$|\, A_m \,|$ a destra delle permutazioni che si ottengono eseguendo la O_{m-1} sulla $|\, A_1 \,|\, A_2 \,|\, \ldots \,|\, A_{m-1} \,|$. E ciò anche se gli elementi diversi della $|\, A_1 \,|\, \ldots \,|\, A_m \,|$ non sono numeri interi consecutivi.

Sia ora la matrice:

$$T \equiv \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

di dimensioni $\longrightarrow n$ coi coefficienti $r_1, \ldots r_n$, ed $\updownarrow m$ coi coefficienti $r_1, \ldots r_m$. Diciamo O_m l'operazione colla quale dalla seconda permutazione di una combinazione relativa a tal matrice si possono dedurre le seconde permutazioni delle combinazioni rimanenti. La descrizione della O_m è la seguente. 1°. Si considerano gli elementi diversi della permutazione sulla quale si deve eseguire la O_m e si formano quelle delle combinazioni r_m ad r_m di essi (r_m è il numero degli elementi dell'ultimo gruppo) che contengono gli elementi comuni a tutti i gruppi; se poi non vi sono elementi comuni a tutti i gruppi, si formano tutte le combinazioni r_m ad r_m degli elementi differenti della suddetta permutazione. 2°. Si eseguisce su essa l'operazione O_{m-1}. 3°. In una delle permutazioni già formate si scambia un elemento dell'ultimo gruppo con uno dei gruppi rimanenti in modo da ottenere una permutazione nella quale l'ultimo gruppo sia una delle suddette permutazioni r_m^{arie}, diversa però da quelle che compaiono, quali ultimo gruppo, nelle permutazioni già formate. 4°. Si eseguisce la O_{m-1} sulla permutazione ottenuta ecc... e così si continua, finchè non si è potuto accertare che mediante uno scambio da eseguirsi tra un elemento del 4° gruppo di una delle permutazioni già formate ed uno dei gruppi rimanenti, è impossibile ottenere una permutazione, nella quale il 4° gruppo sia una delle combinazioni r_m^{arie} suddette, diversa da quelle che già hanno figurato quale 4° gruppo in una delle permutazioni formate.

Se interessa determinare il segno di ciascuna permutazione, che è anche quello della combinazione corrispondente, basterà rammentare che esso è quello di $(-1)^{\beta}$, β essendo il numero delle inversioni che gli elementi di ciascun gruppo fanno con quelli dei gruppi che esso ha a destra. Il segno della 1ª permutazione si determinerà calcolando direttamente il numero delle inversioni in essa contenute. Il segno delle permutazioni rimanenti si potrà determinare ricorrendo ai criteri già enunciati, giacchè ciascuna di esse si deduce da una permutazione di segno noto, (la 2ª dalla 1ª, la 3ª dalla 1ª o dalla 2ª ecc.), mediante lo scambio di due elementi appartenenti a gruppi differenti. E sarà conveniente per determinare il segno con maggiore rapidità che tali gruppi siano possibilmente contigui.

Alba, luglio 1902.

(continua) Dott. Niccolò Traverso.

UN PROBLEMA SULLA PARTIZIONE DEI NUMERI

1. Un metodo generale per la enumerazione delle soluzioni intere non negative di una equazione lineare indeterminata

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=\lambda.$$

a coefficienti $a_1, a_2, \ldots a_n, \lambda$ interi non negativi, è indicato da Eulero: (*) Il numero delle soluzioni della detta specie è dato dal coefficiente di v^r nello sviluppo in serie della funzione di v:

$$\frac{1}{1-v^{a_1}}\frac{1}{1-v^{a_2}}\cdots\frac{1}{1-v^{a_n}}.$$

In particolare si riconosce subito che la equazione

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\lambda \tag{1}$$

ammette tante soluzioni intere non negative quante sono le unità dell'n^{mo} numero figurato d'ordine λ, ossia

$$\binom{n+\lambda-1}{\lambda}.$$

Se non che la enumerazione medesima, anche nel caso particolare (1), offre qualche difficoltà se si assoggettano i numeri interi x_i alle condizioni

$$x_i \leqq i \quad (i=1,2,3,\ldots n). \tag{2}$$

Del caso generale si sono occupati abbastanza specialmente gli inglesi Sylvester, Cayley, Mac-Mahon ed altri. Sembra però che il caso particolare accennato sotto le condizioni (2) non sia stato finora considerato, e siccome la conoscenza della sua soluzione torna utile in qualche applicazione, io mi propongo di trattarlo in questa nota.

2. Indichiamo con A_λ il numero delle soluzioni intere non negative della (1) soddisfacenti alle condizioni (2). Evidentemente A_λ è il coefficiente di v^λ nello sviluppo del prodotto

$$(1+v)(1+v+v^2)(1+v+v^2+v^3)\ldots(1+v+v^2+\ldots+v^n),$$

e si può porre

$$(1+v)(1+v+v^2)(1+v+v^2+v^3)(1+v+v^2+\ldots+v^n)=\sum_{r=0}^{r=N}A_rv^r, \tag{3}$$

(*) V. A. Le Besgue, *Exercices d'Analyse numerique*. Leiber et Faraguet, Paris, 1859.

con

$$N = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La difficoltà accennata sta precisamente nello investigare la legge di formazione dei coefficienti del polinomio $\Sigma A_r v^r$, perchè il procedimento diretto della moltiplicazione non si presta a fornirla. Riuscendo invece con altri processi alla determinazione dei coefficienti A_r si perviene indirettamente alla esecuzione del prodotto (3).

3. Fin da ora si possono riconoscere alcune proprietà dei numeri interi A_r.

Dapprima si operi la sostituzione $v' = \frac{1}{v}$ nella identità (3) e poscia si moltiplichino i due membri per v^N; si ottiene

$$\Sigma A_r v^{N-r} = \Sigma A_r v^r ,$$

da cui segue

$$A_r = A_{N-r} .$$

In particolare è

$$A_0 = A_N = 1.$$

Dunque: *La equazione* (1) *ha tante soluzioni intere non negative soddisfacenti alle condizioni* (2), *quante ne ha l'altra*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = N - \lambda$$

della medesima specie.

In secondo luogo facendo $v = 1$ nella (3), risulta

$$\sum_{r=0}^{r=N} A_r = \underline{|n+1},$$

da cui, osservando che le condizioni (2) portano alla limitazione $0 \leq \lambda \leq N$, si conclude che: *Le equazioni* (1) *ammettono tutte insieme soltanto* $\underline{|n+1}$ *soluzioni intere non negative soddisfacenti alle condizioni* (2).

L'ultima relazione insieme con quelle precedenti permette di calcolare la somma $\sum_{r=0}^{r=N} rA_r$. Invero per mezzo della eguaglianza $A_r = A_{N-r}$, si ha

$$\sum_{r=0}^{r=N} rA_r = \frac{1}{2} \Sigma \sum_{r=0}^{r=N} A_r \, N$$

e quindi

$$\sum_{r=0}^{r=N} rA_r = \frac{1}{4} \underline{|n+1} \, n(n+1)$$

che riceverà una notevole interpretazione.

4. Veniamo ora alla determinazione dei coefficienti A_r. Si metta la (3) sotto la forma

$$(1-v)(1-v^2)(1-v^3)\ldots(1-v^{n+1}) = (1-v)^{n+1} \sum_{r=0}^{r=N} A_r v^r,$$

e si derivino logaritmicamente i due membri, tenendo presenti gli sviluppi in serie

$$\frac{d}{dv}\log(1-v^k) = -\sum_{r=1}^{r=\infty} kv^{kr-1}, \quad (k=1, 2, \ldots, n+1)$$

assolutamente convergenti per $|v| < 1$; si ottiene l'altra identità

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} v^{r-1} + 2\sum_{r_1=1}^{r_1=\infty} v^{2r_1-1} + 3\sum_{r_2=1}^{r_2=\infty} v^{3r_2-1} + \ldots + (n+1)\sum_{r_n=1}^{r_n=\infty} v^{(n+1)r_n-1} =$$

$$= (n+1)\sum_{r=1}^{r=\infty} v^{r-1} - \frac{\sum_0^N rA_r v^{r-1}}{\sum_0^N A_r v^r}.$$

Ordiniamo il primo membro rispetto alle potenze crescenti di v: I coefficienti k dei termini simili a v^{r-1} soddisfanno alla condizione $kr_{k-1} - 1 = r - 1$, ossia $kr_{k-1} = r$, e sono, perciò, divisori di r non superiori ad $n+1$. Reciprocamente: Ogni divisore k di r non superiore ad $n+1$, è coefficiente di un termine simile a v^{r-1}, perchè, se è $km = r$, con m intero e positivo e $k \leqq n+1$, quando la successione r_{k-1} assume il valore $r_{k-1} = m$ si ha $kr_{k-1} - 1 = r - 1$. Pertanto il coefficiente di v^{r-1} nel primo membro è la somma $s(r)$ di tutti i divisori di r non superiori ad $n+1$, e la eguaglianza precedente, isolando la frazione del secondo membro, si può scrivere così:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \{n+1-s(r)\} . v^{r-1} = \frac{\sum_0^N rA_r v^{r-1}}{\sum_0^N A_r v^r}.$$

Da qui si ottiene una relazione ricorrente nella A, moltiplicando i due membri per $\sum_0^N A_r v^r$ e identificando poi i coefficienti di v^{r-1}:

$$\sum_{i=0}^{i=r-1} A_i C_{r-i-1} = rA_r \quad , \quad \text{se è } r \leqq N \qquad (4)$$

e

$$\sum_{i=0}^{i=r-1} A_i C_{r-i-1} = 0 \quad , \quad \text{se è } r > N, \qquad (5)$$

dove si è posto

$$n + 1 - s(i+1) = C_i.$$

Ora, come si è notato, il numero intero λ deve verificare la condizione (4) per effetto delle (2), onde osservando che è $A_0 = 1$, si può scrivere:

$$\begin{aligned} -\lambda A_\lambda + C_0 A_{\lambda-1} + C_1 A_{\lambda-2} + \ldots + C_{\lambda-2} A_1 &= -C_{\lambda-1} \\ -(\lambda-1)A_{\lambda-1} + C_0 A_{\lambda-2} + \ldots + C_{\lambda-3} A_1 &= -C_{\lambda-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ -1A_1 &= -C_0. \end{aligned}$$

Queste relazioni considerate come λ equazioni lineari nelle λ incognite A_λ, $A_{\lambda-1}$,..A_1, col determinante $(-1)^\lambda \underline{|\lambda} \neq 0$, risolute rispetto ad A_λ, forniscono:

$$A_\lambda = \frac{1}{\underline{|\lambda}} \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \dots & C_{\lambda-2} & C_{\lambda-1} \\ -(\lambda-1) & C_0 & C_1 & \dots & C_{\lambda-3} & C_{\lambda-2} \\ 0 & -(\lambda-3) & C_0 & \dots & C_{\lambda-4} & C_{\lambda-3} \\ 0 & 0 & -(\lambda-2). & \dots & C_{\lambda-5} & C_{\lambda-4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & -1 & C_0 \end{vmatrix} \qquad (6)$$

Così in particolare, escludendo

$$A_0 = A_N = 1,$$

si trovano

$$A_1 = A_{N-1} = n$$

$$A_2 = A_{N-2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$A_3 = A_{N-3} = \frac{(n+3)(n^2-2)-2n}{6}$$

$$A_4 = A_{N-4} = \frac{6(n-6)+6n(n-3)+3(n-1)(n^2-4)+n(n+3)(n^2-2)-2n^2}{24}$$

. . . .

5. Conosciuti i valori di

$$A_0, A_1, \dots A_N$$

corrispondenti ad n, quelli corrispondenti ad $n+1$, se ne deducono facilmente. Il modo, rivelato anche dalla identità (3), può essere dimostrato con la induzione nella maniera seguente:

Si indichino con $A_i^{(n)}$ e $C_i^{(n)}$ i valori di A_i e C_i corrispondenti ad n e si supponga vera la eguaglianza

$$A_j^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{i=n+1} A_{j-i}^{(n)} \ (*)$$

sino ad un intero determinato j della successione

$$1, 2, \dots, \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

dopo avere osservato la sua validità per $j=0$, riducendosi ad $A_0^{(n+1)} = A_0^{(n)} = 1$. Basta far vedere che essa permane valida mutandovi j in $j+1 \overline{\gtrless} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Si muti n in $n+1$ nella (4) applicata per

$$r = j+1 \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2};$$

(*) A secondo membro bisogna porre $A_{j-i}^{(n)} = 0$, quando è $j < i$, oppure $j-i > \frac{n(n+1)}{2}$.

si avrà

$$(j+1)\,A_{j+1}^{(n+1)}=C_0^{(n+1)}A_j^{(n+1)}+C_1^{(n+1)}A_{j-1}^{(n+1)}+\ldots+C_j^{(n+1)}A_0^{(n+1)}.$$

Si tenga conto della supposizione fatta, e poi si osservi, quanto alle $C_i^{(n+1)}$, che secondochè l'indice i, aumentato di 1, è multiplo, o no, di $n+2$, si ha

$$C_i^{(n+1)}=C_i^{(n)}-n-1,$$

oppure

$$C_i^{(n+1)}=C_i^{(n)}+1;$$

di modo che si ha:

$$\begin{aligned}(j+1)A_{j+1}^{(n+1)}=&(C_0^{(n)}+1)\sum_{i=0}^{i=n+1}A_{j-i}^{(n)}+(C_1^{(n)}+1)\sum_{i=0}^{i=n+1}A_{j-i-1}^{(n)}+\ldots+\\&+(C_n^{(n)}+1)\sum_{i=0}^{i=n+1}A_{j-i-n}^{(n)}\\&+(C_{n+1}^{(n)}-n-1)\sum_{i=0}^{i=n+1}A_{j-i-n-1}^{(n)}+(C_{n+2}^{(n)}+1)\sum_{i=0}^{i=n+1}A_{j-i-n-2}^{(n)}+\ldots+\\&+(C_{2(n+2)-2}^{(n)}+1)\sum_{i=0}^{i=n+1}A_{j-i-2(n+2)+2}^{(n)}\\&+(C_{2(n+2)-1}^{(n)}-n-1)\sum_{i=0}^{i=n+1}A_{j-i-2(n+2)+1}^{(n)}+\ldots\ldots\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+(C_{j-n-2}^{(n)}+1)\sum_{i=0}^{i=n+1}A_{n+2-i}^{(n)}+(C_{j-n-1}^{(n)}+1)\sum_{i=0}^{i=n+1}A_{n+1-i}^{(n)}+\ldots+(C_j^{(n)}+1)A_0^{(n)},\end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}(j+1)A_{j-1}^{(n+1)}=&(C_0^{(n)}A_j^{(n)}+C_1^{(n)}A_{j-1}^{(n)}+\ldots+C_j^{(n)}A_0^{(n)})\\&+(C_0^{(n)}A_{j-1}^{(n)}+C_1^{(n)}A_{j-2}^{(n)}+\ldots+C_{j-1}^{(n)}A_0^{(n)})\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+(C_0^{(n)}A_{j-n-1}^{(n)}+C_1^{(n)}A_{j-n-2}^{(n)}+\ldots+C_{j-n-1}^{(n)}A_0^{(n)})\\&+(n+2)\,(A_0^{(n)}+A_1^{(n)}+\ldots+A_{j-n-1}^{(n)})\\&+(n+1)\,A_{j-n}^{(n)}+nA_{j-n+1}^{(n)}+\ldots+2A_{j-1}^{(n)}+A_j^{(n)}\\&-(n+2)\,(A_0^{(n)}+A_1^{(n)}+\ldots+A_{j-n-1}^{(n)}).\end{aligned}$$

Tenendo conto delle stesse relazioni (4) e semplificando risulta

$$A_{j+1}^{(n+1)}=\sum_{i=0}^{i=n+1}A_{j+1-i}^{(n)},$$

che è la (7), dove si muti j in $j+1$. Essa è dunque valida per tutti i valori di

$$j=0,1,2,\ldots,\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1,\ \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Segue, per mezzo della (7), che i numeri

$$A_0^{(n+1)},\ A_1^{(n+1)},\ A_2^{(n+1)},\ldots,A_{n+1}^{(n+1)},\ A_{n+2}^{(n+1)},\ldots,A_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}^{(n+1)}$$

possono essere ottenuti sommando in colonna gli elementi del quadro

$$\begin{array}{l}
A_0^{(n)}, A_1^{(n)}, A_2^{(n)} \ldots A_{n+1}^{(n)}, A_{n+2}^{(n)} \ldots A_N^{(n)} \\
\qquad A_0^{(n)}, A_1^{(n)} \ldots A_n^{(n)}, A_{n+1}^{(n)} \ldots A_{N-1}^{(n)}, \quad A_N^{(n)} \\
\qquad\qquad A_0^{(n)} \ldots A_{n-1}^{(n)}, A_n^{(n)} \ldots A_{N-2}^{(n)}, \quad A_{N-1}^{(n)}, A_N^{(n)} \\
\qquad\qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad\qquad\qquad A_0^{(n)}, \; A_1^{(n)} \ldots A_{N-n-1}^{(n)}, A_{N-n}^{(n)}, A_{N-n+1}^{(n)} \ldots A_N^{(n)},
\end{array}$$

costituito da $n+2$ righe.

In questo modo, partendo da

$$A_0^{(1)} = A_1^{(1)} = 1,$$

si calcolano

$$A_0^{(2)}, A_1^{(2)}, A_2^{(2)}, A_3^{(2)}$$

poi

$$A_0^{(3)}, A_1^{(3)}, A_2^{(3)}, A_3^{(3)}, A_4^{(3)}, A_5^{(3)}, A_6^{(3)},$$

e così di seguito.

Il calcolo può disporsi come segue:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & 1 & & & & & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & & & & & \\
\hline
1 & 2 & 2 & 1 & & & & & & & \\
 & 1 & 2 & 2 & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & 2 & 2 & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & 2 & 2 & 1 & & & & \\
\hline
1 & 3 & 5 & 6 & 5 & 3 & 1 & & & & \\
 & 1 & 3 & 5 & 6 & 5 & 3 & 1 & & & \\
 & & 1 & 3 & 5 & 6 & 5 & 3 & 1 & & \\
 & & & 1 & 3 & 5 & 6 & 5 & 3 & 1 & \\
 & & & & 1 & 3 & 5 & 6 & 5 & 3 & 1 \\
\hline
1 & 4 & 9 & 15 & 20 & 22 & 20 & 15 & 9 & 4 & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

6. Per $r = N+1$ le (5) portano ad un'altra proprietà dei coefficienti A, dove interviene esplicitamente la funzione numerica $s(r)$.

In vero con tale ipotesi si ottiene

$$\sum_{i=0}^{i=N} A_i \{n+1-s(N-i+1)\} = 0.$$

da cui

$$(n+1)\sum_{i=0}^{i=N} A_i = \sum_{i=0}^{i=N} A_i s(N-i+1),$$

ossia (N. 3):

$$\sum_{i=0}^{i=N} A_i s(N-i+1) = (n+1)\,\underline{|n+1}.$$

7. L'applicazione cui alludevamo a principio riguarda la ricerca del numero delle permutazioni di $n+1$ elementi le quali presentino rispetto ad una di esse un dato numero λ di inversioni. (*)

Se $1, 2, \ldots n+1$ è la permutazione principale degli indici degli elementi considerati,

$$i_1, i_2, \ldots i_{n+1}$$

la permutazione che presenta λ inversioni, ed x_r il numero delle inversioni che i_{r+1} forma con gli indici che lo precedono, deve essere

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \lambda$$

con

$$x_i \leqq i \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

E la questione essendo subito ricondotta alla ricerca del numero delle soluzioni della equazione (1) in numeri interi non negativi, soddisfacenti alle condizioni (2), è risoluta dalla formola (6).

La formola $A_\lambda = A_{N-\lambda}$, l'altra dimostrata in fine al N. 3 e quella del N. 5, ricevono rispettivamente le seguenti interpretazioni.

Tra le permutazioni di $n+1$ *elementi ne esistono tante con un numero* λ *di inversioni, quante ne esistono con* $\frac{n(n+1)}{2} - \lambda$ *inversioni.* (**)

Il numero totale delle inversioni presentate dalle permutazioni di $n+1$ *elementi è* $\frac{1}{4} |\underline{n+1}\, n(n+1)$. (**)

Tra le permutazioni di $n+1$ *elementi, ne esistono tante con un numero* $\lambda \leqq n+1$ *di inversioni, quante ne esistono complessivamente tra le permutazioni di* n *elementi, che ammettono* $0, 1, 2, \ldots, \lambda$ *inversioni.*

Tra le permutazioni di $n+1$ *elementi, ne esistono tante con un numero* $\lambda > n+1$ *di inversioni, quante ne esistono complessivamente tra le permutazioni di* n *elementi che ammettono* $\lambda-(n+1), \lambda-n, \ldots, \lambda-1, \lambda$ *inversioni.*

8. In ultimo è notevole il seguente teorema di Aritmetica che discende dalla formola (6):

Il determinante d'ordine λ*:*

$$\begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \ldots & C_{\lambda-2} & C_{\lambda-1} \\ -(\lambda-1) & C_0 & C_1 & \ldots & C_{\lambda-3} & C_{\lambda-2} \\ 0 & -(\lambda-2) & C_0 & \ldots & C_{\lambda-4} & C_{\lambda-3} \\ 0 & 0 & -(\lambda-3) & \ldots & C_{\lambda-5} & C_{\lambda-4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & C_0 \end{vmatrix}$$

con

$$C_i = n + 1 - s(i+1),$$

dove $s(i+1)$ *è la somma di tutti i divisori di* $i+1$ *non superiori ad* $n+1$, *rappresenta un numero intero divisibile per* $|\underline{\lambda}$ *ed il quoziente resta inalterato mutandovi* λ *in* $\frac{n(n+1)}{2} - \lambda$. (***)

G. Mignosi.

(*) Cfr. Capelli. "Lezioni d'Algebra complementare," p. 115.

(**) Cfr. Lucas. "Theorie des nombres," p. 78.

(***) Teoremi analoghi diede E. Fergola nel *Giorn. di Mat. di Battaglini*. (Anno I, 1863).

NUOVE PROPRIETÀ DEI PUNTI NOTEVOLI DEL TRIANGOLO

(Saggio di Geometria recente)

Molte riviste scientifiche ed alcune opere di matematica contengono numerose relazioni fra gli elementi lineari ed angolari del triangolo; così per la Geometria classica meritano speciale menzione: *Théorèmes et problèmes*, di Catalan. *Rélations entre les éléments du triangle*, (1893) di H. Vuibert ecc.; (*) per la Geometria recente basterà ricordare le Note pubblicate nei « Nouvelles annales mathématiques élémentaires » di G. De-Lonchamps, nel « Mathesis » ed in altre importanti riviste italiane ed estere specialmente per cura di Lemoine, Brocard, Thiry, Neuberg, Mansion, Cesàro ecc.; e le opere: di A. Poulain, *Principes de la nouvelle géométrie du triangle*; di Casey John, *A sequel to the first six Books of the Elements of Euclid*; del D.r A. Emmerich, *Die Brocardschen Gebilde*; di C. Alasia, *La recente geometria del triangolo*, e molte altre.

Colla presente Nota crediamo di portare un modesto contributo alla *Geometria recente* proponendoci lo studio della seguente questione:

« Trovare le *coordinate angolari* (α, β, γ), e le *coordinate ceviane* (x, y, z) « dei *punti notevoli* del triangolo, (**) ed esprimere per ciascuno di essi « i tre *parametri lineari* ai quali abbiamo dato il nome di *valore del* « *segmento fisso* q, dell'*altezza equivalente* h, e della *costante ango-* « *lare* Δ ». (***)

Nella seconda parte risolveremo la medesima questione per i punti posti sui lati del triangolo e sui loro prolungamenti.

(*) L'opera del Vuibert contiene 110 relazioni fra gli elementi lineari, 59 fra gli elementi angolari e 104 fra elementi lineari ed angolari, cioè un totale di 273 relazioni colle rispettive dimostrazioni.

(**) Si dicono *punti notevoli* d'una figura piana quei particolari punti del piano della figura, i quali, quando siano dati, equivalgono ad assegnare due condizioni a cui la figura deve soddisfare; la loro posizione si può esprimere in funzione degli elementi della figura stessa.

(***) Si dicono *ceviane*, in omaggio al nome del matematico milanese Giovanni Ceva (1648-1727), le rette passanti pei vertici del triangolo; il primo che introdusse questa denominazione fu l'abate Poulain (*Journal de mathématiques élémentaires*, 1888, p. 278). Noi abbiamo dato il nome di *coordinate ceviane* ad un nuovo sistema di coordinate goniometriche o trigonometriche (*Un nuovo sistema di coordinate trilineari*. " Le matematiche pure ed applicate ").

Le *coordinate angolari* di un punto P rispetto al triangolo di riferimento ABC non sono altro che gli angoli α, β, γ sotto cui sono visti i lati a, b, c.

La convenzione da noi stabilita è che essi angoli sieno misurati sempre consecutivamente, per cui in alcuni casi sono tutti positivi, cioè nel senso dell'ordine ciclico dei vertici di un triangolo, in alcuni casi tutti e tre negativi; la loro somma sarà: $\pm 2\pi$.

Le *coordinate ceviane* del punto P non sono altro che le sue distanze dai vertici del triangolo di riferimento.

Il *segmento fisso* del punto P è la base d'un triangolo *fondamentale* che ha il vertice in uno di quelli del triang. di rif. p. es. C e per lati le proiezioni dei due lati *invertiti* sulle direzioni degli stessi due lati cioè $a.\text{sen}\beta$ e $b.\text{sen}\alpha$ e per angolo al vertice la *differenza angolare* $(\gamma - C)$.

L'*altezza equivalente* del punto P è l'altezza del triangolo equivalente a quello di riferimento ed avente per base il segmento fisso q.

La *costante angolare* del punto P è il terzo lato d'un triangolo ipotetico avente p. es il vertice in C e per lati i prodotti sen α. sen $(\beta - B)$, sen β. sen $(\alpha - A)$ e per angolo al vertice quello stesso del triangolo di riferimento.

PARTE PRIMA.

§ 1. **Centro del circolo inscritto I.** — Esso è l'incontro delle tre bisettrici degli angoli del triangolo; nel sistema dell'inversione isogonale corrisponde a sè stesso.

Evidentemente le sue *coordinate angolari* sono:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha=\frac{A}{2}+\frac{\pi}{2} \\ \beta=\frac{B}{2}+\frac{\pi}{2} \\ \gamma=\frac{C}{2}+\frac{\pi}{2} \\ \hline \alpha+\beta+\gamma=2\pi \end{array}\right\} \tag{1}$$

Dalla considerazione del triangolo IBC si ottiene

$$IC=z=a\frac{\operatorname{sen}\frac{B}{2}}{\operatorname{sen}\alpha}=a\frac{\operatorname{sen}\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

ossia

$$\left.\begin{array}{l} z=\sqrt{\frac{ab(p-c)}{p}}=\frac{ab}{p}\cos\frac{C}{2} \\ x=\sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}=\frac{bc}{p}\cos\frac{A}{2} \\ y=\sqrt{\frac{ca(p-b)}{p}}=\frac{ca}{p}\cos\frac{B}{2} \end{array}\right\} \tag{2}$$

Analogamente

Queste *coordinate ceviane* si possono anche ottenere

$$IC=z=\frac{r}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}=\frac{\Omega}{p\operatorname{sen}\frac{C}{2}}=\sqrt{\frac{ab(p-c)}{p}}.$$

Il valore del *segmento fisso* q si trova applicando una delle nostre formule generali

$$z=\frac{ab}{q}\operatorname{sen}(\gamma-C)=\frac{ab}{q}\cos\frac{C}{2}. \tag{3}$$

Identificando le formule (3) e (2) si ricava

$$q=p \tag{4}$$

cioè: « *Pel centro del circolo inscritto il valore del segmento fisso è quello del semiperimetro del triangolo* ».

Per facilitare le ricerche sulle proprietà dei punti notevoli del triangolo ricordiamo qui due proprietà sui punti isogonali che abbiamo dimostrato in altro lavoro, (*) e sono: «1°. *Due punti coniugati isogonali hanno lo stesso valore assoluto del segmento fisso* q, dell'altezza equivalente h, e della costante angolore Δ. 2°. Essi due punti hanno pure in valore assoluto le funzioni trig. *seno* e *coseno* delle *coordinate angolari* dell'uno eguali alle omonime delle *differenze angolari* dell'altro e viceversa ».

Il valore dell'*altezza equivalente* è

$$h = \frac{2\Omega}{q} = 2r. \tag{5}$$

Il valore dell'altezza equivalente è uguale a quello del diametro del cerchio inscritto.

Il valore della *costante angolare* si deduce dalla relazione

$$\frac{q}{\Delta} = \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

si avrà

$$\Delta = \frac{p}{a} \operatorname{sen} A = \frac{2p\Omega}{abc} = \frac{p}{2R}. \tag{6}$$

Il valore della costante angolare è quello del rapporto del semiperimetro al diametro del circolo circoscritto.

Nel caso particolare del triangolo equilatero si avrà

$$q = \frac{3}{1} a \quad , \quad h = \frac{a}{\sqrt{a}} \quad , \quad \Delta = \frac{3}{2}\sqrt{3} = 3 \,.\, \operatorname{sen} 60^\circ.$$

Nel triangolo equilatero il valore del segmento fisso è $\frac{3}{2}$ *del lato;*

» » » *dell'altezza equivalente è il lato diviso per* $\sqrt{3}$;

» » » *della costante angolare è uguale a 3 volte il seno del suo angolo.*

§ 2. **Centro del circolo ex-inscritto I_a.** — È questo il punto d'incontro della bisettrice dell'angolo A e delle bisettrici dei due angoli esterni in B e C, il circolo è tangente al lato a ed al prolungamento degli altri due lati b, c; nel sistema dell'inversione isogonale corrisponde a sè stesso.

Evidentemente le *coordinate angolari* sono:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{A}{2} + 3\,\dfrac{\pi}{2} \\ \beta = \dfrac{B}{2} \\ \gamma = \dfrac{C}{2} \\ \hline \alpha + \beta + \gamma = 2\pi \end{array}\right\} \tag{7}$$

(*) G. Delitala, " Alcune proprietà dell'*inversione isogonale* „. Revista trimestral de Matematicas di José Rius y Casas n. 76.

Per ottenere le coordinate ceviane si consideri p. es. il triangolo I_aBC, si avrà

$$I_aC = z_a = a\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \sqrt{ab\frac{p-b}{p-a}}.$$

In modo analogo si otterrà

$$y_a = \sqrt{ca\frac{p-c}{p-a}}.$$

Invece la terza coord. ceviana x_a si ricava dalla considerazione del triangolo I_aCA

$$I_aA = x_a\, b\frac{\cos\frac{C}{2}}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}} = \sqrt{bc\frac{p}{p-a}}.$$

Quindi le coord. ceviane del centro I_a si possono riassumere

$$\left.\begin{aligned} x_a &= \sqrt{bc\frac{p}{p-a}} = \frac{bc}{p-a}\cos\frac{A}{2} \\ y_a &= \sqrt{ca\frac{p-c}{p-a}} = \frac{ca}{p-a}\operatorname{sen}\frac{B}{2} \\ z_a &= \sqrt{ab\frac{p-b}{p-a}} = \frac{ab}{p-a}\operatorname{sen}\frac{C}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Per gli altri due centri I_b, I_c si ottengono formule analoghe

$$\left.\begin{aligned} x_b &= \sqrt{bc\frac{b-c}{p-b}} = \frac{bc}{p-b}\operatorname{sen}\frac{A}{2} \\ y_b &= \sqrt{ca\frac{p}{p-b}} = \frac{ca}{p-b}\operatorname{sen}\frac{B}{2} \\ z_b &= \sqrt{ab\frac{p-a}{p-b}} = \frac{ab}{p-b}\operatorname{sen}\frac{C}{2} \end{aligned}\right\} (9) \quad \left.\begin{aligned} x_c &= \sqrt{bc\frac{p-b}{p-c}} = \frac{bc}{p-c}\operatorname{sen}\frac{A}{2} \\ y_c &= \sqrt{ca\frac{p-a}{p-c}} = \frac{ca}{p-c}\operatorname{sen}\frac{B}{2} \\ z_c &= \sqrt{ab\frac{p}{p-c}} = \frac{ab}{p-c}\cos\frac{C}{2} \end{aligned}\right\} (10)$$

Pel centro I_a si ottiene il valore del segmento fisso q_a dalla relazione generale

$$z_a = \frac{ab}{q_a}\operatorname{sen}(\gamma - C) = \frac{ab}{q_a}\operatorname{sen}\gamma$$

$$z_a = \sqrt{ab\frac{p-b}{p-a}} = \frac{ab}{q_a}\operatorname{sen}\frac{C}{2} \qquad (11)$$

ossia, identificando colla (8) si avrà

$$\text{Analogamente saranno}\ \left.\begin{aligned} q_a &= p-a \\ q_b &= p-b \\ q_c &= p-c \end{aligned}\right\} \Sigma q_a = p = q \Bigg\}. \qquad (12)$$

Il valore del segmento fisso del centro del circolo ex-inscritto è uguale alla differenza fra il semiperimetro ed il rispettivo lato di tangenza.

La somma dei tre segmenti fissi è uguale al semiperimetro del triangolo, ossia al segmento fisso del centro del circolo inscritto.

L'*altezza equivalente* h_a si ottiene

$$\left.\begin{aligned} & h_a = \frac{2\Omega}{q_a} = \frac{2\Omega}{p-a} = 2r_a \\ \text{Analogamente}\quad & h_b = 2r_b \qquad \Sigma h_a = 2(r_a + r_b + r_c) \\ & h_c = 2r_c \end{aligned}\right\} . \tag{13}$$

Il valore dell'altezza equivalente è uguale al diametro del rispettivo circolo di tangenza ex-inscritto.

La costante angolare si ottiene dalla relazione

$$\left.\begin{aligned} & \Delta_a = q_a \frac{\operatorname{sen} A}{a} = 2\frac{(p-a)\,\Omega}{abc} = \frac{p-a}{2R} \\ \text{Analogamente}\quad & \Delta_b = \frac{p-b}{2R} \qquad \Sigma\Delta_a = \frac{2R}{p} = \Delta \\ & \Delta_c = \frac{p-c}{2R} \end{aligned}\right\} . \tag{14}$$

Il valore della costante angolare è uguale al rapporto della rispettiva differenza lineare al diametro del circolo circoscritto al triangolo. La somma delle tre costanti angolari è uguale alla costante angolare del cerchio inscritto.

Quindi si dedurranno le seguenti relazioni:

$$\left.\begin{aligned} q : q_a : q_b : q_c = \Delta : \Delta_a : \Delta_b : \Delta_c : = p : (p-a) : (p-b) : (p-c) \\ h : h_a : h_b : h_c = r : r_a : r_b : r_c \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

che danno luogo ad altre proprietà dei punti notevoli del triangolo.

Inoltre dalle (2) e (8) si possono dedurre le distanze del centro del circolo inscritto dai centri dei circoli ex-inscritti, esse sono

$$\left.\begin{aligned} D_a &= x_a - x = a\sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}} \\ D_b &= y_b - y = b\sqrt{\frac{ca}{p(p-b)}} \\ D_c &= z_c - z = c\sqrt{\frac{ab}{p(p-c)}} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Si deduce pure

$$\left.\begin{aligned} x \cdot x_a &= x_b\, x_c = bc \\ y \cdot y_a &= y_b\, y_c = ca \\ z \cdot z_a &= z_b\, z_c = ab \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Inoltre si ha

$$x : y : z : = (p-a)\,x_a : (p-b)\,y_b : (p-c)\,z_c \tag{18}$$

ed anche

$$D_a : D_b = \sqrt{\frac{a\,(p-b)}{b\,(p-a)}} \tag{19}$$

e le analoghe.

Tutte queste relazioni possono dare luogo ad altrettante proprietà dei punti notevoli considerati facili ad enunciarsi.

Altre relazioni si possono ottenere dalle (16), cioè

$$D^2_a + D^2_b + D^2_c = \frac{4R}{p}(ar_a + br_b + cr_c). \tag{20}$$

E ponendo le distanze dei cerchi ex-inscritti $I_aI_b = E_c$, ecc. si avrà

$$\left.\begin{aligned}
E^2_c = D^2_a + D^2_b + 2D_aD_b \operatorname{sen}\frac{C}{2} &= \frac{4R}{r} \times c(p-c) \\
\text{analogamente saranno} \quad E^2_a &= \frac{4R}{r} \times a(p-a) \\
E^2_b &= \frac{4R}{r} \times b(p-b) \\
\text{quindi} \quad E^2_a + E^2_b + E^2_c &= \frac{4R}{r}[2p^2 - (a^2+b^2+c^2)]
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Nel caso particolare del triangolo equilatero saranno

$$\left.\begin{aligned}
q_a = q_b = q_c &= \frac{1}{2}\,a = \frac{1}{3}\,q \\
h_a = h_b = h_c &= a\sqrt{3} = \frac{1}{3}\,h \\
\Delta_a = \Delta_b = \Delta_c &= \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}\,\Delta
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

che danno tutte luogo ad altrettante proprietà, inoltre si ha che:

I parametri del centro del circolo ex-inscritto al triangolo equilatero sono la terza parte di quelli del circolo inscritto.

§ 3. **Centro del circolo circoscritto O.** — È questo il punto d'incontro delle tre mediatrici del triangolo; esso è il coniugato isogonale dell'ortocentro H, quindi avranno con questo eguali in valore assoluto i tre parametri lineari.

Da una semplice ispezione della figura risulta chiaro che le *coordinate angolari* del centro O, sono

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= 2A \\
\beta &= 2B \\
\gamma &= 2C \\
\hline
\alpha + \beta + \gamma &= 2\pi
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Le coordinate ceviane sono eguali al raggio del circolo circoscritto cioè

$$x = y = z = \frac{bc}{q} \operatorname{sen} A = \ldots = R. \tag{24}$$

Da questa si può dedurre il valore del *segmento fisso* q, cioè

$$q = \frac{bc \operatorname{sen} A}{R} = \frac{2\Omega}{R} = \frac{2p \,.\, r}{R}. \tag{25}$$

Pel centro del circolo circoscritto O e per l'ortocentro H il valore del segmento fisso è uguale all'area del triangolo divisa per la metà del raggio del circolo circoscritto.

Perciò sarà

$$h = \frac{2\Omega}{q} = \mathrm{R}. \tag{26}$$

Pel centro del cerchio circoscritto e dell'ortocentro il valore dell'altezza equivalente è eguale al raggio di quel circolo.

Sarà pure

$$\Delta = q\,\frac{\operatorname{sen} \mathrm{A}}{a} = \frac{\Omega}{\mathrm{R}^2} = \frac{rp}{\mathrm{R}^2} = \frac{abc}{4\mathrm{R}^2}. \tag{27}$$

Pel centro del cerchio circoscritto e per l'ortocentro il valore della costante angolare è uguale al rapporto dell'area del triangolo pel quadrato del raggio del cerchio circoscritto.

Come applicazione delle suddette formule possiamo trovare l'espressioni delle distanze del centro del cerchio circoscritto O dal centro del circolo inscritto I e dai centri dei circoli ex-inscritti I_a, I_b, I_c che diremo rispettivamente (d, d_a, d_b, d_c). Considerando il triangolo OAI si avrà:

$$d^2 = x^2 + \mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}x \operatorname{sen}\left(\mathrm{C} + \frac{\mathrm{A}}{2}\right) = \mathrm{R}\,(\mathrm{R} - 2r)$$

analogamente

$$\left.\begin{aligned}
d^2_a &= x^2 + \mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}x_a \operatorname{sen}\left(\mathrm{C} + \frac{\mathrm{A}}{2}\right) = \mathrm{R}\,(\mathrm{R} + 2r_a)\\
d^2_b &= y^2 + \mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}y_b \operatorname{sen}\left(\mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{2}\right) = \mathrm{R}\,(\mathrm{R} + 2r_b)\\
d^2_c &= z_c + \mathrm{R}^2 - 2\mathrm{R}z_c \operatorname{sen}\left(\mathrm{B} + \frac{\mathrm{C}}{2}\right) = \mathrm{R}\,(\mathrm{R} + 2r_c)\\
\hline
d^2 + d^2_a &+ d^2_b + d^2_c = 12 \times \mathrm{R}^2
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

La prima di queste cinque relazioni rappresenta il noto teorema d'Eulero (*) l'ultima esprime la proprietà:

La somma dei quadrati delle distanze del circolo circoscritto dai centri dei circoli inscritti ed ex-inscritti è uguale a 12 volte il quadrato del circolo circoscritto.

§ 4. **Ortocentro H.** — È questo l'incontro delle altezze del triangolo. Evidentemente le *coordinate angolari* sono

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \pi - \mathrm{A}\\
\beta &= \pi - \mathrm{B}\\
\gamma &= \pi - \mathrm{C}\\
\hline
\Sigma &= 2\pi
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

(*) Esso fu pubblicato per la prima volta nel 1747 (*Nouvelles annales mathématiques*, 1845, p. 397).

Le *coordinate ceviane* sono

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{bc}{q} \operatorname{sen} 2\mathrm{A} = 2\mathrm{R} \cos \mathrm{A} \\ y' &= \frac{ca}{q} \operatorname{sen} 2\mathrm{B} = 2\mathrm{R} \cos \mathrm{B} \\ z' &= \frac{ab}{q} \operatorname{sen} 2\mathrm{C} = 2\mathrm{R} \cos \mathrm{C} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Le coordinate ceviane dell'ortocentro sono date dal prodotto del diametro del cerchio circoscritto pel coseno del rispettivo angolo del triangolo.

I parametri lineari furono dati nel § precedente.

§ 5. **Baricentro G.** — È questo il punto d'incontro delle tre mediane del triangolo che le divide nel rapporto di 1 : 2 a cominciare dal lato.

