6°. *La somma di tre triangolari consecutivi diminuita di un'unità, è tripla del triangolare medio.*

Abbiamo cioè

$$a_{n-1} + a_n + a_{n+1} - 1 = 3a_n.$$

Infatti, pel teorema I°, si ha

$$a_{n-1} + a_n = n^2;$$

e per la formula (1)

$$a_{n+1} = a_n + n + 1;$$

quindi risulta

$$a_{n-1} + a_n + a_{n+1} - 1 = n^2 + a_n + n = 3a_n.$$

7°. *La somma dei prodotti due a due di tre triangolari consecutivi, è tripla del quadrato del medio.*

Risulta cioè

$$a_{n-1}a_n + a_{n-1}a_{n+1} + a_n a_{n+1} = 3a^2_n.$$

Infatti, pel teorema 5°, si ha

$$a_{n-1}a_{n+1} = a^2_n - a_n;$$

onde pel teorema precedente, abbiamo

$$a_{n-1}a_n + a_{n-1}a_{n+1} + a_n a_{n+1} = a_n(a_{n-1} + a_{n+1}) + a^2_n - a_n =$$
$$= a_n(a_{n-1} + a_{n+1} + a_n - 1) = 3a^2_n.$$

IV. Consideriamo ora quattro triangolari successivi

$$a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2}.$$

8°. *È costante la differenza tra la somma degli estremi e la somma dei medî.*

Abbiamo infatti

$$(a_{n-1} + a_{n+2}) - (a_n + a_{n+1}) = (a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_n - a_{n-1}) = n + 2 - n = 2.$$

Corollario. — *Un quadrato perfetto aumentato di 2 è la somma di due triangolari.*

9°. *La somma dei quattro triangolari considerati, aumentata del numero* n — 1, *è un triangolare.*

Si ha pel teorema 1°

$$a_{n-1} + a_n = n^2, \qquad a_{n+1} + a_{n+2} = (n+2)^2;$$

quindi

$$a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + n - 1 = n^2 + (n+2)^2 + n - 1 =$$
$$= \frac{(2n+2)(2n+3)}{2} = a_{2n+2}.$$

10°. *Esiste la relazione*

$$(a_{2(n+2)} - a_{2(n+1)}) - (a_{n+3} - a_{n-1}) = 1$$

Si dimostra mediante la formula (3), che

$$a_{2(n+2)} - a_{2(n+1)} = 4n + 7 \qquad \text{e} \qquad a_{n+3} - a_{n-1} = 4n + 6.$$

11°. *Dati quattro triangolari successivi* a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, *il prodotto della differenza dei due triangolari estremi per la differenza dei due triangolari medî, è il triplo di un quadrato.*

Si ottiene cioè

$$(a_{n+2} - a_{n-1})(a_{n+1} - a_n) = 3(n+1)^2.$$

Ed infatti, per la formula (3), essendo

$$a_{n+2} - a_{n-1} = 3(n+1) \qquad \text{e} \qquad a_{n+1} - a_n = n + 1$$

si ricava immediatamente la formula voluta.

12°. *Similmente si ha*

$$(a_{n+2} - a_n)(a_{n+1} - a_{n-1}) = (2n+1)(2n+3).$$

13°. *Il sestuplo della somma dei primi* n *numeri triangolari, è uguale alla differenza*

$$a_n\, a_{n+2} - a_{n-1}\, a_{n+1}.$$

Infatti pel teorema 5°, risulta

$$a_n\, a_{n+2} = a^2_{n+1} - a_{n+1} \qquad \text{e} \qquad a_{n-1}\, a_{n+1} = a^2_n - a_n.$$

Perciò

$$a_n\, a_{n+2} - a_{n-1}\, a_{n+1} = a^2_{n+1} - a_{n+1} - a^2_n + a_n.$$

Ed essendo pel teorema 1°

$$a^2_{n+1} - a^2_n = (n+1)^3, \qquad \text{ed inoltre} \qquad a_{n+1} - a_n = n + 1,$$

otteniamo (essendo Σ_1 la somma dei primi n triangolari)

$$a_n\, a_{n+2} - a_{n-1}\, a_{n+1} = (n+1)^3 - (n+1) = n(n+1)(n+2) = 6\,\Sigma_1$$

14°. *Dati i quattro triangolari consecutivi* a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, *il quadrato della somma del prodotto degli estremi e del prodotto dei medî, è eguale alla somma del prodotto di due triangolari e del quadrato del sestuplo della somma dei primi* n *numeri triangolari.*

Infatti, ricordando l'identità

$$(r^2 + s^2)(r_1^2 + s_1^2) = (rr_1 - ss_1)^2 + (rs_1 + r_1 s)^2,$$

e posto

$$r = a_{n-1}, \quad s = a_n, \quad r_1 = a_{n+1}, \quad s_1 = a_{n+2},$$

si ha

$$(a^2_{n-1} + a^2_n)(a^2_{n+1} + a^2_{n+2}) = (a_{n-1}\, a_{n+1} - a_n\, a_{n+2})^2 + (a_{n-1}\, a_{n+2} + a_n\, a_{n+1})^2;$$

ed essendo, pel teorema 2°,

$$a^2_{n-1} + a^2_n = a_{n^2} \qquad \text{e} \qquad a^2_{n+1} + a^2_{n+2} = a_{(n+2)^2}$$

e, pel teorema precedente,

$$a_{n-1}\, a_{n+1} - a_n\, a_{n+2} = -6\Sigma_1,$$

abbiamo

$$(a_{n-1}\, a_{n+2} + a_n\, a_{n+1})^2 = a_{n^2}\, a_{(n+2)^2} - 36\, (\Sigma_1)^2.$$

V. — 1°. *Se* a *è somma di* n *triangolari, lo è pure (per* h *intero e positivo)*

$$(2h+1)^2\, a + n\,\frac{h\,(h+1)}{2}.$$

Infatti, se è

$$a = \frac{r_1\,(r_1+1)}{2} + \frac{r_2\,(r_2+1)}{2} + \ldots + \frac{r_n\,(r_n+1)}{2}$$

abbiamo

$$(2h+1)^2\, a + n\,\frac{h\,(h+1)}{2} = \sum_1^n{}_s\, \frac{(2h+1)^2\, r^2_s + (2h+1)^2\, r_s + h\,(h+1)}{2} =$$

$$= \sum_1^n{}_s\, \frac{[(2h+1)\, r_s + h]\,[(2h+1)\, r_s + h + 1]}{2}$$

c. v. d.

Per $n = 2$, si ha il noto teorema che: *se un numero* a *somma di* 2 *triangolari, lo è pure* $(2h+1)^2 a + h(h+1)$.

Per $h = 1$, abbiamo un altro teorema noto: *se* a *è somma di* 2 *triangolari, lo è pure* 9a+n.

Per $n = 1$, il teorema, che abbiamo dimostrato, si può enunciare in tal modo:

2°. *Se* a_m *è un numero triangolare, lo è pure* $(2h+1)^2 a_m + \dfrac{h(h+1)}{2}$, (*per* h *intero positiva*).

In tal caso è

$$(2h+1)^2 a_m + \frac{h(h+1)}{2} = \frac{[(2h+1)m+h][2h+1)m+h+1]}{2} = a_{(2h+1)m+h}$$

essendo

$$a_m = \frac{m\,(m+1)}{2}.$$

Nel caso di $h = 1$, abbiamo il noto teorema

Se a_m *è un triangolare lo è pure* $9a_m + 1$.

In questo caso si ha:

$$= 9a_m + 1 = a_{3m+1}.$$

3°. « *L'ottuplo di un triangolare, aumento di uno, è la differenza di due triangolari* ».

Infatti dall'eguaglianza:

$$9a_m + 1 = a_{3m+1},$$

ove è a_m un triangolare, si deduce

$$8a_m + 1 = a_{3m+1} - a_m$$

4°. « *L'ottuplo di un triangolare aumentato di uno, è il quadrato di un numero impari* ».

Infatti essendo per la formula (3),

$$a_{3m+1} - a_m = (2m+1)^2$$

si deduce

$$8a_m + 1 = (2m+1)^2.$$

Questo teorema è di Diofanto.

Corollario. — *Se* A *è somma di tre triangolari consecutivi*, 24 A — 15 *è un quadrato perfetto.*

Infatti (pel teorema 6°, parte I), se è $A = a_{n-1} + a_n + a_{n+1}$ abbiamo

$$A = 1 + 3a_n$$

e però

$$24\,A - 15 = 72\,a_n + 9 = 9(8a_n + 1)$$

e essendo, pel teorema di Diofanto:

$$8\,a_n + 1 = (2n+1)^2 \text{ è: } 24\,A - 15 = 9)2n+1)^2 = (3(2n+1))^2.$$

Osservazione. — Pel teorema di Diofanto, si può dire che ogni quadrato impari diminuito di un'unità è l'ottuplo di un triangolare, e però nessun triangolare può terminare con le cifre 2, 4, 9, 7 e quindi se un triangolare è un quadrato, dovrà terminare con una delle cifre 0, 1, 5, 6. (V. Lucas, *Théorie des Nombres,* pag. 53.)

5°. *Per l'identità*

$$a(2n+1)^2 = \frac{(2an+n+a)(2an+n+a+1)}{2} - \frac{(2an-n+a-1)(2an-n+a)}{2}$$

possiamo dire che ogni multiplo di un quadrato impari è la differenza di due triangolari.

Osservazione. — Facilmente si verifica che due triangolari della forma

$$\frac{4k^2(4k^2+1)}{2} \quad \text{e} \quad \frac{4k(4k+1)}{2}$$

sono tali che la loro differenza è multipla del quadrato di un numero impari (k intero positivo maggiore dell'unità).

Così pure la differenza dei 2 triangolari

$$\frac{8k^2(8k^2+1)}{2} \quad \text{e} \quad \frac{(8k+1)(8k+2)}{2},$$

e la differenza dei 2 triangolari

$$\frac{(4k^2+1)(4k^2+2)}{2} \quad \text{e} \quad \frac{4k(4k+1)}{2}$$

è multipla del quadrato di un numero impari (k è intero positivo).

VI. Enuncio tre teoremi, il primo dovuto a Fermat, gli altri due a Legendre, dei quali, si può vedere la dimostrazione nel « *Essai sur la théorie des Nombres* » di Legendre:

1°. *Ogni numero intero è somma di tre triangolari.*

(La dimostrazione del teorema dipende da un importante lemma: che un numero della forma 8 A + 3 si può sempre scomporre nella somma di tre quadrati impari).

2°. *Nessun numero triangolare, eccetto l'unità, è uguale ad un biquadratico.*

3°. *Nessun numero triangolare, eccetto l'unità, è eguale ad un cubo.*

VII. 1°. Indicando con Sp in generale la somma delle *potenze* p^{esime} dei primi n numeri, e con Σ_p la somma delle potenze p^{esime} dei primi n numeri triangolari possiamo scrivere simbolicamente

$$\Sigma \frac{n^m (n+1)^m}{2^m} = \frac{1}{2^m} (S_2 + S_1)^m$$

purchè si ponga per convenzione che dopo avere fatto lo sviluppo della potenza indicata nel secondo membro si ponga S_{2r+s} al posto di $S^r_2 S^s_1$. In particolare è

$$\Sigma_1 = \Sigma \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} (S_2 + S_1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

formola, che, come abbiamo già dimostrato, ci dà la somma dei primi n numeri triangolari.

Determiniamo la somma Σ_2 dei quadrati dei primi n numeri triangolari. Si ha

$$\Sigma_2 = \Sigma \frac{n^2 (n+1)^2}{2^2} = \frac{1}{4} (S_2 + S_1)^2;$$

ossia, per la convenzione fatta

$$\Sigma_2 = \Sigma \frac{n^2 (n+1)^2}{2^2} + \frac{1}{4} (S_4 + 2S_3 + S_2).$$

Ora, per la nota relazione di Fermat, si ha $5S_4 = S_2 (6S_1 - 1)$, ed essendo $S_3 = (S_1)^2$, abbiamo

$$\Sigma \frac{n^2 (n+1)^2}{2^2} = \frac{1}{10} [S_2 (3S_1 + 2) + 5 (S_1)^2]$$

2°. La somma dei prodotti binarii dei primi n numeri triangolari è data, come facilmente si trova, dalla formola

$$\Sigma\, a_{n-1}\, a_n = \frac{3}{10} S_2 (S_1 - 1)$$

3°. Se T_2 indica la somma dei quadrati dei primi m numeri pari e T_1 la somma dei primi m numeri impari, è noto che è

$$3T_2 = m(4m^2 - 1) \quad , \quad T_1 = m^2.$$

Se ora noi consideriamo la serie dei primi m numeri triangolari d'ordine impari

1, 6, 15, 28,

l'm^{esimo} termine è $\dfrac{(2m-1)^2 + 2m - 1}{2}$; onde, indicando con Σ'_1 la somma dei primi m numeri triangolari d'ordine impari, si ha

$$\Sigma'_1 = \Sigma \frac{(2m-1)^2 + 2m - 1}{2} = \frac{1}{2} (T_2 + T_1) = \frac{m(m+1)(4m-1)}{6}.$$

Poichè, se n è il numero dei numeri triangolari, su n triangolari, per n dispari, vi sono $\frac{n+1}{2}=m$ triangolari d'ordine impari, e per n pari, vi sono $\frac{n}{2}=m$ triangolari d'ordine impari, la Σ_1 assume per n impari la forma

(1) $$\Sigma'_1=\frac{(n+1)(n+3)(2n+1)}{24},$$

e per n pari

(2) $$\Sigma'_1=\frac{n(n+2)(2n-1)}{24}.$$

Esempio. — La somma dei triangolari d'ordine impari, che si trovano nei primi 30 triangolari, è per la (2)

$$\Sigma'_1=\frac{30\,.\,32\,.\,59}{24}=2360,$$

e la somma dei triangolari d'ordine impari, che si trovano nei primi 29 triangolari, è per la (1)

$$\Sigma'_1=\frac{30\,.\,32\,.\,59}{24}=2360$$

come si doveva prevedere facilmente.

4°. Indicando con Σ''_1 la somma dei triangolari d'ordine pari contenuti nei primi n triangolari, si trova immediatamente per n pari

$$\Sigma''_1=\frac{n(n+2)(2n+5)}{24},$$

per n dispari

$$\Sigma''_1=\frac{(n^2-1)(2n+3)}{24};$$

e perciò la somma dei primi m numeri triangolari d'ordine pari è data da

$$\Sigma''_1=\frac{m(m+1)(4m+5)}{6}$$

5°. Per n dispari si ha

$$1-3+6-10+15-21+\ldots-a_{n-1}+a_n=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Infatti possiamo scrivere la serie in tal modo:

$$1-(3-6)-(10-15)\ldots-(a_{n-1}-a_n)=$$
$$=1+3+5+\ldots+(n);$$

ed essendo il numero dei termini del secondo membro $\frac{n+1}{2}$, si ha

$$1-3+6\ldots-a_{n-1}+a_n=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

6°. Consideriamo la serie

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{2}{n(n+1)}+\ldots$$

Poichè ciascun termine di detta serie non è maggiore del termine corrispondente della serie geometrica convergente

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots,$$

la serie sarà convergente, e però

$$\lim_{n=\infty}\Sigma\ \frac{2}{n(n+1)}=2.$$

La somma dei primi n termini della serie, per n finito, è $\frac{2n}{n+1}$.

7°. Indicando con T_2^{n+1} la somma dei quadrati dei primi $n+1$ numeri impari, si ha

$$T_2^{n+1}-8\,\Sigma_1=n+1.$$

Basta ricordare che è:

$$3T_2^{n+1}=(n+1)(4n^2+8n+3)\quad \text{e}\quad \Sigma_1=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

VIII. Indichiamo in generale con Δm il numero triangolare che occupa l'm^{esimo} posto nella serie dei triangolari.

Dimostriamo allora il seguente teorema:

Se è

$$n=ab$$

ove a e b sono due numeri primi, si ha

$$\Delta n=\Delta a\,\Delta b+\frac{n}{4}\varphi(n)$$

essendo $\varphi(n)$ il numero degli interi inferiori ad n e primi con n.

Infatti abbiamo

$$\Delta n=\frac{n(n+1)}{2}\quad,\quad \Delta a=\frac{a(a+1)}{2}\quad,\quad \Delta b=\frac{b(b+1)}{2}.$$

Onde, essendo $n=ab$, è

$$\Delta n-\Delta a\,\Delta b=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{ab(a+1)(b+1)}{4}=\frac{n(a-1)(b-1)}{4}.$$

Ma per noti teoremi, è

$$\varphi(n)=\varphi(a)\varphi(b)\qquad \text{e}\qquad \varphi(a)=a-1\quad,\quad \varphi(b)=b-1;$$

quindi

$$\Delta n=\Delta a\,\Delta b+\frac{n}{4}\varphi(n)$$

IX. **Risoluzione di una particolare equazione di 3° grado.** — Consideriamo l'equazione completa di 3° grado

$$x^3-Ax^2+Bx-C=0$$

ove A, B, C, sono numeri interi positivi.

Vogliamo determinare la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione ammetta per radici tre numeri triangolari consecutivi. Indicando con x_1, x_2, x_3 le tre radici, si hanno le note relazioni

$$\Sigma x_1 = A, \quad \Sigma x_1 x_2 = B, \quad \Sigma x_1 x_2 x_3 = C.$$

Ora abbiamo dimostrato che la somma di tre triangolari successivi diminuita dell'unità, è tripla del triangolare medio e che la somma dei prodotti due a due di 3 triangolari successivi è tripla del quadrato del medio (v. Teoremi 6 e 7 del § III). Quindi, se x_1, x_2, x_3 sono tre numeri triangolari successivi, risulta

$$(1) \qquad A - 1 = 3x_2 \quad , \qquad (2) \qquad B = 3x_2^2$$

e pel teorema 5) del § III,

$$(3) \qquad C = x_1 x_2 x_3 = x_2^2 (x_2 - 1).$$

Eliminando la x_2 nelle equazioni (1), (2), (3), risulta

$$(4) \qquad (A-1)^2 = 3B = \frac{27\,C}{A-4},$$

essendo inoltre $A - 1$ il triplo di un triangolare.

Dico ora che la condizione (4) e la condizione che $\frac{A-1}{3}$ sia un triangolare è anche sufficiente, affinchè l'equazione data di 3° grado ammetta tre radici reali che sieno tre numeri triangolari successivi.

Infatti si ha allora

$$B = \frac{(A-1)^2}{3} \quad , \quad C = \frac{(A-1)^2 (A-4)}{27}$$

onde l'equazione

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

si può scrivere

$$x^3 - Ax^2 + \frac{(A-1)^2}{3} x - \frac{(A-1)^2 (A-4)}{27} = 0,$$

ovvero

$$\left(x - \frac{A-1}{3}\right) \left(x^2 - \left(\frac{2A+1}{3} x + \frac{(A-1)(A-4)}{9}\right)\right) = 0.$$

Si vede quindi che $\frac{A-1}{3}$, numero triangolare, è una radice dell'equazione data. Sarà cioè $\frac{A-1}{3} = x_2$.

Ora indicando con x_1 e x_3 le altre 2 radici, dovendo essere

$$x_1 + x_2 + x_3 = A,$$

avremo

$$x_1 + x_3 = \frac{2A+1}{3};$$

e dovendo essere

$$x_1 x_2 x_3 = \frac{(A-1)^2 (A-4)}{27},$$

sarà

$$x_1 x_3 = \frac{(A-1)(A-4)}{9}.$$

Pei teoremi già citati, si vede che x_1 e x_3 radici dell'equazione data, sono i due numeri triangolari che comprendono $x_2 = \frac{A-1}{3}$.

Allorchè sia soddisfatta la relazione (4), e sia x_2 un triangolare, le radici x_1 e x_3 dell'equazione sono necessariamente reali, giacchè il discriminante dell'Equazione di 2° grado

$$x^2 - \frac{2A+1}{3} x + \frac{(A-1)(A-4)}{9} = 0$$

è $24A - 15$, numero, che come si è dimostrato, è un quadrato perfetto.

Dunque: *la condizione necessaria e sufficiente perchè un'equazione di 3° grado ammetta per radici tre numeri triangolari consecutivi è che sia*

$$(A-1)^2 = 3B = 27 \frac{C}{A-4},$$

e che $\frac{A-1}{3}$ *sia un triangolare.*

Per esempio sia l'equazione

$$x^3 - 199x^2 + 13068x - 283140 = 0.$$

Si ha $\frac{A-1}{3} = 66$, che è un numero triangolare. Inoltre i coefficienti soddisfano alla condizione (4). Quindi le radici dell'equazione sono 55, 66, 78.

Attilio Crepas
Studente della R. Università di Pavia.

SULLE FORMULE CHE ESPRIMONO LA LUNGHEZZA DI UN ARCO

e l'area di un settore circolare

Negli ordinari trattati di Geometria elementare, allorchè si vogliono stabilire le formule che danno la lunghezza di un arco circolare e l'area di un settore di cerchio, si ammette tacitamente che il rapporto fra due archi di ugual raggio sia uguale a quello dei segmenti ad essi *equivalenti.* Ora, si avverta subito che, mentre è lecito chiamare *per definizione* rapporto fra due archi di raggi differenti quello fra i segmenti ad essi equivalenti, non è invece rigoroso uguagliare *a priori* il rapporto di due archi del medesimo raggio con quello dei rispettivi segmenti equivalenti; perchè ciascuno di tali rapporti ha già di per se stesso un valore pienamente determinato, e quindi la loro uguaglianza, se vera, non può stabilirsi che con un teorema. In altre parole, dovremo provare che due archi di ugual raggio sono proporzionali ai segmenti ad essi equivalenti.

Poichè la dimostrazione di tale proprietà può farsi facilmente, e deducendosene poi subito le formule che esprimono la lunghezza di un arco circolare e l'area di un settore di cerchio, ho creduto opportuno esporre la via che conduce in modo rigoroso a questi resultati.

***

Sappiamo chiamarsi segmento *equivalente* ad un dato arco di circolo quello che è maggiore del perimetro di ogni linea poligonale convessa inscritta nell'arco, e minore del perimetro di ogni poligonale convessa circoscritta. Tale segmento esiste ed è unico, perchè i perimetri di siffatte poligonali costituiscono, come si sa, due classi *contigue* di segmenti, la prima delle quali non ha segmento massimo e la seconda non ha segmento minimo. Si sa pure che per determinare tale segmento equivalente all'arco non occorre considerare le classi formate dai perimetri di *tutte le possibili* poligonali convesse inscritte e da quelli di tutte le circoscritte, ma basta una coppia di classi contigue che siano costituite dai perimetri di infinite linee dell'una e dell'altra specie rispettivamente.

Ciò premesso, è facile intendere che, essendo α, β due archi di ugual raggio, ed a, b i segmenti ad essi equivalenti, se è $\alpha=\beta$, sarà $a=b$. Infatti i segmenti che costituiscono le due classi contigue che sono separate da a risultano rispettivamente uguali a quelli che formano le classi contigue separate dal segmento b; e perciò sarà $a=b$.

Passiamo ora a dimostrare che, essendo α, β, γ tre archi di ugual raggio, i cui segmenti equivalenti siano a, b, c, se è $\alpha=\beta+\gamma$, sarà $a=b+c$.

Infatti, disponiamo gli archi β e γ sopra una stessa circonferenza, in guisa da risultare adiacenti, e sia $AB=\beta+\gamma$ l'arco limitato dai loro estremi non comuni e contenente l'estremo comune C. Allora se p è il perimetro di una qualsivoglia poligonale convessa inscritta, nell'arco $AC=\beta$ e p' è quello di una circoscritta, risulterà

$$p<b<p'.$$

Analogamente, se q e q' sono rispettivamente i perimetri di una qualsivoglia poligonale convessa inscritta nell'arco $CB=\gamma$ e di una circoscritta, sarà

$$q<c<q'.$$

Quindi avremo

$$p+q<b+c<p'+q'.$$

E poichè sono contigue le classi dei segmenti (p, p') come pure quelle di (q, q') risulteranno tali anche le classi costituite dai segmenti $(p+q, p'+q')$. (*) Ma la prima di queste ultime è formata dai perimetri di infinite linee poligonali convesse inscritte nell'arco AB, e l'altra da quelli di infinite poligonali circoscritte: e perciò il segmento $b+c$ che segna il loro confine di separazione sarà uguale a quello equivalente all'arco AB, ossia $a = b + c$.

Dunque la corrispondenza fra gli archi di ugual raggio ed i segmenti ad essi equivalenti è tale che ad archi uguali corrispondono segmenti uguali, e ad ogni arco, che sia uguale alla somma di due altri, corrisponde un segmento che è uguale alla somma di quelli corrispondenti a questi due archi.

Ne segue, come appunto volevamo dimostrare, che *gli archi di ugual raggio sono proporzionali ai segmenti ad essi equivalenti.*

Ora, chiamando *lunghezza* di un arco di circolo la misura del segmento ad esso equivalente, rispetto ad una unità lineare fissata ad arbitrio, se indichiamo con r la misura del raggio (riferito a quella medesima unità), con α la misura in gradi dell'arco (cioè il rapporto fra questo e l'arco di 1° grado dello stesso raggio) e con l la sua lunghezza, avremo

$$\frac{\alpha}{360} = \frac{l}{2\pi r} . \text{ (**)}$$

Da cui

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180} .$$

Passando infine a considerare un settore di circolo, ricorderemo che le classi dei settori poligonali inscritti e circoscritti ad esso sono contigue, e che tanto il settore circolare quanto il rettangolo contenuto dal segmento equivalente all'arco e dalla metà del raggio sono prevalenti ai settori poligonali della prima classe e suvvalenti a quelli della seconda. Perciò diremo che ogni settore circolare è *equivalente* al rettangolo del segmento equivalente all'arco e della metà del raggio.

Ora è facile concludere che *due settori circolari di ugual raggio risultano proporzionali ai rettangoli che sono loro equivalenti;* (***) perchè tali settori sono proporzionali ai rispettivi archi, perciò ai segmenti equivalenti ad essi, ed infine anche ai rettangoli contenuti da questi segmenti e dalla metà del raggio.

(*) Infatti risulta $p'+q' > p+q$. Ed essendo $(p'+q')-(p+q) = (p'-p)+(q'-q)$, siccome per ogni segmento arbitrario σ esiste un p ed un p' la cui differenza è minore di $\frac{\sigma}{2}$, come pure un segmento q ed uno q', ne segue che per quelle due coppie di segmenti si avrà:

$$(p'+q')-(p+q) < \sigma.$$

(**) In molti trattati (per es. in quelli di *Veronese* e di *Faifofer*) si stabilisce questa proporzione senza nemmeno *definire* la lunghezza di un arco.

(***) Si osservi che tale proporzionalità è della stessa natura di quella fra gli archi ed i segmenti ad essi equivalenti; giacchè la parola *equivalente* non sta qui a significare che i settori ed i corrispondenti rettangoli si possono riguardare come somme di parti uguali (il che non è) ma soltanto che risultano compresi nella medesima coppia di classi contigue di poligoni.

Se dunque chiamiamo *area* di un settore di cerchio la misura del rettangolo ad esso equivalente, indicando con S l'area del settore, con r la misura del suo raggio e con α la misura in gradi dell'arco, avremo

$$\frac{\alpha}{360} = \frac{S}{\pi r^2}$$

e quindi

$$S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} \cdot (*)$$

Pavia, 3 novembre 1899.

M. Chini.

LA GEOMETRIA DEI TRIANGOLI

1. Riflessione generale. — Esaminando con qualche attenzione i progressi della geometria elementare si trova un particolare interesse ad osservare che non vi è soltanto una *geometria del triangolo* ma anche una *geometria dei triangoli*, la quale si fonda sullo studio dei *triangoli notevoli*.

Se noi indichiamo con a, b, c i 3 lati di un triangolo qualunque ABC, diremo che questo triangolo è *notevole*, se sussiste fra i 3 lati la relazione

$$f(a, b, c) = 0.$$

Questa relazione è necessariamente omogenea. Il caso più semplice è quello in cui essa sia di 1° grado, cioè della forma

$$(\lambda) \qquad \alpha a + \beta b + \gamma c = 0,$$

ove α, β, γ sono *numeri* che si chiamano le *caratteristiche* del triangolo notevole proposto. Per esempio le caratteristiche del triangolo isoscele sono $0, 1, -1$.

Un triangolo può essere *semplicemente* o *doppiamente notevole* secondochè si dànno una o due relazioni fra i lati.

Il triangolo rettangolo è un triangolo semplicemente notevole, la relazione essendo $a^2 = b^2 + c^2$; il triangolo equilatero è doppiamente notevole, perchè si hanno le relazioni $a = b = c$.

Quando si considera un triangolo doppiamente notevole, tutti i triangoli che corrispondono al caso considerato sono triangoli simili.

Si deve anche considerare che per ottenere un triangolo notevole si può imporre agli elementi geometrici di questo triangolo la verificazione di una relazione data. Questa relazione non sarà necessariamente della forma $f(a, b, c) = 0$; essa può contenere le altezze, le mediane, gli angoli .... ma si può sempre, se si vuole, sostituire con una relazione fra i lati.

(*) Si può pervenire a questo resultato anche osservando che

$$S = \frac{\pi r \alpha}{180} \times \frac{r}{2}.$$

Per esempio; supponiamo che sia data la relazione

$$\operatorname{ctg}\frac{B}{2} = \operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}; \tag{1}$$

le formole note dànno

$$a - 3b + c = 0 \tag{2}$$

e il triangolo notevole proposto ha per caratteristiche $1, -3, 1$.

Reciprocamente ogni triangolo che soddisfa alla relazione (2) soddisfa pure alla (1).

Ogni triangolo notevole esige uno studio particolare; questo studio ha per iscopo di ricercare le proprietà che gli sono *individuali*, cioè quelle proprietà che sono verificate nel triangolo proposto, ma che non appartengono a un triangolo qualunque.

Lo studio di ogni triangolo notevole è illimitato, o per meglio dire esso non ha altro limite che quello che include le proprietà semplici e interessanti di questo triangolo.

Il numero dei triangoli notevoli essendo doppiamente infinito, il campo delle ricerche su questo argomento è doppiamente infinito. In queste ricerche si potrà distinguere le proprietà che appartengono ad una famiglia di triangoli notevoli (p. es. a quella corrispondente alla relazione (λ)) e quelle che convengono soltanto a uno dei membri di questa famiglia.

Mi si domanderà forse quale utilità attribuisco a tali ricerche, ed io risponderò francamente che questa utilità non è certo fra quelle che possono mettersi in prima linea, come del resto avviene dell'utilità di quella geometria del triangolo di cui in principio ho parlato.

Nella geometria del triangolo alcuni hanno proseguito lo studio degli elementi notevoli che appartengono a un triangolo qualunque. Dopo aver considerato i punti, i cerchi...., essi hanno cercato dei nuovi elementi notevoli. Questa estensione era inevitabile, e l'utilità di questa geometria è per me del medesimo ordine di quella che si può attribuire alla *geometria dei triangoli*. Non può trattarsi evidentemente che d'un interesse speculativo, come del resto succede sovente nelle ricerche matematiche: bisogna però tener conto che quest'interesse è d'ordine puramente elementare. Ma, ricusarsi, *a priori*, di ricercare quelle proprietà che derivano dallo studio di un triangolo notevole, sotto pretesto che il triangolo non notevole è il solo che presenta un vero interesse, è ragionare all'incirca come colui che nella geometria classica intendesse di non voler conoscere i teoremi particolari sul triangolo rettangolo.

Vi è dunque, concludendo, una geometria dei triangoli, ed essa ha un interesse di ordine speculativo, con questa considerazione vantaggiosa che essa può essere coltivata come complemento di quella *Euclidea*, e può fornire un vastissimo numero di esercizi elementari.

2. Darò qui, nella speranza che questa geometria incontri qualche cultore, un esempio dello studio che si può fare di un triangolo notevole.

Sia T il triangolo di cui le caratteristiche sono $1, -3, 1$, (intendendo sempre che le caratteristiche siano enunciate nell'ordine a, b, c, cioè la 1ª sia il coefficiente di a, la 2ª il coefficiente di b, la 3ª il coefficiente di c nella relazione $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$) quello cioè i cui lati soddisfano la relazione

$$3b = a + c$$

e proponiamoci di cercare qualcuna delle proprietà di questo triangolo T. Ma a proposito di questo studio qualche riflessione generale deve esser aggiunta a quelle precedenti.

Per fare in una maniera generale lo studio d'un triangolo notevole, conviene dapprima ricercare l'espressione dei suoi differenti elementi geometrici in funzione di due parametri λ e μ, se è semplicemente notevole: in funzione d'un parametro t se è doppiamente notevole. Quando il formulario è stabilito, le conseguenze che se ne possono dedurre si trovano con facilità.

Si osserverà a questo proposito che

1°. *In un triangolo semplicemente notevole vi è sempre una proprietà corrispondente a tre elementi di questo triangolo.*

2°. *In un triangolo doppiamente notevole vi è sempre una proprietà corrispondente a due elementi di questo triangolo.*

Nell'ultimo caso, siccome tutti i triangoli di una medesima famiglia sono simili, la proprietà corrispondente a due elementi del triangolo considerato non può riguardare che il rapporto di questi due elementi.

Per es. si voglia considerare il triangolo doppiamente notevole che è così definito:

1° è rettangolo,

2° i suoi lati sono in progressione aritmetica.

Tutti i triangoli di questa famiglia sono simili al triangolo rettangolo di cui i lati sono $3t, 4t, 5t$. Fra due elementi qualunque di questo triangolo vi è una relazione, ma *questa non può basarsi che sul rapporto di due di questi elementi.* Si può, per citare una proprietà che si verifica immediatamente, riconoscere cioè che il raggio del cerchio ex-iscritto corrispondente all'ipotenusa è il triplo del diametro del cerchio iscritto.

Ma tutte le *relazioni metriche* fra gli elementi di questo triangolo sono, lo ripetiamo, delle relazioni di rapporto fra due elementi.

Lo studio di un triangolo notevole deve basarsi su due punti. Si può cercare: 1° le *relazioni metriche* come quella che abbiamo citato; 2° le *relazioni descrittive.* Le prime sono in numero indefinito, e ne abbiamo dato la ragione, le altre sono al contrario assai rare e non possono risultare che da proprietà sempre difficili ad osservarsi.

Poichè tutti gli elementi di un triangolo semplicemente notevole si esprimono in funzione di due parametri λ e μ, tre elementi qualunque, lo ripetiamo, sono legati da una certa uguaglianza; vi è dunque un'infinità di proprietà metriche in un tale triangolo, proprietà che gli sono individuali, adottando la parola adoprata precedentemente. Scegliendo quelle proprietà che sono abbastanza semplici, si sarà fatto lo studio del triangolo considerato dal primo punto di vista.

Il secondo modo di studiare i triangoli notevoli dà origine a delle ricerche di un ordine più delicato. Bisogna, per seguire questa seconda via, cercare nel triangolo studiato dei punti che siano in linea retta, delle rette concorrenti etc. Queste proprietà sono individuali al triangolo considerato, vale a dire non appartengono ad un triangolo qualunque.

Diamo un esempio di una proprietà descrittiva enunciando il teorema seguente:

Nel triangolo rettangolo, i cui lati sono in progressione aritmetica se si considera il cerchio iscritto Γ, *il punto di contatto della tangente parallela alla ipotenusa* BC *e il punto di contatto di una delle tangenti perpendicolari a* BC *sono in linea retta con uno dei punti* B *o* C.

Infatti il perimetro di ABC è uguale a $12t$, secondo la notazione adottata sopra, e la sua area è uguale a $6t^2$; il diametro dal cerchio iscritto è $2t$ e la tangente CD è pure uguale a $2t$. Il triangolo CDE è dunque rettangolo e isoscele e l'angolo DEC è uguale a 45°. Il punto F è dunque l'estremità del raggio condotto per il centro O perpendicolarmente a DE. Da questa osservazione resulta la proprietà enunciata; proprietà che non è verificata per un triangolo qualunque.

In conclusione, come si verifica nell'esempio precedente, le proprietà descrittive sono conseguenza della proprietà metriche e si deve dunque avanti tutto mettere in luce quest'ultime e ricercare poi con cura tutte le conseguenze che possono derivare da esse.

3. Formulario del triangolo notevole. — $T(1, -3, 1)$.

Lasciamo adesso le considerazioni generali che era indispensabile fare in principio, e applichiamo qualcuna di esse al triangolo T sopra definito. Dobbiamo prima ricercare le formole che gli sono particolari, e che, come abbiamo osservato, debbono esprimere tutti gli elementi di T in funzione di due parametri λ e μ

Poichè abbiamo

$$3b = a + c$$

possiamo porre

$$a = \lambda + \mu, \quad b = \lambda, \quad c = 2\lambda - \mu$$

ove λ e μ stanno a rappresentare due parametri variabili.

Ad ogni valore attribuito a questi parametri corrisponde un triangolo T; bisogna però che si possa affermare l'esistenza del triangolo corrispondente.

