

« innanzi le idee generali, ma cercherà di farle risaltare su esempi particolari, « sviluppati col dettaglio e la lentezza che giudicherà necessari per essere ben « seguiti ». Ed a questi concetti s'ispira tutto il libro del sig. Giulio Tannery.

Circa un terzo del volume è occupato da una introduzione, nella quale sono richiamate le nozioni di aritmetica, algebra e geometria necessarie per intendere il seguito.

Il primo capitolo *Su alcune identità* si riferisce agli sviluppi di $(a + b)^n$, $\frac{a^n - b^n}{a - b}$ e simili, e alle conseguenze che se ne possono trarre. Il secondo *Algebra geometrica* contiene i teoremi sull'equivalenza delle figure geometriche piane che sotto un certo aspetto possono considerarsi come l'algebra degli antichi greci; il terzo tratta delle equazioni di 2° grado.

I capitoli IV, V, VI contengono il concetto generale di coordinate e le nozioni fondamentali di geometria analitica.

Il VII partendo dal concetto di tangente e velocità contiene la nozione di derivata.

L'VIII partendo dalla ricerca di aree e volumi dà la nozione d'integrale e le sue principali proprietà; ed il IX tratta rapidamente dei limiti, infinitesimi, integrali, definiti, serie.

Il libro si chiude con una interessantissima appendice *Nozioni storiche*, redatta dall'illustre Paolo Tannery, fratello dell'A. della prima parte dell'opera, nella quale è esposta con molta chiarezza e brevità la storia delle origini dei vari rami delle matematiche, dei segni più comunemente usati, ecc.

F.-S. HOLZINGER. — *Aritmetica politica per le scuole superiori di commercio*. (Accademia di commercio). — Prima versione italiana. Vienna, Hoelder, 1902.

Col nome di aritmetica politica l'A. ha designato quell'insieme di problemi che si riferiscono alle diverse operazioni bancarie e di assicurazione, come risulta dall'indice che riportiamo sommariamente.

INTRODUZIONE. — Progressioni aritmetiche e geometriche. Calcolo dell'interesse semplice.

PARTE I. — Calcoli d'interesse composto o rendita.

- » II. — Corso dei prestiti e costruzioni di piani d'ammortizzazione.
- » III. — Piani d'ammortamento per prestiti con lotteria.
- » IV. — Calcolo delle probabilità e delle rendite vitalizie.
- » V. — Assicurazione di un capitale in caso di morte.
- » VI. — Assicurazione fra congiunti.

APPENDICE.

TAVOLA I. — Valore di $\lg \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ e di $\lg \left(1 - \frac{p}{100}\right)$ (p variabile di $\frac{1}{4}$ da 2 a 6).

» II. — Valori di $v^n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-n}$ (p variabile di $\frac{1}{4}$ da 2 a 6 ed n variabile da 1 a 100).

» III. — Valori di $w^n = \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$ (p ed n variabili c. s.)

» IV. — Valori di $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ (n variabile da 1 a 200).

» V. — Tabelle di mortalità.

» VI. — Tabella fondamentale delle rendite personali ed assicurazioni di capitali, basata sulla tav. di mortalità di Florencourt e sul 4 % d'interesse composto.

- TAVOLA VII. — Tabella fondamentale c. s. basata sulla tavola di mortalità di Brune-Fischer per uomini e sull'interesse composto del 4 %.
- VIII. — Tabella fondamentale c. s. basata sulla tavola di mortalità di Brune-Fischer per donne e sull'interesse composto del 4 %.
- IX. — Valori attuali delle rendite d 1K per coniugi calcolati a caso dalla tavola di mortalità di Brune-Fischer per uomini e donne e del 4 %.

Come si vede dall'indice riportato l'opera contiene in piccolo volume (118 pagg.) tutto quanto può occorrere agli uomini di affari, ed è scritta con lodevole brevità e chiarezza.

Un appunto bisogna fare all'anonimo traduttore. In questo libro si trovano barbarismi abbondanti come *Valerà*, *esborsare*, *Va da sè*, *per cento* resto sostantivo e simili. Inoltre gli esempi che nell'originale si trovano giustamente sempre in *marchi* o *corone* avrebbero opportunamente potuto esser trasformati in *lire* nella traduzione italiana.

III CONGRESSO

fra i professori di matematica delle scuole medie d'Italia

promosso dall'Associazione "Mathesis",

Napoli - Settembre 1903

Sala Principe di Napoli concessa dal Municipio

Seduta inaugurale.

Lunedì 14 settembre, ore 11

Intervengono alla seduta inaugurale l'assessore AGRESTI, rappresentante il sindaco ed il provv. DE LUCA APRILE, rappresentante il Ministro dell'istruzione pubblica. Dei professori d'Università sono presenti il DEL PEZZO ed il MONTESANO.

Assume la presidenza il prof. BETTAZZI, presidente dell'associazione "Mathesis", per iniziativa della quale è stato indetto il congresso.

Parlano, vivamente applauditi: Il prof. BETTAZZI, il quale ringrazia a nome dell'associazione l'on. sindaco di Napoli ed il suo rappresentante, per la cortese ospitalità, e saluta con belle parole gli intervenuti; l'assessore AGRESTI, che saluta i congressisti a nome del sindaco e del consiglio comunale ed augurandosi che i lavori del congresso siano di immediata efficacia per il miglioramento della scuola ed il prof. AMODEO il quale a nome del comitato locale, porge il saluto ai professori qui arrivati da ogni parte d'Italia.

Il prof. DE LUCA APRILE legge quindi un telegramma gentile d'augurio del ministro Nasi, e la Presidenza si incarica rispondere seduta stante.

Il presidente indice la prima seduta, per i lavori del congresso alle ore 15.

In fine, il Municipio ha offerto dei rinfreschi ai congressisti.

Discussione sul primo tema.

Lunedì 14 settembre ore 15, martedì 15 settembre ore 8.

Al principio della seduta pomeridiana del 14 si procede all'elezione dell'ufficio di presidenza che risulta così costituito: BETTAZZI, presidente; AMODEO, FAZZARI, vice-presidenti; GALLUCCI, MARI, segretari.

Si inizia poi la discussione sul tema primo riguardante *le cause del poco profitto che gli allievi delle nostre scuole medie fanno nella matematica*; è relatore il

prof. NANNEI del R. Istituto Tecnico di Bari. Anche nel congresso si sono manifestate le due correnti per cui già sorsero vive discussioni nelle adunanze parziali di Bologna, Roma e Milano. Alcuni, come il FRATTINI e il DE AMICIS, negano il fatto del poco profitto, specialmente nel secondo biennio d'istituto tecnico, nel quale è avvenuta una certa selezione degli allievi, per cui restano nelle ultime classi i migliori ed i più adatti; la maggioranza però è d'accordo coi proff. BETTAZZI e FAZZARI, i quali dichiarano che la quistione è stata posta specialmente per quelle scuole nelle quali la matematica non è materia professionale.

Respinta la pregiudiziale sull'opportunità del tema, si discute la relazione NANNEI e se ne approvano tutte le conclusioni con modificazioni di forma in qualche parte e con le seguenti aggiunte:

1^a. Il prof. CERVO riconosce, come causa principale del poco profitto, il troppo affollarsi degli allievi nelle scuole classiche a scapito delle scuole professionali e propone quindi l'istituzione di scuole commerciali industriali ed agrarie secondo i bisogni delle varie regioni. Il congresso approva a maggioranza.

2^a. Il prof. ROZZOLINO, preside del Liceo di Campobasso, ritiene che il poco profitto che gli allievi delle scuole classiche fanno nella matematica è dovuto in gran parte al preconconcetto che, approvati nelle materie letterarie, anche se meritano zero in matematica sono promossi lo stesso; propone perciò un ordine del giorno col quale si fa voto che la matematica venga considerata come materia principale anche nelle scuole classiche. Il congresso approva a maggioranza.

3^a. Il prof. GALLUCCI, in aggiunta alla relazione Nannei, fa notare che le cause del poco profitto e le proposte per ovviarvi si possono ordinare secondo due principii pedagogici, il principio di continuità ed il principio dell'interesse. In base a tali principii si possono fare alcune proposte, specialmente riguardanti l'inizio dell'insegnamento della matematica razionale.

Il congresso delibera che queste considerazioni e le relative proposte vengano inserite negli atti in seguito alla relazione Nannei.

Discussione sul secondo tema.

Martedì 15 settembre ore 15, mercoledì 16 settembre ore 8.

Il prof. PALATINI, relatore del secondo tema, riguardante *l'estensione e i limiti dell'insegnamento della matematica nelle scuole medie*, è assente; però il presidente apre la discussione sulla relazione già stampata e nota a tutti i congressisti.

I professori DE AMICIS e CONTI, riferendosi a quanto ebbero già a dire nelle adunanze del congresso di Livorno e nelle adunanze di Bologna riguardo ai programmi di matematica, pongono due pregiudiziali entrambe respinte dal congresso. Si passa quindi a discutere sui programmi delle scuole secondarie inferiori e si approva quello proposto dal relatore, con lievi modificazioni di forma. Per le scuole secondarie superiori, i professori CONTI, PERNA, DE AMICIS, sono d'avviso che non si possa prescindere dallo scopo che ciascuna scuola si propone, e presentano un ordine del giorno in questo senso. Il congresso approva a debole maggioranza quest'ordine del giorno ed il presidente dichiara chiusa la discussione sul secondo tema. I professori ROZZOLINO e BERNARDI presentano un ordine del giorno col quale si raccomanda al comitato della *Mathesis* di proporre all'associazione lo studio dei programmi dei licei e degli istituti tecnici, per le relative riforme.

Discussione sul terzo tema.

Martedì 15 settembre ore 8, mercoledì 16 settembre ore 8 ed ore 15.

Prima di iniziare la discussione, il prof. COSTANZI relatore del terzo tema, *sulla convenienza di rendere non obbligatoria la laurea in matematica per quelli che si dedicano all'insegnamento*, dà schiarimenti su vari punti della sua relazione.

Si approvano quindi due ordini del giorno, con i quali si domanda che non solo la laurea resti obbligatoria, ma che sia reso obbligatorio anche il diploma della scuola di magistero.

Portata la discussione sul miglioramento della scuola di magistero si fanno varie proposte, le quali vengono riunite in un solo ordine del giorno presentato dai professori FRATTINI, PERNA, CERTO e CONTI, e col quale si fanno voti perchè si migliorino ulteriormente le scuole di magistero secondo le proposte già fatte dalla *Mathesis* in altri congressi, e perchè sia affidata una parte degl'insegnamenti relativi a valorosi e provetti insegnanti delle scuole medie.

In ultimo il prof. CESARELLI presenta alcune proposte per l'istituzione di una scuola di magistero anche per il primo biennio dell'Università. Il congresso prende atto e propone l'importante questione per il prossimo congresso.

Seduta di chiusura.

Giovedì 17 settembre ore 8 $\frac{1}{2}$.

Questa seduta è dedicata alla lettura delle comunicazioni, terminate le quali, il presidente prof. BETTAZZI dichiara chiuso il III congresso dei professori di matematica delle scuole medie.

Non si decide nulla circa il congresso futuro.

Il Presidente accetta, come raccomandazione, la proposta del DE AMICIS, di tenere il IV congresso a Milano, proposta che verrà messa in votazione per *referendum*.

Elenco delle comunicazioni fatte al congresso.

- CANDIDO. Sul giornalismo matematico elementare in Italia.
 FRATTINI. Sul movimento con o senza deformazione.
 BUSTELLI. Sul concetto di massa nella meccanica razionale.
 BIASI. Sulle coordinate triangolari di ordine 2^a.
 DE AMICIS. Sull'equivalenza dei parallelogrammi equiangoli ed equilateri.
 ANGELERI. Sulla fusione della geometria piana con la solida (letta dal presidente prof. BETTAZZI).
 GALLUCCI. Sull'indirizzo formale e sull'indirizzo intuitivo nei fondamenti della matematica.
 GALLUCCI. Sulla costruzione dei concetti dell'eguaglianza e dell'equivalenza geometrica.

CORRISPONDENZA

Ill.mo Sig. Direttore,

La prego d'inserire nel suo pregiato *Periodico* le seguenti brevi osservazioni sulle *Nuove considerazioni sulle permutazioni* del Dott. L. Carlini.

Le considerazioni che il Dott. Carlini fa intorno alle permutazioni di un dato numero di elementi, comparse nell'ultimo fascicolo (luglio-agosto 1903) ebbi già l'occasione di farle anch'io risolvendo *Un problema sulla partizione dei numeri*. (V. fasc. settembre-ottobre 1902): Ivi è ancora completata la determinazione del numero delle permutazioni che presentano un dato numero di inversioni, che il Dott. Carlini dichiara difficoltosa.

Ringraziandola della ospitalità accordatami mi creda

Palermo, 22 settembre 1902.

Dev.mo

DOTT. GASPARE MIGNOSI
 (S. Agostino, 33).

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 14 novembre 1904.

INTORNO ALLE SINGOLARITÀ DI UNA FUNZIONE

DIPENDENTI DA QUELLE DI PIÙ FUNZIONI DATE

Un notevole contributo allo studio delle singolarità delle funzioni analitiche ha recentemente portato il sig. HADAMARD con un importante teorema, (*) per mezzo del quale, data una funzione mediante il suo sviluppo in serie di potenze intere e positive della variabile, si può, scomponendo opportunamente i coefficienti, conoscere in molti casi le singolarità della funzione data, per mezzo delle singolarità di note funzioni.

Il teorema di HADAMARD si può enunciare:

Siano date due serie di potenze

$$\begin{aligned} (1) \quad & a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \\ (2) \quad & b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots \end{aligned}$$

convergenti in cerchi aventi per centro l'origine e per raggi rispettivamente R ed R' e rappresentanti ivi due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$. La serie

$$a_0b_0 + a_1b_1x + a_2b_2x^2 + \dots + a_nb_nx^n + \dots,$$

*di cui ciascun coefficiente è eguale al prodotto dei coefficienti corrispondenti delle serie (1) e (2), ha il suo cerchio di convergenza di raggio almeno eguale ad RR' , e rappresenta ivi una funzione $f(x)$, la quale ha (e ciò in tutto il piano) per soli punti singolari possibili (***) quelli che si ottengono moltiplicando le affisse dei diversi punti singolari di $\varphi(x)$ per quelle dei diversi punti singolari di $\psi(x)$.*

La dimostrazione del teorema di HADAMARD, fondata sulla considerazione di integrali curvilinei, venne in seguito semplificata di molto dal sig. BOREL (***) con la considerazione dell'espressione analitica

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(xz) \psi\left(\frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z},$$

della funzione $f(x)$ sotto forma d'integrale curvilineo (esteso ad un contorno C che separa i punti singolari di $\varphi(xz)$ da quelli di $\psi(\frac{1}{z})$).

(*) J. HADAMARD, *Théorème sur les séries entières*. "Comptes rendus," t. 124, pr. sem. 1897; e "Acta math.," t. 22.

(**) Perché qualcuno di questi punti può essere anche punto ordinario della funzione $f(x)$, e ciò quando dipenda da più coppie $\alpha, \beta; \alpha', \beta'; \dots$ di punti singolari rispettivamente di $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, tali che sia $\alpha\beta = \alpha'\beta' = \dots$.

(***) E. BOREL, *Sur les singularités des séries de Taylor*. "Bull. de la Soc. math. de Fr.," t. XXV, 1897, pp. 238-248.

Il teorema di HADAMARD ha dato origine ad un importante teorema del sig. HURWITZ, (*) mediante il quale da due funzioni, regolari nell'intorno del punto all'infinito, se ne ricava una terza che ha per punti singolari quelli che si ottengono sommando le affisse dei diversi punti singolari dell'una funzione con le affisse dei diversi punti singolari dell'altra. Il sig. HURWITZ dimostra il suo teorema considerando un certo integrale curvilineo doppio, e si limita semplicemente al caso in cui le due funzioni date abbiano soltanto singolarità polari di prim'ordine.

In questo studio ci proponiamo: 1° Dimostrare il teorema di HURWITZ in casi affatto generali, con lo stesso metodo seguito dal sig. BOREL nella dimostrazione del teorema di HADAMARD; 2° Studiare le singolarità dipendenti da singolarità polari od essenziali isolate, calcolandone la caratteristica; 3° Dedurre con una semplice generalizzazione del teorema di HADAMARD un teorema più generale di quello accennato dal sig. BOREL nella sua memoria; 4° Mostrare come una opportuna legge di combinazione dei coefficienti di una serie di potenze conduca al metodo di HADAMARD (**) per calcolare i moduli dei poli successivi di una funzione meromorfa. A questa questione accenna fuggacemente l'HURWITZ nella sua citata memoria.

1. — Teorema di Hurwitz.

1. Siano due serie di potenze

$$(1) \quad \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^{n+1}} + \dots$$

$$(2) \quad \frac{b_0}{x} + \frac{b_1}{x^2} + \dots + \frac{b_n}{x^{n+1}} + \dots$$

nulle per $x = \infty$, convergenti all'esterno di cerchi aventi per centro l'origine e per raggi rispettivamente R ed R' e rappresentanti ivi due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$. La serie

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_0 b_n + n a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0 \right] \frac{1}{x^{n+1}}$$

è convergente all'esterno di un cerchio di centro l'origine e raggio al massimo eguale ad $R + R'$ e rappresenta ivi una funzione $f(x)$ la quale ha (e ciò in tutto il piano) per soli punti singolari possibili quelli che si ottengono sommando le affisse dei diversi punti singolari di $\varphi(x)$ con quelle dei diversi punti singolari di $\psi(x)$.

Se R ed R' sono i raggi dei cerchi di centro l'origine, all'esterno dei quali convergono rispettivamente le serie (1) e (2), si ha

$$|\sqrt[n]{a_n}| \leq R, \quad |\sqrt[n]{b_n}| \leq R' \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(*) A. HURWITZ, *Sur un théorème de M. Hadamard*, "Comptes rendus," t. 128, pr. sem. 1899.

(**) J. HADAMARD, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, "Journal de Math.," Série 4^e, t. VIII, 1892.

quindi abbiamo per $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt[n]{a_0 b_n + n a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0} \right| \\ &= \sqrt[n]{|a_0 b_n + n a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0|} \\ &\leq \sqrt[n]{|a_0 b_n| + n |a_1 b_{n-1}| + \binom{n}{2} |a_2 b_{n-2}| + \dots + |a_n b_0|} \\ &\leq \sqrt[n]{R^n + n R R'^{n-1} + \binom{n}{2} R^2 R'^{n-2} + \dots + R^n} = R + R'; \end{aligned}$$

se ne conclude che la serie (3) converge all'esterno di un cerchio di centro l'origine e raggio al massimo eguale ad $R + R'$.

Consideriamo ora le due serie *rispetto alla variabile z*

$$\begin{aligned} \varphi(x-z) &= \frac{a_0}{x-z} + \frac{a_1}{(x-z)^2} + \frac{a_2}{(x-z)^3} + \dots \\ \psi(z) &= \frac{b_0}{z} + \frac{b_1}{z^2} + \frac{b_2}{z^3} + \dots \end{aligned}$$

convergenti rispettivamente per $|x-z| > R$ e $|z| > R'$. Essendo

$$|x-z| \geq |x| - |z|$$

è *a fortiori* la serie $\varphi(x-z)$ convergente per

$$|z| < |x| - R,$$

cioè dentro il cerchio di centro l'origine e raggio $|x| - R$. Quindi i punti singolari di $\varphi(x-z)$ cadranno all'esterno del cerchio di centro l'origine e raggio $|x| - R$, e i punti singolari di $\psi(z)$ all'interno e sulla circonferenza del cerchio di centro l'origine e raggio R' .

Supposto $|x| - R > R'$, ossia $|x| > R + R'$, dimostreremo che la somma della serie (3) si può mettere sotto forma d'integrale.

Ordinando $\varphi(x-z)$ secondo le potenze di z , si ha, all'interno del cerchio di centro l'origine e raggio $|x| - R$,

$$\varphi(x-z) = \varphi(x) - \frac{\varphi'(x)}{1!} z + \frac{\varphi''(x)}{2!} z^2 - \dots + (-1)^n \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} z^n + \dots$$

Avendo supposto $|x| - R > R'$, è determinata dai due cerchi di raggi $|x| - R$ ed R' una corona nell'interno della quale non cade nessun punto singolare della funzione di z

$$\begin{aligned} \varphi(x-z)\psi(z) &= \left(-b_0 \frac{\varphi'}{1!} + b_1 \frac{\varphi''}{2!} - \dots \right) + \frac{b_0 \varphi - b_1 \frac{\varphi'}{1!} + \dots}{z} + \\ &+ \frac{b_1 \varphi - b_2 \frac{\varphi'}{1!} + \dots}{z^2} + \dots + \left(b_0 \frac{\varphi''}{2!} - b_1 \frac{\varphi'''}{3!} + \dots \right) z + \dots \end{aligned}$$

Lungo la circonferenza C d'un cerchio di centro l'origine e raggio compreso tra $|x| - R$ ed R' , questa funzione è determinata e finita. La serie a secondo membro è uniformemente convergente rispetto a z e si può integrare termine a termine lungo C . Si ottiene

$$b_0\varphi - b_1 \frac{\varphi'}{1!} + b_2 \frac{\varphi''}{2!} - \dots = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(x-z) \psi(z) dz.$$

Ora è noto che se il cerchio di centro x e raggio r appartiene al campo di regolarità della funzione $\varphi(x)$, ed M è il massimo modulo di $\varphi(x)$ sulla circonferenza, si ha

$$|\varphi^{(n)}(x)| < \frac{n!}{r^n} M;$$

supposto $r \geq R'$, sarà $|x| \geq R + R'$ e avremo per tali valori di x

$$\frac{|b_n| |\varphi^{(n)}(x)|}{n!} < \frac{M |b_n|}{r^n},$$

ma $r \geq R'$, quindi la serie $\sum \frac{b_n}{x^n}$ è uniformemente convergente per tali valori di x , quindi sarà anche uniformemente convergente la serie

$$b_0\varphi - b_1 \frac{\varphi'}{1!} + b_2 \frac{\varphi''}{2!} - \dots,$$

e potremo ad essa applicare il teorema di Weierstrass sulle serie doppie; avremo

$$\begin{aligned} & b_0\varphi - b_1 \frac{\varphi'}{1!} + b_2 \frac{\varphi''}{2!} - \dots = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n b_0 + n a_{n-1} b_1 + \binom{n}{2} a_{n-2} b_2 + \dots + a_0 b_n \right] \frac{1}{x^{n+1}} = f(x), \end{aligned}$$

quindi

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(x-z) \psi(z) dz.$$

Questa espressione analitica di $f(x)$ permette di farne il prolungamento analitico e di determinarne i punti singolari *possibili*.

Cancelliamo i cerchi di raggi $|x| - R$ ed R' , e per ogni valore di x fissiamo sul piano z i due insiemi di punti singolari di $\varphi(x-z)$ e $\psi(z)$. Deformiamo allora il cerchio C in una maniera *continua*, ed in modo che durante questa deformazione la sua circonferenza non *traversi* nessuno dei punti singolari dei due insiemi. Sia C' una forma di C durante questa deformazione. All'interno dell'area determinata da C e C' la funzione $\varphi(x-z) \psi(z)$ di z è regolare, e quindi

$$\int_C \varphi(x-z) \psi(z) dz = \int_{C'} \varphi(x-z) \psi(z) dz.$$

Possiamo dunque deformare, nell'accennato modo, il contorno d'integrazione senza che il valore dell'integrale si alteri.

Fissata allora in tal modo la forma di C , facciamo muovere x nel suo piano, in un modo qualunque. Si muoveranno con esso i punti singolari di φ e potrebbero *traversare* il contorno C , nel qual caso nulla può dirsi del senso dell'integrale. Se però si fa muovere x in modo che i punti singolari di φ non traversino il contorno C fissato, l'integrale non cessa d'avere senso nella nuova regione x , e si avrà il prolungamento analitico di $f(x)$.

È evidente che si può contemporaneamente deformare in modo continuo C con la condizione che esso non traversi mai alcun punto singolare dei due insiemi, e far muovere x con la condizione che i punti singolari di φ non traversino le varie forme di C , purché si escludano le posizioni di x per le quali un punto singolare dell'un insieme coincida con un punto singolare dell'altro.

Sia ora $x = \alpha$ un punto singolare di $\varphi(x)$ e $x = \beta$ un punto singolare di $\psi(x)$; saranno

$$z = \alpha - x \quad \text{e} \quad z = \beta$$

punti singolari rispettivamente delle funzioni di z $\varphi(x - z)$ e $\psi(z)$; e

$$\alpha - x = \beta$$

è la condizione necessaria perchè un punto dell'insieme dei punti singolari di $\varphi(x - z)$ coincida con uno di quelli dell'insieme dei punti singolari di $\psi(z)$.

Pertanto si potrà sempre realizzare la doppia condizione di deformare il contorno d'integrazione senza traversare punti singolari dei due insiemi e spostare x in modo che i punti del primo insieme non traversino il contorno, purché si evitino i punti

$$x = \alpha + \beta.$$

Dunque i punti $\alpha + \beta$ sono i soli punti singolari possibili della funzione $f(x)$ in tutto il piano.

Abbiamo detto che i punti $\alpha + \beta$ sono punti singolari *possibili* della funzione $f(x)$ perchè qualche punto $\alpha + \beta$ può essere anche punto ordinario della $f(x)$ e ciò quando dipenda da più coppie $\alpha, \beta; \alpha', \beta'; \dots$ di punti singolari rispettivamente di $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, tali che sia

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = \dots$$

Notiamo ancora che l'origine si comporta come qualunque altro punto, e quindi si può concludere che se esso è punto singolare di una delle funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ o di tutte e due, la funzione $f(x)$ avrà rispettivamente per punti singolari anche quelli della funzione regolare nell'origine, o quelli di ambedue le funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$.

2. — Singolarità polari ed essenziali isolate.

Determinazione delle caratteristiche.

2. La funzione del teorema di HADAMARD si può ottenere dalle due funzioni date mediante un'operazione funzionale distributiva tanto rispetto a $\varphi(x)$ quanto rispetto a $\psi(x)$.

Consideriamo infatti una delle due funzioni date, per esempio la $\varphi(x)$, come fissa, e l'altra, cioè la $\psi(x)$, come variabile; la funzione $f(x)$ del teorema di HADAMARD si può ottenere dalle due funzioni date mediante un'operazione funzionale A definita mediante la funzione fissa $\varphi(x)$ ed applicata alla funzione variabile $\psi(x)$. Quest'operazione è distributiva rispetto alla funzione variabile $\psi(x)$, cioè, se si pone

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_k,$$

e se c denota una costante, è

$$\begin{aligned} f(x) &= A(\psi) = A(\psi_1) + A(\psi_2) + \dots + A(\psi_k) \\ A(c\psi) &= cA(\psi); \end{aligned}$$

ciò si vede immediatamente considerando la funzione $f(x)$, per esempio, sotto forma d'integrale curvilineo. Inoltre l'operazione funzionale A è distributiva anche rispetto alla funzione fissa $\varphi(x)$, cioè, se si pone

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_l,$$

e si chiamano A_1, A_2, \dots, A_l le operazioni funzionali analoghe alla A e definite rispettivamente mediante $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l$, possiamo ottenere la operazione A come somma delle operazioni A_1, A_2, \dots, A_l , cioè

$$A(\psi) = A_1(\psi) + A_2(\psi) + \dots + A_l(\psi);$$

ciò discende ancora dalla forma sotto cui possiamo considerare la funzione $f(x)$.

Quanto abbiamo detto per la funzione del teorema di HADAMARD si potrebbe ripetere per la funzione del teorema di HURWITZ.

3. Ciò posto, chiamiamo genericamente con

$$H(\varphi, \psi)$$

una delle due operazioni funzionali mediante le quali si ottiene rispettivamente la funzione del teorema di HADAMARD o di HURWITZ; e con γ la singolarità della funzione $H(\varphi, \psi)$ dipendente da una singolarità α di φ e da una singolarità β di ψ . Supponiamo che si abbia

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 \\ \psi &= \psi_1 + \psi_2, \end{aligned}$$

dove φ_1 abbia in α la stessa singolarità di φ e ψ_1 in β la stessa singolarità di ψ , e φ_2 e ψ_2 siano regolari rispettivamente in α e β . Per essere

$$H(\varphi, \psi) = H(\varphi_1, \psi_1) + H(\varphi_1, \psi_2) + H(\varphi_2, \psi_1) + H(\varphi_2, \psi_2),$$

e le funzioni $H(\varphi_1, \psi_2)$, $H(\varphi_2, \psi_1)$, $H(\varphi_2, \psi_2)$ regolari in γ , avrà la funzione $H(\varphi, \psi)$ nel punto γ la stessa singolarità della funzione $H(\varphi_1, \psi_1)$.

Cosicchè, se $g_1\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)$ e $g_2\left(\frac{1}{x-\beta}\right)$ sono le caratteristiche delle singolarità polari od essenziali isolate α e β rispettivamente di $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, avrà la funzione $H(\varphi, \psi)$ in γ la stessa singolarità di

$$H(g_1, g_2).$$

Ne concludiamo che la natura della singolarità γ della funzione $H(\varphi, \psi)$, dipende essenzialmente dalla natura delle singolarità α e β rispettivamente delle funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$.

Fondandoci su questo principio, potremo determinare la natura di ogni singolarità delle funzioni dei teoremi di HADAMARD e di HURWITZ, dipendenti da singolarità polari od essenziali isolate delle funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, e calcolarne le caratteristiche.

Esaminiamo separatamente le due dette funzioni.

4. FUNZIONE DEL TEOREMA DI HADAMARD. — Premettiamo un breve calcolo: Sia

$$\varphi(x) = \frac{A}{(x-\alpha)^p},$$

dove A è una costante, p un numero intero. Nel cerchio di centro l'origine e raggio $|\alpha|$, si ha

$$\varphi(x) = \frac{A}{(x-\alpha)^p} = (-1)^p \frac{A}{\alpha^p} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p+n-1}{n} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n;$$

e se nel cerchio di centro l'origine e raggio R' si ha

$$\psi(x) = \sum_0^{\infty} b_n x^n,$$

avremo nel cerchio di centro l'origine e raggio almeno eguale a $|\alpha| R'$

$$f(x) = (-1)^p \frac{A}{\alpha^p} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p+n-1}{n} b_n \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n;$$

ma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{p+n-1}{n} b_n \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n = \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} \left[x^{p-1} \psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right],$$

quindi

$$f(x) = \frac{(-1)^p A}{(p-1)! \alpha^p} \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} \left[x^{p-1} \psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right].$$

Ciò posto, supponendo che si abbia

$$\psi(x) = \frac{B}{(x-\beta)^q},$$

dove B è una costante, q un numero intero; avremo

$$f(x) = \frac{(-1)^p AB}{(p-1)! \alpha^{p-q}} \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} \left[\frac{x^{p-1}}{(x-\alpha\beta)^q} \right].$$

Supponiamo ora che sia $p \leq q$; avremo

$$\frac{x^{p-1}}{(x-\alpha\beta)^q} = \frac{\alpha^{p-1} \beta^{p-1}}{(x-\alpha\beta)^q} + \binom{p-1}{1} \frac{\alpha^{p-2} \beta^{p-2}}{(x-\alpha\beta)^{q-1}} + \binom{p-1}{2} \frac{\alpha^{p-3} \beta^{p-3}}{(x-\alpha\beta)^{q-2}} + \dots +$$

$$+ \binom{p-1}{p-1} \frac{1}{(x-\alpha\beta)^{q-p+1}}$$

sostituendo e sviluppando i calcoli si ha

$$f(x) = -AB \left\{ \frac{\binom{q+p-2}{p-1} \binom{p-1}{0} \alpha^{q-1} \beta^{p-1}}{(x-\alpha\beta)^{q+p-1}} + \frac{\binom{q+p-3}{p-1} \binom{p-1}{1} \alpha^{q-2} \beta^{p-2}}{(x-\alpha\beta)^{q+p-2}} + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{\binom{q}{p-1} \binom{p-1}{p-2} \alpha^{q-p+1} \beta}{(x-\alpha\beta)^{q+1}} + \frac{\binom{q-1}{p-1} \binom{p-1}{p-1} \alpha^{q-p}}{(x-\alpha\beta)^q} \right\}.$$

Se fosse $p \geq q$, si avrebbe

$$f(x) = -AB \left\{ \frac{\binom{p+q-2}{q-1} \binom{q-1}{0} \alpha^{p-1} \beta^{q-1}}{(x-\alpha\beta)^{p+q-1}} + \frac{\binom{p+q-3}{q-1} \binom{q-1}{1} \alpha^{p-2} \beta^{q-2}}{(x-\alpha\beta)^{p+q-2}} + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{\binom{p}{q-1} \binom{q-1}{q-2} \alpha^{p-q+1} \beta}{(x-\alpha\beta)^{p+1}} + \frac{\binom{p-1}{q-1} \binom{q-1}{q-1} \alpha^{p-q}}{(x-\alpha\beta)^p} \right\}.$$

Le due formole coincidono quando $p = q$.

5. Sia ora $x = \alpha$ un punto singolare essenziale isolato della funzione $\varphi(x)$, e

$$g_1 \left(\frac{1}{x-\alpha} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{(x-\alpha)^i},$$

serie intera convergente in tutto il piano eccetto che in α , la sua caratteristica; sia $x = \beta$ un punto singolare essenziale isolato di $\psi(x)$, e

$$g_2 \left(\frac{1}{x-\beta} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{(x-\beta)^j}$$

la sua caratteristica.

La funzione

$$f(x) = A(\varphi, \psi),$$

definita mediante l'operazione funzionale A (n. 2), avrà in $\alpha\beta$ la stessa singolarità di

$$A(g_1, g_2),$$

e lo sviluppo, $G \left(\frac{1}{x-\alpha\beta} \right)$, in serie di potenze in $\frac{1}{x-\alpha\beta}$ di $A(g_1, g_2)$ ne sarà la caratteristica.

Possiamo dimostrare che l'operazione A , definita mediante g_1 ed applicata a g_2 , è distributiva tanto rispetto alla serie g_2 , quanto alla serie g_1 .

Poniamo, infatti, l'operazione A sotto la forma di integrale curvilineo; si ha

$$A(g_1, g_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_C g_1 \left(\frac{1}{xz - \alpha} \right) g_2 \left(\frac{z}{1 - \beta z} \right) \frac{dz}{z},$$

il contorno C dovendo comprendere l'origine e il punto singolare fisso $\frac{1}{\beta}$ di g_2 ed escludere il punto singolare mobile $\frac{\alpha}{x}$ di g_1 , e l'integrale rappresenta una funzione regolare in tutto il piano x , tranne che nel punto $x = \alpha\beta$. La serie

$$g_2 \left(\frac{z}{1 - \beta z} \right) = \frac{B_1 z}{1 - \beta z} + \frac{B_2 z^2}{(1 - \beta z)^2} + \dots$$

per tutti i valori di z diversi da $\frac{1}{\beta}$ è uniformemente convergente rispetto a z sul contorno C , che non contiene $\frac{1}{\beta}$, ed i suoi termini sono integrabili lungo il medesimo contorno; la funzione $\frac{g_1}{z}$ poi è finita lungo tutti i punti z di C , che non contiene $\frac{\alpha}{x}$, nè l'origine. Si può pertanto integrare termine a termine lungo C ed ottenere

$$A(g_1, g_2) = \sum_{j=1}^{\infty} A \left(g_1, \frac{B_j}{(x - \beta)^j} \right),$$

la quale dimostra appunto la distributività dell'operazione A rispetto alla serie g_2 .

In modo del tutto analogo si vede che l'operazione A è anche distributiva rispetto alla serie g_1 ; si avrà quindi

$$A(g_1, g_2) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} A \left(\frac{A_i}{(x - \alpha)^i}, \frac{B_j}{(x - \beta)^j} \right),$$

ed è indifferente estendere la sommatoria prima rispetto ad i e poi rispetto ad j , o viceversa.