Si possono scrivere immediatamente le *coordinate ceviane* del punto G ricordando dalla geometria l'espressione della mediana

$$a^2 + b^2 = 2m^2_c + \frac{1}{2} c$$

dalla quale si ricava

$$z = \frac{2}{3} m_c = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{2} (a^2 + b^2 - \frac{1}{2} c^2)}$$

Analogamente si avrebbe

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{1}{3} \sqrt{2 (a^2 + b^2) - c^2} \\ x &= \frac{1}{3} \sqrt{2 (b^2 + c^2) - a^2} \\ y &= \frac{1}{3} \sqrt{2 (c^2 + a^2) - b^2} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Per trovare le *coordinate angolari* del baricentro si cominciano a calcolare gli angoli che le medesime formano coi lati adiacenti che indichiamo con A', A'' quelli che fa la mediana coi lati AB, AC e così (B', B''), (C', C'') le altre due coppie. Calcolati questi angoli si ha evidentemente

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \pi - (\mathrm{B}' + \mathrm{C}'') \\ \beta &= \pi - (\mathrm{C}' + \mathrm{A}'') \\ \gamma &= \pi - (\mathrm{A}' + \mathrm{B}'') \\ \hline \alpha + \beta + \gamma &= 2\pi. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Si possono quindi scrivere le *coordinate ceviane* ricorrendo alle nostre formule generali

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{ab}{q} \operatorname{sen} (\mathrm{C} + \mathrm{A}' + \mathrm{B}'') \\ x &= \frac{bc}{q} \operatorname{sen} (\mathrm{A} + \mathrm{B}' + \mathrm{C}'') \\ y &= \frac{ca}{q} \operatorname{sen} (\mathrm{B} + \mathrm{C}' + \mathrm{A}'') \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Identificando le (31) colle (33) si potrà ricavare l'espressione del valore del segmento fisso q, cioè

$$q = \frac{3ab \operatorname{sen}(C + A' + B'')}{\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}} \tag{34}$$

e le due analoghe a questa.

Si ricaveranno l'espressioni dell'altezza equivalente e della costante angolare ricorrendo alle formule generali

$$\left.h = \frac{2\Omega}{q} \quad , \quad \frac{\Delta}{q} = \frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}\right\}. \tag{35}$$

§ 6. **Punto di Lemoine K.** — È questo il punto d'incontro delle simediane, esso è il coniugato isogonale del baricentro, quindi per la proprietà enunciata più sopra, avrà i tre *parametri* eguali in valore e segno a quelli del baricentro.

Si possono anche, in virtù dell'altra proprietà enunciata, scrivere immediatamente le *coordinate ceviane*

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{bc}{q} \operatorname{sen}(B' + C'') \\ y' &= \frac{ca}{q} \operatorname{sen}(C' + A'') \\ z' &= \frac{ab}{q} \operatorname{sen}(A' + B'') \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Le *coordinate angolari* sono evidentemente

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \pi - (B'' + C') \\ \beta &= \pi - (C'' + A') \\ \gamma &= \pi - (A'' + B') \\ \hline \Sigma &= 2\pi. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Perciò le formule (33) si possono ancora scrivere

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{bc}{q} \operatorname{sen}(B'' + C') \\ y &= \frac{ca}{q} \operatorname{sen}(C'' + A') \\ z &= \frac{ab}{q} \operatorname{sen}(A'' + B') \end{aligned}\right\} \tag{33'}$$

che sono le *coordinate ceviane* del baricentro G.

Si ottengono i seguenti rapporti fra le coordinate ceviane dei due punti G e K

$$\frac{x}{x'} = \frac{\operatorname{sen}(B'' + C')}{\operatorname{sen}(B' + C'')} \quad , \quad \frac{y}{y'} = \frac{\operatorname{sen}(C'' + A')}{\operatorname{sen}(C' + A'')} \quad , \quad \frac{z}{z'} = \frac{\operatorname{sen}(A'' + B')}{\operatorname{sen}(A' + B'')} \tag{38}$$

§ 7. **Primo punto di Brocard M.** — Se sopra ciascuno dei lati del triangolo si costruiscono gli archi capaci del supplemento di uno dei due angoli adiacenti, mantenendo l'ordine ciclico, i tre archi s'intersecheranno in un medesimo punto conosciuto col nome del suo autore *primo punto di Brocard o punto positivo o punto retrogrado di Brocard* per distinguerlo dal suo isogonale detto *secondo punto, o punto negativo o diretto di Brocard* e che si suole invece rappresentare colla lettera N.

Le coordinate ceviane formeranno quindi pel punto M coi lati del triangolo l'angolo costante ω detto *angolo di Brocard* il cui valore è dato dalla relazione

$$\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C.$$

Le *coordinate angolari* del primo punto di Brocard evidentemente sono

$$\left.\begin{array}{r} \alpha = \pi - B \\ \beta = \pi - C \\ \gamma = \pi - A \\ \hline \alpha + \beta + \gamma = 2\pi \end{array}\right\} \qquad (39)$$

Sarà nel vertice C l'angolo di Brocard ω e le *coordinate ceviane* saranno

$$\left.\begin{array}{l} y = a\dfrac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen} B} \\ z = b\dfrac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen} C} \\ x = c\dfrac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen} A} \end{array}\right\} \qquad (40)$$

Ed applicando le nostre formule generali si otterranno le stesse *coordinate ceviane*

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{ca}{q}\operatorname{sen} A \\ z = \dfrac{ab}{q}\operatorname{sen} B \\ x = \dfrac{bc}{q}\operatorname{sen} C \end{array}\right\} \qquad (41)$$

Identificando le (40) e (41) si ricava il *valore del segmento fisso* q

$$q = c \times \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}\omega} = a\frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen}\omega} = b\frac{\operatorname{sen} C \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen}\omega}. \qquad (42)$$

E si può scrivere ancora

$$q = \frac{2\Omega}{\operatorname{sen}\omega} \times \frac{\operatorname{sen} A}{a}$$

e le analoghe.

Il valore dell'*altezza equivalente* sarà

$$h = \frac{2\Omega}{q} = a \times \frac{\operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} A} \tag{43}$$

e le analoghe

cioè: *Pei punti di Brocard l'*altezza equivalente *è uguale al prodotto di uno dei lati del triangolo pel rapporto dei seni dell'angolo di Brocard e dell'angolo opposto al lato.*

Il valore della *costante angolare* si ottiene dalla relazione

$$\frac{\Delta}{q} = \frac{\operatorname{sen} A}{a} = \ldots$$

quindi

$$\Delta = \frac{q}{h} \operatorname{sen} \omega = \frac{q^2}{2\Omega} \operatorname{sen} \omega \tag{44}$$

da cui

$$\operatorname{sen} \omega = \Delta \times \frac{h}{q} \tag{45}$$

cioè: *Il seno dell'angolo di Brocard è uguale al prodotto della costante angolare pel rapporto dell'altezza equivalente al segmento fisso dello stesso punto di Brocard.*

Si può trovare direttamente l'espressione del segmento fisso q applicando le nostre formule generali, cioè

$$q^2 = b^2 \operatorname{sen}^2 A + c^2 \operatorname{sen}^2 C - bc \operatorname{sen} A \operatorname{sen} 2C \tag{46}$$

e le analoghe.

§ 8. **Secondo punto di Brocard N.** — Le coordinate angolari di questo punto sono

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \pi - C \\ \beta = \pi - A \\ \gamma = \pi - B \\ \hline \Sigma = 2\pi \end{array}\right\} \tag{47}$$

Le *coordinate ceviane* sono

$$\left.\begin{array}{l} y' = \dfrac{ca}{q} \operatorname{sen} C = c \dfrac{\operatorname{sen} \omega'}{\operatorname{sen} B} \\ z' = \dfrac{ab}{q} \operatorname{sen} A = a \dfrac{\operatorname{sen} \omega'}{\operatorname{sen} C} \\ x' = \dfrac{bc}{q} \operatorname{sen} B = b \dfrac{\operatorname{sen} \omega'}{\operatorname{sen} A} \end{array}\right\} \tag{48}$$

Come conseguenza delle formule (41) e (48) si deduce

$$\left.\begin{array}{l} x : x' = \operatorname{sen} C : \operatorname{sen} B = c : b \\ y : y' = \operatorname{sen} A : \operatorname{sen} C = a : c \\ z : z' = \operatorname{sen} B : \operatorname{sen} A = b : a \end{array}\right\} \tag{49}$$

I valori dell'angolo ω' e dei tre parametri sono eguali a quelli dell'angolo ω e dei rispettivi del primo punto di Brocard M.

Si deduce ancora dalle (40) e (48)

$$x \cdot y \cdot z = x' \cdot y' \cdot z' = abc \frac{\mathrm{sen}^3 \omega}{\mathrm{sen\,A} \cdot \mathrm{sen\,B} \cdot \mathrm{sen\,C}} = \left(\frac{q}{\Delta} \mathrm{sen}\,\omega\right)^3 \qquad (50)$$

e si ha la proprietà:

La radice cubica del prodotto delle coordinate ceviane di ciascuno dei punti di Brocard è uguale al seno dell'angolo di Brocard pel rapporto del segmento fisso alla costante angolare degli stessi punti.

E sostituendo per sen ω il suo valore dato dalla formula (45) si ottiene ancora

$$x \cdot y \cdot z = x' \cdot y' \cdot z' = h^3 \qquad (51)$$

quindi la proprietà:

Il prodotto delle coordinate ceviane *di ciascuno dei due punti di Brocard è comune ed uguale al cubo dell'*altezza equivalente *dei medesimi.*

Ma pel *centro del circolo circoscritto* O si era trovato: $x = y = z = \mathrm{R}$ e $h = \mathrm{R}$ dunque anche questo punto notevole gode la stessa proprietà dei *punti di Brocard*, di essere cioè:

$$x \cdot y \cdot z = h^3. \qquad (53)$$

Ed il suo coniugato isogonale, ossia l'ortocentro H, avrà

$$x' \cdot y' \cdot z' = 8h^3 \cdot \cos \mathrm{A} \cdot \cos \mathrm{B} \cdot \cos \mathrm{C}. \qquad (53)$$

Si osserva un'altra analogia fra i due punti di Brocard e l'ortocentro: *Essi hanno le medesime coordinate angolari però con ordine spostato, formate dai supplementi degli angoli del triangolo.*

§ 9. **Punti isotomici; punto di Gergonne L_1 e punto di Nagel L_2.** — Si dicono *rette isotomiche* due rette uscenti da un vertice del triangolo e che determinano sul lato opposto due punti equidistanti dal suo punto di mezzo; i due punti si dicono *isotomici* fra di loro.

Le rette isotomiche a tre rette concorrenti in un punto L_1 sono concorrenti anch'esse in un secondo punto L_2; questi due punti si dicono *punti reciproci di Lonchamps* che li scoperse nel 1866 od anche *punti isotomici* e le tre coppie di rette si dicono *rette reciproche.*

È noto dalla Geometria del triangolo che le ceviane passanti per i punti di contatto A_1, B_1, C_1 del circolo inscritto s'incontrano in un punto L_1 detto *punto di Gergonne;* e che le rette o ceviane passanti per i punti A_2, B_2, C_2 di contatto dei tre cerchi ex-inscritti, s'incontrano pure in un secondo punto L_2 detto *punto di Nagel;* essi due punti L_1, L_2 sono isotomici.

Tralasciamo di esaminare i *punti associati di Gergonne* ed altri punti isotomici.

Per due punti qualunque *reciproci* facilmente si ottiene la relazione

$$\frac{AC_1}{BC_1}=\frac{x \operatorname{sen} \beta}{y \operatorname{sen} \alpha} \quad , \quad \frac{BC_2}{AC_2}=\frac{x' \operatorname{sen} \beta'}{y' \operatorname{sen} \alpha'}$$

quindi

$$\left.\begin{aligned} \frac{x \operatorname{sen} \beta}{y \operatorname{sen} \alpha} &= \frac{x' \operatorname{sen} \beta'}{y' \operatorname{sen} \alpha'} \\ \text{Analogamente} \qquad & \\ \frac{y \operatorname{sen} \gamma}{z \operatorname{sen} \beta} &= \frac{y' \operatorname{sen} \gamma'}{z' \operatorname{sen} \beta'} \\ \frac{z \operatorname{sen} \alpha}{x \operatorname{sen} \gamma} &= \frac{z' \operatorname{sen} \alpha}{x' \operatorname{sen} \gamma'} \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

e si può enunciare la proprietà generale dei punti reciproci:

Le distanze dei vertici del triangolo dalle ceviane reciproche passanti pel terzo vertice sono proporzionali fra di loro.

Occupiamoci dei punti reciproci detti di Gergonne e di Nagel. Evidentemente sono verificate le seguenti identità

$$\left.\begin{aligned} AC_1 = AB_1 = BC_2 = CB_3 = r \cot\frac{A}{2} = p - a \\ BA_1 = BC_1 = CA_2 = AC_2 = r \cot\frac{B}{2} = p - b \\ CB_1 = CA_1 = AB_2 = BA_2 = r \cot\frac{C}{2} = p - c \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Indichiamo con A_1, A_2 gli angoli che le due rette reciproche fanno coi lati AC, AB, sarà $A_3 = A - (A_1 + A_2)$ l'angolo compreso fra le due ceviane reciproche. Analogamente diciamo con B_1, B_2 gli angoli delle altre due rette reciproche coi lati BA, BC sarà $B_3 = B - (B_1 + B_2)$; lo stesso dicasi per gli angoli C_1, C_2, $C_3 = G - (G_1 + G_2)$.

Dal triangolo AA_1C del quale si conoscono due lati b e $(p-c)$ e l'angolo compreso C si potrà determinare l'angolo A_1 e così dagli analoghi triangoli si potranno determinare gli angoli A_2; B_1, B_2; C_1, C_2.

Ciò premesso potremo scrivere le *coordinate angolari* del punto di Gergonne L_1 e del punto di Nagel L_2, esse sono:

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha_1=\pi-C+(C_2-B_2) & \alpha_2=\pi-B+(B_1-C_1) \\ \beta_1=\pi-(A_1+C_2) & \beta_2=B+(A_2+C_1) \\ \gamma_1=C+(A_1+B_2) & \gamma_2=\pi-(A_2+B_1) \\ \hline \alpha_1+\beta_1+\gamma_1=2\pi & \alpha_2+\beta_2+\gamma_2=2\pi \end{array}\right\} \tag{56}$$

E le rispettive *differenze angolari* saranno:

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha_1 - A = B + (C_2 - B_2) & \alpha_2 - A = C + (B_1 - C_1) \\ \beta_1 - B = \pi - B - (A_1 + C_2) & \beta_2 - B = (A_2 + C_1) \\ \gamma_1 - C = (A_1 + B_2) & \gamma_2 - C = \pi - C + (A_2 + B_1) \\ \hline \Sigma_1 = \pi & \Sigma_2 = \pi \end{array}\right\} \tag{57}$$

Le *coordinate ceviane* saranno:

$$\left|\begin{array}{ll} x_1 = \frac{bc}{q_1}\,\text{sen}\,(B + C_2 - B_2) & x_2 = \frac{bc}{q_2}\,\text{sen}\,(C + B_1 - C_1) \\ y_1 = \frac{ca}{q_1}\,\text{sen}\,(B + A_1 + C_2) & y_2 = \frac{ca}{q_2}\,\text{sen}\,(A_2 + C_1) \\ z_1 = \frac{ab}{q_1}\,\text{sen}\,(A_1 + B_2) & z_2 = \frac{ab}{q_2}\,\text{sen}\,(C + A_2 + B_1) \end{array}\right| \qquad (58)$$

I tre *parametri lineari* (q_1, h_1, Δ_1), (q_2, h_2, Δ_2) si deducono dalle nostre formule generali:

$$\left.\begin{array}{l} q^2_1 = b^2\,\text{sen}^2\,\gamma_1 + c^2\,\text{sen}^2\,\beta_1 + 2bc\,\text{sen}\,\beta_1\,\text{sen}\,\gamma_1\cos(\alpha_1 - A) \\ h_1 = \frac{2\Omega}{q_1} \\ \frac{\Delta_1}{q_1} = \frac{\text{sen}\,A}{a} = \frac{\text{sen}\,B}{b} = \frac{\text{sen}\,C}{c} \end{array}\right| \qquad (59)$$

e le analoghe

Analoghe formule per l'altro punto.

Infine ricordando le relazioni (55) si possono scrivere per i punti di Gergonne e di Nagel i seguenti rapporti eguali:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x_1\,\text{sen}\,\beta_1}{y_1\,\text{sen}\,\alpha_1} = \frac{x_2\,\text{sen}\,\beta_2}{y_2\,\text{sen}\,\alpha_2} = \frac{p-a}{p-b} \\ \frac{y_1\,\text{sen}\,\gamma_1}{z_1\,\text{sen}\,\beta_1} = \frac{y_2\,\text{sen}\,\gamma_2}{z_2\,\text{sen}\,\beta_2} = \frac{p-b}{p-c} \\ \frac{z_1\,\text{sen}\,\alpha_1}{x_1\,\text{sen}\,\gamma_1} = \frac{z_2\,\text{sen}\,\alpha_2}{x_2\,\text{sen}\,\gamma_2} = \frac{p-c}{p-a} \end{array}\right| \qquad (60)$$

ed enunciare la seguente proprietà:

Il rapporto delle distanze dei vertici del triangolo dalle ceviane reciproche passanti pel terzo vertice è uguale al rapporto inverso delle rispettive differenze lineari.

In modo analogo si potrebbero studiare altri *punti notevoli* del triangolo; il *reciproco* del *baricentro* corrisponde a se stesso.

(Continua)

Prof. G. Delitala.

PICCOLE NOTE

1. — Sull'integrazione indefinita delle funzioni inverse.

Sia la funzione $y = f(x)$ finita, continua e dotata di derivata prima non nulla in un intervallo generico (ax).

In tali condizioni l'equazione $y = f(x)$ si può risolvere rispetto ad x, così da avere x eguale ad una funzione finita, continua e derivabile $\varphi(y)$ della variabile y:

cambiando materialmente y in x nella funzione φ, ottengo la funzione $\varphi(x)$, detta la funzione *inversa* di $f(x)$; adotto anzi la notazione già usata da altri scrivendo $\varphi(x) = f^{-1}(x)$.

Ciò premesso dimostro la seguente proposizione:

Se l'integrale indefinito di una funzione $f(x)$ *contenuta assieme alla sua inversa in dato corpo* Γ (*) *è esprimibile per funzioni dello stesso corpo (quello, ad esempio, costituito dalle trascendenti elementari), appartiene pure allo stesso corpo l'integrale della funzione inversa* $f^{-1}(x)$.

Dimostrazione. — Sia una curva $y = f^{-1}(x)$ riferita al solito sistema cartesiano; l'area compresa tra la curva, l'asse delle x e le due ordinate corrispondenti all'ascissa a ed a quella generica x sarà

$$A = \int_a^x f^{-1}(x)\,dx \tag{1}$$

Opero adesso una semplicissima trasformazione di assi, prendendo la direzione positiva delle x per direzione positiva delle y, e quella positiva delle y per quella positiva delle x; in tal modo l'equazione delle curva diviene evidentemente

$$y = f(x)$$

e gli estremi dell'arco considerato (riferiti ai nuovi assi) avranno per ordinate a ed x e per ascisse $f^{-1}(a)$ ed $f^{-1}(x)$; quindi l'area B, così limitata, sarà

$$B = \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(x)} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Siccome poi chiamando C l'area del rettangolo che ha per lati a e $f^{-1}(a)$, si ha

$$C = af^{-1}(a), \quad \text{ed} \quad A + B + C = xf^{-1}(x),$$

se ne ricava per la (1) e la (2)

$$\int_a^x f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(x)} f(x)\,dx - af^{-1}(a),$$

dove, fondendo in un'unica costante d'integrazione il termine $af^{-1}(a)$ e gli altri due termini costanti che provengono dai due integrali A e B, per effetto dei limiti inferiori a ed $f^{-1}(a)$, si ottiene senz'altro

$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int^{f^{-1}(x)} f(x)\,dx + \text{costante}.$$

Questa relazione prova l'asserto, giacchè i tre termini del secondo membro, e quindi la loro somma, appartengono al corpo Γ.

Infatti, uno di essi vi appartiene perchè costante; per ipotesi vi appartengono x ed $f^{-1}(x)$, e quindi il loro prodotto; vi appartiene inoltre l'integrale indefinito di $f(x)$, integrale che per un momento chiamerò $F(x)$; ora $\int^{f^{-1}(x)} f(x)\,dx$ si ottiene da $F(x)$ sostituendovi $f^{-1}(x)$ al posto di x, eseguendo dunque una operazione corrispondente ad una funzione del corpo Γ sopra l'elemento $f^{-1}(x)$ che per ipotesi appartiene al corpo Γ.

(*) Intendo per *corpo* di funzioni un insieme di funzioni tali che, operando sopra di esse, sia razionalmente, sia con una generica funzione dell'insieme, si ottengano sempre elementi dell'insieme.

Per definizione di detto corpo, non veniamo, con tali operazioni, ad uscirne, c. d. d.

OSSERVAZIONE I. — La relazione trovata

$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int^{f^{-1}(x)} f(x)\,dx + \text{costante},$$

oltre a dimostrare la proposizione, contiene senz'altro la regola per integrare qualunque funzione della cui inversa si sia già conseguito l'integrale.

Esempio:

$$\int \operatorname{sen}^{-1} x\,dx = x \operatorname{sen}^{-1} x - \int^{\operatorname{sen}^{-1} x} \operatorname{sen} x\,dx + \text{costante}; \qquad (3)$$

abbiamo

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x; \quad \text{quindi} \quad \int^{\operatorname{sen}^{-1} x} \operatorname{sen} x\,dx = -\cos \operatorname{sen}^{-1} x = -\sqrt{1-x^2},$$

e perciò la (3) diviene

$$\int \operatorname{sen}^{-1} x\,dx = x \operatorname{sen}^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + \text{costante}.$$

OSSERVAZIONE II. — Il teorema che abbiamo dimostrato geometricamente, può dimostrarsi anche direttamente colla semplice derivazione della relazione trovata

$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int^{f^{-1}(x)} f(x)\,dx + \text{costante};$$

in effetto, derivandola, si ha

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(x) + x\frac{df^{-1}(x)}{dx} - f[f^{-1}(x)]\frac{df^{-1}(x)}{dx}; \qquad (4)$$

ma, per definizione, è certamente

$$f[f^{-1}(x)] = x$$

e quindi la (4) si riduce a un'identità, come infatti si deve ottenere, se la relazione precedente è vera.

Dott. ETTORE DA RIN.

II. — **Sopra un modo semplice di generazione della serie di Taylor.**

Sia $f(x)$ una funzione finita e continua in un certo intervallo $(x, x+h)$, e supponiamo che le sue successive derivate esistano e siano pure funzioni di x finite e continue nell'intervallo considerato.

Supponiamo di dividere l'intervallo dato in n intervalli eguali:

$$\left(x, x+\frac{h}{n}\right), \left(x+\frac{h}{n}, x+\frac{2h}{n}\right), \left(x+\frac{2h}{n}, x+\frac{3h}{n}\right) \dots \left(x+\frac{(n-1)h}{n}, x+h\right).$$

Applicando ad $f(x)$ in ciascuno di questi intervalli il teorema del valore medio si ha:

$$f(x+h) - f\left(x+\frac{(n-1)h}{n}\right) = \frac{h}{n} f'(\alpha_n)$$
$$f\left(x+\frac{(n-1)h}{n}\right) - f\left(x+\frac{(n-2)h}{n}\right) = \frac{h}{n} f'(\alpha_{n-1})$$

. . . .

. . . .

$$f\left(x+\frac{2h}{n}\right)-f\left(x+\frac{h}{n}\right)=\frac{h}{n}f'(\alpha_2)$$
$$f\left(x+\frac{h}{n}\right)-f(x) \qquad =\frac{h}{n}f'(\alpha_1)$$

dove $x+\frac{(r-1)h}{n}<\alpha_r<x+\frac{rh}{n}$.

Sommando queste eguaglianze membro a membro, si ha

$$f(x+h)-f(x)=h\sum_n^1\frac{f'(\alpha_r)}{n},$$

ossia

$$\Delta_1=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\sum_n^1\frac{f'(\alpha_r)}{n}.$$

Se ora facciamo tendere n all'infinito i termini del sommatorio divengono infinitesimi, e, giacchè il sommatorio tende allora ad un limite finito, possiamo sostituirli con le quantità:

$$\frac{f'\left(x+\frac{h}{n}\right)}{n},\quad \frac{f'\left(x+\frac{2h}{n}\right)}{n},\ldots\ldots\frac{f'(x+h)}{n},$$

che per $n=\infty$ divengono pure infinitesimi dello stesso ordine dei primi.

Avremo cioè

$$\Delta_1=\lim_{n=\infty}\sum_n^1\frac{f'\left(x+\frac{rh}{n}\right)}{n}.$$

Applicando ancora il teorema del valor medio alla funzione $f'(x)$, abbiamo

$$f'\left(x+\frac{h}{n}\right)=f'(x)+\frac{h}{n}f''(\beta_1)$$
$$f'\left(x+\frac{2h}{n}\right)=f'\left(x+\frac{h}{n}\right)+\frac{h}{n}f''(\beta_2)=f'(x)+\frac{h}{n}[f''(\beta_1)+f''(\beta_2)]$$
$$f'\left(x+\frac{3h}{n}\right)=f'\left(x+\frac{2h}{n}\right)+\frac{h}{n}f''(\beta_3)=f'\left(x+\frac{h}{n}\right)+\frac{h}{n}[f''(\beta_2)+f''(\beta_3)]=$$
$$=f'(x)+\frac{h}{n}[f''(\beta_1)+f''(\beta_2)+f''(\beta_3)]$$

. . . .

$$f'(x+h)=f'\left(x+\frac{(n-1)h}{n}\right)+\frac{h}{n}f''(\beta_n)=\ldots$$
$$\ldots=f'(x)+\frac{h}{n}[f''(\beta_1)+f''(\beta_2)+\ldots+f''(\beta_n)],$$

dove

$$x+\frac{(r-1)h}{n}<\beta_r<x+\frac{rh}{n}.$$

Quindi

$$\sum_n^1 f'\left(x+\frac{rh}{n}\right)=nf'(x)+h\sum_n^1\frac{(n-r+1)f''(\beta_r)}{n}$$

da cui

$$\Delta_1=f'(x)+h\lim_{n=\infty}\sum_n^1\frac{(n-r+1)f''(\beta_r)}{n^2}$$

e

$$\Delta_2 = \frac{\Delta_1 - f(x)}{h} = \lim_{n=\infty} \sum_{n}^{1} \frac{(n-r+1) f(\beta_r)}{n^2}.$$

Un'osservazione analoga a quella fatta più sopra riguardo agli infinitesimi del secondo membro ci conduce alla sostituzione analoga; avremo cioè:

$$\Delta_2 = \lim_{n=\infty} \sum_{n}^{1} \frac{(n-r+1) f'\left(x + \frac{rh}{n}\right)}{n^2}.$$

Continuando questo procedimento, sviluppando cioè i termini del sommatorio e facendo ancora la sostituzione degli infinitesimi avremmo ora:

$$\Delta_2 = \lim_{n=\infty} \left[\frac{\Sigma r}{n^2} f'(x) + h \sum_{n}^{1} \frac{(n-r+1)(n-r+2)}{2} \frac{f''\left(x + \frac{rh}{n}\right)}{n^3} \right];$$

ed essendo

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Sigma r}{n^2} = \lim_{n=\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

si avrà

$$\Delta_3 = \frac{\Delta_2 - \frac{f'(x)}{2}}{h} = \lim_{n=\infty} \sum_{n}^{1} \frac{(n-r+1)(n-r+2)}{2} \frac{f''\left(x + \frac{rh}{n}\right)}{n^3}.$$

In simil maniera si otterrebbe

$$\Delta_4 = \frac{\Delta_3 - \frac{f''(x)}{6}}{h} = \lim \sum_{n}^{1} \frac{(n-r+1)(n-r+2)(n-r+3)}{6} \frac{f'''\left(x + \frac{rh}{n}\right)}{n^4},$$

$$\Delta_5 = \frac{\Delta_4 - \frac{f'''(x)}{24}}{h} = \lim \sum_{n}^{1} \frac{(n-r+1)(n-r+2)(n-r+3)(n-r+4)}{24} \frac{f''''\left(x + \frac{rh}{n}\right)}{n^5}$$

. . . .

È facile ora vedere la legge di formazione dei coefficienti dei termini dei sommatori considerati, giacchè ognuno di essi è formato dalla somma di tutti i coefficienti dei termini del sommatorio precedente a cominciare dal corrispondente termine; abbiamo infatti

$$r = \overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} + \ldots + \overset{r}{1}; \qquad \frac{r(r+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \ldots + r;$$

$$\frac{r(r+1)(r+2)}{6} = 1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{r(r+1)}{2}; \quad \text{ecc.}$$

Essendo

$$1, \ 1, \ 1, \ 1, \ldots 1,$$

la prima serie di coefficienti, le altre saranno i successivi ordini dei numeri figurati; ed avremo allora in generale

$$\Delta_p = \lim \frac{\Sigma \frac{r(r+1)(r+2)\ldots(r+p-2)}{(p-1)!}}{n^p} f^{(p)}(x) +$$

$$+ h \sum_{n}^{1} \frac{r(r+1)(r+2)\ldots(r+p-1)}{p!} \frac{f^{(p+1)}\left(x + \frac{rh}{n}\right)}{n^{p+1}}$$

ed essendo

$$\sum_{n}^{1} \frac{r(r+1)(r+2)\ldots(r+p-2)}{(p-1)!} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{p!}.$$

e quindi

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum \frac{r(r+1)\ldots(r+p-2)}{(p-1)!}}{n^p} = \frac{1}{p!}.$$

abbiamo anche:

$$\Delta_{p+1} = \frac{\Delta_p - \frac{f^{(p)}(x)}{p!}}{h} = \lim_{n=\infty} \sum_{n}^{1} \frac{r(r+1)(r+2)\ldots(r+p-1)}{p!} \frac{f^{p-1}\left(x+\frac{rh}{n}\right)}{n^{p-1}}.$$

Ponendo successivamente $p = 1,2,3...$ e chiamando per brevità $R_{p-1}(x)$ il sommatorio del secondo membro, si ha

$$\Delta_1 = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = R_1(x), \quad \text{da cui} \quad f(x+h) = f(x) + hR_1(x),$$

$$\Delta_2 = \frac{\Delta_1 - f'(x)}{h} = R_2(x), \quad \text{da cui} \quad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2R_2(x),$$

$$\Delta_3 = \frac{\Delta_2 - \frac{f''(x)}{2!}}{h} = R_3(x), \quad \text{da cui} \quad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + h^3R_3(x);$$

ed in generale otteniamo

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x)\ldots + \frac{h^p}{p!}f^{(p)}(x) + h^{p+1}R_{p+1}(x).$$

Se al crescere di p, R_p tende a 0, la serie

$$f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x)\ldots + \frac{h^p}{h!}f^{(p)}(x)\ldots$$

sarà convergente, e la somma dei suoi primi termini si potrà, prendendo p abbastanza grande, far differire da $f(x+h)$ di tanto poco quanto si vuole; potremo quindi scrivere:

$$f(x+h) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{h^p}{p!} f^p(x)$$

espressione della serie di Taylor.

GUIDO ASCOLI.
Studente del R. Ist. tecnico di Livorno.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 606, 607, 608, 609, 610 E 611

606. *È dato un fascio di coniche ed un punto P. Si trovi il luogo del punto d'incontro del diametro che passa per P colla polare di P. Caso in cui il fascio di coniche si riduce ad un fascio di circoli.* GREENSTREET.

Parte I. — **Risoluzione della sig.ª Longobardi e del sig. Barisien.**

Il fascio di coniche sia rappresentato dall'equazione

(1) $$\varphi + k\psi = 0;$$

NOTA. — Parvennero le risoluzioni delle quistioni 604, 605 inviate dal sig. Barisien quando il n. precedente era già in macchina.

le coordinate x, y dei centri sono date da

$$\varphi'_x + k\psi'_x = 0 \qquad \varphi'_y + k\psi'_y = 0.$$

L'equazione di ogni diametro di (1) è dunque

$$\varphi'_x + k\psi'_x + m(\varphi'_y + k\psi'_y) = 0;$$

questa è l'equazione del diametro per un punto dato $(x_1\, y_1)$. se m ha valore tale da farla verificare da $x = x_1$, $y = y_1$, cioè se

$$\varphi'_{x_1} + k\psi'_{x_1} + m(\varphi'_{y_1} + k\psi'_{y_1}) = 0,$$

intendendo per φ'_{x_1} il valore che asssume $\varphi'_x = \dfrac{d\varphi}{dx}$ per $x = x_1$ etc. L'equazione di ogni diametro per P di (1) è dunque

$$(\varphi'_x + k\psi'_x)(\varphi'_{y_1} + k\psi'_{y_1}) - (\varphi'_{x_1} + k\psi'_{x_1})(\varphi'_y + k\psi'_y) = 0,$$

ovvero

$$\varphi'_x\varphi'_{y_1} - \varphi'_{x_1}\varphi'_y + k(\varphi'_x\psi'_{y_1} - \varphi'_{x_1}\psi'_y + \psi'_x\varphi'_{y_1} - \psi'_{x_1}\varphi'_y) + k^2(\psi'_x\psi'_{y_1} - \psi'_{x_1}\psi'_y) = 0,$$

ovvero

$$(2) \qquad (\varphi'_x\,\varphi'_y) + k[(\varphi'_x\,\psi'_y) + (\psi'_x\,\varphi'_y)] + k^2(\psi'_x\,\psi'_y) = 0,$$

intendendo per

$$(\mathrm{AB}) = \mathrm{AB}_1 - \mathrm{A}_1\mathrm{B}.$$

La polare di P rispetto a (1) è

$$(3) \qquad (\varphi'_{x_1} + k\psi'_{x_1})x + (\varphi'_{y_1} + k\psi'_{y_1})y + \varphi'_{z_1} + k\psi'_{z_1} = 0.$$

Eliminando k tra la (2) e la (3) si ha l'equazione del luogo richiesto dei punti d'incontro del diametro di P con la polare di P.

Dalla (3) si ha

$$k = -\frac{p_\varphi}{p_\psi},$$

essendo

$$p_\varphi = \varphi'_{x_1}x + \varphi'_{y_1}y + \varphi'_{z_1} = 0 \qquad p_\psi = \psi'_{x_1}x + \psi'_{y_1}y + \psi'_{z_1} = 0$$

le equazioni delle polari di P rispetto a $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Se sostituiamo nella (2) il precedente valore di k si ha pel luogo richiesto l'equazione

$$(\varphi'_x\,\varphi'_y)p_\psi^2 + [(\varphi'_x\,\psi'_y) + (\psi'_x\,\psi'_y)]p_\psi\,p_\varphi + (\psi'_x\,\psi'_y)p_\varphi^2 = 0.$$

Parte II. — **Risoluzione del sig. Barisien.**

L'equazione dei circoli di un fascio riferito all'asse radicale e alla retta dei centri è

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y + \mathrm{K} = 0,$$

dove K è fisso e λ variabile. La retta che unisce il punto fisso $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ col centro $(0, \lambda)$ del circolo ha per equazione

$$\frac{y - \lambda}{y_1 - \lambda} = \frac{x}{x_1}$$

ovvero

$$\lambda(x - x_1) = xy_1 - yx_1.$$

La polare di P rispetto al circolo ha per equazione

$$xx_1 + yy_1 - \lambda(y + y_1) + \mathrm{K} = 0.$$

Eliminando λ fra le due ultime equazioni si ha

$$(xx_1 + yy_1 + K)(x - x_1) = (y + y_1)(xy_1 - yx_1)$$

ossia

$$x^2 + y^2 - x\left(\frac{x_1^2 + y_1^2 - K}{x_1}\right) - K = 0.$$

Il luogo cercato è dunque un circolo che passa per P ed ha il centro sull'asse radicale del fascio dato.

607. *La retta che unisce un punto M di un'iperbole con uno dei fuochi incontra in N, N' gli assintoti. Dimostrare che le lunghezze MN, MN' sono funzioni razionali delle coordinate di M.*

BARISIEN.

Risoluzione della sig.na Longobardi.

Sia $M(x_1, y_1)$ un punto dell'iperbole

(1) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Un fuoco dell'iperbole è $F(c, o)$, essendo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, e le equazioni dei suoi assintoti sono

(2) $$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

L'equazione di MF è

(3) $$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1 - c}(x - x_1).$$

La retta (3) incontra le rette (2) nei punti

$$N\left(\frac{acy_1}{ay_1 - b(x_1 - c)}, \frac{bcy_1}{ay_1 - b(x_1 - c)}\right)$$

$$N' = \left(\frac{acy_1}{ay_1 + b(x_1 - c)}, \frac{-bcy_1}{ay_1 + b(x_1 - c)}\right)$$

si ha dunque

$$MN = \frac{(ay_1 - bx_1)(cx_1 - a^2)}{a[ay_1 - b(x_1 - c)]}$$

$$MN' = \frac{(ay_1 + bx_1)(cx_1 - a^2)}{a[ay_1 + b(x_1 - c)]}$$

cioè le lunghezze di MN e MN' sono funzioni razionali delle coordinate x_1, y_1, di M.

Altra risoluzione del sig. Occhipinti.

608. *Luoghi dei fuochi e dei vertici delle coniche tangenti a due rette date in due punti dati.*

609. *Luogo dei vertici delle iperboli che hanno un assintoto fisso e sono tangenti ad una retta data in un punto dato.*

BARISIEN.

Risoluzione della sig.a Longobardi.

1) Le rette date siano gli assi, ω il loro angolo e (a, o), (o, b) siano i punti dati.

L'equazione d'ogni conica avente un dato fuoco (x, y) è

(1) $$(x - X)^2 + (y - Y)^2 + 2(x - X)(y - Y)\cos\omega = (Ax + By + C)^2.$$

Le ascisse x dei punti di incontro della (1) con l'asse della x sono da

$$(x - X)^2 + Y^2 - 2(x - X)Y\cos\omega = (Ax + C)^2$$

cioè sono le radici dell'equazione

$$(2) \qquad x^2(1-A^2) - 2x(X + Y\cos\omega + AC) + X^2 + Y^2 + 2XY\cos\omega - C^2 = 0.$$

La (1) è tangente dell'asse della x nel punto $(a, 0)$ se le due radici di (2) sono eguali ad a; e ciò ha luogo se

$$(X + Y\cos\omega + AC)^2 = (1-A^2)(X^2 + Y^2 + 2XY\cos\omega - C^2)$$
$$\frac{X + Y\cos\omega + AC}{1-A^2} = a.$$

Dalle precedenti si ha

$$A^2 = \frac{a^2 + C^2 - (X^2 + Y^2 + 2XY\cos\omega)}{a^2}$$
$$AC = \frac{X^2 + Y^2 + 2XY\cos\omega - C^2 - a(X + Y\cos\omega)}{a}$$

donde

$$\frac{a^2 + C^2 - (X^2 + Y^2 + 2XY\cos\omega)}{a^2} = \left[\frac{X^2 + Y^2 + 2XY\cos\omega - C^2 - a(X + Y\cos\omega)}{aC}\right]^2$$

ovvero

$$(3)\ C^2[a^2 + X^2 + Y^2 + 2XY\cos\omega - 2a(X + Y\cos\omega)] = [X^2 + Y^2 + 2XY\cos\omega - a(X + Y\cos\omega)]^2.$$

Similmente, pel contatto con l'asse delle y nel punto (o, b) si ha l'altra equazione

$$(4)\ C^2[b^2 + X^2 + Y^2 + 2XY\cos\omega - 2b(X\cos\omega + Y)] = [X^2 + Y^2 + 2XY\cos\omega - b(X\cos\omega + Y)]^2.$$

Eliminando C^2 tra (3) e (4) si ha l'equazione del luogo dei fuochi (X, Y) delle coniche tangenti all'asse delle x nel punto (a, o) e all'asse delle y nel punto (o, b). Detto luogo è la quartica

$$(5) \qquad (X^2 + Y^2 + 2XY\cos\omega)(b^2X^2 - a^2Y^2) -$$
$$- 2ab[bX^2(X + Y\cos\omega) - aY^2(X\cos\omega + Y)] + a^2b^2(X^2 - Y^2) = 0$$

che ha un punto doppio nell'origine.

2) Le equazioni delle coniche tangenti agli assi nei punti $(a, o), (o, b)$ sono date da

$$(6) \qquad (bx + ay - ab)^2 + Kxy = 0$$

al variare di K, e le coordinate x, y del centro sono date dalle equazioni

$$2b(bx_1 + ay_1 - ab) + ky_1 = 0 \quad ; \quad 2a(bx_1 + ay_1 - ab) + kx_1 = 0.$$

Il coefficiente di direzione del diametro per un punto (x, y) della (6) è

$$m = \frac{y(k + 4ab) - 2ab^2}{x(k + 4ac) - 2a^2b}.$$

Il coefficiente di direzione della tangente alla (6) nel suo punto (x, y) è

$$m' = -\frac{2b(bx + ay - ab) + ky}{2a(bx + ay - ab) + kx}.$$

Il punto (x, y) è un vertice di (6) se il diametro e la tangente per esso sono perpendicolari: ciò ha luogo se

$$(m + m')\cos\omega + mm' + 1 = 0$$

ovvero

$$[2a(bx+ay-ab)+kx][x(k+4ab)-2a^2b]-[2b(bx+ay-ab)+ky][y(k+4ab)-2ab^2]=$$
$$=2\cos\omega(bx-ay)[(k+4ab)(bx+ay)-4a^2b^2].$$

Eliminando k tra la precedente e la (6) si ha l'equazione dei luogo dei vertici delle coniche tangenti all'asse delle x nel punto (a, o) e all'asse delle y nel punto (o, b) detto luogo è la curva di quinto ordine

$$\begin{aligned} & x^2[ab(2bx-ab)-(bx-ay)^2](-bx+ay+ab)- \\ & -y^2[ab(2ay-ab)-(bx-ay)^2](bx-ay+ab)- \\ & -2xy\cos\omega(bx-ay)[ab(bx+ay)-(bx-ay^2]=0 \end{aligned}$$

che ha un punto triplo nell'origine.

3) Ponendo nella (5) e nell'ultima equazione $b=\infty$ si hanno le equazioni dei luoghi dei fuochi e dei vertici delle coniche che sono tangenti nel punto (a, o) all'asse della x e hanno l'asse delle y per assintoto.