Per stabilire questa esistenza bisogna osservare che si ha

$$p = 2\lambda, \quad p - a = \lambda - \mu, \quad p - b = \lambda, \quad p - c = \mu;$$

le condizioni di possibilità sono dunque

$$\lambda > 0, \quad \mu > 0, \quad \lambda > \mu.$$

Quindi essendo dati dei valori positivi arbitrari di λ e μ, purchè sia però $\lambda > \mu$, corrisponde sempre a questi valori un triangolo ABC.

Si può facilmente costruire il triangolo nel modo seguente.

Prendiamo una circonferenza Γ arbitraria e sopra una tangente a partire dal punto di contatto D portiamo una lunghezza $2\lambda = DA$; per A e pel punto medio, C di DA conduciamo delle tangenti a Γ che si taglino in B e siano D' e K i punti di contatto rispettivi. Il triangolo così formato è un triangolo T. Poniamo infatti $BD' = \mu$, si ha

$$AC = \frac{AD}{2} = \lambda, \quad CB = CK + KB = \lambda + \mu, \quad AB = AD' - BD' = 2\lambda - \mu.$$

Adotteremo le notazioni seguenti: r *raggio del circolo iscritto,* r_a, r_b, r_c *raggi dei circoli ex-iscritti,* R *raggio del circolo circoscritto,* S *area del triangolo,* m_a, m_b, m_c *le mediane* h_a, h_b, h_c *le altezze.*

Relazione fra gli angoli. — Si hanno dapprima le relazioni

$$r_a = 2\lambda \tan\frac{A}{2}, \quad r_a = \lambda \cot\frac{C}{2}, \quad r_a = \mu \cot\frac{B}{2},$$

che dànno

(1) $$2\tan\frac{A}{2} \cdot \tan\frac{C}{2} = 1.$$

Quindi: *nel triangolo notevole* T, *il doppio prodotto delle tangenti dei semiangoli* A *e* C *è uguale all'unità.*

In un triangolo ABC questi elementi sono sempre disposti in un ordine invariabile; gli angoli si chiamano A, B, C, i lati a, b, c; le mediane m_a, m_b, m_c etc. Esistono dunque per gli elementi di un gruppo determinato due elementi estremi e un elemento medio. Questa denominazione permette di dare agli enunciati una forma più rapida in molti casi; noi l'utilizzeremo in seguito.

La nota relazione trigonometrica

$$\Sigma \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = 1,$$

combinata con la (1) dà

$$\frac{1}{2} = \tan\frac{B}{2}\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{C}{2}\right),$$

ovvero

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} = \tan\frac{B}{2}\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{C}{2}\right),$$

ed infine

$$\cot\frac{B}{2} = \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2} \tag{2}$$

dunque: *Nel triangolo notevole* T *la cotangente del semiangolo medio è uguale alla somma delle cotangenti dei semiangoli estremi.*

In un triangolo notevole, come quello T definito, esiste una relazione fra due qualunque dei suoi angoli. Combinando le relazioni (1) e (2), si ottengono le altre

$$\begin{cases} 2\tan^2\frac{A}{2} - \tan\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} + 1 = 0 \\ 2\tan^2\frac{C}{2} - \tan\frac{C}{2}\cot\frac{B}{2} + 1 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Le uguaglianze (1), (2), (3) si verificano pure per mezzo delle formole

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\mu}{2(\lambda-\mu)}}, \quad \tan\frac{B}{2} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\mu(\lambda-\mu)}{2}}, \quad \tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\lambda-\mu}{2\mu}}. \tag{4}$$

Esiste in un triangolo notevole qualunque un'infinità di relazioni fra gli angoli di esso, ma queste relazioni appartengono esclusivamente al triangolo considerato e non ad un triangolo qualunque. Per citarne una, riferendoci al precedente caso, si può osservare che le uguaglianze

$$\cos A = \frac{2\lambda - 3\mu}{2\lambda - \mu} \quad , \quad \cos C = \frac{3\mu - \lambda}{\lambda + \mu}$$

dànno la relazione

$$3(1 + \cos A\cos C) = 5(\cos A + \cos C).$$

Calcolo di r, r_a, r_b, r_c.

$$S = \lambda\sqrt{2\mu(\lambda-\mu)} \tag{5}$$

e successivamente.

$$r = \sqrt{\frac{\mu(\lambda-\mu)}{2}} \tag{6}$$

$$r_a = \lambda\sqrt{\frac{2\mu}{\lambda-\mu}} \tag{7}$$

(8) $$r_b = \sqrt{2\mu(\lambda - \mu)}$$

(9) $$r_c = \lambda \sqrt{2\frac{\lambda - \mu}{\mu}}.$$

Da queste formole si ricava

(10) $$\frac{1}{r_b} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c}.$$

Dunque: *Nel triangolo notevole* T, *l'inversa del raggio del circolo ex-inscritto medio è uguale alla somma delle inverse dei raggi dei due altri circoli ex-iscritti.*

Queste stesse formole dànno

(11) $$r_b = 2r$$

dunque: *Nel triangolo notevole* T *il raggio del circolo ex-iscritto medio è uguale al diametro del circolo iscritto.*

Questa proprietà può così esser considerata come la conseguenza dell'uguaglianza (10) o della relazione

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

che appartiene a un triangolo qualunque.

Si può proseguire questo studio, che noi abbiamo appena accennato, essendo il nostro unico fine quello di richiamare l'attenzione dei lettori di questo giornale sopra un campo di ricerche assai semplice, e che non potrà mancare di un certo interesse. Così, calcolando le bisettrici l_a, l_b, l_c si trova che la bisettrice l_b è data dalla formola

$$l_b^2 = \frac{8}{9}ac;$$

e così pure che fra le altezze sussiste la relazione

$$\frac{3}{h_b} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} \text{ ecc.}$$

Ma senza insistere sulle proprietà del triangolo T, aggiungerò per terminare questa nota un'osservazione che potrà essere messa a profitto di coloro che avranno la curiosità di cercare qualche triangolo notevole.

Sopra una famiglia di triangoli notevoli.

Il triangolo notevole T, del quale abbiamo indicato alcune proprietà, appartiene a una famiglia di triangoli caratterizzata dall'uguaglianza

(A) $$mb = a + c,$$

essendo m un numero intero o frazionario > 1. Si possono costruire tutti questi triangoli mediante la seguente osservazione.

Riferendoci alla costruzione fatta per costruire precedentemente il triangolo T (1, — 3, 1) prendiamo sopra AD un punto C tale che si abbia $AC = \lambda$, $CD = k\lambda$.

Allora i triangoli ABC sono dati dalle formole

(F) $$\begin{cases} a = k\lambda + \mu \\ b = \lambda \\ c = (k+1)\lambda - \mu. \end{cases}$$

Da queste si ricava

(B) $$a + c = (2k + 1)\, b$$

e ponendo $m = 2k + 1$, da cui $k = \frac{m - 1}{2}$, l'uguaglianza (A) sarà verificata, qualunque sia m intero o frazionario purchè > 1, come avevamo osservato in principio.

Il caso più semplice corrisponde all'ipotesi $m = 2$, e se prendiamo soltanto valori interi viene poi il caso $m = 3$ che è quello che noi abbiamo scelto, ma si troveranno certamente in questa serie dei casi ben più interessanti.

Per trovare dei triangoli doppiamente notevoli nella serie considerata bisogna assoggettare i lati a una seconda relazione o imporre, ciò che fa lo stesso, una certa proprietà al triangolo notevole.

Per esempio si può domandare quali sono i triangoli rettangoli della famiglia considerata.

Bisogna allora che, variando λ e μ, si abbia per es.,

$$a^2 = b^2 + c^2;$$

si troverà allora, applicando le formole (F),

$$a = \lambda \frac{2k^2 + 2k + 1}{2k + 1} \quad , \quad b = \lambda \quad , \quad c = \lambda \frac{2k(k + 1)}{2k + 1}.$$

Supponendo $k = 1$, si ha il triangolo rettangolo che corrisponde al triangolo notevole T che noi abbiamo considerato sopra. Questo triangolo è il triangolo θ, i cui lati sono proporzionali ai numeri 3, 4, 5. Si ha infatti $3^2 + 4^2 = 5^2$; $3 . 3 = 4 + 5$. Il triangolo θ è un esempio d'un triangolo doppiamente notevole.

Facendo $k = 2$ si trova il triangolo θ', che è rettangolo, e che è tale che il quintuplo del minor lato è uguale alla somma dei due altri; esso è il triangolo i cui lati sono proporzionali ai numeri 5, 12, 13. Infatti

$$13^2 = 12^2 + 5^2 \; ; \; 5 . 5 = 12 + 13.$$

Dando a k successivamente tutti i valori interi 1, 2, 3..., si ottiene una serie di triangoli rettangoli

$$\begin{array}{ccc} 3, & 4, & 5 \\ 5, & 12, & 13 \\ 7, & 24, & 25 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

e si apprende di qui (così si vede come in matematiche le cose più disparate in apparenza hanno talvolta fra loro intimi legami) a risolvere l'equazione indeterminata di 2° grado

$$x^2 = y^2 + z^2,$$

mediante le formole

$$x = 1 + 2k(k + 1)$$
$$y = 2k + 1$$
$$z = 2k(k + 1),$$

che dànno tutte le soluzioni di questa equazione nel caso particolare che y sia dispari: le due altre incognite sono allora due numeri interi consecutivi.

Inoltre il quadrato del lato medio è sempre uguale alla somma degli altri due lati. Infatti, avendosi

$$y^2 - (x - z)(x + z).$$

e

$$x - z = 1.$$

si ha subito

$$y^2 = x + z.$$

G. De Longchamps.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI

73, 252, 253, 386, 387, 459, 472, 473, 475, 478

---

73. *Dato un triangolo, non regolare, trovare il luogo geometrico dei punti tali che una delle perpendicolari condotte da ciascuno di essi ai lati uguagli la somma o la differenza delle altre due.*

A. Baldassarre.

Risoluzione del generale H. Brocard di Bar-le-Duc.

Indicando con x, y, z le distanze di un punto dai tre lati del triangolo, l'equazione del luogo, in coordinate trilineari è $x = y \pm z$. Ma l'ipotesi $x = y + z$ dà $z = x - y$ e poichè x, y, z sono l'una all'altra sostituibili, si vede che il luogo domandato è lo stesso nelle due ipotesi e si compone delle *interbisettrici*, cioè delle rette che congiungono i piedi delle bisettrici (interne ed esterne).

Altre risoluzioni dei proff. V. Retali di Milano, A. Borio di Torino e G. Cardoso-Laynes di Livorno.

252. *Si dimostri, senza ricorrere alla teoria delle differenze, che se la relazione*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} x_1 + \binom{n}{2} x_2 + \ldots + \binom{n}{n} x_n = n!$$

è soddisfatta qualunque sia l'intero positivo n, *si avrà*

$$x_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

G. Nonni.

Risoluzione dei sigg. F. Celestri e Z. Giambelli, studenti nella R. Università di Pisa.

Verificata la relazione per $n = 1, = 2, = 3, \ldots$ supponiamola vera per $n = m$; essa sarà dimostrata in generale, quando si provi che, fatta tale ipotesi, si verifica ugualmente per $n = m + 1$.

Si ricava intanto

$$x_r = r\,(r-1)!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^{r-1} \frac{1}{(r-1)!}\right) + (-1)^r$$

onde

(1) $$x_r = r x_{r-1} + (-1)^r$$

che supporremo anche valevole per $r = 1$ interpretando l'unità come x_0.

Per brevità usando i simboli sommatorii, la relazione data, per $n = m + 1$, può scriversi

$$\sum_r^{m+1} \binom{m+1}{r} x_r$$

che per la (1) si trasforma

$$\sum_0^{m+1}{}_r \binom{m+1}{r}[rx_{r-1}+(-1)^r]=$$

$$=\sum_0^{m+1}{}_r \binom{m+1}{r} rx_{r-1}+\sum_0^{m+1}{}_r (-1)^r \binom{m+1}{r}=\sum_0^{m+1}{}_r \binom{m+1}{r} rx_{r-1};$$

essendo $\sum_0^{m+1}{}_r (-1)^r \binom{m+1}{r}=(1-1)_{m-1}=0.$

Si ha poi evidentemente

$$\sum_0^{m+1}{}_r \binom{m+1}{r} rx_{r-1}=\sum_0^{m-1}{}_r \binom{m+1}{m-r+1} rx_{r-1}=$$

$$=(m+1)\,.\sum_0^{m}{}_r \binom{m}{m-r} x_r=(m+1)\,.\sum_0^{m}{}_r \binom{m}{r} x_r$$

ma per quello che si è detto a principio, si ha

$$\sum_0^{m}{}_r \binom{m}{r} x_r=\underline{|m},\quad \text{onde}\quad \sum_0^{m+1}{}_r \binom{m+1}{r} x_r=\underline{|m+1}.$$

c. d. d.

253. *Valendosi del resultato della quistione precedente si determini il numero delle permutazioni degli elementi* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *nelle quali nessun elemento occupi il posto rappresentato dal proprio indice.*

G. Nonni.

Risoluzione dei sigg. Z. Giambelli e F. Celestri, studenti nella R. Università di Pisa.

Tutte le permutazioni che si possono formare cogli n elementi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono $\underline{|n}$. Fra queste ve ne sono di quelle in cui gli elementi occupano il posto rappresentato dal proprio indice o tutti indistintamente meno uno, (*) o meno due, ecc., fino a quelli in cui nessun elemento occupa il posto rappresentato dal proprio indice. Consideriamo ora in generale le permutazioni in cui r elementi non occupano il posto rappresentato dal proprio indice. È evidente prima di tutto che questi r elementi si possono scegliere in $\binom{n}{r}$ modi diversi e inoltre da ciascuna di queste combinazioni si possono avere un certo numero di permutazioni tali che nessun elemento occupi il posto rappresentato dal proprio indice. Se si indica ora con X_r questo numero di permutazioni, si avrà che il numero che indica quante permutazioni si possono fare con n elementi, in modo che r di essi non occupino il posto rappresentato dal proprio indice, sarà

$$\binom{r}{n} x_r$$

(*) Veramente non si ha nessuna permutazione in cui un solo elemento non occupa il posto rappresentato dal proprio indice, noi per avere uniformità nelle formole l'ammetteremo pure e, per quanto è detto in seguito, il numero di queste permutazioni lo indicheremo con $\binom{n}{1} x_1$, ponendo allora $x_1=0$.

e ponendo successivamente $r = 0, 1, 2, \ldots, n$ avremo, per quanto fu detto in principio:

$$\underline{|n} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x_1 + \binom{n}{2} x_2 + \ldots + \binom{n}{n} x_n$$

e quindi per la questione precedente

$$x_n = \underline{|n} \left[1 - \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} - \frac{1}{\underline{|3}} + \ldots + (-1)^n \right]$$

che è la formula richiesta.

386. *Date in uno stesso piano tre punteggiate simili, il luogo del centro del cerchio circoscritto al triangolo formato da tre punti omologhi, è una cubica razionale.*

V. Retali.

Risoluzione del prof. C. Merizzi di Ceva.

Siano u, v, w, le tre punteggiate ed U_0, V_0, W_0 i loro punti-origine. Sia $1 : m$ il rapporto di similitudine tra la u e la v, ed $1 : n$ tra la u e la w.

Saranno allora omologhi tre punti U, V, W, quando sussistano le uguaglianze

$$\frac{U_0 U}{1} = \frac{V_0 V}{m} = \frac{W_0 W}{n} = \lambda$$

essendo il parametro λ, il comune valore dei tre rapporti.

Rispetto ad una coppia di assi ortogonali, di cui l'asse delle x coincida colla retta u e l'origine sia in U_0, indichiamo con x_0', y_0' e x_0'', y_0'' le coordinate di V e W e con ϑ' e ϑ'' gli angoli che u, v, fanno coll'asse delle x. Avremo allora

$$\begin{cases} U \equiv (\lambda\,,\, 0) \\ V \equiv (x_0' + \lambda m \cos \vartheta'\,,\; y_0' + \lambda m \operatorname{sen} \vartheta') \\ W \equiv (x_0'' + \lambda n \cos \vartheta''\,,\; y_0'' + \lambda n \operatorname{sen} \vartheta''). \end{cases}$$

Le coordinate x, y, del centro del cerchio passante per U, V, W, soddisfano alle equazioni

$$\begin{aligned} (1) \qquad (x - \lambda)^2 + y^2 &= (x - x_0' - \lambda m \cos \vartheta')^2 + (y - y_0' - \lambda m \operatorname{sen} \vartheta')^2 = \\ &= (x - x_0' - \lambda n \cos \vartheta'')^2 + (y - y_0'' - \lambda n \operatorname{sen} \vartheta'')^2 \end{aligned}$$

dalle quali, colle debite riduzioni, si ricavano altre due equazioni della forma:

$$(2) \qquad \lambda^2 (1 - m^2) + \lambda f_1(x\,,y) = f_2(x\,,y),$$
$$(3) \qquad \lambda^2 (1 - n^2) + \lambda f_3(x\,,y) = f_4(x\,,y),$$

essendo ciascuna delle $f(x\,,y)$ una funzione lineare delle x, y.

Eliminando dalle (2), (3) il parametro λ, si ottiene la equazione del luogo: a tal uopo, sottraendo dai due membri della (2), moltiplicati per $(1 - n)^2$, i due membri della (3), moltiplicati per $(1 - m^2)$ si ricava λ come rapporto di due funzioni lineari di x, y cioè $\frac{f_5(x,y)}{f_6(x,y)}$, il qual valore sostituito nella (2), dà

$$(1 - m^2) \left[f_5(x\,,y) \right]^2 + f_1(x\,,y) . f_6(x\,,y) = f_2(x\,,y) \left[f_6(x\,,y) \right]^2,$$

che è una equazione di terzo grado. Dunque il luogo cercato è una cubica.

Osserviamo poi che le (2), (3), ponendo in evidenza x, y, si possono scrivere

$$x \varphi_1(\lambda) + y \varphi_2(\lambda) = \varphi_3(\lambda)\,, \qquad x \varphi_4(\lambda) + y \varphi_5(\lambda) = \varphi_6(\lambda)\,,$$

dove $\varphi_3(\lambda)$ e $\varphi_4(\lambda)$ sono funzioni quadratiche di λ e le altre $\varphi(\lambda)$ funzioni lineari. Si ricava

$$x = \frac{\varphi_3(\lambda)\,\varphi_5(\lambda) - \varphi_2(\lambda)\,\varphi_6(\lambda)}{\varphi_1(\lambda)\,\varphi_5(\lambda) - \varphi_2(\lambda)\,\varphi_4(\lambda)} \qquad y = \frac{\varphi_1(\lambda)\,\varphi_6(\lambda) - \varphi_3(\lambda)\,\varphi_4(\lambda)}{\varphi_1(\lambda)\,\varphi_5(\lambda) - \varphi_2(\lambda)\,\varphi_4(\lambda)}.$$

Dunque la cubica trovata è tale che le coordinate di un suo punto qualunque sono esprimibili mediante funzioni algebriche e razionali di uno stesso parametro λ, variabile da $-\infty$ a $+\infty$: essa cioè è *unicursale*, e quindi *razionale*.

387. *Date in un piano tre punteggiate uguali, trovare il luogo del centro del cerchio circoscritto al triangolo avente per vertice i tre punti omologhi.*

RETALI.

Risoluzione del prof. C. Merizzi di Ceva.

Questa quistione è un caso particolare della precedente: quando si fa $m=n=1$, le tre punteggiate diventano uguali e le precedenti equazioni (2) e (3), annullandosi i coefficienti di λ^2, diventano

$$\lambda f_1(x,y) = f_2(x,y)$$
$$\lambda f_3(x,y) = f_4(x,y)$$

donde, eliminando λ, si ricava

$$f_2(x,y)\ f_3(x,y) - f_1(x,y)\ f_4(x,y) = 0$$

la quale equazione, essendo ciascuna delle $f(x,y)$ lineare, è di secondo grado. Dunque il luogo cercato è una conica.

459. *La conica polare rispetto a una cubica generale (non circolare) del punto di Lemoine del triangolo formato dagli asintoti, è un cerchio.*

RETALI.

Risoluzione del prof. A. Barozzini di Treviso.

L'equazione della cubica riferita al triangolo degli asintoti è

$$(1) \qquad \Delta^2 R + 6kxyz = 0\,,$$

dove $\Delta = ax + by + cz = 0$ è l'equazione della retta all'infinito, ed $R = mx + ny + pz = 0$ l'equazione della retta passante pei punti a distanza finita in cui gli asintoti tagliano la cubica.

L'equazione della conica polare di $P \equiv (X, Y, Z)$ rispetto alla (1) è

$$(2) \quad (mX + nY + pz)\Delta^2 + 2(aX + bY + cZ)\Delta R + 6k(Xyz + Yzx + Zxy) = 0.$$

Tale conica ha i medesimi punti all'∞ della

$$Xyz + Yzx + Xxy = 0\,,$$

e questa passa poi punti ciclici, se $\dfrac{X}{a} = \dfrac{Y}{b} = \dfrac{Z}{c}$, cioè se P è il punto di Lemoine del triangolo degli asintoti. La conica polare allora è il circolo circoscritto al triangolo medesimo.

In modo analogo si dimostra che la (2) è un'*iperbole equilatera*, se P sta sulla retta $X\cos A + Y\cos B + Z\cos C = 0$, coniugata dell'ortocentro nel triangolo degli asintoti.

E la (2) è una *parabola*, se P sta sulla conica

$$a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2 - 2bcYZ - 2caZX - 2abXY = 0$$

tangente ai lati del triangolo degli asintoti nei loro punti medi.

472. *Se un determinante* $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ *è tale che per ogni elemento si abbia*

$$a_{rs} = r^s,$$

esso è uguale a

$$1!\,.\,2!\,.\,3!\,\ldots\ldots\, n!$$

G. Cardoso-Laynes.

Risoluzioni analoghe del sig. Sibirani, studente nella R. Università di Bologna e del prof. V. Retali di Milano.

Essendo $a_{rs} = r^s$ si ha

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 \ldots 2^n \\ 3 & 3^2 & 3^3 \ldots 3^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ n & n^2 & n^3 \ldots n^n \end{vmatrix} = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots 1 \\ 1 & 2 & 2^2 \ldots 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 \ldots 3^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & n & n^2 \ldots n^{n-1} \end{vmatrix}$$

L'ultimo determinante è un determinante di Vandermonde e perciò è eguale a

$$\big(n-(n-1)\big)\big(n-(n-2)\ldots\ldots(n-1)\big)$$
$$\big((n-1)(n-2)\big)\ldots\big((n-1)-1\big)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(2-1)$$

Ne segue

$$D = n!\,.\,(n-1)!\ldots 2!\,.\,1!$$

Altra risoluzione del sig. G. Marletta, studente della R. Università di Catania.

473. *Se da un punto* P, $(n-2)$*-plo sopra una curva* C^n *d'ordine* n, *si conduce una retta mobile che seghi ulteriormente la curva nei punti* P_1 *e* P_2, *il luogo del punto medio del segmento (reale o ideale)* P_1P_2 *è, in generale, una curva* C^n *d'ordine* n, *di cui* P *è un punto* $(n-1)$*-plo.*

Dare la dimostrazione analitica e sintetica. Esaminare i casi particolari e generalizzare la questione.

G. Cardoso-Laynes.

Risoluzione del prof. V. Retali di Milano.

Se, nel piano di C^n, facciamo corrispondere a un punto A il suo coniugato armonico rispetto alle due intersezioni di C^n, non cadenti in P, con la retta |PA, abbiamo la *trasformazione arguesiana generalizzata.* Cerchiamo la trasformata di una retta: ogni raggio del fascio P è diviso armonicamente da C^n e dalla prima polare di P (rispetto a C^n); ciò è evidente geometricamente e si dimostra analiticamente così: Se $U=0$ è la equazione di C^n, dette (x_1, y_1, z_1) le coordinate omogenee di P e (x_2, y_2, z_2) quelle di un punto variabile Q della prima polare di P, le coordinate d'un punto generico della retta |PQ| sono $x_1 + \lambda x_2$, $y_1 + \lambda y_2$, $z_1 + \lambda z_2$ e il parametro λ è determinato dalla equazione

$$U_1 + \lambda\,.\,\Delta U_1 + \ldots + \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}\,.\,\Delta^{n-2}U_1 + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\,\Delta^{n-1}U_1 + \lambda^n U_2 = 0,$$

ma U_1, $\Delta U_1, \ldots \Delta^{n-3}U_1$ sono nulli perchè $P(x_1 y_1 z_1)$ è punto $(n-2)$*-plo* e il coefficiente di λ^{n-1} è pure nullo perchè Q è sulla prima polare di P, la equazione in λ si riduce dunque a

$$\Delta^{n-2}U_1 + (n-2)!\;\lambda^2\,.\,U_2 = 0$$

che, avendo due radici eguali e di segno contrario, dimostra il teorema. Ciò posto, per avere la trasformata di una retta r basta osservare che r sega la prima polare in $(n-1)$ punti e perciò P sulla trasformata è $(n-1)$-*plo*; siccome poi ogni raggio del fascio P sega r in un sol punto, la trasformata ha su quel raggio un sol punto diverso da P; essa è dunque d'ordine n ed ha un punto $(n-1)$-*plo* in P. Se prendiamo per r la retta all'infinito, abbiamo il teorema del sig. *Cardoso*; assumendo per C^n una cubica generale e per P un punto di essa, abbiamo la trasformazione *Arguesiana* del sig. *Saltel* ecc. ecc.

Risoluzione del prof. A. Barozzini di Treviso.

1. L'equazione cartesiana d'una curva d'ordine n sia

$$(C^n) \qquad f_n + f_{n+1} + \ldots\ldots + f_1 + f_0 = 0$$

dove f_r rappresenta il complesso dei termini di grado r nelle coordinate: in particolare sia

$$f_n = a_0 x^n \quad + a_1 x^{n-1} y + \ldots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n\,,$$
$$f_{n-1} = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} y + \ldots + b_{n-2} x y^{n-2} + b_{n-1} y^{n-1}.$$

Per determinare le coordinate delle intersezioni $P_1, P_2, \ldots P_{n-1}, P_n$ della curva C^n colla retta

$$(R) \qquad y = \lambda x + \beta\,,$$

elimino y fra le equazioni delle due linee, ed ho per le ascisse

$$(1) \qquad A x^n + \left[\beta \frac{\partial A}{\partial \lambda} + B\right] x^{n-1} + \ldots = 0$$

dove

$$A = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n\lambda^n\,,\; B = b_0 + b_1\lambda + \ldots + b_{n-2}\lambda^{n-2} + b_{n-1}\lambda^{n-1}.$$

Il centro delle medie distanze dei punti $P_1, P_2 \ldots P_{n-1}. P_n$ ha le coordinate date dalle equazioni

$$(2) \qquad \begin{cases} nAx + \beta \dfrac{\partial A}{\partial \lambda} + B = 0 \\ y = \lambda x + \beta\,. \end{cases}$$

2. Se ora suppongo che la retta R descriva un fascio il cui centro sia P, origine delle coordinate, si ha per ogni posizione della retta, $\beta = 0$ e le (2) si riducono alle

$$nAx + B = 0 \qquad , \qquad y = \lambda x.$$

Eliminando λ fra queste due equazioni, ho

$$(C'^n) \qquad nf_n + f_{n-1} = 0$$

luogo del centro delle medie distanze dei punti $P_1 \ldots P_n$, quando la R passi per un punto fisso a distanza finita.

La curva C'^n ha un punto $(n-1)$-*plo* in P; le $n-1$ tangenti corrispondenti sono rette che tagliano C^n in punti il cui il baricentro è P.

Le due curve C', C'^n hanno i medesimi punti all'∞, gli asintoti formano due multilateri omotetici col centro di omotetia P e il rapporto n.

Inoltre l'equazione della C'^n è indipendente dai termini di C^n di grado inferiore ad $n-1$, quindi il luogo C'^n è identico per tutte le curve d'ordine n che hanno gli stessi asintoti della data.

3. L'equazione del luogo C'^n rimane la medesima se r punti della curva data coincidono in P, purchè a P si attribuisca il peso r nel calcolare il baricentro dei punti $P_1, \ldots P_n$.

Ma se, coincidendo r punti della C^n in P, si cerca il luogo del centro delle medie distanze dei rimanenti $n - r$ punti della curva data posti su R (passante per P), si ha

$$(n-r) f_n + f_{n-1} = 0.$$

Se poi in questa si pone $r = n - 2$, si ha pel luogo richiesto dalla questione 473, l'equazione

$$2f_n + f_{n-1} = 0.$$

4. Considero ora il caso in cui la retta R si mantenga parallela ad una direzione data: sarà allora λ costante e β variabile. Eliminando β fra le (2) ho pel centro delle medie distanze il luogo

$$A_1 x + A_2 y + B = 0 \tag{4}$$

dove

$$A_1 = na_0 + (n-1) a_1 \lambda + \dots\dots + 2a_{n-2} \lambda^{n-2} + a_{n-1} \lambda^{n-1}$$
$$A_2 = a_1 + 2a_2 \lambda + \dots\dots\dots + (n-1) a_{n-1} \lambda^{n-2} + na_n \lambda^n.$$

Quindi un fascio di rette parallele taglia una curva algebrica razionale in gruppi di punti, il cui baricentro descrive una retta (diametro). L'inviluppo dei diametri è una curva della $(n+1)^a$ classe.

Infatti il primo membro della (4) è di grado $(n-1)^o$ nella indeterminata λ.

5. Ulteriori generalizzazioni della questione 473 si possono ottenere sostituendo alla intersezione della curva C^n con una retta, quelle della stessa curva con una conica. Si hanno ad esempio i due teoremi seguenti, il secondo dei quali è un corollario del primo:

I. Se coniche simili tagliano una curva d'ordine n, il baricentro di uno dei gruppi di $2n$ punti determinati e il centro della conica corrispondente sono elementi corrispondenti d'una *affinità*.

II. Coniche ometetiche tagliano una curva d'ordine n, in gruppi di punti isobaricentrici.

475. *È dato l'ortocentro del triangolo* ABC *ed il punto di mezzo del lato* BC. *I vertici* B *e* C *si muovono su di una retta fissa.*

1°. *Si cerchi l'inviluppo dei lati* AB *e* AC.

2°. *I piedi delle altezze abbassate da* B *e* C *sono su di una strofoide obliqua.*

3°. *La retta che unisce questi due piedi passa per un punto fisso.*

4°. *Si cerchi il luogo dei punti d'intersezione col circolo* ABC *del diametro che passa pel punto medio di* BC. (*)

5°. *Si cerchi il luogo del punto di Lemoine del triangolo.*

A. Droz-Farny.

Risoluzione del prof. V. Retali.

I vertici B e C segnano sulla retta fissa s una involuzione, i cui punti doppi sono il punto di mezzo M e il punto all'infinito: il fascio H (C...) è proiettivo alla punteggiata (B) e le punteggiate segnate dai raggi |HC| e |BA| sulla retta all'infinito sono pure proiettive (in involuzione, coi punti ciclici per punti doppi): l'inviluppo dei lati AB e AC è dunque una parabola P^2 tangente ad s.

Se H è l'ortocentro, i cerchi ABC passano pel punto K simmetrico di H rispetto ad s e, avendo i centri sulla mediatrice di $\overline{BC}$, formano un fascio i cui punti base al finito sono K e il punto F simmetrico di H rispetto ad M. Ne segue,

(*) Poichè i circoli ABC formano un fascio, questo enunciato 4° deve essere modificato. (V. R.)

pel teorema di Lambert, che F è il fuoco di P^2; |AK|, isogonale di |AF| rispetto all'angolo BAC, è un diametro; |BC| è la tangente al vertice ed H è sulla direttrice.

2°. Il luogo dei piedi β e γ delle altezze calate da B e C. è la pedale della parabola P^2 rispetto al punto H della direttrice: dunque, per un teorema ben noto, è una strofoide obliqua (*focale à noeud* del Quetelet) avente in H il punto doppio, passante per M e per la proiezione P di H su |BC|. L'assintoto reale è la retta simmetrica di s rispetto ad H; le tangenti nel punto doppio sono le tangenti a P^2 uscenti da H ecc.

3°. I raggi $|H\beta|$, $|H\gamma|$ uscenti dal punto doppio H, sono in involuzione: i due punti β e γ segnano dunque sulla cubica una *involuzione centrale* e perciò la retta $|\beta\gamma|$ passa per un punto fisso μ della cubica, cioè pel tangenziale di M che è pure il punto al finito della cubica sopra l'assintoto reale. Questo punto μ si costruisce subito osservando che giace sulla perpendicolare calata da P sulla retta che unisce H col vertice V di P^2.

4°. Se A' è la ulteriore intersezione di |AM| col cerchio ABC, abbiamo $\widehat{MA'F} = \widehat{FA'A} = 90°$ e il luogo di A' è il cerchio descritto sopra $\overline{MF}$ come diametro.

5°. Il punto di Lemoine del triangolo ABC è comune alla retta che unisce M col punto medio ϖ dell'altezza $\overline{AP}$, e a quella che unisce A col polo α di |BC| rispetto al cerchio ABC. Presi per assi coordinati la retta dei centri OM e la |FK|, che unisce i punti-base del fascio di cerchi, ponendo $\overline{FK} = 2 . \overline{OK} = 2 . \overline{MP} = 2m$, $\overline{PH} = n$, $\overline{KA} = 2\lambda$, l'equazione del cerchio ABC è

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - m^2 = 0;$$

le coordinate di ϖ, punto medio dell'altezza $\overline{AP}$, sono (m, λ), e quelle del polo α di |BC|, rispetto al cerchio, $\left(0, \dfrac{m^2}{n-\lambda}\right)$: le rette $|A\alpha|$, $|M\varpi|$ hanno dunque respettivamente per equazione

$$(m^2 + 2\lambda^2 - 2n\lambda)\, x + m\,(n - \lambda)\, y = m^3$$
$$(n - \lambda)\, x + my = mn$$

fra le quali eliminando λ si trova

$$mx\,(x - m) + (n - y)\,[my - 2nx + 2m\,(n - y)] = 0;$$

trasportando ora gli assi parallelamente in M abbiamo per equazione del luogo cercato

$$mx^2 - 2nxy + my^2 + m\,(ny - mx) = 0;$$

una conica circoscritta al parallelogrammo MHPO, tangente in M alla coniugata isogonale di |MH| rispetto all'angolo PMO. Secondochè $m \gtrless n$ il luogo è ellisse o iperbole; per $m = n$ si spezza in due rette parallele ecc. Il diametro $\overline{MP}$ biseca l'angolo degli assi e le lunghezze di questi sono

$$2a = m\sqrt{m : (m - n)}, \qquad 2b = m\sqrt{m : (m + n)}.$$

478. *Date* 2n *variabili indipendenti*

$$x_1,\ x_2, \ldots .\ x_{2n},$$

dimostrare:

1°. *Che il numero dei valori algebricamente diversi che può assumere la funzione*

$$\varphi\,(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = (x_1 + x_2)\,(x_3 + x_4) \ldots (x_{2n-1} + x_{2n}),$$

per tutte le possibili sostituzioni sulle x, *è dato da*

$$\lambda_{2n} = 1 . 3 . 5 \ldots . (2n - 1).$$

2°. *Che, indicando con* $\Sigma\varphi(x_1, x_2, \ldots . x_{2n})$ *la somma dei predetti valori e con* $\Sigma\varphi(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots . x_{i_{2n-2}}) . \varphi(x_{i_{2n-1}}, x_{i_{2n}})$ *il prodotto della somma dei* λ_{2n-2} *valori della funzione*

$$\varphi(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots . x_{i_{2n-2}}) = (x_{i_1} + x_{i_2}) + \ldots . + (x_{i_{2n-3}} + x_{i_{2n-2}})$$

per la funzione

$$\varphi(x_{i_{2n-1}}, x_{i_{2n}}) = (x_{i_{2n-1}} + x_{i_{2n}}),$$

si ha

$$\Sigma\varphi(x_1 x_2 \ldots . x_{2n}) = \varphi(x_1 x_2)\, \Sigma\varphi(x_3 x_4 \ldots . x_{2n}) + \varphi(x_1 x_3)\, \Sigma\varphi(x_2 x_4 \ldots . x_{2n}) + \\ + \ldots\ldots . + \varphi(x_1 x_{2n})\, \Sigma\varphi(x_2 x_3 \ldots . x_{2n-1}).$$

U. Scarpis.

Risoluzione del prof. G. Cardoso-Laynes di Livorno.

Indicando con $\varphi_0(x_1 x_2 \ldots . x_{2n})$ uno qualunque dei valori che assume la funzione $\varphi(x_1 x_2 \ldots . x_{2n})$, per la natura stessa di questa funzione, è chiaro che $\varphi_0(x_1 x_2 \ldots . x_{2n})$ deve ammettere un fattore $\varphi(x_{k_1}, x_{i_1})$, essendo k_1 un numero qualunque *determinato* da noi scelto fra i numeri k che soddisfano la relazione mista

(1) $$1 \leq k \leq 2n$$

ed i_1 un numero *indeterminato* che può variare entro gli stessi limiti di k ed è inoltre diverso da k_1. (Perciò i_1 può assumere $2n - 1$ valori diversi).

