante per A e D, q la retta passante per B ed E, r la retta condotta per C e per il punto O comune a p ed a q, si determini il secondo punto F che la CO ha in comune colla conica determinata dai cinque punti A, B, C, D, E. (*)

L'esagono avente per vertici i cinque punti dati ed il sesto così determinato ha i vertici sopra una conica K, e poichè inoltre le diagonali condotte per le tre coppie di vertici opposti passano per un punto O, ha i lati tangenti ad un'altra conica H.

(*) Cremona, *Elementi di geometria proiettiva*, pag. 82, n. 124.

2. Ciò premesso, possiamo dimostrare:

Se un esagono E *è inscritto in una conica* H, *ed è circoscritto ad un'altra conica* K, *il punto* O *comune alle diagonali condotte per i vertici opposti è il polo, rispetto alla conica* H, *della retta* o *sulla quale s' incontrano le coppie di lati opposti.*

Infatti, ciascuna coppia di lati opposti determina sulla conica H quattro punti, che possono essere considerati come vertici di un quadrangolo inscritto. Le diagonali dei tre quadrangoli passano tutte per O, mentre ciascun quadrangolo ha una coppia di lati opposti che s'incontrano sopra *o*, quindi la retta *o* è il luogo dei punti di concorso delle coppie di lati opposti d'ogni quadrangolo inscritto, le cui diagonali passino per O: come tale è la polare di O rispetto alla conica H.

3. *Se un esagono* E *è inscritto in una conica* H, *ed è circoscritto ad un'altra conica* K, *le tangenti condotte per i vertici alla conica* H *sono i lati di un esagono* E', *che, oltre all'essere circoscritto alla conica* H, *è inscritto in una conica* M: *i punti di contatto dei lati colla conica* K *sono i vertici di un esagono* E'', *che, oltre all'essere inscritto nella conica* K, *è circoscritto ad una conica* N.

Infatti, le tangenti condotte alla conica H per i vertici dell'esagono E s'incontrano ordinatamente a due a due in sei punti, che sono rispettivamente i poli dei lati dell'esagono E, rispetto alla conica H: e poichè i lati dell'esagono E inviluppano per ipotesi una conica K, i vertici di E'' sono sopra una conica M.

I punti di contatto della conica K coi lati dell'esagono E congiunti ordinatamente a due a due determinano sei rette, che sono rispettivamente le polari dei vertici dell'esagono E, rispetto alla conica K; e poichè i vertici dell'esagono E sono per ipotesi sopra una conica H, i lati di E'' inviluppano una conica N.

4. *Se un esagono* E *è inscritto in una conica* H, *ed è circoscritto ad un'altra conica* K, *in ciascuno dei due esagoni* E', E'' *aventi il primo per lati le tangenti condotte per i vertici di* E *alla conica* H, *il secondo per vertici i punti di contatto dei lati di* E *colla conica* K, *le diagonali dei vertici opposti passano per il punto comune alle diagonali di* E, *ed i lati opposti s' incontrano sulla retta dei punti d' incontro dei lati di* E.

Infatti il punto O per il quale passano le diagonali dei vertici opposti dell'esagono E è, come si disse (2), il polo, rispetto alla conica H, della retta *o*, sulla quale s'incontrano i suoi lati opposti. Ma i due esagoni E ed E' sono reciproci rispetto alla stessa conica H, quindi le diagonali di E' devono passare per il polo di *o*, mentre i suoi lati devono incontrarsi sulla polare di O.

Altrettanto dicasi degli esagoni E ed E'' reciproci rispetto alla conica K.

5. Sempre relativamente agli esagoni E, E′, E″ di cui sopra, nel caso particolare che i lati opposti di E siano paralleli, lo saranno del pari tanto i lati opposti di E′ quanto quelli di E″; ed il punto O, polo in questo caso della retta all'infinito del piano, sarà centro delle coniche e degli esagoni.

DIEGO FELLINI.

PICCOLE NOTE

1ª. Trasformazione dei prodotti $\prod_1^n \cos\alpha_i$ e $\prod_1^n \operatorname{sen}\alpha_i$ in somme di seni o di coseni. — Il sig. Prof. Lazzeri, nel fascicolo IV di questo *Periodico* ha dati questi sviluppi applicandoli al calcolo di integrali d'uso frequente. Egli si è fondato sulle espressioni esponenziali del seno e del coseno. Si giunge al risultato molto semplicemente con l'applicazione delle note formole di Trigonometria

$$(1) \qquad 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 = \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$(2) \qquad 2\operatorname{sen}\alpha_1\operatorname{sen}\alpha_2 = \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

le quali risolvono il problema pel caso di $n = 2$. Moltiplicando la prima successivamente per $\cos\alpha_3$, $\cos\alpha_4$, ... e trasformando i prodotti del secondo membro secondo la (1) stessa, si giunge a ottenere

$$\prod_1^n \cos\alpha_i = \frac{1}{2^{n-1}} \sum \cos(\alpha_1 \pm \alpha_2 \ldots \pm \alpha_n).$$

Moltiplicando la (2) successivamente per $\operatorname{sen}\alpha_3$, $\operatorname{sen}\alpha_4$, ... e trasformando i secondi membri come insegnano la formola

$$2\cos x \operatorname{sen} y = \operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y)$$

e la (2) medesima, si giunge ai risultati

$$\prod_1^n \operatorname{sen}\alpha_i = \frac{1}{2^{n-1}} \sum \pm \operatorname{sen}(\alpha_1 \pm \alpha_2 \ldots \pm \alpha_n) \qquad (n \text{ dispari})$$

$$\prod_1^n \operatorname{sen}\alpha_i = \frac{1}{2^{n-1}} \sum \pm \cos(\alpha_1 + \alpha_2 \ldots \pm \alpha_n) \qquad (n \text{ pari})$$

In queste due formole, ciascun seno o coseno dei secondi membri, sarà preceduto dal segno + quando l'argomento contiene un numero pari di segni —, sarà preceduto dal segno — in caso diverso.

2ª. Numero delle radici di una congruenza. — Sia p un numero primo dispari, e $\varphi(x)$, $\Psi(x)$ due polinomi a coefficienti interi, minori di p, dei gradi rispettivi m ed $n \leq m$. In questi polinomi si intendono soppressi i termini aventi i coefficienti multipli di p, e, in ciascuno, si ritiene uguale all'unità il coefficiente della più alta potenza di x. Ciò posto, *si dirà che* $\Psi(x)$ *è un divisore di* $\varphi(x)$, *nella congruenza di mod.* p, se il resto della divisione di $\varphi(x)$ per $\Psi(x)$ è identicamente congruo a zero (mod. p). Se $\Psi(x)$ non è un divisore di $\varphi(x)$, si moltiplichi il resto della divisione dei due polinomi per un conveniente numero, affinchè il coefficiente della più alta potenza di x, in esso, diventi congruo all'unità (mod. p) e si sostituiscano a questo e agli altri coefficienti i numeri ad essi congrui (mod. p) e minori di p. Si divida poi $\Psi(x)$ pel resto così modificato; se il nuovo resto non è identicamente congruo a zero o ad un numero indipendente da x e primo con p, lo si modifichi come il precedente e poi si divida questo per quello. Continuando a questa maniera o si giungerà ad un resto che è un divisore del resto precedente e che diremo il *massimo comun divisore dei polinomi* $\varphi(x)$ *e* $\Psi(x)$ *nella congruenza di mod.* p o si giungerà ad un resto che è un numero primo con p, nel qual caso diremo che *i polinomi* $\varphi(x)$ *e* $\Psi(x)$ *sono primi tra loro nella congruenza di mod.* p.

È facile dimostrare, dopo ciò, che *se* $\Psi(x)$ *e* $\varphi(x)$ *sono primi tra loro nella congruenza di mod.* p, *le congruenze* $\varphi(x) \equiv 0$ $\Psi(x) \equiv 0$ *(mod.* p*) non possono avere soluzioni comuni* e che *se* $\chi(x)$ *è il massimo comun divisore di* $\varphi(x)$ *e* $\Psi(x)$, *nella detta congruenza, tutte le radici comuni alle congruenze* $\varphi(x) \equiv 0$ *e* $\Psi(x) \equiv 0$ *(mod.* p*) e queste radici soltanto, sodisfano anche alla congruenza* $\chi(x) \equiv 0$ *(mod.* p*).*

Supposto, in particolare, $\varphi(x) = x^p - x$ possiamo dire che *la congruenza* $\Psi(x) \equiv 0$ *(mod.* p*) non ha alcuna radice se il polinomio* $\Psi(x)$ *è primo con* $x^p - x$, *nella congruenza di mod.* p, *e che invece la stessa congruenza possiede le radici dell'altra* $\chi(x) \equiv 0$ *(mod.* p*) se* $\chi(x)$ *è, nella congruenza di mod.* p, *il m. c. d. di* $x^p - x$ *e* $\Psi(x)$.

Oltre a ciò, potendosi porre

$$x^p - x \equiv Q(x)\,\chi(x) \pmod{p}$$

con $Q(x)$ polinomio intero in x, la congruenza $\chi(x) \equiv 0$ (mod. p) ha tante soluzioni quante unità nel suo grado (*) e perciò si conclude che *la congruenza* $\Psi(x) \equiv 0$ *(mod.* p*) ha tante soluzioni quante unità sono nel grado del m. c. d. di* $x^p - x$ *e* $\Psi(x)$, *o nessuna soluzione, se questi due polinomi sono primi tra loro.*

Queste considerazioni possono servire a determinare quante radici comuni hanno due congruenze dello stesso modulo, oppure a determinare il numero delle radici di una congruenza, o infine, a ridurre la soluzione di questa a quella di un'altra di grado meno elevato.