6. Applicando le due formole del n. 4, si ha

$$\begin{aligned} A(g_1, g_2) = & - \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left\{ \sum_{j=1}^i B_j \left[\frac{\binom{i+j-2}{j-1} \binom{j-1}{0} \alpha^{i-1} \beta^{j-1}}{(x - \alpha\beta)^{i+j-1}} + \right. \right. \\ & + \frac{\binom{i+j-3}{j-1} \binom{j-1}{1} \alpha^{i-2} \beta^{j-2}}{(x - \alpha\beta)^{i+j-2}} + \dots + \left. \frac{\binom{i-1}{j-1} \binom{j-1}{j-1} \alpha^{i-j}}{(x - \alpha\beta)^i} \right] + \\ & + \sum_{j=i+1}^{\infty} B_j \left[\frac{\binom{j+i-2}{i-1} \binom{i-1}{1} \alpha^{j-1} \beta^{i-1}}{(x - \alpha\beta)^{j+i-1}} + \frac{\binom{j+i-3}{i-1} \binom{i-1}{1} \alpha^{j-2} \beta^{i-2}}{(x - \alpha\beta)^{j+i-2}} + \dots \right. \\ & \left. \left. + \frac{\binom{j-1}{i-1} \binom{i-1}{i-1} \alpha^{j-i}}{(x - \alpha\beta)^j} \right] \right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i}{(x - \alpha\beta)^i}, \end{aligned}$$

dove, se l è pari, si ha

$$(1) \quad C_1 = - \sum_{i=1}^{\frac{l}{2}} A_i \binom{l-1}{i-1} \left\{ \beta^i \sum_{v=1}^i \binom{i-1}{v-1} \frac{B_{l-i+v}}{\beta^{l-i+v}} \right\} \alpha^{l-i} \beta^{i-1} - \\ - \sum_{i=\frac{l}{2}+1}^l A_i \binom{l-1}{i-1} \left\{ \alpha^i \sum_{v=1}^{2i-1} \binom{i-1}{v-1} \frac{B_{l-i+v}}{\alpha^{l-i+v}} + \beta^i \sum_{v=2i-1}^i \binom{i-1}{v-1} \frac{B_{l-i+v}}{\beta^{l-i+v}} \right\} \alpha^{l-i} \beta^{i-1};$$

e se l è dispari

$$(2) \quad C_1 = - \sum_{i=1}^{\frac{l+1}{2}} A_i \binom{l-1}{i-1} \left\{ \beta^i \sum_{v=1}^i \binom{i-1}{v-1} \frac{B_{l-i+v}}{\beta^{l-i+v}} \right\} \alpha^{l-i} \beta^{i-1} - \\ - \sum_{i=\frac{l+3}{2}}^l A_i \binom{l-1}{i-1} \left\{ \alpha^i \sum_{v=1}^{2i-1} \binom{i-1}{v-1} \frac{B_{l-i+v}}{\alpha^{l-i+v}} + \beta^i \sum_{v=2i-1}^i \binom{i-1}{v-1} \frac{B_{l-i+v}}{\beta^{l-i+v}} \right\} \alpha^{l-i} \beta^{i-1}.$$

In tal modo veniamo a calcolare la caratteristica di una singolarità dipendente da due singolarità essenziali isolate. Per mezzo di queste stesse formole si può inoltre calcolare la caratteristica di una singolarità dipendente da una singolarità polare e da una singolarità essenziale isolata, o da due singolarità polari. Basterà porre 0 al posto di quelle A e B d'indici superiori all'ordine del polo α e β rispettivamente. Per es., nel primo caso accennato, se α è un polo d'ordine p di $\varphi(x)$, con la caratteristica

$\sum_{i=1}^p \frac{A_i}{(x-\alpha)^i}$ e β una singolarità essenziale isolata di $\psi(x)$, con la caratteristica $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{(x-\beta)^j}$, per la caratteristica della singolarità $\alpha\beta$ della funzione $f(x)$, si ha l'espressione

$$G\left(\frac{1}{x-\alpha\beta}\right) = \sum_{i=1}^p \frac{C_i}{(x-\alpha\beta)^i} + \sum_{m=p+1}^{2(p-1)} \frac{C_m}{(x-\alpha\beta)^m} + \sum_{n=2p-1}^{\infty} \frac{C_n}{(x-\alpha\beta)^n},$$

dove C_1 ha una espressione analoga alle (1) e (2); lo stesso dicasi per C_m salvo che la seconda sommatoria è estesa sino ad $i=p$; finalmente

$$C_n = - \sum_{i=1}^p A_i \binom{n-1}{i-1} \left\{ \beta^i \sum_{v=1}^i \binom{i-1}{v-1} \frac{B_{n-i+v}}{\beta^{n-i+v}} \right\} \alpha^{n-i} \beta^{i-1}.$$

Non entrando in più minuti particolari, deduciamo solo dalle formole (1) e (2) quanto segue:

1°. Se α e β sono singolarità essenziali isolate rispettivamente delle funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, sarà in generale $\alpha\beta$ singolarità essenziale isolata della funzione $f(x)$.

2°. Se α è un polo della funzione $\varphi(x)$ e β una singolarità essenziale isolata della funzione $\psi(x)$, sarà in generale $\alpha\beta$ singolarità essenziale isolata della funzione $f(x)$.

3°. Se α è un polo d'ordine p della funzione $\varphi(x)$ e β un polo d'ordine q della funzione $\psi(x)$, sarà in generale $\alpha\beta$ un polo d'ordine $p+q-1$ della funzione $f(x)$. Basta osservare che dalle formole (1) e (2) si ricava

$C_l = 0$ per $l > p + q - 1$, e il coefficiente C_{p+q-1} della potenza $(p + q - 1)$ esima di $\frac{1}{x - \alpha\beta}$, che è eguale a $-A_p B_q \binom{p+q-2}{p-1} \alpha^{p-1} \beta^{q-1}$, o a $-A_p B_q \binom{p+q-2}{p-1} \alpha^{q-1} \beta^{p-1}$, secondochè $p \geq q$ o $p \leq q$, è certamente diverso da zero.

4°. In ogni caso il residuo è

$$-A_1 B_1,$$

ossia: Il residuo di $f(x)$ nel punto singolare $\alpha\beta$ è eguale al prodotto cambiato di segno dei residui nelle singolarità α e β delle funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$.

È da notare inoltre che nella espressione dei coefficienti della caratteristica G entrano un numero finito di coefficienti delle caratteristiche g_1 e g_2 .

7. Abbiamo implicitamente ammesso che la singolarità $\alpha\beta$ della funzione $f(x)$ dipenda da una sola singolarità α di $\varphi(x)$ e da una sola singolarità β di $\psi(x)$; se però la singolarità $\alpha\beta$ dipende da più singolarità sovrapposte, dipendenti da punti singolari $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ di $\varphi(x)$ e da punti singolari $\beta, \beta', \beta'', \dots$ di $\psi(x)$, tali che sia

$$\alpha^{(i)} \beta^{(i)} = \alpha\beta, \quad (i = 1, 2, \dots)$$

può il punto $\alpha\beta$ essere per la funzione $f(x)$ un polo o financo un punto ordinario.

A proposito di una singolarità $\alpha\beta$ dipendente da singolarità polari, notiamo:

Se $\varphi(x)$ ha nei punti $\alpha, \alpha', \dots, \alpha^{(k)}$ dei poli rispettivamente d'ordine $p, p', \dots, p^{(k)}$ e $\psi(x)$ ha nei punti $\beta, \beta', \dots, \beta^{(k)}$ dei poli rispettivamente d'ordine $q, q', \dots, q^{(k)}$; se inoltre

$$(1) \quad \alpha^{(i)} \beta^{(i)} = \alpha\beta, \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

e se ancora è $p^{(i)} + q^{(i)}$ il massimo unico della successione $p^{(i)} + q^{(i)}$ per le varie coppie di punti (1); è $\alpha\beta$ un polo d'ordine $p^{(i)} + q^{(i)} - 1$ per la funzione $f(x)$.

Se poi $p^{(i)} + q^{(i)}$ non fosse un massimo unico, allora $f(x)$ potrebbe avere in $\alpha\beta$ un polo d'ordine minore di $p^{(i)} + q^{(i)} - 1$, e in particolare essere anche regolare in $\alpha\beta$.

8. FUNZIONE DEL TEOREMA DI HURWITZ. — Si supponga dapprima che si abbia

$$\varphi(x) = \frac{A}{(x - \alpha)^p}, \quad \psi(x) = \frac{B}{(x - \beta)^q},$$

dove A e B sono costanti, p e q numeri interi. Fuori dei cerchi di centro l'origine e raggi $|\alpha|$ e $|\beta|$ si ha rispettivamente

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{A}{(x - \alpha)^p} = A \sum_{n=p-1}^{\infty} \binom{n}{p-1} \frac{\alpha^{n-p+1}}{x^{n+1}}, \\ \psi(x) &= \frac{B}{(x - \beta)^q} = B \sum_{n=q-1}^{\infty} \binom{n}{q-1} \frac{\beta^{n-q+1}}{x^{n+1}}; \end{aligned}$$

si ha quindi fuori del cerchio di centro l'origine e raggio $|\alpha + \beta|$:

$$\begin{aligned} f(x) &= AB \sum_{n=p+q-2}^{\infty} \left\{ \binom{n}{q-1} \binom{n-q+1}{p-1} \binom{q-1}{q-1} \alpha^{n-p-q+2} + \right. \\ &+ \binom{n}{q} \binom{n-q}{p-1} \binom{q}{q-1} \alpha^{n-p-q+1} \beta + \binom{n}{q+1} \binom{n-q-1}{p-1} \binom{q+1}{q-1} \alpha^{n-p-q} \beta^2 + \dots + \\ &+ \left. \binom{n}{n-p} \binom{p}{p-1} \binom{n-p}{q-1} \alpha \beta^{n-p-q+1} + \binom{n}{n-p+1} \binom{p-1}{p-1} \binom{n-p+1}{q-1} \beta^{n-p-q+2} \right\} \frac{1}{x^{n+1}} \\ &= AB \sum_{n=p+q-2}^{\infty} \binom{n}{q-1} \binom{n-q+1}{p-1} \frac{(\alpha + \beta)^{n-p-q+2}}{x^{n+1}} \\ &= AB \binom{p+q-2}{p-1} \sum_{n=p+q-2}^{\infty} \binom{n}{p+q-2} \frac{(\alpha + \beta)^{n-p-q+2}}{x^{n+1}}; \end{aligned}$$

si ha quindi

$$(1) \quad f(x) = \binom{p+q-2}{p-1} \frac{AB}{[x - (\alpha + \beta)]^{p+q-1}}.$$

9. Sia ora $x = \alpha$ un punto singolare essenziale isolato della funzione $\varphi(x)$, con la caratteristica

$$g_1 \left(\frac{1}{x - \alpha} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{(x - \alpha)^i},$$

e $x = \beta$ un punto singolare essenziale isolato di $\psi(x)$, con la caratteristica

$$g_2 \left(\frac{1}{x - \beta} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{(x - \beta)^j}.$$

La funzione del teorema di HURWITZ

$$f(x) = B(\varphi, \psi),$$

ottenuta dalle due funzioni date, mediante un'operazione funzionale distributiva B, avrà in $\alpha + \beta$ la stessa singolarità di

$B(g_1, g_2)$ e lo sviluppo, $G \left(\frac{1}{x - (\alpha + \beta)} \right)$, in serie di potenze in $\frac{1}{x - (\alpha + \beta)}$ di $B(g_1, g_2)$ ne sarà la caratteristica.

Potremmo dimostrare, analogamente a quanto abbiamo fatto per l'operazione A al n. 5, che l'operazione B, definita mediante g_1 ed applicata a g_2 , è distributiva tanto rispetto alla serie g_2 , quanto alla serie g_1 , ossia che si ha

$$B(g_1, g_2) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} B \left(\frac{A_i}{(x - \alpha)^i}, \frac{B_j}{(x - \beta)^j} \right).$$

10. Applicando la formola del n. 8, si ha

$$B(g_1, g_2) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \binom{i+j-2}{i-1} \frac{A_i B_j}{[x - (\alpha + \beta)]^{i+j-1}} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{C_l}{[x - (\alpha + \beta)]^l},$$

dove si ricava

$$(1) \quad C_l = \sum_{i=1}^l \binom{l-1}{i-1} A_i B_{l-i+1}.$$

Veniamo in tal modo a calcolare, anche per la funzione di HURWITZ, la caratteristica di una singolarità dipendente da due singolarità essenziali isolate.

Per mezzo di questa stessa formola si può inoltre calcolare la caratteristica di una singolarità dipendente da una singolarità polare e da una singolarità essenziale isolata, o da due singolarità polari.

Dalla formola (1), deduciamo delle conseguenze perfettamente analoghe a quelle dedotte al n. 6:

1°. Se α e β sono singolarità essenziali isolate rispettivamente delle funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, sarà in generale $\alpha + \beta$ singolarità essenziale isolata della funzione $f(x)$.

2°. Se α è un polo della funzione $\varphi(x)$ e β una singolarità essenziale isolata della funzione $\psi(x)$, sarà in generale $\alpha + \beta$ singolarità essenziale isolata della funzione $f(x)$.

3°. Se α è un polo d'ordine p della funzione $\varphi(x)$ e β un polo d'ordine q della funzione $\psi(x)$, sarà in generale $\alpha + \beta$ un polo d'ordine $p + q - 1$ della funzione $f(x)$.

Il coefficiente della potenza $(p + q - 1)^{\text{esima}}$ di $\frac{1}{x - (\alpha + \beta)}$ nello sviluppo della caratteristica della singolarità $\alpha + \beta$ di $f(x)$ è

$$C_{p+q-1} = \binom{p+q-2}{p-1} A_p B_q,$$

certamente diverso da zero, e per $l > p + q - 1$ si ha $C_l = 0$.

4°. In ogni caso il residuo è

$$A_1 B_1,$$

ossia: Il residuo di $f(x)$ nel punto singolare $\alpha + \beta$ è eguale al prodotto dei residui nelle singolarità α e β delle funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$.

II. Vale anche per la funzione di HURWITZ l'osservazione che abbiamo fatta al n. 7 e il teorema che ne abbiamo dedotto.

3. — Generalizzazione del teorema di Hadamard.

12. Oltre alla accennata espressione analitica sotto forma di integrale curvilineo, della funzione del teorema di HADAMARD, ne possiamo dare ancora un'altra sotto forma di integrale curvilineo doppio.

Siano $\varphi(z)$ e $\psi(t)$ le due funzioni regolari rispettivamente nei cerchi di centro l'origine e raggi R ed R' (incluse le circonferenze), rappresentate quivi dagli sviluppi

$$\varphi(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n, \quad \psi(t) = \sum_0^{\infty} b_n t^n;$$

per $|x| < RR'$ l'integrale

$$(1) \quad \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint \frac{\varphi(z) \psi(t) dz dt}{zt - x}$$

preso lungo le circonferenze $|z| = R$ e $|t| = R'$, è sviluppabile in serie di potenze intere e positive di x e rappresenta per conseguenza una funzione olomorfa di x .

Infatti, per $|x| < RR'$, si ha

$$\frac{1}{zt - x} = \frac{1}{zt} + \frac{x}{z^2 t^2} + \frac{x^2}{z^3 t^3} + \dots + \frac{x^n}{z^{n+1} t^{n+1}} + \dots;$$

moltiplicando i termini di questa serie, uniformemente convergente, per $\varphi(z) \psi(t) dz dt$ e integrando termine a termine lungo i contorni $|z| = R$ e $|t| = R'$, dove le funzioni $\varphi(z)$ e $\psi(t)$ sono finite, si ha

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \iint \frac{\varphi(z) \psi(t) dz dt}{zt - x} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \iint \frac{\varphi(z) \psi(t) dz dt}{z^{n+1} t^{n+1}}.$$

Il prodotto $\varphi(z) \psi(t)$ si mette sotto forma di una serie di polinomi omogenei P_k ,

$$\varphi(z) \psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_0 b_k t^k + a_1 b_{k-1} z t^{k-1} + \dots + a_k b_0 z^k),$$

dei gradi $0, 1, 2, \dots$, in z e t , ed essendo

$$\iint \frac{dz dt}{z^\mu t^\nu} = \begin{cases} (2\pi i)^2 & \text{per } \mu = 1 \text{ e } \nu = 1 \\ 0 & \text{in ogni altro caso,} \end{cases}$$

pel calcolo dell'integrale

$$\iint \frac{\varphi(z) \psi(t) dz dt}{z^{n+1} t^{n+1}},$$

basta ritenere soltanto dei polinomi P_k quello di grado $2n$, cioè

$$P_{2n} = a_0 b_{2n} t^{2n} + a_1 b_{2n-1} z t^{2n-1} + \dots + a_n b_n z^n t^n + \dots + a_{2n} b_0 z^{2n};$$

moltiplicando per $dz dt$, dividendo per $z^{n+1} t^{n+1}$ e integrando lungo le circonferenze $|z| = R$ e $|t| = R'$, si ha

$$\iint \frac{\varphi(z) \psi(t) dz dt}{z^{n+1} t^{n+1}} = \iint \frac{P_{2n} dz dt}{z^{n+1} t^{n+1}} = (2\pi i)^2 a_n b_n;$$

quindi per $|x| < RR'$ l'integrale (1) si sviluppa nella serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n.$$

13. Notiamo ancora che se una delle funzioni date è regolare nell'intorno dell'origine e rappresentata ivi, in un cerchio di raggio R , dalla serie

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

e l'altra funzione data è regolare nell'interno del punto all'infinito e rappresentata ivi, all'esterno di un cerchio di centro l'origine e raggio R' , dalla serie

$$\psi(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \dots;$$

la serie

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 x + a_2 b_2 x^2 + \dots$$

ha il suo cerchio di convergenza di raggio almeno eguale ad $\frac{R}{R'}$, e rappresenta ivi una funzione $f(x)$, la quale ha (e ciò in tutto il piano) per soli punti singolari possibili quelli che si ottengono dividendo le affisse dei diversi punti singolari di $\varphi(x)$ per quelle dei diversi punti singolari di $\psi(x)$.

Ciò si deduce immediatamente dal teorema di HADAMARD con un semplice cambiamento della variabile x della seconda funzione, in $\frac{1}{x}$. Inoltre siccome questa trasformazione, come facilmente si può mostrare, non altera la natura dei punti singolari, si possono dedurre anche per la funzione $f(x)$ le conseguenze che abbiamo tratte al n. 6.

14. Ciò posto, siano

$$\varphi_1(z_1), \varphi_2(z_2), \dots, \varphi_p(z_p)$$

p funzioni delle variabili z_1, z_2, \dots, z_p , regolari nell'intorno dell'origine, e rappresentate ivi, nei cerchi di raggi rispettivamente R_1, R_2, \dots, R_p , dalle serie

$$\sum_0^{\infty} a_{1n} z_1^n, \sum_0^{\infty} a_{2n} z_2^n, \dots, \sum_0^{\infty} a_{pn} z_p^n;$$

siano poi

$$\psi_1(t_1), \psi_2(t_2), \dots, \psi_q(t_q)$$

q funzioni delle variabili t_1, t_2, \dots, t_q , regolari all'infinito, e rappresentate fuori dei cerchi di centro l'origine e raggi rispettivamente R'_1, R'_2, \dots, R'_q , dalle serie

$$\sum_0^{\infty} \frac{b_{1n}}{t_1^n}, \sum_0^{\infty} \frac{b_{2n}}{t_2^n}, \dots, \sum_0^{\infty} \frac{b_{qn}}{t_q^n};$$

posto

$$t_1 = \frac{1}{x_1}, t_2 = \frac{1}{x_2}, \dots, t_q = \frac{1}{x_q},$$

la funzione rappresentata dall'integrale

$$\frac{1}{(2\pi i)^{p+q}} \int_{(p+q)} \frac{\varphi_1(z_1) \varphi_2(z_2) \dots \varphi_p(z_p) \psi_1\left(\frac{1}{x_1}\right) \psi_2\left(\frac{1}{x_2}\right) \dots \psi_q\left(\frac{1}{x_q}\right) dz_1 dz_2 \dots dz_p dx_1 dx_2 \dots dx_q}{z_1 z_2 \dots z_p x_1 x_2 \dots x_q - x},$$

esteso lungo le circonferenze $|z_1| = R_1, |z_2| = R_2, \dots, |z_p| = R_p, |x_1| = \frac{1}{R'_1},$

$|x_2| = \frac{1}{R'_2}, \dots, |x_q| = \frac{1}{R'_q}$, e che è rappresentata dalla serie

$$\sum_0^{\infty} a_{1n} a_{2n} \dots a_{pn} b_{1n} b_{2n} \dots b_{qn} x^n$$

nel cerchio di centro l'origine e raggio almeno eguale a

$$\frac{R_1 R_2 \dots R_p}{R'_1 R'_2 \dots R'_q},$$

ha per soli punti singolari possibili, in tutto il piano, i punti della forma

$$\omega = \frac{\alpha_{11} \alpha_{2j} \dots \alpha_{pk}}{\beta_{1r} \beta_{2s} \dots \beta_{qt}},$$

dove α_{1j} rappresenta genericamente un punto singolare di $\varphi_1(z_1)$, ed analogo significato hanno $\alpha_{2j}, \dots, \beta_{1r}, \dots$, e siamo al grado di potere determinare la natura di ogni punto singolare ω , dipendente da singolarità α e β isolate.

15. Più generalmente, se

$$P(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{pn}, b_{1n}, b_{2n}, \dots, b_{qn})$$

è un polinomio in $a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{pn}, b_{1n}, b_{2n}, \dots, b_{qn}$, a coefficienti costanti, la funzione rappresentata in un certo intorno dell'origine dalla serie

$$F(x) = \sum_0^{\infty} P(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{pn}, b_{1n}, b_{2n}, \dots, b_{qn}) x^n$$

ha punti singolari che possiamo calcolare facilmente, conoscendo quelli delle funzioni φ e ψ , e ne possiamo determinare la natura nel caso che la singolarità considerata dipenda da singolarità isolate.

In particolare $F(x)$ sarà meromorfa, qualora lo siano le funzioni φ e le funzioni ψ .

4. — Sul metodo di HADAMARD per calcolare i moduli dei poli successivi di una funzione meromorfa.

16. Nel teorema di HADAMARD abbandoniamo una delle due funzioni date e adoperiamo invece più variabili indipendenti; una più generale ed opportuna legge di combinazione dei coefficienti dell'unica serie

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

conduce al metodo di HADAMARD per calcolare i moduli dei poli successivi di una funzione meromorfa.

Supponiamo, dunque, che la funzione precedente sia rappresentata dallo stesso sviluppo nei p piani delle variabili complesse

$$z_1, z_2, \dots, z_p,$$

e che sia olomorfa in ciascun piano nei cerchi di raggio comune

$$|z_1| = r,$$

e centro le origini.

Poniamo

$$D_{n,p} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \dots & a_{n+p-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{n+p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+p-1} & a_{n+p} & \dots & a_{n+2p-2} \end{vmatrix}.$$

La serie di potenze

$$f(x) = D_{0,p} + D_{1,p}x + D_{2,p}x^2 + \dots + D_{n,p}x^n + \dots$$

definisce una funzione ologomorfa rispetto alla variabile x , nel cerchio di centro l'origine e raggio

$$|x| = r^p.$$

Consideriamo l'integrale multiplo

$$I = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{(p)} \frac{\Delta^2 \varphi(z_1) \varphi(z_2) \dots \varphi(z_p)}{z_1 z_2 \dots z_p - x} dz_1 dz_2 \dots dz_p,$$

esteso lungo le circonferenze dei cerchi di raggio r nei piani z_1, z_2, \dots, z_p . In esso, Δ denota il determinante di Cauchy formato colle inverse delle z_1, z_2, \dots, z_p , ossia è

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{z_1} & \frac{1}{z_1^2} & \dots & \frac{1}{z_1^{p-1}} \\ 1 & \frac{1}{z_2} & \frac{1}{z_2^2} & \dots & \frac{1}{z_2^{p-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \frac{1}{z_p} & \frac{1}{z_p^2} & \dots & \frac{1}{z_p^{p-1}} \end{vmatrix}.$$

La funzione di x , definita dall'integrale I , all'interno del cerchio di raggio r^p , coincide, a parte un fattore costante, precisamente con la funzione $f(x)$.

Infatti, all'interno di detto cerchio, si ha

$$\frac{1}{z_1 z_2 \dots z_p - x} = \frac{1}{z_1 z_2 \dots z_p} + \frac{x}{z_1^2 z_2^2 \dots z_p^2} + \frac{x^2}{z_1^3 z_2^3 \dots z_p^3} + \dots$$

col secondo membro uniformemente convergente, sempre che sia

$$|z_i| \leq r.$$

Segue pertanto

$$I = \frac{1}{(2\pi i)^p} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_{(p)} \frac{\Delta^2 \varphi(z_1) \varphi(z_2) \dots \varphi(z_p)}{z_1^{n+1} z_2^{n+1} \dots z_p^{n+1}} dz_1 dz_2 \dots dz_p.$$

Al calcolo dell'integrale a secondo membro si può procedere nel seguente modo:

Il prodotto delle serie (con $|z_i| < r$)

$$\begin{aligned} \varphi(z_1) &= a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_1^2 + \dots \\ \varphi(z_2) &= a_0 + a_1 z_2 + a_2 z_2^2 + \dots \\ &\dots \\ \varphi(z_p) &= a_0 + a_1 z_p + a_2 z_p^2 + \dots \end{aligned}$$

si mette sotto la forma di una serie di polinomi omogenei P_k ,

$$\varphi(z_1) \varphi(z_2) \dots \varphi(z_p) = \sum_0^{\infty} P_k,$$

dei gradi $0, 1, 2, \dots$, in z_1, z_2, \dots, z_p , e si osservi che, essendo

$$\int_{(p)} \frac{dz_1 dz_2 \dots dz_p}{z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_p^{k_p}} = \begin{cases} (2\pi i)^p & \text{per } k_1 = k_2 = \dots = k_p = 1 \\ 0 & \text{in ogni altro caso,} \end{cases}$$

e Δ^3 un polinomio omogeneo del grado $p(p-1)$ nelle variabili $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \dots, \frac{1}{z_p}$, dei polinomi P_k , pel calcolo dell'integrale, basta ritenere soltanto quello di grado

$$np + p(p-1).$$

Intanto si ha

$$P_{np+p(p-1)} = \sum_{\alpha} a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \dots a_{\alpha_p} z_{i_1}^{\alpha_1} z_{i_2}^{\alpha_2} \dots z_{i_p}^{\alpha_p},$$

dove $i_1 i_2 \dots i_p$ è una permutazione qualunque degli elementi $1 2 \dots p$, e la sommatoria va estesa a tutte le soluzioni intere e positive dell'equazione

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = np + p(p-1);$$

ed inoltre

$$\frac{\Delta^3}{z_1^{n+1} z_2^{n+1} \dots z_p^{n+1}} = \sum_{i, r} (-1)^r \frac{1}{z_{i_1}^{r_1+n} z_{i_2}^{r_2+n+1} \dots z_{i_p}^{r_p+n+p-1}},$$

dove $i_1 i_2 \dots i_p, v_1 v_2 \dots v_p$ sono permutazioni degli elementi $1 2 \dots p$ e la sommatoria va estesa a tutte queste permutazioni, r poi è il numero delle inversioni della permutazione $v_1 v_2 \dots v_p$.

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{(p)} \frac{\Delta^3 \varphi(z_1) \varphi(z_2) \dots \varphi(z_p)}{z_1^{n+1} z_2^{n+1} \dots z_p^{n+1}} dz_1 dz_2 \dots dz_p &= \int_{(p)} \frac{\Delta^3 P_{np+p(p-1)}}{z_1^{n+1} z_2^{n+1} \dots z_p^{n+1}} dz_1 dz_2 \dots dz_p \\ &= \sum_1 \int_{(p)} \sum_{\alpha, r} a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \dots a_{\alpha_p} z_{i_1}^{\alpha_1-r_1-n} z_{i_2}^{\alpha_2-r_2-n-1} \dots z_{i_p}^{\alpha_p-r_p-n-p+1} dz_{i_1} dz_{i_2} \dots dz_{i_p}; \end{aligned}$$

i termini non nulli dell'integrale sono quelli corrispondenti ai valori

$$\alpha_1 = v_1 + n - 1, \alpha_2 = v_2 + n, \dots, \alpha_p = v_p + n + p - 2;$$

quindi si ha

$$\begin{aligned} \int_{(p)} \frac{\Delta^3 \varphi(z_1) \varphi(z_2) \dots \varphi(z_p)}{z_1^{n+1} z_2^{n+1} \dots z_p^{n+1}} dz_1 dz_2 \dots dz_p &= \\ &= \sum_1 (2\pi i)^p \sum_r (-1)^r a_{v_1+n-1} a_{v_2+n} \dots a_{v_p+n+p-2} = \\ &= p! (2\pi i)^p D_{n,p}. \end{aligned}$$

Per conseguenza la serie $f(x)$ definisce nel cerchio di centro l'origine e raggio r^p una funzione olomorfa della variabile x .

17. Cio posto, chiamiamo in generale con l_p il limite superiore di

$$\left| \sqrt[n]{D_{n, P}} \right|,$$

per $n = \infty$.

Se r è il raggio di convergenza della serie $\varphi(x)$, meromorfa in tutto il piano, l'intero $P = p$ per cui il rapporto

$$r' = \frac{l_{p-1}}{l_p} > r,$$

dà il numero dei poli di $\varphi(x)$ situati sulla circonferenza (r) , e, tranne che in questi punti, la φ è regolare dentro (r') . (*)

E così, se per $P = q$, si ha

$$r'' = \frac{l_{q-1}}{l_q} > r',$$

la funzione $\varphi(x)$ ha p poli su (r) , $q - p$ su (r') e, tranne che in questi punti, è regolare dentro (r'') . E così di seguito. Di modo che i rapporti

$$\frac{l_{p-1}}{l_p}, \frac{l_{q-1}}{l_q}, \dots$$

danno i moduli r, r', \dots dei poli successivi della funzione $\varphi(x)$ meromorfa in tutto il piano. Di qui l'importanza della considerazione della serie $f(x)$.

E. LUGARO.

SULLE EVOLVENTI SUCCESSIVE DI UN CERCHIO

1. In due lavori pubblicati anni sono in questo giornale (***) si è fatto vedere come, in qualche caso, sia possibile con metodo elementare, e tutto al più applicando qualcuno dei principali teoremi sui limiti, studiare qualche linea piana o a doppia curvatura anche da chi non abbia ancora familiare il metodo infinitesimale.

Una nuova conferma si avrà colla presente nota, dove vengono studiate le evolventi successive di un cerchio che hanno origine da uno stesso punto di questo (*evolventi principali*).

Se, dopo di avere avvolto a una curva piana qualunque l_1 un filo flessibile ed inestendibile, lo si svolge gradatamente in modo che la parte che via via abbandona la curva si tenda in linea retta e la parte re-

(*) Cf. HADAMARD, *Essai sur l'étude des fonction*, ecc.

(**) *Alcune proprietà della sviluppante di cerchio*, 1897 — *Proiezione stereografica e sua applicazione allo studio delle linee sferiche*, 1899.

stante si conservi aderente alla curva, ogni punto del filo descrive una curva l , che si chiama *evolvente* di l_1 . La linea l_1 si dice *evoluta* di l , e può riguardarsi come l'involuppo delle normali di l .

Ne segue che una curva piana ha infinite evolventi ed una sola evoluta. Il punto comune alla curva l_1 e alla sua evolvente l è l'*origine* dell'evolvente.

Indicando con A, A_1 due punti corrispondenti di l, l_1 , il punto A_1 e il segmento A_1A si dicono rispettivamente *centro di curvatura* e *raggio di curvatura* di l .

L'evoluta dell'evoluta di una linea si dice *evoluta seconda*; l'evoluta dell'evoluta seconda *evoluta terza* ecc.

Analogamente da una linea si possono ricavare le successive evolventi.

Queste, nel caso in cui abbiano origine da uno stesso punto della curva data, si dicono *evolventi principali*.

Indicando con ρ ed s il raggio di curvatura e l'arco di l , con ρ_1 e s_1 il raggio di curvatura e l'arco di l_1 , e supponendo di contare questi archi s, s_1 dall'origine dell'evolvente, il modo stesso con cui da l_1 si genera l , suggerisce immediatamente la formola:

$$(1) \quad s_1 = \rho.$$

Siano (A, B) due punti vicinissimi di l e $(A_1, B_1), (A_2, B_2)$ i punti corrispondenti sulle evolte prima e seconda l_1 e l_2 . L'arco AB di l si può allora considerare come un arco circolare di centro A_1 e di raggio ρ , e l'arco A_1B_1 di l_1 come un arco circolare di centro A_2 e di raggio ρ_1 .

Indicando con σ l'aumento piccolissimo che subisce l'arco s nel passaggio dal punto A al punto B , con τ l'aumento corrispondente del raggio di curvatura ρ e con ε l'angolo infinitamente piccolo delle rette AA_1, BB_1 (o delle altre A_1A_2, B_1B_2 perpendicolari alle prime), si ha:

$$\sigma = \text{arco } AB = \rho \cdot \varepsilon, \quad \tau = \text{arco } A_1B_1 = \rho_1 \cdot \varepsilon,$$

da cui risulta la formola:

$$(2) \quad \rho_1 = \rho \cdot \left(\frac{\tau}{\sigma} \right),$$

nella quale (giova ripeterlo esplicitamente) gli aumenti σ, τ dell'arco s e del raggio di curvatura ρ si debbono intendere *infinitamente piccoli*.

Si consideri ora una linea piana l in cui il raggio di curvatura è legato all'arco dalla relazione:

$$(3) \quad \rho = hs^m,$$

dove h ed m sono costanti.

Si dia all'arco s un aumento qualunque s_0 e sia ρ_0 il corrispondente aumento di ρ . Applicando allora lo sviluppo del binomio di *Newton* (valido, come è noto, per qualsiasi valore dell'esponente), si ottiene:

$$\begin{aligned} \rho + \rho_0 &= h(s + s_0)^m = \\ &= h \left\{ s^m + ms^{m-1} \cdot s_0 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} s^{m-2} \cdot s_0^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} s^{m-3} \cdot s_0^3 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Ricavandosi da questa:

$$\frac{\rho_0}{s_0} = mhs^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} hs^{m-2} \cdot s_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} hs^{m-3} \cdot s_0^2 + \dots,$$

se si fa tendere s_0 a zero e si nota che, al limite, il rapporto $\frac{\rho_0}{s_0}$ si riduce all'altro $\frac{\tau}{\sigma}$, si ottiene:

$$(4) \quad \frac{\tau}{\sigma} = mh \cdot s^{m-1}.$$

Tenendo conto delle relazioni (3), (4), le (1), (2) divengono:

$$s_1 = hs^{2m}, \quad \rho_1 = mh^2 \cdot s^{3m-1}$$

e da queste, eliminando s , si deduce il teorema:

Se fra il raggio di curvatura e l'arco di una linea piana l ha luogo la relazione (3), fra il raggio di curvatura e l'arco della sua evoluta l_1 ha luogo l'altra relazione:

$$(5) \quad \rho_1 = mh^{\frac{1}{m}} \cdot s_1^{\frac{3m-1}{m}}.$$

Ora l'equazione (5) è della stessa forma della (3); applicando quindi il teorema ora dimostrato, si deduce che fra il raggio di curvatura ρ_2 e l'arco s_2 della seconda evoluta l_2 ha luogo la relazione:

$$\rho_2 = (2m - 1) \cdot m^{\frac{1-m}{2m-1}} \cdot h^{\frac{1}{2m-1}} \cdot s_2^{\frac{3m-2}{2m-1}}.$$

Analogamente si trova:

$$\rho_3 = (3m - 2)(2m - 1)^{\frac{1-m}{3m-2}} \cdot m^{\frac{1-m}{3m-2}} \cdot h^{\frac{1}{3m-2}} \cdot s_3^{\frac{4m-3}{3m-2}}, \quad \text{ecc.}$$

Procedendo in modo simile, si giunge al teorema:

Se per una linea piana l ha luogo la relazione (3), per la sua evoluta $n^{\text{ma}} l_n$ ha luogo la relazione:

$$(6) \quad \rho_n = A_n \cdot s_n^{\frac{m+(m-1)n}{1+(m-1)n}},$$

dove A_n è la costante definita dall'equazione: (*)

$$(7) \quad A_n = \{1 + (m-1)n\} \cdot \left\{ \prod_{i=1}^{i=n-1} [1 + (m-1)i] \right\}^{\frac{1-m}{1+(m-1)n}} \cdot h^{\frac{1}{1+(m-1)n}}.$$

La condizione necessaria e sufficiente perchè la linea (6) sia un cerchio di raggio r è che risulti $\rho_n = r$, il che avviene per

$$m = \frac{n}{n+1}.$$

(*) Il simbolo $\prod_{i=1}^{i=k} f(i)$, applicato a una funzione $f(i)$ di i , equivale al prodotto dei k fattori che si deducono dalla funzione $f(i)$ attribuendo ad i i valori successivi $1, 2, 3, \dots, k-1, k$.

La (7) si riduce allora all'altra:

$$r = \frac{n!}{(n+1)^n} \cdot h^{n+1},$$

dalla quale si deduce:

$$h = \left[\frac{(n+1)^n}{n!} \cdot r \right]^{\frac{1}{n+1}}.$$

Questo cerchio L_n assumiamolo come linea primitiva L ; allora la curva l è evidentemente la sviluppante n^{ma} di tale cerchio, e perciò la indicheremo con L_n .

Si ha dunque il teorema:

Se si costruisce la serie infinita delle evolventi di un cerchio (di raggio r) aventi l'origine nello stesso punto, la n^{ma} evolvente L_n è definita per mezzo dell'equazione:

$$(8) \quad \rho_n = \left[\frac{(n+1)^n}{n!} r \right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot s_n^{\frac{n}{n+1}}.$$

2. L'equazione (8), cambiando n in $n-1$, dà:

$$\rho_{n-1} = \left[\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} r \right]^{\frac{1}{n}} \cdot s_{n-1}^{\frac{n}{n+1}};$$

e siccome $s_{n-1} = \rho_n$, si deduce:

I raggi di curvatura corrispondenti ρ_n , ρ_{n-1} di due evolventi principali consecutive L_n , L_{n-1} di un cerchio, sono legati dalla relazione:

$$(9) \quad \frac{\rho_n^{n-1}}{\rho_{n-1}^n} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \cdot \frac{1}{r}.$$

Se si considerano le evolventi principali consecutive

$$L_1, L_2, L_3, \dots, L_{n-1}, L_n$$

d'un cerchio, si ha in conseguenza dell'equazione (9):

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\rho_n^{n-1}}{\rho_{n-1}^n} = \frac{(n-1)!}{r \cdot n^{n-1}}; & \frac{\rho_{n-1}^{n-2}}{\rho_{n-2}^{n-1}} = \frac{(n-2)!}{r \cdot (n-1)^{n-2}}; \dots \\ \dots \frac{\rho_3^2}{\rho_2^3} = \frac{2!}{r \cdot 3^2}; & \frac{\rho_2}{\rho_1^2} = \frac{1}{r \cdot 2}. \end{cases}$$

Se fra queste ultime equazioni eliminiamo $\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_{n-2}, \rho_{n-1}$, si trova che: *Il raggio di curvatura ρ_n della n^{ma} evolvente e il raggio di curvatura ρ_1 della prima evolvente d'un cerchio, sono legati dalla relazione:*

$$(11) \quad \rho_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\rho_1^n}{r^{n-1}}.$$

L'equazione (11) dà:

$$\rho_1^{nm} = (n! r^{n-1})^m \cdot \rho_n^m = (m! r^{m-1})^n \cdot \rho_m^n.$$

Conseguentemente: *I raggi di curvatura corrispondenti* ρ_n, ρ_m *di due evolventi principali arbitrarie* L_n, L_m *di un cerchio, verificano la relazione:*

$$(12) \quad \frac{\rho_n^m}{\rho_m^n} = \frac{(m!)^n}{(n!)^m} \cdot r^{m-n}.$$

Siccome $\rho_n = s_{n-1}, \rho_m = s_{m-1}$, l'equazione (12) dà:

$$\frac{s_{n-1}^m}{s_{m-1}^n} = \frac{(m!)^n}{(n!)^m} \cdot r^{m-n}.$$

Se quindi si cambia m ed n rispettivamente in $m+1$ ed $n+1$, si ottiene:

Gli archi corrispondenti s_n, s_m *di due evolventi principali arbitrarie* L_n, L_m *di un cerchio, verificano la relazione:*

$$(13) \quad \frac{s_n^{m+1}}{s_m^{n+1}} = \frac{[(m+1)!]^{n+1}}{[(n+1)!]^{m+1}} \cdot r^{m-n}.$$

La linea L_n (8), la sua evoluta L_{n-1} e il raggio di curvatura ρ_n in un punto qualsiasi, formano una figura chiusa, della quale ci proponiamo di valutare l'area S_n .

