e i numeri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ si diranno *le coordinate* o *le componenti* del numero complesso a.

Definizione II. — Il numero complesso colle coordinate tutte nulle si chiamerà il *complesso zero,* o semplicemente *zero.* Esso in tutta la teoria rappresenta quella parte che ha lo zero nei numeri reali, si rappresenterà quindi col solito simbolo 0:

$$0 = (0, 0, \ldots, 0).$$

2. Eguaglianza e sue leggi.

Definizione III. — Due numeri complessi si dicono *eguali,* quando le coordinate dell'uno sono rispettivamente *eguali* alle coordinate dell'altro, cioè si porrà

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

quando sussistono le n eguaglianze

$$\alpha_r = \beta_r. \qquad (r = 1, 2, \ldots n)$$

Come conseguenza di questa definizione risultano subito i seguenti teoremi:

L'eguaglianza dei numeri complessi è

1°. *Riflessiva:* $a = a$.

2°. *Simmetrica:* se è $a = b$, sarà $b = a$.

3°. *Transitiva:* da $a = b$, e $b = c$ segue $a = c$.

4°. *Un numero complesso è uguale a zero soltanto quando son nulle tutte le sue coordinate.*

3. Addizione e sue proprietà.

Definizione IV. — L'addizione nei numeri complessi resta definita dall'eguaglianza

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n).$$

Essa risulta evidentemente

1°. *Uniforme:* cioè a risultato unico.

2°. *Commutativa:* cioè $a + b = b + a$.

3°. *Associativa:* $(a + b) + c = a + (b + c)$.

4°. *Lo zero è il modulo* (o il *numero indifferente*) *dell'addizione:* $a + 0 = 0 + a = a$.

5°. *Se è* $a = b$, *sarà anche* $a + c = b + c$, *e inversamente.*

4. Sottrazione.

Risulta subito dalla definiz. IV il seguente teorema:

Dati due numeri complessi $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, *esiste ed è individuato un numero complesso* c *tale che sia*

$$b + c = a.$$

Esso è il numero complesso

$$(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \ldots, \alpha_n - \beta_n).$$

Definizione V. — Questo numero complesso si chiama la *differenza* dei due numeri a e b, e si scrive $c = a - b$.

5. Attribuzione di un coefficiente (reale) ad un numero complesso.

Definizione VI. — Col simbolo ρa o $a\rho$, ove ρ è un numero reale e a un numero complesso si intende rappresentare il numero complesso le cui coordinate sono uguali alle coordinate di a moltiplicate per ρ:

$$\rho a = a\rho = (\rho a_1, \rho a_2, \ldots, \rho a_n).$$

Si dice che al numero a si è *attribuito* il coefficiente (reale) ρ.

Denotando, come facciamo d'ora innanzi, con lettere greche numeri reali, seguono da questa definizione le seguenti proprietà

1° $$1a = a,$$
2° $$\rho(\sigma a) = (\rho\sigma)a,$$
3° $$(\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_m)a = \rho_1 a + \rho_2 a + \ldots + \rho_m a,$$
4° $$\rho(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) = \rho a_1 + \rho a_2 + \ldots + \rho a_m,$$
5° $$0a = 0.$$

Quest'ultima proprietà si enuncia: *Attribuendo ad un numero complesso il coefficiente zero si ottiene il complesso zero.* Ed è chiaro che si ha viceversa: *Se attribuendo un coefficiente ad un numero complesso diverso da zero si ottiene per risultato zero, questo coefficiente deve essere esso stesso uguale a zero.*

6. Definizioni delle unità. Ulteriore rappresentazione di un numero complesso.

Definizione VII. — I numeri complessi di cui una coordinata è uguale a 1 e le altre sono tutte nulle diconsi *unità*.

Le unità sono in numero di n:

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots 0, 0), \qquad e_2 = (0, 1, 0, \ldots 0, 0), \ldots, e_n = (0, 0, 0, \ldots 0, 1).$$

Dalla definiz. V risulta

$$\begin{aligned} (\alpha_1, 0, 0, \ldots 0) &= \alpha_1 e_1 \\ (0, \alpha_2, 0, \ldots 0) &= \alpha_2 e_2 \\ &\cdots\cdots \\ (0, 0, 0, \ldots \alpha_n) &= \alpha_n e_n, \end{aligned}$$

e però, addizionando, si ha

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n,$$

cioè *un numero complesso si può rappresentare come la somma dei numeri complessi che si ottengono attribuendo come coefficienti alle unità* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *le sue coordinate.*

Questa è la forma definitiva sotto la quale si rappresenterà d'ora innanzi un numero complesso d'ordine n.

Le definizioni e le proprietà precedenti possono in conseguenza presentarsi sotto altra forma, per es., la proposizione 4ª del n. 3 può anche enunciarsi così:

Fra le unità non può intercedere alcuna relazione lineare omogenea (a coefficienti reali).

Il sistema degli ∞^n numeri complessi con le unità $e_1, e_2, \dots e_n$, in virtù delle precedenti definizioni, si riproduce mediante addizione e sottrazione. Esso costituisce dunque un *modulo di numeri complessi* (Dedekind), e le unità $e_1, e_2, \dots, e_n$ ne costituiscono una *base.*

Questo modulo non cambia, quando si prendano come base n altri numeri di esso $a_1, a_2, \dots, a_n$, definiti dalle n uguaglianze

$$a_r = \alpha_{r1}e_1 + \alpha_{r2}e_2 + \dots + \alpha_{rn}e_n\,, \qquad (r = 1, 2, \dots n)$$

purchè il determinante $|\alpha_{rs}|$ sia diverso da zero, perchè allora ogni unità e_r, e quindi ogni numero complesso, si può esprimere come un numero complesso con le unità $a_1, a_2, \dots, a_n$.

7. Moltiplicazione.

Perchè un modulo di numeri complessi colle unità $e_1, e_2, \dots, e_n$ si riproduca anche per moltiplicazione e divisione, cioè costituisca (secondo Dedekind) un *corpo* di numeri, devono le altre due operazioni razionali, la moltiplicazione e la divisione, essere definite in modo che i risultati di queste operazioni siano numeri complessi appartenenti al dato sistema. Ciò sarà fatto colle seguenti definizioni.

Definizione VIII. — *a)* Gli n^2 prodotti $e_r \,.\, e_s$ $(r, s = 1, 2, \dots, n)$ siano definiti dalle uguaglianze

$$e_r \,.\, e_s = \lambda_{rs}^{(1)} e_1 + \lambda_{rs}^{(2)} e_2 + \dots + \lambda_{rs}^{(n)} e_n\,.$$

b) $$(\alpha_r e_r)\,.\,(\beta_s e_s) = (\alpha_r \beta_r)(e_r \,.\, e_s)\,.$$

c) Il prodotto $a \,.\, b$ risulti definito (in base alla legge distributiva) dalla uguaglianza

$$a \,.\, b = \sum_{r=1}^{n} \alpha_r e_r \,.\, \sum_{s=1}^{n} \beta_s e_s = \sum_{r,s}^{1\dots n} (\alpha_r e_r) \,.\, (\beta_s e_s)$$

e perciò, in virtù delle definiz. *b)* ed *a)*:

$$a \,.\, b = \sum_{r,s,t}^{1\dots n} \alpha_r \beta_s \lambda_{rs}^{(t)} e_t\,.$$

Per distinguere un coefficiente da un fattore noi adoperiamo il punto come segno della moltiplicazione.

La moltiplicazione così definita gode evidentemente delle seguenti proprietà:

1°. $(\rho a) \,.\, (\sigma b) = (\rho\sigma)(a \,.\, b)\,.$

2°. Se è $a = b$, è anche $a \,.\, c = b \,.\, c$, e $c \,.\, a = c \,.\, b\,.$

3°. $0 \,.\, a = a \,.\, 0 = 0\,.$

Quest'ultima proprietà deve considerarsi come distinta dalla 5ª del n. 5, perchè qui lo zero è considerato non come coefficiente ma come fattore, cioè *il prodotto di due numeri complessi, di cui uno almeno è uguale a zero, è esso stesso uguale a zero.* La proposizione reciproca, come vedremo in seguito, in generale non sussiste.

4°. *Sussiste la legge distributiva:*

$$(a+b).c=a.c+b.c, \qquad c.(a+b)=c.a+c.b.$$

Infatti dalla definiz. VIII segue

$$(a+b).x=\sum_r(\alpha_r+\beta_r)e_r.\sum_s\gamma_s e_s=\sum_{r,s}[(\alpha_r+\beta_r)\gamma_s](e_r.e_s)=\sum_{r,s}(\alpha_r\gamma_s+\beta_r\gamma_s)(e_r.e_s).$$

D'altra parte

$$a.c+b.c=\Sigma(\alpha_r\gamma_s)(e_r.e_s)+\Sigma(\beta_r\gamma_s)(e_r.e_s)=\Sigma(\alpha_r\gamma_s+\beta_r\gamma_s)(e_r.e_s),$$

dunque

$$(a+b).c=a.c+b.c.$$

Nella stessa maniera si dimostra la seconda uguaglianza.

Non sussiste in generale la legge commutativa e associativa.

Infatti perchè la moltiplicazione riuscisse commutativa occorrerebbe (e sarebbe anche sufficiente) che fossero commutativi i prodotti delle unità. Ma da

$$e_r.e_s=e_s.e_r$$

segue (definiz. VIII *a)*)

$$\lambda_{rs}^{(t)}=\lambda_{sr}^{(t)},$$

relazione che in generale non è verificata.

Così, perchè la moltiplicazione riuscisse associativa bisognerebbe che fosse

$$(e_r.e_s).e_t=e_r.(e_s.e_t)$$

ciò che conduce alla relazione in generale non soddisfa

$$\sum_{u,v}\lambda_{rs}^{(u)}\lambda_{ut}^{(v)}=\sum_{u,v}\lambda_{st}^{(u)}\lambda_{ru}^{(v)}.$$

8. Divisione.

La moltiplicazione non essendo in generale commutativa dà luogo a due operazioni inverse

Definizione IX. — La operazione che ha per oggetto di trovare (quando esiste) un numero complesso x tale che sia

$$x.b=a \tag{1}$$

dicesi *divisione anteriore di* a *per* b, *ed* x *il quoziente anteriore.*

La operazione che ha per oggetto di trovare (quando esiste) un numero complesso y tale che sia

$$b.y=a \tag{2}$$

dicesi *divisione posteriore* di a per b, ed y *il quoziente posteriore.*

Perchè esista un numero

$$x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\ldots+\xi_ne_n$$

che sia quoziente anteriore di a per b occorre e basta che le ξ_r verifichino le n equazioni lineari

$$\xi_1 \sum_{s=1}^{n} \beta_s \lambda_{1s}^{(t)} + \xi_2 \sum_{s=1}^{n} \beta_s \lambda_{2s}^{(t)} + \ldots + \xi_n \sum_{s=1}^{n} \beta_s \lambda_{ns}^{(t)} = \alpha_t . \qquad (t = 1, 2, \ldots, n) \quad (3)$$

Consideriamo il determinante di questo sistema:

$$\Delta(b) = \left| \sum_{s=1}^{n} \beta_s \lambda_{rs}^{(t)} \right| . \qquad (r, t = 1, 2, \ldots, n). \quad (4)$$

Due casi possono darsi:

1° o il determinante $\Delta(b)$ è *identicamente nullo*, e allora il sistema (3) è o indeterminato o impossibile: diremo in ogni caso che il dato sistema di numeri complessi *non* ammette la divisione anteriore;

2° ovvero il determinante $\Delta(b)$ *non è identicamente nullo*, e allora per ogni b, per il quale è $\Delta(b) \neq 0$, la divisione è possibile ed uniforme. In questo caso diremo che il sistema *ammette* la divisione anteriore.

Analoghe considerazioni possono ripetersi per la divisione posteriore. Si dice che un sistema di numeri complessi ammette o no una divisione posteriore secondo che il determinante

$$\Delta'(b) = \left| \sum_{r=1}^{n} \beta_r \lambda_{rs}^{(t)} \right| \qquad (s, t = 1, 2, \ldots, n) \quad (5)$$

non è ovvero è identicamente nullo.

I sistemi di numeri complessi, così come sono stati definiti, possono dunque dividersi in 3 categorie:

1°. Sistemi che ammettono una divisione *bilaterale* (cioè che ammettono tanto una divisione anteriore che una divisione posteriore).

2°. Sistemi con divisione *unilaterale* (cioè sistemi che ammettono soltanto una divisione anteriore ovvero soltanto una divisione posteriore).

3°. Sistemi *senza* divisione.

9. Moduli della moltiplicazione.

Definizione X. — Un numero e si chiamerà un *modulo anteriore della moltiplicazione*, se qualunque sia il numero x del sistema si ha

$$e \,.\, x = x.$$

E un numero f si dirà un *modulo posteriore* della moltiplicazione quando, essendo x un numero qualunque del sistema si ha

$$x \,.\, f = x.$$

Intorno ai moduli della moltiplicazione è assai utile la conoscenza dei seguenti teoremi.

Teorema I. — *Un sistema di numeri complessi che possiede un modulo anteriore (posteriore) della moltiplicazione, ammette la divisione posteriore (anteriore).*

Se il sistema ammette un modulo anteriore della moltiplicazione

$$e = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \ldots + \varepsilon_n e_n ,$$

devono essere verificate identicamente le n equazioni

$$\xi_1 \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r \lambda_{r1}^{(t)} + \xi_2 \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r \lambda_{r2}^{(t)} + \ldots + \xi_n \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r \lambda_{rn}^{(t)} = \xi_t , \qquad (t = 1, 2, \ldots , n),$$

e per questo occorre che sia

$$\sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r \lambda_{rt}^{(t)} = 1, \qquad \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r \lambda_{rs}^{(t)} = 0 \qquad (s \neq t)\ (r, t = 1, 2, \ldots , n).$$

Ma allora si ha [8, (5)]

$$\Lambda'(e) = \Big| \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r \lambda_{rs}^{(t)} \Big|_{s,t} = 1,$$

cioè il determinante della divisione posteriore non è identicamente nullo, e però il sistema ammette la divisione posteriore.

Ne risultano i seguenti corollari.

Corollario I. — *Un sistema, che ammette una divisione unilaterale anteriore (posteriore), non può possedere un modulo anteriore (posteriore) della moltiplicazione.*

Corollario II. — *Un sistema, che possiede un modulo anteriore e un modulo posteriore della moltiplicazione, ammette una divisione bilaterale.*

Teorema II. — *Se un sistema ammette un modulo anteriore* e *e un modulo posteriore* f *della moltiplicazione, questi saranno eguali. Oltre* e *non esiste alcun altro modulo anteriore, e oltre* f *alcun altro modulo posteriore.*

Infatti, essendo e un modulo anteriore, si ha

$$e \, . \, f = f,$$

ed essendo f un modulo posteriore, si ha

$$e \, . \, f = e$$

e però

$$e = f.$$

Ogni altro modulo anteriore e', dovendo essere eguale a f, sarebbe eguale a e, e ogni altro modulo posteriore f', dovendo essere eguale a e, sarebbe eguale a f.

Michele Cipolla.

(Continua)

I DETERMINANTI DI ORDINE INFINITO E DI SPECIE SUPERIORE

È noto che da qualche tempo sono stati presi in considerazione i cosidetti determinanti di specie superiore ed i determinanti di ordine infinito.

La teoria dei primi fu fatta intravvedere dal Vandermonde a proposito di un problema sul giuoco degli scacchi, e quella dei secondi dall'astronomo Hill per un problema di astronomia riguardante il perigeo lunare.

La particolareggiata bibliografia su tali ricerche si può leggere nel pregevole trattato « I Determinanti » del prof. Pascal.

Aggiungerò solo che nel 1897 il Cazzaniga, negli *Annali di Matematica,* trattò i determinanti d'ordine infinito e ne espose con chiarezza i principali fondamenti.

Ora io ho appunto per iscopo lo studio di quei determinanti che, essendo di specie superiore sono anche di ordine infinito.

I. — Definizioni.

1°. Consideriamo un gruppo infinito secondo q di quantità

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_q} \qquad (i_1\, i_2 \ldots i_q = -\infty \ldots +\infty).$$

Se nell'iperspazio corrispondente al numero q formiamo la matrice colla regola ordinaria essa la chiameremo la rappresentazione di un *determinante di ordine infinito e di specie* q.

2°. Sia la matrice

$$[a_{i_1 i_2 \ldots i_q}] \qquad (i_1\, i_2 \ldots i_q = -n \ldots 0 \ldots +m).$$

Essa definisce q determinanti di specie q i quali, come è noto, sono differenti fra di loro se q è dispari, ed uguali fra di loro se q è pari.

Designeremo questi determinanti mediante il simbolo

$$D^{(r)}_{mn} \qquad (r = 1\, 2 \ldots q)$$

ove r rappresenta il gruppo fisso.

Ora se il valore del determinante $D^{(r)}_{mn}$ per valori infinitamente crescenti di m ed n tende ad un limite determinato questo limite lo indicheremo con $D^{(r)}$ ovvero con

$$[a_{i_1 i_2 \dots i_q}]^{(r)} \qquad (i_1\, i_2 \dots i_q = -\infty \dots + \infty).$$

Se il limite non esiste il determinante si dirà *divergente*; se invece cambia con la legge colla quale m ed n tendono all'infinito, il determinante si dirà *indeterminato*.

3°. Applicando il noto criterio per la ricerca del limite di una funzione, risulta:

Il determinante $D^{(r)}$ è convergente quando per ogni σ piccolo ad arbitrio si può determinare un numero positivo N tale che la disuguaglianza

$$|D^{(r)}_{m+p\, n+q} - D^{(r)}_{m\, n}| < \sigma$$

resti verificata per tutti i valori di m ed n maggiori di N e per qualunque valore positivo di p e q.

E dovendo essere indifferente la legge con la quale m ed n tendono all'infinito, supporremo sempre $m = n$ e

$$D^{(r)}_{m\, n} = D^{(r)}_{m}; \qquad D^{(r)} = \lim D^{(r)}_{m}.$$

In un determinante infinito di specie q l'elemento $a_{00\dots 0}$ sarà detto *origine*.

Gli elementi

$$a_{i_1 i_2 \dots i_q}\ (i_1 = i_2 = \dots = i_q)$$

si diranno *principali* e la diagonale che li contiene *diagonale principale*.

Un determinante resta definito quando si fissa l'origine e la diagonale principale.

II. — Proprietà fondamentali.

1°. *Il valore di un determinante convergente non cambia quando si prenda per origine un elemento diagonale arbitrario.*

Ed infatti ciò non è che una conseguenza di quanto abbiamo detto precedentemente poichè tutto si riduce a far crescere con un'altra legge i numeri m ed n.

2°. Si dimostrano poi analogamente a quanto concerne i determinanti quadratici di ordine infinito i seguenti teoremi:

I. — *In un determinante infinito convergente, di specie dispari non si possono cambiare gli strati di un gruppo con gli strati di un altro.*

II. — *Se si scambiano fra loro due strati paralleli di un determinante convergente di ordine infinito, esso cambia di segno a meno che il determinante non sia di specie dispari ed i due stati paralleli non siano del gruppo fisso.*

Di qui si deduce:

Se un determinante convergente di ordine infinito ha due strati paralleli uguali, od equimultipli, esso è nullo a meno che il determinante non sia di specie dispari e gli strati uguali non appartengano al gruppo fisso.

III. — *Se in un determinante convergente si moltiplicano gli strati del primo gruppo rispettivamente per delle quantità*

$$\alpha'_i \, (i = 1\,2\,\ldots\,\infty);$$

gli strati del secondo gruppo per delle quantità

$$\alpha''_i \, (i = 1\,2\,\ldots\,\infty)\ldots \text{ ecc.}$$

tali che i prodotti infiniti

$$p' = \pi_i\, \alpha'_i\,; \qquad p'' = \pi_i\, \alpha''_i \ldots \text{ ecc.}$$

siano assolutamente convergenti e diversi da zero, otterremo

$$D'^{(r)} = p'\,p''\ldots D^{(r)}$$

essendo D^r *l'antico determinante e* D'^r *il nuovo.*

3°. *Ogni determinante convergente di cui gli indici degli strati dei vari gruppi si estendono da* $-\infty$ *a* $+\infty$ *può essere trasformato in un altro dello stesso valore nel quale i detti indici si estendono da* 1 *ad* ∞.

Ed infatti trasportando tutti gli strati di ogni gruppo aventi indice negativo in modo che nel nuovo determinante $D'^{(r)}$ la successione

$$1, 2, \ldots, 2n, 2n+1, \ldots$$

degli strati di ogni gruppo sia data dalla successione:

$$0, -1, 1, -2, 2, \ldots, -n, n, \ldots$$

degli strati di $D^{(r)}$, risulterà un determinante

$$D'^{(r)} = [b_{i_1 i_2 \ldots i_q}]$$

in cui sarà:

$$i_1\, i_2 \ldots i_q = 1\,2\ldots\infty\,.$$

E siccome, qualunque sia q si avrà sempre:

$$D^{(r)}_{mm} = D^{(r)}_{2m+1}$$

(poichè anche nel caso in cui q è dispari il numero dei gruppi in cui uno scambio di due strati, cambia segno al determinante è sempre pari) resterà ora facile vedere l'uguaglianza

$$D'^{(r)} = D^{(r)}\,.$$

4°. In seguito potremo quindi supporre di trattare determinanti

$$D^{(r)} = [a_{i_1 i_2 \dots i_q}] \quad (i_1 i_2 \dots i_q = 1\, 2 \dots \alpha)$$

e di più considereremo il primo gruppo, il gruppo fisso. In tal modo il determinante lo indicheremo addirittura colla lettera D.

III. — Criterio di convergenza - Determinanti normali.

1°. Chiameremo *normale* ogni determinante infinito tale che il prodotto degli elementi diagonali sia assolutamente convergente e così pure la serie q^{upla} degli elementi non-diagonali.

2°. *Ogni normale è convergente.* Infatti se il prodotto infinito

$$\pi\,(a_{i_1 i_2 \dots i_q}) \qquad (i_1 = i_2 = \dots = i_q)$$

è assolutamente convergente, ponendo

$$a_{i_1 i_2 \dots i_q} = 1 + a'_{i_1 i_2 \dots i_q} \qquad (i_1 = i_2 = \dots = i_q)$$
$$a_{i_1 i_2 \dots i_q} = a'_{i_1 i_2 \dots i_q} \qquad (\text{ove non è } i_1 = i_2 = \dots = i_q)$$

si ricava che la serie semplice

$$\Sigma\,|a'_{i_1 i_2 \dots i_q}| \qquad (i_1 = i_2 = \dots = i_q)$$

è convergente, e così pure la serie q^{upla}

$$\sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_q} |a'_{i_1 i_2 \dots i_q}| \qquad (\text{senza più nessuna restrizione per le } i)$$

ed il prodotto infinito

$$\overline{P} = \pi_{i_1} (1 + \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_q} |a'_{i_1 i_2 \dots i_q}|).$$

Ora se in D_{m+p} e in $\overline{P}_{m+p}$, rispettivamente, poniamo certi elementi uguali a zero otteniamo rispettivamente D_m e $\overline{P}_m$. I termini che si annullano rappresentano quindi le differenze

$$D_{m+p} - D_m \qquad \text{e} \qquad \overline{P}_{m+p} - \overline{P}_m\,;$$

e siccome i termini che si annullano in $\overline{P}_{m+p}$ sono tutti positivi e solamente alcuni fra essi rappresentano, in valore assoluto, quelli che si annullano in D_{m+p}, possiamo concludere essere

$$|D_{m+p} - D_m| < \overline{P}_{m+p} - \overline{P}_m$$

e, essendo P convergente, lo sarà pure D c. d. d.

Come si vede la condizione di essere normale è solamente sufficiente per stabilire la convergenza del determinante.

Analoga dimostrazione a quella fatta per i determinanti quadratici richiede il seguente teorema:

Se in un normale di specie qualunque al posto degli elementi di un numero qualsivoglia, ma finito, di strati si pongono altri elementi ad arbitrio, ma inferiori in valore assoluto ad un certo numero finito il nuovo determinante è ancora convergente.

IV. — Minori di un normale.

1°. In un determinante $D = [a_{i_1 i_2 \dots i_q}]$ scegliamo ad arbitrio un certo numero r di strati del primo gruppo e pure ad arbitrio altrettanti strati di ogni altro gruppo

Siano

$\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_r$	gli	strati	del	primo	gruppo	
$\beta_1\, \beta_2 \dots \beta_r$	»	»	»	secondo	»	
$\gamma_1\, \gamma_2 \dots \gamma_r$	»	»	»	terzo	»	ecc.

e al posto degli elementi

$$a_{\alpha_{p_1} \beta_{p_2} \gamma_{p_3} \dots}$$

degli strati indicati poniamo l'unità se è

$$p_1 = p_2 = \dots = p_q$$

e poniamo lo zero se tali uguaglianze non hanno luogo.

Il determinante che così risulta lo chiameremo un *sottodeterminante* o *minore infinito di ordine* r e sarà indicato colla notazione:

$$D_r = \text{agg.}\, a_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \dots}\, a_{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \dots} \dots a_{\alpha_r \beta_r \gamma_r \dots} = \begin{pmatrix} \alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_r \\ \beta_1\, \beta_2 \dots \beta_r \\ \gamma_1\, \gamma_2 \dots \gamma_r \\ \dots\dots \end{pmatrix}$$

in cui il posto della diagonale principale è quello stesso che essa occupa nel determinante D.

Gli strati considerati si incrociano in r^q elementi che non appartengono al minore considerato e che formano un *minore finito di ordine* r detto *aggiunto* dell'altro, e reciprocamente.

Quei minori sulla cui diagonale principale non compare alcun elemento non diagonale del determinante dato si chiamano *minori diagonali.* È evidente che:

Ogni minore infinito di un normale è normale.

2°. Il minore

$$D^{(r)} = \begin{pmatrix} \alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_r \\ \beta_1\, \beta_2 \dots \beta_r \\ \gamma_1\, \gamma_2 \dots \gamma_r \\ \dots\dots \end{pmatrix}$$

(in cui sussistono le relazioni: $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_r$; $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_r$; $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_r; \ldots$) del normale D è uguale al determinante $D'^{(r)}$ che si ottiene sopprimendo in D gli strati $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r$ del primo gruppo; gli strati $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_r$ del secondo gruppo, ecc., ... ed attribuendo poscia al nuovo determinante il segno $(-1)^s$, essendo s la somma delle inversioni che formano gli indici variabili nei termini principali dei due minori, uno infinito $D'^{(r)}$ e l'altro finito d'ordine r, quando essi termini si scrivano uno dopo l'altro e si dispongano gli indici fissi nell'ordine naturale.

Infatti osservando dapprima che $D'^{(r)}$ è pure convergente, perchè la diagonale principale del determinante $D'^{(r)}$, a meno di un numero finito di elementi resta sempre quello di D, poniamo

$$\alpha_r < m, \qquad \beta_r < m, \qquad \gamma_r < m \ldots$$

e indichiamo con $D_m^{(r)}$ il determinante che si ottiene da D_m ponendo l'unità in luogo degli elementi

$$a_{\alpha_{p_s}, \beta_{p_s}, \gamma_{p_s}, \ldots} \quad (s = 1, 2 \ldots r)$$

e zero per i restanti elementi degli strati considerati; indichiamo poi con $D_m'^{(r)}$ il minore di D^m ottenuto sopprimendo in esso gli stessi strati. Allora, dalla uguaglianza

$$D_m^{(r)} = D_m'^{(r)} (-1)^s$$

(vedi la mia memoria « I determinanti di specie superiore » nel periodico: *Le matematiche pure ed applicate,* tomo II, num. 8-9) per un m finito e dalle disuguaglianze

$$|D^{(r)} - D_m^{(r)}| < \frac{\sigma}{2}; \qquad |D'^{(r)} - D_m'^{(r)}| < \frac{\sigma}{2}$$

per σ piccolo a piacere ed m sufficientemente grande, il teorema è dimostrato.

3°. Se da un minore

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \, \alpha_2 \ldots \alpha_r \\ \beta_1 \, \beta_2 \ldots \beta_r \\ \gamma_1 \, \gamma_2 \ldots \gamma_r \\ \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

di un normale si deduce un altro minore

$$\begin{pmatrix} \alpha_{t_1} \, \alpha_{t_2} \ldots \alpha_{t_r} \\ \beta_{v_1} \, \beta_{v_2} \ldots \beta_{v_r} \\ \gamma_{w_1} \, \gamma_{w_2} \ldots \gamma_{w_r} \\ \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

con p_1 scambi di indici α, p_2 scambi di indici β, p_3 scambi di indici γ, ecc. il nuovo minore è uguale al primo moltiplicato per $(-1)^{p_1+p_2+\cdots+p_q}$ ovvero per $(-1)^{p_2+p_3+\cdots+p_q}$ secondo che q è pari o dispari. (Si noti bene che teniamo fisso il primo gruppo.)

Questo teorema è evidente quando si ponga mente che dal primo minore si può passare al secondo cogli stessi p_1 scambi degli strati $\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_r$ fra di loro; gli stessi p_2 scambi degli strati $\beta_1\ \beta_2 \dots \beta_r$ fra di loro, ecc.

4°. Il minore

$$\begin{pmatrix} 1\ 2 \dots n \\ 1\ 2 \dots n \\ 1\ 2 \dots n \\ \dots\dots \end{pmatrix},$$

al crescere di n tende all'unità. La dimostrazione è affatto analoga a quella fatta per i determinanti quadratici.

5°. Un determinante qualunque finito potrà sempre porsi sotto forma di un determinante infinito normale continuando la sua diagonale principale con elementi uguali all'unità positiva e ponendo zero per gli altri elementi.

Così pure i determinanti infiniti

$$D = [a_{i_1 i_2 \dots i_q}] \qquad (i_1\ i_2 \dots i_q = 1\ 2 \dots \infty)$$

si possono ritenere come minori diagonali di quelli i cui strati vanno tutti da $-\infty$ a $+\infty$.

V. — Sviluppo di determinanti normali.

1°. Sia dato il determinante normale

$$D = [a_{i_1 i_2 \dots i_q}] \qquad (i_1\ i_2 \dots i_q = 1\ 2 \dots \infty)$$

e formiamo l'identità

$$\Delta_m = \Delta_1 + (\Delta_2 - \Delta_1) + (\Delta_3 - \Delta_2) + \dots + (\Delta_m - \Delta_{m-1})$$

ove

$$\Delta_r = [a_{i_1 i_2 \dots i_q}] \qquad (i_1\ i_2 \dots i_q = 1\ 2 \dots r).$$

Poniamo come prima

$$a_{i_1 i_2 \dots i_q} = a'_{i_1 i_2 \dots i_q} \qquad (\text{ove non è } i_1 = i_2 = \dots = i_q)$$
$$a_{i_1 i_2 \dots i_q} = 1 + a'_{i_1 i_2 \dots i_q} \qquad (i_1 = i_2 = \dots = i_q)$$
$$\text{e} \qquad \Delta_r - \Delta_{r-1} = \nabla_r .$$

Allora se si riflette che il complemento algebrico di un elemento della diagonale principale è precisamente il complemento dell'elemento stesso preso col segno $+$, essendo in questo caso $V' = V_1 q$ un numero sempre pari (vedi la mia memoria sopracitata) si vede che si ottiene per ∇_r un determinante che diversifica dall'altro Δ_r soltanto per l'elemento $a_{rr \dots r}$ sostituito in ∇_r coll'elemento $a'_{rr \dots r}$.

Ora dico che nella espressione

$$D = \nabla_1 + \nabla_2 + \ldots + \nabla_m + \ldots$$

la serie del secondo membro converge assolutamente.

Infatti è facile vedere che la serie dei moduli è convergente, perchè paragonandola con la serie convergente a termini positivi

$$\overline{P} = \overline{\pi}_1 + (\overline{\pi}_2 - \overline{\pi}_1) + (\overline{\pi}_3 - \overline{\pi}_2) + \ldots + (\overline{\pi}_m - \overline{\pi}_{m-1}) + \ldots$$

ove è

$$\overline{\pi}_r = \pi^r_{i_1=1}(1 + \sum_{i_2 i_3 \ldots i_q} |a_{i_1 i_2 \ldots i_q}|)$$

si ha

$$|\Delta_m - \Delta_{m-1}| = |\nabla_m| \leq \overline{\pi}_m - \overline{\pi}_{m-1} \qquad \text{c. d. d.}$$

Ogni espressione $\overline{\pi}_m - \overline{\pi}_{m-1}$ può essere scritto come una somma di termini positivi; ogni termine di ∇_m è pure nell'espressione stessa contenuto sempre in valore assoluto, quindi se si esprime il determinante ∇_m come la somma algebrica di

$$M = (m\,!)^{q-1}$$

termini tutti presi col loro valore assoluto, la serie D resta ancora convergente. Posto quindi

$$\nabla_m = \sum_{k=1}^{M} \nabla_{mk}$$

la serie doppia

$$D = \sum_m \sum_k \nabla_{mk}$$

converge assolutamente.

2°. Estendiamo ora al caso nostro gli sviluppi che si possono fare per i determinanti finiti.

Raccogliamo nella serie (1) gli elementi degli strati $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r$ che possiamo supporre appartenenti al primo gruppo fisso.

Allora avremo

$$D = \sum a_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots} a_{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \ldots} \ldots . a_{\alpha_r \beta_r \gamma_r \ldots} A_{\substack{\alpha_1 \ldots \alpha_r \\ \beta_1 \ldots \beta_r \\ \gamma_1 \ldots \gamma_r \\ \ldots\ldots}}$$

in cui come si vede

$$A_{\substack{\alpha_1 \ldots \alpha_r \\ \beta_1 \ldots \beta_r \\ \gamma_1 \ldots \gamma_r \\ \ldots\ldots}}$$

è il coefficiente del prodotto

$$a_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots} a_{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \ldots} \ldots . a_{\alpha_r \beta_r \gamma_r \ldots} .$$

Il sommatorio è esteso a tutti i sistemi (β) di r strati del secondo gruppo presi fra gli infiniti strati del gruppo stesso nel determinante D; a tutti i sistemi (γ) di r strati del terzo gruppo, ecc.