Posto ciò, indicando con φ_1 il quoziente di $\varphi_0(x_1 x_2 \ldots x_{2n})$ per $\varphi(x_{k_1}, x_{i_1})$, si ha:

(2) $$\varphi_0(x_1, x_2 \ldots . x_{2n}) = \varphi(x_{k_1}, x_{i_1}) . \varphi_1 .$$

Si può osservare ora che φ_1 ammetterà certo un fattore $\varphi(x_{k_2}, x_{i_2})$, essendo k_2 un numero qualunque *determinato* da noi scelto, purchè soddisfi la (1) e sia inoltre diverso da k_1 e dal valore particolare i'_1 di i_1 che si sceglie, e i_2 un numero *indeterminato* che varia entro gli stessi limiti di k ed è inoltre diverso da k_1, i'_1, k_2. (Perciò i valori differenti che può assumere i_2 sono $2n - 3$).

Indicando con φ_2 il quoziente di φ_1 per $\varphi(x_{k_2}, x_{i_2})$, si ha

$$\varphi_0(x_1 x_2 \ldots . x_{2n}) = \varphi(x_{k_1}, x_{i_1}) . \varphi(x_{k_2}, x_{i_2}) . \varphi_2 .$$

Così seguitando, con ragionamenti analoghi, si perviene a scomporre $\varphi_0(x_1 x_2 \ldots . x_{2n})$ nei suoi n fattori

$$\varphi(x_{k_1}, x_{i_1}),\ \varphi(x_{k_2}, x_{i_2}),\ \varphi(x_{k_3}, x_{i_3}), \ldots . \varphi(x_{k_{n-1}}, x_{i_{n-1}}),\ \varphi(x_{k_n}, x_{i_n}),$$

il primo dei quali, come si è visto, può assumere $2n - 1$ valori diversi ed il secondo ne può assumere $2n - 3$; analogamente si perviene a stabilire che il 3° può assumere $2n - 5$ valori diversi, ecc. .... l'$(n - 1)$° può assumere soltanto *tre* diversi valori e l'n° è determinato.

Segue da ciò che i valori differenti che può avere φ_0 sono $1 . 3 . 5 \ldots . (2n - 5) . (2n - 3) . (2n - 1) = \lambda_{2n}$. c. d. d.

Per ciò che si è premesso, anche la seconda parte della questione resulta evidente: infatti, facendo nella (2) $k_1 = 1$ e attribuendo ad i_1 successivamente i valori di i che soddisfano alla relazione

$$1 < i \leq 2n$$

e sommando quindi i valori ottenuti, si ha:

$$\Sigma\varphi(x_1 x_2 \ldots . x_{2n}) = \sum_{i_1=2}^{i_1=2n} \left[\varphi(x_1, x_{i_1}) . \Sigma\varphi(x_2 . x_3, \ldots . x_{i_1-1}, x_{i_1+1} \ldots . x_{2n})\right]$$

c. d. d.

QUISTIONI PROPOSTE

479. L'inviluppo di un cerchio tangente a una retta fissa del suo piano e il di cui centro percorre una conica fissa è una curva del sest'ordine, circolare, della quarta classe, con tre tangenti doppie, sei cuspidi e zero flessi. Costruire le tre bitangenti coi rispettivi punti di contatto; le sei cuspidi (di prima specie) con le corrispondenti tangenti cuspidali; le intersezioni della sestica con una retta; le tangenti che le arrivano da un punto del suo piano.

480. Trovare l'inviluppo delle parabole che hanno il fuoco sopra una curva data e per direttrice una retta data. Studiare il caso in cui la curva data è una conica.

481. Determinare la pedale della sviluppata di una conica centrale, rispetto a un punto qualunque del suo piano come polo.

482. Pedale della sviluppata della parabola rispetto a un punto qualunque del suo piano come polo.

V. Retali.

483. Se le linee $\varphi = \text{cost.}^e$ sono geodetiche di una superficie il cui elemento lineare è $\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}$, si ha:

$$\Delta_2\varphi + \frac{1}{\Delta}\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{\Delta_1\varphi} + \frac{1}{\Delta}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\Delta_1\varphi} = 0$$

dove $\Delta = EG - F^2$ e Δ_1, Δ_2 sono rispettivamente i parametri differenziali primo e secondo.

Supponendo che le φ sieno geodeticamente parallele, si deduce $\Delta_2\varphi = 0$.

G. Cardoso-Laynes.

484. Sopra i lati del quadrilatero piano ABCD si prendano ordinatamente i punti A', B', C', D' tali che

$$\frac{AA'}{A'B} = \frac{BB'}{B'C} = \frac{CC'}{C'D} = \frac{DD'}{D'A} = p,$$

e sia P il punto d'incontro delle $A'C'$, $B'D'$:

I. Al variare del parametro p, il punto P corrispondente descrive in generale una cubica avente un punto doppio.

II. Tre punti di tale cubica stanno sopra una retta se il prodotto dei loro parametri è l'unità negativa, sei punti su una conica, se il prodotto dei loro parametri è l'unità positiva.

III. Come deve essere il quadrilatero ABCD affinchè la cubica sia una *strofoide retta?*

Dimostrare che, in tale caso, la parte del piano limitato dalla parte finita di curva i cui estremi coincidono nel nodo più quella compresa fra la curva rimanente e l'assintoto, sono equivalenti al quadrato del segmento congiungente i punti medi delle diagonali di ABCD.

A. Barozzini.

QUISTIONI PROPOSTE NEL PERIODICO
rimaste senza risoluzione

(Continuazione v. fasc. prec.)

Anno IX, pag. 160.

229. La somma dei quozienti incompleti di tutte le frazioni continue che si ottengono sviluppando $(2^{p-1}-1)$ frazioni irriducibili della serie di Brocot d'indice p (comprese fra 0 e 1) è uguale a $(p-1)2^{p-1}$.

G. Musso.

Anno IX, pag. 193.

232. Una punteggiata (u) ed un fascio di raggi (U'), proiettivi, non sono in uno stesso piano; si vuole, con un piano σ, segare (U') per modo che la sezione (u') abbia con (u) un asse di proiettività inclinato ad u sotto un angolo assegnato θ. Costruire σ e discutere il problema.

A. Del Re.

Anno X, pag. 73.

257. Il processo di eliminazione delle quantità λ, λ' fra le equazioni:

$$a-\lambda b=0 \qquad a'-\lambda' b'=0$$
$$\alpha\lambda\lambda'+\beta\lambda+\gamma\lambda'+\delta=0$$

ove $a=a_1x_1+a_2$, $b=b_1x_1+b_2$, $a'=a'_1x'+a'_2$, $b'=b'_1x'+b'_2$ ed a_i, a'_i, b_i, b'_i $(i=1, 2)$, α, β, γ, δ sono costanti date, vale il processo di composizione successiva di tre proiettività. Dedurne, senza ulteriori calcoli, che il determinante della equazione bilineare

$$\alpha aa'+\beta ab'+\gamma a'b+\delta bb'=0$$

è dato dal prodotto

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a'_1 & a'_2\\ b'_1 & b'_2\end{vmatrix}.$$

A. Del Re.

Anno XI, pag. 186.

290. Un triangolo si deforma conservando un angolo fisso in grandezza e posizione e costante la sua potenza (semisomma dei quadrati dei lati). Trovare l'inviluppo del lato mobile.

Juan. J. Duràn Loriga.

Anno X, pag. 41.

303. Risolvere il sistema

$$a(1+x)=(y+z)^2$$
$$b(1+y)=(z+x)^2$$
$$c(1+z)=(x+y)^2.$$

Anno XI, pag. 73.

310. È noto che il problema analogo a quello di Malfatti nello spazio è più che determinato, e però generalmente impossibile. Trovare le (due) relazioni che devono passare fra i sei spigoli di un tetraedro, affinchè esistano quattro sfere ognuna delle quali tocchi le altre tre e tre delle facce del tetraedro.

G. Loria.

Anno XI, pag. 73.

314. Mostrare che l'equazione cubica in ρ

$$\begin{vmatrix} \rho-(\beta^2+\gamma^2) & \alpha\beta+2\gamma' & \gamma\alpha-2\beta' \\ \alpha\beta-2\gamma' & \rho-(\gamma^2+\alpha^2) & \beta\gamma+2\alpha' \\ \gamma\alpha+2\beta' & \beta\gamma-2\alpha' & \rho-(\alpha^2+\beta^2) \end{vmatrix} = 0.$$

quando si ponga

$$\omega^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \quad . \quad \omega'^2=\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2,$$
$$\omega\omega'\cos\theta=\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma',$$

si riduce all'altra

$$\rho^3-2\omega^2\rho^2+(\omega^4+4\omega'^2)\,\rho-4\omega^2\omega'^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta=0$$

ed ha una sola radice reale inferiore ad $\omega^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta$.

A. Del Re.

(Continua)

BIBLIOGRAFIA

Ernesto Pascal. — *Repertorio di Matematiche Superiori.* (Parte II - *Geometria*). — Milano, Hoepli, 1900.

Quando nel 1898 venne alla luce il primo volume di quest'opera, dedicato all'Analisi, tutti i cultori della Matematica ne riconobbero l'immensa utilità; nè solo in Italia, ma altresì all'estero, come dimostra anche il fatto che sono ora in corso di stampa due traduzioni, l'una tedesca a Lipsia, l'altra polacca a Varsavia. Era perciò universalmente desiderato che presto uscisse il secondo volume relativo alla Geometria.

Con gli stessi intendimenti coi quali è stata compilata la prima parte, è ora stata condotta a termine la seconda. Così nell'una come nell'altra son tracciate delle singole teorie le linee generali; sono cioè enunciate le definizioni ed i teoremi principali (senza dimostrazione), riportate le formule più comuni ed intercalati anche assai copiosi dati bibliografici.

Nessuno studioso può esimersi dell'avere nella propria biblioteca, per quanto modesta essa sia, questo pregevolissimo manuale, a cui dovrà ricorrere, non dirò per *studiare* una speciale teoria, ma per *stabilire il piano* delle sue ricerche in questo od in quel ramo speciale della matematica od anche per richiamare alla memoria e coordinare gli studi già fatti.

Il 2° volume, di cui più specialmente ora dobbiamo occuparci, è riuscito più del primo ricco di argomenti; esso consta di circa 1000 pagine ed è diviso in ventidue capitoli, al contenuto dei quali accenniamo brevemente:

Nel I°, che ha per titolo *Geometria delle forme continue fondamentali* fondendo, per così dire, l'ordinaria Geometria proiettiva con l'Analitica, sono studiate successivamente le forme di 1ª, 2ª e 3ª specie (per quella di 4ª specie v. il cap. XIV).

Nel cap. II sono invece studiate le *forme discontinue*, il III contiene la *teoria invariantiva delle forme algebriche*.

I cap. IV e V contengono rispettivamente l'esposizione delle principali proprietà projettive e metriche delle *coniche* e delle *quadriche;* il VI riguarda la *teoria generale delle curve piane algebriche;* nei due capitoli seguenti poi sono studiate in particolare le *cubiche* e le *quartiche* piane.

I cap. IX-XIII son dedicati rispettivamente alla *teoria delle superficie e curve gobbe algebriche*, alle *curve storte dei vari ordini*, alle *superficie degli ordini 3° e 4°* ed a quelle di ordine superiore.

Nel XIV è esposta la *Geometria della retta nello spazio* e la *Geometria della sfera.* Il XV è dedicato alla *Geometria numerativa.*

Nel capitolo XVI, in cui è trattata la *Geometria infinitesimale delle curve e delle superficie*, è mirabilmente condensata in circa 100 pagine l'ordinaria Geometria differenziale ed integrale.

Il XVII riguarda le principali *trasformazioni* metricamente specializzate e le più notevoli *curve particolari*, algebriche o trascendenti, piane o gobbe; il XVIII contiene vari argomenti speciali; i due seguenti son dedicati agli *iperspazi* (studiati projettivamente nell'uno e col metodo infinitesimale nell'altro).

Finalmente il XVI è dedicato alla *Geometria assoluta* e l'ultimo alla *Geometria del triangolo.*

L'A. nota nella prefazione che quest'ultimo capitolo è fuori di posto e dice che ciò è avvenuto perchè egli si decise a compilarlo quando già era avviata la pubblicazione del libro; del resto ci sembra che quel capitolo, in qualunque parte dell'opera si trovi, sia sempre fuori di posto in un repertorio di Matematiche superiori. Altrettanto dicasi delle nozioni di trigonometria poste alla fine del II capitolo.

Concludendo, certi d'interpetrare i sentimenti di molti, ringraziamo il chiarissimo prof. Pascal per l'opera utilissima che ci ha data, mentre ammiriamo il suo ingegno e la vasta sua cultura che gli hanno permesso di trattare con egual competenza le parti più disparate della scienza matematica.

Una parola di lode infine merita ancora il solerte editore Comm. U. Hoepli per l'iniziativa della pubblicazione e per l'accurata ed elegante veste che ha saputo darle.

G. C.-L.

E. Cergignani. — *XX Lezioni di Aritmetica.* — Firenze, Ramella, 1899.

Di questo libro è uscito il 1° fascicolo (Lez. I-X) che tratta dei numeri interi. Come riconosce l'A. stesso nella prefazione, queste lezioni non si discostano molto dagli altri trattati di aritmetica: è una compilazione fatta assai diligentemente sulla guida di altri trattati ben noti come quelli del Gazzaniga, del Martini-Zuccagni ecc. L'A. però, a dire il vero, cita scrupolosamente le fonti a cui ha attinto.

Come già fece il mio egregio amico prof. Martini nelle sue pregevoli *Lezioni di Aritmetica teorica*, l'A. divide le operazioni fondamentali in dirette ed inverse e le une e le altre in operazioni di 1ª, 2ª e 3ª specie; questa distinzione è elegante ed offre anche assai utilità pratica quando si riavvicinino, trattandole contemporaneamente, le operazioni dirette o inverse di 1ª e 2ª specie, mostrandone le notevoli analogie, come già fece per il primo il Martini e come recentemente ha fatto il prof. Conti nel suo pregevole trattato, ma l'A. invece rende sterile questa distinzione perchè ciò non ha fatto.

Per la teoria della divisibilità dei numeri è posto a fondamento il teorema generale di Pascal e da questo sono dedotti, oltre a quelli che si trovano in tutti i trattati, molti altri particolari criterî di divisibilità. La stessa teoria è poi svolta in paragrafo a parte, anche coi metodi più comunemente usati.

Mi piace notare, già che mi si presenta l'occasione, la tendenza che si è accentuata, specie in questi ultimi tempi, a riconoscere più razionale il metodo di Pascal per la teoria della divisibilità dei numeri, come quello che riavvicina tutti i criterî particolari deducendoli da un principio unico. (Si veda a questo proposito le varie note pubblicate in questo *Periodico* e nel *Supplemento*.)

Nelle altre parti del libro del Cercignani non mi sembra che vi sia nulla da notare particolarmente, per le ragioni già dette; ripeto solo che, *in generale*, l'A. nell'esporre queste sue lezioni, ha saputo congiungere assai bene la chiarezza al rigore scientifico; ciò è sufficiente per un lavoro che, come dice modestamente l'A. nella prefazione, è stato scritto per solo uso dei suoi scolari del Collegio Nazionale di Firenze.

Un pregio del libro del Cercignani è anche la notevole quantità di note storiche che trovansi disseminate nel corso dell'opera ed alcune note assai interessanti e ben redatte che son poste come appendici, fra le quali cito la 3ª. che contiene un cenno sui varî sistemi di numerazione, la 5ª che si occupa dei metodi abbreviati per eseguire la moltiplicazione e la 8ª che contiene una breve biografia di Biagio Pascal.

G. C.-L.

PER UNA POLEMICA

L'opuscolo del Comm. A. M. Bustelli *I fenomeni naturali e le rappresentazioni matematiche,* e la critica che di esso fece il Prof. G. B. Marangoni hanno dato origine ad una lunga e noiosa polemica di una violenza, crediamo, senza precedenti nel campo sereno della scienza matematica.

Il *Periodico,* che pubblicò un articolo del Prof. De Amicis favorevole al citato opuscolo, perchè scritto in forma cortese e corretta, e non avrebbe avuto difficoltà a pubblicarne uno contrario, se lo avesse ricevuto, purchè scritto con eguale temperanza e moderazione, è stato e intende rimanere estraneo alla polemica, ma sembrandogli che la violenza delle varie pubblicazioni specialmente dell'ultimo articolo del Bustelli, al quale l'alta posizione avrebbe dovuto consigliare una maggior moderazione di linguaggio, non sia un *fenomeno naturale,* segue l'esempio del giornale *La scuola educatrice*, e si rivolge ai due campi contendenti invocando *pace, pace, pace!!*

Il citato giornale aggiunge: " Ella *(La scuola educatrice)* deplora sinceramente " che fra persone benemerite della scienza e dell'insegnamento vi possano acca- " dere simili screzii; tanto più che, *leggendo tra le righe* negli scritti del Marangoni " e del Bustelli, le è parso di capire che quei due si stimano ancora tanto quanto " basterebbe loro per intendersi colla minima delle spese; quella di un francobollo. " Si scrivano dunque, e lascino andar la stampa, che oltre al costar molto, non " riesce, in certi casi, che ad arruffare sempre più la matassa ".

Il *Periodico* si associa di gran cuore a questa esortazione alla calma e alla concordia, e si augura che i due professori, ambedue benemeriti dell'istruzione, invece di sciupare le forze del loro ingegno nello scagliarsi l'un l'altro parole amare e spiacevoli, le consacrino più utilmente al progresso della scienza.

Intanto però dalla breve *protesta* inviataci dal Prof. Marangoni in seguito all'ultimo articolo del Bustelli e pubblicata nella *Scuola secondaria*, num. 8, anno IV, stralciamo ben volentieri le seguenti parole di chiusa che contengano la conferma di una dichiarazione dei Proff. Veronese e Gazzaniga comparsa nel num. 7, anno IV, della *Scuola secondaria*. " Se dopo ciò scrivo queste poche righe non è già per " rispondere al Bustelli, ma per protestare che, con me, siano state offese persone " che io stimo fortemente per il loro valore e che assolutamente non hanno avuto " nessuna parte e nessuna influenza sui miei giudizi intorno al primo discorso del " Bustelli, e dei quali tutta la responsabilità spetta a me solo ".

E con questo il *Periodico* dichiara che non parlerà mai più della incresciosa quistione.

*DA GIORNALI E RIVISTE

Nouvelles Annales de math. T. XVIII$_3$. 1899. (Paris, Gauthier-Villars).

Fasc. IV (aprile). *G. Tarry*, Le linee aritmetiche. — *G. Tarry*, Curiosità matematica. — *Godrefoy*, Nuova dim. della regola di convergenza di Gauss. — *Lecornu*, Sul moto d'un punto sollecitato da una forza centrale costante. — *G. Candido*, Sopra un teorema noto. (*) — *Tikhomandritzky*, Sul secondo teorema della media (L'A. dimostra che, nel caso in cui il fattore della funzione da integrarsi, il quale varia nelle stesso senso fra i limiti dell'integrazione, ammette una derivata, il secondo teorema della media è un semplice corollario del primo). — Certificati di studj superiori delle Fac. delle scienze (Lyon, Marseille, Nancy, Toulouse). — Soluzioni di quistioni proposte: 1732 *(Audibert)*; 1734 o 1735 *(Dulimbert)*. — Bibliografia (Calcul de généralisation, par G. Oltramare). — Quistioni 1819-1821.

Fasc. V (maggio). *R. Bricard*, Secondo concorso dei " Nouvelles Annales ". Memoria premiata (nel § I è dim. che sei punti d'una conica possono essere in involuzione in 1, 2, 3, 4 o 6 modi differenti, e sono definite geometricamente le posizioni corrispondenti dei 6 punti; nei cinque successivi §§ sono dim., senza appoggiarsi sulla teoria delle funzioni o degli integrali iperellittici, nè sulle proprietà della sup. di Kummer, alcune proprietà del tetraedroide relative a' suoi sedici punti doppi). — *Vittorio Nobile*, Nota di Geometria cinematica. (Studio del moto di un solido di rivoluzione che ha un punto fisso sull'asse e rotola senza strisciare sopra una retta fissa. Notiamo il teorema " Se una quadrica di rivoluzione mobile attorno al suo centro fisso, rotola senza strisciare sopra una retta fissa, l'asse di rivoluzione genera un cono quadrico "). — Corrispondenza. (*Issaly*, Sulla quistione 1727; *A. de Saint-Germain*, Sulla quistione 1727). — Quistioni 525, 528, 546, 549, (**) 1822-1823.

Fasc. VI (giugno). Secondo concorso delle " Nouvelles Annales " pel 1899. — *F. Caspary*, Applicazioni dei metodi di Grassmann; vettori nel piano; definizioni, proprietà. — *Genese*, Sopra alcuni integrali (l'A. calcola con processi diretti semplicissimi quattro integrali che Hermite nel *Cours d'Analyse*, 1873, pag. 260, aveva segnalato come non ottenibili direttamente). — *Stuyvaert*, Punto notevole nel piano

(*) Il teorema attribuito dall'A.: al sig. *Goffart* (Nouv. Ann., 1834, p. 397) [" le rette di Simson relative a due punti diametralmente opposti del cerchio circoscritto a un tr. dato sono rettangolari "] che è poi la proprietà iniziale delle tangenti alla ipocicloide di Steiner, era conosciuta molto prima del 1884. È anche immediata la dim. del teorema più generale " le rette di Simson relative a due punti qualunque del cerchio circoscritto a un tr. dato, formano un angolo eguale a quello alla circonferenza che insiste sull'arco terminato ai due punti ". (V. R.)

(**) La quistione 549, ora nuovamente proposta perchè creduta insoluta, fu risoluta magistralmente dal Prof. *Cremona* (Nouv. Ann., 1864, p. 21) e non è il caso di tornarci sopra. (V. R.)

d'una cubica, (Studio dei punti del piano d'una cubica le cui coniche polari sono cerchi). (*) — *Duporcq*, Soluz. della quistione di mat. speciali (Aggregazione delle Sc. Mat.; Concorso del 1898). — *H. Vogt*, Bibliografia (Traité de Géom. par C. Guichard).

Fasc VII (luglio). *E. Lacour*, Sull'equazione d'Eulero. (Valendosi di considerazioni geometriche, l'A. ritrova elegantemente l'integrale generale della equazione differenziale $dx : \sqrt{\psi(x)} = dx_1 : \sqrt{\psi(x_1)}$, nella forma data da Stieltjes e lo esprime mediante invarianti e covarianti del polinomio di quarto grado $\psi(x)$). — *A. Pleskot*, Limiti delle radici d'una equazione non avente che radici reali. (L'A. risolve la quistione indicata valendosi della teoria dei massimi e minimi. — *L. Ripert*, Sull'omografia e la dualità applicata alle proprietà metriche dello spazio. — Concorso generale. — Amm. alla Sc. Politecnica. — Amm. alla S. Normale Sup. — Soluzioni di quistioni: 1739 *(Duporcq e Boulanger)*; 1740 *(Boulanger)*; 1741 *(Boulanger)*; 1748 *(Gilbert)*; 1766 *(Dulimbert)*. — Quistioni 1824-1825.

Fasc. VIII (agosto). *L. Autonne*, Sul rapporto anarmonico (L'A. riprende la teoria del rapporto anarmonico ponendo in evidenza i legami di essa con quella dei gruppi di sostituzioni fra quattro lettere). — *Combebiac*, Nozioni elementari sui gruppi di trasformazioni (esposizione elementare di alcune nozioni principali concernenti la teoria dei gruppi di trasformazioni finiti e continui, secondo i lavori di Lie e dei suoi continuatori). — *O. Böcklen*, Nota sopra una superficie studiata da Painvin. (L'A. dim. il teorema: „ Havvi un'infinità di ellissoidi aventi la stessa sezione centrale e la lunghezza del grande asse costante; i fuochi dei piccoli assi di questi ellissoidi sono sulla superficie, di ottavo grado, luogo dei fuochi delle sezioni centrali „. I fuochi del grande asse di questi ellissoidi son situati sopra una superficie d'onda). — *De Longchamps*, Le curve imagini e le curve simmetriche. (Sopra una curva C il punto A è fisso e sulla normale nel punto mobile M si staccano, a partire da M nei due sensi, i segmenti MB = MB' = n. arco AM: L'A. dim. che costruita la tangente a una delle curve luogo di B o B' può tracciarsi la tangente all'altra; poi risolve il problema delle tangenti per una delle due curve). — Aggregazione delle Sc. M. 1899, Sc. centrale delle Arti e Manifatture. (Concorso 1899, 1ª sessione). — Risoluzioni di quistioni proposte: 1768 *(Audibert)*; 1769 *(Audibert)*; 1771 *(Barisien)*. — Quistioni proposte 1826-1829.

Fasc. IX (settembre). *Ch. Zahradnik*, Contributo alla teoria delle cubiche cuspidali. (Se nel piano d'una cubica della terza classe C^3_3 facciamo corrispondere a una retta variabile P la sua retta satellite R_1, si ottiene una corrispondenza univoca e reciproca; analogamente se R_m e R_n sono respettivamente la m-esima e la n-esima retta satellite di P, i sistemi (R_m) (R_n) sono in corrispondenza omografica: l'A. studia queste corrispondenze ed altre quistioni analoghe relative a C^3_3). — *G. Fontené*, Sopra angoli risultanti. — *Laisant*, Nota del Redattore (dimostrazione vettoriale del teorema col quale il sig. Fontené, ha, nell'articolo precedente, esteso allo spazio il teorema di Bellavitis concernente il quadrangolo piano). — Composiz. Mat. d'ammissione alla Scuola Politec. nel 1899. (Risoluz. del sig. *Philbert Du Plessis*). — Risoluz. di quistioni proposte: 1772 *(Audibert)*. — Quistioni 554 (1860; 464, nuovamente proposta).

Fasc. X (ottobre). *G. Fontené* e *R. Bricard*, Sui sistemi di tre relazioni doppiamente quadratiche fra tre variabili. — *E. Piccioli*, Una quistione di geometria differenziale. — *G. Fontené*, Sull'Hessiano d'una forma cubica binaria. — Certificati

(*) Cfr. *Periodico di Matematica* (marzo-aprile 1899). Quistione 459. (V. R.)

di studj superiori. (Sessione di luglio 1898. Parigi e Montpellier; risoluzioni del sig. *Audibert*). — Certificati di studj super. (luglio 1899, Dijon, Montpellier). — *D'Ocagne* (Recensione dei " Premiers principes de Géom. moderne ", par E. Duporcq). — Corrispond. (*Retali*, Sulla quistione 1716; *Hilaire*, Sulla quistione 549). — Risoluzioni di quistioni proposte: 1740 (nota del sig. *A. de Saint-Germain*); 1739 (*Mannheim*); 1769 (*Mannheim*); 1773 (nota d'un abbonato); 1774 (*D'Ocagne*); 1778 (*Leinekugel*); 1786 (*Dulimbert*) (*); 1787 (*Tzitzéica*).

(V. R.)

Bulletin de sciences mathématiques et physiques.

Fasc. XI (1 marzo 1899). — *G. Lehr*. Una relazione metrica utile (dimostra la formula $(p-b)(p-c) = rr'$ essendo b, c le misure dei lati d'un triangolo, p il semiperimetro, rr' le misure dei raggi dei circoli inscritto ed ex iscritto, tangenti al terzo lato). — *Piel*, Dimostrazione di note formule trigonometriche. — Reciproco del teorema di Legendre nel quadrilatero. — Preparazioni agli esami. — Quistioni risolute. — Quistioni proposte.

Fasc. XII (15 marzo 1899). — Preparazioni agli esami. — Quistioni proposte. — Quistioni risolute.

Fasc. XIII (1 aprile 1899). — *Bonnefoy*, Su una trasformazione punto per punto. (Con questa trasformazione, ad una retta corrisponde un circolo, e ad una conica pure un circolo. — Può essere utile per costruire le tangenti da un punto ad una conica, per iscrivere in una conica un poligono, i cui lati passino per punti dati ecc.) — *E. Rebuffel*, Note (1° Riprende il problema del N. 7 sulla risultante di due equazioni di 2° grado e giunge allo stesso resultato senza servirsi degl'immaginarii. 2° Propone in certi casi una costruzione geometrica d'un problema, quando l'equazione è della forma $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = a$) — *Wolkow*, Nuova (?) dimostrazione che un angolo esterno d'un triangolo è maggiore d'un angolo interno non adiacente. — Preparazione agli esami. — Quistioni risolute. — Quistioni proposte.

Fasc. XIV (15 aprile 1899). — *E. Rebuffel*, Sulla frazione di secondo grado $\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ (si serve della trasformazione $x = X + h$, determinando convenientemente h, per trovare il massimo, il minimo della frazione data). — Preparazione agli esami. — Quistioni risolute. — Quistioni da risolvere.

Fasc. XV (1 maggio 1899). — *E. Rebuffel*, Prospettiva d'un circolo. (Partendo dal fatto che un *pgr.* può esser sempre considerato come la proiezione ortogonale d'un quadrato, trova l'inviluppo d'una retta MM' che stacchi su due rette parallele due segmenti OM, O'M', essendo O e O' punti fissi dati, in modo che il prodotto delle misure di questi segmenti sia eguale a una costante data positiva o negativa. Ne deduce che la prospettiva d'un circolo è una conica). — *Droz-Farny*, Nota di trigonometria (semplice dimostrazione geometrica delle formule $\text{sen}\, 2\alpha = 2 \,\text{sen}\, \alpha \cos \alpha$ e $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$). — Preparazioni agli esami. — Quistioni risolute. — Quistioni proposte.

Fasc. XVI (15 maggio 1899). — *N. Plakhowo*, Sulla divisibilità (Espone elementarmente il metodo di Bougaïeff, con cui si prova la divisibilità mediante le congruenze). — Risoluzione d'un triangolo dati a, B-C, e il prodotto bc. — Preparazione agli esami. (Nella risoluzione d'un problema c'è una dimostrazione della formula di Mac-Laurin sul volume del segmento sferico a due basi). — Quistioni risolute. — Quistioni proposte.

(*) Un'altra risoluzione di questa quistione fu già data dal sig. *Sollertinsky* nel T. IV (1894) p. 274 del " *Progreso Matematico* ". (V. R.)

Fasc. XVII (1 giugno 1899). — *Collardeau*, Nota sul V libro di Geometria. (È uno schema dell'ordine in cui devono seguirsi le proporzioni per svolgere contemporaneamente la Planimetria colla Stereometria; una *fusione* insomma, che non ha certo il merito della precedenza sui lavori dei geometri italiani, i quali non sono mai citati). — Preparazione agli esami. — Quistioni risolute. — Quistioni proposte.

Fasc. XVIII (15 giugno 1899). — *L. Gerard*, Sul rigore nelle dimostrazioni. (Importanti osservazioni su errori ed omissioni che si commettono spesso in dimostrazioni di geometria elementare). — Ancora sulla risoluzione del triangolo nel caso considerato al N. 16. — Preparazioni agli esami. — Quistioni risolute. — Bibliografia. — Quistioni proposte.

Fasc. XIX (1 luglio 1899). — Risoluzione del problema di Geometria descrittiva dato a Saint-Cyr. — Quistioni risolute. — Quistioni proposte.

Fasc. XX (15 luglio 1899). — Risoluzioni del problema proposto nel concorso d'ammissione a Saint-Cloud. — *Collardeau*, Nota del V libro di Geometria (Cont. *v. n.* 17). (In questa parte della Nota c'è una buona dimostrazione del teorema: Due triedri del medesimo verso sono eguali se hanno le faccie eguali). — *Bonnefoy*, Trasformazione proiettiva (Nota che la trasformazione del N. 13, seguita da un' inversione, diventa una trasformazione proiettiva. Ottien questa con costruzioni semplicissime). — *Roptin*, Dimostrazione geometrica d'una formula di trigonometria. — *Mayon*, Sulla retta di Simson. — *Rebuffel*, Un problema sul prisma. — Bibliografia. — Quistioni risolute. — Quistioni proposte. — Indice metodico dell'intera annata.

Anno V. Fasc. I (1 ottobre 1899). — X**, Dimostrazione geometrica d'una formula di Trigonometria (v. Anno IV, N. 2). — Problema del concorso generale della 3ª classe moderna. — Preparazione agli esami. — Quistioni proposte. — Quistioni risolute.

Journal de mathématiques élémentaires di H. Vuibert.

Fasc. XI (1 marzo 1899). — *G. Fontené*, Sulla divisione aritmetica (definizione del quoziente, conversione d'una frazione ordinaria in decimale, estrazione della radice quadrata).

Fasc. XV (1 maggio 1899). — *Arnould*, Nota sulle direttrici di Monge dei cilindri di rivoluzione e determinazione degli assi delle sezioni ellittiche (determina gli assi d'un'ellisse data per mezzo di due diametri coniugati).

Fasc. XVI (15 maggio 1899). — *I. Girod*, Sul teorema di Ceva. (Dà una dimostrazione indipendente dal teorema di Menelao). — *Moreau*, Sulle medie aritmetica, geometrica e armonica di due segmenti. (Dimostra che la differenza delle prime due è maggiore della differenza tra la seconda e la terza).

Fasc. XVII (1 giugno 1899). — *Vogt*, Reciproci dei teoremi di Dandelin. (Dimostra gl'inversi di questi noti teoremi, anche nel caso in cui le sfere tangenti alla superficie conica siano tagliate dal piano secante; nel qual caso, come si sa è costante la somma o la differenza delle tangenti condotte da un punto della sezione conica ai due circoli comuni del piano e delle sfere).

Fasc. XVIII (15 giugno 1899). — *C. Bioche*, Sull'equazione biquadratica. Nei numeri precedenti e in quelli non citati, numerosi e svariati problemi.

E. Nannei.

Giulio Lazzeri — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 9 Decembre 1899.

TEORIA GEOMETRICA DELL'INVERSIONE

La teoria delle figure inverse viene sempre esposta, almeno per quanto è a mia cognizione, basandosi sopra una relazione di misura (O A . O A' = K).

In questa breve nota mi propongo di far vedere come tale teoria si possa svolgere molto semplicemente per mezzo di considerazioni puramente geometriche, e di dedurre la proprietà, che ordinariamente si prende per definizione, come conseguenza, che potrebbe anche essere omessa (§ 13).

Questa nota fornisce un nuovo esempio dell'utilità che si ha dall'uso di considerazioni stereometriche per la dimostrazione di proprietà planimetriche.

1. Definizione. — Due coppie di rette a_1, a_2 e b_1, b_2 si dicono *antiparallele l'una rispetto all'altra*, se le bisettrici dei loro angoli sono parallele.

Teorema. — *Se due coppie di rette* a_1, a_2 *e* b_1, b_2 *sono antiparallele, gli angoli della* a_1 *con* b_1 *e* b_2 *sono rispettivamente eguali a quelli di* a_2 *con* b_2 *e* b_1.

Inversamente: se gli angoli di una retta a_1 *con due rette* b_1, b_2 *sono eguali a quelli d'un'altra retta* a_2 *con* b_2 *e* b_1 *le due coppie di rette* a_1, a_2 *e* b_1, b_2 *sono antiparallele.*

Infatti, supposto che le quattro rette sieno in un piano, si tengano fisse tre di esse, per es. a_1, a_2, b_1, e si faccia rotare di un diedro piatto la quarta b_2 attorno ad una delle bisettrici degli angoli delle a_1, a_2. Essa prende allora una posizione b'_2 parallela a b_1. Ne segue che gli angoli di b_2 con a_1 o con a_2 sono eguali a quelli di b'_2 con a_2 o con a_1, e quindi anche a quelli di b_1 con a_2 e con a_1.

Se le due coppie di rette a_1, a_2 e b_1, b_2 non sono in uno stesso piano, in forza della definizione esse giacciono in piani paralleli. Condotte allora nel piano b_1, b_2 le a'_1, a'_2 parallele alle a_1, a_2 il teorema sussisterà per le b_1, b_2, a'_1, a'_2, e quindi anche per le b_1, b_2, a_1, a_2.

Corollari. — 1°. *Se due rette* a_1, a_2 *sono antiparallele rispetto a due rette* b_1, b_2, *ogni retta parallela ad* a_1 *è antiparallela ad* a_2 *rispetto alle stesse due rette.*

2°. *Due rette antiparallele ad una terza rispetto alla stessa coppia di rette sono parallele.*

2. Teorema. — *I quattro punti d'incontro di due coppie di rette antiparallele sono conciclici.*

Poniamo $P_{rs} = a_r\, b_s$, $A = a_1\, a_2$, $B = b_1\, b_2$.

1°. Se il quadrilatero $P_{11} P_{21} P_{22} P_{12}$ non è intrecciato, si ha

$$A\widehat{P_{22}}P_{12} = A\widehat{P_{11}}P_{21},$$

e quindi due angoli opposti del quadrilatero sono supplementari, ed il quadrilatero è inscrittibile.

2°. Se il quadrilatero $P_{11} P_{12} P_{22} P_{21}$ è intrecciato, perchè per es. i lati $P_{11} P_{21}$, $P_{12} P_{22}$ hanno comune un punto B, i vertici P_{11}, P_{22} sono da una stessa parte della retta $P_{12}P_{21}$ e gli angoli $P_{12}\widehat{P_{11}}P_{21}$, $P_{12}\widehat{P_{22}}P_{21}$ sono eguali, perciò sono inscritti in uno stesso arco di circolo limitato dai due punti P_{12}, P_{21}.