Considerando per maggior generalità la curva (3), l'area S precedentemente definita è una certa funzione dell'arco s della curva.

Fissato per s un valore qualunque, se all'arco si dà un aumento piccolissimo σ , l'area S subisce pure un aumento piccolissimo Σ , che si può considerare rappresentato da un settore appartenente a un cerchio di raggio ρ e avente il centro nel centro di curvatura. Avremo quindi:

$$\Sigma = \frac{1}{2} \rho^2 \cdot \sigma = \frac{1}{2} h^2 s^{2m} \cdot \sigma,$$

d'onde:

$$(14) \quad \frac{\Sigma}{\sigma} = \frac{1}{2} h^2 \cdot s^{2m}.$$

Ora si è dimostrato precedentemente che, avendo la funzione $\rho = h s^m$ di s , il rapporto $\frac{\Sigma}{\sigma}$ dell'aumento di ρ all'aumento di s *al limite* è *proporzionale* alla potenza $(m-1)^{ma}$ dell'arco. Tale osservazione, applicata alla (14), *dimostra* che deve essere:

$$(15) \quad S = k \cdot s^{2m+1},$$

essendo k una costante conveniente.

Applicando alla (15) la relazione (4), si deduce che il rapporto degli aumenti infinitamente piccoli Σ, σ dell'area S e dell'arco s è espresso dall'equazione:

$$\frac{\Sigma}{\sigma} = k(2m+1) \cdot s^{2m},$$

la quale, confrontata colla (14), dà:

$$k(2m+1) = \frac{1}{2} h^2,$$

d'onde:

$$k = \frac{1}{2} h^2 \cdot \frac{1}{2m+1}.$$

Con tal valore di k , la (15) diviene:

$$(16) \quad S = \frac{1}{2} h^2 \cdot \frac{s^{2m+1}}{2m+1},$$

la quale esprime l'area precedentemente definita, relativa alla curva (3), supposto che essa si conti partendo dalla stessa origine da cui s'incomincia a contare l'arco s .

Adattando la formola (16) al caso particolare della curva (8), si ha il teorema:

L'area S_n compresa fra l'evolvente n^{ma} L_n del cerchio, l'evolvente

$$(n-1)^{\text{ma}} L_{n-1}$$

(evoluta di L_n) e il raggio di curvatura ρ_n in un punto qualsiasi, è data dalla formola:

$$(17) \quad S_n = \frac{1}{2(2n+1)} \cdot \left[\frac{(n+1)^{2n+1}}{n!} \cdot r \right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot s_n^{\frac{2n+1}{n+1}}.$$

Da quest'equazione, ricorrendo alla relazione (13), si deduce:

Se L_n , L_m sono due evolventi arbitrarie di un cerchio, cominciati dalla stessa origine, le aree S_n , S_m sono legate fra loro dalla relazione:

$$(18) \quad \frac{S_n^{2m+1}}{S_m^{2n+1}} = \frac{[2(2m+1)]^{2n+1} (m!)^{2(2n+1)}}{[2(2n+1)]^{2m+1} (n!)^{2(2m+1)}} \cdot r^{4(m-n)}.$$

3. Se si moltiplicano membro a membro le equazioni (10), si ha il teorema:

I raggi di curvatura corrispondenti

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_{n-1}, \rho_n$$

delle evolventi consecutive $L_1, L_2, L_3, \dots, L_{n-1}, L_n$ di un cerchio, cominciati dalla stessa origine, sono legati fra loro dalla relazione:

$$(19) \quad \frac{\rho_1^2 \rho_2^2 \rho_3^2 \dots \rho_{n-2}^2 \rho_{n-1}^2}{\rho_n^{n-1}} = \frac{2^1 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \dots (n-1)^{n-2} \cdot n^{n-1}}{1! 2! 3! \dots (n-2)! (n-1)!} \cdot r^{n-1} = \text{costante}$$

Se si nota che

$$(20) \quad \rho_k = s_{k-1}$$

l'equazione (19), colla sostituzione di $n+1$ ad n , dà:

$$\frac{s^2 \cdot s_1^2 \cdot s_2^2 \dots s_{n-2}^2 \cdot s_{n-1}^2}{s_n^n} = \frac{2^1 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \dots n^{n-1} \cdot (n+1)^n}{1! 2! 3! \dots (n-1)! n!} \cdot r^n = \text{costante}.$$

Questa è una notevole relazione fra l'arco s del cerchio dato L e gli archi $s_1, s_2, s_3, \dots, s_{n-1}, s_n$ delle sue successive evolventi principali

$$L_1, L_2, L_3, \dots, L_{n-1}, L_n.$$

Nell'equazione (18) facciamo $m = n - 1$; poscia, nell'equazione ottenuta, cambiamo successivamente n in $n - 1, n - 2, \dots, 4, 3, 2$; finalmente moltiplichiamo fra loro tutte le equazioni ottenute.

Si ottiene così la relazione notevole:

$$\begin{aligned} & \frac{S_1^4 S_2^4 S_3^4 \dots S_{n-2}^4 S_{n-1}^4}{S_n^{2n-1}} S_1 = \\ & = \frac{5^3 \cdot 7^5 \cdot 9^7 \dots (2n-1)^{2n-3} (2n+1)^{2n-1} [2^3 \cdot 3^5 \cdot 4^7 \dots (n-1)^{2n-3} n^{2n-1}]^2}{3^5 \cdot 5^7 \cdot 7^9 \dots (2n-3)^{2n-1} (2n-1)^{2n+1} [1! 2! 3! \dots (n-2)! (n-1)!]^4} r^{4(n-1)} = \\ & = \text{costante.} \end{aligned}$$

Nella (19) si cambi successivamente n in $n-1, n-2, \dots, 3, 2$ e si moltiplichino poi fra loro l'equazione (19) e le equazioni ottenute.

Si giunge così al teorema:

I raggi di curvatura corrispondenti $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_{n-1}, \rho_n$ delle evolventi successive $L_1, L_2, L_3, \dots, L_{n-1}, L_n$ di un cerchio, cominciati dalla stessa origine, verificano la seguente relazione:

$$\frac{\prod_{i=1}^{i=n-1} [\rho_i^{2(n-i)}]}{\prod_{i=2}^{i=n} [\rho_i^{i-1}]} = \frac{\prod_{i=2}^{i=n} [(i-1)^{(n-i+1)}]}{\prod_{i=1}^{i=n-1} [(i!)^{n-i}]} \cdot r^{\frac{n(n-1)}{2}} = \text{costante.}$$

Considerando la relazione (20), l'ultimo teorema si trasforma nell'altro:

Gli archi corrispondenti $s, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n$ del cerchio L e delle sue evolventi consecutive $L_1, L_2, L_3, \dots, L_{n-1}, L_n$, che cominciano dalla stessa origine, sono legati fra loro dalla relazione:

$$\frac{\prod_{i=0}^{i=n-1} [s_i^{2(n-i)}]}{\prod_{i=1}^{i=n} [s_i^i]} = \frac{\prod_{i=1}^{i=n} [(i+1)^{(n+1-i)}]}{\prod_{i=1}^{i=n-1} [(i!)^{n+1-i}]} \cdot r^{\frac{n(n+1)}{2}} = \text{costante.}$$

Introduciamo la condizione (20) nell'equazione (11) e applichiamo poscia l'equazione (17). Si ottiene così il teorema:

Se L_n è la n^{ma} evolvente principale di un cerchio L , le quantità ρ_n, s_n, S_n sono legate all'arco s del cerchio L mediante le relazioni seguenti:

$$(21) \quad \begin{cases} \rho_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{s^n}{r^{n-1}}; & s_n = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{s^{n+1}}{r^n}; \\ S_n = \frac{1}{2(n+1)(n!)^2} \cdot \frac{s^{2n+1}}{r^{\frac{2n^2+n-1}{2}}}. \end{cases}$$

Se quindi s', s'' sono due speciali valori dell'arco s del cerchio L , e

(ρ_n', ρ_n'') , (s_n', s_n'') , (S_n', S_n'') i valori corrispondenti delle altre grandezze ρ_n , s_n , S_n , si ha:

$$\left(\frac{\rho_n'}{\rho_n''}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{s_n'}{s_n''}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(\frac{S_n'}{S_n''}\right)^{\frac{1}{2n+1}} = \frac{s'}{s''}.$$

Conseguentemente:

Se gli archi s' , s'' , s''' , ... del cerchio L sono in progressione geometrica, avviene il medesimo per le quantità corrispondenti $(\rho_n', \rho_n'', \rho_n''', \dots)$, $(s_n', s_n'', s_n''', \dots)$, $(S_n', S_n'', S_n''', \dots)$ relative a un'evolvente principale arbitraria L_n .

Dalle equazioni (21) si ricava la notevole conseguenza:

Le quantità S_n , ρ_n , s_n verificano la relazione:

$$\frac{S_n'}{S_n''} = \frac{\rho_n' \cdot s_n'}{\rho_n'' \cdot s_n''}.$$

4. Il centro O del cerchio L , un punto qualunque A del medesimo e il punto corrispondente A_1 della sua prima evolvente sono manifestamente i vertici di un triangolo rettangolo.

Indicando quindi con R_1 il raggio vettore OA_1 , si ha la relazione:

$$(22) \quad R_1^2 = \rho_1^2 + r^2.$$

Si vedrà ora che una relazione analoga sussiste per la seconda sviluppante di cerchio.

Infatti se A , A_1 , A_2 sono tre punti corrispondenti del cerchio L e delle due evolventi successive L_1 , L_2 , indicando con B il punto dove A_1A_2 è segata dalla retta condotta da O parallelamente ad AA_1 e con R_2 il raggio vettore OA_2 , si ha:

$$R_2^2 = \overline{OA_2}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{A_2B}^2 = \overline{AA_1}^2 + (A_1A_2 - OA)^2 = \rho_1^2 + (\rho_2 - r)^2 = \rho_2^2 + r^2 + (\rho_1^2 - 2r\rho_2).$$

Ma dalla (11) si deduce:

$$\rho_2 = \frac{\rho_1^2}{2r}, \quad (23)$$

e quindi:

$$\rho_1^2 - 2r\rho_2 = 0.$$

Avremo dunque la formola:

$$R_2^2 = \rho_2^2 + r^2, \quad (24)$$

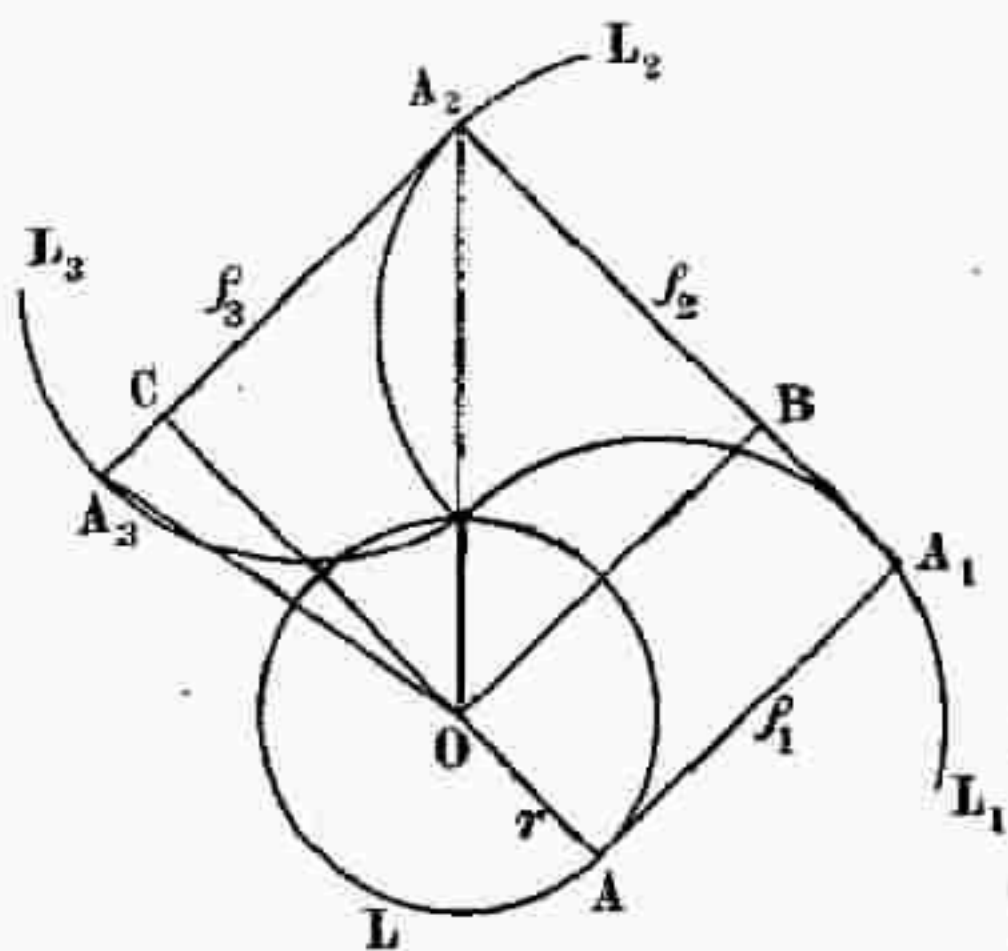
perfettamente analoga alla (22).

Nella dimostrazione fatta vi è implicitamente l'ipotesi che A_1A_2 sia maggiore di r , e che quindi B cada fra A_1 e A_2 .

Quando $A_1A_2 < r$, il punto B cade fuori del segmento A_1A_2 e allora si ha:

$$R_2^2 = \overline{OA_2}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{A_2B}^2 = \overline{AA_1}^2 + (A_1B - A_1A_2)^2 = \rho_1^2 + (r - \rho_2)^2,$$

relazione che conduce evidentemente alla (24).



Qualora poi sia $A_1A_2 = r$, la figura OAA_1A_2 è un rettangolo e quindi risulta:

$$R_2^2 = \overline{OA_2}^2 = \overline{AA_1}^2 = \rho_1^2 = 2r\rho_2 = 2r^2 = \rho_2^2 + r^2.$$

Si può quindi dire:

Nella seconda sviluppante principale del cerchio fra il raggio vettore R_2 e il raggio di curvatura ρ_2 sussiste la relazione (24).

Dal fatto che nella prima e nella seconda sviluppante del cerchio il raggio vettore è legato al raggio di curvatura rispettivamente dalla relazione (22) e (24) di forma identica, si potrebbe essere indotti a credere che una tale proprietà si verificasse per qualsiasi sviluppante principale del cerchio.

Ma, col sussidio del calcolo infinitesimale, si dimostra che:

Nella famiglia di linee piane definita dall'equazione (3), le due prime sviluppani principali del cerchio sono le uniche che godano della proprietà dimostrata.

Non potendo noi entrare in tale dimostrazione senza varcare i limiti che ci siamo imposti, considereremo direttamente la terza sviluppante principale di cerchio.

Essendo A, A_1, A_2, A_3 (figura precedente) punti corrispondenti del cerchio L e delle sue tre prime sviluppani principali L_1, L_2, L_3 , si congiunga A col centro O del cerchio, e si prolunghi il raggio OA fino che tagli il raggio di curvatura $A_2A_3 = \rho_3$.

Detto C questo punto d'incontro e R_3 il raggio vettore OA_3 , si ha:

$$\begin{aligned} R_3^2 &= \overline{OA_3}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CA_3}^2 = (AC - OA)^2 + (A_2A_3 - A_3C)^2 = \\ &= (\rho_2 - r)^2 + (\rho_3 - \rho_1)^2 = \rho_2^2 + r^2 + \rho_1^2 - 2r\rho_2 + (\rho_3^2 - 2\rho_1\rho_3). \end{aligned}$$

Ma, come si è visto,

$$\rho_1^2 - 2r\rho_2 = 0;$$

e d'altronde, essendo per la (11):

$$\rho_2 = \frac{\rho_1^2}{2r}, \quad \rho_3 = \frac{\rho_1^3}{r^2},$$

risulta:

$$\rho_2^2 - 2\rho_1\rho_3 = -\frac{\rho_1^4}{4r^2}.$$

Si trova quindi che fra R_3 e ρ_3 sussiste la relazione:

$$R_3^2 = \rho_3^2 + r^2 - \frac{1}{4r^2} \rho_1^4,$$

che è di forma diversa dalle (22), (24).

Le equazioni (22), (24) dimostrano che

Se si segano la prima e la seconda sviluppante L_1, L_2 di cerchio, con un cerchio arbitrario concentrico al cerchio L , i raggi di curvatura ρ_1, ρ_2 nei due punti d'intersezione sono fra loro uguali.

Se fra le equazioni (22), (23) e (24) si eliminano le quantità ρ_1, ρ_2 , si ha:

I raggi vettori corrispondenti R_1, R_2 relativi alla prima e alla seconda sviluppante di cerchio sono legati fra loro dalla relazione:

$$R_2 = \frac{\sqrt{R_1^4 - 2r^2 R_1^2 + 5r^4}}{2r}$$

Parma, ottobre 1903.

GEMINIANO PIRONDINI.

ALCUNE APPLICAZIONI DI CALCOLO DELLE DIFFERENZE

1. Sia data una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (1)$$

Ponendo, come si usa nel *Calcolo delle differenze*

$$\Delta^p a_n = a_{n+p} - \binom{p}{1} a_{n+p-1} + \binom{p}{2} a_{n+p-2} - \dots \pm a_n$$

è facile vedere come possa scriversi identicamente

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x \Delta a_0}{(1-x)^2} + \frac{x^2 \Delta^2 a_0}{(1-x)^3} + \dots + \frac{x^{k-1}}{(1-x)^k} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Delta^{k-1} a_n.$$

Se avviene che sia

$$\Delta^k a_n = 0$$

tranne che per valori di n di una successione di numeri v_m soddisfacenti alla condizione

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (v_{m+1} - v_m) = \infty$$

un teorema di Fabry ci fa conoscere che la serie $\sum a_n x^n$ non è prolungabile al di fuori di un determinato cerchio. (*)

Se avviene invece che sia

$$\Delta^k a_n = 0 \quad (2)$$

per qualunque valore di n , sarà

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \Delta^{k-1} a_n = \Delta^{k-1} a_0 \cdot \frac{1}{1-x}$$

(*) E. FABRY, *Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et l'impossibilité de prolongement analytique dans des cas très généraux*. Annales scientifiques de l'École normale supérieure 1896. Vedi anche: E. SIBIRANI, *Un teorema della teoria delle serie di potenze*. Jornal des Sciencias matematicas e astronomicas (Coimbra) 1903.

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x \Delta a_0}{(1-x)^2} + \frac{x^2 \Delta^2 a_0}{(1-x)^3} + \dots + \frac{x^{k-1} \cdot \Delta^{k-1} a_0}{(1-x)^k} \quad (3)$$

cioè la serie rappresenta una funzione razionale.

La relazione (2) è la *scala di ricorrenza* della serie.

I coefficienti a_n si possono esprimere in funzione razionale intera del proprio indice. Infatti riguardando la (2) come un'equazione lineare alle differenze di ordine k , il suo integrale è

$$a_n = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \dots + c_{k-1} n^{k-1}$$

dove le costanti c_0, c_1, \dots, c_{k-1} sono determinate dal sistema di k equazioni

$$a_i = c_0 + c_1 i + c_2 i^2 + \dots + c_{k-1} i^{k-1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k-1).$$

2. Se ψ è simbolo di funzione razionale intera di grado $k-1$, poichè vale la relazione

$$\Delta^r \psi(n) = 0 \quad (r \geq k)$$

la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi(n) x^n$$

è lo sviluppo della funzione razionale

$$\frac{A_0}{1-x} + \frac{A_1 x}{(1-x)^2} + \frac{A_2 x^2}{(1-x)^3} + \dots + \frac{A_{k-1} x^{k-1}}{(1-x)^k} \quad (4)$$

dove è

$$A_i = \Delta^i \psi(0).$$

Viceversa sia data la funzione (4): essa sarà sviluppabile in una serie di potenze i cui coefficienti sono esprimibili in funzione, razionale intera di grado $k-1$, del proprio indice.

Posto infatti

$$a_n = \psi(n) = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \dots + c_{k-1} n^{k-1} \quad (5)$$

basterà poter determinare c_0, c_1, \dots, c_{k-1} in modo che sia

$$\Delta^i \psi(0) = A_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k-1). \quad (6)$$

Ora, avendo posto

$$\Delta^p 0^q = p^q - \binom{p}{1} (p-1)^q + \binom{p}{2} (p-2)^q - \dots \pm \binom{p}{p-1}$$

sarà

$$\Delta^i \psi(0) = \Delta^{i0} c_1 + \Delta^{i0^{i+1}} c_{i+1} + \dots + \Delta^{i0^{k-1}} c_{k-1}$$

e quindi le (6) diverranno

$$\Delta^{i0} c_1 + \Delta^{i0^{i+1}} c_{i+1} + \dots + \Delta^{i0^{k-1}} c_{k-1} = A_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k-1) \quad (6')$$

Si osservi ora che le (6') formano un sistema di k equazioni fra le k incognite c_0, c_1, \dots, c_{k-1} , sistema che è normale, poichè il determinante dei coefficienti, come facilmente si verifica, è diverso da zero e precisamente uguale a $1! 2! 3! \dots k-1!$: si possono perciò determinare i coefficienti c_i e quindi la $\psi(n)$.

3. La formula

$$a_n = a_0 + \binom{n}{1} \Delta a_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 a_0 + \dots + \Delta^n a_0$$

fornitaci dal Calcolo delle differenze, ci dà

$$\begin{aligned} a_n &= A_0 + \binom{n}{1} A_1 + \binom{n}{2} A_2 + \dots + A_n && \text{per } n \leq k-1 \\ a_n &= A_0 + \binom{n}{1} A_1 + \binom{n}{2} A_2 + \dots + \binom{n}{k-1} A_{k-1} && \text{per } n > k-1 \end{aligned} \quad (7)$$

formule che servono a calcolare rapidamente i coefficienti a_n dello sviluppo in serie della funzione (4).

Ma delle (7) ce ne serviamo anche ad altro scopo.

Sviluppiamo il secondo membro della seconda formula per le potenze crescenti di n . Se denotiamo con $S_{h,n}$ ($h < n$) la somma dei $\binom{n-1}{h}$ prodotti dei numeri $1, 2, 3, \dots, n-1$ combinati ad h ad h in tutti i modi possibili, detto sviluppo sarà

$$a_n = \sum_{r=0}^{k-1} n^r \left(\frac{A_r S_{0,r}}{r!} - \frac{A_{r+1} S_{1,r+1}}{r+1!} + \frac{A_{r+2} S_{2,r+2}}{r+2!} - \dots \pm \frac{A_{k-1} S_{k-r-1,k-1}}{k-1!} \right) \quad (8)$$

Confrontando la (5) con la (8) si ottiene

$$c_r = \frac{A_r S_{0,r}}{r!} - \frac{A_{r+1} S_{1,r+1}}{r+1!} + \frac{A_{r+2} S_{2,r+2}}{r+2!} - \dots \pm \frac{A_{k-1} S_{k-r-1,k-1}}{k-1!}$$

($r = 0, 1, 2, \dots, k-1$)

che ci dà le soluzioni del sistema (6'). Ora tenendo conto che

$$A_i = \Delta^i a_0 = a_i - \binom{i}{1} a_{i-1} + \binom{i}{2} a_{i-2} - \dots \pm a_0$$

si ottiene ancora

$$c_r = a_0 B_{0,r} + a_1 B_{1,r} + a_2 B_{2,r} + \dots + a_{k-1} B_{k-1,r} \quad (9)$$

ove è

$$B_{q,r} = \begin{cases} (-1)^{q+r} \frac{1}{q!} \sum_{t=0}^{k-q-1} \frac{S_{q-r+t,q+t}}{t!} & \text{per } q = r, r+1, \dots, k-1 \\ (-1)^{q+r} \frac{1}{q!} \sum_{t=0}^{k-r-1} \frac{S_{t,r+t}}{r+t-q!} & \text{per } q = 0, 1, \dots, r-1 \end{cases}$$

L'espressione dei coefficienti c_r in funzione di $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ può aversi ancora risolvendo il sistema

$$a_i = c_0 + c_1 i + c_2 i^2 + \dots + c_{k-1} i^{k-1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k-1)$$

ottenuto dalla (5) ponendo $n = 0, 1, 2, \dots, k-1$.

Tale risoluzione dà

$$(r = 0, 1, \dots, k-1) \quad c_r = \frac{\alpha_0 D_{1,r+1} + \alpha_1 D_{2,r+1} + \dots + \alpha_{k-1} D_{k,r+1}}{1! 2! 3! \dots k-1!} \quad (10)$$

dove $D_{m,n}$ è il reciproco dell'elemento n^0 nella linea m^a del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & k-1 & (k-1)^2 & \dots & (k-1)^{k-1} \end{vmatrix} \quad (11)$$

Si trae dunque confrontando (9) con (10)

$$D_{q+1,r+1} = 1! 2! 3! \dots k-1! B_{q,r}.$$

Si sono espressi così i reciproci del determinante (11) mediante i numeri $B_{h,n}$ che si calcolano con molta rapidità: (*) ciò ci permette di risolvere immediatamente il sistema di k equazioni lineari non omogenee fra k incognite x_0, x_1, \dots, x_{k-1}

$$(i = 0, 1, \dots, k-1) \quad x_0 + x_1 i + x_2 i^2 + \dots + x_{k-1} i^{k-1} = \alpha_i$$

senza aver bisogno di eseguire il calcolo laboriosissimo dei determinanti di k^o ordine cui darebbe luogo la risoluzione diretta.

Le formule già trovate ci danno

$$x_r = \sum_{q=0}^{k-1} \alpha_q B_{q,r}.$$

Ed è facile vedere come si risolva immediatamente anche il sistema

$$(i = 1, 2, \dots, k-1) \quad x_1 i + x_2 i^2 + \dots + x_{k-1} i^{k-1} = \alpha_i$$

che, come il primo, interviene spesso in problemi di interpolazione.

Cento, Settembre 1903.

FILIPPO SIBIRANI.

(*) Cfr. SIBIRANI, *Un notevole specchio di numeri*. "Periodico di Matematica", tomo XVI.

IL "LATINO SINE FLEXIONE" DEL PROF. PEANO

I. Da diversi anni, dai dotti dei vari paesi si vanno facendo tentativi incessanti per la formazione di una lingua internazionale, tentativi che, sebbene coronati alcuni di qualche successo, pure per diverse ragioni, che qui sarebbe lungo enumerare, non sono mai entrati, per quanti sforzi si siano fatti, nel dominio della pratica.

Dalla *Lingua bleu* del Bolak, dallo *Spokil* del De Nicolas, dalla *Blaia Zimondal* del Meriggi, al *Volapük* dello Schleyer, all'*Esperanto* dello Zamenof, alla *Lingua* di Henderson, al *Le nov-latin* di Rosa, si son fatti indubbiamente dei passi notevoli, e pare che sempre più ci si avvicini all'ideale di una lingua razionale, che è quello della massima semplicità del vocabolario e dell'abolizione completa della grammatica. Sembrerebbe a prima vista che questa meta, per quanto luminosa, fosse irraggiungibile e che tale semplificazione dovesse nuocere all'intelligenza e alla chiarezza delle comunicazioni: eppure non è così, ed il chiarissimo prof. Peano dell'Università di Torino, in una sua nota inserita nel tomo VIII, anno 1903 della *Revue de Mathématiques*, ce ne dà un esempio luminoso. Di questo saggio appunto dell'illustre creatore dell'ideografia intendo parlare nella presente nota, sicuro di far cosa grata a quanti sta a cuore l'interessante questione, di cui già, in uno degli ultimi fascicoli, ebbe ad occuparsi il nostro Periodico. (*)

Partendo dai seguenti concetti di Leibnitz: (**)

« Nominum casus semper eliminari possunt substitutis in eorum locum particulis quibusdam »;

« Discrimen generis nihil pertinet ad grammaticam rationalem »;

« Personae verborum possunt esse invariabiles, sufficit variari *ego, tu, ille, etc.* »;

il prof. Peano costruisce la sua lingua ausiliaria, che chiama *Latino sine flexione*, ed immediatamente la applica ad una nota sul « Principio de permanentia ».

Principiando dai casi, egli indica il genitivo con *de*, il dativo con *ad*, l'ablativo con *ab, ex, etc.*: suppone il nome inflessibile, prendendolo o identico al nominativo, cambiate le desinenze *-us, -um, -u* in *o, -es* in *-e*, o identico al genitivo mutato *-i* in *-o* ed *-is* in *-e*: invece di *ego, tu*, prende poi *me, te*.

Toglie quindi la distinzione di genere e numero, convenendo che, quando sia necessario distinguerli, si può far precedere il sostantivo, per

(*) Cfr. U. GERETTI, *Matematica ed Esperanto*, nel fasc. VI, anno XVIII del "Periodico di Matematica".

(**) LEIBNITZ, ed. Couturat, 1901, pag. 67.

il primo, da *mas, femina*, per il secondo da *uno, plure*. Venendo finalmente ai verbi, comincia col sopprimere i suffissi personali, osservando che, per questo, basta far precedere il verbo inflessibile da *me, te, ille* etc., e sopprime poi completamente la coniugazione, prendendo per ogni verbo una forma unica, che si ottiene togliendo dall'infinito presente la terminazione *-re* o *-ri* (se pel verbo *esse*). (*)

Con queste convenzioni, è evidente che un semplice vocabolario latino, contenente il nominativo e il genitivo di ogni nome e l'infinito dei verbi, è sufficiente per scrivere e tradurre nella nuova lingua anche a chi non abbia alcuna cognizione di latino: per i vocaboli però bisogna scegliere, oltre che nel latino classico, anche nel latino popolare, introducendo pure quei vocaboli che ora sono divenuti internazionali, come *metro, dyne* etc.

Questi, in breve, i concetti dell'illustre autore, concetti che, dalla larga approvazione già avuta dai dotti, sembrano davvero destinati a trionfare.

Per terminare, porterò, come esempio, la breve nota seguente, scritta nella nuova lingua:

Mensura de circulo iuxta Leonardo Pisano.

Leonardo Fibonacci in « *Practica Geometriae* » dice:

« Si secundum pisanum modum (circulum) mensurare desideras, diametrum in se multiplica; et quod provenerit divide per 7, et habebis panora embadji ipsius circuli ». Hic regula significa quod $\pi = \frac{22}{7}$; ut me nunc demonstra. Si enim mensura de diametro de circulo in *pertica*, es $2r$, quadrato de diametro es r^2 , qui, diviso per 7, me dice es mensura de superficie de circulo, expresso per *panoro*. Oporte enim nos sci panoro contine *pertica* $5 \frac{1}{2}$: si igitur $2r$ es mensura de diametro in *pertica*, iuxta regula de Leonardo, nos habe superficie de circulo æquale ad panoro $\frac{4r^2}{7}$: si nunc hic mensura nos vole reduce in *pertica*, oporte multiplica $\frac{4r^2}{7}$ per $5 \frac{1}{2}$, id es

$$\text{Sup. de circulo} = \frac{4r^2}{7} \times 5 \frac{1}{2} = \frac{4r^2}{7} \cdot \frac{11}{2} = 4r^2 \cdot \frac{11}{14}.$$

Sed $\frac{11}{14}$ es æquale $\frac{22}{7} : 4 = \frac{\pi}{4}$: igitur $S = \pi r^2$, ubi r es mensura de medietate de diametro, expresso in *pertica*, id es in ipse mensura, in qui nos mensura diametros.

MARIO LAZZARINI.

(*) Accenno qui semplicemente le convenzioni dell'autore, rimandando, per maggiori schiarimenti, alla sua magistrale memoria.

ESPRESSIONI SIMBOLICHE

**dei coefficienti che compaiono nello sviluppo delle forme ternarie
di ordine qualunque con potenze di forme ternarie lineari**

Nel volume 76° del *Giornale di Crelle* il Rosanes in una nota « Sopra un principio di associazione per le forme algebriche » dimostra con semplici considerazioni geometriche il teorema:

Data una curva di equazione $f = a_x^n = 0$ ed un suo $(n+1)$ -gono coniugato completo, i cui lati siano fra loro distinti, si ha che la f si può esprimere linearmente colle ennesime potenze delle forme lineari corrispondenti ai lati dell' $(n+1)$ -gono, cioè i lati di esso costituiscono un $\frac{n(n+1)}{2}$ -latero polare della curva.

Noi ci proponiamo ora di cercare le espressioni simboliche dei coefficienti che entrano in tale sviluppo.

Il metodo che adoperiamo ci venne suggerito da un esempio che si trova nella memoria citata. Esso presenta il vantaggio di dare nello stesso tempo una verifica del teorema enunciato.

Sia data la curva di equazione:

$$f = a_x^n = 0,$$

ed un suo $(n+1)$ -gono coniugato completo

$$(y_1), (y_2), \dots, (y_{n+1}).$$

Dovrà essere:

$$(1) \quad \begin{cases} ay_2 & ay_3 & \dots & ay_{n+1} = 0 \\ ay_1 & ay_3 & \dots & ay_{n+1} = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ay_1 & ay_2 & \dots & ay_n = 0. \end{cases}$$

I primi membri delle (1) sono gli armonizzanti delle:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= uy_2 & uy_3 & \dots & uy_{n+1} \\ \varphi_2 &= uy_1 & uy_3 & \dots & uy_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n+1} &= uy_1 & uy_2 & \dots & uy_n, \end{aligned}$$

e della forma f .

Supponiamo che gli $\frac{n(n+1)}{2}$ lati dell' $(n+1)$ -gono sieno tra loro distinti; le loro equazioni saranno racchiuse nella

$$(xy_ay_t) = 0,$$

dove s, t indica una combinazione della seconda classe degli indici $1, 2, \dots, n+1$.

Indichiamo con $r_1 r_2 \dots r_{n+1}$ una permutazione qualunque degli indici $1, 2, \dots, n+1$, e per brevità un determinante $(y_l y_m y_n)$ con $(l m n)$.

Consideriamo ora le espressioni:

$$A_{r_1 r_2} = \frac{a_{y_{r_2}} a_{y_{r_4}} \dots a_{y_{r_{n+1}}}}{(r_1 r_2 r_3)^2 (r_1 r_2 r_4) \dots (r_1 r_2 r_{n+1})}, \quad (2)$$

Osserviamo anzitutto che:

$$A_{r_1 r_2} = (-1)^n A_{r_2 r_1}.$$

Di più il valore di una qualunque delle A non si altera scambiando l'indice r_3 con uno qualunque di quelli che lo seguono. Infatti, indicando con $A'_{r_1 r_2}$ l'espressione ottenuta da $A_{r_1 r_2}$ scambiando r_3 con r_s si ha:

$$\begin{aligned} A_{r_1 r_2} - A'_{r_1 r_2} &= \frac{a_{y_{r_2}} a_{y_{r_4}} \dots a_{y_{r_{n+1}}}}{(r_1 r_2 r_3)^2 (r_1 r_2 r_4) \dots (r_1 r_2 r_{n+1})} \{ a_{y_{r_3}} (r_1 r_2 r_3) - a_{y_{r_s}} (r_1 r_2 r_s) \} = \\ &= \frac{a_{y_{r_2}} a_{y_{r_4}} \dots a_{y_{r_{n+1}}}}{(r_1 r_2 r_3)^2 (r_1 r_2 r_s)^2 \dots (r_1 r_2 r_{n+1})} \{ a_{y_{r_3}} (r_3 r_2 r_s) - a_{y_{r_s}} (r_1 r_2 r_s) \} \end{aligned}$$

per la nota identità:

$$a_{y_{r_3}} (r_1 r_2 r_s) - a_{y_{r_s}} (r_1 r_2 r_3) = a_{y_{r_3}} (r_2 r_2 r_s) - a_{y_{r_s}} (r_3 r_2 r_s),$$

e ricordando le (1),

$$A_{r_1 r_2} - A'_{r_1 r_2} = 0.$$

Possiamo quindi dire che in generale le espressioni (2) distinte in valore si riducono ad $n(n+1)$ e quelle distinte in valore assoluto ad $\frac{n(n+1)}{2}$.

Ora dalla identità:

$$a_x (r_2 r_3 r_4) = a_{y_{r_2}} (x r_3 r_4) + a_{y_{r_3}} (x r_4 r_2) + a_{y_{r_4}} (x r_2 r_3),$$

moltiplicando per

$$a_{y_{r_1}} a_{y_{r_2}} a_{y_{r_3}} \dots a_{y_{r_{n+1}}},$$

si ha, per le (1),

$$a_x a_{y_{r_1}} a_{y_{r_2}} a_{y_{r_3}} \dots a_{y_{r_{n+1}}} (r_2 r_3 r_4) = a_{y_{r_2}} a_{y_{r_1}} a_{y_{r_3}} \dots a_{y_{r_{n+1}}} (x r_2 r_4),$$

e per le (2):

$$a_x a_{y_{r_1}} a_{y_{r_2}} a_{y_{r_3}} \dots a_{y_{r_{n+1}}} = A_{r_2 r_4} (r_3 r_4 r_1) (r_3 r_4 r_2) (r_3 r_4 r_3) \dots (r_3 r_4 r_{n+1}) (x r_2 r_4) \quad (3)$$

Evidentemente di tali eguaglianze se ne possono trovare $\frac{n(n+1)}{2}$.