Dette equazioni sono

$$x^2[x^2+y^2+2xy\cos\omega-2a(x+y\cos\omega)]+a^2(x^2-y^2)=0$$
$$x^2(a-x)[(a-x)^2+2xy\cos\omega]-y^2(a^2+x^2)(a+x)=0$$

e l'ultima risolve la quistione 609.

Altra risoluzione del sig. Occhipinti.

610. (700) (*) *Trovare la relazione che deve esistere tra i coefficienti del polinomio* $f(x)=a_1x^m+a_2x^{m-1}+\ldots+a_mx+a_{m+1}$ *perchè sia divisibile per* $x^2-\alpha^2$.

CANDIDO.

Risoluzione del sig. Occhipinti.

Affinchè $f(x)$ sia divisibile per $x^2-\alpha^2$ è necessario e sufficiente che lo sia per $x-\alpha$ e per $x+\alpha$, cioè che si abbia contemporaneamente: $f(\alpha)=0$, $f(-\alpha)=0$ da cui, eliminando α, si ha

$$\begin{vmatrix} 0\ldots\ldots 0 & 0 & a_1 & a_2\ldots\ldots a_m & a_{m+1} \\ 0\ldots\ldots 0 & a_1 & a_2 & a_3\ldots\ldots a_{m+1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1\ldots\ldots a_{m-2} & a_{m-1} & a_m & a_{m+1}\ldots\ldots 0 & 0 \\ 0\ldots\ldots 0 & 0 & (-1)^m a_1 & (-1)^{m-1}a_2\ldots -a_m & a_{m+1} \\ 0\ldots\ldots 0 & (-1)^m a_1 & (-1)^{m-1}a_2 & (-1)^{m-2}a_3\ldots a_{m+1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^m a_1\ldots a_{m-2} & a_{m-1} & -a_m & a_{m+1}\ldots\ldots 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

614. (704) *Si consideri il sistema di circoli tangenti in un punto fisso* M *ad una parabola data. Il luogo del punto d'incontro delle tangenti comuni alla parabola e ad uno di tali circoli (distinti dalla tangente in* M*), è una parabola.*

BARISIEN.

Risoluzione del sig. Occhipinti.

Sia MT la tangente in M; fissata una tangente p alla parabola, è determinato un sol cerchio tangente alla p ed alla TM in M (escludendo fra le tangenti co-

(*) Le quistioni numerate dal 610 al 615 corrispondono a quelle del fascicolo precedente dal 700 al 705 così numerate in causa di un errore tipografico.

muni la TM), e quindi una tangente q comune alla parabola ed al cerchio (diversa da p e TM). Viceversa data una tangente q è determinata pure unicamente, colla stessa costruzione, una tangente p.

Si consideri allora una trasversale r arbitraria: fra le serie di punti d'incontro della r con le rette p e q interviene una corrispondenza tale, che, ad un punto (intersezione di r con p) corrisponda un punto Q (intersezione di r con q) e viceversa. Dunque si hanno su R due punti di coincidenza, cioè due punti del luogo cercato che è perciò una conica. Esso passa evidentemente per M.

Per decidere della natura di essa osserviamo che, quando il raggio del cerchio tangente alla parabola in M cresce indefinitamente, il punto di concorso delle due tangenti comuni (distinte dalla tangente in M) si allontana indefinitamente da M, dunque al limite, quando il cerchio si riduce alla retta doppia MT su cui si confondono le tangenti comuni il punto di concorso (punto del luogo) sarà all'infinito sulla retta MT.

La conica è dunque una parabola il cui asse è la retta MT ed il cui vertice è M.

Altra risoluzione del sig. Niccolai.

QUISTIONI PROPOSTE

616. Gli archi massimi condotti da un punto P ad un circolo minore, della superficie sferica verificano la relazione

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}\,PM\,.\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\,P_1M = \text{costante}.$$

CASSANI.

617. Si descrivano tre semiperbole ciascuna delle quali abbia per assintoti due lati di un triangolo equilatero, e sia tangente al terzo. La minima distanza fra due di esse è $(\sqrt{2}-1)\,l$, essendo l la lunghezza del lato del triangolo. GREENSTREET.

618. Calcolare il raggio del circolo tangente ad una data iperbole e ad uno dei suoi assintoti nel centro dell'iperbole.

Caso dell'iperbole equilatera.

619. Il luogo dei punti d'incontro di due parabole che, essendo tangenti ad una retta fissa ed avendo un fuoco comune in un punto dato, hanno inoltre costante l'angolo dei loro assi, si compone di due circoli.

620. Si proietti un punto M variabile di una ellisse sui due assi in P e Q, e si proiettino i punti P, Q in P', Q' sulla tangente e in P'', Q'' sulla normale in M alla ellisse.

Si trovino le aree delle curve del sesto ordine luoghi dei punti P', Q', P'', Q'', e delle curve di sest'ordine inviluppi delle rette PP', PP'', QQ', QQ''.

E.-N. BARISIEN.

BIBLIOGRAFIA

Scentia. *Série Phisico-Mathématique.* Paris, C. Naud.

N. 16. EUGENIO NÉCULCÉA. — *Il fenomeno di Kerr ed i fenomeni elettro-ottici*, Febbraio 1902.

In questa notevole monografia viene esaminato con molta profondità il *fenomeno di Kerr* o della *doppia rifrazione elettrica*, corrispondente al fatto che un mezzo isotropo diviene birifrangente sotto l'azione di un campo elettrico.

Nella prima parte del lavoro sono ricordate le ricerche sperimentali. Cioè Kerr, disponendo convenientemente fra gli elettrodi del secondario di un rocchetto di Ruhmkorff una lamina di vetro ed osservandola attraverso un polariscopio, vide ch'essa esercitava un'azione depolarizzante sulla luce che l'attraversava in direzione normale alle linee di forza elettrica. L'effetto era massimo, se il piano di polarizzazione era a 45° delle linee di forza (1ª posizione); irregolare o nullo, se questo era parallelo o normale ad esse (2ª posizione). Inoltre esigeva un certo tempo a prodursi e scomparire; cresceva d'intensità colla tensione elettrica; mentre il verso delle linee di forza non aveva influenza. L'azione del campo elettrico corrispondeva all'effetto prodotto da una *compressione* pel vetro e pel quarzo ed a quello di una *trazione* per la resina.

Kerr attribuì il fatto all'orientazione polare delle particelle del dielettrico sotto l'azione del campo, in armonia all'ipotesi di Faraday sulla polarizzazione elettrica dei dielettrici.

Brongersma riprese le esperienze di Kerr, migliorando le condizioni sperimentali, e potè seguire e descrivere i diversi aspetti che, col variare d'intensità del campo, presenta la luce attraverso una lamina di vetro e di spato, quando il piano di polarizzazione è nella 1ª e 2ª posizione.

Kerr verificò che il fatto si presenta anche nei liquidi, con modalità affatto analoghe quando si passa dalla 1ª alla 2ª posizione. Però in tal caso il fenomeno è istantaneo e la luce trasmessa varia assai d'intensità con quella del campo, presentando colla 1ª posizione due plaghe molto intense vicino agli elettrodi e sfumata verso l'equatore e dintorni, e presentando colla 2ª posizione solo un sottile orlo di luce vivissima alle estremità ed una debole illuminazione nel resto del campo visivo, mentre che una zona equatoriale molto estesa resta oscura. Per alcune sostanze, le più numerose, il raggio è polarizzato perpendicolarmente alle linee di forza (corpi otticamente elettro-positivi), per altre invece è polarizzato parallelamente alle linee stesse (corpi otticamente elettro-negativi). I dielettrici positivi agiscono come il vetro sottoposto a trazione secondo una direzione parallela alle linee di forza, i negativi come il vetro compresso. Vi è poi una relazione intima fra i caratteri chimici dei composti ed il loro potere elettro-ottico.

Röntgen, ripetendo le ricerche di Kerr sui liquidi, ne conferma i risultati, osservando in più che, quando il piano di polarizzazione passa dalla 1ª alla 2ª posizione, il fenomeno è complementare.

Tale fatto potè meglio essere precisato e descritto da Brongersma, il quale, usando a vicenda elettrodi sferici col metallo nudo e ricoperto di vetro (come due bulbi di termometro) potè altresì notare che nel 1° caso il liquido è in continuo movimento, mentre nel 2° sta in quiete. Non osservò invece, come apparve a Kerr ed a Röntgen una scarica oscura attraverso il dielettrico, la quale avrebbe una notevole importanza per l'ipotesi di un'azione perturbatrice esercitata dall'elettricità sulla luce.

Dalle ricerche quantitative risultò a Kerr che, in un campo elettrico uniforme, *la differenza di cammino, espressa in lunghezza d'onda, delle due componenti della luce polarizzata perpendicolarmente e parallelamente alla direzione del campo è proporzionale al quadrato della forza elettrica.*

Della costante di proporzionalità, detta *costante di Kerr*, viene riferito poi il calcolo e la misura assoluta di Lemoine. E per essa, definita come *il ritardo, espresso in lunghezza d'onda, di una vibrazione luminosa polarizzata in un piano normale alla forza elettrica, l'intensità di questa essendo di* 1 U. E. S. *e lo spessore, attraversato dal raggio luminoso in direzione perpendicolare, di 1 cm.*, risulta il valore di $3{,}70 \,.\, 10^{-7}$.

Infine vengono ricordate le ricerche di Blondlot e quelle di Abraham e Lemoine, dirette a stabilire se decorre un tempo apprezzabile fra l'azione del campo e l'apparire della birifrangenza nei liquidi, le quali portarono rispettivamente alla conclusione che, se ritardo vi è, esso non può superare $\frac{1}{40000}$ ed $\frac{1}{400000000}$ di 1'', e viene inoltre ricordata la disposizione di Rücker per proiettare il fenomeno di Kerr.

Nella seconda parte è esposta la teoria matemetica di Pockels, fondata sull'ipotesi che la costante dielettrica del mezzo coibente varii proporzionalmente all'intensità del campo, e quella di Voigt, il quale parte dalle equazioni sulla teoria elettromagnetica della luce, che Hertz generalizzò per la spiegazione dei fenomeni di dispersione, e le modifica in altre ancor più generali, per adattarle alla spiegazione delle azioni ottiche di un campo elettrico, mediante le ipotesi semplici che l'azione del campo dipenda dalla presenza delle particelle ponderabili, che i fenomeni sieno conservativi, che abbia luogo la sovrapposizione di vibrazioni differenti, che le componenti del campo debbano entrare colla potenza più piccola possibile; equazioni, le quali possono spiegare i fenomeni già osservati e suggerire nuove esperienze per fenomeni che sembrano risultare dalla teoria, ma che ancora non furono confermati dall'esperienza.

A tale proposito nella terza parte è studiato analiticamente un fenomeno elettrico analogo al fenomeno di Zeeman. Vale a dire le formole di Voigt per i mezzi che danno bande di assorbimento intense prevedono, come azione del campo elettrico, degli spostamenti o degli sdoppiamenti di questi raggi. Ora tale azione elettrica sulla posizione delle bande di assorbimento, analoga all'azione magnetica conosciuta, può essere considerata come l'inverso del fenomeno di Zeeman. La discussione assegna al fenomeno un valore piccolissimo, e quest'è la ragione per cui non fu ancora avvertito.

Nell'*Appendice* infine è fatta menzione delle ricerche di Schmidt, il quale trovò che il fenomeno di dispersione, legato a quello della doppia rifrazione elettrica, varia da una sostanza all'altra; che la costante elettro-ottica diminuisce colla temperatura e non è una costante addiettiva, inquantochè le soluzioni non sembrano in proposito seguire alcuna legge semplice.

GEROSA.

Opere matematiche di Francesco Brioschi. Tomo II. Hoepli, 1902.

Annunziammo già il principio di questa importantissima pubblicazione fatta dall'editore U. Hoepli, coi tipi della tip. matematica di Palermo sotto gli auspici del comitato per le onoranze al grande matematico estinto.

Il II° volume testè apparso alla luce comprende 35 memorie inserite negli *Annali di matematica pura ed applicata* dal 1858 al 1887, cioè dal tomo I, della Iª serie al tomo XIV della IIª serie. Revisori del volume sono stati i professori Cerruti, Gerbaldi, Loria, Pascal, Pittarelli, Reina, Tonelli.

Opere matematiche di Eugenio Beltrami, pubblicate per cura della facoltà di scienze della R. Università di Roma. Tomo I con ritratto e biografia dell'Autore. Hoepli, 1902.

Eugenio Beltrami era stato incaricato col Cremona di dirigere la stampa delle opere del Brioschi, ma nel febbraio del 1900 lo seguì nella tomba ed immediatamente la facoltà di scienze di Roma, decretò di raccogliere e ripubblicare in edizione nuova e completa tutti i suoi scritti scientifici.

Ed ora è uscito il primo, dei quattro volumi almeno, che costituiranno l'intera collezione, nello stesso formato delle opere del Brioschi.

Questo I volume comincia con un estratto della bella commemorazione del Beltrami letta dal senatore Cremona nella solenne adunanza dell'Accademia dei Lincei tenuta il 10 giugno 1900, e contiene 26 Memorie pubblicate nei primi 8 anni di studio cioè dal 1861 al 1868 in vari giornali italiani e stranieri. Fra queste si trovano le celebri memorie: *Ricerche di analisi applicata alla geometria. — Sulla flessione delle superfici rigate. — Risoluzione del problema: Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette. — Delle variabili complesse sopra un piano qualunque. — Saggio d'interpetrazione della geometria non-Euclidea. — Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante.*

Ronca e Bassani. — *Balistica esterna.* Ronca. — *Manuale di Balistica esterna.* Ronca. — *Manuale del tiro.* Pesci e Ronca. — *Abbachi per il tiro.* Ronca e Pesci. — *Abbachi generali della Balistica*	Tip. Giusti Livorno, 1902.

Non è dell'indole di questo giornale il parlare di libri tecnici, ma quelli di cui vogliamo occuparci (con la brevità che ci è imposta dalla ristrettezza dello spazio) hanno un carattere che interessa anche i giovani studiosi delle scienze esatte, perchè sono un esempio di una delle tante utili e immediate applicazioni alle cose pratiche e più comuni della vita, a cui conducono le matematiche pure. Infatti dai libri in parola appare come, partendo da teorie matematiche, si possa arrivare, con processo continuo alle più importanti applicazioni dell'alta Balistica e mano mano fino alle più semplici e pratiche regole di tiro che si insegnano ai tiratori di fucili e di cannone.

Gli autori della Balistica, cominciano per trattare un problema noto di meccanica " il movimento dei proiettili nel vuoto, ma ne traggono occasione per parlare del tiro e per dedurre regole e formole che si applicano anche nell'aria. Segue poi un lungo ed interessante studio del problema fisico della resistenza dell'aria, problema che finora la scienza non ha ancora saputo completamente risolvere. E perciò gli A. non potendo in un trattato occuparsi di teorie più o meno complete e fondate, hanno principalmente mostrate le soluzioni sperimentali del detto problema.

Ma hanno raccolto una così lunga messa di dati e leggi sperimentali, ed hanno saputo dare all'interessante soggetto uno svolgimento così chiaro e così completo, che gli studiosi di fisica potranno rendersi un conto esatto di ciò che gli artiglieri richiedono da loro e trovare argomento di ricerche importantissime.

Agli autori lo studio in parola è poi servito per stabilire il modo di considerare la resistenza, nella soluzione del problema del moto dei proiettili nell'aria, problema a cui essi dedicano, come è naturale, la maggior parte del libro ed intorno al quale, mentre presentano molte quistioni originali, ed altre mettono sotto una luce nuova, fanno interessanti ricerche proprie che saranno assai utili ai pratici.

Inoltre la quistione generale è stabilita con notevole chiarezza e sono raccolte le soluzioni più importanti fornite finora dai vari autori. Ma questa raccolta è coordinata con un indirizzo unico e logico, in modo che il lettore non perde mai di vista lo scopo proposto, e si rende un conto chiaro delle gravi difficoltà del problema e dei vantaggi delle varie soluzioni. Sono così ricordate, e ciò interessa anche gli studiosi di matematiche, le opere dei più illustri scenziati che si occuparono di artiglieria nei due secoli scorsi e di ognuno è dato un riassunto più o meno esteso secondo l'interesse che presenta. Naturalmente quindi la maggiore ampiezza di esposizione è data all'opera oramai celebre del Siacci, e gli A. con molta cura ne mettono in mostra tutta l'importanza.

Espongono poi largamente una soluzione da essi stessi trovata, e finalmente completano il capitolo con uno studio anch'esso originale, inteso a fornire i mezzi per legare le formule del tiro con i risultati del tiro, ciò che è naturalmente di una importanza pratica notevole.

Dopo ciò seguono altri argomenti di carattere tecnico, tra i quali importa rilevare quello importantissimo relativo al modo di costruire le tavole di tiro che è trattato con speciale competenza, e finalmente il libro termina con un esteso studio sul calcolo delle probabilità.

Completa il libro stesso un Manuale di Balistica che contiene tutte le tavole numeriche che servono alla Balistica e tutti gli esempi numerici delle numerose teorie che in essa sono trattate.

Ma questo secondo libro è molto più di un semplice manuale, perchè costituisce per sè stesso un trattato in cui sono state soppresse le dimostrazioni delle formole, per sostituirle con esempi numerici. Numerose citazioni indicano i punti della Balistica dove quelle dimostrazioni si trovano e così il lettore, mentre ha tracciata chiaramente la via da seguire per risolvere ogni questione, ha il modo di rendersi conto di quello che A. S'intende perciò che il libro, nonostante il modesto titolo, non è da confondere con gli ordinari aridi manuali, e mentre non potremo mai dire abbastanza la sua grande utilità per le applicazioni, lo riteniamo prezioso per i pratici.

Nel manuale stesso si mostra anche come i problemi della Balistica si possono risolvere senza calcoli di sorta con i metodi della Nomografia, ed a questo scopo risponde l'Album degli Abbachi generali della Balistica che costituisce un vero trionfo della Nomografia stessa.

Il " Manuale del Tiro „ si occupa di questioni assolutamente tecniche. L'autore dopo aver ricordate le formole fondamentali della Balistica ne deduce quelle che l'artiglieria impiega durante i tiri: studia poi le cause di variazioni del movimento dei proiettili e le regole di correzione, le probabilità pratiche di colpire, la ricerca degli elementi di tiro col sussidio delle tavole di tiro e degli abbachi, gli effetti dei proiettili e finalmente i metodi per eseguire e dirigere il tiro.

La Letteratura militare è ricchissima di opere sul tiro, ma nessuno aveva tentato fin'ora di riunire in un libro solo tutti gli argomenti ad esso relativo.

L'autore perciò ha fatto un libro nuovo nella forma, importante nello scopo. originale in gran parte nella sostanza e che merita la maggior considerazione.

L'esposizione delle formole del tiro è molto chiara ed ordinata. Il capitolo sulla correzione del tiro è in gran parte originale e fornisce una raccolta di regole applicabili tanto in mare che in terra, ciò che rappresenta una interessante novità. Lo studio sulle probabilità di colpire, nuovo specialmente per ciò che riguarda il tiro navale, ed in gran parte per ciò che riguarda le tolleranze nel tiro, interessa anche i profani e conduce l'autore ad elevate conseguenze sul modo di combattere. Lo studio sulla ricerca degli elementi del tiro porta l'autore ed il prof. Pesci a numerose applicazioni di Nomografia e si può affermare che mai questa nuova scienza fu così largamente adoperata per risolvere le questioni pratiche. L'album poi che contiene gli abbachi *(abbachi per il tiro)* è una vera novità e, perchè fin'ora, mai era apparso tutto un album nomografico applicato ad una particolare scienza.

Lo studio sull'effetto dei proiettili è completo ed interessante ed è arricchito da una notevole formola di perforazione dell'autore, e finalmente la raccolta delle regole per eseguire e dirigere il tiro, oltre a riuscire molto utile, perchè permette di studiare e paragonare specie di tiri differentissime, contiene le regole del tiro navale che costituisce uno studio originale mai finora tentato in una maniera così completa.

G. P.

Hilbert. — *The fundations of geometry* Autorized translation by E. J. Townsend Ph. D. Chicago. — The open court publishing company, 1902.

L'originale tedesco ebbe origine dal corso di letture fatto dall'autore sulla geometria Euclidea durante il semestre invernale 1898-99, e fu pubblicato nel 1899 in occasione della inaugurazione del monumento a Gauss-Weber in Gottinga. Poco dopo ne fu fatta una traduzione francese con aggiunte, ed ora il prof. Townsend dell'Università d'Illinois ne ha pubblicata la traduzione inglese.

Come si capisce dal titolo, il libro è un nuovo tentativo di una scelta di *postulati semplici, completi* e *indipendenti* su cui si possa fondare l'intera geometria Euclidea, che deve aggiungersi ai molti di cui è ricca la nostra letteratura, fra i quali primeggiano i *fondamenti* del nostro Veronese.

Giulio Lazzeri — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 30 settembre 1902.

SULLE PRINCIPALI

operazioni dell'analisi combinatoria formale e su alcune loro applicazioni relative allo sviluppo rapido dei determinanti e degli iperdeterminanti.

(Continuaz., e fine v. fasc. precedente)

Enumerazione delle combinazioni relative ad una matrice qualunque. — Occupiamoci ora della determinazione del numero delle combinazioni relative alla matrice T suddetta.

Indicandolo col simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_i \ldots v_j \ldots v_n \\ r_1 \ldots\ldots\ldots r_m \end{bmatrix}$, si dirà che la serie dei numeri $v_1, \ldots v_n$ è il numeratore di esso. e la serie dei numeri $r_1 \ldots r_m$ il denominatore; sarà al solito $\Sigma v = \Sigma r$; $r_i \leq m$; $r_j \leq n$. Vedremo tra breve in qual modo, dato un sistema di valori delle v ed r soddisfacenti a tali condizioni, si possa giudicare se il valore del suddetto simbolo è o non è diverso da zero: in altri termini se esiste o non esiste almeno una combinazione relativa alla matrice T. Intanto osserviamo che:

1°. Il valore del suddetto simbolo è indipendente dall'ordine di successione delle v e delle r. Infatti $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_j \ldots v_i \ldots v_n \\ r_1 \ldots\ldots\ldots r_m \end{bmatrix}$ è il numero delle combinazioni relative alla matrice

$$\begin{array}{cc} v_1 \ldots v_{i-1}, v_j, v_{i+1} \ldots v_{j-1}, v_i, v_{j+1} \ldots\ldots v_n & \\ \mathrm{T}_1 \equiv \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{mn} \end{Vmatrix} & \begin{matrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{matrix} \end{array} \quad (*)$$

Ora se $a_{i\alpha}, a_{i\beta}, \ldots a_{i\lambda}$; $a_{j\mu}, a_{j\nu}, \ldots a_{j\varrho}$ sono elementi delle verticali i^{ma} ed j^{ma} della T, appartenenti ad una combinazione ad essa relativa, sostituendo ad essi rispettivamente $a_{j\alpha}, a_{j\beta}, \ldots a_{j\lambda}$; $a_{i\mu}, a_{i\nu}, \ldots a_{i\varrho}$, si ha una combinazione relativa alla T_1 e viceversa. Pertanto il numero delle combinazioni relative alla T è uguale a quello delle combinazioni relative alla T_1 e viceversa. Segue che il valore del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1 \ldots r_m \end{bmatrix}$ non cambia scambiando tra loro due delle v; esso è pertanto indipendente dall'ordine di successione delle v. Analogamente si dimostra che esso è indipendente dall'ordine di successione delle r.

2°. Il valore del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1 \ldots r_m \end{bmatrix}$ non cambia, scambiando il nu-

---

(*) Scriveremo anche in seguito sopra ciascuna verticale ed a destra di ciascuna orizzontale di una matrice, il numero che indica quanti elementi di tal verticale od orizzontale devono appartenere a ciascuna combinazione relativa ad essa matrice.

meratore ed il denominatore. Infatti ciò equivale a ruotare di $90^\circ \curvearrowright$ la matrice T.

3°. In ogni combinazione relativa alla T si trovano v_η elementi $a_{h\eta}, a_{k\eta}, \dots a_{s\eta}$ appartenenti alla η^{ma} verticale di T; il complesso di tali elementi è una delle combinazioni v_η a v_η delle $a_{1\eta}, a_{2\eta}, \dots a_{m\eta}$; il complesso degli elementi rimanenti appartenenti alla suddetta combinazione è una delle combinazioni relative alla matrice.

$$\begin{array}{cl} \begin{matrix} v_1 & \dots v_{\eta-1} & , \; v_{\eta+1} & \dots v_n \end{matrix} & \\ \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots a_{1,\eta-1} & a_{1,\eta+1} & \dots a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots a_{m,\eta-1} & a_{m,\eta+1} & \dots a_{mn} \end{matrix} \right\| & \begin{matrix} r_1 \\ \vdots \\ r_h - 1 \\ \vdots \\ r_k - 1 \\ \vdots \\ r_s - 1 \\ \vdots \\ r_m \end{matrix} \end{array}$$

Il numero di tali combinazioni è $\begin{bmatrix} v_1 \dots v_{\eta-1}, v_{\eta+1} \dots v_n \\ r_1, \dots r_h - 1, \dots r_k - 1, \dots r_s - 1, \dots r_m \end{bmatrix}$. Si ha pertanto:

$$\begin{bmatrix} v_1 v_2 \dots v_{\eta-1}, v_\eta, v_{\eta+1} \dots v_n \\ r_1 r_2 \dots\dots\dots\dots r_m \end{bmatrix} = \sum_{h,k,\dots s} \begin{bmatrix} v_1 v_2 \dots v_{\eta-1}, v_{\eta+1} \dots\dots v_n \\ r_1, \dots r_h - 1 \dots r_k - 1, \dots r_s - 1, \dots r_m \end{bmatrix} \quad (22)$$

intendendo il segno Σ esteso a tutte le combinazioni $h, k, \dots s$, (v_η a v_η), dei numeri $1, 2, \dots m$, e supponendo soppressi nel denominatore $r_1, \dots, r_h - 1, \dots r_m$ quelli fra i termini $r_h - 1, r_k - 1, \dots r_s - 1$ che sono uguali a zero. Similmente si ha:

$$\begin{bmatrix} v_1 v_2 \dots\dots\dots\dots v_n \\ r_1 \dots r_{\theta-1}, r_\theta, r_{\theta+1} \dots r_m \end{bmatrix} = \sum_{h,k,\dots s} \begin{bmatrix} v_1, \dots v_h - 1, \dots v_k - 1, \dots v_s - 1, \dots v_n \\ r_1 \dots\dots r_{\theta-1}, r_{\theta+1} \dots\dots r_m \end{bmatrix} \quad (23)$$

intendendo il segno Σ esteso alle combinazioni $h, k, \dots s$, (r_θ ad r_θ) dei numeri $1, 2, \dots n$, e supponendo soppressi nel numeratore $v_1 \dots, v_h - 1 \dots v_n$ quelli fra i termini $v_h - 1, v_k - 1 \dots v_s - 1$ che sono uguali a zero.

In seguito, alle (22) e (23) daremo una forma più comoda dal punto di vista pratico; osserviamo intanto che quando uno dei numeri n ed m è uguale a 3, esso permettono di calcolare con facilità il valore del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \dots v_n \\ r_1 \dots r_2 \end{bmatrix}$. Si voglia ad es. calcolare il valore del simbolo $\begin{bmatrix} 1\,1\,1\,2\,2 \\ 2\,3\,2 \end{bmatrix}$. Trattando della formazione ed enumerazione delle combinazioni relative ad una matrice di dimensioni $\longrightarrow n$ e $\updownarrow 2$ si è visto che il loro numero si calcola colla formola

$$\begin{bmatrix} v_1 \dots v_n \\ r_1 \; r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{(p_1)} \; 2_{(p_2)} \\ r_1 \; r_2 \end{bmatrix} = \binom{p_1}{r_1 - p_2} = \binom{p_1}{r_2 - p_2}$$

Si ha del pari:

$$\begin{bmatrix} v_1\ v_2 \\ r_1 \ldots r_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1\ v_2 \\ 1_{q_1}\ 2_{q_2} \end{bmatrix} = \binom{q_1}{v_1 - q_2} = \binom{q_1}{v_2 - q_2}$$

dove q_1 e q_2 è il numero degli elementi del denominatore $r_1, \ldots r_m$ rispettivamente uguali ad 1 e 2.

Ora si ha applicando la (23):

$$\begin{bmatrix} 11122 \\ 232 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 00122 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 01022 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 01112 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 01121 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10022 \\ 23 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 10112 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10121 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11012 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11021 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11111 \\ 23 \end{bmatrix}$$

e sopprimendo gli zeri nei numeratori dei termini del 2° membro

$$\begin{bmatrix} 11122 \\ 232 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 122 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 122 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1112 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1121 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 122 \\ 23 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 1112 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1121 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1112 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1121 \\ 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11111 \\ 23 \end{bmatrix} =$$
$$= 1 + 1 + 3 + 3 + 1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 10 = \text{trentuno.}$$

Quando uno dei numeri n ed m sia uguale a 4, il simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1 \ldots r_m \end{bmatrix}$ si potrà esprimere, ricorrendo alle (22) e (23), per mezzo di simboli contenenti al numeratore od al numeratore tre soli termini, (numeri), ed il valore di questi nuovi simboli si potrà facilmente calcolare; ma in seguito impareremo un processo più rapido per calcolare in ogni caso il valore di $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1 \ldots r_m \end{bmatrix}$.

La proprietà (1) del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \\ r_1 \ldots r_m \end{bmatrix}$ ci permette di ridurlo, se già non lo è, alla forma

$$\begin{bmatrix} \overbrace{1\ldots1}^{p_1}\ \ \overbrace{2\ldots2}^{p_2} \ldots\ldots \overbrace{m\ldots m}^{p_m} \\ \underbrace{1\ldots1}_{q_1}\ \ \underbrace{2\ldots2}_{q_2} \ldots\ldots \underbrace{n\ldots n}_{q_n} \end{bmatrix} \qquad (\alpha)$$

che diremo *forma canonica secondaria*, disponendo gli elementi del numeratore (denominatore) in modo che percorrendolo da sinistra a destra si incontrino prima quelli uguali ad 1, poi quelli uguali a 2, ... infine quelli uguali ad m (n). Sia p_i, $(i = 1, \ldots m)$, il numero degli elementi del numeratore uguali ad i e q_i, $(i = 1, \ldots n)$, il numero di quelli del denominatore pure uguali ad i. Convenzionalmente scriveremo il simbolo $\left\{ \begin{matrix} p_1\ p_2 \ldots p_m \\ q_1\ q_2 \ldots q_n \end{matrix} \right\}$ invece del simbolo (α).

Adunque è, per convenzione,

$$\left[\begin{matrix} \overbrace{1\ldots1}^{p_1}\ldots\overbrace{m\ldots m}^{p_m} \\ \underbrace{1\ldots1}_{q_1}\ldots\underbrace{n\ldots n}_{q_n} \end{matrix}\right] = \left\{\begin{matrix} p_1\ldots p_m \\ q_1\ldots q_m \end{matrix}\right\}$$

Indicando con $i_{(p_i)}$ una successione $i\,i\ldots i$ di p_i numeri uguali ad i si ha pure:

$$\left[\begin{matrix} 1_{(p_1)}\ldots m_{(p_m)} \\ 1_{(q_1)}\ldots n_{(q_n)} \end{matrix}\right] = \left\{\begin{matrix} p_1\ldots p_m \\ q_1\ldots q_n \end{matrix}\right\}$$

Siccome tra le $v_1\ldots v_n$ non sempre se ne trovano di quelle uguali ad i, potrà darsi che sia $p_i=0$; così pure può darsi che qualcuna delle q sia zero. Ogni qualvolta sia $p_i \neq 0$ e $p_{i+1}=p_{i+2}=\ldots=p_m=0$; $q_j\neq0$ e $q_{j+1}=q_{j+2}=\ldots=q_n=0$, scriveremo $\left\{\begin{matrix} p_1\,p_2\ldots p_i \\ q_1\,q_2\ldots q_j \end{matrix}\right\}'$ invece di $\left\{\begin{matrix} p_1\,p_2\ldots p_i\,0\ldots0 \\ q_1\,q_2\ldots q_j\,0\ldots0 \end{matrix}\right\}$. In $\left\{\begin{matrix} p_1\,p_2\ldots p_i \\ q_1\,q_2\ldots q_j \end{matrix}\right\}'$ è sempre $p_i\neq0$ e $q_j\neq0$; ciò però non esclude che alcune delle $p_1\ldots p_{i-1}$ e $q_1\ldots q_{j-1}$ possono essere zero. Ogni simbolo della forma $\left\{\begin{matrix} p_1\ldots p_i \\ q_1\ldots q_j \end{matrix}\right\}'$ si dirà ridotto a *forma canonica primaria*; la sua caratteristica è che nè il numeratore nè il denominatore contengono zeri finali.

L'ipotesi $i=m; j=n$ corrisponde adunque al fatto che il numeratore ed il denominatore del simbolo $\left\{\begin{matrix} p_1\ldots p_m \\ q_1\ldots q_n \end{matrix}\right\}$ non contengono zeri finali. Le condizioni alle quali devono soddisfare le v ed r del simbolo $\left[\begin{matrix} v_1\ldots v_n \\ r_1\ldots r_m \end{matrix}\right]$, si traducono facilmente in condizioni alle quali devono soddisfare le p e le q del simbolo $\left\{\begin{matrix} p_1\ldots p_i \\ q_1\ldots q_j \end{matrix}\right\}'$. Intanto dev'essere: $i\leq m; j\leq n$. La condizione $\Sigma\, v=\Sigma\, r$ diventa $p_1+2p_2+\ldots+ip_i=q_1+2q_2+\ldots+jq_j$. Il numero delle v è $p_1+\ldots+p_i$, quello delle r è $q_1+\ldots+q_j$; pertanto dev'essere $p_1+\ldots+p_i=n$; $q_1+\ldots+q_j=m$; quindi ancora $p_r\leq n$; $q_s\leq m$, cioè ogni p non può superare n ed ogni q non può superare m.

È chiaro che se $i=m$ ed $j=n$, i simboli $\left\{\begin{matrix} p_1\ldots p_m \\ q_1\ldots q_n \end{matrix}\right\}$ e $\left\{\begin{matrix} p_1\ldots p_m \\ q_1\ldots q_n \end{matrix}\right\}'$ non differiscono. Osserviamo ora che:

1°. Il valore del simbolo $\left\{\begin{matrix} p_1\ldots p_i \\ q_1\ldots q_j \end{matrix}\right\}'$ non è indipendente dall'ordine di successione delle p o delle q. Ciò è evidente.

2°. Esso non cambia scambiando il numeratore col denominatore cioè:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \dots p_i \\ q_1 \dots q_j \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} q_1 \dots q_j \\ p_1 \dots p_i \end{Bmatrix}'.$$

Ciò si deduce dalla proprietà 2ª del simbolo $\begin{bmatrix} r_1 \dots r_n \\ r_1 \dots r_m \end{bmatrix}$.

Occupiamoci ora di qualche trasformazione del simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \dots p_i \\ q_1 \dots q_j \end{Bmatrix}'$ nei casi 1° $i = m, j \neq n$; 2° $i \neq m, j = n$; 3° $i = m, j = n$. Sia dapprima $i = m$ ed $j \neq n$; sarà: $p_m = 0$. Allora affinchè $\begin{Bmatrix} p_1 \dots p_m \\ q_1 \dots q_j \end{Bmatrix}'$ sia diverso da zero, dev'essere $q_1 = q_2 = \dots = q_{p_m - 1} = 0$.

Infatti il supporre p_m diverso da zero equivale a supporre che in ogni combinazione relativa alla matrice T si trovino tutti gli elementi di p_m verticali, perciò nessuna orizzontale potrà contenere meno di p_m elementi. cioè non vi sono orizzontali contenenti $1, 2, \dots p_m - 1$ elementi di ciascuna combinazione; pertanto $q_1 = \dots = q_{p_m-1} = 0$.

Sicchè supponendo 1° $p_m \neq 0$; 2° che il valore del simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \dots p_m \\ q_1 \dots q_j \end{Bmatrix}'$ sia diverso da zero, potremo scriverlo $\begin{Bmatrix} p_1 \dots\dots\dots\dots p_m \\ 0 \dots 0, q_{p_m}, q_{p_m+1}, \dots q_j \end{Bmatrix}'$, il quale ridotto a forma canonica secondaria diventa:

$$\begin{bmatrix} \overbrace{1 \dots\dots 1}^{p_1} \dots \overbrace{m \dots m}^{p_m} \\ \underbrace{p_m \dots p_m}_{q_{p_m}} \quad \underbrace{j \dots j}_{q_j} \end{bmatrix}$$

Applicando a questo la proprietà 3ª del simbolo $\begin{bmatrix} r_1 \dots r_n \\ r_1 \dots r_m \end{bmatrix}$, possiamo sopprimere l'ultimo elemento del numeratore e scrivere:

$$\begin{bmatrix} \overbrace{1 \dots\dots 1}^{p_1} \dots \overbrace{m \dots m}^{p_m} \\ \underbrace{p_m \dots p_m}_{q_{p_m}} \quad \underbrace{j \dots j}_{q_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \dots\dots\dots\dots 1}^{p_1} \dots \overbrace{m \dots\dots m}^{p_m - 1} \\ \underbrace{p_m - 1, \dots p_m - 1}_{q_{p_m}} \dots \underbrace{j - 1 \dots j - 1}_{q_j} \end{bmatrix}.$$

Infatti, essendo $\Sigma q = m$ e quindi $q_{p_m} + \dots + q_j = m$, le combinazioni m ad m degli elementi del denominatore $\underbrace{p_m \dots p_m}_{q_{p_m}} \dots \underbrace{j \dots j}_{q_j}$ si riducono ad una che si ottiene prendendoli tutti. Nel nuovo simbolo ottenuto (nel quale il numeratore termina con $p_m - 1$ elementi uguali ad m) possiamo ancora sopprimere l'ultimo elemento m del numeratore, e così via possiamo continuare finchè, dopo aver soppresso tutti gli elementi del numeratore uguali ad m, otteniamo il simbolo:

$$\left[\begin{array}{ccc} \overbrace{1\ldots1}^{p_1} & \ldots\ldots & \ldots \overbrace{m-1,\ldots,m-1}^{p_{m-1}} \\ \underbrace{0\ldots0}_{q_{p_m}} & \underbrace{1\ldots1}_{q_{p_m+1}} & \ldots \underbrace{j-p_m,\ldots,j-p_m}_{q_j} \end{array}\right]$$

il quale, ridotto a forma canonica primaria, diventa:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p_{m-1} \\ (q_{p_m+1})_1\,(q_{p_m+2})_2\ldots(q_j)_{j-p_m} \end{Bmatrix}'$$

che contiene nel denominatore $j-p_m$ elementi (numeri) aventi rispettivamente il valore $q_{p_m+1}, q_{p_m+2}, \ldots q_j$. (*) Adunque, se $p_m \neq 0$, è:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_m \\ q_1 \ldots q_j \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} p_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p_{m-1} \\ (q_{p_m+1})_1\,(q_{p_m+2})_2\ldots(q_j)_{j-p_m} \end{Bmatrix}' \qquad (\beta_m)$$

Adunque il simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_m \\ q_1 \ldots q_j \end{Bmatrix}'$, nel quale $p_m \neq 0$, si può trasformare in un altro analogo, tale che il numeratore contenga soltanto gli elementi $p_1 \ldots p_{m-1}$.

Analogamente, se $i \neq m$ e $j = n$, sarà $q_n \neq 0$, e si avrà:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_n \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} (p_{q_n+1})_1\,(p_{q_n+2})\ldots(p_i)_{i-q_n} \\ q_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots q_{n-1} \end{Bmatrix}' \qquad (\beta_n)$$

E se $i = m$ ed $j = n$, vale a dire se $p_m, q_n \neq 0$, applicando dapprima la trasformazione (β_m), si ha:

$$\begin{Bmatrix} p_1 p_2 \ldots p_m \\ q_1 q_2 \ldots q_n \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} p_1 \quad p_2 \quad \ldots p_{m-1} \\ (q_{p_m+1})_1\,(q_{p_m+2})_2\ldots(q_n)_{n-p_m} \end{Bmatrix}'$$

Essendo $p_1 + \ldots + p_{m-1} + p_m = n$ sarà $p_1 + \ldots + p_{m-1} = n - p_m$, cioè il simbolo contenuto nel 2° membro è tale che la somma dei termini del numeratore è uguale al numero dei termini del denominatore; possiamo adunque applicare ad esso la trasformazione (β_n) ed abbiamo:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \ldots\ldots p_{m-1} \\ (q_{p_m+1})_1 \quad (q_n)_{n-p_m} \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} (p_{q_n+1})_1\,(p_{q_n+2})_2\ldots(p_{m-1})_{m-q_n-1} \\ (q_{p_m+1})_1\,(q_{p_m+2})_2\ldots(q_{n-1})_{n-p_m-1} \end{Bmatrix}'$$

(*) Indicando uno di essi con (q_{p_m+r}) vogliamo appunto specificare che esso occupa il posto r^{mo} e che il suo valore è q_{p_m+r}.

Come si vede gli elementi del numeratore del 2° membro sono $(p_{q_n+1})_1$ ecc.... Per comprendere ciò si rifletta che nella trasformazione β_n il 1° elemento del numeratore del 2° membro si ottiene apponendo a p l'indice q_n+1, il quale si forma aggiungendo un'unità a q_n, cioè all'ultimo elemento del denominatore del 1° membro. Ora nel simbolo che costituisce il 2° membro dell'ultima identità scritta (la quale si ottiene applicando a tal simbolo la trasformazione β_n), gli elementi del denominatore sono indicati con $(q_{p_m+1})_1 \ldots (q_n)_{n-p_m}$, ma i loro valori rispettivi sono $q_{p_m+1}, \ldots q_n$: pertanto l'indice da apporre a p per avere il 1° elemento del numeratore del 2° membro sarà q_n+1. E volendo indicare che l'elemento così ottenuto occupa il 1° posto lo indicheremo con (p_{q_n+1}). Si comprende parimenti come gli altri elementi siano appunto $(q_{p_m+2})_2$ ecc.....