Corollari. — 1°. *Se due coppie di rette opposte di un quadrangolo completo sono antiparallele, anche le rimanenti rette del quadrangolo sono antiparallele rispetto a ciascuna delle due coppie suddette.*

2°. *Se le bisettrici degli angoli di due coppie di rette opposte di un quadrangolo completo sono parallele, sono pure parallele ad esse le bisettrici degli angoli delle altre due rette del quadrangolo.*

Inversione.

3. Teorema. — *Se due triangoli si corrispondono in modo che le tre rette congiungenti i vertici corrispondenti concorrano in un punto, e che due lati dell'uno siano antiparalleli ai corrispondenti lati dell'altro rispetto alle rette che ne congiungono gli estremi, anche i due lati rimanenti sono antiparalleli rispetto alle rette che ne congiungono gli estremi.*

Abbiansi due triangoli ABC, A'B'C' tali che le rette $a = AA'$, $b = BB'$, $c = CC'$ concorrano in un punto O, e che AB, A'B' siano antiparallele rispetto alle rette a, b e AC, A'C' siano antiparallele rispetto ad a, c. Si deve dimostrare che BC, B'C' sono antiparallele rispetto alle due rette b, c.

Infatti ABB'A', ACC'A' sono inscritti in due circoli C_c, C_B. Se i due triangoli non sono in un piano per i due circoli C_c, C_B passa una sfera che è tagliata dal piano OBC secondo un circolo C_A circoscritto al quadrangolo BCC'B', e per conseguenza BC, B'C' sono antiparallele rispetto alle rette b, c.

Se poi i due triangoli sono in un piano, si conduca per O una retta d fuori di questo piano, e si conducono per A e A' due segmenti AD, A'D' antiparalleli rispetto alle rette a, d. Per la dimostrazione precedente risulta che BD, B'D' sono antiparallele rispetto alle rette b, d, e CD, C'D' sono antiparallele rispetto alle c, d, e per conseguenza, sempre per il caso precedente, anche BD e B'D' sono antiparallele rispetto alle b, d.

4. Essendo data una figura Σ qualunque nello spazio ed un punto O, si può costruire una figura Σ', i punti della quale corrispondano univocamente a quelli di Σ nel modo seguente.

Ad un punto A di Σ si faccia corrispondere un punto A' della retta OA. Ad un altro punto B di Σ si faccia corrispondere il punto d'incontro della OB colla antiparallela di AB, rispetto alle rette OA, OB, condotta per A'. In altre parole condotto per A, A', B un circolo si fa corrispondere a B l'altro punto d'incontro di OB con tale circolo. La corrispondenza è univoca ed involutoria, perchè ad ogni punto B corrisponde un solo punto B' e a B' (considerato come appartenente a Σ) corrisponde B in Σ'.

Fa eccezione il punto O, al quale, colla costruzione precedente, corrispondono infiniti punti, tutti quelli del piano all'infinito. Per il teorema precedente le due figure Σ, Σ' si corrispondono in modo che la retta congiungente due punti corrispondenti passa per O, e le rette $BC, B'C'$, individuate da due coppie di punti corrispondenti, sono antiparallele rispetto alle rette OB, OB'.

Si osservi anche che, se O è interno (o esterno) ad un segmento AA', è anche interno (o esterno) al segmento BB' limitato da due punti corrispondenti B, B' qualunque.

5. Definizioni. — I. Due figure si dicono *inverse* rispetto ad un punto O (detto *centro d'inversione*) a distanza finita o infinita, quando i loro punti si corrispondono univocamente (escluso O) in modo che le rette congiungenti ogni coppia di punti corrispondenti passino per O e che le rette $BC, B'C'$ individuate da due coppie di punti corrispondenti sieno antiparallele rispetto alle OB, OC. Tale corrispondenza si chiama un'*inversione*.

II. Un'inversione si dice *positiva* o *negativa*, secondo che il centro O è esterno o interno al segmento individuato da due punti corrispondenti.

III. — Una figura inversa di se stessa si chiama *anallagmatica*.

Dalle definizioni esposte e da quanto abbiamo detto nei §§ precedenti discendono i seguenti

Corollari. — 1°. *Un'inversione col centro all'infinito è sempre positiva, e si riduce ad una simmetria rispetto al piano che è perpendicolare al segmento che unisce due punti corrispondenti e lo divide per metà.*

2°. *Un'inversione è individuata quando si conosce il centro ed una coppia qualsiasi di punti corrispondenti.*

3°. *Un'inversione è individuata quando si conoscono due coppie di punti corrispondenti.*

Infatti se A, A'; B, B' sono due coppie di punti corrispondenti, non situati sopra una retta, devono esser situati su di un circolo, ed il centro O d'inversione è il punto comune alle rette AA', BB'.

Se poi A, A', B, B' sono sopra una stessa retta r e C è un punto qualunque fuori di r, il suo omologo deve essere il punto comune ai due circoli circoscritti ai triangoli $AA'C$, $BB'C$ ed O è il punto comune alle rette r, CC'. L'inversione, come è facile vedere, è positiva o negativa, secondo che le due coppie si separano o no.

4°. *In una inversione ogni retta (o piano) che passa per il centro O ha per corrispondente la retta (o piano) medesima.*

5°. *In una inversione col centro a distanza finita un circolo (o sfera) che passa per il centro d'inversione O ha per corrispondente una retta (o piano) perpendicolare al diametro che passa per O. Inversamente ogni retta (o piano) che non passa per O ha per corrispondente un circolo (o sfera) che passa per O.*

Sia c un circolo condotto per O, A il punto opposto ad O sul circolo medesimo ed A' il punto corrispondente ad A nell'inversione. Se B è un punto arbitrario di c il suo corrispondente è il punto d'incontro di OB colla antiparallela ad AB condotta per A', la quale è perpendicolare ad OA', essendo AB perpendicolare ad OB. Dunque tutti i punti corrispondenti ai punti di c si trovano sulla retta c' perpendicolare ad OA' in A'. In simil guisa si vede che ogni punto di c' ha per corrispondente un punto di c.

6°. *Ogni circolo (o sfera) che passi per due punti corrispondenti di una inversione ha per corrispondente il circolo (o sfera) medesimo, ossia è una figura anallagmatica.*

Infatti ogni punto B di un circolo c, che passi per due punti corrispondenti A, A', ha per corrispondente un altro punto B' del circolo medesimo.

7°. *Tutti i circoli, situati in un piano che contengono una coppia qualsiasi di punti corrispondenti, e quindi ne contengono infiniti, formano un connesso (*) che ha per centro il centro d'inversione.*

Tutte le sfere, ciascuna delle quali contiene una e quindi infinite coppie di punti corrispondenti, formano un complesso che ha per centro il centro d'inversione.

8°. *Ogni circolo (o sfera) che non passa pel centro d'inversione ha per corrispondente un circolo (o una sfera).*

Sia c un circolo, il cui piano non passa per O, ed A un suo punto. Esso è l'intersezione delle due sfere P_1, P_2, individuate, da c e da O l'una, da c e da A' (corrispondente ad A) l'altra, la prima delle quali ha per corrispondente un piano P'_1, passante per A' la seconda se stessa. Perciò la curva c' corrispondente a c è il circolo comune a P'_1, P_2.

Sia ora c un circolo il cui piano passi per O (od una sfera non passante per O), ed A', B' i punti corrispondenti a due suoi punti A, B. Se A_1, B_1 sono gli ulteriori punti d'incontro di OA ed OB con c, si vede che essendo A'B' e A_1B_1 antiparallele ad AB rispetto a OA, OB sono parallele fra loro, e per conseguenza la figura inversa di c è la figura ad essa omotetica rispetto al centro O, essendo A_1, A' punti corrispondenti, ossia è un circolo (od una sfera). L'omotetia è diretta o inversa, secondo che l'inversione è positiva o negativa.

6. La proprietà enunciata nel cor. 6° del § precedente dà origine ad una nuova costruzione di una inversione.

(*) Per le nozioni di piani, assi o centri radicali, di fasci, connessi, complessi di sfere, stabilite indipendentemente dalla teoria della misura, veggasi LAZZERI e BASSANI, *Elementi di Geometria*, 1ª edizione, pag. 187 e seguenti.

Si consideri un fascio di sfere e sia O un punto del piano radicale comune. Per ogni punto A dello spazio passa una ed una sola sfera del fascio che è tagliata dalla retta OA in un altro punto A'. Le coppie di punti A, A' si corrispondono in un'inversione.

7. Teorema. — *La figura inversa di un complesso di sfere rispetto ad un centro O è un altro complesso. I centri radicali di due complessi e il punto O sono in linea retta.*

Sieno γ_i le sfere del dato complesso di centro P; π_{ih} il piano radicale delle sfere γ_i, γ_h ed r_{ihk} l'asse radicale delle sfere γ_i, γ_h, γ_k.

Le sfere del complesso che passano per O formano un connesso, il cui asse radicale passa per P, ossia tali sfere hanno in comune un altro punto P_1 della OP. Queste sfere corrispondono nella inversione di centro O ai piani radicali delle sfere γ'_i corrispondenti alle γ_i. Dunque tutti questi piani radicali passano per il punto P'_1 omologo di P_1, ossia le sfere γ'_i costituiscono un complesso. I punti O, P, P_1, P'_1 sono evidentemente in linea retta.

Corollari. — 1°. *Se Σ_1, Σ_2 sono due figure inverse rispetto ad un centro P, e Σ_1', Σ_2' sono le figure corrispondenti a Σ_1, Σ_2 in una invasione di centro O, anche le figure Σ_1', Σ_2' sono inverse rispetto ad un centro P_1'. I punti O, P, P_1' sono in linea retta.*

2°. *Due figure inverse si possono trasformare in due figure simmetriche rispetto ad un piano per mezzo di una inversione.*

Se infatti si prende per centro d'inversione O il punto di contatto di una delle sfere che passano per due punti corrispondenti con una delle tangenti ad essa condotte da P, il punto P_1 coincide con O ed il suo omologo P_1' va all'infinito. Per conseguenza le due figure Σ_1', Σ_2' omologhe delle figure date Σ_1, Σ_2 si corrispondono in un'inversione col centro all'infinito, ossia sono simmetriche rispetto ad un piano.

3°. *L'inversa rispetto ad un'inversione qualsiasi di una figura anallagmatica è un'altra figura anallagmatica.*

4°. *Una figura anallagmatica si può trasformare per mezzo di un'inversione in una figura simmetrica rispetto ad un piano.*

8. Teorema. — *In un'inversione positiva esistono infiniti punti uniti, il luogo dei quali è una sfera di centro* O. (Sfera d'inversione.)

In una inversione negativa non esistono punti uniti.

Sia data una inversione positiva di centro O, nella quale siano A, A' e B, B' due coppie di punti corrispondenti, e consideriamo il fascio di sfere che passano per il circolo dei quattro punti A, A', B, B'. Se l'inversione è positiva, O è esterno a tutte le sfere del fascio ed è chiaro (§4) che sono uniti tutti e soli i punti di contatto di una qualunque di queste sfere con le tangenti condotte da O. Il luogo di tali punti è una sfera di centro O.

Se l'inversione è negativa, O è interno a tutte le sfere suddette, e non si posson da essa condurre tangenti alle sfere, perciò non esistono punti uniti.

Corollario. — *La sfera d'inversione di una inversione positiva taglia ortogonalmente qualsiasi sfera che passa per due punti corrispondenti.*

9. Teorema. — *Due figure inverse di una terza rispetto ad un medesimo centro sono omotetiche rispetto al medesimo centro.*

Sieno Σ_1, Σ_2 due figure inverse di una terza Σ_3 rispetto ad un centro O e siano A_1, B_1 e A_2, B_2 i loro punti corrispondenti ad A_3, B_3 di Σ_3. Le rette A_1B_1 e A_2B_2 sono antiparallele di A_3B_3 rispetto alle OA_3, OB_3 e perciò sono parallele; ne segue che le due figure Σ_1, Σ_2 sono omotetiche direttamente o inversamente, secondo che le due inversioni sono o no della stessa specie.

10. Teorema. — *Due circoli in un piano (o due sfere) si corrispondono in due inversioni una positiva e l'altra negativa, aventi per centri i due centri di similitudine.*

Sia O il centro di omotetia di due circoli (o sfere) c, c'. Presi due punti ad arbitrio A_1, B_1 su c, siano A', B' i loro omologhi su c' in tale omotetia, e A, B i punti d'incontro (non coincidenti con A_1, B_1) delle OA_1, OB_1 con c. Le rette A_1B_1 e $A'B'$ sono parallele e le B_1A_1, AB sono antiparallele rispetto alle OA, OB, e quindi anche $A'B'$ e AB sono antiparallele rispetto ad OA, OB. Ne segue che i due circoli (o sfere) sono inversi rispetto al centro O.

11. Teorema. — *Se r_1, r_2 sono due rette che s'incontrano, i loro angoli sono eguali a quelli dei due circoli c'_1, c'_2 ad essi corrispondenti in una inversione.*

Se le due rette r_1, r_2 s'incontrano in un punto P, i due circoli c'_1, c'_2 si devono tagliare in O e nel punto P' della OP corrispondente a P. Le tangenti in O a questi circoli sono parallele alle r_1, r_2, e perciò gli angoli di queste due coppie di rette sono eguali.

12. Teorema. — *I diedri formati da due piani σ_1, σ_2 sono eguali a quelli delle superficie sferiche σ'_1, σ'_2 ad essi corrispondenti in una inversione.*

Le due sfere σ'_1, σ'_2 passano pel centro d'inversione O ed i piani π'_1, π'_2 ad esse tangenti sono paralleli a σ_1, σ_2, perciò i diedri di queste due coppie di piani sono rispettivamente eguali.

13. Teorema. — *Il prodotto delle distanze del centro d'inversione da due punti corrispondenti è eguale ad una costante positiva o negativa, secondo che è positiva o negativa l'inversione.*

Infatti se A, A' e B, B' son due coppie di punti corrispondenti, essi sono sopra un circolo e si ha

$$OA \,.\, OA' = OB \,.\, OB' = K$$

indicando con K la potenza di O rispetto al suddetto circolo. La costante K è positiva o negativa, secondo che O è esterno o interno al detto circolo.

Corollario. — *La costante K di un'inversione positiva è eguale ad R^2, essendo R il raggio della sfera d'inversione.*

Proiezione stereografica.

14. Definizione. — La proiezione di una superficie sferica fatta da uno dei suoi punti sopra un piano perpendicolare al diametro che passa per quel punto dicesi *proiezione stereografica*.

Sia O il centro e π il piano di proiezione perpendicolare al diametro OA, A' il punto d'incontro della retta OA con π.

È evidente che la superficie sferica σ e la sua proiezione son figure che si corrispondono nell'inversione che ha O per centro ed A, A' per punti corrispondenti.

Risultano da ciò le seguenti notevoli proprietà della proiezione stereografica, che si posson dedurre immediatamente dalle proprietà delle figure inverse.

1°. *I punti della superficie sferica e della sua proiezione si corrispondono univocamente, eccettuato il punto O.*

2°. *La proiezione di un circolo della superficie sferica è un altro circolo.*

Sia infatti c un circolo della sfera σ, B un suo punto, B' la proiezione di B su A. Il circolo c si può riguardare come l'intersezione della sfera σ con una sfera σ_1 condotta per c e per B': Nell'inversione a σ e σ_1 corrispondono π e σ_1 (§ 5, Cor. 5° e 6°), dunque a c corrisponde il circolo comune a π e σ_1.

3°. *L'angolo di due rette tangenti alla superficie sferica in un punto è eguale alla sua proiezione sul piano π.*

Ciò è conseguenza immediata del teorema del § 11.

4°. *Se due figure sulla superficie sferica sono prospettive rispetto ad un centro* P, *le loro proiezioni sono figure omologhe in una inversione, il cui centro è la proiezione di* P; *e viceversa* (§ 7, Cor. 1°).

5°. *La proiezione di una figura anallagmatica situata sulla superficie sferica è una figura anallagmatica. Inversamente una figura anallagmatica piana è la proiezione stereografica dell'intersezione di una sfera con un cono* (§ 7, Cor. 3°).

G. Lazzeri.

NOTE. — 1ª. Dal teorema del § 10 resulta che i centri di due sfere inverse sono punti corrispondenti nella omotetia, ma non già nella inversione.

È noto che *l'omologo d'inversione del centro di una delle sfere è il coniugato armonico di* O *rispetto al diametro dell'altra sfera la cui retta passa per* O.

Di questo teorema del quale si danno di solito dimostrazioni metriche, si può dare la seguente semplicissima dimostrazione geometrica.

Sia C' l'inverso del centro C della sfera c, e sia E'F' il diametro di c' la cui retta passa per O. Si imagini una sfera r' passante per O e per C'; ad essa corrisponderà un piano r passante per C. Il piano (diametrale) r taglia ortogonalmente la sfera c, quindi le sfere r', c' si taglieranno pure ortogonalmente.

Dal noto teorema di *Poncelet* sulle sfere ortogonali (*) si deduce quindi che O, C' separano armonicamente il diametro E' F' della sfera c'.

È da notare che il teorema di *Poncelet* si può dimostrare ben facilmente

(*) Cremona. *Geometria projettiva*, pag. 39. Reye. *Geometria di posiz.*, pag. 44.

senza ricorrere al concetto di misura. Basta perciò ricordare che la condizione necessaria e sufficiente affinchè un fascio sia armonico è che le parallele ad uno dei raggi del fascio siano bisecate dagli altri tre, proprietà che può dedursi senza far uso di considerazioni metriche.

COROLLARIO. — *Se c, c_1 sono due sfere concentriche di centro* C, *i* piani polari *di* O *rispetto alle sfere inverse* c', c'_1, *coincideranno e reciprocamente.*

2ª. Del teorema precedente si può far uso per dimostrare assai brevemente il seguente teorema di *Chasles* sulla proiezione stereografica:

Il centro della proiezione stereografica ($A'B'$) *di un circolo* (AB) *della sfera* σ, *il cui piano non passa per* O, *è la proiezione* D′ *del vertice* P *del cono tangente alla sfera lungo il circolo* (AB). (*)

Per (AB) si faccia passare una sfera λ di centro P, la quale taglierà ortogonalmente la sfera σ. Il diametro EF di λ passante per O incontri in D la sfera σ e in D′ il piano π.

I punti O, D, separano armonicamente E, F. Dal precedente teorema segue dunque che D′, è appunto il centro della sfera λ', inversa di λ, la quale interseca π secondo il circolo massimo ($A'B'$) proiezione stereografica di (AB). Il centro D′ di ($A'B'$) è dunque la proiezione di P sul piano π. Con questo metodo si dimostra che la projezione di un circolo della sfera σ è un altro circolo, e contemporaneamente si determina il centro di quest'ultimo.

P. AUSSANT-CARÀ.

SULLE POLARITÀ PIANE

1. Sia ABC un triangolo autoconiugato in una data polarità π. Sieno I_a, I_b le involuzioni di punti reciproci esistenti sui lati *a* e *b*. Con i dati la polarità π è individuata.

Si determini l'involuzione I_c di punti reciproci esistente nel lato *c*, e si determinino ancora la J_a congiunta delle I_b, I_c; J_b congiunta delle I_a, I_c; e la J_c congiunta delle I_a, I_b.

2. TEOREMA. — *Le* J_a, J_b, J_c *sono fra di loro congiunte.* (**)

Si abbia: $I_a \equiv \dfrac{CM}{BM'}$, $I_b \equiv \dfrac{CN}{AN'}$, $I_c \equiv \dfrac{AZ\,Z'}{BZ_1Z'_1}$, $J_a \equiv \dfrac{CM}{BM_1}$, $J_b \equiv \dfrac{CN}{AN_1}$, $J_c \equiv \dfrac{AZ}{BZ_1}$, dove è $Z \equiv c\,.\,MN$, e gli altri punti Z', Z_1, Z'_1, M_1, N_1 sono ottenuti con le note costruzioni.

Dalla identità $I_c\,J_c \equiv AB\dfrac{Z\,Z_1}{Z'_1Z'}$, si deduce che ABZ_1Z' è un gruppo armonico, e quindi Z_1 appartiene alla polare di Z' rispetto all'angolo B(C)A. Adunque siccome Z' è allineato con M′ ed N′, così anche M_1 ed N_1, sono allineati con Z'.

Da ciò si deduce che la J_c è la congiunta delle J_a, J_b. c. v. d.

(*) Veggasi per es. BALTZER-CREMONA, *Stereometria*, § 5, 20.

(**) Sebbene questo teorema ed il seguente siano notevoli casi particolari di teoremi più generali. (V. SANNIA, *Geom. Proiett.*, Napoli, Pellerano, 1895, pag. 715-234, *a)*) nondimeno mi piace darne queste dimostrazioni perchè molto semplici.

3. Delle sei involuzioni I_a, I_b, I_c, J_a, J_b, J_c, tre sempre sono ellittiche e tre iperboliche, e sopra ciascuno dei lati del triangolo $ABC \equiv abc$, non ve ne sono due della stessa specie.

4. Teorema. — *Scegliendo delle sopra dette 6 involuzioni, tre ad arbitrio, ma su lati distinti e tali che sieno o tutte e tre ellittiche, oppure due iperboliche e la rimanente ellittica, esse possono considerarsi come le involuzioni di punti reciproci rispetto ad una determinata polarità, che ha* $ABC \equiv abc$ *per triangolo autoconiugato.*

Le J_a, J_b, I_c sieno o tutte e tre ellittiche, ovvero sieno due iperboliche e la rimanente ellittica. Consideriamo la polarità determinata dalle J_a, J_b, e in cui a e b sono rette reciproche. Allora è evidente che A e B sono reciproci in detta polarità. Il polo di MN è $M_1A \,.\, N_1B \equiv P$, e siccome M_1 ed N_1 sono allineati con Z', così i punti C, P e Z_1 sono allineati, e quindi Z e Z_1 sono reciproci. c. v. d.

5. Com'è facile vedere, si hanno così 4 polarità, delle quali una è sempre della 2ª specie, e le altre 3 sono della 1ª specie. Da una qualunque di esse, considerando il triangolo autoconiugato $ABC \equiv abc$, e procedendo, come si è fatto partendo dalla data, si ottengono le altre 3. Chiameremo rispettivamente π_1, π_2, π_3, π_4 le polarità determinate come segue:

I_a	J_a	J_a	I_a
I_b	J_b	I_b	J_b
I_c	I_c	J_c	J_c

Due qualunque di queste 4 polarità hanno in comune il triangolo autoconiugato $ABC \equiv abc$, l'involuzione di punti reciproci su uno dei lati di $ABC \equiv abc$, e le involuzioni sui due lati rimanenti di questo triangolo, rispettivamente armoniche.

6. Teorema. — *Il prodotto di due qualunque di queste 4 polarità è un'omologia armonica, il cui asse è quel lato di* $ABC \equiv abc$ *che contiene l'involuzione comune, e il cui centro è il vertice opposto.*

Infatti si osservi che se per es. consideriamo le due polarità π_1, π_2, si ha $I_a\, J_a \equiv CB$, $I_b\, J_b \equiv CA$ e $I_c\, I_c \equiv 1$.

7. Corollario 1°. — *Prese delle 4 polarità due ad arbitrio, ciascuna è la polare reciproca di sè stessa rispetto all'altra.*

Cioè: Ciascuna polarità trasforma in sè stessa una qualunque delle rimanenti.

Corollario 2°. — *Se* hkrs *è una permutazione qualunque dei numeri* 1, 2, 3, 4, *si ha* $\pi_h\, \pi_k \equiv \pi_r\, \pi_s \equiv$ *ad una omologia armonica, e quindi è anche* $\pi_h\, \pi_k\, \pi_r\, \pi_s \equiv 1$.

Corollario 3°. — *Il prodotto di due delle polarità è eguale al prodotto delle due omologie armoniche corrispondenti alle due involuzioni non comuni.*

Per es. $\pi_1\pi_2 \equiv \pi_3\pi_4 \equiv [C, c] \equiv [A, a] \,.\, [B, b]$.

Corollario 4°. — *Si ha:* $\pi_h\, \pi_k\, \pi_r \equiv \pi_s$.

Corollario 5°. — *Ponendo* $\pi_k \pi_r \equiv \Omega$ (*omologia armonica*), *abbiamo* $\pi_s \equiv \pi_h \Omega$, *e quindi, se per es. i punti* A *e* B *sono all'infinito,* $\pi_1\pi_2$, $\pi_3\pi_4$ *sono due coppie di polarità coniugate, e se* π_3 π_4 *sono due iperboli, ne segue che ciascuna di esse è il luogo degli estremi dei diametri ideali dell'altra.*

8. Due qualunque delle quattro polarità sono bitangenti: la corda di contatto è il lato di *abc* che ne contiene l'involuzione comune, ed il vertice opposto ne è il polo del contatto.

Per fissare le idee supponiamo che I_a e I_b sieno iperboliche, allora se consideriamo due delle polarità della 1ª specie, per es. la 1ª e la 4ª, esse, come sappiamo, sono corrispondenti in una omologia di centro A^* ed asse AA^*_1, come in un'altra di centro A^*_1 e di asse AA^*. (Con A^* e A^*_1 indichiamo i punti doppi della I_a; abbiano analogo significato B^*, B^*_1, per la I_b; e C, C_1, per la J_c). Ora è facile vedere che le omologie di cui si parla sono le armoniche, perchè, per es., B^*_1 e C^*_1 sono corrispondenti nella omologia armonica $[A^*_1, A^*A]$. (Si noti che A^*_1, B^*_1 e C^*_1 sono per diritto.)

Dal corollario 5° del numero precedente si deduce, che se il lato c è all'infinito, le quattro coppie di polarità, che hanno in comune o l'involuzione in a, o quella in b, sono quattro coppie di polarità supplementari rispetto alla direzione di b, o di a.

9. Teorema. — *Data una polarità* π_1, *è unica e determinata la polarità che si può dedurre da* π_1 (*considerando un certo triangolo autoconiugato....*), *e che abbia sopra una retta qualunque* c, *la stessa involuzione di punti reciproci che la data* π_1.

Primieramente si osservi che per ottenere una polarità che abbia comune con π_1 la I_c, si deve considerare un triangolo autoconiugato in cui c e il suo polo C in π_1 sieno lato e vertice opposto.

Infatti le polarità, che si deducono da π_1 nel modo sopra detto, sono bitangenti con π_1, e quindi se nel triangolo autoconiugato generatore non è c come lato, essendo gli elementi del contatto un certo lato e il vertice opposto del triangolo generatore, le dette polarità non possono avere in comune con π_1 la I_c.

Detto ciò se π_2, π'_2 sono due polarità dedotte da π_1, considerando due triangoli generatori distinti, ma aventi in comune il vertice C e il lato opposto c, si ha $\pi_2\pi_1 \equiv [C, c]$, $\pi_1\pi'_2 \equiv [C, c]$, da cui si deduce $\pi_2\pi'_2 \equiv 1$, cioè $\pi_2 \equiv \pi'_2$.

c. v. d.

Corollario. — *Se* π_1 *è un cerchio, è unica e determinata la polarità dedotta da* π_1, *che sia una polarità circolare.*

10. Teorema. — *Rispetto alle* π_1, π_2, π_3, π_4, *le polari di uno stesso punto formano un quadrilatero completo il cui trilatero diagonale è* abc; *ed i poli di una stessa retta, formano un quadrangolo completo, il cui triangolo diagonale è* ABC.

Corollario 1°. — *I centri* O_1, O_2, O_3, O_4 *delle 4 polarità, sono i vertici di un quadrangolo completo, il cui triangolo diagonale è* ABC.

Corollario 2°. — *Siccome i 4 poli di una stessa retta* r, *formano un quadrangolo completo il cui triangolo diagonale è* ABC, *così le polari dei detti 4 poli in* π_h $(h = 1, 2, 3, 4)$, *formeranno un quadrilatero completo il cui trilatero diagonale è* abc; *ma questo quadrilatero è già individuato da* r *e da* abc, *e quindi se costruiamo le polari dei sopradetti 4 poli rispetto ad un'altra delle 3 rimanenti polarità, rispetto a* π_k, *per es., otteniamo lo stesso quadrilatero che abbiamo ottenuto considerando* π_h.

Corollario 3°. — *Dato un quadrangolo completo, il cui triangolo diagonale sia* ABC, *o un quadrilatero completo il cui trilatero diagonale sia* abc, *i vertici del quadrangolo si possono considerare come i poli di una stessa retta rispetto alle 4 polarità* $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$, *e i lati del quadrilatero si possono considerare come le polari di uno stesso punto rispetto alle dette quattro polarità.*

Corollario 4°. — *Gli otto poli di due rette, sono in una stessa conica.*

11. Teorema. — *La conica, determinata dagli 8 poli di due date rette* r, r', *degenera in due rette passanti per un determinato vertice di* ABC, *se* r' *passa per il punto comune ad* r *ed al lato opposto al detto vertice, o se passa per il coniugato armonico di questo punto rispetto agli altri due vertici del triangolo* ABC $\equiv$ abc.

Sieno R_s e R'_s i poli rispettivi di r e di r' in π_s $(s = 1, 2, 3, 4)$. La conica determinata dagli 8 poli di r, r', può degenerare in due rette passanti per A, o per B, o per C. Degenererà in due rette passanti per A, per es., se R'_1 è in AR_1, cioè se r' passa per il punto ar. Inoltre osserviamo che, se è $\pi_1 \equiv \dfrac{X}{(AR_2)}$ e $\pi_2 \equiv \dfrac{(AR_2)}{(ar)}$, si ha $\pi_1\pi_2 \equiv [C, c] \equiv \dfrac{X}{(ar)}$, adunque X è il coniugato armonico di ar rispetto a C e a B. Ora, se r' passa per X, R'_1 sarà in AR_2, e la conica degenera. Osservando che il ragionamento è generale, ossia vale per R'_h e AR_h, o per R'_h e AR_k, concludiamo. c. v. d.

Si noti che se r' passa, per es., pel coniugato armonico di ar rispetto a B e C, e pel coniugato armonico di rb rispetto ad A e C, le rr' sono corrispondenti in [C, c] e quindi gli otto poli si riducono a 4 soli punti distinti.

Avviene lo stesso se r' passa per ra e pel coniugato armonico di rb rispetto ad A e C, perchè in questo caso r' passa anche pel coniugato armonico di rc rispetto ad A e B.

12. Teorema. — *La condizione necessaria e sufficiente affinchè i quattro poli di una retta mobile sieno nella conica determinata dagli 8 poli di due rette fisse* r, r', *è che la retta mobile inviluppi la conica determinata da* rr', *e dal trilatero* abc *come trilatero autoconiugato.*

Infatti la polare reciproca di questa conica rispetto a π_h, è la conica determinata da R_h, R'_h, e da ABC come triangolo autoconiugato, cioè è la conica $R_hR'_hR_kR'_kR_rR'_rR_sR'_s$; adunque la condizione è sufficiente. Se poi uno dei 4 poli della retta mobile, e quindi anche gli altri 3, è nella conica $R_b R'_b R_k R'_k R_r R'_r R_s R'_s$, la retta mobile è tangente alla polare reciproca di questa conica rispetto ad una qualunque delle 4 polarità, e questa polare reciproca è evidentemente la conica determinata da r, r', e dal trilatero abc, come trilatero autoconiugato.

13. Data una retta r, indichiamone con R_1, R_2, R_3, R_4 i poli rispetto a π_1, π_2, π_3, π_4; con $R_a R'_a$ i coniugati del punto ar in I_a, J_a; indichino punti analoghi R_b, R'_b; R_c, R'_c. Dalle relazioni che passano tra le I e le J, si deduce che $R_a R'_a$, $R_b R'_b$, $R_c R'_c$, sono le tre coppie di vertici opposti di un quadrilatero completo il cui trilatero diagonale è abc. Si noti che R'_a, R'_b, R'_c sono allineati. Dalla costruzione di R_1, R_2, R_3, R_4, si deduce che R_1, R_2 sono nella CR_c polare di R'_c rispetto all'angolo B(C)A; R_3 R_4 sono nella CR'_c polare di R_c rispetto allo stesso angolo B(C)A; e così via.

14. Teorema. — *I poli di una retta* r *rispetto a due qualunque delle polarità, e i coniugati, nelle involuzioni che non sono comuni alle due polarità, dei punti ove la data retta* r *sega i due lati di* $ABC \equiv abc$ *che contengono le involuzioni ad esse polarità non comuni, sono in una stessa conica.*

Dimostriamo che $R_1 R_4 R_b R'_b R_c R'_c$, per es., sono in una stessa conica. Infatti essendo $\pi_1\pi_4 \equiv [A, a]$, ed essendo corrispondenti in $[A, a]$, i punti $R_1 R_4$, $R_b R'_b$, $R_c R'_c$, si ha: $R_1(R_b R'_b R_c R'_c) \barwedge R_4(R'_b R_b R'_c R_c) \barwedge R_4(R_b R'_b R_c R'_c)$.

c. v. d.

Si hanno in questo modo le seguenti $\binom{4}{2} = 6$ coniche reali:

π_1	e	π_2	generano	$R_1 R_2 R_a R'_a R_b R'_b$
π_1	»	π_3	»	$R_1 R_3 R_a R'_a R_c R'_c$
π_1	»	π_4	»	$R_1 R_4 R_b R'_b R_c R'_c$
π_2	»	π_3	»	$R_2 R_3 R_b R'_b R_c R'_c$
π_2	»	π_4	»	$R_2 R_4 R_a R'_a R_c R'_c$
π_3	»	π_4	»	$R_3 R_4 R_a R'_a R_b R'_b$.

15. Teorema. — *Rispetto a ciascuno di queste sei coniche;*

1° *le tangenti ad essa nei due poli della data retta* r, *concorrono del coniugato del punto comune alla* r *ed al lato di* abc *che contiene l'involuzione comune alle due polarità che hanno generato la conica, nell' involuzione armonica* (*) *all' involuzione comune alle dette due polarità.*

2° *le tangenti nei coniugati del punto comune alla* r *e ad uno dei lati* abc, *concorrono in un determinato punto del lato di* abc, *che contiene l' involuzione comune alle due polarità che hanno generato la conica.*

Si consideri, per es., la conica $R_1 R_4 R_b R'_b R_c R'_c$.

(*) Quando si parla d'involuzioni, s'intende parlare delle $I_a I_b I_c J_a J_b J_c$.

1°. Dal quadrangolo ad essa iscritto $R_cR_bR'_cR'_b$, si deduce che R_1R_4 è la polare di R'_a, e quindi le tangenti alla conica in R_1R_4, concorrono in R'_a.

2°. Si osservi ora che rispetto alla detta conica A e a sono polo e polare, e quindi il punto di concorso W delle tangenti in $R_bR'_b$, per es., giace in a. Il quadrangolo $R_cR_1R'_cR_4$ ci dice anzi che questo punto W è il punto $a \,.\, R_cR_4 \equiv a \,.\, R_1R'_c$. c. v. d.

16. Alla formazione di due qualunque delle sei coniche o possono concorrere due coppie distinte delle quattro polarità, ovvero tra le due polarità che generano la prima conica vi è una di quelle che generano la seconda.

Nel primo caso le due coniche hanno in comune quattro punti reali e distinti che sono facili ad essere determinati, e si corrispondono nelle due omologie armoniche, i cui assi sono i lati di abc, che contengono le involuzioni non comuni alla prima coppia di polarità, e quindi anche quelle non comuni alla seconda coppia, e i cui centri sono i vertici opposti. Per es., le due coniche $R_1R_4R_bR'_bR_cR'_c$, $R_2R_3R_bR'_bR_cR'_c$ si corrispondono nelle due omologie armoniche [C, c] e [B, b].

17. Teorema. — *Se si considerano due delle sei coniche, tali che fra le due polarità, che generano la prima, vi sia una di quelle che generano la seconda, le due coniche hanno un contatto bipunto nel coniugato del punto comune alla retta data* r *ed al lato di* abc *che contiene l'involuzione comune alle altre due polarità, in tale involuzione.*

Dimostro, per es., che le due coniche $R_1R_4R_bR'_bR_cR'_c$ e $R_3R_4R_aR'_aR_bR'_b$ hanno un contatto bipunto in R_b. Infatti si osservi primieramente che dai due quadrangoli $CR'_aR'_bR_4$, $CR_aR_bR_3$ si deduce che le rette $R_4R'_a$, R_aR_3 segano la c in uno stesso punto X, che è il coniugato armonico di A rispetto a B, e R'_c. Per la seconda parte del teorema precedente, e osservando il quadrangolo $R'_aR_aR_3R_4$, deduciamo che la tangente alla seconda conica in R_b è XR_b. Ora $R_aWR_1R_b$ è un quadrangolo costruttore del gruppo armonico $XABR'_c$, e quindi WR_b, che è la tangente in R_b alla prima conica, passa per X, cioè $WR_b \equiv XR_b$. c. v. d.

Del resto basta solamente osservare che le due coniche che si considerano sono corrispondenti nell'omologia armonica di centro R_b e di asse $R_4R'_b$.