Supponiamo ora che per un certo valore k di h ($k < n$) sussista la seguente formola (qualunque sia la permutazione $r_1 r_2 \dots r_{n+1}$):

$$a_x^h a_{y_{r_{n+2}}} \dots a_{y_{r_{n+1}}} \sum_{r_s r_t} A_{r_s r_t} (r_s r_t r_{h+3}) \dots (r_s r_t r_{n+1}) (x r_s r_t)^h, \quad (4)$$

dove nel sommatorio devono comparire tutte le A corrispondenti alle combinazioni della seconda classe degli indici r_1, r_2, \dots, r_{h+1} : vogliamo dimostrare che essa sussiste per $h = k + 1$. Infatti dalla identità:

$$a_x (r_2 r_3 r_4) = a_{y_{r_2}} (x r_2 r_4) + a_{y_{r_3}} (x r_4 r_2) + a_{y_{r_4}} (x r_2 r_3),$$

moltiplicando per

$$a_x^k a_{y_{r_{k+3}}} \dots a_{y_{r_{n+1}}},$$

si ha:

$$\begin{aligned} a_x^{k+1} a_{y_{r_{k+3}}} \dots a_{y_{r_{n+1}}} &= \frac{1}{(r_2 r_3 r_4)} a_x^k a_{y_{r_2}} a_{y_{r_{k+3}}} \dots a_{y_{r_{n+1}}} (x r_2 r_4) + \\ &+ \frac{1}{(r_1 r_2 r_4)} a_x^k a_{y_{r_2}} a_{y_{r_{k+3}}} \dots a_{y_{r_{n+1}}} (x r_4 r_2) + \\ &+ \frac{1}{(r_2 r_3 r_4)} a_x^k a_{y_{r_3}} a_{y_{r_{k+3}}} \dots a_{y_{r_{n+1}}} (x r_2 r_3); \end{aligned} \quad (5)$$

ed avendo supposto che la formola (4) sussista per $h = k$, si avrà:

$$\begin{aligned} a_x^k a_{y_{r_2}} a_{y_{r_{k+3}}} \dots a_{y_{r_{n+1}}} &= A_{r_1 r_2} (r_1 r_2 r_3) (r_1 r_2 r_{k+3}) \dots (r_1 r_2 r_{n+1}) (x r_1 r_2)^k + \\ &+ \dots \\ a_x^k a_{y_{r_3}} a_{y_{r_{k+3}}} \dots a_{y_{r_{n+1}}} &= A_{r_1 r_2} (r_1 r_2 r_3) (r_1 r_2 r_{k+3}) \dots (r_1 r_2 r_{n+1}) (x r_1 r_2)^k + \\ &+ \dots \\ a_x^k a_{y_{r_4}} a_{y_{r_{k+3}}} \dots a_{y_{r_{n+1}}} &= A_{r_1 r_2} (r_1 r_2 r_4) (r_1 r_2 r_{k+3}) \dots (r_1 r_2 r_{n+1}) (x r_1 r_2)^k = \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Sostituendo nel secondo membro della (5), avremo intanto che in esso verranno a comparire tutte e sole le $A_{r_s r_t}$ che compaiono nella (4), quando si faccia $h = k + 1$. Cerchiamo ora i coefficienti che moltiplicano le $A_{r_s r_t}$. Possono presentarsi tre casi, o la $A_{r_s r_t}$ entra nel secondo membro solo in una delle tre parti in cui è scomposto, od entra solo in due, od in tutte tre. Analizziamo i tre casi.

Nel primo caso se $A_{r_s r_t}$ entra ad esempio solo nella prima parte dovrà essere necessariamente $r_s = r_3, r_t = r_4$, ma il coefficiente di $A_{r_3 r_4}$ è

$$\begin{aligned} \frac{(r_3 r_4 r_2)}{(r_2 r_3 r_4)} (r_2 r_4 r_{k+3}) \dots (r_2 r_4 r_{n+1}) (x r_2 r_4)^{k+1} &= \\ &= (r_2 r_4 r_{k+3}) \dots (r_2 r_4 r_{n+1}) (x r_2 r_4)_{k+1}; \end{aligned}$$

e questo è appunto il coefficiente di $A_{r_3 r_4}$ nella (4), quando si faccia $h = k + 1$. Lo stesso dicasi per i coefficienti di $A_{r_2 r_3}$ e di $A_{r_2 r_4}$.

Veniamo al secondo caso. Consideriamo una $A_{r_s r_t}$, che entra solo in due parti per esempio nella prima e nella seconda. Allora dovrà essere od r_s od r_t eguale ad r_4 . Poniamo $r_s = r_4$; il coefficiente di $A_{r_4 r_t}$ è

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{(r_2 r_3 r_4)} (r_4 r_t r_2) (r_4 r_t r_{k+3}) \dots (r_4 r_t r_{n+1}) (x r_4 r_t)^k (x r_3 r_4) + \\ &+ \frac{1}{(r_2 r_3 r_4)} (r_4 r_t r_3) (r_4 r_t r_{k+3}) \dots (r_4 r_t r_{n+1}) (x r_4 r_t)^k (x r_4 r_2) = \\ &= \frac{1}{(r_2 r_3 r_4)} (r_4 r_t r_{k+3}) \dots (r_4 r_t r_{n+1}) (x r_4 r_t)^k \left\{ (r_4 r_t r_2) (x r_3 r_4) + (r_4 r_t r_3) (x r_4 r_2) \right\} \end{aligned}$$

e per l'identità:

$$(r_4 r_t r_2) (x r_3 r_4) + (x r_4 r_2) (r_4 r_t r_3) = (x r_4 r_t) (r_2 r_3 r_4),$$

si ha:

$$\Gamma = (r_4 r_t r_{k+3}) \dots (x r_4 r_t)^{k+1},$$

che è appunto il coefficiente di $A_{r_4 r_t}$ nella (4), quando si faccia $h = k + 1$. Se r_t fosse eguale ad r_4 , allora r_n sarebbe necessariamente eguale ad r_2 , e non si farebbe che ripetere il ragionamento fatto. Dimostrazione analoga si farebbe se $A_{r_s r_t}$ entrasse solamente nella prima e terza parte o solamente nella seconda e terza.

Veniamo infine al terzo caso. Il coefficiente di $A_{r_s r_t}$ è

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(r_2 r_3 r_4)} \left\{ (r_s r_t r_2) (r_3 r_t r_{k+3}) \dots (r_s r_t r_{n+1}) (x r_s r_t)^k (x r_s r_4) + \right. \\ & \quad + (r_s r_t r_3) (r_s r_t r_{k+1}) \dots (r_s r_t r_{n+1}) (x r_s r_t)^k (x r_4 r_2) + \\ & \quad \left. + (r_s r_t r_4) (r_s r_t r_{k+3}) \dots (r_s r_t r_{n+1}) (x r_s r_t)^k (x r_2 r_3) \right\} = \\ & = \frac{1}{(r_2 r_3 r_4)} (r_s r_t r_{k+3}) \dots (r_s r_t r_{n+1}) (x r_s r_t)^k \left\{ (r_s r_t r_2) (x r_3 r_4) + \right. \\ & \quad \left. + (r_s r_t r_3) (x r_4 r_2) + (r_s r_t r_4) (x r_2 r_3) \right\}; \end{aligned}$$

e per l'identità

$$(r_s r_t r_2) (x r_3 r_4) + (r_s r_t r_3) (x r_4 r_2) + (r_s r_t r_4) (x r_2 r_3) = (x r_s r_t) (r_2 r_3 r_4),$$

esso diventa:

$$(r_s r_t r_{k+3}) \dots (r_s r_t r_{n+1}) (x r_s r_t)^{k+1},$$

vediamo quindi che anche in questo caso il coefficiente di $A_{r_s r_t}$ è eguale a quello che dà la (4) per $h = k + 1$.

Possiamo perciò concludere che la (4) sussiste pure per $h = k + 1$; ma noi l'abbiamo verificata per $h = 1$, quindi essa è sempre vera.

In particolare per $h = n$ si ha:

$$f = a_x^n = \sum_{s,t} A_{st} (x st)^n,$$

dove nel sommatorio devono comparire tutte le A corrispondenti alle combinazioni della seconda classe dei numeri $1, 2, \dots, n + 1$.

Osservando che:

$$A_{st} = \frac{a_{y_1}^2 \dots a_{y_{s-1}} a_{y_{s+1}} \dots a_{y_{t-1}} a_{y_{t+1}} \dots a_{y_{n+1}}}{(st1)^2 \dots (sts-1) (sts+1) \dots (stt-1) (stt+1) \dots (stn+1)}$$

possiamo enunciare il seguente teorema:

Nello sviluppo di una forma ternaria di ordine n mediante le ennesime potenze delle forme lineari corrispondenti ai lati di un $(n+1)$ -gono coniugato completo, il coefficiente di $(xy_s y_t)^n$ non è altro che il rapporto fra l'armonizzante della forma data e di quella ψ_{st} che si ottiene come prodotto delle forme lineari corrispondenti ai vertici per cui non passa $(xy_s y_t) = 0$ prendendone una, due volte e l'armonizzante della stessa ψ_{st} e della forma ennesima potenza esatta di $(xy_s y_t)$.

Si noti che nello sviluppo è indifferente in ogni termine l'ordine degli indici s, t purché costante in tutto il termine, perché se n è pari ciascuno dei due fattori di un termine non si altera scambiando s con t , se è dispari entrambi cambiano segno, e quindi il valore del termine non cambia.

L. TENCA.

PICCOLE NOTE

1. — Su alcuni determinanti.

I determinanti che qui considereremo brevemente godono di alcune proprietà, che stanno quasi a contrasto con quelle corrispondenti nei determinanti di sostituzioni ortogonali, derivanti appunto dalla definizione di siffatti determinanti.

Supponiamo che fra gli elementi di un determinante

$$a = | a_{ij} | \quad (1)$$

di ordine n sussistano le relazioni:

$$a^2_{11} + a^2_{21} + \dots + a^2_{n1} = 0, \quad a_{11}a_{1j} + a_{21}a_{2j} + \dots + a_{n1}a_{nj} = 1 \quad (2)$$

$(i, j = 1, 2, \dots, n);$

in virtù di esse si ha:

$$a^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1},$$

epperò:

Un determinante (1) non può avere che uno dei due valori $\pm \sqrt{(n-1)(-1)^{n-1}}$; conseguentemente: se n è pari, a è puramente immaginario; se n è dispari, a è reale.

Dalle stesse relazioni (2) segue:

$$a_{ki} \cdot a = A_{k1} + A_{k2} + \dots + A_{k,i-1} + A_{k,i+1} + \dots + A_{kn},$$

dove A_{kr} indica l'aggiunto di a_{kr} in a . Dunque:

Ogni elemento a_{ki} del determinante (1) moltiplicato per a è uguale alla somma di tutti i minori della k^{ma} riga, escluso quello appartenente alla i^{ma} colonna. Inoltre: La differenza tra due elementi di una stessa riga, moltiplicata per a è uguale alla differenza dei rispettivi complementi algebrici presa col segno meno.

Consideriamo ora un minore di ordine m^0 qualunque; sia

$$M_{rs} = \begin{vmatrix} a_{r_1s_1} & \dots & a_{r_1s_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r_ms_1} & \dots & a_{r_ms_m} \end{vmatrix};$$

moltiplicando tutte le linee per a si ha:

$$\begin{aligned} a^m \cdot M_{rs} &= \begin{vmatrix} A_{r_1s_2} + A_{r_1s_3} + \dots + A_{r_1s_m} & \dots & A_{r_1s_1} + A_{r_1s_2} + \dots + A_{r_1s_{m-1}} + A_{r_1s_{m+1}} + \dots + A_{r_1s_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{r_ms_2} + A_{r_ms_3} + \dots + A_{r_ms_n} & \dots & A_{r_ms_1} + A_{r_ms_2} + \dots + A_{r_ms_{m-1}} + A_{r_ms_{m+1}} + \dots + A_{r_ms_n} \end{vmatrix} \\ &= \sum \begin{vmatrix} A_{r_1s_{i_1}} & \dots & A_{r_1s_{i_m}} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{r_ms_{i_1}} & \dots & A_{r_ms_{i_m}} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

Osserviamo che se un punto P descrive la retta r , le sue proiezioni P' e P'' descrivono sopra r' e r'' due punteggiature prospettive a quelle di sede r , e quindi fra loro proiettive; anzi, siccome il punto all'infinito di r' corrisponde al punto all'infinito r e quindi a quello di r'' , così *quelle due punteggiature sono fra loro simili*. [Nel caso in cui r non si trovi in un piano perpendicolare alle linee di terra, tale relazione risulta notoriamente anche dall'essere le due punteggiature r' e r'' prospettive ad un fascio improprio].

Quando la retta r sta in un piano perpendicolare alla linea di terra, è costume individuarla col mezzo di due suoi punti $A \equiv (A', A'')$ e $B \equiv (B', B'')$ (supposto che A', A'', B', B'' appartengono alla stessa ordinata h); allora la similitudine fra le punteggiature di sedi r' e r'' è individuata dalle coppie A', B' e A'', B'' ; due punti corrispondenti qualunque P', P'' di r', r'' sono immagini di un punto P di r ; in particolare nel punto unito (al finito) di tale corrispondenza coincidono U' e U'' , mentre T_1 e T_2 sono i punti che corrispondono al punto ht_{12} considerato in r'' o in r' ; finalmente la coppia di punti corrispondenti in r', r'' e simmetrici rispetto a t_{12} rappresenta la traccia T della retta r sul primo piano bisettore.

Per effettuare comodamente queste costruzioni prendiamo ad arbitrio due punti O', O'' appartenenti alla stessa ordinata, e proiettiamo da essi le due punteggiature di sedi r', r'' ; otterremo così due fasci proiettivi, i quali, avendo evidentemente la retta $O'O''$ come raggio unito, sono prospettivi. L'asse di prospettiva u è individuato da' punti

$$A^{(0)} \equiv O'A' \cdot O''A'', \quad B^{(0)} \equiv O'B' \cdot O''B''.$$

Preso un punto qualunque $P^{(0)}$ di u , le rette $O'P^{(0)}$ e $O''P^{(0)}$ taglieranno h in due punti P', P'' , i quali sono le due proiezioni di un punto della retta r . In particolare, se come punto $P^{(0)}$ si prende il punto uh , P' e P'' coincideranno in un punto $U' \equiv U''$, nel quale combaciano le due proiezioni del punto U in cui r taglia il secondo piano bisettore. — Si consideri invece il punto ht_{12} , e lo si chiami T''_1 o T''_2 , secondo che lo si riguardi come appartenente alla r'' od alla r' . La retta $O''T''_1$ tagli u in $T^{(0)}_1$; proiettando questo punto O' sopra h si otterrà $T'_1 \equiv T_1$. similmente le rette $O'T''_2$ tagli u in $T^{(0)}_2$; proiettando questo punto di O'' sopra h si otterrà $T''_2 \equiv T_1$. — Per trovare finalmente le proiezioni del punto T , in cui la retta r taglia il primo piano bisettore, ricordiamo che T', T'' sono punti corrispondenti nella similitudine esistente fra r' e r'' e di più simmetrici rispetto alla linea di terra. Ora, se noi costruiamo i punti A_1, B_1 simmetrici di A'', B'' rispetto alla linea di terra, otterremo un'altra similitudine fra i punti della retta r' , similitudine che è determinata dalle coppie di punti A', A_1 e B', B_1 ; se ne cerchi il punto unito (al finito) T' ; esso col suo simmetrico T'' rappresenterà T . Per trovare T'' si prendano due punti O', O_1 sopra una stessa ordinata si trovino i punti

$$A^{(1)} \equiv O'A' \cdot O_1A_1, \quad A^{(2)} \equiv O'B' \cdot O_1B_1;$$

la retta $A^{(1)}B^{(1)}$ taglierà h in T' .

Così il problema che ci eravamo proposto è risoluto in tutte le sue parti, senza ricorrere a piani ausiliari per la retta data, cosa che, dal punto di vista didattico, va rilevata, essendo desiderabile di avere il mezzo di trattare tutti i problemi concernenti la retta prima di avere apprese le soluzioni di quelli riguardanti i piani.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 611 E 629

611. *Dimostrare che le aree delle linee descritte da un fuoco e dal centro d'un'ellisse che sdrucchiola sopra una retta fissa, che cioè si muove nel proprio piano toccando una retta fissa in un punto fisso, sono espresse da: $2a\pi(a-b)$; $\frac{1}{2}\pi(a-b)^2$ essendo a il semiasse e b l'altro.*

G. LONGOBARDI.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

Chiamiamo: XY la retta fissa, P un suo punto fisso; F, F', C i fuochi e il centro dell'ellisse.

I. Assumiamo PX per asse polare e P per polo, e determiniamo l'equazione della curva descritta da F . Posto $PF = \rho$, $\widehat{XFP} = \omega$, avremo:

$$\omega \pm \frac{1}{2}\widehat{FPF'} = 90^\circ. \quad (1)$$

Dal triangolo PPF' per note formule di trigonometria si ha:

$$\cos^2 \frac{1}{2}\widehat{FPF'} = \frac{(PF + PF')^2 - \overline{FF'}^2}{4PF \cdot PF'} = \frac{b^2}{PF \cdot PF'}; \quad (2)$$

quindi per le (1), (2) l'equazione della curva descritta da F sarà:

$$\text{sen}^2 \omega = \frac{b^2}{\rho(2a - \rho)}. \quad (3)$$

II. Troviamo l'equazione della curva descritta da C . Sia $PC = \rho$, $\widehat{CPX} = \omega$; tenendo conto che $\widehat{FPX} = \widehat{F'PY} = 90^\circ \mp \frac{1}{2}\widehat{FPF'}$ avremo:

$$2\rho \text{sen } \omega = PF \text{sen } \widehat{FPX} + PF' \text{sen } \widehat{F'PY} = 2a \cos \frac{1}{2}\widehat{FPF'}, \quad (4)$$

inoltre

$$\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 = 2(\rho^2 + \overline{FC}^2) = 2(\rho^2 + a^2 - b^2)$$

cioè

$$PF \cdot PF' = \frac{1}{2}(PF + PF')^2 - \frac{1}{2}(\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2) = 2a^2 - (\rho^2 + a^2 - b^2) = a^2 + b^2 - \rho^2, \quad (5)$$

quindi per le (4), (2), (5) l'equazione della curva descritta da C è:

$$\rho^2 \text{sen}^2 \omega = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2 - \rho^2}. \quad (6)$$

III. Dalle (3), (6) si ha rispettivamente:

$$\rho^2_{1,2} = 2a^2 - \frac{b^2}{\text{sen}^2 \omega} \pm \frac{2a^2 \sqrt{\text{sen}^2 \omega - \frac{b^2}{a^2}}}{\text{sen } \omega},$$

$$\rho^2_{1,2} = \frac{a^2 + b^2}{2} \pm \frac{(a^2 + b^2) \sqrt{\text{sen}^2 \omega - \frac{4a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2}}}{2 \text{sen } \omega};$$

le (3), (6) sono simmetriche rispetto alla perpendicolare in P alla XY ed ammettono nel primo quadrante punti reali rispettivamente per $\omega \geq \varphi$; $\omega \geq \varphi'$ dove

$$\text{sen } \varphi = \frac{b}{a}, \quad (7) \quad \text{sen } \varphi' = \frac{2ab}{a^2 + b^2}. \quad (8)$$

Siano A e B rispettivamente le aree delle (3), (6). Si avrà:

$$A = \int_{\varphi}^{\frac{1}{2}\pi} \rho^2 d\omega - \int_{\varphi}^{\frac{1}{2}\pi} \rho'^2 d\omega = 4a^2 \int_{\varphi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sqrt{\text{sen}^2 \omega - \frac{b^2}{a^2}}}{\text{sen} \omega} d\omega;$$

analogamente si ha:

$$B = (a^2 + b^2) \int_{\varphi'}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sqrt{\text{sen}^2 \omega - \frac{4a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2}}}{\text{sen} \omega} d\omega.$$

Per compiere queste integrazioni calcoliamo l'integrale indefinito

$$\Sigma = \int \frac{\sqrt{\text{sen}^2 \omega - (1 - n^2)}}{\text{sen} \omega} d\omega.$$

Si ha:

$$\Sigma = - \int \frac{\sqrt{n^2 - \cos^2 \omega}}{1 - \cos^2 \omega} d \cos \omega;$$

e facendo

$$\cos \omega = n \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1},$$

donde

$$x = \sqrt{\frac{n + \cos \omega}{n - \cos \omega}}, \quad (9)$$

$$d \cos \omega = \frac{4nx dx}{(x^2 + 1)^2},$$

avremo:

$$\begin{aligned} \Sigma &= - \int \frac{8n^2 x^2 dx}{\{(x^2 + 1)^2 - n^2(x^2 - 1)^2\}(x^2 + 1)} = \int \frac{2(1 - n^2)(x^2 + 1) dx}{(x^2 + 1)^2 - n^2(x^2 - 1)^2} - \int \frac{2dx}{x^2 + 1} = \\ &= \int \frac{2(1 - n^2)(x^2 + 1) dx}{\{1 + n + (1 - n)x^2\} \{1 - n + (1 + n)x^2\}} - 2 \text{arc tag } x = \\ &= \int \frac{(1 - n^2) dx}{1 + n + (1 - n)x^2} + \int \frac{(1 - n^2) dx}{1 - n + (1 + n)x^2} - 2 \text{arc tag } x = \\ &= \sqrt{1 - n^2} \left(\text{arc tag } \alpha x + \text{arc tag } \frac{x}{\alpha} \right) - 2 \text{arc tag } x + \text{cost} \quad (10) \end{aligned}$$

dove s'è posto $\alpha = \sqrt{\frac{1 - n}{1 + n}}$. La (10) vale per α reale cioè per $|n| < 1$.

Calcoliamo A. Abbiamo $1 - n^2 = \frac{b^2}{a^2}$ cioè

$$n = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \quad (11)$$

Facendo nella (9) successivamente $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\omega = \varphi$, per le (7), (11) risulta rispettivamente $x = 1$, $x = \infty$ dunque per la (10):

$$\begin{aligned} A &= 4a^2 \left\{ \frac{b}{a} \left(\text{arc tag } \alpha x + \text{arc tag } \frac{x}{\alpha} \right) \Big|_1^\infty - 2 (\text{arc tag } x) \Big|_1^\infty \right\} = \\ &= 4a^2 \left\{ \frac{b}{a} \left(\text{arctg } \alpha + \text{arctg } \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{b}{a} \pi + \frac{\pi}{2} \right\} = 4a^2 \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{b}{a} \pi + \frac{\pi}{2} \right) = 2a\pi(a - b). \end{aligned}$$

c. d. d.

Calcoliamo B. Si ha:

$$1 - n^2 = \frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2},$$

cioè

$$n = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Facendo nella (9) successivamente $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\omega = \varphi'$, per le (8), (12) risulta rispettivamente $x = 1$, $x = \infty$. Dunque per la (10):

$$\begin{aligned} B &= (a^2 + b^2) \left\{ \frac{2ab}{a^2 + b^2} \left(\text{arc tg } \alpha x + \text{arc tg } \frac{x}{\alpha} \right) - 2 (\text{arc tag } x) \right\} = \\ &= (a^2 + b^2) \left\{ \frac{2ab}{a^2 + b^2} \left(\text{arctag } \alpha + \text{arctag } \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{2ab}{a^2 + b^2} \pi + \frac{\pi}{2} \right\} = \\ &= (a^2 + b^2) \left(-\frac{2ab}{a^2 + b^2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} (a - b)^2. \quad \text{c. d. d.} \end{aligned}$$

629. Si consideri un circolo c e una sua corda FF' . Una conica variabile, ma avente per fuochi F, F' incontra il circolo c in quattro punti A, B, A', B' . Dimostrare che ciascuno dei quadrilateri $FAF'A', FAF'B, FAF'B', FBF'B', FA'F'B', FA'F'B$ ha i suoi lati tangenti ad un circolo. Il luogo dei centri di questi circoli è un circolo.

E.-N. BARISIEN.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

Premetto e dimostro il seguente teorema: *Le congiungenti i fuochi F, F' con due punti A e B d'una conica sono tangenti ad un cerchio che ha per centro il polo P della \overline{AB} .*

Siano α, β , rispettivamente i punti d'incontro di FA e $F'B$ con le perpendicolari condotte da F' a PA, PB . Avremo:

$$F\alpha = F\beta; \tag{1}$$

le rette PA, PB sono le mediatrici dei lati $F'\alpha, F'\beta$ del triangolo $\alpha F'\beta$, quindi la mediatrice di $\alpha\beta$ passa per P , e per la (1) passa anche per F cioè P è equidistante dalle rette FA, FB ; inoltre esso equidista dalle rette $FA, F'A$ e anche dalle $FB, F'B$ perciò il punto P è equidistante dai lati del quadrilatero $FAF'B$. c. d. d.

Ciò posto, sia DE il diametro perpendicolare ad FF' e supponiamo che A sia su \widehat{FD} , B su \widehat{FE} , B' su $\widehat{E'F'}$ e A' su $\widehat{F'D}$. Consideriamo un'iperbole di fuochi F, F' .

I. Le rette $AE, BD, A'E, B'D$ sono rispettivamente le tangenti nei punti A, B, A', B' all'iperbole. Per il teorema precedente i punti $E, R = (AE, BD)$, $S = (AE, B'D)$, $D, R' = (A'E, B'D)$, $S' = (A'E, BD)$, sono rispettivamente i centri di cerchi tangenti ai lati dei quadrilateri $FAF'A', FAF'B, FAF'B', FBF'B', FA'F'B', FA'F'B$.

II. Sia O il punto d'incontro delle parallele condotte ad AB, AB' rispettivamente per R ed S ; $P = (AB, FR)$. Si ha: $\widehat{BAE} = \widehat{ORS} = \widehat{B'AE} = \widehat{OSR}$ cioè

$$\overline{OS} = \overline{OR}; \tag{2}$$

$\widehat{ORD} = \widehat{ABD} = \widehat{RED}$, $\widehat{OSD} = \widehat{AB'D} = \widehat{SED}$ dunque OR, OS sono tangenti ai cerchi DER, DES , e per la (1) il punto O si troverà sul loro asse radicale DE . Sia O' il punto d'incontro della tangente in F a c con OR . Siccome R è il centro del cerchio inscritto nel quadrilatero $FAF'B$, sarà $\widehat{RFA} = \widehat{RFB}$, e quindi

$$\widehat{O'FR} = \widehat{O'FA} + \widehat{AFR} = \widehat{FBA} + \widehat{BFR} = \widehat{FPA} = \widehat{FRO'};$$

cioè $\overline{O'F} = \overline{O'R}$ ossia O' si trova sull'asse radicale DE dei cerchi c e DER e quindi coincide con O . Si conclude che il luogo dei punti R, S, R', S' è il circolo di centro O e raggio OF .

Questo cerchio taglia ortogonalmente in F ed F' il circolo c . Nel caso che la conica considerata fosse un'ellisse le dimostrazioni sarebbero sostanzialmente eguali alle I, II.

QUISTIONI PROPOSTE

652. Dimostrare che

$$\int \frac{\sqrt{a^2 \cotg^2 \frac{\alpha}{2} - 1}}{1 + \cos \alpha} dx = \sqrt{a^2 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{\alpha}{4} \log \frac{2a^2 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 2a \sqrt{a^2 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}{2a^2 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 2a \sqrt{a^2 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

653. Dimostrare che

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{\frac{a^2 - 1 + t(a^2 + 1)}{(1 - t^2)^2(1 + t)}} dt = \\ & = \sqrt{a^2 - \frac{1-t}{1+t}} - \frac{a}{4} \log \frac{2a^2 - 1 + t(1 + 2a^2) + 2a \sqrt{a^2 - 1 + t(a^2 + 1)}}{2a^2 - 1 + t(1 + 2a^2) - 2a \sqrt{a^2 - 1 + t(a^2 + 1)}} \end{aligned}$$

654. Dimostrare che

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x^{\frac{1}{2}} (a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{48} \left\{ 48x^{\frac{1}{2}} + 56a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + 70ax^{\frac{1}{2}} + 105a^{\frac{3}{2}} + \right. \\ \left. + 105a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} \frac{(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

F. SIBIRANI.

655. Se $ABC, A'B'C'$ sono due triangoli omologici l'uno inserito nell'altro, e P è un punto qualunque del loro piano, le coniche $ABCA'P, ABCB'P, ABCC'P$ incontrano i lati $B'C', C'A', A'B'$ in tre punti d'una retta r , e le loro tangenti in A, B, C concorrono in un punto Q .

Se P è nella conica circoscritta ad ABC e inscritta in $A'B'C'$, la retta r tocca questa conica nel punto P , e Q è nell'asse d'omologia dei due triangoli.

656. Ogni conica circoscritta a un triangolo ha doppio contatto colla conica concentrica che tocca le parallele ai lati condotte per i vertici opposti; ogni conica inscritta al triangolo ha doppio contatto colla conica concentrica che passa per i punti medii dei lati. Nell'un caso e nell'altro il diametro che congiunge i punti di contatto passa per il baricentro e le due coniche coincidono se il centro è lo stesso baricentro.

657. Le tre iperbole circoscritte a un triangolo e tangenti nei vertici di questo alle semidiane corrispondenti hanno per centri i punti medii dei lati opposti e per asintoti le rette di Wallace relative ai punti medii delle coppie di archi che gli stessi lati determinano nel circolo circoscritto.

I piedi delle ceviane dei punti appartenenti a ciascuna delle tre iperbole sono in circoli che passano per il centro della curva.

G. BIASI.

658. Luogo dei punti di contatto delle tangenti condotti da un punto fisso a tutti i circoli bitangenti a una conica.

659. Da un punto M del piano di un'ellisse di centro O si conducano le tangenti MP, MQ nei punti P, Q . Il luogo dei punti M tali che il quadrilatero $MPOQ$ sia inscrittibile in un circolo è formato dalle diagonali del rettangolo che ha per mediane gli assi. Si trovi anche il centro del circolo circoscritto a $MPOQ$.

660. Una parabola di grandezza invariabile rota attorno al fuoco; si trovi: 1° il luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da un punto fisso; 2° il luogo dei piedi delle normali condotte dallo stesso punto.

661. L'ortocentro di un triangolo inscritto in una iperbole equilatera è simmetrico rispetto al centro della iperbole del quarto punto d'incontro dell'iperbole stessa col circolo circoscritto al triangolo.

E.-N. BARISIEN.

BIBLIOGRAFIA

Euclide emendato dal P. Gerolamo Saccheri. Traduzione e note del prof. G. Boccardini. Manuali Hœpli, 1904.

L'Euclides ab omni naevo vindicatus sive conatus quo stabilivatur prima ipsa universae Geometriæ Principia, auctore Hieronymo Saccherio Societatis Jesu, pubblicato nel 1733 a Milano, poco prima della morte dell'autore, non è da confondersi con i tanti infelici tentativi fatti per dimostrare il postulato delle parallele; l'illustre Beltrami esumò e comunicò alla R. Acc. dei Lincei nel 1899 quest'opera del Saccheri, che qualificò come un precursore di Legendre e Lobatschewsky.

Il procedimento del Saccheri consiste nel supporre che il postulato V d'Euclide non sia vero; partendo da questa ipotesi, egli ricava una serie di proposizioni che avrebbero dovuto portarlo alla scoperta fatta un centinaio d'anni dopo da Lobatschewsky e Bolyai, se il suo ragionamento non fosse stato traviato dalla convinzione che l'unica geometria possibile fosse quella d'Euclide.

Questo libro fu tradotto in inglese nel 1894 e in tedesco nel 1895, e se ne sono occupati distinti matematici come il Mansion, il Veronese, il Segre, ecc.

Crediamo perciò che abbiano fatto molto bene il prof. Boccardini e l'editore Hoepli a pubblicarne questa traduzione italiana, affinché sia maggiormente conosciuta l'interessante operetta.

CASTELNUOVO. — *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*. Vol. I. (Forme di prima specie - Geometria analitica del piano. - Curve di secondo ordine). Roma, Società editrice Dante Alighieri, 1894.

È noto che, mentre nelle nostre Università esistono in generale due corsi distinti di geometria analitica e di geometria proiettiva, nella Università di Roma questi sono stati da vari anni riuniti in un solo insegnamento «allo scopo, dice l'A. nella prefazione, di associare in armonica unione, i due metodi cui la Geometria deve le sue vittorie, e rivolgerli insieme ad accrescere la cultura scientifica dei giovani».

L'illustre prof. Castelnuovo chiamato ad attuare questa innovazione didattica, ha compilato un corso di lezioni, e da quello ha tratto l'opera di cui ora è stato pubblicato il I volume relativo alla forme di 1^a e 2^a specie.

«In essa, dice l'A., il lettore non deve adunque cercare quella unità di mezzi, quella purezza di linee, che attribuiscono ad un trattato di geometria proiettiva i caratteri di un'opera d'arte. Ma non troverà nemmeno traccia dello sforzo, a cui deve adattarsi chi vuole da un unico punto di vista osservare un orizzonte troppo vasto. Ogni questione vien qui discussa col metodo che più si presta ad approfondirla, e vari argomenti, esaminati sotto molteplici aspetti, acquistano un singolare rilievo».

Queste parole sintetizzano a meraviglia il carattere dell'opera, che è veramente pregevole e degna del nome dell'autore, ben noto ai cultori delle matematiche discipline per le sue importanti e geniali ricerche nel campo della geometria. Trattandosi di un nuovo indirizzo didattico si può affermare che non poteva esser fatta la prova con maggiore acume, competenza e coscienza.

L'opera è divisa nel modo seguente:

INTRODUZIONE, nella quale sono stabilite le nozioni di forme geometriche fondamentali, elementi impropri, dualità, proiettività e gli altri fondamentali della geometria proiettiva.

PARTE I. — *Forme di prima specie*. Questa è divisa in tre capitoli, e cioè:

- I. — *Sistemi di coordinate delle forme di prima specie.*
- II. — *Proiettività tra due forme di prima specie.*
- III. — *Involuzione sopra una forma di prima specie.*

In tutti questi capitoli dopo avere stabiliti i vari sistemi conosciuti di coordinate per le forme di prima specie, è fatto uno studio profondo e accurato in tutti i minimi particolari, della proiettività e dell'involuzione nelle forma medesima, alternando opportunamente le considerazioni puramente geometriche colle analitiche.

PARTE II. — *Geometria analitica del piano*. Questa si compone di una breve introduzione, nella quale si stabilisce la nozione di coordinate cartesiane, e di sei capitoli, e cioè:

- I. — *Relazioni di posizione fra punti e rette.*
- II. — *Distanze, angoli, aree.*
- III. — *Trasformazione delle coordinate - Coordinate omogenee di punti e rette - Coordinate proiettive.*
- IV. — *Rappresentazione analitica delle curve piane - Inviluppi di rette.*

V. — *Il cerchio ed altre curve particolari.*

VI. — *Proiettività tra forme di seconda specie.*

PARTE III. — *Curve di second'ordine.* — Questa è pure divisa nei sei capitoli seguenti:

I. — *Polarità definita dalla curva.*

II. — *Costruzioni di coniche - Teoremi di Pascal, Brianchon e Desargues.*

III. — *Proprietà diametrali.*

IV. — *Forme ridotte delle equazioni delle coniche.*

V. — *Proprietà focali delle coniche.*

VI. — *Trasformazione di una conica mediante una collineazione.*

APPENDICE. — I. *Sui problemi geometrici.* — Questa parte è una seconda edizione dell'articolo *Sulla risolubilità dei problemi geometrici cogli'istrumenti elementari*, che fa parte della raccolta di *Questioni riguardanti la geometria elementare*, pubblicati da F. Enriques nel 1900.

II. *Raccolta di alcune formule di geometria analitica piana.* — È questo una specie di formulario contenente i risultati più necessari per la pratica ottenuti nella II e III parte.

Abbiamo riprodotto questo breve sommario per dare una pallida idea delle materie contenute nel volume (che sono in sostanza quelle che si svolgono negli ordinari corsi di geometria analitica e proiettiva) e dell'ordine nel quale esse si seguono.

È superfluo accennare che sempre le considerazioni algebriche e geometriche si succedono e s'intrecciano, avviscerando per così dire, i vari argomenti. Ad ogni capitolo segue una copiosa raccolta di esercizi gradualmente e razionalmente disposti, alcuni con cenni di risoluzioni, nella quale sono svolte importanti teorie accessorie, che sono casi speciali e importanti complementi della parte generale, in guisa che il volume diviene per essi una specie di enciclopedia contenente tutti i concetti fondamentali relativi alla parte elementare della geometria analitica e proiettiva.

Con questi brevi cenni non abbiamo per nulla preteso di far conoscere il libro, ma piuttosto d'invogliare i lettori a leggerlo e meditarlo.

WEBER. — *Encyklopädie der elementaren Algebra und Analysis.* Leipzig, Teubner, 1903.

Questo bel volume di circa 450 pagine è il primo dei tre che costituiscono la *Encyklopädie der Elementar-Mathematik* dei professori WEBER e WELLSTEIN.

Come dichiara l'autore, un tale libro non è nè vuole essere un libro scolastico, ma è per così dire una ricca miniera, dove gl'insegnanti possono scegliere la materia del loro insegnamento, e gli studenti che si dedicano alla matematica possono trovare quanto occorre per ordinare e arricchire le loro cognizioni. E veramente la quantità di materia raccolta con rigore e chiarezza in un volume relativamente piccolo è considerabilissima, come si può giudicare dall'indice che riportiamo sommariamente.

LIBRO I. — *Fondamenti dell'Aritmetica.*

Sezione I. — Numeri naturali.

• II. — Operazioni di calcolo.

• III. — Divisione ed introduzione delle frazioni.

• IV. — Numeri irrazionali.

• V. — Rapporti.

Sezione VI. — Potenze e logaritmi.

- „ VII. — Equazioni di 1° grado.
- „ VIII. — Equazioni quadratiche e numeri imaginari.
- „ IX. — Permutazioni e combinazioni.
- „ X. — Applicazioni diverse.

LIBRO II. — *Algebra*.

Sezione XI. — Equazioni algebriche.

- „ XII. — Teorema fondamentale dell'algebra.
- „ XIII. — Equazioni indeterminate di 1° grado.
- „ XIV. — Equazioni indeterminate di 2° grado.
- „ XV. — Frazioni continue
- „ XVI. — Risoluzione algebrica delle equazioni cubiche e biquadratiche.
- „ XVII. — Calcolo delle radici dell'equazioni numeriche.
- „ XVIII. — Divisione del cerchio.
- „ XIX. — Esempi d'impossibilità.

LIBRO III. — *Analisi*.

Sezione XX. — Serie

- „ XXI. — Serie a termini positivi e negativi.
- „ XXII. — Serie illimitatamente convergenti per la funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche.
- „ XXIII. — Serie binomiale.
- „ XXIV. — Serie logaritmica.
- „ XXV. — Prodotti infiniti.
- „ XXVI. — Trascendenza di e e di π .

APPENDICE. — Congruenze di grado superiore - Esistenza di radici primitive dei numeri primi - Determinazione algebrica delle radici dell'unità.

CORRISPONDENZA

Ill.^{mo} Sig. Direttore,

La prego d'accogliere la seguente mia dichiarazione, in risposta alla lettera del dott. G. Mignosi inserita nell'ultimo fascicolo del *Periodico*.