Ma se nella presente identità poniamo $a_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots} = 1$ e poniamo zero in luogo di tutti gli elementi degli strati individuanti l'elemento considerato, e la stessa operazione facciamo sull'elemento $a_{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \ldots}$ e strati corrispondenti, ecc., otterremo

$$D^{(r)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_r \\ \beta_1 \ldots \beta_r \\ \gamma_1 \ldots \gamma_r \\ \ldots\ldots \end{pmatrix} = A_{\substack{\alpha_1 \ldots \alpha_r \\ \beta_1 \ldots \beta_r \\ \gamma_1 \ldots \gamma_r}} .$$

Onde potremo scrivere

$$D = \Sigma\, a_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots} a_{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \ldots} \ldots a_{\alpha_r \beta_r \gamma_r \ldots} \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_r \\ \beta_1 \ldots \beta_r \\ \gamma_1 \ldots \gamma_r \\ \ldots\ldots \end{pmatrix} .$$

Derivando avremo

$$\frac{\partial^r D}{\partial a_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots} \partial a_{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \ldots} \ldots \partial a_{\alpha_r \beta_r \gamma_r \ldots}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_r \\ \beta_1 \ldots \beta_r \\ \gamma_1 \ldots \gamma_r \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

il che mostra come si possa ottenere l'*aggiunto* o *complemento algebrico* del prodotto di più elementi.

Come casi particolari avremo

$$D = \sum_{(\beta\gamma\ldots)} a_{\alpha\beta\gamma\ldots} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial D}{\partial a_{\alpha\beta\gamma\ldots}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \vdots \end{pmatrix} .$$

Se il determinante è di specie pari avremo

$$0 = \sum_{(\beta\gamma\ldots)} a_{\rho_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots} a_{\rho_2 \beta_2 \gamma_2 \ldots} \ldots a_{\rho_r \beta_r \gamma_r \ldots} \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_r \\ \beta_1 \ldots \beta_r \\ \gamma_1 \ldots \gamma_1 \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

in cui $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_r$ rappresentano un sistema di r strati del primo gruppo, che differisce dal sistema

$$a_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r .$$

Se il determinante è di specie qualunque si avrà

$$0 = \sum_{(\beta\gamma\ldots)} a_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots k_1 \ldots} a_{\alpha_2 \beta_2 \nu_2 \ldots k_2 \ldots} a_{\alpha_r \beta_r \gamma_r \ldots k_r \ldots} \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_r \\ \beta_1 \ldots \beta_r \\ \gamma_1 \ldots \gamma_r \\ \ldots\ldots \\ H_1 \ldots H_r \\ \ldots\ldots \end{pmatrix} .$$

VI. — Moltiplicazione.

1°. *Il prodotto di due normali di specie* p *e* q *rispettivamente si può mettere sotto forma di un normale di specie* $p+q-1$.

Siano infatti

$$A = |a_{i_1 i_2 \dots i_p}| \qquad \text{e} \qquad B = |b_{j_1 j_2 \dots j_q}|$$

due normali, e scriviamo il determinante di specie $p+q-1$

$$C = |c_{k_1 k_2 \dots k_{p+q-1}}|$$

ponendo

$$c_{r i_1^r \dots i_{p-1}^r j_1^r \dots j_{q-1}^r} = a_{r i_1^r \dots i_{p-1}^r} b_{r j_1^r \dots j_{q-1}^r}.$$

Allora C è un determinante normale. (Ciò dimostrato resterà poi facile vedere che esso converge al valore A.B; vedi la mia Nota sopra citata.)

Ed invero supponendo sempre

$$a_{i_1 i_2 \dots i_p} = a'_{i_1 i_2 \dots i_p}$$

(ove non è contemporaneamente $i_1 = i_2 \dots = i_p$)

$$a_{i_1 i_2 \dots i_p} = 1 + a'_{i_1 i_2 \dots i_p}$$

(ove è contemporaneamente $i_1 = i_1 = \dots i_p$)

ed altrettanto per gli elementi b e c, avremo

$$\underset{(\text{ove non è } r=i_1^r=\dots=i_{p-1}^r=j_1^r=\dots=j_{q-1}^r)}{\Sigma c'_{r i_1^r \dots i_{p-1}^r j_1^r \dots j_{q-1}^r}} = \underset{\left(\text{ove non è}\begin{cases} r=i_1^r=\dots=i_{p-1}^r \\ r=j_1^r=\dots=j_{q-1}^r\end{cases}\right)}{\Sigma a'_{r i_1^r \dots i_{p-1}^r} b'_{r j_1^r \dots j_{q-1}^r}} +$$

$$+ \underset{(\text{ove è } r=i_1^r=\dots=i_{p-1}^r \text{ e non è } r=j_1^r=\dots=j_{q-1}^r)}{\Sigma \left(1 + a'_{r i_1^r \dots i_{p-1}^r}\right) b'_{r j_1^r \dots j_{p-1}^r}} +$$

$$+ \underset{(\text{ove è } r=j_1^r=\dots=j_{q-1}^r \text{ e non è } r=i_1^r=\dots=i_{p-1}^r)}{\Sigma \left(1 + b'_{r j_1^r \dots j_{q-1}^r}\right) a'_{r i_1^r \dots i_{p-1}^r}}$$

cioè

$$\underset{(\text{ove non è } r=i_1^r=\dots=i_{p-1}^r=j_1^r=\dots=j_{q-1}^r)}{\Sigma c'_{r i_1^r \dots i_{p-1}^r j_1^r \dots j_{q-1}^r}} =$$

$$= \underset{(\text{ove non è } r=i_1^r=\dots=i_{p-1}^r=j_1^r=\dots=j_{q-1}^r)}{\Sigma a'_{r i_1^r \dots i_{p-1}^r} b'_{r j_1^r \dots j_{q-1}^r}} +$$

$$+ \underset{(\text{ove non è } r=i_1^r=\dots=i_{p-1}^r)}{\Sigma a'_{r i_1^r \dots i_{p-1}^r}} + \underset{(\text{ove non è } r=j_1^r=\dots=j_{q-1}^r)}{\Sigma b'_{r j_1^r \dots j_{q-1}^r}}. \qquad (1)$$

D'altra parte sarà

$$\Sigma\left(1+c'_{ri_1^r\ldots i_{p-1}^r j_1^r\ldots j_{q-1}^r}\right)=\Sigma\left(1+a'_{ri_1^r\ldots i_{p-1}^r}\right)\left(1+b'_{rj_1^r\ldots j_{q-1}^r}\right)=$$
$$=\Sigma\left(1+a'_{ri_1^r\ldots i_{p-1}^r}+b'_{rj_1^r\ldots j_{q-1}^r}+a'_{ri_1^r\ldots i_{p-1}^r}\,b'_{rj_1^r\ldots j_{q-1}^r}\right)$$
(qui è sempre $r=i_1^r=\ldots=i_{p-1}^r=j_1^r=\ldots=j_{q-1}^r$)

cioè

$$\Sigma\, c'_{ri_1^r\ldots i_{p-1}^r j_1^r\ldots j_{q-1}^r}=\Sigma\, a'_{ri_1^r\ldots i_{p-1}^r}+$$
$$+\Sigma\, b'_{rj_1^r\ldots j_{q-1}^r}+\Sigma\, a'_{ri_1^r\ldots i_{p-1}^r}\,b'_{rj_1^r\ldots j_{q-1}^r} \qquad (2)$$
(in cui è $r=i_1^r=\ldots=i_{p-1}^r=j_1^r=\ldots=j_{q-1}^r$).

Ma tanto in (1) che in (2) le serie del secondo membro convergono assolutamente, dunque convergono pure le serie che si trovano al primo membro ed il determinante di specie $p+q-1$ formato colle c è normale c. d. d.

2°. *Il prodotto di due determinanti*

$$\mathrm{A}=|a_{i_1 i_2\ldots i_p}| \qquad \text{e} \qquad \mathrm{B}=|b_{j_1 j_2\ldots j_q}|$$

di specie p *e* q *rispettivamente si può indicare mediante un normale* C *di specie* $\mathrm{p}+\mathrm{q}-2$ *i cui elementi* c *sono dati dalla relazione*

$$c_{ri_1^r\ldots i_{p+q-3}^r}=\sum_{\lambda_r=1}^{\infty} a_{ri_1^r\ldots i_{p-2}^r\lambda_r}\, b_{\lambda_r i_{p-1}^r\ldots i_{p+q-3}^r}.$$

Anche qui ci basterà dimostrare che C è normale, per potere poi stabilire la formula A . B = C.

Infatti applicando gli indici alle lettere a, b, c, e facendo le solite posizioni si avrà

$$\underset{(\text{ove non è } r=i_1^r=\ldots=i_{p+q-3}^r)}{\Sigma\, c'_{ri_1^r\ldots i_{p+q-3}^r}}=\underset{\left(\text{ove non è }\begin{cases} r=i_1^r=\ldots=i_{p-2}^r=\lambda_r \\ \lambda_r=i_{p-1}^r=\ldots=i_{p+q-3}^r\end{cases}\right)}{\Sigma\, a'_{ri_1^r\ldots i_{p-2}^r\lambda_r}\, b'_{\lambda_r i_{p-1}^r\ldots i_{p+q-3}^r}}+$$
$$+\Sigma\left(1+a'_{ri_1^r\ldots i_{p-2}^r\lambda_r}\right)b'_{\lambda_r i_{p-1}^r\ldots i_{p+q-3}^r}+$$
(ove è $r=i_1^r=\ldots=i_{p-2}^r=\lambda_r$ e non è $\lambda_r=i_{p-1}^r=\ldots=i_{p+q-3}^r$)
$$+\Sigma\left(1+b'_{\lambda_r i_{p-1}^r\ldots i_{p+q-3}^r}\right)a'_{ri_1^r\ldots i_{p-2}^r\lambda_r}$$
(ove è $\lambda_r=i_{p-1}^r=\ldots=i_{p+q-3}^r$ e non è $r=i_1^r=\ldots=i_{p-2}^r=\lambda_r$)

cioè

$$\underset{(\text{ove non è } r=i_1^r=\ldots=i_{p+q-3}^r)}{\Sigma\, c'_{ri_1^r\ldots i_{p+q-3}^r}}=\underset{(\text{ove non è } r=i_1^r=\ldots=i_{p+q-3}^r=\lambda_r)}{\Sigma\, a'_{ri_1^r\ldots i_{p-2}^r\lambda_r}\, b'_{\lambda_r i_{p-1}^r\ldots i_{p+q-3}^r}}+$$
$$+\underset{\text{ove non è } r=i_1^r=\ldots=i_{p-2}^r=\lambda_r)}{\Sigma\, a'_{ri_1^r\ldots i_{p-2}^r\lambda_r}}\qquad+\underset{(\text{ove non è } \lambda_r=i_{p-1}^r=\ldots=i_{p+q-3}^r)}{\Sigma\, b'_{\lambda_r i_{p-1}^r\ldots i_{p+q-3}^r}}$$

ma essendo convergenti assolutamente le tre serie del secondo membro, lo sarà pure quella del primo membro.

Inoltre si ha

$$\underset{(\text{ove è } r = i_1^r = \ldots = i_{p+q-3}^r)}{\Sigma\left(1 + c'_{ri_1^r \ldots i_{p+q-3}^r}\right)} = \underset{(\text{ove è } \lambda_r \neq r = i_1^r = \ldots = i_{p+q-3}^r)}{\Sigma\, a'_{ri_1^r \ldots i_{p-2}^r \lambda_r}\, b'_{\lambda_r i_{p-1}^r \ldots i_{p+q-3}^r}} +$$

$$+ \underset{(\text{ove è } \lambda_r = r = i_1^r = \ldots = i_{p+q-3}^r)}{\Sigma\left(1 + a'_{ri_1^r \ldots i_{p-2}^r \lambda_r}\right)\left(1 + b'_{\lambda_r i_{p-1}^r \ldots i_{p+q-3}^r}\right)}$$

cioè

$$\underset{(\text{ove è } r = i_1^r = \ldots = i_{p+q-3}^r)}{\Sigma\, c'_{ri_1^r \ldots i_{p+q-3}^r}} = \underset{(\text{ove è } r = i_1^r = \ldots = i_{p+q-3}^r)}{\Sigma\, a'_{ri_1^r \ldots i_{p-2}^r \lambda_r}\, b'_{\lambda_r i_{p-1}^r \ldots i_{p+q-3}^r}} +$$

$$+ \underset{(\text{ove è } r = i_1^r = \ldots = i_{p-2}^r = \lambda_r)}{\Sigma\, a'_{ri_1^r \ldots i_{p-2}^r \lambda_r}} + \underset{(\lambda_r = i_{p-1}^r = \ldots = i_{p+q-3}^r)}{\Sigma\, b'_{\lambda_r i_{p-1}^r \ldots i_{p+q-3}^r}}$$

ed essendo le tre serie del secondo membro convergenti, lo sarà pure la serie del primo membro, dunque il determinante è *normale* c. d. d.

Genova. CALEGARI ADRASTO.

PER IL QUARANTESIMO D'INSEGNAMENTO DI "GIOVANNI GARBIERI"

Ebbi la fortuna di aver a maestro Giovanni Garbieri nel 1880. Io frequentavo allora il terzo anno della sezione fisico-matematica nel R. Istituto Tecnico di Roma, che era diretto con energia e rara competenza dal Rodrigues e noverava insegnanti valorosi come il Besso, lo Gnoli, il Morandi, il Torraca, il Porena, ecc., che io ricordo e ricorderò sempre con grande e riconoscente affetto.

Il Garbieri insegnava matematica nel primo biennio e Geometria proiettiva e descrittiva nel quarto anno e si era cattivata la stima dei colleghi e l'affetto degli allievi, di quella non meno necessario all'insegnante; affetto verace, sincero e disinteressato; chè il Garbieri, dai modi franchi e un po' risoluti, giusto ma rigoroso, era inesorabile coi negligenti e buono, come un padre, cogli studiosi. E i nostri professori lo additavano come esempio mirabile di ciò che possa il felice connubio del forte ingegno, colla tenacia dei propositi e la ferrea saldezza dell'animo. Si sapeva che il giovane professore "romagnolo" già maestro nelle scuole comunali di Bologna, in mezzo alle difficoltà e alla lotta per vivere, pagato il tributo alla patria, aveva conseguita la laurea all'Università di Bologna; aveva lavorato, lottato solo, con tenacia, con energia indomabile, guadagnandosi la fiducia del

Beltrami (maestro venerato a Bologna) del Cremona, del Battaglini, i cui nomi gloriosi non erano sconosciuti ai giovani dell'Istituto di Roma; si sapeva della vita semplice ch'egli conduceva in una modesta stanzetta, lontano dai suoi cari, dedito interamente a quegli studi, che presto gli avrebbero fruttato il premio maggiore che si aspetta da uno studioso: una cattedra all'Università; premio ambíto, desiderato e che, forse in Italia, non è adeguato compenso alle fatiche ai disagi, allo sciupìo degli anni più belli della giovinezza.

L'autunno di quello stesso anno, offertomi per disegnare le figure degli elementi di Geometria intuitiva che il Garbieri compilava insieme con un altro valoroso insegnante, il Verger, io ebbi occasione di avvicinar meglio il maestro; appunto da allora maestro affettuoso e venerato. Quel compito, molto modesto, che io disimpegnava con amore, è tra i più lieti ricordi della mia gioventù, ben lontana oramai! Quanto non debbo a quei maestri, coi quali quasi ogni giorno io mi trovava; quanta e quale influenza sui miei studi, sul mio avvenire! quanti insegnamenti, continuati poi nei primi mesi dell'anno scolastico 80-81, nel quarto anno, allorchè il Garbieri, da pari suo, ci faceva gustare le prime bellezze degli aurei elementi di Geometria proiettiva del Cremona! Insegnamenti troppo presto cessati; perchè il Garbieri ai primi dell'81, lasciava l'Istituto di Roma per quello di Savona. Da allora in poi le vicende della vita mi hanno allontanato dal maestro, che volle tuttavia sempre amorevolmente seguire i miei passi. A me dunque, se non altro pel triste privilegio dell'età, a me sia concesso di parlare del maestro, dell'uomo di scienza, dell'educatore. Ed oggi, nel giorno lieto in cui Egli può, con sereno e legittimo orgoglio, rievocare la sua lunga, laboriosa carriera; in cui l'omaggio affettuoso dell'allievo è espressione calda di ammirazione, non interessato e convenzionale ossequio, per un forte intelletto, per un grande carattere; in questo giorno giungano alla modesta casetta di Nervi le felicitazioni sincere dei suoi scolari, di quanti ammirano l'ingegno e la indomabile volontà dei propositi.

Nominato maestro nelle scuole elementari di Bologna quaranta anni fa, ai primi di dicembre del 1864; ottenuta la laurea in matematica, passava il Garbieri ad insegnare Meccanica e Geometria descrittiva nell'Istituto Industriale di Reggio Emilia. Dal 1879 sino ai primi dell'81 insegnò in quello di Roma, che abbandonò poi per recarsi a Savona a dirigere l'Istituto Tecnico e Nautico. In Savona restava appena un anno, poichè ai primi dell'82 occupava, in seguito a concorso, la cattedra di Algebra nella Università di Padova.

Questo periodo della attività scientifica e didattica, trascorso nell'insegnamento primario e secondario e nella milizia, è forse il più laborioso, il più vario e quello che più rivela la forte fibra del Garbieri. In mezzo a vari e molteplici insegnamenti; tra i doveri, scrupolosamente adempiuti, della scuola, egli coltivava (e con quanti sacrifizi!) quegli studi che dovevano rivelare il suo ingegno e che risentono la potente e benefica influenza del Beltrami; studi che, specialmente, si riferiscono a due degli argomenti che il Garbieri ha poi sempre coltivati con amore; la teoria dei determinanti e quella delle forme.

È del 74 il suo primo lavoro, un libro bello ed utile: *I determinanti con numerose applicazioni*, scritto con tanta chiarezza, con tanta dovizia di buona e soda dottrina e destinato ad agevolare ai giovani la lettura dei libri classici del Brioschi e del Baltzer. Nel breve periodo di quattro anni pubblicava nel Giornale di Napoli, diretto dal Battaglini, che con rara abnegazione era, più che aiuto, provvidenza ai giovani matematici italiani, alcune eleganti e notevoli memorie sullo studio delle curve razionali; sulla trisezione dell'angolo e sui determinanti cubici e a più indici; e nel " Bullettino del Boncompagni „ alcune traduzioni dal tedesco sulle origini e i gradi di sviluppo del principio delle coordinate e uno studio storico critico sui determinanti.

La memoria sui determinanti cubici era stata riassunta e commentata innanzi all'Istituto Veneto dal Bellavitis, che del Garbieri aveva altissima stima; e il Bellavitis, grande, modesto e buono non disdegnava visitare il giovane matematico nella sua povera cameretta in Roma; poichè, come quel grande dichiarava, le occupazioni del Garbieri non avrebbero permesso di andare a trovar lui al Senato.

Il soggiorno in Roma fruttò lo studio sulle forme invariantive delle coniche, pubblicato nell'Annuario dell'Istituto Tecnico dell'80; e quello complementare sulle forme invariantive delle superficie di 2° grado vide la luce nell'Annuario dell'Istituto Tecnico e Nautico di Savona, ch'egli ha fondato.

In tutti questi lavori il Garbieri mostra rara perizia, uno studio incessante (e sempre coronato da successo) di esporre risultati nuovi, o anche noti, in modo semplice elegante e naturale.

Dell'opera sua, breve ma efficace, come preside dell'Istituto di Savona, per lui risorto a nuova vita, fa fede la dotta relazione dell'Annuario.

Una mal celata opposizione ai suoi metodi e alla sua energia e più ancora il vivo desiderio dell'insegnamento universitario, lo indussero a prender parte al Concorso banditosi per la cattedra rimasta vacante a Padova per la morte dell'illustre Bellavitis. Vinto il concorso, si trasferiva ai primi dell'82 a Padova e inaugurava il suo insegnamento con una breve e succosa prolusione: " Come l'Algebra s'introdusse e si svolse in Europa per opera degli Italiani „. Nel nuovo e più elevato ambiente, oltre a numerose memorie inserite negli Atti dell'Istituto Veneto sopra: alcune classi di funzioni simmetriche; le equazioni alle derivate parziali; l'eliminazione delle funzioni arbitrarie; i fasci e le schiere di superficie polari covarianti e i loro invarianti simultanei; le superficie inviluppi; dava principio, insieme coll'illustre prof. Capelli, a quel Corso di Analisi algebrica che sarebbe stato certamente il trattato classico di Algebra degli italiani, se, purtroppo, non si fosse arrestato al primo volume.

Non passò tranquillo il soggiorno del Garbieri a Padova; molti ancora rammenteranno alcuni incidenti, finiti in modo ben singolare, purtroppo non unici e nemmeno rari, e che anzi occorrono spesso a chi, contrariamente agli interessi dei negligenti, compie scrupolosamente il proprio dovere e, in mezzo alla indifferenza dei molti, cerca di opporsi alla brutta piaga delle vacanze abusive. E se il Garbieri usciva illeso ed illibato da una piccola tempesta; se poteva consolarsi dell'approvazione dei buoni, e di quella preziosa di Aristide Gabelli che applaudiva " con impeto il giorno, purtroppo raro, che un forte carattere si leva a dimostrare che vi è ancora chi sente la religione del dovere "; l'animo suo buono non potè non essere profondamente addolorato.

E forse non le sole esigenze del miglioramento economico e le mutate condizioni di famiglia indussero il Garbieri ad accettare nel 1889 l'invito della Facoltà di Scienze di Genova, che lo chiamava ad occupare la cattedra di Algebra e Geometria analitica lasciata dal Marsano.

A Genova, in cui ebbe successivamente l'incarico delle Applicazioni di Geometria descrittiva e di Statica grafica nella Scuola di Applicazione, se non ha lasciato i propri studi prediletti, e ne fanno fede, fra l'altro, l'Introduzione ad una Teorica dell'eliminazione, inserita nel Giornale di Napoli, e la nota sulla teoria della eliminazione tra due equazioni, negli Atti dell'Accademia Gioenia, il Garbieri volse più specialmente la sua attività ad un altro campo, in cui, se v'è in Italia chi lo eguaglia, nessuno certo lo supera. Il lungo, proficuo tirocinio nelle scuole elementari e secondarie, unito ai forti studi e a quel corredo svariato ed indispensabile di profonde cognizioni della scienza di cui si vogliono esporre i rudimenti, dovevano porgere al Garbieri, che tutte le forze del suo ingegno, dalla giovinezza alla forte maturità, aveva dedicate alla educazione dei giovani, occasione di raccogliere nuovi e forse più preziosi allori.

Quanto lavoro costi scrivere un libro elementare per i giovanetti, solo sa chi, con coscienza, a tal cimento si sia provato. " Bisogna, diceva il venerando e compianto Cremona, lasciare da canto i più cari studi; mettersi a litigare coll'abbicci della scienza; sciupare il meglio delle forze ". Quanto sia rimunerato in Italia, in generale, un tal lavoro è anche ben noto. Non pare tuttavia che tali difficoltà siano per disanimare giovani e vecchi autori; nè si può certo dire che la produzione, almeno per la quantità, non sia rigogliosa. Quella del Garbieri merita, senza contrasto, uno dei posti più onorevoli.

Dal 1884 sino ad oggi, per circa un ventennio i libri del Garbieri successivamente riveduti, migliorati, ampliati con amore, hanno subito la prova del fuoco nelle nostre scuole.

Nelle auree norme ai maestri per insegnare l'Aritmetica e la Geometria nelle scuole elementari; nelle appendici ai vari suoi testi di aritmetica, rivive il vecchio e glorioso maestro di scuola. E alla scuola elementare, nella forte maturità pare che il Garbieri abbia voluto dedicare tanta e così gran parte di sè stesso. È dovuta al Garbieri l'idea originale (e ci basti questo solo pallido e fugace accenno) della fusione nel calcolo dei numeri razionali; idea sviluppata magistralmente nei recenti Elementi di Aritmetica Pratica che, nel loro genere, sono un vero capolavoro.

Alla scuola non ha mai cessato di prodigare pensieri, cure e studi. Soldato (era zappatore nel Genio) nel 1872, mentre faceva i suoi corsi all'Università, dà opera per l'istruzione dei condannati nelle carceri, e fa voti perchè l'istruzione dell'esercito fosse oggetto di studio da parte degli educatori; legato da fraterna amicizia col Bartoli (la cui perdita immatura addolora ancora gli studiosi) si fa divulgatore degli studi di quell'illustre fisico sulla misura del calore solare e si schiera con vigore e con arguzia tra i sostenitori di un nuovo indirizzo nello studio della Mineralogia a proposito di una nota questione per la Cattedra di Mineralogia nella Università di Pavia; un bel libro di un valoroso allievo, il prof. Virgilii, che a sussidio di studi sociali porta il contributo di una seria educazione matematica, gli porge occasione di parlare con cuore e con senno del problema agricolo; e finalmente nel Pensiero Italiano del gennaio 95 si leva con sante e vibrate parole (ma quanto intese?) contro il sovraccarico intellettuale delle nostre scuole; e in questo articolo il Garbieri esprimeva e sintetizzava tutto il nobile scopo e l'ardente desiderio di tutta la sua carriera: " Vedere, cioè i nostri figliuoli crescere laboriosi, onesti, istruiti e anche un tantino educati nel cuore e nel carattere ".

Il Garbieri, nei suoi eccellenti libri di testo, si firma professore ordinario nella Università di Genova, già maestro nelle scuole elementari di Bologna. Egli ricorda con giusto orgoglio le sue modeste origini; ed il suo nome è invero degno di figurare nel libro dello Smiles; esempio ai forti, incitamento a coloro che si lasciano abbattere dalle prime difficoltà.

La sua forte intelligenza sia ancora per lungo tempo onore, lustro e decoro della Scienza; la sua virtù maschia, il forte carattere siano sempre presenti agli insegnanti ed agli allievi di tutte le nostre Scuole.

Piedimonte Etneo, ottobre 1904.

ROBERTO MARCOLONGO.

DISTANZE DI ALCUNI PUNTI NOTEVOLI NEL TETRAEDRO

In questa breve nota ci proponiamo di trovare una formula generale la quale permetta di esprimere la distanza di un punto P dello spazio dal punto K_n [1] in funzione delle lunghezze degli spigoli, delle aree delle facce e delle distanze del punto P stesso dai vertici del tetraedro. Da questa formula, che è una estensione di quella trovata dal sig. THIRY, [2] trarremo una serie di relazioni importanti per la geometria del tetraedro. A questo scopo premettiamo il seguente

1. LEMMA. — *Se denotiamo in generale con $K_n^{(i)}$ quel punto della faccia opposta al vertice A_i nel quale essa viene incontrata dalla congiungente A_i con K_n, si ha:*

$$A_iK_n : K_nK_n^{(i)} = a_h^n + a_k^n + a_l^n : a_i^n \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{1}$$

essendo h, k, l *la terna che rimane dopo scelto* i *fra* 1, 2, 3, 4.

Congiunto il punto P ed i sei punti P_{ik} con i vertici, l'applicazione del teorema di Menelao al triangolo $A_4P_{12}K_n^{(4)}$ fornisce subito la relazione:

$$A_4K_n^{(3)} . P_{12}A_3 . K_n^{(4)}K_n = K_n^{(3)}P_{12} . A_3K_n^{(4)} . K_nA_4 ,$$

dalla quale segue immediatamente:

$$A_4K_n : K_nK_n^{(4)} = (A_4K_n^{(3)} : K_n^{(3)}P_{12}) : (A_3K_n^{(4)} : A_3P_{12}) . \tag{2}$$

Ora dal triangolo $A_1A_2A_4$ si ricava, per noti teoremi,

$$A_4K_n^{(3)} : K_n^{(3)}P_{12} = a_1^n + a_2^n : a_4^n , \tag{3}$$

e il triangolo $A_1A_2A_3$ dà, per ragione analoga,

$$P_{12}K_n^{(4)} : K_n^{(4)}A_3 = a_3^n : a_1^n + a_2^n$$

da cui, componendo e invertendo,

$$A_3K_n^{(4)} : A_3P_{12} = a_1^n + a_2^n : a_1^n + a_2^n + a_3^n . \tag{4}$$

La (2), tenuto conto delle (3), (4) diviene allora

$$A_4K_n : K_nK_n^{(4)} = a_1^n + a_2^n + a_3^n : a_4^n , \tag{5}$$

che è la formula (1) fattovi i uguale a quattro. Analogamente per gli altri casi.

[1] V. PICCIOLI, *Contributo alla "Geometria recente del tetraedro"*. "Periodico" anno XIX, pag. 201.
[2] THIRY, *Distances des points remarquables du triangle*. Bruxelles, 1891.

Scolio I. — Ponendo nella formula (1) n uguale a zero, troviamo che ogni mediana del tetraedro rimane divisa dal baricentro in due parti delle quali quella che va al vertice è tripla di quella che va alla base: resultato già noto sotto il nome di *teorema di Commandino*.

Scolio II. — Se poniamo n uguale a due, e supponiamo che il triedro avente per vertice A_4 sia trirettangolo, essendo:

$$a_4^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

dalla (5) segue che il segmento $A_4K_2^{(4)}$ è diviso per metà dal punto di Lemoine.

2. Ciò posto, troviamo la relazione generale a cui abbiamo sopra accennato. E osserviamo subito che il triangolo A_2PP_{13} dà, applicandovi il teorema di Stewart,

$$a_2^n\overline{PA_2}^2 + (a_1^n + a_3^n)\overline{PP_{13}}^2 =$$
$$= (a_1^n + a_2^n + a_3^n)\overline{PK_n^{(4)}}^2 + \frac{a_2^n(a_1^n + a_3^n)}{a_1^n + a_2^n + a_3^n}\overline{A_2P_{13}}^2,$$

essendo il segmento A_2P_{13} diviso da $K_n^{(4)}$ nel rapporto $a_1^n + a_3^n : a_2^n$.

Ma il triangolo PA_1A_3, essendo il lato A_1A_3 diviso da P_{13} nel rapporto $a_3^n : a_1^n$, dà:

$$a_1^n\overline{PA_1}^2 + a_3^n\overline{PA_3}^2 = (a_1^n + a_3^n)\overline{PP_{13}}^2 + \frac{a_1^n a_3^n}{a_1^n + a_3^n}\overline{A_1A_3}^2.$$

Sommando queste due relazioni membro a membro, otteniamo:

$$a_1^n\overline{PA_1}^2 + a_2^n\overline{PA_2}^2 + a_3^n\overline{PA_3}^2 = (a_1^n + a_2^n + a_3^n).\overline{PK_n^{(4)}}^2 + \frac{a_1^n a_3^n}{a_1^n + a_3^n}\overline{A_1A_3}^2 +$$
$$+ \frac{a_2^n(a_1^n + a_3^n)}{a_1^n + a_2^n + a_3^n}\overline{A_2P_{13}}^2.$$

Ora, il punto P_{13} dividendo il lato A_1A_3 del triangolo $A_1A_2A_3$ nel rapporto $a_3^n : a_1^n$, segue

$$a_1^n\overline{A_1A_2}^2 + a_3^n\overline{A_2A_3}^2 = (a_1^n + a_3^n)\overline{A_2P_{13}}^2 + \frac{a_1^n a_3^n}{a_1^n + a_3^n}\overline{A_1A_3}^2.$$

Da quest'ultima sottraendo la precedente dopo averla moltiplicata per $\dfrac{a_2^n}{a_1^n + a_2^n + a_3^n}$ e riducendo, si trae

$$a_1^n\overline{PA_1}^2 + a_2^n\overline{PA_2}^2 + a_3^n\overline{PA_3}^2 =$$
$$= (a_1^n + a_2^n + a_3^n)\overline{PK_n^{(4)}}^2 + \frac{a_1^n a_3^n\overline{A_1A_3}^2 + a_1^n a_2^n\overline{A_1A_2}^2 + a_2^n a_3^n\overline{A_2A_3}^2}{a_1^n + a_2^n + a_3^n}, \quad (6)$$

formula che vale qualunque sia la posizione del punto P.

Essendo il lato $A_4K_n^{(4)}$ del triangolo $PA_4K_n^{(4)}$ diviso da K_n nel rapporto $a_1^n + a_2^n + a_3^n : a_4^n$, troviamo

$$(a_1^n + a_2^n + a_3^n)\overline{PK_n^{(4)}}^2 + a_4^n\overline{PA_4}^2 =$$
$$= (a_1^n + a_2^n + a_3^n + a_4^n)\overline{PK_n}^2 + \frac{a_4^n(a_1^n + a_2^n + a_3^n)}{a_1^n + a_2^n + a_3^n + a_4^n}\overline{A_4K_n^{(4)}}^2,$$

e sommando questa con la precedente:

$$a_1^n\overline{PA_1}^2 + a_2^n\overline{PA_2}^2 + a_3^n\overline{PA_3}^2 + a_4^n\overline{PA_4}^2 = \overline{PK_n}^2(a_1^n + a_2^n + a_3^n + a_4^n) +$$
$$+ \frac{a_1^n a_3^n\overline{A_1A_3}^2 + a_1^n a_2^n\overline{A_1A_2}^2 + a_2^n a_3^n\overline{A_2A_3}^2}{a_1^n + a_2^n + a_3^n} + \frac{a_4^n(a_1^n + a_2^n + a_3^n)}{a_1^n + a_2^n + a_3^n + a_4^n}\overline{A_4K_n^{(4)}}^2.$$

La formula (6) sussistendo qualunque sia la posizione del punto P, varrà anche quando P coincide con A_4. Avremo allora

$$a_1^n\overline{A_4A_1}^2 + a_2^n\overline{A_4A_2}^2 + a_3^n\overline{A_4A_3}^2 =$$
$$= \overline{A_4K_n^{(4)}}^2(a_1^n + a_2^n + a_3^n) + \frac{a_1^n a_3^n\overline{A_1A_3}^2 + a_2^n a_3^n\overline{A_2A_3}^2 + a_1^n a_2^n\overline{A_1A_2}^2}{a_1^n + a_2^n + a_3^n}.$$

Sommando infine la relazione ultima moltiplicata per la frazione $-\frac{a_4^n}{a_1^n + a_2^n + a_3^n + a_4^n}$, con quella precedentemente ottenuta, perveniamo dopo brevi calcoli alla formula domandata, la quale può scriversi in modo abbreviato:

$$\overline{PK_n}^2 = \frac{\Sigma a_i^n\overline{PA_i}^2}{\Sigma a_i^n} - \frac{\Sigma a_h^n a_k^n\overline{A_hA_k}^2}{(\Sigma a_i^n)^2}, \tag{7}$$

o anche, ponendo

$$E_n = \frac{\Sigma a_h^n a_k^n\overline{A_hA_k}^2}{(\Sigma a_i^n)^2},$$

sotto l'altra ancor più semplice

$$\overline{PK_n}^2 = \frac{\Sigma a_i^n\overline{PA_i}^2}{\Sigma a_i^n} - E_n.$$

3. *Posizioni speciali di* P. — Se facciamo coincidere il punto P col centro O della sfera circoscritta e indichiamo con R il raggio di questa sfera, troviamo:

$$\overline{OK_n}^2 = R^2 - E_n,$$

dalla quale segue che E_n rappresenta la potenza dei punti della sfera circoscritta rispetto a quella di raggio OK_n. Risultano inoltre le formule:

$$\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{\Sigma\overline{A_hA_k}^2}{16},$$
$$\overline{OI}^2 = R^2 - \frac{\Sigma a_h a_k\overline{A_hA_k}^2}{(\Sigma a_i)^2}, \qquad \overline{OK}^2 = R^2 - \frac{\Sigma a_h^2 a_k^2\overline{A_hA_k}^2}{(\Sigma a_i^2)^2}.$$

Facendo invece coincidere P con K_r troviamo, se r è diverso da n,

$$\overline{K_rK_n}^2 = \frac{\Sigma a_i^n \overline{K_rA_i}^2}{\Sigma a_i^n} - E_n, \text{ (}^1\text{)}$$

da cui segue

$$\overline{GI}^2 = \frac{\Sigma a_i \overline{GA_i}^2}{\Sigma a_i} - E_0, \qquad \overline{GK}^2 = \frac{\Sigma a_i^2 \overline{GA_i}^2}{\Sigma a_i^2},$$

$$\overline{IK}^2 = \frac{\Sigma a_i^2 \overline{IA_i}^2}{\Sigma a_i^2} - E_2,$$

mentre, se r è uguale ad n, risulta

$$\Sigma a_i^n \overline{K_nA_i}^2 = \frac{\Sigma a_h^n a_k^n \overline{A_hA_k}^2}{\Sigma a_i^n}$$

dalla quale

$$\Sigma \overline{GA_i}^2 = \frac{\Sigma \overline{A_hA_k}^2}{4}, \qquad \Sigma a_i \overline{IA_i}^2 = \frac{\Sigma a_h a_k \overline{A_hA_k}^2}{\Sigma a_i},$$

$$\Sigma a_i^2 \overline{KA_i}^2 = \frac{\Sigma a_h^2 a_k^2 \overline{A_hA_k}^2}{\Sigma a_i^2}.$$

Vogliamo far notare da ultimo che la formula generale (7) si può facilmente trasformare nell'altra:

$$\overline{PK_n}^2 = \frac{\Sigma a_i^{2n} \overline{PA_i}^2 + \Sigma a_h^n a_k^n PA_h PA_h \cos\omega_{hk}}{(\Sigma a_i^n)^2},$$

colla quale si può calcolare la distanza PK_n conoscendo quelle di P dai vertici, gli angoli che esse formano due a due, e l'area delle facce del tetraedro.