18. Consideriamo la conica $R_1R_4R_bR'_bR_cR'_c$.

Sia U il punto di concorso delle tangenti ad essa in $R_cR'_c$, cioè sia $U \equiv R_1R'_b \,.\, a \equiv R_bR_4 \,.\, a$.

I seguenti gruppi CR_aBU, BR_aCW, $CBR_aR'_a$ sono armonici, e quindi essendo $CR_aBU \barwedge BR_aCW$, U e W sono coniugati nell' involuzione $\left|R_a{B \atop C}\right|$, di cui l'altro punto doppio è R'_a, e quindi il gruppo $R_aR'_aUW$ è armonico.

Ragionando analogamente per le altre 5 coniche, ed osservando che

$R_aR'_a$, $R_bR'_b$, R_cR_c sono le tre coppie di vertici opposti di un quadrilatero completo il cui trilatero diagonale è abc, possiamo enunciare il seguente

TEOREMA. — *I punti di concorso delle tangenti alle sei coniche nei punti* $R_aR'_a$, $R_bR'_b$, $R_cR'_c$, *sono sei coppie di punti coniugati delle tre involuzioni* $J^0_a \equiv R_aR'_a$, $J^0_b \equiv R_bR'_b$, $J^0_c \equiv R_cR'_c$.

Catania, Dicembre 1898.

GIUSEPPE MARLETTA.
Studente in Matematica.

Sull' integrale $\int \text{tang}^n \varphi \, . d\varphi$

Il metodo ordinario d'integrazione di questa funzione consiste nel porre $\tan\varphi = u$. Si è allora ricondotti all'integrale $\int \frac{u^n \, du}{1+u^2}$.

Ecco un altro procedimento che è unicamente basato sull'identità

$$1 + \tan^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}$$

e sulla conoscenza dei due integrali

$$(1) \qquad \int \tan\varphi d\varphi = -\mathrm{L}\cos\varphi + C$$

$$(2) \qquad \int \tan^2\varphi d\varphi = \tan\varphi - \varphi + C.$$

L'integrale (1) servirà per i valori impari di n e l'integrale (2) per i valori pari di n. Ecco degli esempi.

1°. CALCOLO DI $\int \tan^3\varphi \, d\varphi$. — Si ha l'identità

$$\tan\varphi(1+\tan^2\varphi) = \frac{\tan\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\text{sen}\,\varphi}{\cos^3\varphi},$$

$$(\tan\varphi + \tan^3\varphi) = -\frac{d\cos\varphi}{\cos^3\varphi}.$$

Integrando i due membri si ha

$$\int \tan\varphi \, d\varphi + \int \tan^3\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2\cos^2\varphi} + C.$$

Dunque, tenendo conto della (1),

$$(3) \qquad \int \tan^3\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2\cos^2\varphi} + \mathrm{L}\cos\varphi + C.$$

4°. CALCOLO DI $\int \tan^4\varphi \, d\varphi$. — Elevando a quadrato l'identità $1+\tan^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}$, si ha

$$1 + 2\tan^2\varphi + \tan^4\varphi = \frac{1}{\cos^4\varphi}$$

Da cui integrando

$$\varphi + 2\int \tan^2\varphi\, d\varphi + \int \tan^4\varphi\, . d\varphi = \int \frac{d\varphi}{\cos^4\varphi} = \frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} + \frac{1}{3}\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos^3\varphi} + C,$$

e per conseguenza

$$\int \tan^4\varphi\, d\varphi = \varphi - \frac{4}{3}\tan\varphi + \frac{1}{3}\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos^3\varphi} = \varphi - \tan\varphi + \frac{\tan^3\varphi}{3} + C.$$

E. Barisien.

SULLA CURVA LUOGO DEI PUNTI CHE HANNO PER COORDINATE

$x = a\,.\cos^n\varphi,\ y = b\,.\operatorname{sen}^n\varphi$

Per studiare tutti i casi possibili di questa curva conviene fare sull'esponente n le diverse ipotesi seguenti.

I. n intero, positivo e pari.

II. n " " dispari.

III. n " negativo e pari.

IV. n " " dispari.

V. n frazionario e positivo.

VI. n " negativo.

L'equazione cartesiana di questa curva è in generale

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{n}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{n}} = 1.$$

Esaminiamo successivamente i casi sopra indicati.

I. Si può porre $n = 2m$. Ecco alcuni casi interessanti.

1°. $n = 0$. La curva è allora il punto

$$(x = a,\ y = b).$$

2°. $n = 2$. Allora si ha

$$x = a\,.\cos^2\varphi \quad , \quad y = b\,.\operatorname{sen}^2\varphi,$$

e la linea diventa la retta

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

L'area compresa fra la retta e gli assi coordinati è $U = \frac{a\,.\,b}{2}$.

3°. $n = 4$. Si ha

$$x = a\,.\cos^4\varphi \quad ; \quad y = b\,.\operatorname{sen}^4\varphi.$$

La curva è la parabola

$$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$$

tangente agli assi coordinati. Si sa che l'area compresa fra questa parabola e le sue tangenti Ox, Oy è

$$U=\frac{a\,.\,b}{6}.$$

Si può, più generalmente, trovare l'area compresa fra la curva e gli assi coordinati che le sono tangenti, per il caso di $n=2m$.

Le coordinate di un punto della curva sono

$$x=a\,.\cos^{2n}\varphi \quad , \quad y=b\,.\,\mathrm{sen}^{2n}\varphi.$$

Ora la derivata dell'area è

$$2\frac{dU}{d\varphi}=x\frac{dy}{d\varphi}-y\frac{dx}{d\varphi},$$

e siccome

$$\frac{dx}{d\varphi}=-2ma\,.\cos^{2m-1}\varphi\,.\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ \frac{dy}{d\varphi}=2mb\,.\,\mathrm{sen}^{2m-1}\varphi\,.\cos\varphi,$$

ne risulta

$$2\frac{dU}{d\varphi}=2mab\left\{\mathrm{sen}^{2m-1}\varphi\cos^{2m-1}\varphi+\cos^{2m+1}\varphi\,.\,\mathrm{sen}^{2m+1}\varphi\right\},$$

ovvero

$$\frac{dU}{d\varphi}=mab\,.\,\mathrm{sen}^{2m-1}\varphi\,.\cos^{2m-1}\varphi$$
$$=\frac{mab}{2^{2m-1}}(\mathrm{sen}\,2\varphi)^{2m-1}.$$

Dunque l'area cercata è, ponendo $2\varphi=\theta$,

$$U=\frac{mab}{2^{2m-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\mathrm{sen}\,2\varphi)^{2m-1}d\varphi=\frac{mab}{2^{2m}}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^{2m-1}\theta\,.\,d\theta.$$

Ora

$$\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^{2m-1}\theta\,.\,d\theta=2\,\frac{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\,(2m-2)}{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2m-1)}.$$

Dunque finalmente

$$U=\frac{mab}{2^{2m-1}}\cdot\frac{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\,(2m-2)}{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2m-1)}.$$

II. In questo caso $n=2m+1$.

Casi particolari. — 1°. Per $n=1$ si ha

$$x=a\,.\cos\varphi \quad , \quad y=b\,.\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

La curva è l'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

di cui l'area è

$$U=\pi ab.$$

2°. Per $n=3$ si ha

$$x=a\,.\cos^3\varphi \quad , \quad y=b\,.\,\text{sen}^3\varphi.$$

L'equazione cartesiana della curva è allora

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1,$$

che è quella della sviluppata dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2b^2}{(a^2-b^2)^2},$$

e ha per area

$$U=\frac{3}{8}\pi ab.$$

Nel caso generale, le coordinate d'un punto della curva sono

$$x=a\,.\cos^{2m+1}\varphi \quad , \quad y=b\,.\,\text{sen}^{2m+1}\varphi.$$

L'area di questa curva è, ponendo $2\varphi=\theta$, per un calcolo analogo ai precedente,

$$U=\frac{ab}{2^{2m-1}}(2m+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{sen}^{2m}\theta\, d\theta.$$

Ed essendo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{sen}^{2m}\theta\,.\,d\theta=\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,.\,(2m-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,.\,.\,2m}\cdot\frac{\pi}{2}$$

si deduce

$$U=\frac{\pi ab}{2^{2m}}\quad\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,.\,.\,(2m-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,.\,.\,2m}.$$

III. In questo caso $n=-2m$.

Casi particolari. — 1°. Per $n=-2$ si ha

$$x=\frac{a}{\cos^2\varphi} \quad , \quad y=\frac{b}{\text{sen}^2\varphi}.$$

La curva è dunque l'iperbole equilatera

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1.$$

2°. Per $n=-4$, si ha

$$x=\frac{a}{\cos^4\varphi} \quad , \quad y=\frac{b}{\text{sen}^4\varphi}.$$

Il luogo dei punti (x, y) è la curva

$$\sqrt{\frac{a}{x}}+\sqrt{\frac{b}{y}}=1$$

ossia

$$(xy-bx-ay)^2=4ab\,xy.$$

IV. In questo caso $n=-(2m+1)$.

Casi particolari. — 1°. $n=-1$. Si ha

$$x=\frac{a}{\cos\varphi} \quad , \quad y=\frac{b}{\operatorname{sen}\varphi}.$$

La curva è allora la *Kreuzcurve*

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1.$$

Si trova che l'area compresa fra questa curva ed i suoi asintoti è eguale a $4ab$. Infatti, se si riferisce la curva a due dei suoi asintoti, le nuove coordinate sono

$$X=x-a=\frac{a}{\cos\varphi}-a \quad , \quad Y=y-b=\frac{b}{\operatorname{sen}\varphi}-b.$$

Ora

$$dU=Y\,.\,dX=\frac{b\,(1-\operatorname{sen}\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}\cdot\frac{a\operatorname{sen}\varphi}{\cos^2\varphi}\cdot d\varphi=$$
$$=\frac{ab\,(1-\operatorname{sen}\varphi)}{\cos^2\varphi}d\varphi=ab\left[\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}+\frac{d\cos\varphi}{\cos^2\varphi}\right],$$

e integrando

$$U=4ab\left[\tan\varphi-\frac{1}{\cos\varphi}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

$$U=4ab\left[\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen}\varphi}{1+\operatorname{sen}\varphi}}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

$$U=4ab.$$

L'area è dunque $4ab$.

2°. $n=-3$. Si ha

$$x=\frac{a}{\cos^3\varphi} \quad , \quad y=\frac{b}{\operatorname{sen}^3\varphi}.$$

L'equazione cartesiana è

$$\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{b}{y}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

ossia

$$(x^2y^2-b^2x^2-a^2y^2)^3=27\,a^2b^2\,.\,x^4y^4.$$

Essa è del genere della Kreuzcurve. Sarebbe interessante di calcolare l'area compresa fra questa curva e i suoi asintoti, e più generalmente l'area relativa alla curva avente per coordinate

$$x=\frac{a}{\cos^{2m+1}\varphi}\ ,\quad y=\frac{b}{\operatorname{sen}^{2m+1}\varphi}.$$

V, VI. Questi casi hanno luogo per $n=\frac{p}{q}$, $n=-\frac{p}{q}$, e si riducono tutti al caso unico di n frazionario, maggiore o minore dell'unità. Non offrono niente di particolare da segnalare.

E. Barisien.

SULL' IDENTITÀ DI CERTI INTEGRALI DEFINITI

Quando si calcola in due o più modi diversi l'area limitata da una curva chiusa, si ottengono due o più integrali definiti che sono identici. Si possono trovare così delle identità che sarebbe difficile di ottenere direttamente, specialmente se non si conosce il valore comune di questi integrali. Si possono variare gli esempi all'infinito; ci contentiamo di darne qualcuno.

1°. *Area della curva*

$$\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=1.$$

Si ha

$$y=\frac{b}{a}\sqrt[4]{a^4-x^4}.$$

Per conseguenza l'area racchiusa dalla curva è

(1) $$U=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt[4]{a^4-x^4}\,dx.$$

D'altra parte le coordinate di un punto variabile della curva si possono scrivere in funzione di un parametro φ nel modo seguente

$$x=a\sqrt{\cos\varphi},\qquad y=b\sqrt{\operatorname{sen}\varphi};$$

da cui

$$\frac{dx}{d\varphi}=-\frac{a\operatorname{sen}\varphi}{2\sqrt{\cos\varphi}},\qquad \frac{dy}{d\varphi}=\frac{b\cos\varphi}{2\sqrt{\operatorname{sen}\varphi}}.$$

Per U si hanno anche i due valori

$$U = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \frac{dy}{d\varphi}\, d\varphi, \qquad U = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x\frac{dy}{d\varphi} - \frac{dx}{d\varphi}\right) d\varphi,$$

dai quali si ricava

$$U = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}} \tag{2}$$

$$U = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\frac{3}{2}}\varphi \, . \, d\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}. \tag{3}$$

Egnagliando i valori (1), (2), (3) di U si trova

$$\frac{4}{a^2}\int_0^a \sqrt[4]{a^4 - x^4}\, dx = \int^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x \cos x}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\frac{3}{2}} x . dx}{\operatorname{sen} x}.$$

Se si cerca l'area limitata dalla curva

$$\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} = 1, \tag{4}$$

che è la generalizzazione della precedente, si ottiene l'identità

$$\frac{m}{a^2}\int_0^a \sqrt[m]{a^m - x^m}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x \cos x)^{\frac{2}{m}-1} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{\frac{2}{m}-1} x \cos^{\frac{2}{m}+1} x \, . \, dx. \tag{5}$$

2°. *Area della Kreuzcurve*

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1.$$

Si ricade nel caso della curva (4) ponendo $m = -2$. Sembrerebbe così che si avesse

$$\frac{2}{a^2}\int_0^a \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \, . \, \cos^2 x} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{0\, dx}{\operatorname{sen}^3 x}.$$

La ragione di questo paradosso apparente è che l'area della *Kreuzcurve* considerata non è finita, mentre la formula (5) non si può applicare altro che quando l'area determinata dalla curva (4) sia finita.

Si possono tuttavia trarre dalla *Kreuzcurve* delle identità esprimendo l'area compresa fra la curva ed i suoi asintoti, la quale è eguale a $4ab$.

3°. Si potranno pure ottenere delle identità d'integrali definiti, esprimendo l'area di una curva in coordinate cartesiane e in coordinate polari.

E. N. Barisien.

SOPRA DUE TEOREMI FONDAMENTALI DI MASSIMI E MINIMI

È nota la somma importanza che nella Teoria elementare dei massimi e minimi assoluti ha il teorema sul massimo di un prodotto i cui fattori hanno una somma costante. È parimenti noto che la dimostrazione comune di questo teorema, che si trova in molti Trattati anche moderni ed ottimi, è priva di rigore. Lo scopo precipuo di questo articoletto è appunto quello di porgere una dimostrazione del detto teorema, che sia rigorosa e nello stesso tempo elementare. Ciò potrebbe sembrare inutile dopo la dimostrazione perfettamente rigorosa che ne ha dato il Darboux; e chi scrive sarebbe dello stesso parere, se il metodo di dimostrazione, sostanzialmente diverso da quello seguito dall'Illustre Geometra, e lo sviluppo che esso può avere in una dimostrazione diretta dell'altro non meno importante teorema sul massimo d'un prodotto di potenze di quantità, la cui somma sia costante, non gli sembrassero degni di nota. (*)

Le proposizioni elementarissime sui massimi e minimi assoluti, sulle quali si fondano le dimostrazioni esposte sono le seguenti:

a) Il massimo od il minimo di una espressione non si altera quando essa venga moltiplicata per una costante positiva.

b) Il prodotto di due quantità positive, la cui somma è costante, è massimo quando esse sono uguali fra loro. Se invece è costante il prodotto, la somma, per valori uguali, è minima.

c) La differenza $a - y$, con a costante, è massima quando y è minima.

d) Se u e v sono due funzioni di x (s'intende anche nel senso più elementare), che mentre x varia da a a b sono massime per uno stesso valore di x, anche il loro prodotto in quell'intervallo è massimo per lo stesso valore.

1. Teorema. — *Se* a *è un numero positivo, l'espressione* $\omega = (a - x)x^{m-1}$, *dove* m *è un numero intero positivo qualunque, mentre* x *varia da* 0 *ad* a, *prende il massimo valore per* $x = \dfrac{m-1}{m}a$. (**)

Si osserva che la $\omega = (a - x)x^{m-1} = ax^{m-1} - x^m$ è contenuta come caso particolare per $k = m$ nella

$$(1) \qquad \omega_k = \frac{m-1}{k-1}\,ax^{k-1} - \frac{m}{k}\,x^k\ .$$

(*) Dimostrazioni rigorose di questi teoremi furono date dal chiar. prof. D. Besso, nella sua bella Memoria "Teoremi elementari sui massimi e minimi", *Annuario del R. Istituto Tecnico di Roma*, 1889.

(**) Per preziose notizie storiche intorno a questo teorema ed ai seguenti, vedi: D. Besso, "Sopra un opuscolo di Michelangiolo Ricci", *Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario*, 1892.

Per $m = 2$ si ha

$$\omega_2 = (m-1)\,ax - \frac{m}{2}\,x^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{2(m-1)\,a}{m} - x\right)x,$$

che evidentemente è massima per $x = \dfrac{m-1}{m}\,a$, mentre x varia da 0 a $\dfrac{2(m-1)\,a}{m}$, e quindi a maggior ragione quando varia da 0 ad a.

Si dimostrerà qui in generale che, mentre x va da 0 ad a, ω_k assume il suo massimo valore per $x = \dfrac{m-1}{m}\,a$, qualunque sia k intero e positivo $\leq m$.

Si supponga che ciò valga per ω_k, allora si vedrà che deve valere anche per ω_{k+1}. A tal uopo si ponga

$$\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = u, \text{ donde } \omega_{k+1} = u\,.\,\omega_k.$$

È chiaro (d) che qualora si riesca a mostrare che u è massima per $x = \dfrac{m-1}{m}\,a$, per l'ipotesi fatta su ω_k, si può subito concludere che anche ω_{k+1} è massima per lo stesso valore di x. Ciò è appunto quanto avviene, come può risultare dal seguente procedimento.

Sostituendo alle ω i loro valori dati dalla (1), si ottiene

$$u = \frac{\dfrac{(m-1)\,a}{k}\,x - \dfrac{m}{k+1}\,x^2}{\dfrac{(m-1)\,a}{k-1} - \dfrac{m}{k}\,x} = \frac{\alpha x - \beta x^2}{\gamma - \delta x} =$$

$$= \frac{2\beta\gamma - \alpha\delta}{\delta^2} - \frac{1}{\delta^2}\left(\beta(\gamma - \delta x) + \frac{\beta\gamma\,(\beta\gamma - \alpha\delta)}{\beta(\gamma - \delta x)}\right) = \lambda - \frac{1}{\delta^2}\left(z - \frac{\mu}{z}\right) = \lambda - \varphi,$$

dove evidentemente si è posto

$$\alpha = \frac{(m-1)\,a}{k}, \qquad \beta = \frac{m}{k+1}, \qquad \gamma = \frac{(m-1)\,a}{k-1}, \qquad \delta = \frac{m}{k},$$

$$\lambda = \frac{2\beta\gamma - \alpha\delta}{\delta^2} \quad \mu = \beta\gamma(\beta\gamma - \alpha\delta) \quad z = \beta(\gamma - \delta x) \quad \varphi = \frac{1}{\delta^2}\left(z + \frac{\mu}{z}\right).$$

L'espressione $z + \dfrac{\mu}{z}$ è la somma di due quantità il cui prodotto $\mu = \beta\gamma\,(\beta\gamma - \alpha\delta) = \dfrac{m^2\,(m-1)^2\,a^2}{k^2\,(k^2-1)^2}$ è costante e positivo.

Dunque (b), mentre z varia da 0 a $+\infty$, la somma è minima per $z = \dfrac{\mu}{z}$ ossia $z = +\sqrt{\mu}$ (esclusa la soluzione $z = -\sqrt{\mu}$ per la condizione che z sia positivo).

Si ha poi $z = \beta(\gamma - \delta x)$. Ora affinchè z sia positivo occorre e basta che sia $\beta(\gamma - \delta x) \geq 0$, donde facilmente (per essere β e δ positivi) $x \leq \frac{\gamma}{\delta} = \frac{k(m-1)}{(k-1)m} a = p$; in altre parole che x sia compreso fra p e $-\infty$. Siccome poi per ogni valore di z fra 0 e $+\infty$ si può sempre trovare un valore di x (compreso naturalmente fra p e $-\infty$) che faccia assumere a z il prefissato valore, si conclude che mentre x va da p a $-\infty$, z prende tutti i possibili valori da 0 a $+\infty$ e quindi che l'espressione $z + \frac{\mu}{z}$, mentre x varia da p a $-\infty$, è minima per quel valore di x che rende $z = \beta(\gamma - \delta x) = +\sqrt{\mu}$, il qual valore fin da ora si può dire dover essere compreso fra p e $-\infty$.

Tale valore è subito dato dall'equazione

$$\beta(\gamma - \delta x) = +\sqrt{\mu}$$

che, fatte le opportune sostituzioni, offre $x = \frac{m-1}{m} a$.

Osservando poi che $\frac{m-1}{m} a$ è compreso fra 0 ed a, e che è

$$p - a = \frac{k(m-1)}{(k-1)m} a - a = \frac{m-k}{(k-1)m} a \geq 0 \quad \text{per} \quad m \geq k,$$

si conclude che l'intervallo da 0 ad a comprende il valore $\frac{m-1}{m} a$ mentre è compreso entro l'intervallo da p a $-\infty$, e quindi che a maggior ragione l'espressione $z + \frac{\mu}{z}$ assume il suo valore massimo per $x = \frac{m-1}{m} a$, mentre x va da 0 ad a.

Essendo poi $\varphi = \frac{1}{\delta^2}\left(z + \frac{\mu}{z}\right)$, con δ^2 eminentemente positivo, si conclude la stessa cosa per φ e da ultimo si ricava subito che la differenza

$$u = \lambda - \varphi$$

è massima per $x = \frac{m-1}{m} a$, al variare di x da 0 ad a. (c).

A questo punto, visto che l'ipotesi fatta in principio su ω_k vale per $k = 2$, per induzione si conclude che essa vale per ogni valore di $k \leq m$ e quindi per $k = m$.

Nella formula $\omega = (a - x)x^{m-1}$ si ponga $a - x = y$, e si avrà

$$\omega = y(a - y)^{m-1};$$

e siccome al variare di x da 0 ad a, y varia da a a 0 e per

$$x = \frac{m-1}{m} a \quad \text{si ha} \quad y = \frac{a}{m},$$

si conclude che mentre y va da 0 ad a, essendo a un numero positivo qualunque, l'espressione $y\,(a-y)^{m-1}$ assume il massimo valore per $y=\frac{a}{m}$. Sotto quest'ultima forma il teorema dimostrato può servire direttamente a dimostrare il

2. Teorema. — *Il prodotto di più grandezze che non assumono mai valori negativi ed hanno una somma costante è massimo quando esse sono uguali tra loro.*

Siano $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ m grandezze vincolate alle sole condizioni di non poter assumere valori negativi e di avere una somma costante a. Si vuol provare che per $x_1=x_2=x_3=\ldots=x_m=\frac{a}{m}$ il prodotto $P=x_1 . x_2 \ldots x_m$ assume un valore che è maggiore di ogni altro valore che possa assumere.

È a tutti noto che per $m=2$ (ed anche per $m=3, 4$) la dimostrazione è facilissima, ed anzi che essa può stabilirsi in parecchi modi diversi e sempre con tutto rigore. Ammettiamo che il teorema valga per un dato valore $m-1$ e vediamo che cosa occorre dimostrare per concludere che esso vale anche per il valore m.

Si dia un valore fisso x ad una qualunque delle m variabili $x_1, x_2 \ldots x_{m-1}, x_m$ per es. ad x_m. Allora si ha

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{m-1}=a-x=\text{costante}$$

e dall'ipotesi fatta risulta che il prodotto

$$P_{m-1}=x_1 . x_2 . x_3 \ldots x_{m-1}$$

assume un valore massimo per $x_1=x_2=\ldots=x_{m-1}=\frac{a-x}{m-1}$, il quale valore è dato da

$$P'_{m-1}=\left(\frac{a-x}{m-1}\right)^{m-1},$$

mentre il prodotto $P=x_1 . x_2 \ldots x_{m-1} . x_m$ per questi valori speciali prende il valore

$$P'=x\left(\frac{a-x}{m-1}\right)^{m-1}=\frac{1}{(m-1)^{m-1}}\,x\,(a-x)^{m-1}.$$

Questo prodotto dà il valore massimo del prodotto delle m quantità $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m$ ad ogni valore prefissato x della m^{a}. È quindi chiaro che, se mentre x_m varia nel suo campo di variabilità, da 0 ad a, per un dato valore α fa assumere all'espressione $\frac{1}{(m-1)^{m-1}}\,x\,(a-x)^{m-1}$, o ciò che è lo stesso ad $x\,(a-x)^{m-1}$, un valore massimo, il prodotto

$$P=x_1, x_2 \ldots x_m$$

deve prendere effettivamente un valore massimo per

$$x_m=\alpha \quad \text{ed} \quad x_1=x_2=\ldots=x_{m-1}=\frac{a-\alpha}{m-1}.$$

Se poi è $\alpha = \frac{a}{m}$ si ha

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{m-1} = x_m = \frac{a}{m}.$$

La questione si riduce dunque a provare che mentre x varia da zero ad a, $x(a-x)^{m-1}$ assume un valore massimo per $x = \frac{a}{m}$.

Ciò è appunto quando s'è stabilito col precedente teorema.

È noto dai trattati d'Algebra come dall'ultimo teorema si tragga con somma facilità l'altro importantissimo che *il prodotto* $x^m \cdot y^n$ *è massimo quando* $\frac{x}{m} = \frac{y}{n}$, *se* m *ed* n *sono interi positivi, ed* xy *vincolati alla sola condizione di non esser negativi e di avere una somma costante.* Esporromo qui una dimostrazione di questo teorema con un metodo che è la continuazione di quello usato pel teor. 1), e che non presuppone il teor. 2).

Si consideri l'espressione $\omega = x^m(a-x)^n$ dove m ed n sono due numeri qualunque interi e positivi ed x è una variabile che può assumere tutti i valori da 0 ad a. Dimostreremo che in tali ipotesi ω prende un valore massimo per $\frac{x}{m} = \frac{a-x}{n}$ ossia per $x = \frac{am}{m+n}$. La ω è compresa come caso speciale per $k=m$ nella espressione $\omega_k = x^k\left(\frac{am}{k} - x\right)^{n+m-k}$.

Per $k=1$ si ha $\omega_1 = x(am-x)^{n+m-1}$ che pel teor. 1) è massima per $x = \frac{am}{m+n}$, mentre x varia da 0 ad am, e quindi a maggior ragione da 0 ad a. Col solito metodo d'induzione dimostreremo che il teorema vale qualunque sia k da 1 ad m (incluso). Supponiamo vero il teorema per ω_{k-1} e mostriamo che vale anche per ω_k.

Si ponga $\omega_k = u\omega_{k-1}$ donde

$$u = \frac{x^k\left(\frac{am}{k} - x\right)^{m+n-k}}{x^{k-1}\left(\frac{am}{k-1} - x\right)^{m+n-k+1}} =$$

$$= \left(\frac{k-1}{k}\right)^{m+n-k}(k-1)\frac{x}{am-(k-1)x}\left(1 - \frac{x}{am-(k-1)x}\right)^{m+n-k}.$$

Sotto questa forma è facile vedere che, mentre x varia da 0 ad a, la u assume un valore massimo per $x = \frac{am}{m+n}$, e quindi concludere che lo stesso avviene per ω_k.

Difatti si ponga $z = \frac{x}{am-(k-1)x}$, e, prescindendo dal fattore costante positivo che sta innanzi, si consideri l'espressione $z(1-z)^{m+n-k}$.

In forza del teor. 1), mentre z varia da 0 ad 1, essa prende un valore massimo per $z = \frac{1}{m+n-k+1}$, e quindi per

$$\frac{x}{am-(k-1)x} = \frac{1}{m+n-k+1},$$

ossia per

$$x = \frac{am}{m+n}.$$

Inoltre si ha $x=0$ per $z=0$; $x = a\frac{m}{k} \geq a$ per $z=1$ ed $m \geq k$; e di più, mentre x varia da 0 ad $a\frac{m}{k}$, z varia da 0 ad 1, giacchè per $0 \leq z \leq 1$ si ha $0 \leq \frac{x}{am-(k-1)x} \leq 1$, donde facilmente $0 \leq x \leq a\frac{m}{k}$, e viceversa, per un conveniente valore di x compreso fra questi limiti, si può sempre avere per z un qualunque prefissato valore fra 0 ed 1. Si conclude pertanto che, mentre x varia da 0 ad $a\frac{m}{k}$, la u è massima per $x = \frac{am}{m+n}$; e per essere questo valore compreso evidentemente fra 0 ed a, e per essere l'intervallo da 0 ad a contenuto in quello da 0 ad $a\frac{m}{k}$, si trae da ultimo che la ω_k è anche massima per $x = \frac{am}{m+n}$, mentre x varia da 0 ad a, qualunque sia $k \geq m$, e quindi in particolare per $k=m$. (*)

Modena, 16 agosto 1899.

ROBERTO VOLPI.

PICCOLE NOTE

Sulle quistioni 354 e 355. — Il teorema della quistione 354, dimostrato analiticamente dal Prof. *Barozzini* nel fasc. II (Anno XV, pag. 73-74) e quello della quistione 355, risoluta analiticamente dal Prof. *Cardoso* (Anno XII, pag. 161) e geometricamente dal Prof. *Catania* (Anno XV, pag. 68), sono suscettibili di una dimostrazione sintetica molto semplice. La conica K^2 della quist. 354 essendo lo inviluppo delle rette che segano i due cerchi dati in quattro punti armonici, ogni sua tangente staccando cioè nei cerchi dati due corde che si separano armonicamente, il punto medio di ognuna di esse ha potenza eguali e di segno contrario

(*) Notiamo che questo metodo d'induzione è suscettibile di uno sviluppo maggiore. Il lettore può facilmente applicarlo alla dimostrazione del teorema più generale sul massimo del prodotto $x^m y^n z^p \ldots$ con $x+y+z+\ldots = \text{cost.}$

rispetto ai due cerchi e cade dunque sul cerchio radicale. Se ora osserviamo che K^2 è la polare reciproca di uno dei due cerchi rispetto all'altro (cfr. la quistione 323) si ha il teorema della quist. 354.

V. Retali.

Sulle quistioni 380, 381, 382, 401 e 406. — La elegante risoluzione analitica del Prof. *Ceretti* (pag. 74-76 del fasc. II) non mi pare esaurisca la quistione 401. Se la curva piana C è generale della classe m e non ha relazioni particolari di posizione con la retta fissa r nè con la retta all'infinito, lo inviluppo cercato è *della classe* $2m$ *e dell'ordine* $m(m+1)$; *i punti ciclici ne sono punti* m—pli; *la retta fissa* r *è tangente* m—pla *e tocca l'inviluppo nei punti ch'essa ha comuni con le tangenti a* C *perpendicolari ad* r. Non sarebbe facile ricavare queste ed altre, meno semplici, proprietà dell'inviluppo dalle formole (4) date dal Prof. *Ceretti.* Pel caso della conica sono trovate le equazioni parametriche della sestica inviluppo ma non sarebbe agevole stabilire, mercè loro, che la sestica è della quarta classe e ha tre tangenti doppie; e tanto meno determinare queste bitangenti coi loro punti di contatto, le sei cuspidi della sestica con le relative tangenti cuspidali, le quattro tangenti che arrivano alla curva da un punto del suo piano ecc. ecc. Nel caso particolare in cui C è una parabola con la direttrice parallela ad r, l'A. trova (pag. 75) per l'inviluppo una ellisse reale ecc : questa ellisse è più propriamente " *il cerchio avente per centro il fuoco della parabola e per raggio la distanza fra la direttrice e la retta fissa* r " cioè il cerchio considerato nelle quistioni 380, 381, 382, risolute elegantemente mediante considerazioni elementari, la prima dal Prof. *Barozzini* e le altre due dal Prof. *Cardoso* (Anno XIII, pag. 75 e 84).

La risoluzione della quistione 401, della 406, ad essa equivalente e delle altre tre precedentemente indicate, dipende essenzialmente da una trasformazione piana doppia quadratica tangenziale che non credo fin'ora sia stata studiata. Ad una retta g del piano (rigato) doppio, corrispondono le bisettrici g_1 e g_2 degli angoli (rg); ad una retta g_1 del piano semplice corrisponde la g simmetrica di r rispetto a g_1. Delle due trasformazioni quadratiche che insieme formano la trasformazione doppia, la seconda, cioè quella cui si riferiscono le quistioni 380, 381, 382, 401 e 406 è razionale; la trasformazione *congiunta* è quella *ortotangenziale* del Prof. *Cesàro*;(*) la *conica doppia* e la *conica limite* sono degeneri e formate entrambe dai punti ciclici. Nella trasformazione non razionale, a un punto P corrisponde la parabola avente P per fuoco e r per direttrice, nella trasformazione inversa (razionale) a un punto P corrisponde il cerchio di centro P e tangente ad r. Ne segue subito che se g_1 inviluppa una curva C, lo inviluppo della retta corrispondente g è pure *lo inviluppo dei cerchi coi centri su* C *e tangenti ad* r, e al tempo stesso *il luogo dei fuochi delle parabole che toccano* C *ed hanno* r *per direttrice.* Quando g inviluppa una curva C', lo inviluppo delle due rette corrispondenti g_1, g_2 è pure *inviluppo delle parabole aventi* r *per direttrice e coi loro fuochi sopra* C', ma è anche il *luogo dei centri dei cerchi tangenti ad* r *e alla curva data* C'. Si vede così il nesso delle due quistioni 356 e 357 con le altre cinque sopra indicate, la identità della quistione 330 con la 382 e della 401 con la 406.

(*) V. la nota a pag. 272 (*Periodico*, Anno XIV, maggio 1899).

Anche il caso particolare in cui C è un cerchio, conduce a risultati assai interessanti: se la distanza del centro del cerchio dalla retta fissa r è $\frac{3}{2}$ del raggio, la sestica corrispondente (mediante la trasformazione razionale) è la prima pedale di una cardioide rispetto alla cuspide reale; (*) quando r passa pel centro del cerchio la sestica è una ipocicloide bicuspide. Lo studio di quest'ultimo caso fu proposto dal *Catalan* nella quistione 667 delle *Nouvelles Annales* (2ª Serie, T. II, 1863, pag. 272) la quale, a quanto io ne sò, contiene il primo accenno agli inviluppi di cui ora ci occupiamo. Due risoluzioni della quistione 667 furono date poco dopo (ibid. T. III, pag. 261-264) da due illustri geometri, il Generale *de Marsilly* e il Prof. *Mansion*, ma in quella del primo mi pare si trovi una non lieve inesattezza e precisamente ove è detto " si AB cesse d'être un diamétre mais coupe le cercle C l'enveloppe..... aura des points de rebroussement en A et B ": in generale i punti ove $|AB| \equiv r$ sega il cerchio C sono per lo inviluppo punti semplici; le cuspidi dello inviluppo sono invece i fuochi delle parabole osculatrici al cerchio e aventi r per direttrice (cfr. quistione 357, (**) la soluzione del Prof. *Barozzini*, Anno XIII, pag. 161-162 e la mia nota a pag. 193 dello stesso volume).

Milano, 15 novembre 1899.

V. Retali.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 254, 273*, 274*, 313, 314, 362*, 477, 481, 482

254. *Si hanno due urne, in ognuna delle quali sono contenuti i numeri* 1, 2, 3, . . ., n. *Si estraggono contemporaneamente due numeri, uno da un'urna e uno dall'altra; poi, senza rimettere nelle urne i numeri sortiti, si estraggono di nuovo due numeri, uno da un'urna e uno dall'altra; e così si continua finchè tutti i numeri siano stati estratti. — Determinare la probabilità che non sortano mai in una stessa estrazione due numeri eguali; e dimostrare che tale probabilità vale* $\frac{1}{e}$ *a meno di* $\frac{1}{n\underline{|n}}$.

G. Nonni.

Risoluzione dei Sigg. F. Celestri e Z. Giambelli studenti nella R. Università di Pisa.

L'ordine con cui vengano estratte le n palle dalla prima urna sia rappresentato dalla permutazione $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$.

Affinchè nessuna delle n palle della seconda urna venga estratta nello stesso ordine di quello con cui la sua eguale fu estratta dalla prima urna, bisogna che nella permutazione rappresentante l'ordine delle palle sortite dalla seconda urna, gli elementi abbiano ordini differenti da quelli della prima. Sicchè, indicando con x_n

(*) Cfr. la mia "Note sur une courbe du sixième ordre„ nel *Journal de Math. spéciales*, T. XXI, pag. 32-35 (fèvrier, 1897).