Ella sa che il manoscritto delle mie *Nuove considerazioni sulle permutazioni* Le pervenne nel giugno 1902, cioè tre mesi prima che comparisse il lavoro del dott. Mignosi; e ricorderà pure che, appena fu pubblicato quest'ultimo scritto, io Le feci rilevare la quasi identità dei due lavori, ed Ella ebbe a rispondermi che, ponendo la data del giugno 1902 al mio, tutto si sarebbe rimediato. Sfortunatamente correggendo le bozze, un anno dopo, dimenticai (contro il mio interesse) di apporre questa data. Aggiungerò infine non aver io mai dichiarata *difficoltosa* la ricerca del numero delle permutazioni che presentano un dato numero d'inversioni; soltanto osservai giustamente che coi metodi da me seguiti tale ricerca *va rapidamente complicandosi*.

Salutandola distintamente La ringrazio.

Dev. mo

Dott. LUIGI CARLINI.

Cuneo, 21 novembre 1903.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 14 dicembre 1903.

INTORNO AD ALCUNI SPECIALI POLIEDRI AUTOCORRELATIVI

I. In una mia pubblicazione, fatta pochi mesi or sono, mi sono occupato di alcune *Ricerche intorno ai poliedri ed alle reti autocorrelative*. (*)

Nella prima parte di quel lavoro, *Poliedri e reti autocorrelative in generale*, dopo avere esteso il significato di poliedro coll'introdurvi il concetto di *facce monolaterale e bilaterale* e quello di *angoloidi monospigoli e bispigoli*, e dopo avere ben precisato il concetto di *ordine*, di *correlatività* e *autocorrelatività* nei poliedri, (**) ho stabilito le formule generali che servono di base alla determinazione di tutti i poliedri e delle reti richieste. In questa ricerca sono state distinte le tre seguenti classi di poliedri: I. Autocorrelativi con elementi del 3° ordine; II. id. con elementi del 2°, ma senza elementi del 3°; III. id. con elementi del 1° ma senza elementi del 2°. Per ognuna di queste classi ho dimostrato l'esistenza di infinite serie di poliedri, ho accennato al modo per poterli effettivamente costruire ed ho dimostrato che le relazioni fondamentali oltre esprimere la condizione necessaria, esprimono anche la condizione sufficiente per l'esistenza dei poliedri e delle reti autocorrelative. Nella II parte del lavoro *Poliedri e reti autocorrelative uniformi*, mi occupo della ricerca di quegli speciali autocorrelativi nei quali i vari elementi dei differenti ordini prendono parte in egual numero alla costituzione del corpo. Per questa ricerca, partendo sempre dalle stesse formule fondamentali, opportunamente ridotte pel caso speciale da studiarsi, determino i 44 poliedri e le 31 reti che sole esistono sotto le condizioni poste. Tanto i poliedri che le reti

(*) *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti*. Anno Accad. 1902-1903. Tomo LXII. Parte II, pagg. 147-173 e 729-764.

(**) Per coloro che non conoscessero il mio citato lavoro, credo utile di riportare alcune definizioni, limitandomi però a quelle solamente, che possono facilitare la lettura della presente nota.

Non avendo occasione in questo scritto di dover considerare *reti e poliedri* contenenti *facce monolaterale e bilaterale e angoloidi monospigoli e bispigoli* si può per questi elementi, prendere la parola *ordine* nel suo significato ordinario, cioè di numero dei *lati* o delle *facce* che formano rispettivamente un poligono (piano o sferico) o un angolo solido.

Due poliedri vengono detti *correlativi* quando ad un *angoloide m-spigolo* dell'uno, corrisponde una *faccia m-latera* nell'altra, ed inversamente a ciascuna *faccia n-latera* del primo corrisponde un *angoloide n-spigolo* del secondo. Segue da questa definizione che due poliedri correlativi hanno uno stesso numero di costole.

Un poliedro lo diremo *autocorrelativo* quando ad ognuna delle sue facce corrisponde un *angoloide* dello stesso ordine, e quando ad una *costola* che separa due *facce* rispettivamente *m-* ed *n-laterale* e riunisce i *vertici* di due *angoloidi* rispettivamente *q-* ed *r-spigoli*, corrisponde una *costola* che riunisce i *vertici* di due *angoloidi m-* ed *n-spigoli* e separa due *facce q-* ed *r-laterale*.

trovate sono distinte nelle tre seguenti specie: 1^a, ordinari (cioè senza elementi di 1° e 2° ordine); 2^a, con elementi del 2°; 3^a, con elementi del 1°. Dopo aver dato le figure corrispondenti ai corpi e alle reti della 1^a specie e alle corrispondenti varietà, accenno al modo di dedurre da esse, mediante semplicissime operazioni, le figure corrispondenti ai corpi delle ultime due specie. Chiamati *coniugati* due poliedri correlativi quando hanno forma e posizione tali che, essendo iscritti in una medesima sfera, i vertici dell'uno sieno nei centri sferici delle facce dell'altro e conseguentemente le costole corrispondenti vengano ad avere direzione ortogonale fra di loro, descrivo le due sole coppie esistenti di poliedri ordinari autocorrelativi coniugati, e cioè la coppia di due *tetraedri regolari* e quello di due *ottaedri-ottangoloidi*.

Per quest'ultima coppia, della quale ognuno dei poliedri componenti ha la forma del solido rappresentante due mucchi di ghiaia riunite per le basi, stabilisco le formule esprimenti le relazioni analitiche di posizione fra gli elementi dei due solidi coniugati.

2. Richiamate queste poche nozioni e accennato ai risultati ottenuti, verrò allo scopo della presente nota che è quello di ritrovare per la coppia coniugata predetta, le corrispondenti formule con un procedimento alquanto più semplice di quello allora usato, e di dedurre da esse lo sviluppo delle varie parti dell'aggruppamento, dando così il mezzo di poter costruire con facilità una coppia di due *ottaedri-ottangoloidi* in posizione *coniugata*. Inoltre, siccome nella I Parte del mio lavoro citato accennai solamente di passaggio alla classe generale dei poliedri autocorrelativi rappresentati dalla serie indefinita di piramidi di cui il numero dei lati della base varia da tre all'infinito (cono), così trovo ora opportuno di ritornare su questo argomento per occuparmi: 1° della ricerca della forma generale delle coppie di piramidi che possono mettersi in posizione coniugata; 2°, della determinazione dello *sviluppo* necessario alla effettiva costruzione di una qualunque di queste coppie; 3°, dei modi per poter dedurre da ogni piramide altri solidi autocorrelativi mediante la opportuna aggiunta di elementi del 4° ordine.

I. — Ottaedri-ottangoloidi autocorrelativi in posizione coniugata.

3. L'*ottaedro-ottangoloide autocorrelativo* è costituito da 4 triangoli isosceli e da 4 trapezi pure isosceli; contiene 4 angoloidi triedri con due diedri eguali, e 4 angoloidi tetraedri con due coppie di diedri eguali. Ha due costole che sono comuni a coppie di angoloidi trispigoli e che separano facce quadrilatera; ad esse corrispondono due costole che separano due facce trilatera e che risultano comuni a due angoloidi quadrispigoli. Infine vi sono otto costole che sono lati comuni ad una faccia triangolare e ad una quadrangolare, e sono spigoli comuni ad un angoloide trispigolo e ad uno quadrispigolo.

Per mettere due di tali autocorrelativi uniformi in posizione coniugata immaginiamo uno di essi inscritto in una sfera di raggio uno, e proiettato su di essa.

Se $GEFK$ e KCF (fig. 1) sono due facce sferiche adiacenti, rispettivamente di 3 e 4 lati, di tale poliedro, l'altro corpo dovrà avere il vertice N di un angoloide quadri-spigolo, nel centro sferico della faccia quadrangolare $GEFK$, e il vertice Q , di un angoloide trispigolo, nel centro sferico della faccia triangolare KCF e per conseguenza i due archi di circolo massimo \widehat{NQ} e \widehat{FK} si tagliano scambievolmente per metà e ad

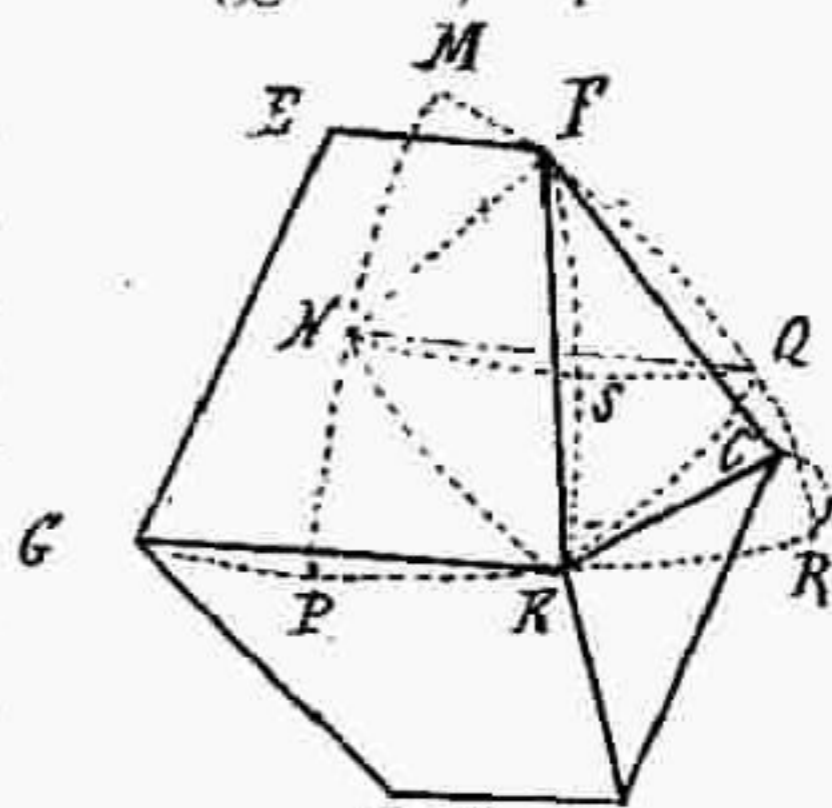


Fig. 1.

angolo retto in S . Il quadrato sferico $FKNQ$ risulta perciò inscritto nel triangolo trirettangolo MPR , ed è facile riconoscere che deve essere

$$\widehat{PN} = \widehat{PK} = \widehat{SF} = \widehat{SK} = \widehat{SQ} = \widehat{SN}.$$

Chiamando x la lunghezza comune di questi archi e ponendo inoltre $y = \widehat{MF} = \widehat{QR}$, sarà ancora

$$\widehat{MN} = \widehat{KR} = 90^\circ - x; \quad \widehat{FQ} = \widehat{QK} = \widehat{KN} = \widehat{NF} = 90^\circ - 2y.$$

Ora si ricavano facilmente, per mezzo delle note formule di trigonometria sferica applicate ai triangoli sferici rettangoli MNF , MNQ e PNK , rispettivamente le formule seguenti:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \sin 2y = \sin x \cos y \\ \cos 2x = \sin x \sin y \\ \sin 2y = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \end{array} \right\} \equiv (2) \left\{ \begin{array}{l} 2 \sin y = \sin x \\ \cos 2x = \frac{\sin^2 x}{2} = \frac{1 - \cos 2x}{4} \\ \cos 2y = \sqrt{1 - \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2} \end{array} \right\} \equiv$$

$$(3) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \cos 2x = \frac{1}{5} \\ \cos 2y = \frac{4}{5} \end{array} \right., \text{ da cui } (4) \left\{ \begin{array}{l} \sin x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \\ \cos y = \sqrt{\frac{1 + \cos 2y}{2}} = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{10}}{5}. \end{array} \right.$$

La (fig. 1) e la prima delle (3) mostrano che pel trapezio $GKFE$, che è una delle facce quadrangolari dell'ottaedro-ottangoloide autocorrelativo, si ha

$$GK = KF = GE = 2 \sin x = 2 \sin \frac{1}{2} (\text{arc cos } \frac{1}{5}).$$

Parimenti dalla 1^a delle (2) si ha, sempre pel solito trapezio,

$$EF = 2 \sin y = \sin x = \frac{1}{2} GK.$$

Il trapezio predetto è quindi facilmente costruibile quando di essa si conosca un lato, per esempio la base maggiore GK .

Determiniamo ora la faccia triangolare FKC (fig. 1); di essa si conoscono intanto i due lati $FK = FC = GK$; ora io dico che la base KC è eguale alla diagonale GF del trapezio. Infatti, supponendo tracciata questa

diagonale, il triangolo sferico isoscele GFK è eguale all'altro triangolo sferico isoscele FKC perchè hanno eguali le coppie di lati eguali ed inoltre l'angolo in K del primo è eguale all'angolo in F del secondo essendo questi due angoli eguali all'angolo del quadrato sferico $FNKQ$; segue di qui che la corda GF è eguale alla corda KC . Si può anche osservare che l'angolo al vertice del triangolo isoscele che rappresenta la faccia trian-

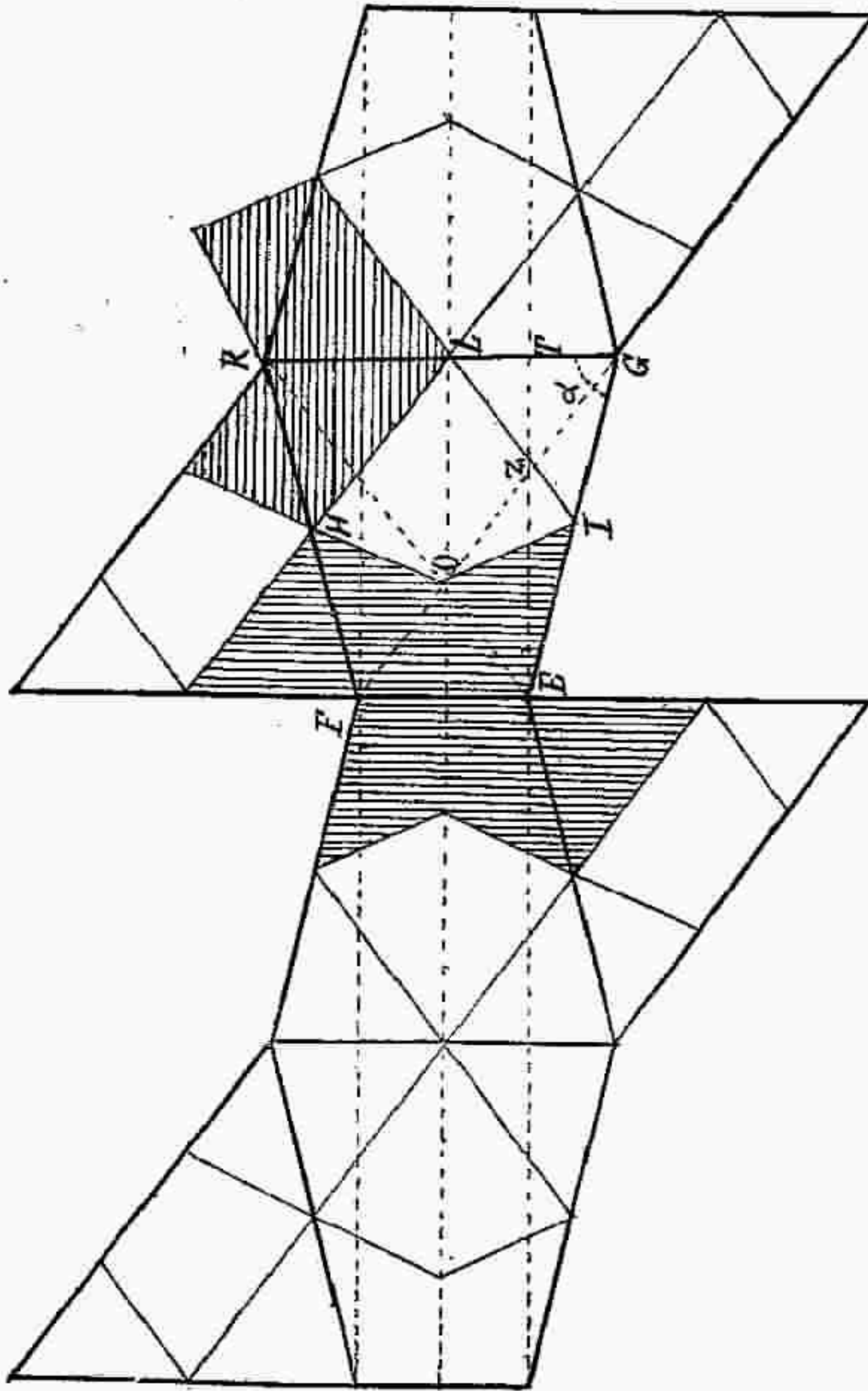


FIG. 2.

golare del corpo, è il supplemento dell'angolo ottuso della faccia rappresentata dal trapezio. Da quanto precede si ricava immediatamente il modo di costruire una delle facce quadrangolari (trapezio), dopo di che è poi facile dedurre tutto lo sviluppo dell'ottaedro-ottangoloide. Tale sviluppo disegnato su cartoncino come apparisce nella fig. 2 (della quale deve considerarsi solamente la parte disegnata in linea più marcata) ci darà il mezzo, dopo aver tagliate, intaccate e ripiegate le varie parti di esso

in modo conveniente, (*) di poter ottenere, nella sua vera forma, l'ottaedro-ottangoloide autocorrelativo in modo che due di tali solidi possono mettersi in perfetta posizione coniugata.

4. Vediamo ora come possa essere costruito l'aggruppamento di questa coppia coniugata. A tale scopo cominciamo a determinare alcune proprietà del trapezio isoscele che rappresenta la faccia quadrangolare dell'ottaedro ottangoloide autocorrelativo. Sapendo, come abbiamo già mostrato, che i lati non paralleli sono eguali alla base inferiore e che questa è doppia della superiore, si deduce subito (fig. 2) che:

1°. Le diagonali si tagliano in due parti che stanno come 1 : 2.

2°. L'angolo acuto α si ricava dal triangolo EGT per mezzo della relazione, $\cos \alpha = 0,25$, da cui $\alpha = 75^\circ 31' 20'', 957$ e conseguentemente gli angoli ottusi hanno il valore di $104^\circ 28' 39'', 043$.

3°. Le diagonali sono bisettrici degli angoli ottusi.

4°. Essendo L, I, H i punti di mezzo rispettivamente dei lati GK, GE, FK, ed O il punto d'incontro delle diagonali, dico che il quadrilatero LIOH è quello secondo il quale il trapezio appartenente ad uno degli ot-

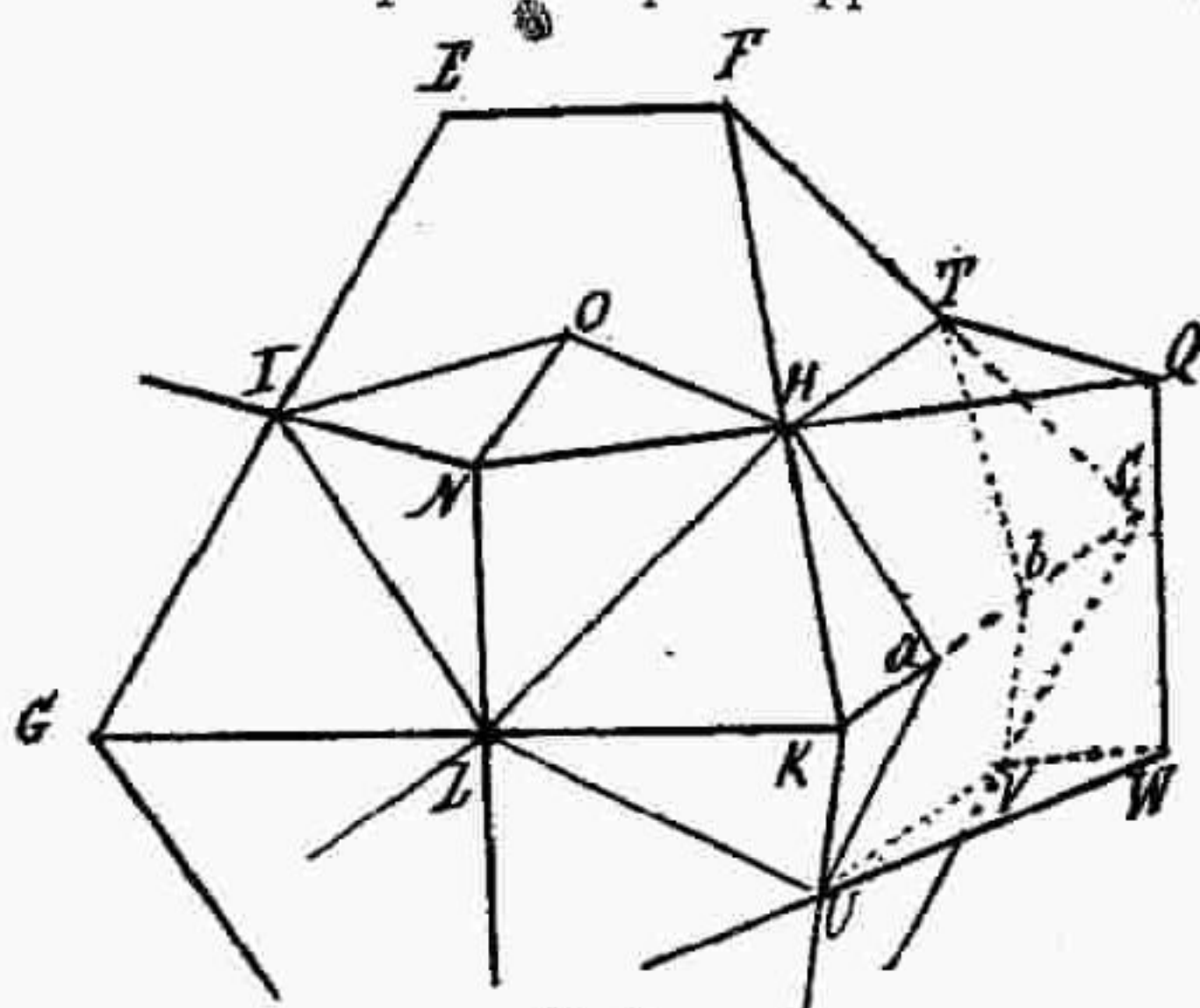


Fig. 3.

taedri-ottangoloide, taglia l'angoloide quadrispigolo corrispondente del suo coniugato. Riferendoci alla fig. 3 si vede subito che i punti L, I, H di essa corrispondono effettivamente, nella fig. 2, ai punti omonimi. Rimane da dimostrare che il punto O della fig. 3 è quello stesso punto O determinato, nel modo già detto, sulla fig. 2. Basta per questo far vedere (fig. 3) che $NL = \frac{2}{3}\delta$, essendo δ la distanza dello spigolo EF dal piano dei punti G, K, C. Infatti (fig. 1 e 3), $NL = \text{sen } \widehat{NP} = \text{sen } x$, e $\delta = \cos y$, ora le relazioni (4) provano appunto che $NL = \frac{2}{3}\delta$.

5°. La faccia triangolare FKC (fig. 3) è eguale al triangolo GKF (fig. 2 e 3), ed è facile riconoscere che la linea OHLZ (fig. 2) corrisponde alla

(*) Veggasi, a questo proposito, quanto ebbi occasione di scrivere in una mia nota, *Sullo sviluppo dei Poliedri e su alcune norme pratiche per la costruzione dei loro modelli in cartone*. "Periodico di Matematica", Tomo XV, maggio-giugno 1900.

linea $bTHa$ della fig. 3, la quale linea rappresenta l'intersezione della faccia triangolare KFI coll'altro solido ottaedro-ottangoloide.

Dopo ciò è facile costruire lo sviluppo richiesto come mostra la fig. 2 nella quale le linee piene rappresentano, come abbiamo già detto, l'intero sviluppo di un ottaedro-ottangoloide; le punteggiate sono linee di costruzione; le linee più sottili circoscrivono, per ogni faccia, la parte secondo la quale succede l'intersezione dei due solidi coniugati. La parte tratteggiata con linee parallele ad FE rappresenta lo sviluppo del solido $WQTbVUaH$ (fig. 3); di questi piccoli solidi se ne costruiscono due che vengono posti a cavalcione dell'intero ottaedro-ottangoloide lungo i due spigoli che separano le due facce triangolari. Infine l'altra parte tratteggiata rappresenta lo sviluppo della piramide quadrangolare $ILHON$ (fig. 3); di esse se ne formano 4 e debbono essere poste sopra ciascun trapezio dello stesso ottaedro-ottangoloide completo.

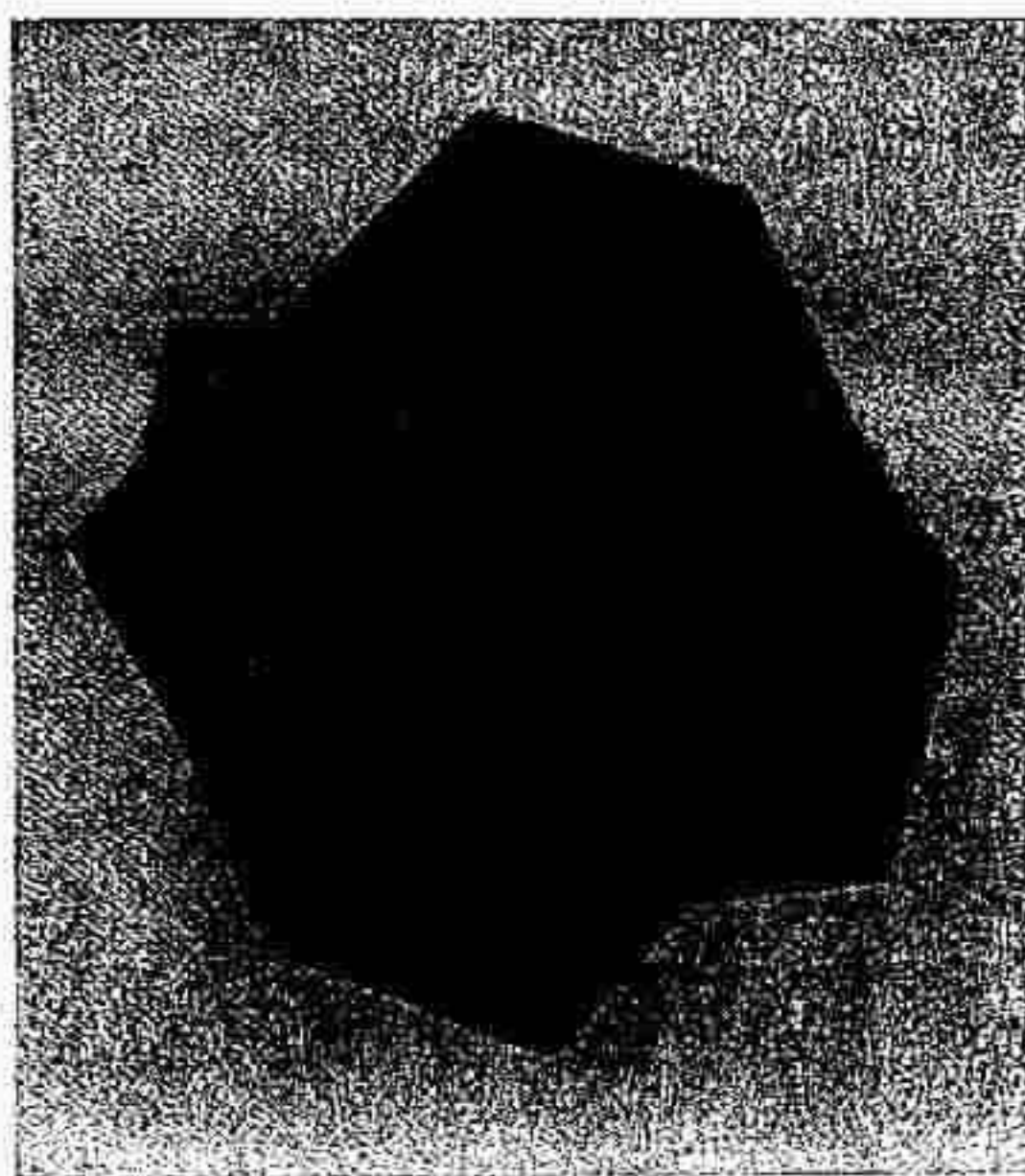


Fig. 4.

La (fig. 4) rappresenta l'immagine fotografica di un modello in cartone di due ottaedri-ottangoloidi in posizione coniugata, costruiti cogli sviluppi precedentemente descritti.

II. — Coppie di piramidi coniugate.

5. 1°. — *Determinazione delle coppie.* — Una piramide, qualunque sia il numero delle sue facce laterali, è un poliedro autocorrelativo. Vogliamo ora determinare la forma speciale di tali corpi in modo che i due che costituiscono una stessa coppia, possano mettersi in posizione coniugata. È facile persuadersi che le due piramidi eguali che formano una delle coppie predette, debbono essere eguali, regolari e inscritte in una medesima sfera

di cui il raggio potrà sempre prendersi eguale all'unità. Sia allora (fig. 5) PAB una delle facce laterali di una delle piramidi della coppia, avente per base un poligono di n lati, e indichiamo con \widehat{PAB} il triangolo sferico corrispondente. Siano per la seconda piramide della coppia, $P'A'B'$ e $\widehat{P'A'B'}$ rispettivamente la faccia laterale e il triangolo sferico corrispondente. Per la condizione di autocorrelatività, di posizione coniugata e di eguaglianza delle due piramidi, dovrà essere: PP' un diametro della sfera; B' il centro sferico di \widehat{PAB} e B quello di $\widehat{P'A'B'}$; $\widehat{PA} = \widehat{PB} = \widehat{P'A'} = \widehat{P'B'}$ il valore comune dei quali sarà indicato con $2l$; $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$. Avremo inoltre l'eguaglianza degli angoli sferici \widehat{APB} e $\widehat{A'P'B'}$ il cui valore comune è dato da $\frac{360^\circ}{n}$. Detto ora M il punto di mezzo di \widehat{AP} , dal triangolo sferico PMB' , rettangolo in M , si ricava

$$\cos \frac{180^\circ}{n} = -\operatorname{tg} l \cot 2l = \frac{1 - \cot^2 l}{2 \cot^2 l}$$

da cui

$$\operatorname{tg} l = \sqrt{1 + 2 \cos \frac{180^\circ}{n}}$$

e quindi

$$\cos l = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 l}} = \frac{1}{2 \cos \frac{90^\circ}{n}}$$

e infine

$$\cos 2l = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{90^\circ}{n}} - 1.$$

Chiamando ora H l'altezza della piramide avremo:

$$H = 1 - \cos 2l = 2 - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{90^\circ}{n}} \quad (5)$$

La conoscenza di H è sufficiente per la determinazione della piramide che si cerca, ed è facile dedurre graficamente da questa tutti gli elementi della piramide stessa.

Esaminiamo alcuni casi particolari. Per $n=2$, che corrisponde alla piramide di cui la base è un segmento rettilineo (che può riguardarsi come un bilatero regolare) si ha $H=1$. Questa coppia coniugata può ottenersi tagliando un quadrato secondo una diagonale e facendo poi ruotare di 90° metà di esso intorno all'altra diagonale.

Per $n=3$ si trova $H=\frac{4}{3}$, che corrisponde al caso di una coppia di tetraedri regolari.

Per $n=\infty$ (caso in cui la piramide diventa un cono) si ha $H=\frac{3}{2}$

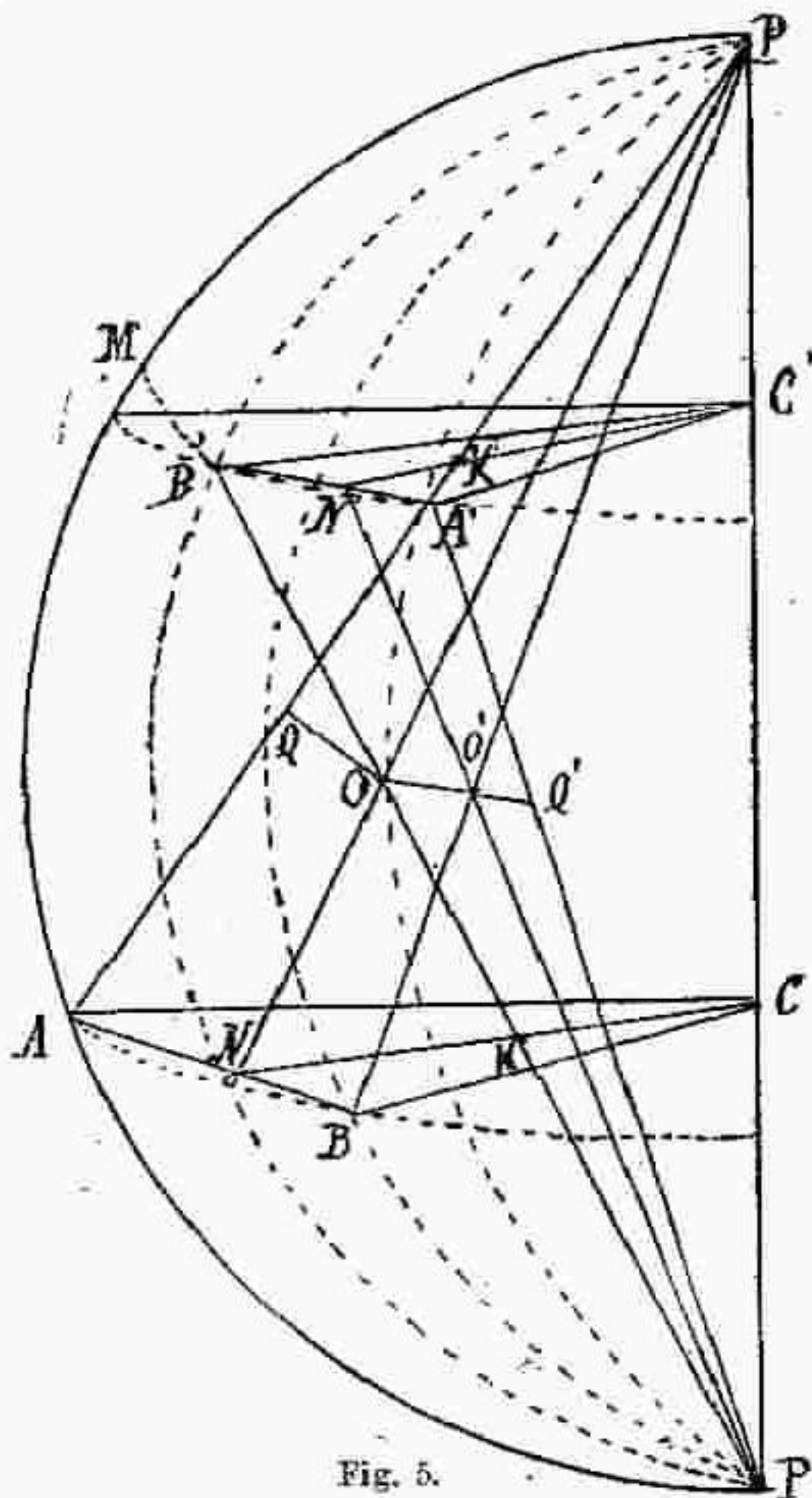


Fig. 5.

vale a dire perchè due coni, riguardati come piramidi di un numero infinito di facce, possono mettersi in posizione coniugata, è necessario che siano eguali ed equilateri.

6. 2°. — *Sviluppo e costruzione di una piramide e di una coppia di piramidi in posizione coniugata.*

I risultati precedenti danno il modo di determinare lo sviluppo di una delle due piramidi costituenti una coppia coniugata. Ora proveremo che questo sviluppo si può ottenere immediatamente per mezzo del confronto dell'angolo $\frac{360^\circ}{n}$ al centro della base, coll'angolo 2ω al vertice della piramide. Chiamando r il raggio CA del circolo minore della sfera circoscritta alla base, s lo spigolo laterale della piramide, avremo

$$\frac{\text{sen } \omega}{\text{sen } \frac{180^\circ}{n}} = \frac{r}{s} = \frac{\sqrt{H(2-H)}}{\sqrt{2H}} = \sqrt{1 - \frac{H}{2}} = \frac{1}{2 \cos \frac{90^\circ}{n}}$$

quindi

$$\text{sen } \omega = \frac{\text{sen } \frac{180^\circ}{n}}{2 \cos \frac{90^\circ}{n}} = \text{sen } \frac{90^\circ}{n}.$$

da cui $\omega = \frac{90^\circ}{n}$ e $n(2\omega) = 180^\circ$. Si può dunque concludere che la somma di tutti gli angoli al vertice della piramide è sempre eguale a due retti. Questo risultato suggerisce la seguente semplicissima regola:

Lo sviluppo della superficie laterale di una delle piramidi di una coppia coniugata, qualunque sia il numero delle sue faccie laterali, è dato dagli n triangoli che si ottengono riunendo col centro i vertici di un semipoligono regolare di n lati inscritto in una semicirconferenza di raggio eguale allo spigolo laterale. Il poligono regolare di n lati costruito sul lato di questo semi-poligono ci darà la base della piramide stessa.

7. Per costruire una coppia di piramidi in posizione coniugata, se ne costruisce intanto una intera per mezzo dello sviluppo precedentemente determinato; a questa si aggiungono poi delle convenienti appendici per rappresentare le parti della seconda piramide che emergono dalla penetrazione della prima. Per la costruzione di queste parti osserveremo che le superfici laterali delle due piramidi si tagliano secondo una linea gobba, chiusa, regolare a zig-zag, rappresentata da $QOO'Q'$ (fig. 5).

Si possono facilmente determinare i vertici di questa linea e quindi disegnare la linea stessa sullo sviluppo della prima piramide, osservando che O è il punto d'incontro dell'apotema PN della prima piramide, con uno spigolo laterale $P'B'$ della seconda.

Ora dal primo sviluppo si deducono con facilità, graficamente i segmenti PC , $CP' = C'P$, CN e CB' , e quindi si deducono in grandezza e posizione le due linee $P'B'$ e PN che stanno in un piano colla PP' .

Determinato $NO = N'O'$, $B'O = AQ = A'Q'$, restano determinati tutti

i vertici della linea poligonale, e dopo ciò è facile determinare sullo sviluppo già disegnato della superficie laterale della prima piramide, quello della zona piramidale terminata dalla linea a zig-zag sopra accennata. Lungo questa linea deve venire a combaciare la parte superiore di uno speciale tronco di piramide che fa parte della seconda piramide della coppia. La base di questo tronco speciale di piramide, aperto superiormente, deve poi contenere un'apertura centrale limitata da un poligono di n lati, concentrico a quello che rappresenta il perimetro della base, e ruotato rispetto a questa, di un angolo eguale a $\frac{180^\circ}{n}$. Per questa apertura deve passare la parte superiore della piramide intera.