Arpino, aprile 1904.

ENRICO PICCIOLI.

SUI NUMERI PRIMI

1. Come conseguenza di una importante formula di TCHEBISCHEFF [2] sui numeri primi ho potuto stabilire una proposizione che mi sembra degna di nota, e che non so se sia conosciuta.

Si ha cioè: Esistono infinite coppie di numeri primi consecutivi la cui differenza supera un numero A dato, arbitrariamente grande.

(1) Da questa formula cambiando r con n, si deduce:

$$\frac{\Sigma a_i^n \overline{K_rA_i}^2}{\Sigma a_i^n} - E_n = \frac{\Sigma a_i^r \overline{K_nA_i}^2}{\Sigma a_i^r} - E_r.$$

(2) Accademia di Pietroburgo, 1850; *Journal de Liouville*, vol. XVII.

Si ricordi perciò la suaccennata formula di TCHEBISCHEFF:

$$\lim_{x=\infty}\left\{\frac{x}{\varphi(x)}-\log x\right\}=-1$$

dove $\varphi(x)$ indica il membro dei numeri primi che non superano x.

Da essa evidentemente si ricava:

$$\lim_{x=\infty}\frac{x}{\varphi(x)}=\infty \tag{1}$$

da cui, facendo scorrere x per i successivi numeri primi p_r, si ricava:

$$\lim_{r=\infty}\frac{p_r}{r}=\infty. \tag{2}$$

Ciò posto si supponga che per due numeri primi consecutivi p_r, p_{r+1}, consecutivi, di cui il secondo almeno maggiore di un determinato numero primo p_{r_0}, si avesse sempre:

$$p_{r+1}-p_r \leqslant A;$$

allora facendo in questa disuguaglianza prendere ad r i valori r_0, $r_0+1, \ldots r_1$, e sommando, si avrebbe:

$$p_{r_1}-p_{r_0}\leqslant(r_1-r_0)A$$

da cui per un numero primo generico p_r si avrebbe pure:

$$\lim_{r=\infty}\frac{p_r}{r}\leqslant\lim_{r=\infty}\frac{p_{r_0}+(r-r_0)A}{r}=\lim_{r=\infty}\left\{A+\frac{p_{r_0}-Ar_0}{r}\right\}$$

ed infine:

$$\lim_{r=\infty}\frac{p_r}{r}\leqslant A$$

ciò che è in contraddizione colla (2), essendo A finito e costante.

Siccome noi possiamo prendere per p_{r_0} un numero primo arbitrariamente grande l'assurdo a cui siamo condotti dimostra il teorema enunciato."

2. Del resto allo stesso risultato si può giungere forse più facilmente servendosi dei principii della teoria delle congruenze. Infatti volendo ottenere due numeri primi consecutivi che differiscano di un numero maggiore di A, basterà ricercare A numeri interi consecutivi (A può supporsi sempre numero intero) non primi: allora il numero primo antecedente al primo di essi e il successivo differiranno di più di A. Si pongano perciò le congruenze lineari:

$$\begin{gathered}x\equiv 0\ (\text{mod. } p_{r_1})\\ x+1\equiv 0\ (\text{mod. } p_{r_2})\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ x+A-1\equiv 0\ (\text{mod. } p_{r_A})\end{gathered}$$

essendo $p_{r_1}, p_{r_2}\ldots p_{r_A}$, A numeri primi arbitrari. (¹)

(¹) Bene spesso tal numero di congruenze sarà evidentemente sovrabbondante.

Tale sistema di congruenze ha come si sa sempre una soluzione minima positiva x_0; la soluzione generica è:

$$x \equiv x_0 \pmod{p_{r_1} p_{r_2} p_{r_3} \dots p_{r_\lambda}}.$$

Può darsi che x_0 risulti primo, e cioè uguale a p_{r_1}; in ogni modo possiamo prendere per x ogni altro valore:

$$x = x_0 + \theta\, p_{r_1}, p_{r_2} \dots p_{r_\lambda} \qquad \text{con} \qquad \theta \geqq 1.$$

Siccome possiamo sempre scegliendo convenientemente θ trovare un valore di x arbitrariamente grande, esistono infinite coppie di numeri primi soddisfacenti al nostro enunciato.

3. Dalla formula (2) si può dedurre, coll'applicazione di un teorema di Dirichlet, (¹) il risultato seguente:

Se si considera la serie convergente per tutti i valori positivi di ρ, divergente per $\rho = 0$.

$$S = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p_r^{1+\rho}}$$

allora al decrescere di ρ, il prodotto ρS tende a 0 ".

Si può porre a riscontro questo risultato col seguente:

Se si considera la serie convergente per tutti i valori positivi di ρ (divergente per $\rho = 0$)

$$S_1 = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{1+\rho}}$$

il prodotto ρS_1 al decrescere di ρ tende a 1 "; risultato che si può facilmente dedurre dallo stesso teorema di Dirichlet.

Livorno, 17 gennaio 1904.

GUIDO ASCOLI.

RICERCHE SOPRA UNA NUOVA ESPRESSIONE DI π IN FUNZIONE DI SOLI NUMERI PRIMI, e sulla fattoriale di un numero

1. In una mia nota precedente, (²) trovata per $n!$ l'espressione

$$n! = \prod_{p=2}^{p=p} p^{E\frac{n}{p} + E\frac{n}{p^2} + \dots + E\frac{n}{p_p}}, \tag{1}$$

giungevo alla rappresentazione di π sotto la forma

$$\pi = \lim_{n=\infty} 2^{4n+1} \frac{1}{\mu'} \prod_{p=2}^{p=\mu} \frac{1}{p^{a_p}}, \tag{2}$$

(¹) DIRICHLET, "Teoria dei numeri", *Supplemento* II, 3ª ed. *Crelle's Journal*, vol. LIII.
(²) V. la mia memoria di ugual titolo della presente. *Periodico di Matematica*, Tomo XVI, 1900.

nelle quali p rappresenta il massimo numero primo contenuto in n; P_p la massima potenza di $p \leqq n$; μ il massimo numero primo $< 2n$; μ' esiste soltanto quando $2n+1$ è numero primo ed in tal caso è ad esso uguale, e finalmente

$$a_p = 2\left\{\left(E\frac{2n}{p} - 2E\frac{n}{p}\right) + \left(E\frac{2n}{p^2} - 2E\frac{n}{p^2}\right) + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \left(E\frac{2n}{P_p} - 2E\frac{n}{P_p}\right) + E\frac{2n}{pP_p}\right\} + Q_p$$

dove Q_p è l'esponente di p nella decomposizione di $2n+1$ in fattori primi.

In una mia nota posteriore, (1) dimostravo poi il teorema:

Se n *e* p *sono due numeri interi e positivi qualunque, tali però che si abbia* $n > p$, *si ha*

$$E\frac{n}{p} + E\frac{n}{p^2} + \dots + E\frac{n}{P_p} = \frac{n - S_p}{p-1} \tag{3}$$

dove $E\frac{n}{p}$ rappresenta la parte intera del quoziente della divisione di n per p ed S_p la somma delle cifre del numero n scritto nel sistema a base p.

Come corollario di questo, ottenevo per $n!$ l'espressione

$$n! = \prod_{p=2}^{p=p} p^{\frac{n-S_p}{p-1}}. \tag{4}$$

Nella presente nota mi propongo di ricercare come si modifica la (2), sostituendo nei calcoli fatti nella mia prima memoria, alla (1) la (4).

2. Credo intanto non inutile premettere alcuni teoremi, per quanto non abbiano attinenza diretta con la quistione che mi propongo trattare, che si deducono immediatamente dal teorema (3).

Teorema I. — *La differenza tra un numero scritto in un sistema a base* p, *e la somma delle cifre del numero stesso scritto in un sistema a base* q, *per* $q \gtreqless p$, *è divisibile per la base del secondo sistema diminuita di* 1, *ossia per* $q-1$. (2)

Infatti, essendo $\frac{n - S_p}{p-1}$ uguale alla somma di parti intere, è sempre un numero intero.

Teorema II. — *Il resto della divisione di due numeri è uguale alla somma delle cifre del dividendo scritto nel sistema avente a base il divisore.*

---

(1) V. la mia nota "Un nuovo teorema sulla funzione E di Legendre", *Periodico di Matematica*, vol. XVIII, 1903.

(2) Si ricava di qui come corollario il noto teorema:

Un numero è divisibile per 9, quando è tale la somma delle sue cifre.

Basta infatti porre $p = q = 10$ ed avremo $\frac{n - S_{10}}{9} = E$.

Corollario. — *La condizione necessaria e sufficiente perchè un numero* N *sia primo è che, scritto il numero in qualunque sistema a base* p, *per* p *variabile da 2 al massimo numero primo* $\gtreqless \sqrt{N}$, *la somma delle sue cifre non sia mai divisibile per* $p-1$.

3. Premesso questo, principiamo a trattare la questione che forma l'oggetto della presente nota.

Nella prima delle due memorie citate, modificando opportunamente l'espressione di Wallis, ottengo

$$\pi = \lim_{n=\infty} \frac{2^{4n+1}}{2n+1} \left(\frac{(n!)^2}{2n!}\right)^2. \tag{5}$$

Dalla (3) abbiamo poi

$$(n!)^2 = \prod_{p=2}^{p=n} p^{2\frac{n-S_p}{p-1}} = 2^{2n-2S_2} \cdot 3^{\frac{2n-2S_3}{2}} \cdots p^{\frac{2n-2S_p}{p-1}}. \tag{6}$$

Sostituendo, sempre nella (3), $2n$ in luogo di n, si ha

$$2n! = 2^{2n-S'_2} \cdot 3^{\frac{2n-S'_3}{2}} \cdots p^{\frac{2n-S'_p}{p-1}} \cdot p' \cdots \mu, \tag{7}$$

dove S'_p rappresenta la somma delle cifre del numero $2n$ scritto nel sistema a base p, p' è il numero primo successivo a p, e μ il più grande numero primo $\gtreqless 2n$. (Che gli esponenti dei numeri primi successivi a p, quando sussistono, sieno sempre eguali all'unità, lo dimostro nella citata memoria, § 9).

Per le (6) e (7) abbiamo allora

$$\frac{(n!)^2}{2n!} = \frac{2^{2n-2S_2} \cdot 3^{\frac{2n-2S_3}{2}} \cdots p^{\frac{2n-2S_p}{p-1}}}{2^{2n-S'_2} \cdot 3^{\frac{2n-S'_3}{2}} \cdots p^{\frac{2n-S'_p}{p-1}} \cdot p' \cdots \mu} =$$

$$= \frac{1}{2^{2S_2-S'_2} \cdot 3^{\frac{2S_3-S'_3}{2}} \cdots p^{\frac{2S_p-S'_p}{p-1}} \cdot p' \cdots \mu}. \tag{8}$$

4. Mi propongo ora di cercare quale relazione esiste fra $2S_p$ e S'_p, vale a dire fra il doppio della somma delle cifre di un numero n scritto in un sistema a base p e la somma delle cifre del doppio del numero scritto nello stesso sistema.

Sia dunque il numero n scritto nel sistema a base p

$$n_p = a_1 p^n + a_2 p^{n-1} + \ldots + a_n,$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sono le rispettive cifre: sarà

$$Sn_p = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \qquad \text{e} \qquad 2Sn_p = 2a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_n.$$

Avremo poi

$$2n_p = 2a_1 p^n + 2a_2 p^{n-1} + \ldots 2a_n.$$

Supponiamo prima che tutte le cifre siano $<\frac{1}{2}p$, vale a dire, rappresentando con a una cifra qualunque, $a<\frac{1}{2}p$: sarà allora $2a<p$, e quindi, essendo anche $2a$ rappresentato con una sola cifra, sarà

$$2Sn_p = S2n_p.$$

Possiamo dunque intanto dire che, quando tutte le cifre sono $<\frac{1}{2}p$, il doppio della somma delle cifre del numero è eguale alla somma del doppio delle singole cifre.

Sia invece qualche $a \geqq \frac{1}{2}p$, ad es.

$$a_k = \frac{1}{2}p + b,$$

dove b può variare da 0 a $\frac{1}{2}p$ escluso. Sarà allora

$$2a_k = p + 2b$$

il doppio del valore assoluto della cifra a_k. Ma, essendo p la base del sistema e quindi sempre rappresentato con 10, la somma dei valori assoluti delle cifre di p è eguale ad 1: avremo dunque che la somma dei valori assoluti delle cifre del doppio di a_k è data da

$$1 + 2b.$$

In conclusione, la differenza fra il doppio del valore assoluto della cifra a_k e la somma dei valori assoluti delle cifre di a_k è data da

$$(p+2b)-(1+2b) = p-1.$$

Potendosi ripetere lo stesso per ogni cifra $a \geqq \frac{1}{2}p$, potremo enunciare il seguente

Teorema. — *La somma delle cifre del doppio di un numero scritto in un sistema a base qualunque, è uguale al doppio della somma delle cifre del numero stesso, meno il prodotto della base del sistema diminuita di un'unità, per il numero delle cifre del numero stesso uguali o maggiori della metà della base.*

Con le nostre notazioni, indicando con m il numero delle cifre di n che sono $\geqq \frac{1}{2}p$, avremo

$$S\,2n_p = 2\,Sn_p - m\,(p-1). \qquad (9)$$

5. Sostituiamo ora nella (8) alle espressioni $2S_2 - S'_2$ etc., i loro valori espressi per la (9) ed avremo

$$\frac{(n!)^2}{2n!} = 2^{-m_2} \cdot 3^{-m_3(3-1)} \ldots p^{-m_p(p-1)} \cdot p'^{-1} \ldots \mu^{-1},$$

dove, come abbiamo detto, $m_2, m_3, \ldots, m_p$ rappresentano il numero delle cifre di n scritto nei sistemi a base $2, 3, \ldots, p$ rispettivamente uguali o maggiori di $\frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots \frac{1}{2}p$.

Posto questo, l'espressione (5) diventa

$$\pi = \lim_{n=\infty} \frac{2^{4n+1}}{2n+1} \cdot 2^{-2m_2} \cdot 3^{-2m_3(3-1)} \ldots p^{-2m_p(p-1)} \cdot p'^{-2} \ldots \mu^{-2} =$$
$$= \lim_{n=\infty} \frac{2^{2(2n-m_2)+1} \cdot 3^{-2m_3(3-1)} \ldots p^{-2m_p(p-1)} \cdot p'^{-2} \ldots \mu^{-2}}{2n+1},$$

da cui, scomponendo $2n+1$ in fattori primi

$$2n+1 = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \ldots p^{\alpha_p} \cdot p'^{\alpha_{p'}} \ldots \mu^{\alpha_\mu} \cdot \mu'^{\alpha_{\mu'}} \text{ (}^1\text{)}$$

ed osservando che, per essere $2n+1$ dispari, è sempre $\alpha_2 = 0$, e μ' poi esiste soltanto quando $2n+1$ è primo, ed in tal caso si ha appunto

$$2n+1 = \mu',$$

avremo finalmente

$$\pi = \lim_{n=\infty} \frac{2^{2(2n-m_2)+1} \cdot 3^{-4m_3} \ldots p^{-2m_p(p-1)} \cdot p'^{-2} \ldots \mu^{-2}}{3^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_5} \ldots p^{\alpha_p} \cdot p'^{\alpha_{p'}} \ldots \mu^{\alpha_\mu} \cdot \mu'^{\alpha_{\mu'}}} =$$
$$= \lim_{n=\infty} 2^{2(2n-m_2)+1} \cdot 3^{-(4m_3+\alpha_3)} \ldots p^{-[2m_p(p-1)+\alpha_p]} \cdot p'^{-(2+\alpha_{p'})} \ldots \mu^{-(2+\alpha_\mu)} \cdot \mu'^{-\alpha_{\mu'}}, \quad (10)$$

dove, se esiste l'ultimo fattore $\mu'^{-\alpha_{\mu'}}$, si ha

$$\alpha_3 = \alpha_5 = \ldots = \alpha_\mu = 0;$$

in generale poi, gli esponenti $\alpha_{p'}, \ldots \alpha_{\mu'}$ non possono assumere altri valori che 0 ed 1.

MARIO LAZZARINI.

SU ALCUNI DETERMINANTI DI FUNZIONI COMPOSTE

1. È noto che il Wronskiano $W(f_1 \ldots f_n)$ delle funzioni $f_1 \ldots f_n$ dell'unica variabile x soddisfa alla relazione identica:

$$W(tf_1 \ldots tf_n) = t^n W(f_1 \ldots f_n) \quad (1)$$

che tanta analogia di forma ha colla proprietà caratteristica delle funzioni omogenee. In questa formola t indica una funzione qualunque di x; se si considerano invece n funzioni $t_1 \ldots t_n$ della stessa variabile x, e conseguentemente il wronskiano delle funzioni $t_1f_1 \ldots t_nf_n$, allora si ha, per la formola di Leibniz:

$$W(t_1f_1 \ldots t_nf_n) = \begin{vmatrix} t_1f_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t_nf_n \\ t_1f_1' + t_1'f_1 \ldots\ldots t_nf_n' + t_n'f_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (t_1+f_1)^{(n-1)} \ldots (t_n+f_n)^{(n-1)} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

(1) Nella memoria già più volte citata, dimostro che gli esponenti dei numeri primi successivi a p, quando esistono, sono tutti uguali ad 1; per omogeneità però, seguito a porre gli esponenti $\alpha_{p'}, \ldots, \alpha_{\mu}$.

Siccome si può scrivere simbolicamente $t_1f_1' + t_1'f_1 = (t_1 + f_1)'$, si vede che il wronskiano delle funzioni composte, a partire dalla seconda riga in poi, non differisce dal wronskiano degli elementi $t_1 + f_1 \dots t_n + f_n$; solo la prima riga vieta l'eguaglianza e quindi di esprimere in modo semplice il wronskiano delle funzioni composte.

Nè credo miglior via sviluppare le potenze simboliche e poi esprimere il determinante risultante in determinanti ad elementi monomi; la formola finale allora si complicherebbe: basta osservare che la i^{ma} linea del determinante ad elementi polinomi è costituita di polinomi di i termini e quindi il numero dei determinanti semplici è

$$1\,2 \dots (n-1)\,n = n!.$$

Qui si presenta opportuno considerare i wronskiani delle derivate prime delle funzioni $f_1 \dots f_n$. Per questi determinanti che indicheremo con $V(f_1 \dots f_n)$ non sussiste più la (1) come è facile vedere; ma, se si considerano le n funzioni $t_1 \dots t_n$, si ha la identità

$$V(t_1f_1 \dots t_nf_n) = W[(t_1+f_1)' \dots (t_n+f_n)'] = V(t_1+f_1 \dots t_n+f_n).$$

Inoltre si può esprimere in modo semplice il wronskiano delle funzioni composte, giacchè si ha dalla (2)

$$W(t_1f_1 \dots t_nf_n) = t_1f_1V(t_2+f_2 \dots t_n+f_n) + \dots + t_nf_nV(t_1+f_1 \dots t_{n-1}f_{n-1});$$

quel wronskiano è dunque una combinazione lineare di n determinanti V.

L'annullarsi identico di $V(f_1 \dots f_n)$ cioè di $W(f_1' \dots f_n')$ è condizione necessaria e sufficiente perchè sussista una relazione lineare omogenea tra le $f_1' \dots f_n'$, cioè $a_1f_1' + \dots + a_nf_n' = 0$ da cui segue $a_1f_1 + \dots + a_nf_n = c$ con c costante come $a_1 \dots a_n$. Dunque: *L'annullarsi identico di $V(f_1 \dots f_n)$ è condizione necessaria e sufficiente perchè tra le funzioni $f_1 \dots f_n$ sussista una relazione lineare non omogenea.*

2. Consideriamo ora l'jacobiano $\dfrac{\partial(f_1 \dots f_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)}$: se t è un'altra funzione di $x_1 \dots x_n$, si ha la formola di Jacobi

$$\frac{\partial(tf_1 \dots tf_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)} = t^n \frac{\partial(f_1 \dots f_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)} + t^{n-1} \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial(f_1 \dots f_{i-1}\, t f_{i+1} \dots f_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)}.$$

Ed ora viene naturale il cercare le funzioni t che annullino la seconda parte del secondo membro della formola di Jacobi; le funzioni t cioè tali che

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & \dots & f_n \\ \dfrac{\partial t}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial t}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ossia:} \qquad K_1 \frac{\partial t}{\partial x_1} + \dots + K_n \frac{\partial t}{\partial x_n} = 0 \qquad (3)$$

dove K_i indica il determinante K (¹) delle $f_1 \dots f_{i-1} f_{i+1} \dots f_n$ rispetto alle variabili $x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n$.

Per integrare la (3) basta integrare il sistema di $n-1$ equazioni ordinarie

$$\frac{dx_1}{K_1} = \frac{dx_2}{K_2} = \dots = \frac{dx_n}{K_n};$$

se $\varphi_i(x_1 \dots x_n) = \text{costante}$ $(i = 1, 2 \dots n-1)$ ne è il sistema integrale allora l'integrale generale della (1) è $t = w(\varphi_1 \dots \varphi_{n-1})$ essendo w simbolo di funzione arbitraria.

Tutte queste funzioni t verificano dunque la relazione

$$\frac{\partial (tf_1 \dots tf_n)}{\partial (x_1 \dots x_n)} = t^n \frac{\partial (f_1 \dots f_n)}{\partial (x_1 \dots x_n)}.$$

In particolare, per $n = 3$, integrare la (3) equivale, come si sa, a cercare tutte le superficie che sono in ciascun punto $(x_1\, x_2\, x_3)$ toccate da una retta condotta per questo punto nella direzione $(K_1 K_2 K_3)$. Dunque: *Se* $t = 0$ *è una qualunque delle superficie che sono in ciascun punto* $(x_1\, x_2\, x_3)$ *toccate da una retta condotta per questo punto nella direzione* $(K_1\, K_2\, K_3)$, *allora si ha identicamente*

$$\frac{\partial (tf_1\, tf_2\, tf_3)}{\partial (x_1\, x_2\, x_3)} = t^3 \frac{\partial (f_1\, f_2\, f_3)}{\partial (x_1\, x_2\, x_3)}.$$

R. Occhipinti.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI
634, 647-648-678, 660, 669, 672, 674, 679, 680 e 681

634. *Pel punto comune a due rette, le quali s'incontrano fuori del foglio su cui si disegna, condurre la parallela ad una retta data.* G. Loria.

Risoluzione del sig. G. Loria.

Siano a, b, p le tre rette date. Si conduca una retta arbitraria perpendicolare alla retta p a cui quella cercata deve riuscire parallela, e se ne determinino le intersezioni A, B con le altre due rette date. Le perpendicolari calate da A su b e da B su a si taglino in O; la perpendicolare calata da O su AB è (in forza della nota proprietà delle altezze di un triangolo) la retta cercata. (²)

Osservazione. — Un concetto analogo serve a *congiungere un punto dato* O *al punto inaccessibile comune a due date rette* a, b. Si conducano infatti da O le perpendicolari alle rette a, b e se ne determinino le intersezioni B e A rispettivamente con b, a; la perpendicolare calata dal punto O alla AB è evidentemente la retta richiesta.

(¹) V. E. Pascal. *I determinanti*, pag. 293.

(²) Per altra soluzione meno elementare dello stesso problema, v. Bellavitis, *Lezioni di geometria descrittiva* (Padova, 1851), p. 34.

Quando questo fascicolo stava per vedere la luce, alle ore 5 del 3 febbraio 1905,

RAFFAELLO GIUSTI

il nostro ben noto e stimato editore, si spengeva all'età di 62 anni in seguito a breve, fierissima polmonite.

Coll'animo profondamente commosso per l'improvvisa sciagura, invio dalle pagine di questo giornale l'estremo affettuoso saluto alla salma ancor calda del vecchio indimenticabile amico, all'onesto ed integro cittadino, che da umilissime origini, col lavoro indefesso, colla tenacità e la costanza dei propositi, coi sagaci ardimenti, non mai disgiunti dalla prudenza, seppe assurgere ad una posizione elevata come industriale e guadagnarsi nello stesso tempo non solo l'adorazione della sua numerosa famiglia, ma anche la stima e l'amicizia di quanti ebbero con lui rapporti di affari e d'interessi, e l'affetto dei molti operai che dalle sue fortunate imprese ritraggono lavoro continuo e ben rimunerato.

Nella sua giovinezza egli non fu che un povero diseredato della fortuna. Augusto Alfani nel suo aureo libro *Battaglie e Vittorie* pubblicato nel 1890, tratteggiava brevemente la sua biografia, ad esempio e incoraggiamento dei giovani, nei seguenti termini: "... Raffaello " Giusti povero ragazzo del contado lucchese, privo della mano de" stra, senza istruzione e senza un mestiere, ma ricco di volontà, " pertinace nell'idea di farsi uno stato, andò a Livorno e si mise a " fare il venditore ambulante di storie e libercoli, per la città e la " campagna. Avanzatosi, a forza di risparmi e privazioni d'ogni ge" nere, un peculietto, pensò di cessare da quella vita girovaga: prese " in affitto in Livorno un bugigattolo e gli parve di esser diventato " un signore, tanto più perchè ciò eragli riuscito fare da sè, colla forza " del suo volere e serbandosi sempre galantuomo. Perseverando e cer" cando di acquistare via via nuove cognizioni utili per l'incremento " dell'arte sua, si accaparrò fama di bravo e onesto libraio: gli crebbe " la clientela, gli crebbe il guadagno, non gli scemò, sibbene andò in " esso moltiplicandosi la voglia di lavorare. Oggi, infatti, egli possiede " il più ricco negozio librario di quella città non solo, ma la sua li" breria è una delle più riputate della Toscana e d'Italia.

" Oltre la libreria, possiede una tipografia dove egli ha abbondante " lavoro per conto altrui ed anche per conto proprio; essendo giunto " a possedere tante cognizioni e tanta esperienza da mettersi con " fortuna a fare l'editore.

" Il Giusti, ricco oggi di credito e di sostanze, è sempre buono, " sempre alla mano, come quando faceva il venditore ambulante di " storie, ma con un fare riservato e signorile che non ha nulla di " affettato; trova sempre nel lavoro consolazione e riposo, e nella " presente agiatezza riconosce con soddisfazione un compenso alla sua " costante ed onesta operosità ".

Le parole dell'Alfani dipingono al vero l'uomo nella bonaria semplicità, nella immutabile rettitudine dell'indole sua.

Aggiungerò che in questi ultimi anni il buon successo dovuto alla sua prudenza ed alla sua fermezza è andato sempre aumentando.

La sua *Collezione scolastica* è una delle più accreditate d'Italia, ed in essa sono pubblicati libri largamente diffusi in tutte le nostre scuole.

La sua *Biblioteca degli Studenti* è giunta, in breve periodo di tempo, a ben 121 volumetti, che contengono esposizioni brevi e compendiose dei più svariati rami del sapere, e può cominciare a gareggiare con la notissima e splendida collezione dei Manuali Hoepli.

La sua *Collezione letteraria* e la *Collezione scientifica* vantano opere poderose di scrittori illustri.

La sua tipografia, corredata di macchine perfette e recenti, e di una quantità grandissima di caratteri di ogni specie, ed in particolare di segni matematici, è una delle migliori d'Italia.

Ma ciò che torna a suo massimo elogio, si è che della prosperità della sua vasta azienda non godeva lui solo, ma ne godevano anche tutti i suoi collaboratori, specialmente i più umili. Infatti, se i lavoratori del libro godono a Livorno una posizione assai decorosa e soddisfacente, debbono esserne riconoscenti a Raffaello Giusti, poichè egli, primo fra gli stampatori livornesi, accettò nel 1895 la tariffa proposta dagli operai, e col suo esempio indusse anche gli altri a fare lo stesso.

Di lui, come padre e capo di famiglia, è somma gloria l'avere adorato ugualmente i numerosi figliastri e figli, che lo ricambiavano di venerazione e di affetto; lo averli allevati e avviati a buone professioni, in mezzo alle ristrettezze dei primi anni, in mezzo a disgrazie di ogni genere, che hanno costantemente amareggiati e resi più difficili i suoi trionfi industriali; l'averli educati, insieme alla sua fedele compagna nelle battaglie e nei trionfi, la buona signora Massima, alla religione del dovere e del lavoro; l'averne fatto dei forti e modesti lavoratori, che sapranno certo imitare le sue virtù.

Decorato degli ordini della Corona d'Italia e dei Santi Maurizio e Lazzaro, i suoi numerosi amici deploravano che non fosse stato fatto Cavaliere del Lavoro, ritenendo che ben pochi al pari di lui fossero degni dell'alta onorificenza.

Da pochi anni egli si era costruito un grazioso nido, ove contava vivere sereni gli ultimi anni della vita, che nessuno avrebbe preveduti sì brevi; e come un patriarca dei templi biblici si compiaceva nei giorni festivi di riunire attorno a sè i suoi numerosi discendenti, lieto di potersi godere un relativo riposo, ben meritato dopo tanto lavoro, avendo ormai potuto cedere ai figli giovani e forti la parte più gravosa degli affari, riservandone a sè solamente l'alta direzione.

La sorte crudele ha troncato i suoi sogni, lo ha rapito all'affetto della famiglia e degli amici, ed ormai di lui non resta che un dolce e lacrimato ricordo. *La buona e cara imagine paterna* di lui non si aggirerà più fra le scansie della sua ricca biblioteca, ma sarà lungamente ricordata da tutti come un esempio di costanza, di modestia e di virtù.

Livorno, 4 febbraio 1905.

G. Lazzeri.

SULL'UTILITÀ ED IMPORTANZA DELLA STORIA DELLE MATEMATICHE

PROLUSIONE

al Corso libero di "Storia della Geometria"

letto nella R. Università di Pisa il 14 gennaio 1905

I. In ogni tempo è stata riconosciuta la necessità e l'importanza dello studio della storia generale, che Cicerone chiamò giustamente *magistra vitae*. Ed infatti, poichè le leggi della natura sono eterne ed immutabili, poichè cause eguali debbono produrre eguali effetti, è chiaro che l'esempio di ciò che avvenne nelle età passate può essere di ammaestramento per il presente, può aiutarci ad imitare i nostri padri in ciò che di bello e di buono essi fecero e a schivare gli errori in cui caddero.

Ben a ragione dunque in tutti i paesi civili si vuole che ogni persona di media coltura sappia, almeno a grandi linee, per quali passaggi la famiglia umana dallo stato primitivo sia pervenuta allo stato presente di progredita civiltà; quali sono stati gli avvenimenti più salienti, quali le lotte più importanti in cui si sono cimentate le varie stirpi e dalle quali sono sorti via via nuovi assetti politici del nostro pianeta con prevalenza delle stirpi più forti e incivilite; quali i nomi degli uomini che, elevandosi sulla folla dei mediocri, hanno compiuto opere degne di esser ricordate con riconoscenza dai posteri; quali i nomi dei grandi guerrieri che, mettendosi alla testa di un popolo, lo han sollevato al massimo grado di potenza; degli scienziati che con importanti scoperte hanno migliorato il vivere civile; degli artisti e dei poeti sommi che hanno addolciti i costumi, che hanno eternato nei marmi, nei bronzi, nelle tele, nei carmi la bellezza che è il fulgore del vero.

Ben a ragione dunque, dico, l'insegnamento della storia generale fa parte integrante della istruzione secondaria presso tutti i popoli civili.

Per gli stessi motivi a chi si dedica ad una particolare disciplina è necessario lo studio della storia della disciplina stessa; vediamo infatti questa verità da tempo immemorabile riconosciuta per alcuni rami del sapere. Nella facoltà di lettere e filosofia quasi tutte le cattedre hanno o più o meno l'indole storica. Nella facoltà di legge, la storia del diritto romano, la storia del diritto italiano, l'esegesi dei testi giuridici romani, ed altre sono cattedre storiche.

A Roma è stata fondata da non molti anni una cattedra di storia dell'arte, destinata a far conoscere e far rifulgere in tutto il loro splendore i tesori artistici di cui ben a ragione va superbo il nostro paese.

Persino nelle scuole militari si fa una parte alla storia, sebbene si cerchi di condensare in poco tempo una grande quantità d'insegnamenti tecnici. Infatti per es. nell'Accademia Navale di Livorno fu istituita una cattedra di storia navale.

Solo nelle scienze fisiche, naturali e matematiche, la storia è tenuta meno in onore, quantunque da qualche tempo si noti un salutare risveglio anche in questo ramo dell'attività umana.

I ricercatori della storia della medicina, della fisica, della matematica sono ben pochi e isolati nel mondo, i libri che trattano queste materie sono poco numerosi. Qual è la causa di questa differenza di tendenze fra i cultori delle discipline letterarie e giuridiche e quelli delle discipline scientifiche?