Risulta dalle due ultime identità:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_m \\ q_1 \ldots q_n \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} (p_{q_n+1})_1 \, (p_{q_n+2})_2 \ldots (p_{m-1})_{m-q_n-1} \\ (q_{p_m+1})_1 \, (q_{p_m+2})_2 \ldots (q_{n-1})_{n-q_m-1} \end{Bmatrix} \qquad (\beta_{mn})$$

la quale serve a trasformare il simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_m \\ q_1 \ldots q_n \end{Bmatrix}$ quando p_m e q_n non sono zero.

Risulta da quanto si è detto che al simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_j \end{Bmatrix}'$ si può applicare 1° la trasformazione (β_m) se la somma degli elementi (numeri) del denominatore è uguale al numero di quelli del numeratore: 2° la (β_n) se la somma degli elementi del numeratore è uguale al numero di quelli del denominatore; 3° la (β_{mn}) se sono soddisfatte ambedue le condizioni precedenti (cioè se $i=m; j=n$ e $p_m, q_n \neq 0$).

Esempi. — Si consideri il simbolo $\begin{Bmatrix} 222 \\ 00111 \end{Bmatrix}'$. Si ha:

$$\sum_1^3 ip_i = \sum_1^5 iq_i \text{ cioè } 2.1+2.2+2.3=0.1+0.2+1.3+1.4+1.5.$$

Inoltre

$$2+2+2=6, \quad \text{cioè} \quad n=6; \quad 0+0+1+1+1=3 \quad \text{cioè} \quad m=3;$$

si vede che la somma degli elementi del denominatore è uguale al numero degli elementi del numeratore, quindi si può applicare la trasformazione (β_m), ritenendo $p_1=2$, $p_2=2$, $p_3=2$; $q_1=0$, $q_2=0$, $q_3=1$, $q_4=1$, $q_5=1$. Si ha pertanto

$$\begin{Bmatrix} 222 \\ 00111 \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} 22 \\ 111 \end{Bmatrix}'$$

Come altro esempio si consideri il simbolo $\begin{Bmatrix} 000203 \\ 00042 \end{Bmatrix}'$. Si ha $p_1=0$, $p_2=0$, $p_3=0$, $p_4=2$, $p_5=0$, $p_6=3$; $q_1=0$, $q_2=0$, $q_3=0$, $q_4=0$, $q_5=2$

quindi $\Sigma\, ip_i = \Sigma\, iq_i$; $m = \Sigma\, q = 6$; $n = \Sigma\, p = 5$. Vedesi che la somma degli elementi del numeratore è uguale al numero di quelli del denominatore e la somma degli elementi del denominatore è uguale al numero di quelli del numeratore. Si può adunque applicare la trasformazione (β_{mn}). Si ha:

$$\begin{Bmatrix} 000203 \\ 00042 \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} 020 \\ 4 \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} 02 \\ 4 \end{Bmatrix}' \quad (*)$$

Si consideri da ultimo il simbolo $\begin{Bmatrix} 0201 \\ 202 \end{Bmatrix}'$ per il quale sono soddisfatte le solite condizioni: si ha $n = 3$; $m = 4$; il numero degli elementi del numeratore è 4, quello degli elementi del denominatore è 3; si può adunque applicare la trasformazione (β_{mn}). Ciò facendo si ha:

$$\begin{Bmatrix} 0201 \\ 202 \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} 0201 \\ 203 \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Il simbolo $\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ non ha veramente alcun significato. Tuttavia è facile convincersi che $\begin{Bmatrix} 0201 \\ 202 \end{Bmatrix} = 1$. Infatti il numero delle combinazioni relative alla matrice

$$\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 4 & \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 3 \end{array}$$

è appunto $\begin{bmatrix} 224 \\ 1133 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0201 \\ 202 \end{Bmatrix}$. Ma di tale combinazione evidentemente non ne esiste che una sola ed è la $a_{13}\, a_{23}\, a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{41}\, a_{42}\, a_{43}$. Devesi adunque ritenere

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 1.$$

Osserviamo ancora che non può esistere un simbolo $\begin{Bmatrix} \\ \end{Bmatrix}$ con valore diverso da zero, avente il solo numeratore od il solo denominatore costituito da zeri. Se ad esempio fosse $\begin{Bmatrix} 0 \\ q_1 \ldots q_i \end{Bmatrix} \neq 0$, sarebbe $0 = \Sigma\, iq_i$, il che è assurdo a meno che non sia $q_1 = q_2 \ldots = q_i = 0$. In tal caso il simbolo si riduce alla forma $\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ e vale 1.

(*) Gli zeri finali del numeratore e denominatore di ogni simbolo $\begin{Bmatrix} \\ \end{Bmatrix}'$, possono evidentemente sopprimersi.

Proponiamoci ora la seguente

Questione. — Dati due sistemi di numeri $v_1, \dots v_n; r_1 \dots r_m$ soddisfacenti alle condizioni $\Sigma v = \Sigma r$; $v_h \leq m$; $r_k \leq n$, esiste(?) almeno una combinazione relativa alla matrice

$$T \equiv \begin{array}{c} v_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots v_n \\ \hline \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{1n} & r_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{mn} & r_m \end{array} \end{array}$$

Abbiamo imparato a suo tempo non solo a giudicare dell'esistenza di una siffatta combinazione, ma anche se esistono combinazioni relative alla matrice T, a costruirne almeno una. Qui trattiamo la sola questione dell'esistenza di una combinazione, riferendoci al simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \dots p_l \\ q_1 \dots q_l \end{Bmatrix}'$. Se una combinazione esiste il valore del simbolo $\begin{bmatrix} v_1 \dots v_n \\ r_1 \dots r_m \end{bmatrix}$ dev'essere almeno uguale ad 1. Riducendolo a forma canonica primaria avremo un certo simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \dots p_l \\ q_1 \dots q_l \end{Bmatrix}'$. Si tratta adunque di vedere se dati due sistemi di numeri $p_1 \dots p_l \dots; q_1 \dots q_l$, (i quali si costruiscono subito dati i sistemi $v_1 \dots v_n; r_1 \dots r_m$), soddisfacenti alle condizioni $\sum_1^l h p_h = \sum_1^l k q_k$; $p_h \leq m$; $q_k \leq n$; $m = \Sigma q$; $n = \Sigma p$, il valore del simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \dots p_l \\ q_1 \dots q_l \end{Bmatrix}'$ è zero od è maggiore di zero.

Per risolvere tale importante questione occorrono alcune considerazioni preliminari.

Supponiamo data una successione (che chiameremo talvolta anche serie) di numeri positivi interi non tutti nulli $\eta, \zeta, \varepsilon, \delta, \gamma, \beta, \alpha$, ed un intero positivo $\lambda \neq 0$, tale che $\lambda \leq \alpha + \beta + \dots + \eta$. Diremo che α è il 1° elemento della successione, β il 2°, γ il 3° ecc. Consideriamo i numeri $\lambda, \lambda - \alpha, \lambda - \alpha - \beta, \lambda - \alpha - \beta - \gamma, \lambda - \alpha - \beta - \gamma - \delta$ ecc. e facciamoli corrispondere rispettivamente ai numeri $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \dots$. Percorrendo la successione $\lambda, \lambda - \alpha, \lambda - \alpha - \beta, \dots$ da destra a sinistra incontreremo un numero che non supererà il suo corrispondente della successione $\alpha, \beta, \gamma \dots$ Infatti se fosse sempre $\lambda > \alpha$; $\lambda - \alpha > \beta$: $\lambda - \alpha - \beta > \gamma$ ecc. ... sarebbe anche $\lambda > \alpha$; $\lambda > \alpha + \beta$; $\lambda > \alpha + \beta + \gamma \dots$ infine $\lambda > \alpha + \beta + \dots + \eta$, contrariamente all'ipotesi $\lambda \leq \alpha + \dots + \eta$ precedentemente stabilita. Supponiamo ad esempio che sia $\lambda - \alpha - \beta - \gamma < \delta$. Allora la successione di numeri

$$\eta, \zeta, \varepsilon + \lambda - \alpha - \beta - \gamma, \gamma + \delta - (\lambda - \alpha - \beta - \gamma), \beta, \alpha, 0$$

si dirà *successione trasformata* della $\eta, \zeta, \varepsilon, \delta, \gamma, \beta, \alpha$ mediante il numero λ. Scriviamo le due successioni, cioè la $\eta, \dots, \alpha$ e la sua trasformata mediante λ in modo che i primi, secondi, ... elementi di ambedue sieno in colonna (gli elementi si contano da destra a sinistra)

$$\begin{array}{llllll} & & \lambda-\alpha-\beta-\gamma<\delta & ;\ \lambda-\alpha-\beta>\gamma\ ; & \lambda-\alpha>\beta\ ; & \lambda>\alpha \\ \hline \eta, \zeta, & \varepsilon, & \delta, & \gamma\quad, & \beta\quad, & \alpha \\ \eta, \zeta, & \varepsilon+\{\lambda-(\alpha+\beta+\gamma)\}, & \gamma+\delta-\{\lambda-(\alpha+\beta+\gamma)\}, & \beta\quad, & \alpha\quad, & 0 \end{array}$$

Le operazioni che permettono di dedurre dalla ... γ, β, α la sua trasformata mediante λ, sono le seguenti. Dal numero λ si sottraggono successivamente i numeri $0, \alpha, \beta, \gamma \ldots$ fino ad avere il minimo resto intero positivo, anche nullo, possibile. Nelle ipotesi fatte, potremo sottrarre α, β, γ, ma non δ. Allora i numeri della trasformata corrispondenti ad α, β, γ sono $0, \alpha, \beta$ (cioè lo zero e quelli sottratti eccettuato l'ultimo). Per avere il numero della trasformata corrispondente a δ, si toglie il suddetto resto minimo dalla somma del numero δ col precedente γ della successione data; per avere il numero corrispondente ad ε, si aggiunge ad ε il suddetto resto minimo; infine i numeri corrispondenti a quelli seguenti ε, cioè $\zeta, \eta \ldots$ sono ancora $\zeta, \eta \ldots$

Conservando relativamente ad $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ le ipotesi suddette, considereremo quale trasformata della successione

$$\delta \qquad\qquad , \gamma, \quad \beta, \quad \alpha$$

la seguente

$$\lambda-(\alpha+\beta+\gamma) \mid \gamma+\delta-\{\lambda-(\alpha+\beta+\gamma)\}, \quad \beta, \quad \alpha, \quad 0.$$

L'elemento $\lambda-(\alpha+\beta+\gamma)$ della trasformata si dirà *eccedente* ed useremo separarlo dal contiguo con un tratto verticale. Adunque la trasformata di una successione ha un termine eccedente, quando per avere il massimo intero contenuto in λ occorre sommare tutti i termini della successione, eccettuato l'ultimo. Il termine eccedente è poi sempre uguale al più piccolo dei resti positivi $\lambda-\alpha$, $(\lambda-\alpha)-\beta$, $(\lambda-\alpha-\beta)-\gamma, \ldots$, cioè a quel resto che abbiamo dianzi chiamato minimo.

La trasformata di $\delta, \gamma, \beta, \alpha$, avente per termine eccedente $\lambda-(\alpha+\beta+\gamma)$, è evidentemente la trasformata senza termini eccedenti di $0, \delta, \gamma, \beta, \alpha$.

Esempi. — La serie trasformata della

$$4\,2\,1\,1\,0\,1\,1\,0$$

mediante il numero 3 è la

$$4\,2\,2\,0\,1\,1\,0\,0.$$

Per ottenerla togliamo dal numero 3 successivamente gli elementi 1°, 2°, ... della serie data dicendo: $3-0=3$; $3-1=2$; $2-1=1$;

$1-0=1$; $1-1=0$. Siamo così arrivati al quinto termine, 1, della serie data, e l'ultimo resto (minimo) positivo ottenuto è zero. Pertanto i primi cinque elementi della trasformata sono lo zero e poi alla sua sinistra i primi quattro elementi 0 1 1 0 della serie data. L'elemento della trasformata corrispondente al sesto della serie data, il quale è 1, si ottiene sommando tal sesto elemento col quinto, e togliendo dalla somma il resto minimo 0; esso è dunque 2.

L'elemento corrispondente al settimo della serie data, il quale è 2, si ottiene sommando tal elemento col resto minimo 0: esso adunque è 2. L'elemento ottavo della trasformata coincide coll'elemento ottavo della serie data.

Come altro esempio la trasformata della

$$4\,2\,1\,1\,2$$

mediante 5, è la

$$5\,2\,1\,2\,0.$$

Per costruirla si è detto: $5-2=3$; $3-1=2$; $2-1=1$, che è il resto minimo. Perciò i termini corrispondenti ai primi tre della serie data sono 0, 2, 1. Il termine corrispondente al 4° (un 2), sarà $2+1-1$, ossia 2, e si ottiene sommando tal quarto termine col precedente e diminuendo la somma del resto minimo; il termine corrispondente al 5° sarà $4+1=5$, e si ottiene aggiungendo il resto minimo al 5° termine della serie data.

La trasformata della

$$5\,1\,1$$

mediante 5, è la

$$3 \mid 3\,1\,0$$

Si è detto: $5-1=4$; $4-1=3$, che è il resto minimo; quindi i termini corrispondenti ai primi due della serie data sono 0, 1 ecc.... Poichè per avere il massimo intero contenuto in 5 occorre sommare tutti gli elementi della serie data, eccettuato l'ultimo, (è un altro 5), la trasformata avrà un termine eccedente uguale al resto minimo 3.

Se $\lambda \leq \alpha$, allora il numero λ è il resto minimo, e la trasformata della

$$\ldots \delta, \gamma, \beta, \qquad \alpha$$

è la

$$\ldots \delta, \gamma, \beta+\lambda, \; \alpha-\lambda.$$

Ad es. la trasformata della

$$2\,3\,1\,4$$

mediante 3, è la

$$2\,3\,4\,1.$$

Un'altra norma, meno pratica, ma teoricamente non priva di importanza, per costrurre la serie trasformata di una data, è la seguente. Sia ad es. $\lambda-\alpha-\beta-\gamma$ il più piccolo dei resti $\lambda-0, \lambda-\alpha, \lambda-\alpha-\beta\ldots.$

Se $\lambda > \alpha$, chiameremo i numeri $\alpha, \beta, \gamma, \lambda - \alpha - \beta - \gamma, 0, 0$ rispettivamente 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, diminutore, e li indicheremo con $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5$. Sono questi i numeri che figurano quali sottraendi nelle differenze $\lambda - \alpha$, $(\lambda - \alpha) - \beta$, $(\lambda - \alpha - \beta) - \gamma$, $\delta - (\lambda - \alpha - \beta - \gamma)$, $\varepsilon - 0$, $\zeta - 0$. Se invece $\lambda \leq 0$, si assumano quali 1°, 2°, 3°.... diminutore i numeri $\lambda, 0, 0, 0 \ldots.$ Si ha allora che se σ_i è il termine i^{mo} della serie data, l'i^{mo} della trasformata è $\sigma_i - \delta_i + \delta_{i-1}$, ritenendo $\delta_0 = 0$, se $i = 0$. Se $\lambda > \alpha$, ed il numero dei termini della serie data tolti successivamente da λ per avere il resto minimo è ν, i termini $(\nu + 3)^{mo}$, $(\nu + 4)^{mo}$ ecc... della trasformata sono uguali ai termini corrispondenti della serie data. Se la trasformata ha un termine eccedente, esso è sempre uguale all'ultimo dei diminutori $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$, se questo è diverso da zero; in caso contrario è uguale al 1° diminutore diverso da zero incontrato percorrendo la serie dei diminutori da destra a sinistra.

Sono conseguenza della definizione di trasformata di una serie data le seguenti proprietà:

1° la somma dei termini di una serie di numeri è uguale a quella dei termini di una sua trasformata qualunque.

2° se una serie di numeri termina con ν zeri, per costrurre una sua trasformata si può supporre che tali zeri manchino, costrurre la trasformata della serie che si ottiene dalla data sopprimendo tali zeri, e scriverli poi di seguito ai termini di tal trasformata.

Se di una successione $\alpha_\theta \alpha_{\theta-1} \ldots . \alpha_1$ di θ elementi si fa la trasformata mediante λ, di questa la trasformata mediante μ, di questa la trasformata mediante ν ecc..., l'ultima trasformata ottenuta si dirà la trasformata di $\alpha_\theta \ldots \alpha_1$ mediante il sistema di numeri $\alpha, \mu, \nu, \ldots$ e si diranno elementi eccedenti di essa tutti quelli che non occupano i primi θ posti (contati da destra a sinistra). Useremo separare tali elementi eccedenti dagli altri con un tratto verticale. Sono notevoli le seguenti proprietà:

1°. La trasformata di $\alpha_\theta \ldots \alpha_1$ mediante il sistema di numeri $\lambda, \mu, \nu \ldots$, non dipende dall'ordine di successione di essi.

2°. Se $\beta_\eta \ldots \beta_1$ sono gli elementi della trasformata di $\alpha_\theta \ldots \alpha_1$ mediante il sistema $\lambda, \mu, \nu \ldots$, $(\eta \geq \theta)$, si ha:

$$(\eta - \theta + 1)\alpha_\theta + (\eta - \theta + 2)\,\alpha_{\theta-1} + \ldots + \eta\alpha_1 - (\lambda + \mu + \nu + \ldots) =$$
$$= \beta_\eta + 2\beta_{\eta-1} + 3\beta_{\eta-2} + \ldots + \eta\beta_1$$

ossia

$$(\eta - \theta)\,(\alpha_\theta + \alpha_{\theta-1} + \ldots + \alpha_1) + (\alpha_\theta + 2\alpha_{\theta-1} + \ldots + \theta\alpha_1) - (\lambda + \mu + \nu \ldots) =$$
$$= \beta_\eta + 2\beta_{\eta-1} + \ldots + \eta\beta_1$$

e se $\eta = \theta$, vale a dire se la trasformata non ha elementi eccedenti:

$$\alpha_\theta + 2\alpha_{\theta-1} + \ldots + \theta_{\alpha_1} - (\lambda + \mu + \nu \ldots) = \beta_\theta + 2\beta_{\theta-1} + \ldots + \theta\beta_1.$$

Tali proprietà sussistono anche se il sistema di numeri $\lambda\ldots$, comprende il solo numero λ.

Esempio. — Facendo la trasformata di 5, 1, 1 mediante il sistema 5, 5 si hanno le

$$\begin{array}{r|l}
 & 5\,1\,1 \text{ successione data} \\
3 & 3\,1\,0 \text{ trasformata della precedente mediante } 5 \\
1\,5 & 1\,0\,0 \quad " \qquad " \qquad " \qquad " \qquad 5
\end{array}$$

La trasformata ottenuta è la $15 \mid 100$ che ha due termini eccedenti. Tra breve avremo occasione di esaminare altri esempi.

Ed ora torniamo alla questione che ci eravamo proposti. Conoscendo i valori di $p_1,\ldots p_i$, $q_1,\ldots q_j$ dobbiamo giudicare se $\left\{\begin{matrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_j \end{matrix}\right\}' \geq 0$. Riducendo tal simbolo a forma canonica secondaria, basterà giudicare se

$$\left[\begin{array}{ccc} \overbrace{1 \ldots 1}^{p_1} & \ldots\ldots & \overbrace{i \ldots i}^{p_i} \\ \underbrace{1 \ldots 1}_{q_1} & \ldots\ldots & \underbrace{j \ldots j}_{q_j} \end{array}\right] \geq 0$$

ovvero ancora, se esistono o no combinazioni relative alla matrice

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccc} 1 & \ldots & 1 & \ldots & i & \ldots & i \end{array} & \\
\left\|\begin{array}{ccccccc}
a_{11} & \ldots & a_{1,p_1} & \ldots & a_{1,n-p_i+1} & \ldots & a_{1n} \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
a_{q_1,1} & \ldots & a_{q_1,p_1} & \ldots & a_{q_1,n-p_i+1} & \ldots & a_{q_1,n} \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
a_{m1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_{mn}
\end{array}\right\| &
\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ j \end{array}
\end{array}$$

Ricordiamo ora quanto abbiamo già detto riguardo alla questione(*) se e come data la matrice

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccc} v_1 & \ldots\ldots & v_n \end{array} & \\
\left\|\begin{array}{ccc}
a_{11} & \ldots\ldots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{m1} & \ldots\ldots & a_{mn}
\end{array}\right\| &
\begin{array}{c} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{array}
\end{array}$$

si possa formare almeno una combinazione ad essa relativa, e ragioniamo, per maggior semplicità, su un caso particolare. Si voglia ad es. vedere se

$$\left[\begin{matrix} 1\ 1\ 2\ 2\ 3\ 3\ 3\ 4\ 4\ 4\ 5\ 5 \\ 1\ 1\ 2\ 3\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5 \end{matrix}\right] \geq 0.$$

(*) È stata trattata al § 5° prima dell'argomento: *Formazione ed enumerazione delle combinazioni delle* $a_{11}\ldots a_{mn}$.

Si ha relativamente a tal simbolo: $v_1=1$, $v_2=1$, $v_3=2$, $v_4=2$, $v_5=3$, $v_6=3$, $v_7=3$, $v_8=4$, $v_9=4$, $v_{10}=4$, $v_{11}=5$, $v_{12}=5$; $r_1=1$, $r_2=1$, $r_3=2$, $r_4=3$, $r_5=5$, $r_6=5$, $r_7=5$, $r_8=5$, $r_9=5$, $r_{10}-5$. Formiamo il quadro Q_0 di numeri

$$\left.\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & & & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & & & & & & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & & & & & & & & & 11 & \underline{12}
\end{array}\right\}\equiv Q_0$$

di $n=12$ verticali, delle quali l'i^{ma} contiene v_i elementi uguali ad i. Sopprimendo in esso l'elemento sottolineato, cioè $r_1=1$ elementi appartenenti ad r_1 verticali diverse e tali che nessuna delle rimanenti contenga un numero di verticali maggiore, (la qual operazione potrà in generale farsi in più di un modo: per es. nel nostro caso si potrebbe sopprimere l'ultimo elemento 11 della penultima verticale), abbiamo un altro quadro Q_1.

$$\left.\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & & & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & & & & & & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & & & & & & & & & \underline{11} &
\end{array}\right\}\equiv Q_1 .$$

Operando su Q_1 come abbiamo operato su Q_0, ma relativamente al numero r_2, (cioè sopprimendo l'elemento sottolineato di Q_1), abbiamo il quadro

$$\left.\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & & & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & & & & & & 8 & 9 & 10 & \underline{11} & \underline{12}
\end{array}\right\}\equiv Q_2 .$$

E da questo, poichè $r_3=3$, si ha:

$$\left.\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & & & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & & & & & & \underline{8} & \underline{9} & \underline{10} & &
\end{array}\right\}\equiv Q_3 .$$

Da questo, essendo $r_4=3$, si ha:

$$\left.\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 & & & & 5 & 6 & 7 & \underline{8} & \underline{9} & \underline{10} & \underline{11} & \underline{12}
\end{array}\right\}\equiv Q_4 .$$

Da questo, essendo $r_5 = 5$, si ha:

$$\left.\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ & & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \underline{11} & \underline{12} \\ & & & & \underline{5} & \underline{6} & \underline{7} & & & & & \end{array}\right\} \equiv Q_5 .$$

Da questo, essendo $r_6 = 5$, si ha:

$$\left.\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ & & 3 & 4 & 5 & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{10} & 11 & 12 \end{array}\right\} \equiv Q_6 .$$

Da questo, essendo $r_7 = 5$, si ha:

$$\left.\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \underline{11} & \underline{12} \\ & & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & & & & & & & \end{array}\right\} \equiv Q_7 .$$

Da questo, essendo $r_8 = 5$, si ha:

$$\left.\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{10} & \ldots\ldots \end{array}\right\} \equiv Q_8 .$$

Da questo, essendo $r_9 = 5$, si ha:

$$\left.\begin{array}{cccccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \equiv Q_9 .$$

Ed operando su Q_9, relativamente al numero $r_{10} = 5$, non rimane più alcun elemento. Sappiamo già che ciò accadendo esiste almeno una combinazione relativa alla matrice:

$$\mu \equiv \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & \ldots\ldots & a_{1,12} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{10,1} & \ldots\ldots & a_{10,12} \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{array}$$

e sappiamo pure che considerando i gruppi di numeri

$\gamma_1 \equiv 12$ (dodici)	di $r_1 = 1$ elementi
$\gamma_2 \equiv 11$ (undici)	" $r_2 = 1$ "
$\gamma_3 \equiv 11, 12$	" $r_3 = 2$ "

$$\begin{array}{lllllll}
\gamma_4 \equiv & 8, & 9, & 10 & & \text{di} \ r_4 = 3 & \text{elementi} \\
\gamma_5 \equiv & 8, & 9, & 10, & 11, \ 12 & '' \ r_5 = 5 & '' \\
\gamma_6 \equiv & 5, & 6, & 7, & 11, \ 12 & '' \ r_6 = 5 & '' \\
\gamma_7 \equiv & 6, & 7, & 8, & 9, \ 10 & '' \ r_7 = 5 & '' \\
\gamma_8 \equiv & 3, & 4, & 5, & 11, \ 12 & '' \ r_8 = 5 & '' \\
\gamma_9 \equiv & 6, & 7, & 8, & 9, \ 10 & '' \ r_9 = 5 & '' \\
\gamma_{10} \equiv & 1, & 2, & 3, & 4, \ \ 5 & '' \ r_{10} = 5 & ''
\end{array}$$

dei quali l'i^{mo} contiene gli elementi soppressi in Q_{i-1} per avere Q_i, $(i=1,2,\ldots 9)$, la $a_{1,13}\, a_{2,11}\, a_{3,11}\, a_{3,12}\, a_{48}\, a_{49}\, a_{4,10}\, a_{58}\, a_{59}\, a_{5,10}\, a_{5,11}\, a_{5,12}\, a_{65}\, a_{66}\, a_{67}\, a_{6,11}\, a_{6,12}\, a_{76}\, a_{77}\, a_{78}\, a_{79}\, a_{7,10}\, a_{83}\, a_{84}\, a_{85}\, a_{8,11}\, a_{8,12}\, a_{96}\, a_{97}\, a_{98}\, a_{99}\, a_{9,10}\, a_{10,1}\, a_{10,2}\, a_{10,3}\, a_{10,4}\, a_{10,5}$ è una delle combinazioni relative alla matrice μ.

Adunque

$$\begin{bmatrix} 1\,1\,2\,2\,3\,3\,3\,4\,4\,4\,5\,5 \\ 1\,1\,2\,3\,5\,5\,5\,5\,5\,5 \end{bmatrix} > 0.$$

Formiamo ora relativamente al quadro Q_0 la successione di numeri

$$2 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 2$$

che supporremo contati da destra a sinistra. Il 1° elemento di essa è il numero (2) delle verticali di Q_0 contenenti cinque elementi (cinque è il massimo valore di r_i), il 2° è il numero delle verticali contenenti quattro elementi ecc.

Immaginando invece i suddetti numeri contati da sinistra a destra, potremmo dire che l'i^{mo} di essi rappresenta il numero delle verticali di Q_0 contenenti i elementi. Tal numero sarebbe zero, quando in Q_0 non vi fossero verticali di i elementi.

Costruendo le analoghe successioni relativamente ai quadri Q_1, $Q_2, \ldots Q_9$ si hanno le

	2	2	3	3	2
	2	2	3	4	1
	2	2	3	5	0
	2	2	5	3	0
	2	2	8	0	0
	2	7	3	0	0
	4	8	0	0	0
	9	3	0	0	0
7 |	10	0	0	0	0
7 |	5	0	0	0	0

Ora è agevole constatare che l'ultima di esse è la trasformata della (1^a, 2, 2, 3, 3, 2), mediante il sistema di numeri $r_1=1$, $r_2=1$, $r_3=2$, $r_4=3$, $r_5=5$, $r_6=5$, $r_7=5$, $r_8=5$, $r_9=5$, e che se si costruisce la trasformata di tal trasformata $7 \mid 50000$ mediante il numero $r_{10} = 5$, si ottiene la

$$12 \mid 00000$$

nella quale i termini non eccedenti sono tutti uguali a zero. Questa legge è generale. Infatti se $\ldots \eta, \zeta, \varepsilon, \delta, \gamma, \beta, \alpha$, è la successione di numeri relativa ad un dato quadro Q_r, e se ρ è il numero degli elementi di quella verticale che ne contiene in maggior numero, α è il numero delle verticali di ρ elementi, β il numero di quelle di $\rho - 1$ elementi ecc..., (non sempre le $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ saranno tutte diverse da zero), operando su Q_r relativamente ad un certo numero λ, si otterrà un altro quadro Q_θ, ed è facile convincersi che il numero delle verticali di Q_θ contenenti i elementi sarà $\sigma_i - \delta_i + \delta_{i-1}$, dove σ_i è il numero di quelle di Q_r contenenti i elementi, e $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ sono il $1^o, 2^o, 3^o \ldots$ diminutore relativi alla successione$\ldots \varepsilon, \delta, \gamma, \beta, \alpha$, formati colla legge che abbiamo enunciata parlando della trasformata di una successione data.

Tornando al nostro caso particolare si vede che la successione di numeri 2, 2, 3, 3, 2 relativa al quadro Q_0, è il numeratore del simbolo $\begin{Bmatrix} 2\,2\,3\,3\,2 \\ 2\,1\,1\,0\,6 \end{Bmatrix}'$ il quale si ottiene dal simbolo

$$\begin{bmatrix} 1\,1\,2\,2\,3\,3\,3\,4\,4\,4\,5\,5 \\ 1\,1\,2\,3\,5\,5\,5\,5\,5\,5 \end{bmatrix}$$

riducendolo a forma canonica primaria.

La conclusione alla quale arriviamo è adunque la seguente: *volendo giudicare se*

$$\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_l \\ q_1 \ldots q_l \end{Bmatrix}' \leq 0$$

si tenti di costrurre la trasformata della successione $p_1 \ldots p_l$ *mediante il sistema di numeri*

$$\underbrace{1 \ldots 1}_{q_1}\ \underbrace{2 \ldots 2}_{q_2} \ldots \underbrace{j \ldots j}_{q_l}$$

se i termini non eccedenti di essa sono tutti zero, si conclude:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_l \\ q_1 \ldots q_l \end{Bmatrix}' > 0.$$

Se ciò non accade, il valore del suddetto simbolo è zero.

Esempio. — Si vuol giudicare se

$$\begin{Bmatrix} 4\,2\,1\,1\,0\,0\,0\,2 \\ 1\,1\,1\,0\,5 \end{Bmatrix}' \geq 0.$$

Facendo la trasformata della successione 42110002 mediante il sistema di numeri 12355555, si ha:

		4	2	1	1	0	0	0	2
		4	2	1	1	0	0	1	1
		4	2	1	1	0	1	1	0
		4	2	2	0	1	1	0	0
		5	3	0	1	1	0	0	0
		8	0	1	1	0	0	0	0
	3	5	1	1	0	0	0	0	0
	6	3	1	0	0	0	0	0	0
1	8	1	0	0	0	0	0	0	0

Tra i termini non eccedenti di tal trasformata, che è la

$$1 \mid 8 \mid 10000000$$

ve ne è uno diverso da zero; pertanto

$$\left\{\begin{matrix} 42\,11\,0002 \\ 11105 \end{matrix}\right\}' = 0.$$

Osserviamo ancora che praticamente nel formare la trasformata di una successione mediante un sistema di numeri, gli zeri finali delle successioni che via via si ottengono si possono omettere. E così ad es. volendo fare la trasformata della successione 2, 2, 3, 3, 2, mediante il sistema dei numeri 1123555555, scriveremo:

	2	2	3	3	2	successione data
	2	2	3	4	1	trasformata della precedente mediante 1
	2	2	3	5	.	
	2	2	5	3	.	
	2	2	8	.	.	
	2	7	3	.	.	
	4	8	.	.	.	
	9	3	.	.	.	
2	10	.	.	.	.	
7	5	.	.	.	.	
12	0	0	0	0	0	

L'ordine dei numeri (1, 1, 2, 3. 5, 5, 5, 5, 5, 5) che determinano le singole trasformazioni, è poi indifferente.

Notiamo infine che nel formare la trasformata di una successione mediante un sistema di numeri, si osserverà che siano verificate per le varie successioni ottenute le seguenti condizioni:

1°. La somma dei numeri di ciascuna successione (compresa la data) è costante.

2°. La somma dei prodotti ottenuti moltiplicando il 1° numero di una delle successioni formate per 1, (si suppongono qua i numeri di una successione contati da sinistra a destra), il 2° per 2, il 3° per 3 ecc. aumentata della somma dei numeri che determinano le singole trasformazioni, (li abbiamo indicati nella teoria con $\lambda, \mu, \nu \dots$), è uguale a tante volte la somma dei termini della successione iniziale data, quanti sono i termini eccedenti della successione che si considera, più la somma dei prodotti ottenuti moltiplicando il 1° numero della successione iniziale data per 1, il 2° per 2, il 3° per 3 ecc... Ciò come conseguenza delle proprietà, testè enunciate, relativamente alla trasformata di una successione mediante un dato sistema di numeri.

Determinazione del valore del simbolo $\left\{\begin{matrix} p_1 \dots p_i \\ q_1 \dots q_j \end{matrix}\right\}'$. Vediamo da ultimo in qual modo dati i valori di $p_1 \dots p_i$, $q_1 \dots q_j$ si possa calcolare il valore del simbolo $\left\{\begin{matrix} p_1 \dots p_i \\ q_1 \dots q_j \end{matrix}\right\}$. Consideriamo dapprima il caso nel quale $i \leq 2$ e due al più delle q siano diverse da zero e non maggiori di 2. Le formole possibili sono:

$$\left\{\begin{matrix} p_1 p_2 \\ 0, 0, \dots (2)_j \end{matrix}\right\}' = \binom{p_1}{j - p_2}; \qquad \left\{\begin{matrix} p_1 \\ 0, 0, \dots (2)_j \end{matrix}\right\}' = \binom{p_1}{j}$$

nelle quali si suppone che l'elemento 2 del denominatore, occupi il posto j^{mo}, (si è perciò indicato con $(2)_j$)

$$\left\{\begin{matrix} p_1 \\ 0, \dots (1)_h, 0, \dots (1)_k \end{matrix}\right\}' = \binom{p_1}{h} = \binom{p_1}{k}; \left\{\begin{matrix} p_1 p_2 \\ 0, \dots (1)_h, 0, \dots (1)_k \end{matrix}\right\}' = \binom{p_1}{h - p_2} = \binom{p_2}{k - p_2}$$

nelle quali si suppone che gli elementi uguali ad 1 del denominatore occupino i posti h^{mo} e k^{mo}. È da notare che il denominatore dei simboli $\left\{\begin{matrix} p_1 p_2 \\ 0, 0, \dots (2)_j \end{matrix}\right\}'$ e $\left\{\begin{matrix} p_1 p_2 \\ 0, \dots (1)_h, 0 \dots (1)_k \end{matrix}\right\}'$ deve contenere almeno $p_2 - 1$ zeri iniziali, giacchè se ciò non fosse, tali simboli non avrebbero significato. Si può anche considerare il simbolo $\left\{\begin{matrix} 0, p_2 \\ 0, 0, \dots (2)_j \end{matrix}\right\}'$. Affinchè esso abbia significato dev'essere $p_2 = n$; inoltre il denominatore deve contenere n elementi. Infatti se il numero degli elementi del denominatore è j, si ha $0 . 1 + 2 . p_2 = 2j$ (si ricordi la condizione di $\Sigma i p_i = \Sigma j q_j$); perciò $j = p_2 = n$. Si ha poi:

$$\left\{\begin{matrix} 0, n \\ 0, 0, \dots (2)_n \end{matrix}\right\}' = 1.$$

Il simbolo $\left\{ \begin{matrix} 0, p_2 \\ 0, \dots (1)_h, 0, \dots (1)_k \end{matrix} \right\}'$ non ha senso; perciò:

$$\left\{ \begin{matrix} 0, p_2 \\ 0, \dots (1)_h, 0, \dots (1)_k \end{matrix} \right\}' = 0.$$

Le formole precedenti si dimostrano riducendo i simboli $\left\{ \quad \right\}'$ a forma canonica secondaria; si traducono allora in formole già dimostrate, trattando del numero delle combinazioni relative ad una matrice di dimensioni $\rightarrow n$ e $\updownarrow 2$.

Similmente riferendoci ad una matrice di dimensioni $\rightarrow 2$ e $\updownarrow m$, e supponendo relativamente al simbolo $\left\{ \begin{matrix} p_1 \dots p_i \\ q_1 \dots q_j \end{matrix} \right\}'$ che sia $j \leq 2$ e che due al più delle p siano diverse da zero e non maggiori di 2, avremo le formole:

$$\left\{ \begin{matrix} 0, 0, \dots (2)_j \\ q_1 \end{matrix} \right\}' = \binom{q_1}{j}; \qquad \left\{ \begin{matrix} 0, 0, \dots (2)_j \\ q_1 q_2 \end{matrix} \right\}' = \binom{q_1}{j - q_2}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 0 \dots (1)_h, 0 \dots (1)_k \\ q_1 \end{matrix} \right\}' = \binom{q_1}{h} = \binom{q_1}{k}; \left\{ \begin{matrix} 0 \dots (1)_h, 0, \dots (1)_k \\ q_1 q_2 \end{matrix} \right\}' = \binom{q_1}{h - q_2} = \binom{q_1}{k - q_2}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 0, 0, \dots (2)_m \\ 0, m \end{matrix} \right\}' = 1; \qquad \left\{ \begin{matrix} 0 \dots (1)_h, 0 \dots (1)_k \\ 0, q_2 \end{matrix} \right\}' = 0.$$

Il simbolo $\left\{ \begin{matrix} 0 \dots (1)_h, 0, \dots (1)_k \\ 0, q_2 \end{matrix} \right\}'$ non ha senso; nei simboli $\left\{ \begin{matrix} 0 \dots (1)_h, 0, \dots (1)_k \\ q_1 \end{matrix} \right\}'$ e $\left\{ \begin{matrix} 0, \dots (1)_h, 0, \dots (1)_k \\ q_1 q_2 \end{matrix} \right\}'$ il numeratore deve contenere almeno $q_2 - 1$ zeri iniziali.

E così possiamo dire di saper calcolare il valore di $\left\{ \begin{matrix} p_1 \dots p_i \\ q_1 \dots q_j \end{matrix} \right\}'$ quando la somma degli elementi del numeratore o del denominatore è *due*.

Vediamo ora in qual modo si possa esprimere il simbolo $\left\{ \begin{matrix} p_1 \dots p_i \\ q_1 \dots q_j \end{matrix} \right\}'$ mediante altri tali che la somma degli elementi o termini del numeratore (denominatore) sia inferiore di un'unità a quella dei termini del numeratore (denominatore) del simbolo stesso. Riducendo a forma canonica secondaria i simboli che compaiono nella (22), possiamo scriverla:

$$\left[\begin{array}{l} \overbrace{1 \dots 1}^{p_1} \dots \overbrace{h \dots h}^{p_h} \dots \overbrace{i \dots i}^{p_i} \\ \underbrace{1 \dots 1}_{q_1} \dots \dots \dots \dots \underbrace{j \dots j}_{q_j} \end{array} \right] = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \left[\begin{array}{l} \overbrace{1 \dots 1}^{p_1} \dots \overbrace{h \dots h}^{p_h} \dots \overbrace{i \dots i}^{p_i} \\ \alpha_1 \alpha_2 \dots \dots \dots \dots \alpha_m \end{array} \right] \quad (24)$$

intendendo il segno Σ esteso a tutte le successioni $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m$ di m numeri (si noti che $q_1+\ldots+q_j=m$) dedotta dalla

$$\underbrace{1\,.\,.\,.\,.\,1}_{q_1}\ \ldots\ \underbrace{j\,.\,.\,.\,.\,j}_{q_j}$$

diminuendo di un'unità h numeri di essa comunque scelti ($h\neq 0$ e quindi $p_h\neq 0$). Di tali numeri ve ne saranno π_1 scelti tra quelli uguali ad 1, π_2 scelti tra quelli uguali a 2, $\ldots\pi_j$ scelti tra quelli uguali ad j e sarà $\pi_1+\pi_2+\ldots+\pi_j=h$. Ora è chiaro che nella successione ottenuta diminuendo di un'unità gli h numeri scelti, ve ne saranno $q_1-\pi_1+\pi_2$ uguali a $1,\ldots q_{j-1}-\pi_{j-1}+\pi_j$ uguali ad $j-1$, infine $q_j-\pi_j$ uguali ad j. Consideriamo uno speciale sistema di valori delle $\pi_1,\ldots\pi_j$ tali che sia $\pi_1\leqq q_1;\ldots\pi_j\leqq q_j;\pi_1+\ldots+\pi_j=h$. Nel 2° membro della (24) compariranno $\binom{q_1}{\pi_1}\binom{q_2}{\pi_2}\cdots\binom{q_j}{\pi_j}$ termini uguali a

$$\left[\begin{array}{l}\overbrace{1\,\ldots\ldots\ldots\,1}^{p_1}\ldots\overbrace{h\ldots h}^{p_h-1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\overbrace{i\ldots\ldots i}^{p_i}\\ \underbrace{1\,\ldots\ldots\ldots\,1}_{q_1-\pi_1+\pi_2}\ldots\ldots\ldots\underbrace{j-1,\ldots j-1}_{q_{j-1}-\pi_{j-1}+\pi_j},\ \underbrace{j\ldots\ldots j}_{q_j-\pi_j}\end{array}\right]$$

giacchè si possono scegliere π_λ numeri delle successioni $\underbrace{\lambda\,.\,.\,.\,.\,\lambda}_{q_\lambda}$ in $\binom{q_\lambda}{\pi_\lambda}$ modi. Si ha pertanto, essendo $h\neq 0$ e quindi $p_h\neq 0$:

$$\left[\begin{array}{l}\overbrace{1\ldots 1}^{p_1}\ldots\overbrace{h\ldots h}^{p_h}\ldots\overbrace{i\ldots i}^{p_i}\\ \underbrace{1\ldots 1}_{q_1}\ldots\ldots\ldots\ldots\underbrace{j\ldots j}_{q_j}\end{array}\right]=$$

$$=\sum_{\pi_1+\pi_2+\ldots+\pi_j=h}\binom{q_1}{\pi_1}\binom{q_2}{\pi_2}\cdots\binom{q_j}{\pi_j}\left[\begin{array}{l}\overbrace{1\,\ldots\ldots\ldots\,1}^{p_1}\ldots\ldots\overbrace{h\ldots h}^{p_h-1}\ldots\ldots\overbrace{i\ldots i}^{p_i}\\ \underbrace{1\,\ldots\ldots\ldots\,1}_{q_1-\pi_1+\pi_2}\ldots\underbrace{j-1\ldots j-1}_{q_{j-1}-\pi_{j-1}+\pi_j}\ \underbrace{j\ldots j}_{q_j-\pi_j}\end{array}\right]$$

ovvero, riducendo i simboli $[\ \ ]$ a forma canonica primaria

$$\left\{\begin{array}{l}p_1\ldots p_h\ldots p_i\\ q_1\ldots\ldots\ldots q_j\end{array}\right\}'=$$

$$=\sum_{\pi_1+\pi_2+\ldots+\pi_j=h}\binom{q_1}{\pi_1}\binom{q_2}{\pi_2}\cdots\binom{q_j}{\pi_j}\left\{\begin{array}{l}p_1p_2\ldots\ldots\ldots\ldots,(p_h-1)_h,\ldots\ldots\ldots\ldots p_i\\ (q_1-\pi_1+\pi_2)_1,\ldots,(q_{j-1}-\pi_{j-1}+\pi_j)_{j-1},(q_j-\pi_j)_j\end{array}\right\}'\quad(25)$$

intendendo il segno Σ esteso ai sistemi di valori positivi interi anche nulli delle $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_j$ tali che $\pi_1 + \ldots \pi_j = h$; $\pi_\lambda \leq q_\lambda$. Scrivendo nel 2° membro $(p_h - 1)_h$, abbiamo voluto indicare che l'elemento h^{mo} del numeratore ha il valore $p_h - 1$, e parimenti scrivendo $(q_\lambda - \pi_\lambda + \pi_{\lambda+1})_\lambda$, $(\lambda = 1, 2, \ldots)$, si è voluto indicare che l'elemento λ^{mo} del denominatore ha il valore $q_\lambda - \pi_\lambda + \pi_{\lambda+1}$. Si conviene poi che sia $\binom{\tau}{0} = 1$, per qualunque intero positivo τ anche nullo.