È facile vedere che il raggio del circolo circoscritto a questo poligono concentrico è rappresentato da $K'C' = KC$. Questo stesso poligono dovrà essere disegnato anche sulla base della prima piramide, perchè su di essa deve attaccarsi, per la base, la piccola piramide simile alla grande avente per base il poligono predetto e per spigolo laterale la lunghezza del segmento $K'P = KP'$.

8. Come applicazione di quanto precede, consideriamo il caso particolare di una coppia coniugata di piramidi pentagonali; dico che i 12 vertici dei due solidi sono quelli di un *icosaedro regolare*. Infatti il valore 2λ del lato della base pentagonale della piramide è dato, per la proprietà enunciata al n. 6, da

$$2\lambda = 2s \operatorname{sen} 18^\circ = \sqrt{2H} \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

ma per $n = 5$, la (5) dà

$$H = \frac{5 + \sqrt{5}}{5}$$

quindi

$$2\lambda = \frac{1}{5} \sqrt{10(5 - \sqrt{5})}$$

che è appunto il valore del lato dell'icosaedro regolare inscritto nella sfera di raggio uno. Segue di qui che l'angoloide al vertice della piramide è quello stesso di uno dei dodecaedri stellati di Keplero (*) detto anche dal Poincot (**) *dodecaedro stellato di 2ª specie*. Dopo ciò è facile verificare che lo sviluppo delle diverse parti della coppia coniugata di piramidi pentagonali si può ottenere facilmente nel seguente modo: Costruito il pentagono p base della piramide, si disegni in esso il pentagono stellato p' determinato dalle sue diagonali; il piccolo pentagono p'' centrale è quello che deve essere disegnato sulla base della piramide intera, e tagliato su quello della seconda piramide. I triangoli isosceli t che rappresentano le punte del pentagono p' sono le facce laterali della piccola piramide da incollarsi sulla parte centrale della base p della prima piramide: infine, ciò che rimane del triangolo isoscele formato da un lato di p e da due delle sue diagonali, dopo avervi tolto p'' e il triangolo t

(*) *Harmonices Mundi*, proposizione 26 del 2º libro.

(**) *Journal de l'éc. polytec.* Cah. 10, p. 39.

posto al vertice, rappresenta una delle faccie della zona piramidale terminata dalla linea a zig-zag di cui abbiamo parlato al n. 7. La fig. 6 rappresenta la coppia coniugata ora descritta.

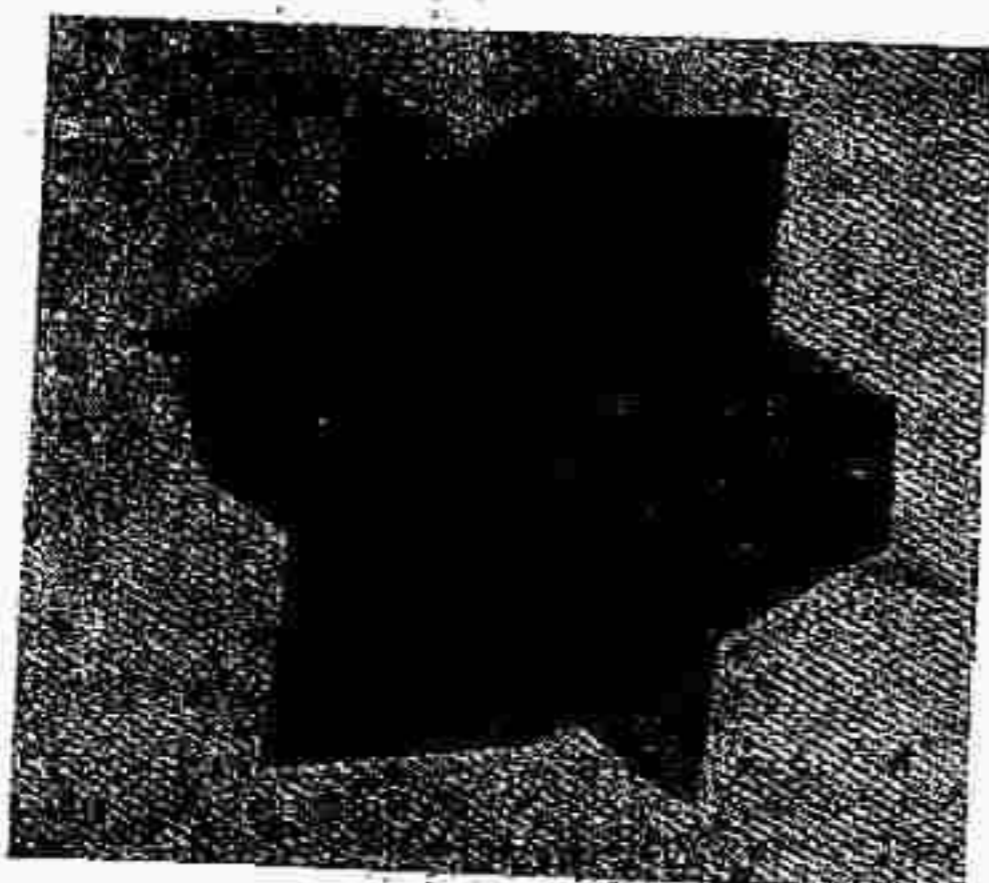


Fig. 6.

9. 3°. — *Autocorrelativi dedotti da altri mediante l'aggiunzione di elementi del 4° ordine.*

Nel mio lavoro citato al principio di questo scritto, ho dimostrato che dato un poliedro autocorrelativo qualunque se ne possono sempre ottenere quanti altri si vogliano aggiungendo convenientemente un numero qualunque di elementi del 4° ordine (angoloidi quadrispighi e faccie quadrila-

tere). Per le piramidi si vede subito che si possono aggiungere facilmente quante serie si vogliano di tali elementi del 4° ordine, quando ogni serie abbia un numero n di elementi del 4° ordine eguale al numero dei lati della base. Basta per far ciò considerare quante sezioni si vogliano della piramide, con piani paralleli alla base, perché ognuno di tali sezioni aggiunge al solido n quadrilateri ed n angoloidi quadrispighi. I solidi così ottenuti, pur restando sempre autocorrelativi, perdono però la proprietà di far parte di una coppia coniugata; è quindi necessario, per ogni sezione, di modificare la forma del solido se si vuol conservare quest'ultima proprietà.

Servendoci della terminologia geografica è evidente che la rete formata dai paralleli e dai meridiani quando quest'ultimi siano tracciati in un emisfero, per esempio in quello settentrionale, fino al polo, e per l'australe sino all'ultimo parallelo, costituiscono un reticolato autocorrelativo. Un secondo reticolato di meridiani e di paralleli, i cui punti di incontro fossero nei centri dei quadrilateri e dei triangoli sferici della prima rete, coi meridiani che si estendessero per l'emisfero australe fino al polo e pel settentrionale fino all'ultimo parallelo, costituirebbe una rete in posizione coniugata alla precedente. Per queste reti la semplice conoscenza del numero dei meridiani basta per determinare facilmente la loro posizione; invece dalla conoscenza del numero dei paralleli non si può con eguale facilità stabilire la posizione di essi, e conseguentemente neppure la lunghezza dei meridiani in quelli emisferi in cui non si estendono fino al polo corrispondente.

Un altro modo per aggiungere elementi del 4° ordine è quello di troncare con altrettanti piani, gli n angoloidi alla base della piramide in modo che la base stessa venga a trasformarsi in un poligono avente i suoi vertici nei punti di mezzo dei lati di quello che forma la base della piramide.

Firenze, settembre 1903.

ANGELO L. ANDREINI.

BARICENTRO DI UN SISTEMA PIANO DI PUNTI
CON MASSE IMMAGINARIE

In questo lavoro, seguendo una notazione già molto diffusa, pongo:
 p = punto; v = vettore = $p - p$; q = numero reale;
 q' = numero complesso del tipo $\rho e^{i\varphi} = q + qi$; \supset = si deduce; ε = è un;
 $\varepsilon \supset q'$ = imm c = coefficiente di i nella parte immaginaria di c ;
 $\text{real } c$ = parte reale di c ; $\text{mod } c$ = modulo di $c = e$ elevato real $c \log c$);
 $\text{arg } c$ = argomento di $c = \text{imm} (\log c)$;
 $\text{cong } c$ = coniugato di $c = \text{real } c - i \text{imm } c$.
 Se P, Q sono due proposizioni, la scrittura $P = Q$ significa che
 $P \supset Q$ e che $Q \supset P$, cioè le due proposizioni P e Q sono equivalenti.

1. Siano A_1, A_2, \dots, A_n dei p ed m_1, m_2, \dots, m_n dei q e sia

$$m = \sum_1^n m_r.$$

Se $m \neq 0$, si chiama baricentro dei punti A_r colle masse m_r e con $r = 1, 2, \dots, n$, un punto G tale che, essendo O un punto qualunque, sempre si abbia:

$$m(G - O) = \sum_1^n m_r (A_r - O)$$

e si scrive:

$$mG = \sum_1^n m_r A_r.$$

Se $m = 0$, l'espressione $\sum_1^n m_r A_r$ rappresenta un v definito dalla eguaglianza:

$$\sum_1^n m_r A_r = \sum_1^{n-1} m_r (A_r - A_n).$$

2. Questa definizione, che è fondata sulla nozione di prodotto di un v per un q , e di somma di più v , si può estendere ad un sistema di punti le masse dei quali siano *enti analitici* tali che il prodotto di ciascuno di essi per un vettore sia un vettore unicamente determinato.

Godono di queste proprietà i quaternioni di Hamilton per alcune classi di vettori dello spazio, ed i q' per i vettori di un piano.

Oggetto di questa nota è di definire il baricentro di un sistema di punti tutti contenuti in un piano, ed aventi per masse dei numeri complessi del tipo $\rho e^{i\varphi}$ cioè dei q' .

3. Al prodotto dei vettori di un piano per i q' è stata data questa interpretazione:

se U è un v , Ui rappresenta il vettore U rotato di un angolo retto nel verso positivo delle rotazioni;

se x, y e q , sarà:

$$U(x + iy) = (x + iy)U = xu + yUi;$$

ne consegue che se c è un q' , cU rappresenta il vettore U moltiplicato per mod c e rotato di un angolo uguale all'argomento di c .

In quanto segue intendo che i punti ed i vettori che avrò occasione di considerare appartengano tutti ad uno stesso piano π in cui è definita l'operazione accennata.

4. Siano U, V dei v , U/V sarà un complesso avente per modulo il rapporto del mod U al mod V ed avente per argomento l'angolo di V con U ; ossia:

$$U/V = (\text{mod } U/\text{mod } V) e^{i \text{ang}(V, U)}.$$

Se U, V, W sono v del piano π , sussistono le relazioni:

$$(U/V)V = U; \quad \frac{U}{V} \cdot \frac{V}{W} = \frac{U}{W}; \quad \frac{U}{V} \cdot W = \frac{V}{W} \cdot U.$$

5. Nella proporzione tra vettori espressa dalla relazione:

$$U_1/V_1 = U_2/V_2$$

si può permutare, alternare, comporre e scomporre come nella proporzione tra numeri.

Il vettore X quarto proporzionale dopo tre vettori dati U, V, W si costruisce conducendo i vettori dati da un punto O , cioè ponendo:

$$A - O = U, \quad B - O = V, \quad C - O = W.$$

Costrutto su OC il triangolo OCD direttamente simile ad OAB , sarà

$$D - O = X.$$

I vettori che soddisfano alla condizione di essere ciascuno medio proporzionale tra due vettori U, V sono due, uguali ed opposti. Sia b la bisettrice interna dell'angolo AOB , e b' la bisettrice esterna dello stesso angolo. La circonferenza che passa per A e B ed ha il centro sulla b' incontra la b in due punti C e D . Ciascuno dei vettori $C - O$ e $D - O$ è medio proporzionale tra U e V . (*)

Le dimostrazioni sono ovvie.

6. Siano A_1, A_2, \dots, A_n dei punti del piano π , siano c_1, c_2, \dots, c_n dei q' , e sia $\sum_1^n c_r = c$.

(*) Il lettore è pregato di fare la figura in questo e negli altri punti in cui si accenna a costruzioni geometriche.

Se $c \neq 0$, chiamo baricentro del sistema

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + \dots + c_n A_n$$

il punto G tale che essendo O un punto qualunque del piano, sempre si abbia:

$$c(G - O) = \sum_1^n c_r (A_r - O)$$

e scrivo:

$$cG = \sum_1^n c_r A_r.$$

Se $c = 0$, l'espressione $\sum_1^n c_r A_r$ rappresenta un vettore definito dalla relazione

$$\sum_1^n c_r A_r = \sum_1^{n-1} c_r (A_r - A_n).$$

7. Siano a_r, b_r dei q , posto

$$c_r = a_r + ib_r \quad \text{con} \quad r = 1, 2, \dots, n$$

sarà:

$$\sum_1^n (a_r + ib_r) A_r = \sum_1^n a_r A_r + i \sum_1^n b_r A_r.$$

Se

$$\sum a_r = a \neq 0; \quad \sum b_r = b \neq 0$$

posto:

$$aA = \sum_1^n a_r A_r, \quad bB = \sum_1^n b_r A_r$$

$$\sum_1^n (a_r + ib_r) A_r = (a + bi) G$$

sarà

$$(a + bi) G = aA + biB$$

$$a(G - A) = b(B - G)i$$

$$(G - A) / (B - G) = \frac{b}{a} i$$

i vettori $G - A$ e $B - G$ sono perpendicolari ed il rapporto delle loro grandezze è b/a . Il punto G è sulla circonferenza di diametro AB e la bisettrice interna dell'angolo BGA incontra AB nel punto $(aA + bB)/(a + b)$ che divide AB nel rapporto b/a . Se ne deduce una facile costruzione di G .

8. Si ha:

$$(a + bi) G = aA + biB. = .$$

$$G = \frac{aA + biB}{a + bi} = \frac{a^2 A + b^2 B + ab(B - A)i}{a^2 + b^2}.$$

Posto

$$G' = \frac{aA - biB}{a - bi} = \frac{a^2 A + b^2 B - ab(B - A)i}{a^2 + b^2}$$

∴

$$G + G' = 2 \frac{a^2 A + b^2 B}{a^2 + b^2}$$

$$G - G' = 2 \frac{ab}{a^2 + b^2} (B - A) i$$

ossia i punti G e G' sono simmetrici rispetto ad AB ; essi sono i punti d'incontro della circonferenza di diametro AB colla circonferenza d'Apollonio relativa ai punti A e B col rapporto b/a .

I punti $(A + iB)/(1 + i)$ ed $(A - iB)/(1 - i)$ sono vertici opposti nel quadrato di diagonale AB .

Coordinate baricentriche complesse.

9. Fissati nel piano π due punti distinti A_1 ed A_2 , ogni punto P del piano si può considerare come baricentro dei punti $A_1 A_2$ a cui siano applicate masse convenienti. Siano c_1 e c_2 due q' tali che

$$(c_1 + c_2)P = c_1A_1 + c_2A_2$$

sarà

$$c_1(P - A_1) = c_2(A_2 - P) \quad \text{e} \quad (P - A_1)/(A_2 - P) = c_1/c_2.$$

I due numeri c_1 e c_2 si possono assumere come coordinate del punto P rispetto ad A_1, A_2 , e sono coordinate omogenee, inquantochè P dipende unicamente dal loro rapporto.

I complessi $\text{conj } c_1 \text{ conj } c_2$ sono le coordinate di un punto P' simmetrico di P rispetto ad A_1A_2 .

10. Posto $c_2/c_1 = -c$, sarà

$$(1 - c)P = A_1 - cA_2$$

$$(A_1 - P)/(A_2 - P) = c = (\widehat{A_1PA_2}) e^{i\widehat{A_2PA_1}}.$$

Ne consegue che

$$A_1P/A_2P = \text{mod } c$$

$$\text{ang}(PA_2, PA_1) = \widehat{A_2PA_1} = \text{arg } c.$$

Il complesso c è la coordinata del punto P rispetto ad A_1, A_2 e si può chiamare *coordinata rapporto*.

La coordinata rapporto esprime col suo modulo il rapporto delle distanze del punto variabile dai due punti fondamentali, e col suo argomento l'angolo sotto cui dal punto stesso sono veduti i punti fondamentali.

II. Specializzando la natura di c , si hanno punti e linee particolari.

Se $c = -1$, sarà $P = \frac{A_1 + A_2}{2} =$ punto medio di A_1A_2 .

Se $\text{im} c = 0$ il punto P descrive la retta A_1A_2 . In questo caso la c è un q , e coincide colla coordinata rapporto dei punti della retta A_1A_2 .

$\text{Arg } c = 0$ rappresenta i punti della retta A_1A_2 esterni al segmento A_1A_2 .

$\text{Arg } c = \pi$ rappresenta i punti interni al segmento A_1A_2 .

$\text{Real } c = 0$ rappresenta la circonferenza di diametro A_1A_2 .

Se $\text{arg } c = \text{costante}$, il punto P descrive un arco di circonferenza che ha per estremi A_1 ed A_2 .

Se $\text{mod } c = \text{costante}$, il punto P descrive una delle circonferenze di Apollonio relativa alla coppia A_1A_2 .

Mod $c = 1$ è l'equazione dell'asse della coppia A_1A_2 cioè della perpendicolare ad A_1A_2 nel punto $(A_1 + A_2) / 2$.

12. La coordinata rapporto definisce nel piano un sistema di coordinate reali finora poco usato, in cui ciascun punto è determinato dal rapporto delle sue distanze da due punti fissi, e dall'angolo sotto cui i punti fissi sono veduti dal punto mobile. Però dalla coordinata rapporto si deducono facilmente le coordinate cartesiane e polari. Mi limito al caso più semplice. Se si assume A_1 con origine o polo e la retta A_1A_2 come asse delle x o asse polare, posto

$$(A_1 - P) : (A_2 - P) = c$$

ossia

$$P = (A_1 - cA_2) / (1 - c) = A_1 + \frac{c}{c-1} (A_2 - A_1),$$

sarà

$$\text{raggio vettore di } P = \text{mod } \frac{c}{c-1} (A_1 - A_2) = A_1A_2 \text{ mod } \frac{c}{c-1}$$

$$\text{ascissa angolare} = \arg \frac{c}{c-1}$$

$$\begin{aligned} \text{ascissa di } P &= \text{real} [c (A_2 - A_1) / (c - 1)] = A_1A_2 \text{ real } c / (c - 1) \\ \text{ordinata di } P &= \text{imm} [c (A_2 - A_1) / (c - 1)] = A_1A_2 \text{ imm } c / (c - 1). \end{aligned}$$

Rapporti e birapporti.

13. Siano A, B, C, D punti del piano, pongo:

$$\begin{aligned} (ABC) &= (A - C) / (B - C) = \text{rapporto semplice dei punti } A, B, C, \\ (ABCD) &= (ABC) / (ABD) = \text{birapporto dei punti } A, B, C, D. \end{aligned}$$

Il rapporto semplice ed il birapporto sono q' , e si ha:

$$\begin{aligned} (ABC) &= \frac{AC}{BC} e^{i\widehat{BCA}} \\ (ABCD) &= \left(\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} \right) e^{i(\widehat{BCA} - \widehat{BDA})}. \end{aligned}$$

14. Dalla identità:

$$(A - B) + (B - C) + (C - A) = 0$$

dividendo per $C - B$, \Rightarrow .

$$(ACB) \cdot (ABC) = 1.$$

Si ha pure identicamente:

$$(ABC) \cdot (BAC) = 1$$

quindi posto:

$$(ABC) = c, \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (BAC) &= 1 / c, \quad (ACB) = 1 - c, \quad (BCA) = 1 - 1 / c = (c - 1) / c \\ (CBA) &= c \cdot (c - 1), \quad (CAB) = 1 / (1 - c) \end{aligned}$$

ed anche:

$$\begin{aligned} A &= (ABC) B + (ACB) C \\ B &= (BCA) C + (BAC) A \\ C &= (CAB) A + (CBA) B. \end{aligned}$$

15. Dalla relazione:

$$\begin{aligned} (ABC) + (ACB) &= 1 \quad \Rightarrow \\ \frac{AC}{BC} e^{i \widehat{BCA}} + \frac{AB}{CB} e^{i \widehat{CBA}} &= 1. \end{aligned}$$

Uguagliando nei due membri le parti reali e le parti immaginarie, avremo:

$$\begin{aligned} AC \cos \widehat{BCA} + AB \cos \widehat{CBA} &= BC \\ AC \sin \widehat{BCA} + AB \sin \widehat{CBA} &= 0 \end{aligned}$$

che sono le formule fondamentali della trigonometria.

16. Dalla identità:

$$(A - B) + (B - C) + (C - A) = 0$$

dividendo per un vettore I , \Rightarrow

$$(A - B)/I + (B - C)/I + (C - A)/I = 0$$

ed annullando il reale e l'immaginario, avremo:

$$\begin{aligned} AB \cos (AB, I) + BC \cos (BC, I) + CA \cos (CA, I) &= 0 \\ AB \sin (AB, I) + BC \sin (BC, I) + CA \sin (CA, I) &= 0 \end{aligned}$$

che sono note formule fondamentali nella trigonometria.

17. Se A, B sono punti distinti, l'equazione:

$$(ABP) = 1$$

non rappresenta, rispetto a P , punti a distanza finita. Si può ritenere come l'equazione della retta all'infinito del piano. Indicheremo che P è all'infinito scrivendo P_∞ , ed allora qualunque sia P_∞ , sempre sarà:

$$(ABP_\infty) = 1.$$

18. L'equazione

$$(PAB)^n = 1$$

dove n è un numero intero, ed A, B sono punti fissi distinti, rappresenta rispetto a P , n punti, che sono i vertici del poligono regolare di n lati inscritto nel circolo di centro B e raggio BA .

19. Posto

$$(ABC) = e^{\frac{\pi i}{3}}$$

sarà:

$$\begin{aligned} (ABC) &= (BCA) = (CAB) = e^{\frac{\pi i}{3}} \\ (ACB) &= (CBA) = (BAC) = e^{-\frac{\pi i}{3}} \end{aligned}$$

ed i punti A, B, C sono i vertici di un triangolo equilatero.

Se

$$\text{imm}(ABC) = 0$$

i punti A, B, C sono allineati.

Se

$$\text{reale}(ABC) = 0$$

il triangolo ACB è rettangolo in C.

$$(ABC) = -1. = . C = (A + B) / 2 = \text{punto medio di AB.}$$

Se $(ABC) = (A'B'C')$, i due triangoli ABC, A'B'C' sono direttamente simili.

20. Tra quattro punti ed un vettore I del piano sussiste la relazione

$$(A - B) \cdot \frac{C - D}{I} + (A - C) \cdot \frac{D - B}{I} + (A - D) \cdot \frac{B - C}{I} = 0. \quad (1)$$

Essa si deduce dalle identità

$$(C - D) / I = (A - D) / I - (A - C) / I$$

$$(D - B) / I = (A - B) / I - (A - D) / I$$

$$(B - C) / I = (A - C) / I - (A - B) / I$$

moltiplicando la prima per A - B, la seconda per A - C, la terza per A - D, sommando e riducendo.

Dividendo nella (1) per $(B - D) \cdot \frac{C - B}{I}$, si ricava:

$$(ABCD) + (ACBD) = 1. \quad (2)$$

La (1) e la (2) sono relazioni fra quattro punti di un piano analoghe a quelle che sussistono fra quattro punti allineati. Esse contengono notevoli relazioni relative al quadrangolo. Se nella (1) si divide per un vettore J e quindi si uguagliano a zero la parte reale e la parte immaginaria dei due membri, si ottiene:

$$\Sigma AB \cdot CD \cos(AB, J + CD, I) = 0$$

$$\Sigma AB \cdot CD \sin(AB, J + CD, I) = 0.$$

Dalla (2) si deduce:

$$AB \cdot CD \cos(\widehat{CBA} - \widehat{CDA}) + AC \cdot DB \cos(\widehat{BCA} - \widehat{BDA}) = AD \cdot BC$$

$$AB \cdot CD \sin(\widehat{CBA} - \widehat{CDA}) + AC \cdot DB \sin(\widehat{BCA} - \widehat{BDA}) = 0.$$

Da queste formule e dalle altre che si deducono permutando le lettere, si può ricavare tutta la *quadrangolometria*.

Se ABCD è un quadrangolo inscrittibile, ed A, D e B, C sono vertici opposti, sarà:

$$\widehat{CBA} = \widehat{CDA}; \quad \widehat{BCA} = \widehat{BDA},$$

quindi

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB = AD \cdot BC$$

che è la relazione di Tolomeo.

21. La condizione affinché i quattro punti A, B, C, D siano conciclici è espressa da:

$$\text{imm}(ABCD) = 0.$$

Posto $(ABCD) = c \Rightarrow$

$$D = \frac{cA - (ABC)B}{c - (ABC)}.$$

Se c è un numero reale, D descrive la circonferenza circoscritta ad ABC. Se segue che

$$\frac{qA - (ABC)B}{q - (ABC)}$$

rappresenta la classe dei punti della circonferenza ABC.

Se A, B, C sono allineati, sarà

$$\text{imm}(ABC) = 0, \quad \text{imm}(ABCD) = 0 \quad \text{quindi} \quad \text{imm}(BCD) = 0,$$

ed il punto D è sulla retta ABC.

22. Posto $(ABCD) = c \Rightarrow$

$$\begin{aligned} (ACBD) &= 1 - c; & (ABDC) &= 1/c; & (ACDB) &= 1/(1 - c); \\ (ADBC) &= (c - 1)/c; & (ADCB) &= c/(c - 1) \end{aligned}$$

come nel caso di punti allineati.

23. Posto

$$(ABP_r) = c \Rightarrow P_r = (A - c_r B) / (1 - c_r) \quad \text{imm } r = 1, 2, 3, 4,$$

sarà

$$(P_1 P_2 P_3) = \frac{(c_3 - c_1)(P_1 AB)}{(c_3 - c_2)(P_2 AB)} = \frac{c_3 - c_1}{c_3 - c_2} (P_1 P_2 B)$$

$$(P_1 P_3 P_4) = \frac{c_4 - c_1}{c_4 - c_2} (P_1 P_3 B)$$

quindi

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{c_1 - c_3}{c_2 - c_3} : \frac{c_1 - c_4}{c_2 - c_4} = (c_1 c_3 c_3 c_4).$$

Se

$$(ABP'_r) = (ABP_r) \quad \text{con} \quad r = 1, 2, 3, 4,$$

sarà

$$(P'_1 P'_2 P'_3 P'_4) = (P_1 P_2 P_3 P_4).$$

24. Il complesso $(ABCD)$ si può assumere come coordinata del punto P nel piano ABC rispetto alla terna ABC. Posto

$$(ABCP) = c$$

sarà

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC} / \text{mod } c$$

$$\text{ang}(BPA) = \text{ang} BCA - \arg c.$$

25. Siano $A_1 A_2 A_3$ i vertici di un triangolo, a_1, a_2, a_3 i suoi lati, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ i suoi angoli contati nel verso positivo delle rotazioni; ogni

altro punto P del piano è determinato dalla conoscenza di uno dei sei birapporti $(A_r A_s A_t P)$ dove r, s, t è una delle permutazioni degli indici 1, 2, 3. Posto:

$$\text{sarà: } \left. \begin{aligned} (A_1 A_2 A_3 P) &= c = 1 / c_2 \\ (A_2 A_3 A_1 P) &= 1 - \frac{1}{c} = 1 / c_1 \\ (A_3 A_1 A_2 P) &= \frac{1}{1 - c} = 1 / c_3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

quindi:

$$\left. \begin{aligned} (A_2 A_3 P) &= c_1 (A_2 A_3 A_1) \\ (A_3 A_1 P) &= c_2 (A_3 A_1 A_2) \\ (A_1 A_2 P) &= c_3 (A_1 A_2 A_3) \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

26. La coordinata *birapporto complesso* permette di dedurre molto semplicemente tutti gli altri sistemi di coordinate nel piano, ed in particolare quei sistemi di speciale importanza nella *geometria del triangolo*. Posto:

$$c_r = \rho_r e^{i \varphi_r} \quad \text{con} \quad r = 1, 2, 3$$

sarà:

$$c_1 c_2 c_3 = -1$$

quindi:

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 = 1; \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi.$$

Siano $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ le coordinate angolari di P rispetto al triangolo $A_1 A_2 A_3$ (coordinate di Poulain) sarà:

$$\lambda_r = \alpha_r + \varphi_r \quad \text{con} \quad r = 1, 2, 3.$$

Siano d_1, d_2, d_3 le distanze di P dai vertici. Dalla (1') \Rightarrow .

$$\frac{d_2}{d_3} = \frac{a_3}{a_2} \rho_1; \quad \frac{d_3}{d_1} = \frac{a_1}{a_3} \rho_2; \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{a_2}{a_1} \rho_3,$$

da cui:

$$a_1 d_1 : a_2 d_2 : a_3 d_3 = \sqrt[3]{\frac{\rho_2}{\rho_3}} : \sqrt[3]{\frac{\rho_3}{\rho_1}} : \sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$$

e quindi:

$$d_1 : d_2 : d_3 = \frac{1}{a_1} \sqrt[3]{\frac{\rho_2}{\rho_3}} : \frac{1}{a_2} \sqrt[3]{\frac{\rho_3}{\rho_1}} : \frac{1}{a_3} \sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$$

Siano $x_1 x_2 x_3$ le coordinate baricentriche reali di P, sarà:

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= \text{area } A_2 A_3 P : \text{area } A_3 A_1 P : \text{area } A_1 A_2 P \\ &= d_2 d_3 \text{sen } \lambda_1 : d_1 d_3 \text{sen } \lambda_2 : d_1 d_2 \text{sen } \lambda_3 \\ &= \frac{\text{sen } \lambda_1}{d_1} : \frac{\text{sen } \lambda_2}{d_2} : \frac{\text{sen } \lambda_3}{d_3} \\ &= a_1 \sqrt[3]{\frac{\rho_3}{\rho_2}} \text{sen}(\alpha_1 + \varphi_1) : a_2 \sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\rho_3}} \text{sen}(\alpha_2 + \varphi_2) : a_3 \sqrt[3]{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \text{sen}(\alpha_3 + \varphi_3). \end{aligned}$$

Siano y_1, y_2, y_3 le coordinate trilineari di P rispetto ad A_1, A_2, A_3 , sarà:

$$y_1 : y_2 : y_3 = \frac{x_1}{a_1} : \frac{x_2}{a_2} : \frac{x_3}{a_3}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\rho_3}{\rho_2}} \operatorname{sen}(\alpha_1 + \varphi_1) : \sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\rho_3}} \operatorname{sen}(\alpha_1 + \varphi_2) : \sqrt[3]{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \operatorname{sen}(\alpha_3 + \varphi_3).$$

27. Ad ogni punto P_3 di coordinata $(A_1 A_2 A_3 P_3) = c$ si possono associare due altri punti P_1 e P_2 definiti dalle relazioni:

$$(A_2 A_3 A_1 P_1) = c ; \quad (A_3 A_1 A_2 P_2) = c$$

ed altri tre punti Q_1, Q_2, Q_3 definiti dalle relazioni:

$$(A_2 A_3 A_1 Q_1) = (A_3 A_1 A_2 Q_2) = (A_1 A_2 A_3 Q_3) = \operatorname{conj} c.$$

Lo studio delle relative posizioni della terna P_1, P_2, P_3 e Q_1, Q_2, Q_3 fra di loro e rispetto al triangolo A_1, A_2, A_3 può essere di qualche interesse alla geometria del triangolo, e formerà oggetto di un altro lavoro.

Gruppi armonici - Quadrangolo armonico.

28. Se

$$(ABCD) = -1$$

dirò che i punti A, B, C, D formano un *gruppo armonico* e che $ABCD$ è un *quadrangolo armonico*.

Essendo

$$\operatorname{imm}(ABCD) = 0$$

il quadrangolo armonico è *inscrittibile*, ed in esso sono vertici opposti A, B e C, D .

29. Dalla definizione si deduce:

$$(ABC) = - (ABD) . = .$$

$$\frac{A - C}{B - C} = \frac{D - A}{B - D}$$

quindi:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} . = . AC \cdot BD = AD \cdot BC$$

$$\widehat{BCA} - \widehat{BDA} = \pi . = . \widehat{BCA} + \widehat{ADB} = \pi .$$

I punti D, C sono da bande opposte rispetto alla retta AB , quindi le coppie AB e CD s'intrecciano o si separano sulla circonferenza $ABCD$. Le bisettrici interne ed esterne degli angoli ACB, BDC s'incontrano rispettivamente sulla retta AB , e lo stesso avviene per le bisettrici degli angoli CAD, DBC .

Dunque: « Il quadrangolo armonico è inscrittibile e convesso; il prodotto di due lati opposti è uguale al prodotto degli altri due; le bisettrici di due angoli opposti si incontrano sulla diagonale che unisce i vertici degli altri due angoli opposti ».

Per costruire il coniugato armonico di C rispetto alla coppia A, B, si descrive la circonferenza ABC; siano M, N gli estremi del diametro normale ad AB; si unisce M (od N) con C, e si unisce con N (o con M) il punto in cui questa retta incontra AB. Il punto D in cui questa seconda retta incontra la circonferenza è il cercato.

30. Dalla relazione $(ABCD) = -1$ si deduce ancora:

$$\begin{aligned} (ABC) + (ABD) = 0 & \quad . = . \quad (BAC) + (BAD) = 0 \quad . = . \\ & \quad . = . \quad 1 - (BCA) + 1 - (BDA) = 0 \\ & \quad . = . \quad (BCA) + (BDA) = 2 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{\cos \widehat{CAB}}{AC} + \frac{\cos \widehat{DAB}}{AD} &= \frac{2}{AB} \\ \frac{\sin \widehat{CAB}}{AC} &= \frac{\sin \widehat{BAD}}{AD} \end{aligned}$$

ossia: « In un quadrangolo armonico il reciproco di una diagonale è la semisomma dei reciproci dei due lati che partono da un estremo di essa, moltiplicati questi reciproci rispettivamente per i coseni degli angoli che i lati stessi fanno colla diagonale compresa; due lati adiacenti sono proporzionali ai seni degli angoli che essi fanno colla diagonale compresa ».

La seconda proprietà si può enunciare dicendo che: « due lati adiacenti sono proporzionali alle loro distanze da un punto qualunque della diagonale compresa ».

Ne consegue che « i lati di un quadrangolo armonico sono proporzionali alle loro distanze dal punto d'incontro delle diagonali ». (*)

31. Sia O il punto medio di AB, per cui $A - O = O - B$, componendo e dividendo nella: $(A - C) / (B - C) = (D - A) / (B - D)$. \square .

$$(CAO) = (ADO) \quad . = . \quad \frac{C - O}{A - O} = \frac{A - O}{D - O}$$

Il vettore $A - O$ è medio proporzionale tra i vettori $C - O$ e $D - O$. Ne consegue che OA è media proporzionale tra OC ed OD e che AB biseca internamente l'angolo COD. \blacklozenge

Dati C, D, ed il punto O medio di AB, si possono costruire A e B cercando i vettori $A - O$, $O - B$ medi proporzionali tra i vettori $C - O$ e $D - O$, colla costruzione già indicata.

(*) La denominazione di *armonico* a questo quadrangolo fu proposto da Neuberg " Sur le quadrilatère harmonique ", Mathesis, 1885. Il punto d'incontro delle diagonali si chiama " punto di Lemoine del quadrilatero " perchè analogo al punto di Lemoine del triangolo. Sullo stesso argomento vedi L. TÉRY. " Note sur le quadrilatère harmonique ", Journal de Math. elem., 1887. Queste notizie sono raccolte dalla *Recente Geom. del triang.* di C. ALLASIA, 1900, pag. 177. Gli autori citati giunsero alla considerazione di questo quadrilatero seguendo considerazioni diverse dalle mie.

32. Se i punti ABCD si proiettano da un punto S della circonferenza circoscritta, il fascio S (A, B, C, D) è armonico. Infatti chiamando a, b, c, d i quattro raggi, sarà:

$$(abcd) = \frac{\text{sen } ac}{\text{sen } bc} : \frac{\text{sen } ad}{\text{sen } bd} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{-AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = -1.$$

Involuzione armonica nel piano.

33. Siano A, B due punti fissi del piano; la relazione fra due punti qualunque P, Q definita dalla condizione

$$(ABPQ) = -1$$

è una corrispondenza univoca e reciproca involutoria tra i punti del piano; la chiamerò una *involuzione armonica*.

Sarà:

$$(ABP) + (ABQ) = 0$$

ossia:

$$Q = \frac{A + (ABP)B}{1 + (ABP)}; \quad P = \frac{A + (ABQ)B}{1 + (ABQ)}.$$

Sia O il punto corrispondente a P_∞ per cui $(ABP_\infty) = 1$, sarà:

$$O = \frac{A + B}{2}.$$

Chiamerò O il *punto centrale* o *centro* della involuzione. Esso corrisponde ai punti della retta all'infinito. In questa corrispondenza ad ogni punto a distanza finita diverso da O corrisponde un punto unico a distanza finita; al punto O corrispondono i punti della retta all'infinito, ed ai diversi punti della retta all'infinito corrisponde il punto O.

34. Ai punti $P_1P_2P_3P_4$ corrispondono i punti $Q_1Q_2Q_3Q_4$ tali che:

$$(Q_1Q_2Q_3Q_4) = (P_1P_2P_3P_4).$$

Ad A corrisponde A; a B corrisponde B; i punti A e B sono uniti, e non ve ne sono altri.

Essendo:

$$(AQO) = (PAO)$$

sarà:

$$OP \cdot OQ = OA^2 = \text{costante}$$

e le rette OP, OQ sono simmetriche rispetto ad AB.

Ne consegue che l'involuzione armonica è il prodotto di una inversione rispetto ad O come centro, con costante uguale ad OA^2 , per una simmetria ortogonale rispetto ad AB.

35. In questa involuzione ad ogni retta uscente da O corrisponde la sua simmetrica rispetto ad AB. Sono rette unite la retta AB che chia-

meremo *asse principale*, e la sua normale per O che chiameremo *asse secondario*.