Per es. si troverà che, nella congr. di mod. 11, il polinomio $x^6 + 3x^5 - 2x^4 - x + 4$ è primo con $x^{11} - x$ e che perciò la congruenza

$$x^6 + 3x^5 - 2x^4 - x + 4 \equiv 0 \pmod{11}$$

non ha soluzioni.

Data invece la congruenza

$$x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 2 \equiv 0 \pmod{7}$$

si troverà $\chi(x) = x^2 - 5x - 1$, per cui essa ha due soluzioni che si otterranno risolvendo la congruenza molto più semplice $x^2 - 5x - 1 \equiv 0$ (mod. 7); si trovano

(*) Vedi P. L. Tchebicheff, *Teoria delle congruenze*, traduzione italiana di *I. Massarini*. Roma, E. Loescher, 1895.

le soluzione $x \equiv 2$, $x \equiv 4$ (mod. 7). Si può inoltre determinare facilmente se una soluzione di una congruenza è multipla e di che ordine: nel secondo degli esempi citati, la radice 2 è tripla, l'altra è doppia.

Le stesse considerazioni che precedono si prestano a qualche deduzione generale, quando i resti che si ottengono nella ricerca di $\chi(x)$ sono di una forma conosciuta. Così, riesce facile lo studio della congruenza binomia

$$(1) \qquad x^n - a \equiv 0 \pmod{p}$$

nella quale a è primo con p ed n non è un divisore di $p-1$.

Il resto della divisione di $x^{p-1}-1$ per $x^n - a$ è della forma $x^{r_1} - a_1$ (*) dove r_1 è il resto della divisione di $p-1$ per n ed a_1 una certa potenza di a. Il resto della divisione di $x^n - a$ per $x^{r_1} - a_1$ è del pari della forma $x^{r_2} - a_2$ dove r_2 è il resto della divisione di n per r_1 ed a_2 una potenza di a; in generale, il resto della divisione di $x^{r_s} - a_s$ per $x^{r_{s+1}} - a_{s+1}$ sarà della forma $x^{r_{s+2}} - a_{s+2}$, con r_{s+2} resto della divisione di r_s per r_{s+1} ed a_{s+2} potenza di a, come a_{s+1} ed a_s. Dunque, $\chi(x)$ *sarà della forma* $x^\rho - a^\pi$ *con* ρ *m. c. d. di* $p-1$ *ed* n; *se ne deduce che se la* (1) *ha soluzioni, essa ne ha* ρ. L'ultimo resto, nella ricerca di $\chi(x)$, essendo della forma $1 - a^\mu$, segue che la condizione necessaria e sufficiente perchè esista $\chi(x)$ è data dalla congruenza $a^\mu \equiv 1 \pmod{p}$.

Per la determinazione dei numeri μ e π si può procedere come segue: se la (1) ammette delle soluzioni, queste sono dei numeri primi con p, quindi sarà necessariamente $x^{(p-1)\frac{n}{\rho}} \equiv 1 \pmod{p}$ ossia $a^{\frac{p-1}{\rho}} \equiv 1 \pmod{p}$. Oltre a ciò, essendo $a^{\frac{\pi(p-1)}{\rho}} - 1$ il resto della divisione di $x^{p-1} - 1$ per $x^\rho - a^\pi$, si vede che la condizione necessaria $a^{\frac{p-1}{\rho}} \equiv 1 \pmod{p}$, affinchè la (1) sia possibile, è anche sufficiente, per cui $\mu \equiv \frac{p-1}{\rho} \pmod{p-1}$.

Osservando ora che il resto della divisione di $x^n - a$ per $x^\rho - a^\pi$ è $a^{\frac{\pi n}{\rho}} - a$ (**) e che esso deve essere congruo identicamente a zero (mod. p), se la (1) ha soluzioni e viceversa, si deduce che π deve sodisfare alla congruenza sempre possibile: $\frac{n}{\rho}\pi - 1 \equiv 0 \pmod{\delta}$, dove δ è l'esponente a cui appartiene a rispetto al mod. p ed è un divisore di $\frac{p-1}{\rho}$. Per non dover determinare δ, basterà ricavare π dalla congruenza $\frac{n}{\rho}\pi - 1 \equiv 0 \left(\text{mod. } \frac{p-1}{\rho}\right)$, perchè se è $\pi = \alpha\delta + \pi_1$ si ha $a^\pi \equiv a^{\pi_1}$ (mod. p), visto che $a^{\alpha\delta} \equiv 1 \pmod{p}$.

Forlì, marzo 1890.

F. Mariantoni.

(*) È il resto trasformato come si disse precedentemente; la sua forma si può dedurre esaminando l'andamento della divisione. Si trova così che essa è $a^\lambda x^{r_1} - 1$, che si riduce ad $x^{r_1} - a^{p-1-\lambda}$, moltiplicando per $a^{p-1-\lambda}$ e tenendo presente il teorema di Fermat.

(**) Ciò risulta dalla identità

$$x^n - a = (x^\rho)^{\frac{n}{\rho}} - (a^\pi)^{\frac{n}{\rho}} + (a^\pi)^{\frac{n}{\rho}} - a.$$

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 452, 453, 456, 458

452. *Sono date* n *urne contenenti palle numerate: la prima ne contiene* α_1, *la seconda* $\alpha_2, \ldots .$ *la* n^a *ne contiene* α_n. *Si estragga una palla da ogni urna, si ripeta questa operazione* k *volte, senza però rimettere mai nelle urne le palle estratte. Si domanda la probabilità che in* p *di queste operazioni, e non più, risultino estratte palle collo stesso numero.*

STROCCHI.

Risoluzione del sig. Zeno Giambelli, studente della R. Università di Torino.

Indicando per brevità le urne col numero delle palle che contengono, detto $\alpha_1 \geq p$ l'urna che contiene il minor numero di palle, Ω_m l'operazione che consiste nell'estrarre da m urne una palla per ciascuna, se si indica con $\Delta_{\alpha_s, p}$ il numero delle disposizioni delle α_s palle dell'urna α_s prese a p a p nelle quali nessuna palla occupa il posto designato da una data disposizione di p numeri compresi fra 1 e α_s segue che $D_{\alpha_1, p}\, \Delta_{\alpha_2, p}$ è il numero delle disposizioni di p palle per ciascuna delle urne α_1, α_2 tali che in nessuna operazione Ω_2 siano state estratte due palle col medesimo numero. Si può quindi concludere che

$$D_{\alpha_1 p}\, D_{\alpha_2, p} \ldots . D_{\alpha_n, p} \sum_{s=2}^{s=n} \frac{\Delta_{\alpha_s, p}}{D_{\alpha_s, p}}$$

è il numero dei casi sfavorevoli alla quistione, da cui ne segue che la probabilità richiesta è

$$1 - \sum_{s=2}^{s=p} \frac{\Delta_{\alpha_s, p}}{D_{\alpha_s, p}} = 1 - \sum_{s=2}^{s=p} \sum_{k=0}^{k=p} \frac{(-1)^k}{(\alpha_s - k + 1)^k} \binom{p}{k}$$

perchè (v. *Periodico*, anno XIII, p. 77-78).

$$\Delta_{\alpha_s, p, p} = X_{\alpha_s, p, p} = \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k \binom{p}{k} D_{\alpha_s - k,\, p - k}.$$

Generalizzazione. — La data quistione è un caso particolare della seguente: *Se si hanno le medesime urne contenenti la prima* α_1 *palle, la seconda* α_2 *palle. . . . la* n^a α_n, *e se da ogni urna* α_s, *si estraggono* p_s *palle, ove* $p_s < \alpha_s$, *e inoltre* p_1 *è il minore dei numeri,* p_s *si domanda qual'è la probabilità che in una delle prime* p_1 *operazioni* Ω_n *siano estratte palle col medesimo indice.* Supponendo le $\alpha_1, \alpha_2 \ldots . \alpha_n$ disposte in ordine crescente, il che non toglie nulla alla generalità del problema e detto $\Delta_{\alpha_s, p_s, p_1}$ il numero delle disposizioni a p_s a p_s di α_s elementi, nelle quali nei primi p_1 posti nessun elemento occupa il posto indicato da una data disposizione di p_1 numeri compresi fra **1** e α_s, e osservando che (v. *Periodico* l. c.)