Come vedesi abbiamo raggiunto lo scopo prefissoci, giacchè nei simboli che compaiono nel 2° membro della (25) la somma dei termini del numeratore è uguale a $p_1 + \ldots + p_i - 1$.

Similmente si ha:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \ldots\ldots\ldots p_i \\ q_1 \ldots q_h \ldots q_j \end{Bmatrix}' =$$

$$= \sum_{\pi_1 + \ldots + \pi_i = h} \binom{p_1}{\pi_1}\binom{p_2}{\pi_2}\cdots\binom{p_i}{\pi_i} \begin{Bmatrix} (p_1 - \pi_1 + \pi_2)_1 \ldots (p_{i-1} - \pi_{i-1} + \pi_i)_{i-1}, (p_i - \pi_i)_i \\ q_1 \ldots\ldots, (q_h - 1)_h, \ldots\ldots\ldots\ldots q_j \end{Bmatrix}' \quad (25')$$

essendo $\pi_\lambda \leq p_\lambda$, $(\lambda = 1, 2, \ldots i)$.

Ed ora volendo calcolare il valore del simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_j \end{Bmatrix}'$ dopo aver constatato che esso non è zero, si comincierà ad esprimerlo mediante simboli nei quali la somma dei termini ad es. del numeratore è $p_1 + \ldots + p_i - 1$. Ciascuno di questi potrà a sua volta essere espresso mediante altri nei quali la somma dei termini del numeratore è $p_1 + \ldots + p_i - 2 \ldots$, e così via sino ad avere l'espressione di $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_j \end{Bmatrix}'$ mediante simboli nei quali la somma dei termini del numeratore è due. Il valore di ciascuno di tali simboli si calcolerà facilmente per mezzo delle formole note.

Se $i = m$ od $j = n$, prima di applicare il processo suddetto si trasformerà il simbolo $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_j \end{Bmatrix}'$, mediante una delle trasformazioni, (β_m), (β_n), (β_{mn}), e si opererà sul nuovo simbolo ottenuto anzichè sul dato. Nell'applicare la (25) o la (25') è indifferente il valore da attribuirsi ad h, purchè l'h^{mo} termine del numeratore, se si applica la (25), o del numeratore, se si applica la (25'), sia diverso da zero.

Dopo aver espresso $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_j \end{Bmatrix}'$ mediante simboli nei quali la somma dei termini ad es. del numeratore è $p_1 + \ldots + p_i - 1$, non è *necessario* esprimere ciascuno di essi mediante altri nei quali la somma dei termini del numeratore sia $p_1 + \ldots + p_i - 2$; si può ad es. esprimerli mediante altri nei quali la somma dei termini del denominatore è $q_1 + \ldots + q_j - 1$; ciò che è essenziale si è di ottenere un'espressione di $\begin{Bmatrix} p_1 \dots p_i \\ q_1 \dots q_j \end{Bmatrix}'$ contenente soltanto simboli nei quali la somma dei termini del numeratore o del denominatore sia *due*.

Gioveranno ancora nell'applicazione delle (25) e (25') le seguenti considerazioni d'indole pratica.

1°. In corrispondenza di un dato sistema di valori di $\pi_1 \dots \pi_j$ si ha un prodotto $\binom{q_1}{\pi_1}\binom{q_2}{\pi_2}\dots\binom{q_{j-1}}{\pi_{j-1}}\binom{q_j}{\pi_j}$. A tal sistema di valori corrisponde pure nel 2° membro della (25) un simbolo $\begin{Bmatrix} \\ \end{Bmatrix}'$, nel quale gli elementi del numeratore sono $q_1 - \pi_1 + \pi_2, q_2 - \pi_2 + \pi_3, \dots q_j - \pi_j$.

Orbene scritto il prodotto $\binom{q_1}{\pi_1}\dots\binom{q_j}{\pi_j}$, si scrivono facilmente questi elementi sottraendo dal numeratore q_r di ciascun fattore $\binom{q_r}{\pi_r}$ il corrispondente denominatore π_r ed aggiungendo al resto il denominatore del fattore $\binom{q_{r+1}}{\pi_{r+1}}$ successivo.

Fa eccezione l'elemento $q_j - \pi_j$ che si ottiene facendo la differenza tra il numeratore ed il denominatore di $\binom{q_j}{\pi_j}$.

2°. Supponiamo che debbansi sviluppare i simboli $\begin{Bmatrix} p_1 \dots p_i \\ q_1 \dots p_j \end{Bmatrix}'$, $\begin{Bmatrix} u_1 \dots u_i \\ v_1 \dots v_j \end{Bmatrix}'$, differenti almeno per il denominatore, mediante altri tali che la somma dei termini del numeratore sia uguale a $p_1 + \dots + p_i - 1$. Supponiamo ancora che sviluppando sia l'uno sia l'altro simbolo, si dia ad h lo stesso valore. Tra i sistemi di valori delle π tali che $\pi_1 + \dots + \pi_j = h$ e $\pi_\lambda \leq q_\lambda$, ve ne saranno forse alcuni per i quali sarà pure $\pi_\lambda \leq u_\lambda$. Se $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_j$ è uno di siffatti sistemi, nello sviluppo di $\begin{Bmatrix} p_1 \dots p_i \\ q_1 \dots q_j \end{Bmatrix}'$ gli corrisponderà il termine

$$\binom{q_1}{\xi_1}\binom{q_2}{\xi_2}\dots\binom{q_j}{\xi_j}\begin{Bmatrix} p_1 \dots\dots\dots\dots, (p_h - 1)_h, \dots\dots\dots p_i \\ (q_1 - \xi_1 + \xi_2)_1, (q_2 - \xi_2 + \xi_3)_2, \dots (q_j - \xi_j)_j \end{Bmatrix}'$$

e nello sviluppo di $\begin{Bmatrix} u_1 \dots u_i \\ v_1 \dots v_j \end{Bmatrix}'$ il termine

$$\binom{v_1}{\xi_1}\binom{v_2}{\xi_2}\dots\binom{v_j}{\xi_j}\begin{Bmatrix} u_1 \dots\dots\dots\dots, (u_h - 1)_h, \dots\dots\dots u_i \\ (v_1 - \xi_1 + \xi_2)_1, (v_2 - \xi_2 + \xi_3)_2, \dots v_j - \xi_j)_j \end{Bmatrix}'$$

Scritto il 1° di tali termini, si potrà scrivere più rapidamente il 2° osservando che l'elemento $v_\lambda - \xi_\lambda + \xi_{\lambda+1}$ del denominatore, $(\lambda = 1, \dots j)$, si ottiene da $q_\lambda - \xi_\lambda + \xi_{\lambda+1}$ aggiungendovi la differenza $v_\lambda - q_\lambda$, se $v_\lambda > q_\lambda$, e togliendosi la differenza $q_\lambda - v_\lambda$, se $q_\lambda > v_\lambda$. Questo modo di calcolare gli elementi del denominatore $v_1 - \xi_1 + \xi_2, \ldots v_j - \xi_j$ è utile, ma non necessario, quando i sistemi $\xi_1, \ldots \xi_j$ validi per lo sviluppo sia di $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_j \end{Bmatrix}'$ sia di $\begin{Bmatrix} u_1 \ldots u_i \\ v_1 \ldots v_j \end{Bmatrix}'$ sono molti; nè è escluso il caso che tutti i sistemi $\pi_1, \ldots \pi_j$ relativi allo sviluppo di $\begin{Bmatrix} p_1 \ldots p_i \\ q_1 \ldots q_j \end{Bmatrix}'$ siano validi anche per lo sviluppo di $\begin{Bmatrix} u_1 \ldots u_i \\ v_1 \ldots v_j \end{Bmatrix}'$.

ESEMPI. — 1°. Si debba dapprima calcolare il valore di $\begin{Bmatrix} 3\,2 \\ 0\,2\,1 \end{Bmatrix}'$ (*) nel quale il numeratore e il denominatore, come il lettore può agevolmente constatare, soddisfano alle condizioni volute affinchè sia $\begin{Bmatrix} 3\,2 \\ 0\,2\,1 \end{Bmatrix}' \neq 0$. Si ha: $i=2; j=3; p_1=3; p_2=2; q_1=0; q_2=2; q_3=1$. Si vede subito che diminuendo di un'unità la somma degli elementi del denominatore, essa si riduce a *due*.

Applicheremo adunque la (25'). Possiamo fare $h=2$, giacchè l'elemento del denominatore che occupa il posto h^{mo} (il 2°) è diverso da zero. I sistemi di valori delle π_1, π_2, (le π sono due, giacchè due sono gli elementi del numeratore, cioè $i=2$), sono:

$\pi_1 \leq 3$		$\pi_2 \leq 2$	
π_1	$+$	π_2	$=h=2$
0		2	
1		1	
2		0	

Adunque

$$\begin{Bmatrix} 3\,2 \\ 0\,2\,1 \end{Bmatrix}' \binom{3}{0}\binom{2}{2}\begin{Bmatrix} 0\,1\,1 \\ 5\,0 \end{Bmatrix}' + \binom{3}{1}\binom{2}{1}\begin{Bmatrix} 0\,1\,1 \\ 2\,1 \end{Bmatrix}' + \binom{3}{2}\binom{2}{0}\begin{Bmatrix} 0\,1\,1 \\ 1\,2 \end{Bmatrix}'.$$

Ma

$$\begin{Bmatrix} 0\,1\,1 \\ 5\,0 \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} 0\,1\,1 \\ 5 \end{Bmatrix} = 10; \begin{Bmatrix} 0\,1\,1 \\ 3\,1 \end{Bmatrix}' = 3; \begin{Bmatrix} 0\,1\,1 \\ 1\,2 \end{Bmatrix}' = 1. \quad (**)$$

pertanto:

$$\begin{Bmatrix} 3\,2 \\ 0\,2\,1 \end{Bmatrix}' = 1.10 + 6.3 + 3.1 = \text{trentuno.}$$

(*) Riducendo tal simbolo a forma canonica primaria esso diventa $\begin{bmatrix} 1\,1\,1\,2\,2 \\ 2\,2\,3 \end{bmatrix}$. Il valore di esso è trentuno, e si è calcolato trattando del metodo per determinare il numero delle combinazioni relative ad una matrice di dimensioni $\longrightarrow 5$ e $\downarrow 3$

(**) Veggansi le formole che insegnano a calcolare il valore di un simbolo $\{\ \}'$, quando la somma degli elementi del numeratore o del denominatore è due.

2°. Debbasi ancora calcolare il valore del simbolo $\left\{\begin{matrix}1\,1\,2\,0\,1\\ 4\,5\end{matrix}\right\}'$ il quale è maggiore di zero, come il lettore può facilmente verificare costruendo la trasformata della successione 1 1 2 0 1 mediante il sistema di numeri 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2. Si ha in tal caso: $i=4$; $j=2$; $p_1=1, p_2=1, p_3=2, p_4=0, p_5=1$; $q_1=4$; $q_2=5$. Applichiamo la (25) supponendo $h=1$, il che è lecito essendo l'h^{mo} (il 1°) elemento del numeratore diverso da zero. I sistemi di valori delle π_1, π_2 tali che

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1 \leq 5 & & \pi_2 \leq 4 & & \\ \pi_1 & + & \pi_2 & = h = 1 & \\ \hline 0 & & 1 & & \\ 1 & & 0 & & \end{array}$$ sono

pertanto:

$$\left\{\begin{matrix}1\,1\,2\,0\,1\\ 4\,5\end{matrix}\right\}'=\binom{4}{0}\binom{5}{1}\left\{\begin{matrix}0\,1\,2\,0\,1\\ 5\,4\end{matrix}\right\}'+\binom{4}{1}\binom{5}{0}\left\{\begin{matrix}0\,1\,2\,0\,1\\ 3\,5\end{matrix}\right\}'$$

In ciascuno dei simboli $\left\{\begin{matrix}0\,1\,2\,0\,1\\ 5\,4\end{matrix}\right\}'$, $\left\{\begin{matrix}0\,1\,2\,0\,1\\ 3\,5\end{matrix}\right\}$ la somma degli elementi del numeratore è quattro; giova adunque esprimerli mediante altri nei quali la somma degli elementi del numeratore sia tre. Applicando la (25) si ha, supponendo $h=2$:

$$\left\{\begin{matrix}0\,1\,2\,0\,1\\ 5\,4\end{matrix}\right\}'=\binom{5}{0}\binom{4}{2}\left\{\begin{matrix}0\,0\,2\,0\,1\\ 7\,2\end{matrix}\right\}'+$$

$$+\binom{5}{1}\binom{4}{1}\left\{\begin{matrix}0\,0\,2\,0\,1\\ 5\,3\end{matrix}\right\}'+\binom{5}{2}\binom{4}{0}\left\{\begin{matrix}0\,0\,2\,0\,1\\ 3\,4\end{matrix}\right\}'$$

Come il lettore può agevolmente verificare, i sistemi di valori delle π_1, π_2, relativi allo sviluppo di $\left\{\begin{matrix}0\,1\,2\,0\,1\\ 5\,4\end{matrix}\right\}'$ sono: 0, 2; 1, 1; 2, 0. Volendo ora procedere allo sviluppo del simbolo $\left\{\begin{matrix}0\,1\,2\,0\,1\\ 3\,5\end{matrix}\right\}'$, supponendo ancora $h=2$, possiamo valerci dell'osservazione 2ª; osserviamo anzi tutto che i sistemi di valori della π_1, π_2 relativi a tal sviluppo sono ancora 0, 2; 1, 1; 2, 0, cioè coincidono con quelli relativi allo sviluppo di $\left\{\begin{matrix}0\,1\,2\,0\,1\\ 5\,4\end{matrix}\right\}'$. Gli elementi del denominatore 3, 5, si ottengono da quelli del denominatore 5, 4, diminuendo il 1° di due unità ed aumentando il 2° di un'unità. Perciò se nello sviluppo di $\left\{\begin{matrix}0\,1\,2\,0\,1\\ 5\,4\end{matrix}\right\}'$ sostituiamo 3 e 5 rispettivamente a 5 e 4 nei prodotti $\binom{5}{0}\binom{4}{2}$, $\binom{5}{1}\binom{4}{1}$, $\binom{5}{2}\binom{4}{0}$, e nei denominatori dei simboli $\left\{\begin{matrix}0\,0\,2\,0\,1\\ 7\,2\end{matrix}\right\}'$,

$\left\{\begin{matrix}00201\\53\end{matrix}\right\}'$, $\left\{\begin{matrix}00201\\34\end{matrix}\right\}'$ diminuiamo il 1º elemento di due unità ed aumentiamo il 2º di una, otteniamo lo sviluppo di $\left\{\begin{matrix}01201\\35\end{matrix}\right\}'$. Chi ha appena un po' di pratica fa queste operazioni immediatamente con molta facilità.

Si ha adunque:

$$\left\{\begin{matrix}01201\\35\end{matrix}\right\}'=\binom{3}{0}\binom{5}{2}\left\{\begin{matrix}00201\\53\end{matrix}\right\}'+$$
$$+\binom{3}{1}\binom{5}{1}\left\{\begin{matrix}00201\\34\end{matrix}\right\}'+\binom{3}{2}\binom{5}{0}\left\{\begin{matrix}00201\\15\end{matrix}\right\}'.$$

Occorre ancora sviluppare i simboli;

$$\left\{\begin{matrix}00201\\72\end{matrix}\right\}',\ \left\{\begin{matrix}00201\\53\end{matrix}\right\}',\ \left\{\begin{matrix}00201\\34\end{matrix}\right\}',\ \left\{\begin{matrix}00201\\15\end{matrix}\right\}',$$

che sono i soli simboli differenti trovati sviluppando $\left\{\begin{matrix}01201\\54\end{matrix}\right\}'$ e $\left\{\begin{matrix}01201\\35\end{matrix}\right\}'$ e nei quali la somma dei termini del numeratore è tre, mediante altri nei quali la somma dei termini del numeratore sia due. Si ha dalla (25), supponendo ad es. $h=3$:

$$\left\{\begin{matrix}00201\\72\end{matrix}\right\}'=\binom{7}{1}\binom{2}{2}\left\{\begin{matrix}00101\\80\end{matrix}\right\}'+$$
$$+\binom{7}{2}\binom{2}{1}\left\{\begin{matrix}00101\\61\end{matrix}\right\}'+\binom{7}{3}\binom{2}{0}\left\{\begin{matrix}00101\\42\end{matrix}\right\}'$$

A tal sviluppo corrispondono i sistemi seguenti di valori delle π_1, π_2: 1, 2; 2, 1; 3, 0. Volendo scrivere lo sviluppo di $\left\{\begin{matrix}00201\\53\end{matrix}\right\}'$, per $h=3$, osserviamo che i sistemi di valori delle π_1, π_2 ad esso relativi sono 1, 2; 2, 1; 3, 0; 0, 3, tre dei quali sono validi per lo sviluppo di $\left\{\begin{matrix}00201\\72\end{matrix}\right\}'$. Applicando l'osserv. 2ª limitatamente ai termini dello sviluppo di $\left\{\begin{matrix}00201\\53\end{matrix}\right\}'$ corrispondenti ai sistemi di valori 1, 2; 2, 1; 3, 0; abbiamo:

$$\left\{\begin{matrix}00201\\53\end{matrix}\right\}'=\binom{5}{1}\binom{2}{3}\left\{\begin{matrix}00101\\61\end{matrix}\right\}'+\binom{5}{2}\binom{3}{1}\left\{\begin{matrix}00101\\42\end{matrix}\right\}'+$$
$$+\binom{5}{3}\binom{3}{0}\left\{\begin{matrix}00101\\23\end{matrix}\right\}'+\binom{5}{0}\binom{3}{3}\left\{\begin{matrix}00101\\80\end{matrix}\right\}'$$

Similmente si ha per $h = 3$:

$$\left\{\begin{matrix}0\,0\,2\,0\,1\\3\,4\end{matrix}\right\}' = \binom{3}{1}\binom{4}{2}\left\{\begin{matrix}0\,0\,1\,0\,1\\4\,2\end{matrix}\right\}' + \binom{3}{2}\binom{4}{1}\left\{\begin{matrix}0\,0\,1\,0\,1\\2\,3\end{matrix}\right\}' +$$
$$+ \binom{3}{3}\binom{4}{0}\left\{\begin{matrix}0\,0\,1\,0\,1\\0\,4\end{matrix}\right\}' + \binom{3}{0}\binom{4}{3}\left\{\begin{matrix}0\,0\,1\,0\,1\\6\,1\end{matrix}\right\}'.$$

Per tale sviluppo i sistemi di valori delle π_1, π_2 coincidono con quelli relativi allo sviluppo precedente; perciò l'oss. 2ª è applicabile a tutti i termini dello sviluppo precedente.

Infine è, per $h = 3$:

$$\left\{\begin{matrix}0\,0\,2\,0\,1\\1\,5\end{matrix}\right\}' = \binom{1}{1}\binom{5}{2}\left\{\begin{matrix}0\,0\,1\,0\,1\\2\,3\end{matrix}\right\}' + \binom{1}{0}\binom{5}{3}\left\{\begin{matrix}0\,0\,1\,0\,1\\4\,2\end{matrix}\right\}'.$$

Mediante le formole che permettono di calcolare il valore di un simbolo $\left\{\begin{matrix}\\\end{matrix}\right\}'$ nel quale la somma degli elementi del numeratore o del denominatore è due, possiamo determinare il valore dei simboli differenti che abbiamo incontrato sviluppando i simboli $\left\{\begin{matrix}0\,0\,2\,0\,1\\7\,2\end{matrix}\right\}'$ $\left\{\begin{matrix}0\,0\,2\,0\,1\\5\,3\end{matrix}\right\}'$, $\left\{\begin{matrix}0\,0\,2\,0\,1\\3\,4\end{matrix}\right\}'$. Abbiamo:

$$\left\{\begin{matrix}0\,0\,1\,0\,1\\6\,1\end{matrix}\right\}' = \binom{6}{2} = 15;\quad \left\{\begin{matrix}0\,0\,1\,0\,1\\4\,2\end{matrix}\right\}' = \binom{4}{1} = 4;\quad \left\{\begin{matrix}0\,0\,1\,0\,1\\2\,3\end{matrix}\right\}' = \binom{2}{0} = 1$$

$$\left\{\begin{matrix}0\,0\,1\,0\,1\\8\,0\end{matrix}\right\}' = \binom{8}{3} = 56;\qquad \left\{\begin{matrix}0\,0\,1\,0\,1\\0\,4\end{matrix}\right\}' = 0$$

(il valore di $\left\{\begin{matrix}0\,0\,1\,0\,1\\0\,4\end{matrix}\right\}'$ non è > 0; si può constatare che la trasformata di $0\,0\,1\,0\,1$ mediante il sistema $2, 2, 2, 2$, ha un elemento non eccedende diverso da zero). Adunque:

$$\left\{\begin{matrix}0\,0\,2\,0\,1\\5\,3\end{matrix}\right\}' = 15\,.\,15 + 30\,.\,4 + 10\,.\,1 + 1\,.\,56 = 411$$

$$\left\{\begin{matrix}0\,0\,2\,0\,1\\3\,4\end{matrix}\right\}' = 18\,.\,4 + 12\,.\,1 + 1\,.\,0 + 4\,.\,15 = 144$$

$$\left\{\begin{matrix}0\,0\,2\,0\,1\\1\,5\end{matrix}\right\}' = 10\,.\,1 + 10\,.\,4 = 50$$

$$\left\{\begin{matrix}0\,0\,2\,0\,1\\7\,2\end{matrix}\right\}' = 7\,.\,56 + 42\,.\,15 + 35\,.\,4 = 1162$$

E poi:

$$\left\{\begin{matrix}0\,1\,2\,0\,1\\3\,5\end{matrix}\right\}' = 10\,.\,411 + 15\,.\,144 + 3\,.\,50 = 6420$$

$$\left\{\begin{matrix}0\,1\,2\,0\,1\\5\,4\end{matrix}\right\}' = 6\,.\,1162 + 20\,.\,411 + 10\,.\,144 = 16632$$

Ed infine:

$$\begin{Bmatrix} 1\,1\,2\,0\,1 \\ 4\,5 \end{Bmatrix}' = 5\,.\,16632 + 20\,.\,6420 = 211560 \text{ (duecentoundicimila cinquecento sessanta).}$$

Il simbolo $\begin{Bmatrix} 1\,1\,2\,0\,1 \\ 4\,5 \end{Bmatrix}'$ rappresenta il numero delle combinazioni relative ad es. alla matrice:

$$\begin{array}{c|c|}
\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 \end{matrix} & \\
\left\| \begin{matrix} a_{11} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{15} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ a_{91} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{95} \end{matrix} \right\| & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}
\end{array}$$

Se fosse necessario formarle, per poterle enumerare, nell'ipotesi che se ne potesse formare una per ogni cinque minuti secondi di tempo (?) occorrerebbero duecentonovantatre ore e cinquanta minuti primi; invece chi ha anche poca pratica nel maneggio dei suddetti simboli, può comodamente calcolare il valore di $\begin{Bmatrix} 1\,1\,2\,0\,1 \\ 4\,5 \end{Bmatrix}'$ in venti minuti primi!

§ 6. Nozioni sugli iperdeterminanti; metodi per svilupparli e per determinare il numero dei loro termini. (*)

Consideriamo la matrice di mn numeri qualunque $a_{11} \ldots a_{mn}$:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} v_1 & \cdots\cdots\cdots\cdots & v_n \end{matrix} \\
T \equiv & \left\| \begin{matrix} a_{11} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \begin{matrix} r_1 \\ \\ r_m \end{matrix}
\end{array}$$

e scegliamone σ, $a_{q_1\theta_1}, \ldots a_{q_\sigma\theta_\sigma}$, tali che v_i di essi appartengano alla verticale i^{ma} ed r_j all'orizzontale j^{ma} (supponiamo verificate per le $v_1 \ldots v_n$, $r_1 \ldots r_m$ le solite condizioni $\Sigma v = \Sigma r$; $v_i \leq m$; $r_j \leq n$). Consideriamo

(*) Per le proprietà di tali enti, specialmente per quelle relative allo sviluppo di un iperdeterminante si può consultare il lavoro già citato " Su una generalizzazione della teoria dei determinanti ", *Giornale di Battaglini*, vol. XXXIX; fasc. Luglio-Agosto 1901.

il prodotto $a_{\eta_1\theta_1}\dots a_{\eta_\sigma\theta_\sigma}$, ed attribuiamo ad esso il segno che competerebbe alla successione $a_{\eta_1\theta_1},\dots,a_{\eta_\sigma\theta_\sigma}$ considerata come una combinazione relativa alla matrice suddetta, cioè il segno di $(-1)^{\alpha+\beta}$, dove α è il numero delle inversioni formate da due elementi della successione.

$$\eta_1, \eta_2, \dots\dots \eta_\sigma$$

non corrispondenti ad elementi uguali della

$$\theta_1, \theta_2, \dots\dots \theta_\sigma$$

e β è il numero delle inversioni formate da due θ non corrispondenti a due η uguali: [si suppongono corrispondenti η_λ e θ_λ $(\lambda = 1, 2, \dots \sigma)$]. La somma di tutti i prodotti del tipo $a_{\eta_1\theta_1}\dots a_{\eta_\sigma\theta_\sigma}$, presi ciascuno col proprio segno si chiamerà *iperdeterminante rettangolare o semplicemente iperdeterminante delle* $a_{11},\dots a_{mn}$, ed il suo valore Δ si indicherà col simbolo:

$$\Delta = \begin{array}{c c} \begin{matrix} v_1 & \dots\dots\dots\dots & v_n \end{matrix} & \\ \left|\begin{matrix} a_{11} & \dots\dots\dots\dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots\dots\dots\dots & a_{mn} \end{matrix}\right| & \begin{matrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{matrix} \end{array}$$

Il numero v_i dicesi grado della verticale i^{ma}, il numero r_j grado della orizzontale j^{ma}. Risulta pertanto facilmente che: i determinanti sono iperdeterminanti di grado 1 in tutte le verticali ed orizzontali.

Essendo $\pm\, a_{\eta_1\theta_1}\dots a_{\eta_\sigma\theta_\sigma}$ un termine dell'iperdeterminante, sarà $\eta_1\dots\eta_\sigma$ una successione contenente r_1 volte l'indice $1,\dots r_m$ volte l'indice m, e $\theta_1\dots\theta_\sigma$ una successione contenente v_1 volte l'indice $1,\dots v_n$ volte l'indice n. Il segno di $a_{\eta_1\theta_1}\dots a_{\eta_\sigma\theta_\sigma}$ considerata come una combinazione relativa alla matrice T, non cambia, come già sappiamo, cambiando comunque l'ordine delle a ad essa appartenenti, pertanto: *il segno di un termine di un iperdeterminante non cambia, permutando comunque i suoi fattori.* È chiaro che il numero dei termini di un iperdeterminante è uguale al numero delle combinazioni relative alla matrice T; perciò indicandolo con N si ha:

$$\mathrm{N} = \begin{Bmatrix} p_1 p_2 \dots p_i \\ q_1 q_2 \dots q_j \end{Bmatrix}'$$

dove al solito p_λ è il numero delle v uguali a λ, e q_μ il numero delle r uguali a μ. Il calcolo di N, noti i valori delle v e delle r, non offre alcuna difficoltà, dopo quanto abbiamo detto a proposito del numero delle combinazioni relative alla matrice T.

Relativamente allo sviluppo di un iperdeterminante, consideriamo dapprima il caso nel quale gli elementi di esso sono numeri rappresentati per mezzo dei segni $a_{11} \ldots a_{mn}$. Formate le combinazioni relative alla matrice T, (v. art. 5°), e determinato il segno di ciascuna, basterà considerare tali combinazioni come prodotti e sommarli algebricamente; si avrà così lo sviluppo dell'iperdeterminante in questione.

Ma può darsi che gli elementi dell'iperdeterminante siano numeri non rappresentati coi segni $a_{11} \ldots a_{mn}$. Debbasi ad es. procedere allo sviluppo dell'iperdeterminante

$$\Delta = \begin{array}{|ccccc|c} \multicolumn{1}{c}{2} & 1 & 2 & 1 & \multicolumn{1}{c}{1} & \\ \hline 1 & 2 & -3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & 3 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \end{array}$$

Si consideri la matrice

$$\mu = \begin{array}{||ccccc||c} \multicolumn{1}{c}{2} & 1 & 2 & 1 & \multicolumn{1}{c}{1} & \\ \hline 1_1 & 2_2 & -3_3 & 4_4 & 1_5 & 2 \\ 6_1 & -2_2 & 1_3 & 1_4 & -1_5 & 3 \\ 2_1 & 0_2 & -1_3 & 1_4 & -3_5 & 2 \end{array}$$

la quale contiene gli elementi (numeri) appartenenti alle linee di Δ, ciascuno munito di un indice che è il numero d'ordine della verticale alla quale esso appartiene. Dimodochè il valore ad es. di 2_2 è 2, di -2_2 è -2, di -3_5 è -3 ecc.... Sappiamo (§ 5) che per formare le combinazioni relative alla matrice μ, si comincia a formare la seconda permutazione di una qualunque di esse. (Abbiamo visto in qual modo i noti valori delle v ed r, possa sempre scriversi, se esiste, la 2ª permutazione di una combinazione relativa ad una matrice di dimensioni $\rightarrow n$ e $\downarrow 3$). Sia essa ad es.

$$|\,1\,3\,|\,1\,2\,4\,|\,3\,5\,|.$$

Scegliendo nella matrice μ gli elementi 1° e 3° della 1ª orizzontale, 1°, 2° e 4° della 2ª, 3° e 5° della 3ª, abbiamo una delle combinazioni relative a tal matrice. Essa è la $|\,1_1 - 3_3\,|\,6_1 - 2_2\,1_4\,|\,-1_3 - 3_5\,|$. Come vedesi, abbiamo distinto i suoi elementi in tre gruppi: il 1° comprende quelli appartenenti alla 1ª orizzontale, il 2° quelli appartenenti alla 2ª, il 3° quelli appartenenti alla 3ª. E notiamo pure che gli indici di tali elementi sono appunto gli elementi della permutazione:

$$|\,1\,3\,|\,1\,2\,4\,|\,3\,5\,|$$

Il segno della suddetta combinazione è quello di $(-1)^{\beta}$, β essendo il numero delle inversioni che gli elementi di ciascuno dei gruppi $|\,1\,3\,|$, $|\,1\,2\,4\,|$, $|\,3\,5\,|$, fanno con quelli dei gruppi posti alla loro destra.

Si ha nel nostro caso $\beta = 3$, e pertanto il segno della combinazione suddetta è il —. Consideriamo ora la combinazione

$$- \mid 1_1 - 3_3 \mid 6_1 - 2_2\, 1_4 \mid -1_3 - 3_5 \mid$$

quale simbolo atto a rappresentare il prodotto dei numeri $1, -3, 6, -2, 1, -1, -3$, da prendersi col segno —. Avremo così il valore di un primo termine dell'iperdeterminante in questione

$$(1) \;\ldots\ldots - \mid 1_1 - 3_3 \mid 6_1 - 2_2\, 1_4 \mid -1_3 - 3_5 \mid \; = -(+108) = -108.$$

Diremo *permutazione annessa* a tal prodotto la permutazione $\mid 1\,3 \mid 1\,2\,4 \mid 3\,5 \mid$ degli indici dei fattori.

Per avere il valore degli altri termini dell'iperdeterminante, consideriamo le seconde permutazioni delle rimanenti combinazioni relative alla matrice μ. Sappiamo già con quale processo esse si possono dedurre dalla $\mid 1\,3 \mid 1\,2\,4 \mid 3\,5 \mid$, e come si possa pure determinare il segno di ciascuna (v. § 5°, formazione delle combinazioni relative ad una matrice di dimensioni $\longleftrightarrow n$ e $\updownarrow 3$). Per eseguire l'operazione ω_2 sulla $\mid 1\,3 \mid 1\,2\,4 \mid 3\,5 \mid$, cioè sulla permutazione annessa al prodotto (1), si può dapprima scambiare l'elemento 2 del 2° gruppo con l'elemento 3 del 1°. Si passa così alla $\mid 1\,2 \mid 1\,3\,4 \mid 3\,5 \mid$, alla quale corrisponde il termine dell'iperdeterminante

$$+ \mid 1_1\, 2_2 \mid 6_1\, 1_3\, 1_4 \mid -1_3 - 3_5 \mid \; = +(+36) = 36. \ldots\ldots \qquad (2)$$

da prendersi col segno +, giacchè il segno di $(-1)^{\beta}$ è, relativamente alla $\mid 1\,2 \mid 1\,3\,4 \mid 3\,5 \mid$, il segno +.

Ora il termine (2) si può dedurre dal termine (1) nel seguente modo. Data una coppia di due elementi a_{hj}, a_{ki} appartenenti ad orizzontali e verticali diverse della matrice.

$$T \equiv \begin{array}{ccccccc|c}
v_1 & \ldots & v_i & \ldots & v_j & \ldots & v_n & \\
\hline
a_{11} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} & r_1 \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
a_{h1} & \ldots & a_{hi} & \text{———} & a_{hj} & \ldots & a_{hn} & r_h \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
a_{k1} & \ldots & a_{ki} & \text{———} & a_{kj} & \ldots & a_{kn} & r_k \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
a_{m1} & \ldots & a_{mi} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} & r_m
\end{array}$$

si dirà *coppia coniugata*, la coppia degli elementi a_{hi}, a_{kj} e si dirà che sono coniugati a_{hi} ed a_{hj}, a_{ki} ed a_{kj}. Pertanto gli elementi di due coppie coniugate sono collocate ai vertici di uno stesso rettangolo, quelli di una stessa coppia stanno ai due vertici opposti, e due coniugati stanno ai due vertici di uno stesso lato orizzontale.

Si consideri ora nella matrice μ la coppia di elementi $-3_3, -2_2$ cioè quella di quelli tra i fattori del prodotto (1) i cui indici sono gli elementi scambiati per passare dalla $|13|124|35|$ alla $|12|134|35|$. Si consideri la coppia coniugata della $-3_2, -2_2$ cioè la $2_2 . 1_3$, e nel prodotto (1) si sostituisca a ciascuno dei fattori $-3_3, -2_2$ il suo coniugato, e cioè 2_2 a -3_3 ed 1_3 a -2_2. Si avrà allora il prodotto (2), che ha quale permutazione annessa la $|12|134|35|$. Prendendo questo prodotto col segno corrispondente a tal permutazione (è il segno di $(-1)^\beta$, dove β è il numero delle inversioni che gli elementi di ognuno de' gruppi $|12|$, $|134|$, $|35|$ fanno con quelli dei gruppi che gli stanno a destra) si avrà un altro termine dell'iperdeterminante in questione.

In generale se h *e* k *sono elementi della permutazione annessa ad un termine dell'iperdeterminante* Δ *e se scambiando in questa* h *con* k *si ottiene la* 2ª *permutazione di una combinazione relativa alla matrice* T, *sostituendo in tal termine ai fattori aventi gli indici* h *e* k *i loro coniugati, si ottiene un nuovo termine di* Δ. *Quanto alla determinazione del segno di esso, sappiamo già con quali norme,* (v. § 5°), *conosciuto il segno del termine dato di* Δ, *cioè quello della sua permutazione annessa, si possa determinare il segno del termine di* Δ *da esso derivato, cioè quello della sua permutazione annessa.*

Supponiamo ora scritto un termine di Δ; sappiamo già con quali operazioni dalla permutazione ad esso annessa si possono dedurre le permutazioni annesse ai termini rimanenti, giacchè sappiamo dedurre dalla 2ª permutazione di una combinazione relativa ad una matrice, quelle relative alle combinazioni rimanenti.

Quindi se in corrispondenza di ciascun scambio che ci permetta di passare dalla permutazione annessa ad un termine di Δ *a quella annessa ad un altro termine, eseguiamo l'operazione che consiste nel sostituire ai due fattori di esso termine (quelli aventi per indici gli elementi scambiati della permutazione annessa) i loro coniugati, avremo tanti termini di* Δ *quante sono le seconde permutazioni delle combinazioni relative alla matrice* T, *e sommando i valori di questi termini, ciascuno preso col segno della rispettiva permutazione annessa, avremo il valore di* Δ.

E si noti ancora che nel passare da un termine all'altro di Δ, non è affatto necessario di scrivere a parte la permutazione annessa al 1° e dedurre poi da esse quelle annesse al 2°, al 3° ecc...., giacchè la permutazione annessa ad un dato termine risulta già dalla semplice scritturazione di esso, grazie alla convenzione di munire ogni elemento dell'iperdeterminante di un indice rappresentante il numero d'ordine della verticale alla quale esso appartiene.

Alba, luglio 1902. Dott. Nicolò Traverso.

NUOVE PROPRIETÀ DEI PUNTI NOTEVOLI DEL TRIANGOLO

(Saggio di Geometria recente)

(Continuazione e fine, vedi fascicolo precedente)

PARTE SECONDA.

In questa seconda parte ci proponiamo di risolvere la questione seguente:

« Trovare le coordinate angolari (α, β, γ), le coordinate ceviane (a', b', c') « ed il valore dei parametri lineari (q, h, Δ) per i punti posti sui lati « del triangolo o sui loro prolungamenti ».

Per la convenzione da noi stabilita sulle misure angolari, le coordinate angolari di un punto posto sopra uno dei lati del triangolo sono sempre positive e tali che per es. pel punto D posto sul lato a saranno

$$\alpha = \pi \quad , \quad \beta + \gamma = \pi, \tag{1}$$

quelle del punto E od F sul prolungamento dello stesso lato sono

$$\alpha = -\pi \quad , \quad \beta + \gamma = -\pi, \tag{2}$$

Inoltre due delle coordinate ceviane sono allineate nella direzione del lato e per i tre punti D, E (dalla parte del vertice C) F (dalla parte del vertice B) soddisfano la condizione

$$b' + c' = a \quad , \quad \pm b' \mp c' = a, \tag{3}$$

e la terza coordinata ceviana a', è la congiungente col vertice opposto; essa si determina, o applicando il teorema di Stewart, o coll'uso delle nostre formule di cui quello è un caso particolare. (*) Di conseguenza saranno sempre positivi i parametri lineari pel punto D e negativi per i punti E, F.

Ricordiamo qui le note formule generali

$$\left.\begin{aligned} a' &= \frac{bc}{q} \operatorname{sen}(\alpha - A) \\ b' &= \frac{ca}{q} \operatorname{sen}(\beta - B) \\ c' &= \frac{ab}{q} \operatorname{sen}(\gamma - C) \\ q^2 &= b^2 \operatorname{sen}^2\gamma + c^2 \operatorname{sen}^2\beta + 2bc \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma \cos(\alpha - A) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(*) G. Delitala, " Un conolativo del teorema di Stewart ", *Periodico di Matematica.*

e le analoghe

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{a}{\operatorname{sen} A}=\dfrac{b}{\operatorname{sen} B}=\dfrac{c}{\operatorname{sen} C}=\dfrac{q}{\Delta}=2R\\[2ex] h=\dfrac{2\Omega}{q}\end{array}\right\} \qquad (5)$$

Poniamo l'angolo $CAD = A_1$; $DAB = A_2$, sarà $A = A_1 + A_2$.