Sull'asse principale i punti corrispondenti costituiscono una involuzione quadratica iperbolica, e sull'asse secondario una involuzione quadratica ellittica. In quest'ultima sono equi-coniugati i punti $(A + Bz)/(1 + iz)$ ed $(A - Bz)/(1 - iz)$ vertici opposti nel quadrato di diagonale AB.

36. Ponendo nella relazione

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = (Q_1 Q_2 Q_3 Q_4)$$

$$P_4 = O_\infty$$

si ha:

$$(P_1 P_2 P_3) = (Q_1 Q_2 Q_3 O)$$

e ponendo in questa

$$Q_3 = O_\infty$$

si deduce:

$$(P_1 P_2 O) = (Q_1 Q_2 O).$$

Se i punti P_1, P_2, P_3 sono allineati, e la retta $P_1 P_2 P_3$ non passa per O, sarà:

$$\text{imm}(P_1 P_2 P_3) = 0, \quad \text{imm}(P_1 P_2 O) \neq 0$$

quindi:

$$\text{imm}(Q_1 Q_2 Q_3 O) = 0, \quad \text{imm}(Q_1 Q_2 O) \neq 0$$

ed i punti Q_1, Q_2, Q_3, O sono conciclici.

Dunque: « Ad ogni retta non passante per O corrisponde una circonferenza passante per O », e viceversa: « Ad ogni circonferenza passante per O corrisponde una retta non passante per O ».

37. « Ad ogni circonferenza non passante per O corrisponde una circonferenza non passante per O ». Infatti

$$\text{imm}(P_1 P_2 P_3 P_4) = \text{imm}(Q_1 Q_2 Q_3 Q_4)$$

quindi se P_1, P_2, P_3, P_4 sono conciclici, sarà

$$\text{imm}(P_1 P_2 P_3 P_4) = 0, \quad \text{imm}(Q_1 Q_2 Q_3 Q_4) = 0$$

ed anche Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 saranno conciclici.

Le circonferenze passanti per $A_1 A_2$ sono circonferenze unite, cioè corrispondenti a se stesse. Non ce ne sono altre.

Queste proprietà confermano note proposizioni della teoria della inversione combinata colla simmetria.

38. Dalla relazione

$$(P_1 P_2 P_3 Q_1) = (Q_1 Q_2 Q_3 P_1)$$

si

$$(Q_1 Q_2 Q_3) = \frac{P_1 - P_3}{P_2 - P_3} \cdot \frac{P_2 - Q_1}{P_1 - Q_1} \cdot \frac{Q_1 - P_1}{Q_2 - P_1} = \frac{P_3 - P_1}{Q_2 - P_1} \cdot \frac{Q_1 - P_3}{P_3 - P_2} = (P_3 Q_2 P_1) (Q_1 P_3 P_2).$$

Scambiando Q_1 con P_1 , Q_2 con P_2 si ha ancora:

$$(P_1 P_2 Q_3) = (P_3 P_2 Q_1) (P_1 P_3 Q_2).$$

Ne consegue che se P_3 è il punto d'incontro di P_1Q_2 con P_2Q_1 il suo corrispondente Q_3 è allineato con Q_1Q_2 ed anche con P_1P_2 ; quindi, « al punto d'incontro di P_1Q_2 con P_2Q_1 corrisponde il punto d'incontro di P_1P_2 con Q_1Q_2 ».

Alla circonferenza $P_1P_2P_3$ corrisponderà la retta $Q_1Q_2Q_3$ ed alla circonferenza $Q_1Q_2P_3$ corrisponderà la retta $P_1P_2Q_3$; ne consegue che le due circonferenze $P_1P_2P_3$, $Q_1Q_2Q_3$ corrispondenti a due rette, s'incontrano oltre che in P_3 anche in O .

39. Le proprietà enunciate nel n. 38, si possono riunire nell'enunciato: « In un quadrilatero piano, le tre coppie di vertici opposti si corrispondono in una involuzione armonica; ad ogni lato del quadrilatero corrisponde la circonferenza circoscritta al triangolo determinato dagli altri tre lati; il punto comune a queste quattro circonferenze (che è il fuoco della parabola inscritta nel quadrilatero) è il centro della involuzione ».

Od anche: « Ogni trasversale non angolare incontra i lati di un triangolo in tre punti che sono coniugati dei vertici opposti in una involuzione armonica. Il luogo dei centri delle involuzioni corrispondenti a tutte le trasversali del piano è la circonferenza circoscritta al triangolo ».

40. L'involuzione armonica è determinata da due coppie di punti corrispondenti. Siano P_1, Q_1 ; P_2, Q_2 ; sia P_3 il punto d'incontro di P_1Q_2 con P_2Q_1 . Le circonferenze per $P_1P_2P_3$ e per $Q_1Q_2P_3$ si incontrano in O che sarà il punto centrale. La bisettrice interna comune agli angoli P_1OQ_1 , P_2OQ_2 sarà l'asse principale e la bisettrice esterna sarà l'asse secondario. Sull'asse principale stanno i punti uniti equidistanti da O della media proporzionale tra OP_1 ed OQ_1 .

Se i punti $P_1Q_1P_2$ sono allineati, e Q_2 non è sulla retta P_1P_2 , il punto O è sulla circonferenza $P_1Q_1Q_2$. Sia M il punto medio dell'arco P_1Q_1 , che non contiene Q_2 ; posto $\widehat{MN} = \widehat{Q_2M}$, conduco P_2N che incontrerà la circonferenza in O . Infatti gli angoli P_1OQ_1 , P_2OQ_2 hanno per bisettrice interna comune la retta OM , i triangoli OP_2Q_1 , OP_1Q_2 sono simili, $OP_1 \cdot OQ_1 = OP_2 \cdot OQ_2$, quindi: $(P_1Q_2O) = (O_2P_1O)$ come deve essere.

41. Se i punti $P_1P_2Q_1Q_2$ sono allineati, la retta r che li contiene è un asse, ossia una retta unita sulla quale i punti corrispondenti costituiscono una involuzione rettilinea ordinaria. Si determini con uno dei noti metodi il punto O della r per cui $OP_1 \cdot OQ_1 = OP_2 \cdot OQ_2$. Se O è esterno al segmento P_1Q_1 e quindi anche al segmento P_2Q_2 , la bisettrice interna dell'angolo P_1OQ_1 coincide colla stessa r che sarà perciò asse principale; i punti uniti saranno i due punti di questa retta equidistanti da O della media proporzionale tra OP_1 ed OA_1 . La bisettrice esterna coincide colla normale per O alla r , ed è l'asse secondario su cui stanno i punti equiconiugati che sono equidistanti da O come i punti uniti.

Se O risulta interno a P_1Q_1 e quindi anche a P_2Q_2 , l'involuzione sulla r è ellittica, e la r sarà l'asse secondario, mentre l'asse principale è la normale per O alla r . Le circonferenze di diametro P_1Q_1 , P_2Q_2 si tagliano

nei punti uniti A e B, e la circonferenza di diametro AB taglia la r nelle coppie di punti equiconiugati.

42. Da quanto precede risulta che « l'involutione ordinaria su di una retta è contenuta nella involuzione armonica nel piano, ed ogni involuzione ordinaria su di una retta definisce e determina una involuzione armonica in ogni piano passante per la retta ».

Seguendo l'ordine di idee da me indicate si può affermare che: « Nella corrispondenza involutiva quadratica tra i punti di una retta *esistono sempre due elementi uniti*, che o sono sulla retta stessa (involuzione iperbolica), oppure sono fuori della retta (involuzione ellittica) ». Od anche « Ad ogni involuzione quadratica definita su di una retta in un piano è associata una involuzione su di un'altra retta del piano normale alla prima; una delle due è sempre ellittica e l'altra sempre iperbolica ».

43. La condizione affinché tre coppie di punti P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 appartengano ad una involuzione armonica è espressa dalla relazione del N. (34):

$$(P_1P_2P_3Q_1) = (Q_1Q_2Q_3P_1)$$

che si può mettere sotto la forma:

$$(P_1P_3Q_3)(P_2P_3Q_1)(P_3P_1Q_2) = 1$$

oppure

$$(Q_1Q_2P_3)(Q_2Q_3P_1)(Q_3Q_1P_2) = 1.$$

44. Abbiamo osservato che ad ogni retta r uscente da O corrisponde una retta r' uscente da O e che r, r' sono simmetriche rispetto agli assi. I punti coniugati sulle due rette si corrispondono in una omografia, perchè $OP \cdot OQ = \text{costante}$. Ne segue che le rette PQ inviluppano una iperbole che ha per assintoti le due rette rr' ed ha per fuochi i punti uniti. Variando le coppie rr' si ha un fascio di iperboli confocali:

45. Se il punto unito B è all'infinito, anche O è all'infinito. Sia A l'unico punto unito a distanza finita, sarà:

$$(APQ) = -1$$

quindi:

$$P + Q = 2A.$$

I punti corrispondenti P, Q sono simmetrici rispetto ad A. L'involuzione armonica si riduce ad una simmetria centrale.

Gruppi e quadrangoli equianarmonici.

46. Se

$$(ABCD) = e^{\frac{\pi i}{3}}$$

dirò che i punti A, B, C, D formano un gruppo *equianarmonico* e che il quadrangolo ABCD è *equianarmonico*.

Ne consegue:

$$(ABCD) = (BCAD) = (CABD) = e^{\frac{\pi i}{3}}$$

$$(ACBD) = (CBAD) = (BACD) = e^{-\frac{\pi i}{3}}$$

ossia: « Il quarto equianarmonico dopo tre punti dati non cambia permutando circolarmente i punti stessi; dipende quindi dalla terna dei punti ABC presa in uno dei suoi due ordini ciclici ».

Invertendo l'ordine ciclico della terna ABC si ottiene un altro punto D' definito da:

$$(ABCD') = e^{-\frac{\pi i}{3}}.$$

Ad ogni triangolo ABC corrispondono due punti che con esso formano un quadrangolo equianarmonico. Questi punti sono stati chiamati *centri isodinamici*. (*)

47. Il quadrangolo equianarmonico non è inscrittibile, ed i vertici non possono essere allineati. Essendo:

$$\text{mod}(ABCD) = 1 = \text{mod}(ACBD)$$

sarà

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}; \quad \frac{AB}{CB} = \frac{AD}{CD}$$

ossia

$$AC \cdot BD = BC \cdot AD = AB \cdot CD$$

quindi: « Nel quadrangolo equianarmonico il prodotto dei lati opposti è costante » od anche « le distanze di un vertice dagli altri tre sono inversamente proporzionali ai lati opposti a questi tre vertici nel triangolo da essi determinato ».

Ne consegue che le bisettrici di due angoli opposti si incontrano sul lato opposto a questi angoli. Per esempio le bisettrici di \widehat{BAC} , \widehat{BDC} si incontrano sulla BC.

48. Dalla relazione fondamentale tra i punti A, B, C, D si deduce:

$$(ABD) = (ABC) e^{-\frac{\pi i}{3}}$$

$$(BCD) = (BCA) e^{-\frac{\pi i}{3}}$$

$$(CAD) = (CAB) e^{-\frac{\pi i}{2}}$$

da cui:

$$\widehat{BDA} = \widehat{BCA} - \frac{\pi}{3}$$

$$\widehat{CDA} = \widehat{CAB} - \frac{\pi}{3}$$

$$\widehat{ADB} = \widehat{ABC} - \frac{\pi}{3}.$$

(*) H. KIEHL, *Zur Theorie der Transversalen*, Progr. di Bromberg, (1881). AZZARELLI, *Atti R. Acc. dei Lincei*, (1880). BOUTY, *Sur les centres isodynamiques et sur les centres isogones*, "Journal de Math. elem." de DE-LONGCHAMPS, Paris, 101-102 (1880). Ho estratto queste notizie dal *Saggio Terminologico-Bibliografico sulla Recente Geom. del triangolo* di C. ALLABIA, 1902, pag. 22.

Se chiamiamo α, β, γ gli angoli di ABC, le coordinate angolari di D rispetto ad ABC saranno

$$\alpha - \frac{\pi}{3}, \quad \beta - \frac{\pi}{3}, \quad \gamma - \frac{\pi}{3}$$

e le coordinate angolari di D' per cui $(ABCD') = e^{-\frac{\pi i}{3}}$, saranno

$$\alpha + \frac{\pi}{3}, \quad \beta + \frac{\pi}{3}, \quad \gamma + \frac{\pi}{3}.$$

Ne segue che le coordinate baricentriche (reali) di D e di D' rispetto ad ABC saranno

$$\text{sen } \alpha \text{ sen } \left(\alpha \mp \frac{\pi}{3} \right), \quad \text{sen } \beta \text{ sen } \left(\beta \mp \frac{\pi}{3} \right), \quad \text{sen } \gamma \text{ sen } \left(\gamma \mp \frac{\pi}{3} \right)$$

dove il segno $-$ corrisponde a D, il segno $+$ a D'.

Le coordinate trilineari di D e di D' rispetto ad A, B, C saranno

$$\text{sen } \left(\alpha \mp \frac{\pi}{3} \right), \quad \text{sen } \left(\beta \mp \frac{\pi}{3} \right), \quad \text{sen } \left(\gamma \mp \frac{\pi}{3} \right).$$

49. Accennerò ad alcune altre proprietà dei punti D e D' ampiamente svolte nei lavori citati, ma che d'altra parte conseguono immediatamente dalle formule premesse.

« I punti D, D' stanno sulla retta che unisce il circumcentro di coordinate trilineari $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ col punto di Lemoine di coordinate tril. $(\text{sen } \alpha, \text{sen } \beta, \text{sen } \gamma)$ e dividono armonicamente questa coppia di punti ».

« Le rette AD, BD, CD incontrano il circumcentro nei tre vertici di un triangolo equilatero, e lo stesso avviene per le rette AD', ecc. »

« Se A' è il coniugato armonico di A rispetto a BC, B' il coniugato di B rispetto a CA, C' il coniugato di C rispetto ad AB, le circonferenze che passano per A, A' col centro su BC, per B, B' col centro su CA per C, C' col centro su AB, sono le tre circonferenze di Apollonio relative al triangolo ABC; essi s'incontrano nei due punti D e D' ».

50. Se A, B, C sono allineati, il punto D per cui $(ABCD) = e^{\frac{\pi i}{3}}$ è il punto da cui i segmenti AB, BC sono veduti sotto l'angolo $\frac{\pi}{3}$.

Se $(ABC) = e^{\frac{\pi i}{3}}$, i punti ABC sono vertici di un triangolo equilatero. In questo caso $(ABD) = 1$, il punto D è all'infinito.

Corrispondenza pseudo-omografica tra i punti di un piano.

51. Se tra due punti P, P' variabili di un piano e due punti fissi: $A_1 A_2$ del piano stesso stabilisco la relazione:

$$(A_1 A_2 P P') = c \tag{1}$$

dove c è un complesso diverso da 1 e da 0, sarà

$$(A_1 A_2 P') = (A_1 A_2 P) / c \quad (1)$$

$$P' = \frac{cA_1 - (A_1 A_2 P) A_2}{c - (A_1 A_2 P)} \quad (1'')$$

$$P = \frac{A_1 - c(A_1 A_2 P') A_2}{1 - c(A_1 A_2 P') B} \quad (1''')$$

Ad ogni punto P corrisponde un punto P' , ad ogni P' corrisponde un P ; a questa corrispondenza dò il nome di *pseudo-omografia*.

52. Posto

$$P = A_1 \Rightarrow (A_1 A_2 P) = 0 \Rightarrow P' = A_1$$

$$P = A_2 \Rightarrow P' = A_2$$

i punti A_1 ed A_2 sono punti uniti e non ce ne sono altri, come facilmente si dimostra.

53. Posto

$$P = J_\infty \Rightarrow (A_1 A_2 J) = 1/c \Rightarrow J = \frac{cA_1 - A_2}{c - 1} \quad (2)$$

$$P' = I_\infty \Rightarrow (A_1 A_2 I) = c \Rightarrow I = \frac{A_1 - cA_2}{1 - c} \quad (2')$$

I punti I ed J' saranno i punti limiti o punti di fuga. Sono legati ai punti $A_1 A_2$ dalle relazioni

$$(A_1 A_2 I) (A_1 A_2 J') = 1. \quad (3)$$

Sommando le espressioni di I ed J' si trova:

$$I + J' = A_1 + A_2 \Rightarrow I - A_1 = A_2 - J'$$

quindi « Nella pseudo-omografia i punti limiti sono vertici opposti di un parallelogrammo di cui i punti uniti sono gli altri due vertici ».

54. Se

$$\text{mod } c = 1, \quad \text{mod } (A_1 A_2 I) = \text{mod } (A_1 A_2 J')$$

i punti I, J' sono equidistanti da $A_1 A_2$ ed il parallelogrammo $A_1 I A_2 J'$ è un rombo. Se

$$\text{imm } c = 0, \quad \text{imm } (A_1 A_2 I) = 0, \quad \text{imm } (A_1 A_2 J') = 0$$

i punti I, J' sono allineati con $A_1 A_2$.

Se $\text{mod } c \neq 1$; $\text{imm } c \neq 0$ le rette IJ' ed $A_1 A_2$ non sono ortogonali e non sono coincidenti.

55. Nella seconda ipotesi, $\text{imm } c = 0$, c è un numero reale; e se P è sulla retta $A_1 A_2$, anche P' appartiene ad essa; la retta $A_1 A_2$ è unita ed i punti PP' si corrispondono su di essa in una omografia ordinaria in cui $A_1 A_2$ sono i punti uniti, IJ' i punti limiti, c la caratteristica (reale). Non ci sono altre rette unite.

Nella prima ipotesi, $\text{mod } c = 1$, è unita la retta IJ' ; l'omografia su di essa è ellittica, e non ci sono altre rette unite.

Nella terza ipotesi non ci sono rette unite. Queste proprietà risulteranno in seguito.

56. Siano P_r con $r = 1, 2, 3, 4$ quattro punti corrispondenti a P_r con $r = 1, 2, 3, 4$ dalle (1) . \supset .

$$(P'_1 P'_2 P'_3 P'_4) = (P_1 P_2 P_3 P_4) \quad (4)$$

ossia « il birapporto di quattro punti di un piano è uguale al birapporto dei quattro corrispondenti nell'altro » . (*)

57. Applicando la (4) a due coppie $P_1, P_2; P'_1, P'_2$ ed ai punti limiti, avremo:

$$(P'_1 P'_2 J') = 1 / (P_1 P_2 I) = (P_3 P_1 I) \quad (5)$$

ossia:

$$\frac{P'_1 - J'}{P'_2 - J'} = \frac{P_3 - I}{P_1 - I} \quad (5')$$

quindi: « Due segmenti corrispondenti determinano coi punti limiti triangoli inversamente simili ». In altre parole: « Il prodotto delle distanze di due punti corrispondenti dai rispettivi punti limiti è costante, e gli angoli sotto cui dai punti limiti sono veduti due segmenti corrispondenti sono uguali ed opposti ».

In particolare:

$$(P' A_1 J') = (A_1 P I) \quad (6)$$

ossia:

$$\begin{aligned} IP \cdot J'P' &= IA_1 \cdot J'A_1 = JA_2 \cdot J'A_2 \\ A_1 \widehat{J'P'} &= P \widehat{IA_1}, \quad A_2 \widehat{J'P'} = P \widehat{IA_2}. \end{aligned}$$

58. Ne consegue che « ad ogni retta uscente da I corrisponde una retta uscente da J', e la punteggiata descritta da P sulla IP è omografica a quella descritta da P' sulla J'P' ».

Alla retta IA_1 corrisponde la retta $J'A_1$ ed alla retta IA_2 corrisponde la retta $J'A_2$. Le due coppie di punteggiate sono prospettive perchè nella prima coppia è unito il punto A_1 e nella seconda è unito il punto A_2 . Le due punteggiate IA_1 ed $J'A_1$ sono prospettive rispetto ad A_2 e le due punteggiate $IA_2, J'A_2$ sono prospettive rispetto ad A_1 .

Infatti dalla (6) con semplici trasformazioni si deduce:

$$\begin{aligned} (PPA_1) &= (A_2PI) ; \quad (PP'A_2) = (A_1PI) \\ \text{se } P \text{ è sulla } A_1I, P' \text{ è sulla } PA_2, \text{ quindi } PP' \text{ passa per } A_2 \\ \text{se } P \text{ è sulla } A_2I, P' \text{ è sulla } PA_1, \text{ quindi } PP' \text{ passa per } A_1. \end{aligned}$$

59. I fasci di centro I ed J' costituiti dalle rette corrispondenti sono inversamente uguali. Infatti $A_1 \widehat{IP} = P' \widehat{J'A_1}$, cioè l'angolo che il raggio mobile IP fa col raggio fisso IA_1 è uguale ed opposto all'angolo che il raggio corrispondente J'P' fa con $J'A_1$. Sono raggi paralleli le bisettrici

(*) Questa proprietà potrebbe servire di definizione della pseudo-omografia tra due piani sovrapposti, ed anche fra due piani distinti sui quali siano definiti i prodotti dei g' per i v . Si potrebbe anche applicare la definizione di Staudt per le punteggiate omografiche a definir la pseudo-omografia, cioè far corrispondere punto a punto due piani per modo che ai vertici di un quadrilatero armonico di un piano corrispondano i vertici di un quadrilatero armonico dell'altro.

degli angoli interni ed esterni del parallelogramma in I ed J' . Ne segue che la conica determinata dall'incontro dei raggi corrispondenti è una iperbole equilatera che passa per i vertici del parallelogramma fondamentale $A_1 A_2 I J'$; ha per centro il centro del parallelogramma, ed ha per assintoti le parallele alle bisettrici degli angoli opposti.

Se $\text{mod } c \neq 1$, $\text{imm } c \neq 0$ le bisettrici degli angoli interni in I, J' non coincidono, e la retta IJ' non è unita. Non vi sono rette unite (vedi n. 55).

Se $\text{mod } c = 1$, le bisettrici degli angoli interni in I, J' coincidono e la retta IJ' è unita. In questo caso i fasci di centro I, J' sono prospettivi e si incontrano sulla retta $A_1 A_2$.

Se $\text{imm } c = 0$, i punti $I J' A_1 A_2$ sono allineati. I fasci I, J' sono ancora prospettivi perchè il raggio IA_1 coincidente con $J'A_1$ è unito; l'asse di prospettività è la normale ad $A_1 A_2$ e ad IJ' nel loro punto medio comune.

Se $\text{imm } c = 0$, $\text{mod } c = 1$, sarà $c = -1$; la pseudo-omografia si riduce ad una involuzione armonica.

60. Sia C il centro del parallelogramma, C' il suo corrispondente.

Sarà:

$$(A_1 A_2 C') = (A_1 A_2 C) / c = -\frac{1}{c} = - (A_1 A_2 J')$$

quindi:

$$(A_1 A_2 C' J') = -1$$

cioè: « Il punto C' corrispondente al punto medio di $A_1 A_2$ è coniugato armonico di J' rispetto ai punti uniti ».

61. Dalle relazioni:

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = (P'_1 P'_2 P'_3 P'_4)$$

$$(P_1 P_2 P_3) = (P'_1 P'_2 P'_3 J'); \quad (P_1 P_2 P_3 I) = (P'_1 P'_2 P'_3)$$

si deduce che:

$$\text{imm } (P_1 P_2 P_3) = 0 \quad . = . \quad \text{imm } (P'_1 P'_2 P'_3 J') = 0$$

$$\text{imm } (P'_1 P'_2 P'_3) = 0 \quad . = . \quad \text{imm } (P_1 P_2 P_3 I) = 0$$

$$\text{imm } (P_1 P_2 P_3 P_4) = 0 \quad . = . \quad \text{imm } (P'_1 P'_2 P'_3 P'_4) = 0$$

quindi: « Ai punti di una retta del primo piano non passante per I corrisponde nel secondo una circonferenza passante per J' ; ai punti di una circonferenza del primo piano passante per I corrispondono nel secondo i punti di una retta non passante per J' e viceversa ».

62. Siano α_1, α_2 gli angoli che la diagonale IJ' fa coi lati adiacenti nel parallelogramma fondamentale, cioè

$$\alpha_1 = \widehat{A_1 I J'}; \quad \alpha_2 = \widehat{J' I A_2}$$

e siano β_1 e β_2 gli angoli che IP ed $J'P'$ fanno con IJ' , ossia:

$$\beta_1 = \widehat{J' I P}; \quad \beta_2 = \widehat{I J' P'}$$

Dalla relazione (6) e dalle osservazioni del numero (58) . \supset .

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 \quad \text{quindi} \quad \beta_2 = \beta_1 + (\alpha_1 - \alpha_2).$$

Sia q la simmetrica di IP rispetto all'asse del segmento IJ' ; la retta $J'P'$ si ottiene rotando la q intorno ad J' dell'angolo $\alpha_1 - \alpha_2$. Se Q è il punto della IP per cui $IP \cdot IQ = IA_1 \cdot IA_2$, e Q' è il simmetrico di Q rispetto all'asse del segmento IJ' , il punto P' si ottiene rotando Q' di $\alpha_1 - \alpha_2$ intorno ad J' .

Ne consegue che: «La corrispondenza pseudo-omografica tra i punti di un piano è il prodotto di una inversione, (con centro I e costante uguale ad $IA_1 \times IA_2$) per una simmetria ortogonale rispetto all'asse IJ' , per una rotazione intorno ad J' di un angolo uguale alla differenza dei due angoli che la congiungente i punti limiti fa coi lati adiacenti nel parallelogramma fondamentale».

63. Se $\text{mod } c = 1$, oppure $\text{imm } c = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2$, e la corrispondenza si riduce al prodotto di una inversione per una simmetria. La costante di inversione è $JA_1 \times JA_2$; l'asse di simmetria è l'asse del segmento IJ' .

In questi casi esistono infinite circonferenze unite e sono quelle che hanno rispetto ai punti I ed J' potenza uguale ad $IA_1 \times JA_2$. Esse hanno il centro sull'asse del segmento IJ' quindi corrispondono a se stesse, sia nella inversione rispetto ad I , sia nella simmetria. I punti corrispondenti costituiscono per ciascuna circonferenza due serie proiettive, e l'asse di proiettività è la stessa retta IJ' .

64. Se $\text{imm } c = 0$, il fascio delle circonferenze unite è costituito da tutte le circonferenze che passano per i due punti uniti A_1A_2 .

Se $\text{mod } c = 1$, le circonferenze unite hanno il centro sulla retta A_1A_2 e separano armonicamente questi punti.

Se $\text{mod } c \neq 1$, $\text{imm } c \neq 0$ non vi sono circonferenze unite, ma si possono costruire infinite quaterne di punti conciclici costituiti da due coppie corrispondenti. Basterà condurre per esempio da A_1 due trasversali isogonali rispetto ad IA_2 , $J'A_2$; esse incontrano le rette stesse nei punti corrispondenti P, P' ; Q, Q' che sono conciclici. Ad un quinto punto R della circonferenza $PP'QQ'$ corrisponde un punto R' che non è più sulla circonferenza. Se ciò avvenisse le rette $PQ', P'Q$; QR', RQ' ; RP', PR' s'incontrerebbero in una retta unita, ciò che è contro l'ipotesi che esclude l'esistenza di rette unite.

65. Costruzione della pseudo-omografia.

α) Dati A_1, A_2, I e quindi J', I , trovare P' . Il problema è già stato risolto precedentemente. Si può ancora osservare che dalla relazione:

$$\begin{aligned} (A_1 A_2 P P') &= c = (A_1 A_2 I) \quad \Rightarrow \\ (P A_2 A_1 P') &= (I A_2 A_1) \quad \Rightarrow \\ (A_2 P P') &= (I P A_1) \end{aligned}$$

ed anche:

$$(J' P' A_1) = (A_2 P' P). \tag{7}$$

Si costruisca su A_2P un triangolo direttamente simile ad IPA_1 ; il terzo vertice omologo ad A_1 è il punto P' .

β) Dati A_1, A_2, P, P' trovare I ed J' . Si costruisca su PA_1 un triangolo simile ad A_2PP' con P ed A_1 omologhi a P e P' ; il vertice omologo ad A_2

è il punto I, e quindi si deduce J'; oppure su P'A₁ si costruisca il triangolo simile ad A₂P'P e si ha J'.

OSSERVAZIONE. — I punti I, J hanno una posizione relativamente notevole rispetto al quadrangolo P P' A₁ A₂. Se il quadrangolo è inscrittibile cadono sulla retta A₁A₂ che sarà unita.

γ) Dati cinque dei sei punti A₁, A₂, P, P', I, J' si trova il sesto deducendolo dalla (7) come nei casi precedenti.

δ) Dati cinque dei sei punti P, P', Q, Q', I, J' si trova il sesto deducendolo dalla relazione

$$(PQI) = (Q'P'I).$$

I punti uniti si ottengono cercando prima il corrispondente C' del punto C medio di IJ', poi con una costruzione già indicata si determinano i punti A₁A₂ soddisfacenti alle condizioni:

$$(A_1 A_2 J' C') = -1 \quad A_1 + A_2 = 2C.$$

ε) Dati P, P', Q, Q', R, R' trovare I, e quindi J'.

Sarà:

$$(PQI) = (PQR) / (P'Q'R').$$

Determino H per modo che

$$(PQH) = (P'Q'R')$$

quindi:

$$(PQE) = (PQRH) \Rightarrow \text{(vedi } \alpha \text{)}$$

$$(IRP) = (QRH)$$

e si costruisce I, e quindi J', C, C', A₁, A₂.

η) Dati P, P', Q, Q', R, R', M, trovare M'.

Si ha:

$$(P'Q'R'M') = (PQRM).$$

Trovo H e K per modo che

$$(PQH) = (PQRM) \text{ (vedi } \alpha \text{)}; \quad (P'Q'K) = (PQH),$$

e quindi M' per modo che

$$(P'Q'M') = (P'Q'R'K).$$

66. Se i punti P, Q, R, P', Q', R' sono conciclici, la circonferenza su cui stanno sarà unita; la serie P, Q, R sarà proiettiva alla serie P'Q'R'; le rette PQ', P'Q, ecc., si incontrano su di una retta r. Sulla r stanno i punti limiti. Per determinarli segno il diametro d normale ad r; sia P₁ il simmetrico di P' rispetto a d, la PP₁ incontra r in I; la retta che unisce P' col simmetrico di P rispetto a d incontra r in J'.

Se la r incontra la circonferenza in due punti A₁ A₂, questi saranno i punti uniti. Se la retta non incontra la circonferenza, i punti uniti sono sulla d ed hanno per punto medio il punto in cui la d incontra la r, e sono coniugati armonicamente rispetto alla circonferenza.

67. Se i punti PQR sono allineati in r , P'Q'R' allineati in r' , le due punteggiate PQR, P'Q'R' sono omografiche; ne determino i punti limiti IJ', il loro punto medio C, ed il corrispondente C'. Se la retta IJ' non fa angoli inversamente uguali colle rette r, r' la pseudo-omografia non è speciale; i punti uniti si ottengono col metodo già indicato. Se le rette rr' sono simmetriche rispetto alla normale in C alla IJ', la pseudo-omografia è speciale; saremo nel caso del rombo se $IC > \sqrt{IP \cdot J'P'}$ ed i punti uniti stanno sulla normale alla IJ' nel punto C ad una distanza da I uguale alla $\sqrt{IP \cdot J'P'}$. Se $IC < \sqrt{IP \cdot J'P'}$ i punti uniti stanno sulla stessa IJ' e sono equidistanti da C di $\sqrt{CC' \cdot CI}$.

68. Se i punti P, Q, R, P', Q', R' sono allineati in r , si corrispondono in una omografia ordinaria tra i punti di una retta. Se i punti uniti sono reali siamo nel caso di $\text{imm } C = 0$. Se l'omografia è ellittica i punti uniti stanno sulla normale alla r per il punto C medio dei punti limiti, ad una distanza da I uguale a $\sqrt{IP \cdot J'P'}$.

Ne consegue che la corrispondenza omografica tra due punteggiate complanari sovrapposte o no, definisce in ogni caso una pseudo-omografia che ha sempre i punti uniti reali.

Torino, dicembre 1903.

F. CASTELLANO.

SU ALCUNE NOTEVOLI SUCCESSIONI DI NUMERI

ciascuno dei quali è funzione lineare dei due precedenti

Consideriamo la successione di numeri S_1, S_2, S_3, \dots determinata dai valori iniziali a, b , e dalla relazione ricorrente:

$$S_n = S_{n-1} + kS_{n-2}, \tag{1}$$

k essendo un intero diverso da zero. (*) Si ha:

$$\begin{aligned} S_1 &= a \\ S_2 &= b \\ S_3 &= ka + b \\ S_4 &= ka + (k + 1)b \\ S_5 &= k(k + 1)a + (2k + 1)b \\ S_6 &= k(2k + 1)a + (k^2 + 3k + 1)b \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

(*) Uno studio su tali successioni ricorrenti si trova in LUCAS. *Théorie des nombres*, nel capitolo che si riferisce alle funzioni numeriche di 2° ordine. Un secondo studio trovasi nella nota "Successioni di numeri interi e positivi ciascuno dei quali è funzione lineare dei due precedenti", del sig. A. TAGIURI "Periodico di Matematica", Fasc. novembre-dicembre 1900 e nell'altra "Di alcune successioni ricorrenti a termini interi e positivi", dello stesso autore, Fasc. luglio-agosto 1900.

Variando k si hanno ∞ successioni di numeri, ed in ciascuna di esse ogni termine è funzione lineare dei due precedenti. Indicando con S'_1, S'_2, S'_3, \dots ciò che diventano le S_1, S_2, S_3, \dots , supponendo $a=0, b=1$, si ha:

$$\begin{aligned} S'_1 &= 0 \\ S'_2 &= 1 \\ S'_3 &= 1 \\ S'_4 &= k + 1 \\ S'_5 &= 2k + 1 \\ S'_6 &= k^2 + 3k + 1 \\ S'_7 &= 3k^2 + 4k + 1 \\ S'_8 &= k^3 + 6k^2 + 5k + 1 \\ S'_9 &= 4k^3 + 10k^2 + 6k + 1 \\ S'_{10} &= k^4 + 10k^3 + 15k^2 + 7k + 1 \\ &\dots \end{aligned}$$

ed in generale, come si potrebbe dimostrare senza difficoltà:

$$S'_n = \sum_{j=0}^{j=\mathbb{E}\left(\frac{n-2}{2}\right)} \binom{n-j-2}{j} k^j \quad (2)$$

dove $\mathbb{E}\left(\frac{n-2}{2}\right)$ è il massimo intero contenuto in $\frac{n-2}{2}$.

Osservando l'espressione di S_3, S_4, \dots , si vede che le S si possono esprimere mediante le S' , e precisamente si ha:

$$S_n = kS'_{n-1} a + S'_n b. \quad (3)$$

Se $a=0, b=k=1$, la successione delle S è la notissima *serie di Fibonacci*

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Indicando i termini di essa con u_1, u_2, u_3, \dots si ha pertanto dalla (1):

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

a partire da $n=3$, ed inoltre dalla (2):

$$u_n = \sum_{j=0}^{j=\mathbb{E}\left(\frac{n-2}{2}\right)} \binom{n-j-2}{j}.$$

Si ha così una dimostrazione molto semplice, di una nota proprietà della serie di Fibonacci.

Se $k=-1$, la (1) diventa

$$S_n = S_{n-1} - S_{n-2},$$

alla quale devono pure soddisfare le S' , calcolate per $a=0, b=1$. La serie delle S' , per $k=-1$, è notevole, ed è la seguente:

$$0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, \dots$$

In essa il gruppo di numeri $0, 1, 1, 0, -1, -1$, si ripete periodicamente, ed ognuno dei suoi termini, a partire dal terzo, si ottiene togliendo l'antiprecedente dal precedente.

Si ha pertanto, se $k=-1$

$$S'_{3n+1} = 0; \quad S'_{6n+2} = S'_{6n+3} = 1; \quad S'_{6n+5} = S'_{6n+6} = -1 \quad (4)$$

qualunque sia n . E gioverà pure notare che ogni numero avente una delle forme $3n+1, 6n+2, 6n+3, 6n+5, 6n+6$ non può essere contemporaneamente di un'altra delle stesse. In seguito indicheremo i valori delle S' , per $k=-1$, con $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$. Osserviamo ora che $3n+1$ è dispari, o pari, secondoche n è pari o dispari; sono poi pari per qualunque valore di n i numeri $6n+2, 6n+6$, e dispari i numeri $6n+3, 6n+5$; perciò, supponendo nella (2) $k=-1$, e sostituendo ad n rispettivamente $3n+1, 6n+2, 6n+3, 6n+5, 6n+6$, si hanno le identità:

$$\sum_{j=0}^{3n-1} (-1)^j \binom{3n-j-1}{j} = 0 \quad \text{se } n \text{ è dispari;}$$

$$\sum_{j=0}^{3n-2} (-1)^j \binom{3n-j-1}{j} = 0 \quad \text{se } n \text{ è pari;}$$

$$\sum_{j=0}^{3n} (-1)^j \binom{6n-j}{j} = 1; \quad \sum_{j=0}^{3n+2} (-1)^j \binom{6n-j+4}{j} = -1$$

$$\sum_{j=0}^{3n} (-1)^j \binom{6n-j+1}{j} = 1; \quad \sum_{j=0}^{3n+1} (-1)^j \binom{6n-j+3}{j} = -1$$

qualunque sia n .

E sono queste rimarchevoli proprietà del noto simbolo combinatorio.

* * *

Dalla (1), alla quale soddisfano le S_1, S_2, S_3, \dots se ne deducono altre importanti, le quali esprimono notevoli proprietà delle S , e quando a, b, k , abbiano particolari valori, delle S' e delle u .

Cambiando in essa n in $n-1$, poi n in $n-2$, si hanno due espressioni l'una di S_{n-1} , l'altra di S_{n-2} ; sostituendole ad S_{n-1} ed S_{n-2} nella (1), essa diventa:

$$S_n = S_{n-2} + 2aS_{n-3} + k^2S_{n-4};$$

e sostituendo in questa ad S_{n-2} , S_{n-3} , S_{n-4} , le espressioni che si ottengono dalla (1), cambiando n in $n-2$, $n-3$, $n-4$, si ha:

$$S_n = S_{n-3} + 3kS_{n-4} + 3k^2S_{n-5} + k^3S_{n-6}.$$

Si vede subito che in questa i coefficienti di S_{n-3} , S_{n-4} , S_{n-5} , S_{n-6} , sono i termini dello sviluppo di $(1+k)^3$ ordinato rapporto alle potenze crescenti di k . Si ha per induzione:

$$S_n = \sum_{j=0}^{j=h} \binom{h}{j} k^j S_{n-h-j}, \quad (5)$$

la quale serve ad esprimere S_n mediante le S_{n-h} , S_{n-h-1} , ..., S_{n-2h} qualunque sia l'intero h , tale che $n > 2h$.