$\Delta_{\alpha_s, p_s, p_1} = X_{\alpha_s, p_s, p_1} = \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k \binom{p_1}{k} D_{\alpha_s - k,\, p_s - k}$, e supponendo in primo luogo per facilità $p_1 = p$, si conclude con un processo analogo a quello precedente per la data quistione che se $p_t = p$, il numero dei casi sfavorevoli al problema è $D_{\alpha_1 p_1} D_{\alpha_2 p_2} \ldots\ldots D_{\alpha_n p_n} \sum_{s=2}^{s=n} \frac{\Delta_{\alpha_s, p_s, p_1}}{D_{\alpha_s p_s}}$, e quindi la probabilità equivale a

$$1 - \sum_{s=2}^{s=n} \frac{\Delta_{\alpha_s, p\, p_1}}{D_{\alpha_s p}} = 1 - \sum_{s=2}^{s=n} \sum_{k=0}^{k=p} \frac{(-1)^k}{(\alpha_s - k + 1)^{\overline{k}}} \binom{p_1}{k}.$$

Se p_t non è eguale a p_1, essendo $D_{\alpha_t - \alpha_1, r} \cdot D_{\alpha_1 p_t - r}$ il numero delle disposizioni di α_t elementi presi p_t a p_t, dei quali in ciascuna disposizione $p - r$ sono presi tra 1 e α_1, e chiamando per brevità queste disposizioni col simbolo che dà il loro numero, segue che $D_{\alpha_t - \alpha_1, r} \cdot D_{\alpha_1 p_t - r} \cdot \Delta_{\alpha_s, p_s, p_t - r}$ è il numero delle disposizioni di p_t elementi di $D_{\alpha_t - \alpha_1, r} \cdot D_{\alpha_1, p_t - r}$, associate colle disposizioni di p_s elementi di α_s in modo che in ciascuna coppia di disposizioni non vi siano due elementi collo stesso numero che occupino il medesimo posto. Si ricava quindi che

$$D_{\alpha_1, p_1} \cdot D_{\alpha_2, p_2} \ldots . D_{\alpha_n, p_n} \sum_{r=0}^{r=p_t} \frac{D_{\alpha_t - \alpha_1, r} \cdot D_{\alpha_1, p_t - r}}{D_{\alpha_t, p_t}} \left\{ \sum_{s=1}^{s=t-1} \frac{\Delta_{\alpha_s, p\, p_t - r}}{D_{\alpha_s, p_s}} + \sum_{s=t+1}^{s=n} \frac{\Delta_{\alpha_s, p_s, p_t - r}}{D_{\alpha_s, p}} \right\}$$

è il numero dei casi sfavorevoli al problema, da cui ne segue che la probabilità richiesta è:

$$1 - \sum_{r=0}^{r=p_t} \frac{(\alpha_1 - p_t + r + 1)^{\overline{p_t - r}} \cdot (\alpha_t - \alpha_1 - r + 1)^{\overline{r}}}{(\alpha_1 - p_t + 1)^{\overline{p_t}}} \left\{ \sum_{s=1}^{s=t-1} \sum_{k=0}^{k=p_t - r} \frac{(-1)^k}{(\alpha_s - k + 1)^{\overline{k}}} \binom{p_t - r}{k} + \sum_{s=t+1}^{s=n} \sum_{k=0}^{k=p_t - r} \frac{(-1)^r}{(\alpha_s - k + 1)^{\overline{k}}} \binom{p_t - r}{k} \right\}.$$

453. *È dato un circolo di centro* C *e di raggio* r *e una tangente fissa, il cui punto di contatto è* O. *Si conduca la tangente in un punto* M *del circolo fino a incontrare la tangente fissa in* P. *Dimostrare che al variare di* M *sul circolo il luogo del punto d'incontro di* OM *con la perpendicolare in* P *alla tangente fissa è una parabola, il cui fuoco è situato su* OC *alla distanza* $\frac{r}{4}$ *da* O. *Essa taglia il circolo in due punti diametralmente opposti e sempre sotto il medesimo angolo, qualunque sia la grandezza del circolo.*

PICCIOLI.

Risoluzione del sig. Filippo Sibirani, studente nella R. Università di Bologna.

Si consideri un circolo di centro C, una tangente fissa in O, una tangente variabile in M, la quale incontra in P la tangente fissa: dico che *il luogo dei punti d'intersezione della* OM *colla congiungente* P *e un punto fisso* A *nella* OC, *è una conica.* Il punto P è polo della OM; epperò il fascio proiettante da A, i punti P è proiettivo al fascio di centro O; essi determinano quindi una conica. Al raggio comune OA corrispondono le due perpendicolari ad esso in O ed in A, e poichè esse debbono essere tangenti alla conica, vuol dire che OA ne è l'asse. Se ora mandiamo A all'infinito nella stessa direzione, le rette PA_∞ diventano perpendicolari alla tangente fissa, e la conica individuata dal fascio P e dal fascio A_∞ è una parabola che ha per asse la OC ed è tangente in O alla tangente fissa. Essa taglierà il circolo in due punti simmetrici rispetto all'asse; anzi in due punti diametralmente opposti, perchè se essi sono N e N', ai raggi ON, ON' corrispondono le tangenti in N a N', epperò le loro intersezioni sono gli stessi punti N e N'. Si sa poi che i punti della parabola sono equidistanti dal fuoco e dalla direttrice: in particolare la distanza di N dalla direttrice diminuita del raggio dà la distanza del fuoco F dal vertice: ossia nel triangolo rettangolo NCF l'ipotenusa supera di tanto il raggio di quanto ne è inferiore il cateto FC. Di qui si ricava che CF è uguale a $\frac{3r}{4}$, e quindi OF a $\frac{r}{4}$.

Altre risoluzioni del Prof. V. Retali e del sig. Giuseppe Marletta, studente della R. Università di Catania; Ernesto Laura e Attilio Crepas, R. Università di Pavia; Zeno Giambelli, R. Università di Torino.

456. *Siano* a, b *due tangenti ad una parabola nei punti* A, B. *Si prenda il punto* B' *simmetrico a* B *rispetto al punto* $O \equiv ab$.

1°. *Preso un punto* M *della retta* $r \equiv AB'$, *se si costruisce il parallelogrammo* OMM_1M_2, *in cui* M_1, M_2, *sono sulle* a, b, *la retta* M_1M_2 *risulta tangente alla parabola.*

2°. *Se nel triangolo* OAB' *si conducono l'altezza* OX, *la bisettrice* OY, *e la mediana* OZ, *dai punti* X, Y, Z, *della* r, *si ottengono (con la costruzione precedente) le tre tangenti* X_1X_2, Y_1Y_2, Z_1Z_2, *le quali hanno rispettivamente le seguenti proprietà:*

a) *il segmento* X_1X_2 *è minimo, e la* X_1X_2 *risulta la tangente nel vertice;*

b) *il triangolo* OY_1Y_2 *è isoscele;*

c) *il triangolo* OZ_1Z_2 è massimo *tra gli analoghi compresi nell'angolo* $\widehat{AOB}$ *che contiene la parabola.*

MACCAFERRI.

Risoluzione del Prof. V. Retali.

1°. Dai triangoli simili AOB', AM_1M si ha $M_1A : OA = MM_1 : OB'$ e siccome $MM_1 = M_2O$, $OB' = BO$; $M_1A : OA = M_2O : BO$, ossia $(M_1\, OA\infty) = (M_2\, BO\infty)$; i punti M_1 e M_2 segnano dunque sulle rette a e b due punteggiate simili, e al punto O, secondochè è pensato appartenente ad a o b corrisponde in b o in a il punto B o il punto A. Lo inviluppo della retta M_1M_2 è dunque la parabola che tocca a in A e b in B; la retta r è un diametro di questa parabola, perchè parallela alla congiungente il centro della corda $\overline{AB}$ col polo O.

2°. a) $\overline{X_1X_2} = \overline{OX}$ dunque è minimo; la tangente X_1X_2 perpendicolare al diametro r, è la tangente al vertice;

b) $\widehat{B'OY} = \widehat{YOY_1} = \widehat{OY_1Y_2} = \widehat{OY_2Y_1}$;

c) Dalle proporzioni

$$\Delta\,.\,OMM_1 : \Delta\,.\,AMM_1 = B'M : MA$$
$$\Delta\,.\,AMM_1 : \Delta\,.\,AB'O = \overline{MA}^2 : \overline{AB'}^2$$

abbiamo

$$\Delta\,.\,OMM_1 = \left(\frac{\Delta\,.\,AB'O}{\overline{AB'}^2}\right).\,B'M\,.\,MA,$$

dunque il massimo del triangolo OMM_1, e del suo eguale OM_1M_2, si ha per $B'M = MA$, cioè quando M cade in Z.

Altre risoluzioni dei sigg. Giuseppe Marletta, Ernesto Laura e Zeno Giambelli, R. Università di Torino.

458. *Determinare il seguente integrale*

$$\int \left\{ \theta(1+\theta) + (2\theta + \operatorname{sen}\theta) \operatorname{sen}\theta \right\} \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

GIOVANETTI.

Risoluzione del sig. Zeno Giambelli, studente della R. Università di Torino e del Prof. Alfredo Massa.

Nei primi due dei quattro integrali

$$\int \theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta, \int \theta^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta, \int 2\theta \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta, \int \operatorname{sen}^3\theta \, d\theta,$$

in cui si decompone il dato, si possono separare mediante l'integrazione per parti i fattori razionali dai trascendenti, e quindi si ricava

$$\int \theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta = -\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta,$$

$$\int \theta^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta = -\theta^2\cos\theta + 2\theta\operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta,$$

$$\int 2\theta \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta = \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{2\theta \operatorname{sen} 2\theta + \cos 2\theta}{4}\right).$$

Ora siccome anche

$$\int \operatorname{sen}^3\theta \, d\theta = \frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta$$

si conclude

$$\int \left\{ \theta(1+\theta) - (2\theta + \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta \right\} \operatorname{sen}\theta \, d\theta = (1 - \theta(1+\theta))\cos\theta + (2\theta+1)\operatorname{sen}\theta + \\ + \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{2\theta\operatorname{sen}2\theta + \cos^2\theta}{4}\right) + \frac{\cos^3\theta}{3}.$$

QUISTIONI PROPOSTE

460. Se P_1, P_2, P_3 sono i punti di mezzo degli spigoli laterali di tronco di un prisma triangolare, l_1, l_2, l_3 le lunghezze di questi spigoli, il baricentro del tronco è il baricentro dei tre punti P_1, P_2, P_3 affetti dai coefficienti $2l_1 + l_2 + l_3$, $l_1 + 2l_2 + l_3$. $l_1 + l_2 + 2l_3$ rispettivamente.

LAZZERI.

461. Due triangoli affini inscritti in uno stesso cerchio sono ortologici ed i centri di ortologia stanno su quel cerchio.