È assai difficile rispondere in modo esauriente.

2. Forse tale differenza dipende dai diversi temperamenti degli uomini che si dedicano a dette discipline e che corrispondono alla diversa natura ed indole di queste.

Lo scienziato ricerca la verità assoluta, non si contenta del relativo, del presso a poco; vede la vetta luminosa del sapere che irraggia luce e calore benefici sull'umanità, e vuole raggiungere quella vetta, poco curandosi del cammino che già è stato fatto per accostarsi ad essa.

Ora nelle ricerche storiche l'assoluto non c'è.

Si narra che Walter Raleigh, l'ardito viaggiatore che scontò gli onori e la fortuna goduta largamente sotto il regno di Elisabetta colla persecuzione e la prigione sotto il regno di Giacomo I, durante il suo soggiorno forzato nella torre di Londra, si accinse a scrivere la sua celebre *Storia del mondo.* Un giorno interrotto dal rumore di un alterco, egli cercò di saperne la causa; interrogò, indagò, fece le più accurate ricerche; ma non riuscì dalle deposizioni varie e contraddittorie a fare scaturire la verità. Ed allora scoraggiato gittò via la penna, e rinunziò momentaneamente al suo proposito, pensando che, se non era riuscito a scoprire la verità sopra un avvenimento del quale era stato quasi testimonio, era temerario pretendere di scoprire il vero su avvenimenti prodottisi in località e tempi remoti.

Ed egli aveva ragione, se intendeva fare non l'istoria, ma la cronaca; se intendeva di narrare i fatti accaduti in tutti i loro più minuti particolari, di cercare le cause determinanti i vari avvenimenti. Ma non è questo il compito della storia. Tutti i grandi avvenimenti così nell'ordine politico e sociale, come nell'ordine scientifico, hanno questa particolarità, che mentre sono per un lato nell'ombra, sono dall'altro in piena luce; mentre s'ignorano per lo più le cause immediate, si conosce perfettamente come essi si svolsero, quali furono gli effetti, quali i legami fra i fatti successivi.

Una storia generale deve saper cogliere la parte luminosa degli avvenimenti, trascurando i particolari, deve dare il quadro compiuto, senza entrare nelle minuzie.

Il cronista narrerà che la guerra Russo-Giapponese scoppiò perchè la Russia occupava la Manciuria oltre i termini pattuiti, narrerà le lunghe trattative fra i governi dello Czar e del Mikado, narrerà l'assalto improvviso di Porto Arthur e simili cose. Per la storia futura questi particolari saran tutto al più delle cause occasionali, ma la vera causa sarà il conflitto inevitabile fra due civiltà, che hanno egualmente bisogno di espandersi, il cozzo di due popoli che tendono a dominare lo stesso territorio.

E quando l'onda dei secoli sarà trascorsa, quando saranno persino dimenticati i nomi dei principali attori dell'immane tragedia, quando gli episodi tragici della titanica lotta che fanno fremere noi contemporanei, a volta a volta, di orrore, di ammirazione, di entusiasmo saranno dimenticati, o tutto al più ricercati negli archivi dagli studiosi, resterà il fatto grande che al principio del secolo XX la razza gialla, scosso il torpore nel quale viveva da lunghi secoli in uno stato di civiltà relativa, in tutto stazionaria, assimilati in pochi anni i progressi della civiltà propria della razza bianca, iniziò il conflitto contro il popolo slavo, che aveva occupato le terre di cui essa aveva bisogno per dare sfogo alla popolazione ognora crescente di numero.

Distinto così ciò che è dimostrato dai fatti, da documenti irrefragabili, ciò che è assolutamente certo e indubitabile, da quello che è ipotetico o dubbio, frutto di argomentazioni più o meno ingegnose e soggettive, Walter Raleigh avrebbe potuto continuare, come difatti continuò, a scrivere la sua istoria. Anche lo spirito scettico dello scienziato può dunque darsi con piacere a ricerche di questo genere.

3. Una causa da qualcuno può essere ricercata nella fatica che si richiede per leggere un'opera matematica specialmente antica: « I grandi geometri, scrive il D'Alembert, conoscono questa specie « di pigrizia, che preferisce la pena di scoprire una verità alla fa- « tica poco gradevole di seguirla nell'opera di un altro. In generale « essi si leggono poco gli uni gli altri, e forse perderebbero a legger « molto; una testa piena d'idee prese a imprestito non ha più posto « per le sue proprie, e troppa lettura può soffocare il genio ».

In questo pensiero dal D'Alembert vi è un poco di vero unito ad alcunchè di paradossale, ma non credo si possa attribuire ad esso maggiore importanza di quella che merita.

4. Un'altra causa del poco amore degli scienziati alle ricerche storiche è forse il danno grandissimo recato in una certa epoca allo sviluppo delle medesime dalla tendenza degli scolastici a giurare sempre *in verba magistri*, a cercare ogni lume di sapere e di verità soltanto nel passato.

Dopo la splendida civiltà greca, che nelle varie manifestazioni dell'arte raggiunse le più eccelse vette dell'ideale, che nelle varie scienze fece conquiste mirabili, portandole rapidamente ad un'altezza straordinaria per quei tempi, che può vantare nomi come quelli di Euclide, di Apollonio, di Archimede, del quale il Leibniz disse che chi può apprezzarne le opere, ammirerà meno le opere dei moderni; dopo la civiltà greca, dico, l'umanità ha una lunga sosta e poi un regresso.

L'impero romano crolla, roso dalla tabe dei suoi vizi, minato dalle nuove verità proclamate dal Golgota. Seguono le tenebre del Medio Evo, ed il grande patrimonio di sapere, raccolto dai Greci, o si disperse o rimase nell'oblio.

I dominatori del mondo, che avevano un culto soltanto per le armi, si curarono ben poco della scienza del popolo che avevano soggiogato; la civiltà cristiana era troppo occupata nei suoi primordi nelle cose del cielo, perchè potesse occuparsi anche delle cose della terra. E fu grande ventura che tutto il prezioso fardello della scienza greca non fosse disperso, e, dopo aver migrato per molti secoli attraverso gli archivi dei conventi e le scuole arabe, potesse essere parzialmente ricostruito.

Il XII secolo preparò gli elementi necessari alla rinascenza delle lettere e delle arti; la filosofia d'Aristotile si diffuse rapidamente in Europa per opera specialmente di S. Tommaso d'Aquino, mentre prima la Chiesa colpiva d'anatema i peripatetici e bruciava vivi i discepoli del grande scienziato, forse per mantenere gli uomini sotto il giogo dei precetti della Scolastica.

Questa fu una felice rivoluzione della scuola, poichè sostituì all'anarchia filosofica e scientifica un gran dittatore.

Ma i filosofi si dettero al culto di Aristotile con soverchia fede, con illimitato feticismo, e disdegnando l'osservazione della natura, credettero che negli scritti di lui dovesse esser racchiuso tutto lo scibile umano passato, presente e futuro.

Quindi cercarono le spiegazioni di tutti i fenomeni, leggendo nelle opere di lui invece di leggere nell'unico libro che sa e può rispondere a tutte le domande, che è sempre aperto a chi sa leggere in esso, il libro della natura.

Mi limiterò a citare un solo esempio. [1] Aristotile aveva voluto dimostrare che l'aria è pesante fondandosi sopra un'esperienza falsa, affermando cioè che una vescica pesa più gonfiata d'aria che vuota. Tolomeo sosteneva il contrario; Temistio e Semplicio finalmente asserirono che il peso era eguale nei due casi.

I peripatetici discussero sottilmente quale fra gli autori avesse per i suoi meriti diritto a maggior fede; ma a nessuno venne in mente di prendere una bilancia ed una vescica e di verificare coi propri occhi.

Eppure Leonardo da Vinci [2] aveva avvertito: « Sicchè voi speculatori non vi fidate delli autori che anno solo col immaginatione voluto farsi interpreti tra la natura e l'omo, ma sol quelli che non coi cienni della natura ma cogli effetti delle sue esperienze hanno esercitato i loro ingegni. »

Così il predominio dell'opera di un uomo, per quanto grandissimo, circoscrisse per lungo tempo l'orizzonte del sapere, tarpò le ali al genio, oppose ostacoli grandissimi al progresso scientifico, ed occorse l'opera di molti alti intelletti per scuotere il giogo che sopra i più soggetti è più feroce, per sostituire alla rivelazione l'osservazione, alla logica scritta la logica dei fatti.

Prima di Tolomeo, Pitagora e i Pitagorici ritenevano che la terra girasse attorno al Sole; Copernico perfezionò questo concetto; ma sebbene l'osservazione ed i fatti parlassero assai chiaramente, il sistema di Copernico sembrò per molto tempo un'utopia ed occorse la costanza, la tenacia e il genio di Galileo per farlo rifulgere come verità indiscutibile.

Dato lo stato dello spirito scientifico moderno, sembra inverosimile che si possa discutere sopra un fatto scientifico, prendendo per fondamento della discussione argomenti in tutto estranei alla questione medesima, come qualche versetto della Bibbia o le opinioni di filosofi vissuti parecchi secoli prima. Eppure, leggendo le opere di Galileo, non si sa se si debba più ammirarne l'ingegno e la sapienza, o compiangere lo stato di cose in cui si trovava, vedendo lo sforzo continuo che deve fare per mettere d'accordo le sue illazioni logiche e scientifiche colla verità rivelata.

Certo al tempo di Galileo sarebbe stato più facile il far progredire la scienza, se tali preoccupazioni non fossero esistite, come è più facile costruire un edificio *ex-novo*, che non sulle rovine di un altro vecchio e rovinato.

In un certo periodo dunque si può ritenere che la conoscenza del passato sia stata d'inciampo al progresso della scienza, e forse, per reazione naturale, ciò è stata una delle cause della poca simpatia degli scienziati e specialmente dei matematici per le ricerche storiche.

---

(1) PADELLETTI. *Le opere scientifiche di Leonardo da Vinci*, " Annuario della R. Università di Napoli ", 1884-1885.

(2) Ms. v. I, p. 54. — LIBRI, v. III, p. 255.

5. Ma se questo è accaduto quando una folla di pregiudizi, di preconcetti era d'inciampo alla ricerca del vero, quando verità puramente convenzionali si elevavano alla dignità di assioma, non può più accadere ora che lo spirito positivo e liberamente critico, uscendo dal dominio ristretto delle verità matematiche, si è diffuso in tutti i rami delle conoscenze umane.

E già da qualche tempo si nota un potente risveglio nello studio della storia delle scienze.

Alle vecchie storie parziali del Bossut, del Montucla, del Libri, dello Chasles, si sono aggiunti la grande opera di Moritz Cantor, che raccoglie quanto si conosce sulla storia della matematica dalla più remota antichità fino ai tempi di Lagrange, e vari manuali pregevoli, quali sono quelli di Zeuthen, Rouse Ball, Cajori, Hoefer e Boyer.

Qualche giornale storico di piccole e modeste proporzioni, come la Biblioteca matematica di Eneström, ha preso le proporzioni di grande giornale, ed anche altri sono sorti.

Dovunque, e pure da noi in Italia si fanno nuove compiute edizioni delle opere dei grandi maestri; ne sono esempi notevoli l'edizione delle opere di Galileo, quella del codice atlantico di Leonardo da Vinci, e per fermarci ai più recenti, le collezioni delle opere di Beltrami, di Brioschi, di Betti, di Galileo Ferraris, che costituiscono monumenti più durevoli di quelli di bronzo e di marmo.

Ed ovunque si estendono i corsi di storia della matematica.

In Germania i primi corsi del genere furono cominciati circa trent'anni or sono; importantissimo fra tutti quello del Cantor, che dette origine alla grande opera, di cui sopra ho fatto cenno; ma in questi ultimi anni è straordinariamente aumentato il numero delle scuole superiori nelle quali tali corsi si svolgono regolarmente. Meritano speciale menzione i corsi tenuti da vari anni nell'Università di Breslavia da R. Sturm e nel Politecnico di Monaco (Baviera) da A. von Braunmühl, il quale ha anche istituito un *Seminario storico-matematico*.

In Belgio il governo creò sino dal 1884 un corso di storia delle scienze fisiche e matematiche alla Scuola normale annessa all'Università di Gand, della quale fu affidato l'incarico al Mansion. Nel 1890-91 una nuova legge soppresse la Scuola normale e trasportò i corsi di storia alla facoltà di scienze; rendendoli obbligatorii per gli aspiranti al grado di dottore in scienze fisiche e matematiche delle Università belghe. Da allora la storia delle scienze s'insegna anche a Liegi dal Le Paige, a Louvain dal La Vallée Poussin ed a Bruxelles.

Nella Russia il Bobynin, fino dal 1882, fa un corso regolare di storia delle matematiche all'Università di Mosca, ed in Inghilterra il Rouse Ball fa a Cambridge un corso dello stesso genere, che ha dato origine al noto manuale del quale recentemente è stata pubblicata una traduzione italiana dei proff. Gambioli e Puliti. Al Collegio di Francia venne fondata una cattedra di storia generale delle scienze che fu affidata a P. Lafitte, fido discepolo di Augusto Comte.

Nelle Università americane l'insegnamento in parola è largamente diffuso. Infatti nel decorso anno sono stati tenuti corsi di conferenze dal prof. Smith nell'Università di Colombia (New-York), dal Moritz nell'Università di Nebraska, dall'Epsteen nell'Università di Standford; e il prof. Macfarlane tenne sei conferenze sui matematici inglesi del secolo XIX.

Nello stesso anno furon pure fatte lezioni di storia dal Forster a Berlino, dal Wislicenius a Strasburgo, dall'Obenbrauch a Brunn, dall'Isely a Neuchâtel, dal Nesselman a Könisberg, dal Tannery a Parigi.

Infine negli ultimi congressi internazionali è stata solennemente riconosciuta l'importanza ed utilità degli studi storico-scientifici.

Il primo congresso internazionale per la storia delle scienze a Parigi, nel 1900, espresse il desiderio che nelle maggiori scuole superiori francesi ci fossero insegnanti di storia delle matematiche; nel secondo congresso internazionale per la storia delle scienze di Roma (1903), udita la relazione dei proff. Barduzzi, Giacosa e Loria, fu espresso il desiderio che nelle Università potessero farsi quattro corsi di storia delle scienze e cioè: 1° matematica e astronomia; 2° fisica e chimica; 3° scienze naturali; 4° medicina.

Nel 2° congresso internazionale dei matematici ad Heidelberg (agosto 1904) furono fatti voti per l'insegnamento della storia delle matematiche.

E finalmente nel 2° Congresso internazionale di filosofia tenuto a Ginevra dal 4 all'8 settembre 1904 la sezione di filosofia e storia delle scienze confermò i voti dei congressi di Roma e Heidelberg.

6. Tale risveglio è bello ed utile. « Niente, scrisse Guglielmo Libri,(1) è più ingiusto del disprezzo che si ostenta per la scienza imperfetta dei nostri avi. Senza i loro sforzi noi saremmo ancora nell'ignoranza, e forse questo sapere di cui siamo si superbi, è destinato a eccitare ben presto un sorriso di compassione presso una posterità, ingiusta a sua volta. Nè gli uomini, nè le nazioni dovrebbero disprezzare la loro infanzia, e bisogna che i più possenti e i più gloriosi non dimentichino che avranno pure la loro vecchiezza. Tutti i secoli, come tutti i popoli, contribuiscono ai destini dell'umanità: ve ne sono dei più oscuri, dei più disgraziati; ma è questo un motivo per compiangerli, non per disprezzarli ».

Dai fatti che ho sopra esposti apparisce che l'ingiusto disprezzo per la scienza degli avi, deplorato dal Libri, comincia a dileguarsi, ed è da sperare che il movimento in questo senso iniziato, lungi

(1) LIBRI, *Histoires des sciences mathématiques*. Tav. I, pag. XIX.

dall'arrestarsi, si faccia di giorno in giorno più rapido; è da sperarsi che diventi universale nei cultori delle matematiche il desiderio di conoscere non solo il presente ma, almeno nelle sue grandi linee, anche il passato, poichè un tale desiderio sarebbe perfettamente corrispondente alla natura umana.

Dinnanzi ad un'opera artistica, dinnanzi ad un grandioso e splendido edificio ogni uomo sente anzitutto il bisogno di ammirarli prima nel complesso, poi nei particolari; soddisfatto quel bisogno, ne sorge istintivamente un altro; quello di sapere con quali mezzi, con l'aiuto di quali artifici, l'artista ha superato tutte le difficoltà, ed ha soggiogato la materia bruta a piegarsi alla sua volontà, e adattarsi a trasformare in atto il suo pensiero.

La scienza matematica odierna è indubbiamente uno degli edifici più splendidi prodotti dal genio dell'uomo, è una delle creazioni più salde e incrollabili che onorino l'intelletto umano. Il giovane che si dedica a questi studi viene sapientemente guidato nei corsi universitari sulle eccelse vette per abbracciare con uno sguardo sintetico le conquiste fatte attraverso ai secoli.

Ma è ben naturale che egli, una volta acquistata la conoscenza complessiva delle parti fondamentali della sua scienza, si dimandi come esse si son formate, quali legami esistono fra di esse; che egli desideri di conoscere qualche cosa sulla vita e sulle opere di coloro, che più cooperarono alla costruzione del superbo edificio, e che come pietre miliari sul cammino del progresso, segnano le diverse grandi tappe percorse dal pensiero umano nell'arduo cammino del sapere.

Se è bello conoscere la storia degli assedi e delle battaglie che han contristato i popoli, gli ordinamenti politici dei vari paesi, i nomi dei grandi capitani e dei grandi principi, non è forse più bello conoscere la storia del pensiero umano, la storia dei grandi solitari che con slancio nobile e generoso si sono dedicati a combattere un solo grande nemico comune, l'ignoranza; che, attraverso a difficoltà d'ogni genere, si son dati con ogni lor possa a squarciare il velo che nasconde la verità; che mai hanno fatto spargere lacrime e sangue attorno a loro, ma solo hanno procurato del bene al genere umano colla conquista di qualche nuova verità?

7. La storia della scienza, sotto l'aspetto pratico e positivo avrebbe una utilità assai relativa se servisse soltanto ad appagare l'innato desiderio di conoscere e di sapere.

Ma essa ha anche una utilità pratica di prim'ordine. Ogni conquista della scienza ha sempre servito per preparare il terreno ad una conquista maggiore; ha servito a sollevare il genio umano sempre di più, in guisa da potere spiccare il volo verso altezze maggiori.

Così la conoscenza delle difficoltà superate per le successive conquiste può essere un utile ammaestramento per tentare con maggiore probabilità di vittoria la risoluzione dei problemi sempre nuovi che affaticano l'umanità.

8. Le considerazioni svolte fin qui possono adoperarsi per dimostrare l'utilità della storia della scienza in generale per qualsiasi disciplina. Esistono poi altri argomenti per dimostrare che tale utilità è più particolarmente sensibile e manifesta per la matematica.

Anzitutto la matematica è sotto un certo aspetto la più conservatrice fra tutte le scienze; mentre è sotto un altro la più ribelle.

È la più conservatrice. Se infatti Euclide o Archimede potessero sorgere dalla tomba, troverebbero che la geometria elementare che costituisce l'insegnamento delle scuole medie in tutto il mondo, è sostanzialmente la geometria che essi in parte crearono, in parte raccolsero dai loro predecessori; troverebbero che ciò che era la verità 2000 anni or sono, è vero oggi, sarà vero sempre.

In nessun'altra disciplina umana avviene lo stesso. Prima della chimica in forma scientifica e positiva, abbiamo avuto le aberrazioni e le utopie degli alchimisti, prima della fisica la metafisica, prima della medicina moderna, che negli esseri viventi, infinitamente piccoli, ha rintracciato le cause dei mali, abbiamo avuto i rimedi empirici, le stregonerie degli astrologhi; nè parlo del vivere civile e politico in cui l'idea del giusto, del vero e dell'onesto ha subito radicali modificazioni; basta, per persuadersene, confrontar gli usi delle tribù selvaggie con quelli dell'uomo civile.

In tutte le scienze il sapere del passato si è perduto in un grande, immenso naufragio, e sono rimasti a galla soltanto pochi e miseri avanzi. Nella matematica invece e singolarmente nella geometria, nulla si è perduto, nulla si perderà, perchè ciò che è acquisito nelle scienze di dimostrazione è assolutamente perfetto; ciò che è acquisito nelle scienze di osservazione è indefinitamente perfettibile e per conseguenza variabile. Gli antichi popoli hanno cominciato a costruire le basi incrollabili del grandioso edificio; i successivi popoli lo hanno innalzato a poco a poco; costruendo con piena sicurezza sull'opera dei predecessori; vi sono stati periodi in cui l'edifizio ha progredito rapidissimamente, e vi sono stati periodi, talvolta anche lunghissimi, di sosta, ma non mai di regresso; nè mai una pietra collocata stabilmente al posto è stata gettata via; ed ora l'edificio è giunto ad una altezza sublime, la sua cima superba si perde nelle nubi, ma non è stato posto e non si porrà mai il coronamento. Excelsior, in alto sempre più in alto, sempre sicuri che la lima della critica non potrà mai intaccare il puro granito dell'edificio logico, con la piena certezza che nessuna nuova conquista sarà perduta.

9. Questo privilegio di indistruttibilità assoluta che spetta alle verità matematiche è conseguenza della loro stessa natura astratta e ideale. Tutte le scienze, le matematiche incluse, si fondano sui fenomeni naturali; ma i sensi spesso sono fallaci, le apparenze talvolta ingannano; un perfezionamento negli strumenti d'osservazione, che equivale a rendere più squisito ed acuto il potere dei sensi, basta talvolta a far trovare errate le osservazioni precedentemente fatte, e quindi a far crollare le conseguenze che da quelle si erano logicamente ricavate.

Ma nel campo della geometria i concetti che si ammettono come primitivi, le cose di cui si ammette nota l'esistenza senza poterle definire, le verità che si ammettono come indimostrabili sono le più semplici, sulle quali non può cadere dubbio di sorta. Le definizioni e gli assiomi di Euclide costituiscono per così dire la parte sperimentale della geometria; ma, si noti bene, gli enti che fanno oggetto delle ricerche geometriche, non sono gli oggetti reali; lo spazio, i corpi geometrici, la superficie, le linee, i punti geometrici sono pure astrazioni immaginate dalla mente dell'uomo, foggiate sugli oggetti che ci circondano tenendo conto soltanto di alcune delle loro proprietà.

L'edificio geometrico non è che la conseguenza di quelle pochissime verità stabilite come primitive, e sussiste finchè sussistono quelle.

Ora dal punto di vista puramente speculativo è indifferente stabilire un certo numero di postulati, purchè non siano contradditorii e gli uni non siano conseguenza degli altri.

Dal punto di vista pratico, se le nozioni ammesse come primitive, non corrispondono assolutamente alla realtà, è certo che i mezzi che sono o che possono venire a nostra disposizione non ci possono fare trovare differenze apprezzabili, fra lo spazio qual'è ammesso dai geometri, e lo spazio qual'è, almeno nei limiti dei nostri sensi, quindi le verità dimostrate dalla matematica hanno sempre una corrispondenza nei fatti, assoluta o quasi.

« Le verità geometriche, dice il d'Alembert, sono in certa guisa « gli assintoti delle verità fisiche, cioè il termine al quale queste « possono indefinitamente approssimarsi, senza mai arrivarvi esatta« mente ».

Per ciò poco importa che non ci sia un piano perfetto o una superficie sferica perfetta, ma basta che le sue proprietà si accostino tanto più a quelle dimostrate dalla geometria quanto meno la superficie considerata differisce da un piano o da una sfera geometrica.

La matematica è insomma ad un tempo la più ideale fra le scienze, perchè opera su pure astrazioni, e la più positiva, perchè i risultati che ottiene hanno piena e perfetta applicazione nella pratica.

Perciò più che per ogni altra scienza è utile per essa lo studio della storia, in quanto che niente di ciò che da essa è stato provato è da rigettarsi, tranne gli spropositi degli individui isolati.

10. La matematica, ho detto, è la più conservatrice di tutte le scienze perchè non abbandona mai alcuna delle conquiste fatte, perchè procede sicura sul suo cammino senza fare passi indietro, perchè può avere su questo delle soste ma non delle deviazioni.

Ma è anche la più ribelle, l'unica che non esita a mettere in dubbio anche le cose che sembrano più evidenti ed indiscutibili. Per quanto la cosa possa sembrare strana e contradditoria con la tendenza conservatrice sopra accennata, non è per questo meno vera, e basterà che io rammenti un fatto per dimostrarlo.

Sebbene le verità ammesse come primitive da Euclide siano in numero abbastanza limitato, non era da escludersi la possibilità di ridurre ancora tale numero. Era quindi naturale che si cercasse di far diventare teorema qualcuna di tali verità. Oggetto di tale tentativo è stato per venti secoli principalmente il famoso assioma XIII: « Se due rette in un piano tagliate da una terza formano due angoli interni coniugati la cui somma non è due angoli retti, esse s'incontrano da quella parte ove la somma suddetta è minore di due retti ». Postulato che si può trasformare nell'altro: « Da un punto di un piano non si può condurre più di una retta che non incontri una retta data ».

Gl'innumerevoli tentativi di dimostrazione, fatti in venti secoli, eran tutti errati o fondati sull'ammettere tacitamente qualche altra verità a quella equivalente. Ebbene, nella prima metà dello scorso secolo, vista l'inutilità di tutti i tentativi, sorse in qualcuno il dubbio che quell'assioma fosse indimostrabile, e si cercò di fare una geometria indipendente da quell'assioma, formulando tutte le ipotesi logicamente ammissibili, senza tenere alcun conto dei risultati dell'esperienza e della osservazione.

Il Lobatchewsky, il Boliay, il Gauss, mettendosi su questa via, provocarono una rivoluzione nel campo tranquillo dei matematici ben più ardita e profonda di quella provocata dagli enciclopedisti nel 1789.

Parve che si volesse negare l'evidenza, la luce al sole, che si stesse per demolire un edificio rimasto incrollabile e intatto all'urto dei secoli; che si volesse negare la verità di quelle nozioni matematiche che, riunite in un corpo di scienza, avevano quotidianamente la conferma della esperienza; che avevano non molto prima ricevuto la più luminosa, la più alta conferma della loro eccellenza colla scoperta di un astro, Nettuno, fatta a tavolino col calcolo dal Le Verrier (1846), e confermata poi colla più grande esattezza dal telescopio.

Si gridò, e parve giustamente, alla profanazione, al sacrilegio. Ebbene il resultato della grande rivoluzione fu che le tre ipotesi che si potevano fare sull'argomento portavano a tre diverse geometrie, che furono dette ellittica, iperbolica e parabolica, l'ultima delle quali era quella di Euclide; che queste tre geometrie erano egualmente giuste e rigorose dal punto di vista astratto e speculativo; che anche dall'aspetto pratico niente può autorizzarci a dire che il nostro spazio sia costruito secondo le leggi dell'una o dell'altra delle suddette geometrie, poichè la parte del medesimo che cade nel dominio dei sensi e delle misure che possiamo fare è infinitesimo in confronto dello intero spazio, e per parti infinitesime i tre spazi Euclideo e non Euclidei, si comportano nello stesso modo, precisamente come sopra una sfera di raggio grandissimo le proprietà delle figure appartenenti ad un elemento di superficie si possono considerare come identiche alle proprietà del piano. Infine il nostro Beltrami riuscì a dimostrare che i tentativi fatti per dimostrare il famoso postulato erano riusciti tutti vani per la buona ragione che era indimostrabile.

Così l'ardita innovazione, l'idea rivoluzionaria, lungi dal distruggere il vecchio edificio, ne consolidò le fondamenta; lungi dal demolire qualche cosa, aprì nuovi orizzonti, fece intravedere all'occhio meravigliato e desioso degli scienziati plaghe vergini ed inesplorate, nelle quali gli arditi ricercatori si slanciarono animosi, e raccolsero messe abbondante di scoperte e di gloria.

11. Contemporaneamente altri ricercatori più pazienti ripresero in esame i fondamenti stessi della geometria, li sottoposero alla prova di una acuta e sapiente critica, e ordinando con cura ciò che Euclide e i geometri euclidei ammettono esplicitamente come nozione primitiva e ciò che tacitamente ammettono, cercarono di stabilire sistemi di postulati da sostituire a quello di Euclide.

Comunque sia, sta in fatto che la temuta rivoluzione ha consolidato le fondamenta del grande edificio geometrico, ed ha permesso di perfezionarlo in qualche parte; sta in fatto che mentre la matematica è la scienza per eccellenza che non ha bisogno dell'aiuto delle altre, che nei bisogni più modesti e nei più elevati della vita serve a risolvere le più semplici e le più elevate questioni, che è di ausilio prezioso alle altre scienze, tanto che queste (secondo Leonardo da Vinci) non diventano scienza se non in quanto diventan matematica, ha portato anche la mente dell'uomo a spaziare nel campo del soprasensibile, a indagare e investigare spazi che sfuggono ai nostri sensi, appagando quella sete innata d'ideale che ha sempre affaticato il genere umano.

12. Senza accorgermene ho un poco deviato dall'argomento che mi ero proposto di dimostrare, che cioè l'utilità dello studio della storia per la geometria è ancora più grande che per le altre scienze, perchè tutto quello che è stato conquistato è, e resterà sempre vero, mentre le altre scienze son soggette per la loro natura a modificazioni e trasformazioni radicali, e talvolta anche a distruggere interamente in un'età tutta l'opera di un'età precedente.

13. Nè è da credersi che lo studio della storia della matematica serva unicamente a conoscere il passato, sia una escursione in una regione morta, ove non germoglia un fiore, ove non si può raccogliere un seme vitale per l'avvenire. Talvolta, fra le ingiallite pagine può esser nascosto il germe d'un'idea dimenticata, che con l'ausilio dei moderni mezzi di ricerca, ben più potenti di quelli di qualche secolo fa, può dare insperati frutti, e forse schiuder nuove vie agli arditi ricercatori del vero.

Le ricostruzioni fatte da Vieta, Fermat, Simson, Chasles... di antiche opere classiche perdute, come i famosi *Porismi* di Euclide, dei quali soltanto Pappo dà notizie concise e incompiute, se non corrispondono alla realtà storica, sono opere originali di valore.

Ma l'esempio più notevole è dato dalla costruzione dei fondamenti della moderna geometria proiettiva, raccogliendo, ordinando e compiendo delle proposizioni sparse in un'opera di uno scrittore del IV secolo, le collezioni matematiche di Pappo. Il teorema del birapporto costante delle sezioni prodotte da una retta qualunque in quattro rette di un fascio fu scoperto nelle collezioni suddette da Chasles, il quale chiama tale funzione *rapporto* o *funzione anarmonica*.

« La nozione di funzione anarmonica (così egli dice) (1) ci sembra « di natura tale da apportare una grande semplificazione in molte « teorie geometriche ». Egli non si era ingannato, anzi i risultati superarono le sue previsioni, poichè la geometria, che dopo la scoperta della geometria analitica fatta da Cartesio nel 1635, pareva diventata schiava dell'analisi, che sembrava incapace di muovere un passo innanzi senza l'ausilio di questa, acquistò nuovo vigore per i concetti già vecchi di quindici secoli almeno, rimessi all'onore del giorno per opera di Chasles ed altri sommi, e mostrò come le pure considerazioni geometriche possano competere in semplicità, rapidità ed eleganza, colle concezioni dell'analisi e in qualche caso superarle.

Da questo esempio, sebbene notevolissimo, non bisogna saltare alle esagerazioni di alcuni, i quali vogliono trovare nell'antichità i germi di tutte le scoperte. Non si può dire che Archimede sia l'inventore del calcolo integrale, perchè fece la quadratura del segmento parabolico, e risolvette altri problemi che, dati i mezzi di cui egli disponeva, presentavano difficoltà straordinarie, nè che Erone inventasse la macchina a vapore, ecc.

14. Ed ora, dopo aver parlato della utilità della storia delle matematiche in generale, consentite che dica ancora qualche parola sulla importanza di tale studio per i giovani che, uscendo dall'Università,

---

(1) CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le developpements des méthodes en Géométrie*, p. 35.

dovranno dedicare la loro attività, il loro ingegno, all'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie, insegnamento così importante per la gran moltitudine dei cittadini colti e quindi per la nazione.

L'illustre Poincaré, in una conferenza tenuta nella scorsa primavera al Museo pedagogico di Parigi, (1) ha messo il dito sopra una piaga dell'insegnamento.

« Come va, egli disse, che tanti spiriti si rifiutano a comprendere le matematiche? Non vi è in ciò qualche cosa di paradossale? Come, ecco una scienza che non fa appello altro che ai principii fondamentali della logica, al principio di contradizione, per esempio, a ciò che fa per così dire lo scheletro del nostro intendimento, a ciò di cui non ci potremmo spogliare senza cessare di pensare, e vi sono delle persone che la trovano oscura! ed anche sono in maggioranza! Che essi sieno incapaci di inventare, passi; ma che essi non comprendano le dimostrazioni che vengono loro esposte, che essi restino ciechi quando noi presentiamo loro una luce, che ci sembra brillare d'un puro splendore, è una cosa che ha assolutamente del prodigioso.

« E tuttavia non occorre avere una grande esperienza di esami per sapere che questi ciechi non sono esseri straordinari? In ciò sta un problema che non è agevole risolvere ma che deve impensierire tutti coloro che si votano all'insegnamento. »

E su questo problema l'illustre professore francese con mirabile acume, originalità e profondità di vedute e, soprattutto con molto senso pratico, discute nella sua bella conferenza, che dovrebbe esser letta e meditata da quanti insegnano o si accingono a diventare insegnanti.

E alla discussione sulle linee generali del problema egli fa seguire delle proposte concrete sul modo d'insegnare le varie parti delle matematiche a seconda dei diversi gradi d'istruzione.

Non è qui il tempo e il luogo per riferire queste proposte concrete, e nemmeno per riassumere le considerazioni d'indole generale, ma mi sembra che si possa premere il sugo di tali concetti in questa formula.

La pretesa eccessiva difficoltà degli studi matematici, e il conseguente orrore che i più hanno per essi derivano da una sola causa; la difficoltà che trovano la maggior parte degli insegnanti a porsi al livello dei loro scolari, in modo da sviluppare le facoltà intellettuali dei giovani, varie secondo le età e le circostanze; nel non sapere approfittare opportunamente nei diversi gradi d'istruzione o delle facoltà d'intuizione o delle facoltà logiche che predominano a volta a volta.

---

(1) Poincaré. *Les définitions générales en mathématiques*, " L'Enseignement mathématique ", VI Année, p. 257.