Consideriamo ancora la (1). Sostituendo in essa ad S_{n-1} l'espressione che si ha della stessa cambiando n in $n-1$, risulta:

$$S_n = (k+1)S_{n-2} + kS_{n-3};$$

e se in queste si sostituisce ad S_{n-2} l'espressione che risulta dalla (1), cambiando n in $n-2$, si ha:

$$S_n = (2k+1)S_{n-3} + k(k+1)S_{n-4}.$$

Similmente si trova essere:

$$S_n = (k^2+3k+1)S_{n-4} + k(2k+1)S_{n-5},$$

ed in generale, a posteriori

$$S_n = S'_{n+2} S_{n-h} + kS'_{n+1} S_{n-h-1}; \quad (6)$$

la quale serve ad esprimere S_n mediante S_{n-h} , S_{n-h-1} ($n > h$), che sono due consecutive delle S .

Consideriamo ora q delle S e siano le S_{p_1} , S_{p_2} , ..., S_{p_q} , e supponiamo $p_1 < p_2 < \dots < p_3 < p_1$. Dalla (6), cambiando n in p_1 ed h in $n-p_2$, abbiamo:

$$S_{p_1} = S'_{p_1-p_2+2} S_{p_2} + kS'_{p_1-p_2+1} S_{p_2-1}. \quad (7)$$

Cambiando in questa p_1 in p_3-1 e p_2 in p_3 , si ha l'espressione di S_{p_3-1} . Sostituendo nella (7) ad S_{p_2-1} l'espressione trovata, si ha:

$$S_{p_1} = S'_{p_1-p_2+2} S_{p_2} + kS'_{p_1-p_2+1} S'_{p_2-p_3} S'_{p_3} + k^2 S'_{p_1-p_2+1} S_{p_2-p_3} S_{p_3-1}.$$

Si sostituisca in questa ad S_{p_3-1} l'espressione ottenuta dalla (7) cambiando p_1 in p_4-1 e p_2 in p_4 , e così via; risulterà infine:

$$\begin{aligned} S_{p_1} = & S'_{p_1-p_2+2} S_{p_2} + kS'_{p_1-p_2+1} S'_{p_2-p_3+1} S_{p_3} + \\ & + k^2 S'_{p_1-p_2+1} S'_{p_2-p_3} S'_{p_3-p_4+1} S_{p_4} + \dots \\ & \dots + k^{h-2} S'_{p_1-p_2+1} S'_{p_2-p_3} S'_{p_3-p_4} \dots S'_{p_{h-2}-p_{h-1}} S'_{p_{h-1}-p_h+1} S_{p_h} + \dots \\ & \dots + k^{q-1} S'_{p_1-p_2+1} S'_{p_2-p_3} S'_{p_3-p_4} \dots S'_{p_{q-1}-p_q} S_{p_q-1}, \end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned}
 S_{p_1} &= S'_{p_1-p_2+2} S_{p_2} + k S'_{p_1-p_3+1} S'_{p_2-p_3+1} + \\
 &+ \sum_{i=2}^{i=p_1-2} (k^i S'_{p_1-p_2+1} S'_{p_2-p_3} S'_{p_3-p_4} \dots S'_{p_i-p_{i+1}} S'_{p_{i+1}-p_{i+2}+1} S_{p_{i+2}}) + \\
 &+ k^{p_1-1} S'_{p_1-p_2+1} S'_{p_2-p_3} S'_{p_3-p_4} \dots S'_{p_{p_1-1}-p_{p_1}} S_{p_{p_1}-1}, \tag{8}
 \end{aligned}$$

la quale serve ad esprimere S_{p_1} mediante $S_{p_2}, S_{p_3}, \dots, S_{p_q}, S_{p_q-1}$, qualunque siano p_1, p_2, \dots, p_q , purchè $p_0 < p_{q-1} < \dots < p_2 < p_1$.

La (8) rappresenta la proprietà caratteristica delle S ; essa ci dice che: *una qualunque delle S è esprimibile linearmente mediante altre qualunque ad essa precedenti (di indice minore), le due più lontane essendo consecutive.*

Supponendo $a = 0, b = 1$, le S si cambiano nelle S' ; e poichè le (6), (7), (8) non dipendono dai valori di a e b , si conclude che:

Le proprietà rappresentate dalle identità (6), (7), (8) sussistono anche cambiando le S nelle S' e lasciando inalterati gli indici.

Se nelle (6), (7), (8) si sa $a = 0, b = 1, k = 1$, le S e le S' diventano le u , e pertanto:

Le proprietà rappresentate dalle (6), (7), (8) sussistono pure se in luogo delle S e delle S' si mettono le u e si lasciano inalterati gli indici.

Si hanno così tre proprietà della serie di Fibonacci (soltanto la 2ª di esse è, per quanto so, già nota).

Se infine si suppone $a = 0, b = 1, k = -1$, le S o le S' si cambiano nelle σ , e si hanno tre relazioni, delle quali è notevole la 1ª

$$\sigma_n = \sum_{j=0}^{j=h} (-1)^j \binom{h}{j} \sigma_{n-h-j},$$

che esprime una proprietà del simbolo combinatorio $\binom{h}{j}$.

≡
≡ ≡

Vogliamo ora stabilire alcune relazioni importanti tra le S ed i termini di altre serie notevoli. Per $k = 1$ la serie delle S è una serie di Fibonacci incominciante con a e b . Indicando i termini di essa con Q_1, Q_2, Q_3, \dots avremo:

$$Q_n = Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

e sarà:

$$Q_1 = a; \quad Q_2 = b; \quad Q_3 = a + b; \quad Q_4 = a + 2b; \quad Q_5 = 2a + 3b; \dots$$

ed in generale:

$$Q_u = u_{u-1} a + u_n b \tag{9}$$

la quale può anche dedursi dalla (3), ponendo $k = 1$.

Consideriamo ora la successione di numeri P_1, P_2, P_3, \dots determinata dai valori iniziali $P_1 = a, P_2 = b$ e dalla relazione ricorrente

$$kP_n = P_{n-1} + P_{n-2}. \tag{10}$$

Ciascun termine di essa si ottiene adunque dividendo per k la somma dei due precedenti. Evidentemente

$$[P_n]_{k=1} = Q_n$$

cioè per $k=1$ le P si cambiano nelle Q .

Si ha:

$$\begin{aligned} P_1 &= a \\ P_2 &= b \\ P_3 &= \frac{1}{k} (a + b) \\ P_4 &= \frac{1}{k^2} \{a + (k+1)b\} \\ P_5 &= \frac{1}{k^3} \{(k+1)a + (2k+1)b\} \\ &\dots \end{aligned}$$

ed in generale, a posteriori:

$$P_n = \frac{1}{k^{n-2}} (S'_{n-1} a + S'_n b), \tag{11}$$

la quale lega le P e le S' e serve ad esprimere le P mediante a e b . Ma assai più notevoli sono le relazioni che legano le P e le Q . Si ha:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= P_1 \\ Q_2 &= P_2 \\ Q_3 &= Q_1 + Q_2 = P_1 + P_2 = kP_3 \\ Q_4 &= Q_2 + Q_3 = P_2 + kP_3 = P_2 + P_3 + (k-1)P_3 = kP_4 + (k-1)P_3 \\ Q_5 &= Q_3 + Q_4 = kP_3 + kP_4 + (k-1)P_3 = k^2P_5 + (k-1)P_3 \\ Q_6 &= Q_4 + Q_5 = kP_4 + k^2P_5 + 2(k-1)P_3 = k^2P_6 + k(k-1)P_5 + 2(k-1)P_3 \\ Q_7 &= k^3P_7 + k(k-1)P_5 + 3(k-1)P_3 \\ Q_8 &= k^3P_8 + k^2(k-1)P_7 + 2k(k-1)P_5 + 5(k-1)P_3 \\ Q_9 &= k^4P_9 + k^2(k-1)P_7 + 3k(k-1)P_5 + 8(k-1)P_3 \\ Q_{10} &= k^4P_{10} + k^3(k-1)P_9 + 2k^2(k-1)P_7 + 5k(k-1)P_5 + 13(k-1)P_3 \\ &\dots \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

ed in generale, a posteriori:

$$Q_n = k^{\frac{n-1}{2}} P_n + (k-1) \sum_{j=3,5,7,\dots,h(n)} k^{\frac{j-3}{2}} u_{n-j+1} P_j, \tag{13}$$

qualunque sia l'intero n . Con $E\left(\frac{n-1}{2}\right)$ si è indicato il massimo intero contenuto in $\frac{n-1}{2}$ e con $h(n)$ il massimo numero dispari non inferiore ad n .

La (13) serve ad esprimere le Q mediante le P; viceversa si possono esprimere le P mediante le Q. Si ha dalle (12):

$$\begin{aligned}
 P_3 &= \frac{1}{k} Q_3 \\
 P_4 &= \frac{1}{k} [Q_4 - (k-1)P_3] = \frac{1}{k} Q_4 - \frac{k-1}{k} Q_3 \\
 P_5 &= \frac{1}{k^2} [Q_5 - (k-1)P_4] = \frac{1}{k^2} Q_5 - \frac{k-1}{k^2} \frac{1}{k} Q_3 \\
 P_6 &= \frac{1}{k^3} [Q_6 - k(k-1)P_5 - 2(k-1)P_4] = \frac{1}{k^3} Q_6 - \frac{k-1}{k^3} \left(\frac{1}{k} Q_5 + \frac{k+1}{k^2} Q_3 \right) \\
 &\text{e similmente:} \\
 P_7 &= \frac{1}{k^3} Q_7 - \frac{k-1}{k^3} \left(\frac{1}{k} Q_5 + \frac{2k+1}{k^2} Q_3 \right) \\
 P_8 &= \frac{1}{k^4} Q_8 - \frac{k-1}{k^4} \left(\frac{1}{k} Q_7 + \frac{k+1}{k^2} Q_5 + \frac{k^2+3k+1}{k^3} Q_3 \right) \\
 P_9 &= \frac{1}{k^4} Q_9 - \frac{k-1}{k^4} \left(\frac{1}{k} Q_7 + \frac{2k+1}{k^2} Q_5 + \frac{3k^2+4k+1}{k^3} Q_3 \right) \\
 P_{10} &= \frac{1}{k^4} Q_{10} - \frac{k-1}{k^4} \left(\frac{1}{k} Q_9 + \frac{k+1}{k^2} Q_7 + \frac{k^2+3k+1}{k^3} Q_5 + \frac{k^3+6k^2+5k+1}{k^4} Q_3 \right) \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned} \tag{14}$$

ed in generale, a posteriori:

$$P_n = \frac{Q_n}{k^{\mathbb{E} \left(\frac{n-1}{2} \right)}} - \frac{k-1}{k^{\mathbb{E} \left(\frac{n-1}{2} \right)}} \sum_{j=3, 5, 7, \dots, n(n)} \frac{S'_{n-j+1} Q_j}{k^{\mathbb{E} \left(\frac{n-j+1}{2} \right)}}, \tag{15}$$

la quale serve ad esprimere, qualunque sia n, pari o dispari, le P mediante le Q.

Sostituendo nella (13) a Q_n l'espressione data dalla (9) ed alle P le espressioni date dalle (11), si ha:

$$\begin{aligned}
 u_{n-1} a + u_n b &= \frac{1}{k^{n-2-\mathbb{E} \left(\frac{n-1}{2} \right)}} (S'_{n-1} a + S'_n b) + \\
 &+ (k-1) \sum_{j=3, 5, 7, \dots, n(n)} \left\{ \frac{u_{n-j+1}}{k^{\frac{j-1}{2}}} (S'_{j-1} a + S'_j b) \right\},
 \end{aligned}$$

che è valida qualunque siano a e b; epperò uguagliando i coefficienti di b nei due membri, si avrà l'importante relazione tra le u e le S'

$$u_n = \frac{S'_n}{k^{n-\mathbb{E} \left(\frac{n-1}{2} \right) - 2}} + (k-1) \sum_{j=3, 5, 7, \dots, n(n)} \frac{1}{k^{\frac{j-1}{2}}} u_{n-j+1} S'_j. \tag{16}$$

In essa il 1° membro non contiene k; quindi il 2° membro è una espressione il cui valore è indipendente da k.

Supponiamo in particolare $k = -1$. Si ha allora:

$$u_n = (-1)^{n-\frac{n-1}{2}} \sigma_n - 2 \sum_{j=3, 5, 7, \dots, h(n)} (-1)^{\frac{j-1}{2}} \sigma_j u_{n-j+1}, \quad (17)$$

essendo, come è noto, $\sigma_j = 0, 1, -1$, secondo che j è della forma $3p+1; 6p+2, 6p+3; 6p+5, 6p+6$.

La (17) rappresenta una notevole e riposta proprietà dei termini della serie di Fibonacci.

Successioni S il cui discriminante è quadrato perfetto.

Si chiama discriminante di una successione R_1, R_2, R_3, \dots determinata dai valori iniziali $R_1 = 0, R_2 = 1$ e dalla relazione ricorrente

$$R_n = lR_{n-1} + kR_{n-2},$$

il binomio $l^2 + 4k$. Se $l = 1$ il discriminante della successione è il binomio $1 + 4k$ e se k è il prodotto di due interi consecutivi qualunque $q, q - 1$, si ha:

$$1 + 4k = 1 + 4q(q - 1) = (2q - 1)^2,$$

cioè il discriminante è quadrato perfetto. Dimodochè la successione H_1, H_2, H_3, \dots determinata dai valori iniziali $H_1 = 0, H_2 = 1$ e dalla relazione ricorrente

$$H_n = H_{n-1} + q(q - 1)H_{n-2}, \quad (18)$$

q essendo un intero positivo > 1 , è una di quelle il cui discriminante è quadrato perfetto. Una tale successione gode di tutte le proprietà delle successioni S in genere e di proprietà particolari notevoli che esamineremo a parte.

Si ha dalla (18):

$$\begin{aligned} H_3 &= 1 \\ H_4 &= 1 + q(q - 1) = \frac{q^2 - (1 - q)^2}{2q - 1} \\ H_5 &= 1 + \frac{q^2 - (1 - q)^2}{2q - 1} q(q - 1) = \frac{q^4 - (1 - q)^4}{2q - 1} \\ &\dots \end{aligned}$$

ed in generale, a posteriori

$$H_n = \frac{q^{n-1} - (1 - q)^{n-1}}{2q - 1}, \quad (19)$$

la quale mostra che H_n si può esprimere in funzione di q ed n .

Sommando membro a membro la (19) e quelle che si ottengono da essa cambiando n in $n + 1, n + 2, \dots, n + r - 1$, si ha:

$$H_n + H_{n+1} + \dots + H_{n+r-1} = \frac{q^{n-1} + q^n + \dots + q^{n+r-2} - \{(1-q)^{n-1} + (1-q)^n + \dots + (1-q)^{n+r-2}\}}{2q-1},$$

od anche, dopo opportune trasformazioni

$$H_n + H_{n+1} + \dots + H_{n+r-1} = \frac{q^{n+r} - q^n + (1-q)^n - (1-q)^{n+r}}{q(q-1)(2q-1)}, \quad (20)$$

la quale permette di calcolare la somma di r termini consecutivi $H_n, H_{n+1}, \dots, H_{n+r-1}$, della successione.

Le H_1, H_2, H_3, \dots soddisfano, oltrechè alla (18), anche alle seguenti notevoli relazioni ricorrenti:

$$H_n = qH_{n-1} + (1-q)^{n-2} \quad (21)$$

$$H_n + H_{n-1}(q-1) = q^{n-2}, \quad (22)$$

che si dimostrano sostituendo ad H_n ed H_{n-1} i valori dati dalla (19).

Sostituendo nella (22) ad H_{n-1} il valore dato dalla (18), si ha facilmente:

$$H_n = (q-1)^2 H_{n-2} + q^{n-1}. \quad (23)$$

Molte altre relazioni ricorrenti si possono poi ottenere combinando opportunamente le precedenti che sono le fondamentali.

Servendoci delle (21) e (22), possiamo rinvenire due modi diversi di esprimere H_n mediante H_{n-h} , essendo h un intero qualunque, inferiore ad n . Infatti sostituendo nella (21) ad H_{n-1} l'espressione che si ottiene cambiando in essa n in $n-1$, si ha:

$$H_n = q^2 H_{n-2} + q(1-q)^{n-3} + (1-q)^{n-2};$$

e sostituendo in questa ad H_{n-2} l'espressione che si ha dalla (21) cambiando n in $n-2$, e così continuando, si ha:

$$H_n = q^h H_{n-h} + q^{h-1}(1-q)^{n-h-1} + q^{h-2}(1-q)^{n-h} + \dots + q(1-q)^{n-3} + (1-q)^{n-2},$$

od anche, dopo qualche trasformazione

$$H_n = q^h H_{n-h} + \frac{q^h(1-q)^{n-h-1} - (1-q)^{n-1}}{2q-1}. \quad (24)$$

Una seconda espressione di H_n mediante H_{n-h} si può avere ricorrendo alla (22). Si ha da questa:

$$H_n = q^{n-2} - (q-1)H_{n-1}, \quad (25)$$

e cambiando n in $n-1$

$$H_{n-1} = q^{n-3} - (q-1)H_{n-2}.$$

Sostituendo tale espressione di H_{n-1} nella (25), si ha:

$$H_n = q^{n-2} - (q-1)q^{n-3} + (q-1)^2 H_{n-2};$$

e sostituendo in questa ad H_{n-2} l'espressione che si ha dalla (25), cambiando n in $n-2$, e così continuando, si avrà:

$$H_n = q^{n-2} - (q-1)q^{n-3} + (q-1)^2 q^{n-4} + \dots \\ \dots + (-1)^{h-1} (q-1)^{h-1} q^{n-h-1} + (-1)^h (q-1)^h H_{n-h},$$

od anche, dopo qualche trasformazione:

$$H_n = (-1)^h (q-1) H_{n-h} + \frac{q^{n-1} - (1-q)^h q^{n-h-1}}{2q-1} \quad (26)$$

Le (24) e (26) affermano in sostanza che, date due qualunque delle H , si può esprimere una di esse linearmente mediante l'altra, ed è questa appunto una notevole proprietà delle successioni H il cui discriminante è quadrato perfetto.

Fra tali successioni è notevole la seguente

0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731...

i cui termini indicheremo con L_1, L_2, L_3, \dots . Essa è individuata dai valori iniziali $L_1 = 0, L_2 = 1$ e dalla relazione ricorrente:

$$L_n = L_{n-1} + 2L_{n-2}$$

la quale si ottiene dalla (18) supponendo $q = 2$.

Le (19), (21), (22), (23), relativamente a tal successione; diventano:

$$L_n = \frac{1}{3} (2^{n-1} + (-1)^n) \\ L_n = 2L_{n-1} + (-1)^{n-2} = 2L_{n-1} + (-1)^n \\ L_n + L_{n-1} = 2^{n-2} \\ L_n - L_{n-2} = 2^{n-1},$$

La seconda di queste afferma che le L sono tutti numeri dispari.

Sono pure notevoli alcune successioni nelle quali le L compaiono come coefficienti o come esponenti dei valori iniziali a e b . Per es. indicando con M_1, M_2, M_3, \dots la successione determinata dai valori iniziali $M_1 = a, M_2 = b$ e dalla condizione che ciascun termine sia la media aritmetica dei due precedenti, si ha

$$M_1 = a; \quad M_2 = b; \quad M_3 = \frac{a+b}{2}; \quad M_4 = \frac{a+3b}{2^2}; \quad M_5 = \frac{3a+5b}{2^3}; \dots$$

od in generale:

$$M_n = \frac{L_{n-1} a + L_n b}{2^{n-2}}.$$

Indicando con N_1, N_2, N_3, \dots , la successione determinata dai va-

lori iniziali a e b e dalla condizione che ciascun termine sia il medio armonico dei due precedenti, si ha:

$$N_1 = a; \quad N_2 = b; \quad N_3 = \frac{3ab}{a+b}; \quad N_4 = \frac{2^2 ab}{3a+b}; \quad N_5 = \frac{2^3 ab}{5a+3b}; \dots$$

ed in generale

$$N_n = \frac{2^{n-2} ab}{L_n a + L_{n-1} b}.$$

Infine indicando con O_1, O_2, O_3, \dots la successione determinata dai valori iniziali a, b e dalla condizione che ciascun termine sia medio proporzionale tra i due precedenti, si ha

$$O_1 = a; \quad O_2 = b; \quad O_3 = \sqrt{ab}; \quad O_4 = \sqrt[4]{ab^3}; \quad O_5 = \sqrt[8]{a^3 b^5}; \dots$$

ed in generale

$$O_n = (a^{L_{n-1}} b^{L_n})^{\frac{1}{2^{n-2}}}.$$

Se nelle (2) facciamo $k=2$, le S' diventano le H e si ha:

$$\frac{1}{3} [2^{n-1} + (-1)^n] = \sum_{j=0}^{j=\mathbb{E}(\frac{n-2}{2})} \binom{n-j-2}{j} 2^j,$$

che ci rivela una notevole proprietà del simbolo combinatorio $\binom{n-j-2}{j}$, o se vuoi, delle potenze intere e positive di 2.

Notevoli sono pure le relazioni tra le H ed i termini di alcune successioni note. Ad es. l' n^{mo} termine F_n della successione di Fermat è dato dalla formola

$$F_n = 2^n - 1.$$

epperò

$$\begin{aligned} 3H_{n+1} &= F_n && \text{se } n \text{ è pari;} \\ 3H_{n+1} &= F_n + 2 && \text{se } n \text{ è dispari.} \end{aligned}$$

Meno semplici sono le relazioni tra le H e le u (termini della serie di Fibonacci). Per averle occorre supporre $k=2$ nelle (16), e sostituire le H alle S' .

D^r. NICOLÒ TRAVERSO.

RISOLUZIONI DELLE QUESTIONI 638, 650, 651, 652 E 653

638. Dimostrare che in un triangolo sferico si ha

$$\sum \frac{\text{sen } \beta \cos (s-b) - \text{sen } \gamma \cos (s-c)}{1 - \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma} = 0.$$

G. PESCI.

Risoluzione del sig. Gandini R. U. di Pavia.

Si ha

$$\cos(s - a) = \frac{1 - \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{4 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma},$$

quindi risulta

$$\operatorname{sen} \alpha \cos(s - a) = \frac{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)}{4 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma};$$

e allora il primo membro della (1) diventa

$$\begin{aligned} & \sum \frac{(1 + \cos \beta)(1 + \cos \alpha - \cos \beta + \cos \gamma) - (1 + \cos \gamma)(1 + \cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma)}{4 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma (1 - \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)} = \\ & = \sum \frac{(\cos \gamma - \cos \beta)(1 - \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)}{4 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma (1 - \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)} = \sum \frac{\cos \gamma - \cos \beta}{4 \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma} = 0. \end{aligned}$$

c. d. d.

650. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{x \operatorname{sen} \log x^k}.$$

F. SIBIRANI.

Risoluzione della sig.^{na} Beloch, R. U. di Roma, e dei sigg. Ascoli, R. U. di Pisa, Gandini R. U. di Pavia.

Sia V il suo valore; poniamo $y = \log x^k$, donde

$$k dx = x dy.$$

Avremo quindi:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{k} \int \frac{dy}{\operatorname{sen} y} = -\frac{1}{k} \int \frac{d \cos y}{\operatorname{sen}^2 y} = -\frac{1}{k} \int \frac{d \cos y}{1 - \cos^2 y} = \\ &= -\frac{1}{2k} \int \frac{d \cos y}{1 - \cos y} - \frac{1}{2k} \int \frac{d \cos y}{1 + \cos y} = \frac{1}{2k} \log(1 - \cos y) - \frac{1}{2k} \log(1 + \cos y) + C, \end{aligned}$$

e ponendo la costante C sotto la forma $\frac{1}{2k} \log n$, avremo

$$V = \frac{1}{2k} \log n \frac{1 - \cos y}{1 + \cos y} = \frac{1}{2k} \log(n \tan^2 \frac{1}{2} y) = \frac{1}{2k} \log(n \tan^2 \frac{1}{2} \log x^k).$$

651. L'involuppo delle mediatrici delle corde focali di una conica è una quartica cuspidata, se la conica ha centro, ed è invece una parabola semi-cubica, se la conica è una parabola.

G. CARDOSO-LAYNES.

Risoluzione dal sig. Gandini, R. U. di Pavia.

Sia

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2pe^2x - p^2e^2 = 0 \quad (1)$$

l'equazione di una conica di eccentricità e e parametro p , avente un fuoco nell'origine degli assi; allora la retta

$$y = mx \quad (2)$$

passerà per un fuoco della (1).

Sieno: $A = (x', y')$, $B = (x'', y'')$ i punti d'incontro della (1) con la (2). Le coordinate del punto medio M di \overline{AB} saranno: $\frac{x' + x''}{2}$, $\frac{y' + y''}{2}$; infine l'equazione della retta perpendicolare in M alla (2) è data da

$$y = -\frac{1}{m}x + \frac{y' + y''}{2} + \frac{1}{m} \cdot \frac{x' + x''}{2}. \quad (3)$$

Si ha dalle (1), (2):

$$\frac{x' + x''}{2} = \frac{pe^2}{1 - e^2 + m^2}, \quad \frac{y' + y''}{2} = \frac{pme^2}{1 - e^2 + m^2};$$

perciò la (3) diventa:

$$\varphi(x, y, m) = ym^3 + (x - pe^2)m^2 + (1 - e^2)ym + (1 - e^2)x - pe^2 = 0. \quad (4)$$

Eliminando la m tra la (4) e la $\frac{\partial \varphi(x, y, m)}{\partial m} = 0$, si ottiene il discriminante della (4), il quale è anche l'equazione dell'involuppo richiesto. In generale il discriminante dell'equazione cubica

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

è dato da

$$4(3a_0a^2 - a_1^2)(3a_1a_2 - a_2^2) - (9a_0a_2 - a_1a_2)^2 = 0;$$

quindi, per la (4), l'involuppo richiesto sarà la quartica

$$4 \left\{ 3(1 - e^2)y^2 - (x - pe^2)^2 \right\} \cdot \left\{ 3(1 - e^2)(x - pe^2)x - 3pe^2(x - pe^2) - (1 - e^2)^2y^2 \right\} - y^2 \left\{ 9(1 - e^2)x - (1 - e^2)(x - pe^2) - 9pe^2 \right\}^2 = 0. \quad (5)$$

Tale curva è cuspidata nel punto $(pe^2, 0)$, dove ammette per tangente cuspidale l'asse delle x . Quando $e = 1$ la conica diventa una parabola, e la (5) si trasforma nella parabola semi-cubica

$$4(x - p)^3 = 27py^2.$$

652. Dimostrare che

$$\int \frac{\sqrt{a^2 \cotg^2 \frac{1}{2} \alpha - 1}}{1 + \cos \alpha} dx = \sqrt{a^2 - \tag^2 \frac{1}{2} x} - \frac{\alpha}{4} \log \frac{2a^2 - \tag^2 \frac{1}{2} x + 2a\sqrt{a^2 - \tag^2 \frac{1}{2} x}}{2a^2 - \tag^2 \frac{1}{2} x - 2a\sqrt{a^2 - \tag^2 \frac{1}{2} x}}.$$

F. SIBIRANI.

Risoluzione dei sigg. Gandini R. U. di Pavia e Barisien.

Anzitutto si ha:

$$\begin{aligned} \frac{2a^2 - \tag^2 \frac{1}{2} x + 2a\sqrt{a^2 - \tag^2 \frac{1}{2} x}}{2a^2 - \tag^2 \frac{1}{2} x - 2a\sqrt{a^2 - \tag^2 \frac{1}{2} x}} &= \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - \tag^2 \frac{1}{2} x}}{a + \sqrt{a^2 - \tag^2 \frac{1}{2} x}} \right)^{-2} \\ &= \frac{(a - \sqrt{a^2 - \tag^2 \frac{1}{2} x})^{-1}}{\tag^{-1} \frac{1}{2} x}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ora si ha:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{a^2 \cotg^2 \frac{1}{2} \alpha - 1}}{1 + \cos \alpha} d\alpha &= \int \frac{\sqrt{a^2 - \tag^2 \frac{1}{2} \alpha}}{2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha \tag \frac{1}{2} \alpha} d\alpha = \int \frac{\sqrt{a^2 - \tag^2 \frac{1}{2} \alpha}}{\tag \frac{1}{2} \alpha} d \tag \frac{1}{2} \alpha = \\ &= - \int \frac{\tag \frac{1}{2} \alpha d \tag \frac{1}{2} \alpha}{\sqrt{a^2 - \tag^2 \frac{1}{2} \alpha}} + a^2 \int \frac{d \tag \frac{1}{2} \alpha}{\tag \frac{1}{2} \alpha \sqrt{a^2 - \tag^2 \frac{1}{2} \alpha}} = \\ &= \sqrt{a^2 - \tag^2 \frac{1}{2} \alpha} + a \log \frac{a - \sqrt{a^2 - \tag^2 \frac{1}{2} \alpha}}{\tag \frac{1}{2} \alpha} \end{aligned}$$

e per la (1) l'eguaglianza proposta resta dimostrata.

653. Dimostrare che

$$= \int \sqrt{\frac{a^2 - 1 + t(a^2 + 1)}{(1-t^2)^2(1+t)}} dt = \sqrt{a^2 - \frac{1-t}{1+t}} - \frac{a}{4} \log \frac{2a^2 - 1 + t(1+2a^2) + 2a\sqrt{(1+t)[a^2 - 1 + t(a^2 + 1)]}}{2a^2 - 1 + t(1+2a^2) - 2a\sqrt{(1+t)[a^2 - 1 + t(a^2 + 1)]}}$$

F. SIBIRANI.

Risoluzione dei sigg. Gandini R. U. di Pavia e Barisien.

Si ha

$$\frac{2a^2 - 1 + t(1+2a^2) + 2a\sqrt{(1+t)[a^2 - 1 + t(a^2 + 1)]}}{2a^2 - 1 + t(1+2a^2) - 2a\sqrt{(1+t)[a^2 - 1 + t(a^2 + 1)]}} = \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - \frac{1-t}{1+t}}}{a + \sqrt{a^2 - \frac{1-t}{1+t}}} \right)^{-2} = \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - \frac{1-t}{1+t}}}{\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}} \right)^{-4}; \quad (1)$$

inoltre

$$dt = -(1+t)\sqrt{1-t^2} d\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}. \quad (2)$$

Ciò posto abbiamo

$$- \int \sqrt{\frac{a^2 - 1 + t(a^2 + 1)}{(1-t^2)^2(1+t)}} dt = - \int \frac{\sqrt{a^2 - \frac{1-t}{1+t}}}{1-t^2} dt =$$

per la (2)

$$= \int \frac{\sqrt{a^2 - \frac{1-t}{1+t}}}{\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}} d\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = a^2 \int \frac{d\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}}{\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{1-t}{1+t}}} = \int \frac{\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} d\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}}{\sqrt{a^2 - \frac{1-t}{1+t}}} = a \log \frac{a - \sqrt{a^2 - \frac{1-t}{1+t}}}{\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}} + \sqrt{a^2 - \frac{1-t}{1+t}}$$

e per la (1) l'eguaglianza proposta resta dimostrata.

QUISTIONI PROPOSTE

662. Sopra una retta r sono dati due punti fissi A_1, A_2 ed un punto mobile M . Costruiti i cerchi c_1, c_2 di diametri A_1M, MA_2 aventi per centri i punti C_1, C_2 , si domanda:

1° il luogo dei punti d'incontro delle tangenti condotti da A_1 a c_2 con le tangenti condotte da A_2 a c_1 ;

2° il luogo dei punti d'incontro delle tangenti condotte da C_1 a c_2 colle tangenti condotte da C_2 a c_1 ;

3° il luogo dei punti d'incontro delle tangenti condotte da A_1 al circolo di centro A_2 e raggio A_2M colle tangenti condotte da A_2 al circolo di centro A_1 e raggio A_1M .

Si faccia uno studio di queste curve.

FUMAGALLI.

663. Trovare l'area della curva luogo della proiezione del punto d'incontro delle tangenti nelle estremità di due diametri coniugati di una ellisse, sulla retta polare di quel punto rispetto all'ellisse.

664. Essendo dati due circoli c, c' ed un punto A in un piano, si trovi il luogo dei centri dei circoli c'' tangenti a c e tali che l'asse radicale di c' e c'' passi per A .

665. Il luogo del punto di mezzo delle corde di una cardioide che sono viste sotto un angolo costante dal punto di regresso è una quartica, della quale si domanda l'equazione e l'area. Nel caso in cui l'angolo costante è retto, la quartica suddetta diviene un circolo.

666. Essendo dati due circoli c, c' si consideri la parabola p di grandezza costante il cui vertice è situato su c e l'asse è tangente a c , e la parabola p' di grandezza costante il cui vertice è situato su c' e l'asse è tangente a c' .

1. Dimostrare che, se gli assi di p e p' sono perpendicolari, il luogo del centro del circolo che passa per i quattro punti comuni alle due parabole p, p' si compone di due conchiglie di Pascal.

2. Se gli assi di p e p' sono paralleli si trovi l'equazione del luogo del punto di mezzo dell'unica corda comune alle due parabole e si determini l'area limitata da tale curva.

E.-N. BARISIEN.

BIBLIOGRAFIA

Principii di Stereodinamica. — Corso sulla Formazione, l'Interpretazione e l'Integrazione delle equazioni del movimento dei solidi di G. A. Maggi, p. XI-262. Milano, editore Hoepli, 1903.

I principii di Stereodinamica trattano, da un punto di vista assai generale, le questioni più importanti della Dinamica dei sistemi solidi o corpi rigidi comunque vincolati.

Tali questioni, e nel loro ordine e sviluppo storico, e nel loro ordine logico, riguardano anzitutto la formazione delle equazioni del moto; la quale s'impenna nel teorema o principio di d'Alembert e nelle conseguenti equazioni di Lagrange. A questa è dedicata la prima parte del libro.

La trasformazione, le diverse interpretazioni della equazione fondamentale, i teoremi sulla minima azione e sull'azione stazionaria di Hamilton, quello sulla minima costrizione (sforzo) di Gauss, il principio di Maupertuis, in una parola tutto ciò che più specialmente riguarda la interpretazione delle equazioni dinamiche costituisce una seconda parte; la quale, perchè connessa e quasi aggirantesi intorno al principio di Hamilton, da questo prende nome.

La terza parte finalmente, d'indole più strettamente analitica, relativa a quanto di più generale ed importante si è fatto per la integrazione delle equazioni della Dinamica, s'intitola dal nome di Jacobi; perchè appunto il famoso teorema del sommo geometra ne è il punto di partenza non solo, ma anche il risultato più notevole.

L'indole di questo Periodico non consente una minuta analisi della nuova opera del chiaro professore: tanto più che, specie nella seconda parte, anche un solo cenno del modo con cui vengono presentati ed illustrati i vari principii, non sempre esposti in modo chiaro e rigoroso dai trattatisti, richiederebbe spiegazioni alquanto estese. L'A. pur restando nella massima generalità, con opportune definizioni, con una felice nomenclatura, riesce a porre in luce ogni argomento, di cui delinea ancora con pochi tratti la storia, conservando a tutta la trattazione un rigore che non nuoce alla chiarezza.

Questi principii di Stereodinamica sono anche una illustrazione ed una applicazione di altri principii sviluppati dall'A. nella sua *Teoria matematica del movimento dei corpi*; tuttavia egli ha cura di richiamare sin da principio le espressioni fondamentali sulla Dinamica dei sistemi rigidi, nonchè i concetti sui vincoli traduenti la rigidità. Ma volendo poscia considerare, nel caso più generale, un sistema di corpi rigidi comunque vincolati, si presenta subito la distinzione, nettamente e generalmente precisata, tra sistemi olonomi ed anolonomi. Sono olonomi ad esempio i sistemi costituiti da un corpo rigido, un punto o una retta determinata del quale possiede un moto prestabilito; mentre un corpo rigido vincolato a rotolare senza strisciare (moto di rotolamento puro) su di una superficie il cui moto è prestabilito, è un sistema anolonomo. I moti di rotolamento, oggetto di studi recentissimi dell'Appel, Hadamard, ecc., sono particolarmente considerati, perchè ad essi, com'è noto, non sono applicabili le equazioni dinamiche di Lagrange. L'A. partendo dalla formula di Hamilton, pone le equazioni dinamiche sotto una forma valida in ogni caso e dalla quale poi assai spedatamente si trae quella dell'Appel relativa ai sistemi anolonomi.

Il libro abbonda di osservazioni ingegnose; di note storiche e critiche; perchè, è noto, l'A. si occupa con acume e profondità di dottrina, di quanto ha relazione coi principii fondamentali della Meccanica. Così egli ha mezzo di dare un cenno dei principii che informano la meccanica di Hertz; e critica il modo con cui, ad imitazione di d'Alembert, viene dai più dimostrato il famoso principio: che, al pari di molti altri della Meccanica classica, illustri scienziati, ritengono doversi addirittura assumere come postulato, ritenendo insufficienti le dimostrazioni con cui si è sin qui tentato di provarlo. Il Maggi non è invero così radicale, quantunque in fondo giri la difficoltà collo stabilire due postulati, di cui uno, quello delle pressioni vincolari, è sostanzialmente incluso nella dimostrazione classica. Né si deve credere, dai pochi cenni fatti, che il libro altro non sia che un'arida e sterile esposizione di teorie; chè anzi le applicazioni importanti, svolte elegantemente, non mancano; esse trattano del moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso (moto polare); del giroscopio di Foucault; della bicicletta, ecc.

In sostanza adunque un libro bello, concettoso, utile specialmente presso di noi ove non certo abbondano libri buoni e moderni di Meccanica; e che, non ne dubitiamo, sarà accolto con vivo piacere da quanti si interessano di studii e di scienza.

ROBERTO MARCOLONGO.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 18 febbraio 1904.