GALLUCCI.

462. Usando la rappresentazione simbolica, dimostrare che l'Hessiano n^{simo} d'una forma binaria di grado $m \geq 2n$ è

$$\sum_{h=1}^{n=h} \prod_{\alpha=0}^{\alpha=2^{n-h}-2} \left\{ \sum_{\alpha \,.\, 2^h,\, h} \overline{pq} \right\}^2$$

ove $\Sigma_{\alpha, 2^h, h} \overline{pq}$ indica la somma di tutti i termini

$$\overline{pq} = \frac{d}{dx_p} \frac{d}{dy_q} - \frac{d}{dx_q} \frac{d}{dy_p}$$

in cui p assume i valori

$$\alpha . 2^h + 1. \ \alpha . 2^h + 2 \ldots \ \alpha . 2^h + h,$$

e q i valori

$$\alpha (2^h + 1), \ (\alpha + 1) 2^h + 2 \ldots \ (\alpha + 1) 2^h + 2^h.$$

GIAMBELLI.

463. Un triangolo OVP ha due vertici fissi e il terzo P descrive una retta g non passante per V nè per O: la perpendicolare a |VP| in V seghi |OP| in P′; dimostrare che

1° il luogo di P′ è una conica G^2 passante per O e normale a |OV| nel punto V: costruire la tangente in O e P′:

2° G^2 è ellisse, parabola o iperbole secondochè il cerchio G^2_x descritto sul segmento OV come diametro sega g in due punti imaginari conjugati, reali e coincidenti, o reali e distinti:

3° se g passa pel punto medio M del segmento |OV| la G^2 è iperbole equilatera: il luogo dei centri delle iperboli equilatere corrispondenti ai raggi del fascio M è un cerchio:

4° il luogo dei fuochi delle parabole corrispondenti alle tangenti del cerchio G^2_x è una cissoide di Diocle.

464. Un triangolo OVP ha due vertici fissi e il terzo P descrive nel suo piano una curva C^n: se o è la perpendicolare a |OV| in V, e P′ la intersezione di |OP| con la perpendicolare a |VP| in V, dimostrare che le tangenti a C^n nel punto P e alla curva corrispondente C^{2n} in P′ si segano sulla retta o' simmetrica di o rispetto a |PV|.

465. Un triangolo OVP ha due vertici fissi e il terzo P descrive un cerchio, passante per O, col centro sulla perpendicolare in V alla |OV|: se il raggio |OP| è segato in P′ dalla perpendicolare a |VP| in V, il luogo di P′ è una strofoide. Costruire la tangente in P′.

466. Dati in un piano un cerchio C^2 di centro O e un punto-circolo V non situato sopra C^2, sul raggio che unisce O con un punto variabile P di C^2 prendiamo il conjugato armonico P′ di P rispetto al punto-circolo: dimostrare che il luogo di P′ è una quartica razionale circolare, con un punto doppio di O e un punto tacnodale in V (curva di Jerabek); costruire la tangente in P′, le tangenti nel punto doppio e le due tangenti doppie.

467. Nella inversione quadrica (piana) definita dal polo O e dal cerchio infinitesimo V, un cerchio di centro V, non (passante per O) si trasforma in una quartica razionale circolare (con un punto doppio in O e un punto tacnodale in V) che è linea d'ombra di un'elicoide gobbo. Costruire le intersezioni della quartica con una retta; le tangenti nel punto doppio; la tangente in punto; le due bitangenti; partendo dalla generazione indicata della curva.

468. Sul raggio vettore condotto dal fuoco F di un'ellisse a un punto variabile P della curva si prendono a partire da P ed F nelle direzioni PF, FP i segmenti PA', FA eguali al semi grande asse: dimostrare che l'angolo AOA' è retto; trovare il luogo del punto A'.

469. Sopra una retta sono dati tre punti ABC ed un'origine O; dimostrare che:

1°. Se uno solo dei punti ABC è reale ed abbiamo

$$OA - OB + OC = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2,$$

uno dei due punti Hessiani della cubica binaria (ABC) è all'infinito;

2°. Se

$$\Sigma \frac{(OA + OB)^2}{OA \, . \, OB} = 0$$

i due Hessiani seno equidistanti da O;

3°. Quando uno solo dei punti ABC è reale ed abbiamo

$$OA + OB + OC = \frac{OB \, . \, OC}{OA} + \frac{OC \, . \, OA}{OB} + \frac{OA \, . \, OB}{OC},$$

uno dei due Hessiani è O.

RETALI.

BIBLIOGRAFIA

MARCO NASSÒ. — *Algebra elementare ad uso dei Licei e degli Istituti Tecnici (primo biennio) secondo i programmi governativi.* — Torino, Tipografia e libreria Salesiana, 1898. — L. 3,50.

Di questo libro parmi sia il caso di dire qualche parola, giacchè si distingue dagli altri per la cura che l'autore ha posto a riuscir facile e semplice senza venir meno al rigore, scopo che, a lode sua, è quasi dappertutto completamente raggiunto. La facilità è stata ottenuta sia sopprimendo quanto non è strettamente necessario in un corso elementare, specialmente liceale, sia abbondando in spiegazioni e dilucidazioni di indole pratica, che attinte, come apparisce chiaramente, all'uso della scuola segnalano allo scolaro le difficoltà e l'aiutano a sormontarle.

Gli errori in cui spesso cadono i principianti sono riportati a tempo e luogo nel libro, insieme ad opportuni consigli per scansare le più comuni inesattezze.

Le dimostrazioni in generale sono precedute dall'applicazione dell'enunciato ad un esempio pratico, cosa utile per farsi chiara idea della portata del teorema e spesso una breve traccia riassuntiva della dimostrazione aiuta a bene afferrarla ed intenderla.

I capitoli sull'introduzione dei numeri e sulle loro operazioni sono trattati con scrupolo e minuzia, attenendosi ai metodi moderni del Dedekind e del Peano; ma qui forse l'autore, preoccupato dal pensiero di dare all'argomento la forma rigorosa, non ha saputo raggiungere, a parer mio, la semplicità didattica di altre parti del libro, particolarmente perchè ha dato un soverchio sminuzzamento alle proposizioni, col rischio che ciò ingeneri stanchezza negli scolari e nuoccia alla limpida comprensione dell'argomento. Ma in tutto il resto è stato tenuto conto in generale di certe esigenze scolastiche, col dare precisi e completi enunciati di tutti i teoremi, corollari e regole, un dall'altro distinti anche colla diversità dei caratteri di stampa.

L'opera è divisa in due parti. La prima consta di tre libri, che trattano le materie che s'insegnano attualmente nel primo e secondo Corso Liceale. Un'appendice contiene quello che, non essendo strettamente prescritto per i Licei, si suole tuttavia, quando è possibile, spiegare agli alunni: cioè i sistemi di più di due equazioni di primo grado, le equazioni riducibili al secondo grado, le applicazioni dei logaritmi, la estrazione di radice quadrata, e inoltre (e questa è notevole innovazione) la moltiplicazione e divisione dei polinomi, delle quali prima d'allora non è fatta parola, cosa che mi pare ottima per la divisione, ma che forse non è altrettanto giustificata per la moltiplicazione.

La parte seconda del libro, cioè più di un terzo dell'intera opera, è esclusivamente dedicata agli esercizi (oltre 2000) dei quali alcuni, e non pochi, sono ampiamente risoluti e discussi per istruzione e norma degli allievi, e i restanti sono semplicemente proposti. Tali esercizi sono ordinati in corrispondenza dell'ordinamento della materia svolta, e sono graduati secondo la difficoltà.

Noticine storiche disseminate qua e là servono ad accrescer valore al libro, che io credo destinato, cosa in generale non facile, a destare interesse negli scolari.

Alcune mende e qualche inesattezza si possono rilevare anche in quest'opera; ma siccome non sono tali da intaccare il rigore che informa il libro nè la sua buona intonazione generale, così in questo breve cenno credo non sia necessario l'enumerarle una ad una: l'accorto insegnante saprà esso stesso rilevarle e correggerle.

L'edizione è nitida e corretta; ed il libro, che è posto in vendita già legato, si presenta con aspetto assai elegante.

R. Bettazzi.

Virgilii e Garibaldi. — *Introduzione all'Economia Matematica.* — Milano, Hoepli, 1899.

Questo manuale risponde al desiderio espresso dagli economisti italiani di avere cioè " un libro elementare che contenga quei principî di matematica divenuti " ormai indispensabili per seguire l'odierno sviluppo della Scienza Economica ".

Gli AA., in fondo, hanno avuto in mira di estendere ai varî rami della Matematica il concetto che ha mosso il Fischer a comporre il suo *Calculus*, esporre cioè le nozioni di Matematica in forma semplice, in modo da potere essere apprese da chi sia poco versato in tali studi, ed esporre di queste nozioni solo quando occorra per l'applicazione alla Scienza Economica.

Nell'Introduzione gli AA. fanno una rapida rivista del progredire della Economia matematica, dai primi tentativi del Beccaria, del Silio, del Canard, ecc. fino a segnar gli ultimi confini a cui può dirsi pervenuta la scienza attuale.

Questa scienza ha avuto molti fautori, ma anche molti detrattatori; però, che la Matematica possa con utilità applicarsi all'Economia, può dirsi che quasi tutti gli economisti l'ammettano concordemente; il disaccordo sta solo nel modo e nella misura di questa applicazione.

Il Whewel dice che " la Matematica è la logica delle quantità e diventerà " necessariamente lo strumento di tutte le scienze nelle quali la quantità è il " soggetto trattato, è il ragionamento deduttivo, il procedimento adoperato ", ciò che è press'a poco ripetuto, a' nostri giorni, anche dal Messedaglia.