(**) A pag. 161 e 193 (loc. cit.) la quistione 357 per errore di stampa, porta il numero 356.

il numero di tutte le permutazioni che si possono fare cogli n elementi dati e in modo che il loro ordine sia differente da quello che hanno i loro uguali in una data permutazione, segue evidentemente che la probabilità richiesta è $\frac{x_n}{\lfloor n}$ ossia, per la quistione 253 (v. pag. 120).

$$1-\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{\lfloor n},$$

Questa somma non è altro che la somma dei primi $n+1$ termini della serie $\Sigma\,(-1)^n\frac{1}{\lfloor n}=e^{-1}=\frac{1}{e}$ e dà per conseguenza (essendo i termini della serie alternativamente positivi e negativi) un valore approssimato di $\frac{1}{e}$ con un errore minore in valore assoluto del primo termine trascurato cioè di $\frac{1}{\lfloor n+1}$, e quindi anche di $\frac{1}{n\lfloor n}$.

273*. *Un cerchio di centro O è segato da un altro cerchio M in due punti opposti A, B. Dimostrare che ogni cerchio avente per diametro, una corda di M passante per O sega il primo cerchio nei due termini di un diametro perpendicolare alla corda.*

RETALI.

Risoluzione del Prof. C. Merizzi

Essendo AB un diametro del cerchio C dato, il suo centro O sarà soprà AB. Sia DE la corda di M passante per O, sulla quale, come diametro si costruisce il cerchio N. Siano finalmente H, K i punti in cui il cerchio N sega il cerchio C. La retta HK sarà perpendicolare alla DE, che contiene i centri dei due cerchi C, N. D'altra parte il punto O comune alle due rette DE, AB, che sono gli assi radicali dei cerchi M, N e C, M rispettivamente, è il centro radicale dei tre cerchi C, M, N e per esso dovrà passare HK, che è l'asse radicale dei cerchi C, N; dunque HK è un diametro del cerchio C, ed è perpendicolare alla corda DE.

274*. *Due cerchi posti in uno stesso piano si segano normalmente in due punti* A, B. *Da un punto* P, *preso comunque sopra un cerchio* O, *si conducono le rette* PA, PB, *a segare ulteriormente l'altro cerchio* M *in* A', B'. *Dimostrare che* A'B' *è un diametro di* M, *perpendicolare al diametro* PP' *di* O.

RETALI.

Risoluzione del Prof. C. Merizzi.

Condotte infatti le secanti PAA', PBB' ed il diametro PP', si congiunga il centro C del cerchio O coi punti A, B, e il centro D del cerchio M con A, B, A', B'.

Essendo per ipotesi l'angolo CAD retto, e quindi gli angoli CAP, DAA' complementari, saranno pure complementari gli angoli P'PA, DA'A, ossia PP' è normale al raggio DA'. Analogamente si dimostra che PP' è normale pure al raggio DB'.

Dunque i due raggi DA', DB' sono per diritto, ossia A'B' è un diametro di M ed è normale al diametro PP' di O.

Altra risoluzione del Sig. Celestri, studente della R. U. di Pisa.

313. *Se* ABC $\equiv$ abc *è un triangolo in un piano* σ, *e sono* e, f, *due rette condotte ordinatamente per* A, B, *in* σ; *per ogni punto di* σ, *posto*

$$P(A, B, C) \equiv p, q, r, \qquad (cbep) = u \qquad (cafq) = v \qquad r(e, f) = EF,$$

si ha, essendo ϑ *l'argomento del numero complesso* $u + iv$

$$\vartheta = arco\ tang(CcEF).$$

Del Re.

Risoluzione del prof. C. Merizzi di Ceva.

Chiamando H il punto d'incontro delle due rette c, EF, colla notazione (CcEF) intendiamo il rapporto anarmonico (CHEF). Abbiamo dunque

$$u = (cbep) = (\mathrm{HCEP}) = \frac{\mathrm{HE}}{\mathrm{CE}} : \frac{\mathrm{HP}}{\mathrm{CP}}$$

$$v = (cafq) = (\mathrm{HCFP}) = \frac{\mathrm{HF}}{\mathrm{CF}} : \frac{\mathrm{HP}}{\mathrm{CP}}$$

donde

$$\frac{v}{u} = \frac{\mathrm{HF}}{\mathrm{CF}} : \frac{\mathrm{HE}}{\mathrm{CE}} = (\mathrm{HCFE}) = (\mathrm{CHEF})$$

Ma abbiamo pure

$$\vartheta = \text{arco tang} \frac{v}{u} = \text{arco tang}\,(\mathrm{CHEF})$$

il che dimostra il teorema.

314. *Mostrare che l'equazione cubica in* ρ:

$$\begin{vmatrix} \rho - (\beta^2 + \gamma^2) & \alpha\beta + 2\gamma' & \gamma\alpha - 2\beta' \\ \alpha\beta - 2\gamma' & \rho - (\gamma^2 + \alpha^2) & \beta\gamma + 2\alpha' \\ \gamma\alpha + 2\beta' & \beta\gamma - 2\alpha' & \rho - (\alpha^2 + \beta^2) \end{vmatrix} = 0$$

quando si ponga:

$$\omega^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \qquad \omega'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$$
$$\omega\omega' \cos\theta = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$$

si riduce all'altra

$$\rho^3 - 2\omega^2\rho^2 + (\omega^4 + 4\omega'^2)\,\rho - 4\omega^2\omega'^2 \operatorname{sen}^2\theta = 0$$

ed ha una sola radice reale inferiore ad $\omega^2 \operatorname{sen}^2\theta$.

Del Re.

Risoluzione del prof. F. Castellano di Torino.

1°. Basta sviluppare il determinante ed ordinare rispetto a ρ. Per semplificare le riduzioni, si può seguire quest'ordine:

$$f(\rho) = f(0) + \rho f'(0) + \frac{1}{2}\rho^2 f''(0) + \rho^3$$

$$f(0) = \begin{vmatrix} -(\beta^2 + \gamma^2) & \alpha\beta + 2\gamma' & \gamma\alpha - \alpha\beta' \\ \alpha\beta - 2\gamma' & \text{»} & \text{»} \\ \gamma\alpha + 2\beta' & \text{»} & \text{»} \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}^2 = -4\omega^2\omega'^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

$$f'(0) = \Sigma \begin{vmatrix} -(\gamma^2 + \alpha^2) & \beta\gamma + 2\alpha' \\ \beta\gamma - 2\alpha' & -(\alpha^2 + \beta^2) \end{vmatrix} = \Sigma\,(\alpha^2\omega^2 + 4\alpha'^2) = \omega^4 + 4\omega'^2$$

$$f''(0) = -\Sigma\,(\alpha^2 + \beta^2) - \Sigma\,(\gamma^2 + \alpha^2) = -4\omega^2$$

quindi

(1) $$f(\rho) = \rho^3 - 2\omega^2\rho^2 + (\omega^4 + 4\omega'^2)\rho - 4\omega^2\omega'^2 \operatorname{sen}^2\theta.$$

2°. Le radici della (1) sono positive ed inferiori ad $\omega^2 \operatorname{sen}^2\theta$. Infatti la (1) si può scrivere:

$$\rho(\rho - \omega^2)^2 + 4\omega'^2(\rho - \omega^2 \operatorname{sen}^2\theta) = 0$$

e si vede che il limite superiore delle radici reali è $\omega^2 \operatorname{sen}^2\theta$, mentre il limite inferiore è zero.

3°. *Non è vero che l'equazione abbia una sola radice reale, ma può avere anche tutte e tre le radici reali, dipendentemente dai valori di* θ *e di* $\frac{\omega'}{\omega^2}$.

Infatti, posto nella (1)

$$\rho = \frac{1}{3}\omega^2(x + 2), \qquad \frac{\omega'^2}{\omega^4} = K^2,$$

avremo

(2) $$x^3 - 3(1 - 12K^2)x + 2[1 + 18(2 - 3\operatorname{sen}^2\theta)K^2] = 0.$$

Il discriminante di questa cubica è

$$[1 + 18(2 - 3\operatorname{sen}^2\theta)K^2]^2 - (1 - 12K^2)^3,$$

che si può scrivere

$$108K^2[16K^4 + (27\operatorname{sen}^4\theta - 36\operatorname{sen}^2\theta + 8)K^2 + \cos^2\theta].$$

Dimostrerò che può diventare negativo. Infatti il primo fattore $108K^2$ è positivo; il secondo fattore che chiamerò $f(K)$ è funzione di secondo grado in K^2, il suo discriminante è

$$\operatorname{sen}^2\theta(9\operatorname{sen}^2\theta - 8)^3,$$

e sarà positivo quando

$$\operatorname{sen}^2\theta > \frac{8}{9}.$$

In questa ipotesi il trinomio $27\operatorname{sen}^4\theta - 36\operatorname{sen}^2\theta + 8$, coefficiente di K^2, è negativo, perchè le sue radici sono $\frac{6 - \sqrt{12}}{9}$ e $\frac{6 + \sqrt{12}}{9}$, ed i valori di $\operatorname{sen}^2\theta$ compresi tra $\frac{8}{9}$ ed 1 sono compresi tra queste radici. Ne segue che, quando sia

$$\frac{8}{9} < \operatorname{sen}^2\theta \leq 1,$$

le radici del trinomio che abbiamo chiamato $f(K)$ saranno reali e positive, e per ogni valore di K^2 compreso tra queste radici, il trinomio stesso assumerà valori negativi. A discriminante negativo corrispondono nella cubica terne di radici reali, quindi la (1) può avere anche tutte e tre le radici reali.

Osservazione 1ª. — È condizione necessaria per la realtà di tutte e tre le radici che $12K^2 - 1 < 0$ cioè che $\frac{\omega'^2}{\omega^4} < \frac{1}{12}$.

Osservazione 2ª. — Questa equazione si presenta nella ricerca degli assi delle accelerazioni di un sistema rigido. Si trova con qualche differenza di notazione nelle mie *Lezioni di Meccanica Razionale*, pag. 90 ed in una mia nota *Il complesso delle accelerazioni* ecc. pubblicata negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino il 28 gennaio 1894.

362*. *Determinare tre numeri in progressione geometrica conoscendo la loro somma* S *e quella dei loro cubi* P^3.

Supposto che S *e* P *siano reali e positivi, quali condizioni si richiedono perchè siano reali e positivi anche i tre numeri domandati?*

L. Bosi.

Risoluzione del prof. Barozzini.

Se i numeri cercati sono $\div x:y:z$, verificheranno le equazioni

$$\left.\begin{aligned} &(1) & xz &= y^2, \\ &(2) & x+y+z &= S, \\ &(3) & x^3+y^3+z^3 &= P^3. \end{aligned}\right\}$$

Dalle (1), (2) ho somma e prodotto di x, z in funzione di S ed y, quindi ho

$$(4) \qquad \left.\begin{matrix} x \\ z \end{matrix}\right\} = \frac{S-y \pm \sqrt{(S+y)(S-3y)}}{2}$$

Inoltre

$$x^3+z^3=(x+z)^3-3xz(x+z)=(S-y)(S^2-2Sy-2y^2)$$

e la (3) si riduce allora alla

$$(5) \qquad f(y)=y^3-S^2y+\frac{S^3-P^3}{3}=0.$$

Questa dà i valori del medio dei numeri cercati: sostituiti ad uno ad uno nelle (4) forniranno tre coppie dei numeri rimanenti.

Siano ora S, P reali positivi; lo saranno pure x, z se $y \leqq \frac{S}{3}$, perchè allora la (4) dà valori reali, e le (1), (2) danno per x e z somma e prodotto positivi. Inoltre y è positivo per dato, quindi

$$0 \leqq y \leqq \frac{S}{3}.$$

Se $f\left(\frac{S}{3}\right)=\frac{S^3-9P^3}{27}$ e $f(0)=\frac{S^3-P^3}{3}$ hanno segni diversi, la (5) avrà fra 0 e $\frac{S}{3}$ un numero impari di radici: cioè una o tre. Ma tre non possono essere, perchè una radice della (5) è fra $+\infty$ e $\frac{2S}{3}$ giacchè $f(+\infty)=+\infty$, $f\left(\frac{2S}{3}\right)=-\frac{S^3+3P^3}{9}$. Allora vi sarà una radice reale fra 0 e $\frac{S}{3}$, se

$$P \leqq S \leqq P\sqrt[3]{9}.$$

Queste sono le condizioni richieste.

La terza radice reale della (5) è compresa fra $-\frac{S}{\sqrt{3}}$ e $-\infty$, come è facile verificare.

Se $P=S$ la (5) dà le radici $y=\pm S$, da scartare, e $y=0$, quindi i numeri

$$\div 0:0:S$$

Se $S=P\sqrt[3]{9}$ si hanno le $y=\frac{S}{6}\left[-1\pm\sqrt{33}\right]$, da scartare, e $y=\frac{S}{3}$, quindi

$$\div \frac{S}{3}:\frac{S}{3}:\frac{S}{3}.$$

Come esempio numerico se $S = 3$, $P^3 = \frac{89}{9}$ i numeri sono

$$y = \frac{2}{3} \qquad \frac{x}{z} = \frac{7 \pm \sqrt{3}}{6}.$$

477. *Risolvere l'equazione:* $z^8 + 2z^5 - 2z^4a + z^2 - 2za + a^2 = 0$.

F. Sibirani.

Risoluzione del prof. Guglielmo Santorelli di Napoli.

L'equazione data può scriversi: $(z^4 + z - a)^2 = 0$. Si tratta quindi di risolvere la

$$z^4 + z - a = 0. \tag{1}$$

Aggiungendo ad ambo i membri il trinomio $\alpha z^2 + \beta z + \gamma$, essendo α, β, γ, indeterminati, per ora, si ha

$$z^4 + \alpha z^2 + (\beta + 1) z + (\gamma - a) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma, \tag{2}$$

equazione che può scriversi sotto la forma:

$$(z^2 + \lambda z + \mu)^2 = (\sqrt{\alpha} z + \sqrt{\gamma})^2 \tag{3}$$

essendo λ e μ indeterminati.

Dovendo essere nella (2) e (3) uguali i coefficienti delle potenze omonime, si hanno le relazioni

$$2\lambda = 0 \quad , \quad 2\mu = \alpha \quad , \quad 2\lambda\mu = \beta + 1 = 0 \quad , \quad \mu^2 = \gamma - a$$

che conducono alla risolvente di Ferrari

$$1 - 8\mu (\mu^2 + a) = 0, \quad \text{ossia} \quad \mu^3 + a\mu - \frac{1}{8} = 0,$$

da cui basta ricavare un sol valore:

$$\mu = \sqrt[3]{\frac{1}{16} + \sqrt{\frac{1}{256} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{16} - \sqrt{\frac{1}{256} + \frac{a^3}{27}}}$$

Essendo noto μ, sarà noto $\alpha = 2\mu$, e dovendo essere ancora $2\sqrt{\alpha}\sqrt{\gamma} = \beta = -1$, sarà $\sqrt{\gamma} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} = -\frac{1}{2\sqrt{\mu}}$.

Sostituendo nella (2) ad α, β, γ i valori cercati in funzione di μ, ed estraendo da ambo i membri la radice quadrata, avremo le equazioni

$$z^2 - \sqrt{2\mu}\, z + \mu + \frac{1}{3\sqrt{2\mu}} = 0,$$

$$z^2 + \sqrt{2\mu}\, z + \mu - \frac{1}{2\sqrt{2\mu}} = 0;$$

donde

$$z = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \pm \sqrt{-\frac{\mu}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2\mu}}} \quad , \quad z = -\sqrt{\frac{\mu}{2}} \pm \sqrt{-\frac{\mu}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2\mu}}}.$$

Queste formole, in cui a μ si sostituisce il valore già trovato, danno le quattro radici della equazione (1), ossia le otto radici della data.

481. *Determinare la pedale della sviluppata di una conica centrale rispetto a un punto qualunque del suo piano come polo.*

V. Retali.

Risoluzione del prof. G. Cardoso-Laynes.

Se risolviamo la questione cogli ordinari metodi, oppure se la riconduciamo a cercare il luogo dei piedi delle perpendicolari abbassate sulle normali della conica da un punto fisso del piano, in entrambi i casi si va incontro a calcoli assai laboriosi; perciò tratteremo la questione sotto un altro punto di vista, ricordando che " *la podaria di una curva è l'inversa della sua polare reciproca* ecc. "

L'equazione della sviluppata di una conica centrale è

$$(1) \qquad (ax)^{\frac{2}{3}} \pm (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}} \qquad \text{(dove è } c = a^2 \mp b^2\text{)}$$

Rendendo omogenea la (1) col porre $\dfrac{x}{z}, \dfrac{y}{z}$ in luogo di x, y si ha

$$(1') \qquad \mathrm{F} = (ax)^{\frac{2}{3}} \pm (by)^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{1}{3}} z^{\frac{2}{3}} = 0.$$

Il cerchio di raggio 1 col centro in un punto (m, n) ha per equazione

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + m^2 + n^2 - 1 = 0,$$

o, resa omogenea,

$$(2') \qquad f = x^2 + y^2 - 2mxz - 2nyz + z^2(m^2 + n^2 - 1) = 0.$$

Per trovare la polare reciproca della (1) rispetto al cerchio (2) dobbiamo stabilire le equazioni

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} : \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x = x_1} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} : \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y = y_1} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z} : \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z = z_1}$$

essendo x_1, y_1, z_1, le coordinate correnti omogenee, relative alla curva che cerchiamo.

Eseguendo le derivazioni indicate, e ponendo dipoi $z = z_1 = 1$, si ha:

$$a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{1}{3}} : (x_1 - m) = \pm b^{\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{3}} : (y_1 - n) = c^{\frac{4}{3}} : (mx_1 + ny_1 - m^2 - n^2 + 1)$$

da cui, ricavando $x^{-\frac{1}{3}}$ e $y^{\frac{1}{3}}$ e sostituendo nella (1), si ha l'equazione della polare reciproca:

$$(3) \qquad (mx_1 + ny_1 - m^2 - n^2 + 1)\left\{a^2(y_1 - n)^2 + b^2(x_1 - m)^2\right\} = c^4(x_1 - m)^2(y_1 - n)^2,$$

o, trasportando l'origine con una traslazione, in (m, n):

$$(3') \qquad (m\mathrm{X} + n\mathrm{Y} + 1)^2\left\{a^2\mathrm{Y}^2 \pm b^2\mathrm{X}^2\right\} = c^4\mathrm{X}^2\mathrm{Y}^2.$$

L'inversa della (3'), cioè la podaria che ricerchiamo, sarà rappresentata dall'equazione che si ottiene ponendo nella (3'):

$$\mathrm{X} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad , \quad \mathrm{Y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Quindi si ha:

$$(4) \qquad (x^2 + y^2 + mx + ny)^2\left\{ay^2 \pm b^2x^2\right\} = c^4x^2y^2$$

che rappresenta una *sestica bicircolare* con un punto quadruplo con tangenti doppie ortogonali nell'origine ed avente due direzioni assintotiche eguali a quelle della conica data.

Osservazione. — Supponendo nella (1) $a=b$ e c INDIPENDENTE da a e b e considerando il segno superiore, essa viene a rappresentare un *astroide*, quindi con lo stesso procedimento si trova per la podaria di un astroide l'equazione

$$(x^2+y^2+mx+ny)^2(x^2+y^2)=c^4x^2y^2$$

ed in particolare, se per polo si prende l'origine, si ha il *rosone quadrifoglio*

$$(x^2+y^2)^3-c^4x^2y^2=0,$$

resultato questo assai noto.

482. *Pedale della sviluppata della parabola rispetto a un punto qualunque del suo piano come polo.* V. RETALI.

Risoluzione del prof. G. Cardoso-Laynes.

Con metodo analogo a quello tenuto per la precedente quistione, poichè si ha, per l'equazione omogenea della sviluppata di parabola *(parabola semi-cubica)*

$$\text{(1)} \qquad F=y^3-ax^2z=0$$

le equazioni (α) della quistione precedente dànno (per $z=z_1=1$)

$$-ax:(x_1-m)=3y^2:2(y_1-n)=ax^2:2(mx_1+ny_1-m^2-n^2+1)$$

da cui, ricavando x, y e sostituendo nella (1), si ha per la polare reciproca

$$2a^{\frac{1}{2}}(y_1-n)^{\frac{3}{2}}=3^{\frac{3}{2}}(x_1-m)(mx_1+ny_1-m^2-n^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

Trasportando l'origine in (m, n) con una traslazione e rendendo l'equazione razionale, si ha

$$4aY^3=27X^2(mX+nY+1)$$

la cui inversa

$$4ay^3=27x^2(x^2+y^2+mx+ny)$$

rappresenta la podaria richiesta: essa è dunque una *quartica circolare*.

QUISTIONI PROPOSTE

485. Se lungo le tangenti ad un'elica circolare si riporta, a partire dai rispettivi punti di contatto, un segmento costante l, il luogo degli estremi di questo è una nuova elica circolare, giacente in un cilindro parallelo a quello della prima; la quale taglia le tangenti di essa sotto l'angolo costante $\theta=\text{arctang}\,\frac{l}{\rho}$, dove ρ è il raggio di prima curvatura della data elica. Inoltre fra gli angoli γ e γ_1 sotto cui l'elica considerata e quella resultante tagliano le generatrici dei rispettivi cilindri, passa la relazione: $\cos\gamma_1=\cos\gamma\,.\cos\theta$.

M. CHINI.

486. Trovare l'inviluppo del sistema d'iperbole

$$y^2(1+4a^4)+4a^2xy-4a^2x-8a^4y+4a^4=0.$$

487. Trovare l'inviluppo del sistema d'ellissi

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha}+\frac{y^2}{\operatorname{sen}^2\alpha}=(1-y)^2.$$

G. Pesci.

488. Di un triangolo ABC non rettangolo è data la base BC; qual'è il luogo geometrico del vertice A, sapendo che la distanza dell'ortocentro al centro del cerchio circoscritto è uguale alla metà di BC?

A. Droz-Farny.

489. Essendo dato due coniche S e S', il luogo dei punti M tali che le tangenti condotte da M a S sieno coniugate armoniche delle tangenti condotte da M a S', è una conica S''.

490. Da un punto I della tangente nel vertice di una parabola si conduca una corda PQ, che incontri l'asse in A. Sia A' il simmetrico di A rispetto a I; i quattro punti A, A', P, Q formano un gruppo armonico.

491. Trovare il luogo dei baricentri dei triangoli rettangoli, d'area costante, iscritti in un triangolo rettangolo dato.

Trovare inoltre l'inviluppo dei lati di questi triangoli.

492. Sia F un fuoco di una ellisse, e M un punto variabile di questa curva. Si descrive il cerchio di centro M e di raggio MF. Il luogo delle estremità del diametro di questo cerchio, perpendicolare ad MF è una curva la cui area è doppia di quella dell'ellisse.

493. Dimostrare le identità:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\operatorname{sen}x}=1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\operatorname{sen}^3x-\cos^3x)\,dx}{\operatorname{sen}^2x\cos^2x}=\frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\operatorname{sen}x+\cos x+2)\,dx}{(1+\operatorname{sen}x)(1+\cos x)}=\frac{1}{2}.$$

494. Si considerino le due curve razionali, le cui equazioni parametriche sono

$$\begin{cases}x=\dfrac{A\cos\varphi}{a^2\operatorname{sen}^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}\\[2mm] y=\dfrac{A'\operatorname{sen}\varphi}{a^2\operatorname{sen}^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}\end{cases}\qquad\begin{cases}x=\dfrac{B\cos^3\varphi}{a^2\operatorname{sen}^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}\\[2mm] y=\dfrac{B'\operatorname{sen}^3\varphi}{a^2\operatorname{sen}^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}\end{cases}.$$

Il rapporto delle aree di queste due curve è

$$\frac{(a^2+b^2)(a+b)^2}{3a^2b^2}.$$

495. Si considerano i triangoli simili ad un triangolo dato ed iscritti in un dato triangolo. Trovare:

1° il luogo dei baricentri

2° il luogo degli ortocentri.

3° il luogo dei centri dei cerchi circoscritti

4° l'inviluppo dei lati.

Considerare il caso in cui questi triangoli sieno equilateri.

496. Sia M un punto variabile di un'ellisse di centro O; MP la corda perpendicolare a MO; MQ la corda supplementare della corda MP e MR la corda isotomica (*) della MQ rispetto agli assi dell'ellisse. Dimostrare che ciascuna delle corde MQ e MR è normale ad un'ellisse fissa.

E. N. Barisien.

BIBLIOGRAFIA

Giovanni Garbieri (prof. all'Università di Genova). — *Elementi di aritmetica razionale* secondo i programmi dei ginnasi superiori. Prima edizione colla collaborazione del prof. Enrico De Amicis. Milano, Trevisini, 1898. L. 1,80 (pag. 186).

Comincia da qualche anno a diffondersi a beneficio delle nostre scuole quella poderosa corrente di nuove idee sulla logica e sui principi fondamentali della matematica che ebbe origine precipua fra noi dalle opere del prof. Peano e specialmente dalla sua *Rivista di matematica* (1891-95). Già il Burali-Forti, Sadun e Soschino e il Ramorino diedero saggi pregevoli del modo di applicare tali idee nei primi gradi dell'insegnamento; seguì poi il Gazzaniga col suo *Libro di aritmetica e di algebra elementare* per i Licei, il quale, inspirandosi direttamente alle fonti, tentò con molta originalità e dottrina una esposizione rigorosa dell'aritmetica e dell'algebra elementare; e sebbene l'opera sua (come ogni cosa nuova) non sia forse scevra di imperfezioni, essa ha sempre il merito inestimabile di aver diffuso fra maestri e scolari lo spirito e il gusto delle nuove dottrine e acceso in loro il desiderio di approfondirle. Ultimi, se non m'inganno, in questo indirizzo analitico giungono i proff. Garbieri e De Amicis con questi loro *Elementi di aritmetica razionale*, che confrontati col precedente *Trattato di aritmetica razionale* del prof. Garbieri (coadiuvato dal prof. De Amicis) rivelano una radicale evoluzione nel pensiero dei nostri Autori dal 1894 al 1898.

Noto subito che detti *Elementi* non sono rigorosamente razionali, perchè vi ha largo campo l'uso del concetto complicato (per quanto intuitivo) di numero *cardinale finito* (numero di volte) e di *ordine;* mentre vi si trova evitato l'uso del principio d'induzione matematica. (**) Questi mal certi fondamenti sarebbero ancora didatticamente accettabili se conducessero soltanto ad assumere come assiomatici certi principi dimostrabili, oppure a dimostrare teoremi riferentesi a numeri indeterminati, considerando soltanto particolari valori di tali numeri; ma fanno sentire il bisogno di essere migliorati quando si osserva che per loro cagione menti acute

(*) In altri termini la corda MQ e MR sono egualmente inclinate sugli assi dell'ellisse.

(**) Questo principio è soltanto citato in nota a pag. 8 ed applicato come utile esercizio a dimostrare la formula $(a+b)+c=a+(b+c)$.

come quelle dei nostri A. restano talora illuse da *petizioni di principio*. Un esempio di ciò si ha nella dimostrazione che leggesi a pag. 6 della proposizione: *Se* a $>$ b *esiste un* c *ed uno solo pel quale* a $=$ b $+$ c, (*) che consiste nell'ammettere che con un numero finito di passaggi da un numero al successivo si può partendo dal dato numero b giungere al dato numero maggiore a, cioè consiste nell'ammettere la proposizione da dimostrare. (**) Un altro esempio di dimostrazione apparente troviamo a pag. 31 per stabilire che "*Se* a $>$ b, *se non è* a *multiplo di* b, *sarà* a $=$ bq $+$ r *con* r $<$ b", ivi infatti si desume l'esistenza di q e di r dal solo fatto che a non è fra i multipli di b. (***)

Ma se il libro ha comuni colla maggior parte dei trattati di aritmetica elementare alcuni pochi errori, è poi in generale superiore ad essi per la trattazione esclusivamente analitica, per la cura dell'esposizione e per molte osservazioni originali. Per darne un'idea passerò in rassegna il § della sottrazione, che è sostanzialmente concepito nella seguente forma: Se $a > b$ ed $a = b + c$, si dice che c è la differenza fra a e b; se invece $a \geqq b$ e si ha $a = c + b$ (qui può essere $c = 0$ perchè nell'addizione si è definito lo zero colla $0 + a = a$) si dice che c è il resto della sottrazione di b da a e si scrive $a - b = c$. Finchè $a > b$ si ha $b + c = c + b$, epperò differenza e resto coincidono; ma se $a = b$, allora esiste il resto 0 ma non la differenza, perchè $b + 0$ non ha significato e d'altronde non potrebbe esistere differenza fra due numeri non differenti. Questa distinzione fra differenza e resto è ben fatta; soltanto io avrei bramato che, obbedendo all'uso dei matematici e alle convenienze del calcolo formale, si fosse dato significato al simbolo $a + 0$ e si fosse considerata la differenza nulla, non ostante che essa intervenga fra numeri non differenti. E forse era poi anche più opportuno dedurre che 0 è il precedente di 1 non dalla considerazione che $a - a = 0$, ma dalla definizione stessa: $0 + a = a$ col farvi $a = 1$.

La divisione è qui considerata sotto due aspetti, cioè o come ricerca di quoziente e di resto (divisione *impropria* raffigurata col simbolo molto opportuno $\begin{array}{c|c} a & b \\ r & \overline{q} \end{array}$ che si legge: a *diviso* b *dà per quoziente* q *e per resto* r) ovvero come ricerca di *quoto*, cioè di quel numero q (se esiste) tale che $a = b \times q$ (divisione *propria* che si rappresenta col simbolo ordinario $a : b = q$). La divisione propria viene considerata soltanto nell'ultimo § della parte I che riguarda i numeri interi; gli 8 §§ precedenti trattano ordinatamente della divisione impropria, delle proprietà dei

---

(*) Questa proprietà dei numeri potrebbe dirsi *connessione* (della classe dei numeri).

(**) Accettando la definizione di minore e di maggiore data dai nostri A. e fondata sulla posizione rispettiva dei due numeri nella serie naturale degli interi, mi sembra che la connessione si possa rigorosamente dimostrare coll'aiuto dell'induzione matematica, del principio che $a + b > a$ e infine della proprietà $a + b = b + a$, procedendo nel seguente modo: Se $a = b + 1$, la proposizione è vera per $c = 1$. Se poi $a > b + 1$ allora la $b + x < a$ è sodisfatta almeno da $x = 1$; se dunque tutte le volte che si ha $b + x < a$ si avesse anche $b + (x + 1) < a$ allora per ogni numero N si avrebbe $b + N < a$; ma ciò non può essere perchè, essendo $b + a = a + b$ ed $a + b > a$, si ha $b + a > a$. Esiste dunque un tale c' pel quale si ha $b + c' < a$ e $b + (c' + 1) \geqq a$; posto allora $b + c' = a'$, avremo $a' < a \leqq a' + 1$: d'altronde non può essere $a' < a < a' + 1$ perchè fra a' ed $a' + 1$ non cade alcun numero, dunque deve essere $a = a' + 1$, ovvero (ponendo $c = c' + 1$) $a = b + c$. L'unicità di c risulta poi dalla così detta *dipendenza* della somma cioè dalla proposizione: *Secondochè* a $\gtreqless$ b *anche risp.* a $+$ c $\gtreqless$ b $+$ c *e viceversa.*

(***) Mi pare che il teorema in discorso possa dimostrarsi nel seguente modo: Poichè a non è multiplo di b, sarà $b > 1$: ora siccome $b \times 1 = b$, avremo $b \times 1 < a$; se dunque per ogni x pel quale $bx < a$ fosse anche $b(x + 1) < a$, per ogni intero N sarebbe $bN < a$; ma ciò non è, perchè, essendo $ba = ab$ e (per essere $b > 1$) $ab > a$, è $ba > a$; dunque deve esistere qualche intero q pel quale si abbia $bq < a$ e $b(q + 1) \geqq a$; ora per l'ipotesi fatta non può essere $b(q + 1) = a$, dunque si deve avere $bq < a < b(q + 1)$. Di qui si ricava $b(q + 1) - bq > a - bq$, ossia (ponendo $r = a - bq$) $b > r$; è così provata l'esistenza di q e di r in modo che $a = bq + r$ e $r < b$. Facilmente si prova l'unicità di q e quindi di r.

prodotti e quozienti, delle potenze (considerando anche l'esponente 0), dei teoremi sulla divisibilità, dei criteri di divisibilità (la divisibilità per 9 è trattata con molta semplicità), del m. c. d., del m. c. m., dei numeri primi e delle applicazioni della decomposizione dei numeri nei loro fattori primi ai divisori e ai multipli; e tutto ciò evitando ingegnosamente il segno della divisione propria, di cui non è cenno fino al § 14, che prepara coi casi di impossibilità della *quotazione* l'introduzione delle frazioni. Noto ottimi esercizi alla fine di molti paragrafi, specialmente a proposito del m. c. d. e dei numeri primi. Mi permetto di osservare che alcuni teoremi che sono dimostrati dagli A. col sussidio dei numeri primi potevano dimostrarsi semplicemente colla teoria del m. c. d.; uno di questi è: *Un numero che sia primo con ciascuno dei fattori di un prodotto è primo col prodotto* (la cui dimostrazione mi è parsa anche scorretta); e tali sono pure i suoi corollari (eccettuati quelli riferentesi a numeri primi (204, 205)) fra i quali intendo incluso anche il seguente: *Un numero che sia divisibile pel prodotto di due o più numeri primi fra loro due a due è divisibile pel loro prodotto.* (Cfr. *Rivista di Matemat.*, vol. I: Sommario dei libri VII, VIII e IX di Euclide; Peano; v. pag. 11 le Prop. 23, 24, 25, 26.)

La parte migliore di questi Elementi è certamente la II. " Numeri razionali " (in gran parte opera esclusivamente del De Amicis, come è avvertito a pag. 93) nella quale sono esposti (certo per coincidenza fortuita) con somma chiarezza ed esattezza ad uso della scuola gli stessi concetti naturali e semplici introdotti dal Peano nella trattazione analitica delle frazioni (*Rivista di Mat.*, vol. I, " Sul concetto di numero ". Nota II, p. 256 e seg.; v. p. 261). Ma questa trattazione, come del resto tutto il libro in generale, ha poi anche molti altri pregi di originalità per la cura nel rilevare le proprietà delle relazioni di uguaglianza e disuguaglianza, (*) per il carattere di opportunità che hanno le non poche nozioni di logica che vi si trovano qua e là, per la discussione delle definizioni scelte, per il modo di presentare teoremi e dimostrazioni e per la felice scelta di nuovi vocaboli (come *equimoltiplicare* ed *equidividere* riferito al moltiplicare e dividere ambi i termini di una frazione per uno stesso numero). Soltanto mi è parso di notare una discordanza fra i titoli dei §§, ove si parla di numeri *razionali*, e il testo ove non si parla che di frazioni senza mai accennare a numeri razionali; se anche tale discordanza non esistesse e fosse effetto di una mia svista, è certo che è ingiustificato il nome di numero razionale laddove basterebbe quello di frazione, poichè secondo la teoria anche gli interi sono frazioni.

Infine troviamo la ricerca della generatrice di un numero decimale periodico fatta con molta esattezza escludendo ogni concetto di limite. Ma questa esclusione, che non permette di eguagliare il numero periodico alla sua generatrice (quando esiste) nè di eguagliare all'unità il numero periodico decimale di periodo 9, lascia all'ente decimale periodico il semplice carattere di figura numerica senza attribuirgli mai il valore di *numero;* il che nè giustifica il suo nome di *numero*, nè soddisfa la nostra mente che lo intuisce come un numero. In tale teoria il *Trattato* (già citato) è più completo degli *Elementi*, perchè ivi il De Amicis svolge in modo accurato e originale le delicate nozioni sui limiti, tanto utili anche come introduzione alla teoria degli irrazionali.

G. Sforza.

(*) Vedasi la bella Memoria del De Amicis (citata favorevolmente in molte riviste italiane, francesi e tedesche) *Dipendenza fra alcune notevoli proprietà delle relazioni fra enti di un medesimo sistema*, *Rivista di Mat.*, vol. II, pag. 113 (1892).

CONTI A. — *Elementi di Aritmetica razionale ad uso degli allievi delle scuole normali.* — Bologna, Zanichelli, 1900.

Il Zanichelli che già ci aveva dato con gli *Elementi d'Aritmetica* del prof. Pincherle, uno dei testi migliori per le scuole secondarie inferiori e, con quello d'*Aritmetica razionale* dei prof.i Arzelà ed Ingrami, il trattato che forse più risponde alle condizioni di questo insegnamento negli Istituti tecnici, ci offre ora il libro del Conti, nel quale viene esposta quella parte di aritmetica razionale che i programmi assegnano per le scuole normali. E questo del Conti ci sembra che tenga degnamente il posto che gli verrebbe assegnato insieme a quei due. Esso è stato salutato con piacere da noi, sebbene appaia dopo altri trattati per le scuole normali così pregevoli, quali quelli del Garbieri e del Testi, giacchè per ragioni che qui sarebbe fuor di luogo esporre, crediamo preferibili testi speciali a quelli ove è fatta un'esposizione completa delle varie parti della matematica che si studiano in una data scuola, *secondo l'ordinamento imposto dai programmi*.