Le *coordinate angolari* del punto D sono

$$\left\{\begin{array}{ll}\alpha=\pi & \text{Il valore del \textit{segmento fisso} q è}\\ \beta=\pi-(C+A_1) & q^2=(b^2+c^2-2bc\cos A)\operatorname{sen}^2\beta\\ \gamma=C+A_1 & \quad =a^2\operatorname{sen}^2(C+A_1)\\ \hline \Sigma=2\pi & \text{ossia } q=a\operatorname{sen}\beta=a\operatorname{sen}(C+A_1)\end{array}\right\} \qquad (6)$$

L'*altezza equivalente* h sarà

$$h=\frac{2\Omega}{a\operatorname{sen}\beta}=\frac{2\Omega}{a\operatorname{sen}(C+A_1)}.$$

Il valore della *costante angolare* Δ, è

$$\Delta=\operatorname{sen} A\operatorname{sen}\beta=\operatorname{sen} A\operatorname{sen}(C+A_1).$$

Le *coordinate ceviane* sono

$$\left.\begin{array}{l}a'=\dfrac{bc\operatorname{sen} A}{a\operatorname{sen}\beta}=\dfrac{2\Omega}{a\operatorname{sen}(C+A_1)}=h\\[2ex] b'=\dfrac{c\operatorname{sen}(\beta-B)}{\operatorname{sen}\beta}=c\dfrac{\operatorname{sen}(A-A_1)}{\operatorname{sen}(C+A_1)}\\[2ex] c'=\dfrac{b\operatorname{sen}(\gamma-C)}{\operatorname{sen}\beta}=b\dfrac{\operatorname{sen} A_1}{\operatorname{sen}(C+A_1)}\end{array}\right\}, \qquad (7)$$

essendo così $b'+c'=a$.

Eliminando dalle tre ultime equazioni scritte b' e c' si ottiene l'espressione dell'angolo A_1

$$\cot A_1=\frac{a\cos C+c\cos A-b}{c\operatorname{sen} A-a\operatorname{sen} C}=\frac{0}{0} \qquad (8)$$

la quale, com'era da prevedersi, si presenta sotto forma indeterminata, essendo la posizione del punto D determinata mediante uno dei due angoli A_1, A_2, oppure da β o da γ, o dalla distanza o dal rapporto delle distanze dai vertici B e C o dalla distanza dal vertice A.

Si possono quindi enunciare le seguenti proprietà:

1°. *Pei punti posti sopra un lato del triangolo di riferimento o sul prolungamento, il valore del* segmento fisso *q non è altro che la proiezione del lato sul quale trovasi il punto sulla perpendicolare alla corrispondente ceviana del vertice opposto.*

2°. *Il valore della* costante angolare Δ *è dato sempre dal prodotto del seno dell'angolo opposto pel seno dell'angolo d'inclinazione della ceviana corrispondente sul lato medesimo.*

3°. *Il valore dell'*altezza equivalente *h, non è altro che la coordinata ceviana del vertice opposto.*

Nel caso particolare del punto posto sul lato a a distanza infinita per es. dal punto G dalla parte del vertice C, o di H dalla parte del vertice B, si avrebbero i seguenti valori:

$$\mathrm{G}\begin{cases}\beta=0\\ \alpha=\gamma=-\pi\\ \hline \Sigma=-2\pi\end{cases}\qquad \begin{cases}q=0\\ \Delta=0\\ h=\infty\end{cases}\qquad \begin{cases}a'=\infty\\ b'=\infty\\ c'=\infty\end{cases}\qquad \mathrm{H}\begin{cases}\gamma=0\\ \alpha=\beta=-\pi\\ \hline \Sigma=-2\pi\end{cases}\tag{9}$$

Esaminiamo ora che cosa diventano le formule ultime trovate nel caso particolare di punti notevoli sui lati del triangolo, cioè dei punti d'intersezione delle rette passanti pei punti notevoli del triangolo.

I. — *Triangolo rettangolo*. Il punto D è sull'ipotenusa a.

1°. Saranno pel *piede della perpendicolare*

$$\begin{cases}\alpha=\pi\\ \beta=\dfrac{\pi}{2}\\ \gamma=\dfrac{\pi}{2}\\ \hline \Sigma=2\pi\end{cases}\qquad \begin{cases}q^2=b^2+c^2\\ q^2=a^2\\ \hline a^2=b^2+c^2\\ q=a\end{cases}\qquad \begin{cases}a'=h=\dfrac{bc}{a}\\ b'=c\,.\cos \mathrm{B}\\ c'=b\cos \mathrm{C}\end{cases}\qquad \Delta=1\tag{10}$$

Come corollario si deducono le nota proprietà del triangolo rettangolo

$$\left.\begin{aligned}b'\times c'=bc\cos \mathrm{B}\cos \mathrm{C}=b\,\mathrm{sen}\,\mathrm{C}\times c\,\mathrm{sen}\,\mathrm{B}=a'^2\\ a\times c'=\frac{b^2c\cos \mathrm{C}}{a'}=\frac{b^2c\,\mathrm{sen}\,\mathrm{B}}{a'}=b^2\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

2°. Saranno pel *piede della bisettrice* dell'angolo retto

$$\begin{cases}\alpha=\pi\\ \beta=\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{B}=\dfrac{3}{4}\pi-\mathrm{C}\\ \gamma=\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{C}=\dfrac{3}{4}\pi-\mathrm{B}\\ \hline \Sigma=2\pi\end{cases}\qquad \begin{cases}q^2=(b^2+c^2)\,\mathrm{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{C}\right)=a^2\,\mathrm{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{C}\right)\\ q=\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{C}\right)\\ \Delta=\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{C}\right)\end{cases}\tag{12}$$

$$\begin{cases}a'=h=\dfrac{bc}{a\,.\,\Delta}\\ b'=\dfrac{\sqrt{2}\,c}{2\,.\,\Delta}\\ c'=\dfrac{\sqrt{2}\,b}{2\,.\,\Delta}\end{cases}\qquad b':c'=c:d\tag{13}$$

si deduce la nota proprietà della bisettrice.

3°. Saranno pel *piede della mediana* dell'angolo retto

$$\begin{cases}\alpha=\pi\\ \beta=2\pi\\ \gamma=2\mathrm{C}\\ \hline \Sigma=2\pi\end{cases}\qquad \begin{cases}q^2=(b^2+c^2)\,\mathrm{sen}^2\,2\mathrm{B}=a^2\,\mathrm{sen}^2\,2\mathrm{B}=a^2\,\mathrm{sen}^2\,2\mathrm{G}\\ q=a\,\mathrm{sen}\,2\mathrm{B}=4a\cos \mathrm{B}\,\mathrm{sen}\,\mathrm{B}=2b\cos \mathrm{B}\\ \Delta=\dfrac{2b\cos \mathrm{B}}{a}\end{cases}\tag{14}$$

$$\begin{cases} a' = h = \dfrac{c}{2\cos B} = \dfrac{a}{2} = R \\ b' = \dfrac{ca \operatorname{sen} B}{2b \cos B} = \dfrac{a}{2} \\ c' = \dfrac{a \operatorname{sen} G}{2 \cos B} = \dfrac{a}{2} \end{cases} \tag{15}$$

Si ritrova così la nota proprietà del triangolo rettangolo.

II. — *Triangolo obliquangolo.* 1°. Piede della perpendicolare abbassata dal vertice A.

$$\begin{cases} \alpha = \pm \pi \\ \beta = \pm \dfrac{\pi}{2} \\ \gamma = \pm \dfrac{\pi}{2} \\ \hline \Sigma = \pm 2\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} q^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ q^2 = a^2 \\ \hline a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{(il noto teorema)} \\ q = \pm a, \qquad \Delta = \pm \operatorname{sen} A \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} a' = \pm h = \dfrac{bc}{a} \operatorname{sen} A = c \operatorname{sen} B \\ b' = c \cos B \\ c' = b \cos C \end{cases} \tag{17}$$

cioè si ritrova il noto teorema di trigonometria sui triangoli rettangoli.

2°. Piede della bisettrice dell'angolo A.

$$\begin{cases} \alpha = \pi \\ \beta = \pi - \left(G + \dfrac{A}{2}\right) \\ \gamma = \pi - \left(B + \dfrac{A}{2}\right) \\ \hline \Sigma = 2\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} q^2 = (b^2 + c^2 - 2bc \cos A) \operatorname{sen}^2\left(B + \dfrac{A}{2}\right) \\ q^2 = a^2 \operatorname{sen}^2\left(B + \dfrac{A}{2}\right) = a^2 \operatorname{sen}^2\left(C + \dfrac{A}{2}\right) \\ q = a \operatorname{sen}\left(B + \dfrac{A}{2}\right) = a \operatorname{sen}\left(C + \dfrac{A}{2}\right) \\ \Delta = \operatorname{sen} A \operatorname{sen}\left(B + \dfrac{A}{2}\right) = \operatorname{sen} A \operatorname{sen}\left(C + \dfrac{A}{2}\right) \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} a' = h = \dfrac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}\left(B + \dfrac{A}{2}\right)} \\ b' = c \dfrac{\operatorname{sen} \dfrac{3}{2} A}{\operatorname{sen}\left(B + \dfrac{A}{2}\right)} \\ c' = b \dfrac{\operatorname{sen} \dfrac{3}{2} A}{\operatorname{sen}\left(B + \dfrac{A}{2}\right)} \end{cases} \tag{19}$$

Si deduce $b' : c' = c : b$ che è la nota proprietà delle bisettrici d'un triangolo qualunque.

3°. Piede della bisettrice estrema col vertice in A.

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = -\pi \\ \beta = \dfrac{\pi}{2} - \left(C + \right) \\ \gamma = -\dfrac{3\pi}{2} + \left(C + \dfrac{A}{2}\right) \\ \hline \Sigma = -2\pi \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} q^2 = (b^2 + c^2 - 2bc \cos A)\cos^2\left(C + \dfrac{A}{2}\right) \\ q^2 = a^2 \cos^2\left(C + \dfrac{A}{3}\right) \\ q = -a \cos\left(C + \dfrac{A}{2}\right) \\ \Delta = -\operatorname{sen} A \cos\left(C + \dfrac{A}{2}\right) \end{array}\right. \tag{20}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a' = -h = \dfrac{b \operatorname{sen} C}{\cos\left(C + \dfrac{A}{2}\right)} \\ b' = -\dfrac{c \,.\, \cos \dfrac{A}{2}}{\cos\left(C + \dfrac{A}{2}\right)} \\ c' = \dfrac{b \,.\, \cos \dfrac{A}{2}}{\cos\left(C + \dfrac{A}{2}\right)}\,. \end{array}\right. \tag{21}$$

4°. Piede della mediana pel vertice A.

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = \pi \\ \beta = \pi - (C + A_1) \\ \gamma = (C + A_1) \\ \hline \Sigma = 2\pi \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} q^2 = (b^2 + c^2 - 2bc \cos A)\operatorname{sen}^2(C - A_1) \\ q^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 (C + A_1) \\ q = a \operatorname{sen}(C + A_1) \\ \Delta = \operatorname{sen} A \operatorname{sen}(C + A_1) \end{array}\right. \tag{22}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a' = h = \dfrac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}(C + A_1)} \\ b' = c\,\dfrac{\operatorname{sen}(A - A_1)}{\operatorname{sen}(C + A_1)} \\ c' = b\,\dfrac{\operatorname{sen} A_1}{\operatorname{sen}(C + A_1)} \end{array}\right. \tag{23}$$

Ed essendo per ipotesi $b' = c'$, dalle ultime due relazioni identificando si può ricavare l'angolo incognito A_1

$$\cot A_1 = \frac{b + c \,.\, \cos A}{b \operatorname{sen} A} \tag{24}$$

Analogamente si può scrivere

$$\cot A_2 = \frac{c + b \cos A}{b \operatorname{sen} A}\,. \tag{25}$$

Si ha la riprova nella eguaglianza $A = A_1 + A_2$.

5°. Piede della simediana pel vertice A.

$$\begin{cases} \alpha = \pi \\ \beta = (B + A_1) \\ \gamma = \pi - (B + A_1) \\ \hline \Sigma = 2\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} q^2 = (b^2 + c^2 - 2bc)\,\text{sen}^2(B + A_1) \\ q \ = a\ \text{sen}\,(B + A_1) \\ \Delta = \text{sen}\,A\ \text{sen}\,(B + A_1) \end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{cases} a' = h = \dfrac{c\ \text{sen}\,B}{\text{sen}\,(B + A_1)} \\ b' = c\,\dfrac{\text{sen}\,A_1}{\text{sen}\,(B + A_1)} \\ c' = b\,\dfrac{\text{sen}\,(A - A_1)}{\text{sen}\,(B + A_1)} \end{cases} \tag{27}$$

Si vede che gli angoli componenti A_1, A_2 sono identici a quelli della mediana ma scambiati di posizione.

6°. Piede delle mediatrici dei due lati b e c del triangolo.

$$\begin{cases} \pm\alpha_1 = \pi \\ \pm\beta_1 = \pi - 2C \\ \pm\gamma_1 = 2C \\ \hline \Sigma = \pm\,2\pi \end{cases} \begin{cases} \pm\alpha_2 = \pi \\ \pm\beta_2 = 2B \\ \pm\gamma_2 = \pi - 2B \\ \hline \Sigma = \pm\,2\pi \end{cases} \quad \begin{cases} q_1 = \pm\,\text{sen}\,2C \\ \Delta_1 = \pm\,\text{sen}\,A\,\text{sen}^2 2C \end{cases} \begin{cases} q_2 = \pm\,a\,\text{sen}^2 B \\ \Delta_2 = \pm\,\text{sen}\,A\,\text{sen}^2 2C \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} a'_1 = \pm\,h_1\,\dfrac{b}{2\cos C} \\ b'_1 = c\,\dfrac{\text{sen}\,(A - C)}{\text{sen}^2 C} \\ c'_1 = \dfrac{b}{2\cos C} \end{cases} \qquad \begin{cases} a'_2 = \pm\,h_2\,\dfrac{c}{2\cos B} \\ b'_2 = \dfrac{c}{2\cos B} \\ c'_2 = b\,\dfrac{\text{sen}\,(A - B)}{\text{sen}^2 B} \end{cases} \tag{29}$$

Risultano: $a'_1 = c'_1$, $a'_2 = b'_2$.

7°. Piede delle ceviane dei punti di Brocard pel vertice A del triangolo

$$\begin{cases} \alpha_1 = \pi \\ \beta_1 = B + w \\ \gamma_1 = \pi - (B + w) \\ \hline \Sigma_1 = 2\pi \end{cases} \begin{cases} \alpha_2 = \pi \\ \beta_2 = \pi - (C + w) \\ \gamma_2 = (C + w) \\ \hline \Sigma_2 = 2\pi \end{cases} \begin{cases} q_1 = a\,\text{sen}(B + w) \\ \Delta_1 = \text{sen}\,A\,\text{sen}\,(B + w) \end{cases} \begin{cases} q_2 = a\,\text{sen})C + w) \\ \Delta_2 = \text{sen}\,A\,\text{sen}\,(C + w) \end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{cases} a'_1 = h_1 = \dfrac{a\ \text{sen}\,(B + w)}{bc} \\ b'_2 = \dfrac{c\ \text{sen}\,w}{\text{sen}\,(B + w)} \\ c'_1 = \dfrac{b\ \text{sen}\,(A - w)}{\text{sen}\,(B + w)} \end{cases} \qquad \begin{cases} a'_2 = h_2 = \dfrac{bc}{a\ \text{sen}\,(C + w)} \\ b'_2 = c\,\dfrac{\text{sen}\,(A - w)}{\text{sen}\,(C - w)} \\ c'_2 - b\,\dfrac{\text{sen}\,w}{\text{sen}\,(C + w)} \end{cases} \tag{31}$$

Si deduce la proprietà

$$q_1 : q_2 = \Delta_1 : \Delta_2 = h_2 : h_1\ \text{sen}\,(B + w) : \text{sen}\,(C + w) \tag{32}$$

8°. Piede delle ceviane dei punti di Gergonne e di Nagel pel vertice A del triangolo.

Si possono ottenere le due *coordinate ceviane* allineate sul lato a, dalla definizione stessa dei punti reciproci:

$$\left.\begin{array}{l} D_1B = D_2C = b'_1 = c'_2 = (p-a) \\ D_1C = D_2B = c'_1 = b'_2 = (2a-p) \end{array}\right\} \qquad (33)$$

le quali sono eguali due a due fra di loro.

Per trovare i tre parametri lineari e quindi la terza coordinata ceviana per ciascuno dei due punti o piedi D_1, D_2 basterà calcolare prima i due angoli $D_1AB = A_1$, $D_2AC = A_2$.

Si ottengono rispettivamente dalle due relazioni

$$\frac{\text{sen}\,(A_1+B)}{\text{sen}\,A_1} = \frac{c}{p-a} \qquad \frac{\text{sen}\,(A_2+C)}{\text{sen}\,A_2} = \frac{b}{p-a}$$

dalle quali si ricavano

$$\cot A_1 = \frac{c-(p-a)\cos B}{\text{sen}\,B} \qquad \cot A_2 = \frac{b-(p-a)\cos C}{\text{sen}\,C}\,.$$

Saranno quindi

$$\left.\begin{array}{ll} q_1 = a\,\text{sen}\,(A_1+B) & q_2 = a\,\text{sen}\,(A_2+C) \\ \Delta_1 = \text{sen}\,A\,\text{sen}\,(A_1+B)\,. & \Delta_2 = \text{sen}\,A\,\text{sen}\,(A_2+C) \\ a'_1 = h_1 = \dfrac{bc}{a\,\text{sen}\,(A_1+B)} & a'_2 = h_2 = \dfrac{bc}{a\,\text{sen}\,(A_2+C)} \end{array}\right\} \qquad (34)$$

Anche qui si deduce la proprietà

$$\left.\begin{array}{l} q_1 : q_2 = \Delta_1 : \Delta_2 = h_2 : h_1 = \text{sen}\,(A_1+B) : \text{sen}\,(A_2+C) \\ \quad = c\,.\,\text{sen}\,A_1 : b\,.\,\text{sen}\,A_2 \end{array}\right\} \qquad (35)$$

che si può enunciare così: *Il rapporto diretto dei due parametri lineari* q *o dei due* Δ *e l'inverso dei due parametri* h *dei due punti reciproci* D_1 *e* D_2 *è uguale al rapporto delle rispettive distanze dalle ceviane passanti per questi punti.*

Uno studio analogo si potrebbe fare per altri punti speciali sui lati del triangolo, ed esaminare i casi particolari che si possono presentare nelle varie specie di triangoli e che noi tralasciamo, sembrando più che sufficienti i casi sopra esaminati.

Prof. G. Delitala.

PICCOLE NOTE

Dimostrazione di un teorema di calcolo combinatorio. — È noto che *il numero delle combinazioni con ripetizione di* n *elementi, della classe* k, *è uguale a quello delle combinazioni semplici di* n + k — 1 *elementi, della classe* k; brevemente

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k}\,.$$

La semplice dimostrazione che segue ha il vantaggio di stabilire l'uguaglianza dei due numeri indipendentemente dalla conoscenza di essi.

Dimostrazione. — In una combinazione con ripetizione di classe k degli n elementi $a_1 a_2 \dots a_n$, sia a_i contenuto α_i volte. Sarà:

$$(1) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k \quad , \quad \alpha_i \geq 0 \text{ ed intero.}$$

Ad ognuna di tali combinazioni corrisponde una soluzione della (1), e reciprocamente. Quindi: *La* (1) *ammette* $C'_{n,k}$ *soluzioni.*

Dati ora $n+k-1$ elementi $b_1 b_2 \dots b_{n+k-1}$, ogni loro combinazione semplice della classe k si potrà ottenere sopprimendo $n-1$ elementi $b_{r_1} b_{r_2} \dots b_{r_{n-1}}$. Dei k rimanenti α_1 precedano b_{r_1}, α_2 siano fra b_{r_1} e b_{r_2} ecc. α_n seguano $b_{r_{n-1}}$. Sarà ancora:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k \quad , \quad \alpha_i \geq 0 \text{ ed intero.}$$

Ad ogni combinazione semplice delle b_j della classe k corrisponde quindi una soluzione della (1), e reciprocamente. Segue: *La* (1) *ammette* $C_{n+k-1,k}$ *soluzioni.*

Confrontando i due enunciati si deduce:

$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k} \qquad \text{c. d. d.}$$

Pavia. Luigi Brusotti.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 613, 615, 616, 617 E 618

613. (703) (*) *Sia* MN *una corda normale in* M *ad una parabola* p, *inclinata di* 45° *sull'asse di questa, e sia* c *il circolo tagente esternamente a* p *in* M *di raggio* $\frac{MN}{4}$. *Si dimostri:*

1°. *Che una delle tangenti comuni a* p *e* c *è parallela ad* MN;

2°. *Che la distanza della tangente in* M *dal punto d'incontro delle altre due tangenti comuni a* p *e* c *è* $\frac{3\,MN}{4}$;

3°. *Che il segmento staccato sulla tangente in* M *dalle due tangenti suddette è uguale a* MN.

Barisien.

Risoluzione del sig. Niccolai.

Essendo

$$y^2 = 2px$$

l'equazione della parabola p, si trova immediatamente che:

$$(1) \quad x + y + \frac{p}{2} = 0, \qquad (2) \quad x - y - \frac{3p}{2} = 0$$

(*) Le quistioni numerate dal 610 al 615 corrispondono a quelle, del fasc. I (Anno XVIII) dal 700 al 705, così numerate in causa di un errore tipografico.

sono le equazioni della tangente e dalla normale in M $\left(\frac{p}{2}, -p\right)$ e che inoltre $MN = 4p\sqrt{2}$.

L'equazione del circolo tangente esternamente in M alla parabola p di raggio $p\sqrt{2}$ in coordinate plükeriane è:

$$(3) \qquad \left(\frac{p}{2}u + 2pv - 1\right)^2 = 2p^2(u^2 + v^2);$$

per cui le tangenti comuni a p e a c si determinano, cercando le soluzioni comuni alla (3) e alla equazione della parabola in coordinate plükeriane

$$(4) \qquad 2u = pv^2.$$

Si conclude che le tangenti comuni alla parabola e al circolo distinte dalla (1) sono le:

$$(5) \qquad x - y + \frac{p}{2} = 0, \qquad x + 7y + \frac{49}{2}p = 0,$$

e la prima parte del teorema si fa manifesta.

2°. Il punto comune alle (5) ha per coordinate: $\left(-\frac{7}{2}p, -3p\right)$, per cui, chiamando d_1 la sua distanza dalla (1), si ha:

$$d_1 = 3p\sqrt{2}.$$

3°. La (1) incontra le (5) rispettivamente nei punti:

$\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{7}{2}p, -4p\right)$ la distanza dei quali è eguale a $4p\sqrt{2}$.

615. (705) *Due parabole hanno lo stesso vertice O ed i loro assi sono ortogonali. Trovare le coordinate del secondo punto d'incontro O', l'angolo delle parabole in O' e l'area della porzione di piano limitata fra gli archi OO' delle due parabole.*

Facendo variare il parametro di una delle due parabole, si trovi per qual valore di esso l'angolo delle parabole in O' sia massimo.

Barisien.

Risoluzione del sig. Occhipinti e del prof. Nannei.

Siano P e Q le due parabole ed $y^2 - 2px = 0$, $x^2 - 2qy = 0$ le rispettive equazioni; le coordinate del punto O' si ottengono risolvendo il sistema precedente rispetto ad x ed y ed escludendo i valori $x = 0$, $y = 0$ che danno le coordinate di O. Allora si ottiene:

$$x = 2\sqrt[3]{pq^2}, \quad y = 2\sqrt[3]{p^2q}.$$

Ora le equazioni delle tangenti a P e Q in O' sono rispettivamente:

$$2\sqrt[3]{p^2q}\; y = px + 2\sqrt[3]{p^4q^2} \quad , \quad qy = 2\sqrt[3]{pq^2}\; x - 2\sqrt[3]{p^2q^4}$$

ed i loro coefficienti angolari sono $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$, $2\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$, e quindi la tangente dell'angolo φ di queste rette, cioè dell'angolo delle parabole in O', è

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{2}\frac{\sqrt[3]{pq}}{\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{q^2}}.$$

Facendo variare, per es., p, l'espressione precedente è massima (o minima) quando

$$\frac{1}{3}\left(p^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{2}{3}}\right)p^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}=0$$

cioè quando $p=q$. Questo valore di p rende negativa la seconda derivata di $\operatorname{tg}\varphi$ rispetto a p, come si verifica con un calcolo facile, dunque corrisponde ad un massimo.

Sia infine, A l'area della porzione di piano limitata fra gli archi OO' delle due parabole; ed R il rettangolo che ha per vertici O, O' e le proiezioni di O' sugli assi. È facile vedere che $A=\frac{1}{3}R$, e siccome R è eguale al prodotto delle coordinate di O' si ricava

$$A=\frac{1}{3}pq.$$

616. *Gli archi massimi condotti da un punto* P *ad un circolo minore, della superficie sferica verificano la relazione*

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}\,PM\,.\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\,PM_1=\text{costante.}$$

CASSANI.

Risoluzione del prof. Padoa.

Se O è il centro della superficie sferica, Q il punto opposto a P, R l'intersezione di PQ col piano della circonferenza minore, e se MM_1 è la corda comune a questa circonferenza e ad una circonferenza massima arbitraria passante per P, dimostrerò che

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}\,PM\,.\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\,PM_1$$

è eguale a

$$\frac{OP-OR}{OP+OR}\quad\text{ovvero a}\quad\frac{OP+OR}{OP-OR}$$

secondochè R è un punto di OP o di OQ.

1) R sia un punto di OP. Qualora P non dimezzi l'arco MM_1, sia M l'estremo della corda che è più prossimo a P; quindi, rappresentati con 2α e 2β gli angoli POM_1 e POM, sarà $\alpha > \beta$. La proiezione di O su MM_1 sia S; l'angolo SOM è la semisomma degli angoli 2α e 2β, cioè $\alpha+\beta$. L'intersezione di OP con MM_1 è R; l'angolo SOR è la differenza fra gli angoli SOM e POM, cioè fra $\alpha+\beta$ e 2β, quindi è $\alpha-\beta$. Dopo ciò, si ha

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{OS}{OR}\qquad\cos(\alpha+\beta)=\frac{OS}{OM}$$

da cui, rammentando che

$$\text{tang}\alpha\,.\,\text{tang}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}.$$

semplificando e sostituendo OP ad OM, risulta

$$\text{tang}\,\alpha\,.\,\text{tang}\,\beta=\frac{OP-OR}{OP+OR}\qquad\text{c. d. d.}$$

2) R sia un punto di OQ. In tal caso, quanto precede sussiste sol che si cambi P in Q. Quindi, rappresentati con $2\alpha'$ e $2\beta'$ gli angoli POM_1 e POM, poichè

$$\alpha'=90^\circ-\alpha\qquad\beta'=90^\circ-\beta$$

da cui

$$\operatorname{tang}\alpha' \,.\, \operatorname{tang}\beta' = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha \,.\, \operatorname{tang}\beta},$$

risulta

$$\operatorname{tang}\alpha' \,.\, \operatorname{tang}\beta' = \frac{OP + OR}{OP - OR} \qquad \text{c. d. d.}$$

617. *Si descrivano tre semiperbole ciascuna delle quali abbia per assintoti due lati di un triangolo equilatero, e sia tangente al terzo.*

La minima distanza fra due di esse è $(\sqrt{2} - 1)l$, *essendo* l *la lunghezza del lato del triangolo.*

GREENSTREET.

Risoluzione del sig. Occhipinti.

Sia h l'iperbole che ha per assintoti AB, AC e h' quella che ha per assintoti AB, BC, e, indicando con O il piede della perpendicolare condotta da C ad AB, si prenda OB per asse positivo delle x e OC per asse positivo delle y.

Essendo $OB = \frac{l}{2}$, $OA = -\frac{l}{2}$, $OC = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, l'equazioni delle rette AC, BC sono rispettivamente

(1) $$2x\sqrt{3} - 2y + l\sqrt{3} = 0, \qquad 2x\sqrt{3} + 2y - l\sqrt{3} = 0.$$

L'equazione di un'iperbole che ha per assintoti AB, AC è

$$y(2x\sqrt{3} - 2y \times l\sqrt{3}) = k,$$

e quindi quella dell'iperbole h si trova determinando k per mezzo della condizione che essa deve passare per il punto medio di AB che ha per coordinate

$$x = \frac{1}{2}\,OB = \frac{l}{4}, \qquad y = \frac{1}{2}\,OC = \frac{l\sqrt{3}}{4}.$$

Si trova così $k = -\frac{3}{4}l^2$, e quindi l'equazione di h è

(2) $$8y^2 - 8\sqrt{3}\,xy - 4l\sqrt{3}y + 3l^2 = 0;$$

e similmente quella di h' è

(3) $$8y^2 + 8\sqrt{3}\,xy - 4l\sqrt{3}y + 3l^2 = 0.$$

Per la simmetria della figura apparisce evidente che la minima distanza fra i punti delle due iperboli h, h' è eguale alla distanza delle due rette ad esse tangenti e parallele all'asse y.

La tangente ad h o h' parallela alla y si trova imponendo la condizione che la (2) o la (3) risolute rispetto alla y abbiano una radice doppia. Tali equazioni sono dunque

$$x = \frac{l(\sqrt{2} - 1)}{2} \qquad x = -\frac{l(\sqrt{2} - 1)}{2}$$

e la distanza delle due rette è $l(\sqrt{2} - 1)$.

618. *Calcolare il raggio del circolo tangente ad una data iperbole e ad uno dei suoi assintoti nel centro dell'iperbole.*

Caso dell'iperbole equilatera.

Risoluzione del sig. Occhipinti, R. U. di Palermo.

Prendiamo come asse delle y l'assintoto dell'iperbole, cui deve esser tangente il circolo da costruire, e la perpendicolare a questa retta dal centro O dell'iperbole come asse delle x; l'equazione dell'iperbole data è allora della forma

(1) $$ax^2 + 2hxy + c = 0,$$

dove si debbono supporre noti almeno i rapporti di due coefficienti al terzo; p. es. ad h che non può mai mancare. L'equazione di un cerchio tangente in O all'asse delle y è

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0 \tag{2}$$

dove r dinota il raggio. Se questo circolo deve toccare la iperbole, bisogna che l'equazione

$$(a^2 + 4h^2)\, x^4 - 8h^2\, rx^3 + 2acx^2 + c^2 = 0$$

che si ottiene eliminando y fra la (1) e (2) abbia una radice doppia, cioè che si abbia altresì

$$(a^2 + 4h^2)\, x^2 - 6h^2 rx + ac = 0.$$

Eliminando r fra queste due, si ricava

$$x = \sqrt{\frac{ac \pm 2c\sqrt{a^2 + 3h^2}}{a^2 + 4h^2}};$$

conseguentemente

$$r = \frac{c\,(a \pm \sqrt{a^2 + 3h^2})\sqrt{a^2 + 4h^2}}{3h^2 \sqrt{ac \pm 2c\sqrt{a^2 + 3h^2}}}.$$

Supponiamo nella (1) $a > 0$; allora se gli assintoti della iperbole data formano un angolo acuto, deve essere necessariamente $c > 0$, quindi per x deve prendersi il solo valore corrispondente al segno $+$; se l'angolo degli assintoti è retto, allora dev'essere naturalmente $c < 0$, quindi per x è da prendersi il solo valore corrispondente al segno $-$; infine, se l'angolo degli assintoti è ottuso, sussiste il risultato precedente. Corrispondentemente si ha il valore di r in ogni caso, supposto sempre $a > 0$ (al qual caso possiam sempre ridurci). Se l'iperbole è equilatera, allora $a = 0$ epperò, posto $\frac{c}{h} = -k^2$ si ha: $r^2 = \frac{2k^2}{3\sqrt{3}} = \frac{k}{3} \times \frac{k}{\text{sen}\, 60^\circ}$. Si ha dunque la seguente costruzione per trovare il raggio r: Si costruisca il triangolo equilatero di lato k: il diametro AB del cerchio circoscritto sarà $\frac{k}{\text{sen}\, 60^\circ}$; si riporti su AB, a partire da A il terzo di k fino in C: da C la perpendicolare ad AB fino ad incontrare il cerchio circoscritto in D: AD è il raggio cercato

QUISTIONI PROPOSTE

621. Per un punto P del piano di una conica data si conduca una retta variabile che incontri la conica in A e B. Si trovi l'inviluppo del circolo di diametro AB.

622. Siano MN_1, MN_2, MN_3, MN_4 le normali condotte da un punto M ellisse di centro O. Il luogo dei punti M tali che

$$k\left(\overline{MN}_1^2 + \overline{MN}_2^2 + \overline{MN}_3^2 + \overline{MN}_4^2\right) + k'\left(\overline{ON}_1^2 + \overline{ON}_2^2 + \overline{ON}_3^2 + \overline{ON}_4^2\right) = l^2$$

è una conica, che diventa un circolo, quando $k = k'$, e una coppia di rette quando $k = -k'$.

Quistione analoga per la parabola, essendo O il vertice.

623. Un punto M si sposta sopra una semicirconferenza di diametro AB. Siano P, P' i vertici dei due triangoli equilateri che hanno per base AM, e Q, Q' i vertici dei due triangoli equilateri che hanno per base BM. Si trovino i luoghi di P, P', Q, Q' e dei punti medi di PQ, P'Q', PQ' e P'Q.

624. Essendo r, θ le coordinate polari d'un punto M d'una curva d'arca s, e V l'angolo della tangente col raggio vettore, dimostrare che il raggio di curvatura ρ in M è

$$\rho = \frac{ds}{d\theta + dV}.$$

625. Dimostrare che

$$\lim_{(x=1)} \left[\frac{(x+1)\left[\frac{(x+1)}{x} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{\pi}{2}\right]}{x-1} \right] = 2.$$

626. Trovare l'area compresa fra la curva

$$y = a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x + c$$

e l'asse delle x, quando x varia da 0 a 2π.

627. Dimostrare che l'area della curva

$$(x^2 + y^2)(b^2x^2 + a^2y^2) = (a+b)^4 (x^2 - y^2)$$

è

$$U = \frac{2(a+b)^3}{a-b} \left[\frac{a^2+b^2}{ab} \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} - \frac{\pi}{2}\right];$$

e che, quando $a = b$, quest'area diventa

$$U = 16a^2.$$

E. N. Barisien.

BIBLIOGRAFIA

Capelli. — *Istituzioni di analisi algebrica.* Terza edizione con aggiunte delle Lezioni di algebra complementare ad uso degli aspiranti alla licenza universitaria in scienze fisiche e matematiche. — Napoli, Pellerano, 1902. L. 11.

Quest'opera del valente professore dell'Università di Napoli è troppo universalmente nota agli studiosi, e se ne è occupato altre volte anche il Periodico, perchè occorra parlare lungamente di essa. Ci limiteremo quindi ad accennare in che cosa essa differisce dalle precedenti edizioni.

Mentre nella prima e seconda edizione si supponeva già noto tutto ciò che forma argomento dei corsi ordinari di aritmetica razionale ed algebra elementare nei licei, in questa terza edizione lo studio dei numeri è preso *ab ovo*, e quindi gli ordinari elementi di aritmetica ed algebra ed i complementi di questa sono fusi in un tutto armonico ed omogeneo. Per questa ragione l'egregio Autore ha molto opportunamente cambiato il primitivo titolo in quello di *Istituzioni di analisi algebrica*, che meglio si addice all'opera nella sua nuova forma. L'esposizione dei primi fondamenti della teoria dei numeri è fatta con l'*indirizzo combinatorio*, seguendo i concetti ampiamente svolti dall'Autore in tre memorie pubblicate l'anno scorso nel *Giornale di Battaglini*, che egli dirige.

Le altre più notevoli modificazioni ed aggiunte consistono nel maggiore sviluppo dato agli elementi di analisi combinatoria e alla moderna teoria dei gruppi; in un nuovo capitolo (VIII), in cui sono esposte le *generalità sulla continuità e derivabilità delle funzioni di variabili reali;* nella esposizione degli elementi della teoria delle funzioni ellittiche.
K.

CARRARA. — *I tre problemi classici degli antichi in relazione ai recenti risultati della scienza.* Studio storico-critico. Problema 1°. La quadratura del circolo. (Estratto dalla *Rivista di fisica, matematica e scienze naturali.*)

Il Prof. Bellino Carrara ha iniziato con questo primo volume di circa 170 pagg. la storia dei tre celebri problemi, quadratura del circolo, duplicazione del cubo e trisezione dell'angolo, che hanno inutilmente affaticato i Matematici dalla più remota antichità fino ai giorni nostri, e dei quali soltanto in epoca recente è stata dimostrata l'impossibilità per mezzo della riga e compasso, benchè fosse già da lungo intraveduta, come risulta dal fatto che nel 1775 l'Acc. di Parigi deliberò di non prendere più in esame le pretese risoluzioni dei detti problemi e dell'altro del moto perpetuo.

La storia del problema della quadratura del circolo è tratteggiata in questo volume con la diligenza, e abilità, che distinguono l'egregio autore, in forma facile e dilettevole. Dopo avere accennato alle varie ragioni che resero celebre questo problema, anche presso i non matematici, quanto il *lapis philosophorum* e l'*elisir di vita* dal primo valore di $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$ dato da *Ahmes* circa 2000 anni prima di Cristo, si giunge attraverso all'opera dei Greci, dei Romani, degli Arabi nell'Antichità, dei popoli latini nel Medio Evo e nel Rinascimento, fino alle dimostrazioni dell'irrazionalità di π e π^2 di *Lambert* e dal *Legendre*, alle dimostrazioni recenti della trascendenza di e e di π date da *Hermite* e *Lindemann*, al contributo dato da *Weierstrass* alla quistione, all'integratore di *Abdank-Abakanovicz*.

Sarebbe bene che i molti illusi i quali si affannano ancora in una ricerca inutile, leggessero questo libro per non perdere il tempo e risparmiarsi di dire e scrivere degli spropositi.
K.

ERNESTO PASCAL. — *I gruppi continui di trasformazioni.* (Parte generale della teoria). Milano, Hoepli, 1903. Lire 3.

Fra le più importanti opere dovute ad uno dei grandi ingegni matematici del secolo scorso, a SOPHUS LIE, vi è la "*Teoria dei gruppi continui di trasformazioni*", opera notevole e per se stessa e per le splendide applicazioni che si son fatte a diversi rami dell'Analisi e della Geometria. Il LIE, insieme ai suoi valorosi discepoli ENGEL e SCHEFFERS, molto scrisse sulla Teoria dei gruppi, e certamente a gran disagio si troverebbe chi, ancor novello negli studi delle parti più elevate delle Matematiche, volesse sulle opere stesse di LIE cominciare lo studio di così difficili teorie. Ben a proposito pensò quindi il Chia.mo Prof. PASCAL di facilitare lo studio della Teoria dei gruppi, offrendo ai giovani studiosi, cui dedicò il suo lavoro, un libro che contiene quanto forma le parti più notevoli di detta Teoria.

Il lavoro del Prof. PASCAL si divide in 5 Capitoli. Per dare un'idea degli argomenti in esso trattati, accenniamo sommariamente al contenuto di ciascun Capitolo.

Nel Cap. I, (Teoria generale dei gruppi di trasformazioni), stabilito il concetto di trasformazione, e data la definizione di gruppi continui di trasformazioni, l'Autore, dopo aver fatto un cenno di alcuni gruppi più comuni (gruppi lineari, proiettivi, Cremoniani), passa alla ricerca delle *Equazioni differenziali caratteristiche di un gruppo*, ricerca che conduce al teorema detto da LIE, *il primo teorema fondamentale della teoria dei gruppi*. Costruite sotto una forma generale le trasformazioni relative *ad un gruppo ad un parametro*, trovate le formole esplicite *canoniche* per le trasformazioni di un gruppo ad un parametro, vien data la definizione di trasformazione infinitesimale del gruppo, mostrando come ogni simbolo di trasformazione infinitesimale si possa ridurre ad una forma speciale, detta *canonico*. Dimostrate varie proprietà dei simboli delle trasformazioni infinitesimali, l'Autore dimostra una formola che dà il prodotto di due trasformazioni finite date sotto forma canonica. Il problema della determinazione delle trasformazioni infinitesime, prodotto di due altre, era già stato trattato dall'autore in una sua Nota: Sulla *formola del prodotto di due trasformazioni finite*, ecc. (Rend. Ist. Lomb. (2), v. 34, 1901), servendosi di alcune identità fra i simboli di trasformazioni infinitesime, identità contenute in una Nota prec.: *Sopra alcune identità fra i simboli*, ecc. L'Autore studia poi i sistemi completi di Equazioni: $\sum_{h=1}^{n} \xi_{ih} \frac{df}{dx_h} = 0$, $(i = 1 \ldots r)$, ossia sistemi completi di Equazioni a derivate parziali lineari, di primo ordine, nei cui coefficienti non entra la funzione incognita f. Risolto il problema della costruzione, mediante r trasformazioni infinitesime indipendenti, di ∞^{2r} trasformazioni ad r parametri essenziali, e dimostrati alcuni teoremi relativi ai gruppi ad r parametri, contenenti la trasformazione identica e alcune proprietà di un assieme di ∞^{2r} trasformazioni, vengono trovate delle relazioni *caratteristiche* fra le r trasformazioni infinitesime di un gruppo ad r parametri, contenente la trasformazione identica, e date due dimostrazioni del cosidetto *secondo teorema fondamentale della teoria dei gruppi*; di tali dimostrazioni una è del Lie, l'altra è dovuta all'Autore stesso, che giunge ai medesimi risultati, in modo molto semplice, servendosi della formola del prodotto di due trasformazioni finite. Il Capitolo si chiude con la dimostrazione del *terzo teorema fondamentale della teoria dei gruppi*.

Nel Cap. II, data la definizione di invariantività di una funzione rispetto ad un gruppo, viene studiata l'invariantività, rispetto ad un gruppo, dapprima di un sistema di equazioni finite, di poi di un sistema completo di equazioni a derivate parziali, della forma sopra indicata, e quindi di un sistema di trasformazioni infinitesime; il Cap. si chiude con un cenno sulla permutabilità di due trasformazioni, o di due gruppi, e sulle trasform. infinit. e sottogruppi invarianti di un gruppo dato.

Il Cap. III tratta delle proprietà relative alla costituzione di gruppi; l'Autore espone notevoli proprietà sulla transitività, ed imprimitività dei gruppi, sulla sostantività di un gruppo, sull'isomorfismo e similitudine di due gruppi. Allo studio delle proprietà principali di certi gruppi, che restano determinati in vario modo, dato un gruppo fondamentale, è dedicato il Cap. IV, ove partendo da risultati stabiliti nel Cap. I e III, vengono dedotte delle proprietà relative al gruppo *aggiunto*, al gruppo *di struttura*, al gruppo *parametrico*, al gruppo *isomorfo ad un gruppo imprimitivo*; vengono poi studiati i gruppi *ampliati* e i gruppi *reciproci dei gruppi semplicemente transitivi ad n parametri essenziali*. L'ultimo Cap. infine tratta della teoria invariantiva dei gruppi ampliati.