Come chiusa dell'Introduzione gli AA., rammentano come, malgrado i lavori di Pascal, Bernoulli e Huygens, il Calcolo delle probabilità abbia atteso il genio di Laplace per assurgere al grado di Scienza; così l'Economia matematica, iniziata con le pubblicazioni di Cournot, Ievons, Walras, Edgeworth, Pareto, ecc., attende il suo Laplace " che raccolga i tentativi precedenti e li componga in un opera magistrale ".

Le nozioni di matematica sono divise in tre libri.

Il primo è dedicato all'Algebra e comprende il Calcolo Algebrico, la teoria delle Equazioni di 1° e 2° grado, i Logaritmi, il Calcolo Combinatorio e la Teoria delle probabilità.

Il libro secondo contiene molto sommariamente i principi di Trigonometria e di Geometria Analitica.

Nel terzo sono esposti i principi del Calcolo Infinitesimale (Funzioni di una variabile, limiti, derivate e differenziali, Funzioni di più variabili, Teoremi sulle derivate, Funzioni omogenee, Massimi e Minimi, Integrali indefiniti, Integrali definiti).

Quasi ad ogni capitolo sono opportunamente applicate le teorie svolte a qualche problema di Scienza economica.

Fra l'Introduzione ed il primo Libro vi è un capitolo destinato alla Bibliografia (dal 1711 al 1898) che può essere un'eccellente guida per chi voglia intraprendere un tale ordine di studi. G. C.-L.

Il giorno 18 febbraio scorso, uno dei più alti intelletti matematici che abbiano onorato il secolo nostro, veniva improvvisamente rapito alla scienza.

SOPHUS LIE

colpito da improvvisa malattia cerebrale, forse per eccesso di lavoro, si spengeva nella ancor verde età di 56 anni (era nato a Nordfjordeid in Norvegia da Johan-Hermann Lie pastore, il 17 dicembre 1842) a Christiania, dove era tornato da appena sei mesi, richiamato dal governo del suo paese, che gli aveva fatto un trattamento speciale, adeguato ai suoi grandi meriti.

L'indole del nostro giornale non ci consente di parlare neanche alla sfuggita della sua ingente produzione scientifica, iniziata nel 1869, colla quale si è costruito un monumento imperituro di gloria. Fra le sue più importanti scoperte ricorderemo *la teoria delle trasformazioni di contatto*, e *la teoria dei gruppi continui di trasformazioni* (Lipsia, Teubner, 3 vol., 1888-93), che è l'opera sua più poderosa; e fra le applicazioni, che egli fece di questa teoria, ricorderemo le sue ricerche sui fondamenti della geometria, per le quali gli fu recentemente conferito il primo premio Lobatschewsky.

Sophus Lie insegnò dal 1877 al 1886 nell'Università di Christiania, poi a Lipsia dove succedè a Klein, e da poco, come abbiamo detto, di nuovo a Christiania, dove preparava gli elementi per una nuova grande opera, già annunziata, sulla teoria generale di tutti i gruppi finiti e infiniti, sugl'invarianti differenziali e le applicazioni generali alla teoria dell'integrazione.

Ebbe a valorosi collaboratori i professori Engel e Scheffers, che cooperarono per mezzo di trattati alla diffusione delle sue dottrine.

*DA GIORNALI E RIVISTE

Mathèsis, récuil math. à l'usage des écoles speciales etc., par M. M. *L. Mansion* et *J. Neuberg* (Gand, Ad. Hoste, ed.) T. $VIII_2$. 1898.

Fasc. XI (dicembre). — *G. Loria*. La strofoide è una settrice e una duplicatrice. (L'A. dimostra i due teoremi ennunciati nel titolo, analizzando due passaggi della corrispondenza di Chr. Huygens " Oeuvres completes „, 1888, T. I, p. 236 e p. 238). (*) — *F. Dauge*. Sul limite verso cui tende un certo triangolo Lobatschewskiano. — Soluzioni delle quistioni proposte 1049, 1051; 1052 (*Seligmann*), 1057. — Bibliografia. — Quistioni d'esame. 864-868. Quistioni proposte 1197-1200. Al presente fasc. è unito un suppl. di 48 pag. contenente la Mem. del sig. prof. Cl. Servais " La curvatura e la torsione nella collineazione e la reciprocità „ Estr. dal tomo LVIII della Mem. della Acc. Reale del Belgio, 1898.

T. IX_3, 1899. Fasc. 1 (gennaio). — *De Tilly*. Dimostrazione generale del secondo teorema di Legendre. (Se esiste un triangolo la cui somma degli angoli vale due retti, questa somma è la stessa in ogni triangolo). — *C. E. Wasteels*. Sulle figure cilindriche. (Area e proprietà di alcune figure tracciate sopra un cilindro di rivoluzione, fra le quali notiamo la seguente, analoga al teor. di Lexell. " il vertice di un triangolo cilindrico di superficie costante a base fissa, descrive una sezione piana passante pei punti diametralmente opposti ai termini della base „). — *V. Jerabek*. Sopra una quartica. (Il centro O di un cerchio variabile O^2 percorre la bisettrice di un angolo fisso A e tocca i lati di questo: il luogo dei punti ove O^2 è segato dal raggio OB, che proietta O da un punto fisso B del suo piano, è la quartica studiata dall'A.; (**) la quale se il punto doppio A è all'infinito diviene la concoide di Nicomede). — *J Déprez*. Concorso generale in prime scienze, 1898. — Soluzione della quistione di Geometria analitica. — Bibliografia. — Risoluzione di quistioni proposte; 1045 (*Droz-Farny*) 1047 (*Déprez*) (la pedale della seconda sviluppata di una parabola rispetto al fuoco di questa è una cubica); (***) 1050; 1159 (*Déprez*), 1170; 1175 (*G. Gérard*). — Quistioni di esame 869-876. — Quistioni proposte 1201-1206.

Avvertenza. — Gli articoli contrassegnati con asterisco (*) sono stati inviati dal Comitato dell'Associazione *Mathesis*.

(*) Il Prof. Loria dimostra (§ 1, pag. 266) che il luogo di Y è una strofoide analiticamente; una dimostrazione sintetica semplicissima è la seguente: Se X, X' sono due punti della corda $\overline{AC}$, visti da D sotto un angolo retto, e Y,Y' i loro corrispondenti, i punti C,Y,Y' sono in linea-retta e la parallela da D a |CA| biseca il segmento $\overline{YY'}$; dunque MY = MY' = MD, e si ricade sulla generazione classica delle strofoide (Il lettore è pregato di fare la figura; le notazioni sono quelle stesse usate dal Prof. Loria).

(V. R.)

(**) Segando il cono e il paraboloide iperbolico, indicati dall'A., con un fascio di piani aventi per asse la direttrice ($S\,\omega$) del paraboloide passante pel vertice del cono, si ottiene la quartica come prodotto di due fasci A e B in corrispondenza (2,2); ciò che permette di studiarla più completamente: si trova, p. es., che è della sesta classe, passa pei punti ciclici, ha il punto doppio B per fuoco singolare ecc.

(V. R.)

(***) La pedale della sviluppata di una parabola rispetto al fuoco è una parabola il cui parametro è $\frac{1}{4}$ di quello della data: il teorema 12 dato a pag. 151 del *Periodico*, anno XIV, per quanto riguarda il luogo di N non è esatto.

(V. R

Fasc. II (febbraio). — *Stuyvaert.* Problemi di costruzione (l'A., osservando che, per noti teoremi sulle curve polari, le costruzioni della tangente e del centro di curvatura in un punto di una curva data sono ridotte a quella della conica polare in quel punto, dà la costruzione della conica polare in un punto per la cissoide, la strofoide, le quartiche trinodali bitangenti alla retta all'infinito nei punti ciclici, e le cubiche generali). — *G. De Rocquigny.* Quistioni d'Aritmologia (sedici teoremi fra i quali notiamo i seguenti: se $n > 1$, $(a^2 + b^2)^{2^n}$ è la somma di tre quadrati; ogni sesta potenza di un intero qualunque è la somma di un cubo, un quadrato e un num. triangolare; la somma di $4(2n - 1)$ interi consecutivi non è mai una potenza esatta; i primi $3n$ numeri pari formano una somma algebrica di quattro cubi). — *Godefroid.* Sulla formola del binomio (nuova dim. pel caso di m razionale, seguita da una nota storica e bibliografica). — Note matematiche (generalizzazione della quistione 789). — Risoluzione di quistioni proposte, 1043 (*Droz-Farny, Buysens Stuyvaert, Déprez* e *Hacken*), 1054 (*Boutin, Droz-Farny* etc.) (il luogo dei centri delle coniche circoscritte a un triangolo dato e cogli assi paralleli a due direzioni date è una conica) — 1055 (*Cristesco, Krahé, Colart*) (pedale della *kreuz-curve* circolare rispetto al centro) — 1165; 1171; 1172 (*Ripert*). — Quistioni di esame 877-880. — Quistioni proposte 1207-1210.

V. R.

Bulletin de Mathématiques spéciales. Cinquième année. Paris, Soc. d'ed. scientifiques.

N. 1 (ottobre 1898). — *Ch. Michel.* Teoria sintetica delle cubiche a punto doppio e delle curve di terza classe a tangente doppia (continuazione § V e VI) (*). — *Ch. De La Condamine.* Quistione di Analisi (integrazione della equazione differenziale $y'' + \alpha y' + by = 0$). — *L. Gérard.* Triangoli inscritti a una conica Γ e coniugati rispetto ad un'altra (dim. elementare della nota relazione $\Theta' = 0$). — Quistioni risolute 85, 88 e 132. — *E. N. Barisien.* Alcuni luoghi geometrici. — Quistioni proposte 144-148 (*Barisien*).