A chi sono note le condizioni in cui si deve svolgere l'insegnamento dell'aritmetica nelle scuole normali — ove è quanto di meno razionale potesse pensarci l'ordinamento stesso che assegnano i programmi per le diverse discipline scientifiche —, si fanno subito innanzi le difficoltà di compilare un testo informato ai princìpi più rigorosi della scienza, e pure adeguato all'intelligenza degli alunni di queste scuole e che si adatti alle altre esigenze cui in esse deve sottostare specialmente l'insegnamento dell'aritmetica razionale. Nel libro del Conti si vede la mira costante che l'autore ha avuto di raggiungere il duplice intento; e si deve riconoscere che le difficoltà sono state quasi sempre superate molto felicemente: il libro potrà essere adottato con soddisfazione tanto da chi attende sopra tutto all'esattezza ed al rigore del metodo, quanto da chi, nel testo che propone agli alunni, ricerca in particolar modo i pregi di un'esposizione facile e chiara.

L'aritmetica del Conti comincia molto opportunamente con le nozioni intorno alla *grandezza*, a cui vien dato uno sviluppo assai largo, ma necessario per potere stabilire con chiarezza il concetto generale di *numero* e passar quindi all'esposizione completa della *numerazione* dei numeri razionali. L'analisi delle operazioni viene condotta con molta cura. Per ognuna di esse sono poste in speciale rilievo le *proprietà formali*, da cui logicamente deriva la *regola* per eseguirla; poi ne vengon date le altre proprietà più notevoli. Il Conti poi pone in luce particolare quali sieno le norme di ciascuna regola da cui dipende essenzialmente l'esecuzione dell'operazione, e le altre che è utile ma non necessario il seguire. (Così viene mostrata anche la possibilità di eseguire la divisione incominciando dalle unità di un ordine qualunque). Per avere insistito sopra questa osservazione, negli altri trattati trascurata, noi facciamo al Conti ampia lode; ciò serve non solo a fare intendere debitamente quelle proprietà formali su cui è fondata la regola speciale, ma gioverà anche a liberare gli alunni da quel convenzionalismo col quale vengono teoricamente addestrati ad un'esecuzione rapida dei calcoli, ma che non dà ad essi veramente quell'agilità che si richiede per poter eseguire rapidamente i calcoli nelle condizioni offerte da molti casi pratici. L'importanza di questo s'intende specialmente per un libro dedicato ai futuri maestri. — Viene fatta, come negli altri migliori trattati recenti, la distinzione delle operazioni in *dirette* ed *inverse* di 1ª e 2ª specie: quelle di ciascuna specie, trattate separatamente da prima, vengono poi ravvicinate in modo assai elegante per considerarne le proprietà *correlative*. Lo sviluppo che l'A. dà a questa parte è assai ampio; forse la ristrettezza del tempo non permetterà di accoglier tutto nell'esposizione del corso, ma si potrà omettere qualche cosa senza alcun danno; la forma e l'ordinamento dati ne indurrà molti alunni allo studio, e ciò costituirà per essi un utilissimo esercizio.

Molto succintamente viene esposta la teoria dei rapporti e delle proporzioni. Ciò perchè le proprietà principali, che ordinariamente vengono svolte in questa teoria, ma che si riferiscono a frazioni o a relazioni tra frazioni, l'A. le ha già esposte trattando di queste. La cosa è forse logica, ma, dal punto di vista didattico, noi non la sappiamo approvare completamente; perchè il trattare quelle proprietà, secondo il modo solito, nella teoria delle proporzioni permette di porle in rilievo maggiore, e di richiamar meglio l'attenzione su di esse, poste in relazione con le applicazioni che se ne devono fare.

Il Conti non ha, secondo l'esempio degli altri trattati per le scuole normali, raccolto in una parte speciale del libro lo svolgimento di quella parte del programma che si riferisce alle *norme per l'insegnamento dell'aritmetica nelle scuole elementari*. Ed egli ha fatto molto bene: io credo che nessun insegnante segua in ciò alla lettera il programma, destinando a quello svolgimento una parte speciale del suo corso; chè tali norme, per essere efficaci, devono esser date frequentemente, ripetutamente e *occasionalmente*. Così ho fatto sempre io con le mie alunne di 2ª e 3ª classe normale. Le numerose osservazioni che si trovano nel libro del Conti contengono i concetti fondamentali che devono servir di guida al futuro maestro; all'insegnante offriranno la migliore occasione per sviluppare i precetti che ne conseguono per l'insegnamento dell'aritmetica pratica. Ci pare specialmente che, richiamando l'attenzione degli alunni sopra le serie graduate di problemi che il Conti propone, sopra il loro svolgimento e la loro razionale concatenazione, si avrà agio di far intendere ad essi nel miglior modo l'ordine e le norme secondo cui deve esser condotto l'insegnamento dell'aritmetica nella scuola elementare.

G. Del Prete.

Sadun e Soschino. — *Lezioni di Aritmetica*, G. B. Paravia, 1900. Seconda edizione.

Anche per questo libro il nome degli AA. basterebbe per raccomandarlo; si aggiunga poi che la 1ª edizione ha avuto luogo già di essere giustamente apprezzata e per comune consenso è ritenuta come uno dei migliori testi di Aritmetica teorica. Non sto a notare particolarmente le varie aggiunte e modificazioni introdotte dagli AA. in questa seconda edizione; dirò solo che certo la rinomanza che l'opera già si era acquistata non può con questa edizione che aumentare.

G. C.-L.

Bortolotti E. — *Aritmetica pratica per le scuole secondarie inferiori*. Roma, Società editrice " Dante Alighieri, " 1899.

Dal solo nome dell'A. si arguisce, anche se non lo notassimo esplicitamente, che questo libro è compilato col massimo rigore scientifico, cosa, del resto, che s'incontra assai raramente fra le immense valanghe di trattati di Aritmetica pratica che cadono giù in Italia ogni anno e da ogni parte; quello però che mi preme soprattutto di notare, specialmente facendo il confronto con altre operette consimili, talune delle quali assai recenti, è che l'A. ha saputo dimostrare col fatto che esser rigorosi non significa esser pedanti e che nello scrivere il libro l'A. ha sempre tenuto presente a chi esso fosse destinato.

La materia è disposta nel modo seguente: *Parte I.* Quantità, numeri interi. — Le operazioni fondamentali sui numeri interi. — Le proprietà elementari dei numeri interi. — Le frazioni ordinarie. *Parte II.* Le frazioni decimali ed i numeri decimali. — Sistema metrico decimale. — Estrazione di radice quadrata e cubica. *Parte III.* Numeri complessi (noto ed approvo l'omissione del metodo delle parti aliquote). — Rapporti e proporzioni. *Appendice.* Tavola dei numeri primi. — Tavola sinottica delle antiche note numeriche principalmente usate in Italia.

Questa pregevole operetta del Bortolotti può essere con profitto adottata sia nel Ginnasio inferiore, sia nelle Scuole Tecniche, sia nelle Classi complementari femminili. G. C.-L.

H. Poincaré. — *Cinématique et mécanismes; potentiel et mécanique des fluides.* — Paris, G. Carré, 1899.

Il volume contiene il corso professato alla Sorbona e non fu redatto dall'A.

Il primo capitolo è dedicato allo studio del moto rettilineo, curvilineo, elittico ed elicoidale. Il moto di una figura piana nel suo piano è studiato nel secondo capitolo con una certa larghezza, in particolar modo riguardo al moto epicicloidale. Il movimento di un corpo solido invariabile comprende i capitoli III e IV, e nel successivo è succintamente studiato il moto relativo di un punto.

La trasformazione dei movimenti e lo studio dei meccanismi che vi hanno riguardo termina la prima parte dell'opera. Vi si studiano i differenti ingranaggi, epicicloidali, elicoidali, conici, iperbolici, la conginnzione di Cardano, la cremagliera, e da ultimo il complesso di biella e manovella (il così detto manovellismo di spinta rotativa), il settore di Stephenson con abbastanza dettagli, il parallelogrammo di Watt, e l'invertitore di Peaucelier, per quanto non adoperato nella pratica.

Nella seconda parte, dopo uno sguardo abbastanza rapido alla teoria del potenziale, sul quale l'autore pubblicò però un libro a parte, ed alla sua applicazione ad alcuni problemi di elettrostatica, si studia nelle sue linee generali, il problema dell'attrazione di un ellissoide. Segue quanto è necessario a conoscere intorno alla meccanica dei fluidi, terminando con un cenno sul moto vorticoso e sulle sfere pulsanti del Bjerknes, le ricerche del quale (notiamo di passaggio) sono state ora raccolte per cura del figlio in un volume.

La suprema chiarezza e l'eleganza del Poincaré si riscontrano in questa, come nelle altre sue opere d'insegnamento e di propaganda scientifica. R. Pitoni.

Emilio Cercignani. — *Il tempo e la sua misura.* — Firenze, tip. pei minori corrigendi, 1899.

È un trattatello sul calendario scritto con chiarezza e con precisione. Si passa, dai metodi preistoriani per la misura del tempo, ai fusi orari, al meridiano di Gerusalemme divenuto scopo di propaganda del Tondini da Quarenghi. Dodici pagine che riguardano la costruzione di un orologio solare, esposta in modo semplice e piano, chiudono il volumetto. R. P.

NUOVA PUBBLICAZIONE

Il dott. Alberto Conti, prof. di matematica nella R. Scuola Normale *Anna Morandi Manzolini* in Bologna, ha iniziato fino dal 1° decembre scorso, coi tipi dell'editore Zanichelli, un periodico quindicinale che ha per titolo Il Bollettino di Matematiche e di Scienze fisiche e naturali.

Questa pubblicazione, destinata ai maestri delle scuole elementari e agli alunni delle scuole normali, realizza un voto espresso dal 1º Congresso di " *Mathesis* „ tenuto in Torino nel '98. (V. il verbale della seduta terza, *Periodico di Matematica*, Anno XIV, Fasc. I-III.) I primi due fascicoli pubblicati, danno affidamento che il *Bollettino* riuscirà nel suo scopo principale, che è quello di estendere e migliorare la cultura scientifica dei maestri elementari e di quei giovani che a questa professione s' indirizzano.

Auguriamo al *Bollettino* prosperità e lunga vita.

*DUBBI

Gli *Elementi di Geometria* del VERONESE, anche nella loro 2ª edizione, troveranno difficoltà non piccola per entrare nelle nostre scuole; e questo, secondo un maligno amico, perchè bisogna leggerli prima di insegnarli, come avviene del resto d'ogni libro che abbia novità. Comunque sia, la difficoltà cresce quando chi legge si trova avvolto da dubbi che non sa risolvere. Esporre dunque tali dubbi non è, credo, mancare di rispetto all'autore, nè screditare il libro, ma giovargli, poichè: od hanno i dubbi lor ragione nel libro, e l'autore può chiarirli con una *errata-corrige;* o provengono, come temo per me, da scarso comprendonio, ed allora qualche buon'anima di collega può venire in aiuto. Così intendo giustificare le seguenti osservazioni sulla Parte I dei predetti *Elementi.*

1º. Nel n. 7 la definizione I di *segmenti eguali* non è preceduta che da osservazioni pratiche: non si doveva preporre in qualche modo la esistenza e conoscenza del *segmento?* Il postulato II che segue riguarda la retta, la cui nozione mi sembra basata su quella di segmento.

2º. La sostanza della definizione I mi par questa " si dice $a=b$ . . . quando ogni proposizione che si può enunciare di a o d'una sua parte, considerati l'uno e l'altra separatamente, si può ripetere per b o per la parte corrispondente . . . . „ Possono queste parole fornire a chi non l'avesse il concetto di segmenti uguali? Parmi di no. E d'altra parte quali proposizioni a questo punto possono enunciarsi per i segmenti? Mi sembra miglior partito porre il concetto di segmenti eguali fra i primitivi come nella prima edizione.

3º. Concessa pure la definizione I, perchè volerne dedurre $a=a$, che ha sempre fatto ridere gli alunni? Non so poi trarne una buona dimostrazione della proprietà *transitiva,* cioè dalle due $a=b$, $b=c$ dedurre $a=c$.

4º. Nel postulato II dei segmenti si pone $AB=BA$. Ecco: o il segmento è un gruppo di punti determinato dai due A e B ed allora con AB o BA si nomina diversamente lo stesso segmento; o questo invece si considera come serie di punti e male si concede $AB=BA$ perchè di senso opposto. Di più dovrebbe allora aversi $a+AB=a+BA$, secondo il teorema III del n. 8, il che non è in armonia colla definizione di somma; nè poi si comprende come sia $AB+BA$ nullo come all'esercizio 5º. Qualcuna anzi delle osservazioni che precedono la definizione I farebbe credere che nel concetto di eguaglianza non ci entri l'ordine. Se no, in modo analogo si può domandare se sieno eguali i sei triangoli determinati da tre punti nei

N. B. — Gli articoli segnati con asterisco sono inviati dal comitato di relazione dell'Associazione MATHESIS.

loro diversi ordini. L'aver voluto con questo postulato tradurre diversamente la doppia sovrapponibilità di *due* segmenti eguali, mi sembra un omaggio al movimento, che poco si comprende.

5°. Nel n. 8 la definizione di somma sembra data per i segmenti d'una stessa retta, tanto più che si tien conto in essa del verso. Ed allora come costruire il perimetro di un poligono? Il postulato IV del n. 15 non mi sembra sufficiente, perchè non dice se e come si debba tener conto del verso.

6°. La dimostrazione del teorema I, n. 8 non è convincente, perchè basata sulla *visione* della figura. Posto AC = CA, la dimostrazione del teorema II mi sembra egualmente rigorosa e più semplice così come era nella prima edizione. L'osservazione che estende il teorema II è troppo breve perchè non dice se e come si possono commutare due addendi vicini. Nella dimostrazione del teorema III era meglio considerare BB_3 come somma dei segmenti b, poi concluderlo eguale ad AA_3, somma dei segmenti a.

7°. Come la definizione di somma di due segmenti dà un modo per costruirla, così mi sembra dovrebbe essere per la definizione di *resto*, il che si ottiene definendo i segmenti *sovrapposti*, come per la somma i *consecutivi*.

8°. Il triangolo come è definito al n. 13 non sembra una *figura rettilinea*, secondo la definizione I precedente; nè allora vi sarebbe distinzione fra triangolo e suo *contorno* (meglio che *perimetro*) come è detto alla definizione 11 del n. 22.

9°. Nel n. 14, definendo le figure eguali, si dice: " .... ai segmenti dell'una corrispondono segmenti eguali dell'altra .... „ Come intendere? La prima interpretazione fu per me questa: se ad A, B corrispondono A', B' è AB = A'B' senza nulla presupporre degli altri punti dei segmenti. Ma non la trovai sufficiente pel teorema I, non sapendo con essa concludere B' *interno* ad A'C'. Pensando allora che si parlava di figure rettilinee interpretai: non solo essere AB = A'B', ma i segmenti *appartenere* alle figure ed i punti, *corrispondenti nei segmenti*, riuscir tali anche nelle figure. Tale interpretazione è sufficiente per la dimostrazione del teorema I, ma ci obbliga a non pensare per es. archi di cerchio eguali senza ritenerli appartenenti a figure rettilinee. Perchè poi nella dimostrazione del teorema I si intenda bene come B' debba appartenere ad A'C' converrebbe completare così: la retta è *figura rettilinea*, così deve essere ogni figura F' ad essa eguale (perchè la eguaglianza è definita fra due figure rettilinee o tra due non rettilinee), quindi A'C' appartiene ad F' ed al punto (*) B di AC (e di F) deve corrispondere un punto B' di A'C' (ed anche di F'), quindi non un altro B'' per la corrispondenza univoca, ecc.

10°. La figura del n. 16 ed una frase del postulato V farebbero credere che a determinare la *coppia di rette* ci entrasse anche il loro *verso*, il che non appare dalla definizione e sembra escluso da tutto il contesto. Se no, che succederebbe di una coppia di rette mutando senso ad una o ad entrambe? — Nella dichiarazione poi è detto: " ....la coppia *ba* si chiama inversa della *ab* .... „ Qui il pensiero dell'autore è completamente nascosto, se non si voglia ricorrere al movimento. Che AB e BA sieno *due* segmenti si può comprendere, considerandoli come *serie di punti*, ma io non me ne capacito per le *coppie di rette*, perchè non sono serie di punti, nè ancora si possono considerare come serie di raggi. Così il postulato V rimane senza preciso significato; ed applicato poi agli angoli come serie di raggi dà luogo agli stessi inconvenienti notati per i segmenti.

11°. E se non ho male compreso, nelle dimostrazioni del corollario al n. 16, del teorema al n. 17 e del teorema III al n. 18 si applica il seguente principio:

(*) B di AC (e di r) deve corrispondere un punto.

in due coppie eguali di rette sono corrispondenti le rette che le determinano. Come scende questo dalla definizione di eguaglianza? Non mi riesce la risposta.

12°. La dimostrazione del lemma posto al n. 20 nella sua prima parte sembra valere solo per gli angoli convessi, perchè i concavi (ab), $(a'b')$ non sono figure appartenenti alle coppie di raggi ab, $a'b'$. Bisognerebbe dimostrare che, se le coppie di raggi ab, $a'b'$ sono eguali, così risultano anche le coppie di rette; e non saprei in che modo.

13°. Nella dimostrazione del teorema I del n. 23 si concludono eguali due angoli come figure opposte rispetto ad un punto, perchè tali sono i lati: a me non sembra sufficiente; così dicasi per una parte del teorema III al n. 28.

14°. Nella dimostrazione del teorema al n. 24 si concludono le uguaglianze $A(M)P = B(M)P$, $A(P)M = B(P)M$ ricorrendo, mi pare, al teorema II del n. 14 sulle figure corrispondenti in figure eguali. Se ho ben capito, questo teorema richiede che i punti *tutti* delle figure corrispondenti appartengano alle figure uguali. Ciò avviene per gli angoli $A(P)M$ e $B(P)M$, ma non per gli altri due. Analoga osservazione si può fare per il teorema I del n. 26 e del n. 27.

15°. Nel corollario del n. 26 è detto " .... l'ipotesi dei due triangoli eguali ABC, A'B'C' come corrispondenti trae seco l'eguaglianza di due angoli.... " Se il dire " il triangolo ABC corrisponde all'altro A'B'C' " significa che si corrispondono i vertici, bisognava chiarire un po' di più come ne consegua l'eguaglianza dei due triangoli, perchè non la si creda una anticipata applicazione del teorema V al n. 27. E questo schiarimento si può dare accettando la seconda interpretazione di cui alla nona delle presenti osservazioni. Se poi invece significa *essere eguali i due triangoli corrispondenti*, non vedo come si possano concludere corrispondenti i vertici, perchè la eguaglianza di due figure non specifica la corrispondenza fra i loro punti. In questo secondo caso, come anche al teorema del n. 29 si applica tacitamente un principio, che sarebbe all'ingrosso questo: *se alcuni punti determinano in modo unico una figura, in due di tali figure eguali essi sono punti corrispondenti.* (*)

In ogni modo poi sulla conclusione per gli angoli si può ripetere la osservazione precedente. Con questo si infirma anche una parte della dimostrazione data pel teorema II del n. 27.

16°. La definizione I del n. 28 chiama *poligono piano* la figura determinata da *n* punti e dai lati ecc. Che figura? *Rettilinea* non sembra perchè ne sarebbero esclusi i concavi e gli intrecciati; il *contorno* nemmeno, perchè.... cosa vorrebbe dire che un poligono convesso si può scomporre in triangoli?...

Si chiama anche perimetro l'*insieme* dei lati: insieme *somma* ovvero insieme *contorno?*

17°. Sono di minor conto le seguenti osservazioni: il postulato I non dice nulla su *quanti* punti si ammettono; — dal n. 6 non si comprende bene se c'entri l'*ordine* o no a formare un *sistema lineare;* — è fuori posto l'accenno alle *curve* nella osservazione pratica II del n. 7; — la definizione VI del *raggio* di retta non è ben chiara, perchè la parola *limitato* si usa in un senso diverso da quello assegnatole nella introduzione; — il corollario III del n. 10 si ha più semplicemente dal teorema III del n. 8; — nella dimostrazione del teorema I del n. 25 le prime due righe dell'ultimo periodo stanno meglio al principio della dimostrazione per determinare il raggio AB; — la definizione III e l'osservazione I del n. 28 si ba-

(*) La omissione di tale principio si nota anche nel mio libro di Geometria; però tutta l'appendice sulla eguaglianza lo fa presentire.

sano sulla intuizione; — certe corrispondenze di eguaglianza sono troppo semplicemente affermate, come nel teorema V del n. 25 e nel III del n. 30.

Degli altri libri non posso dir nulla perchè li ho sfogliati in fretta cercandovi inutilmente i postulati sul movimento, che pur si usa nella ricerca dell'area e del volume della sfera.

Rovigo, dicembre 1899.

GIUSEPPE INGRAMI.

---

*DA GIORNALI E RIVISTE

The Mathematical Gazette.

Il n. 17 (giugno 1899) contiene: *F. Morley*, Nota sulla sfero-conica: dimostrazione diretta della proprietà della sfero conica (o curva intersezione di una sfera e di un cono avente per vertice il centro della sfera e per direttrice una conica in uno dei fuochi della quale cade la perpendicolare dal vertice) che le somme delle distanze sferiche dei suoi punti da due punti fissi della sfera è costante. — *S. A. Saunder*, Sull'espressione " moto in un istante ": esame critico di questa espressione, presa in senso assoluto. — *R. F. Davis*, Equazioni porismatiche: osservazioni ed esempi sui sistemi di n equazioni con n incognite che sono incompatibili, a meno che non si verifichi una relazione fra i loro coefficienti, nel qual caso il sistema diviene indeterminato. — Contiene le seguenti piccole note: *R. F. Davis*, Dimostrazione geometrica di un teorema sul triangolo, applicabile agli angoli del parallelogrammo delle forze. — *C. E. M. 'Vicker*, Teorema sul contatto di un certo circolo variabile in un triangolo col circolo inscritto e uno degli ex inscritti. — Problemi. — Soluzioni. — Recensioni.

Il n. 18 (ottobre 1899) contiene: *R. F. Davis*, Equazioni prismatiche (continuazione, dal numero precedente). — *E. M. Langley*. Alcune curiosità nella divisione: esempi (continuazione, dal numero 15). — *C. E. M. 'Vicker*, Teoremi connessi coll'inversione: sono alcune relazioni, fra tangenti da punti a circoli, e diametri dei circoli. — Contiene le seguenti piccole note: *E. N. Barisien*. Valore dei raggi dei circoli tangenti a tre circoli dati. — *H. T. Gerrans*, Equazione degli assintoti alle curve espresse in coordinate polari da $\frac{1}{r}=f(\theta)$. — Problemi. — Soluzioni. — Recensioni.

Atti della R. Accademia della scienze di Torino.

Vol. XXXIV, disp. 11-14. *Mittag-Leffler*, Sulla rappresentazione analitica di un ramo uniforme di una funzione omogenea. — *V. Volterra*, Sopra alcune applicazioni della rappresentazione delle funzioni del prof. Mittag-Leffler. — *T. Cazzaniga*, Intorno ai reciproci dei determinanti normali. — *E. Daniele*, A proposito della mia nota: Alcune osservazioni preliminari sulla teoria del movimento delle superficie. — *C. Severini*, Sulla rappresentazione analitica delle funzioni reali discontinue di variabile reale. — *A. Bemporad*, Complessi di 2° grado costituiti dalle normali ad una serie di curve piane. — *G. Chisholm Young*. Sulla varietà razionale di M^4_3 di S_6 rappresentante della trigonometria sferica. — *V. H. Young*, Sulle sizigie che legano le relazioni quadratiche fra le coordinate di rette in S_4. — *B. Levi*, Dell'intersezione di due varietà contenute in una varietà semplicemente infinita di spazi. — *V. Volterra*, Sopra alcune applicazioni delle leggi del flusso di energia meccanica nel moto di corpi che si attraggono colla legge di Newton.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere.

Serie II, Vol. XXXII, Fasc. 9-15. — *L. Carazzoni,* Sulle curve trigonali. — *G Bardelli,* Sui momenti d'inerzia dei solidi di rotazione. — *G. Fano,* Sulle equazioni differenziali lineari del 5° ordine le cui curve integrali sono contenute in varietà algebriche. — *E. Veneroni,* Sopra i complessi del 3° grado costituiti da fasci di rette. — *V. Retali,* Sopra una corrispondenza $[m, n]$.

Atti del R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti.

Tomo LVIII, Serie VIII, disp. 2-3. — *F. D'Arcais,* Un problema sulle funzioni biarmoniche e sua risoluzione per un campo circolare.

Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena.

Serie III, Vol. I. — *A. Del Re.* Sopra una congruenza omaloide del 3° grado. — *P. Riccardi,* Alcune lettere di *Lagrange,* di *Laplace* e di *Lacroix* dirette al matematico Pietro Paoli e sette lettere del Paoli al prof. Paolo Ruffini.

Atti della Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania.

Anno LXXVI (1899). Serie IV. Vol. XII. — *G. Lauricella,* Sulla convergenza delle serie degli spostamenti e delle velocità di un punto di un solido elastico-isotropo vibrante.

Annuario della R. Scuola Navale superiore di Genova per l'anno scolast. 1898-99.

G. Pinelli, Sul modo di ricercare il valore numerico di una quantità analitica relativa ad una nuova data graficamente. — *C. Spelta.* Un teorema relativo all'equazione $\frac{du}{ar} + M_1 U_2 + M_2 U + M_3 = 0$.

Annali di Matematica pura ed applicata di Milano.

Serie III, Tomo II, Fasc. 4°. — *Timerding.* Ueber ein quadratisches Nullsystem. — *Bagnera,* Sopra i gruppi astratti di grado 32. — *Bottari,* Sulle razionalità dei piani multipli $\left\{ x, y, \sqrt[n]{F(x, y)} \right\}$. — *Dini,* Studi sulle equazioni differenziali lineari.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

Tomo XIII. Il Fasc. 3-4, contiene: *Alagna.* Della congruenza binomia rispetto ad un modulo primo p o ad una potenza di esso, nel caso in cui $\frac{p-1}{2}$ sia un numero primo, ovvero il doppio di un numero primo. (Continuazione e fine). — *De Franchis,* Riduzione dei sistemi lineari ∞^k di curve piane di genere 3. per $k > 1$. — *Gerbaldi,* Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane. — *De Franchis,* Sulle reti sovrabbondanti di curve piane di genere 2, — *Bourlet,* Sur la détermination de la surface d'une piste de vélodrome. — *Lovett,* Note on the contact Transformations of developable Surfaces.

Il Fasc. 5° contiene: *Almansi,* Sulla ricerca delle funzioni poli-armoniche in un'area piana semplicemente connessa per date condizioni al contorno. — *Viranti,* Sul concetto di derivata nella teoria elementare delle funzioni analitiche. — *Morale,* Involuzione di grado n e specie 1 in uno spazio ad $(n-1)$ dimensioni. — *Poincaré,* Complément à l'Analysis situs.

Il Pitagora diretto da *G. Fazzari.*

Il II semestre num. I del 1899 contiene: *F. Ferrari,* Alcune congruenze relative a somme di potenze ordinarie e fattoriali simili. — *C. Ciamberlini.* Questioni di nomenclatura geometrica. — *G. Del Prete,* Sulla formula che dà il volume del tronco di piramide. — *A. M. Bustelli*, Corrispondenza. — *Archimede*, " De arenae numero, " versione di *A. Mancini* (Continuazione).

Il Fasc. 2-3 contiene: *F. Ferrari*, Continuazione del precedente articolo. — *L. Bosi*, Sulla condizione perchè due equazioni di 2° grado abbiano una radice comune. — *E. Sadun*, Intorno alla dimostrazione di un teorema sui polinomi. — *C. Ciamberlini*, Continuazione e fine del precedente articolo. — *U. Ceretti*, Una formola araba sull'approssimazione delle radici quadrate. — *G. Cardoso-Laynes*, Alcuni teoremi di geometria del triangolo. — *Archimede*, " De arenae numero, " versione di *A. Mancini* (Continuazione).

Il Fasc. 4-5 contiene: *R. Dedekind*, Continuità e numeri irrazionali, traduzione di *L. Certo*. — Sull'approssimazione delle radici quadrate. — *C. Ciamberlini*, Generalizzazione di alcune definizioni date in geometria elementare (Continuazione). — *G. M. Testi*, Sui problemi di massimo e minimo. (Nota seconda). — *F. Palatini*, Teoria della misura (Continuazione). — *F. Ferrari*, Continuazione e fine dell'articolo del numero precedente.

*PUBBLICAZIONI MATEMATICHE ITALIANE RECENTI

G. Lazzeri, Manuale di Trigonometria. Livorno, Giusti 1899.

G. Valle, Funzioni ad una variabile e loro limiti; un capitolo di algebra elementare. Noto, tip. Zammit 1899.

Can. B. Raganti, Aritmetica pratica per il ginnasio inferiore, compilata in conformità dell'ultimo programma ministeriale. Sarzana, Tellarini 1898. L. 1,50.

E. Tronci, Formulario di aritmetica e geometria. Lucca, Landi 1899.

G. Bellacchi, Lezioni ed esempi di algebra complementare. Fasc. 2, Firenze, Barbèra 1899. L. 2.

L. Gosetti, Corso di aritmetica ed algebra. Parte I. Venezia, Ferrari 1899. L. 2.

S. Stromillo, Lezioni elementari di aritmetica per le scuole secondarie inferiori. Parte II. Napoli, Muca 1899. L. 0,50.

E Barilli, Elementi di aritmetica pratica per il ginnasio inferiore, con numerosi esercizi. Vol. I. Mantova, tip. Mondovi 1899. L. 0,50.

O. Leonardi, Elementi di algebra. Foligno, Salvati 1899.

M. Sasso, Formole dei quadrati e cubi dei polinomi; loro applicazioni per fare il quadrato e cubo dei numeri. Avellino, Pergola 1899. L. 1.

I. Ghersi, Metodi facili per risolvere i problemi di geometria elementare. Milano, Manuali Hoepli 1899.

A. Socci e *G. Tolomei*, Elementi di matematica; libro di testo per le scuole complementari, conforme ai programmi governativi. Vol. I, II, III. Firenze, Le Monnier 1899. L. 1,50 ciascuno.

A. Socci e *G. Tolomei*, Elementi di matematica; libro di testo per le scuole normali conforme ai programmi governativi. Vol. I, II. Firenze, Le Monnier 1899. L. 1,50 ciascuno.

S. Ortu-Carboni, Sull'insegnamento dell'aritmetica teorica nelle scuole secondarie. Piacenza, Pennelli e Perinetti 1899.

C. Alasia, Geometria e Trigonometria della sfera. Milano, Manuali Hoepli 1899.

C. Alasia, Calcolo grafico ed applicazioni alla statica grafica. Città di Castello, Lapi 1899. L. 4.

Giulio Lazzeri — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 25 Gennaio 1900.

EUGENIO BELTRAMI

Da un semplice sguardo all'elenco dei lavori pubblicati da **Eugenio Beltrami,** l'opera scientifica di questo grande italiano ci apparisce come un mare iridescente di matematica luce, in quanto le investigazioni di analisi e di geometria pura si alternano con le più svariate ricerche fisico-matematiche: merito insigne oggidì che il genio italiano, degenere dalle tradizioni di Galileo e di Leonardo, miete i maggiori allori ne' campi delle astratte speculazioni, e nella stessa geometria, scienza a base sperimentale, si affatica per assottigliare e secernere il seme dell'esperienza, quasi da grano odiosa misura di loglio. Tornando ai lavori del **Beltrami,** io penso che un mio giudizio intorno ad essi, per quanto veritiero, sarebbe indegno dell'uomo: all' umiltà della mia persona sovvenga dunque la parola di un illustre che gli fu emulo ne' primi voli del giovanile ingegno. È questi il prof. Ulisse Dini, che al Senato disse, commemorando il **Beltrami**: " I suoi lavori geniali ed altissimi, nei quali alla importanza della materia trattata si aggiungeva una lucidezza ed eleganza di esposizione che invogliava a leggerli e meditarli, lo resero presto celebre qui e fuori; e questi, e l'amore che egli sapeva infondere in tutti per la matematica, la sua bontà, la sua rara modestia, la sua gentilezza di modi inspirarono in tanti e tanti il culto della scienza ".

Meglio e più brevemente non si poteva delineare la figura del **Beltrami,** scienziato, maestro, educatore, in cui lo stile fu l'uomo, pari cioè alla schiettezza dell'animo e alla genialità della mente. E questa lode di scrittor geniale, oltre che alla sua natura d'artista, dovè il **Beltrami** all'indefesso studio de' classici nella scienza, pei quali professò un culto che a qualche innovatore parve idolatria. Da loro egli apprese come all'altezza dell'argomento possa andar congiunta la forma disinvolta, lo stile semplice ed elegante che è proprio dei grandi scrittori, mostrando con novello esempio che scienze e lettere son fatte per andar di buon accordo e integrarsi a vicenda, e non già per accapigliarsi, come vorrebbe, fomentato dalla poltroneria, un pregiudizio tutto moderno, cagione d'immenso danno per la nazionale cultura. - Qualche pagina di prefazione, che da sè sola è un capolavoro: e già il **Beltrami** ha suscitato nel suo lettore la visione chiara e precisa, nonchè l'interesse per la questione ch'egli prende a trattare, e dato altresì notizia de' risultati ottenuti, quella notizia che pel solito più importa allo studioso. Chi poi avesse vaghezza di seguire il **Beltrami** nelle sue dimostrazioni, si accorgerebbe com'egli, pur ricorrendo al simbolo, quando questo giova o è necessario, ne ricerchi a ogni passo l'ascoso significato, per quindi tradurlo, come responso d'oracolo, in proposizioni e immagini di un'ammirabile evidenza. Dal noto il simbolo, e dal simbolo la nuova parola, che consola lo spirito e parla alla fantasia: questo a mio credere fu il segreto dell'arte del **Beltrami**, questa la prima radice di quella forma elettissima, onde lo studioso è tratto a leggerne da cima a fondo le opere magistrali. E tanta ne' suoi scritti è la semplicità dei mezzi, sapientemente adoperati ad altissimi fini, tanta la naturalezza delle deduzioni, da farti dubitare se per caso, pensando all'argomento, non avresti battuto anche tu la stessa sua via e scoperto le medesime verità. Illusione che si prova alla lettura delle opere dei sommi maestri: ma illusione che attesta l'eccellenza delle opere stesse, perchè dove l'umanità ritrova o crede di ritrovare la sua anima, ivi è l'impronta del genio e il germe dell'immortalità.

Quale lo scrittore, tal fu il maestro, anzi (e perchè non dirlo?) il mio maestro. Il nostro corso si componeva di quattro discepoli: (*) pochini invero per metter su " la baraonda lieta e gioconda „ cantata dal Giusti, ma pur bastanti a formare un'allegra brigatella, qual fummo, disposta a salar le lezioni per un'uscita in campagna al delizioso sole dei romani inverni. Ma la lezione del **Beltrami**, quella no, non si doveva salare: essa ci arrideva come una festa della forma e del pensiero. Ricordo che il **Beltrami** faceva poco a fidanza con la cultura de' suoi discepoli, e che prima della lezione ammanniva loro il *materiale*, da richiamare nel corso della lezione stessa. O che questo consistesse in qualche proprietà elementare delle forme quadratiche, o dei determinanti, o nel più trito teorema della geometria di Euclide, pareva a noi che quella proprietà e quel teorema uscissero dalle labbra di lui quasi trasfigurati e coloriti di nuova luce. - Effetto di suggestione, e del fascino che il maestro esercitava sullo spirito de' suoi discepoli? - E sia pure. Ma quanti maestri ne esercitano altrettanto?

Buono, mite, affabile con tutti: casalingo e tuttavia proclive alla conversazione e all'aneddoto di buona lega, nel conversare poneva la

(*) Tra i quali il Caporali e il De Paolis, che morirono giovanissimi, ma lasciando fama imperitura di sè negli annali della scienza.

più squisita cura per nascondere agli altri la propria superiorità, e questo suo studio lo rendeva cauto e misurato nè giudizj proprj, tollerante e saggio estimatore degli altrui. Il timore di sopraffare gli altri col suo ingegno lo rendeva perfin riluttante a lasciarsi trascinare a questioni di matematica fuor della scuola: meno difficile, sebbene non facile sarebbe stato, lo strappar da lui, valente musicista, una sonata al piano-forte. - Un giorno (e non era il primo) io e i miei tre compagni tardammo alla scuola. Il **Beltrami**, che aveva dovuto aspettare, ce ne rimproverò con un discorsetto pepato, ma che finiva: " Al mondo *siamo* tutti eguali ". La grande modestia aveva fatto smarrire in quel momento all'illustre matematico fino il concetto dell'eguaglianza!