In alcune note messe in fine al testo e nel testo stesso, sono brevemente riprodotte alcune ricerche speciali dell'Autore stesso. Oltre a quelle più sopra citate, notiamo alcune ricerche sui numeri Bernouilliani (cfr. Sopra i numeri Bernouilliani, Rend. Ist. Lomb. 2. t. 35, 1902), la dimostrazione del terzo teorema di Lie (cfr. Rend. Ist. Lomb. 2, t. 35, 1902 pag. 419), e la costruzione delle trasformazioni infinitesime del gruppo parametrico di un gruppo dato, del quale sieno assegnate le trasformazioni infinitesime. L'opera del prof. Pascal riuscirà certamente di grande aiuto a quanti desiderano studiare poi i lavori del Lie; un desiderio mi permetto di esternare, e credo sarà di tutti quelli che prenderanno conoscenza del lavoro del prof. Pascal: che ben presto esca un nuovo volume riguardante la Teoria delle trasformazioni di contatto, altra delle creazioni del genio di Lie. acr.

Ernesto Pascal. — *Calcolo infinitesimale*. Vl. 2, Ed. II. Milano, Hoepli, 1902.

Tale opera del prof. Pascal, già nota ai cultori delle matematiche, contiene la materia che si suole svolgere in un corso ordinario di calcolo infinitesimale.

La nuova edizione contiene numerose modificazioni ed aggiunte e miglioramenti, sebbene sia stato lasciato inalterato l'ordinamento e lo schema fondamentale del lavoro, giacchè l'Autore, a proposito della novità introdotta in alcuni recenti trattati della promiscua esposizione dei due calcoli, differenziale e integrale dice: " Non l'ho fatto, non essendomi convinto dei vantaggi scientifici e didattici che presenta questa fusione, la quale, d'altra parte, anzichè una vera e propria fusione, sembrami che, salvo lievi eccezioni, venga piuttosto a ridursi ad uno spostamento di Capitoli, giacchè i concetti, le definizioni, le dimostrazioni, i procedimenti in genere, salvochè in qualche punto di secondaria importanza, restano in sostanza gli stessi di prima „.

Nel Vol. I, Calcolo differenziale, notiamo fra le altre, le modificazioni introdotte in alcuni teoremi sui limiti, nel Teorema di Cantor, e in alcuni teoremi riguardanti le serie convergenti in egual grado e le serie di potenze.

Nel Vol. II, Calcolo integrale, oltre a numerose modificazioni ed aggiunte si trova un § dedicato alla descrizione dell'integrafo inventato dall'Ing. russo Abdank-Abacanowitz e modificato dal Coradi di Zurigo: sono poi rapidamente accennati i principali usi cui l'istrumento può servire. L'opera del prof. Pascal è certamente pregevole per la chiarezza e il rigore scientifico. acr.

G. Farisano. — *Geometria descrittiva.*

Vi sono molti libri di Geometria descrittiva tutti eccellenti; però essi o eccedono di troppo i limiti assegnati ai relativi programmi degli istituti tecnici, o sono monchi. Il libro di Geometria descrittiva dell'ing. e prof. G. Farisano ai pregi di un'esposizione chiara, ordinata rigorosa e logica, unisce quello di svolgere con criteri pratici, completamente ed esclusivamente i suddetti programmi, per cui lo ritengo il più adatto e il più utile per gli Istituti tecnici, sezione agrimensura.

V. Ambrosino.

Stolz und Gmeiner. — *Theoretische Aritmetik.*

I Abtheilung. — Allgemeines. Die Lehre von den rationalen Zahlen.
II „ Die Lehren von der reellen und von den complexen Zahlen. Leipzig, Teubner, 1902.

Questi due volumi costituiscono una seconda edizione interamente rifatta ed accrescinta di una parte del ben noto e classico libro dello stesso Stolz *Vorlesungen über algemeine Aritmetik.* La parte di questa opera non considerata nella presente pubblicazione costituirà un altro volume, ora in preparazione, che sarà intitolato *Einleitung in die Functiontherie nach Weierstrass.* Ecco l'ordine dei capitoli:

Parte Prima: I. — *Introduzione — Concetto di grandezza e numero.*
II. — *I numeri naturali.*
III. — *Teoria analitica dei numeri razionali — Generazione analitica dei numeri razionali.*
IV. — *Teoria sintetica dei numeri razionali — Le frazioni sistematiche.*

Parte Seconda: V. — *Sistemi continui ad una dimensione di grandezze assolute relative.*
VI. — *Teoria dei rapporti secondo Euclide — Deduzione da questa dei numeri reali.*
VII. — *Teoria aritmetica dei numeri irrazionali secondo G. Cantor e C. Meray.*
VIII. — *Potenze reali, radici, logaritmi.*
IX. — *Le serie infinite a termini reali — Serie a termini positivi — Serie che contengono termini positivi e negativi in numero illimitato.*
X. — *Teoria analitica dei numeri complessi.*
XI. — *Teoria geometrica dei numeri complessi comuni.*
XII. — *Potenze complesse, radici e logaritmi*
XIII. — *Serie infinite a termini complessi.* K.

ERRATA-CORRIGE.

Correzioni alla Nota: "Un problema sulla partizione dei numeri „. Anno XVIII, fasc. II.

p. 118, lin. 20	invece di	$\sum_{r=0}^{r=N} rA_r = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=N} A_r N$	leggasi	$\sum_{r=0}^{r=N} rA_r = \frac{1}{2} N \sum_{r=0}^{r=N} A_r.$
p. 120, lin. 5	„	$-(\lambda-3)$	„	$-(\lambda-2).$
p. 120, lin. 6	„	$-(\lambda-2)$	„	$-(\lambda-3).$
p. 120 lin. 24	„	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$	„	$\frac{(n-1)(n+2)}{2}.$

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 2 dicembre 1902.

SUI NUMERI PERFETTI E SUI NUMERI DI MERSENNE

1. Si chiama **numero perfetto** un numero eguale alla somma dei suoi divisori, escluso sè stesso. Euclide aveva osservato che ogni numero della forma $2^{p-1}(2^p-1)$, nel caso in cui il secondo fattore è un numero primo, è perfetto: Eulero ha dimostrato di più che ogni numero perfetto *pari* è di questa forma: molti poi, fra i quali Boezio, Fermat, Eulero, Legendre hanno cercato numeri perfetti dispari, ma tutti senza alcun risultato.

Nella presente monografia mi propongo, anzi tutto, di dimostrare che un numero impari non può esser perfetto; quindi di studiare le principali proprietà di detti numeri, e finalmente ricercare la condizione necessaria e sufficiente perchè l'espressione 2^p-1 rappresenti un numero primo, vale a dire perchè p sia un numero di Mersenne.

La dimostrazione del teorema fondamentale: *Ogni numero perfetto è pari,* richiede la dimostrazione di alcuni teoremi ausiliari, che ora esporrò.

2. Lemma. — *Se* a *e* b *sono due numeri primi, maggiori di 2, l'espressione*

$$2(a+b-1)-ab \tag{1}$$

è sempre negativa.

Intanto, se $a=2$, si ha

$$2(a+b-1)-ab=2.$$

Supponiamo ora tanto a che b maggiori di 2, e sia per ipotesi $b>a$: avremo $b=a+n$, e, sostituendo nella (1),

$$\left\{4a+2(n-1)\right\}-(a^2+an).$$

È facile verificare che, colle ipotesi fatte, il termine a^2+an è maggiore dell'altro $4a+2(n-1)$, e quindi l'intera espressione (1) è negativa.

c. d. d.

3. Teorema. — *Ogni numero perfetto, eguale al prodotto di potenze di due soli fattori primi, è pari.*

Sia il numero $n=a^\alpha b^\beta$: io dico che, se n è perfetto, uno dei due fattori a, b è eguale a 2. Infatti, perchè n sia perfetto, deve essere

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}=2a^\alpha b^\beta.$$

Di qui abbiamo

$$(a^{\alpha+1}-1)(b^{\beta+1}-1)=2a^\alpha b^\beta(a-1)(b-1),$$

ossia

$$a^{\alpha+1}b^{\beta+1}-a^{\alpha+1}-b^{\beta+1}+1=2a^{\alpha+1}b^{\beta+1}+2(a^\alpha b^\beta-a^{\alpha+1}b^\beta-a^\alpha b^{\beta+1})$$

donde
$$a^{\alpha+1}+b^{\beta+1}-1=a^\alpha b^\beta\{2(a+b-1)-ab\}. \qquad (2)$$

Ora il primo membro di questa eguaglianza, per a e b positivi, è sempre positivo, mentre il secondo, per il lemma precedente, è positivo soltanto quando uno dei fattori a, b, sia eguale a 2. Ne viene che, perchè la (2) possa sussistere, deve essere a o b eguale a 2, e quindi $n=a^\alpha b^\beta$ è pari, c. d. d.

4. Corollario. — È interessante vedere come dal teorema dimostrato si può ricavare la nota formula d'Euclide che ci dà numeri perfetti.

Abbiamo infatti
$$n=2^\alpha b^\beta,$$
quindi, per la (1), essendo nel caso di $a=2$
$$2(a+b-1)-ab=2,$$
$$2^{\alpha+1}+b^{\beta+1}-1=2^{\alpha+1}b^\beta. \qquad (3)$$

Affinchè questa eguaglianza possa essere verificata da un numero primo b deve essere $\beta=1$.

Infatti, supponendo $\beta>1$, avremo
$$b^{\beta+1}-2^{\alpha+1}b^\beta+(2^{\alpha+1}-1)=0,$$
ossia
$$\frac{b^\beta(2^{\alpha+1}-b)}{2^{\alpha+1}-1}=1,$$
il che facilmente si dimostra non poter essere per altro numero primo e positivo che per $b=1$. L'ammettere dunque $\beta>1$ ci porta di necessità a concludere $b=1$, contrariamente all'ipotesi fatta. Sia quindi $\beta=1$: avremo allora per la (3)
$$b^2-2^{\alpha+1}b+(2^{\alpha+1}-1)=0,$$
che, risolta rispetto a b, ci dà i due valori
$$b_1=2^{\alpha+1}-1 \quad , \quad b_2=1.$$

Escludendo, per le ragioni dette sopra, il caso $b=1$, ci rimane per b il valore $2^{\alpha+1}-1$; quindi
$$n=2^\alpha(2^{\alpha+1}-1),$$
nel caso in cui il secondo fattore è numero primo, espressione che non è altro che la nota formula di Euclide.

Osservazione. — Essendo condizione necessaria perchè l'espressione $2^{\alpha+1}-1$ rappresenti un numero primo, che $\alpha+1$ sia numero primo, possiamo dire che

Ogni numero contenuto nell'espressione
$$E_p=2^\alpha(2^{\alpha+1}-1),$$
quando $2^{\alpha+1}-1$ è primo, è perfetto.

5. Lemma. — *Per a e b primi e maggiori di 2, si ha sempre*

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}<2a^\alpha b^\beta.$$

Nel § 3, relazione (2), ho dimostrato che l'espressione:

$$a^{\alpha+1}+b^{\beta+1}-1$$

(quando a e b siano ambedue primi e >2) è sempre positiva, mentre l'altra

$$a^\alpha b^\beta\{2(a+b-1)-ab\}$$

è sempre negativa. Si ha quindi in ogni caso, nell'ipotesi fatta di a e b primi,

$$a^{\alpha+1}+b^{\beta+1}-1>a^\alpha b^\beta\{2(a+b-1)-ab\}.$$

Cambiando di segno i due membri della diseguaglianza, le relazioni di grandezza vengono invertite, quindi

$$-a^{\alpha+1}-b^{\beta+1}+1<-a^\alpha b^\beta\{2(a+b-1)-ab\}.$$

Aggiungendo ai due membri della diseguaglianza la stessa quantità, le relazioni di grandezza non cambiano, quindi

$$a^{\alpha+1}b^{\beta+1}-a^{\alpha+1}-b^{\beta+1}+1<a^{\alpha+1}b^{\beta+1}-a^\alpha b^\beta\{2(a+b-1)-ab\}$$

ossia

$$a^{\alpha+1}b^{\beta+1}-a^{\alpha+1}-b^{\beta+1}+1<2a^{\alpha+1}b^{\beta+1}+2(a^\alpha b^\beta-a^{\alpha+1}b^\beta-a^\alpha b^{\beta+1}),$$
$$(a^{\alpha+1}-1)(b^{\beta+1}-1)<2a^\alpha b^\beta(a-1)(b-1),$$

donde finalmente

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}<2a^\alpha b^\beta.$$

c. d. d.

6. Teorema. — *Un numero eguale al prodotto di potenze di più di due fattori primi, non può essere perfetto.*

Principiamo dal considerare il caso di un numero formato da tre fattori primi

$$n=a^\alpha b^\beta c^\gamma.$$

Se n è perfetto, deve essere verificata l'eguaglianza

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}=2a^\alpha b^\beta c^\gamma,$$

che possiamo mettere sotto la forma

$$\left(\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\right)\cdot\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}=(2a^\alpha b^\beta)\,c^\gamma.$$

Ed ambedue i membri di questa eguaglianza dovrebbero essere eguali al minimo comune multiplo M di $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}$, $\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$ e $2a^\alpha b^\beta$, o ad un suo multiplo $\dot{M}$, e per conseguenza dovrebbe essere

$$\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}=\frac{\dot{M}}{\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}} \tag{1}$$

e

$$c^\gamma=\frac{\dot{M}}{2a^\alpha b^\beta}.$$

Se α e β sono ambedue pari,

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}=a^\alpha+a^{\alpha-1}+\ldots.+a+1$$

e

$$\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}=b^\beta+b^{\beta-1}+\ldots.+b+1$$

sono ambedue dispari; quindi

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$$

è dispari: di più questo prodotto non è divisibile nè per a^α nè per b^β, (*) quindi il minimo comun multiplo sarà della forma

$$2a^\alpha b^\beta m^\mu n^\nu \ldots.;$$

si dovrebbe allora avere

$$c^\gamma=\frac{2a^\alpha b^\beta m^\mu n^\nu \ldots.}{2a^\alpha b^\beta}=m^\mu b^\nu \ldots,$$

il che, essendo c, per ipotesi, primo, è assurdo. (**)

(*) Infatti, non essendo $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}$ divisibile per a e $\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$ divisibile per b, l'unico caso possibile sarebbe che fosse o $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}=b^\beta$ o $\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}=a^\alpha$: ma allora il minimo comune multiplo verrebbe della forma

$$2^\delta a^\alpha b^\beta \ldots.,$$

e quindi c, avendosi

$$c^\gamma=\frac{2^\delta a^\alpha b^\beta \ldots}{2a^\alpha b^\beta},$$

non sarebbe più primo, contrariamente all'ipotesi.

(**) Il caso che sia $M=2a^\alpha b^\beta c^\gamma$ rimane immediatamente esaurito, osservando che, in tale ipotesi, dovrebbe essere (dal momento che $2a^\alpha b^\beta$ e $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$ non hanno fattori primi comuni)

$$c^\gamma=\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1},$$

donde per la (1) $\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}=1$ da cui $c=1$ ovvero $c=2$, $\gamma=0$, contrariamente all'ipotesi.

Se α e β sono ambedue dispari,

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \quad \text{e} \quad \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$$

sono ambedue pari: in tal caso M contiene 2 per lo meno alla seconda potenza, e dovrebbe essere

$$c^{\gamma}=2^{\delta}\, m^{\mu}\, n^{\nu},$$

assurdo.

Se finalmente fosse α pari e β dispari, sarebbe $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}$ dispari e $\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$ pari, quindi:

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$$

pari; in quanto ad M, se

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$$

è semplicemente pari, sarà della forma

$$\mathrm{M}=2a^{\alpha}\, b^{\beta}\, m^{\mu}\, n^{\nu}\ldots,$$

altrimenti, dell'altra

$$\mathrm{M}=2^{\delta}\, a^{\alpha}\, b^{\beta}\, m^{\mu}\, n^{\nu}\ldots;$$

in ogni caso, si avrebbe

$$c^{\gamma}=\begin{cases} m^{\mu}\, n^{\nu}\ldots \\ 2^{\delta-1}\, m^{\mu}\, n^{\nu}\ldots, \end{cases}$$

assurdo.

L'ammettere

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}=2a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}$$

ci porta dunque all'assurdo

$$c^{\gamma}=2^{\delta}\, m^{\mu}\, n^{\nu}\ldots.$$

Con analogo procedimento si dimostra che, se il numero

$$\mathrm{E}_p=a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}\, d^{\delta}\ldots.$$

fosse perfetto, si arriverebbe all'assurdo

$$c^{\gamma}\, d^{\delta}\ldots=2^{\varepsilon}\, m^{\mu}\, n^{\nu}\ldots,$$

dove $c, d\ldots.$ sono numeri primi diversi da $2, m, n\ldots.$

Rimane dunque, in ogni caso, dimostrato che non può mai essere

$$\mathrm{E}_p=n=a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma}\ldots.$$

numero perfetto. c. d. d.

Corollario. — Riassumendo, abbiamo dimostrato che ogni numero eguale al prodotto delle potenze di più di due fattori primi non può essere perfetto, e che ogni numero perfetto di due soli fattori primi è pari e contenuto nella formula d'Euclide, quindi:

Ogni numero perfetto è della forma

$$2^{\alpha}(2^{\alpha+1}-1),$$

quando $2^{\alpha+1}-1$ *è primo.*

7. TEOREMA. — *Se* E_p *è numero perfetto*

$$E_p = 2^{\alpha}(2^{\alpha+1}-1),$$

dico che

$$E_p = 2^{2\alpha} + 2^{2\alpha-1} + \ldots + 2^{\alpha}.$$

Infatti dal secondo membro di questa espressione, mettendo in evidenza 2^{α}, si ha

$$E_p = 2^{\alpha}(2^{\alpha} + 2^{\alpha-1} + \ldots + 1) = 2^{\alpha}(2^{\alpha+1}-1). \qquad \text{c. d. d.}$$

8. TEOREMA. — *La somma dei reciproci dei divisori (esclusa l'unità) di un numero perfetto è eguale ad* 1, e reciprocamente:

Se la somma dei reciproci dei divisori (esclusa l'unità) di un numero è eguale ad 1, *il numero è perfetto.*

Sieno

$$1, a, b, \ldots, l, m, E_p$$

i differenti divisori di E_p disposti in ordine crescente: io dico che

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{E_p} = 1.$$

Intanto, pel noto teorema:

Se si dispongono in ordine di grandezza tutti i divisori di un numero, incominciando da 1 *e terminando al numero, il prodotto di due divisori equidistanti dagli estremi è costante, ed eguale al prodotto degli estremi, ossia al numero dato,* abbiamo:

$$am = bl = ck = \ldots = E_p, \qquad (\alpha)$$

donde

$$\frac{a}{E_p} = \frac{1}{m}; \quad \frac{b}{E_p} = \frac{1}{l}; \quad \frac{c}{E_p} = \frac{1}{k}; \ldots$$

Ora, per definizione, abbiamo

$$E_p = 1 + a + b + c + \ldots + h + k + l + m;$$

dividendo i due membri per E_p, sarà

$$1 = \frac{1}{E_p} + \frac{a}{E_p} + \frac{b}{E_p} + \ldots + \frac{k}{E_p} + \frac{l}{E_p} + \frac{m}{E_p} =$$
$$= \frac{1}{E_p} + \frac{1}{m} + \frac{1}{l} + \ldots + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

c. d. d.

Reciprocamente, dato un numero tra i cui divisori sussista la relazione

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \ldots + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{N} = 1, \qquad (\beta)$$

dico che N è numero perfetto.

Moltiplicando infatti i due membri della (β) per N, abbiamo

$$\frac{N}{a}+\frac{N}{b}+\frac{N}{c}+\ldots+\frac{N}{l}+\frac{N}{m}+1=N,$$

ossia, per le (α),

$$m+l+k+\ldots+b+a+1=N,$$

quindi

$$N=E_p.$$

c. d. d.

Osservazione. — In conseguenza del teorema ora dimostrato pos-
siamo dare una nuova definizione di numero perfetto:

Si dice **numero perfetto** *un numero tale che la somma dei reciproci dei suoi divisori, esclusa l'unità, è eguale ad* 1.

9. Teorema. — *Ogni numero perfetto termina per* 6 *o per* 8.

Consideriamo infatti le successive potenze di 2: vediamo che, prin-
cipiando dalla prima, le ultime cifre a destra si segnono sempre nel-
l'ordine 2, 4, 8, 6. Vediamo dunque che quelle ad esponente pari
terminano per 4 o per 6, e quelle dispari per 2 o per 8; e, precisa-
mente, le potenze con esponente dispari terminanti per 2 seguono
immediatamente quelle con esponente pari terminanti per 6, e di-
nanzi alle dispari terminanti per 8, si hanno le pari terminanti per 4.
Consideriamo ora un numero perfetto

$$E_p=2^{\alpha}(2^{\alpha+1}-1):$$

$\alpha+1$, essendo primo, è dispari, e quindi $2^{\alpha+1}$ termina per 2 o per 8: il numero primo

$$2^{\alpha+1}-1$$

deve dunque terminare per 1 o per 7. Ora, se $2^{\alpha+1}$ termina per 2, 2^{α} termina per 6: quindi

$$2^{\alpha}(2^{\alpha+1}-1)$$

termina per $1\times 6=6$: se invece $2^{\alpha+1}$ termina per 8, 2^{α} termina per 4 e quindi

$$2^{\alpha}(2^{\alpha+1}-1)$$

termina per $4\times 7=28$.

Rimane così dimostrato il teorema che ogni numero perfetto termina per 6 o per 8.

10. Teorema. — *Tutti i numeri perfetti non terminanti per* 6 *terminano per* 28.

Infatti, considerando il numero formato dalle ultime due cifre delle
potenze dispari del 2 terminanti per 8, ed il gruppo analogo per le
potenze pari immediatamente precedenti, vedo che si possono pre-
sentare questi soli cinque casi distinti:

64, 28   24, 48   84, 68   44, 88   04, 08, e quindi il numero perfetto può terminare soltanto col gruppo formato dalle due ultime cifre dei prodotti

$$64,\ 27 \qquad 24,\ 47 \qquad 84,\ 67 \qquad 44,\ 87 \qquad 04,\ 07,$$

ossia, in ogni caso, per 28. c. d. d.

11. Teorema. — *Se si indica col simbolo $\varphi(\mathrm{N})$ il numero dei numeri primi con N e inferiori ad N, ed $\mathrm{E_p} = 2^\alpha(2^{\alpha+1}-1)$ è un numero perfetto, si ha*

$$\varphi(\mathrm{E_p}) = \mathrm{E_p} - 2^{2\alpha}.$$

Si ha intanto

$$\varphi(\mathrm{E_p}) = \varphi\left\{2^\alpha(2^{\alpha+1}-1)\right\} = 2^\alpha(2^\alpha - 1).$$

Ora è

$$\mathrm{E_p} = 2^{2\alpha+1} - 2^\alpha = 2^{2\alpha} + \varphi(\mathrm{E_p})$$

donde

$$\varphi(\mathrm{E_p}) = \mathrm{E_p} - 2^{2\alpha}.$$ c. d. d.

Corollario. — *Il numero dei numeri non primi con $\mathrm{E_p}$ ed inferiori ad $\mathrm{E_p}$ è $2^{2\alpha}$.*

12. Teorema. — *Il numero dei divisori di un numero perfetto*

$$\mathrm{E_p} = 2^\alpha(2^{\alpha+1}-1)$$

è dato da $2(\alpha+1)$.

Infatti, se un numero N, scomposto nei suoi fattori primi, è

$$\mathrm{N} = a^m b^n \ldots,$$

il numero dei suoi divisori è

$$(m+1)(n+1)\ldots.$$

Ora, nel nostro caso, si ha

$$\mathrm{E_p} = 2^\alpha p,$$

quindi il numero dei suoi divisori è dato da

$$2(\alpha+1).$$ c. d. d.

13. Teorema. — *Un numero perfetto $\mathrm{E_p} = 2^\alpha(2^{\alpha+1}-1)$ si può scomporre nella differenza dei quadrati di due numeri interi sempre e soltanto in $\alpha - 1$ modi diversi.* (*)

Dato un numero perfetto $\mathrm{E_p}$, scomponiamolo nei suoi fattori primi, ed avremo

$$\mathrm{E_p} = 2^\alpha p.$$

(*) Per la teoria generale della scomposizione di un numero in differenze di due quadrati, cfr. Prof. A. Martone: *In quanti e quali modi un numero intero sia differenza dei quadrati di due interi.* " Il Pitagora ", anno VIII, n. 1, 2.

Scriviamo ora di seguito in ordine crescente i suoi $2(\alpha+1)$ divisori

$$1, 2, 2^2, \ldots, 2^\alpha, p, 2p, 2^2p, \ldots, 2^\alpha p.$$

Possiamo allora scrivere le eguaglianze

$$\begin{gathered} 1 \cdot 2^\alpha p = \mathrm{E_p} \\ 2 \cdot 2^{\alpha-1} p = \mathrm{E_p} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ 2^\alpha p = \mathrm{E_p} \end{gathered}$$

ossia

$$\begin{gathered} \left(\frac{2^\alpha p+1}{2} + \frac{2^\alpha p-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2^\alpha p+1}{2} - \frac{2^\alpha p-1}{2}\right) = \mathrm{E}p \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{p+2^\alpha}{2} + \frac{p-2^\alpha}{2}\right) \cdot \left(\frac{p+2^\alpha}{2} - \frac{p-2^\alpha}{2}\right) = \mathrm{E}p \end{gathered}$$

donde

$$\begin{gathered} \left(\frac{2^\alpha p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2^\alpha p-1}{2}\right)^2 = \mathrm{E}p \\ \left(\frac{2^{\alpha-1} p+2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2^{\alpha-1} p-2}{2}\right)^2 = \mathrm{E}p \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{p+2^\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-2^\alpha}{2}\right)^2 = \mathrm{E}p. \end{gathered} \tag{1}$$

Avremmo così trovato $\alpha+1$ scomposizioni diverse; osserviamo però che, volendo noi i quadrati di due interi, bisognerà, tra le (1), tralasciare tutte quelle corrispondenti a divisori dispari.

Ora, dato $\mathrm{E_p} = 2^\alpha p$, è evidente che di divisori dispari ce ne sono sempre e soltanto due, (1 e p); quindi, eliminando le due scomposizioni relative a questi divisori, rimangono $\alpha - 1$ scomposizioni. c. d. d.

Osservazione. — Dalle (1), osservando che la prima e l'ultima si devono trascurare come quelle che corrispondono a divisori dispari di $\mathrm{E_p}$, si ha, semplificando

$$\left.\begin{array}{c} (2^{\alpha-2} p+1)^2 - (2^{\alpha-2} p-1)^2 \\ (2^{\alpha-3} p+2)^2 - (2^{\alpha-3} p-2)^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (p+2^{\alpha-2})^2 - (p-2^{\alpha-2})^2 \end{array}\right\} = \mathrm{E_p}.$$

14. Teorema. — *Ogni numero perfetto è congruo ad 1 rispetto al modulo 3,*

$$\mathrm{E_p} \equiv 1 \pmod{3}.$$

Infatti, essendo

$$\mathrm{E_p} = 2^\alpha (2^{\alpha+1} - 1)$$

dove α è pari, si ha

$$2^\alpha \equiv 1 \pmod{3}$$
$$2^{\alpha+1} \equiv 2 \pmod{3}$$
$$2^{\alpha+1} - 1 \equiv 1 \pmod{3}$$
$$E_p \equiv 2^\alpha (2^{\alpha+1} - 1) \equiv 1 \pmod{3}. \qquad \text{c. d. d.}$$

15. Definizione. — Col nome di *Numeri di Mersenne* si intendono i valori che bisogna dare a p perchè l'espressione

$$2^p - 1$$

sia un numero primo. I numeri di Mersenne finora conosciuti sono i nove seguenti

$$p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61:$$

io ho preso a studiare la condizione necessaria e sufficiente perchè un numero p sia numero di Mersenne, ed ecco i risultati ottenuti:

Teorema. — *La condizione necessaria e sufficiente perchè un numero della forma*

$$2^\alpha - 1$$

sia primo, è che esso divida il numero

$$3^{2^{\alpha-1}-1} + 1.$$

Sappiamo che condizione necessaria perchè $2^\alpha - 1$ sia primo è che α sia primo: possiamo dunque sempre supporre α dispari (il caso di $\alpha = 2$ ci dà $2^\alpha - 1 = 3$). In tal caso, si ha

$$2^\alpha \equiv 2 \pmod{3}$$

e quindi

$$2^\alpha - 1 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Abbiamo dunque che ogni numero primo della forma

$$2^\alpha - 1$$

è pure della forma

$$3h + 1.$$

Ora, dalla teoria delle forme quadratiche, sappiamo che un numero dispari m i cui divisori primi sono della forma $3h+1$, si può rappresentare mediante una forma di determinante

$$D = -3,$$

o precisamente mediante una forma della classe rappresentabile colla ridotta

$$(1, 0, 3) = x^2 + 3y^2.$$

Sappiamo di più che, quando tutti i μ divisori primi del numero m sono della forma $3h+1$, la congruenza

$$z^2 \equiv (-3) \pmod{m} \tag{1}$$

ha sempre 2^μ radici incongrue. Essendo, nel nostro caso, $m=2^\alpha-1$ numero primo, sarà $\mu=1$, quindi la nostra congruenza deve ammettere due radici incongrue. Ora sappiamo che, affinchè la congruenza

$$x^2 \equiv D \pmod{p}$$

per p primo, sia possibile, è necessario e sufficiente che sia

$$D^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}, \tag{2}$$

ed in questo caso essa ha due radici incongrue.

Ne viene che, quando questa condizione sia soddisfatta, il numero

$$p=2^\alpha-1$$

può essere *sempre e in un sol modo* spartito nella somma di un quadrato semplice e di un triplo quadrato, e per conseguenza è un numero primo.

Nel caso nostro, la congruenza (1) è

$$x^2 \equiv -3 \pmod{(2^\alpha-1)},$$

e quindi la (2) diventa

$$-3^{\frac{2^\alpha-2}{2}} \equiv 1 \pmod{(2^\alpha-1)}$$

ossia

$$3^{2^{\alpha-1}-1} \equiv -1 \pmod{(2^\alpha-1)}$$

quindi:

La condizione necessaria e sufficiente perchè $2^\alpha-1$ *sia primo, è che* $2^\alpha-1$ *divida il numero*

$$3^{2^{\alpha-1}-1}+1. \qquad \text{c. d. d.}$$

16. Teorema. — In conclusione, da quanto abbiamo dimostrato fin qui, risulta il teorema:

Perchè un numero E_p *sia perfetto è necessario e sufficiente che sia*

$$E_p=2^\alpha(2^{\alpha+1}-1),$$

nel caso in cui $2^{\alpha+1}-1$ *divida il numero*

$$3^{2^\alpha-1}+1.$$

Mario Lazzarini.

NOTE.

(A). Non ritengo del tutto fuor di luogo il riportare un brano del *Liber Abbaci* di Leonardo Pisano, che, dopo la formula di Euclide, si è occupato per il primo dei numeri perfetti, brano che non ho visto citato da nessun autore:

De inventione perfectorum numerorum: " Perfectus numerus est, ex quo, acceptis suis partibus, quas ipse in integrum habet, ut 6, cuius partes sunt $\frac{1}{6}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}$;

et alias partes preter has non habet in integrum. Et accepto $\frac{1}{2}$ de 6, scilicet 3, et $\frac{1}{3}$, scilicet 2, et $\frac{1}{6}$, scilicet 1, nimirum eadem faciunt 6; que 6 inveniuntur sic: duplica 1, erunt 2; que duplica 2, erunt 4: de quibus tolle 1, remanent 3; qui numerus cum sit primus, hoc est, quod non habeat regulam, multiplica ipsum per dimidium de suprascriptis 4; et sic habebis 6. Unde si aliquem alium perfectum numerum invenire volueris, duplicabis iterum 4, erunt 8; de quibus tolle 1, remanebunt 7; qui numerus, cum non habeat regulam, multiplicabis eum per dimidium de 8, videlicet per 4, erunt 28; qui iterum perfectus est, quia suis collectis partibus equiparatur. Partes enim ipsius sunt $\frac{1}{28}\ \frac{1}{14}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}$. Rursum duplicabis 8, faciunt 16; de quibus, cum extrahitur 1, remanent 15; qui cum habeat regulam, duplicabis iterum 16, erunt 32; de quibus tolle 1, remanent 31; qui numerus, cum sit sine regula, multiplicabis eum per 16, et habebis alium perfectum numerum, scilicet 496; et sic semper faciendo, poteris in infinitum perfectos numeros reperire ".

Il *Liber Abbaci* di Leonardo Pisano pubblicato da B. Boncompagni. Roma, 1857, pag. 283.

(B). Nella prefazione dell'opera *Cogitata Physico-mathematica* di Mersenne, pubblicata nel 1644, si legge che il numero 2^p-1 è primo per i soli valori seguenti di p non superiori a 257:

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 13,\ 17,\ 19,\ 31,\ 67,\ 127,\ 257.$$

Il numero 67 è stato probabilmente scritto per errore invece di 61. Con questa correzione, la proposizione sembra essere esatta ed è stata verificata per tutti i valori di p ad eccezione dei seguenti: 71, 101, 103, 107, 109, 127, 137, 139, 149, 157, 163, 167, 173, 181, 193, 199, 227, 229, 241, 257.

Ora, come può essere arrivato Mersenne a questo risultato? È inammissibile che egli abbia studiato ciascun caso in particolare; quindi rimangono due soli casi possibili: o Mersenne conosceva dei teoremi che poi sono andati perduti, od ha trovato quei numeri empiricamente. Il chiarissimo prof. W. W. Rouse-Ball, nella sua pregevole opera: *Récréations et problèmes mathématiques des temps anciens et modernes*, esclude quest'ultimo caso, dicendolo assolutamente impossibile. Io invece lo ritengo non solo possibile, ma anzi probabile; potendosi, ad esempio, avere *tutti* i numeri lasciati da Mersenne, ed altri ancora, colla seguente regola pratica da me trovata, ma la cui dimostrazione mi sfugge:

" Perchè il numero 2^p-1 sia primo è sufficiente che p sia primo di una delle forme:

$$p=2^{\alpha}+\begin{cases}1\\3\end{cases}\quad \text{quando } \alpha \text{ è potenza di 2;}$$

$$p=2^{\alpha}-1\quad \text{quando } \alpha \text{ è primo;}$$

$$p=2^{\alpha}-3\quad \text{quando } \alpha \text{ è pari, senza essere potenza di 2 ".}$$

Si trovano così i numeri 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 127, 257, 1021, 4093, ... , di cui i primi dodici sono i numeri lasciati da Mersenne. I numeri perfetti finora conosciuti sono quelli che corrispondono ai valori di p:

$p=2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 13,\ 17,\ 19,\ 31,\ 61$

e precisamente: 6, 28, 496, 8128, 335.50336,
85898.69056, 13.74386.91328,
2305.84300.81399.52128,
26.58455.99156.98317.44654.69261.59538.42176.

SOPRA L'EQUAZIONE CARATTERISTICA DEI GAS

1. Si definisce generalmente una cosa affermando che essa soddisfa ad una sua proprietà speciale; e di preferenza si sceglie quella proprietà più facile a comprendersi, o dalla quale più facilmente o nel modo più generale possono dedursi le altre proprietà della cosa studiata.

Fino ad ora, che almeno io sappia, sono stati definiti i così detti gas perfetti mediante le ben note leggi di Boyle e di Gay Lussac; e soltanto il Meslin, osservando che nella equazione caratteristica che ne deriva figura una grandezza t, la quale viene poi definita mediante l'equazione stessa, propose di definirli come quei corpi pei quali sono verificate le due relazioni

$$pv = p'v', \qquad \frac{\partial c}{\partial v} = 0,$$

essendo c il calorico specifico a volume costante. (*)

Scopo di questa breve nota è di dimostrare, che si può con vantaggio partire da una definizione diversa.

Ammesso che lo stato di un corpo sia definito in ogni istante dai valori dei parametri p, v, t (misurato quest'ultimo mediante un termometro ed una scala convenzionale qualsiasi), affermato che la nozione di quantità di calore è quella di una grandezza suscettibile di misura, la definizione dei due calorici specifici C e c (a pressione ed a volume costante) corrisponde a fatti sperimentali i di cui elementi sono egualmente e rigorosamente misurabili.

Poichè l'esperienza indica, che nei corpi gassosi, entro certi limiti almeno, la differenza $C - c$ è sensibilmente indipendente da p, v, t cioè è una costante, e che tal fatto è così caratteristico per gli aeriformi, che vediamo il vapor di pirene ($C^{16}H^{10}$) dare per $C - c$ lo stesso valore dell'ossigeno e dell'azoto, (**) ci sembra che potremmo definire i gas *come quei corpi pei quali è costante la differenza dei due calorici specifici*, oltre una ipotesi di cui diremo in seguito.

In quanto ai calorici specifici stessi l'esperienze (su composti esplosivi) di Berthelot per temperature molto alte, e quelle di Witkoski per temperature molto basse, hanno provato che, in un largo intervallo di temperatura, C, almeno, è funzione della temperatura stessa. Il nostro Lussana (***) ha inoltre dimostrato che C è funzione anche

(*) *Journal de Physique*, 1885, pag. 132.

(**) VAN'T HOFF, *Leçons de Chimie Physique*, trad. Corvisy. Paris, Hermann, 1900, p. 3a, pag. 58.

(***) LUSSANA, *Nuovo Cimento*, 1892-'98.

della pressione; quindi a voler trattare il problema in modo generale, bisognerebbe considerare C e c come funzioni di due qualunque fra le tre variabili p, v, t.

2. Senza introdurre per ora alcuna limitazione, abbiamo dal primo principio della termodinamica che la quantità di calore

$$dQ = dU + A p dv$$

$\left(\text{con } A = \dfrac{1}{425}\right)$: od anche, per una trasformazione elementare $dp . dv$, ed a meno d'infinitesimi d'ordine superiore, essendo T la temperatura,

$$dQ = C \frac{\partial T}{\partial v} dv + c \frac{\partial T}{\partial p} dp .$$

Avremo quindi

$$dU = \left(C \frac{\partial T}{\partial v} - Ap\right) dv + c \frac{\partial T}{\partial p} dp:$$

e poichè nell'ipotesi che le forze della natura siano centrali la variazione dU dell'energia interna del corpo è un differenziale esatto, dovrà essere:

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(C \frac{\partial T}{\partial v} - Ap\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(c \frac{\partial T}{\partial p}\right),$$

da cui:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial p} \frac{\partial T}{\partial v} - \frac{\partial c}{\partial v} \frac{\partial T}{\partial p}\right) + (C - c) \frac{\partial^2 T}{\partial p \partial v} = A. \tag{1}$$

Per il secondo principio della termodinamica è un differenziale esatto l'espressione

$$\frac{dQ}{T} = \frac{C}{T} \frac{\partial T}{\partial v} dv + \frac{c}{T} \frac{\partial T}{\partial p} dp;$$

e quindi

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{C}{T} \frac{\partial T}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{c}{T} \frac{\partial T}{\partial p}\right);$$

sviluppando questa eguaglianza, si ha

$$\left(\frac{\partial C}{\partial p} \frac{\partial T}{\partial v} - \frac{\partial c}{\partial v} \frac{\partial T}{\partial p}\right) + (C - c) \frac{\partial^2 T}{\partial p \partial v} - \frac{C - c}{T} \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial T}{\partial v} = 0. \tag{2}$$

Ad una qualunque della (1) e (2) si può sostituire l'equazione che si ricava sottraendo la seconda dalla prima; si ha così

$$\frac{C - c}{T} \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial T}{\partial v} = A, \tag{3}$$

la quale, sotto forma un po' diversa ed a parte la dimostrazione, è la ben nota equazione dovuta al Clausius (*) *vera qualunque sieno le funzioni* C *e* c. Se fosse conosciuta la natura della funzione $C - c$, l'integrazione della (3) ci guiderebbe a determinare l'equazione caratteristica del corpo.

(*) *Théorie méc. de la Chaleur*, trad. Folie. Ediz. 1868, pag. 393. ediz. 1888, pag. 234.

3. Poniamo ora la condizione:

$$\frac{\partial C}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial v}-\frac{\partial c}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial p}=0 \tag{4}$$

e scriviamo l'altra che $C-c$ è una costante sotto la forma data dall'equazione di Mayer

$$C-c=AR; \tag{5}$$

allora le (1), (3), divengono

$$\frac{\partial^2 T}{\partial p\partial v}=\frac{1}{R}, \tag{6}$$

$$R\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial v}=T, \tag{7}$$

mentre la (2) evidentemente si riduce anch'essa alla (7). La funzione T dovrà dunque soddisfare alla (6) ed alla (7).

Possiamo allora dimostrare il seguente

Teorema. — *Se in un corpo la differenza dei calorici specifici è costante,*

$$C-c=AR,$$

e i calorici specifici stessi sono funzioni della temperatura, la equazione caratteristica del corpo è

$$RT=(p+a)(v+b)$$

con a *e* b *costanti.*

Infatti, la (4) diviene, essendo C e c funzioni della temperatura,

$$\frac{\partial C}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial v}-\frac{\partial c}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial v}=\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial}{\partial T}(C-c)=0;$$

si potranno dunque applicare le (6) e (7).