N. 2 (novembre 1898). — *E. Ballue.* Aggregazione di scienze matematiche, 1897; soluzione geometrica. (Il teorema espresso nella prima parte della quistione, era già stato dato da me, qualche mese prima; cfr. *Periodico di Mat.* T. XII, pag. 100, quistione 353; T. XIII, pag. 84). — *L. Gérard.* Soluzione analitica. — Esami della scuola centrale. — Quistioni risolute 132, 135. — *E. N. Barisien.* Esercizi. — Quistioni proposte 149-151.

N. 3 (dicembre 1898). — *Ch. Michel.* Sui punti d'inflessione delle cubiche (dim. analitica del notissimo teorema di Plücker " una cubica generale ha sempre tre soli flessi reali „). (**) — *Ch. Michel.* Sul punto d'arresto (una curva algebrica non ha punto d'arresto). — *Fitte.* Sulle coniche ortogonali a una conica data e sulle quadriche ortogonali a una quadrica data (Per un punto possono condursi nove quadriche ortogonali a una quadrica data. Per un punto possono condursi cinque coniche normali a una conica data in tutti i punti d'intersezione.) — Scuola centrale (ottobre 1898). — *E. N. Barisien.* Nota sulla quistione 132. — Quistioni risolute 134-135. — Esami orali della scuola centrale (cont. v. n. 2). — Quistioni proposte 152-162. — Scuola centrale (1898, 2ª sessione).

(*) Ci riserviamo di analizzare questo lavoro tostochè ne sarà terminata la pubblicazione. (V. R.)

(**) Cfr. Cremona, *Curve piane*, n. 144, (*a*), e Schröter, *Die Theorie der Ebenen Curven dritter Ordnung*, p. 237-239.

(V. R.)

N. 4 (gennaio 1899). — *L. Gérard*, Sui punti d'inflessione d'una cubica (oss. sulla nota del sig. Ch. Michel sullo stesso argomento, inserita nel n. preced.). — *E. Bally*, Dim. di alcuni teoremi relativi alle coniche (teor. di Fregier, di Hesse, coppie di Pappo ecc.) (*). — Scuola centrale (luglio 1898). — Quistioni risolute 86, 149. — Quistioni proposte 163-164. (V. R.)

Revue de mathématiques spéciales par M.M. *E. Humbert* et *G. Papelier*, 9e année. Paris, Nony et C.e

N. 1 (ottobre 1898). — Parte Prima. *M. d'Ocagne*. Sulla formula di Taylor. — *G. Maupin*. Nota sul problema di Adriano Romano. — Geom. analitica. — Risoluzione delle quistioni 701 (luogo del 5° ordine relativo a una strofoide e una cissoide rette, aventi il punto doppio e l'assintoto reale comune) (*Roda Plius*); 702 (*E. Lemoine E. Humbert*); 715 (proprietà di due coniche mutuamente coniugate rispetto a un punto) (**) (*Vasnier*). — *Fisica e Chimica* (Risoluz. delle quistioni 680 (*Bunel*) 681. — Quistioni proposte agli esami orali, Scuola Politecnica 1898; I. Matematiche elementari 987-996; II. Algebra 997-1039; III. Trigonometria 1040-1059; IV. Geom. analitica 1060-1250. — Quistioni proposte 780-781. — Parte Seconda. Geom. analitica. Risoluz. delle quistioni 719 (*A. Gresser*). 726 (inviluppi e luoghi relativi al *folium* di Descartes) (***) (*H. Moutet-Fortis*). 729 (una generazione della cissoide obliqua) (*J. Roda*). — Fisica e Chimica. Risoluzione delle quistioni 705, 706, 707. — Quistioni proposte 782-783.

N. 2 (novembre 1898). — Parte Prima. *Bondieu*. Nota sulla moltiplicazione e la divisione degli archi (data una funzione circolare d'un'arco, trovare i valori delle funzioni circolari di un altro arco commensurabile col primo). — *E. H.* Quistione relativa agli esami della Scuola Politecnica (equazione dei piani principali d'una quadrica). — Geometria analitica. — Risoluzione della quistione 727 (luogo dei centri e dei poli di contatto, delle iperboli equilatere di grandezza costante bitangenti a una parabola data; inviluppo Σ delle corde di contatto; luogo dei punti tali che le tangenti a Σ nei piedi delle normali da essi condotte formino un quadrilatero inscrittibile e un cerchio ecc.) (****) (*Vasnier*). — Fisica. Risoluz. delle

---

(*) La denominazione di *coniche armoniche*, attribuita dall'A. a due coni che godono delle proprietà caratteristiche dei cerchi ortogonali, non sembra adattata, perchè già usata con altro significato; per la bibliografia di questo argomento veggasi la mia nota „ Sur un couple de deux coniques „ nell'*Intermédiaire des Mathématiciens*, février, 1897. (V. R).

(**) Dei quattro teoremi enunciati nella quistione 715 i primi due (1° e 2°) equivalgono al seguente (cfr. *Periodico di Matematica*, anno XIII, pag. 26, quistione 392): „ due coniche reali mutuamente coniugate sono omologiche armonicamente quando si prende per centro di omologia uno dei due punti di contatto, e per asse la tangente nell'altro „ che è il teor. XIV della mia nota *Sulle coniche coniugate* [Mem. della R. Acc. delle sc. di Bologna, serie IV, tomo VI, pag. 195 (dicembre, 1884)]; questo teorema, riprodotto nella mia memoria *Osservazioni analitico-geometriche sulla proiezione immaginaria ecc.* (*ibid.* tomo VII, pag. 601), dove è pure dimostrato analiticamente (pag. 610), fu da me esteso al caso in cui una delle due coniche è immaginaria nella Memoria *Ricerche sopra l'immaginario in Geometria* [*ibid.* tomo IX, pag. 273-277 (aprile 1888)]; io qui reclamo per esso la priorità anche perchè, recentemente, il signor J. W. Russell nella sua memoria *The reciprocators of two conics discussed geometrically* inserita nei *Proceedings of the London Math. Society* [vol. XXVI, pag. 458 (maggio 1895)] lo dà come nuovo, con altri che trovansi nelle mie note sopra citate. È bene notare che la conica di cui trattasi nel numero 3° della quistione 715 e quella del numero 4° sono fra di loro polari reciproche rispetto ad (8). (V. R.)

(***) Completiamo i risultati dell'A. sulla podoide del *folium* di Cartesio, rispetto al nodo: l'origine è un punto quadruplo con due coincidenze ed equivale a quattro punti doppi ordinari e due cuspidi di 1ª specie; oltre alla cuspide reale, trovata dall'A., ve ne sono due immaginarie coniugate; la curva possiede anche due punti quadrupli ordinari, non notati dall'A., nei punti ciclici. Le caratteristiche pluckeriane son dunque $m=8$, $\delta=16$, $\varkappa=5$; la curva è perciò razionale e della nona classe, ha otto flessi e venti tangenti doppie. (V. R.)

(****) Lo inviluppo Σ è la prima pedale negativa dell'*ovale doppio* $(x^2+y^2)^2=q^2x^2$, rispetto all'origine, ciò che permette di scriverne subito la equazione in coordinate puntuali

$$(x^2+y^2)^3-q^2(x^4+20x^2y^2-8y^4)+16q^4x^2=0.$$

quistioni 9, 717 poste agli esami orali. — Scuola Politecnica (1898). V. Geom. analitica (seguito) 1251-1285; VI. Geom. descrittiva, 1286-1399; VII. Statica 1400-1421. Concorso del 1897 (seguito). — Quistioni proposte 784-786. — Parte Seconda. Geom. analitica. Risoluzione della quistione 730 (*Proubet*). (una retta variabile |AB| incontra due assi ortogonali $0x$ $0y$ in A e B; le normali ad |AB| in A e B segano $0y$ in B', $0x$ in A'; H è la proiezione di 0 sopra |AB|; I, K, L sono i punti medi di OH, AB', A'B, e P è la intersezione di |AB| con |A'B'|: trovare i luoghi dei punti I, K, L, P, e gli inviluppi delle rette |AB'|, |A'B|, |A'B'| quando si abbia *a*) $OA \cdot OB = a^2$; *b*) $OA + OB = a$; *c*) $OA - OB = a$; *d*) $OA^2 + OB^2 = a^2$; *e*) $\overline{OA}^2 - OB^2 = a^2$ (*)). — Concorso del 1898 (seguito). — Bibliografia (*Leçons de Trigonometrie rectiligne* par C. Bourlet. Paris, A. Colin et C.º).

---

che non è data dal signor *Vuenier*. Oltre le quattro cuspidi reali trovati dall'A., la Σ ne possiede due nei punti ciclici, con la retta all'infinito per tangente cuspidale; vi sono inoltre due punti doppi ordinari, imaginari coniugati, sull'asse delle ordinate ($y = \pm 2qi$) de' quali l'A. non fa menzione. Occorre notare che l'origine è un tacnodo e conta per due punti doppi ordinari, non già un punto doppio a tangenti coincidenti come è detto a pag. 87. Le caratteristiche Plückeriane di Σ son dunque

$$m = 6, \qquad \delta = 4, \qquad \varkappa = 6;$$

la curva è razionale (di genere zero) della quarta classe, è priva di flessi e possiede cinque tangenti doppie, le quali sono però assorbite dalla tangente tacnodale (2) e dalla bitangente cuspidale all'infinito (3). Ho indicato quasi tutte le proprietà di Σ ora ricordate, in una nota inviata ai *Nouv. Annales* il 3 aprile 1898, relativa alla quistione 1788 (mars, 1898, pag. 148). (V. R.)