Nella prima età il fanciullo possiede principalmente la facoltà d'intuizione. La sua mente acquista idee e cognizioni per mezzo dell'osservazione, per mezzo delle sensazioni che producon gli oggetti esterni.

Procedendo negli anni, cominciano a svilupparsi anche le facoltà logiche, per mezzo delle quali il giovane, fatto più maturo, desidera conoscere i legami e la dipendenza fra i vari fatti.

E similmente nella formazione e nello sviluppo di una scienza vi sono due stadi, nel primo dei quali prevale l'intuizione, nel secondo la logica. Nel primo si forma, per così dire, lo scheletro dell'edificio e si procede arditamente senza guardare a troppe sottigliezze; nel secondo si riprende in esame il già fatto, si consolidano si rafforzano i fondamenti e le varie parti; nel primo si lavora coll'ascia, nel secondo col cesello.

L'insegnamento matematico nelle scuole secondarie, oltre che preparazione per i pochi che seguiranno gli studi della facoltà matematica, dovrebbe avere per tutti l'ufficio altamente pedagogico ed educativo di coltivare e sviluppare quelle facoltà logiche e d'intuizione, cui ho accennato sopra, e che sono egualmente importanti; le prime servono in certa guisa a rendere atti a conoscere se le varie maglie di una catena sono egualmente solide e ben saldate; le seconde servono a fare scorgere da lungi la mèta e a scoprire la via più adatta per raggiungerla.

Mi piace riportare un paragone dello stesso Poincaré nella citata conferenza.

La nozione intuitiva è l'armatura, la centina su cui poggia un arco, la nozione logica, è l'arco stesso. Una volta costruito e consolidato l'arco, si può togliere la centina, e quello rimane saldo e incrollabile. Così costruito l'edifizio logico si può non tener più conto di quello che è frutto della intuizione. Ma come non si riesce a costruire l'arco senza l'appoggio della centina, non si riesce a fare entrare nelle menti dei giovanetti una scienza puramente logica senza il substrato della nozione intuitiva.

Ora avviene fatalmente che il giovane che dagli alti fastigi dei corsi universitari viene precipitato al modesto ufficio d'insegnare le matematiche ai giovanetti dei licei ed istituti tecnici, o peggio ancora del ginnasio o della scuola tecnica, malamente si piega a rinunziare a quelle tendenze che sono state il suo pane quotidiano, a rinunziare ad un poco di quell'esattezza che si richiede nei corsi superiori, a nascondere insomma un poco di quello che sa, e che per la sua mente evoluta ed affinata dal lungo studio, sembra così semplice e chiaro, e che per i ragazzi è invece oscuro e difficile, precisamente come una luce troppo viva abbarbaglia gli occhi di chi esce improvvisamente dalla oscurità.

L'adattare la propria energia, il proprio sapere, all'insegnamento secondario è insomma un'arte assai difficile, che ordinariamente non si acquista che con lunga pratica.

Ebbene lo studio della storia della matematica contribuisce senza dubbio ad acquistare tale arte.

Il Leibnitz paragonò l'umanità ad un individuo che impara sempre, ogni generazione assimilando rapidamente le cognizioni delle generazioni che la precedettero; la conoscenza delle varie metamorfosi della scienza matematica lungo il suo bimillenare sviluppo, della dipendenza fra le successive scoperte; il conoscere con quanta lentezza queste in generale si svolsero, quali furono i passi più difficili a superare, costituiscono senza dubbio una preziosa scuola di pedagogia matematica.

15. È tempo di raccogliere le vele e concludere.

Da quanto ho detto credo risulti sufficientemente dimostrato che, se è necessario per tutti avere delle nozioni di storia generale, se per i cultori di una data scienza è necessario conoscere la storia di questa, tale necessità è maggiore pei matematici; che le ricerche storiche non solo servono ad appagare l'innato desiderio di sapere, ma possono anche servire a rintracciare e mettere in luce, come gioielli preziosi, verità dimenticate e capaci di schiudere nuovi orizzonti ai ricercatori; che la conoscenza della storia delle matematiche può giovare ai giovani per diventare buoni insegnanti di scuole secondarie.

La dotta Germania ed il Belgio hanno prime dato al mondo l'esempio del rinnovato culto per gli studi storici scientifici; la giovane America con quell'ardimento e slancio che mette in tutte le cose le ha seguite nell'arringo; in tutti i paesi civili si è cominciato a seguirne l'esempio. Anche in Italia abbiamo valorosi cultori delle discipline storiche, come il Loria, il Favaro, il Vailati che fece a Torino un corso di storia della meccanica, l'Amodeo ed altri. Ed è giusto, è bello che ciò sia, poichè gli Italiani possono con legittimo orgoglio volger l'occhio al passato scientifico del nostro paese non meno che al passato artistico e letterario.

Sembra quasi che a compenso delle sventure e dei dolori che hanno afflitto il bel paese nelle sue varie vicende politiche e sociali attraverso i secoli, il genio italico dovesse brillare al disopra di tutti gli oppressori che hanno successivamente dilaniate le sue terre; che mentre gli altri popoli hanno avuto varie vicende di grandezza e di decadenza, il nostro paese avesse la sorte di occupare sempre nel campo intellettuale uno dei posti più belli fino dalla più remota antichità.

Non starò qui ad enumerare le antiche glorie scientifiche dell'Italia, ma permettetemi di accennare fuggevolmente ad alcuni fatti più salienti.

La scuola pitagorica, che nel IV secolo a. C. tenne il primato nel mondo, svolse la sua azione specialmente a Crotone ed a Taranto.
Il III secolo a. C., che fu giustamente detto il secolo d'oro della scienza, rifulse di uno splendore che non fu mai superato nei secoli successivi, specialmente per merito della gloriosa triade: Euclide, Archimede, Apollonio, ed il più geniale di quei tre grandi, Archimede, fu italiano.

E quando in mezzo alla prosperità dei liberi comuni l'Italia fu tutto un Maggio, quando le repubbliche marittime si proposero di costruire monumenti che potessero emulare gli antichi; e sorsero dovunque quei poemi di marmo che sono le vecchie cattedrali; all'alba del secolo in cui Arnolfo di Lapo dotava Firenze dei più splendidi edifizi di cui va giustamente altera; in cui Cimabue e Giotto facevano risorgere la pittura e Nicola Pisano la scultura; all'alba del secolo in cui il Notaio e fra Guittone d'Arezzo e fra Jacopone da Todi e il Guinicelli e il Cavalcanti scrissero i primi versi Italiani; all'alba del secolo che dette la luce al padre Dante, al fondatore del *dolce stil novo;* nel 1202 un modesto mercante pisano Leonardo Fibonacci pubblicava il suo *liber abaci*, col quale s' introdussero in Europa la scrittura dei numeri in cifre arabe, e le cognizioni di aritmetica e algebra che si erano svolte nelle scuole arabe e indiane nei secoli in cui l' Europa era avvolta nelle più folte tenebre dell' ignoranza. L'opere di Fibonacci schiusero alla scienza la via maestra dell'algebra alla quale nei secoli successivi altri italiani, come il Pacioli, il Maurolico, il Ferrari, il Cardani, il Tartaglia, il Ferro, il Benedetti ed altri fecero fare notevoli progressi.

Eppure in ricompensa dei segnalati servigi resi da Leonardo alla scienza, i contemporanei di lui gli applicarono il nomignolo di *bighellone,* forse perchè, assorbito dagli studi, egli non aveva tempo, nè voglia, nè attitudine per dedicarsi al commercio!
E nel secol d'oro dell'arte, detto anche secolo di Leone X, in mezzo ad una pleiade di artisti sommi, quali il Buonarroti ed il Sanzio, di poeti come l'Ariosto, di pensatori come Nicolò Machiavelli, rifulse di straordinario splendore la gloria di Leonardo da Vinci, il quale non solo emulò i suoi grandi contemporanei nella pittura, nella scultura, nell'architettura, ma fu anche musico, geometra, filosofo insigne, restauratore della scienza e della filosofia. Narra il Vasari che egli fu il più forte e il più bello dei suoi contemporanei; e sebbene le sue opere siano disordinate e in gran parte perdute, si sa che applicò la sua vastissima mente a tutte le più svariate questioni scientifiche colla massima originalità, e profondità di vedute.

Ed il giorno in cui Michelangiolo moriva nasceva Galileo, che sgombrò primo le vie del firmamento a Newton, ed il cui spirito veglia ancora come genio tutelare su questo tempio della scienza; sulla nostra gloriosa Università.

Ed anche quando Descartes colla scoperta della geometria analitica e Newton e Leibnitz colla scoperta del calcolo assicurarono ad altri paesi il primato della scienza matematica, l' Italia pure ebbe una pleiade di precursori e di continuatori e perfezionatori che non giova qui nominare.

Il secolo testè chiuso e che ha fatto tanto progredire le teorie matematiche, pur tacendo di tanti illustri viventi, può vantare nomi come quelli di Brioschi, Beltrami, Betti, Cremona, che lasciarono traccie luminose del loro ingegno e della loro dottrina.

16. Incoraggiato dal consiglio di autorevoli membri delle facoltà, inizio questo corso nel quale mi propongo di esporre una specie di sommario della storia della geometria in relazione con gli altri rami delle matematiche. Lo scopo principale che procurerò di raggiungere è quello di far conoscere lo stato delle cognizioni geometriche nelle varie età, il successivo sviluppo delle medesime, di fare insomma la storia delle idee piuttosto che delle persone.

Non mi dissimulo la gravità del compito che ho liberamente assunto, ed ignoro se le mie forze saranno sufficienti a sostenerlo; ma confido che il desiderio, in me vivissimo, di far cosa utile a voi, o giovani, che siete l'avvenire e la speranza, vi renda benevoli verso chi si propone di evocare dinanzi alla vostra mente le glorie del passato.

In questa fiducia invio il mio saluto augurale a voi, o giovani, ed ai vostri illustri maestri, alcuni dei quali, e ne sono superbo, furono pure i miei.

G. Lazzeri.

TEORIA DEI NUMERI COMPLESSI AD *N* UNITÀ

(Continuaz. e fine, v. fasc. prec.)

§ 2. — Sistemi con una moltiplicazione associativa.

10. Proprietà generali di questi sistemi.

La moltiplicazione nel modo generale col quale è stata definita (n. 7) non è nè associativa, nè commutativa. Una moltiplicazione la quale gode della proprietà commutativa è anche associativa, ma una moltiplicazione associativa può non essere commutativa. Volendo dunque conservare un po' di generalità bisognerà cominciare lo studio di quei sistemi che ammettono una moltiplicazione associativa.

Ipotesi I. — *Il sistema ammette una moltiplicazione associativa.*

Per questo occorre e basta che siano associativi i prodotti delle unità, e perciò, come è stato detto al n. 7, il processo della moltiplicazione deve essere definito in maniera che sussistano le relazioni

$$\sum_{u,v} \lambda_{rs}^{(u)} \lambda_{ut}^{(v)} = \sum_{u,v} \lambda_{st}^{(u)} \lambda_{ru}^{(v)} . \qquad (r, s, t = 1, 2, \ldots n).$$

Quando si tratti di un sistema di numeri complessi, che ammette una moltiplicazione associativa, i teoremi sopra i moduli della moltiplicazione, dati al n. 9, possono invertirsi. Si ha così il seguente teorema.

Teorema. — *Ogni sistema di numeri complessi, che ammette una moltiplicazione associativa e una divisione posteriore (anteriore), possiede almeno un modulo anteriore (posteriore) della moltiplicazione.*

Infatti, se il sistema ammette la divisione posteriore, esiste un numero b del sistema tale che sia $\Lambda'(b) \neq 0$. Allora esiste uno e un sol numero e tale che sia

$$b . e = b .$$

Se a è un numero arbitrario del sistema, si ponga

$$y = e . a .$$

Per la supposta legge associativa si ha

$$b . y = b . (e . a) = (b . e) . a = b . a .$$

Ma, essendo $\Lambda'(b) \neq 0$, l'equazione

$$b . y = b . a$$

ammette una sola radice, che è

$$y = a .$$

Si ha dunque, qualunque sia a,

$$a = e . a$$

e però il numero e è un modulo anteriore della moltiplicazione.

Corollario. — *Un sistema che ammette una moltiplicazione associativa e non possiede un modulo anteriore (posteriore) della moltiplicazione, non può ammettere una divisione posteriore (anteriore).*

11. Elevazione a potenza.

Definizione XI. — Se m è un numero intero positivo, maggiore dell'unità, ed a un numero complesso qualunque, si dirà *potenza* m^{esima} *di* a, e si indicherà con a^m, il prodotto di m numeri uguali ad a.

Per convenzione

$$a^1 = a .$$

Se a appartiene ad un sistema con moltiplicazione associativa, sussisteranno le due proprietà

$$a^m . a^n = a^{m+n} , \qquad (1)$$
$$(a^m)^n = a^{mn} , \qquad (2)$$

dove tanto m che n sono numeri interi positivi diversi da zero.

È importantissimo il seguente teorema:

Teorema — *Ogni numero* x *di un sistema con* n *unità con moltiplicazione associativa soddisfa ad una equazione algebrica a coefficienti reali di grado non superiore ad* $n+1$.

Sia

$$x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\ldots+\xi_ne_n,$$

e poniamo

$$x^r=\xi_{r1}e_1+\xi_{r2}e_2+\ldots+\xi_{rn}e_n \qquad (r=1,2,\ldots n); \tag{3}$$

saranno le ξ_{rs} funzioni intere di $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, i cui coefficienti sono funzioni intere dei numeri $\lambda_{rs}^{(i)}$, che compaiono nella definizione della moltiplicazione (n. 7, def. VIII *a*)).

Consideriamo il determinante del sistema (3)

$$\Xi=|\xi_{rs}|,$$

il quale è una funzione intera delle coordinate di x, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Se Ξ non è identicamente nullo, esisterà un numero g del sistema per il quale Ξ non è nullo, e allora per mezzo del sistema (3) le unità e poi con esse tutti i numeri del sistema si esprimono per le potenze $g, g^2, \ldots, g^n$.

In particolare

$$g^{n+1}=\alpha_1g+\alpha_2g^2+\ldots+\alpha_ng^n.$$

Se invece Ξ è identicamente nullo, la coesistenza dell'equazioni (3) porta con sè una relazione lineare omogenea fra le potenze $x, x^2, \ldots x^n$ della forma

$$\beta_1x^n+\beta_2x^{n-1}+\ldots+\beta_nx=0,$$

nella quale non tutte le β possono essere identicamente nulle, tranne che x non sia eguale a zero, ciò che escludiamo.

In generale ogni numero x del sistema soddisfa ad una equazione della forma

$$\varphi_0x^{m+1}+\varphi_1x^m+\ldots+\varphi_{m-1}x^2+\varphi_mx=0 \quad (1\leqq m\leqq n), \tag{4}$$

dove $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ sono funzioni intere di $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ e φ_0 non è identicamente nulla.

Definizione XII. — L'equazione di grado minimo cui soddisfa un numero x scelto arbitrariamente nel sistema si chiama *l'equazione caratteristica del sistema* (Scheffers) e il suo grado il *grado* (Scheffers) o il *rango* (Molien) del sistema.

§ 3. — Corpi associativi.

12. Proprietà generali.

Il procedimento della moltiplicazione può essere definito in maniera che nessuno dei determinanti della divisione $\Lambda(b)$, $\Lambda'(b)$ (n. 8) sia identicamente nullo. In tal caso, come sappiamo, si dirà che il sistema ammette la divisione bilaterale. Noi d'ora innanzi supporremo che il sistema goda anche di questa proprietà:

IPOTESI II. — *Il sistema ammette una divisione bilaterale.*

Un tal sistema lo diremo un *corpo* di numeri complessi (DEDEKIND), e diremo per brevità *corpo associativo* un corpo di numeri complessi con moltiplicazione associativa.

TEOREMA I. — *In un corpo associativo di numeri complessi esiste sempre un modulo unico della moltiplicazione,* cioè uno ed un solo numero e, che è nel tempo stesso modulo anteriore e modulo posteriore della moltiplicazione. Ciò segue senz'altro dal teor. del n. 10 e dal teor. II del n. 9.

Questo modulo può assumersi come unità del sistema. Infatti posto

$$e = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \ldots + \varepsilon_n e_n ,$$

e non può avere le coordinate tutte nulle, tranne che il corpo non sia formato dal solo numero zero, ciò che escludiamo per semplicità; e però una coordinata almeno, per es. ε_n, sarà diversa da zero. Potremo allora prendere come nuove unità i numeri $e, e_1\, e_2 \ldots e_{n-1}$, perchè il determinante della trasformazione risulta evidentemente diverso da zero. Fra i numeri del corpo vi sono i numeri αe, dove α è un numero reale qualunque. Questi numeri formano di per sè un corpo, il quale non differisce dal corpo dei numeri reali, tranne che in esso l'unità, anzichè essere rappresentata con **1**, è rappresentata con e. Noi possiamo perciò, senza ledere la generalità del campo, rappresentare con **1** il modulo e, e potremo, in base a questa convenzione, concludere:

TEOREMA II. — *In un corpo associativo è sempre contenuto il corpo dei numeri reali.*

TEOREMA III. — *Un corpo associativo del primo ordine coincide col corpo reale.*

Un numero complesso a di un corpo associativo sarà d'ora innanzi indicato sotto la forma

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_{n-1} e_{n-1} .$$

È chiaro poi che il numero αa può anche considerarsi come il prodotto del numero reale α per il numero a, quindi, rendendosi ormai inutile la distinzione tra coefficiente e fattore, può sopprimersi il punto come segno della moltiplicazione e scrivere ab in luogo di $a \,.\, b$.

TEOREMA IV. — *Dato un numero complesso* a, *per il quale tanto* $\Lambda(\mathrm{a})$ *quanto* $\Lambda'(\mathrm{a})$ *sono diversi da zero, esiste uno ed un solo numero che moltiplicato tanto a destra che a sinistra di* a *dà un prodotto uguale all'unità reale.*

Infatti, essendo tanto $\Lambda(a)$ che $\Lambda'(a)$ diversi da zero, esistono due numeri a' e a_1 tali che sia

$$aa' = 1 , \qquad a_1 a = 1 ;$$

moltiplicando ambo i membri della seconda a destra per a', si ha, per la prima uguaglianza,

$$a_1 = a' .$$

DEFINIZIONE XIII. — Il numero complesso, che moltiplicato sia a destra che a sinistra di a dà un prodotto uguale all'unità reale, dicesi *l'inverso* o *il reciproco* di a.

Esso si denota con a^{-1}.

Convenendo di porre

$$a^0 = 1, \qquad a^{-n} = (a^{-1})^n, \qquad (n \text{ intero}) \tag{3}$$

le proprietà (1), (2) dell'elevazione a potenza (n. 11) facilmente si estendono al caso di esponenti interi, nulli o negativi.

Facilmente si dimostra la proprietà

$$(abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1},$$

cioè che *l'inverso di un prodotto di numeri, ciascuno dei quali ammette il proprio inverso, è uguale al prodotto degli inversi dei singoli fattori scritti in senso inverso.*

§ 4. — CORPI HANKELIANI.

13. Divisori dello zero.

In un corpo associativo, i determinanti della divisione $\Delta(b)$, $\Delta'(b)$, pur non essendo identicamente nulli, possono annullarsi per speciali numeri del sistema, e certamente si annullano per $b=0$. È importante notare che un numero b, che annulla uno dei determinanti, annulla anche l'altro. Se è $b=0$, il teorema è evidente, sia dunque b un numero diverso da zero e sia $\Delta(b)=0$.

Esisteranno infiniti numeri x diversi da zero tali che sia

$$xb = 0, \tag{1}$$

giacchè il sistema (3) nelle coordinate di x è un sistema lineare omogeneo col determinante uguale a zero.

Se fosse $\Delta'(b) \neq 0$, si potrebbe trovare un numero y che soddisfi l'equazione

$$yb = 1.$$

Moltiplicando a sinistra per x si avrebbe in virtù di (1),

$$0 = x$$

che è assurdo. Dunque è anche $\Delta'(b) = 0$.

DEFINIZIONE XIV. — Un numero appartenente ad un corpo associativo che rende nullo uno, e quindi l'altro, dei determinanti della divisione si chiama *un divisore dello zero* (WEIERSTRASS).

Un corpo associativo ammette per lo meno un divisore dello zero, cioè lo stesso zero.

14. Corpi hankeliani.

DEFINIZIONE XV. — Un corpo associativo che non ammette divisori dello zero, oltre lo zero, lo diremo un corpo *hankeliano*.

Il corpo dei numeri reali e il corpo dei numeri complessi ordinari sono corpi hankeliani.

Pei corpi hankeliani vale il seguente teorema generale, assai importante.

TEOREMA. — *Il rango di un corpo hankeliano d'ordine* n *è al massimo uguale a 2; in altri termini, un numero* x, *che non sia reale, appartenente ad un corpo hankeliano d'ordine* n, *verifica una equazione di 2° grado a coefficienti reali.*

Si ha che ogni numero x diverso da zero è radice di una certa equazione di grado m, a coefficienti reali (n. 11, teor.):

$$\varphi_0 x^{m+1} + \varphi_1 x^m + \ldots + \varphi_m x = 0 .$$

E poichè x è diverso da zero e appartiene ad un corpo hankeliano, sarà anche

$$\varphi_0 x^m + \varphi_1 x^{m-1} + \ldots + \varphi_m = 0. \tag{1}$$

Si consideri il polinomio di variabile reale ξ

$$F(\xi) = \varphi_0 \xi^m + \varphi_1 \xi^{m-1} + \ldots + \varphi_m . \tag{2}$$

Si sa dal teorema fondamentale dell'algebra, che esso è uguale a un prodotto di fattori reali del primo o del secondo grado:

$$F(\xi) = \prod_{r=1}^{r=k} (\xi - \alpha_r)^{\mu_r} . \prod_{s=1}^{s=l} [(\xi - \beta_s)^2 + \gamma_s^2]^{\nu_s}, \qquad (\sum_{r=1}^{k} \mu_r + \sum_{s=1}^{l} \nu_s = m) \tag{3}$$

dove le γ sono numeri reali *diversi da zero.*

Possiamo sostituire, tanto nel primo che nel secondo membro, x a ξ, perchè infatti il primo membro diventa il polinomio

$$\varphi_0 x^m + \varphi_1 x^{m-1} + \ldots + \varphi_m$$

e il secondo membro, quando si pensi che le potenze di x si moltiplicano con la medesima regola che le potenze del numero reale ξ [n. 11, (1)], e la moltiplicazione di un numero complesso per numeri reali è commutativa e associativa, risulterà identico al detto polinomio. Ma d'altra parte esso è nullo per la (1), quindi si avrà anche

$$\prod_{r=1}^{r=k} (x - \alpha_r)^{\mu_r} . \prod_{r=1}^{r=l} [(x - \beta_s)^2 + \gamma_s^2]^{\nu_s} = 0 .$$

Ma in un corpo hankeliano un prodotto non può esser nullo, se non è nullo uno dei fattori, dunque x, se non è reale, deve annullare uno dei fattori del secondo grado:

$$(x - \beta)^2 + \gamma^2 = 0 , \qquad (\gamma \neq 0) \tag{4}$$

Così il teorema resta dimostrato.

Se ne deduce il

COROLLARIO. — *In un corpo hankeliano le unità (diverse dall'unità reale) possono essere scelte in maniera che i loro quadrati siano uguali a* -1.

Si ponga

$$\frac{1}{\gamma} = \sigma , \qquad -\frac{\beta}{\gamma} = \tau ,$$

la (4) diviene

$$(\sigma x + \tau)^2 = -1 , \qquad (\sigma \neq 0) \tag{5}$$

Dovendo ogni numero x non reale del sistema verificare una equazione di questa forma, per ogni unità e_r si avrà una equazione della forma

$$(\sigma_r e_r + \tau_r)^2 = -1\,, \qquad (\sigma^r \neq 0)\ (r = 1, \ldots, n-1) \tag{6}$$

Ponendo dunque

$$u_r = \sigma_r e_r + \tau_r\,, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{7}$$

e notando che, essendo le σ_r diverse da zero, il determinante della trasformazione è diverso da zero, potremo prendere come nuove unità le u_r, che per la (6) godono della proprietà

$$u_r^2 = -1\,, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{8}$$

15. Caso $n = 2$. Per $n = 2$, posto $u_1 = i$, si ha $i^2 = 1$, e si ottiene il corpo dei numeri complessi ordinari. Esso, com'è noto, possiede una moltiplicazione, oltre che associativa, anche commutativa, e tranne lo zero non possiede altri divisori dello zero.

Dunque:

Teorema. — *Oltre il corpo dei numeri complessi ordinari non v'è altro corpo hankeliano a due unità.*

16. Caso $n > 2$.

Posto

$$x = u_r + u_s\,, \qquad (r \neq s)$$

non può la somma $u_r + u_s$ essere reale, altrimenti le unità sarebbero dipendenti linearmente. Epperò $u_r + u_s$ soddisferà una equazione del tipo (4):

$$(v_r + u_s)^2 - 2\beta\,(u_r + u_s) + \beta^2 + \gamma^2 = 0, \tag{9}$$

e analogamente

$$(u_r - u_s)^2 - 2\beta'\,(u_r - u_s) + \beta'^2 + \gamma'^2 = 0\,. \tag{10}$$

Ora si ha per (8):

$$\begin{aligned}(u_r + u_s)^2 &= -2 + (u_r u_s + u_s u_r)\\ (u_r - u_s)^2 &= -2 - (u_r u_s + u_s u_r)\,.\end{aligned} \tag{11}$$

Addizionando e tenendo presente (9) e (10), si ha

$$2\,(\beta + \beta')\,u_r + 2\,(\beta - \beta')\,u_s = \beta^2 + \beta'^2 + \gamma^2 + \gamma'^2 = 4\,.$$

Ora questa relazione non può sussistere, per l'indipendenza lineare delle unità, se non quando sia

$$\beta + \beta' = 0, \qquad \beta - \beta' = 0\,, \qquad \beta^2 + \beta'^2 + \gamma^2 + \gamma'^2 - 4 = 0,$$

cioè

$$\beta = \beta' = 0\,, \qquad \gamma^2 + \gamma'^2 = 4\,.$$

Non potendo nè γ, nè γ' essere nulli, sarà

$$0 < \gamma^2 < 4\,, \qquad 0 < \gamma'^2 < 4\,. \tag{12}$$

Intanto la (9) diventa

$$(u_r + u_s)^2 + \gamma^2 = 0$$

e quindi la 1ª delle (11) fornisce

$$u_r u_s + u_s u_r = 2 - \gamma^2\,.$$

Per la 1ª delle (12), $2-\gamma^2$ è in valore assoluto minore di 2, quindi si può porre:

$$u_r u_s + u_s u_r = \gamma_{rs} \qquad (r \neq s\,,\ r, s = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{13}$$

con

$$\gamma_{rs}^2 < 4\,. \tag{14}$$

Ed ora poniamo

$$v_1 = u_1\,, \qquad v_r = \alpha_r u_1 + \beta_r u_r\,, \qquad (r = 2, 3, \ldots, n-1)$$

dove i $2n-4$ coefficienti α_r, β_r restano ancora a determinarsi.

Per assumere le v come nuove unità occorre eseguire questa determinazione in modo che le β risultino diverse da zero.

Intanto si ha per la (8):

$$v_r^2 = (\alpha_r u_1 + \beta_r u_r)^2 = -(\alpha_r^2 + \beta_r^2) + \alpha_r \beta_r (u_1 u_r + u_r u_1),$$

e per la (13)

$$v_r^2 = -(\alpha_r^2 + \beta_r^2) + \alpha_r \beta_r \gamma_{1r}\,.$$

Poi in virtù della stessa (13)

$$v_1 v_r + v_r v_1 = -2\alpha_r + \beta_r \gamma_{1r}\,.$$

È possibile determinare α_r e β_r in modo che sia

$$\left.\begin{array}{r} v_r^2 = -1 \\ v_1 v_r + v_r v_1 = 0 \end{array}\right\}. \tag{15}$$

Infatti, se $\gamma_{1r} = 0$, si soddisfa a queste condizioni prendendo

$$\alpha_r = 0\,, \qquad \beta_r = \pm 1,$$

col che risulterà $v_r = \pm u_r$; se invece è $\gamma_{1r} \neq 0$, si ottengono per la determinazione di α_r e β_r le due equazioni

$$-1 = -(\alpha_r^2 + \beta_r^2) + \alpha_r \beta_r \gamma_{1r}\,,$$
$$0 = -2\alpha_r + \beta_r \gamma_{1r}\,.$$

La seconda dà

$$\beta_r = \frac{2\alpha_r}{\gamma_{1r}}$$

per il che la 1ª diviene

$$\alpha_r^2 \left(1 - \frac{4}{\gamma_{1r}^2}\right) = -1\,.$$

Ora essendo $\gamma_{1r}^2 < 4$, quest'ultima fornisce due valori *reali* diversi da zero per α_r, ai quali corrisponderanno valori *reali diversi da zero* per β_r. Possono dunque scegliersi nel supposto corpo hankeliano come unità i numeri $v_1, v_2, \ldots v_{n-1}$, colle proprietà (15).

Intanto essendo

$$v_1 v_r = -v_r v_1\,,$$

si giunge alla conclusione notevolissima, segnalata da Hankel:

Teorema. — *Un corpo hankeliano a più di due unità non può possedere una moltiplicazione commutativa.*

In altri termini:

Se un corpo associativo a più di due unità ammette una moltiplicazione commutativa possiede divisori dello zero (oltre lo zero).

17. Caso $n=3$.

Sia $n=3$, e si ponga

$$v_1v_2=\xi_0+\xi_1v_1+\xi_2v_2$$

con le definizioni

$$v_1^2=-1\,,\qquad v_2^2=-1\,,\qquad v_1v_2=-v_2v_1\,.$$

Si ha

$$\begin{aligned}(v_1v_2)\,v_2=(\xi_0+\xi_1v_1+\xi_2v_2)\,v_2&=\xi_0v_2+\xi_1(\xi_0+\xi_1v_1+\xi_2v_2)-\xi_2=\\&=(\xi_1\xi_0-\xi_2)+\xi_1^2v_1+(\xi_0+\xi_1\xi_2)\,v_2\,.\end{aligned}$$

Ma per la legge associativa

$$(v_1v_2)\,v_2=v_1(v_2v_2)=-v_1$$

e però le ξ devono verificare le seguenti condizioni

$$\xi_1\xi_2-\xi_2=0\,,\qquad \xi_1^2=-1\,,\qquad \xi_0+\xi_1\xi_2=0\,.$$

Ma la seconda è inammissibile perchè ξ_1 dev'essere reale, dunque:

Teorema. — *Non esistono corpi hankeliani con 3 unità.*

18. Caso $n>3$.

Sia $n>3$. Fra le unità $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ intercedono le relazioni

$$v_r^2=-1\qquad (r=1,2,\ldots,n-1)\tag{1}$$

$$v_1v_r=-v_rv_1\qquad (r=2,3,\ldots,n-1)\tag{2}$$

$$v_rv_s+v_sv_r=\gamma_{rs}\qquad (r\neq s\,;\ r,s=2,3,\ldots,n-1)\tag{3}$$

dove è

$$\gamma_{rs}^2<4.\tag{4}$$

Poniamo

$$i_1=v_1\,,\qquad i_2=v_2\,,\qquad i_r=\alpha_rv_2+\beta_rv_r\qquad (r=3,\ldots,n-1).$$

Restano ancora a determinarsi le α_r e β_r, e poichè le $i_1, i_2, \ldots i_{n-1}$ devono prendersi come nuove unità, questa determinazione deve farsi in guisa che le β_r risultino diverse da zero.

Si noti dapprima che accanto alla relazione

$$i_1i_2+i_2i_1=v_1v_2+v_2v_1=0\tag{5}$$

si ha per $r>2$,

$$\begin{aligned}i_1i_r+i_ri_1&=v_1(\alpha_rv_2+\beta_rv_r)+(\alpha_rv_2+\beta_rv_r)\,v_1=\\&=\alpha_r(v_1v_2+v_2v_1)+\beta_r(v_1v_r+v_rv_1),\end{aligned}$$

e quindi per le (2)

$$i_1i_r+i_ri_1=0\qquad (r=3,4,\ldots,n-1).\tag{6}$$

Ora intanto si ha, per $r>2$,

$$i_r^2=(\alpha_rv_2+\beta_rv_r)^2=-(\alpha_r^2+\beta_r^2)+\alpha_r\beta_r\gamma_{2r}$$

$$i_2i_r+i_ri_2=v_2(\alpha_rv_2+\beta_rv_r)+(\alpha_rv_2+\beta_rv_2)\,v_r=-2\alpha_r+\beta_r\gamma_{2,r}\,,$$

e ragionando in modo analogo che al n. 14, possono determinarsi valori reali di α_r e valori reali diversi da zero di β_r in maniera che siano soddisfatte le relazioni

$$i_r^2=-1,\qquad i_2i_r+i_ri_2=0.$$

Intanto per $r > 2$ si ha

$$(i_1 i_2 i_r)^2 = (i_1 i_2 i_r)(i_1 i_2 i_r) = (i_1 i_2)(i_r i_1)(i_2 i_r) = (i_1 i_2)(i_1 i_r)(i_r i_2) =$$
$$= (i_1 i_2 i_1)(i_r i_r) i_2 = -(i_1 i_2 i_1) i_2 = -(i_1 i_2)(i_1 i_2) = (i_2 i_1)(i_1 i_2) =$$
$$= i_2 (i_1 i_1) i_2 = -(i_2 i_2) = 1.$$

Ne segue

$$(i_1 i_2 i_r - 1)(i_1 i_2 i_r + 1) = 0,$$

e quindi, in virtù dell'ipotesi che il corpo è hankeliano,

$$i_1 i_2 i_r = \pm 1.$$

Moltiplicando ambo i membri per i_r, si ha

$$i_1 i_2 = \pm i_r. \tag{7}$$

Di quà segue, per $n > 4$,

$$i_3 = \pm i_4 = \pm i_5 = \ldots = \pm i_{n-1},$$

e questo risultato è assurdo perchè le unità non possono essere linearmente dipendenti, dunque

Teorema. — *Non esistono corpi hankeliani con più di quattro unità.*

Resta ora a studiare il caso $n = 4$.

19. Caso $n = 4$. I Quaternioni di Hamilton.

Per $n = 4$, la formola (7) dà

$$i_1 i_2 = \varepsilon i_3 \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Da questa si ricava facilmente

$$i_2 i_3 = \varepsilon i_1, \qquad i_3 i_1 = \varepsilon i_2.$$

Si può supporre $\varepsilon = 1$, perchè se è $\varepsilon = -1$, basterà prendere come nuove unità

$$j_1 = -i_1, \qquad j_2 = -i_2, \qquad j_3 = -i_3,$$

e si otterrà

$$j_1 j_2 = j_3.$$

Dunque un corpo hankeliano con quattro unità non può essere altro che il sistema con le unità, 1, i_1, i_2, i_3 sottoposte alle condizioni

$$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1, \qquad i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3, \qquad i_2 i_3 = -i_3 i_2 = i_1,$$
$$i_3 i_1 = -i_1 i_3 = i_2.$$

Se questo sistema sia effettivamente un corpo hankeliano resta ancora a dimostrarsi.