Non dee però credersi che l'indole del **Beltrami** fosse, come suol dirsi, un impasto di latte e miele. Buono sì: ma d'una bontà condita da un pizzico di quel sal manzoniano che piacque tanto al mondo, sebbene fosse la più pungente satira de' suoi costumi. Profondo conoscitore degli uomini, e in ciò simile al Manzoni, il **Beltrami** non li amò forse quanto fu riamato, ove si eccettuino due sole persone: la madre e la consorte, per le quali ebbe tenerezze e abbandoni d'una ingenuità quasi infantile. Fu insomma la sua una bontà serena e senza *dedizioni:* e che questa mia franca opinione trovi riscontro nel sentimento universale, lo prova il fatto, che se molti ricorsero al prof. **Beltrami** per consigli e aiuti scientifici, e n'ebbero a iosa, niuno osò mai tentar le vie del cuore dell'illustre scienziato per isfruttarne la fama a scopo di privato interesse. Del resto, perchè avrebbe dovuto il **Beltrami** rendersi artefice di fortune, spesso immeritate, egli che per sè non cercò mai nulla, e che solo per virtù propria potè riparare ai colpi che la sventura e il livor di parte infersero alla sua prima giovinezza? Nato a Cremona il 16 novembre 1835, aveva studiato tre anni all'Università di Pavia come alunno del Collegio Ghislieri, quando amari casi di famiglia lo costrinsero ad abbandonare le scuole e ad accettare un posto di segretario presso il Direttore delle ferrovie a Verona. Venuto in sospetto al governo austriaco per le opinioni politiche manifestate da' suoi genitori, fu trasferito a Milano, ove nel 1859 lasciò il posto e strinse relazione col Brioschi e col Cremona. Nel 1862, ministro della pubblica istruzione il Mamiani e su proposta del Brioschi suo segretario generale, il giovane **Beltrami**, *senza laurea*, ma già insigne per lavori pubblicati negli " Annali di matematica " fu nominato professore straordinario all'Università di Bologna. Un anno dopo andò a Pisa come professore ordinario, poi tornò a Bologna, quindi fu a Roma, poi a Pavia, poi di nuovo a Roma. Due anni or sono, morto il Brioschi, l'Accademia dei Lincei lo eleggeva a unanimità suo Presidente, e nel giugno passato, durante la prima seduta reale cui presiedette, il **Beltrami** ebbe dalla bocca di S. M. il Re la notizia della sua nomina a senatore. Volle così la Maestà Sua che la solennità della forma e l'opportunità del luogo risarcissero l'ingiustizia di una omissione già troppo a lungo deplorata. - Morì in Roma il 18 del passato febbraio nell'Istituto clinico in Via Milazzo, per esaurimento di forze, il quarto giorno da un'operazione allo stomaco, felicemente riuscita, ma troppo tardi sperimentata.

Alla memoria dell'adorato maestro sia ora concesso al più umile de' suoi discepoli d'intessere una corona, per la quale egli vivo preparò gemme e lauri: corona che non teme gl'insulti del tempo e i ghiacci eterni dell'umano egoismo. - È l'elenco delle sue opere.

G. Frattini.

Pubblicazioni del prof. EUGENIO BELTRAMI.

Intorno ad alcuni sistemi di curve piane. Annali di Matematica. Roma e Milano, 1861. — *Di alcune formole relative alla curvatura delle superficie* (lettera). Ibid. — *Sulla teoria delle sviluppoidi e delle sviluppate.* Ibid. — *Soluzione generale del problema: Rappresentare le parti di una superficie data sopra un'altra superficie apprimenti data, in guisa che la rappresentazione riesca nelle parti infinitissime una figura simile alla figura rappresentata* (traduzione da C. F. Gauss.) Ibid. — *Intorno ad alcune proprietà delle superficie di rivoluzione.* Ibid. 1865. — *Sulla flessione delle superficie rigate.* Ibid. — *Risoluzione d'un problema relativo alla teoria delle superficie gobbe.* Ibid. — *Risoluzione del problema di riportare i punti d'una superficie su quelli d'un piano in modo che le linee geodetiche sieno rappresentate da linee rette.* Ibid. 1866. — *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque.* Ibid. 1867. — *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante.* Ibid. 1868. — *Sopra una Nota del prof. Schlaefli.* Ibid. 1872. — *Sul potenziale mutuo di due sistemi rigidi.* Ibid. 1873. — *Intorno ad alcuni nuovi teoremi di Carlo Neumann.* Ibid. 1880. — *Sulle equazioni generali dell'elasticità.* Ibid. 1881. — *Sul potenziale magnetico ed in particolare sul potenziale elementare elettrodinamico.* Ibid. 1882. — *Soluzione d'un problema relativo alle superficie di 2° ordine.* Giornale di Battaglini. Napoli, 1863. — *Sulle equazioni algebriche.* Ibid. — *Estensione allo spazio di tre dimensioni dei teoremi relativi alle coniche di nove punti.* Ibid. — *Ricerche di analisi applicata alla geometria.* Ibid. 1864-65. — *Di alcune proprietà generali delle curve algebriche.* Ibid. 1866. — *Dimostrazione di due formole del sig. Ossian Bonnet.* Ibid. — *Di una proprietà delle linee a doppia curvatura.* Ibid. 1867. — *Intorno ad una trasformazione di variabili.* Ibid. — *Sulla minima distanza di due rette.* Ibid. — *Saggio d'interpretazione della Geometria non euclidea.* Ibid. 1868. — *Alcune formole per la teoria delle coniche.* Ibid. 1871. — *Intorno ad una trasformazione di Dirichlet.* Ibid. 1872. — *Teorema di geometria pseudosferica.* Ibid. — *Del moto geometrico d'un solido che ruzzola sopra un altro solido.* Ibid. — *Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche.* Ibid. — *Sulle funzioni* *bilineari.* Ibid. 1873. — Nella solennità della nascita di C. F. Gauss, discorso di Ernesto Schering (traduzione). Ibid. 1878. — *Intorno alle coniche di nove punti.* Memorie dell'Accademia di Bologna, 1863. — *Sulle proprietà generali delle superficie d'area minima.* Ibid. 1868. — *Sulla teorica generale dei parametri differenziali.* 1869. — *Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche.* Ibid. 1870. — *Ricerche sulla cinematica dei fluidi.* 1871-74. — *Intorno ad alcuni teoremi di Feuerbach e di Steiner.* Ibid. 1875. — *Esercitazione analitica sopra una proposizione di Steiner.* Ibid. 1877. — *Intorno ad alcuni punti della teoria del potenziale.* Ibid. 1878. — *Ricerche di geometria analitica.* Ibid. 1879. — *Sulla teoria dell'attrazione degli ellissoidi.* Ibid. 1880. — *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche.* Ibid. 1881. — *Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili.* Ibid. 1882. — *Delle funzioni associate e specialmente di quelle della calotta sferica.* Ibid. 1884. — *Sulla teoria dell'induzione magnetica.* Ibid. — *Sull'uso delle coordinate curvilinee nelle teorie del potenziale e dell'elasticità.* Ibid. 1885. — *Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell.* Ibid. 1886. — *Intorno ad alcuni problemi di propagazione del calore.* Ibid. 1887. — *Considerazioni sulla teoria matematica del magnetismo.* Ibid. 1891. — *Due Note sulla teoria delle cubiche gobbe.* Rendiconti dell'Istituto Lombardo. Milano, 1868. — *Sulla teoria delle linee geodetiche.* Ibid. — *Intorno ad un nuovo elemento introdotto dal Sig. Christoffel nella teoria delle superficie.* Ibid. 1869. — *Sulla teoria analitica della distanza.* Ibid. 1872. — *Di un sistema di formole per lo studio delle linee e delle superficie ortogonali.* Ibid. — *Considerazioni sopra una legge potenziale.* Ibid. 1876. — *Intorno ad alcune questioni di elettrostatica.* Ibid. 1877. — *Intorno ad alcune proposizioni di Clausius.* Ibid. — *Intorno ad un caso di moto a due coordinate.* Ibid. 1878. — *Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse.* Ibid. — *Sull'equazione pentaedrale delle superficie di 3° ordine.* Ibid. 1879. — *Intorno ad una formola integrale.* Ibid. — *Intorno ad un teorema di Abel.* Ibid. 1880. — *Intorno ad alcune serie trigonometriche.* Ibid. — *Sulla teoria della scala diatonica.* Ibid. 1882. — *Sulla teoria dei conduttori elettrizzati.* Ibid. — *Sulla teoria degli strati magnetici.* Ibid. 1883. — *Sull'equivalenza delle distribuzioni magnetiche e galvaniche.* Ibid. — *Sulla teoria del potenziale.* Ibid. — *Intorno ad un problema relativo alla teoria delle correnti stazionarie.* Ibid. 1884. — *Sulla rappresentazione delle forze newtoniane per mezzo di forze elastiche.* Ibid. — *Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici.* Ibid. 1885. — *Sulla teoria delle onde.* Ibid. 1886. — *Sulle funzioni sferiche d'una variabile.* Ibid. 1887. — *Sulle funzioni complesse.* Ibid. — *Considerazioni idrodinamiche.* Ibid. 1889. — *Sul principio di Huygens.* Ibid. — *Due Note intorno al mezzo elastico di Green.* Ibid. 1891. — *Sulle funzioni complesse.* Ibid. 1894. — *Sulle equazioni dinamiche di Lagrange.* Ibid. 1895. — *Sulla teoria delle funzioni sferiche.* Ibid. 1896. — *Sulla determinazione della densità elettrica alla superficie dei corpi conduttori.* Atti della R. Accademia dei Lincei. Roma, 1877. — *Sull'attrazione d'un anello circolare od ellittico.* Ibid. 1880. — *Un precursore italiano di Legendre e di Lobatchewsky.* Ibid. 1889. — *Sull'estensione del principio di d'Alembert all'elettrodinamica.* Ibid. — *Sull'espressione analitica del principio di Huygens.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem. 1892. — *Osservazioni su una Nota del prof. Morera.* Ibid. — *Sui potenziali termodinamici.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem. 1895. — *Sull'espressione data da Kirchhoff al principio di Huygens.* R. Accademia dei Lincei, 2° sem. 1895. — *Sul teorema di Kirchhoff.* Ibid. — *A proposito di una nuova ricerca del prof. C. Neumann.* Ibid. — *Commemorazione di F. Brioschi.* Ibid. (Rendiconto dell'adunanza solenne del 12 giugno 1897.) — *Note* *fisico-matematiche.* Atti del Circolo Matematico di Palermo, 1889. — *Sulla funzione potenziale della circonferenza.* Ibid. — *Sulla teoria generale delle onde piane.* Ibid. 1891. — *Sur la déformation d'un milieu continu.* Comptes-rendus dell'Accademia delle scienze di Parigi, 1889. — *Quelques remarques au sujet des fonctions sphèriques.* Ibid. 1890. — *Enrico Betti* (commemorazione). Ibid. 1892. — *Discorso sulla vita e sulle opere di Domenico Chelini.* Collectanea Matematica. Milano, Hoepli, 1881. — *Sulla teoria degli assi di rotazione.* Ibid. — *Sur la courbure de quelques lignes singulières.* Nouvelles Annales de Mathèmatiques di Parigi, 1864. — *Zur Theorie des Krummungsmaasses.* Mathematische Annalen di Lipsia, 1869. — *Sulla teoria matematica dei solenoidi elettrodinamici.* Nuovo Cimento, Pisa, 1872. — *Formules fondamentales de cinématique dans les espaces de courbure constante.* Bullettin de Darboux, Parigi 1876. — *Sulle funzioni cilindriche.* Atti della R. Accademia di Torino, 1881. — *Sur les couches de niveau électromagnétiques.* Acta mathematica di Stoccolma, 1883.

DI UN GRUPPO NOTEVOLE DI SOSTITUZIONI LINEARI

nella teorica delle forme quadratiche

Nelle formole che seguiranno, le lettere denotano numeri interi.

Consideriamo la forma quadratica

$$x^2 - Dy^2$$

e supponiamo che D, oltrechè intero, sia positivo e non sia quadrato perfetto. Poichè per x ed y interi e positivi la forma assume tutti i valori che assumerebbe per x ed y interi, positivi o negativi, dividiamo il quarto di piano, o angolo retto, in quadrati di lato eguale all'unità, e considerando x ed y, supposti interi e positivi, come l'ascissa e l'ordinata di un vertice di quadrato o *nodo*, riguardiamo quel nodo come latore del valore che la forma assume in esso. Si avrà così entro l'angolo retto la più semplice immagine del sistema dei numeri interi contenuti nella forma.

Una parte dell'angolo retto $\Big($ed è la parte compresa fra l'asse delle x e la direzione che, uscendo dall'origine delle coordinate, è inclinata al detto asse di un angolo la cui tangente trigonometrica è $\frac{1}{\sqrt{D}}\Big)$ è occupata dai numeri interi e positivi contenuti nella forma. Questa parte, e propriamente il sistema de' suoi nodi, verrà detta *campo intero e positivo della forma.* Ivi un dato numero N o manca, o se vi è, si trova ripetuto in infiniti nodi, corrispondenti alle infinite soluzioni dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N$$

in numeri interi e positivi. Questi infiniti nodi si possono ordinare secondo i valori ascendenti delle loro coordinate (le quali crescono contemporaneamente, come si scorge dalla precedente equazione) *dicendo nodo minimo* quello di coordinate minime, che cioè corrisponde alla soluzione minima dell'equazione. Ordinati in tal guisa i nodi di uno stesso numero N, essi rimangono altresì ordinati secondo la grandezza dell'*argomento,* cioè dell'angolo che il raggio vettore del nodo forma con l'asse delle x. Ciò si vede dall'equazione precedente posta sotto la forma

$$D\left(\frac{y}{x}\right)^2=1-\frac{N}{x^2},$$

dopo avere osservato che $\frac{y}{x}$ è la tangente trigonometrica dell'argomento. L'argomento del nodo minimo di un numero sarà perciò il minimo fra gli argomenti di tutti i nodi relativi ad esso numero.

Nel sistema dei nodi che costituiscono il campo intero e positivo della forma potremo così distinguere il sistema dei nodi minimi *(sistema minimo).* Fra i numeri interi e positivi contenuti nella forma e i punti o nodi del sistema minimo esiste poi corrispondenza univoca, in quanto a ciascun numero contenuto nella forma corrisponde uno e un sol nodo del sistema minimo, e a ogni nodo del sistema minimo uno e un sol numero contenuto nella forma.

Qualunque sostituzione lineare intera e a coefficienti interi, applicata a un nodo del campo intero e positivo della forma, porta quel nodo in un altro nodo dello stesso campo, o in un punto che è fuor del campo, pur essendo nodo dell'intero piano diviso in quadrati di lato eguale all'unità. Possiamo perciò dire che essa trasforma il detto campo in sè medesimo, nel senso, che il trasformato di un nodo del campo è ancor nodo del campo stesso, se gli appartiene, e non ne è portato fuori per effetto della trasformazione. Avviene nondimeno che il trasformato di un nodo minimo, se pure appartiene al campo, non è, generalmente parlando, un altro nodo minimo. Si può dunque domandare se tra le infinite sostituzioni lineari intere e a coefficienti interi ve n'ha un gruppo di così fatto che trasformino il sistema minimo in sè medesimo, che cioè trasformino i nodi minimi in altri nodi parimenti minimi, *purchè contenuti nel campo intero e positivo della forma.* (È sottintesa, almeno per alcune sostituzioni del gruppo, la condizione che vi siano effettivamente dei nodi minimi i cui trasformati appartengano a quest'ultimo campo.) Ho trovato che un gruppo di siffatte sostituzioni esiste, come è dichiarato dal seguente teorema.

TEOREMA. — *Se*

$$(p_1, q_1) \qquad (p_2, q_2)\,\ldots\ldots \qquad (p_n, q_n)$$

sono coordinate di nodi relativi a numeri primi, le sostituzioni lineari del gruppo

$$X_0+Y_0\sqrt{D}=(p_1-q_1\sqrt{D})\dots(p_n-q_n\sqrt{D})(x_0+y_0\sqrt{D})\ (*)$$

trasformano in sè medesimo il sistema dei nodi minimi contenuti nel campo intero e positivo della forma

$$x^2-Dy^2.$$

Dimostrazione. — Indicando con P un numero primo contenuto nella forma, sia

$$p^2-Dq^2=P \tag{1}$$

con p e q interi e positivi. Si consideri la sostituzione lineare

$$X_0+Y_0\sqrt{D}=(p-q\sqrt{D})(x_0+y_0\sqrt{D}), \tag{2}$$

dove x_0 e y_0 indicano le coordinate del punto che si trasforma e X_0, Y_0 quelle del suo trasformato. Se (x_0, y_0) appartiene al campo intero e positivo della forma, notiamo subito che X_0 è essenzialmente positivo, che cioè

$$px_0>Dqy_0.$$

Se infatti

$$x_0^2-Dy_0^2=N,$$

la precedente disuguaglianza si traduce facilmente nell'altra

$$Np^2+DPy_0^2>0,$$

che è evidentemente soddisfatta.

Invece Y_0 può essere positiva o negativa, secondochè py_0 supera qx_0 o ne è minore. Se Y_0 è negativa, il nodo (x_0, y_0) è portato fuor del campo intero e positivo della forma, e non v'è da dir altro.

Consideriamo dunque il primo caso (Y_0 positiva) e supponiamo che il punto (x_0, y_0), al quale si applica la trasformazione, appartenga al sistema minimo, che cioè (x_0, y_0) sia la soluzione minima dell'equazione

$$x^2-Dy^2=N. \tag{3}$$

Dicò che anche (X_0, Y_0) è soluzione minima, e naturalmente dell'equazione

$$x^2-Dy^2=PN, \tag{4}$$

(*) Si indicano con x_0, y_0 le coordinate del punto che si trasforma e con X_0, Y_0 quelle del suo trasformato, e s'intendono eguagliati i coefficienti totali di $\sqrt{D}$ e le rimanenti parti dei due membri, a fin di avere X_0 e Y_0 espressi linearmente mediante x_0 e y_0.

ottenuta moltiplicando la (2) per quella che se ne deriva cambiandovi $\sqrt{D}$ in $-\sqrt{D}$. Dalla (2) si ricava

$$x_0 + y_0\sqrt{D} = \frac{(X_0 + Y_0\sqrt{D})(p + q\sqrt{D})}{P} \tag{5}$$

dove tutte le lettere indicano numeri positivi, tale essendo anche Y_0, per ipotesi. Se pertanto (X_0, Y_0) non fosse soluzione minima della (4) supponiamo che (X_1, Y_1) fosse tale. Si avrebbe

$$X_1 < X_0 \ , \ Y_1 < Y_0.$$

Si consideri in tal caso il quoziente

$$\frac{(X_1 + Y_1\sqrt{D})(p \pm q\sqrt{D})}{P}.$$

È evidente che, comunque si disponga in esso del doppio segno, i valori assoluti della parte razionale e del coefficiente di $\sqrt{D}$ saranno risp. minori della parte intera e del coefficiente di $\sqrt{D}$ che figurano nel secondo membro della (5), minori cioè di x_0 e di y_0. Se dunque proveremo che, ove si disponga convenientemente del doppio segno, la parte razionale e il coefficiente di $\sqrt{D}$ nel detto quoziente sono interi, che cioè

$$\frac{(X_1 + Y_1\sqrt{D})(p \pm q\sqrt{D})}{P} = x_1 + y_1\sqrt{D}, \tag{6}$$

avremo provato l'asserto. Perchè, ricavandosi da quest'ultima eguaglianza

$$x_1^2 - Dy_1^2 = N, \tag{7}$$

rimarrebbe stabilita per la (3) l'esistenza di una soluzione con numeri minori in valore assoluto di x_0 e di y_0, e ciò contradice all'ipotesi fatta, che cioè (x_0, y_0) è soluzione minima.

Dimostriamo dunque che x_1 e y_1 sono interi. A tal fine consideriamo l'eguaglianza

$$X_1^2 - DY_1^2 = PN,$$

e dopo averla moltiplicata per q^2, sostituiamovi il valore di Dq^2 ricavato dalla (1). Avremo:

$$q^2 X_1^2 - (p^2 - P) Y_1^2 = PN q^2.$$

Dalla quale si deduce che la differenza

$$p^2Y_1 - q^2 X_1^2 = (pY_1 + qX_1)(pY_1 - qX_1)$$

è divisibile per P. Ma P è primo: dunque uno almeno dei due binomi

$$pY_1 \pm qX_1$$

è divisibile per P. Ciò prova chè y_1 è intero, ove nella (6) si disponga convenientemente del doppio segno. Essendo intero y_1, la (7) mostra che è intero anche x_1.

Così è provato che, se la trasformazione

$$X_0 + Y_0\sqrt{D} = (p - q\sqrt{D})(x_0 + y_0\sqrt{D})$$

porta un nodo minimo in un altro nodo del campo intero e positivo, anche questo secondo nodo è minimo.

Consideriamo ora la trasformazione

$$X_0 + Y_0\sqrt{D} = (p_1 - q_1\sqrt{D})(p_2 - q_2\sqrt{D})(x_0 + y_0\sqrt{D})$$

prodotto di due trasformazioni della specie sopra considerata. È facile dimostrare che anch'essa gode della proprietà di trasportare i nodi minimi in altri nodi parimenti minimi. Perchè, se nel prodotto

$$(p_2 - q_2\sqrt{D})(x_0 + y_0\sqrt{D}) = x'_0 - y'_0\sqrt{D}$$

il coefficiente di $\sqrt{D}$ è negativo, tale sarà evidentemente anche nel prodotto

$$(p_1 - q_1\sqrt{D})(x'_0 - y'_0\sqrt{D})$$

e in tal caso il punto (x_0, y_0) sarà portato fuor del campo intero e positivo della forma. Se poi quel primo prodotto sarà della forma $x'_0 + y'_0\sqrt{D}$, nel qual caso il nodo (x'_0, y'_0) sarà minimo, come fu dimostrato, potrà ripetersi del prodotto

$$(p_1 - q_1\sqrt{D})(x'_0 + y'_0\sqrt{D})$$

ciò che già si disse in proposito del prodotto

$$(p - q\sqrt{D})(x_0 + y_0\sqrt{D}).$$

Così continuando, si giunge a dimostrare che la sostituzione lineare

$$(p_1 - q_1\sqrt{D})(p_2 - q_2\sqrt{D}) \ldots (p_n - q_n\sqrt{D})(x_0 + y_0\sqrt{D}),$$

qualunque sia il numero de' suoi fattori costanti della forma $p - q\sqrt{D}$, gode della proprietà di trasformare il sistema minimo in sè medesimo.

Rimane da dimostrare che il trovato gruppo contiene trasformazioni *effettive*, cioè tali che trasformano effettivamente dei nodi minimi in altri nodi contenuti nel campo intero e positivo della forma. Consideriamo a tal fine la trasformazione

$$(p - q\sqrt{D})\,(x_0 + y_0\sqrt{D}),$$

contenuta nel gruppo. La condizione perchè essa sia effettiva sul nodo (x_0, y_0) relativo ad N, è, come si vide,

$$py_0 - qx_0 > 0$$

ossia

$$\frac{q}{p} < \frac{y_0}{x_0}. \tag{8}$$

Questa condizione non può essere soddisfatta da più di un sistema di valori delle costanti p e q relative ad uno stesso numero primo P. Perchè, se fosse nel medesimo tempo

$$py_0 - qx_0 > 0$$
$$p'y_0 - q'x_0 > 0,$$

si avrebbe

$$(p - q\sqrt{D})\,(x_0 + y_0\sqrt{D}) = X_0 + Y_0\sqrt{D}$$
$$(p' - q'\sqrt{D})\,(x_0 + y_0\sqrt{D}) = X_0 + Y_0\sqrt{D},$$

dove (X_0, Y_0) è la soluzione minima dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = PN,$$

e ne risulterebbe

$$p = p' \qquad q = q'.$$

Da questa osservazione e dalla (8) risulta che l'unico sistema di valori ammissibile per le costanti p e q relative al numero primo P è quello che rende minima $\frac{q}{p}$, cioè quello relativo alla soluzione minima dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = P.$$

Ma in questo caso $\frac{q}{p}$ è la tangente trigonometrica dell'argomento minimo (o semplicemente argomento) del numero primo P. La (8) pertanto ci manifesta che *la trasformazione*

$$(p - q\sqrt{D})\,(x_0 + y_0\sqrt{D})$$

è effettiva su tutti qué nodi minimi il cui argomento supera l'argomento del numero primo P. Cosicchè, volendo che la trasformazione sia effettiva su quali e quanti nodi si voglia, basterà determinare P in modo che il suo argomento sia minore del minimo degli argomenti relativi a que' nodi. E ciò si può fare, potendosi sempre trovare de' numeri primi di argomento piccolo quanto si vuole. Se per esempio si considera la forma

$$z^2 - D$$

la quale contiene infiniti numeri primi (perchè D non è quadrato perfetto) si potrà dare a z un valore z_0 tale che $z_0^2 - D$ rappresenti un numero primo, e scegliere quel valore tanto grande, che $\frac{1}{z_0}$ (tangente trigonometrica dell'argomento del numero primo rappresentato) sia piccola quanto si vuole.

Del resto l'effettività del gruppo è anche dimostrata da questa semplicissima riflessione: Se (p, q) (p', q') sono coordinate di nodi minimi relativi a numeri primi, o la sostituzione $p - q\sqrt{D}$ sarà effettiva sul nodo (p', q') o pure la sostituzione $p' - q'\sqrt{D}$ sarà effettiva sul nodo (p, q), perchè in uno dei due prodotti

$$(p - q\sqrt{D})\,(p' + q'\sqrt{D})$$
$$(p' - q'\sqrt{D})\,(p + q\sqrt{D})$$

il coefficiente di $\sqrt{D}$ è certamente positivo.

NOTA. — Le cose dette per la forma

$$x^2 - Dy^2$$

a determinante positivo, valgono altresì, con lievi varianti, per la forma a determinante negativo

$$x_2 + Dy^2.$$

In questo caso, ove per soluzione minima dell'equazione

$$x^2 + Dy^2 = N$$

s'intenda quella nella quale il valore della y è minimo (e conseguentemente massimo quello della x) e si denoti con i l'unità immaginaria, si giunge al

TEOREMA. — *Se*

$$(p_1, q_1) \quad (p_2, q_2) \ldots \quad (p_n, q_n)$$

sono coordinate di nodi relativi a numeri primi, le sostituzioni lineari del gruppo

$$X_0 + iY_0\sqrt{D} = (p_1 - iq_1\sqrt{D}) \ldots (p_n - iq_n\sqrt{D})(x_0 + iy_0\sqrt{D})$$

trasformano in sè medesimo il sistema dei nodi minimi contenuti nel campo intero e positivo della forma

$$x^2 + Dy^2.$$

Da questo teorema e dal precedente si derivano sistematicamente e per via elementare molte verità (in parte cognite) riferentisi alla rappresentazione dei numeri mediante la forma $x^2 \pm Dy^2$, come mostrerò in un altro lavoro.

G. FRATTINI.

SULLA FORMA CHE ASSUMONO

le relazioni di proiettività fra due spazi S_{n-1} S'_{n-1} nel caso dell'omologia

---

Se S_{n-1} S'_{n-1}, sono due spazi lineari di specie $(n-1)$ proiettivi, le coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ di due punti corrispondenti sono legate da n relazioni della forma

$$\text{(I)} \qquad \rho x'_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n$$

$(i = 1, 2, 3, \ldots n)$;

e le coordinate di due iperpiani corrispondenti $u_1, u_2, \ldots, u_n$; $u'_1, u'_2, \ldots, u'_n$ sono legate dalle n relazioni

$$\text{(II)} \qquad \sigma u_i = a_{1i} u'_1 + a_{2i} u'_2 + \ldots + a_{ni} u'_n$$

$(i = 1, 2, 3, \ldots n)$; essendo ρ, σ fattori di proporzionalità.

È noto inoltre che, se S_{n-1}, S'_{n-1} sono sovrapposti e gli elementi fondamentali sono gli stessi per i due spazi, i punti uniti sono quelli le cui coordinate verificano le equazioni simultanee

$$\text{(III)} \qquad a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + (a_{ii} - \rho) x_i + \ldots + a_{in} x_n = 0$$

$(i = 1, 2 \ldots n)$;

e gl'iperpiani uniti sono quelli le cui coordinate verificano le equazioni simultanee

$$\text{(IV)} \qquad a_{1i} u_1 + a_{2i} u_2 + \ldots + (a_{ii} - \sigma) u_i + \ldots + a_{ni} u_n = 0$$

$(i = 1, 2 \ldots n)$;

quando si ponga in esse in luogo di ρ e σ una qualunque delle radici dell'equazione

$$\text{(V)} \qquad \Delta(y) = \begin{vmatrix} a_{11} - y & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - y & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} - y \end{vmatrix} = 0.$$

Ora si sa che la proiettività dicesi omologia, quando si hanno infiniti punti uniti, tutti i punti di un iperpiano π (iperpiano d'omologia), ed infiniti iperpiani uniti, tutti quelli che passano per un punto P (centro d'omologia); e che ciò accade allora e soltanto allora che esiste una radice k dell'equazione (V) per la quale si annullino tutti i minori di secondo ordine del determinante $\Delta(y)$.

L'equazione dell'iperpiano d'omologia è una qualunque delle (III) e l'equazione del centro d'omologia una qualunque delle (IV), quando si faccia

$$\rho = \sigma = k.$$

Da quanto abbiamo detto risulta che, se indichiamo con $\theta_1, \theta_2 \ldots, \theta_n$ le coordinate dell'iperpiano d'omologia, queste coordinate dovranno essere proporzionali ad $a_{i1}\, a_{i2} \ldots (a_{ii} - k) \ldots a_{in}$, e quindi si avranno le relazioni di proporzionalità

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} z_1\,\theta_1 = a_{11} - k & z_1\,\theta_2 = a_{12} & \ldots\, z_1\,\theta_n = a_{1n} \\ z_2\,\theta_1 = a_{21} & z_2\,\theta_2 = a_{22} - k & \ldots\, z_2\,\theta_n = a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ z_n\,\theta_1 = a_{n1} & z_n\,\theta_2 = a_{n2} & \ldots\, z_n\,\theta_n = a_{nn} - k, \end{cases}$$

dalle quali risulta in modo manifesto che $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sono le coordinate del centro di omologia.

Dalle (VI) si ricava

$$a_{ih} = z_i\,\theta_h \qquad i \lesseqgtr h$$
$$a_{ii} = z_i\,\theta_i + k;$$

e allora le relazioni di proiettività (I) assumono la forma

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} \rho x'_1 = kx_1 + z_1\,\theta_x \\ \rho x'_2 = kx_2 + z_2\,\theta_x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho x'_n = kx_n + z_n\,\theta_x, \end{cases}$$

essendo $\theta_x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \ldots + \theta_n\, x_n$;

e le relazioni (II) assumono la forma

$$\text{(VIII)} \quad \begin{cases} \sigma u_1 = ku'_1 + \theta_1\, Z_{u'} \\ \sigma u_2 = ku'_2 + \theta_2\, Z_{u'} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma u_n = ku'_n + \theta_n\, Z_{u'}, \end{cases}$$

essendo $Z_{u'} = z_1 u'_1 + z_2 u'_2 + \ldots + z_n\, u'_n$.

Viceversa è manifesto che qualunque sostituzione lineare della forma (VII) rappresenta un'omologia, perchè tutti i punti dell'iperpiano

$$\theta_x = 0$$

sono punti uniti; tutti gli iperpiani passanti per il punto

$$Z_{u'} = 0$$

sono iperpiani uniti.

Dunque si conclude che:

Nel caso dell'omologia le relazioni di proiettività assumono la forma (VII); $(z_1, z_2 \ldots z_n)$ *è il centro d'omologia,* $(\theta_1, \theta_2 \ldots \theta_n)$ *l'iperpiano d'omo-*

logia; la forma (VII) *della sostituzione lineare* (I) *è caratteristica dell'omologia.*

Il determinante della sostituzione lineare nel caso dell'omologia diventa, come si trova facilmente,

$$k^n + k^{n-1}\theta_z ,$$

e l'equazione (V)

$$(k-y)^n + (k-y)^{n-1}\theta_z = 0,$$

che si trova subito osservando che il determinante $\Delta(y)$ si deduce dal determinante della sostituzione, ponendo $(k-y)$ in luogo di k.

L'equazione (IX) ammette la radice $y=k$ multipla d'ordine $(n-1)$ e quindi ammetterà un'altra radice, distinta da k, tutte le volte che $\theta_z \gtrless 0$; a questa radice corrisponde, come è facile vedere, il punto unito P, centro d'omologia.

Per $n=4$ si ha l'omologia nello spazio ordinario; (z_1, z_2, z_3, z_4) è il centro d'omologia, $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ il piano d'omologia. Per $n=3$ si ha l'omologia nel piano, (z_1, z_2, z_3) è il centro d'omologia, $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ l'asse d'omologia.

GIULIO MONTI.

SOPRA ALCUNI INTEGRALI INDEFINITI(*)

Il sig. E. BARISIEN, in un suo articolo inserito nel *Periodico di Matematica*, fasc. IV, gennaio-febbraio, 1900, sotto il titolo " Sull'integrale $\int \mathrm{tang}^n\varphi \, . \, d\varphi$, „ vorrebbe indicare un metodo utile al calcolo del medesimo, senza trasformarlo nell'integrale di una funzione razionale. Ora, poichè i procedimenti, del tutto distinti, che vengono ivi seguiti nei due casi particolari di $n=3$, $n=4$ (i soli esaminati, mentre il caso generale non viene trattato affatto) non raggiungono, a parer mio, altro scopo che quello di rendere complicata una questione di tale semplicità, credo opportuno far rilevare come si possa ridurre immediatamente il calcolo dell'integrale indefinito $\int \mathrm{tang}^n x \, . \, dx$ a quello dell'altro $\int \mathrm{tang}^{n-2} x \, . \, dx$, qualunque sia l'esponente n. Ed allora, con ripetute applicazioni della *formola di riduzione* che risulta, perverremo alla fine all'uno od all'altro degli integrali elementari

$$\int dx = x + c, \qquad \int \mathrm{tang}\, x \, dx = -\log\cos x + \mathrm{C},$$

secondo che n è, rispettivamente, pari o dispari.

(*) Il sig. ing. Bardelli di Milano ci ha comunicate delle osservazioni sostanzialmente eguali a quelle contenute nel presente articolo. (Nota di G. LAZZERI).

Basta perciò osservare che, essendo

$$d \operatorname{tang} x = (1 + \operatorname{tang}^2 x)\, dx,$$

si ha

$$\operatorname{tang}^n x\, dx = \operatorname{tang}^{n-2} x d \operatorname{tang} x - \operatorname{tang}^{n-2} x\, dx.$$

E quindi, se è $n > 1$, risulterà

$$\int \operatorname{tang}^n x dx = \frac{1}{n-1} \operatorname{tang}^{n-1} x - \int \operatorname{tang}^{n-2} x\, dx.$$

Ne segue che

$$\int \operatorname{tang}^{2m} x dx = \frac{1}{2m-1} \operatorname{tang}^{2m-1} x - \frac{1}{2m-3} \operatorname{tang}^{2m-3} x + \frac{1}{2m-5} \operatorname{tang}^{2m-5} x - \dots$$
$$\dots + (-1)^{m-1} \operatorname{tang} x + (-1)^m x + C$$

$$\int \operatorname{tang}^{2m+1} x dx = \frac{1}{2m} \operatorname{tang}^{2m} x - \frac{1}{2m-1} \operatorname{tang}^{2m-2} x + \frac{1}{2m-4} \operatorname{tang}^{2m-4} x - \dots$$
$$\dots + \frac{(-1)^{m-1}}{2} \operatorname{tang}^2 x + (-1)^{m-1} \log \cos x + C.$$

In modo analogo si procederà pel calcolo di $\int \cot^n x\, dx$, osservando che si ha

$$d \cot x = -(1 + \cot^2 x)\, dx$$

e quindi

$$\cot^n x\, dx = -\cot^{n-2} x \,.\, d \cot x - \cot^{n-2} x\, dx.$$

Perciò, se è $n > 1$, otterremo

$$\int \cot^n x\, dx = -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x\, dx.$$

Applicando ripetutamente questa formola di riduzione, perverremo all'uno od all'altro degli integrali

$$\int dx = x + C, \qquad \int \cot x\, dx = \log \operatorname{sen} x + C$$

secondo che l'esponente n è pari o dispari. Avremo dunque

$$\int \cot^{2m} x dx = -\frac{1}{2m-1} \cot^{2m-1} x + \frac{1}{2m-3} \cot^{2m-3} x - \dots$$
$$\dots + (-1)^m \cot x + (-1)^m x + C,$$

$$\int \cot^{2m-1} x\, dx = -\frac{1}{2m} \cot^{2m} x + \frac{1}{2m-2} \cot^{2m-2} x - \dots$$
$$\dots + \frac{(-1)^m}{2} \cot^2 x + (-1)^m \log \operatorname{sen} x + C. \; (*)$$

Pavia, 10 febbraio 1900.

M. Chini.

(*) Le suddette formole di riduzione, coll'uso delle quali si è ottenuto il valore dei due tipi di integrali considerati, si trovano, per esempio, nei miei *Esercizi di Calcolo infinitesimale* (Livorno, Giusti, 1893) a pag. 138; dove sono pure (pagg. 142-43-44) quelle che servono al calcolo degli integrali

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx, \qquad \int \cos^n x\, dx, \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^n x}, \qquad \int \frac{dx}{\cos^n x}.$$