(*) Gli inviluppi di |AB|, nelle cinque ipotesi indicate hanno ordinatamente per equazioni tangenziali:

a) $a^2uv = 1$ (iperbole equilatera avente per assintoti gli assi coordinati);
b) $u + v = auv$ (parabola tangente agli assi positivi in punti equidistanti da O);
c) $v - u = auv^2$ (parabola simmetrica alla precedente rispetto ad $0x$);
d) $u^2 + v^2 = a^2u^2v^2$ (astroide, avente gli assi coordinati per bitangenti cuspidali);
e) $v^2 - u^2 = a^2u^2v^2$ (polare reciproca, rispetto ad O, della *Kohlenspitzencurve* $x^2 - y^2 = a^2x^2y^2$):

il luogo di I è omotetico (O centro e $\frac{1}{2}$ rapp. d'omotetia) alla pedale rispetto ad O dello inviluppo di |AB|, esso è dunque:

a) la lemniscata di Bernoulli $(x^2 + y^2)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 xy = 0$,
b) la strofoide retta $(x^2 + y^2)(x + y) = \frac{a}{2} xy$,
c) la simmetrica della precedente rispetto ad O x,
d) il rosone a quattro rami $(x^2 + y^2)^3 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 x^2 y^2$,

(teoremi noti)

e) la sestica $(x^2 + y^2)^2(y^2 - x^2) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 x^2 y^2$.

Lo inviluppo di |AB'| è la trasformata *ortotangenziale* rispetto all'asse $0x$, dello inviluppo di |AB|: le formole di questa trasformazione, inventata dal Prof. Cesàro (*Mathésis* III₁, pag. 248; X, pag. 142; *Nouv. Annales*, 1884, pag. 545; 1885, pag. 259) sono $u' : v' : 1 = uv : v^2 : v$ e le equazioni tangenziali dello inviluppo:

a) $v = a^2u^3$ (parabola cubica col centro in O e $0x$ per tangente stazionaria);
b) $u + v = au^2$ (parabola ordinaria tangente in O ad $0x$ ecc.);
c) $u - v = au^2$ (parabola simmetrica della precedente rispetto ad $0x$);
d) $u^2 + v^2 = a^2u^4$ (pedale negativa dell'*ovale doppio* rispetto al centro O);
e) $u^2 - v^2 = a^2u^4$.

Analogamente, lo inviluppo di |A'B| è la trasformata ortotangenziale dello inviluppo di |AB| rispetto all'asse $0y$; si ritrovano risultati analoghi ai precedenti: basta mutare u in v e viceversa.

Quanto all'inviluppo di |A'B'|, può aversi da quello di |AB| mediante la trasformazione cubica $u' : v' : 1 = v^3 : u^2 : uv$; per le equazioni tangenziali di tale inviluppo troviamo:

a) $a^2uv = 1$ (iperbole equilatera ecc.)

b) $u^{\frac{1}{3}} + v^{\frac{1}{3}} = a(uv)^{\frac{2}{3}}$ (quartica della quarta classe ecc.)

c) $u^{\frac{1}{3}} - v^{\frac{1}{3}} = a(uv)^{\frac{2}{3}}$ (simmetrica della quartica precedente risp. a $0y$)

d) $u^{\frac{2}{3}} + v^{\frac{2}{3}} = a^2(uv)^{\frac{4}{3}}$ (ottava classe, genere zero ecc.)

e) $u^{\frac{2}{3}} - v^{\frac{2}{3}} = a^2(uv)^{\frac{4}{3}}$

Le equazioni delle ultime quattro curve, rese razionali, sono:

$$a^3u^2v^2 - 3auv - (u \pm v) = 0,$$
$$a^6u^4v^4 - 3a^2u^2v^2 - (u^2 \pm v^2) = 0.$$

(V. R

N. 3 (dicembre 1898). — Parte Prima. *G. Lapointe.* Nota sull'equazione di 2° grado in S che permette di determinare gli assi di una sezione piana di una quadrica (l'A. previene alla eq. indicata seguendo un metodo analogo a quello che serve a stabilire la equazione cubica in S che si presenta sulla ricerca degli elementi principali di una quadrica). — Geom. analitica. — Risoluzione delle quistioni 720 (luoghi e inviluppo relativi alla cissoide di Diocle) (*) (*Barisien*); 728 (*Vasnier*); 731 (*Vasnier*). — Quistioni proposte 796-797. — Parte Seconda Geom. analitica. — Risoluz. delle quistioni 733 (*Barisien* e *Vasnier*); 737 (*Delplace*, *Vasnier* e *Jardin*); 738 (luogo dei vertici delle iperboli equilatere tangenti una retta data in un punto dato, e aventi un assintoto passante per un altro punto della retta data). (**) Geom. descrittiva (intersezione di un paraboloide con un cilindro di rivoluzione). — Bibliografia.

N. 4 (gennaio 1899). — Parte Prima. *G. Fontené.* Luogo dei fuochi delle sezioni centrali d'una quadrica (l'A., utilizzando una proprietà che già aveva servito al sig. Mac Cay per risolvere lo stesso problema, e cioè che se un punto è fuoco di una sezione piana, il piano di questa è piano ciclico del cono circoscritto alla quadrica uscente dal punto, trova la equazione in coord. rettangolari della superficie d'ottavo ordine luogo cercato). — *Ch. Bioche.* Sul numero delle condizioni esprimenti che una superficie algebrica passa per una curva data (determinazione del numero indicato in alcuni casi semplici. — Geom. analitica). — Risoluz. delle quistioni 716 (*Bicart*); 732 (*Pégorier* e *Vasnier*); 736 (*Roda-Plins*); 740 (*Vasnier*).— Quistioni proposte 800-802. — Parte Seconda. Algebra, Risoluz. delle quistioni 742 (*Proubet*) e 760 (derivata n^{esima} di $(x-\alpha)^m (x-\beta)^n$ e di $\operatorname{sen} ax \cos bx$). — Geom. analitica. — Risoluz. delle quistioni 743 (luoghi dei centri dei cerchi tangenti al grande asse di un'ellisse e a due raggi vettori focali di uno stesso punto) (*Barisien* e *Vasnier*); 748 (studio della curva $y = \text{arc sen L}\, x$) (*l'Hoste*); 749. — Fisica (risoluzione delle quistioni 723-739). — Quistioni proposte 803-805. — Bibliografia.

N. 5 (febbraio 1899). — Parte Prima. *J. Paoli.* Sopra un complesso del secondo grado (dim. analitiche di alcune fra le più semplici proprietà del complesso tetraedrale; cfr. Reye. *G. de position* T. II, p. 160 e segg. della trad. fr.). — *H. Rousseau.* Dimostrazione geometrica di due proposizioni relative alle coniche. (I punti di contatto delle tangenti comuni a due coniche sono 8 punti di una conica, teorema correlativo.) — *P. Faton.* Concorso generale di mat. speciali 1898 (luoghi e inviluppi relativi ai tripli segnati sopra un certo piano tangente di un'ellissoide, dai sistemi di diametri coniugati eguali). — Geom. analitica. — Risoluzione della questione 741, del sig. *Barisien* (Se la tangente in L ad una ipocicloide tricuspide sega ulteriormente la curva in M, N, e la tangente ortogonale (*Gegenlinie*) in G' (*Scheitelpunkt*) 1° MG' = LN, 2° le normali in M, N, L si segano sul cerchio passante per le tre cuspidi. Questi due teoremi sono conosciuti da molto tempo e appartengono a Steiner). — 747 (Se OABC è un tetraedro trirettangolo in O inscritto in una cubica gobba equilatera, il piano ABC e la tangente in O sono

---

(*) La sviluppata della cissoide di Diocle è del quarto ordine, della classe quarta e di genere zero; ha un punto triplo di natura speciale, formato dalla riunione di due cuspidi di prima specie con un nodo, nel punto all'infinito dell'asse della cissoide. Se il cerchio osculatore in M sega ulteriormente la cissoide in N, il terzo punto della cissoide sulla |MN| è il simmetrico, rispetto all'asse, del primo tangenziale di M: abbiamo così una costruzione semplice e, credo, nuova pel cerchio osculatore della cissoide in un suo punto dato.

(V. R.)

(**) La quartica luogo è la inversa rispetto a D della ellisse di Steiner del triangolo AA'D.

(V. R.)

ortogonali) (*). — Geom. descrittiva (intersezione di una sfera e di un'iperboloide di rivoluzione). — Quistioni proposte 806-809. — Parte Seconda. Algebra. Risoluz. della quistione 591 (massimo della funzione $(a-x)(a-y)(a-z):z$ con la relazione $x+y+z=2a$). — Geom. analitica 761 (*Pégorier*); 773 (*Pégorier*); 774 (*Barisien*); la podoide di una spirale logaritmica rispetto all'origine è una spirale eguale. Teorema noto) 779 (*Probet, Vasnier, Chapron*). — Quistioni proposte 810-814.

(V. R.)

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Volume XXXIV, fasc. 1-4. — *Picard E.* Sur la resolution de certains problèmes de mécanique par des approximations successives: extrait d'une lettre à M. Volterra. — *Lauricella G.* Sugli sviluppi in serie di soluzioni eccezionali dell'elasticità. — *Peano G.* La numerazione binaria applicata alla stenografia. — *Chini M.* Sopra alcune equazioni differenziali. — *Almansi E.* — Sopra l'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^2\Delta^2=0$.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo. Serie II, vol. XXXI, fasc. 18-20; vol. XXXII, fasc. 1-2-3. — *Scarpis U.* Sui determinanti di valore massimo. — *Aschieri F.* Commemorazione del Sen. Prof. F. Brioschi. — *De Pasquale V.* Sui sistemi ternari di 13 elementi.

Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Serie VII, tomo IX, disp. 10. — *Levi-Civita T.* Sopra una trasformazione in sè stessa delle equazioni $\Delta_2\Delta_2=0$. — *D'Arcais F.* La seconda funzione di Green sul campo piano limitato da due circonferenze concentriche. — *Marenghi C.* Sopra un teorema del Kronecker.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Bologna. Serie V, tomo VII, fasc. 2. — *Saporetti A.* Analisi di casi singolari geometrici paragonati colle relative forme algebriche.

Rendiconti delle sessioni della R. Accademia delle scienze di Bologna. Nuova Serie, vol. II, fasc. 3-4. — *Pincherle S.* Sull'operazioni aggiunte. — *Arzelà C.* Sulle rappresentazioni approssimate delle funzioni analitiche.

Rendiconto dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche (sezione della Società R. di Napoli). Serie III, vol. IV, anno XXXVII, fasc. 8-12; vol. V, fasc. 1. — *Cavalli E.* Le figure reciproche e la trasformazione quadratica nella Cinematica. — *Amodeo F.* Spazio normale e genere massimo delle curve di ordine m, k-gonali, di specie s. — *Brambilla A.* Sopra una classe di superficie e di varietà razionali.

Atti della Accademia Pontaniana. Vol. XXVIII (serie II, vol. III). — *Nicodemi R.* Figure nello spazio dedotte dalla rappresentazione di esse in geometria descrittiva.

(*) Dimostrazione geometrica: una cubica gobba e le dieci coppie di elementi opposti (lati e facce) d'un pentagono gobbo inscritto, son segati da un piano qualunque, non passante per alcun vertice secondo un triangolo polare e dieci coppie di elementi coniugati d'un sistema polare piano (Reye. *G. d. p.*, pag. 291, T. II): se ora prendiamo per pentagono inscritto quello che ha tre vertici in ABC e gli altri due riuniti in O sulla tangente alla cubica, e per piano segante quello all'infinito, abbiamo il teorema proposto.

(V. R).

Annali di Matematica pura ed applicata già diretti da *F. Brioschi*, e continuati da *E. Beltrami, L. Cremona, U. Dini, G. Jung*. Serie III, tomo II, fasc. 1. — *Almansi*. Sull'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^{2n}=0$. — *Ciani*. Le bitangenti delle quartiche piane studiate mediante le configurazioni di Kummer.

Il Pitagora pubblicato dal prof. *G. Fazzari*. — Il num. 6 del 2° semestre dell'anno IV contiene: *Nannei*. La geometrografia di Lemoine (cont. e fine). — Quistioni ed esercizi. — Maria Gaetana Agnesi. — Risposte alle quistioni proposte. — Varietà.

Il num. 1 del 1° semestre dell'anno V contiene: *Bettazzi*. Introduzione ad un corso di geometria elementare. — La trasformazione continua del Lemoine. — Giovanni Ceva e il suo teorema. — Quistioni e risposte. — Del simbolo π e rettificazione approssimata della circonferenza. — Giuoco. — Varietà.

Il num. 2 contiene: *Del Prete*. Sopra un teorema fondamentale per la geometria metrica. — *Gambioli*. Nota sul numero delle radici delle equazioni algebriche. — Errori che si riscontrano in alcuni libri di testo per le scuole elementari. — *Ciamberlini*. Sul massimo numero delle parti in cui il piano resta diviso da un dato numero di rette e di circonferenze (*). — Intorno ad alcune divisioni. — Quistioni e risposte. — Il „ De arenae numero „ di Archimede, versione di *A. Mancini*.

Il num. 3 contiene: *Riboni*. Sulla serie ricorrenti. — *Bustelli*. La grandezza in generale e la grandezza matematica in particolare. — *Testi*. Dei problemi di massimo e minimo. — *Crepas*. La serie di Fibonacci. — Quistioni e risposte.

(R. B.)

Bulletin de sciences mathématiques et physiques élémentaires.

N. 1 (a. IV, del 1 ottobre 1898) contiene: *L. G.* Sulle dimostrazioni geometriche, in cui l'A. ritiene che i procedimenti analitici sieno più facili a comprendere e da ritenere che non le dimostrazioni geometriche. — Note diverse. (Una formula nota pel volume del prismatoide; e la condizione affinchè quattro punti dati su quattro lati d'un quadrilatero gobbo sieno i punti di contatto di una sfera tangente ai quattro lati del quadrilatero). — Quistioni risolute. — Quistioni da risolvere.

N. 2 (15 ottobre 1898) contiene: *L. G.* Sulle dimostrazioni geometriche, (cont.) dove sono notati alcuni comuni errori di ragionamento geometrico. — Quistioni risolute. — Quistioni da risolvere.

N. 3 (1 novembre 1898). — *E. Rebuffel*. Sul parallelogrammo delle forze. (Saggio di esposizione rigorosa). — *L. G.* Equivalenza dei sistemi di equazioni trigonometriche. (Date le 10 equaz. trigon. colle quali si possono formare 120 sistemi di tre equaz., studia quanti fra questi sono equivalenti, per es., al sistema di Carnot). Quistioni risolute. — Quistioni da risolvere.

N. 4 (15 novembre 1898). — *G. Lehr*. Su una quistione aritmetica. (Consiste nel riunire in un solo enunciato i vari casi della generatrice di un numero decimale periodico). — *L. G.* Equivalenza dei sistemi di equaz. trigonom. (cont.). Quistioni risolute. (Preparazione agli esami. Esami di Saint-Cyr. Quistione proposta dal giornale. — Quistioni da risolvere.

N. 5 (1 dicembre 1898). — *Prof. Bonnefoy*. Inviluppo delle rette sulle quali due

(*) Le 3 formole ritrovate dall'autore appartengono a *Steiner*: sono la (1), (11) e (23) della Memoria: *Einige Gesetze über die Theilung der Ebene und des Raumes*, (Crelle, vol. 1, 1826).

(V. R.)

circoli intercettano delle corde in un rapporto dato. (L'inviluppo è una conica. L'art. è accompagnato da alcune importanti osservazioni di L. Gérard). — Corrispondenza. (Rapporto delle distanze di un punto da due punti dati). — Quistioni risolute. (Preparazione agli esami. — Quistioni proposte dal giornale). — Quistioni da risolvere. Temi proposti agli esami di baccelliere e al concorso delle scuole nazionali d'agricoltura.

N. 6 (15 dicembre 1898). — Rettificazione. (Una costruzione del circolo tangente a tre altri, indicata come di *Fouché* è invece di *Poncelet*). — Corrispondenza. (Rapporto delle distanze di un punto da due punti dati). — Temi dati alla scuola primaria superiore di Saint-Cloud. — Quistioni risolute. — Quistioni da risolvere.

N. 7 (1 gennaio 1899). — Nota sulla risultante di due equazioni di 2° grado. (È dimostrato senza far uso dei numeri complessi che dato $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ e posto $\Delta = a'^2 f(z) \,.\, f(\zeta) = (ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c)$, è $\Delta > 0$ anche nel caso in cui le equazioni $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ non hanno nessuna di due radici reali). — Corrispondenza (Eguaglianza di angoli coi lati paralleli, nello spazio. Due rette parallele a una terza son parallele fra loro. Proposta di un ordine da seguirsi per esporre la teorica delle parallele). — Quistioni risolute. — (Preparazione agli esami. Quistioni proposte dal giornale). — Quistioni da risolvere.

N. 8 (15 gennaio 1899). — *Duflot*. Angolo dell'altezza e della bisettrice d'un triangolo. — Quistioni risolute (Preparazione agli esami. — Quistioni proposte dal giornale). — Nota di Fisica. — Quistioni da risolvere.

N. 9 (1 febbraio 1899). — *G. Lehr.* Una curiosità d'Aritmetica. (Per diminuire il numero delle parole necessarie per *contare*, si aggruppano gli *ordini* a n a n, formando le così dette *classi*, perchè si è scelto $n = 3$? È enunciato il problema in generale). — Reciproco del secondo teorema di Tolomeo, dimostrazione di *Bonnefoy*. Quistioni risolute. (Preparazione agli esami. Quistioni proposte dal giornale). — Note di fisica. — Quistioni da risolvere.

N. 10 (15 febbraio 1899). — *P. R.* Sulle frazioni decimali periodiche. (Saggio di esposizione della teoria). — Preparazione agli esami. — Quistioni risolute. — Note sui problemi di fisica. — Quistioni da risolvere.

Journal de mathématique élémentaires di *A. Vuibert*.

N. 5 (1 dicembre 1898). — *M. D'Ocagne*. Osservazioni elementari sulle normali all'ellisse. — *G. Fontené*. Sulla teoria delle parallele.

N. 6 (15 dicembre 1898). — *P. Barrien*. Studio elementare delle variazioni del trinomio biquadratico.

N. 7 e 8 (1 e 15 gennaio 1899). — Il prof. *Girod* studia le variazioni della funzione $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ senza ricorrere alle derivate.

N. 10 (15 febbraio 1899) contiene una nota del prof *Vogt* sui punti di una secante a una conica che sono interni o esterni alla conica.

Oltre a ciò, in tutti i fascicoli, numerosi esercizi e problemi di ogni specie.

E. NANNEI

GIULIO LAZZERI — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 12 Maggio 1899.