1°. *La moltiplicazione è associativa.* Basterà dimostrare che è associativo il prodotto delle unità.

Si ha infatti dapprima

$$(i_r i_r) i_r = -i_r, \qquad \text{e} \qquad i_r (i_r i_r) = -i_r$$

poi osservando che, se r, s, t sono diversi tra di loro:

$$i_r i_s = \varepsilon i_t, \qquad i_s i_t = \varepsilon i_r, \qquad i_t i_r = \varepsilon i_s, \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

si ha

$$(i_r i_s)\, i_s = \varepsilon i_t i_s = \varepsilon(-\varepsilon i_s i_t) = = i_r, \qquad \text{ed} \qquad i_r(i_s i_s) = - i_r;$$
$$(i_s i_r)\, i_s - - \varepsilon i_t i_s = i_r, \qquad \text{ed} \qquad i_s(i_r i_s) = \varepsilon i_s i_t = i_r;$$
$$(i_s i_s)\, i_r = - i_r, \qquad \text{ed} \qquad i_s(i_s i_r) = - \varepsilon i_s i_t = - i_r;$$
$$(i_r i_s)\, i_t = \varepsilon i_t i_t = - \varepsilon. \qquad i_r(i_s i_t) = \varepsilon i_r i_r = = \varepsilon.$$

Dunque il sistema ammette una moltiplicazione.

2°. *Il sistema non possiede divisori dello zero, oltre zero, cioè un prodotto è nullo allora solo che lo sia almeno uno dei fattori.*

Sia infatti

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3$$

un numero del sistema diverso da zero.

Si indichi con Ka il *coniugato* di a, cioè il numero che si ottiene da a cambiando il segno ai coefficienti delle unità i_1, i_2, i_3, cioè

$$\mathrm{K}a = \alpha_0 - \alpha_1 i_1 - \alpha_2 i_2 - \alpha_3 i_3.$$

Il prodotto di un numero a per il suo coniugato Ka è un numero reale positivo, che si chiama la *norma* di a:

$$\mathrm{N}a = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2.$$

Sia ora

$$ab = 0,$$

moltiplicando per Kb si ha

$$ab\,\mathrm{K}b = 0,$$

donde

$$a\,\mathrm{N}b = 0.$$

Ma poichè Nb è reale, o è $a = 0$, ovvero N$b = 0$, cioè $b = 0$.

Il sistema non ammette dunque divisori dello zero oltre lo zero, e però ammette anche la divisione bilaterale.

Se a è un numero diverso da zero, l'inverso di a, a^{-1}, è il numero $\frac{\mathrm{K}a}{\mathrm{N}a}$, infatti

$$a\frac{\mathrm{K}a}{\mathrm{N}a} = \frac{\mathrm{N}a}{\mathrm{N}a} = 1.$$

Ciò posto, il quoziente della divisione anteriore di a per b, cioè il numero x che verifica l'equazione

$$xb = a,$$

è evidentemente

$$x = \frac{a\,.\,\mathrm{K}b}{\mathrm{N}b},$$

e il quoziente della divisione posteriore di a per b, cioè il numero y che soddisfa all'equazione

$$by = a,$$

è evidentemente

$$y = \frac{\mathrm{K}b\,.\,a}{\mathrm{N}b}.$$

Il sistema così ottenuto è il sistema dei *Quaternioni* di HAMILTON, che costituisce il più importante sistema di numeri complessi dopo il sistema dei numeri complessi ordinari. Esso è un corpo hankeliano.

Tenendo presente i risultati ai num. 15, 17, 18 possiamo concludere col

TEOREMA DI FROBENIUS. — *Il corpo dei numeri reali, il corpo dei numeri complessi ordinari, e quello dei quaternioni di* HAMILTON *sono gli unici corpi hankeliani.*

MICHELE CIPOLLA.

EQUAZIONI A RADICI IN PROGRESSIONE GEOMETRICA

1. Consideriamo l'equazione generale di grado n

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0, \tag{1}$$

e supponiamo che abbia per radici

$$x_i = r\rho^{i-1} \qquad (i = 1, 2, \dots n) \tag{2}$$

allora si ha subito per il coefficiente a_k della (1)

$$(-1)^k a_k = r^k \Sigma \rho^{i_1+i_2+\dots+i_k},$$

dove $i_1 i_2 \dots i_k$ è una qualunque delle $\binom{n}{k}$ combinazioni semplici degli esponenti $0, 1, 2, \dots n-1$, alle quali si estende il sommatorio; posto $c_k = i_1 + i_2 + \dots + i_k$, possiamo scrivere l'espressione del coefficiente generale della (1)

$$(-1)^k a_k = r^k \Sigma \rho^{c_k}. \tag{3}$$

2. Consideriamo alcune di queste espressioni tra le più semplici, onde eliminare la r e procurarci una equazione in ρ da cui poter dedurre la ragione della progressione e conseguentemente la r.

Anzitutto

$$-a_1 = r\frac{1-\rho^n}{1-\rho}; \quad (4) \qquad\qquad a_2 = r^2 \Sigma \rho^{c_2}. \quad (5)$$

Inoltre

$$(-1)^{n-2} a_{n-2} = r^{n-2} \Sigma \rho^{c_{n-2}} = r^{n-2} \rho^{\frac{n(n-1)}{2}} \Sigma \left(\frac{1}{\rho}\right)^{c_2}.$$

Ora si ha identicamente

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} + \dots + \frac{1}{\rho^{n-1}}\right)^2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^{2.2}} + \dots + \frac{1}{\rho^{2(n-1)}} + 2\Sigma \left(\frac{1}{\rho}\right)^{c_2},$$

dunque

$$2\Sigma\left(\frac{1}{\rho}\right)^{c_2}=\left(\frac{\frac{1}{1}-\frac{1}{\rho^n}}{\frac{1}{1}-\frac{1}{\rho}}\right)^2-\frac{\frac{1}{1}-\frac{1}{\rho^{2n}}}{\frac{1}{1}-\frac{1}{\rho^2}}=\rho^{2(1-n)}\left(\frac{1-\rho^n}{1-\rho}-\frac{1+\rho^n}{1+\rho}\right)\frac{1-\rho^n}{1-\rho}=$$

$$=2\rho^{2(1-n)}\frac{\rho}{1+\rho}\,\frac{1-\rho^n}{1-\rho}\,\frac{1-\rho^{n-1}}{1-\rho}=2\rho^{2(1-n)}\frac{\rho}{1+\rho}\,\frac{1-\rho^n}{1-\rho}\left(\frac{1-\rho^n}{1-\rho}-\rho^{n-1}\right);$$

sostituendo in a_{n-2}, si ha

$$(-1)^{n-2}a_{n-2}=r^{n-2}\rho^{\frac{(n-1)(n-4)}{2}}\frac{\rho}{1+\rho}\cdot\frac{1-\rho^n}{1-\rho}\left(\frac{1-\rho^n}{1-\rho}-\rho^{n-1}\right)$$

e, tenendo conto della (4)

$$(-1)^{n-2}a_{n-2}=r^{n-3}\rho^{\frac{(n-1)(n-4)}{2}}\frac{\rho}{1+\rho}\left(\frac{a_1}{r}+\rho^{n-1}\right)a_1;$$

infine

$$(-1)^{n-2}a_{n-2}=r^{n-4}\rho^{\frac{(n-1)(n-4)}{2}}a_1^2\frac{\rho}{1+\rho}+r^{n-3}\rho^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_1\frac{\rho}{1+\rho}. \quad (6)$$

Consideriamo ancora altre espressioni fra le (3)

$$(-1)^{n-1}a_{n-1}=r^{n-1}\Sigma\rho^{c_{n-1}}=r^{n-1}\rho^{\frac{n(n-1)}{2}}\Sigma\left(\frac{1}{\rho}\right)^{c_1}=r^{n-1}\rho^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1-\rho^n}{1-\rho}\rho^{1-n},$$

e, tenendo conto della (4)

$$(-1)^{n-2}a_{n-1}=r^{n-2}\rho^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_1. \quad (7)$$

Finalmente l'espressione di a_n è data da

$$(-1)^n a_n=r^n\rho^{\frac{n(n-1)}{2}}. \quad (8)$$

Troviamo ora una relazione fra a_{n-2}, a_n ed a_2, che ci sarà utile per qualche semplificazione che faremo in seguito. Quadrando la (4) scritta così

$$-a_1=r(1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^{n-1}), \quad (8)'$$

si ha

$$a_1^2=r^2(1+\rho^2+\rho^4+\ldots+\rho^{2(n-1)}+2\Sigma\rho^{c_2}),$$

quindi, per la (5)

$$a_1^2=r^2\frac{1-\rho^{2n}}{1-\rho^2}+2a_2, \qquad \text{epperò} \qquad \frac{1-\rho^{2n}}{1-\rho^2}=\frac{a_1^2-2a_2}{r^2};$$

ora abbiam trovato

$$2\Sigma\left(\frac{1}{\rho}\right)^{c_2}=\rho^{2(1-n)}\left\{\left(\frac{1-\rho^n}{1-\rho}\right)^2-\frac{1-\rho^{2n}}{1-\rho^2}\right\};$$

dunque

$$2\Sigma\left(\frac{1}{\rho}\right)^{c_2}=\rho^{2(1-n)}\left\{\left(\frac{1-\rho^n}{1-\rho}\right)^2-\frac{a_1^2-2a_2}{r^2}\right\}=$$

$$=\rho^{2(1-n)}\left(\frac{a_1^2}{r^2}-\frac{a_1^2-2a_2}{r^2}\right)=2\rho^{2(1-n)}\frac{a_2}{r^2};$$

sostituendo in a_{n-2} e tenendo conto della (8), risulta la relazione cercata

$$a_{n-2} = a_n^{\frac{n-4}{n}}\, a_2 . \tag{9}$$

Ed ora eliminiamo la r fra le (4) e (5) col quadrare la (4) scritta come in (8)'; allora si ottiene

$$a_2\, \rho^{n+1} - (a_1^2 - a_2)\, \rho^n + (a_1^2 - a_2)\, \rho - a_2 = 0 . \tag{10}$$

Per mezzo di questa noi possiamo procurarci una equazione di 3° grado in ρ da cui faremo dipendere la risoluzione della (1).

La (6), tenuto conto della (8) si può scrivere

$$a_{n-2} + \left(a_{n-2} - a_1^2\, a_n^{\frac{n-4}{n}}\right)\rho + a_1\, a_n^{\frac{n-2}{n}}\, \rho^{\frac{n+1}{2}} = 0 ,$$

oppure, per la (9)

$$a_2 + (a_2 - a_1^2)\, \rho + a_1\, a_n^{\frac{1}{n}}\, \rho^{\frac{n+1}{2}} = 0 .$$

Elevando a quadrato risulta l'equazione in ρ

$$a_1^2\, a^{\frac{2}{n}}\, \rho^{n+1} - (a_1^2 - a_2)^2 \rho^2 + 2\, a_2\, (a_1^2 - a_2)\, \rho - a_2^2 = 0 . \tag{11}$$

Eliminando fra questa e la (10) ρ^{n+1} e indi ρ^{n-1} fra l'equazione risultante e la (11) si ottiene l'equazione del 3° grado in ρ

$$\rho^3 + \frac{a_1^2\, a_n^{\frac{2}{n}} - 2\, a_2^2 - (a_1^2 - a_2)^2}{a_2}\, \rho^2 + \\ + \frac{a_2^2 - a_1^2\, a_n^{\frac{2}{n}} + 2(a_1^2 - a_2)^2}{a_1^2 - a_2}\, \rho - 1 = 0 \tag{12}$$

da cui dipende la risoluzione della (1) perchè, trovato ρ, r si deduce immediatamente dalla (8) e quindi si deducono tutte le radici della (1).

Poniamo

$$\frac{a_1^2\, a_n^{\frac{2}{n}} - 2a_2^2 - (a_1^2 - a_2)^2}{a_2} = \mathrm{A} , \qquad \frac{a_2^2 - a_1^2\, a_n^{\frac{2}{n}} + 2(a_1^2 - a_2)^2}{a_1^2 - a_2} = \mathrm{B}$$

allora risolvendo la (12) si ottiene

$$\rho = -\frac{\mathrm{A}}{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{27+9\mathrm{AB}-2\mathrm{A}^3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{12(3\mathrm{B}-\mathrm{A}^2)(9\mathrm{A}+\mathrm{A}^2\mathrm{B}+\mathrm{B})+9(9+\mathrm{AB})^2}} + \\ + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{27+9\mathrm{AB}-2\mathrm{A}^3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{12(3\mathrm{B}-\mathrm{A}^2)(9\mathrm{A}+\mathrm{A}^2\mathrm{B}+\mathrm{B})+9(9+\mathrm{AB})^2}} . \tag{13}$$

Noi intanto abbiam dimostrato che:

La risoluzione di un'equazione di grado n *che ammette le radici in progressione geometrica, si riduce alla risoluzione di un'equazione di 3° grado.* (1)

(1) Per n pari ed $\frac{1}{2}n \leqslant 3$, cioè $n \leqslant 6$, invece che la (12) convien risolvere la (10) che, essendo reciproca, si riduce appunto ad un'equazione di grado $\frac{1}{2}n$; per n dispari ed $\frac{1}{2}(n-1) \leqslant 3$, cioè $n \leqslant 7$ convien pure risolvere la (10).

La (13), unita alla $r = \frac{-a_n^{\frac{1}{n}}}{\rho^{\frac{n-1}{2}}}$ costituisce il sistema risolutivo della (1).

3. È ora indispensabile procurarci un criterio mediante il quale si possa, data un'equazione, decidere se abbia, o pur no, le radici in progressione geometrica.

A tal uopo cominciamo ad esaminare alcune proprietà della trasformata della (1) colla sostituizione

$$y = x\sqrt[n]{(-1)^n a_n}. \tag{14}$$

Questa trasformata è

$$\varphi(y) = (-1)^n a_n y^n + (-1)^{n-1} a_1 a_n^{\frac{n-1}{n}} y^{n-1} + \ldots - a_{n-1} a_n^{\frac{1}{n}} y + a_n = 0,$$

e le sue radici sono nient'altro che le radici della (1) divise per

$$\sqrt[n]{(-1)^n a_n},$$

cioè sono

$$\frac{r}{\sqrt[n]{(-1)^n a_n}}, \quad \frac{r\rho}{\sqrt[n]{(-1)^n a_n}}, \ldots \frac{r\rho^{n-2}}{\sqrt[n]{(-1)^n a_n}}, \quad \frac{r\rho^{n-1}}{\sqrt[n]{(-1)^n a_n}};$$

ma

$$(-1)^n a_n = r^n \rho^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

dunque due radici qualsiasi equidistanti dalle estreme sono

$$\frac{r\rho^k}{r\rho^{\frac{n-1}{2}}}, \quad \frac{r\rho^{n-k-1}}{r\rho^{\frac{n-1}{2}}}, \qquad \text{cioè} \qquad \rho^{\frac{2k-n+1}{2}}, \quad \frac{1}{\rho^{\frac{2k-n+1}{2}}};$$

sono dunque reciproche; per n dispari si ha poi la radice media che è, in conseguenza, uguale ad *uno*. Possiamo concludere da ciò che:

Se l'equazione (1) *ha le radici in progressione geometrica di ragione* ρ, *la sua trasformata colla sostituzione* (14) *è equazione a radici reciproche e queste radici sono le potenze*

$$\rho^{\frac{1-n}{2}}, \ \rho^{\frac{3-n}{2}}, \ldots \rho^{\frac{n-3}{2}}, \ \rho^{\frac{n-1}{2}}$$

della ragione della progressione, le quali formano pure una progressione geometrica di ragione ρ.

Reciprocamente:

Se la trasformata $\varphi(y) = 0$ *della* (1) *colla sostituzione* (14) *ha per radici le potenze*

$$\rho^{\frac{1-n}{2}}, \ \rho^{\frac{3-n}{2}}, \ldots \rho^{\frac{n-3}{2}}, \ \rho^{\frac{n-1}{2}}$$

l'equazione primitiva ha le radici in progressione geometrica di ragione ρ.

Perchè infatti le radici della (1) sono

$$\sqrt[n]{(-1)^n a_n}\,\rho^{\frac{1-n}{2}}, \ \sqrt[n]{(-1)^n a_n}\,\rho^{\frac{3-n}{2}}, \ldots \sqrt[n]{(-1)^n a_n}\,\rho^{\frac{n-3}{2}}, \ \sqrt[n]{(-1)^n a_n}\,\rho^{\frac{n-1}{2}}.$$

4. Da questi due teoremi segue che basta cercare le condizioni necessarie e sufficienti cui devono soddisfare i coefficienti a della (1) perchè la sua trasformata colla sostituzione (14) ammetta le radici della forma

$$x^{n-1},\ x^{n-3},\dots x^{3-n},\ x^{1-n}. \tag{15}$$

Anzitutto la $\varphi(y)=0$ deve essere equazione a radici reciproche, quindi i coefficienti equidistanti dagli estremi devono essere uguali in valore assoluto; ma questa condizione che è necessaria, non è sufficiente per concludere che l'equazione primitiva $f(x)=0$ ha le radici in progressione geometrica.

Qui conviene osservare che la equazione $\varphi(y)=0$ ha le radici della forma (15) se, e soltanto, se sono soddisfatte per uno stesso valore di x le n equazioni

$$\varphi(x^{n-1})=0,\ \varphi(x^{n-3})=0,\dots \varphi(x^{3-n})=0,\ \varphi(x^{1-n})=0$$

che scriveremo così

$$\varphi_1=0,\ \varphi_3=0,\dots \varphi_{2n-3}=0,\ \varphi_{2n-1}=0.$$

Supponiamo n pari $=2p$; allora queste equazioni si ripartiscono in due gruppi di p equazioni ciascuno

$$\left.\begin{array}{lll}\varphi_{2p-1}=0, & \varphi_{2p+3}=0, & \dots \varphi_{4p+1}=0\\ \varphi_1=0, & \varphi_3=0, & \dots \varphi_{1+2(p-1)}=0\end{array}\right\}.$$

Soddisfatte le prime p equazioni, le altre lo saranno se, e soltanto se i coefficienti della $\varphi(y)=0$ equidistanti dagli estremi sono uguali in valore assoluto; espresse dunque queste condizioni, non resta che a soddisfare alle prime p equazioni le quali, considerate due a due, richiedono come condizione necessaria e sufficiente per la loro compatibilità l'annullarsi dei risultanti R_{hk} dei sistemi di equazioni ottenuti considerando due a due le equazioni del primo gruppo. Per semplificare i calcoli si potrà tener conto della equazione (12) che è di 6° grado in $\rho^{\frac{1}{2}}$, e che potrà servire o ad abbassare di grado le equazioni $\varphi_i=0$ oppure a semplificare le eliminazioni accoppiandola ad ogni equazione $\varphi_i=0$ del primo gruppo e quindi costruendo le risultanti $R_{hk}=0$ di ogni coppia. Se n è dispari $=2p+1$, allora $2p$ delle equazioni $\varphi_i=0$ si ripartiscono come nel caso di n pari e l'altra che è la $\varphi(1)=0$ esprime già da per sè stessa una condizione esplicita cui devono soddisfare i coefficienti a della $f(x)=0$.

5. In conclusione, avuta un'equazione $f(x)=0$, per vedere se ha le radici in progressione geometrica si costruisca dapprima la trasformata colla sostituzione (14); se questa trasformata non ha i coefficienti equidistanti dagli estremi uguali in valore assoluto, si concluderà che la equazione proposta *non ha* le radici in progressione geometrica; se invece la trasformata ha i coefficienti equidistanti dagli estremi uguali in valore assoluto, si concluderà che l'equazione data *può avere* le radici in progressione geometrica; per accertarsene si vedrà se i cofficienti a della $f(x)=0$ soddisfano le condizioni $R_{hk}=0$.

Se la prova riesce favorevole, si applicheranno all'equazione data, le esposte formole risolutive.

Applicazione alle equazioni del 3° e 4° grado.

6. Cominciamo col cercare le condizioni perchè l'equazione generale del 3° grado $f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ abbia le radici in progressione geometrica.

La sua trasformata colla sostituzione $x=-y\sqrt[3]{a_3}$ è

$$\varphi(x)=-a_3x^3+a_1a_3^{\frac{2}{3}}y^2-a_2a_3^{\frac{1}{3}}y+a_3=0,$$

che deve ammettere anzitutto la radice $y=1$, dunque

$$a_1a_3^{\frac{2}{3}}=a_2a_3^{\frac{1}{3}}, \qquad \text{cioè} \qquad a_3=\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3;$$

se si considerano poi le altre equazioni

$$\varphi(y)=0, \qquad \varphi\left(\frac{1}{y}\right)=0$$

e fra esse si elimina la y si ritrova, come è naturale, la condizione

$$a_3=\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3.$$

Dunque:

Perchè l'equazione generale del 3° grado abbia le radici in progressione geometrica occorre e basta che il termine noto sia uguale al cubo del rapporto tra il coefficiente dell'incognita al 1° grado e quello dell'incognita al 2° grado.

Esempi. — L'equazione le cui radici sono 1, 2, 4, è

$$x^3-7x^2+14x-8=0;$$

si ha dunque

$$a_1=-7, \qquad a_2=14, \qquad a_3=-8$$

e la condizione cui nel teorema precedente è verificata.

L'equazione $x^3+2x^2+6x+27=0$ ha coefficienti che verificano la condizione cui nel teorema precedente, dunque deve avere le radici in progressione geometrica.

Per trovare la ragione ρ basta risolvere l'equazione (10) [che in questo caso è preferibile alla (12)], la quale è, nel nostro caso

$$6\rho^4+2\rho^2+2\rho-6=0;$$

liberandola dalle radici $\rho=\pm 1$, diventa $3\rho^2+\rho+3=0$, da cui

$$\rho=\frac{-1\pm i\sqrt{35}}{6};$$

la r si determina dalla relazione $3=-r\rho$, che dà

$$r=\frac{1\pm i\sqrt{35}}{2};$$

le tre radici dell'equazione in discorso son dunque

$$r=\frac{1\pm i\sqrt{35}}{2}, \qquad r\rho=-3, \qquad r\rho^2=\frac{1\mp i\sqrt{35}}{2}.$$

7. Passiamo ora all'equazione generale del 4° grado

$$f(x)=x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0;$$

la sua trasformata colla sostituzione $x=y\sqrt[4]{(-1)^4 a_4}$ è

$$\varphi(y)=a_4y^4-a_1a_4^{\frac{3}{4}}y^3+a_2a_4^{\frac{1}{2}}y^2-a_3a_4^{\frac{1}{4}}y+a_4=0$$

e questa deve ammettere le radici della forma

$$x^3, \qquad x, \qquad x^{-1}, \qquad x^{-3}.$$

Trovata la condizione affinchè ammetta le radici della forma x^3, x, le altre due le ammetterà se, e solamente, se

$$a_1a_4^{\frac{3}{4}}=a_3a_4^{\frac{1}{4}}, \qquad \text{cioè} \qquad a_3=a_1a_4^{\frac{1}{2}}, \qquad a_4=\left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2. \tag{16}$$

Per trovare l'altra condizione bisogna dunque eliminare la x fra le due equazioni

$$\begin{cases} x^{12}-a_1a_4^{-\frac{1}{4}}x^9+a_2a_4^{-\frac{1}{4}}x^6-a_3a_4^{-\frac{3}{4}}x^3+1=0 & (17)\\ x^4-a_1a_4^{-\frac{3}{4}}x^3+a_2a_4^{-\frac{1}{2}}x^2-a_3a_4^{-\frac{3}{4}}x+1=0. & (18)\end{cases}$$

Dividiamo la (17) per x^6 e la (18) per x^2 e poniamo

$$x+\frac{1}{x}=z,$$

con che

$$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2; \qquad x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z;$$
$$x^4+\frac{1}{x^4}=z^4-4z^2+2; \qquad x^6+\frac{1}{x^6}=z^6-6z^4+9z^2-2;$$

allora sostituendo col tener conto naturalmente della (16), risulta

$$z^6-6z^4-a_1a_4^{-\frac{1}{4}}z^3+9z^2+3\,a_1a_4^{-\frac{1}{2}}z+\left(a_1a_4^{-\frac{1}{2}}-2\right)=0 \tag{19}$$
$$z^2-a_1a_4^{-\frac{1}{4}}z+\left(a_2a_4^{-\frac{1}{2}}-2\right)=0. \tag{20}$$

Prima di formare la risultante fra queste due equazioni, possiamo abbassare di grado la (19) per mezzo dell'equazione (10) che, come abbiam detto in nota, è preferibile, nel caso che ci occupa alla (12);

l'equazione (10) si scrive colle attuali posizioni (liberandola dapprima della radice $\rho = 1$, e indi ponendo $\frac{2a_2 - a_1^2}{a_2} = b$):

$$z^4 + (b-4)z^2 + (2-b) = 0\,;$$

sottraendo da questa, moltiplicata per z^2, la (19) risulta

$$(b+2)z^4\, a_1a_4^{-\frac{1}{4}} z^3 - (b+7)z^2 - 3\,a_1a_4^{-\frac{1}{4}} z + \left(2 - a_2a_4^{-\frac{1}{2}}\right) = 0\,;$$

sottraendo ora da questa la (20) moltiplicata per $z^2(b+2)$ risulta

$$a_1a_4^{-\frac{1}{4}}(3+b)z^3 + \left\{b\left(1 - a_2a_4^{-\frac{1}{2}}\right) - 3 - 2\,a_2a_4^{-\frac{1}{2}}\right\} z^2 -$$
$$- 3\,a_1a_4^{-\frac{1}{4}} z + \left(2 - a_2a_4^{-\frac{1}{2}}\right) = 0\,.$$

Finalmente sottragghiamo da questa la (20) moltiplicata per

$$a_1a_4^{-\frac{1}{4}}(3+b)z\,;$$

risulta

$$\left\{b\left(1 - a_2a_4^{-\frac{1}{2}}\right) - 3 - 2\,a_2a_4^{-\frac{1}{2}} + a_1^2a_4^{-\frac{1}{2}}(3+b)\right\} z^2 +$$
$$+ a_1a_4^{-\frac{1}{4}}\left\{3\left(1 - a_2a_4^{-\frac{1}{2}}\right) + b\left(2 - a_3a_4^{-\frac{1}{2}}\right)\right\} z + \left(2 - a_2a_4^{-\frac{1}{2}}\right) = 0\,.$$

Ed ora otterremo la condizione cercata formando la risultante fra questa e la (20). Questa risultante è

$$\begin{vmatrix} 1 & -a_1a_4^{-\frac{1}{4}} & a_2a_4^{-\frac{1}{2}} - 2 & 0 \\ 0 & 1 & -a_1a_4^{-\frac{1}{4}} & a_2a_4^{-\frac{1}{2}} \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & 2 - a_2a_4^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{A} & \mathrm{B} & 2 - a_2a_4^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = 0 \qquad (21)$$

dove si è posto per brevità,

$$\mathrm{A} = \frac{6a_1^2a_3a_4^{-\frac{1}{2}} - a_2 - a_1^2 - 4a_3^2a_4^{-\frac{1}{2}} - a_1a_4^{-\frac{1}{2}}}{a_2}\,;$$

$$\mathrm{B} = a_1a_4^{-\frac{1}{4}}\,\frac{7a_2 - 5a_2^2a_4^{-\frac{1}{2}} - 2a_1^2 + a_1^2a_2a_4^{-\frac{1}{2}}}{a_2}\,.$$

La (21) insieme alla (16) costituiscono le condizioni necessarie e sufficienti affinchè l'equazione generale del 4° grado abbia le radici in progressione geometrica.

Finalmente credo utile notare che la relazione (16) nel caso generale si può dedurre, come la (9), dalle relazioni (3). Se infatti, si sostituisce nella (7) ad $r^{n-3}\rho^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ il valore $(-1)^{n-3}a^{\frac{n-2}{n}}$ ricavato dalla (8) si ottiene

$$a_n = \left(\frac{a_{n-1}}{a_1}\right)^{\frac{n}{n-2}}.$$

ROBERTO OCCHIPINTI.

CONTRIBUTO ALLA "GEOMETRIA RECENTE DEL TRIANGOLO SFERICO"

Nella presente nota mi propongo di far vedere come anche per il triangolo sferico esistano dei punti aventi proprietà analoghe ai punti notevoli della geometria del triangolo rettilineo, e come ad esso si possa estendere l'importante teorema di Stewart, nonchè la formula che permette di calcolare la distanza sferica di un punto notevole da un altro della medesima superficie, note che siano le distanze sferiche di questo dai tre vertici del triangolo. Per ciò ritengo opportuno prender le mosse invece che dal triangolo sferico dato, dal triedro che lo proietta dal centro della sfera.

1. Proponiamoci la questione seguente:

Condurre pel vertice V di un triedro $V.A_1A_2A_3$ *un raggio tale che i seni dei tre triedri risultanti siano ordinatamente proporzionali alle potenze* n*-esime dei seni delle facce.*

Supposto il problema risoluto, e detto VP il raggio in questione, si indichi in generale con ω_s il piano di VP e dello spigolo VA_s del triedro. Se con α_{13}, α_{23} indichiamo gli angoli che i raggi VA_1 e VA_2 formano con ω_3 dovremo avere, tenuta presente la definizione di seno di un triedro:

$$\text{sen}\,\alpha_{13} : \text{sen}\,\alpha_{23} = \text{sen}^n A_1\widehat{V}A_3 : \text{sen}^n A_2\widehat{V}A_3 . \tag{1}$$

Se i punti A_1, A_2, A_3 li supponiamo alla medesima distanza dal vertice del triedro, ciò che nulla toglie alla generalità, e se con P_{12} indichiamo il punto ove ω_3 è incontrato da A_1A_2, conducendo A_2R e A_1T rispettivamente da A_2 e A_1 perpendicolari ad ω_3, potremo scrivere la (1) sotto la forma:

$$A_1T : A_2R = \text{sen}^n A_1\widehat{V}A_3 : \text{sen}^n A_2\widehat{V}A_3 ,$$

da cui si passa facilmente all'altra:

$$A_1P_{12} : P_{12}A_2 = \text{sen}^n A_1\widehat{V}A_3 : \text{sen}^n A_2\widehat{V}A_3 . \tag{2}$$

Il piano ω_3 uscente da VA_3 è così individuato dalla condizione di dover passare per il punto P_{12}, la determinazione del quale è ricondotta al noto problema elementare di dividere un segmento in due parti che stiano fra loro in un rapporto dato. E se costruiamo tre piani ω_1, ω_2 e ω_3, basandoci sulla proporzione (2), questi, è subito visto, passeranno per la medesima retta.

Rimane così provata l'esistenza e insieme con essa l'unicità d'un raggio soddisfacente alla condizione proposta: questo raggio è tale che i seni degli angoli che esso fa con i piani delle facce sono proporzionali alle potenze $(n-1)$-esime dei seni delle facce stesse.

Definizione. — Al raggio che decompone il triedro in tre altri i cui seni stiano fra loro come le potenze n-esime dei seni delle facce, daremo il nome di *raggio di ordine n* e lo indicheremo con k_n.

Si noti inoltre che i triangoli A_1VP_{12} e A_2VP_{12} che costituiscono il triangolo isoscele A_1VA_2 dànno la proporzione:

$$A_1P_{12} : P_{12}A_2 = \text{sen } A_1\widehat{V}P_{12} : \text{sen } A_2\widehat{V}P_{12} \tag{3}$$

e che da questa e dalla (2) si ricava

$$\text{sen } A_1\widehat{V}P_{12} : \text{sen } A_2\widehat{V}P_{12} = \text{sen}^n A_1\widehat{V}A_3 : \text{sen}^n A_2\widehat{V}A_3. \tag{4}$$

Ne segue che ciascun piano che da uno spigolo proietta il raggio d'ordine n divide la faccia opposta in due angoli i cui seni stanno fra loro come le potenze ennesime dei seni delle faccie adiacenti.

Trasportando questi resultati al triangolo sferico potremo enunciare il seguente

Teorema. — *Gli archi di circolo massimo che uscendo dai vertici di un triangolo sferico dividono i lati opposti in parti tali che i loro seni sono proporzionali alle potenze* n*-esime dei seni dei lati adiacenti, passano per due punti* K_n *e* K'_n *di cui uno è sempre interno al dato triangolo, l'altro interno al suo opposto.* (1)

I seni delle distanze sferiche di ciascuno di essi dai lati sono proporzionali alle potenze (n—1)*-esime dei seni dei lati medesimi.*

Poichè vale per il triangolo sferico il teorema di Ceva col suo reciproco, (2) potremo chiamare questi archi di circolo massimo *ceviane sferiche di ordine n*. In particolare per n eguale a zero avremo le *mediane sferiche* il cui punto d'incontro è il *baricentro* K_0; per n eguale ad uno, le *bisettrici sferiche* il cui punto d'incontro è il *centro del circolo inscritto* K_1; per n eguale a due, le *simediane sferiche* il cui punto d'incontro è il *punto* K_2 *di Lemoine*.

2. Vogliamo in questo paragrafo calcolare il coseno dell'arco di circolo massimo AD che congiunge A col punto D del lato BC sapendo che:

$$\text{sen BD} : \text{sen DC} = m : n. \tag{5}$$

A questo scopo osserviamo che i triangoli ABD, ACD dànno, applicando il teorema d' Eulero:

$$\begin{cases} \cos c = \cos AD \,.\, \cos BD + \text{sen } AD \,.\, \text{sen } BD \,.\, \cos ADB \\ \cos b = \cos AD \,.\, \cos CD + \text{sen } AD \,.\, \text{sen } CD \,.\, \cos ADC. \end{cases}$$

---

(1) Di questi punti che sono diametralmente opposti noi non considereremo che il punto K_n a meno che non si avverta esplicitamente il contrario.

(2) Ne consegue l'esistenza tanto dei punti di Gergonne (uno interno e l'altro esterno al triangolo sferico dato) a cui corrisponde un unico raggio di Gergonne nel triedro, come quella dei punti di Nagel cui corrisponde il raggio di Nagel.