Integrando la (6) si avrà subito

$$RT=pv+F(p)+f(v)+H, \tag{8}$$

con F e f funzioni soltanto di p e di v, e con H costante. Derivando quest'equazione rispetto a p e v

$$R\frac{\partial T}{\partial p}=v+\frac{\partial F}{\partial p},$$

$$R\frac{\partial T}{\partial v}=p+\frac{\partial f}{\partial v};$$

sostituendo questi valori nella (7), si vede che dovrà essere

$$\left(p+\frac{\partial f}{\partial v}\right)\left(v+\frac{\partial F}{\partial p}\right)=pv+F(p)+f(v)+H:$$

e poichè F e f sono indipendenti l'una dall'altra, si avranno le tre equazioni

$$p\frac{\partial F}{\partial p}=F,$$
$$v\frac{\partial f}{\partial v}=f,$$
$$\frac{\partial F}{\partial p}\,\frac{\partial f}{\partial v}=H;$$

la terza dovendo necessariamente esser soddisfatta dalle altre due. Infatti se ne ricava

$$F=bp,\qquad f=av,$$
$$H=ab:$$

quindi l'equazione cercata resulta essere

$$RT=pv+av+bp+ab,$$

oppure

$$RT=(p+a)(v+b). \tag{9}$$

Mentre T nella (6) è la temperatura misurata in un modo qualunque, nella (7) è invece la temperatura assoluta. Per non fare circoli viziosi la definiremo con W. Thomson mediante la funzione di Carnot; chiameremo perciò zero assoluto la temperatura alla quale il calore si trasforma integralmente in lavoro. Nella (9) la T indica dunque la temperatura assoluta. Reciprocamente dimostreremo che:

Se l'equazione caratteristica di un corpo è

$$RT=(p+a)(v+b) \tag{10}$$

con a *e* b *costanti, è pur costante la differenza dei suoi calorici specifici, e questi sono funzioni della temperatura.*

Se si ricavano infatti dalla (9) i valori di $\frac{\partial T}{\partial p}$, $\frac{\partial T}{\partial v}$, e si sostituiscono nell'equazione generale (3) se ne ottiene

$$C-c=AR.$$

È dunque costante la differenza dei due calorici specifici; possiamo allora porre nella (1) questo valore, insieme al valore di $\frac{\partial^2 T}{\partial p\,\partial v}$ che per la (8) è uguale a $\frac{1}{R}$, e ne risulta allora la (4).

Questa formola ci servirà a dimostrare che C e c sono funzioni della temperatura. Infatti, dalla (5) abbiamo subito

$$\frac{\partial c}{\partial v}=\frac{\partial C}{\partial v};$$

e perciò la (4) diviene

$$\frac{\partial C}{\partial p}\,\frac{\partial T}{\partial v}-\frac{\partial C}{\partial v}\,\frac{\partial T}{\partial p}=0.$$

ossia

$$(p+a)\frac{\partial C}{\partial p}=(v+b)\frac{\partial C}{\partial v}.$$

Ponendo

$$p+a=x, \qquad v+b=y$$

l'equazione precedente si trasforma nell'altra

$$x\frac{\partial C}{\partial x}=y\frac{\partial C}{\partial y},$$

la di cui integrazione darà

$$C=f(xy)=f(T);$$

così anche si avrà

$$c=f(T).$$

L'esperienza dimostra che soltanto i gas soddisfano alla (5): e quindi soltanto per i gas valgono le conseguenze che precedono.

4. Notiamo ora, che volendo considerare C e c come due funzioni qualsivoglia, purchè capaci di soddisfare alla sola (4), si ricaverà dalla (2) qualunque sia la differenza $C-c$, l'equazione

$$T\frac{\partial^2 T}{\partial p\,\partial v}-\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial v}=0:$$

questa, ponendo dapprima $\frac{\partial T}{\partial p}=z$, darà $\frac{\partial \log z}{\partial v}=\frac{\partial \log T}{\partial v}$: integrando dunque una prima volta e poi una seconda, si trova $T=f(v)\,F(p)$. Quindi, anche nella ipotesi di C e c qualunque, purchè la (4) sia soddisfatta resulta per T la forma caratteristica del prodotto di due funzioni, una del volume l'altra della pressione.

Se ne conclude, che pur assoggettando le tre funzioni C, c, T a soddisfare solamente alla (4) senza porre altra condizione intorno alla loro natura, siamo pur sempre lontani dalla forma

$$\{p+\varphi(a,v,T)\}(v-b)=RT.$$

la quale, secondo gli studi sperimentali del prof. Battelli, dovrebbe, forse, essere quella della equazione caratteristica dei gas. (*)

5. Se

$$a=b=0,$$

l'espressione (9) precedente dà l'equazione dei gas detti perfetti. Questi sono dunque definiti dalle tre condizioni: $C-c=\text{cost}$: C e c funzioni soltanto di T, e dalla legge di Boyle che riduce appunto a zero le costanti a e b. La legge di Gay Lussac segue dalla (9).

(*) V. Battelli, *Sulla legge di Boyle* etc. "Nuovo Cimento„ 1901; (V), t. I. pag. 111.

E poichè la (1) nella ipotesi che C e c siano funzioni di T può scriversi

$$\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial (C-c)}{\partial T}+(C-c)\frac{\partial^2 T}{\partial p\,\partial v}=A,$$

si vede che per essere $C-c=\text{cost}$, e $pv=RT$, per ricavare l'equazione di Mayer, non c'è bisogno di supporre C e c costanti come si fa di solito nei trattati. (*)

Se $a=0$ si ha, a parte il segno di b, la formola di Budde (**)

$$RT=p(v+b).$$

Finalmente, con a e b qualsiasi, la forma della (9) ricorda la celebre formola di Van der Waals, la quale è del tipo della (9) perchè può scriversi

$$RT=pv-pb+\frac{a}{v^2}(v-b),$$

ossia soddisfa alla (6) senza però soddisfare alla (7).

6. Calcoliamo ora il valore dell'energia interna U quale risulterebbe dalla (9). La dU può mettersi sotto la forma:

$$dU=(C-c)\left(\frac{\partial T}{\partial v}-Ap\right)dv+c\frac{\partial T}{\partial v}dv+c\frac{\partial T}{\partial p}dp=$$
$$=AR\left(\frac{\partial T}{\partial v}-Ap\right)dv+c\,dT:$$

ma dalla (9)

$$\frac{\partial T}{\partial v}=\frac{p+a}{R};$$

sostituendo e integrando

$$U=Aav+\int c\,dT. \tag{11}$$

Quindi: *se* $a=0$ (gas perfetti e formola di Budde), *anche quando* c *è funzione di* **T**, *l'energia interna è funzione della temperatura.* (***)

7. Se T rimane costante, per ciò che riguarda le funzioni C e c, si ha, in un punto della superficie $f(p, v, T)=0$, secondo Clausius:

$$\frac{\partial C}{\partial p}=-AT\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}, \qquad \frac{\partial c}{\partial v}=AT\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}$$

e quindi per le (9) e (5) sarà:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial C}{\partial p}=\dfrac{\partial c}{\partial p}=0.\\[2mm] \dfrac{\partial c}{\partial v}=\dfrac{\partial C}{\partial v}=0.\end{cases}$$

(*) Vedi ad es. POINCARÉ, *Thermodynamique*. Paris, Carré 1892, § 65.
(**) Citato dal Van't Hoff, *loc. cit.*, pag. 8.
(***) Cfr. POINCARÉ, *loc., cit.* § 130.

Questo resultato non dimostra già, come per i gas perfetti hanno supposto alcuni, (*) che C e c siano indipendenti da p e da v, e quindi costanti assolutamente: ma soltanto che in questo caso C e c *non dipendono dai valori che* p *e* v *prendono lungo una isoterma della superficie* (9). Perciò Clausius, dopo avere stabilito le formole precedenti per i gas perfetti avverte, che con questo i due calorici specifici possono essere funzioni della temperatura. Il resultato ora ottenuto è del resto implicito nell'ipotesi da cui siamo partiti, e dovevamo naturalmente ritrovarlo.

8. Cerchiamo ora un significato razionale per le costanti a e b. Allo zero assoluto dovrà esser nullo l'uno o l'altro dei due fattori

$$p+a, \qquad v+b.$$

Osserviamo dapprima che l'omogeneità del secondo membro della formola (9), esige che a sia una pressione e b un volume; o in altra parola i suoi termini, come quelli di funzioni analoghe che contengano il termine pv, devono ridursi a prodotti di una pressione per un volume; essere cioè di dimensioni ML^2T^{-2}, che sono quelle di un lavoro od energia.

Senza insistere di più, per il momento almeno, su questo punto, è facile vedere, riguardo ai due fattori precedenti, come supporre nullo il primo, e quindi a negativo, equivale a dire che il gas offre ad ogni pressione una repulsione costante a così da non subirne che la parte $p-a$: e questo parrà assai strano. Rimane da fare b negativo, ed ammettere che allo zero assoluto $v=b$: che cioè il volume del gas si riduca allora ad una quantità costante b, la quale può dirsi il residuo materiale (*covolume*) quando l'energia è cessata; ossia lo spazio effettivamente occupato dalla materia.

Allo zero assoluto la (11) ci dà allora:

$$U_0 = Aab.$$

Dunque il corpo non possiede, come insieme, più alcuna energia e $p=0$; rimane solamente una quantità costante dovuta al suo covolume, ed alla quantità a che è una pressione. Infatti poichè

$$a=\frac{EU_0}{b},$$

questa grandezza avrà per dimensioni, essendo EU_0 misurato in chilogrammetri

$$\frac{ML^2T^{-2}}{L^3} = ML^{-1}T^{-2}.$$

Questa pressione a, che aumenta costantemente la pressione eser-

(*) Per es.: il prof. Donnini in alcune delle sue memorie, e molti trattati.

citata dall'esterno sulla massa gassosa, non può attribuirsi se non alle forze agenti fra le parti del corpo, ossia alle sue forze interne.

Dalla definizione, fondata sull'esperienza, che noi abbiamo data dei gas, segue dunque chiaramente che: " nell'equazione caratteristica " ordinaria è lecito aumentare la pressione esterna di una quantità, che " dobbiamo attribuire alle forze interne del gas, e si deve diminuire il " volume di un'altra quantità, che supponiamo rappresentare lo spazio " occupato dal gas quando ogni sua manifestazione esterna è cessata ". L'introduzione di due grandezze, che è l'importante modificazione portata da Van der Waals nell'equazione caratteristica dei gas perfetti, ci appare dunque come *necessaria* conseguenza dei principii della termodinamica, poichè la (9) è l'espressione più generale di una funzione che soddisfa in pari tempo alla (6) e alla (7); rimane soltanto ipotetico il significato di a e di b cercato naturalmente in accordo alle teorie generali sulla materia. Però il dover supporre che la somma delle forze interne a rimane la stessa comunque varii il volume del gas, ci avverte della insufficienza dell'ipotesi da cui siamo partiti.

Tale è il resultato, a cui giungiamo partendo dalla nostra definizione. Non presenterebbe poi alcuna difficoltà il dedurre dalla (9) una serie di conseguenze parallele a quelle che si traggono dalla $pv = RT$: le quali non avrebbero però altro vantaggio che d'introdurre dei termini di correzione alle formole già note.

Ma queste correzioni non avrebbero grande importanza: la (9) sebbene dedotta senza l'aiuto d'ipotesi particolari, e più prossima ai gas reali di quella solita dei gas perfetti, è ancora assai lontana dal rappresentarli.

Intanto, bisognerebbe determinare i valori di a e di b per ogni gas, deducendoli dall'esperienze sulla legge di Boyle. Detti (p, v), $(p'v')$, $(p''v'')$ i valori della pressione e del volume in questo caso, il secondo membro della (9) darà:

$$pv - p'v' = a(v - v') + b(p - p')$$
$$p'v' - p''v'' = a(v'' - v') + b(p' - p'')$$

da cui a e b, quali medie dei valori dati da ogni gruppo di tre esperienze. Avuto a e b, si troverà R, e quindi E, e così via potremmo andare svolgendo considerazioni su $\frac{C}{c}$, sulla legge di Dulong e Petit, (la quale è pur conservata colla nuova definizione, com'è facile vedere) sulla differenza fra il coefficiente di dilatazione e quello di pressione, sulla perdita di calore $a(v' - v)$ quando il gas si dilata dal volume v al volume v', senza fare lavoro esterno, etc. ma di lieve momento e non conformi all'indole del giornale.

Esamineremo invece, in una prossima nota, l'argomento da un punto di vista alquanto diverso da quello da cui siamo partiti.

RINALDO PITONI.

EQUAZIONI A RADICI IN PROGRESSIONE ARITMETICA

Le considerazioni seguenti riguardano le equazioni di grado n ad una incognita, ed a radici in progressione aritmetica.

I.

La forma generale di una equazione di grado n essendo, come è noto,

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0,$$

mi propongo di stabilire una espressione generale che dia i coefficienti $A_1\, A_2 \ldots A_n$ quando detta equazione abbia per radici i valori

$$a, \qquad a+d, \qquad a+2d, \ldots a+(n-2)\,d, \qquad a+(n-1)\,d.$$

Si consideri a tal fine il coefficiente A_k; esso è eguale alla somma delle combinazioni prodotti k a k degli elementi

$$(a+0d) \quad , \quad (a+d) \quad , \quad (a+2d) \ldots (a+(n-1)\,d).$$

Sia

$$(a+s_1 d)\,.\,(a+s_2 d) \ldots (a+s_k d)$$

una di tali combinazioni prodotti nelle quali $s_1\, s_2 \ldots s_k$ rappresentano evidentemente k numeri della serie $0, 1, 2, 3 \ldots (n-1)$. Per sviluppare questo prodotto possiamo eseguire i prodotti di k fattori, che si ottengono prendendo un fattore in ciascun binomio, in tutti i modi possibili e sommando tali prodotti parziali. Prendiamo dapprima l'elemento a in ciascun binomio, otterremo allora il prodotto parziale

$$P_0 a^k$$

ove $P_0 = 1$.

In seguito si prenda il termine a in tutti i binomi eccetto uno, ed il termine in d nel binomio in cui non si è presa la a, e ciò in tutti i modi possibili, avremo così l'altro prodotto parziale

$$P_1 a^{k-1}\, d$$

nel quale $P_1 = (s_1 + s_2 + \ldots + s_k)$.

Operando in modo analogo, si avrà successivamente:

$$P_2\, a^{k-2}\, d^2$$
$$P_3\, a^{k-3}\, d^3$$
$$\ldots\ldots$$
$$P_k d^k$$

ove $P_2, P_3 \ldots P_k$ rappresentano rispettivamente la somma dei prodotti combinazioni 2 a 2, 3 a 3, $\ldots$ k a k dei k elementi $s_1\, s_2 \ldots s_k$.

Indicando con il simbolo

$$\Sigma\, P \left\{ C_{(s_1\, s_2 \ldots s_k)\lambda} \right\}$$

la somma delle combinazioni prodotti λ a λ dei numeri $s_1, s_2, s_3 \ldots s_k$ avremo:

$$\left.\begin{array}{r} P_0\, a^k = \Sigma\, P \left\{ C_{(s_1\, s_2 \ldots s_k)_0} \right\} a^k = a^k \\ P_1\, a^{k-1}\, d = \Sigma\, P \left\{ C_{(s_1\, s_2 \ldots s_k)_1} \right\} a^{k-1}\, d \\ P_2\, a^{k-2}\, d^2 = \Sigma\, P \left\{ C_{(s_1\, s_2 \ldots s_k)_2} \right\} a^{k-2}\, d^2 \\ \ldots\ldots\qquad\qquad \\ P_k d^k = \Sigma\, P \left\{ C_{(s_1\, s_2 \ldots s_k)_k} \right\} d^k \end{array}\right| \qquad [\alpha]$$

Ma la combinazione prodotto

$$(a + s_1 d)\,.\,(a + s_2 d) \ldots (a + s_k d)$$

è uguale alla somma delle $[\alpha]$ onde potremo porre:

$$(a + s_1 d)\,.\,(a + s_2 d) \ldots (a + s_k d) = \sum_{\lambda=0}^{k} \Sigma\, P \left\{ C_{(s_1\, s_2 \ldots s_k)_\lambda} \right\} a^{k-\lambda} d^\lambda$$

E se poi nelle formule ora stabilite poniamo al luogo degli elementi $s_1\, s_2 \ldots s_k$ successivamente gli elementi che formano ciascuna delle n_k combinazioni che si ottengono con i numeri $0, 1, 2 \ldots n-1$ e sommiamo i risultati, otterremo evidentemente un polinomio completo in a ed in d il quale sarà l'espressione cercata del coefficiente A_k appartenente ad una equazione a radici in progressione aritmetica, a essendo il primo termine di questa progressione aritmetica, e d la ragione.

È possibile, per altro, ottenere una espressione più completa della precedente, per mezzo del teorema che segue:

Teorema. — La somma delle combinazioni prodotti λ a λ eseguite sopra i k elementi di ciascuna delle combinazioni k a k di n elementi dati, è uguale alla somma delle combinazioni prodotti λ a λ eseguite sopra gli n elementi dati, moltiplicata per il numero ${}^{(n-\lambda)}{}_{(n-k)}$.

Si abbiano n elementi e se ne facciano le combinazioni k a k, indi su ciascuna di queste combinazioni k a k si eseguiscono le combinazioni λ a λ, avremo in tal modo un numero di combinazioni λ a λ dato da

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-k+1)}{k!} \times \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-\lambda+1)}{\lambda!} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\,.\,k\,.(k-1)(k-2)\ldots(k-\lambda+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(k-\lambda+1)\ldots(k-3)(k-2)(k-1)k\,.\,\lambda!} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{(k-\lambda)!\,\lambda!}$$

per essere $k \geq \lambda$.

Moltiplicando ambo i termini per

$$(n-k)!\,(n-\lambda)(n-\lambda-1)\ldots(k-\lambda+1)\,n\,(n-1)(n-2)\ldots(n-\lambda+1)$$

si ottiene facilmente

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\lambda+1)}{\lambda\,!}\times\frac{(n-\lambda)\,(n-\lambda-1)\ldots((n-\lambda)-(n-k)+1)}{(n-k)\,!}=$$
$$=n_\lambda\times(n-\lambda)_{(n-k)}.$$

Notando che le combinazioni k a k sono simmetriche rispetto a ciascun elemento, potremo asserire che se una delle combinazioni λ a λ eseguita sopra di esse combinazioni k a k viene ripetuta un certo numero di volte, lo stesso numero di volte dovrà essere ripetuta ciascuna delle altre combinazioni λ a λ, pertanto nel caso presente sarà ciascuna combinazione ripetuta $(n-\lambda)_{(n-k)}$ volte, onde la somma di queste combinazioni prodotti sarà $(n-\lambda)_{(n-k)}$ volte la somma delle combinazioni prodotti λ a λ degli n elementi, prendendo ciascuna combinazione una sol volta come avviene quando si combinano λ a λ gli n elementi dati.

Ripresa la formula

$$\sum_{\lambda=0}^{k}\Sigma\,P\left\{C_{(s_1 s_2\ldots s_k)_\lambda}\right\}a^{k-\lambda}d^\lambda \qquad [\beta]$$

in essa il coefficiente

$$\Sigma\,P\left\{C_{(s_1 s_2\ldots s_k)_\lambda}\right\} \qquad (\lambda=0,1,2\ldots k)$$

sostituendo alla combinazione $s_1 s_2\ldots s_k$ le rimanenti combinazioni k a k degli elementi $0,1,2\ldots(n-1)$ diviene:

$$\Sigma\,P\left\{C_{(s_{\alpha_1}\,s_{\alpha_2}\ldots s_{\alpha_k})\lambda}\right\}+\Sigma\,P\left\{C_{(s_{\beta_1}\,s_{\beta_2}\ldots s_{\beta_k})\lambda}\right\}+\ldots\Sigma\,P\left\{C_{(s_{\omega_1}\,s_{\omega_2}\ldots s_{\omega\omega})\lambda}\right\}$$
$$(\lambda=0,1,2\ldots k)$$

e per il teorema ora dimostrato

$$^{(n-\lambda)}{}_{(n-k)}\Sigma\,P\left\{C_{(0,1,2\ldots(n-1))_\lambda}\right\} \qquad (\lambda=0,1,2\ldots k)$$

ovvero, poichè l'elemento a annulla le combinazioni in cui entra e può omettersi, si avrà più semplicemente:

$$^{(n-\lambda)}{}_{(n-k)}\Sigma\,P\left\{C_{(1,2\ldots n-1)_\lambda}\right\} \qquad (\lambda=0,1,2\ldots k)$$

Sostituendo questo risultato nella [β] otteniamo:

$$\sum_{\lambda=0}^{k}{}^{(n-\lambda)}{}_{(n-k)}\,\Sigma\,P\left\{C_{(1,2\ldots(n-1))_\lambda}\right\}a^{k-\lambda}d^\lambda$$

da cui dando a λ successivamente i valori $0,1,2\ldots k$ si sviluppa un polinomio che sarà l'espressione cercata.

Abbiamo dunque:

$$A_k = \sum_{\lambda=0}^{k} (n-\lambda)_{(n-k)}\, \Sigma P\left\{C_{(1,2\,..\,(n-1))_\lambda}\right\} a^{k-\lambda} d^\lambda$$

E per conseguenza l'equazione di grado n, la quale ammette n radici in progressione aritmetica, rappresentata da

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

avrà nei suoi coefficienti i valori

$$A_0 = \sum_{\lambda=0}^{0} (n-\lambda)_n\, \Sigma P\left\{C_{(1,2\ldots(n-1))_\lambda}\right\} a^{0-\lambda} d^\lambda$$

$$A_1 = \sum_{\lambda=0}^{1} (n-\lambda)_{(n-1)}\, \Sigma P\left\{C_{(1,2\ldots(n-1))_\lambda}\right\} a^{1-\lambda} d^\lambda$$

$$A_2 = \sum_{\lambda=0}^{2} (n-\lambda)_{(n-2)}\, \Sigma P\left\{C_{(1,2\ldots(n-1))_\lambda}\right\} a^{2-\lambda} d^\lambda$$

. . . .

$$A_{n-1} = \sum_{\lambda=0}^{n-1} (n-\lambda)_1\, \Sigma P\left\{C_{(1,2\ldots(n-1))_\lambda}\right\} a^{n-1-\lambda} d^\lambda$$

$$A_n = \sum_{\lambda=0}^{n} (n-\lambda)_0\, \Sigma P\left\{C_{(1,2\ldots(n-1))_\lambda}\right\} a^{n-\lambda} d^\lambda$$

ricordando che $m_0 = 1$ ed $m_s = 0$ per $s > m$.(*)

(*) Possono aversi con speditezza i valori di

$$\Sigma P\left\{C_{(1,2\ldots(n-1))_\lambda}\right\} \qquad (\lambda = 0, 1, 2 \ldots k)$$

con una regola dedotta dalla osservazione seguente:

« Le combinazioni di n elementi k a k possono ottenersi facendo dapprima le combinazioni di $n-1$ elementi k a k, poi le combinazioni degli stessi $n-1$ elementi a $k-1$ a $k-1$ ed unendo a ciascuna di queste ultime combinazioni l'n^{mo} elemento considerato ».

Infatti operando in tal modo si ottengono combinazioni tutte diverse; giacchè le prime combinazioni degli $n-1$ elementi k a k sono certamente diverse fra loro, e diverse fra loro e dalle precedenti sono quelle che si ottengono dagli $n-1$ elementi a $k-1$ a $k-1$.

Se a ciascuna di queste ultime combinazioni uniamo l'elemento n^{mo} non considerato, che diremo a, otterremo altrettante combinazioni k a k tutte parimenti diverse fra loro, e dalle precedenti, le quali non contenevano l'elemento a.

Dico inoltre che avrò in tal maniera tutte le combinazioni degli n elementi k a k. Infatti le combinazioni degli $n-1$ elementi k a k sono in numero di

$$\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{k!}$$

e quelle degli $n-1$ elementi a $k-1$ a $k-1$ (che divengono combinazioni k a k quando vi si unisca l'elemento a) sono:

$$\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{(k-1)!}$$

sommando si ottiene:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = n_k.$$

Dati dunque gli elementi

$$a_1 \quad a_2 \ldots a_{n-1} \quad a_n$$

II.

Formule risolutive. — Il coefficiente

$$A_1 = \sum_{\lambda=0}^{1} {}^{n-\lambda}{}_{(n-1} \, \Sigma P \left\{ C_{1,2\ldots(n-1}{}_{\lambda)} \right\} a^{1-\lambda} d^{\lambda}$$

è un polinomio completo di primo grado in a ed in d.

Per il valore 0 di λ se ne ottiene il termine na. Per $\lambda = 1$ si ha:

$$\Sigma P \left\{ c_{1,2\ldots n-1}{}_{1)} \right\} d = \frac{n(n-1)}{2} d$$

onde avremo

$$n a + \frac{n(n-1)}{2} d = - A_1 . \qquad [1]$$

Il coefficiente

$$A_2 = \sum_{\lambda=0}^{2} {}^{n-\lambda}{}_{(n-2} \, \Sigma P \left\{ C_{1,2\ldots(n-1}{}_{\lambda)} \right\} a^{2-\lambda} d^{\lambda}$$

sarà un polinomio di secondo grado rispetto alle stesse lettere, di cui il primo termine sarà, per $\lambda = 0$,

$$n_{(n-2)} a^2 = \frac{n^{(n-1)}}{2} a^2 .$$

volendone la somma delle combinazioni prodotti k a k, se indichiamo con s_k tal somma, con S'_{k-1} la somma delle combinazioni prodotti di $n-1$ di quegli elementi a $k-1$ a $k-1$ e con S'_k la somma delle combinazioni prodotti degli stessi $n-1$ elementi k a k avremo:

$$S_k = S'_{k-1} \cdot a_s + C'_k$$

essendo a_s l'elemento non considerato nelle somme S'. Pertanto se cominciamo col prendere uno qualunque degli elementi dati, e poi l'elemento già considerato ed un altro, e così successivamente fino ad esaurire tutti gli elementi dati, e facciamo successivamente $k = 0, 1, 2 \ldots n$ avremo il quadro seguente:

$1 \quad (1 \cdot a_{s_1})$

$1 \quad (a_{s_2} + 1 \cdot a_{s_1}) \quad (1 \cdot a_{s_1} \cdot a_{s_2})$

$1 \quad (a_{s_3} + a_{s_2} + a_{s_1}) \quad ((a_{s_2} + a_{s_1}) a_{s_3} + a_{s_1} \cdot a_{s_2})$

. . . .

$1 \quad (a_{s_n} + a_{s_{n-1}} \cdots + a_{s_1}) \quad ((a_{s_{n-1}} + a_{s_{n-2}} + \ldots a_{s_1}) a_{s_n} + (a_{s_{n-2}} + \ldots a_{s_1}) a_{s_{n-1}} \cdots + (a_{s_2} + a_{s_1}) a_{s_1})$.

ove nelle successive linee orizzontali si ha la somma delle combinazioni k a k dell'elemento a_{s_1}, dei due elementi a_{s_1}, a_{s_2}, dei tre elementi $a_{s_1}\, a_{s_2}\, a_{s_3} \ldots$ e finalmente nell'ultima in basso degli elementi $a_{s_1}\, a_{s_2} \ldots a_{s_n}$, k a k, essendo $k = 0, 1, 2 \ldots n$ nelle successive linee verticali da sinistra a destra. Abbiamo cioè il triangolo seguente

$$\begin{array}{llll} 1 & & & \\ 1 & a_1 & & \\ 1 & a_2 & a_3 & \\ 1 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array}$$

in cui ciascuna delle a è uguale al prodotto di uno degli elementi dati a_s che non si sia ancora considerato, per il primo numero che gli è a sinistra superiormente, aumentato del numero che è immediatamente al di sopra. Ad esempio:

$$a_5 = a_2 \cdot a_s + a_3 .$$

Per $\lambda = 1$

$$n - 1\, \Sigma \mathrm{P} \left\{ c_{(1,2\ldots(n-1))} \right\} a\, d = \frac{n(n-1)^2}{2} a\, d$$

Per i numeri $1, 2, 3 \ldots n-1$, avremo pertanto.

Elementi	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5 \ldots$
0	1					
1	1	1				
1, 2	1	3	2			
1, 2, 3	1	6	11	6		
1, 2, 3, 4	1	10	35	50	24	
1, 3, 3, 4, 5	1	15	85	225	274	120
. . . .						

La stessa regola può come è evidente fornire i coefficienti di una equazione di cui siano date le radici. E per ciò che precede si potrà concludere ancora che:

"Data una equazione di grado n, con il primo coefficiente eguale alla unità

$$x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} \ldots \pm A_n = 0$$

la quale ammetta le radici $\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_n$, la equazione di grado $n+1$ la quale ammetta le stesse radici $\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_n$ più un'altra radice β_{n+1} sarà della forma

$$x_{n+1} - (A_1 + \beta_{n+1})\, x^n + (A_2 + A_1 \beta_{n+1})\, x^{n-1} \ldots \pm (A_n \beta_{n+1}) = 0$$

in cui ciascuno dei coefficienti è dato dalla somma del coefficiente dello stesso posto nella equazione di grado n, aumentato del prodotto del coefficiente precedente in questa stessa equazione per la nuova radice β_{n+1}".

Questa verità si dimostra, per altro, indipendentemente dalle considerazioni precedenti, assai semplicemente come segue:

Si abbia una equazione di grado n che ammetta le radici $\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_n$, sarà:

$$x^n - A^s x^{n-1} + A_2 x^n \ldots \pm A_n = (x - \beta_1)\, (x - \beta_2) \ldots (x - \beta_n)$$

Moltiplicando l'uno e l'altro membro per $(x - \beta_{n+1})$ si otterrà:

$$x^{n+1} - (A_1 + \beta_{n-1})\, x^n + (A_2 + A_1 \beta_{n+1})\, k^{n-1} \ldots \pm (A_n + A_{n-1} \beta_{n+1})\, x \pm A_n \beta_{n+1} = \\ = (x - \beta_1)\, (x - \beta_2) \ldots (x - \beta_n)\, (x - \beta_{n-1})$$

ed apparisce dal secondo membro che l'equazione

$$P_0 x^{n+1} + P_1 x^n + P_2 x^{n-1} \ldots + P_{n-1}$$

ove

$$P_0 = 1\, ;\, P_1 = A_1 + 1 \cdot \beta_{n+1}\, .\, P_2 = A_2 + A_1 \cdot \beta_{n+1} \ldots P_{n-1} = A_n \beta_{n+1}$$

ammette le radici dell'equazione di grado n che ha per coefficienti $A_1\, A_2 \ldots A_n$ e di più ammette la radice β_{n+1}.

Ad esempio, volendo la equazione che ammette le radici

$$\frac{1}{7} \qquad -2 \qquad -11 \qquad \frac{2}{3}$$

si ottiene facilmente

$$\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
1 & \frac{1}{7} & & & \\
1 & -\frac{13}{7} & -\frac{2}{7} & & \\
1 & -\frac{70}{7} & \frac{141}{7} & \frac{22}{7} & \\
1 & -\frac{256}{21} & \frac{243}{21} & \frac{348}{21} & \frac{44}{21}
\end{array}$$

e la equazione richiesta sarà

$$21x^4 + 256x^3 + 243x^2 - 348x + 44 = 0.$$

finalmente il terzo termine è dato, per $\lambda = 2$, da

$$\Sigma P\left\{ c_{(1,2,\ldots n-1)_2} \right\} d^2 = \left\{ \frac{n^2(n-1)^2}{4} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \right\} d^2 =$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{24} d^2.$$

Si ha quindi l'eguaglianza

$$\frac{n(n-1)}{2} a^2 + \frac{n(n-1)^2}{2} a d + \frac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{24} d^2 = A_2$$

la quale insieme alla [1] fornisce un sistema di due equazioni da cui si può dedurre il valore di a e di d in funzione dei cofficienti A_1 ed A_2 e del grado n di una qualsiasi equazione le cui radici siano in progressione aritmetica. Avuto un termine estremo a e la regione d si può costruire la progressione di cui i termini sono le radici della equazione proposta.

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} na + \dfrac{n(n-1)}{2} d = -A_1 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} a^2 + \dfrac{n(n-1)^2}{2} a d + \dfrac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{24} d^2 = A_2 \end{cases}$$

si ottiene:

$$d = \pm \frac{2}{n} \sqrt{\frac{3(n-1)A_1^2 - 6nA_2}{n^2-1}}$$
$$a = -\frac{n(n-1)d + 2A_1}{2n}.$$

È indifferente prendere per d il segno superiore o l'inferiore, in ogni caso si ottiene per a il valore di un termine estremo della progressione aritmetica. Considerando soltanto il primo segno, potremo stabilire le seguenti formule risolutive per una equazione di grado n che ammetta radici in progressione aritmetica: (*)

$$d = +\frac{2}{n} \sqrt{\frac{3(n-1)A_1^2 - 6nA_2}{n^2-1}}.$$
$$a = -\frac{A_1}{n} - \sqrt{\frac{3(n-1)^2 A_1^2 - 6n(n-1)A_2}{n^2(n+1)}}.$$

(*) Poichè due numeri possono sempre riguardarsi come costituenti una progressione aritmetica, se nella formula

$$a = -\frac{n(n-1)d + 2A_1}{2n}$$

sostituiamo il valore di d con i due segni e poniamo $n = 2$ ritroveremo la nota formula risolutiva delle equazioni di 2° grado.

(continua)

CAMILLO CORTESI.

SULLA RISOLUZIONE SIMMETRICA DEL SISTEMA

$$\sum_1^3{}_{rs}\, a_{rs} x_r x_s = 0 \quad , \quad \sum_1^3{}_r\, b_r x_r = 0$$

Per risolvere simmetricamente il sistema delle due equazioni

$$\sum_1^3{}_{rs}\, a_{rs} x_r x_s = 0 \quad (a_{rs} = a_{sr}) \qquad (1) \qquad \text{e} \qquad \sum_1^3{}_r\, b_r x_r = 0, \qquad (2)$$

omogenee nelle tre incognite x_1, x_2, x_3 si ricorre di solito a due soluzioni generiche y_1, y_2, y_3 e z_1, z_2, z_3 della (2) e si esprime poi simmetricamente la soluzione generale del sistema proposto per mezzo delle a, delle b, delle y e delle z.

In questa breve nota mi propongo di esprimere simmetricamente la soluzione del sistema proposto per mezzo soltanto dei coefficienti a e b. (*)

Moltiplicando la (1) per b^2_1, e tenendo conto della (2), si ha:

$$x^2_2 (b^2_1 a_{22} - 2b_1 b_2 a_{12} + b^2_2 a_{11}) - 2x_2 x_3 (b_1 b_2 a_{13} + b_1 b_3 a_{12} - b^2_1 a_{23} - b_2 b_3 a_{11}) + x^2_3 (b^2_1 a_{33} - 2b_1 b_3 a_{13} + b^2_3 a_{11}) = 0.$$

Di qui segue che, supposti identici due indici congrui secondo il numero 3, se si pone:

$$P = \sqrt{-\sum_1^3{}_{rs} (a_{r+1,\, s+1}\, a_{r+2,\, s+2} - a_{r+1,\, s+2}\, a_{r+2,\, s+1})\, b_r b_s}, \qquad (3)$$

due soluzioni del sistema proposto ci sono date dai valori:

$$(\alpha) \begin{cases} x'_2 = b_1 b_2 a_{13} + b_1 b_3 a_{12} - b^2_1 a_{23} - b_2 b_3 a_{11} \pm b_1 P \\ x'_3 = b^2_1 a_{22} - 2b_1 b_2 a_{12} + b^2_2 a_{11} \end{cases}$$

e, per la (2):

$$(\alpha) \; \{ \; x'_1 = b_1 b_2 a_{23} + b_2 b_3 a_{12} - b^2_2 a_{13} - b_1 b_3 a_{22} \mp b_2 P;$$

ed ogni altra soluzione deve essere proporzionale ad una di queste.

Analogamente, se si avesse invece moltiplicata la (1) per b^2_2 o b^2_3, si avrebbero avute le due coppie di soluzioni

$$(\beta) \begin{cases} x''_2 = b_2 b_3 a_{12} + b_1 b_2 a_{23} - b^2_2 a_{13} - b_1 b_3 a_{22} \pm b_2 P \\ x''_1 = b^2_2 a_{33} - 2b_2 b_3 a_{23} + b^2_3 a_{22} \\ x''_3 = b_2 b_3 a_{13} + b_1 b_3 a_{23} - b^2_3 a_{12} - b_1 b_2 a_{33} \mp b_3 P \end{cases}$$

o

$$(\gamma) \begin{cases} x'''_1 = b_1 b_3 a_{23} + b_2 b_3 a_{13} - b^2_3 a_{12} - b_1 b_2 a_{33} \pm b_3 P \\ x'''_2 = b^2_3 a_{11} - 2b_1 b_3 a_{13} + b^2_1 a_{33} \\ x'''_3 = b_1 b_3 a_{12} + b_1 b_2 a_{13} - b^2_1 a_{23} - b_2 b_3 a_{11} \mp b_1 P \end{cases};$$

(*) A questo risultato non si può giungere dalle formole succennate ponendo ad es.:

$$y_1 = b_2 - b_3,\; y_2 = b_3 - b_1,\; y_3 = b_1 - b_2 \qquad \text{e} \qquad z_1 = \frac{b_2 - b_3}{b_1},\; z_2 = \frac{b_3 - b_1}{b_2},\; z_3 = \frac{b_1 - b_2}{b_3},$$

perchè verrebbe escluso il caso $b_1 = b_2 = b_3$.

e facilmente si vede che la proporzionalità colle soluzioni (α) avviene se si prendono sempre i segni superiori o sempre gli inferiori.

Sommando le tre soluzioni che si hanno prendendo i segni superiori e quelle che si hanno prendendo gli inferiori, si vede dunque che il sistema proposto ammette le due soluzioni:

$$(A)\begin{cases} x_1 = x'_1 + x''_1 + x'''_1 = b_2 \sum_1^3{}_r b_r(a_{3r+1} - a_{3r+2}) - b_3 \sum_1^3{}_r b_r(a_{2r+1} - a_{2r+2}) \mp (b_2 - b_3)P \\ x_2 = x'_2 + x''_2 + x'''_2 = b_3 \sum_1^3{}_r b_r(a_{1r+1} - a_{1r+2}) - b_1 \sum_1^3{}_r b_r(a_{3r+1} - a_{3r+2}) \mp (b_3 - b_1)P \\ x_3 = x'_3 + x''_3 + x'''_3 = b_1 \sum_1^3{}_r b_r(a_{2r+1} - a_{2r+2}) - b_2 \sum_1^3{}_r b_r(a_{1r+1} - a_{1r+2}) \mp (b_1 - b_2)P \end{cases}$$

e che ogni altra soluzione è proporzionale ad una di queste.

Possiamo insomma concludere che, posto

$$D_h = \Sigma_r b_r(a^{hr+1} - a^{hr+2}) \qquad [h = 1, 2, 3] \tag{4}$$

e indicando con ρ una costante arbitraria, la soluzione generale del sistema proposto è data dei valori:

$$x_h = \rho \{b^{h+2}D^{h+1} - b^{h+2}D^{h+1} \pm (b^{h+1} - b^{h-2})P\} \qquad [h = 1, 2, 3] \tag{5}$$

Padova, ottobre 1902.

PAOLO CATTANEO.

UNA SUCCESSIONE DI NUMERI INTERI

1. Consideriamo la successione di numeri interi

$$V_1,\ V_2, \ldots V_{n-1},\ V_n, \tag{1}$$

ove è

$$V_n = An^2 + Bn + C$$

essendo A, B, C tre numeri dati, che diremo rispettivamente la *prima*, la *seconda*, la *terza caratteristica* della successione (1); l'espressione

$$B^2 - 4AC$$

la diremo il *discriminante* della successione.

Volendo considerare solo successioni di numeri interi, la terza caratteristica deve essere un numero intero, mentre A e B sono o ambedue interi, o della forma

$$A = \frac{2h+1}{2}; \qquad B = \frac{2l+1}{2}, \qquad (h \text{ ed } l \text{ interi})$$

Diremo che $2K+1$ termini della successione (1)

$$V_{\alpha_1},\ V_{\alpha_2}, \ldots\ V_{\alpha_{k+1}}, \ldots\ V_{\alpha_{2k+1}}$$

formano un *gruppo simmetrico dell'ordine* $2k+1$, se è

$$\alpha_{k+1} - \alpha_i = \alpha_{2k+2-i} - \alpha_{k+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots k).$$

Due gruppi simmetrici dell'ordine $2k+1$

$$V_{\alpha_1} \ldots V_{\alpha_{k+1}} \ldots V_{\alpha_{2k+1}};\ V_{\beta_1} \ldots V_{\beta_{k+1}} \ldots V_{\beta_{2k+1}}$$

si diranno *gruppi equisimmetrici*, se è

$$\alpha_{k+1} - \alpha_i = \beta_{k+1} - \beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots k).$$

2. Abbiamo in generale

$$V_r - V_s = A(r^2 - s^2) + B(r - s).$$

Teorema I. — *Il quoziente*

$$\frac{V_{p+m\rho} - V_{p-m\rho}}{V_{p+n\rho} - V_{p-n\rho}}$$

è indipendente da p, *da* ρ *e dalle caratteristiche della successione* V; *ed è un numero intero se* m *è multiplo di* n.

Abbiamo infatti

$$V_{p+m\rho} - V_{p-m\rho} = 2m\rho(2Ap + B)$$
$$V_{p+n\rho} - V_{p-n\rho} = 2n\rho(2Ap + B),$$

e quindi

$$\frac{V_{p+m\rho} - V_{p-m\rho}}{V_{p+n\rho} - V_{p-n\rho}} = \frac{m}{n}.$$

Il primo membro è quindi un numero intero, se è m divisibile per n; gode poi delle proprietà contenute nell'enunciato del teorema.

Teorema II. — *Il quoziente*

$$\frac{V_{n+r} + V_{n-r} - 2V_n}{V_{m+s} + V_{m-s} - 2V_m}$$

è indipendente da n, *da* m, *e dalle caratteristiche della successione* V; *ed è il quadrato di un numero intero, se* r *è multiplo di* s.

Abbiamo infatti

$$V_{n+r} = A(n+r)^2 + B(n+r) + C = An^2 + Bn + C + Ar^2 + Br + 2Anr;$$

e quindi

$$V_{n+r} = V_n + V_r + 2Anr - C.$$

Similmente si ottiene:

$$V_{n-r} = V_n - V_r - 2A(n-r)r + C,$$

e quindi

$$V_{n+r} + V_{n-r} - 2V_n = 2Ar^2 \qquad (2)$$