Da queste formule si ottiene facilmente, avuta presente la (5):

$$\frac{\cos c - \cos AD \cdot \cos BD}{\cos b - \cos AD \cdot \cos CD} = -\frac{m}{n}$$

ovvero

$$\cos AD \cdot (m \cos DC + n \cos BD) = m \cos b + n \cos c. \tag{6}$$

Posto ora:

$$\text{sen}\, BD + \text{sen}\, DC = S,$$

dalla (5) si ottengono le:

$$\text{sen}\, BD : S = m : m+n, \qquad S : \text{sen}\, DC = m+n : n$$

e indi

$$m = \frac{m+n}{S} \cdot \text{sen}\, BD, \qquad n = \frac{m+n}{S} \cdot \text{sen}\, DC.$$

Mettendo questi valori di m ed n nella (6) troviamo la formula:

$$(m+n)\, \text{sen}\, a \cdot \cos AD = S \cdot (m \cos b + n \cos c). \tag{7}$$

Rimangono ora a calcolarsi sen BD e sen DC. A questo scopo osserviamo che sussistendo fra BD e DC la relazione

$$BD + DC = a$$

e la (5), avremo in virtù di note formule:

$$\begin{cases} \text{sen}\, DC = \dfrac{n\, \text{sen}\, a}{\sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \cos a}} \\ \text{sen}\, BD = \dfrac{m\, \text{sen}\, a}{\sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \cos a}}, \end{cases}$$

dove al radicale va attribuito il segno positivo. Sostituendo questi valori nella (7) si ricava subito:

$$\cos AD = \frac{m \cos b + n \cos c}{\sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \cos a}} \tag{8}$$

che è la formula domandata. [1] Essa corrisponde al teorema di Stewart, come del resto è facile persuadersi facendo uso del procedimento indicato nel § 186 della Trigonometria del Ch.$^{\text{mo}}$ Prof. Pesci.

Se vi poniamo:

$$m = \text{sen}^p\, c, \qquad n = \text{sen}^p\, b$$

otteniamo:

$$\cos AD = \frac{\text{sen}^p\, b \cdot \cos c + \text{sen}^p\, c \cdot \cos b}{\sqrt{\text{sen}^{2p}\, b + \text{sen}^{2p}\, c + 2\, \text{sen}^p\, b \cdot \text{sen}^p\, c \cdot \cos a}} \tag{9}$$

formula che serve al calcolo delle ceviane sferiche dei diversi ordini.

3. Andiamo ora a trovare la formula che dà la distanza di un punto del triangolo sferico da un altro punto della superficie mede-

---

(1) A questa formula si poteva pervenire anche in altro modo usufruendo dei resultati ottenuti pel tetraedro. Vedasi il mio "Contributo alla Geometria recente del tetraedro „- *Periodico di Matematica*. Livorno. Vol. XIX, Fasc. V.

sima quando sian note le distanze di esso dai tre vertici. Cominciamo dal cercare innanzi tutto in qual rapporto ciascuna delle tre ceviane viene divisa dal punto che esse hanno in comune. Indichiamo perciò con A′, B′, C′ i punti ove i lati c, a, b vengono incontrati da tre ceviane che escono dai vertici opposti A, B, C rispettivamente ed aventi a comune il punto O.

Il teorema di Menelao (¹) applicato al triangolo BAB′ tagliato dalla trasversale COC′, dà

$$\operatorname{sen} BC' . \operatorname{sen} AC . \operatorname{sen} OB' = \operatorname{sen} AC' . \operatorname{sen} BO . \operatorname{sen} CB'$$

da cui si ricava

$$\frac{\operatorname{sen} BO}{\operatorname{sen} OB'} = \frac{\operatorname{sen} BC'}{\operatorname{sen} AC'} \cdot \frac{\operatorname{sen} AC}{\operatorname{sen} CB'} . \tag{10}$$

Ma se poniamo:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} AB' : \operatorname{sen} B'C = q : p \\ \operatorname{sen} BC' : \operatorname{sen} C'A = s : r \\ \operatorname{sen} CA' : \operatorname{sen} A'B = n : m , \end{cases} \tag{11}$$

poichè è:

$$\operatorname{sen} AC = \operatorname{sen} (AB' + B'C) = \operatorname{sen} AB' . \cos B'C + \cos AB' . \operatorname{sen} B'C$$

sarà:

$$\frac{\operatorname{sen} AC}{\operatorname{sen} CB'} = \frac{q}{p} . \cos B'C + \cos AB' .$$

Per ricavare ora $\cos B'C$ e $\cos AB'$ osserviamo che essendo insieme alla prima delle (11) verificata la:

$$AB' + B'C = b ,$$

segue facilmente:

$$\cos B'C = \frac{q + p \cos b}{\sqrt{p^2 + q^2 + 2pq \cos b}} , \qquad \cos AB' = \frac{p + q \cos b}{\sqrt{p^2 + q^2 + 2pq \cos b}} ,$$

e quindi per la (10):

$$\frac{\operatorname{sen} BO}{\operatorname{sen} OB'} = \frac{s}{r} \cdot \frac{\sqrt{p^2 + q^2 + 2pq \cos b}}{p} . \tag{12}$$

che è la formula cercata.

Supposto che O sia il punto notevole K_n si trova, ponendo nella (12)

$$r = \operatorname{sen}^n b , \qquad s = \operatorname{sen}^n a , \qquad p = \operatorname{sen}^n a , \qquad q = \operatorname{sen}^n c ,$$

$$\frac{\operatorname{sen} BK_n}{\operatorname{sen} H_n B'} = \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^{2n} a + \operatorname{sen}^{2n} c + 2 \operatorname{sen}^n a . \operatorname{sen}^n c . \cos b}}{\operatorname{sen}^n b} . \tag{13}$$

Ciò premesso, prendiamo nel triangolo sferico ABC un punto H e congiungiamolo con i tre vertici. Tiriamo poi per A la AK_nA' e uniamo infine K_n con H e H con A′.

(¹) Anche il teorema di Menelao sussiste col suo reciproco. Questo, e il teorema di Ceva di cui abbiam fatto cenno sopra erano già noti e quindi non ne abbiamo data la dimostrazione la quale del resto risulta dalla proporzione (3).

Dal triangolo BHC osservando che il lato BC è diviso da A′ in modo che:

$$\operatorname{sen} BA' : \operatorname{sen} A'C = \operatorname{sen}^n c : \operatorname{sen}^n a,$$

si ricava pel teorema di Stewart:

$$\cos A'H = \frac{\operatorname{sen}^n c \,.\, \cos CH + \operatorname{sen}^n b \,.\, \cos BH}{\sqrt{\operatorname{sen}^{2n} c + \operatorname{sen}^{2n} b + 2 \operatorname{sen}^n b \,.\, \operatorname{sen}^n c \,.\, \cos a}}. \tag{14}$$

Ora dal triangolo AHA′, il punto K_n dividendo AA′ in modo che

$$\operatorname{sen} AK_n : \operatorname{sen} K_nA' = \sqrt{\operatorname{sen}^{2n} b + \operatorname{sen}^{2n} c + 2 \operatorname{sen}^n b \,.\, \operatorname{sen}^n c \,.\, \cos a} : \operatorname{sen}^n a$$

segue pel medesimo teorema:

$$\cos HK_n = \\ = \frac{\cos A'H \sqrt{\operatorname{sen}^{2n} b + \operatorname{sen}^{2n} c + 2 \operatorname{sen}^n b \operatorname{sen}^n c \cos a} + \operatorname{sen}^n a \cos AH}{\sqrt{\operatorname{sen}^{2n} a + \operatorname{sen}^{2n} b + \operatorname{sen}^{2n} c + 2 \operatorname{sen}^n b \operatorname{sen}^n c \cos a + 2 \operatorname{sen}^n a \sqrt{\operatorname{sen}^{2n} b + \operatorname{sen}^{2n} c + 2 \operatorname{sen}^n b \operatorname{sen}^n c \cos a} \cos AA'}}.$$

In questa sostituendo per $\cos A'H$ il valore dato dalla (14) e per $\cos AA'$ quello che pel teorema di Stewart si ottiene dal triangolo ABC e che è

$$\cos AA' = \frac{\operatorname{sen}^n c \,.\, \cos b + \operatorname{sen}^n b \,.\, \cos c}{\sqrt{\operatorname{sen}^{2n} b + \operatorname{sen}^{2n} c + 2 \operatorname{sen}^n b \,.\, \operatorname{sen}^n c \,.\, \cos a}},$$

ne risulta la formula richiesta:

$$\cos HK_n = \frac{\operatorname{sen}^n a \cos AH + \operatorname{sen}^n b \cos BH + \operatorname{sen}^n c \cos CH}{\sqrt{\operatorname{sen}^{2n} a + \operatorname{sen}^{2n} b + \operatorname{sen}^{2n} c + 2 [\operatorname{sen}^n a \operatorname{sen}^n b \cos c + \operatorname{sen}^n b \operatorname{sen}^n c \cos a + \operatorname{sen}^n c \operatorname{sen}^n a \cos b]}} \tag{15}$$

che sotto forma più semplice può scriversi

$$\cos HK_n = \frac{\Sigma \operatorname{sen}^n a \,.\, \cos AH}{\sqrt{\Sigma \operatorname{sen}^{2n} a + 2 \Sigma \operatorname{sen}^n b \,.\, \operatorname{sen}^n c \,.\, \cos a}}. \tag{16}$$

Da questa formula si traggono diverse relazioni notevoli dando ad H varie posizioni sulla sfera.

Intanto se scriviamo la formula stessa per un altro punto L, dividendo poi la (16) per quella scritta, membro a membro si trova:

$$\frac{\cos HK_n}{\cos LK_n} = \frac{\Sigma \operatorname{sen}^n a \,.\, \cos AH}{\Sigma \operatorname{sen}^n a \,.\, \cos AL}.$$

Ora, se HK_n è minore di LK_n sarà $\cos HK_n > \cos LK_n$ e quindi la somma che figura al numeratore sarà maggiore di quella che figura al denominatore. (1) La somma:

$$\Sigma \operatorname{sen}^n a \cos AH$$

sarà dunque *massima*, quando H coincide con K_n. E il valore che essa prende in tale caso sarà, per la (16):

$$\sqrt{\Sigma \operatorname{sen}^{2n} a + 2 \Sigma \operatorname{sen}^n b \,.\, \operatorname{sen}^n c \,.\, \cos a}.$$

---

(1) Per la concinsione a cui tendiamo è evidentemente lecito supporre che gli archi HK_n e LK_n siano inferiori a un quadrante.

In particolare, per $n=0, 1, 2$ si hanno le relazioni:

$$\begin{cases} \cos AK_0 + \cos BK_0 + \cos CK_0 = \sqrt{3+2[\cos a + \cos b + \cos c]} \\ \Sigma \operatorname{sen} a \cos AK_1 = \sqrt{\Sigma \operatorname{sen}^2 a + 2\Sigma \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c \,.\, \cos a} \\ \Sigma \operatorname{sen}^2 a \cos AK_2 = \sqrt{\Sigma \operatorname{sen}^4 a + 2\Sigma \operatorname{sen}^2 b \,.\, \operatorname{sen}^2 c \,.\, \cos a}. \end{cases}$$

Si noti ancora la relazione generale:

$$\Sigma \operatorname{sen}^n a \cos AH = 0, \tag{17}$$

che ha luogo quando H è un punto del circolo massimo che ha per polo K_n, la quale consegue dalla formula (16). In particolare è:

$$\cos AH + \cos BH + \cos CH = 0,$$

se la distanza di H da K_0 è di un quadrante. I punti poi tali che la somma medesima sia costante sono situati sopra un circolo il cui centro è K_n. La (16) ci fornisce allora il coseno del raggio di detto circolo.

Della lunga serie di formule che si possono dedurre della (16) ci limitiamo a citare le seguenti:

$$(18) \quad \begin{cases} \cos OK_0 = \dfrac{3\cos R}{\sqrt{3+2\Sigma \cos a}} \\ \cos OK_1 = \dfrac{\cos R \,.\, \Sigma \operatorname{sen} a}{\sqrt{\Sigma \operatorname{sen}^2 a + 2\Sigma \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \cos c}} \\ \cos OK_2 = \dfrac{\cos R \,.\, \Sigma \operatorname{sen}^2 a}{\sqrt{\Sigma \operatorname{sen}^4 a + 2\Sigma \operatorname{sen}^2 a \,.\, \operatorname{sen}^2 b \,.\, \cos c}}, \end{cases}$$

che si ottengono facendo coincidere H col centro O del circolo circoscritto.

Tutte queste formule e quelle che potrebbero aversi con procedimento analogo hanno le loro corrispondenti in geometria del triangolo rettilineo. Così per es. alle tre relazioni (18) corrispondono rispettivamente le:

$$\begin{cases} \overline{OG}^2 = R^2 - \dfrac{a^2+b^2+c^2}{9} \\ \overline{OI}^2 = R^2 - \dfrac{abc}{a+b+c} \\ \overline{OK}^2 = R^2 - 3\left(\dfrac{abc}{a^2+b^2+c^2}\right)^2 \end{cases}$$

alle quali si perviene col procedimento di cui si è fatto cenno precedentemente.

Notiamo finalmente che poichè in virtù di un teorema generale, (¹) da una formula di trigonometria sferica si ottiene la corrispondente in trigonometria pseudosferica cambiando R in $R \,.\, \sqrt{-1}$, restan dimostrati oltre che l'esistenza dei punti notevoli nel triangolo pseudosferico

(¹) Vedasi p. es. in *Geometria differenziale* del Ch.^{mo} prof. Bianchi. Pisa, 1894. Cap. XVI, pag. 408.

anche il teorema di Stewart e la formula che dà il coseno iperbolico della distanza di un punto notevole da un altro punto qualsivoglia in funzione dei coseni iperbolici delle distanze di quest'ultimo dai vertici (¹).

ENRICO PICCIOLI.

Cortona, ottobre 1904.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 658, 675, 676 E 677

658. *Luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da un punto fisso a tutti i circoli bitangenti a una conica.*

E.-N. BARISIEN.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

Sia O l'origine degli assi che supporremo paralleli a quelli della conica data c. Allora l'equazione di c sarà della forma:

$$\psi_0 = a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + 2\,a_{13}\,x + 2\,a_{23}\,y + a_{33} = 0\,. \tag{1}$$

I. — *Il punto dato* P *sia un punto proprio.*

Senza togliere generalità al problema supporremo che P coincida con O. Indicando con α, β, γ tre variabili,

$$\psi_0 - (\alpha x + \beta y + \gamma)^2 = 0 \tag{2}$$

rappresenterà una conica bitangente alla (1).

Affinchè la (2) rappresenti un cerchio è necessario e sufficiente che sia

$$a_{11} - \alpha^2 = a_{22} - \beta^2\,, \qquad (3) \qquad\qquad \alpha\beta = 0\,. \qquad (4)$$

La polare di P rispetto alla (2) è data da

$$\psi_1 - \gamma\,(\alpha x + \beta y + \gamma) = 0, \tag{5}$$

essendo

$$\psi_1 = a_{13}\,x + a_{23}\,y + a_{33}$$

una funzione indipendente dalle variabili α, β, γ. Eliminando queste variabili tra le equazioni (2), (3), (4), (5) si ottengono i luoghi

$$(\psi_0 - \psi_1)^2 = (a_{11} - a_{22})\,x^2\,\psi_0\,, \qquad (\psi_0 - \psi_1)^2 = (a_{22} - a_{11})\,y^2\,\psi_0\,.$$

II. — *Il punto dato* P *sia il punto improprio della retta*

$$y = mx\,. \tag{6}$$

Il diametro della (2) coniugato alla direzione della (6) ha per equazione

$$\psi_2 - (\alpha + m\beta)\,(\alpha x + \beta y + \gamma) = 0, \tag{7}$$

essendo

$$\psi_2 = (a_{11}\,x + a_{13}) + m\,(a_{22}\,y + a_{23})$$

(¹) Non sarebbe, a mio parere, malfatto riunire per terne le formule di geometria piana, sferica e pseudosferica corrispondenti a un medesimo teorema. A questo gioverebbe moltissimo l'eccellente trattato di *Trigonometria piana e sferica* del Ch.^{mo} prof. Pesci.

una funzione indipendente dalle variabili α, β, γ. Eliminando queste variabili tra le equazioni (2), (3), (4), (7) si ottengono i luoghi

$$\psi_2^2 = m^2 (a_{22} - a_{11}) \psi_0 \tag{8}$$

$$\psi_2^2 = (a_{11} - a_{22}) \psi_0 . \tag{9}$$

Le (8), (9) rappresentano evidentemente due coniche bitangenti alla (1).

675. *Esiste un circolo ed uno solo rispetto al quale un triangolo dato è autoconiugato; questo circolo ha per centro l'ortocentro del triangolo. Si determini il raggio del circolo in funzione delle misure dei lati del triangolo, e si cerchino altre proprietà del circolo stesso.*

G. Cardoso-Laynes.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

In un cerchio la perpendicolare alla polare condotta per il polo passa per il centro; quindi i cerchi γ ai quali sia autoconiugato un triangolo ABC devono avere per centro l'ortocentro H. Sia $\overline{AX}$ un'altezza di ABC, ρ il raggio di uno dei cerchi γ. Avremo evidentemente:

$$\rho = \sqrt{\overline{HA} \,.\, \overline{HX}}\,; \tag{1}$$

si deduce che esiste un solo cerchio γ autoconiugato ad ABC. Il raggio ρ è reale, immaginario o nullo, secondo che H è esterno o interno ad $\overline{AX}$, oppure coincide con A, cioè secondo che ABC è ottusangolo, acutangolo o rettangolo. Inoltre, essendo H il centro radicale dei cerchi γ_a, γ_b, γ_c aventi per diametri i lati del triangolo ABC, per la (1), ρ^2 sarà la potenza di H rispetto a questi cerchi.

Calcolo di ρ. — Siano a, b, c i lati di ABC; R il raggio ed O il centro del circumcerchio Γ, A′ il punto medio di BC. Abbiamo

$$\overline{HB}^2 + \overline{HC}^2 = 2\left(\overline{HA'}^2 + \tfrac{1}{4} a^2\right), \quad \text{cioè} \quad \overline{HA'}^2 - \tfrac{1}{4} a^2 = \tfrac{1}{2}\left(\overline{HB}^2 + \overline{HC}^2 - a^2\right). \tag{2}$$

Il primo membro della (2) è la potenza di H rispetto a γ_a quindi

$$\rho^2 = \tfrac{1}{2}\left(\overline{HB}^2 + \overline{HC}^2 - a^2\right) = \tfrac{1}{2}\left(\overline{HC}^2 + \overline{HA}^2 - b^2\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\overline{HA}^2 + \overline{HB}^2 - c^2\right) = \tfrac{1}{3}\Sigma\, \overline{HA}^2 - \tfrac{1}{6}\Sigma a^2$$

ma

$$\Sigma\, \overline{HA}^2 = 12R^2 - \Sigma a^2, \text{(1)}$$

dunque

$$\rho^2 = 4R^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma a^2.$$

Altre proprietà di γ:

1ª. *Il cerchio γ taglia ortogonalmente i cerchi γ_a, γ_b, γ_c.*

Infatti, il quadrato del raggio di γ è la potenza del suo centro H rispetto a γ_a, γ_b, γ_c.

2ª. *Si ha la formula $\overline{OH}^2 - \rho^2 = R^2 + \rho^2$, cioè la potenza di O rispetto a γ è uguale alla somma dei quadrati dei raggi di Γ e γ.*

3ª. *L'asse radicale s di Γ e γ è la polare del baricentro di ABC rispetto a γ.*

Il punto $(s, \overline{BC})$ è il centro radicale di Γ, γ, γ_a; quindi giacerà sull'asse radicale s_a di γ, γ_a; ma, per la proprietà 1ª, s_a è la polare di A′ rispetto a γ, quindi (s, BC) sarà il polo di $\overline{AA'}$. Siccome poi la s contiene i poli delle mediane di ABC rispetto a γ, essa sarà la polare del baricentro di ABC rispetto a γ stesso.

---

(1) Si ha: $\overline{HA} = 2\overline{OA'}$, quindi

$$\Sigma\, \overline{HA}^2 = 4\Sigma\, \overline{OA'}^2 = 4\Sigma(R^2 - \tfrac{1}{4}a^2) = 12R^2 - \Sigma a^2.$$

Sia D la proiezione di O su AX; dal triangolo OAH si ha

$$\overline{OH}^2 = R^2 + \overline{AH}^2 - 2\overline{AH}\,.\,\overline{AD} = R^2 + 2\overline{AH}(\tfrac{1}{2}AH - \overline{AD}) = R^2 + 2\overline{AH}\,.\,\overline{XH} = R^2 + 2\rho^2.$$

676. *Dimostrare la formula*

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{7}+\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}=\frac{1}{2}\sqrt{7}.$$

BRAMBILLA.

Risoluzione del sig. Barisien di Costantinopoli.

Per semplicità poniamo $\frac{\pi}{7}=x$. Si ha

$$\operatorname{sen}5x=16\operatorname{sen}^5x-20\operatorname{sen}^3x+5\operatorname{sen}x$$
$$\operatorname{sen}3x=3\operatorname{sen}x-4\operatorname{sen}^3x.$$

La relazione proposta diviene dunque

$$16\operatorname{sen}^5x-24\operatorname{sen}^3x+7\operatorname{sen}x=\frac{\sqrt{7}}{2}. \tag{1}$$

D'altra parte è

$$\operatorname{sen}7x=7\operatorname{sen}x-56\operatorname{sen}^3x+112\operatorname{sen}^5x-64\operatorname{sen}^7x.$$

Poichè è $7x=\pi$, questa relazione diviene, facendo sparire il fattore $\operatorname{sen}x$, che non è nullo,

$$64\operatorname{sen}^6x-112\operatorname{sen}^4x+56\operatorname{sen}^2x-7=0. \tag{2}$$

Se ora poniamo $\operatorname{sen}x=y$, la quistione si riduce a dimostrare che le due equazioni

$$16y^5-24y^3+7y=\frac{\sqrt{7}}{2}, \tag{3}$$
$$64y^6-112y^4+56y^2-7=0 \tag{4}$$

sono equivalenti.

Elevando la (3) a quadrato essa diventa

$$1024y^{10}-3072y^8+3200y^6=1344y^4+196y^2-7=0,$$

ovvero

$$(64y^6-112y^4+56y^2-7)(16y^4-20y^2+1)=0.$$

Il primo fattore è il primo membro dell'equazione (4), che dà $\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$. Il secondo fattore dà valori immaginari per y, considerati come $\operatorname{sen}x$.

La relazione proposta è dunque vera.

OSSERVAZIONE. — Ecco altre relazioni interessanti che si deducano dalla quistione proposta

$$\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}\cos\frac{5\pi}{14}=\frac{\sqrt{7}}{8}.$$
$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}=\frac{\sqrt{7}}{8}.$$
$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}+\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{2}.$$
$$64\cos\frac{7\pi}{7}-112\cos\frac{5\pi}{7}+56\cos\frac{3\pi}{7}-7\cos\frac{\pi}{7}-1=0$$
$$16\cos\frac{3\pi}{14}\operatorname{sen}\frac{\pi}{14}\left(1-4\operatorname{sen}\frac{2\pi}{14}\right)=\sqrt{7}.$$
$$64\cos\frac{6\pi}{7}+64\cos\frac{5\pi}{7}-112\cos\frac{4\pi}{7}-96\cos\frac{3\pi}{7}+64\cos\frac{2\pi}{7}+32\cos\frac{\pi}{7}-9=0$$
$$4\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\left(1+\cos\frac{\pi}{7}\right)\left(2\cos\frac{\pi}{7}-1\right)=\sqrt{7}$$
$$16\left(\cos\frac{\pi}{7}+1\right)^3\left(\cos\frac{\pi}{7}-1\right)\left(2\cos\frac{\pi}{7}-1\right)^3+7=0.$$

Altra risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

677. *Sia M un punto variabile sopra un'ellisse che ha per fuochi F, F'. Il luogo dei centri di similitudine del circolo inscritto nel triangolo MFF' e di un circolo fisso si compone di due coniche.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

Sieno I ed R il centro e il raggio del cerchio inscritto in MFF'; e poniamo:

$$\overline{FM} = m\,, \qquad \overline{F'M} = 2a - m\,, \qquad \overline{FF'} = 2c\,;$$

avremo:

$$R = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)[c^2 - (m - a)^2]}}{a + c}.$$

Le coordinate di I rispetto agli assi dell'ellisse sono:

$$x = \tfrac{1}{2}(\overline{FM} - \overline{F'M}) = m - a; \qquad y = R = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)[c^2 - (m - a)^2]}}{a + c};$$

eliminando m tra queste due equazioni si ottiene evidentemente il luogo di I il quale è l'ellisse:

$$(a + c)^2 y^2 = (a^2 - c^2)(c^2 - x^2)\,. \tag{1}$$

Sia ora $C = (\alpha, \beta)$ il centro ed r il raggio del circolo fisso dato; $P = (x, y)$ sia un punto della (1). Facendo assumere ad r il doppio segno, le coordinate dei centri di similitudine del cerchio fisso di centro C e raggio r con quello di centro P e raggio uguale all'ordinata y di P sono date da:

$$X = \frac{rx + \alpha y}{r + y}, \qquad Y = \frac{r + \beta}{r + y}\,y\,.$$

Da queste equazioni si ricava:

$$x = \frac{(r + \beta)X - \alpha Y}{r + \beta - Y}, \qquad y = \frac{rY}{r + \beta - Y}\,.$$

Sostituendo con questi valori nella (1) si trova l'equazione del luogo

$$r^2 (a + c)^2 Y^2 = (a^2 - c^2)\left\{c^2 (r + \beta - Y)^2 - [(r + \beta)X - \alpha Y]^2\right\}. \tag{2}$$

Siccome r può assumere il doppio segno il luogo (2) si comporrà di due coniche.

QUISTIONI PROPOSTE

691. L'area limitata dalla curva

$$(x + y + a)^4 - 64\,(x + a)(y + a) = 0$$

è eguale a $4\pi a^2$.

692. Essendo M un punto variabile sopra una ellisse o una iperbole, P, Q le proiezioni di M sugli assi, S la proiezione di M su PQ si trovino le aree delle tre curve:

1ª luogo dei punti S;
2ª inviluppo della retta MS;
3ª inviluppo della retta PQ.

693. Siano F. F′ i fuochi di una ellisse ed M un punto variabile sulla medesima. Si considerino il circolo inscritto al triangolo MFF′ e quello exinscritto contenuto nell'angolo $\widehat{FMF'}$.

1. L'inviluppo di ciascuno di questi circoli è una quartica podaria dal centro dell'ellisse.

2. Il luogo dei punti d'incontro di ciascuno dei circoli suddetti colla retta che congiunge il centro dell'ellisse al punto M è una sestica, della quale si domanda l'area.

694. Essendo date le due curve

$$\rho = A \cos \omega \qquad (1) \qquad\qquad \rho = \sqrt{a^2 \cos^2 \omega + b^2 \operatorname{sen}^2 \omega} \qquad (2)$$

si costruisca la curva che si ottiene aumentando (o diminuendo) ogni raggio vettore della curva (1) di una lunghezza eguale al raggio vettore corrispondente della curva (2), e quella che si ottiene aumentando (o diminuendo) ogni raggio vettore della curva (2) di una lunghezza eguale al raggio vettore della curva (1). Dimostrare che le aree delle due curve così ottenute sono eguali.

E.-N. Barisien.

BIBLIOGRAFIA

Riboni G. — *Elementi di aritmetica per le scuole secondarie.*

È un trattato di aritmetica che al pregio della chiarezza, come poteva aspettarsi da chi ha pratica dell'insegnamento secondario, unisce quello, più difficile a conseguire in un libro elementare, del rigore scientifico.

L'A. consigliato dall'esperienza, fa precedere i numeri decimali e il sistema metrico decimale alla trattazione delle frazioni ordinarie; per tal modo può fin dal principio addestrare i giovani con gli esercizi sui decimali e sulle misure.

Notevole è poi l'aver espressamente collegato il concetto di frazione e quello di divisione, facendo osservare come l'aver definito e messo in calcolo le parti aliquote dell'unità permette di eseguire con esattezza ogni divisione. Così i giovani lettori possono rendersi conto del trattato sulle frazioni, poichè intendono facilmente come sia necessario saper fare anche su questi numeri le ordinarie operazioni di calcolo.

Nel capitolo VI, sulle grandezze proporzionali l'A., dopo aver dato chiaramente il concetto di proporzionalità, insiste, per la soluzione dei vari problemi, specialmente sul metodo di riduzione all'unità, come il più facile e il più persuasivo, senza però tralasciare di esporre anche quello delle proporzioni.

E mentre tutto è scritto in quella forma semplice e piana che invita gradevolmente alla lettura, non è mai perduta d'occhio, neppure per un istante, la precisione scientifica che rende pregevole questo volumetto.

Che se poi, come l'A. mostra di pensare, egli sarà riuscito troppo *razionale*, sarà il caso di dire che in quella sua esposizione così chiara questo è un bel difetto.

E. Maioli.

Tolomei Giulio. — *Problemi di fisica.* Seconda edizione con un'appendice contenente i problemi dati all'esame di ammissione alla R. Accademia Navale. Firenze, Success. Le Monnier, 1902.

I problemi di fisica costituiscono senza dubbio una ginnastica intellettuale di prim'ordine. Essi infatti sono la prima e più naturale applicazione delle matematiche per i giovani delle scuole secondarie, e servono a mostrare a questi come le teorie matematiche servano a risolvere importanti quesiti della vita pratica. Sarebbe quindi naturale che da noi, come in altri paesi, fossero addestrati i giovani alla risoluzione di tali problemi; ma, come osserva giustamente l'autore, nella prefazione, ciò non si fa in alcuna scuola.

I giovani volenterosi potranno dunque ritrarre grande profitto dalla lettura di questo libro che, pubblicato per la prima volta nel 1891 ha meritamente avuta la fortuna di giungere ora alla seconda edizione.

I problemi disposti ordinatamente si riferiscono alle materie svolte nei programmi dei Licei ed Istituti tecnici; e servono a completare le relative teorie, ove sono di solito svolte in modo manchevole ed imperfetto.

Una maggiore estensione è data alle applicazioni di elettricità, e sono svolte sotto forma di problemi molte quistioni della elettrotecnica, che ha ormai tanta importanza nella vita pratica.

K.

L'INCHIESTA SUL METODO DI LAVORO DEI MATEMATICI

L'ottima rivista l'*Enseignement mathématique* ha iniziata un'inchiesta sul metodo di lavoro dei matematici, e si rivolge agli studiosi di tutto il mondo, pregandoli di rispondere alle 29 domande che esso indirizza loro per mezzo di un apposito quistionario, nella fiducia che dall'insieme delle risposte possano scaturire degli insegnamenti e consigli utili ai giovani matematici ed all'insegnamento. Il Periodico di matematica è ben lieto di associarsi a quest'opera, ed invia ai suoi lettori il quistionario in parola con preghiera di prenderne cognizione, ed inviarlo colle relative risposte, a uno dei redattori:

Prof. C.-A. Laisant, 162, Avenue Victor Hugo, Paris.

Prof. H. Fehr, 19, rue Gevray, Genève.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 9 febbraio 1905

LE DEFINIZIONI GENERALI IN MATEMATICA [1]

1. Debbo oggi intrattenervi sulle definizioni generali nelle matematiche; così almeno dice il programma, ma non mi sarà possibile limitarmi a questo argomento, quanto esigerebbe la regola dell'unità di azione; non potrò trattarlo senza parlare un poco su altre questioni vicine, e se sarò quindi costretto a camminare di tanto in tanto sui sentieri di destra e di sinistra, vi prego di volermi accordare la vostra indulgenza.

Che cos'è una buona definizione? Pel filosofo, o per lo scienziato, è una definizione che si applica a tutti gli oggetti definiti e ad essi soli; è quella che soddisfa le regole della logica. Nell'insegnamento però, non si tratta di questo; una buona definizione è quella che vien compresa dagli scolari.

Perchè avviene che tante intelligenze ricusino di comprendere le matematiche? Non vi è in ciò alcunchè di paradossale? Ecco una scienza che fa appello ai soli principî fondamentali della logica, al principio di contraddizione, per esempio, a ciò che forma per così dire lo scheletro del nostro intendimento, a ciò di cui non potremmo spogliarci senza cessare di pensare, e si trovano persone che la dicono oscura! e sono anche in maggioranza! Che essi sieno incapaci d'inventare, passi; ma che essi non comprendano le dimostrazioni che vengono loro esposte, che essi restino ciechi, quando noi presentiamo loro una luce che ci sembra brillare d'un puro splendore, è una cosa che ha assolutamente del prodigioso.

Eppure non occorre essere molto pratici di esami per sapere come quei ciechi non sono affatto esseri eccezionali! Ecco un problema di non facile soluzione, ma che deve preoccupare tutti coloro che vogliono darsi all'insegnamento.

---

(1) Questa conferenza, letta al Museo pedagogico di Parigi nella primavera del 1904, fu pubblicata nell'ottima rivista *L'enseignement mathématique* del luglio 1904. Le considerazioni acutissime e profonde svolte dall'illustre autore sull'insegnamento della matematica, interessano i professori italiani non meno di quelli francesi, e siamo certi che i lettori del *Periodico* saranno al pari del sottoscritto, riconoscenti all'illustre prof. Poincaré ed ai direttori dell'*Enseignement mathématique* proff. Laisant e Fehr di avere gentilmente accordato il permesso di pubblicare una traduzione dell'articolo in questo giornale.

(*Nota di* G. Lazzeri.)

Che significa capire? Questa parola ha lo stesso significato per tutti? Comprendere la dimostrazione di un teorema, vuol forse dire esaminare successivamente tutti i sillogismi di cui si compone e constatare che è corretto, conforme alle regole del giuoco? Ed anche capire una definizione, significa semplicemente riconoscere di sapere già il senso di tutti i termini adoperati e constatare ch'esso non implica contraddizione di sorta?

Sì, per alcuni i quali, dopo fatta tale constatazione, diranno: ho capito. No, per la massima parte. Quasi tutti sono molto più esigenti, vogliono sapere, non solo se tutti i sillogismi di una dimostrazione sono corretti, ma perchè si incatenano in un certo ordine, piuttosto che in un altro. Finchè sembrano loro generati dal capriccio, e non da un'intelligenza costantemente conscia dello scopo da raggiungere non credono aver compreso.

Certo non si rendono bene conto essi stessi di ciò che vogliono, e non saprebbero formulare il loro desiderio, ma se non restano soddisfatti, sentono che qualche cosa manca loro. Allora che avviene? Sul principio scorgono ancora le evidenze che si mettono loro sott'occhio; ma poichè queste non si collegano che per un filo troppo sottile alle precedenti ed alle seguenti, passano dal loro cervello senza lasciarvi traccia, vengono tosto dimenticate, e dopo aver brillato un istante, ricadono subito in una notte eterna. Quando saranno più innanzi, non scorgeranno più neppure quella effimera luce, poichè i teoremi si appoggiano gli uni sugli altri e quelli che occorrerebbero sono già dimenticati; è così che divengono incapaci a comprendere le matematiche.

Non è sempre colpa del loro professore; spesso la loro intelligenza, cui occorre scorgere il filo conduttore, è troppo pigra per cercarlo e per trovarlo. Ma per venir loro in aiuto, occorre prima comprender bene che cosa li trattiene.

Altri si domanderanno sempre: a che cosa ciò è utile; non intenderanno se non si troveranno intorno, in pratica od in natura, la ragione d'essere di tale o tal'altra nozione matematica. Sotto ogni parola, vogliono mettere un'imagine sensibile; occorre che la definizione evochi tale imagine, che ad ogni stadio della dimostrazione la vedano trasformarsi ed evolversi. A questa sola condizione, comprenderanno e ricorderanno. Costoro si illudono spesso da loro stessi; non ascoltano i ragionamenti, guardano le figure; credono aver compreso ed hanno solo veduto.

2. Quante tendenze diverse! Occorre combatterle? Occorre utilizzarle? E volendo combatterle, quale bisognerebbe favorire? A coloro che si contentano della pura logica si deve dimostrare che hanno visto le cose sotto un unico aspetto? Oppure a coloro che non restano tanto facilmente soddisfatti si deve dire che ciò che chiedono non è necessario?

In altre parole, dobbiamo obbligare i giovani a mutare l'indole dell'intelligenza loro? Un simile tentativo sarebbe inutile; non possediamo la pietra filosofale che ci permetterebbe di cambiare gli uni negli altri i metalli preziosi confidatici; la sola cosa che possiamo fare è di lavorarli adattandoci alle loro proprietà.

Molti fanciulli, ai quali pure bisogna insegnare le matematiche, sono incapaci di divenir matematici; ed i matematici stessi non sono tutti plasmati nello stampo medesimo. Basta leggerne le opere per distinguerli in due diverse qualità d'intelligenze, quelle dei logici come per esempio Weierstrass, e degli intuitivi come Riemann. La differenza è uguale tra i nostri allievi. Gli uni preferiscono risolvere i loro problemi *analiticamente,* come essi dicono, gli altri *geometricamente.*

È perfettamente inutile cercar di cambiarvi qualche cosa, e del resto sarebbe ciò desiderabile? È bene vi siano logici ed intuitivi; chi oserebbe decidere se preferirebbe che Weierstrass non avesse mai scritto, oppure che Riemann non fosse esistito? Bisogna quindi rassegnarci alla diversità delle intelligenze, meglio ancora, bisogna rallegrarcene.

3. Poichè la parola comprendere ha differenti significati, le definizioni meglio comprese dagli uni non converranno agli altri. Abbiamo quelle che cercano di far nascere un'imagine, e quelle in cui ci si limita a combinare forme vuote, perfettamente intelligibili, ma puramente intelligibili, cui l'astrazione ha tolto ogni materia.

Non so se sia proprio necessario citar degli esempi. Citiamone però, e prima di ogni altro la definizione delle frazioni ci fornirà un esempio estremo. Nelle scuole primarie, per definire una frazione viene tagliata una mela o una torta; viene tagliata mentalmente, s'intende, e non in realtà, perchè non credo che il bilancio dell'istruzione elementare permetta simili prodigalità. Alla scuola normale superiore, invece, o nelle Facoltà, verrà detto: una frazione, è l'insieme di due numeri interi separati da una linea orizzontale: verranno definite convenzionalmente le operazioni che possono subire tali simboli; verrà dimostrato che le regole di queste operazioni sono le stesse che nel calcolo dei numeri interi, e si constaterà finalmente che, facendo secondo tali regole la moltiplicazione della frazione pel denominatore, si ritrova il numeratore. Ciò va benissimo, perchè ci si rivolge a giovani, da lungo tempo famigliarizzati colla cognizione delle frazioni a furia di aver diviso mele ed altri oggetti, e la cui intelligenza raffinata da una forte educazione matematica, è a poco a poco giunta a desiderare una definizione puramente logica. Ma quale sarebbe lo sbalordimento di un principiante cui si volesse servirla?

Di questa specie sono anche le definizioni che trovansi in un libro giustamente ammirato e molte volte premiato, i *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert. Vediamo infatti come principia: *Pensiamo tre sistemi di cose che chiameremo punti, rette e piani.* Che sono queste "cose„? non lo sappiamo, e non dobbiamo saperlo; sarebbe anzi dannoso che cercassimo di saperlo; quel che abbiamo diritto di sapere, è quanto ce ne dicono gli assiomi, questo per esempio: *Due punti differenti determinano sempre una retta*, seguito dal commento: *invece di determinano, possiamo dire che la retta passa per questi due punti, o che congiunge questi due punti, o che i due punti sono collocati sulla retta*. Sicchè, " essere collocato sopra una retta " è semplicemente definito come sinonimo di " determinare una retta ". È questo un libro di cui ho buonissima opinione, ma che non raccomanderei ad uno studente di liceo. Potrei del resto, farlo senza timore, poich'egli non andrebbe troppo oltre colla sua lettura.

Ho preso esempi estremi, e nessun maestro potrebbe pensare di andare così lontano. Ma pur rimanendo bene al di quà di simili modelli, non si espone egli forse allo stesso rischio?

Siamo in una quarta classe; il professore detta: il circolo è il luogo dei punti del piano che si trovano ad ugual distanza da un punto interno chiamato centro. Il buon studente scrive questa frase sul suo quinterno; il cattivo vi disegna delle figurine; ma nè l'uno nè l'altro ha compreso; il professore prende allora il gesso e traccia un cerchio sulla lavagna. " Ah! pensano gli scolari, perchè non lo diceva subito: un circolo è un tondo, avremmo capito ". Certo, ha ragione il professore. La definizione degli allievi non avrebbe avuto valore, poichè non avrebbe potuto servire a dimostrazione alcuna, e specialmente perchè non avrebbe potuto dar loro la salutare abitudine di analizzare i propri concetti. Ma bisognerebbe dimostrar loro che non capiscono ciò che credono capire, condurli a rendersi conto della grossolanità del loro concetto primitivo, a desiderare essi stessi che venga epurato e dirozzato.

4. Tornerò su tutti questi esempi: ho solo voluto dimostrarvi i due concetti opposti: esiste fra loro un contrasto violento. Questo contrasto, ci viene spiegato dalla storia della scienza. Se leggiamo un libro scritto cinquant'anni or sono, la massima parte dei ragionamenti che contiene, ci sembrerà sprovvista di rigore.

Si ammetteva a quell'epoca che una funzione continua non potesse cambiar di segno senza annullarsi; attualmente ciò viene dimostrato. Si ammetteva che le regole ordinarie del calcolo fossero applicabili ai numeri incommensurabili; attualmente ciò vien dimostrato. Si ammettevano tante altre cose, che a volte erano false.

Ci si fidava dell'intuizione; ma ormai si è capito ogni giorno meglio del precedente che l'intuizione non può darci il rigore, e neppure la certezza. Essa ci insegna per esempio che ogni curva ha una tangente, cioè che ogni funzione continua ha una derivata, e ciò è falso. E poichè si teneva alla certezza, è bisognato rendere sempre più piccola la parte della intuizione.

Come è avvenuta questa necessaria evoluzione? Non si è tardato ad accorgersi che il rigore non avrebbe potuto stabilirsi nei ragionamenti, se non fosse stato prima introdotto nelle definizioni.

Per molto tempo gli argomenti di cui si occupano i matematici sono stati mal definiti; si credeva conoscerli, perchè venivano rappresentati coi sensi o l'imaginazione; ma non se ne aveva che un'imagine grossolana e non un'idea precisa sulla quale il ragionamento potesse aver presa.

Su ciò i logici hanno dovuto portare i loro sforzi. Lo stesso pel numero incommensurabile.

La vaga idea di continuità, che dobbiamo all'intuizione, si è risoluta in un complicato sistema di ineguaglianze tra numeri interi. Così sono definitivamente svanite tutte quelle difficoltà che spaventavano i padri nostri, allorchè riflettevano ai fondamenti del calcolo infinitesimale.

Ora non rimangono in analisi che numeri interi, o sistemi finiti od infiniti di numeri interi, legati tra loro da un sistema di uguaglianze ed ineguaglianze. Le matematiche, come è stato detto, si sono aritmetizzate.

5. Ma si crede forse che le matematiche abbiano raggiunto il rigore assoluto senza far sacrifici? Niente affatto; ciò che hanno acquistato in rigore, l'hanno perduto in obiettività. Hanno dovuto scostarsi dalla realtà per acquistare questa perfetta purezza. Si può percorrere liberamente tutto il loro dominio, altra volta pieno di ostacoli, ma tali ostacoli non sono scomparsi. Sono stati solo trasportati alla frontiera, e bisognerà tornare a vincerli, se si vuol superare tale frontiera per penetrare nel regno della pratica.

Si possedeva una nozione vaga, fatta di elementi disparati, gli uni *a priori*, gli altri frutti di esperienze più o meno digerite; si credeva conoscerne, mediante l'intuizione, le proprietà principali. Oggi gli elementi empirici vengono scartati per non conservare che quelli *a priori;* una delle proprietà serve alla definizione, e tutte l'altre ne vengono dedotte con un ragionamento rigoroso. Va benissimo; ma resta a provarsi che tale proprietà, divenuta definizione, appartiene proprio agli oggetti reali fattici conoscere dall'esperienza, e da' quali avevamo attinta la nostra vaga cognizione intuitiva. Per dimostrarlo, bisognerà ben ricorrere all'esperienza, o fare uno sforzo d'intuizione, e se non si potesse dimostrare, i nostri teoremi sarebbero perfettamente rigorosi, ma perfettamente inutili.

La logica partorisce a volte dei mostri. Da un mezzo secolo si è visto sorgere una folla di funzioni bizzarre, che sembrano fare ogni sforzo per somigliare il meno possibile alle oneste funzioni, buone a qualcosa. Non più continuità, oppure continuità, ma non derivate, ecc. Non basta; sotto l'aspetto logico, queste funzioni strane sono le più generali; quelle che si incontrano senza averle cercate non appariscono più che come un caso particolare. Non rimane loro che un piccolissimo cantuccino.

Altravolta quando inventavasi una nuova funzione, era per qualche scopo pratico; oggi si inventano espressamente per rendere difettose le dimostrazioni dei padri nostri, e non se ne caverà mai altro.

Se la logica fosse l'unica guida del pedagogo, bisognerebbe cominciare dalle funzioni più generali, cioè dalle più bizzarre. Occorrebbe mettere il principiante alle prese con quel museo teratologico. Se non lo fate, potrebbero dire i logici, non raggiungerete il rigore che a tappe.

6. Sì, forse, ma non si può trattare così alla leggiera colla realtà, e non parlo solo della realtà del mondo sensibile, che pure ha il suo valore, poichè i nove decimi de' vostri scolari vi domandano le armi, unicamente per combattere contro di lei. Vi è una realtà più sottile, che forma la vita degli esseri matematici, ed è tutt'altra cosa che la logica.

Il nostro corpo è formato di cellule e le cellule di atomi; tali cellule ed atomi sono dunque tutta la realtà del corpo umano? Il modo nel quale queste cellule sono disposte, e dal quale risulta l'unità dell'individuo non è esso pure una realtà molto più interessante?

Un naturalista che non avesse mai studiato l'elefante altro che al microscopio conoscerebbe abbastanza quest'animale?

Lo stesso è in matematica. Allorchè il logico avrà scomposto ogni dimostrazione in una folla di operazioni elementari, tutte corrette, non possiederà ancora la completa realtà; quel non so che il quale forma l'unità nella dimostrazione gli sfuggirà completamente.

Negli edifici innalzati dai nostri maestri, a che serve ammirare l'opera del muratore se non possiamo comprendere il piano dell'architetto? Ora questa veduta d'insieme, non può venirci data dalla pura logica, e bisogna chiederla all'intuizione.

Prendiamo per esempio l'idea di funzione continua. Non è in principio che una imagine sensibile, un rigo tracciato col gesso sulla lavagna. Poco a poco si epura; si adopera per costruire un sistema completo d'ineguaglianze, che riproduce tutte le linee dell'immagine primitiva; allorchè tutto è terminato, si è tolta l'armatura come dopo la costruzione di una volta; questa rappresentazione grossolana, appoggio ormai inutile, è scomparsa e non è rimasto che l'edificio stesso, irriprovevole all'occhio del logico. Eppure se il professore non richiamasse l'imagine primitiva, se non ristabilisse momentaneamente la centina, come farebbe l'allievo ad indovinare per qual capriccio tutte quelle ineguaglianze si sono sovrapposte in tal modo le une sulle altre? La definizione sarebbe logicamente corretta, ma non gli dimostrerebbe la vera realtà.

7. Eccoci dunque costretti a tornare indietro; è certo penoso per un maestro dovere insegnare ciò che non lo soddisfa pienamente; ma la soddisfazione del maestro non è lo scopo unico dell'insegnamento; occorre prima pensare a ciò che è l'intelligenza dell'allievo ed a ciò che si vuole ch'egli divenga.

Gli zoologi pretendono che lo sviluppo embrionale di un animale riassuma in un tempo brevissimo tutta la storia de' suoi antenati dei tempi geologici. Sembra avvenga lo stesso delle intelligenze. L'educatore deve far ripassare il fanciullo di dove i suoi padri sono passati; più rapidamente, ma senza omettere tappa alcuna. Su questo argomento, la storia della scienza dev'essere la nostra prima guida.

I nostri padri credevano sapere che cosa fosse una frazione, o la continuità, o l'area d'una superficie curva; ma noi ci siamo accorti che non lo sapevano. Così i nostri allievi credono saperlo quando cominciano a studiare seriamente le matematiche. Se, senza altra preparazione io dico loro: „No, non lo sapete; ciò che credete capire, non lo capite; bisogna ch'io vi dimostri ciò che vi sembra evidente „; e se nella dimostrazione mi appoggio su premesse che sembrano loro meno evidenti della conclusione, che penseranno questi infelici? Penseranno che la scienza matematica non sia che un ammasso arbitrario di sottigliezze inutili; oppure se ne disgusteranno, o ci si divertiranno come ad un giuoco, ed arriveranno ad una condizione di spirito simile a quello dei sofisti greci.

Più tardi, invece, quando l'intelligenza dell'allievo, familiarizzata col ragionamento matematico, sarà maturata da questa lunga frequenza, i dubbi nasceranno spontaneamente e la vostra dimostrazione sarà allora la benvenuta. Susciterà ancora dubbi nuovi, e le questioni si presenteranno successivamente al giovanetto, come si presentavano successivamente ai nostri padri, fino a quando il rigore perfetto potrà solo soddisfarlo. Non basta dubitare di tutto, bisogna sapere perchè si dubita.

8. Scopo principale dell'insegnamento matematico è lo sviluppo di certe facoltà dell'intelligenza, fra le quali, l'intuizione non è la meno preziosa. Per mezzo di quest'ultima il mondo matematico rimane a contatto con quello reale, e quand'anche le matematiche pure potessero farne a meno, bisognerebbe pur sempre ricorrervi per colmare l'abisso che separa il simbolo dalla realtà. Al pratico occorrerà sempre, e per ogni geometra puro vi devono essere cento pratici.

L'ingegnere deve ricevere una completa educazione matematica, ma a che cosa deve servirgli? a vedere i varî aspetti delle cose ed a vederli presto; egli non ha tempo di cercare il pel nell'uovo. Bisogna che negli aspetti fisici complessi che gli si presentano, riconosca subito i punti ne' quali potrà servirsi degli istrumenti matematici che gli abbiamo dato. Come potrà farlo, se lasceremo tra gli uni e gli altri quel profondo abisso scavato dai logici?

9. Accanto ai futuri ingegneri, altri allievi, meno numerosi, debbono alla loro volta divenire maestri; debbono quindi andare fino al fondo; una cognizione profonda e rigorosa dei principî fondamentali è per loro indispensabile prima di ogni altra. Questa non è però una ragione per non coltivare in essi l'intuizione; poichè si formerebbero una falsa idea della scienza, se non l'osservassero mai che da un lato, e non potrebbero d'altronde sviluppare nei loro scolari una qualità che non possiedono essi stessi.

Anche al geometra puro, questa facoltà è necessaria, poichè colla logica si dimostra, e coll'intuizione si inventa. È bene saper criticare, ma è meglio saper creare. Voi sapete distinguere se una combinazione è corretta; ma ciò non giova a nulla se non possedete l'arte di scegliere fra tutte le combinazioni possibili. La logica ci insegna che su tale o tal'altra strada siamo sicuri di non trovare ostacoli; non però quale è quella che ci conduce allo scopo. Bisogna per ciò vedere lo scopo da lontano, e la facoltà che ci insegna a vedere è l'intuizione. Senza questa il geometra sarebbe simile ad uno scrittore forte in grammatica, ma senza idee. Ora, come si svilupperebbe questa qualità, se appena si mostra si scaccia e proscrive, se si impara a non fidarsene prima di sapere ciò che ha di buono?

E qui, permettetemi di aprire una parentesi per insistere sull'importanza dei compiti scritti. I componimenti scritti non hanno forse assai importanza in certi esami, alla Scuola Politecnica, per esempio. Mi si dice che vieterebbero l'ingresso a buonissimi scolari che sanno benissimo il loro corso, lo capiscono perfettamente, ma sono incapaci di farne la minima applicazione. Ho detto or ora che la parola comprendere ha vari sensi: questi non capiscono che nella prima maniera, ed abbiamo veduto come questo non basti a formare nè un ingegnere, nè un geometra. Ebbene, poichè bisogna fare una scelta, preferisco scegliere coloro che capiscono tutto.

10. Ma l'arte di ragionar giusto non è essa pure una qualità preziosa, che il professore di matematiche deve coltivare prima di tutto? Mi guardo bene dal dimenticarlo; bisogna preoccuparsene e fino dal principio. Sarei desolato vedendo degenerare la geometria in non so quale tachimetria di bassa lega, e non sottoscrivo affatto le dottrine estreme di certi *Oberlehrer* tedeschi. Ma si hanno abbastanza occasioni di esercitare gli allievi al ragionamento corretto nelle parti delle matematiche, in cui gl'inconvenienti che ho segnalati non si presentano. Si hanno lunghe concatenazioni di teoremi in cui la logica assoluta ha regnato fino dal principio e, dirò così, naturalmente; in cui i primi geometri ci hanno dato modelli che bisognerà sempre imitare ed ammirare.

Nell'esposizione dei primi principî bisogna evitare troppa sottigliezza, che ivi sarebbe più scoraggiante e del resto inutile. È impossibile dimostrar tutto e definir tutto: ἀνάγχη σθῆναι ha detto Aristotile, e bisognerà sempre prendere in prestito dall'intuizione; non importa farlo un po' prima od un po' dopo, o magari chiederle un po' più o un po' meno, purchè adoperando correttamente le premesse che ci ha fornito, impariamo a ragionare giusto.

II. È possibile soddisfare tante opposte condizioni? È particolarmente possibile quando bisogna dare una definizione? Come trovare un enunciato conciso che soddisfaccia contemporaneamente le regole intransigenti della logica, il nostro desiderio di includere il posto della nuova cognizione nell'insieme della scienza, ed il nostro bisogno di pensare mediante imagini? Generalmente non lo troveremo, ed è perciò che non basta enunciare una definizione; bisogna prepararla e giustificarla.

Che voglio dire con questo? Sapete quel che è stato detto spesso: ogni definizione implica un assioma, poichè afferma l'esistenza di ciò che si definisce. La definizione non sarà quindi giustificata, dal punto di vista puramente logico, che quando sarà stato *dimostrato* che non ne consegue contradizione, nè nei termini, nè colle verità precedentemente ammesse.

Ma non basta; la definizione viene enunciata come una convenzione; ma la massima parte degl'intelletti si ribellerà se vorrete imporgliela come convenzione *arbitraria*. Non avrà pace finchè non avrete risposto a varie domande.

Le definizioni matematiche sono il più spesso, come ha dimostrato il sig. Liard, vere costruzioni edificate in ogni loro parte con nozioni più semplici. Ma perchè avere così riunito questi elementi mentre tante altre combinazioni erano possibili? Per capriccio forse? Altrimenti, perchè questa combinazione avrebbe più diritti all'esistenza di tutte le altre? A qual bisogno rispondeva? Come si è previsto che avrebbe parte importante nello sviluppo della scienza, ed abbrevierebbe i nostri ragionamenti ed i nostri calcoli? Esiste in natura qualche oggetto familiare, che ne sia, direi quasi, l'imagine incerta e grossolana?

Nè basta; se risponderete in modo soddisfacente a tutti questi quesiti, vedremo bene che il neonato aveva diritto al battesimo; ma neanche la scelta del nome è arbitraria; bisogna spiegare da quali analogie si è stati guidati, e che se nomi analoghi sono stati dati a cose differenti, tali cose, almeno, non differiscono che nella materia e si avvicinano nella forma; finalmente che le proprietà loro sono analoghe e per così dire parallele.

A tal prezzo tutte le tendenze potranno essere soddisfatte. Se l'enunciato è assai corretto da poter piacere al logico, la giustificazione contenterà l'intuitivo. Ma c'è da fare ancor meglio: ogni volta che ciò sia possibile, la giustificazione precederà l'enunciato e lo preparerà; si verrà condotti all'enunciato generale dallo studio di alcuni esempi particolari.

Inoltre, ogni parte dell'enunciato di una definizione ha per iscopo di distinguere l'oggetto da definirsi da una classe di altri oggetti vicini. La definizione non sarà compresa, se non quando avrete mostrato, non solo l'oggetto definito, ma quelli vicini da' quali conviene distinguerlo, avrete fatto intendere la differenza ed aggiunto esplicitamente: ecco perchè enunciando la definizione ho detto questo o quest'altro.

Ma è tempo di uscire dalle generalità e di esaminare come i principî un po' astratti testè esposti possano venire applicati in aritmetica, geometria, analisi e meccanica.

(Continua) POINCARÉ.

SUL LUOGO DI UN PUNTO UNIVOCAMENTE COORDINATO ad una coppia di punti mobili

I. Siano $P_1(x_1 y_1)$, $P_2(x_2 y_2)$ due punti appartenenti alle due curve

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= 0 \\ \varphi_2(x, y) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

rispettivamente, fra i quali interceda una relazione espressa mediante un'equazione fra le loro coordinate

$$\psi(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0 . \tag{2}$$

Supponiamo che alla coppia di punti P_1, P_2 sia univocamente coordinato un punto P_3, con che intendiamo che le coordinate x_3, y_3 di P_3 siano in un modo univoco legate alle coordinate di P_1 e P_2 da due equazioni

$$\begin{aligned} \theta_1(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) &= 0 \\ \theta_2(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) &= 0 . \end{aligned} \tag{3}$$

Per trovare il luogo del punto P_3 quando P_1 e P_2 si muovono sulle curve (1) soddisfacendo alla relazione (2), basta eliminare x_1, y_1, x_2, y_2, fra le cinque equazioni

$$\begin{gathered} \varphi_1(x_1, y_1) = 0 \qquad \varphi_2(x_2, y_2) = 0 \\ \psi = 0 \qquad \theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = 0 . \end{gathered} \tag{4}$$

È a notarsi che se $\varphi_1, \varphi_2, \psi, \theta_1, \theta_2$ sono razionali intere, la curva luogo del punto P_3 è algebrica e di un ordine non maggiore al prodotto dei gradi delle funzioni stesse.

Volendosi che entrambi i punti P_1 e P_2 si muovano sulla stessa curva

$$\varphi(x, y) = 0$$

è ovvio che basta sostituire nel sistema (4) alle prime due equazioni le altre due

$$\varphi(x_1, y_1) = 0 \qquad \varphi(x_2, y_2) = 0\,.$$

Nei paragrafi successivi troveremo il luogo di P_3 prendendo determinate curve per le (1) e speciali relazioni per le (2) e le (3).

2. Supponiamo che P_3 formi con P_1 e P_2 un triangolo simile ad un triangolo dato T: in questo caso le (3) sono lineari, come subito si vede. Si osservi intanto che se α è l'angolo che la retta cui appartengono P_1 e P_2 fa colla direzione positiva dell'asse x, l'angolo che colla stessa direzione fa la retta per P_1 e P_3 differirà da α di un angolo β, perfettamente noto, noti essendo gli angoli di T.

Indicando con l la lunghezza del segmento P_1P_2, con ρ il rapporto del segmento P_1P_3 a P_1P_2, si ha allora

$$x_3 = x_1 + \rho\, l \cos(\alpha + \beta) = x_1 + \rho\,(x_2 - x_1)\cos\beta - \rho\,(y_2 - y_1)\,\text{sen}\,\beta$$

ed in modo analogo si trova

$$y_3 = y_1 + \rho\,(x_2 - x_1)\,\text{sen}\,\beta + \rho\,(y_2 - y_1)\cos\beta$$

cioè

$$\begin{aligned} x_3 &= m x_1 + n y_1 + p x_2 + q y_2 \\ y_3 &= m' x_1 + n' y_1 + p' x_2 + q' y_2 \end{aligned} \tag{5}$$

con $m, m', p, p', n, n', q, q'$ coefficienti noti.

Se poi P_3 appartiene alla retta per P_1P_2 ed i segmenti P_1P_3 e P_2P_3 hanno il rapporto λ, le relazioni (5) divengono

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{1-\lambda}\,x_1 - \frac{\lambda}{1-\lambda}\,x_2 \\ y_3 &= \frac{1}{1-\lambda}\,y_1 - \frac{\lambda}{1-\lambda}\,y_2 \end{aligned} \tag{5'}$$

3. Supponiamo che P_1 si muova sopra la parabola

$$y^2 = 2px$$

e P_2 sulla tangente al vertice, cioè sull'asse y; sia poi P_3 il punto della retta P_1P_2 tale che sia $\overline{P_3P_1} = \lambda\,.\,\overline{P_3P_2}$, e di più il segmento P_1P_2 abbia la lunghezza costante k, cioè sia

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = k^2. \tag{6}$$

Allora, essendo P_3 legato a P_1, P_2 dalle due relazioni (5'), il luogo di P_3 stesso è la quartica

$$[(\lambda - \lambda^2)^2 x_3^2 + (1-\lambda)^2 y_3^2 + 2(2\lambda^2 - \lambda + 1)\,x_3 - k^2\lambda^2]^2 = 8 x_3 y_3^2.$$

Se P_1, P_2 si muovono sopra le due rette

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

e P_3 è legato a P_1, P_2 dalle relazioni (5), il luogo di P_3 è la curva, la cui equazione

$$\psi\,(L_1x_3 + M_1y_3 + N_1,\quad L_2x_3 + M_2y_3 + N_2,\quad L_3x_3 + M_3y_3 + N_3,\quad L_4x_3 + M_4y_3 + N_4) = 0, \tag{8}$$

si ottiene ponendo nella (2) i valori che per x_1, y_1, x_2, y_2 si ricavano dal far sistema delle (5) e delle

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0 \\ a_2x_2 + b_2y_2 + c_2 = 0 \end{aligned}$$

Giova osservare che se il primo membro della (2) è razionale intero di grado r, la curva (8) è algebrica di ordine r.

Così la (8) rappresenta una retta se per la (2) si prende

$$x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = k \tag{9}$$

cioè se si vuole che la somma delle componenti lungo gli assi x, y del segmento $P_1\,P_2$ sia costante.

Se per la (2) si prende

$$\frac{1}{x_1 - x_2} + \frac{1}{y_1 - y_2} - k = 0 \tag{10}$$

ossia se si vuole che la somma delle inverse delle componenti, lungo gli stessi assi, del segmento P_1P_2 sia costante, la (8) rappresenta una conica e più precisamente una iperbole (1) perchè, posto

$$L_{(i,j)} = L_i - L_j\,,\ \text{ecc.}$$

essa diviene

$$\begin{aligned} kL_{(1,3)}L_{(2,4)}x_3^2 + kM_{(1,3)}M_{(2,4)}y_3^2 + k\,(L_{(1,3)}M_{(2,4)} + L_{(2,4)}M_{(1,3)})\,x_3y_3 + \\ + [(kN_{(2,4)} - 1)\,L_{(1,3)} + (kN_{(1,3)} - 1)\,L_{(2,4)}]\,x_3 + \\ + [(kN_{(2,4)} - 1)\,M_{(1,3)} + (kN_{(1,3)} - 1)\,M_{(2,4)}]\,y_3 + kN_{(1,3)}N_{(2,4)} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Se per la (2) si prende la (6), la (8) diviene

$$\begin{aligned} (L^2_{(1,3)} + L^2_{(2,4)})\,x_3^2 + (M^2_{(1,3)} + M^2_{(2,4)})\,y_3^2 + 2x_3y_3\,(L_{(1,3)}M_{(1,3)} + L_{(2,4)}M_{(2,4)} + \\ + 2\,(N_{(1,3)}L_{(1,3)} + N_{(2,4)}L_{(2,4)})\,x_3 + 2\,(M_{(1,3)}N_{(1,3)} + M_{(2,4)}N_{(2,4)})\,y_3 - k^2 = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

equazione di un'ellisse.

Una quartica rappresenta la (8) se la retta per P_1 e P_2 deve essere tangente ad una data conica

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{13}$$

(1) In questi due ultimi risultati sta la dimostrazione della quistione 689 proposta in questo Giornale dal sig. Barisien. È ovvio che si può sostituire, nella quistione citata, ai poligoni regolari dei poligoni simili ad uno dato.

perchè, in tal caso, la (12) diviene

$$A_{33}(x_1y_2-x_2y_1)^2+A_{22}(x_1-x_2)^2+A_{11}(y_1-y_2)^2+2A_{23}(x_1y_2-x_2y_1)(x_2-x_1)+$$
$$+2A_{13}(x_1y_2-x_2y_1)(y_1-y_2)+2A_{12}(x_2-x_1)(y_1-y_2)=0, \qquad (14)$$

dove A_{rs} indica il complemento algebrico di $a_{r,s}$ nel determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

E poichè la (14) diviene del 3° grado in x_1, y_1, x_2, y_2 se $A_{33}=0$, ne discende che la (8) rappresenta una cubica se la conica (13) è una parabola.

Si supponga, in particolare, che la conica (13) sia l'elisse col centro nell'origine e gli assi coincidenti coi coordinati

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (13')$$

e le rette (7) siano gli assi x e y; allora la (14) si riduce a

$$x_1^2y_2^2-b^2x_1^2-a^2y_2^2=0$$

e la (8) mediante le (5) diviene

$$(x_3q'-y_3q)^2(my_3-m'x_3)^2$$
$$-(mq'-m'q)^2[b^2(x_3q'-y_3q)^2+a^2(my_3-m'x_3)^2]=0 \qquad (15)$$

equazione che si riduce a quella di una kreuzcurva

$$(1-\lambda)^2x_3^2y_3^2-b^2\lambda^2x_3^2-a^2y_3^2=0 \qquad (15')$$

se P_3 appartiene alla retta per P_1P_2 e valgono le (5').

Se la conica è l'iperbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (13'')$$

la (8) diviene

$$(x_3q'-y_3q)^2(my_3-m'x_3)^2+$$
$$+(mq'-m'q)[b^2(x_3q'-y_3q)^2-a^2(my_3-m'x_3)^2]=0 \qquad (16)$$

la quale si riduce all'equazione di una kohlenspitzencurva

$$(1-\lambda)^2x_3^2y_3^2+b^2\lambda^2x_3^2-a^2y_3^2=0$$

se P_3 appartiene alla retta per P_1P_2.

Se la conica è l'iperbole equilatera

$$xy=k \qquad (13''')$$

la (8) diviene

$$(x_3q'-y_3q)(my_3-m'x_3)[(x_3q'-y_3q)(my_3-m'x_3)-4k(mq'-m'q)^2]=0$$

che ci rappresenta la coppia di rette

$$x_3q'-y_3q=0 \qquad my_3-m'x_3=0$$

e l'iperbole

$$(x_3 q' - y_3 q)(m y_3 - m' x_3) - 4k (m q' - m' q)^2 = 0$$

che ha quelle rette per assintoti e che si riduce ad equilatera se la retta per $P_1 P_2$ contiene P_3.

Infine se la conica (13) è la parabola

$$y^2 = 2\alpha x \qquad (13^{IV})$$

la (8) ci rappresenta insieme alla retta

$$x_3 q' - q y_3 = 0$$

la parabola

$$(m y_3 - m' x_3)^2 = \tfrac{1}{2}\alpha (m q' - m' q)(x_3 q' - q y_3)$$

la quale ha lo stesso vertice e lo stesso asse della (13^{IV}) se P_3 giace sulla retta per P_1, P_2. (1)

4. Il punto P_3 sia il punto d'incontro della retta per P_1 di coefficiente angolare m_1 e della retta per P_2 di coefficiente angolare m_2; in questo caso le coordinate di P_3 sono legate a quelle di P_1 e P_2 dalle relazioni.

$$\begin{aligned} x_3 (m_2 - m_1) - y_2 + y_1 - m_1 x_1 + m_2 x_2 &= 0 \\ y_3 (m_1 - m_2) - m_1 m_2 (x_1 - x_2) + m_1 y_1 - m_2 y_2 &= 0. \end{aligned} \qquad (17)$$

Se, in particolare, si suppone che la retta per P_1 sia parallela all'asse y e quella per P_2 parallela all'asse x, si ha allora

$$\begin{aligned} x_3 &= x_1 \\ y_3 &= y_2. \end{aligned} \qquad (17')$$

Se poi P_1 e P_2 si muovono nel cerchio

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (18)$$

mantenendo fra loro un'eguale distanza k, il luogo di P_3 è la quartica bicircolare.

$$[r^2 (x_3^2 + y_3^2) - (2r^2 - k^2)^2]^2 + 4 (2r^2 - k^2)^2 x_3^2 y_3^2 = 0.$$

Se P_1 e P_2 appartengono al cerchio (18) e sono allineati con un punto di coordinate α, β, il luogo di P_3 è la quartica

$$\begin{aligned} &(r^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 (r^2 - x_3^2 - y_3^2)^2 = \\ &\quad = 4 (x_3 + \alpha)(y_3 + \beta)[r^2 (\alpha\beta + \alpha x_3 + \beta y_3) + x_3 y_3 (\alpha^2 + \beta^2)] = 0 \end{aligned}$$

la quale si riduce manifestamente al cerchio stesso se il punto (α, β) coincide coll'origine.

Se poi P_1, P_2 appartengono alla parabola

$$y^2 = 2px$$

e sono allineati col fuoco, P_3 si muove sulla curva del 5° ordine.

$$p y_3^2 (2x_3 - p)^2 = 2x_3 (2y_3^4 + p^4 + 2p^2 y_3^2).$$

---

(1) Questi risultati si possono riguardare in certo modo come una generalizzazione dei risultati contenuti nella nota del sig. Cardoso-Laynes: "Sopra una trasformazione delle curve piane". *Periodico di Matematica*, 1903.